

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΕΙΚΤΕΣ ΚΙΝΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΠΙΣΤΟΛΗΠΤΙΚΗΣ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΗΣ

Δωρή Νικολέττα Μαρία

Διατριβή

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Μάρτιος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν. 13^η/15.06.2020 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Μ. Κούτρας (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κ. Πολίτης
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**MASTER PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**MOBILITY INDICES AND COMPARISON OF CREDIT
RATING TRANSITION MATRICES**

Dori Nikoletta Maria

Thesis

submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in partial
fulfilment of the requirements for the degree of Master
of Science in actuarial science and risk management

Piraeus, Greece
March 2022

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειάς μου για την πολύτιμη υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και κυρίως στην αδελφή μου, Κωνσταντίνα.

Τέλος οφείλω ένα βαθύ ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κούτρα Μάρκο, για την συνεργασία του και την καθοδήγηση του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Η μελέτη του πίνακα μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης μιας οικονομικής οντότητας, είτε αυτή είναι μία επιχείρηση, ένα πιστωτικό ίδρυμα ή ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για τη φερεγγυότητα της υπό μελέτη οντότητας. Μεταξύ των πληροφοριών που προκύπτουν από αυτούς είναι οι πιθανότητες αθέτησης για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα.

Επιπλέον, η σύγκριση πινάκων μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης μεταξύ διαφορετικών οντοτήτων καθώς και με συγκεκριμένους πίνακες που αποτυπώνουν την κινητικότητα ενός συστήματος οντοτήτων επιτρέπει στον επόπτη να λάβει αποφάσεις για τη διατήρηση του συστήματος στα επιθυμητά επίπεδα.

Στη παρούσα εργασία θα αναφερθούμε εκτενώς στα πεδία εφαρμογής των πινάκων μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης και θα παρουσιάσουμε και δείκτες κινητικότητας που έχουν ορισθεί για πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης. Τέλος, θα εστιάσουμε σε τεχνικές σύγκρισης διαφορετικών πινάκων μετάβασης καθώς και στις εφαρμογές τους.

Abstract

Studying the credit rating transition matrix of an entity, whether this entity is a business units, a credit institution or a financial product, provides useful information about the solvency of the entity. Amongst the information carried by the credit rating transition matrix of the entity under study, of major importance is its default probability for a specific time horizon. The comparison of credit rating transition matrices between different entities as well as with specific tables that describe the mobility of an economic system allows the supervisor to make decisions in order to keep the economic system at the needed levels.

In the present thesis, we will mention extensively to the scope of application of credit rating transition matrices. We will also present some mobility indices that provide useful information for credit rating transition matrices. Finally, we will focus on techniques that are used for comparing different credit rating transition matrices as well as their applications.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κατάλογος Πινάκων	xii
Κατάλογος Σχημάτων	xiv
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΟΜΟΛΟΓΩΝ.....	1
1.1 Βασικές Έννοιες.....	1
1.2 Μοντελοποίηση της διαδικασίας αξιολόγησης και της τιμολόγησης των ομολόγων.....	3
1.3 Η διαδικασία αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας.....	5
1.4 Η Μαρκοβιανή αλυσίδα	7
1.4.1 Η προσέγγιση της Μαρκοβιανής αλυσίδας.....	8
1.4.2 Γεννήτορας πίνακας	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΟΓΩΝ	15
2.1 Εισαγωγή.....	15
2.2 Πιστωτικά παράγωγα	15
2.3 Πίνακες μετάβασης πιστωτικών παραγώγων μεμονωμένου πιστούχου	16
2.4 Τιμολόγηση κλιμακούμενων ομολόγων.....	25
2.4.1 Κλιμακούμενα Ομόλογα	26
2.4.2 Διαδικασία Τιμολόγησης Κλιμακούμενων ομολόγων.....	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΕΤΡΙΚΩΝ.....	31
3.1 Εισαγωγή.....	31
3.2 Μετρικές απόστασης κατά συντεταγμένες.....	31
3.3 Μετρικές απόστασης με βάση τα ιδιοδιανύσματα	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΔΕΙΚΤΕΣ ΚΙΝΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	35
4.1 Εισαγωγή.....	35
4.2 Κριτήριο του διακριτά κατανεμημένου δείκτη κινητικότητας.....	35
4.3 Δείκτες κινητικότητας με βάση τις ιδιοτιμές	36
4.4 Δείκτης κινητικότητας βασισμένος στον πίνακα κινητικότητας.....	37
4.5 Συγκρίσεις δεικτών κινητικότητας	39
4.5.1. Δείκτες κινητικότητας από τις αποστάσεις L_1 και L_2	39
4.5.2 Επανεξετάζοντας τους δείκτες κινητικότητας που βασίζονται στις ιδιοτιμές.....	40
4.6 Bayesian προσέγγιση και δείκτης Prais – Bibby.....	42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	47
5.1 Εισαγωγή.....	47
5.2 Σύγκριση απλών πινάκων με τη χρήση δεικτών κινητικότητας.....	47
5.3 Σύγκριση πραγματικών πινάκων με τη χρήση δεικτών κινητικότητας.....	50
5.4. Σύγκριση δεικτών κινητικότητας με το πέρασμα του χρόνου	52
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:	63
6.1 Συμπεράσματα.....	63
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	65
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	67

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1. Πίνακας μετάβασης P , Standard & Poor's CreditWeek April 15, 1996	17
Πίνακας 2.2. Ο γεννήτορας πίνακας A του P με αρνητικά στοιχεία εκτός της διαγωνίου.....	18
Πίνακας 2.3. Ο προσεγγιστικός γεννήτορας πίνακας \tilde{A}	19
Πίνακας 2.4. Τα βελτιστοποιημένα διανύσματα α και β σύμφωνα με τους Bluhm και Overbeck (2006).....	25
Πίνακας 5.1. Standard & Poor's CreditWeek, April 15, 1996.....	51
Πίνακας 5.2. Ένας πίνακας μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης με στοιχεία στη διαγώνιο ίδια με αυτά του Πίνακα 5.1.	51
Πίνακας 5.3. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας από τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.1.....	55
Πίνακας 5.4. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας από τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.2.....	55
Πίνακας 5.5. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ μετρικών και διαφορών δεικτών κινητικότητας από τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.3.....	58
Πίνακας 5.6. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ μετρικών και απόλυτων διαφορών δεικτών κινητικότητας.....	59
Πίνακας 5.6. Τυπικές αποκλείσεις των δεδομένων του Σχήματος 5.4.	61

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1. Οι πιστωτικές καμπύλες για τον πίνακα μετάβασης P με τρεις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας	13
Σχήμα 2.1. Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις AAA, AA, A και BBB	20
Σχήμα 2.2. Οι πιθανότητες επιβίωσης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις AAA, AA, A και BBB.....	20
Σχήμα 2.3. Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις BB, B και CCC.....	21
Σχήμα 2.4. Οι πιθανότητες επιβίωσης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις BB, B και CCC.....	22
Σχήμα 5.1. Σύγκριση δεικτών κινητικότητας για τους πίνακες κοορτής.....	54
Σχήμα 5.2. Σύγκριση δεικτών κινητικότητας για τους ομοιογενείς πίνακες	54
Σχήμα 5.3. Σύγκριση μετρικών εκτιμώντας τη διαφορά πινάκων κοορτής και ομοιογενών πινάκων.....	57
Σχήμα 5.4. Σύγκριση μετρικών εκτιμώντας τη διαφορά δεικτών κινητικότητας με πίνακες κοορτής και με ομοιογενείς πίνακες εκφρασμένο ποσοστιαία	60

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΟΜΟΛΟΓΩΝ

1.1 Βασικές έννοιες

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε συνοπτικά τους βασικούς όρους και έννοιες που θα παρουσιαστούν στο πρώτο κεφάλαιο και που ο αναγνώστης οφείλει να γνωρίζει με σκοπό να προχωρήσει στην ανάγνωση και κατανόηση του.

Πιστωτικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος που προκύπτει από το ενδεχόμενο απώλειας μιας νομισματικής αμοιβής. Ο κίνδυνος αυτός είναι οφείλεται στην ανικανότητα ενός δανειστή να αποπληρώσει ένα δάνειο ή να ολοκληρώσει μία συμβατική υποχρέωσή του.

Πιστοληπτική ικανότητα είναι η φερεγγυότητα και η αξιοπιστία ενός ανθρώπου, μιας εταιρίας ή ακόμα και μιας χώρας στην αποπληρωμή των υποχρεώσεων της. Αυτή αποκαλύπτει την πιθανότητα ένας δανειολήπτης να αποπληρώσει τις δανειακές του υποχρεώσεις χωρίς να υπάρχει το ενδεχόμενο πτώχευσης.

Οι Οίκοι αξιολόγησης είναι εταιρείες που σκοπό έχουν να αξιολογήσουν την πιστοληπτική ικανότητα ενός ατόμου, μιας εταιρείας ή μιας χώρας, δηλαδή τη πιθανότητα να ανταποκριθούν στις δανειακές τους υποσχέσεις.

Οι πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης είναι πίνακες που δημοσιεύονται από τους Οίκους αξιολόγησης και δείχνουν την πιθανότητα μετάβασης από μία πιστοληπτική κατηγορία σε μία άλλη, είτε αυτό σημαίνει αναβάθμιση, δηλαδή μετάβαση σε κατηγορία με καλύτερη πιστοληπτική ικανότητα, είτε υποβάθμιση, δηλαδή μετάβαση σε κατηγορία με χειρότερη πιστοληπτική ικανότητα.

Πιστωτικά Παράγωγα είναι συμβόλαια τα οποία δίνουν τη δυνατότητα σε κάποιον να μειώσει ή αν το επιθυμεί να αυξήσει την έκθεσή του στον κίνδυνο που προκύπτει από το ενδεχόμενο απώλειας μιας νομισματικής αμοιβής, δηλαδή τον πιστωτικό κίνδυνο.

Τα εξασφαλισμένα ομόλογα χρέους (CDOs) είναι μια κατηγορία χρεογράφων εγγυημένων δανείων που προκύπτουν από την τιτλοποίηση ομάδας ταυτοσειδών στοιχείων. Είναι ένα είδος πιστωτικών παράγωγων.

Η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου εκφράζει την πιθανότητα η μελλοντική αξία μιας μετοχής να είναι ουδέτερη στον κίνδυνο, δηλαδή οι επενδυτές να είναι πραγματικά

ουδέτεροι στον κίνδυνο. Δεν εκφράζει την πραγματική πιθανότητα ανόδου ή πτώσης της αξίας της μετοχής .

Ο κίνδυνος ανάκτησης είναι το ποσοστό του οφειλής που δεν έχει αποπληρωθεί κατά τη στιγμή της αθέτησης και που ο δανειστής ήταν σε θέση να ανακτήσει από τον οφειλέτη. Αντίθετα το ποσοστό που δεν ήταν δυνατόν να ανακτήσει αποκαλύπτει απώλεια δεδομένης αθέτησης.

Ποσοστό αθέτησης είναι το ποσοστό όλων των εκκρεμών δανείων που ο δανειζόμενος αδυνατεί να αποπληρώσει.

Στη συνέχεια, θεωρούμε το $x(t)$ ως διάνυσμα γραμμής, δηλαδή έναν πίνακα με διαστάσεις $I \times N$ και συνεπώς αποτελούμενος από μία γραμμή με N στοιχεία, που περιέχει τις διακριτές τιμές της συνάρτησης πιθανότητας της πιστοληπτικής διαβάθμισης τη χρονική στιγμή t , για κάθε διακριτό πιστοληπτικό επίπεδο. Με τον όρο διακριτή συνάρτηση πιθανότητας εννοούμε ότι η συνάρτησή μας περιλαμβάνει διακριτές τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή οι μεταβλητές παίρνουν ορισμένες τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών.

Το πλήθος των στοιχείων του διανύσματος x , που θα υποδηλώνεται από εδώ και πέρα με N , αντιστοιχεί στο πλήθος των διαφορετικών πιθανών καταστάσεων, δηλαδή των διαφορετικών πιθανών αξιολογήσεων πιστοληπτικής διαβάθμισης. Για λόγους ευκολίας, συνήθως τα στοιχεία του διανύσματος είναι διατεταγμένα από τον καλύτερο προς το χειρότερο, και συνεπώς το τελευταίο στοιχείο υποδηλώνει την κατάσταση "χρεοκοπίας". Η κατάσταση χρεοκοπίας θεωρείται κατάσταση απορρόφησης καθώς όταν ένα πιστωτικό παράγωγο φτάσει σε αυτή την κατάσταση είναι αδύνατο να φύγει. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσουμε την κλίμακα διαβάθμισης που χρησιμοποιεί ο Οίκος πιστοληπτικής αξιολόγησης Standard and Poors (S&P), όπου οι καταστάσεις ταξινομούνται από τις καλύτερες προς τις χειρότερες με την εξής σειρά: AAA, AA, A, BBB, BB, B και CCC. Έτσι οι συνολικές διαφορετικές καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας μαζί με την κατάσταση χρεοκοπίας είναι $N = 8$.

Οι πίνακες πιστοληπτικής μετάβασης αξιολογούνται συνήθως σε διακριτές χρονικές στιγμές, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή χρονική περίοδο Δt . Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι το διάνυσμα $x(k)$ αντιπροσωπεύει την πιστοληπτική ικανότητα που έχει μια εταιρία ή ένα χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή $k\Delta t$. Με την ίδια λογική το διάνυσμα $x(k+1)$ περιγράφει τη διακριτή συνάρτηση πιθανότητας της πιστοληπτικής ικανότητας της

ίδια εταιρείας ή χαρτοφυλακίου στην αμέσως επόμενη διακριτή χρονική στιγμή, δηλαδή στο $(k+1)\Delta t$. Έχει αποδειχτεί ότι η διακριτή εξέλιξη του διάνυσματος $x(k)$ διέπεται από μία διαδικασία έτσι ώστε $x(k+1) = x(k)P$, όπου το P αντιπροσωπεύει τον πίνακα μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης. Ο συγκεκριμένος πίνακας μετάβασης παρουσιάζει τη μετάβαση από μία συγκεκριμένη κατάσταση πιστοληπτικής διαβάθμισης σε μία άλλη, όπου κάθε γραμμή του πίνακα P αντιπροσωπεύει την πιθανότητα μετάβασης από μια δεδομένη κατάσταση πιστοληπτικής ικανότητας τη χρονική στιγμή $k\Delta t$ σε μια οποιαδήποτε άλλη πιθανή πιστοληπτική διαβάθμιση τη χρονική στιγμή $(k + 1)\Delta t$, δηλαδή το επόμενο έτος.

1.2 Μοντελοποίηση της διαδικασίας αξιολόγησης και της τιμολόγησης των ομολόγων

Μια από τις βασικές χρήσεις των πινάκων μετάβασης είναι ο καθορισμός του πιστωτικού κινδύνου. Οι πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης παίζουν ουσιαστικό ρόλο στη μοντελοποίηση και στη τιμολόγηση πιστωτικών παραγώγων, και πιο συγκεκριμένα στη τιμολόγηση των εξασφαλισμένων ομολόγων χρέους (CDOs). Ο Fons (1994), με τη χρήση ιστορικών ποσοστών αθέτησης, δηλαδή ποσοστών του συνολικού ποσού που ο δανειολήπτης αδυνατεί να αποπληρώσει, καθώς και με τη χρήση του ποσοστού, από το οφειλόμενο ποσό, που ο δανειστής κατάφερε να επαναφέρει στην κατοχή του από τον οφειλετή, κατάφερε να αναπτύξει ένα μοντέλο με σκοπό τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου. Κατάφερε να δείξει ότι η πιστωτική ικανότητα του εκδότη επηρεάζει έμμεσα τον πιστωτικό κίνδυνο ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος. Η διαφορά επιτοκίου (*spread*) μεταξύ της απόδοσης ενός ομολόγου που μέχρι τη λήξη της προθεσμίας του υπάρχει ενδεχόμενο αθέτησης και ενός ομολόγου, ίδιας ληκτότητας, δηλαδή με ίδια προθεσμία λήξης, που δεν υπάρχει πιθανότητα αθέτησης μέχρι τη λήξη της προθεσμίας του, μεγαλώνει όσο αυξάνεται η ωριμότητά τους (*maturity*).

Ο Fons (1994) ήταν εκείνος επίσης που διέκρινε τη σύνδεση που υπάρχει στη διαβάθμιση μιας εταιρίας και των παρατηρούμενων πιστωτικών ανοιγμάτων - διαφορών της αγοράς. Αξίζει να αναφερθεί εδώ ότι, η αξία ενός ομολόγου δεν εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα αθέτησης, αλλά και από τη διαβάθμιση μιας εταιρίας, καθώς μια αλλαγή στη ταξινόμηση μιας εταιρίας μπορεί να επηρεάσει τις τιμές των ομολόγων που έχουν ήδη εκδοθεί.

Οι Jarrow et al. (1997), βασιζόμενοι στο μοντέλο του Fons, εισήγαγαν ένα Μαρκοβιανό μοντέλο, με σκοπό την εκτίμηση των αναμενόμενων αλλαγών στις αξίες των ομολόγων και των δανείων, δηλαδή τον πιστωτικό τους κίνδυνο. Για την εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου χρησιμοποιούνται τόσο οι ιστορικοί πίνακες αθέτησης όσο και οι πίνακες μετάβασης. Το μοντέλο των Jarrow et al. θεωρείται ακόμη και έως σήμερα ένα από τα σημαντικότερα μοντέλα για την τιμολόγηση ομολόγων και πιστωτικών παραγώγων.

Την τελευταία δεκαετία τα μοντέλα πιστοληπτικής διαβάθμισης έχουν γίνει πολύ δημοφιλή. Ο στόχος αυτών των συστημάτων διαβάθμισης είναι η ταξινόμηση των πιστούχων με βάση την πιθανότητα αθέτησης, δηλαδή την πιστοληπτική ποιότητα του πιστούχου πριν τον συνυπολογισμό κάθε είδους εξασφάλισης ή εγγύησης. Με τον όρο πιθανότητα αθέτησης αναφερόμαστε στην πιθανότητα ο δανειζόμενος να αθετήσει την υποχρέωσή του σε ότι αφορά την οφειλή προς το πιστωτικό ίδρυμα. Ως καθοριστικό παράγοντα για τον προσδιορισμό της πιθανότητας αθέτησης, μη αποπληρωμής δανείου ή ομολόγου, τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούν την διαβάθμιση της εταιρίας. Αξίζει να αναφερθεί ότι παλιότερα για τον προσδιορισμό της πιθανότητας αθέτησης ενός δανείου ή ομολόγου σημαντικό ρόλο είχε η αξία της επιχείρησης.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί εδώ πως το εποπτικό πλαίσιο της «Βασιλείας II» (*Basel Capital Accord*) επιτρέπει την ενίσχυση και εποπτεία των διεθνών τραπεζικών απαιτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται προσοχή στη μέθοδο της εποπτικής εξέτασης. Ακόμη, στοχεύει στην επαρκή κάλυψη των χρηματοοικονομικών και μη κινδύνων, καθώς και στη σύγκλιση του ύψους των εποπτικών ιδίων κεφαλαίων (*regulatory capital*) προς το οικονομικό κεφάλαιο των τραπεζών.

Τα εποπτικά ίδια κεφάλαια είναι τα κεφάλαια εκείνα τα οποία οι τράπεζες πρέπει να έχουν έτσι ώστε να αποπληρώσουν τις κεφαλαιακές τους απαιτήσεις που πηγάζουν από τον κίνδυνο αγοράς και τον πιστωτικό κίνδυνο.

Με σκοπό τον καλύτερο δυνατό προσδιορισμό του δανειακού χαρτοφυλακίου και λαμβάνοντας υπόψιν τις διαφορετικές υποβόσκουσες πηγές κινδύνου, αναπτύσσονται διάφορα εξειδικευμένα μοντέλα πιστωτικού κινδύνου.

Συνεπώς, τόσο οι πιθανότητες μετάβασης από μία κατηγορία πιστοληπτικής διαβάθμισης σε μία άλλη όσο και οι πιθανότητες αθέτησης για συγκεκριμένες κατηγορίες διαβάθμισης είναι σημαντικές και απαραίτητες για μοντέλα διαχείρισης κινδύνου και τιμολόγησης. Ακόμα, στη περίπτωση συστηματικών αλλαγών στους πίνακες μετάβασης

πιστοληπτικής διαβάθμισης έχουμε σημαντικές επιδράσεις στην Αξία σε Κίνδυνο (VaR) ενός χαρτοφυλακίου αλλά και στην αξία των πιστωτικών παραγόντων, όπως οι Εγγυημένες δανειακές υποχρεώσεις (CDOs).

Γίνεται συνεπώς αντιληπτό ότι οι πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης έχουν μεγάλο ενδιαφέρον για τον πιστωτικό κίνδυνο. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό του κεφαλαίου ή διαφόρων οικονομικών δεικτών, όπως είναι η αξία σε κίνδυνο (VaR) ενός χαρτοφυλακίου καθώς επίσης, και στην τιμολόγηση πιο εξεζητημένων και περίπλοκων προϊόντων.

1.3 Η διαδικασία αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στη διαδικασία αξιολόγησης της πιστοληπτικής ικανότητας χρηματοοικονομικών προϊόντων από τους Οίκους πιστοληπτικής αξιολόγησης. Πιο συγκεκριμένα, θα αναλυθεί η διαδικασία που ακολουθείται από τους Οίκους αξιολόγησης για να ολοκληρωθεί μια ταξινόμηση.

Οι περισσότερες επιχειρήσεις πριν την πώληση ενός εκδιδόμενου δανείου, καταφεύγουν στους Οίκους πιστοληπτικής αξιολόγησης για να ζητήσουν μία αξιολόγηση. Πολλοί Οίκοι εκδίδουν αξιολογήσεις είτε ζητηθούν από τον εκδότη είτε όχι. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο Οίκος S&P που εκδίδει αξιολογήσεις για όλα τα δημόσια χρέη είτε έπειτα από απαίτηση του εκδότη είτε χωρίς.

Οι αναλυτές των οίκων αξιολόγησης επικεντρώνονται συνήθως σε μία ή δύο βιομηχανίες το πολύ και αναλύουν όλο το φάσμα των πιστώσεων που περιλαμβάνονται σε αυτές. Αυτό το είδος εξειδίκευσης επιτρέπει τη συγκέντρωση χρήσιμης και ανταγωνιστικής πληροφορίας. Οι αναλυτές πρέπει αρχικά να έχουν στην κατοχή τους πληροφορίες για διάφορα οικονομικά στοιχεία της επιχείρησης, όπου σε αυτές θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται οι ετήσιες οικονομικές καταστάσεις της εταιρίας για την τελευταία πενταετία, οι πρόσφατες ενδιάμεσες οικονομικές καταστάσεις καθώς και μια περιγραφή των λειτουργιών και προϊόντων της επιχείρησης. Καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας υπάρχει πλήρης επικοινωνία και συνεργασία των αναλυτών και της επιχείρησης και η συνάντηση της διοίκησης της εταιρίας με τους αναλυτές θεωρείται από τους Οίκους αξιολόγησης ως ένα ουσιώδες κομμάτι της διαδικασίας ταξινόμησης. Μπορούν να προγραμματιστούν μέχρι και ξεναγήσεις στις εγκαταστάσεις της επιχείρησης,

αν θεωρηθεί απαραίτητο, με σκοπό οι αναλυτές αξιολόγησης να αποκτήσουν μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της εταιρίας.

Στόχος των οίκων αξιολόγησης είναι να πραγματοποιήσουν έναν πλήρη και ενδεδειγμένο έλεγχο στα οικονομικά και λειτουργικά σχέδια της επιχείρησης, τις πολιτικές διαχείρισης καθώς και όλους τους πιστωτικούς παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν με οποιονδήποτε τρόπο την αξιολόγηση φερεγγυότητας της επιχείρησης.

Ύστερα από ένα σύντομο χρονικό διάστημα, ο αναλυτής συγκαλεί μια επιτροπή αξιολόγησης παρουσιάζοντας σημαντικά χαρακτηριστικά της εταιρίας, όπως τη φύση της, το επιχειρηματικό και λειτουργικό περιβάλλον της, μία αξιολόγηση για τη στρατηγική και οικονομική διαχείρισή της, καθώς και μία οικονομική ανάλυση της εταιρίας. Τέλος, ο αναλυτής πρέπει να κρίνει την πιστοληπτική ικανότητα της εταιρίας, να είναι δηλαδή ικανός να παρέχει μία πρώτη αξιολόγηση.

Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία αξιολόγησης της επιχείρησης από τους Οίκους αξιολόγησης και έχουν καταλήξει σε κάποια απόφαση για τη διαβάθμισή της, έρχονται σε επαφή με την επιχείρηση και την ενημερώνουν για την ταξινόμησή της και βασικές παρατηρήσεις και σκέψεις που έκαναν. Ο εκδότης τις περισσότερες φορές έχει το δικαίωμα να απαντήσει στα ευρήματα της διαβάθμισης των Οίκων πιστοληπτικής αξιολόγησης πριν τη δημοσίευσή τους, με καινούργιες ή επιπλέον πληροφορίες που μπορεί να την επηρεάζουν. Επίσης οποιαδήποτε ένσταση έχει μια επιχείρηση για την ταξινόμησή της πρέπει να γίνει το πολύ σε χρονικό διάστημα δύο ημερών. Η επιτροπή βαθμονόμησης συνεδριάζει ξανά για να επανεξετάσει τις νέες πληροφορίες και όταν καταλήξει σε ένα αποτέλεσμα το κάνει δημόσια διαθέσιμο – ή το δίνει στην εταιρία για δημοσιοποίηση σε περίπτωση εταιρικών αξιολογήσεων.

Για μία εταιρία μπορεί να αποφασίσει να συνεχιστεί η παρακολούθησή της από τους Οίκους αξιολόγησης αν το επιθυμεί. Συνήθως προγραμματίζονται ετήσιες συναντήσεις από τους Οίκους Πιστοληπτικής αξιολόγησης για να συζητηθούν οι προοπτικές της επιχείρησης, η επιχειρηματική στρατηγική και οι οικονομικές και πολιτικές προβλέψεις, ενώ διεξάγεται μία ενημερωτική συνάντηση όταν πραγματοποιείται μια σημαντική συναλλαγή χρηματοδότησης, όπως είναι οι εξαγορές.

«Credit-Watch list» είναι ένας κατάλογος που χρησιμοποιείται από τους οργανισμούς αξιολόγησης για να σηματοδοτήσει ότι μπορεί να υποβαθμίσουν την πιστοληπτική ικανότητα μιας εταιρείας λόγω του φθίνοντος επιχειρηματικού περιβάλλοντος της. Αυτό

το περιβάλλον χαρακτηρίζεται από μείωση πωλήσεων, πίεση στα κέρδη ή και ακραίο ανταγωνισμό. Ακριβώς επειδή μια εταιρεία τοποθετείται στη παραπάνω λίστα παρακολούθησης από την Standard & Poor's, την Υπηρεσία Επενδυτών της Moody ή την Fitch Ratings, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η εταιρεία θα υποβαθμιστεί τελικά.

Είναι εμφανές ότι, μερικές φορές, αλλαγές στις συνθήκες απαιτούν αναθεώρηση της αξιολόγησης του χρέους που βρίσκεται σε εκκρεμότητα. Ύστερα από μια προκαταρκτική ανάλυση, η οποία μπορεί να οδηγήσει στο λεγόμενο «Credit-Watch listing» της εταιρίας ή σε τυχόν εκκρεμή ζητήματα που μπορεί να υπάρχουν, πραγματοποιείται μια παρουσίαση στην επιτροπή αξιολόγησης για να παρθεί μια απόφαση. Αφού πρώτα ενημερωθεί εκ νέου η εταιρία, ο οργανισμός δημοσιεύει την αξιολόγησή του.

Υπάρχουν κάποιες αξιολογήσεις που έχουν τον δείκτη *ri*. Αυτές οι αξιολογήσεις προκύπτουν συνήθως ύστερα από ανάλυση των δημοσιευμένων οικονομικών πληροφοριών του εκδότη και για αυτόν τον λόγο ο δείκτης «*ri*» προκύπτει από τα αρχικά των λέξεων «Public Information». Συνεπώς οι αξιολογήσεις με *ri*-δείκτη περιέχουν λιγότερο αναλυτικές πληροφορίες σε σχέση με τις αξιολογήσεις χωρίς *ri*- δείκτη. Οι αξιολογήσεις με *ri*-δείκτη επανεξετάζονται ετησίως με βάση τις οικονομικές καταστάσεις του νέου έτους, αλλά ενδέχεται να επανελεγχθούν μέσα στο χρόνο εάν συμβεί ένα σημαντικό γεγονός που μπορεί να επηρεάσει την πιστοληπτική ικανότητα του εκδότη.

1.4 Η Μαρκοβιανή αλυσίδα

Σε αυτή την ενότητα θα επικεντρωθούμε στην προσέγγιση της Μαρκοβιανής αλυσίδας και στον γεννήτορα πίνακα, ώστε να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τα επόμενα κεφάλαια. Είναι σημαντικό να δούμε τη μέθοδο της Μαρκοβιανής αλυσίδας καθώς χρησιμοποιείται για την διαδικασία αξιολόγησης.

1.4.1 Η προσέγγιση της Μαρκοβιανής αλυσίδας

Από τους πρώτους που μελέτησαν και μοντελοποίησαν τις πιθανότητες αθέτησης και μετάβασης από μία πιστοληπτική κατάσταση σε μία άλλη χρησιμοποιώντας τη Μαρκοβιανή αλυσίδα για ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων $S = \{1, \dots, K\}$ ήταν οι Jarrow et al. Μία στοχαστική διαδικασία $X = \{X(t): t \in T\}$ είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, με το t να συμβολίζει συνήθως τον χρόνο. Αν T είναι ένα μη-πεπερασμένο σύνολο τιμών τότε η X λέμε ότι είναι μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία. Ενώ

αντίθετα αν T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών τότε η X λέμε ότι είναι μια διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία.

Μαρκοβιανή διαδικασία λέγεται κάθε στοχαστική διαδικασία $\{X(t) : t \in T\}$ όπου δεδομένης της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$, οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(u) : u > t\}$ θεωρούνται στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τυχαίες μεταβλητές $\{X(s) : s < t\}$. Δηλαδή όταν είναι γνωστή η παρούσα κατάσταση της διαδικασίας, η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής εξέλιξής της δεν μεταβάλλεται από επιπλέον πληροφορία σχετικά με την παρελθοντική της ιστορία. Παρακάτω θα επικεντρωθούμε στις Μαρκοβιανές διαδικασίες που έχουν διακριτό χώρο καταστάσεων S , δηλαδή χώρο καταστάσεων πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, και οι οποίες ονομάζονται Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα θεωρείται χρονικά ομοιογενής αν και μόνο αν οι πιθανότητες μετάβασης δεν εξαρτώνται από τον χρόνο t , δηλαδή για κάθε t ισχύει:

$$p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i),$$

όπου $t \geq 0$ και $i, j \in S$.

Θεωρούμε ότι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι χρονικά ομοιογενείς εκτός και αν αναφέρεται ότι δεν είναι.

Ορισμός (Μαρκοβιανή Ιδιότητα): Μία ακολουθία τ.μ. $\{X(t) : t \geq 0\}$ με διακριτό χώρο καταστάσεων S , λέγεται Μαρκοβιανή αλυσίδα αν και μόνο αν ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα:

$$P(X(s+t) = j | X(u), 0 \leq u \leq s) = P(X(s+t) = j | X(s)),$$

όπου $s, t \geq 0$ και $j \in S$.

Η δεσμευμένη πιθανότητα $p_{ij}(u) = P(X(t+u) = j | X(t) = i)$ αναφέρεται ως η πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας, από την κατηγορία i τη στιγμή t , στη κατηγορία j τη στιγμή $t+u$.

Οι πιθανότητες μετάβασης έχουν τη μορφή ενός πίνακα ($K \times K$)

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{K-1,1} & p_{K-1,2} & \dots & p_{K-1,K} \\ p_{K,1} & p_{K,2} & \dots & p_{K,K} \end{pmatrix},$$

ο οποίος λέγεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.

Το σύνολο καταστάσεων S αντιπροσωπεύει τις διαφορετικές κατηγορίες αξιολόγησης, όπου η κατάσταση I υποδηλώνει την πιστοληπτική ικανότητα με την καλύτερη

βαθμολογία, ενώ η κατάσταση K αντιπροσωπεύει την περίπτωση αθέτησης. Ως εκ τούτου, ένας διακριτός πίνακας μετάβασης μιας περιόδου με διαστάσεις $(K \times K)$ έχει ως εξής:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{K-1,1} & p_{K-1,2} & \dots & p_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

όπου $p_{ij} \geq 0$, για όλα τα i, j με $i \neq j$ και $p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i}^K p_{ij}$ για όλα τα i . Η μεταβλητή p_{ij} αντιπροσωπεύει την πιθανότητα διαβάθμισης από την πιστοληπτική κατηγορία i στην κατηγορία j για ένα βήμα την φορά.

Οι πιστοληπτικές μεταβάσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη χρήση μιας χρονικά-συνεχούς Μαρκοβιανής αλυσίδας. Παρακάτω, θα κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στους γεννήτορες πίνακες.

1.4.2 Γεννήτορας πίνακας

Μία χρονικά ομοιογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου χαρακτηρίζεται από τον παρακάτω $K \times K$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \dots & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

όπου $\lambda_{ij} \geq 0$, για όλα τα i, j και $\lambda_{ii} = - \sum_{j \neq i}^K \lambda_{ij}$ για όλα τα $i=1, \dots, K$. Τα στοιχεία που βρίσκονται εκτός της διαγωνίου αντιπροσωπεύουν το ρυθμό μετάβασης που δημιουργείται από τη μετάβαση από την αρχική πιστοληπτική κατάσταση i στην κατάσταση j . Η κατάσταση K θεωρείται η πιστοληπτική κατάσταση χρεοκοπίας.

Ορισμός: Έστω $A = (\lambda_{ij})$ με $1 \leq i, j \leq K$ ένας χρονικά ομοιογενής πίνακας, με λ_{ij} να είναι ο ρυθμός μετάβασης από την πιστοληπτική διαβάθμιση i στην j . Λέμε ότι ο πίνακας A ονομάζεται γεννήτορας πίνακας αν ισχύουν τα παρακάτω:

- $\sum_{j=1}^K \lambda_{ij} = 0$, όπου για κάθε $i = 1, \dots, K$
- $0 \leq -\lambda_{ii} \leq \infty$, όπου $i = 1, \dots, K$
- $0 \leq \lambda_{ij}$, όπου $i = 1, \dots, K$ και $j = 1, \dots, K$ με $i \neq j$

Η βασική χρήση των γεννητόρων πινάκων στον πιστωτικό κίνδυνο είναι η κατασκευή πιστωτικών καμπυλών καθώς μπορούν να παρέχουν πληροφορίες για τους αθροιστικούς ρυθμούς αθέτησης (*cumulative default rates*). Αν θεωρήσουμε ότι ο Λ είναι ένας γεννήτορας πίνακας, τότε με τον παρακάτω τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης για την πιστοληπτική κλάση i .

$$p_i(t) = \exp(t\Lambda)x_i(t), \quad (1.3)$$

όπου $x_i(t)$ δηλώνει τη γραμμή του αντίστοιχου πίνακα μετάβασης στη δεδομένη πιστοληπτική κατάσταση R . Τα Παραρτήματα Α, Β, Γ και Δ που υλοποιήθηκαν για την κατασκευή πιστωτικών καμπυλών γίνεται χρήση του συγκεκριμένου τύπου.

Οι Jarrow et al. (1997) καταφέρνουν πολλαπλασιάζοντας τον γεννήτορα πίνακα με έναν πίνακα που περιέχει ασφάλιστρα κινδύνου (CDS), συμβόλαια στα οποία ο αγοραστής αποζημιώνεται στη περίπτωση που πραγματοποιηθεί ένα πιστωτικό γεγονός με την προϋπόθεση πρώτα ότι ο αγοραστής έχει εκ των προτέρων ολοκληρώσει μία σειρά πληρωμών, να τον μετατρέψουν σε έναν γεννήτορα πίνακα ουδέτερου κινδύνου. Για να μετατρέψουμε τις πραγματικές πιθανότητες σε πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου χρησιμοποιούμε την εξής σχέση:

$$\tilde{\Lambda}(t) = U(t)\Lambda(t), \quad (1.4)$$

όπου $U(t) = \text{diag}(\mu_1(t), \dots, \mu_{K-1}(t), 1)$ ένας $K \times K$ διαγώνιος πίνακας με όλα τα στοιχεία του, $\mu_i(t)$, να έχουν θετικές τιμές για τις $i = 1, \dots, K$ καταστάσεις. Ακόμα οι συναρτήσεις $\mu_i(t)$ είναι ντετερμινιστικές. Ντετερμινιστική συνάρτηση θεωρείται μια συνάρτηση που η μελλοντική κατάσταση της εξαρτάται από δεδομένες αρχικές τιμές του συστήματος, στη περίπτωση μας από το $\mu(0)$. Υποθέτοντας σταθερά ασφάλιστρα κινδύνου $(\mu_1, \dots, \mu_{K-1}, 1)$, ο πίνακας μετάβασης ουδέτερου κινδύνου προκύπτει από τη παρακάτω σχέση:

$$\tilde{Q}(t, T) = e^{U\Lambda(T-t)}, \quad (1.5)$$

όπου προφανώς ο πίνακας μετάβασης ουδέτερου κινδύνου τη χρονική στιγμή t που προσπαθούμε να υπολογίσουμε να συμβολίζεται ως $\tilde{Q}(t, T)$. Ο πίνακας με τα σταθερά ασφάλιστρα U καθώς και ο γεννήτορας πίνακας, Λ είναι γνωστοί.

Όταν γνωρίζουμε τον γεννήτορα πίνακα, είμαστε σε θέση να βρούμε τον $(K \times K)$ πίνακα μετάβασης με t χρονικές περιόδους που προκύπτει με βάση τον τύπο:

$$P(t) = e^{t\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\Lambda)^k}{k} \quad (1.6)$$

Ο γεννήτορας πίνακας εκφράζει τη συμπεριφορά των πιθανοτήτων μετάβασης για την κατάσταση i όταν είναι εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο λ_{ii} . Η πιθανότητα

μετάβασης από την πιστοληπτική κατηγορία i στη πιστοληπτική κατηγορία j υπολογίζεται από τη σχέση $\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$.

Αν από την άλλη γνωρίζουμε έναν μονοετή διακριτό πίνακα μετάβασης, μπορούμε να υπολογίσουμε τον γεννήτορα πίνακα από την παρακάτω έκφραση:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(P-I)^k}{k} \quad (1.7)$$

Αν υποθέσουμε λοιπόν τον εξής πίνακα μετάβασης P :

P	A	B	D
A	0.95	0.04	0.01
B	0.07	0.86	0.07
D	0	0	1

Για να βρούμε τον αντίστοιχο γεννήτορα πίνακα θα εφαρμόσουμε τον τύπο (1.7) και θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \frac{(P-I)^k}{k} \\
 &= \begin{pmatrix} -0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.07 & -0.14 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.07 & -0.14 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.07 & -0.14 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\
 &= \begin{pmatrix} -0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.07 & -0.14 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.0053 & -0.0076 & 0.0023 \\ -0.0133 & -0.0224 & -0.0091 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -0.000797 & 0.001276 & -0.000479 \\ 0.002233 & -0.003668 & 0.001435 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0.0529157 & 0.0442253 & 0.00869033 \\ 0.0773943 & -0.130023 & 0.0750283 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς ο αντίστοιχος γεννήτορας πίνακας θα είναι:

P	A	B	D
A	-0.0529157	0.0442253	0.00869033
B	0.0773943	-0.152423	0.0750283

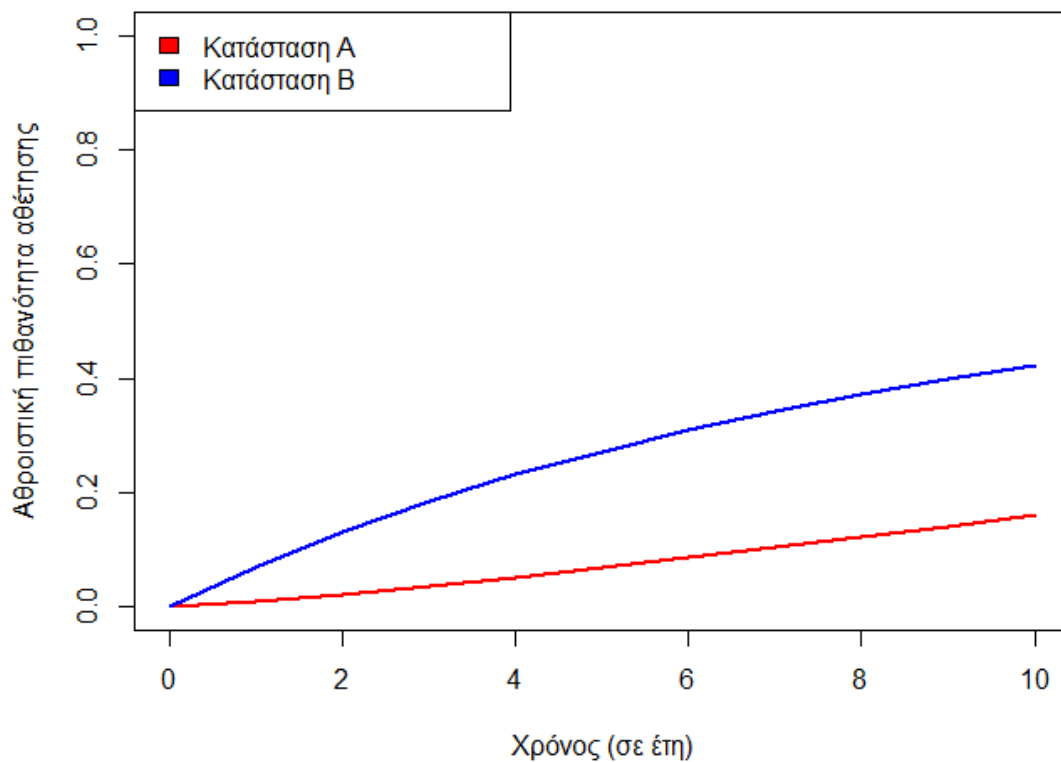
D	0	0	0
---	---	---	---

Για να βρούμε τα παραπάνω αποτελέσματα πιο εύκολα μπορούμε να «τρέξουμε» τον εξής κώδικα στην RStudio:

```
s=0
k=1
while (k<4){
  s=s+((-1)^(k+1))*((matrix.power(m,k))/k)
  k=k+1
  print(s,digits=3)
}
```

όπου m είναι ο πίνακας που προκύπτει από την αφαίρεση του πίνακα P με έναν (3×3) μοναδιαίο πίνακα. Επίσης με την εντολή $matrix.power(m,k)$ υπολογίζουμε τον πίνακα m^k .

Στο παρακάτω Σχήμα 1.1. αναπαρίσταται για το συγκεκριμένο παράδειγμα οι πιστωτικές καμπύλες του πίνακα μετάβασης P που προκύπτουν από τη Σχέση (1.1). Με τον όρο πιστωτική καμπύλη αναφερόμαστε στη γραφική παράσταση των αθροιστικών πιθανοτήτων αθέτησης μιας πιστοληπτικής κατάστασης για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.



Σχήμα 1.1. Οι πιστωτικές καμπύλες για τον πίνακα μετάβασης P με τρεις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας. Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης για την πιστοληπτική κατάσταση A (κόκκινη γραμμή) και B (μπλε γραμμή).

Η παραπάνω γραφική παράσταση σχεδιάστηκε στην RStudio με τη χρήση του παρακάτω κώδικα:

```
m1 <- matrix(c( 0.95, 0.04, 0.01, 0.07, 0.86, 0.07, 0, 0, 1),byrow=TRUE,
nrow=3)

m=m1
xa=c()
xb=c()
xa[1]=m1[1,3]
xb[1]=m1[2,3]
for (i in 2:10){ m=m1%*%m
```

```

    xa[i]=m[1,3]
    xb[i]=m[2,3]}
xa=c(0,xa)
xb=c(0,xb)

plot(0:10, xa, main="", ylab="Αθροιστική πιθανότητα αθέτησης",
xlab="Χρόνος (σε έτη)", type="l",lwd=2, col="red", ylim=c(0,1),
xlim=c(0,10))
lines(0:10, xb, col="blue",lwd=2)
legend("topleft", c("Κατάσταση A","Κατάσταση B"), fill=c("red","blue"))

```

Όπως γίνεται και προφανές από τον κώδικα, οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα μετάβασης με τον εαυτό του. Πιο συγκεκριμένα, τη χρονική στιγμή $t=1$, οι πιθανότητες αθέτησης για κάθε πιστοληπτική κατάσταση προκύπτουν από την τελευταία στήλη του πίνακα μετάβασης. Για τη χρονική στιγμή $t=2$, οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης για κάθε πιστοληπτική κατάσταση προκύπτουν από την τελευταία στήλη του πίνακα που σχηματίζεται από τον πολλαπλασιασμό του πίνακα μετάβασης με τον εαυτό του, δηλαδή όταν ο πίνακας μετάβασης έχει δύναμη 2. Για τη χρονική στιγμή $t=3$, οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης για κάθε πιστοληπτική κατάσταση προκύπτουν από τη τελευταία στήλη του πίνακα μετάβασης όταν αυτός έχει δύναμη 3. Με την ίδια λογική, τη χρονική στιγμή $t=10$, οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης για κάθε πιστοληπτική κατάσταση προκύπτουν από τη τελευταία στήλη του πίνακα μετάβασης με δύναμη 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Οι πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης έχουν ουσιαστικό ρόλο στη μοντελοποίηση και στη τιμολόγηση πιστωτικών παραγώγων, και πιο συγκεκριμένα στην τιμολόγηση των εξασφαλισμένων ομολόγων χρέους (CDOs). Σήμερα, η αγορά για τα πιστωτικά παράγωγα θεωρείται ως μία από τις πιο ταχεία εξελισσόμενες στην οικονομική βιομηχανία. Πολλές μελέτες έχουν επισημάνει τη σημαντικότητα των πινάκων μετάβασης στην μοντελοποίηση των πιστωτικών παραγώγων. Οι Jarrow et al.(1997) κάνουν χρήση των ιστορικών πινάκων μετάβασης αλλά και των παρατηρούμενων διαφορών μεταξύ της ελάχιστης τιμής που ο εκδότης προθυμοποιείται να πουλήσει ένα πιστωτικό παράγωγο και της μέγιστης τιμής που προθυμοποιείται να δώσει ο αγοραστής, έτσι ώστε να καθορίσουν τις αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης και τις πιστωτικές καμπύλες για την τιμολόγηση πιστωτικών παραγώγων. Επιπρόσθετα, ο Bluhm (2003) έδειξε πως μονοετείς ιστορικοί πίνακες μετάβασης μπορούν να καθορίσουν τις αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης. Τα τελευταία χρόνια, έχουν γίνει πολλές έρευνες στο πως η πιστοληπτική μετάβαση μπορεί να επηρεάσει τη διαβάθμιση και τιμολόγηση των πιστωτικών παραγώγων.

2.2 Πιστωτικά παράγωγα

Οι Οίκοι πιστοληπτικής αξιολόγησης είναι σε θέση να βαθμολογήσουν και να αξιολογήσουν την πιστοληπτική διαβάθμιση χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως για παράδειγμα είναι τα πιστωτικά παράγωγα, η αξία των οποίων προέρχεται από κάποιο περιουσιακό στοιχείο που φέρει όμως πιστωτικούς κινδύνους.

Η αγορά των πιστωτικών παραγώγων, αν και είναι σχετικά καινούρια, συγκεντρώνει επενδυτές που έχουν διαφορετικές ανάγκες. Δημιουργήθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1990 και σκοπός της ήταν ο περιορισμός του πιστωτικού κινδύνου. Οι πρώτες συναλλαγές που διευθετήθηκαν λοιπόν είχαν ως βασικό σκοπό την απομόνωση και μεταφορά του πιστωτικού κινδύνου, την αύξηση των αποδόσεων που λαμβάνουν οι επενδυτές από την επένδυση σε παράγωγα με πιστωτικό κίνδυνο, καθώς και την πρόσβαση σε νέες κατηγορίες πιστωτικών περιουσιακών στοιχείων, όπως τραπεζικά δάνεια, τα οποία δεν

ήταν άμεσα διαθέσιμα σε μη τραπεζικούς επενδυτές. Με την πάροδο του χρόνου, η αγορά εξελίχθηκε με αποτέλεσμα να κάνουν την εμφάνιση τους και άλλα είδη συναλλαγών που αν και διευρύνουν το φάσμα του πιστωτικού κινδύνου μπορεί να παρουσιάζουν και νέους τύπους κινδύνου που έμμεσα είναι ικανοί να επηρεάσουν την ενεργό διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου.

Αν και παρατηρείται ταχεία ανάπτυξη στα πιστωτικά παράγωγα, δε πρέπει να υποτιμάται και να αγνοείται ο κίνδυνος που απορρέει από αυτά, από τις συναλλαγές τους. Συνεπώς είναι απαραίτητη η ανάπτυξη μοντέλων για την τιμολόγηση ή την αντιστάθμιση αυτών των προϊόντων.

2.3 Πίνακες μετάβασης πιστωτικών παραγώγων μεμονωμένου πιστούχου

Σε αυτήν την ενότητα θα επικεντρωθούμε στο πως τόσο η ομοιογενής όσο και η μη-ομοιογενής συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορούν να μας βοηθήσουν στον σχεδιασμό πιστωτικών καμπυλών και καμπύλων επιβίωσης. Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι μπορούν να μας δώσουν και τους πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης που για κάποια πιστωτικά παράγωγα, όπως τα παράγωγα μεμονωμένου πιστούχου (*single-named*), είναι απαραίτητοι για την τιμολόγηση τους. Για τα παράγωγα αυτά υπάρχει μόνο μία οντότητα αναφοράς και που συνήθως αυτή η οντότητα είναι ο δανειολήπτης. Με πιο απλά λόγια τα πιστωτικά παράγωγα μεμονωμένου πιστούχου, όπως τα CDS, είναι παράγωγα που βασίζονται στον πιστωτικό κίνδυνο ενός μεμονωμένου δανειολήπτη, όπως μια εταιρεία ή ένας κρατικός φορέας. Γενικά για αυτό τον σκοπό, κύριο μέλημα είναι η εύρεση της προέλευσης ενός καλά σχεδιασμένου τύπου για την πιθανότητα αθέτησης ή μιας καμπύλης με τις αποδόσεις των ομολόγων, καθώς με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να καθορίσουμε τη πιθανότητα αθέτησης του οφειλέτη. Παρακάτω παραθέτουμε πως γίνεται αυτό με τη χρήση των πινάκων μετάβασης.

Σύμφωνα με τους Bluhm and Overbeck (2007), η πιθανότητα αθέτησης εντός του χρονικού διαστήματος $[0, t]$, ορίζεται ως εξής:

$$p_i(t) = P(D_i \leq t), \text{ για } t \geq 0 \quad (2.1)$$

όπου το D_i δηλώνει το ενδεχόμενο αθέτησης από τον οφειλέτη i . Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης μας βοηθάνε στο σχεδιασμό της πιστωτικής καμπύλης για την πιθανότητα αθέτησης που αναφέρθηκε και παραπάνω. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η

πιστωτική καμπύλη ακολουθεί αύξουσα πορεία, δηλαδή αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Αντίστοιχα, η πιθανότητα επιβίωσης ενός οφειλέτη έως το χρόνο t θα είναι:

$$s_i(t) = 1 - p_i(t) = P(D_i > t), \text{ για } t \geq 0 \quad (2.2)$$

Είναι εύκολο λοιπόν να αντιληφθεί κανείς ότι για διαφορετικές κατηγορίες πιστοληπτικής διαβάθμισης οι καμπύλες για την πιθανότητα επιβίωσης θα φαίνονται αρκετά διαφορετικές. Παρακάτω, στα Σχήματα 2.1-2.4, απεικονίζονται τέτοιες πιστωτικές καμπύλες, δηλαδή πιστωτικές καμπύλες που βρίσκονται σε διαφορετικές κατηγορίες πιστοληπτικής διαβάθμισης.

Η δημιουργία αυτών των καμπυλών έγινε με τη χρήση ενός ιστορικού πίνακα μετάβασης, ενώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σε πραγματικές συνθήκες οι πιστωτικές καμπύλες θα μπορούσαν να δημιουργηθούν με βάση τους χρονικά ομοιογενείς πίνακες μετάβασης ουδέτερου κινδύνου. Παραθέτουμε παρακάτω έναν δεδομένο μονοετή πίνακα μετάβασης P για τις οκτώ πιστοληπτικές καταστάσεις AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D και με την υπόθεση ότι το μοντέλο μας είναι ομοιογενές. Ο συγκεκριμένος πίνακας P δημοσιεύτηκε στις 15 Απριλίου του 1996 από τη Standard & Poor's (Standard & Poor's CreditWeek, April 15, 1996).

Αρχική βαθμολογία	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.9081	0.0833	0.0068	0.0006	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0070	0.9065	0.0779	0.0064	0.0006	0.0014	0.0002	0.0000
A	0.0009	0.0227	0.9105	0.0552	0.0074	0.0026	0.0001	0.0006
BBB	0.0002	0.0033	0.0595	0.8693	0.0530	0.0117	0.0012	0.0018
BB	0.0003	0.0014	0.0067	0.0773	0.8053	0.0884	0.0100	0.0106
B	0.0000	0.0011	0.0024	0.0043	0.0648	0.8346	0.0407	0.0520
CCC	0.0022	0.0000	0.0022	0.0130	0.0238	0.1124	0.6486	0.1979
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Πίνακας 2.1. Μονοετής πίνακας μετάβασης P (Standard & Poor's CreditWeek, April 15, 1996)

Δεδομένου ότι ο τύπος για την πιθανότητα αθέτησης εξελίσσεται σε συνεχή χρόνο, οι αντίστοιχες αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης προκύπτουν από τον αντίστοιχο γεννήτορα

πίνακα A . Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πίνακας γεννήτοράς A , δηλαδή ο Πίνακας 2.2., προκύπτει από τον πίνακα μετάβασης P , δηλαδή τον παραπάνω Πίνακα 2.1. Όπως είναι εύκολο να παρατηρηθεί ο γεννήτορας πίνακας A έχει στοιχεία εκτός της διαγωνίου που είναι αρνητικά.

Αρχική βαθμολογία	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,0968	0,0918	0,0035	0,0002	0,0014	-0,0001	0,0000	0,0000
AA	0,0077	-0,0996	0,0857	0,0045	0,0001	0,0014	0,0002	-0,0001
A	0,0009	0,0249	-0,0969	0,0618	0,0066	0,0022	0,0000	0,0005
BBB	0,0002	0,0028	0,0667	-0,1450	0,0629	0,0103	0,0009	0,0012
BB	0,0003	0,0014	0,0045	0,0924	-0,2240	0,1070	0,0107	0,0077
B	-0,0001	0,0012	0,0024	0,0010	0,0786	-0,1888	0,0549	0,0507
CCC	0,0029	-0,0003	0,0020	0,0157	0,0262	0,1513	-0,4377	0,2400
D	-0,0968	0,0918	0,0035	0,0002	0,0014	-0,0001	0,0000	0,0000

Πίνακας 2.2. Ο γεννήτορας πίνακας A του P με αρνητικά στοιχεία εκτός της διαγωνίου

Ο Πίνακας 2.2., δεν έχει κάποια ιδιαίτερη οικονομική σημασία καθώς παρέχει αρνητικά στοιχεία για βραχυπρόθεσμες περιόδους. Ως εκ τούτου, για την εύρεση ενός επαρκή προσεγγιστικού γεννήτορα πίνακα θα χρησιμοποιήσουμε μία από τις μεθόδους που πρότειναν οι Israel et al.(2001). Θα δημιουργήσουμε δηλαδή έναν νέο πίνακα με τον εξής τύπο:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \text{ και } \lambda_{ij} < 0 \\ \lambda_{ij} - \frac{B_i |\lambda_{ij}|}{G_i}, & \text{αν } G_i > 0 \\ \lambda_{ij}, & \text{αν } G_i = 0 \end{cases}, \quad (2.3)$$

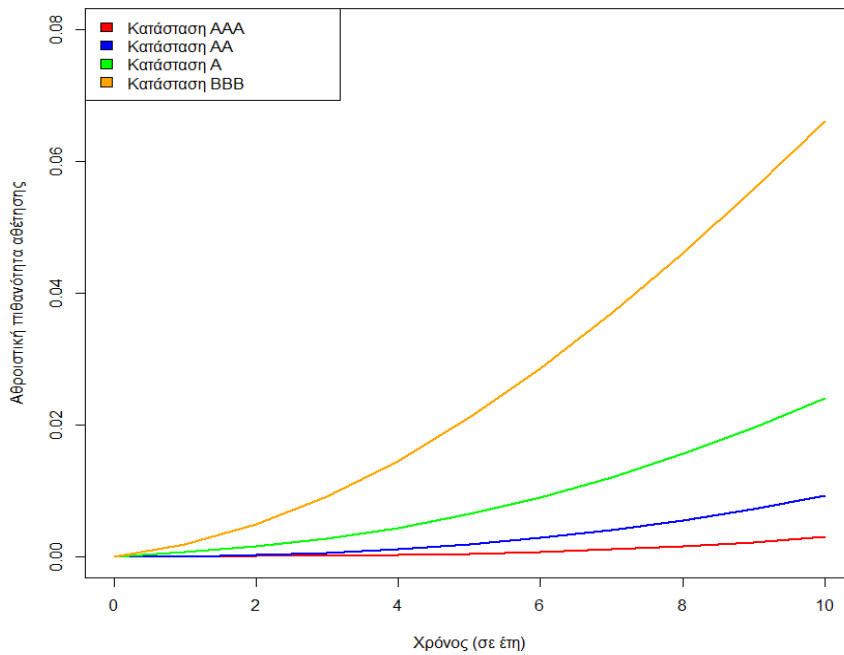
όπου τα G_i και B_i υπολογίζονται με τους εξής τύπους: $G_i = |\lambda_{ii}| + \sum_{i \neq j} \max(\lambda_{ij}, 0)$ και $B_i = \sum_{i \neq j} \max(-\lambda_{ij}, 0)$

Προφανώς ο προσεγγιστικός πίνακας \tilde{P} του πίνακα P και ο αρχικός πίνακας μετάβασης P θα έχουν πολύ μικρές διαφορές. Παρακάτω δίνεται ο προσεγγιστικός γεννήτορας πίνακας \tilde{A} , Πίνακας 2.3., του πίνακα A .

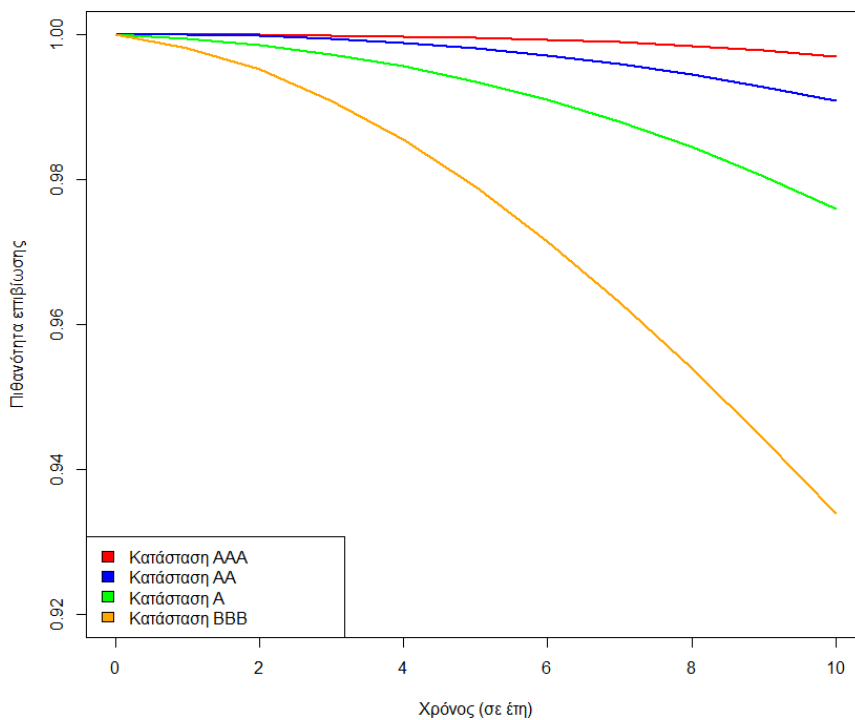
Αρχική βαθμολογία	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,0968	0,0917	0,0035	0,0002	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000
AA	0,0077	-0,0996	0,0856	0,0045	0,0001	0,0014	0,0002	0,0000
A	0,0009	0,0249	-0,0969	0,0618	0,0066	0,0022	0,0000	0,0005
BBB	0,0002	0,0028	0,0667	-0,1450	0,0629	0,0103	0,0009	0,0012
BB	0,0003	0,0014	0,0045	0,0924	-0,2240	0,1070	0,0107	0,0077
B	0,0000	0,0012	0,0024	0,0010	0,0786	-0,1888	0,0549	0,0507
CCC	0,0029	0,0000	0,0020	0,0157	0,0262	0,1513	-0,4375	0,2399
D	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Πίνακας 2.3. Ο προσεγγιστικός γεννήτορας πίνακας $\tilde{\Lambda}$

Η εύρεση αυτού του προσεγγιστικού γεννήτορα πίνακα είναι σημαντική και απαραίτητη για τον υπολογισμό του τύπου της πιθανότητας αθέτησης για κάθε διαφορετική κατηγορία πιστοληπτικής διαβάθμισης. Στο παρακάτω σχήμα, Σχήμα 2.1., απεικονίζονται οι πιστωτικές καμπύλες που προκύπτουν από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου $\tilde{\Lambda}$ για τις πιστωτικές ταξινομήσεις AAA, AA, A και BBB. Στο Παράρτημα Α μπορούμε να δούμε τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για να φτιάξουμε το Σχήμα 2.1. στην Rstudio. Οι αντίστοιχες καμπύλες για τις πιθανότητες επιβίωσης εμφανίζονται στο Σχήμα 2.2. Στο Παράρτημα Β βλέπουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε να σχεδιάσουμε τις συγκεκριμένες καμπύλες στην Rstudio.

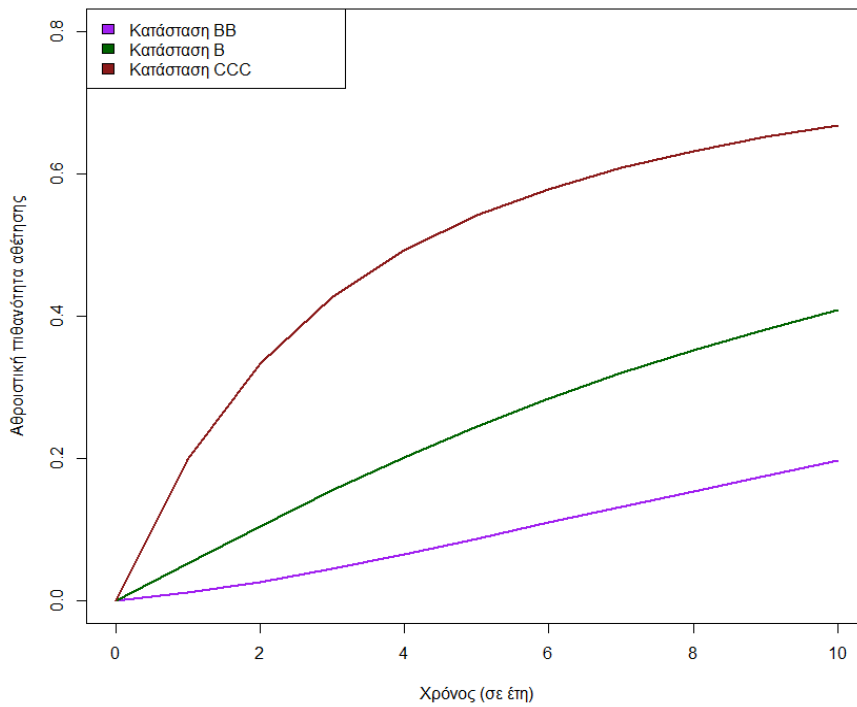


Σχήμα 2.1. Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας AAA, AA, A και BBB.

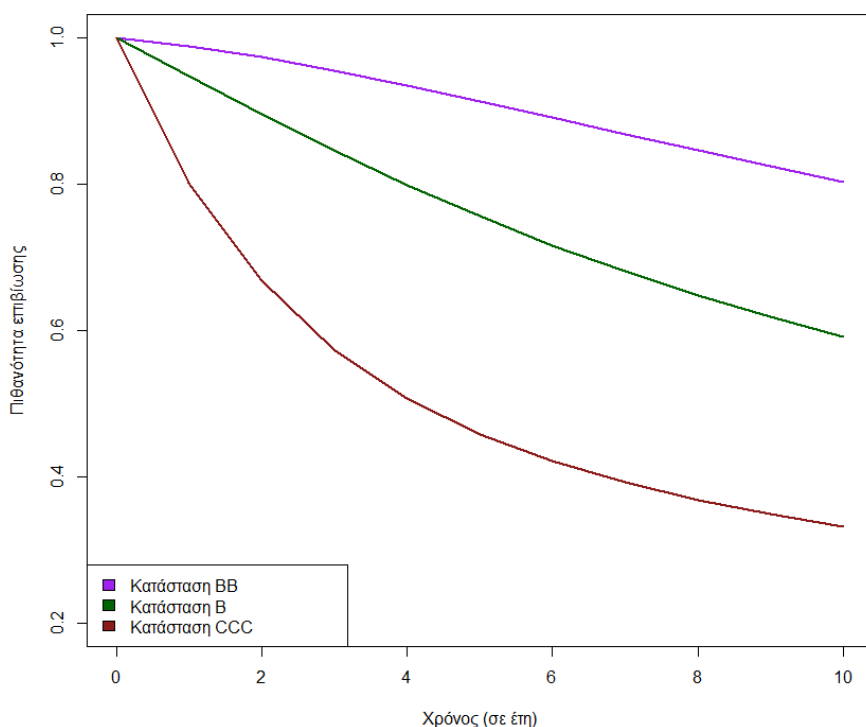


Σχήμα 2.2. Οι πιθανότητες επιβίωσης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας AAA, AA, A και BBB.

Στο Σχήμα 2.3. απεικονίζονται οι πιστωτικές καμπύλες που προκύπτουν από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου \tilde{A} για τις πιστωτικές ταξινομήσεις BB, C και CCC. Οι αντίστοιχες καμπύλες για τις πιθανότητες επιβίωσης εμφανίζονται στο Σχήμα 2.4. Στο Παραρτήματα Γ και Δ βλέπουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να σχεδιάσουμε το Σχήμα 2.3. και Σχήμα 2.4. στην Rstudio.



Σχήμα 2.3. Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας BB, B και CCC.



Σχήμα 2.4. Οι πιθανότητες επιβίωσης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας BB, B και CCC.

Αφού έχουμε βρει τον προσεγγιστικό γεννήτορα πίνακα, μπορούμε στη συνέχεια να τον χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, την πιστωτική καμπύλη για την πιθανότητα αθέτησης για κάθε μεμονωμένη πιστοληπτική κατηγορία ταξινόμησης. Παραπάνω παραθέσαμε πιστωτικές καμπύλες και καμπύλες πιθανότητας επιβίωσης για διαφορετικές καταστάσεις. Από τα σχήματα παρατηρήσαμε ότι οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης όσο αυξάνεται ο χρόνος μειώνεται ο ρυθμός ανάπτυξης. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι αν καταφέρει να επιβιώσει για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, οι πιθανότητες για περαιτέρω επιβίωση βελτιώνονται.

Εταιρίες με πολύ υψηλή βαθμολογία, που δεν έχουν άλλη δυνατή ανοδική πορεία, είναι πιο πιθανό με το πέρας του χρόνου, με την προϋπόθεση ότι επιβιώνουν για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, να υποβαθμιστούν. Επίσης, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι με την πάροδο του χρόνου η πιθανότητα επιβίωσης μειώνεται λόγω της πιθανής επιδείνωσης της βαθμολογίας τους.

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα ομοιογενούς συνεχούς χρόνου αποτελεί μια πολύ απλή μέθοδος για την εύρεση των καμπυλών για την πιθανότητα αθέτησης, τύπος (2.1), καθώς και των καμπυλών επιβίωσης. Ωστόσο, δε συνιστάται η χρήση ενός μοντέλου

Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς και ομοιογενούς χρόνου καθώς οι όροι πιθανότητας αθέτησης, που προκύπτουν από αυτό το μοντέλο, και οι εμπειρικά παρατηρούμενες πιστωτικές καμπύλες δε ταυτίζονται. Συνεπώς, για αυτό το λόγο, προτείνεται η χρήση μιας προσεγγιστικής και μη ομοιογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου της ακόλουθης μορφής:

Αρχικά, υποθέτουμε έναν χρονικά εξαρτημένο γεννήτορα πίνακα A_t με την ακόλουθη μορφή:

$$A_t = \Phi_t \cdot A, \quad (2.4)$$

όπου A υποδηλώνει έναν χρονικά ομοιογενή πίνακα που περιέχει ως στοιχεία το ρυθμό μετάβασης από την πιστοληπτική διαβάθμιση i στην j . Δηλαδή $A = (\lambda_{ij})$ με $1 \leq i, j \leq K$, όπου K το πλήθος των πιστοληπτικών καταστάσεων. Επιπλέον, ο πίνακας $\Phi_t = (\phi_{ij}(t))$ για $1 \leq i, j \leq K$ δηλώνει έναν διαγώνιο πίνακα με στοιχεία της διαγώνιου τα $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t)$. Συνεπώς, θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\varphi_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{για } i \neq j \\ \varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t), & \text{για } i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

Είναι φανερό ότι από τον πολλαπλασιασμό του διαγώνιου πίνακα Φ_t με τον πίνακα A προκύπτει ένας νέος πίνακας όπου έχει δημιουργηθεί από τον πολλαπλασιασμό όλων των στοιχείων της i γραμμής του πίνακα A με το $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t)$ στοιχείο της διαγώνιου.

Η συνάρτηση $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t)$ ορίζεται σύμφωνα με τους Bluhm and Overbeck (2007) ως:

$$\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t) = \frac{(1 - e^{-\alpha_i t}) t^{\beta_i - 1}}{1 - e^{-\alpha_i}}, \text{ για } t \geq 0 \quad (2.6)$$

Η συνάρτηση $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t)$ είναι κανονικοποιήσιμη όταν $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(1) = 1$. Δηλαδή για $t=1$ λαμβάνουμε τον αρχικό ενός έτους πίνακα μετάβασης που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του γεννήτορα πίνακα A . Στην παραπάνω συνάρτηση, ο όρος $1 - e^{-\alpha_i t}$ αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής μιας εκθετικής κατανομής με παράμετρο α_i , ενώ στον όρο $t^{\beta_i - 1}$, οι τιμές του β θα επηρεάζουν τη συμπεριφορά της συνάρτησης $\varphi_{\alpha, \beta}(t)$.

- Αν $\beta > 1$, τότε ο όρος $t^{\beta_i - 1}$ μπορεί να θεωρηθεί ως χρονικά επιταχυνόμενος (*time-accelerating*)
- Αν $\beta < 1$ τότε ο όρος $t^{\beta_i - 1}$ προσαρμογής μπορεί να θεωρηθεί ως χρονικά επιβραδυνόμενος (*time-slowng-down term*).

Ο όρος ο οποίος βρίσκεται στον παρανομαστή, $1 - e^{-\alpha_i}$, είναι απαραίτητος ώστε να εξασφαλιστεί η κανονικοποίηση της συνάρτησης, δηλαδή ότι θα ισχύει $\varphi_{\alpha, \beta}(1) = 1$. Η

συνάρτηση $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t)$ έχει ένα μεγάλο εύρος δράσης, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για την προσέγγιση των χρονικά εξαρτημένων γεννήτορων πινάκων από τους οποίους και μπορούμε να πάρουμε τους προσαρμοσμένους όρους πιθανότητας αθέτησης όπως έχουν προαναφερθεί, όσο και για τον υπολογισμό πινάκων μετάβασης για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $[0, t]$ με τη χρήση του τύπου:

$$P_t = e^{tA_t}, \text{ για } t \geq 0 \quad (2.7)$$

Από τη Σχέση (2.2) της συνάρτησης επιβίωσης και χρησιμοποιώντας δύο διανύσματα $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ και $(\beta_1, \dots, \beta_K)$, όπου K το πλήθος των πιστοληπτικών καταστάσεων, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον χρονικά εξαρτημένο γεννήτορα πίνακα A_t . Όπως προαναφέρθηκε, οι προσαρμοσμένοι όροι πιθανότητας αθέτησης που προκύπτουν από μία ομοιογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου δε ταυτίζονται με τις εμπειρικά παρατηρούμενες αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης όπως αυτές διατίθενται από κύριους Οίκους πιστοληπτικής αξιολόγησης. Με τη χρήση της χρονικά εξαρτώμενης προσέγγισης, που διατυπώθηκε παραπάνω, και των εμπειρικά παρατηρούμενων πιθανοτήτων αθέτησης για διαφορετικές κατηγορίες πιστοληπτικής διαβάθμισης είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα διανύσματα $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ και $(\beta_1, \dots, \beta_K)$. Η μεθοδολογία είναι αρκετά απλή, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε τη μέση τετραγωνική απόσταση μεταξύ των εμπειρικά παρατηρούμενων αθροιστικών πιθανοτήτων αθέτησης και των πιθανοτήτων αθέτησης του χρονικά εξαρτημένου γεννήτορα πίνακα A_t , δηλαδή την ποσότητα

$$\langle |P_t - \hat{P}_t|^2 \rangle = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |p_{ij}(t) - \hat{p}_{ij}(t)|^2, \quad (2.8)$$

με P_t να συμβολίζει έναν πίνακα με τις πιθανότητες αθέτησης του χρονικά εξαρτημένου γεννήτορα πίνακα A_t όπως προκύπτει από τον τύπο (2.7) και \hat{P}_t έναν πίνακα με τις εμπειρικά παρατηρούμενες αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης. Προφανώς αν ο πίνακας P_t έχει διαστάσεις $(K \times K)$, τότε θα εμπεριέχει άγνωστες τιμές $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ και β_1, \dots, β_K .

Σημειώνουμε ότι οι παράμετροι για την κατάσταση που υπάρχει αθέτηση από τον εκδότη, α_s και β_s , δεν έχουν νόημα, για αυτό και τα ορίζουμε $\alpha_s = \beta_s = 1$. Για τις υπόλοιπες καταστάσεις ταξινόμησης τα βελτιστοποιημένα διανύσματα α και β παίρνουν διάφορες τιμές όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2.4. Δηλαδή στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται τα βελτιστοποιημένα διανύσματα α και β για τις χρονικά εξαρτημένες συναρτήσεις $\varphi_{\alpha_i, \beta_i}(t)$, σύμφωνα με τους Bluhm και Overbeck (2006).

	α	β
AAA	0.34	0.89
AA	0.11	0.26
A	0.81	0.65
BBB	0.23	0.30
BB	0.32	0.56
B	0.23	0.40
CCC	2.15	0.46
D	1	1

Πίνακας 2.4. Τα βελτιστοποιημένα διανύσματα α και β σύμφωνα με τους Bluhm και Overbeck (2006)

Με τη χρήση μονοετή προσαρμοσμένο πίνακα μετάβασης των Standard & Poor's (Standard & Poor's, 2005), του αντίστοιχου κατά προσέγγιση γεννήτορα πίνακα A και των βελτιστοποιημένων α και β διανυσμάτων για τη χρονική συνάρτηση $\phi_\alpha, \beta(t)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε πιστωτικές καμπύλες που να ταιριάζουν με τις εμπειρικά παρατηρούμενες πιστωτικές καμπύλες.

Συμπερασματικά, τόσο η ομοιογενής όσο και η μη-ομοιογενής συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να μας δώσει πιστωτικές καμπύλες.

2.4 Τιμολόγηση κλιμακούμενων ομολόγων

Η χρησιμότητα των πινάκων μετάβασης είναι αρκετά σημαντική στη τιμολόγηση ενός πιστωτικού παράγωγου όπως είναι το κλιμακούμενο ομόλογο (*Step up*). Πιο συγκεκριμένα για τα κλιμακούμενα ομόλογα η χρήση ιστορικών ή ουδέτερου κινδύνου πινάκων μετάβασης είναι ιδιαίτερα σημαντική. Το κουπόνι, δηλαδή το ετήσιο επιτόκιο που καταβάλλεται στον εκδότη από την ημερομηνία έκδοσης έως τη λήξη του, αυτών των ομολόγων εξαρτάται κυρίως από την αξιολόγηση που έχει ο εκδότης ή ακόμα και από την αξιολόγηση του μακροπρόθεσμου χρέους του. Αυτά τα ομόλογα έχουν το εξής χαρακτηριστικό, εάν η βαθμολογία του εκδότη επιδεινωθεί και φτάσει σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο, το κουπόνι αυξάνεται με προκαθορισμένο ρυθμό. Στη συνέχεια, παραθέτουμε πως χρησιμοποιούνται οι ιστορικοί και οι ουδέτερου κινδύνου πίνακες μετάβασης για να τιμολογηθούν τα κλιμακούμενα ομόλογα.

2.4.1 Κλιμακούμενα ομόλογα

Στις μέρες μας τα κλιμακούμενα ομόλογα είναι ιδιαίτερα δημοφιλή με αποτέλεσμα να έχουν ένα αρκετά μεγάλο όγκο εκδόσεων. Ο μεγάλος αυτός όγκος οδηγεί σε μια δευτερογενή αγορά για αυτά τα ομόλογα που είναι αρκετά ρευστή. Τα κλιμακούμενα ομόλογα δημιουργούν μια σύνδεση μεταξύ της πιστοληπτικής ικανότητας του εκδότη ενός ομολόγου και των ταμειακών ροών του ομολόγου. Πιο συγκεκριμένα όπως προαναφέρθηκε, η αξία ενός κουπονιού του κλιμακούμενου ομολόγου μπορεί να καθοριστεί τόσο από την αξιολόγηση του εκδότη όσο και από την αξιολόγηση του μακροπρόθεσμου χρέους του. Όταν η βαθμολογία του εκδότη επιδεινωθεί και φτάσει σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο τότε αυξάνεται και η αξία του κουπονιού.

Δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος περιορισμός στον αριθμό των φορών που μπορεί να αυξηθεί αυτό το κουπόνι. Αν η βαθμολογία του εκδότη συνεχώς επιδεινώνεται τότε μπορεί το κουπόνι να αυξηθεί διαδοχικά πολλές φορές. Ακριβώς το ίδιο ισχύει και στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν η βαθμολογία του εκδότη βελτιώνεται συνεχώς τότε το κουπόνι ενός κλιμακούμενου ομολόγου μειώνεται συνεχώς. Όταν το κουπόνι χάνει αξία με αυτόν τον τρόπο τότε έχουμε το λεγόμενο υποβαθμισμένο ομόλογο. Όσο και να επιδεινωθεί η αξία του συγκεκριμένου κουπονιού πρέπει να σημειωθεί ότι η αξία του δε θα είναι ποτέ πιο κάτω από την αρχική αξία του κατά την έκδοση.

Για να ταξινομήσουμε τα ομόλογα οφείλουμε πρώτα να εντοπίσουμε ως προς τι διαφέρουν. Ένα σύνθημα χαρακτηριστικό για την διαφοροποίηση των κλιμακούμενων ομολόγων αποτελεί αν η επιδείνωση στην πιστοληπτική ικανότητα του εκδότη που πυροδοτεί την αύξηση της αξίας του κουπονιού έχει γίνει και από τους δύο Οίκους πιστοληπτικής αξιολόγησης, Moody's and S&P, ή μόνο από έναν από τους δύο. Ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι αν το κουπόνι έχει το περιθώριο να χάσει και άλλο αξία. Αφού η αξία του κουπονιού δε μπορεί να πέσει πιο χαμηλά από την αξία που είχε αρχικά κατά την έκδοσή του, αυτό σημαίνει ότι η αξία του κουπονιού από ένα σημείο και μετά δε θα μπορεί να κινηθεί προς τα κάτω, να χάσει αξία, αλλά μόνο προς τα πάνω. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε πως με βάση τους ιστορικούς πίνακες μετάβασης και τις παρατηρούμενες διαφορές στα επιτόκια της πιστωτικής αγοράς μπορούμε να τιμολογήσουμε τα κλιμακούμενα ομόλογα.

2.4.2 Διαδικασία Τιμολόγησης Κλιμακούμενων ομολόγων

Γενικά η αξία ενός ομολόγου θεωρείται ότι ισούται με το άθροισμα των προεξοφλημένων και αναμενόμενων ταμειακών ροών. Τα κλιμακούμενα ομόλογα όμως είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία ομολόγων, καθώς το κουπόνι τους εξαρτάται από την αξιολόγηση του εκδότη. Για αυτόν τον λόγο απαραίτητη προϋπόθεση για την τιμολόγηση ενός κλιμακούμενου ομολόγου είναι η μοντελοποίηση της πιστοληπτικής ικανότητας και συμπεριφοράς που έχει ακολουθήσει ο εκδότης. Αρχικά θεωρούμε ότι η εταιρία έχει πιστοληπτική ικανότητα R_t η οποία διαμορφώνεται ως Μαρκοβιανή αλυσίδα σε χώρο πεπερασμένης κατάστασης $S = \{1, \dots, K\}$. Έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό των πινάκων μετάβασης ουδέτερου κινδύνου για πραγματικά δεδομένα, δεδομένα που έχουν παρατηρηθεί στον πραγματικό κόσμο. Οι Houweling et al. (2004) ακολουθούν μια συγκεκριμένη προσέγγιση για τη μοντελοποίηση των αθροιστικών πιθανοτήτων επιβίωσης $\tilde{q}_{ij}(t, T)$ τη χρονική στιγμή t όταν η στιγμή ωρίμανσης του ομολόγου είναι T . Ακόμα η πιθανότητα να πάμε από την πιστοληπτική κατηγορία i τη χρονική στιγμή s στη πιστοληπτική κατηγορία j τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από την πιστοληπτική ικανότητα τη στιγμή s και όχι από τυχόν προηγούμενες περιόδους. Πιο απλά θα ισχύει για όλα τα $i, j \in K$, για $0 \leq s \leq t$ και $0 \leq u \leq s$ ότι:

$$q_{ij}(s, t) = P(R_t = j | R_s = i, R_u = r_u) = P(R_t = j | R_s = i) \quad (2.9)$$

Τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης ουδέτερου κινδύνου $\tilde{Q}(t, T)$ έχουν τη μορφή

$$\tilde{q}_{ij}(t, T) = \begin{cases} \pi(t, T)q_{ij}(t, T) & , \text{για } j \neq K \\ 1 - \pi(t, T)(1 - q_{iK}(t, T)) & , \text{για } j = K \end{cases} \quad (2.10)$$

όπου με $\pi(t, T)$ συμβολίζουμε το ασφάλιστρο το οποίο υπολογίζεται με τον εξής τύπο:

$$\pi(t, T) = \frac{1 - \tilde{q}_{R_t, K}(t, T)}{1 - q_{R_t, K}(t, T)} \quad (2.11)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιείται μόνο ένα ασφάλιστρο κινδύνου για όλες τις κατηγορίες βαθμολογίας επειδή κάθε εκδότης δεν είναι δυνατό να καλύπτει όλο το φάσμα αξιολόγησης. Επομένως, το μόνο ασφάλιστρο κινδύνου που μπορεί να υπολογιστεί είναι αυτό που προκύπτει από την τρέχουσα βαθμολογία του εκδότη και μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις καταστάσεις αξιολόγησης. Έπειτα η αποτίμηση των κλιμακούμενων ομολόγων γίνεται εύκολα με τη χρήση αυτών των πινάκων μετάβασης ουδέτερου κινδύνου.

Ας υποθέσουμε ένα κλιμακούμενο και ένα υποβαθμισμένο ομόλογο με αξία μία νομισματική μονάδα που έχει n ακόμα υπολειπόμενες πληρωμές κουπονιών τη χρονική

στιγμή t_j , όπου $j = 2, \dots, n$, με την προϋπόθεση πάντα ότι μέχρι τη χρονική στιγμή t_j ο εκδότης του ομολόγου έχει αποδειχτεί φερέγγυος και δεν έχει αθετήσει τις υποχρεώσεις του. Η πληρωμή του κουπονιού συμβολίζεται με c_r , όπου r ορίζεται ως η πιστοληπτική διαβάθμιση του ομολόγου τη χρονική στιγμή t_j και ανήκει στο πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων $\{1, \dots, K\}$. Αν ο εκδότης του ομολόγου δεν έχει χρεοκοπήσει μέχρι και τη χρονική στιγμή λήξης του ομολόγου, t_n , τότε και το κύριο ποσό του κλιμακούμενου ομολόγου καταβάλλεται τη χρονική στιγμή t_n . Αν όμως ο εκδότης χρεοκοπήσει και αδυνατεί να εκπληρώσει τις συμβατικές του υποχρεώσεις στον κάτοχο του ομολόγου πριν από τη λήξη τότε τη στιγμή της χρεοκοπίας καταβάλλεται ο σταθερός ρυθμός ανάκτησης του ομολόγου. Ο ρυθμός ανάκτησης, δ , ενός ομολόγου όταν ο εκδότης έχει χρεοκοπήσει είναι ο βαθμός στον οποίο μπορεί να ανακτηθούν οι κύριοι και δεδουλευμένοι τόκοι του ομολόγου. Αυτό το ποσοστό μπορεί να θεωρηθεί και ως μια επιπλέον ασφάλεια που έχει ο κάτοχος της μετοχής σε περίπτωση που ο εκδότης πτωχεύσει καθώς θα μπορούσε να ανακτήσει ένα συγκεκριμένο ποσό.

Για να τιμολογήσουμε τα κλιμακούμενα ομόλογα τη χρονική στιγμή t αρκεί να εφαρμόσουμε την αποτίμηση (*valuation*) του ουδέτερου κινδύνου στις ταμειακές ροές των κουπονιών, τόσο στο κεφάλαιο όσο και στο ποσοστό ανάκτησης.

Αν υποθέσουμε ότι το ενδεχόμενο ο εκδότης να μην αποπληρώσει τις συμβατικές του υποχρεώσεις μπορεί να συμβεί μόνο κατά τις ημερομηνίες πληρωμής του κουπονιού, η αξία ενός κλιμακούμενου ή ενός υποβαθμισμένου ομολόγου προσδιορίζεται ως εξής:

$$B(t, \mathbf{t}, \mathbf{c}) = \sum_{j=2}^n \left[p(t, t_j) \sum_{k=1}^K [\tilde{q}_{R_t, k}(t, t_{j-1}) (1 - \tilde{q}_{k, K}(t_j - 1, t_j)) c_k] \right] + p(t, t_n) (1 - \tilde{q}_{R_t, K}(t, t_n)) + \sum_{j=1}^n p(t, t_j) (\tilde{q}_{R_t, K}(t, t_j) - \tilde{q}_{R_t, K}(t, t_{j-1})) \delta, \quad (2.12)$$

όπου \mathbf{t} δηλώνει ένα διάνυσμα με τις ημερομηνίες πληρωμών του κουπονιού και θεωρούμε επίσης ότι είναι ένα διάνυσμα με n στοιχεία. Επιπλέον \mathbf{c} δηλώνει ένα διάνυσμα με τις πληρωμές του κουπονιού ανά πιστοληπτική κατάσταση, δηλαδή είναι ένα διάνυσμα με K στοιχεία.

Αντίθετα, η αξία του απλού ομολόγου όταν δεν προβλέπεται το ενδεχόμενο να γίνει ενίσχυση ή υποβάθμιση (*step-up* ή *step-down*) είναι :

$$B^{PV}(t, \mathbf{t}, \mathbf{c}) = \sum_{j=1}^n p(t, t_j) (1 - \tilde{q}_{R_t, K}(t, t_j)) c + p(t, t_n) (1 - \tilde{q}_{R_t, K}(t, t_n)) + \sum_{j=1}^n p(t, t_j) (\tilde{q}_{R_t, K}(t, t_j) - \tilde{q}_{R_t, K}(t, t_{j-1})) \delta. \quad (2.13)$$

Διαφορετικά μια εναλλακτική μέθοδος για τον υπολογισμό της αξίας του απλού ομολόγου είναι με την προεξόφληση των αναμενόμενων κουπονιών. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί την καμπύλη του μηδενικού κουπονιού (*zero-coupon*) μιας εταιρείας για να προεξοφλήσει τα αναμενόμενα κουπόνια. Ακόμα κάνει χρήση των ιστορικών πιθανοτήτων μετάβασης από τη μία κατάσταση σε μια άλλη, αντί των πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου. Αν υποθέσουμε ότι η πρώτη πληρωμή του κουπονιού είναι γνωστή και ότι ο προεξοφλητικός παράγοντας του εκδότη τη στιγμή t συμβολίζεται $v(t, T)$, όπου T είναι ο χρόνος ωρίμανσης του ομολόγου, τότε η τιμολόγηση του ομολόγου θα δίνεται από τον τύπο:

$$B^H(t, \mathbf{t}, \mathbf{c}) = u(t, t_1)c_{R_{t_0}} + \sum_{j=2}^n [u(t, t_j) \sum_{k=1}^K \tilde{q}_{R_t, k}(t, t_{j-1})c_k] + u(t, t_n). \quad (2.14)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τα κλιμακούμενα ομόλογα είναι χρηματοοικονομικά προϊόντα που επηρεάζονται από αλλαγές στη διαβάθμιση, από τις μεταβάσεις από μία πιστοληπτική βαθμίδα σε μία άλλη. Αξίζει να σημειωθεί ότι σημαντικές πληροφορίες μιας εταιρείας μπορεί να αγνοηθούν όταν για την τιμολόγηση πιστωτικών παραγώγων χρησιμοποιούνται πίνακες μετάβασης. Για παράδειγμα, πολλά χαρακτηριστικά που επηρεάζουν το ενδεχόμενο πτώχευσης μιας εταιρείας ή την αλλαγή στη βαθμολογία της ενδέχεται να μην καταγράφονται από την κατηγορία αξιολόγησης που ανήκει. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα αρκεί να αναλυθεί αποκλειστικά και μόνο το ομόλογο του συγκεκριμένου εκδότη και με βάση την παρατηρούμενη διαφορά επιτοκίου στην αγορά και την ενδεχόμενη πιθανότητα αθέτησης από τον εκδότη να βγουν τα ανάλογα συμπεράσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σύγκριση πινάκων με χρήση μετρικών

3.1 Εισαγωγή

Οι πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής μετάβασης, όπως έχουμε αναλύσει εκτενώς στα προηγούμενα κεφάλαια, περιέχουν σημαντικές πληροφορίες που μπορεί να σχετίζονται άμεσα τόσο με την τιμή του ομολόγου όσο και με την αξία του χαρτοφυλακίου. Ως εκ τούτου, η δυνατότητα αξιολόγησης και σύγκρισης τέτοιων πινάκων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Επειδή οι πίνακες μετάβασης έχουν τουλάχιστον δύο διαστάσεις, η σύγκριση τους απαιτεί τη χρήση συγκεκριμένων μεθόδων. Κάποιες από αυτές τις μεθόδους είναι οι μετρικές απόστασης κατά συντεταγμένες (*cell-by-cell distance metrics*) και οι μετρικές απόστασης με βάση τα ιδιοδιανύσματα (*eigenvector distance metric*). Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά αυτές τις μεθόδους όπως τις ανέλυσαν οι Jafry and Schuermann (2004).

3.2 Μετρικές απόστασης κατά συντεταγμένες

Οι μετρικές απόστασης L_1 , απόσταση Manhattan, και L_2 (Ευκλείδεια απόσταση), αποτελούν δύο από τις πιο απλές και συνήθεις μετρικές για τη σύγκριση πινάκων μετάβασης. Η μετρική L_1 υπολογίζει τη μέση απόλυτη διαφορά ενώ η μετρική απόστασης L_2 , δηλαδή η Ευκλείδεια μετρική, είναι η ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης μεταξύ των αντίστοιχων στοιχείων των δύο πινάκων. Αν ξεκινήσουμε με την υπόθεση ότι έχουμε δύο πίνακες μετάβασης A και B , και κάθε ένας με διαστάσεις $N \times N$, τότε θα έχουμε τους παρακάτω τύπους:

$$\|A - B\|_{L_1} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |A_{i,j} - B_{i,j}|}{N^2} \quad (3.1)$$

$$\|A - B\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A_{i,j} - B_{i,j})^2}{N^2}} \quad (3.2)$$

Οι παραπάνω δύο μετρικές αποστάσεις για τη σύγκριση πινάκων είναι λόγω της απλότητάς τους αρκετά ελκυστικές, παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι έχουν ένα βασικό μειονέκτημα. Και οι δύο μέθοδοι, αν και παρέχουν μια σχετική σύγκριση μεταξύ των ζητούμενων πινάκων μετάβασης, δεν αποκαλύπτουν σημαντικά στοιχεία για τους πίνακες.

Πιο αναλυτικά, αν για παράδειγμα η απόσταση μεταξύ δύο πινάκων μετάβασης A και B με διαστάσεις $N \times N$ είναι 0,3, δε είναι σαφές αν αυτή η απόσταση θεωρείται "μεγάλη" ή "μικρή", δηλαδή αν οι διαφορές που θα έχουν αυτοί οι δύο πίνακες στις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης είναι σημαντικής οικονομικής σημασίας.

3.3 Μετρικές απόστασης με βάση τα ιδιοδιανύσματα

Οι περισσότεροι πίνακες πιστοληπτικής μετάβασης όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως πιο αναλυτικά, που βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς, ενσωματώνουν και μια κατάσταση απορρόφησης, την κατάσταση χρεοκοπίας. Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα P ταυτίζεται με τη γραμμή του πίνακα P για την κατάσταση χρεοκοπίας, δηλαδή θα ισούται με $(0,0, \dots, 1)$. Έτσι λοιπόν γίνεται αντιληπτό ότι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα μετάβασης δεν παρέχει κάποια επιπλέον πληροφορία και συνεπώς είναι αναποτελεσματικό για τη σύγκριση πινάκων. Τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα περιέχουν ωστόσο χρήσιμες πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την δημιουργία μιας σχετικής μετρικής με σκοπό την σύγκριση πινάκων. Για αυτόν τον σκοπό, οι Arvanitis et al. (1999) προτείνουν μια μετρική που δημιουργείται από τη σύγκριση των ιδιοδιανυσμάτων μεταξύ δύο πινάκων. Η μετρική αυτή προκύπτει από τον υπολογισμό του λόγου

$$\frac{\|AB - BA\|}{\|A\| \cdot \|B\|},$$

όπου με $\|A\|$ συμβολίζεται η νόρμα, ή το μέτρο, ενός πίνακα A .

Νόρμα ενός πίνακα ορίζεται η συνάρτηση $\|\cdot\|: R^{m \times n} \rightarrow R$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- $\|A\| \geq 0$, για κάθε $A \in R^{m \times n}$ και $\|A\| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0$
- $\|aA\| = |a| \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in R^{m \times n}$
- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ για όλους τους πίνακες A και $B \in R^{m \times n}$

Επιπλέον προκύπτει ότι ισχύει η σχέση:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \quad (3.3)$$

όπου $\|x\|$ είναι η νόρμα του διανύσματος x . Στη περίπτωση των Arvanitis et al. το διάνυσμα x είναι το ιδιοδιάνυσμα του $A^T A$, με A^T να συμβολίζεται ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα A .

Νόρμα ενός διανύσματος ορίζεται η συνάρτηση $\|\cdot\|: R^n \rightarrow R$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- $\|x\| \geq 0$, για κάθε $x \in R^n$ και $\|x\|=0$ αν και μόνο αν $x=0$
- $\|ax\|=|a| \|x\|$ για κάθε διάνυσμα $x \in R^n$ και $a \in R$.
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για όλα τα διανύσματα x και $y \in R^n$

Συνεπώς η μετρική απόστασης με βάση τα ιδιοδιανύσματα θα είναι:

$$\|A - B\|_{AGL} = \frac{\|AB - BA\|}{\|A\| \cdot \|B\|}, \quad (3.4)$$

Αυτή η ποσότητα κινείται μεταξύ του μηδέν και του δύο. Εάν οι πίνακες A και B έχουν ακριβώς τα ίδια ιδιοδιανύσματα, ανεξαρτήτως αν οι ιδιοτιμές τους είναι ίσες ή όχι, τότε αυτή η ποσότητα είναι ίση με το μηδέν. Αντίθετα, όσο πιο ανόμοια γίνονται τα ιδιοδιανύσματα των A και B τόσο πιο πολύ αυξάνεται και η τιμή της μετρικής. Όταν η μετρική $\|A - B\|_{AGL}$ είναι σχετικά μικρή δηλαδή γύρω στο 0,08 τότε σύμφωνα με τους Arvanitis et al. τα ιδιοδιανύσματα έχουν πολύ μικρές διαφορές, τόσο μικρές που μπορούν να θεωρηθούν παρόμοια. Παρόλα αυτά, οι Arvanitis et al. δεν έχουν δώσει κάποια εξήγηση γιατί το 0,08 θεωρείται ότι είναι επαρκώς μικρή ποσότητα και ούτε ποια ποσότητα μπορεί να θεωρηθεί αρκετά μεγάλη για να απορρίψει την ομοιότητα. Αν δηλαδή έχουμε ότι η μετρική $\|A - B\|_{AGL} \leq 0,08$ τότε οι πίνακες A και B μπορούν να θεωρηθούν παρόμοιες και συνεπώς οι διαφορές που θα έχουν στις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης να μη θεωρούνται σημαντικής οικονομικής σημασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Δείκτες Κινητικότητας

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα εστιάσουμε σε μερικούς δείκτες κινητικότητας που όταν εφαρμόζονται σε πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης μας βοηθάνε να κατανοήσουμε τη μεταβολή στη κινητικότητα από μία πιστοληπτική κατάσταση σε μία άλλη. Κάποιοι από τους δείκτες κινητικότητας που θα αναλύσουμε στην ενότητα είναι οι δείκτες κινητικότητας με βάση τις ιδιοτιμές (*eigenvalue-based metrics*) σύμφωνα με τους Geweke et al. (1986), οι δείκτες κινητικότητας με βάση τις ιδιοτιμές σύμφωνα με τους Jafry and Schuermann (2004) και οι δείκτες κινητικότητας που σχετίζονται με τις αποστάσεις L_1 και L_2 που αναφέραμε προηγουμένως. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά αυτούς τους δείκτες κινητικότητας όπως τους ανέλυσαν οι Jafry και Schuermann και θα κάνουμε και μια μικρή αναφορά στους Bayesian δείκτες κινητικότητας. Πρώτα όμως θα πρέπει να παρουσιάσουμε το κριτήριο του διακριτά κατανεμημένου δείκτη κινητικότητας που είναι απαραίτητο να ισχύει για να πραγματοποιηθεί η σύγκριση πινάκων πιστοληπτικής διαβάθμισης.

4.2 Κριτήριο του διακριτά κατανεμημένου δείκτη κινητικότητας

Ένα βασικό κριτήριο που απαιτείται για τη σύγκριση πινάκων πιστοληπτικής διαβάθμισης είναι ο δείκτης κινητικότητας να είναι διακριτά κατανεμημένος (*distribution discriminatory*). Λέμε ότι ένας δείκτης κινητικότητας ικανοποιεί το κριτήριο *DD* όταν για δύο πίνακες με κοινά στοιχεία μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Αυτό το κριτήριο για λόγους ευκολίας θα το λέμε από εδώ και πέρα κριτήριο *DD*. Με πιο απλά λόγια, ένας δείκτης κινητικότητας λέμε ότι είναι "καλός" όταν ικανοποιεί το κριτήριο *DD*, δηλαδή όταν αποδίδει διαφορετικές τιμές για δύο πίνακες με διαφορετικά στοιχεία εκτός της διαγωνίου. Αντίθετα το *DD* κριτήριο λέμε ότι παραβιάζεται όταν οι δείκτες κινητικότητας είναι «τυφλοί» στις όποιες παραλλαγές υπάρξουν στην κατανομή των πιθανοτήτων που βρίσκονται εκτός της διαγωνίου και δυστυχώς αυτές οι πιθανότητες είναι ακριβώς αυτές που μας ενδιαφέρουν περισσότερο.

Το κριτήριο αυτό είναι σημαντικό για τους πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης δεδομένου ότι η μετάβαση σε μια “μακρινή” κατηγορία διαβάθμισης από την αρχική έχει διαφορετικό οικονομικό και χρηματοοικονομικό νόημα από ό, τι η μετάβαση σε πιο ‘κοντινή’ κατηγορία διαβάθμισης. Για παράδειγμα, διαφορετικό αντίκτυπο έχει σε μια εταιρία η μετάβαση της στη χαμηλότερη κατηγορία διαβάθμισης, την κατάσταση χρεοκοπίας, και διαφορετικό όταν απλά υποβιβάζεται από μία κατηγορία πιστοληπτικής διαβάθμισης στην αμέσως επόμενη.

Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η διάκριση μεταξύ των πινάκων που έχουν τις ίδιες πιθανότητες μετάβασης στη διαγώνιο τους και τις υπόλοιπες πιθανότητες τους να είναι διαφορετικές όπως φαίνεται στο παράδειγμα παρακάτω:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση το κριτήριο DD ικανοποιείται για έναν δείκτη κινητικότητας όταν για τους παραπάνω δύο πίνακες, αυτός ο δείκτης κινητικότητας δίνει διαφορετική τιμή. Επίσης για να κατανοήσουμε καλύτερα το συγκεκριμένο κριτήριο, μπορούμε να ανατρέξουμε στη Παράγραφο 5.3 που γίνεται χρήση του πάνω σε μια εφαρμογή.

4.3 Δείκτες κινητικότητας με βάση τις ιδιοτιμές

Οι δείκτες κινητικότητας που παρουσιάζονται από τους Gewek et al. (1986) για γενικούς πίνακες μετάβασης βασίζονται ουσιαστικά στις ιδιοτιμές του πίνακα P . Αυτοί οι δείκτες κινητικότητας συνοψίζονται ως εξής:

$$M_P(P) = \frac{1}{N-1}(N - tr(P)), \quad M_D(P) = 1 - |det(P)|, \quad (4.1)$$

$$M_E(P) = \frac{1}{N-1}(N - \sum_{i=1}^N |\lambda_i(P)|), \quad M_2(P) = 1 - |\lambda_2(P)|,$$

όπου $tr(.)$ υποδηλώνει το ίχνος του πίνακα, δηλαδή το σύνολο των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα, το $det(.)$ υποδηλώνει την ορίζουσα και το $\lambda_i(.)$ συμβολίζει την i ιδιοτιμή. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιοτιμές διατάσσονται σε μια σειρά από τη μεγαλύτερη κατ’ απόλυτη τιμή προς τη μικρότερη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι όταν όλες οι ιδιοτιμές του P είναι πραγματικές και μη αρνητικές, τότε ο δείκτης κινητικότητας M_P είναι παρόμοιος με

τον M_E αφού το ίχνος του πίνακα P θα ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του. Ας δούμε όμως τους παραπάνω δείκτες κινητικότητας λίγο αναλυτικότερα.

Ο Prais (1955) έδειξε ότι η μέση διάρκεια παραμονής στην κατάσταση i είναι $\frac{1}{1-p_{ii}}$, και ο Shorrocks (1978) πρότεινε τη δημιουργία ενός δείκτη κινητικότητας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\frac{N}{N-1}$ με τη μέση τιμή του αντίστροφου κλάσματος που αναφέρθηκε παραπάνω, δηλαδή:

$$M_P(P) = \frac{N}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^N (1-p_{ii})}{N} = \frac{N}{N-1} \left(\frac{N}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N p_{ii}}{N} \right) = \frac{1}{N-1} (N - tr(P)).$$

Είναι φανερό ότι ο δείκτης κινητικότητας M_E εμπλέκει ιδιοτιμές. Είναι επίσης εύκολο να αντιληφθεί κανείς ότι ικανοποιείται το κριτήριο της ακινησίας, δηλαδή $M_E \geq 0$ και παραβιάζεται το κριτήριο της «δυνατής ακινησίας» (*strong immobility*), δηλαδή $M_E > 0$, όταν όλες οι ιδιοτιμές ισούνται με τη μονάδα. Ένας άλλος δείκτης κινητικότητας που περιλαμβάνει ιδιοτιμές είναι ο δείκτης κινητικότητας που προκύπτει από τον υπολογισμό της ορίζουσας, M_D .

Ο δείκτης κινητικότητας M_2 παραβιάζει το κριτήριο της «δυνατής ακινησίας» (*strong immobility*), $M_2 > 0$, όταν $|\lambda_2| = 1$. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, για τον δείκτη κινητικότητας χρησιμοποιούμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα που δεν ισούται με τη μονάδα δηλαδή θα έχουμε $1 = \lambda_1 > |\lambda_2|$.

4.4 Δείκτης κινητικότητας βασισμένος στον πίνακα κινητικότητας

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε έναν δείκτη κινητικότητας που ορίστηκε από τους Jafry and Schuermann (2004) και που βασίζεται στις ιδιοτιμές ενός πίνακα.

Αξιοποιώντας τη Markov διαδικασία θα έχουμε την εξίσωση $x(k+1) = x(k)P$. Ακόμα ο πίνακας κινητικότητας ορίζεται όταν από τον αρχικό πίνακα αφαιρέσουμε τον ταυτοτικό πίνακα με τις ίδιες προφανώς διαστάσεις. Συνεπώς θα προκύπτει:

$$\tilde{P} = P - I,$$

όπου \tilde{P} είναι ο πίνακας κινητικότητας που προκύπτει, P είναι ο αρχικός πίνακας μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης. Αφαιρώντας από τον πίνακα μετάβασης τον ταυτοτικό πίνακα επιτυγχάνουμε να μείνει μόνο το δυναμικό μέρος του πίνακα μετάβασης, δηλαδή το κομμάτι εκείνο που δηλώνει κινητικότητα στον πίνακα P . Η τιμή του δηλώνει

το μέσο ρυθμό μετάβασης του πίνακα P , όσο πιο μεγάλη τιμή έχει τόσο πιο μεγάλη είναι η μέση πιθανότητα για αλλαγή στη πιστωτική διαβάθμιση του προϊόντος.

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο εξισώσεις, θα έχουμε:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)\tilde{P} + \mathbf{x}(k)I$$

Προφανώς όσο πιο μεγάλη είναι η νόρμα του πίνακα \tilde{P} τόσο πιο μεγάλος είναι ο βαθμός μετάβασης του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}(k+1)$. Συνεπώς όσο μεγαλύτερο είναι το «μέγεθος» του \tilde{P} , τόσο μεγαλύτερος να είναι και ο βαθμός μετάβασης του διανύσματος κατάστασης. Συνεπώς, σύμφωνα με τους Jafry and Schuermann (2004) για να ικανοποιεί ο δείκτης κινητικότητας το κριτήριο DD θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν το $\|\mathbf{x}(k)\tilde{P}\|$.

Από τη Σχέση (3.3) εύκολα προκύπτει ότι η $\|A\|$ φράζει προς τα πάνω το $\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$, δηλαδή:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|,$$

όπου \mathbf{x} είναι διανύσματα-στήλες.

Η ισότητα ισχύει μόνο για τουλάχιστον ένα μη μηδενικό διάνυσμα \mathbf{x} , το οποίο αντιπροσωπεύει τις συγκεκριμένες τιμές στις οποίες το μέτρο του πίνακα $A\mathbf{x}$, δηλαδή το $\|A\mathbf{x}\|$, μεγιστοποιείται. Το διάνυσμα \mathbf{x} που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα υπολογίζεται με βάση το ιδιοδιάνυσμα του $A'A$ που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Παρόλα αυτά, αυτό το διάνυσμα δεν αντιστοιχεί στο διάνυσμα της κατάστασης χρεοκοπίας και έτσι αντί να χρησιμοποιήσουν τη μέγιστη ιδιοτιμή, οι Jafry and Schuermann, προτείνουν τη χρήση του μέσου όρου όλων των ιδιοτιμών του πίνακα \tilde{P} . Υπολογίζουν λοιπόν τον υποθετικό «μέσο» πίνακα μετάβασης P_{avg} με τα διαγώνια στοιχεία του να ισούνται με το $(1-p)$ και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του να ισούνται με το $p/(N-1)$, όπου p μία σταθερή τιμή που ορίζεται στο $[0,1]$.

$$P_{avg} = \begin{pmatrix} 1-p & p/(N-1) & \vdots & \vdots & \vdots \\ p/(N-1) & 1-p & p/(N-1) & \vdots & \vdots \\ \vdots & p/(N-1) & 1-p & p/(N-1) & \vdots \\ \vdots & \vdots & p/(N-1) & 1-p & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Με την ενσωμάτωση όλων των ιδιοτιμών ευελπιστούν να αποτυπώσουν τα γενικά χαρακτηριστικά του \tilde{P} . Συνοψίζοντας αυτή την παράγραφο λοιπόν, οι Jafry and

Schuermann (1986) προτείνουν έναν δείκτη κινητικότητας που ορίζεται ως η μέση τιμή των ιδιοτιμών του πίνακα κινητικότητας, δηλαδή:

$$M_{SVD}(P) = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i(\tilde{P}'\tilde{P})}}{N}, \quad (4.2)$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του $\tilde{P}'\tilde{P}$.

Αξίζει να αναφερθεί ότι στη περίπτωση που έχουμε έναν πίνακα P_{avg} , όπως ορίστηκε παραπάνω, προκύπτει ότι ο δείκτης κινητικότητας θα είναι $M_{SVD}(P_{avg}) = p$.

4.5 Συγκρίσεις δεικτών κινητικότητας

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποιους δείκτες κινητικότητας που προκύπτουν από τη χρήση αποστάσεων και πιο συγκεκριμένα την απόσταση του πίνακα μετάβασης P από τον ταυτοτικό πίνακα I μηδενικής κινητικότητας καθώς επίσης θα επανεξετάσουμε και τους δείκτες κινητικότητας που βασίζονται στις ιδιοτιμές.

4.5.1 Δείκτες κινητικότητας από τις αποστάσεις L_1 και L_2

Όπως είδαμε παραπάνω οι Jafry and Schuermann ανέπτυξαν έναν δείκτη κινητικότητας, αφού πρώτα αφαίρεσαν τον ταυτοτικό πίνακα από τον πίνακα μετάβασης με σκοπό την εύρεση του δυναμικού τμήματος του πίνακα μετάβασης. Με την ίδια λογική το ίδιο συμβαίνει όταν υπολογίζουμε τις μετρικές της απόλυτης απόκλισης και της Ευκλείδειας απόστασης μεταξύ πίνακα P και I . Οι μετρικές θα είναι ως εξής:

$$\|P_A - I\|_{L_1} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |P_{i,j} - I_{i,j}|}{N^2}, \quad \|P_A - I\|_{L_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (P_{i,j} - I_{i,j})^2}}{N^2} \quad (4.3)$$

Για να γίνει η σύγκριση των μεγεθών αυτών των μετρικών και των δεικτών κινητικότητας που βασίζονται στην ιδιοτιμή, τις «βαθμονόμησαν» (*calibrate*) με βάση το P_{avg} . Δηλαδή, εκτιμώντας τις μετρικές μεταξύ P_{avg} και I , προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$\|P_{avg} - I\|_{L_1} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |P_{avg\ i,j} - I_{i,j}|}{N^2} = \frac{2p}{N}$$

$$\|P_{avg} - I\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (P_{avg\ i,j} - I_{i,j})^2}{N^2}} = \frac{p}{N\sqrt{N-1}}$$

Από εκεί και πέρα χρησιμοποιούν τους παρονομαστές αυτών των αποτελεσμάτων με σκοπό οι μετρικές να φέρνουν τα ίδια αριθμητικά αποτελέσματα με τους δείκτες κινητικότητας που βασίζονται στις ιδιοτιμές όταν εφαρμόζονται στο P_{avg} . Δηλαδή με τις κατάλληλες τροποποιήσεις οι δείκτες κινητικότητας της απόλυτης απόκλισης L_1 και της Ευκλείδειας απόστασης L_2 , θα ορίζονται ως εξής:

$$M_{dev}(P) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |P_{i,j} - I_{i,j}|}{2N} \quad (4.4)$$

$$M_{Euc}(P) = \frac{\sqrt{N-1}}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (P_{i,j} - I_{i,j})^2} \quad (4.5)$$

Δεδομένου ότι κάθε γραμμή του πίνακα P πρέπει να αθροίζει στη μονάδα, η ποσότητα που αντιπροσωπεύεται από το M_{dev} είναι ίση με τον μέσο όρο των αθροισμάτων των εκτός διαγώνιων στοιχείων που βρίσκονται ανά γραμμή του πίνακα P . Συνεπώς το M_{dev} ισούται με το $(N-1)$ πολλαπλασιασμένο με το μέσο όρο όλων των εκτός διαγώνιου στοιχείων του πίνακα P . Ως συνέπεια της χρήσης του μέσου όρου, η M_{dev} εξομαλύνει τις διαφορές που ενδεχομένως να υπάρχουν στα στοιχεία εκτός της διαγώνιου και συνεπώς αποφεύγεται να μην ισχύει το κριτήριο DD . Συνεπώς ο δείκτης κινητικότητας M_{dev} μπορεί να θεωρηθεί ως ένας χρήσιμος δείκτης κινητικότητας για τη σύγκριση πινάκων με διαφορετικά στοιχεία εκτός της διαγώνιου.

4.5.2 Επανεξετάζοντας τους δείκτες κινητικότητας που βασίζονται στις ιδιοτιμές

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια μικρή ανάλυση των δεικτών κινητικότητας που βασίζονται στις ιδιοτιμές P όπως διατυπώθηκε από τους Jafry and Schuermann (2004). Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα δύο καταστάσεων, όπου δεν υπάρχει κατάσταση απορρόφησης, κατάσταση χρεοκοπίας, τότε θα έχουμε τον πίνακα μετάβασης :

$$\begin{pmatrix} 1 - p_1 & p_1 \\ p_2 & 1 - p_2 \end{pmatrix}, \text{ όπου } 0 \leq p_1 \leq 1 \text{ και } 0 \leq p_2 \leq 1$$

Εφαρμόζοντας στον παραπάνω πίνακα τους δείκτες κινητικότητας που βασίζονται στις ιδιοτιμές σύμφωνα με τους Gewek et al (1986) καθώς και τους δείκτες κινητικότητας M_{dev} ,

M_{euc} και M_{SVD} που αναφέραμε σε προηγούμενες ενότητες, θα προκύψουν οι παρακάτω απλές εκφράσεις:

$$M_{SVD} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p_1^2 + p_2^2} , M_{euc} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{p_1^2 + p_2^2} , M_{dev} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

$$M_p = M_D = M_E = M_2 = p_1 + p_2$$

Είναι προφανές ότι όλοι οι παραπάνω δείκτες κινητικότητας ικανοποιούνται ως προς τη μονοτονία και ως προς το DD κριτήριο. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση δισδιάστατου πίνακα, οι M_{SVD} και M_{euc} έχουν το ίδιο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα και οι δύο δείκτες κινητικότητας καθορίζονται από τη ρίζα των εκτός διαγώνιου στοιχείων σε τέτοιο βαθμό ώστε το στοιχείο με τη μεγαλύτερη τιμή μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα. Ακόμα παρατηρούμε ότι οι δείκτες κινητικότητας M_p , M_D , M_E και M_2 είναι παρόμοιοι στη συγκεκριμένη περίπτωση, και είναι ευαίσθητοι στο άθροισμα των στοιχείων εκτός της διαγώνιου, (p_1+p_2) , και συνεπώς είναι ευαίσθητοι και ως προς το άθροισμα των στοιχείων που ανήκουν στη διαγώνιο $(1 - p_1 + 1 - p_2)$.

Ας εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία για έναν (3×3) πίνακα. Έστω ο τρισδιάστατος πίνακας:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_2 & p_2 \\ 0 & p_3 & 1 - p_3 \end{pmatrix}, \text{όπου } 0 \leq p_1 \leq 1 \text{ και } 0 \leq p_2 \leq 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις, οι δείκτες κινητικότητας θα έχουν ως εξής:

$$M_{SVD} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_1\sqrt{3(p_2^2 + p_3^2)}} , M_{euc} = \frac{2}{3}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

$$M_{dev} = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) , M_p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$M_D = 1 - |(1 - p_1)(1 - (p_2 + p_3))| = (p_1 + p_2 + p_3) - p_1(p_2 + p_3) ,$$

$$M_E = \frac{1}{2}(1 - p_1 - |1 - (p_2 + p_3)|) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$M_2 = 1 - \max|1 - (p_2 + p_3)|, |1 - p_1| = \min(p_2 + p_3), p_1 ,$$

για μικρά p_1 , p_2 και p_3 μπορούν να απαλειφθούν τα απόλυτα και έτσι προκύπτει αυτή η πιο απλουστευμένη μορφή.

Αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, εδώ οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} δεν είναι πανομοιότυποι καθώς είναι ίδιοι μόνο ως προς τη δομή. Παρατηρούμε ότι και οι δύο αυτοί δείκτες κινητικότητας είναι ευαίσθητοι στα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται εκτός της διαγώνιου όταν αυτά υψωθούν στο τετράγωνο.

Οι υπόλοιποι δείκτες κινητικότητας M_p , M_D , M_E και M_2 αντίθετα πάλι με την προηγούμενη περίπτωση δεν είναι πανομοιότυποι αλλά και εδώ παρατηρούμε ότι έχουν παρόμοια δομή ο ένας με τον άλλον. Από τις εκφράσεις συμπεραίνουμε ότι οι δείκτες κινητικότητας M_p , M_D , M_E και M_{dev} είναι ευαίσθητοι ως προς το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα που βρίσκονται εκτός της διαγώνιου. Συνεπώς οι δείκτες κινητικότητας θα επηρεάζονται από το άθροισμα των όρων που ανήκουν στη διαγώνιο του πίνακα. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο δείκτης κινητικότητας M_2 χρησιμοποιεί μόνο μία από τις ιδιοτιμές και ως εκ τούτου ενσωματώνει περιορισμένες πληροφορίες σε σύγκριση με τους άλλους.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} είναι ευαίσθητοι στα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται εκτός της διαγώνιου όταν αυτά υψωθούν στο τετράγωνο και συνεπώς είναι ξεκάθαρο ότι ικανοποιούν το κριτήριο DD . Αυτό είναι προφανές από την άποψη ότι οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} «αναζητούν» και ενισχύουν τους όρους του πίνακα P που βρίσκονται εκτός της διαγώνιου.

Αντίθετα, οι δείκτες κινητικότητας M_p , M_D , M_E και M_{dev} είναι ευαίσθητοι ως προς το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα που βρίσκονται εκτός της διαγώνιου και συνεπώς «αναζητούν» και ενισχύουν τους όρους του πίνακα P που βρίσκονται εντός της διαγώνιου του. Παρόλα αυτά, στους πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης οι όροι της διαγώνιου θεωρούνται αδιάφοροι και αμελητέας σημασίας.

Ως εκ τούτου, για τη σύγκριση πινάκων μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης προτιμώνται γενικά οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} , καθώς είναι ιδιαίτερα ευαίσθητοι στα στοιχεία του πίνακα που είναι εκτός της διαγώνιου και τα οποία παρουσιάζουν σημαντικό οικονομικό ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμένα μας ενδιαφέρουν σε μεγάλο βαθμό τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν στη στήλη της «χρεοκοπίας».

4.6 Bayesian προσέγγιση και δείκτης Prais – Bibby

Σε αυτή την παράγραφο θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στους Bayesian δείκτες κινητικότητας καθώς και στον δείκτη κινητικότητας των Prais-Bibby. Γενικά παρατηρείται πολύ συχνά το φαινόμενο κάθε κατάσταση να ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή. Σε

αυτή την περίπτωση η αρχική κατανομή των καταστάσεων επηρεάζει την κινητικότητα. Μια προσέγγιση που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της κινητικότητας για αυτές τις περιπτώσεις είναι η Bayesian προσέγγιση.

Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι η τυχαία μεταβλητή X εκφράζει την αρχική κατάσταση, δηλαδή το σημείο αφετηρίας από το οποίο ξεκινάμε. Αντίστοιχα η τυχαία μεταβλητή Y εκφράζει την τελική κατάσταση, δηλαδή την κατάσταση στην οποία καταλήγουμε. Η πιθανότητα ένα άτομο, στη δική μας περίπτωση αναφερόμαστε σε ένα ομόλογο, να φτάσει στη κατάσταση j δεδομένου ότι αρχικά βρίσκεται στη κατάσταση i συμβολίζεται ως p_{ij} . Για λόγους ευκολίας θέτουμε το $P(X=i) = p_{0i}$. Χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα του Bayes έχουμε ότι:

$$p_{ij} = P(Y = j|X = i) = \frac{P(Y=j, X=i)}{P(X=i)} \quad (4.6)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ισότητα, εύκολα προκύπτει ότι $p_{ij}p_{0i} = P(Y = j, X = i)$. Κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις προκύπτει ότι:

$$P(X = i|Y = j) = \frac{P(Y=j, X=i)}{P(Y=j)} = \frac{p_{ij}p_{0i}}{\sum_{i=1}^k p_{ij}p_{0i}} \quad (4.7)$$

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π.) θα έχουμε ότι $P(Y = j) = \sum_{i=1}^k p_{ij}p_{0i}$.

Ακόμα προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^k P(X = i|Y = j) = 1$ για κάθε i , άρα η πιθανότητα θα είναι μια συνάρτηση μάζας πιθανότητας.

Αξιοποιώντας την Σχέση (4.7) προκύπτουν οι Bayesian δείκτες κινητικότητας. Πιο συγκεκριμένα θα έχουμε:

- Ο Bayesian δείκτης ανοδικής κινητικότητας θα είναι

$$M_{BU}(P) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{\sum_{i=1}^{j-1} p_{ij}p_{0i}}{\sum_{i=1}^k p_{ij}p_{0i}} \quad (4.8)$$

- Ο Bayesian δείκτης καθοδικής κινητικότητας θα είναι

$$M_{BD}(P) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{\sum_{i=j+1}^k p_{ij}p_{0i}}{\sum_{i=1}^k p_{ij}p_{0i}} \quad (4.9)$$

- Ο Bayesian δείκτης ακινησίας θα είναι

$$M_{BI}(P) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{p_{jj}p_{0i}}{\sum_{i=1}^k p_{ij}p_{0i}} \quad (4.10)$$

Οι παραπάνω δείκτες κινητικότητας προκύπτουν, αρκεί να διακρίνουμε για τη Σχέση (4.7) τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

• Όταν οι πιθανότητες έχουν $i < j$, τότε έχουμε ανοδική κινητικότητα καθώς η τελική κατάσταση, j , είναι μεγαλύτερη από την αρχική κατάσταση i . Η συνολική ανοδική

πιθανότητα είναι: $\frac{\sum_{i=1}^{j-1} p_{ij} p_{oi}}{\sum_{i=1}^k p_{ij} p_{oi}}$.

• Όταν οι πιθανότητες έχουν $i > j$, τότε έχουμε καθοδική κινητικότητα καθώς η τελική κατάσταση, j , είναι μικρότερη από την αρχική κατάσταση i . Η συνολική καθοδική

πιθανότητα είναι: $\frac{\sum_{i=j+1}^k p_{ij} p_{oi}}{\sum_{i=1}^k p_{ij} p_{oi}}$.

• Όταν οι πιθανότητες έχουν $i = j$, τότε δε θα έχουμε μετάβαση από μία κατάσταση σε μία άλλη οπότε θα έχουμε ακινησία. Η πιθανότητα ακινησίας είναι: $\frac{p_{jj} p_{oi}}{\sum_{i=1}^k p_{ij} p_{oi}}$, όταν $i = j$.

Οι τελικές καταστάσεις, j , μπορούν να πάρουν οποιοσδήποτε τιμές που να ανήκουν στο σύνολο καταστάσεων $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Υπολογίζοντας τις μέσες τιμές αυτών των πιθανοτήτων για όλες τις καταστάσεις j προκύπτουν οι Bayesian δείκτες κινητικότητας.

Οι παραπάνω τρεις Bayesian δείκτες κινητικότητας συνδέονται μεταξύ τους καθώς σε κάθε πίνακα μετάβασης P θα ισχύει ότι

$$M_{BU}(P) + M_{BD}(P) + M_{BI}(P) = 1. \quad (4.11)$$

Ένας ακόμα δείκτης κινητικότητας είναι αυτός των Prais-Bibby, ο οποίος εκφράζεται ως εξής:

$$M_{P,B} = 1 - \frac{tr(A)}{n} \quad (4.12)$$

Ο συγκεκριμένος δείκτης κινητικότητας έχει κάτω φράγμα την τιμή μηδέν και άνω φράγμα την τιμή ένα. Θα έχει την τιμή μηδέν, κάτω όριο, στη περίπτωση που επιτυγχάνεται τέλεια ακινησία (*perfect immobility*). Από την άλλη όταν έχει την ίδια τιμή με το άνω όριο του, δηλαδή την τιμή ένα, τότε θα έχουμε μια κατάσταση όπου όλα τα άτομα, στη περίπτωση μας πιστωτικά παράγωγα, μετακινούνται από τις αντίστοιχες καταστάσεις τους. Υψηλότερα επίπεδα κινήσεων μακριά από τη διαγώνιο υποδηλώνουν επίσης και υψηλότερο βαθμό κινητικότητας.

Ο δείκτης κινητικότητας των Prais-Bibby αγνοεί τις αποστάσεις που «καλύφθηκαν» από τα ομόλογα, δηλαδή το μέγεθος των «αλμάτων» από μία πιστοληπτική κατάσταση σε μία άλλη. Μια περίπτωση που αξίζει να αναφέρουμε είναι όταν οι αρχικές πιθανότητες είναι ίδιες. Σε αυτή την περίπτωση η κινητικότητα προκύπτει από την αφαίρεση της μονάδας με τη μη κινητικότητα, δηλαδή $1 - (M_{BU} + M_{BD})$. Είναι φανερό ότι ο

συγκεκριμένος δείκτης συμπίπτει με τον δείκτη κινητικότητας των Prais-Bibby. Συνεπώς θα προκύπτει:

$$1 - (M_{BU} + M_{BD}) = M_{P,B} \quad (4.13)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογές των τεχνικών σύγκρισης πινάκων

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα εστιάσουμε στη σύγκριση δεικτών κινητικότητας όταν εφαρμόζονται τόσο σε απλούς πίνακες μετάβασης, όσο και σε πραγματικούς πίνακες. Πιο συγκεκριμένα για τη σύγκριση των δεικτών κινητικότητας σε πραγματικούς πίνακες θα κάνουμε μια εφαρμογή στην Rstudio.

5.2 Σύγκριση απλών πινάκων με τη χρήση δεικτών κινητικότητας

Παρακάτω παρατίθεται μια εφαρμογή που δόθηκε από τους Jafry and Schuermann (2004). Για να γίνει σύγκριση των διάφορων δεικτών κινητικότητας θα τους αναλύσουμε και θα τους εφαρμόσουμε πάνω σε απλούς πίνακες και από εκεί και πέρα θα παρουσιάσουμε ορισμένες αριθμητικές συγκρίσεις.

Θεωρούμε δύο πίνακες (3x3) διαστάσεων:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix},$$

οι οποίοι έχουν τα ίδια διαγώνια στοιχεία, αλλά διαφορετικές κατανομές εκτός της διαγώνιου. Προφανώς και οι δύο πίνακες πρέπει να ικανοποιούν το κριτήριο DD . Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς, τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα M_{SVD} , M_{dev} , M_{euc} , M_P , M_D , M_E και M_2 είναι:

$$M_{SVD}(P_1) = 0.32$$

$$M_{SVD}(P_2) = 0.35$$

$$M_{dev}(P_1) = 0.31$$

$$M_{dev}(P_2) = 0.31$$

$$M_{euc}(P_1) = 0.32$$

$$M_{euc}(P_2) = 0.36$$

$$M_P(P_1) = 0.44$$

$$M_P(P_2) = 0.44$$

$$M_D(P_1) = 0.72$$

$$M_D(P_2) = 0.72$$

$$M_E(P_1) = 0.44$$

$$M_E(P_2) = 0.44$$

$$M_2(P_1) = 0.41$$

$$M_2(P_2) = 0.41$$

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι προφανές ότι οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} έχουν διαφορετικές τιμές για τους πίνακες P_1 και P_2 και συνεπώς ικανοποιούν το

κριτήριο DD . Επίσης, παρατηρείται αύξηση όταν η πιθανότητα εκτός της διαγώνιου είναι συγκεντρωμένη, όπως γίνεται στο πίνακα P_2 , και δεν είναι αραιωμένη, όπως στον πίνακα P_1 . Όταν λέμε ότι η πιθανότητα εκτός της διαγώνιου είναι συγκεντρωμένη εννοούμε ότι οι πιθανότητες σε κάθε γραμμή συγκεντρώνονται σε μόνο δύο στοιχεία, όπου το ένα από αυτά είναι το στοιχείο της διαγώνιου. Αντίθετα λέμε ότι η πιθανότητα εκτός της διαγώνιου είναι αραιωμένη όταν οι πιθανότητες σε κάθε γραμμή κατανέμονται σε όλα τα στοιχεία της γραμμής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στη Παράγραφο 4.5.2, οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} είναι ευαίσθητοι ως προς τα τετράγωνα των στοιχείων που βρίσκονται εκτός της διαγώνιου. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι σε αυτό το παράδειγμα οι δείκτες κινητικότητας M_{dev} , M_P , M_D , M_E και M_2 δίνουν πανομοιότυπες τιμές και για τους δύο πίνακες, με αποτέλεσμα να παραβιάζεται το DD κριτήριο και συνεπώς καθίστανται λιγότερο επιθυμητοί.

Παρακάτω θα δούμε ένα παράδειγμα με δύο πίνακες πέντε διαστάσεων ($5-d$):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς, τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα M_{SVD} , M_{dev} , M_{euc} , M_P , M_D , M_E και M_2 θα είναι:

$$\begin{array}{ll} M_{SVD}(P_1) = 0.50 & M_{SVD}(P_2) = 0.58 \\ M_{dev}(P_1) = 0.51 & M_{dev}(P_2) = 0.51 \\ M_{euc}(P_1) = 0.50 & M_{euc}(P_2) = 0.60 \\ M_P(P_1) = 0.63 & M_P(P_2) = 0.63 \\ M_D(P_1) = 0.98 & M_D(P_2) = 1 \\ M_E(P_1) = 0.63 & M_E(P_2) = 0.63 \\ M_2(P_1) = 0.6 & M_2(P_2) = 0.5 \end{array}$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα με τους πίνακες τριών διαστάσεων, και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι οι M_{SVD} και M_{euc} διαφέρουν μεταξύ των πινάκων P_1 και P_2 . Προφανώς αυτοί οι δείκτες κινητικότητας θα παίρνουν μεγαλύτερες τιμές για τον πίνακα P_2 καθώς η πιθανότητα εκτός της διαγώνιου είναι συγκεντρωμένη σε αντίθεση με

τον πίνακα P_1 και συνεπώς οι δείκτες κινητικότητας θα παίρνουν μικρότερες τιμές για τον πίνακα P_1 . Παρατηρούμε ότι οι δείκτες κινητικότητας M_{dev} , M_P και M_E δίνουν πανομοιότυπες τιμές και για τους δύο πίνακες, με αποτέλεσμα να παραβιάζεται το DD κριτήριο και συνεπώς να καθίστανται λιγότερο επιθυμητοί, δηλαδή θεωρούμε ότι είναι «τυφλοί» στις όποιες παραλλαγές υπάρξουν στην κατανομή της «μάζας» που βρίσκεται εκτός της διαγώνιου.

Αντίθετα όμως με το προηγούμενο παράδειγμα, σε αυτή την περίπτωση οι δείκτες κινητικότητας M_D και M_2 κάνουν διάκριση μεταξύ των δύο πινάκων, γεγονός που στο παράδειγμα με τους πίνακες τριών διαστάσεων δεν ίσχυε. Από τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} , M_{euc} και M_D αποδίδουν μεγαλύτερες τιμές για τον πίνακα P_2 , ενώ από την άλλη πλευρά ο μόνος δείκτης κινητικότητας που αποδίδει μεγαλύτερη τιμή για τον πίνακα P_1 είναι ο M_2 . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι εμφανές ότι οι δύο δείκτες κινητικότητας που είναι προτιμότεροι από τους παραπάνω και ικανοποιούν το κριτήριο DD είναι οι M_{SVD} και M_{euc} . Για να γίνει διάκριση ποιος από αυτούς τους δύο δείκτες κινητικότητας, M_{SVD} και M_{euc} , είναι προτιμότερος θα χρησιμοποιήσουμε δύο νέους πίνακες που διαφέρουν μόνο ως προς τα στοιχεία που είναι εκτός διαγώνιου.

Θα έχουν δηλαδή την εξής μορφή:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα για τους δείκτες κινητικότητας, M_{SVD} και M_{euc} , θα είναι:

$$\begin{aligned} M_{SVD}(P_1) &= 0.35 & M_{SVD}(P_2) &= 0.34 \\ M_{euc}(P_1) &= 0.36 & M_{euc}(P_2) &= 0.36 \end{aligned}$$

Από τους νέους αυτούς πίνακες προκύπτει ότι ο δείκτης κινητικότητας M_{SVD} διαφέρει για κάθε πίνακα και συνεπώς θα ικανοποιεί το κριτήριο DD . Αντίθετα ο δείκτης κινητικότητας M_{euc} δίνει το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα και για τους δύο πίνακες. Συνεπώς ο δείκτης κινητικότητας M_{SVD} ικανοποιεί το κριτήριο DD σε πιο ευρύ βαθμό σε σχέση με τον δείκτη κινητικότητας M_{euc} και επομένως τον προτιμούμε περισσότερο. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δύο παραπάνω πίνακες P_1 και P_2 διαφέρουν μόνο ως προς την

κατανομή του περιεχομένου εκτός της διαγώνιου. Ιδανικά προκύπτει ότι ο δείκτης κινητικότητας αποδίδει μεγαλύτερες τιμές όταν τα στοιχεία του πίνακα εκτός της διαγώνιου κατανέμονται πιο μακριά από αυτή. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει διαισθητικά αρκεί να αναλογιστεί κανείς ότι όσο πιο μακριά κατανέμονται τα στοιχεία του πίνακα από τη διαγώνιο τόσο πιο μεγάλη είναι η ενδεχόμενη κινητικότητα που μπορεί να παρατηρηθεί από τη μία κατάσταση στην επόμενη. Αυτό το κριτήριο είναι γνωστό και ως κριτήριο του ισχυρά διακριτά κατανεμημένου δείκτη κινητικότητας (*strong-distribution-discriminatory*), ή αλλιώς *SDD*. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρούμε όμως ότι ο δείκτης κινητικότητας M_{SVD} δεν ικανοποιεί το κριτήριο *SDD*, έχει όπως παρουσιάζεται και από τα αποτελέσματα αντίθετη συμπεριφορά καθώς αποδίδει μεγαλύτερη αξία για τον πίνακα P_1 από ότι για τον P_2 . Μέχρι και σήμερα δεν έχουμε καταφέρει να επινοήσουμε έναν δείκτη κινητικότητας που να ικανοποιεί το κριτήριο *SDD* και να μην απαιτείται να υπολογιστεί η απόσταση κάθε στοιχείου του πίνακα από τη διαγώνιο.

5.3 Σύγκριση πραγματικών πινάκων με τη χρήση δεικτών κινητικότητας

Παρακάτω, θα εστιάσουμε στη σύγκριση δεικτών κινητικότητας όταν εφαρμόζονται σε πραγματικούς ιστορικούς πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης σύμφωνα με τους S&P.

Όπως έγινε και με τους απλούς πίνακες μετάβασης, για να συγκρίνουμε τους διάφορους δείκτες κινητικότητας, θα τους αναλύσουμε και θα τους εφαρμόσουμε πάνω σε πραγματικούς πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης και από εκεί και πέρα θα παρουσιάσουμε ορισμένες αριθμητικές συγκρίσεις. Στο Παράρτημα Ε παραθέτουμε τον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε στην Rstudio για να προκύψουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

Θεωρώντας δύο πίνακες οχτώ διαστάσεων ($8-d$), με P_1 να είναι ένας μονοετής πίνακας μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης για το έτος 1996 σύμφωνα με του S&P και P_2 ένας συγκεντρωμένος πίνακας μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης με στοιχεία στη διαγώνιο ίδια με αυτά του πίνακα P_1 . Επίσης ένα ή δύο από τα στοιχεία της κάθε γραμμής που «συνορεύουν» με τα στοιχεία της διαγωνίου θα έχουν τέτοιες τιμές έτσι ώστε να ικανοποιείται η Σχέση (1.1). Τα υπόλοιπα στοιχεία θα ισούνται με το μηδέν. Συνεπώς θα δημιουργείται ένας πίνακας μετάβασης.

Αρχική βαθμολογία	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.9081	0.0833	0.0068	0.0006	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0070	0.9065	0.0779	0.0064	0.0006	0.0014	0.0002	0.0000
A	0.0009	0.0227	0.9105	0.0552	0.0074	0.0026	0.0001	0.0006
BBB	0.0002	0.0033	0.0595	0.8693	0.0530	0.0117	0.0012	0.0018
BB	0.0003	0.0014	0.0067	0.0773	0.8053	0.0884	0.0100	0.0106
B	0.0000	0.0011	0.0024	0.0043	0.0648	0.8346	0.0407	0.0520
CCC	0.0022	0.0000	0.0022	0.0130	0.0238	0.1124	0.6486	0.1979
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Πίνακας 5.1. *Standard & Poor's CreditWeek, April 15, 1996*

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.9081	0.0919	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.9065	0.09350	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0275	0.91050	0.06200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.06536	0.86930	0.06534	0.0000	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.09736	0.80530	0.09734	0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.05530	0.83460	0.0551	0.0550
CCC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.11710	0.6486	0.2343
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Πίνακας 5.2. Ένας πίνακας μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης με στοιχεία στη διαγώνιο ίδια με αυτά του Πίνακα 5.1.

Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς με τη χρήση της Rstudio που θα δούμε και πιο αναλυτικά στη συνέχεια, τα αριθμητικά αποτελέσματα για τα M_{SVD} , M_{dev} , M_{euc} , M_P , M_D , M_E και M_2 θα είναι:

$$M_{SVD}(P_1) = 0.1544167$$

$$M_{SVD}(P_2) = 0.1582741$$

$$M_{dev}(P_1) = 0.1396375$$

$$M_{dev}(P_2) = 0.1396375$$

$$M_{euc}(P_1) = 0.1898337$$

$$M_{euc}(P_2) = 0.1978902$$

$$M_P(P_1) = 0.1595857$$

$$M_P(P_2) = 0.1595857$$

$$M_D(P_1) = 0.7243921$$

$$M_D(P_2) = 0.7264651$$

$$M_E(P_1) = 0.1595857$$

$$M_E(P_2) = 0.1595857$$

$$M_2(P_1) = 0.0118222$$

$$M_2(P_2) = 0.008254$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι οι M_{SVD} και M_{euc} διαφέρουν μεταξύ των πινάκων P_1 και P_2 . Προφανώς αυτοί οι δείκτες κινητικότητας θα παίρνουν μεγαλύτερες τιμές για τον πίνακα P_2 καθώς έχει την πιθανότητα εκτός της διαγώνιου συγκεντρωμένη σε αντίθεση με τον πίνακα P_1 και συνεπώς οι δείκτες κινητικότητας θα παίρνουν μικρότερες τιμές για τον πίνακα P_1 . Οι δείκτες κινητικότητας M_{dev} , M_P και M_E δίνουν πανομοιότυπες τιμές και για τους δύο πίνακες, με αποτέλεσμα να παραβιάζεται το DD κριτήριο και συνεπώς να καθίστανται λιγότερο ελκυστικοί.

Επιπλέον, οι δείκτες κινητικότητας M_D και M_2 κάνουν διάκριση μεταξύ των δύο πινάκων. Από τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} , M_{euc} και M_D αποδίδουν μεγαλύτερες τιμές για τον πίνακα P_2 , ενώ από την άλλη πλευρά ο μόνος δείκτης κινητικότητας που αποδίδει μεγαλύτερη τιμή για τον πίνακα P_1 είναι ο M_2 . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι εμφανές ότι οι δύο δείκτες κινητικότητας που είναι προτιμότεροι από τους παραπάνω και ικανοποιούν το κριτήριο DD είναι οι M_{SVD} και M_{euc} .

Από ανάλυση που έχουμε κάνει στην Παράγραφο 5.2 προκύπτει ότι ο δείκτης κινητικότητας M_{SVD} διαφέρει για κάθε πίνακα με ίδια στοιχεία στη διαγώνιο και συνεπώς θα ικανοποιεί το κριτήριο DD σε πιο ευρύ βαθμό σε σχέση με τον δείκτη κινητικότητας M_{euc} που δίνει το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα για δύο πίνακες με ίδια στοιχεία στη διαγώνιο. Συνεπώς ο δείκτης κινητικότητας M_{SVD} ικανοποιεί το κριτήριο DD σε πιο ευρύ βαθμό σε σχέση με τον δείκτη κινητικότητας M_{euc} και επομένως τον προτιμούμε περισσότερο.

5.4 Σύγκριση δεικτών κινητικότητας με το πέρασμα του χρόνου

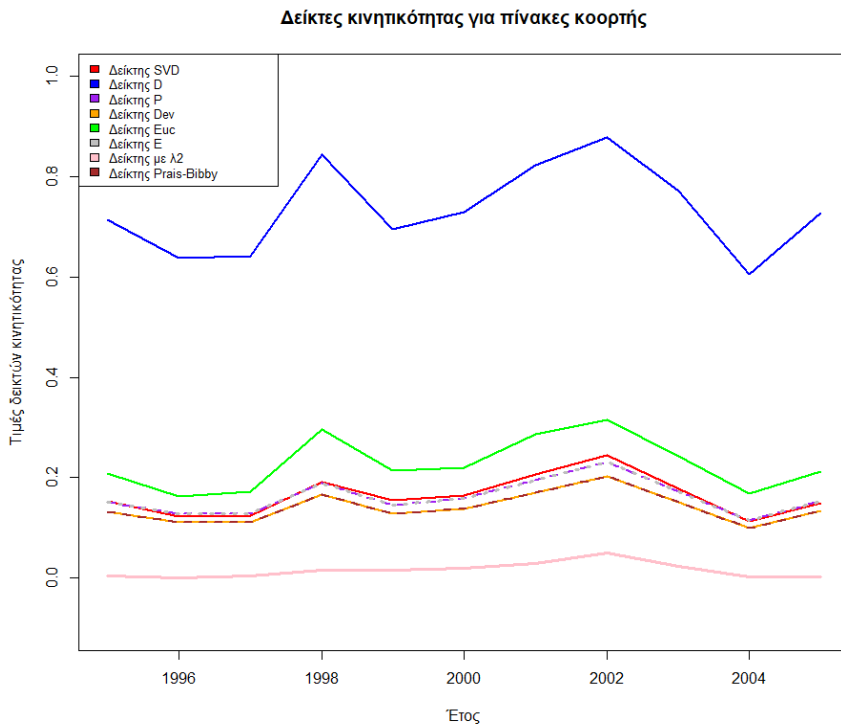
Χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές μεθόδους, είτε με τη χρήση πινάκων κοορτής είτε με τη χρήση ομοιογενών πινάκων, μπορούμε να αποκτήσουμε μια γενική εικόνα για τις εμπειρικές εκτιμήσεις του πίνακα μετάβασης P . Παρακάτω θα αξιοποιήσουμε ετήσιους ιστορικούς πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης για τους οφειλέτες που υπήρχαν σε όλο τον κόσμο το χρονικό διάστημα 1995-2005 σύμφωνα με την S&P ([Annual 2005 Global](#)

Όταν λέμε πίνακες κοορτής εννοούμε πίνακες που οι πιθανότητες μετάβασης υπολογίζονται με βάση τις ιστορικές συχνότητες μετάβασης. Με πιο απλά λόγια, η μέθοδος κοορτής δημιουργεί έναν καινούργιο πίνακα μετάβασης όπου κάθε στοιχείο του υπολογίζεται από τον τύπο $\frac{n_{ij}}{n_i}$, όπου n_{ij} δηλώνει τον αριθμό των οφειλετών που στην αρχή του χρόνου είναι στη πιστοληπτική κατάσταση i και στο τέλος του χρόνου είναι στη κατάσταση j . Επιπλέον, η τιμή n_i δηλώνει τον αριθμό των οφειλετών που στην αρχή του χρόνου είναι στη κατάσταση i .

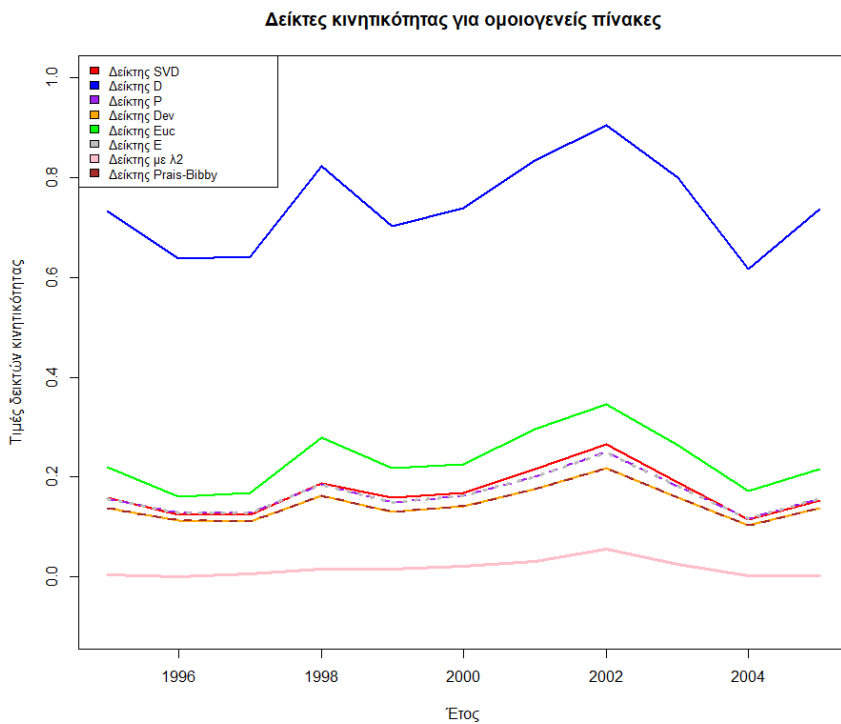
Στη Παράγραφο 1.4.2 έχουμε διευκρινίσει αναλυτικά τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν για να θεωρείται ένας πίνακας A ως γεννήτορας πίνακας. Όταν γνωρίζουμε τον γεννήτορα πίνακα, μπορούμε με τη χρήση της Σχέσης (1.6) να βρούμε τον $(K \times K)$ πίνακα μετάβασης με t χρονικές περιόδους. Ένας τέτοιος γεννήτορας πίνακας μπορεί πολύ εύκολα να δημιουργηθεί αν όλα τα στοιχεία του πίνακα εκτός της διαγωνίου ισούνται με $\frac{n_{ij}}{\int_0^T Y_i(s) ds}$, όπου $Y_i(s)$ να δηλώνει τον αριθμό των οφειλετών που βρίσκονται στην πιστοληπτική κατηγορία i τη χρονική στιγμή s . Για να κατανοήσουμε καλύτερα πως υπολογίζεται το ολοκλήρωμα αρκεί να δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε τις πιστοληπτικές κατηγορίες A , B και D . Αν υποθέσουμε ότι στην αρχή τους έτους πέντε οφειλέτες βρίσκονται στη κατηγορία A και ότι δύο από αυτούς θα μεταφέρονται τον Σεπτέμβριο του ίδιου έτους στη κατάσταση B , τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^T Y_A(s) ds$ θα ισούται με $3 + \frac{9}{12}2$, καθώς ο Σεπτέμβριος είναι ο ένατος μήνας. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι στη μέση του έτους έρχονται 3 οφειλέτες από μια άλλη πιστοληπτική κατηγορία στη κατάσταση A , τότε το ολοκλήρωμα θα ισούται με $3 + \frac{9}{12}2 + \frac{6}{12}3$. Προφανώς θα ισχύει ότι $0 \leq s \leq T$. Η τιμή n_{ij} όπως και πριν δηλώνει το πλήθος των οφειλετών που στην αρχή του χρόνου είναι στη κατάσταση i και στο τέλος του χρόνου είναι στη κατάσταση j .

Στα Σχήματα 5.1 και 5.2 απεικονίζονται οι δείκτες κινητικότητας για τους πίνακες κοορτής και για τους χρονικά ομοιογενείς πίνακες αντίστοιχα. Στο Παράρτημα Z παραθέτουμε τον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε στην Rstudio για να απεικονίσουμε τις συγκεκριμένες γραφικές παραστάσεις καθώς και ένα ενδεικτικό κομμάτι του κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για να προκύψουν τα παρακάτω αποτελέσματα. Ένα πρώτο συμπέρασμα

που βγαίνει είναι ότι όλοι οι δείκτες κινητικότητας, εκτός των M_2 και M_{SVD} , έχουν μεγάλο βαθμό συσχέτισης.



Σχήμα 5.1. Σύγκριση δεικτών κινητικότητας για τους πίνακες κοορτής



Σχήμα 5.2. Σύγκριση δεικτών κινητικότητας για τους ομοιογενείς πίνακες

Αυτό είναι ακόμα πιο σαφές αν μελετήσουμε τον Πίνακα 5.3, που απεικονίζεται στη συνέχεια και που περιέχει τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας που βρίσκονται στο Σχήμα 5.1. Αντίστοιχα προκύπτει ο Πίνακας 5.4. που περιέχει τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας που βρίσκονται στο Σχήμα 5.2. Από τους πίνακες καταλαβαίνουμε επίσης ότι υπάρχει σχεδόν τέλειος βαθμός συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας M_P , M_{dev} , $M_{P,B}$ και M_E .

	M_{SVD}	M_{euc}	M_{dev}	$M_{P,B}$	M_P	M_E	M_D	M_2
M_{SVD}	1	0.97028	0.99427	0.99427	0.99427	0.99427	0.96801	0.92493
M_{euc}		1	0.97182	0.97182	0.97182	0.97187	0.98694	0.84090
M_{dev}			1	1	1	1	0.97920	0.89511
$M_{P,B}$				1	1	1	0.97920	0.89511
M_P					1	1	0.97920	0.89511
M_E						1	0.97926	0.89503
M_D							1	0.81343
M_2								1

Πίνακας 5.3. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας από τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.1.

	M_{SVD}	M_{euc}	M_{dev}	$M_{P,B}$	M_P	M_E	M_D	M_2
M_{SVD}	1	0.98459	0.99528	0.99528	0.99528	0.99528	0.97144	0.94551
M_{euc}		1	0.98209	0.98209	0.98209	0.98212	0.98584	0.90457
M_{dev}			1	1	1	1	0.97841	0.92331
$M_{P,B}$				1	1	1	0.97841	0.92331
M_P					1	1	0.97841	0.92331
M_E						1	0.97846	0.92327
M_D							1	0.85595
M_2								1

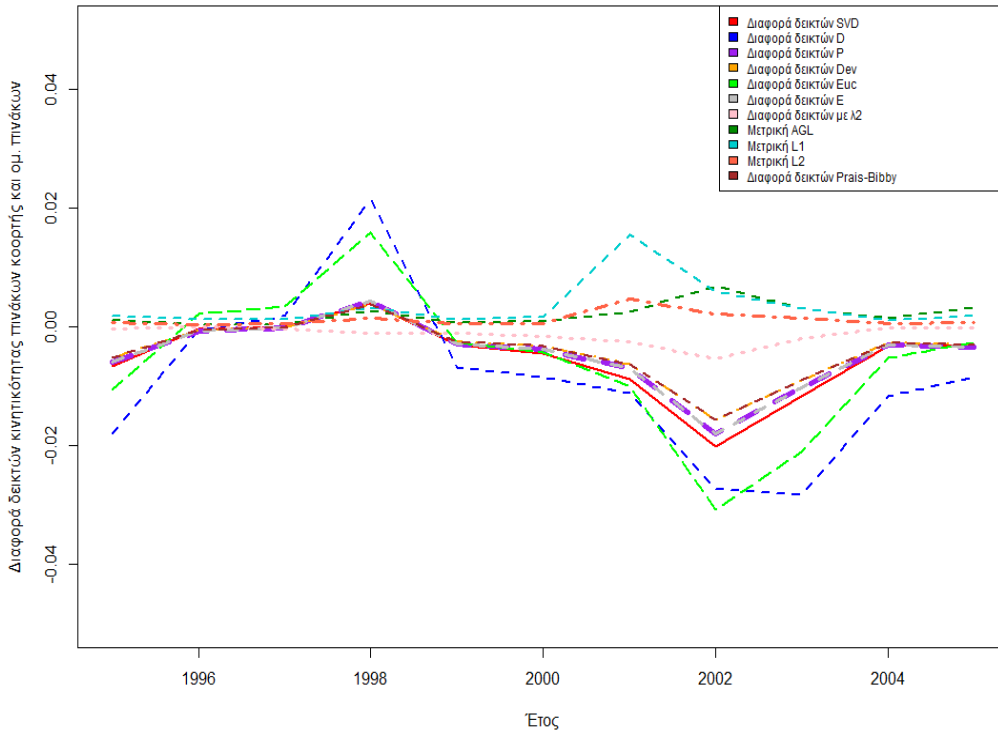
Πίνακας 5.4. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των δεικτών κινητικότητας από τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.2.

Από το Σχήμα 5.1. και το Σχήμα 5.2. οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} , M_{euc} , M_{dev} , M_P , $M_{P,B}$ και M_E έχουν πάνω κάτω σχεδόν την ίδια τιμή. Ο

δείκτης κινητικότητας M_D έχει σταθερά μεγαλύτερη τιμή από τους υπόλοιπους δείκτες κινητικότητας, και αντίθετα ο δείκτης κινητικότητας M_2 έχει σταθερά μικρότερη τιμή από όλους τους υπόλοιπους δείκτες κινητικότητας, κάτι απόλυτα φυσιολογικό καθώς οι πίνακες έχουν τη δεύτερη ιδιοτιμή τους πολύ κοντά στη μονάδα.

Για να γίνει μια σύγκριση μεταξύ των δεικτών κινητικότητας για τους ομοιογενείς πίνακες και τους πίνακες κοορτής, δημιουργείται ένα νέο σχήμα, το Σχήμα 5.3., από την διαφορά των δεικτών κινητικότητας των πινάκων κοορτής και των αντίστοιχων δεικτών κινητικότητας των ομοιογενών πινάκων. Αυτό το νέο σχήμα δηλαδή δημιουργείται πολύ απλά από την αφαίρεση των τιμών των πινάκων κοορτής που υπάρχουν στο Σχήμα 5.1. με τις τιμές των ομοιογενών πινάκων που υπάρχουν στο Σχήμα 5.2. Για τον δείκτη κινητικότητας M_{SVD} , η διαφορά που περιγράψαμε παραπάνω θα συμβολίζεται με ΔM_{SVD} . Με την ίδια λογική συμβολίζουμε και τις υπόλοιπες μετρικές. Το Σχήμα 5.3. συμπληρώνεται προσθέτοντας τις μετρικές που είδαμε στα Κεφάλαια 3.3 και 3.4, δηλαδή τη μετρική με βάση τα ιδιοδιανύσματα $\|P_{coh} - P_{hom}\|_{AGL}$, καθώς και τις μετρικές απόστασης κατά συντεταγμένες $\|P_{coh} - P_{hom}\|_{L_1}$, $\|P_{coh} - P_{hom}\|_{L_2}$. Αυτές τις τρεις μετρικές για λόγους ευκολίας θα τις συμβολίσουμε ΔM_{AGL} , ΔM_{L1} και ΔM_{L2} αντίστοιχα. Έτσι σχηματίζεται ένα νέο σχήμα που μας επιτρέπει να έχουμε μια γενική εικόνα για όλες τις μετρικές που δημιουργούνται από τη διαφορά των δεικτών κινητικότητας καθώς και των μετρικών που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια.

Γραφικές από τη διαφορά δεικτών κινηκότητας με πίνακες κοορτής και δεικτών κινηκότητας με ομοιογενείς πίνακες



Σχήμα 5.3. Σύγκριση μετρικών εκτιμώντας τη διαφορά πινάκων κοορτής και ομοιογενών Πινάκων

Όπως και στα προηγούμενα σχήματα έτσι και εδώ μπορεί να δημιουργηθεί ένας νέος πίνακας, Πίνακας 5.5., με τους συντελεστές συσχέτισης που υπολογίζονται με βάση τα δεδομένα του Σχήματος 5.3. Κάνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς παρατηρούμε ότι οι διαφορές ΔM_{dev} , ΔM_P , $\Delta M_{P,B}$ και ΔM_E έχουν τέλεια συσχέτιση και για αυτόν τον λόγο τις ομαδοποιούμε μαζί. Προκύπτει ακόμα ότι υπάρχουν διαφορές με εξαιρετικά υψηλό δείκτη συσχέτισης, της τάξης του 0,97-0,99. Τέτοιες είναι οι ΔM_{SVD} , ΔM_{euc} , ΔM_{dev} και προφανώς τότε και οι $\Delta M_{P,B}$, ΔM_P και ΔM_E , αφού όπως αναφέραμε και πριν τις έχουμε ομαδοποιήσει μαζί με την ΔM_{dev} . Αντίθετα, ο δείκτης κινητικότητας M_2 ενσωματώνει περιορισμένες πληροφορίες σε σύγκριση με τους άλλους δείκτες κινητικότητας και έτσι όπως παρατηρείται και από τον Πίνακα 5.5 υπάρχει έλλειψη συσχέτισης της ΔM_2 και των υπόλοιπων διαφορών. Από τον παρακάτω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η διαφορά ΔM_{SVD} έχει σχετικά υψηλό δείκτη συσχέτισης με τη ΔM_{AGL} , της τάξης του 0,73, ενώ με τη ΔM_{L1} θα έχει μικρότερο δείκτη συσχέτισης, γύρω στο -0,40. Τέλος η ΔM_{SVD} έχει σημαντικά μικρότερο δείκτη συσχέτισης για τη διαφορά ΔM_{L2} , καθώς ο δείκτης συσχέτισης θα είναι γύρω στο -0,18.

Αντίστοιχα με τη χρήση του παρακάτω πίνακα μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα και για τις υπόλοιπες διαφορές και μετρικές που δημιουργούνται.

	ΔM_{SVD}	ΔM_{euc}	$\Delta M_{dev},$ $\Delta M_P, \Delta M_E,$ $\Delta M_{P,B}$	ΔM_D	ΔM_2	ΔM_{L1}	ΔM_{L2}	ΔM_{AGL}
ΔM_{SVD}	1	0.97933	0.99770	0.87730	0.82916	-0.40852	-0.45825	-0.73819
ΔM_{euc}		1	0.98638	0.95361	0.70843	-0.30188	-0.34439	-0.62898
$\Delta M_{dev}, \Delta M_P,$ $\Delta M_E, \Delta M_{P,B}$			1	0.89657	0.80056	-0.36426	-0.41145	-0.72353
ΔM_D				1	0.47488	-0.16551	-0.19009	-0.42392
ΔM_2					1	-0.52902	-0.59072	-0.83034
ΔM_{L1}						1	0.99078	0.39236
ΔM_{L2}							1	0.48457
ΔM_{AGL}								1

Πίνακας 5.5. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ μετρικών και διαφορών δεικτών κινητικότητας από τα αποτελέσματα στο Σχήμα 5.3.

Ένα άλλο συμπέρασμα που προκύπτει από τον Πίνακα 5.5, είναι ότι οι ΔM_{L1} , ΔM_{L2} και ΔM_{AGL} έχουν πολύ χαμηλό θετικό δείκτη συσχέτισης, γεγονός όμως που δε μας βοηθάει να καθορίσουμε ποιος πίνακας θα είναι μεγαλύτερος. Ο τόσο χαμηλός βαθμός συσχέτισης των μετρικών ΔM_{L1} , ΔM_{L2} και ΔM_{AGL} προκύπτει από το γεγονός ότι συγκρίναμε μετρικές, που ως γνωστό είναι πάντα θετικές, με απλές διαφορές, που μπορεί να δίνουν και αρνητικές τιμές. Συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες κοορτής είναι γενικά «μικρότεροι» από τους ομοιογενείς πίνακες. Έτσι είναι προφανές ότι οι διαφορές που προκύπτουν από τη διαφορά των δεικτών κινητικότητας, δηλαδή οι ΔM_{SVD} , ΔM_{euc} , ΔM_{dev} , ΔM_P , ΔM_E , $\Delta M_{P,B}$, ΔM_D και ΔM_2 θα είναι γενικά αρνητικές. Αυτό γίνεται εύκολα εμφανές και από το Σχήμα 5.3. Επίσης από το Σχήμα 5.3. προκύπτει ότι οι μετρικές ΔM_{L1} , ΔM_{L2} και ΔM_{AGL} , που δημιουργούνται από τους πίνακες κοορτής και τους ομοιογενείς πίνακες, θα είναι γενικά θετικές. Επιπλέον από τον Πίνακα 5.5 έχουμε ότι οι μετρικές ΔM_{L1} , ΔM_{L2} και ΔM_{AGL} έχουν αρνητικές συσχετίσεις με τις διαφορές ΔM_{euc} , ΔM_{dev} , ΔM_P , ΔM_E , $\Delta M_{P,B}$, ΔM_2 και ΔM_D .

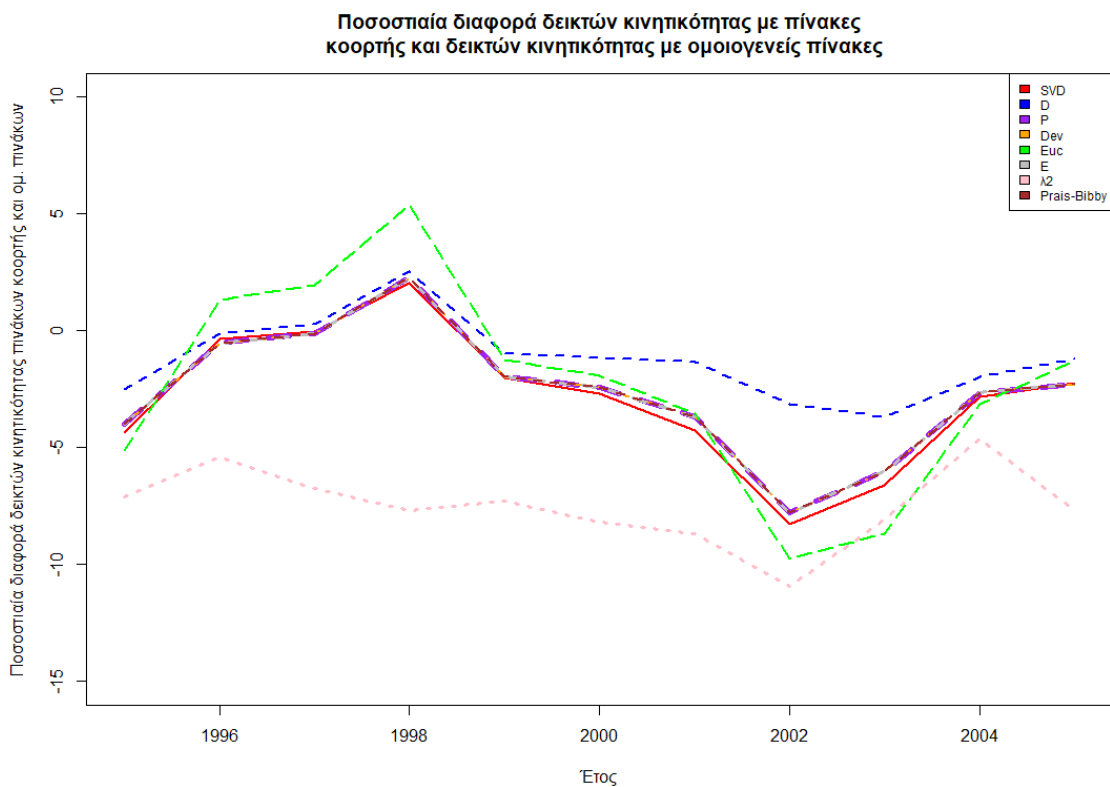
Αν αντί για απλές διαφορές υπολογίσουμε τις απόλυτες διαφορές των δεικτών κινητικότητας τότε οι συντελεστές συσχέτισης διαμορφώνονται όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, Πίνακας 5.6..

	$ \Delta M_{SVD} $	$ \Delta M_{euc} $	$ \Delta M_{dev} , \Delta M_P $ $ \Delta M_E ,$ $ \Delta M_{P,B} $	$ \Delta M_D $	$ \Delta M_2 $	ΔM_{L1}	ΔM_{L2}	ΔM_{AGL}
$ \Delta M_{SVD} $	1	0.91491	0.99761	0.81097	0.91540	0.45143	0.53434	0.82293
$ \Delta M_{euc} $		1	0.93013	0.91321	0.82694	0.32641	0.43844	0.77444
$ \Delta M_{dev} , \Delta M_P ,$ $ \Delta M_E , \Delta M_{P,B} $			1	0.83181	0.90688	0.41246	0.50111	0.84373
$ \Delta M_D $				1	0.62094	0.20042	0.32436	0.67628
$ \Delta M_2 $					1	0.52902	0.59072	0.77881
ΔM_{L1}						1	0.99078	0.37119
ΔM_{L2}							1	0.45744
ΔM_{AGL}								1

Πίνακας 5.6. Συντελεστές συσχέτισης μεταξύ μετρικών και απόλυτων διαφορών δεικτών κινητικότητας

Από τον Πίνακα 5.6. παρατηρούμε ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των απόλυτων διαφορών των δεικτών κινητικότητας είναι μικρότεροι από τους συντελεστές συσχέτισης των απλών διαφορών που είδαμε στον Πίνακα 5.5. Αντίθετα οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των απόλυτων διαφορών των δεικτών κινητικότητας και των μετρικών είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές του Πίνακα 5.5. Ακόμα ένα συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι από τη χρήση των απόλυτων διαφορών των δεικτών κινητικότητας είναι ότι όλοι οι συντελεστές συσχέτισης που δημιουργούνται είναι θετικοί.

Από την ανάλυση και σύγκριση που παρουσιάστηκε παραπάνω δε μπορούμε να έχουμε ένα σαφές συμπέρασμα για το αν κάποια από τις παραπάνω διαφορές, ή κάποια από τις παραπάνω μετρικές, αποδίδει καλύτερα και είναι καλύτερη για τη σύγκριση πινάκων μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης. Όπως έχει προαναφερθεί οι δείκτες κινητικότητας M_{SVD} και M_{euc} ικανοποιούν το κριτήριο DD σε μεγαλύτερο βαθμό από ότι οι υπόλοιποι δείκτες κινητικότητας και συνεπώς βασιζόμενοι σε αυτό θα μπορούσαν να θεωρηθούν προτιμότεροι σε σχέση με τους υπόλοιπους δείκτες κινητικότητας. Αυτό γίνεται πιο εμφανές με τη δημιουργία ενός νέου σχήματος, Σχήμα 5.4., χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.3 ως προς την ποσοστιαία διαφορά.



Σχήμα 5.4. Σύγκριση μετρικών εκτιμώντας τη διαφορά δεικτών κινητικότητας με πίνακες κοορτής και με ομοιογενείς πίνακες εκφρασμένο ποσοστιαία

Στο Σχήμα 5.4. είναι εμφανές ποιες διαφορές δεικτών κινητικότητας εμφανίζουν τις μεγαλύτερες διακυμάνσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση λοιπόν και για τα δεδομένα που έχει γίνει η ανάλυση, η διαφορά ΔM_{Euc} είναι εκείνη με το μεγαλύτερο βαθμό διακύμανσης, με αμέσως επόμενη τη ΔM_{SVD} . Η κατάταξη για τις υπόλοιπες διαφορές από αυτή με τη μεγαλύτερη ποσοστιαία διαφορά μεταξύ των πινάκων κοορτής και των ομοιογενών πινάκων, δηλαδή με τη μεγαλύτερη διακύμανση, προς αυτή με τη μικρότερη, έχει ως εξής: ΔM_{Dev} , συνεπώς και οι ΔM_P , ΔM_E , και ΔM_D . Στο σχήμα δε συμπεριλαμβάνεται η ΔM_2 λόγω της κακής συσχέτισης που έχει με τις υπόλοιπες διαφορές.

Η κατάταξη αυτή επιβεβαιώνεται από τις τυπικές αποκλείσεις όπως παρουσιάζονται στο Πίνακα 5.7.

	σ μέση τιμή
ΔM_{euc}	4,46%
ΔM_{SVD}	2,94%
$\Delta M_{dev}, \Delta M_P, \Delta M_E$	2,75%
ΔM_D	1,38%

Πίνακας 5.7. Τυπικές αποκλίσεις των δεδομένων του Σχήματος 5.4

Αν και στα συγκεκριμένα δεδομένα ο δείκτης κινητικότητας M_{euc} φαίνεται να έχει μεγαλύτερη μεταβολή από τον M_{SVD} , γενικά προτιμάμε τον M_{SVD} καθώς ικανοποιεί το κριτήριο DD σε μεγαλύτερο βαθμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.1 Συμπεράσματα

Στη παρούσα διπλωματική εργασία εξετάσαμε διαφορετικές μετρικές και δείκτες κινητικότητας με σκοπό να συγκρίνουμε πίνακες μετάβασης πιστοληπτικής διαβάθμισης. Πιο αναλυτικά, είδαμε τις μετρικές απόστασης L_1 , που είναι η απόλυτη απόκλιση, και L_2 , που είναι η Ευκλείδεια απόσταση καθώς και τους δείκτες κινητικότητας με βάση τις ιδιοτιμές και μια νέα μετρική που βασίζεται σε ιδιοτιμές. Ακόμα, παρουσιάσαμε το κριτήριο DD για δείκτες κινητικότητας όπως το έχουν διατυπώσει οι Gewek et al (1986). Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο οι πίνακες πιστοληπτικής διαβάθμισης πρέπει να είναι διακριτά κατανομημένοι, δηλαδή ευαίσθητοι στην κατανομή της μάζας πιθανότητας εκτός της διαγώνιου.

Εστίασαμε στη σημασία του δυναμικού μέρους του πίνακα και ο οποίος είναι αποτέλεσμα της αφαίρεσης του πίνακα με τον ταυτοτικό πίνακα. Από αυτή τη διαδικασία προκύπτει και ο πίνακας κινητικότητας. Συνεχίσαμε με το γεγονός ότι η μέση τιμή των ιδιοτιμών του πίνακα κινητικότητας αποδίδει έναν χρήσιμο δείκτη κινητικότητας.

Κάνοντας εφαρμογή των τεχνικών σύγκρισης πινάκων με τη χρήση του λογισμικού Rstudio είμασταν σε θέση να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τους δείκτες κινητικότητας.

Κάνοντας εφαρμογή των προτεινόμενων μετρικών, των δεικτών κινητικότητας και των ήδη υπάρχουσών ιστορικών πινάκων πιστοληπτικής διαβάθμισης για τους οφειλέτες που υπάρχουν παγκοσμίως το χρονικό διάστημα 1995-2005 σύμφωνα με τους S&P (*Annual, 2005 Global Corporate Default Study And Rating Transitions*) παρατηρήσαμε ότι οι δείκτες κινητικότητας M_P , M_D , M_E , $M_{P,B}$ και M_2 καθώς και η τροποποιημένη απόλυτη απόκλιση, M_{dev} , είναι λιγότερο ευαίσθητες στον εντοπισμό διαφορών που υπάρχουν εκτός της διαγώνιου και δυστυχώς αυτές οι διαφορές είναι που μας ενδιαφέρουν περισσότερο. Για αυτόν τον λόγο λοιπόν οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι ο δείκτης κινητικότητας που έχει βασιστεί στην ιδιοτιμή, M_{SVD} , καθώς και η τροποποιημένη Ευκλείδεια απόσταση, M_{euc} , είναι οι πιο κατάλληλες για τη σύγκριση πινάκων πιστοληπτικής διαβάθμισης που κυριαρχούν τα διαγώνια στοιχεία. Τέλος, ανάμεσα σε αυτούς τους δύο δείκτες κινητικότητας έχουμε μια ελαφριά προτίμηση περισσότερο στον M_{SVD} έναντι του M_{euc} με το επιχείρημα ότι ο M_{SVD} ικανοποιεί σε μεγαλύτερο βαθμό το κριτήριο DD .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Φακίνος, Δ. (2007). *Στοχαστικά μοντέλα στην επιχειρησιακή έρευνα*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Arvanitis, A., Gregory, J., & Laurent, J. P. (1999). Building models for credit spreads, *Journal of Derivatives*, **6**, 27–43. <https://doi.org/10.3905/jod.1999.319117>
- Bangia, A., F.X. Diebold, A. Kronimus, C. Schagen and T. Schuermann (2002). “Ratings Migration and the Business Cycle, With Applications to Credit Portfolio Stress Testing”, *Journal of Banking & Finance*, **26**, 445-474.
- Bartholomew, D. J., (1973). *Stochastic models for social processes*, 2nd Ed., London.
- Bibby, J., (1975). Methods of measuring mobility, *Quality and Quantity*, **9**, 107-136.
- Bluhm, C. (2003). *CDO Modeling: Techniques, Examples and Applications*. <http://avikram.freeshell.org/uploads/44.pdf%5Cnpapers3://publication/uuid/61FF2964-A968-4CFE-ACAE-3A3250E34245>
- Bluhm, C., Overbeck, L., & Wagner, C. (2003). An Introduction to Credit Risk Modeling, *Cultures*, **31**, 244–253.
- Bluhm, C., & Overbeck, L. (2007). Calibration of PD term structures: to be Markov or not to be, *Risk*, November, 98–103.
- Bluhm, C., & Overbeck, L. (2006). Structured credit portfolio analysis, baskets and CDOs, *Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series*, 1–357. <https://doi.org/10.1201/9781420011470>
- Cantor, R. and F. Packer (1995). The Credit Rating Industry, *Journal of Fixed Income*, **5**, 10- 34.f
- Chakravarty, S. (1997). On Shorrocks' Reinvestigation of the Sen Poverty Index, *Econometrica*, **65**, 1241-1242
- Chakravarty, S. R., Chattopadhyay, Nachiketa, Lustig, N., & Aranda, R. (2020). Measuring directional mobility: The bartholomew and prais-bibby indices reconsidered, *Research on Economic Inequality*, 75–96. <https://doi.org/10.1108/S1049-25852020000002800375>
- Fons, J. S. (1994). Using default rates to model the term structure of credit risk, *Financial Analysts Journal*, **50**, 25–33.
- Geweke, J., Marshall, R. C., & Zarkin, G. A. (1986). Mobility Indices in Continuous Time Markov Chains, *Econometrica*, **54**, 1407-1423. <https://doi.org/10.2307/1914306>

Houweling, P., Mentink, A., Vorst, T. (2004). Valuing Euro rating-triggered step-up telecom bonds, *Journal of Derivatives* **11**, 63–80.

Israel, R. B., Rosenthal, J. S., & Wei, J. Z. (2001). Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings, *Mathematical Finance*, **11**, 245–265. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00114>

Jafry, Y., & Schuermann, T. (2004). Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices. *Journal of Banking and Finance*, **28**, 2603–2639. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2004.06.004>

Jarrow, R. a, & Turnbull, S. M. (1997). A Markov Model for the Risk Spreads. *Review of Financial Studies*, **10**, 481–523. <http://www.jstor.org/stable/2962353>

Lando, D., & Skødeberg, T. M. (2002). *Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations*. www.elsevier.com/locate/econbase

Prais, S. J., (1955), “Measuring social mobility”, *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, **118**, 56-66. <http://www.jstor.org/stab>

Shorrocks, A. F. (1978). The Measurement of Mobility, *Econometrica*, **46**, 1013–1024.

Shorrocks, A. F. (1983). Ranking income distributions, *Economica*, **50**, 3-17

Sommers, P. M., & Conlisk, J. (1979). Eigenvalue immobility measures for Markov Chains. *The Journal of Mathematical Sociology*, **6**, 253–276. <https://doi.org/10.1080/0022250X.1979.9989891>

Strang, G. (1988). *Linear Algebra and its Applications*, 3rd Ed., Saunders HBJ.

Trueck, S., & Rachev, S. T. (2009). *Rating Based Modelling of Credit Risk . Theory and Application of Migration Matrices*, Academic Press, USA.

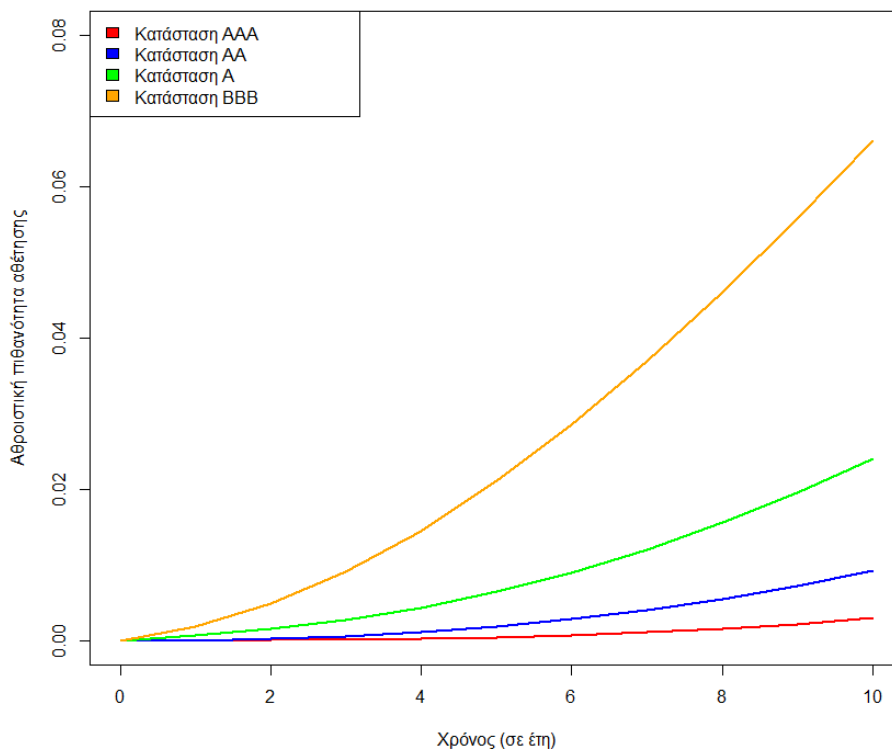
Vazza, D., Aurora, D., & Schneck, R. (2006). *Annual 2005 Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, **1997**, 1–60. <https://www.nrc.gov/docs/ML0929/ML092940178.pdf>

Xu, K. (1998). Statistical inference for the Sen-Shorrocks-Thon index of poverty intensity. *Journal of Income Distribution*, **8**, 143–152. [https://doi.org/10.1016/s0926-6437\(99\)80009-2](https://doi.org/10.1016/s0926-6437(99)80009-2)

Παραρτήματα

Στα Παραρτήματα Α, Β, Γ και Δ θα δούμε πιο αναλυτικά τον κώδικα που χρησιμοποιήσαμε στην Rstudio για να δημιουργηθούν οι πιστωτικές καμπύλες και οι πιθανότητες επιβίωσης για διαφορετικές καταστάσεις πιστοληπτικής διαβάθμισης που αναφέραμε στη Παράγραφο 2.3. Στα Παραρτήματα Ε και Ζ θα δούμε τον κώδικα που χρειάστηκε να δημιουργήσουμε για τις εφαρμογές που βρίσκονται στην Παράγραφο 5.3 και την Παράγραφο 5.4 αντίστοιχα.

Παράρτημα Α



Σχήμα 2.1. Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας AAA, AA, A και BBB.

Το Σχήμα 2.1. σχεδιάστηκε στην Rstudio με τη χρήση της θεωρίας που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα. Πιο συγκεκριμένα ο υπολογισμός μας βασίζεται στον τύπο (1.3). Χρησιμοποιήσαμε το πακέτο «matrixcalc» για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τάξη του πίνακα με τη χρήση της εντολής `matrix.power`. Επιπλέον με το πακέτο «expm» είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα $\exp(t\tilde{A})$. Ο κώδικας έχει ως εξής:

```
install.packages("matrixcalc")
install.packages("expm")
library(matrixcalc)
library(expm)
#με m συμβολίζουμε τον πίνακα P
m=matrix(c(0.9081,0.0833,0.0068,0.0006,0.0012,0.0000,    0.0000,0.0000,
```

```

0.0070, 0.9065, 0.0779, 0.0064 ,0.0006, 0.0014,0.0002,0.0000,
0.0009 ,0.0227 ,0.9105 ,0.0552 ,0.0074, 0.0026, 0.0001,0.0006,
0.0002 ,0.0033 ,0.0595 ,0.8693,0.0530,0.0117,0.0012, 0.0018,
0.0003, 0.0014, 0.0067, 0.0773 ,0.8053, 0.0884, 0.0100 ,0.0106,
0.0000 ,0.0011 ,0.0024 ,0.0043, 0.0648, 0.8346, 0.0407,0.0520,
0.0022 ,0.0000 ,0.0022 ,0.0130,0.0238,0.1124,0.6486, 0.1979,
0.0000 ,0.0000,0.0000,0.0000, 0.0000,0.0000,0.0000,1.000),byrow=TRUE,
nrow=8)

```

#με mapprox συμβολίζουμε τον πίνακα \tilde{A}

```

mapprox=matrix(c(-0.096839263, 0.091721096, 0.003536957, 0.000212817,
0.001364826, 0,0.000000000, 0.000000000, 0.007675952,-0.099555279,
0.085641529, 0.004526966, 0.000145934, 0.001442352, 0.000211705,
0.000000000, 0.000888198, 0.02487715,-0.096878901, 0.061803919,
0.006602244,0.002236744,0.000000000,0.000490361,0.0001711,0.00283,0.0667
3,-0.145034, 0.062875, 0.010306, 0.0008917, 0.001232865, 0.0003223,
0.00135, 0.00454, 0.09235,-0.223982, 0.107005, 0.0107129, 0.007713728,
0.000000, 0.001189716, 0.002359436, 0.00100376,0.078617219,-0.188795898,
0.054914381,0.050695024,0.002854689,0,0.002019285,0.015698441,0.02616473
5,0.151287428,-0.437498878,0.239912711,0,0,0,0,0,0,0,0),byrow=TRUE,
nrow=8)

```

```
m=mapprox
```

```
xa=c()
```

```
xb=c()
```

```
xc=c()
```

```
xd=c()
```

```
for (i in 1:10){
```

```
ma=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[1,]
```

```
mb=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[2,]
```

```
mc=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[3,]
```

```
md=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[4,]
```

```
xa[i]=ma[8,1]
```

```
xb[i]=mb[8,1]
```

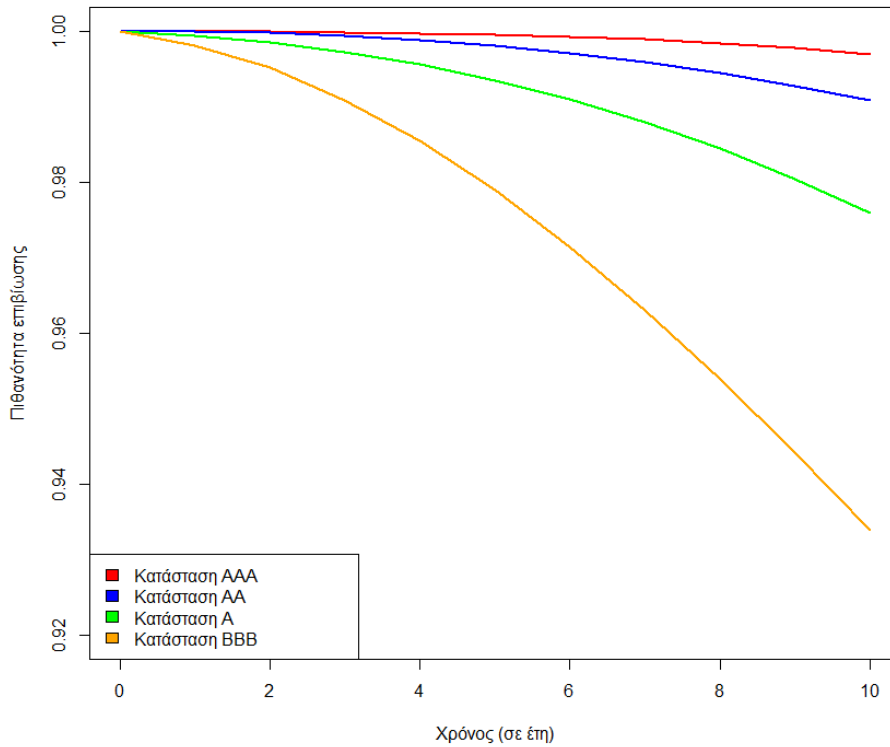
```
xc[i]=mc[8,1]
```

```
xd[i]=md[8,1]}
```

```
xa=c(0,xa)
xb=c(0,xb)
xc=c(0,xc)
xd=c(0,xd)

plot(0:10, xa,main="",ylab="Αθροιστική πιθανότητα αθέτησης",
xlab="Χρόνος (σε έτη)",
      type="l",lwd=2, col="red", ylim=c(0,0.1), xlim=c(0,10))
lines(0:10, xb, col="blue",lwd=2)
lines(0:10, xc, col="green",lwd=2)
lines(0:10, xd, col="orange",lwd=2)
legend("topleft", c("Κατάσταση AAA","Κατάσταση AA","Κατάσταση
A","Κατάσταση BBB"),fill=c("red","blue","green","orange"))
```


Παράρτημα Β



Σχήμα 2.2. Οι πιθανότητες επιβίωσης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας AAA, AA, A και BBB.

Η διαδικασία θα είναι ίδια με πριν με τη διαφορά ότι η πιθανότητα επιβίωσης που θέλουμε να σχεδιάσουμε, όπως έχουμε αναφέρει και στη Παράγραφο 2.3, θα ισούται με $s_i(t) = 1 - p_i(t)$ για $t \geq 0$. Για τη δημιουργία των καμπυλών στο Σχήμα 2.2. χρησιμοποιήσαμε τον παρακάτω κώδικα στην R:

```
xa=c()  
xb=c()  
xc=c()  
xd=c()  
for (i in 1:10){  
ma=1-expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[1,]  
mb=1-expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[2,]  
mc=1-expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[3,]  
md=1-expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[4,]  
xa[i]=ma[8,1]
```

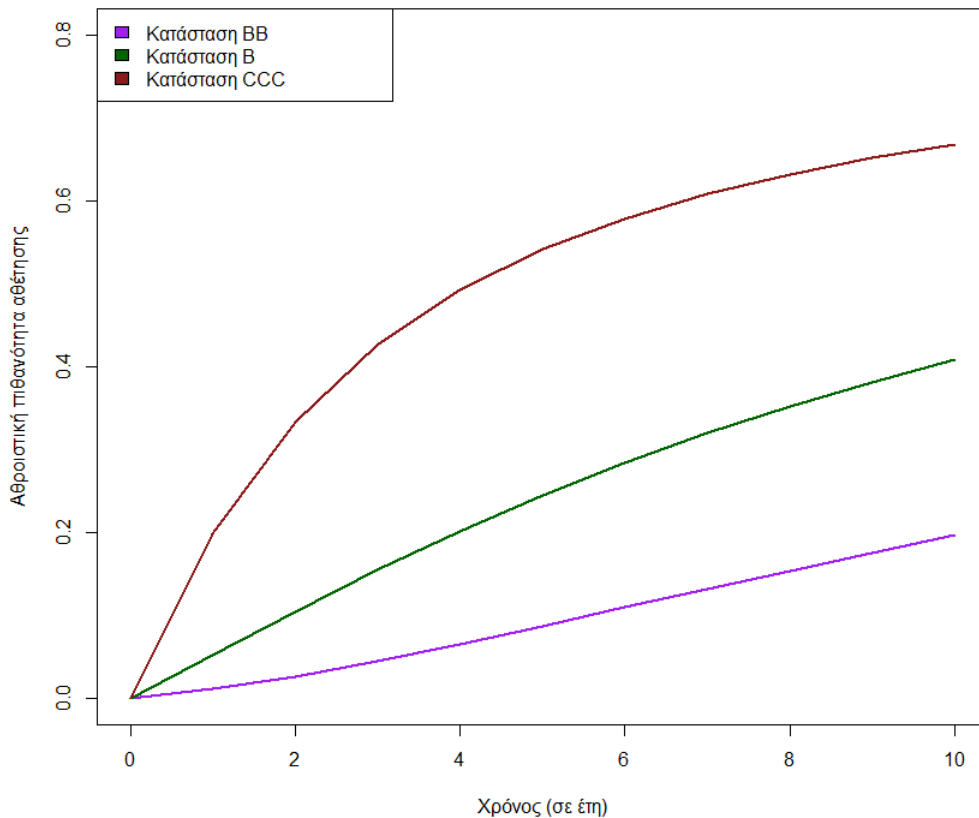
```

xb[i]=mb[8,1]
xc[i]=mc[8,1]
xd[i]=md[8,1]
}
xa=c(1,xa)
xb=c(1,xb)
xc=c(1,xc)
xd=c(1,xd)
plot(0:10, xa,main="",ylab="Πιθανότητα επιβίωσης", xlab="Χρόνος (σε
έτη)",
      type="l",lwd=2, col="red", ylim=c(0.92,1), xlim=c(0,10))
lines(0:10, xb, col="blue",lwd=2)
lines(0:10, xc, col="green",lwd=2)
lines(0:10, xd, col="orange",lwd=2)
legend("bottomleft", c("Κατάσταση AAA","Κατάσταση AA","Κατάσταση
A","Κατάσταση BBB"),fill=c("red","blue","green","orange"))

```

Παράρτημα Γ

Στο Σχήμα 2.3. απεικονίζονται οι πιστωτικές καμπύλες που προκύπτουν από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου \tilde{A} για τις πιστωτικές ταξινομήσεις BB, C και CCC. Οι αντίστοιχες καμπύλες για τις πιθανότητες επιβίωσης εμφανίζονται στο Σχήμα 2.4..



Σχήμα 2.3: Οι αθροιστικές πιθανότητες αθέτησης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας BB, B και CCC.

Το Σχήμα 2.3. θα έχει παρόμοιο κώδικα με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για το Σχήμα 2.1. με τη διαφορά ότι μας ενδιαφέρουν οι καταστάσεις BB, B και CCC που βρίσκονται στη πέμπτη, έκτη και έβδομη γραμμή του πίνακα μετάβασης. Ο κώδικας λοιπόν θα έχει ως εξής:

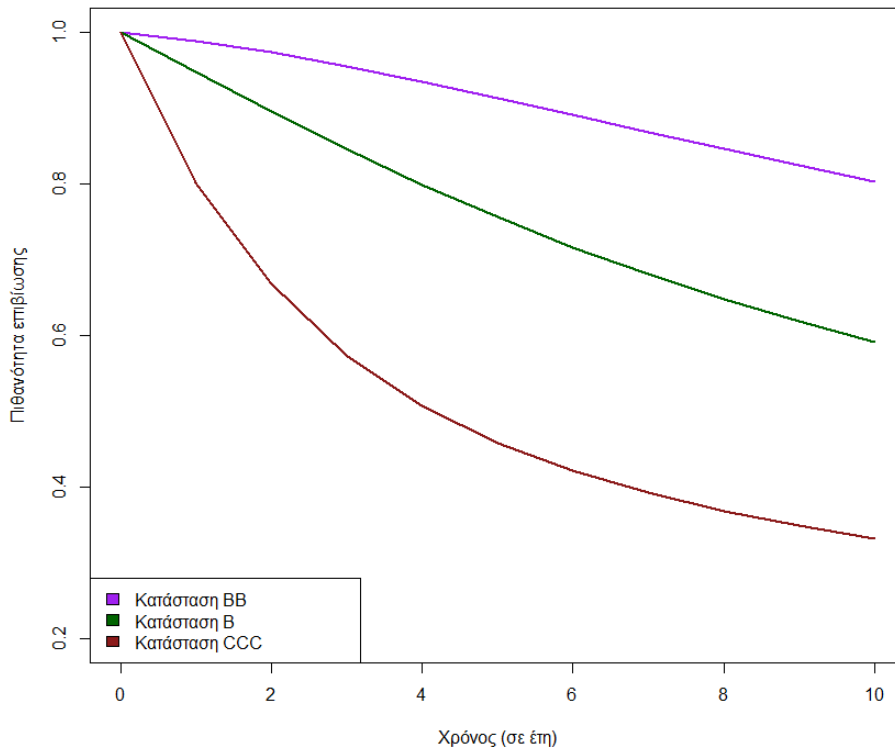
```
xe=c()
xf=c()
xg=c()
for (i in 1:10){
me=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[5,]
```

```

mf=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[6,]
mg=expm(i*mapprox)%*%matrix.power(m,i)[7,]
xe[i]=me[8,1]
xf[i]=mf[8,1]
xg[i]=mg[8,1]}
xe=c(0,xe)
xf=c(0,xf)
xg=c(0,xg)
plot(0:10, xe,main="",ylab="Αθροιστική πιθανότητα αθέτησης",
xlab="Χρόνος (σε έτη)",
      type="l",lwd=2, col="purple", ylim=c(0,0.8), xlim=c(0,10))
lines(0:10, xf, col="darkgreen",lwd=2)
lines(0:10, xg, col="firebrick4",lwd=2)
legend("topleft", c("Κατάσταση BB","Κατάσταση B","Κατάσταση
CCC"),fill=c("purple","darkgreen","firebrick4")
)

```

Παράρτημα Δ



Σχήμα 2.4. Οι πιθανότητες επιβίωσης που προέρχονται από τον γεννήτορα πίνακα συνεχούς χρόνου για τις καταστάσεις πιστοληπτικής ικανότητας BB, B και CCC.

Το Σχήμα 2.4. θα έχει παρόμοιο κώδικα με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για το Σχήμα 2.2. με τη διαφορά ότι μας ενδιαφέρουν οι καταστάσεις BB, B και CCC που βρίσκονται στη πέμπτη, έκτη και έβδομη γραμμή του πίνακα μετάβασης. Ο κώδικας λοιπόν θα έχει ως εξής:

```
xe=c()
xf=c()
xg=c()
for (i in 1:10){
me=1-expm(i*mapprox)%%matrix.power(m,i)[5,]
mf=1-expm(i*mapprox)%%matrix.power(m,i)[6,]
mg=1-expm(i*mapprox)%%matrix.power(m,i)[7,]
xe[i]=me[8, 1]
xf[i]=mf[8, 1]
xg[i]=mg[8, 1]
```

```
}  
xe=c(1,xe)  
xf=c(1,xf)  
xg=c(1,xg)  
plot(0:10, xe,main="",ylab="Πιθανότητα επιβίωσης", xlab="Χρόνος (σε  
έτη)",  
      type="l",lwd=2, col="purple", ylim=c(0.2,1), xlim=c(0,10))  
lines(0:10, xf, col="darkgreen",lwd=2)  
lines(0:10, xg, col="firebrick4",lwd=2)  
legend("bottomleft", c("Κατάσταση BB","Κατάσταση B","Κατάσταση  
CCC"),fill=c("purple","darkgreen","firebrick4")  
)
```

Παράρτημα Ε

Σε αυτή την παράγραφο θα εστιάσουμε στο πως βγήκαν τα αριθμητικά αποτελέσματα για τους πίνακες P_1 και P_2 που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 5.3, δηλαδή τα αριθμητικά αποτελέσματα που έχουν οι δύο αυτοί πίνακες για τα M_{SVD} , M_{dev} , M_{euc} , M_P , M_D , M_E και M_2 .

Αρχικά ορίζουμε τους δύο αυτούς πίνακες, P_1 και P_2 , ως a και b αντίστοιχα ως εξής:

```
a=matrix(c(90.81, 8.33, 0.68, 0.06, 0.12, 0, 0, 0, 0.70, 90.65, 7.79, 0.64, 0.06, 0.14,
0.02, 0, 0.09, 2.27, 91.05, 5.52, 0.74, 0.26, 0.01, 0.06, 0.02, 0.33, 5.95, 86.93, 5.30, 1.17,
0.12, 0.18, 0.03, 0.14, 0.67, 7.73, 80.53, 8.84, 1.00, 1.06, 0, 0.11, 0.24, 0.43, 6.48, 83.46,
4.07, 5.20, 0.22, 0, 0.22, 1.30, 2.38, 11.24, 64.86, 19.79, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 100), nrow = 8,
byrow = T)/100
```

```
b=matrix(c(90.81, 9.19, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 90.65, 9.35, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2.75, 91.05, 6.2, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 6.536, 86.93, 6.534, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 9.736, 80.53, 9.734, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5.53,
83.46, 5.51, 5.50, 0, 0, 0, 0, 0, 11.71, 64.86, 23.43, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 100), nrow = 8, byrow
= T)/100
```

$$M_{SVD}(P_1) = 0.1544167$$

$$M_{SVD}(P_2) = 0.1582741$$

$$M_{dev}(P_1) = 0.1396375$$

$$M_{dev}(P_2) = 0.1396375$$

$$M_{euc}(P_1) = 0.1898337$$

$$M_{euc}(P_2) = 0.1978902$$

$$M_P(P_1) = 0.1595857$$

$$M_P(P_2) = 0.1595857$$

$$M_D(P_1) = 0.7243921$$

$$M_D(P_2) = 0.7264651$$

$$M_E(P_1) = 0.1595857$$

$$M_E(P_2) = 0.1595857$$

$$M_2(P_1) = 0.0118222$$

$$M_2(P_2) = 0.008254$$

Προκύπτει ότι $M_{SVD}(P_1) = 0.1544167$ και $M_{SVD}(P_2) = 0.1582741$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.2). Στην Rstudio θα έχουμε:

```
sum(sqrt(eigen((t(a)-diag(8))%*(a-dia(8)))$values))/8
```

```
[1] 0.1544167
```

```
sum(sqrt(eigen((t(b)-diag(8))%*(b-dia(8)))$values))/8
```

```
[1] 0.1582741
```

Προκύπτει ότι $M_{euc}(P_1) = 0.1898337$ και $M_{euc}(P_2) = 0.1978902$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.5), δηλαδή στην Rstudio θα έχουμε:

```
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((a)-diag(8))^2))/8  
[1] 0.1898337  
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((b)-diag(8))^2))/8  
0.1978902
```

Προκύπτει ότι $M_{dev}(P_1) = 0.1396375$ και $M_{dev}(P_2) = 0.1396375$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.4), δηλαδή στην Rstudio θα έχουμε:

```
sum(abs((a)-diag(8)))/(2*8)  
[1] 0.1396375  
sum(abs((b)-diag(8)))/(2*8)  
[1] 0.1396375
```

Προκύπτει ότι $M_P(P_1) = 0.1595857$ και $M_P(P_2) = 0.1595857$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.1) και με τη χρήση του πακέτου «psych» με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε την εντολή $\text{tr}(A)$ που δίνει το ίχνος του πίνακα, στην Rstudio θα έχουμε:

```
install.packages("psych")  
library(psych)  
(8-tr(a))/7  
[1] 0.1595857  
(8-tr(b))/7  
[1] 0.1595857
```

Προκύπτει ότι $M_D(P_1) = 0.7243921$ και $M_D(P_2) = 0.7264651$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.1), δηλαδή στην Rstudio θα έχουμε:

```
1-abs(det(a))  
[1] 0.7243921  
1-abs(det(b))  
[1] 0.7264651
```


Προκύπτει ότι $M_E(P_1) = 0.1595857$ και $M_E(P_2) = 0.1595857$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.1), δηλαδή στην Rstudio θα έχουμε:

```
(8-sum(abs(eigen(a)$values)))/7
```

```
[1] 0.1595857
```

```
(8-sum(abs(eigen(b)$values)))/7
```

```
[1] 0.1595857
```

Προκύπτει ότι $M_2(P_1) = 0.0118222$ και $M_2(P_2) = 0.008254$ από εφαρμογή της Σχέσης (4.1), δηλαδή στην Rstudio θα έχουμε:

```
eigen(a)$values
```

```
[1] 1.0000000 0.9881778 0.9326461 0.9058346 0.8724851 0.8258765 0.7318447
```

```
[8] 0.6260353
```

```
1-0.9881778
```

```
[1] 0.0118222
```

```
eigen(b)$values
```

```
[1] 1.0000000 0.9917460 0.9323267 0.9081000 0.8830634 0.8285336 0.7249074
```

```
[8] 0.6142230
```

```
1-0.9917460
```

```
[1] 0.008254
```

Από τις ιδιοτιμές, επιλέγουμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή που δεν είναι μονάδα, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση την τιμή 0,9881778 και 0,9917460 για τους πίνακες P_1 και P_2 αντίστοιχα. Με εφαρμογή του τύπου $M_2(P) = 1 - |\lambda_2(P)|$ θα έχουμε τα παραπάνω αποτελέσματα.

Παράρτημα Z

Αρχικά σε αυτό το παράρτημα θα δούμε τις εντολές που χρειάστηκαν για να υπολογιστούν οι δείκτες κινητικότητας για πίνακες κοορτής και για ομοιογενείς πίνακες. Στον κώδικα ένας πίνακας κοορτής για το έτος 2005 συμβολίζεται ως `m2005coh`, ενώ ένας ομοιογενής πίνακας για το ίδιο έτος συμβολίζεται ως `m2005hom`. Η ίδια λογική ακολουθείται και για τους πίνακες των υπόλοιπων ετών. Για να απεικονίσουμε τη γραφική παράσταση ενός δείκτη κινητικότητας για τα έτη 1995-2005 αρκεί να δημιουργήσουμε ένα διάστημα με 10 στοιχεία, όπου το πρώτο στοιχείο θα ισούται με τη τιμή του δείκτη κινητικότητας για τον πίνακα πιστοληπτικής μετάβασης του έτους 1995. Το δεύτερο στοιχείο ισούται με τη τιμή του δείκτη κινητικότητας για τον πίνακα πιστοληπτικής μετάβασης του έτους 1996 και με την ίδια λογική υπολογίζονται και τα υπόλοιπα στοιχεία του διανύσματος. Ακόμα στο τέλος του παραρτήματος χρησιμοποιούμε την εντολή `cor(x,y)` που αναφέρεται στον συντελεστή συσχέτισης του `x` με το `y` και την εντολή `sd(x)` που υπολογίζει την τυπική απόκλιση του `x`.

```
#Svd:
svdcoh<-c(sum(sqrt(eigen((t(m1995coh)-diag(8))%*(m1995coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m1996coh)-diag(8))%*(m1996coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m1997coh)-diag(8))%*(m1997coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m1998coh)-diag(8))%*(m1998coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m1999coh)-diag(8))%*(m1999coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m2000coh)-diag(8))%*(m2000coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m2001coh)-diag(8))%*(m2001coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m2002coh)-diag(8))%*(m2002coh-
diag(8)))$values))/8,
          sum(sqrt(eigen((t(m2003coh)-diag(8))%*(m2003coh-
diag(8)))$values))/8,
```

```

sum(sqrt(eigen((t(m2004coh)-diag(8))%*(m2004coh-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2005coh)-diag(8))%*(m2005coh-
diag(8)))$values))/8)
svdcoh
svdcoh<-c(sum(sqrt(eigen((t(m1995hom)-diag(8))%*(m1995hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m1996hom)-diag(8))%*(m1996hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m1997hom)-diag(8))%*(m1997hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m1998hom)-diag(8))%*(m1998hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m1999hom)-diag(8))%*(m1999hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2000hom)-diag(8))%*(m2000hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2001hom)-diag(8))%*(m2001hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2002hom)-diag(8))%*(m2002hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2003hom)-diag(8))%*(m2003hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2004hom)-diag(8))%*(m2004hom-
diag(8)))$values))/8,
sum(sqrt(eigen((t(m2005hom)-diag(8))%*(m2005hom-
diag(8)))$values))/8)
svdcoh
#euc:
euccoh<-c(sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1995coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1996coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1997coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1998coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1999coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2000coh)-diag(8))^2))/8,

```

```

sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2001coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2002coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2003coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2004coh)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2005coh)-diag(8))^2))/8)

euchom<-c(sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1995hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1996hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1997hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1998hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m1999hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2000hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2001hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2002hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2003hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2004hom)-diag(8))^2))/8,
sqrt(8-1)*sqrt(sum(((m2005hom)-diag(8))^2))/8)

#dev:
devcoh<- c(sum(abs((m1995coh)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m1996coh)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m1997coh)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m1998coh)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m1999coh)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m2000coh)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m2001coh)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m2002coh)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m2003coh)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m2004coh)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m2005coh)-diag(8)))/(2*8))

devhom<- c(sum(abs((m1995hom)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m1996hom)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m1997hom)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m1998hom)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m1999hom)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m2000hom)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m2001hom)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m2002hom)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m2003hom)-diag(8)))/(2*8),
sum(abs((m2004hom)-diag(8)))/(2*8), sum(abs((m2005hom)-diag(8)))/(2*8))

```

#P, για να χρησιμοποιήσουμε την εντολή `tr()` αρκεί πρώτα να εγκαταστήσουμε το πακέτο «psych» :

```
install.packages("psych")  
library(psych)  
pcoh=c((8-tr(m1995coh))/7, (8-tr(m1996coh))/7, (8-tr(m1997coh))/7,  
        (8-tr(m1998coh))/7, (8-tr(m1999coh))/7, (8-tr(m2000coh))/7,  
        (8-tr(m2001coh))/7, (8-tr(m2002coh))/7, (8-tr(m2003coh))/7,  
        (8-tr(m2004coh))/7, (8-tr(m2005coh))/7)
```

```
phom=c((8-tr(m1995hom))/7, (8-tr(m1996hom))/7, (8-tr(m1997hom))/7,  
        (8-tr(m1998hom))/7, (8-tr(m1999hom))/7, (8-tr(m2000hom))/7,  
        (8-tr(m2001hom))/7, (8-tr(m2002hom))/7, (8-tr(m2003hom))/7,  
        (8-tr(m2004hom))/7, (8-tr(m2005hom))/7)
```

#D:

```
dcoh=c(1-abs(det(m1995coh)), 1-abs(det(m1996coh)), 1-abs(det(m1997coh)),  
        1-abs(det(m1998coh)), 1-abs(det(m1999coh)), 1-abs(det(m2000coh)),  
        1-abs(det(m2001coh)), 1-abs(det(m2002coh)), 1-abs(det(m2003coh)),  
        1-abs(det(m2004coh)), 1-abs(det(m2005coh)))
```

```
dhom=c(1-abs(det(m1995hom)), 1-abs(det(m1996hom)), 1-abs(det(m1997hom)),  
        1-abs(det(m1998hom)), 1-abs(det(m1999hom)), 1-abs(det(m2000hom)),  
        1-abs(det(m2001hom)), 1-abs(det(m2002hom)), 1-abs(det(m2003hom)),  
        1-abs(det(m2004hom)), 1-abs(det(m2005hom)))
```

#E:

```
ecoh=c((8-sum(abs(eigen(m1995coh)$values)))/7,  
        (8-sum(abs(eigen(m1996coh)$values)))/7,  
        (8-sum(abs(eigen(m1997coh)$values)))/7,  
        (8-sum(abs(eigen(m1998coh)$values)))/7,  
        (8-sum(abs(eigen(m1999coh)$values)))/7,  
        (8-sum(abs(eigen(m2000coh)$values)))/7,
```

```

(8-sum(abs(eigen(m2001coh)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2002coh)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2003coh)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2004coh)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2005coh)$values)))/7)

ehom=c((8-sum(abs(eigen(m1995hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m1996hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m1997hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m1998hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m1999hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2000hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2001hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2002hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2003hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2004hom)$values)))/7,
(8-sum(abs(eigen(m2005hom)$values)))/7)

ehom

```

#2, στα παρακάτω αποτελέσματα έχουμε κρατήσει μόνο τη μεγαλύτερες ιδιοτιμές που δεν είναι ίσες με τη μονάδα:

```

eigen(m1995coh)$values
0.9956866
eigen(m1996coh)$values
0.9992872
eigen(m1997coh)$values
0.9950361
eigen(m1998coh)$values
0.9847869
eigen(m1999coh)$values

```

```
0.9848639
eigen(m2000coh)$values
0.9808338
eigen(m2001coh)$values
0.9708635
eigen(m2002coh)$values
0.9495788
eigen(m2003coh)$values
0.9763983
eigen(m2004coh)$values
0.9970217
eigen(m2005coh)$values
0.9972683
dyocoh<-c(1-0.9956866, 1-0.9992872, 1-0.9950361, 1-0.9847869, 1-
0.9848639, 1-0.9808338, 1-0.9708635, 1-0.9495788, 1-0.9763983, 1-
0.9970217, 1- 0.9972683)

eigen(m1995hom)$values
0.9953796
eigen(m1996hom)$values
0.9992487
eigen(m1997hom)$values
0.9947019
eigen(m1998hom)$values
0.9836167
eigen(m1999hom)$values
0.9837621
eigen(m2000hom)$values
0.9792693
eigen(m2001hom)$values
```

```

0.9683399
eigen(m2002hom)$values
0.9440689
eigen(m2003hom)$values
0.9744843
eigen(m2004hom)$values
0.9968836
eigen(m2005hom)$values
0.9970581
dyohom<-c(1-0.9953796, 1-0.9992487, 1-0.9947019, 1-0.9836167, 1-
0.9837621, 1-0.9792693, 1-0.9683399, 1-0.9440689, 1-0.9744843, 1-
0.9968836, 1-0.9970581)

#AGL, L1, L2
agl<-c(norm(m1995coh%%m1995hom-m1995hom%%m1995coh, "F")/
(norm(m1995coh)*norm(m1995hom, "F"))),
norm(m1996coh%%m1996hom-m1996hom%%m1996coh, "F")/
(norm(m1996coh)*norm(m1996hom, "F"))),
norm(m1997coh%%m1997hom-m1997hom%%m1997coh, "F")/
(norm(m1997coh)*norm(m1997hom, "F"))),
norm(m1998coh%%m1998hom-m1998hom%%m1998coh, "F")/
(norm(m1998coh)*norm(m1998hom, "F"))),
norm(m1999coh%%m1999hom-m1999hom%%m1999coh, "F")/
(norm(m1999coh)*norm(m1999hom, "F"))),
norm(m2000coh%%m2000hom-m2000hom%%m2000coh, "F")/
(norm(m2000coh)*norm(m2000hom, "F"))),
norm(m2001coh%%m2001hom-m2001hom%%m2001coh, "F")/
(norm(m2001coh)*norm(m2001hom, "F"))),
norm(m2002coh%%m2002hom-m2002hom%%m2002coh, "F")/
(norm(m2002coh)*norm(m2002hom, "F"))),
norm(m2003coh%%m2003hom-m2003hom%%m2003coh, "F")/
(norm(m2003coh)*norm(m2003hom, "F"))),
norm(m2004coh%%m2004hom-m2004hom%%m2004coh, "F")/
(norm(m2004coh)*norm(m2004hom, "F"))),

```



```
norm(m2005coh%*%m2005hom-m2005hom%*%m2005coh, "F")/
(norm(m2005coh)*norm(m2005hom, "F"))
```

```
l1<-c(sum(abs(m1995coh-m1995hom)), sum(abs(m1996coh-m1996hom)),
sum(abs(m1997coh-m1997hom)), sum(abs(m1998coh-m1998hom)),
sum(abs(m1999coh-m1999hom)), sum(abs(m2000coh-m2000hom)),
sum(abs(m2001coh-m1995hom)), sum(abs(m2002coh-m2002hom)),
sum(abs(m2003coh-m2003hom)), sum(abs(m2004coh-m2004hom)),
sum(abs(m2005coh-m2005hom)))/64
```

```
l2<-c(sum(sqrtm((m1995coh-m1995hom)%*%(m1995coh-m1995hom))),
sum(sqrtm((m1996coh-m1996hom)%*%(m1996coh-m1996hom))),
sum(sqrtm((m1997coh-m1997hom)%*%(m1997coh-m1997hom))),
sum(sqrtm((m1998coh-m1998hom)%*%(m1998coh-m1998hom))),
sum(sqrtm((m1999coh-m1999hom)%*%(m1999coh-m1999hom))),
sum(sqrtm((m2000coh-m2000hom)%*%(m2000coh-m2000hom))),
sum(sqrtm((m2001coh-m1995hom)%*%(m2001coh-m1995hom))),
sum(sqrtm((m2002coh-m2002hom)%*%(m2002coh-m2002hom))),
sum(sqrtm((m2003coh-m2003hom)%*%(m2003coh-m2003hom))),
sum(sqrtm((m2004coh-m2004hom)%*%(m2004coh-m2004hom))),
sum(sqrtm((m2005coh-m2005hom)%*%(m2005coh-m2005hom))))/64
```

#γραφικές των πινάκων κοορτής για κάθε δείκτη κινητικότητας

```
plot(1995:2005, svdcogh, main="Δείκτες κινητικότητας για πίνακες
κοορτής",ylab="Τιμές δεικτών κινητικότητας", xlab="Έτος",
type="l",lwd=2, col="red", ylim=c(-0.1,1), xlim=c(1995,2005))
```

```
lines(1995:2005, dcogh, col="blue",lwd=2)
```

```
lines(1995:2005, pcogh, col="purple",lwd=2, lty=2)
```

```
lines(1995:2005, devcogh, col="orange",lwd=2)
```

```
lines(1995:2005, euccogh, col="green",lwd=2)
```

```
lines(1995:2005, ecogh, col="grey",lwd=3, lty=3)
```

```
lines(1995:2005, dyocogh, col="pink",lwd=3)
```

```
lines(1995:2005, pbcogh, col= "brown", lwd=2,lty=2)
```

```
legend("topleft",cex=0.9, c( "Δείκτης SVD", "Δείκτης D", "Δείκτης P",
"Δείκτης Dev", "Δείκτης Euc", "Δείκτης E", "Δείκτης με λ2", "Δείκτης
Prais-Bibby"), fill=c("red","blue", "purple", "orange", "green", "grey",
"pink", "brown" ))
```

```

#γραφικές των ομοιογενών πινάκων για κάθε δείκτη κινητικότητας
plot(1995:2005, svdnom , main="Δείκτες κινητικότητας για ομοιογενείς
πίνακες",ylab="Τιμές δεικτών κινητικότητας", xlab="Έτος",
type="l",lwd=2, col="red", ylim=c(-0.1,1), xlim=c(1995,2005))
lines(1995:2005, dnom, col="blue",lwd=2)
lines(1995:2005, pnom, col="purple",lwd=2, lty=2)
lines(1995:2005, devnom, col="orange",lwd=2)
lines(1995:2005, euchom, col="green",lwd=2)
lines(1995:2005, ehom, col="grey",lwd=3, lty=3)
lines(1995:2005, dyohom,col="pink",lwd=3)
lines(1995:2005, pbhom, col= "brown", lwd=2,lty=2)
legend("topleft",cex=0.7, c( "Δείκτης SVD", "Δείκτης D", "Δείκτης P",
"Δείκτης Dev", "Δείκτης Euc", "Δείκτης E", "Δείκτης με λ2", "Δείκτης
Prais-Bibby"),
fill=c("red", "blue", "purple", "orange", "green", "grey", "pink",
"brown"))

```

#γραφικές από τη διαφορά των πινάκων κοορτής και των ομοιογενών ομοιογενών πινάκων για κάθε δείκτη κινητικότητας καθώς και των μετρικών απόστασης κατά συντεταγμένες και της μετρικής με βάση τα ιδιοδιανύσματα

```

plot(1995:2005,svdcoh-svdnom ,main="Γραφικές από τη διαφορά δεικτών
κινητικότητας με πίνακες κοορτής και δεικτών κινητικότητας με
ομοιογενείς πίνακες",ylab="Διαφορά δεικτών κινητικότητας πινάκων κοορτής
και ομ. πινάκων", xlab="Έτος", type="l",lwd=2, col="red", ylim=c(-
0.05,0.05), xlim=c(1995,2005),lty=1)
lines(1995:2005, dcoh-dnom, col="blue",lwd=2,lty=2)
lines(1995:2005, pcoh-phom, col="purple",lwd=5, lty=2)
lines(1995:2005, devcoh-devnom, col="orange",lwd=2, lty=4)
lines(1995:2005, euccoh-euchom, col="green",lwd=2, lty=5)
lines(1995:2005, ecoh-ehom, col="grey",lwd=3, lty=2)
lines(1995:2005, dyocoh-dyohom, col="pink",lwd=3, lty=3)
lines(1995:2005, agl, col="green4",lwd=2, lty=8)
lines(1995:2005, l1, col="cyan3",lwd=2, lty=2)
lines(1995:2005, l2, col="tomato",lwd=3, lty=10)
lines(1995:2005, pbcoh-pbhom, col= "brown", lwd=2,lty=2)

```

```

legend("topright",cex=0.75, c("Διαφορά δεικτών SVD", "Διαφορά δεικτών
D", "Διαφορά δεικτών P", "Διαφορά δεικτών Dev", "Διαφορά δεικτών Euc",
"Διαφορά δεικτών E", "Διαφορά δεικτών με λ2", "Μετρική AGL", "Μετρική
L1", "Μετρική L2", "Διαφορά δεικτών Prais-Bibby"), fill=c("red","blue",
"purple", "orange", "green", "grey","pink" , "green4", "cyan3","tomato",
"brown"))

```

#γραφικές από την ποσοστιαία διαφορά δεικτών κινητικότητας με πίνακες κοορτής και δεικτών κινητικότητας με ομοιογενείς πίνακες

```

plot(1995:2005,100*((svdcoh-svdhom)/svdcoh), main="Ποσοστιαία διαφορά
δεικτών κινητικότητας με πίνακες κοορτής και δεικτών κινητικότητας με
ομοιογενείς πίνακες",ylab="Ποσοστιαία διαφορά δεικτών κινητικότητας
πινάκων κοορτής και ομ. πινάκων", xlab="Έτος", type="l",lwd=2,
col="red", ylim=c(-15,10), xlim=c(1995,2005),lty=1)

```

```

lines(1995:2005, 100*((dcoh-dhom)/dcoh), col="blue",lwd=2,lty=2)

```

```

lines(1995:2005, 100*((pcoh-phom)/pcoh), col="purple",lwd=5, lty=2)

```

```

lines(1995:2005, 100*((devcoh-devhom)/devcoh), col="orange",lwd=2,
lty=4)

```

```

lines(1995:2005, 100*((euccoh-euchom)/euccoh), col="green",lwd=2, lty=5)

```

```

lines(1995:2005, 100*((ecoh-ehom)/ecoh), col="grey",lwd=3, lty=2)

```

```

lines(1995:2005, 100*((dyocoh-dyohom)/dyocoh), col="pink",lwd=3, lty=3)

```

```

lines(1995:2005, 100*((agl, col="green4",lwd=2, lty=8)

```

```

lines(1995:2005, 100*((l1, col="cyan3",lwd=2, lty=2)

```

```

lines(1995:2005, 100*((l2, col="tomato",lwd=3, lty=10)

```

```

lines(1995:2005, 100*((pbcoh-pbhom)/pbcoh), col= "brown", lwd=2,lty=2)

```

```

legend("topright",cex=0.75, c("SVD", "D", "P", "Dev", "Euc", "E",
"λ2","L1","L2", "AGL", "Prais-Bibby" ), fill=c("red","blue", "purple",
"orange", "green", "grey", "pink", "brown"))

```

για να υπολογίσουμε τους συντελεστές συσχέτισης θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή cor(x, y). Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες από αυτές τις εντολές που χρησιμοποιήσαμε παρακάτω

```

cor(ehom,dhom)

```

```

cor(euccoh-euchom,agl)

```

```
cor(dcoh-dhom, dyocoh-dyohom)
```

```
cor(euccoh-euchom, dyocoh-dyohom)
```

για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση χρησιμοποιήσαμε την εντολή `sd(x)`. Για τον υπολογισμό της ποσοστιαίας τυπικής απόκλισης της διαφοράς των δεικτών κινητικότητας πινάκων κοορτής και των δεικτών κινητικότητας ομοιογενών πινάκων θα έχουμε τον εξής κώδικα:

```
100*sd((euccoh-euchom)/euccoh)
```

```
100*sd((svdcoh-svdhom)/svdcoh)
```

```
100*sd((devcoh-devhom)/devcoh)
```

```
100*sd((dcoh-dhom)/dcoh)
```

```
100*sd(euccoh-euchom)
```