ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ» ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ»

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

ΜΙΑ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΤΑ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ ΠΑΙΓΝΙΑ , ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΩΝ ΓΕΝΕΩΝ

της ΤΙΚΑΪ ΜΑΡΙΑΣ-ΜΑΡΓΑΡΙΤΑΣ

ΑΜ ΜΧΡΗ2023

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΒΟΛΙΩΤΗΣ Δ. , ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΒΟΛΙΩΤΗΣ Δ. , ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΣΤΕΦΑΝΑΔΗΣ Χ. , ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΕΓΓΛΕΖΟΣ Ν. , ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2022

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα επιθυμούσα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου, στον επιβλέποντα καθηγητή Βολιώτη Δημήτριο, επίκουρο καθηγητή του τμήματος Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής. Χάρη στη καθοδήγηση του και τις εύστοχες επισημάνσεις του , η παρούσα εργασία ολοκληρώθηκε επιτυχώς.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την επισκόπηση θεωρητικών υποδειγμάτων, πάνω στα επαναλαμβανόμενα παίγνια και ειδικότερα στα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών. Πιο αναλυτικά, διαμορφώνεται η σωστή βάση μελέτης των παιγνίων αυτών παρουσιάζοντας, στο πρώτο μέρος της εργασίας τη δομή και τα σημαντικά στοιχεία των στατικών παιγνίων.

Έπειτα, γίνεται επισκόπηση της έννοιας των επαναλαμβανόμενων παιγνίων , τα οποία θα διακριθούν στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια και στα πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια. Μάλιστα, για να εντρυφήσουμε περισσότερο στα παίγνια αυτά , θα διακριθούν και βάσει της διαθέσιμης πληροφόρησης, σε επαναλαμβανόμενα παίγνια πλήρους πληροφόρησης και ατελούς πληροφόρησης.

Στο τρίτο μέρος της εργασίας, περιγράφονται τα θεωρητικά υποδείγματα τριών σημαντικών ερευνών αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών, το κύριο θέμα της εργασίας. Μελετώντας τις έρευνες των Salant(1991), Kandori(1992) και Gossner(1996) καταλήγουμε σε συμπεράσματα επί της λειτουργίας του παιγνίου , ιδίως χάρη στην εισαγωγή της στρατηγικής τιμωρίας παικτών που δεν ακολουθούν τη διαδικασία συνεργασίας παικτών.

Ολοκληρώνοντας, στο τέταρτο και τελευταίο τμήμα της εργασίας, διατυπώνονται παραδείγματα επαναλαμβανόμενων παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών, προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαδικασία τιμωρίας παικτών που αποκλίνουν από ένα παίγνιο. Έμφαση θα δοθεί στη ποικιλομορφία της διαδικασίας τιμωρίας ανάλογα με την χρονική περίοδο που λαμβάνει χώρα η απόκλιση.

Λέξεις κλειδιά : Επικαλυπτόμενες Γενεές, Επαναλαμβανόμενα Παίγνια, Εθιμικό Θεώρημα, Στρατηγική Τιμωρίας, Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία κατά Nash.

ABSTRACT

The present paper deals with a survey on theoretical models of repeated games and specifically with the repeated games on overlapping generations. In more detail, the appropriate background of study is created from presenting, on the first part of this paper, the structure, and the important elements of the statical games.

In the second part of this paper, takes place a survey on the structure of repeated games, which will be distinguished, according to their duration, in the infinitely repeated games and the finitely repeated games. Also, we will study intensively those games that can be distinguished in repeated games of complete information and the repeated games with incomplete information.

On the third part, will be described the theoretical models studied by three important researchers regarding the repeated games with overlapping generations, which is also the main subject of this paper. Studying intensively the surveys of Salant (1991), Kandori (1992) and Gossner (1996) we come to conclusions as regards to the operation of these games, especially because of the insertion of the punishment strategy on players who do not follow the cooperation mode.

To conclude, on the fourth and last part of this paper, examples of repeated games with overlapping generations are described, in order to gain a clearer view about the punishment operation on players who deviate from the cooperation. Emphasis will be given on the variety of the punishment strategy according to the time that the deviation occurs.

Keywords: Overlapping Generations, Repeated Games, Folk Theorem, Punishment Strategy, Subgame Perfect Nash Equilibrium.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΣΕΛ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπό της παρούσας διπλωματικής εργασία αποτελεί η θεωρητική επισκόπηση σημαντικών θεωρητικών υποδειγμάτων, που συμβάλουν στην κατανόηση αλλά και σε κρίσιμα συμπεράσματα, αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών. Πιο συγκεκριμένα, τα παίγνια αυτά διεξάγονται ανάμεσα σε παίκτες , ή καλύτερα σε αλληλουχίες παικτών όπου αν έχουν πεπερασμένη διάρκεια ζωής , τους αντικαθιστούν οι απόγονοι τους. Έτσι, μπορούν να συνεχίσουν να εκτελούνται επ’ άπειρον , αρκεί ο κάθε αρχικός παίκτης να διαθέτει απογόνους ή έστω κάποιον αντικαταστάτη.

Ωστόσο, προκειμένου να διαμορφωθεί το κατάλληλο υπόβαθρο μελέτης των επαναλαμβανόμενων παιγνίων , με το χαρακτηριστικό της επικάλυψης γενεών, θα πρέπει να παρουσιαστούν οι βασικές έννοιες παιγνίων. Πιο συγκεκριμένα, ως παίγνιο χαρακτηρίζεται μία κατάσταση κατά την οποία ορθολογικοί παίκτες, δηλαδή εκείνοι που στοχεύουν στην βέλτιστη απόδοση με τον μικρότερο δυνατό κίνδυνο , έχουν αντικρουόμενους στόχους και επιλέγουν ενέργειες. Κάθε παίγνιο, αποτελείται από συγκεκριμένα δομικά χαρακτηριστικά, τα οποία επιγραμματικά είναι οι παίκτες που το απαρτίζουν, οι επιλεγόμενες ενέργειες καθώς και οι αποδόσεις που αποκομίζει ο κάθε παίκτης μέσω της συμμετοχής του.

Τα παίγνια , ωστόσο , διαφοροποιούνται βάσει της φύσης τους αλλά και βάσει της διαθέσιμης πληροφόρησης. Ενδεικτικά, διακρίνονται σε στατικά παίγνια και δυναμικά παίγνια. Ένα παίγνιο θα καλείται στατικό, όταν όλοι οι παίκτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους ταυτόχρονα , δηλαδή χωρίς να έχουν γνώση αναφορικά με τις επιλογές των προηγούμενων παικτών. Αντίστοιχα, τα δυναμικά παίγνια αφορούν εκείνα όπου το παίγνιο σταδίου επαναλαμβάνεται και εξελίσσεται στον ρυθμό της επαναλαμβανόμενης αντίδρασης στις ενέργειες ανάμεσα στους παίκτες (Mailath & Samuelson,2006). Μία επιπρόσθετη διάκριση των παιγνίων, η οποία θα αναλυθεί στη παρούσα εργασία αφορά τη πληροφόρηση. Τα στατικά παίγνια, θα διακρίνονται σε πλήρους και ελλιπούς πληροφόρησης, αναλόγως τη γνώση τους επί των χαρακτηριστικών των παιγνίων, και τα δυναμικά σε τέλειας ή ατελούς πληροφόρησης , ανάλογα με τις γνώσεις του επί των προηγούμενων ενεργειών των παικτών (Σταματόπουλος, 2015).

Επομένως, το πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας , θα δώσει έμφαση στα στατικά παίγνια και στη διάκριση που δέχονται. Θα παρουσιαστούν παραδείγματα , στα οποία θα γίνει επεξήγηση της λύσης ενός παιγνίου, με την εύρεση της ισορροπίας κατά Nash, τον συνδυασμό ενεργειών που οι παίκτες επιτυγχάνουν ταυτόχρονα τη βέλτιστη αντίδραση τους (Βολιώτης, 2015). Θα γίνει η διάκριση , ανάμεσα σε αμιγείς και μικτές στρατηγικές , με τις δεύτερες να αποτελούν εικασίες για την εξέλιξη του παιγνίου , εκφρασμένες με κατανομή πιθανοτήτων. Μάλιστα, στη περίπτωση του στατικού παιγνίου ελλιπούς πληροφόρησης, θα εισαχθεί η έννοια της ισορροπίας κατά Bayes – Nash , επέκταση της ισορροπίας κατά Nash , που εξαρτάται από τον τύπο του κάθε παίκτη.

Το δεύτερο τμήμα της παρούσας εργασίας απαρτίζεται από την ανάλυση των επαναλαμβανόμενων παιγνίων. Η διάκριση τους θα αφορά σε παίγνια τέλειας και ατελούς πληροφόρησης , αλλά και σε μία επιπλέον διάκριση ανάλογα με τον αριθμό των επαναλήψεων. Δηλαδή, θα γίνει ανάλυση τόσο απείρως επαναλαμβανόμενων παιγνίων όσο και πεπερασμένα επαναλαμβανόμενων παιγνίων. Η λύση του παιγνίου, μέσω εύρεσης της ισορροπίας κατά Nash, θα αφορά το παίγνιο σταδίου, το οποίο είναι στατικό και επαναλαμβάνεται όσο εξελίσσεται το παίγνιο. Έμφαση θα δοθεί στις έννοιες της ιστορίας και της τέλειας ανάκλησης.

Η έννοια της τέλειας ανάκλησης είναι αδιαμφισβήτητα συνυφασμένη με την έννοια της ιστορίας, καθώς είναι μία ιδιότητα που επιτρέπει σε όλους τους παίκτες να γνωρίζουν κάθε συνδυασμό στρατηγικών επιλογών που έχει προηγηθεί (Βολιώτης, 2015). Επιπρόσθετα, θα λάβει χώρα ανάλυση αναφορικά με τις αποδόσεις που αποκομίζουν οι παίκτες στην εκάστοτε μορφή παιγνίου, και μάλιστα στην έννοια της προεξόφλησης που εισάγει την διαχρονική αξία του χρήματος (Βολιώτης, 2015). Ολοκληρώνοντας, θα εισαχθεί η έννοια της φήμης και η επίδραση της στην εξέλιξη ενός παιγνίου, μέσω ανάλυσης παραδείγματος των Mailath και Samuelson (2006).

Έχοντας δημιουργήσει την απαραίτητη βάση μελέτης, η εργασία θα προχωρήσει στο τρίτο τμήμα της σε μελέτη ερευνητικών άρθρων, αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια με το χαρακτηριστικό της επικάλυψης γενεών. Θα παρουσιαστούν διεξοδικά, οι αναλύσεις , τα υποδείγματα και τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν οι Salant(1991) , Kandori(1992) και Gossner (1996). Οι εργασίες τους , κρίνονται συμπληρωματικές, υπό την έννοια ότι υιοθετούν στις μεθοδολογίες τους χαρακτηριστικά και συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν και οι υπόλοιποι.

Πιο αναλυτικά, η έρευνα του Salant(1991) αφορά απείρως επαναλαμβανόμενα μη συνεργατικά παίγνια , τα οποία αποτελούνται από πεπερασμένης διάρκειας ζωής παίκτες. Εισάγοντας αρκετούς περιορισμούς καταφέρνει να εξηγήσει πως προκύπτουν υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες και τα συμπεράσματα του δύνανται να εφαρμοστούν σε συνταξιοδοτικά προγράμματα.

Η έρευνα του Kandori(1992) αφορά πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια με πεπερασμένης , αλλά αρκετά μεγάλης διάρκειας ζωής παίκτες. Κατάφερε, να επεκτείνει τα συμπεράσματα του και στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια διαμορφώνοντας και σε αυτά εθιμικό θεώρημα, αρκεί να διασφαλίζεται η μεγάλη διάρκεια των περιόδων επικάλυψης και εισάγοντας την έννοια της περιόδου τιμωρίας παικτών από τους αντιπάλους τους .

Ένα εθιμικό θεώρημα, πηγάζει από την υπόθεση περί υπομονετικών παικτών και υποστηρίζει την ύπαρξη πληθώρας αποδόσεων ισορροπίας κατά Nash. Η έρευνα του Gossner(1996) επέκτεινε τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων ερευνών. Οι Salant και Kandori υπέθεταν ότι οι μικτές στρατηγικές ήταν παρατηρούμενες, οπότε τις εισήγαγαν σε συμπεράσματα μαζί με τις αμιγείς. Μέχρι που ο Gossner, υιοθετώντας την διαδικασία τιμωρίας και την εισαγωγή ενός αλγορίθμου, απέδειξε ότι εθιμικό θεώρημα ισχύει και για μη παρατηρούμενες μικτές στρατηγικές.

Ολοκληρώνοντας, το τελευταίο τμήμα της εργασίας αφορά εφαρμογές, στις οποίες γίνεται ανάλυση της διαδικασίας τιμωρίας. Η τιμωρία που αναλαμβάνεται να υλοποιηθεί από τους αντιπάλους ενός παίκτη αποτελεί μία διαδικασία, με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Εμείς, θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου το παίγνιο αποτελείται από δύο παίκτες, έναν νεότερο και έναν παλαιότερο , έτσι ώστε να ικανοποιείται η επικάλυψη και έπειτα παίγνια τριών ατόμων. Με αυτόν τον τρόπο, θα φανεί ενδεχόμενη δυσκολία ολοκλήρωσης της διαδικασίας τιμωρίας και ο τρόπος επίλυσης της. Και τέλος, θα παρουσιαστεί η διαδικασία τιμωρίας παίκτη που αποκλίνει από το καθήκον της τιμωρίας.

1. Στατικά Παίγνια.

Συχνά στη βιβλιογραφία ο όρος “παίγνιο” συναντάται και ως “παιχνίδι”. Ως ορισμός, ένα παίγνιο αποτελεί μία κατάσταση κατά την οποία ορθολογικοί παίκτες, δηλαδή εκείνοι που στοχεύουν στην βέλτιστη απόδοση με τον μικρότερο δυνατό κίνδυνο , έχουν αντικρουόμενους στόχους και επιλέγουν ενέργειες. Μέσω αυτής της επιλογής δημιουργούνται συνθήκες αλληλεξάρτησης . Αυτή η διαδικασία αφορά κυρίως τα μη συνεργατικά παίγνια. Στα συνεργατικά παίγνια, αντίθετα , η διαδικασία επικεντρώνεται στο πως γίνεται η διαμόρφωση αποφάσεων ατόμων με δεσμευτικές συμφωνίες. Ως ειδικότερο ορισμό για το παίγνιο :

Ορισμός 1.1 Ως παίγνιο δηλώνεται μία κατάσταση κατά την οποία :
1. Συμμετέχουν N>1 παίκτες οι οποίοι με τις επιλογές τους προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν και να ικανοποιήσουν το συμφέρον τους.

2. Το αποτέλεσμα για τον κάθε παίκτη εξαρτάται και από τις επιλογές των υπολοίπων.

3. Δεν υφίσταται η τύχη ως παράγοντας.

Η υπόθεση της ορθολογικότητας αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό της θεωρίας παιγνίων . Ειδικότερα, κάθε παίκτης επιλέγει τις εκάστοτε ενέργειες του με γνώμονα το δικό του συμφέρον. Για να επιτευχθεί το προαναφερθέν θα πρέπει οι παίκτες να γνωρίζουν ή έστω να πιθανολογούν για το τι θα αποκομίσουν ως απόδοση των επιλεγόμενων ενεργειών. Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί ότι η ορθολογικότητα αποτελεί υπόθεση με στόχο την απλούστευση διάφορων προβλημάτων.

Ορισμός 1.2 Ως απόδοση του παίκτη i ορίζεται το μέγεθος u_i και υπολογίζει το όφελος του παίκτη αυτού , για κάθε συνδυασμό στρατηγικών $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ και παριστάνεται από μία συνάρτηση απόδοσης της μορφής:

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

Αναφορικά με την αλληλεξάρτηση των συμμετεχόντων στο παίγνιο , ουσιαστικά το όφελος του εκάστοτε παίκτη εξαρτάται , έστω και μερικώς , από τις ενέργειες των υπόλοιπων παικτών. Προκειμένου , λοιπόν, ο παίκτης να εξασφαλίσει την απόδοση που επιθυμεί οδηγείται στο στρατηγικό τρόπο λήψης αποφάσεων και προσπαθεί να προβλέψει τον τρόπο με τον οποίο οι δικές του επιλογές θα επιδράσουν στις συμπεριφορές των υπόλοιπων εμπλεκόμενων.

Βασικά στοιχεία ενός παιγνίου αποτελούν οι παίκτες, οι στρατηγικές, ο πίνακας αποτελεσμάτων καθώς και η λύση ή ισορροπία του παιγνίου. Ως παίκτες θεωρούνται οι αυτόνομες μονάδες λήψης απόφασης και έχουν ποικίλες ενναλακτικές λύσεις για κάθε ενέργεια τους. Ένας ενδεικτικός ορισμός για την ισορροπία κατά Nash διατυπώνεται ως εξής:

Ορισμός 1.3 Ένας συνδυασμός στρατηγικών $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ αποτελεί μία ισορροπία κατά Nash εάν για κάθε παίκτη i η στρατηγική s_i^* αποτελεί την άριστη αντίδραση του στις δεδομένες στρατηγικές των αντιπάλων τους.

Επιπρόσθετο σημαντικό στοιχείο για τους παίκτες αποτελούν οι στρατηγικές. Με τον όρο στρατηγική συνοψίζεται το σύνολο των κανόνων που ορίζει τις εφικτές επιλογές που μπορεί να ακολουθήσει ένας παίκτης. Μάλιστα, η στρατηγική ορίζει κάτι αντίστοιχο με σχέδιο δράσης αναφορικά με τον εκάστοτε παίκτη μέχρι την όποια ολοκλήρωση του εκάστοτε παιγνίου.

Ορισμός 1.4 Κάθε ενέργεια ή ακολουθία ενεργειών που δύναται να επιλέξει ο εκάστοτε παίκτης αποτελεί μία στρατηγική.

Στόχος της στρατηγικής είναι η ικανοποίηση του παίκτη, δηλαδή η απόκτηση της απόδοσης που επιθυμεί. Μάλιστα, στα παίγνια θα αναζητούμε τις στρατηγικές, οι οποίες κρίνονται ως βέλτιστες αντιδράσεις σε συνδυασμούς στρατηγικών των αντιπάλων τους.

Ορισμός 1.5 Θα λέμε ότι η στρατηγική s_i είναι βέλτιστη αντίδραση στον συνδυασμό στρατηγικών των αντιπάλων s_{-i} αν ισχύει ότι:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \ \geq \ u_i(s_i', s_{-i}) \ \text{για όλες τις στρατηγικές } s_i'$$

Υπάρχουν δύο ειδών στρατηγικές που μπορεί να υιοθετήσει ο εκάστοτε παίκτης. Διακρίνονται σε καθαρές ή αμιγείς στρατηγικές και μικτές στρατηγικές. Ξεκινώντας με τις αμιγείς στρατηγικές , αφορούν παίκτες που επιλέγουν μόνο μία από τις διαθέσιμες ενέργειες-επιλογές , δηλαδή με πιθανότητα ίση με τη μονάδα, αποκλείοντας όλες τις υπόλοιπες. Οι μικτές στρατηγικές προκύπτουν στην περίπτωση όπου υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με τη βέλτιστη καθαρή στρατηγική. Έτσι , ο παίκτης προτιμά ένα συνδυασμό στρατηγικών, με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας στην εκάστοτε στρατηγική , προκειμένου να διαφοροποιήσει τον κίνδυνο του. Ειδικότερα, η διάκριση αμιγούς και μικτής στρατηγικής διαμορφώνεται ως εξής :

Ορισμός 1.6 Αν ο παίκτης έχει στη διάθεση του n αμιγείς στρατηγικές , τις οποίες συμβολίζουμε ως S_i όπου i=(1,2,…,n) τότε η μικτή στρατηγική m προκύπτει από τις αντίστοιχες πιθανότητες των στρατηγικών a_i δηλαδή το σύνολο $(p_1,p_2,…,p_n)$ με τις οποίες θα έπρεπε να επιλέξει τις καθαρές στρατηγικές του.

Μάλιστα, ένας επιπλέον ορισμός αναφορικά με τη μικτή στρατηγική διαμορφώνεται ως εξής:

Ορισμός 1.7 Η μικτή στρατηγική δεν είναι επιλογή μιας κατανομής πιθανότητας στον χώρο στρατηγικών του από τον παίκτη , αλλά η εικασία των παικτών για την στρατηγική συμπεριφορά των αντιπάλων τους , εκφρασμένη από μία κατανομή πιθανοτήτων.

Ακόμη , για τους παίκτες είναι ιδιαιτέρως σημαντική η πληροφόρηση που διαθέτουν. Με την έννοια της πληροφόρησης ουσιαστικά γίνεται αναφορά στη γνώση των χαρακτηριστικών του παιγνίου, όπως για παράδειγμα σε δυναμικά παίγνια όπου υπάρχει γνώση για το σύνολο των προηγούμενων ενεργειών.

Πιο συγκεκριμένα, η πληροφόρηση διακρίνεται σε πλήρη ή ελλιπή . Ως πλήρης χαρακτηρίζεται η περίπτωση όπου οι συμμετέχοντες στο παίγνιο, δηλαδή οι παίκτες έχουν γνώση για όλα τα βασικά χαρακτηριστικά του παιγνίου. Στην αντίθετη περίπτωση, ουσιαστικά τουλάχιστον ένας παίκτης δεν διαθέτει τις γνώσεις των υπολοίπων όσον αφορά τα χαρακτηριστικά αυτά. Μία επιπλέον διάκριση αναφορικά με την πληροφόρηση είναι η τέλεια ή ατελής. Η διάκριση αυτή λαμβάνει χώρα στα δυναμικά παίγνια, τα οποία και θα αναλύσουμε περαιτέρω.

1.1 Στατικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης.

Η διάκριση των παιγνίων σε στατικά και δυναμικά είναι ιδιαιτέρως σημαντική και θα βασιστούμε σε αυτή σε όλη την έκταση της παρούσας εργασίας. Τα στατικά παίγνια αφορούν εκείνα στα οποία δεν υπεισέρχεται χρόνος. Επί της ουσίας, οι παίκτες επιλέγουν ενέργειες μία συγκεκριμένη φορά και σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο. Χαρακτηριστικό αυτών των παιγνίων αποτελεί επίσης το γεγονός ότι οι αντίπαλοι κινούνται ταυτόχρονα χωρίς ο ένας παίκτης να γνωρίζει την ενέργεια του αντιπάλου του. Μάλιστα, στο στατικό παίγνιο η δομή του συνοψίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.8 Η δομή του παιγνίου σε κανονική μορφή(ή στατικό παίγνιο) απαρτίζεται από τα παρακάτω στοιχεία:

1. Τους παίκτες που καθορίζουν το αποτέλεσμα.

2. Τις διαθέσιμες επιλογές του κάθε παίκτη.

3. Τα πιθανά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από τους συνδυασμούς των επιλογών.

4.Τις προτιμήσεις των παικτών για τα διαφορετικά αποτελέσματα ,όπως αυτά εκφράζονται από την απόδοση.

Τα στατικά παίγνια, όπως και προαναφέρθηκε διακρίνονται σε εκείνα με την πλήρη πληροφόρηση και σε εκείνα με την ελλιπή. Η ανάλυση της παρούσας εργασίας θα ξεκινήσει με την επεξήγηση των παιγνίων με πλήρη πληροφόρηση. Προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές οι εκάστοτε έννοιες θα χρησιμοποιηθούν παραδείγματα.

Ορισμός 1.9 Ένα παίγνιο καλείται στατικό, όταν όλοι οι παίκτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους ταυτόχρονα , δηλαδή χωρίς να έχουν γνώση αναφορικά με τις επιλογές των προηγούμενων παικτών.

Όπως έχουμε ήδη ορίσει τα στατικά παίγνια αφορούν εκείνα όπου οι αποφάσεις των παικτών λαμβάνουν χώρα ταυτόχρονα. Ένας πιο ακριβής ορισμός, όσον αφορά τα παίγνια με πλήρη πληροφόρηση είναι ο εξής :

Ορισμός 1.10 Ένα πεπερασμένο παίγνιο σε κανονική μορφή περιγράφεται από τη συλλογή $\Gamma=\{N, (S_i)_{i\epsilon N}, (u_i)_{i\epsilon N}\}$, όπου το N ορίζει ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο παικτών , το S_i το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i και u_i μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $S_1 \times S_2 \times_{\dots} \times S_n$ που αποτιμά την απόδοση του για κάθε συνδυασμό στρατηγικών.

Για να γίνει κατανοητή η μορφή του παιγνίου κανονικής μορφής ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα απλής μορφής με δύο παίκτες, όπου ο καθένας διαθέτει δύο στρατηγικές. Ο πίνακας του παιγνίου έχει ως εξής:

Παράδειγμα 1.1

		$Π_2$	
		Α	Δ
	Π	2,2	1,6
$Π_1$	Κ	6,3	1,1

Ορισμός 1.11 Κάθε παίγνιο θα απεικονίζεται ως ένας πίνακας, που θα αποτελείται από κελιά, ανάλογα με τον αριθμό των ενεργειών των παικτών που συμμετέχουν. Σε ένα απλοποιημένο παίγνιο δύο παικτών θα διαμορφωθεί ένας πίνακας διαστάσεων 2×2 , με το πρώτο στοιχείο στο κάθε κελί να αφορά την απόδοση του πρώτου παίκτη ενώ το δεύτερο στοιχείο αντίστοιχα την απόδοση του δεύτερου παίκτη.

Η διαδικασία έχει ως εξής, δηλαδή ο παίκτης 1 ($Π_1$) είναι εκείνος που επιλέγει μία γραμμή του πίνακα ενώ ο παίκτης 2 ($Π_2$) επιλέγει μία στήλη του πίνακα. Κάθε κελί , όπως είναι εμφανές , περιλαμβάνει δύο αριθμούς. Στην πραγματικότητα αυτοί οι αριθμοί απεικονίζουν μονάδες απόδοσης που θα μπορούσε να αποκτήσει ο κάθε παίκτης. Με βάση τον συνδυασμό των στρατηγικών που θα επιλέξουν οι 2 παίκτες , το παίγνιο καταλήγει σε ένα από τα υπάρχοντα κελιά του πίνακα.

Το σκεπτικό που ακολουθείται ουσιαστικά βασίζεται στην υπόθεση ότι ο παίκτης 1 αποκομίζει την πρώτη απόδοση του εκάστοτε κελιού ενώ αντίστοιχα η δεύτερη απόδοση του εκάστοτε κελιού αντιστοιχεί στον παίκτη 2. Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο παίκτης 1 θα διαλέξει την πάνω γραμμή . Βάσει των διαθέσιμων αποδόσεων , αν ο παίκτης 2 επέλεγε την αριστερή στήλη τότε θα κατέληγε το παίγνιο στο κελί πάνω αριστερά . Άρα, ο παίκτης 1 θα αποκομίσει την απόδοση των δύο μονάδων και αντίστοιχα ο παίκτης 2 θα αποκομίσει την ίδια . Γίνεται λοιπόν σαφές ότι η απόδοση του κάθε παίκτη εξαρτάται καθαρά από την επιλογή και του αντιπάλου.

Ένα επιπλέον παράδειγμα στατικού παιγνίου με πλήρη πληροφόρηση μπορεί να παρουσιαστεί με το δίλημμα του φυλακισμένου. Ουσιαστικά, υπάρχουν δύο παίκτες οι οποίοι είναι υπόδικοι και έχουν σαν σύνολο στρατηγικών ο καθένας Ομολογία ή Σιωπή . Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο παράδειγμα, σε κάθε κελί το πρώτο στοιχείο αποτελεί η απόδοση του παίκτη 1 ενώ το δεύτερο στοιχείο αποτελεί την απόδοση του παίκτη 2.

Προκειμένου να διαμορφώσουμε το παίγνιο θα αναφέρουμε τις επιπτώσεις της εκάστοτε στρατηγικής. Αν και οι δύο παίκτες ομολογήσουν στην κατάθεση τους θα υποστούν μία καταδίκη έξι μηνών έκαστος. Αν ο ένας από του δύο ομολογήσει για τον άλλον (δηλαδή κατηγορεί τον άλλο υπόδικο) ενώ ο άλλος σιωπήσει , τότε ο παίκτης που ομολόγησε δεν θα υποστεί καμία ποινή ενώ εκείνος που επέλεξε να σιωπήσει θα δεχθεί ποινή εννέα μηνών. Τέλος, αν επιλέξουν να σιωπήσουν και οι δύο τότε η ποινή τους θα διαμορφωθεί στους δύο μήνες έκαστος.

Είναι λογικό, ότι οι αποδόσεις που θα βρίσκονται στο κάθε κελί θα είναι αρνητικές καθώς αποτελούν ποινή και όχι όφελος. Το παίγνιο, λοιπόν , διαμορφώνεται ως εξής :

Παράδειγμα 1.2

		Υπόδικος 2	
		Σ	Ο
	Σ	-2, -2	-9, 0
Υπόδικος 1	Ο	0, -9	-6, -6

Πρέπει να εντοπιστεί η λύση του παιγνίου. Σε περίπτωση όπου ο υπόδικος 2 επιλέξει να σιωπήσει , ο υπόδικος 1 θα ομολογήσει έτσι ώστε να αποφύγει την ποινή. Αντίθετα, αν επιλέξει την ομολογία τότε ο υπόδικος 1 θα ομολογήσει και εκείνος. Αντίστοιχα , αν ο υπόδικος 1 επιλέξει να σιωπήσει τότε ο υπόδικος 2 θα επιλέξει να ομολογήσει προκειμένου να αποφύγει την ποινή. Αντίθετα, αν ο υπόδικος 1 επιλέξει να ομολογήσει τότε ο υπόδικος 2 θα επιλέξει την ομολογία. Συνεπώς , η μοναδική λύση η οποία προκύπτει είναι το σύνολο στρατηγικών (Ομολογία, Ομολογία).

Το κύριο χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου παιγνίου είναι το γεγονός ότι η ισορροπία που προέκυψε δεν είναι η καλύτερη επιλογή που θα μπορούσαν να ακολουθήσουν οι παίκτες. Αναλυτικότερα, υπάρχει ο συνδυασμός στρατηγικών (Σιωπή, Σιωπή) κατά τον οποίο και οι δύο παίκτες θα δέχονταν μικρότερη ποινή. Ο συγκεκριμένος συνδυασμός στρατηγικών καλείται κατά Pareto βέλτιστος.

Ορισμός 1.12 Ένας συνδυασμός στρατηγικής s θα είναι αποτελεσματικός κατά Pareto αν για κάθε άλλο στρατηγικό συνδυασμό s' και για όλους τους παίκτες i ισχύει ότι

$$u_i(s) \geq u_i(s')$$

και τουλάχιστον για έναν παίκτη η σχέση ισχύει με αυστηρή ανισότητα.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση εάν οι δύο παίκτες καταφέρουν να συμφωνήσουν στη στρατηγική αυτή, δηλαδή να σιωπήσουν και οι δύο θα βρεθούν σε καλύτερη θέση. Ωστόσο, ακόμα και αν επιλεγεί η κοινή στρατηγική, θα υπάρχει πάντα το ενδεχόμενο, καθώς και το κίνητρο, να παραβιαστεί η συμφωνία αυτή από τουλάχιστον έναν παίκτη. Ολοκληρώνοντας, βλέπουμε ότι στο παίγνιο του διλήμματος του φυλακισμένου η λύση που προκύπτει από συνεργασία είναι αποδοτικότερη για τους παίκτες. Θα λέμε ότι αποτελεί μία κυρίαρχη στρατηγική, δηλαδή εφόσον οι παίκτες είναι ορθολογικοί θα την επιλέξουν έναντι της κυριαρχούμενης στρατηγικής.

1.1.1 Διαδικασία Κυριαρχίας.

Η σχέση κυριαρχίας αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο , το οποίο συμβάλει στην λύση του παιγνίου. Ειδικότερα, θα λέμε ότι μία στρατηγική ενός παίκτη θα κυριαρχεί αυστηρά έναντι μίας άλλης στρατηγικής αν και μόνο αν για κάθε πιθανό συνδυασμό επιλογής στρατηγικών των άλλων παικτών η πρώτη θα εξασφαλίζει μεγαλύτερη απόδοση έναντι της δεύτερης. Στο παράδειγμα , το οποίο αναπτύξαμε υφίσταται αυτού του είδους κυριαρχία . Για να καταλήξουμε σε αυτή τη στρατηγική χρησιμοποιούμε τη διαδικασία επαναλαμβανόμενης απαλοιφής των στρατηγικών που κυριαρχούνται.

Η διαδικασία απαλοιφής λειτουργεί ως εξής :

Βήμα 1 . Για κάθε παίκτη i θέτουμε αναφορικά με τα σύνολα στρατηγικών $S_i = S_0$

Βήμα 2. Για κάθε παίκτη i και γύρο j , αναζητούμε αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές. Αν δεν υπάρχουν , η διαδικασία ολοκληρώνεται. Αν όμως υπάρχουν , προχωρήστε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3. Διαγράφουμε από το S_i^j τις αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές. Έπειτα θέτουμε $j=i+1$ και επαναλαμβάνουμε το δεύτερο βήμα.

Ενδεικτικά, στο παράδειγμα με το δίλημμα του φυλακισμένου γίνεται αντιληπτό ότι για τον υπόδικο 2 η στρατηγική της σιωπής κυριαρχείται από τη στρατηγική της ομολογίας. Αναλυτικότερα, ο υπόδικος 2 στην στρατηγική σιωπής θα δεχόταν ποινή είτε δύο είτε εννέα μηνών ενώ αντίστοιχα στην στρατηγική ομολογίας η ποινή θα διαμορφωνόταν σε καμία ποινή ή σε έξι μήνες. Οπότε, ο υπόδικος 1 , που γνωρίζει ότι ο υπόδικος 2 είναι ορθολογικός, θα απέκλειε τη κυριαρχούμενη στρατηγική για τον υπόδικο 2 και το παίγνιο θα διαμορφωνόταν ως εξής :

Παράδειγμα 1.2

		Υπόδικος 2
		Ο
Υπόδικος 1	Σ	-9, 0
	Ο	-6, -6

Συνεχίζουμε τη διαδικασία απαλοιφής. Όσον αφορά τον υπόδικο 1 η στρατηγική της ομολογίας κυριαρχεί επί της στρατηγικής σιωπής καθώς στην πρώτη η ποινή ανέρχεται στους έξι μήνες ενώ στην δεύτερη στους εννέα μήνες. Αφού ο υπόδικος 2 ξέρει ότι ο υπόδικος 1 είναι ορθολογικός η στρατηγική σιωπής απαλείφεται και καταλήγουμε στην αρχική ισορροπία, δηλαδή τον συνδυασμό (Ομολογία, Ομολογία) . Οι στρατηγικές αυτές αποκαλούνται εκλογικεύσιμες γιατί αποτελούν τη βέλτιστη αντίδραση του παίκτη στην κάθε ενέργεια του αντιπάλου του.

Πέραν της αυστηρής κυριαρχίας, όπου αναλύθηκε προηγουμένως , υπάρχει και η έννοια της ασθενούς κυριαρχίας. Θα αναφέρουμε ότι η πρώτη στρατηγική θα κυριαρχεί ασθενώς έναντι της δεύτερης αν η πρώτη εξασφαλίζει την ίδια ή μεγαλύτερη απόδοση από την δεύτερη. Ένας πιο αυστηρός ορισμός για τα δύο είδη κυριαρχίας ακολουθεί στη συνέχεια :

Ορισμός 1.13 Για τον τυχαίο παίκτη i , με στρατηγικές s_i , $s_i' \in S_i$ θα λέμε ότι η στρατηγική s_i κυριαρχεί αυστηρά επί της s_i' αν για κάθε συνδυασμό στρατηγικών $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Η s_i θα κυριαρχεί ασθενώς της s_i' αν για κάθε συνδυασμό στρατηγικών $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Βάσει , λοιπόν, της εργαλειακής ορθολογικότητας, είναι ανορθολογικό για τον παίκτη i να προβεί στην επιλογή της στρατηγικής s_i' υπό οποιεσδήποτε συνθήκες. Για αυτόν τον λόγο, κυριαρχούμενες στρατηγικές, όπως αυτή , απαλείφονται καθώς δεν θα κριθούν επιλέξιμες. Αυτή η θεωρία οδηγεί στη διαδικασία που ακολουθήσαμε στο παράδειγμα μας προκειμένου να καταλήξουμε στην ισορροπία. Με τον όρο εργαλειακή ορθολογικότητα αναφερόμαστε στο γεγονός ότι ένα άτομο χρησιμοποιεί αποτελεσματικά διαθέσιμους πόρους έτσι ώστε να ικανοποιήσει τις προτιμήσεις του.

Αναφορικά με την ορθολογισιμότητα των παικτών , η οποία παρουσιάζεται από τους Berhnheim(1984) και Pearce(1984) , ως αφετηρία θεωρούμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Οι παίκτες διατηρούν υποκειμενικές πεποιθήσεις για τις ενέργειες των αντιπάλων τους. Οι πεποιθήσεις εκφράζονται σαν πιθανότητες επί των στρατηγικών αυτών επιλογών και πρέπει να συμφωνούν με τη διαθέσιμη πληροφορία που διαθέτουν για την αναμενόμενη συμπεριφορά τους.
- Οι παίκτες μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφέλεια τους με βάση τις υποκειμενικές πεποιθήσεις τους.

1.1.2 Λύση minimax, maximin , maximax.

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των στατικών παιγνίων με πλήρη πληροφόρηση αποτελεί η λύση minimax ή maximin. Ουσιαστικά υπάρχουν δύο ειδών στρατηγικές , οι επιθετικές και οι αμυντικές. Όσον αφορά τις αμυντικές στρατηγικές, οι παίκτες προσπαθούν να αποκτήσουν την υψηλότερη εξασφαλισμένη απόδοση όχι την υψηλότερη απόδοση. Πιο συγκεκριμένα αντί να σκεφτεί την μέγιστη απόδοση που θα μπορούσε να αποκτήσει, σκέφτεται ποια θα είναι η μέγιστη δυνατή απόδοση αν οι αντίπαλοι του ακολουθούν τις χειρότερες δυνατές στρατηγικές για αυτόν (Βολιώτης, 2015). Αυτή ονομάζεται ως maximin και πιο ειδικά προκύπτει ο ορισμός :

Ορισμός 1.14 Μία στρατηγική $\underline{s_i}$ ϵ S_i του παίκτη i θα καλείται maximin αν ισχύει ότι :

$$s_i = arg \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

Στην περίπτωση της αντίθετης στρατηγικής , η οποία ονομάζεται minimax και είναι επιθετική, ο παίκτης στοχεύει ενάντια στον αντίπαλο του (Βολιώτης, 2015). Πιο αναλυτικά, αντί να ασχοληθεί με την μεγιστοποίηση της απόδοσης του , στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της απόδοσης του αντιπάλου. Μάλιστα στα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος, στα οποία το όφελος του ενός παίκτη είναι κόστος του αντιπάλου , μέσω της ελαχιστοποίησης της απόδοσης του αντιπάλου ο παίκτης μεγιστοποιεί την απόδοση του. Ο ορισμός της minimax στρατηγικής ,συγκεκριμένα διαμορφώνεται ως εξής :

Ορισμός 1.15 Μία στρατηγική $\overline{s_i}$ ϵ S_i του παίκτη i θα καλείται minimax αν ισχύει ότι :

$$\overline{s_i} = arg \min_{s_i \in S_i} \max_{s_{-i} \in S_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω στρατηγικές προκύπτουν και οι αντίστοιχες αποδόσεις για την εκάστοτε στρατηγική . Πιο αναλυτικά , η απόδοση που εξασφαλίζεται με την maximin στρατηγική ονομάζεται αξία maximin και συμβολίζεται με $\underline{u}$, ενώ η αντίστοιχη αξία minimax συμβολίζεται ως $\bar{u}$. Η maximin αξία αποτελεί ένα μέγιστο κάτω φράγμα απόδοσης, δηλαδή ο παίκτης δεν μπορεί να αποκτήσει μικρότερη απόδοση από αυτό . Η αντίστοιχη αξία minimax συμβολίζει το ελάχιστο άνω φράγμα απόδοσης, δηλαδή η απόδοση του παίκτη θα κυμανθεί από την minimax αξία και πάνω.

Μάλιστα, στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος θα ισχύει ότι το μεγαλύτερο εξασφαλισμένο κέρδος του εκάστοτε παίκτη δεν είναι δυνατό να ξεπερνά την μικρότερη εξασφαλισμένη ζημία του άλλου παίκτη. Ως εκάστοτε παίκτη συμβολίζουμε τον παίκτη i ενώ ως αντίπαλο συμβολίζουμε τον παίκτη -i. Η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί σαν :

$$\max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \leq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

Με στόχο να κατανοήσουμε περαιτέρω τον τρόπο υπολογισμού των αξιών minimax και maximin θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.3

		Π2		
		Α	Μ	Δ
Π1	Π	1,-1	-3,3	-2,2
	Μ	2,-2	5,-5	4,-4
	Κ	2,-2	3,-3	2,-2

Μία εκδοχή είναι η αναζήτηση των αξιών maximin και minimax του παίκτη 1. Έστω ότι συμβολίζουμε ως u_{ij} την απόδοση του παίκτη στην γραμμή i και στην στήλη j . Ενδεικτικά , θα εξεταστεί πρώτα η στρατηγική Κ για τον παίκτη 1 , προκειμένου να εντοπιστεί η αξία maximin.

$$\min\{u_{31}, u_{32}, u_{33}\} = 2 \qquad (1.1)$$

Αν εξεταστούν και οι αντίστοιχες στρατηγικές Π,Μ προκύπτει ότι :

$$\min\{u_{21}, u_{22}, u_{23}\} = 2 \qquad (1.2)$$

$$\min\{u_{11}, u_{12}, u_{13}\} = -3 \qquad (1.3)$$

Γίνεται αντιληπτό , ότι οι δύο στρατηγικές Κ,Μ προσφέρουν τουλάχιστον απόδοση 2. Συνεπώς, αυτές αποτελούν τις maximin στρατηγικές και η maximin αξία ισούται με 2.

Η περίπτωση υπολογισμού της minimax αξίας , θα εξεταστεί στην περίπτωση του παίκτη 2. Πιο συγκεκριμένα, αντίστοιχα για την κάθε στρατηγική Α, Μ , Δ προκύπτουν :

$$\max\{u_{11}, u_{21}, u_{31}\} = u_{21} = u_{31} = 2 \qquad (1.4)$$

$$\max\{u_{12}, u_{22}, u_{32}\} = u_{22} = 5 \qquad (1.5)$$

$$\max\{u_{13}, u_{23}, u_{33}\} = u_{23} = 4 \qquad (1.6)$$

Συνεπώς, ο παίκτης 2 στην minimax στρατηγική θα επιλέξει την αριστερή στήλη έτσι ώστε να εξασφαλίσει στον παίκτη 1 τη μικρότερη δυνατή απόδοση, ανάμεσα στις τρεις.

Πέραν των δύο στρατηγικών που αναφέρθηκαν αναφορικά με τα στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης, υφίσταται μία επιπλέον στρατηγική , η οποία καλείται maximax στρατηγική. Στην συγκεκριμένη διαδικασία, ο εκάστοτε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική εκείνη, στην οποία αποκομίζει τη μέγιστη δυνατή απόδοση. Ουσιαστικά, ο παίκτης κρίνεται ιδιαίτερα αισιόδοξος και θεωρεί ότι ο αντίπαλος του θα τον οδηγήσει στην μέγιστη δυνατή απόδοση. Πιο συγκεκριμένα, ο ορισμός της maximax στρατηγικής έχει ως εξής :

Ορισμός 1.16 Μία στρατηγική $\overline{s_i} \in S_i$ του παίκτη i θα καλείται maximax αν ισχύει ότι :

$$\overline{s_i} = \arg \max_{s_i \in S_i} \max_{s_{-i} \in S_{-i}} ui(s_i, s_{-i})$$

1.1.3 Ισορροπία κατά Nash σε Αμιγείς Στρατηγικές.

Η αναφορά σε διάφορα χαρακτηριστικά των στατικών παιγνίων με πλήρη παρακολούθηση θα ολοκληρωθεί μέσω της επεξήγησης της ισορροπίας Nash.

Ορισμός 1.17 Ο συνδυασμός στρατηγικών μέσω του οποίου οι παίκτες καταφέρνουν ταυτόχρονα τη βέλτιστη αντίδραση τους , είναι το σημείο ισορροπίας του παιγνίου σύμφωνα με τον Nash.

Ωστόσο, βασίζεται και στο γεγονός ότι η καλύτερη στρατηγική του κάθε παίκτη είναι εμφανώς εξαρτημένη από τις ενέργειες του αντιπάλου. Δηλαδή, πάντα ο παίκτης θα πρέπει προτού επιλέξει την ενέργεια του να αναλογίζεται την ενδεχόμενη ενέργεια των υπόλοιπων παικτών. Συνεπώς, θα πρέπει να διαμορφώνει κάποια πεποίθηση αναφορικά με τις ενέργειες αυτές. Οι πεποιθήσεις αυτές πρέπει να είναι συνεπείς με τις επιλογές που πραγματικά θα ακολουθήσουν οι παίκτες.

Ορισμός 1.18 Με τον όρο βέλτιστη αντίδραση, αναφερόμαστε στη στρατηγική s_i^* του παίκτη i , η οποία μεγιστοποιεί την απόδοση του με δεδομένες τις στρατηγικές των υπόλοιπων αντιπάλων του.

Ειδικότερα, ως ισορροπία Nash μπορεί να χαρακτηριστεί ο συνδυασμός στρατηγικών όπου οι παίκτες δεν έχουν κίνητρο να αποκλίνουν. Αν για παράδειγμα, ένας παίκτης έχει επιλέξει μία στρατηγική , η αλλαγή στρατηγικής από έναν διαφορετικό παίκτη με διατήρηση των υπόλοιπων στρατηγικών , του αποφέρει μόνο απόδοση . Η απόδοση μάλιστα αυτή θα είναι το πολύ ίση με την απόδοση που θα πρόκυπτε σε περίπτωση ισορροπίας.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε ένα τυποποιημένο παίγνιο προκειμένου να αναλύσουμε την ισορροπία με βάση την έννοια της ισορροπίας Nash.

Παράδειγμα 1.4 (Παίγνιο συνεργασίας)

		Π2: Ελάφι	Π2: Λαγός
Π1	Ελάφι	4,4	0,2
Π1	Λαγός	2,0	2,2

Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι μια παραβολή που αναφέρει ο J.J.Rousseau στο βιβλίο του <<Πραγματεία περί ανισότητας>>. Ουσιαστικά, δεν έκανε χρήση της θεωρίας παιγνίων και ανέδειξε τη διαφορά ανάμεσα στη στρατηγική χαμηλού ρίσκου και στην πιο προσοδοφόρα στρατηγική. Η πλοκή του προβλήματος έχει ως εξής :

Υπάρχουν 2 κυνηγοί οι οποίοι στήνουν καρτέρι σε ένα ελάφι. Επειδή κανένας από τους 2 δεν μπορεί να πιάσει μόνος του ένα αντίστοιχο θήραμα, θα πρέπει να συνεργαστούν μεταξύ τους. Όμως, ο καθένας μόνος του θα μπορούσε να πιάσει ένα μικρότερο θήραμα, όπως τον λαγό. Συνεπώς, για τους κυνηγούς υπάρχει το δέλεαρ της απόκλισης από το παίγνιο συνεργασίας. Το βασικό, όμως , στοιχείο είναι το γεγονός ότι η συνεργασία θα αποφέρει μεγαλύτερη αξία.

Αναλύοντας την ισορροπία, αν ο παίκτης 1 επιλέξει το ελάφι θα έχει μέγιστη απόδοση τέσσερα, ενώ αν επιλέξει τον λαγό θα έχει μέγιστη απόδοση δύο. Αντίστοιχα, αν ο παίκτης 2 επιλέξει το ελάφι θα έχει μέγιστη απόδοση τέσσερα ενώ αν επιλέξει τον λαγό θα αποκομίσει μέγιστη απόδοση δύο. Οπότε, καταλήγουμε σε δύο σημεία ισορροπίας , τα οποία είναι (Ελάφι, Ελάφι) και (Λαγός, Λαγός) . Το πρώτο σημείο είναι κυρίαρχη ισορροπία καθώς προσφέρει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Ωστόσο, επειδή πάντα υπάρχει ο φόβος απόκλισης, μπορεί το παίγνιο να καταλήξει στο δεύτερο σημείο ισορροπίας, το οποίο είναι υποβέλτιστο. Το σημείο αυτό αποτελεί την κυριαρχία ρίσκου, δηλαδή ο κάθε παίκτης ανεξάρτητα διασφαλίζει ένα επίπεδο ασφαλείας.

1.1.4 Ισορροπία κατά Nash σε Μικτές Στρατηγικές.

Ακόμα, πρέπει να αναλυθεί η ισορροπία στις μικτές στρατηγικές. Ενδεικτικά, ο ορισμός της ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές μπορεί να αναφερθεί ως ακολούθως :

Ορισμός 1.19 Για ένα παίγνιο Γ, θα καλούμε έναν συνδυασμό μικτών στρατηγικών $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,..,\sigma_n)$ ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές αν για κάθε παίκτη i:

$$V_i(\sigma) \geq V_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Όπου $V_i(\sigma)$ συμβολίζει την αναμενόμενη απόδοση του παίκτη i και ισχύει ότι:

$$V_i(\sigma) = \sum_{s \in S} p \times u_i(s)$$

με p την κατανομή πιθανότητας και u_i τη συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i .

Γενικά, η μικτή στρατηγική δεν είναι η επιλογή μιας κατανομής πιθανότητας στον χώρο στρατηγικών του από τον παίκτη , αλλά η εικασία των παικτών για την στρατηγική συμπεριφορά των αντιπάλων τους, εκφρασμένη από μία κατανομή πιθανότητας. Προκειμένου να αντιληφθούμε την έννοια της ισορροπίας στις μικτές στρατηγικές θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα.

Έστω το παίγνιο :

Παράδειγμα 1.5

		$Π_2$	
		Α[p]	Δ[1-p]
$Π_1$	Π[q]	3,3	0,0
	Κ[1-q]	0,0	1,1

Ουσιαστικά, στις μικτές στρατηγικές οι ισορροπίες βασίζονται στο γεγονός ότι αν οι εικασίες των παικτών για τη στρατηγική συμπεριφορά τους είναι αμοιβαία γνωστές και όλοι γνωρίζουν ότι όλοι είναι ορθολογικοί , κανείς δεν επιθυμεί να αναθεωρήσει αυτή την εικασία. Συνεπώς, είναι μία μέθοδος ισορροπίας των εικασιών των παικτών.

Έστω ότι ο παίκτης 1 επιλέγει με πιθανότητα q τη στρατηγική Π ενώ με πιθανότητα 1-q τη στρατηγική Κ. Αντίστοιχα, ο παίκτης 2 επιλέγει τη στρατηγική Α με πιθανότητα p και την στρατηγική Δ με πιθανότητα 1-p. Για να εντοπιστεί η ισορροπία, πρέπει να υπολογιστεί η αναμενόμενη απόδοση των παικτών. Έτσι καταλήγουμε ότι :

$$V_i(\sigma) = \sum_{s \in S} p \times u_i(s) \qquad (1.7)$$

άρα

$$V_1 = 3pq + 0q(1-p) + 0(1-q)\,p + 1(1-q)(1-p) = 4pq - p - q + 1 \qquad (1.8)$$

$$V_2 = 3pq + 0q(1-p) + 0(1-q)\,p + 1(1-q)(1-p) = 4pq - p - q + 1 \qquad (1.9)$$

Οι αναμενόμενες αποδόσεις των δύο παικτών προκύπτουν ίδιες . Ο εκάστοτε παίκτης με τη σειρά του θα επιλέξει εκείνη τη στρατηγική που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση τους. Χρησιμοποιούμε λοιπόν συνθήκες πρώτης τάξης για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης :

$$\frac{\partial V_1}{\partial q} = 0 => 4p - 1 = 0 => p = 1/4$$

Αντίστοιχα,

$$\frac{\partial V_2}{\partial p} = 0 => 4q - 1 = 0 => q = 1/4$$

Για p=q=1/4 οι παίκτες μεγιστοποιούν ταυτόχρονα την αναμενόμενη απόδοση τους. Θα λέμε ότι οι κατανομές $\langle (q, 1-q), (p, 1-p) \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \right\rangle$ αποτελούν μία ισορροπία στις μικτές στρατηγικές του παιγνίου.

1.2 Στατικά Παίγνια Ελλιπούς Πληροφόρησης.

1.2.1 Δομή Παιγνίου με Άγνοια τύπου Παίκτη.

Εφόσον ολοκληρώθηκε η ανάλυση του στατικού παίγνιου με πλήρη πληροφόρηση θα προχωρήσουμε στην ανάλυση του στατικού παιγνίου με ελλιπή πληροφόρηση. Ως παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης ορίζεται εκείνο το παίγνιο στο οποίο ένας τουλάχιστον παίκτης δεν γνωρίζει κάποιο χαρακτηριστικό του παιγνίου.

Με στόχο να γίνει κατανοητή η κατηγορία αυτή θα παρουσιαστεί μία ενδεικτική περίπτωση. Η πλοκή αφορά δύο παίκτες, οι οποίοι βρίσκονται σε διαμάχη. Ο εκάστοτε παίκτης έχει δύο εναλλακτικές επιλογές, να συμμετάσχει στη διαφωνία (Fight) και να υποχωρήσει από την διαφωνία (non Fight) . Όμως, ο παίκτης 2 , λόγω ελλιπούς πληροφόρησης δε γνωρίζει αν ο παίκτης 1 είναι δυνατός (Strong) ή αδύναμος (Weak) . Αντίθετα, όλοι οι παίκτες γνωρίζουν ότι ο τύπος του παίκτη 2 είναι δυνατός. Συνεπώς, ο παίκτης 1 έχει 2 πιθανούς τύπους , δυνατό και αδύναμο (Strong και Weak) .

Θα ορίσουμε το σύνολο των εναλλακτικών τύπων ως Θ_i . Εάν ο παίκτης 1 έχει τύπο Strong θα ισχύει θ_1=S ενώ αντίστοιχα αν έχει τύπο Weak θα ορίσουμε θ_1=W . Η πρώτη περίπτωση αποδίδει όπως ο αριστερός πίνακας ενώ η δεύτερη περίπτωση όπως ο δεξιός.

Παράδειγμα 1.6

θ_1=S

		Π_2: F	Π_2: NF
Π_1	F	1, -2	2, -1
Π_1	NF	-1, 2	0, 0

θ_1=W

		Π_2: F	Π_2: NF
Π_1	F	-1,1	2, -1
Π_1	NF	0, 2	0, 0

Ο παίκτης 2 , όπως προαναφέρθηκε , δεν γνωρίζει ακριβώς τον τύπο του παίκτη 1. Προκειμένου να διαμορφώσει τις πεποιθήσεις που χρειάζονται θεωρεί ότι ο πρώτος τύπος εμφανίζεται με πιθανότητα p ενώ αντίστοιχα ο δεύτερος τύπος εμφανίζεται με πιθανότητα 1-p. Επομένως, με πιθανότητα p ο παίκτης 2 πιστεύει ότι οι αποδόσεις προκύπτουν από τον πρώτο πίνακα ενώ αντίστοιχα με πιθανότητα 1-p προκύπτουν από τον δεξιό πίνακα.

Η βασική δομή του παίγνιου ελλιπούς πληροφόρησης, περιλαμβάνει το σύνολο των παικτών, το σύνολο των ενεργειών των παικτών , το σύνολο των τύπων , την συνάρτηση απόδοσης και την κατανομή πιθανότητας σχετικά με τους τύπους των παικτών. Ενδεικτικά ,ο ορισμός διαμορφώνεται ως εξής:

Ορισμός 1.20 Ένα παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης περιγράφεται από μία συλλογή στοιχείων G={N,(S_i , $Θ_i$, u_i)$_{i\epsilon N}$, p} όπου N ορίζει ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο παικτών και Θ είναι ο χώρος των συνδυασμών τύπων των παικτών . Ως p ορίζουμε την κοινή a priori κατανομή επί των τύπων και ως u_i : Θ $_x$ S → R την απόδοση του τυχαίου παίκτη i για κάθε συνδυασμό τύπων και στρατηγικών του παιγνίου.

Τα σύνολα N και S_i είναι ήδη γνώριμα από την ανάλυση των παιγνίων πλήρους πληροφόρησης. Το σύνολο των τύπων του εκάστοτε παίκτη i ουσιαστικά περιλαμβάνει την πληροφόρηση , η οποία είναι γνωστή μόνο στον παίκτη i . Είναι γνωστό, ότι η απόδοση του εκάστοτε παίκτη είναι εξαρτημένη από τις ενέργειες όλων των παικτών και από τους τύπους τους.

1.2.2 Μπεϋζιανή Ισορροπία.

Στην ανάλυση όπου συμπεριλαμβάνονται Μπεϋζιανοί παίκτες υιοθετούμε τη λογική ότι πριν την έναρξη του παιγνίου υφίσταται ένα βήμα κατά το οποίο ο κάθε παίκτης ενημερώνεται για τον τύπο του. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας ψευδό - παίκτης , τον οποίο αποκαλούμε Φύση και ο οποίος καθορίζει τον τύπο των παικτών βάσει κλήρωσης. Οι πιθανότητες των διαφορετικών τύπων είναι καθορισμένες . Για αυτόν τον λόγο, το παίγνιο ξεκινά με μία κλήρωση που πραγματοποιείται από την Φύση με βάση κάποια a priori κατανομή.

Στα Μπεϋζιανά παίγνια υπάρχει η Μπεϋζιανή Υπόθεση. Αναλυτικότερα, υποθέτουμε ότι οι παίκτες μεγιστοποιούν την αναμενόμενη απόδοση τους.

Ορισμός 1.21 $EU(s_i|s_{-i},\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} P_i(\theta_{-i}|\theta_i)u_i(s_{i,}s_{-i}(\theta_{-i}))$ όπου $P_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ο αντίπαλος του παίκτη i να είναι κάποιος από τους αναφερόμενους τύπους .

Στα παίγνια ελλιπούς πληροφόρησης η έννοια της ισορροπίας είναι η Bayes-Nash. Η ισορροπία Bayes-Nash είναι μία επέκταση της ισορροπίας Nash . Όπως και στην περίπτωση της πλήρους πληροφόρησης, έτσι και εδώ οι παίκτες δεν έχουν λόγο να αποκλίνουν από την προτεινόμενη στρατηγική. Απλά ,πλέον στον καθορισμό της εκάστοτε στρατηγικής συμβάλει και το σύνολο των τύπων των παικτών.

Ορισμός 1.22 Μία ισορροπία Bayes-Nash είναι μία ισορροπία Nash όταν οι παίκτες μεγιστοποιούν την αναμενόμενη απόδοση τους, δηλαδή ένας συνδυασμός στρατηγικών (s_i^*, s_{-i}^*) ώστε για όλους τους παίκτες i να ισχύει ότι :

$$EU_i(s_i^* | s_{-i}^*, \theta_i) \geq EU_i(s_i | s_{-i}^*, \theta_i)$$

Προκειμένου να κατανοήσουμε την ισορροπία Bayes-Nash θα εξετάσουμε ένα διαφορετικό παράδειγμα. Έστω ότι η Φύση επιλέγει να αποκαλύψει στον παίκτη 1 όχι μόνο τον δικό του τύπο αλλά και τον τύπο του παίκτη 2. Έστω ότι ο παίκτης 1 αποκομίζει απόδοση x ενώ αντίστοιχα ο παίκτης 2 αποκομίζει απόδοση y. Θα υποθέσουμε ότι ο κάθε τύπος εμφανίζεται με την ίδια πιθανότητα. Έστω ότι αποκαλύπτεται και στους δύο παίκτες ότι y=2 ενώ με ίση πιθανότητα το x μπορεί να ισούται με 0 ή 2. Έχουμε τις δύο ακόλουθες μορφές:

Παράδειγμα 1.7

Π_1 \ Π_2	Α	Δ
Π	x=0, 2	0, 1
Κ	1, 0	1, 1

Π_1 \ Π_2	Α	Δ
Π	x=2, 2	0, 1
Κ	1,0	1, 1

Αναγκαίο στοιχείο της περαιτέρω ανάλυσης του παραδείγματος είναι ο επαναπροσδιορισμός της στρατηγικής του παίκτη 1 αλλά από την οπτική του παίκτη 2. Αυτό συμβαίνει, διότι ο παίκτης 2 είναι αυτός που έχει και το ρίσκο. Αναλυτικότερα, ο παίκτης 1, εφόσον γνωρίζει και τους 2 τύπους από την Φύση , μπορεί να συμπεριφερθεί διαφορετικά στο καθένα από τα δύο παίγνια.

Όσον αφορά τον επαναπροσδιορισμό της στρατηγικής του παίκτη 1, ο τελευταίος θα μπορούσε να επιλέξει την κάτω γραμμή στο αριστερό παίγνιο και την πάνω γραμμή στο δεξιό παίγνιο. Επομένως, οι στρατηγικές που είναι διαθέσιμες για τον παίκτη 1 είναι το σύνολο των συνδυασμών από τα δύο παίγνια, δηλαδή {ΠΠ,ΠΚ,ΚΠ,ΚΚ} . Αντίθετα, οι διαθέσιμες στρατηγικές για τον παίκτη 2 , επειδή το y είναι παρατηρούμενο, είναι μόνο δύο.

Προκειμένου να υπολογιστούν οι αποδόσεις των παικτών θα δημιουργηθεί ένας διευρυμένος πίνακας. Ο διευρυμένος πίνακας θα περιλαμβάνει, τώρα, το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 καθώς και τις δύο στρατηγικές του παίκτη 2. Ο διευρυμένος πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

Διευρυμένο Παίγνιο

		$Π_2$	
		Α	Δ
	ΠΠ	1,2	0,1
	ΠΚ	½ , 1	½,1
	ΚΠ	½ , 1	½,1
$Π_1$	ΚΚ	1,0	1,1

Υπενθυμίζουμε ότι οι αποδόσεις έχουν ομοιόμορφη a priori κατανομή. Ο υπολογισμός των αποδόσεων , για τον κάθε παίκτη θα ξεκινήσει από την αριστερή στήλη , θα συμπληρωθεί στον παραπάνω διευρυμένο πίνακα, και θα έχουμε ότι :

$Π_1$	$Π_2$
$1/2 * 0 + 1/2 * 2 = 1$	$1/2 * 2 + 1/2 * 2 = 2$
$1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$	$1/2 * 0 + 1/2 * 2 = 1$
$1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$	$1/2 * 0 + 1/2 * 2 = 1$
$1/2 * 1 + 1/2 * 1 = 1$	$1/2 * 0 + 1/2 * 0 = 0$

Και αντίστοιχα για τη δεξιά στήλη έχουμε ότι :

$Π_1$	$Π_2$
$1/2 * 0 + 1/2 * 0 = 0$	$1/2 * 1 + 1/2 * 1 = 1$

$1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$	$1/2 * 1 + 1/2 * 1 = 1$
$1/2 * 1 + 1/2 * 0 = 1/2$	$1/2 * 1 + 1/2 * 1 = 1$
$1/2 * 1 + 1/2 * 1 = 1$	$1/2 * 1 + 1/2 * 1 = 1$

Αφότου , λοιπόν, υπολογίστηκαν οι αποδόσεις και συμπληρώθηκε ο διευρυμένος πίνακας, μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε τις πιθανές ισορροπίες Bayes-Nash.

Πιο αναλυτικά, αν ο παίκτης 1 θεωρούσε ότι ο παίκτης 2 θα επιλέξει την αριστερή στήλη θα επέλεγε είτε τη γραμμή ΠΠ είτε τη γραμμή ΚΚ που του προσφέρουν την μεγαλύτερη απόδοση , δηλαδή μία μονάδα. Αν θεωρούσε ότι ο παίκτης 2 θα επέλεγε τη δεξιά στήλη τότε θα επέλεγε την γραμμή ΚΚ , με απόδοση 1.

Αντίστοιχα, αν ο παίκτης 2 πίστευε ότι ο παίκτης 1 θα επέλεγε την γραμμή ΠΠ θα προτιμούσε την αριστερή στήλη με 2 μονάδες απόδοσης, αν επέλεγε την ΠΚ θα ήταν αδιάφορος στις δύο στήλες καθώς του προσφέρουν την ίδια απόδοση. Αν πίστευε ότι ο παίκτης 1 θα επέλεγε την γραμμή ΚΠ θα ήταν και πάλι αδιάφορος ενώ στη γραμμή ΚΚ θα προτιμούσε τη δεξιά στήλη με μία μονάδα απόδοσης. Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι οι βέλτιστες αντιδράσεις των δύο παικτών συναντώνται στους συνδυασμούς (ΠΠ,Α) και (ΚΚ,Δ). Αυτοί , λοιπόν, οι συνδυασμοί αποτελούν τις ισορροπίες Bayes-Nash.

2. Επαναλαμβανόμενα Παίγνια.

2.1 Γενικές Έννοιες Επαναλαμβανόμενων Παιγνίων.

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε αναφορά στα στατικά παίγνια. Πλέον, θα γίνει ανάλυση δυναμικών παιγνίων, και ειδικότερα των επαναλαμβανόμενων. Τα δυναμικά παίγνια , αφορούν εκείνα όπου το παίγνιο σταδίου επαναλαμβάνεται και εξελίσσεται στον ρυθμό της επαναλαμβανόμενης αντίδρασης στις ενέργειες ανάμεσα στους παίκτες (Mailath & Samuelson 2006). Αναφέρονται, επίσης , και ως στοχαστικά παίγνια, διότι έτσι δίνεται έμφαση στην τυχαιότητα των καταστάσεων.

Ορισμός 2.1 Ως επαναλαμβανόμενο παίγνιο ορίζεται το παίγνιο εκείνο , το οποίο αποτελείται από έναν αριθμό επαναλήψεων, πεπερασμένο ή άπειρο ενός στατικού παιγνίου Γ.

Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια, λοιπόν , αποτελούν μία κατηγορία δυναμικών παιγνίων. Ειδικότερα, μελετούν τις οποιεσδήποτε αλληλεπιδράσεις υφίστανται στην καθημερινή λειτουργία των επιχειρήσεων, ανάμεσα στα συμβαλλόμενα μέρη (π.χ. πωλητές και αγοραστές) αλλά και καθαρά στις ίδιες τις επιχειρήσεις (π.χ. ο ανταγωνισμός ανάμεσα σε επιχειρήσεις για πολλές χρονικές περιόδους) (Σταματόπουλος, 2015).

Ορισμός 2.2 Ένα παίγνιο ορίζεται ως δυναμικό, όταν οι επιλογές των παικτών λαμβάνονται διαδοχικά, δηλαδή όχι ταυτόχρονα, και είτε έχουν πλήρη γνώση αναφορικά με τις επιλογές των υπόλοιπων παικτών είτε όχι.

Κρίνονται ιδιαιτέρως σημαντικά καθώς επιλύουν ζητήματα τα οποία αφορούν τις συνεργατικές σχέσεις και συμπεριφορές . Επιπλέον , ποικίλουν καθώς υπάρχουν τα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια με ή χωρίς τέλεια πληροφόρηση και αντίστοιχα τα πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια με ή χωρίς τέλεια πληροφόρηση.

Γενικότερα, η διαδικασία των επαναλαμβανόμενων παιγνίων ξεκινά με τη δημιουργία ενός παίγνιου σταδίου το οποίο εκτυλίσσεται σε περίοδο $t \epsilon \{0,1, \dots, T\}$. Είναι ένα στατικό παίγνιο , το οποίο επαναλαμβάνεται αρκετές φορές , είτε σε πεπερασμένες είτε σε άπειρες περιόδους, με στόχο τη δημιουργία απόδοσης για τους παίκτες. Η απόδοση αυτή είναι φανερά εξαρτημένη από τις ενέργειες που επιλέγει ο παίκτης να ακολουθήσει . Μάλιστα, η συνολική απόδοση προκύπτει αθροίζοντας την απόδοση της κάθε περιόδου.

Η συμβολή των επαναλαμβανόμενων παιγνίων έγκειται στο γεγονός του ότι η διαδικασία αυτής της επανάληψης μπορεί να ερμηνεύσει διάφορα είδη συμπεριφοράς , όπως η σύγκρουση ή η συνεργασία. Τα στατικά στρατηγικά παίγνια δύσκολα θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν τα διάφορα είδη συμπεριφοράς καθώς αν δεν υπάρχει ο χρονικός ορίζοντας που υπάρχει στα επαναλαμβανόμενα , υπάρχει μεγάλη πιθανότητα απόκλισης (Σταματόπουλος, 2015). Επί της ουσίας, αν για παράδειγμα τίθεται προς εξέταση η σχέση συνεργασίας, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα απόκλισης από αυτή αν δεν υπάρχει επιπλέον χρονική περίοδος έτσι ώστε να τιμωρηθεί η απόκλιση.

Η βασική δομή του επαναλαμβανόμενου παίγνιου ξεκινά με το σύνολο $K = \{N, S_i, ui\}$ όπου ως N ορίζουμε το σύνολο των παικτών που είναι αριθμημένοι από $1, \dots, n$, ως S_i ορίζουμε τις αμιγείς στρατηγικές και ως u_i τη συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i . Όπως προαναφέρθηκε, το παίγνιο επαναλαμβάνεται κατά T περιόδους, είτε πεπερασμένες είτε άπειρες. Συνεπώς αν t η χρονική περίοδος τότε $t = 1,2,3, \dots, T$.

Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι σε κάθε χρονική περίοδο οι παίκτες λαμβάνουν αποφάσεις ταυτόχρονα και μόνο αφότου έχει υλοποιήσει την απόφαση του ο παίκτης ενημερώνεται για την απόφαση των υπολοίπων παικτών. Στα παίγνια , όμως, εισάγεται και ο ορισμός της ιστορίας. Γενικά σαν ιστορία ορίζεται η συλλογή όλων των προφίλ ενεργειών του παίκτη . Στην περίπτωση όπου το παίγνιο επαναλαμβάνεται για πεπερασμένο αριθμό περιόδων καλείται τερματική ιστορία όταν η συλλογή περιλαμβάνει ενέργειες από την πρώτη περίοδο μέχρι και την T. Αντίστοιχα στο απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο ως τερματική ιστορία χαρακτηρίζεται η συλλογή ενεργειών μέχρι το άπειρο.

Ορισμός 2.3 Ως ιστορία ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου , κατά την επανάληψη ν ορίζεται κάθε συνδυασμός στρατηγικών της μορφής $(s^t)_{t=1}^{\nu-1}$ που προηγούνται της επανάληψης ν.

Ορισμός 2.4 Η οικογένεια όλων των ιστοριών ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου θα συμβολίζεται ως την επανάληψη t σαν $\mathcal{H}^t$.

Αναφορικά με τις ιστορίες, σημαντική κρίνεται η έννοια της τέλειας ανάκλησης, που προκύπτει χάρη σε αυτές. Γενικότερα, συμβάλλει στη διαδικασία διαμόρφωσης της βέλτιστης αντίδρασης του κάθε παίκτη. Εξάλλου, όπως θα αναλυθεί και περαιτέρω η στρατηγική ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου αποτελείται από συνδυασμό στρατηγικών του εκάστοτε παίκτη.

Ορισμός 2.5 Ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο με τέλεια ανάκληση επιτρέπει σε όλους τους παίκτες να γνωρίζουν κάθε συνδυασμό στρατηγικών επιλογών που έχει προηγηθεί.

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των επαναλαμβανόμενων παιγνίων είναι οι στρατηγικές που ακολουθούν οι παίκτες. Ουσιαστικά η στρατηγική αφορά έναν κανόνα που πρέπει να λάβουν υπόψη τους οι παίκτες προκειμένου να προβούν στις κατάλληλες ενέργειες σε κάθε επανάληψη του παίγνιου. Εφόσον ο παίκτης επιλέγει ενέργειες σε κάθε στάδιο παίγνιου αντιλαμβανόμαστε ότι η εκάστοτε στρατηγική που ακολουθείται είναι συνάρτηση των επιλογών , δηλαδή ενεργειών του παρελθόντος.

Ορισμός 2.6 Ως (καθαρή) στρατηγική ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου για τον παίκτη i ορίζεται η συνάρτηση της μορφής

$$s_i^t : \mathcal{H}^{t-1} \rightarrow S_i$$

Στην προσπάθεια να γίνουν πιο κατανοητές οι προαναφερθείσες έννοιες μπορούμε να εισάγουμε ένα παράδειγμα, όπως εκείνο του διλήμματος του φυλακισμένου, που είχαμε αναλύσει και στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 2.1

		Υπόδικος 2	
		Σ	Ο
Υπόδικος 1	Σ	-2, -2	-9, 0
	Ο	0, -9	-6, -6

Χωρίς να εισάγουμε τις έννοιες της τέλειας και ατελούς πληροφόρησης, μπορούμε στο παραπάνω παίγνιο να εντοπίσουμε τόσο τις ιστορίες όσο και τις στρατηγικές του εκάστοτε παίκτη. Όπως είχαμε αναφέρει, οι στρατηγικές των παικτών είναι δύο, είτε να σιωπήσουν(Σ) είτε να ομολογήσουν (Ο). Έστω, ότι το παίγνιο σταδίου επαναλαμβάνεται τρεις φορές, άρα $T = 3$.

Ας συμβολίσουμε την ιστορία της 1ης περιόδου σαν h^1. Ουσιαστικά, θα είναι ένας συνδυασμός ενεργειών των παικτών κατά την πρώτη φορά που θα επαναληφθεί το παίγνιο σταδίου. Ένα παράδειγμα θα ήταν ο συνδυασμός h^1=(Ο,Σ) όπου όταν ο παίκτης 1 ομολογεί ο παίκτης 2 σιωπά. Το σύνολο των ιστοριών της 1ης περιόδου δίνεται από :

$$H^1=\{(Ο,Ο),(Σ,Σ),(Ο,Σ),(Σ,Ο)\} \quad (2.1)$$

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε την ιστορία της 2ης περιόδου , η οποία τώρα θα αποτελείται από έναν συνδυασμό ενεργειών των παικτών στην 1η περίοδο και έναν αντίστοιχο στη δεύτερη περίοδο. Για παράδειγμα, αφού στην 1η περίοδο οι παίκτες κατέληξαν στον συνδυασμό (Ο,Σ) αν τώρα σε αυτή την περίοδο επιλέξουν (Ο,Ο) τότε η h^2={(Ο,Σ),(Ο,Ο)} . Τώρα, όσον αφορά το σύνολο όλων των ιστοριών της 2ης περιόδου δίνεται από :

$$H^2=H^1 \times H^1 \qquad (2.2)$$

Ολοκληρώνοντας το παράδειγμα, θα εξετάσουμε τις τερματικές ιστορίες, δηλαδή τις ιστορίες στην τελευταία περίοδο του παιγνίου. Σε αυτή τη περίπτωση γίνεται αντιληπτό ότι η ιστορία θα περιλαμβάνει τρείς συνδυασμούς ενεργειών . Εφόσον στην πρώτη περίοδο οι παίκτες επέλεξαν τον συνδυασμό (Ο,Σ) και στη δεύτερη τον συνδυασμό (Ο,Ο) , έστω ότι στην τρίτη επέλεξαν τον συνδυασμό (Σ,Ο). Επομένως, η ιστορία στην 3η περίοδο δίνεται από h^3={(Ο,Σ),(Ο,Ο),(Σ,Ο)}. Αντίστοιχα, το σύνολο των τερματικών ιστοριών δίνεται από τη σχέση :

$$H^3 = H^2 \times H^1 \qquad (2.3)$$

2.1.1 Απόδοση Παικτών και Προεξόφληση.

Από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των παιγνίων κρίνεται και η απόδοση. Ο υπολογισμός της διαφέρει ανάλογα με την μορφή του επαναλαμβανόμενου παίγνιου καθώς και με βάση το επίπεδο πληροφόρησης. Την μέθοδο υπολογισμού στα πεπερασμένα ή απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια θα αναλύσουμε περαιτέρω στην αντίστοιχη υποενότητα. Ωστόσο, αξίζει να αναφερθεί το γεγονός ότι η αποτίμηση των αποδόσεων γίνεται είτε μέσω της υπόθεσης ότι οι παίκτες μεγιστοποιούν την μέση απόδοση από κάθε επανάληψη είτε βάσει προεξοφλημένων αποδόσεων (Βολιώτης, 2015). Στην πρώτη περίπτωση προκύπτουν οι εξής αποδόσεις ανάλογα με το είδος του επαναλαμβανόμενου παιγνίου:

Ορισμός 2.7 Η μέση απόδοση του παίκτη i για ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων T ορίζεται από τη συνάρτηση

$$V_i^T(t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_i(s^t)$$

Ορισμός 2.8 Η μέση απόδοση του παίκτη i για ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο με άπειρο πλήθος επαναλήψεων ορίζεται από τη συνάρτηση

$$V_i^\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_i(s^t)$$

Επί της ουσίας , σύμφωνα με τη φύση του επαναλαμβανόμενου παίγνιου ο εκάστοτε παίκτης αποκομίζει μία απόδοση σε κάθε περίοδο. Με την διαδικασία προεξόφλησης, γίνεται εμφανής η διαχρονική αξία του χρήματος, ότι δηλαδή ένα ποσό απόδοσης σήμερα έχει διαφορετική αξία από ένα ποσό απόδοσης στο μέλλον. Η προεξοφλημένη, λοιπόν απόδοση υπολογίζεται σε κάθε παίγνιο ως εξής :

Ορισμός 2.9 Η προεξοφλημένη απόδοση του παίκτη i στο πεπερασμένο επαναλαμβανόμενο παίγνιο δίνεται από τη συνάρτηση:

$$V_i^T(t) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(s^t)$$

Ορισμός 2.10 Η προεξοφλημένη απόδοση του παίκτη i στο απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο δίνεται από τη συνάρτηση:

$$V_i^{\infty} = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s^t)$$

Ολοκληρώνουμε τη βασική περιγραφή των επαναλαμβανόμενων παιγνίων με την επεξήγηση της έννοιας της ισορροπίας. Ως ισορροπία Nash ορίζεται το σημείο του συνδυασμού στρατηγικών μέσω του οποίου οι παίκτες επιτυγχάνουν ταυτόχρονα τη βέλτιστη αντίδραση τους, δηλαδή δεν έχουν λόγο να μεταβάλλουν τη στρατηγική τους **.** Ο Nash κατέληξε σε σημαντικά πορίσματα. Όσον αφορά τα πεπερασμένα παίγνια απέδειξε ότι περιλαμβάνουν τουλάχιστον ένα σύνολο μικτών στρατηγικών που αποτελούν ισορροπία Nash στις μικτές στρατηγικές . Αυτό συμβάλλει ιδιαίτερα στην ενδεχόμενη ύπαρξη πολλαπλών ισορροπιών σε καθαρές στρατηγικές. Βέβαια, συμβάλει και στην περίπτωση μη ύπαρξης ισορροπίας στις καθαρές στρατηγικές, καθώς θα υπάρχει μοναδική ισορροπία στις μικτές.

Καταλήγοντας, τα επαναλαμβανόμενα παίγνια είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα και κρίνεται απαραίτητη η περαιτέρω εξέταση τους. Στις επόμενες υποενότητες θα ασχοληθούμε με το κάθε είδος παίγνιου ξεχωριστά.

2.2 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια με Τέλεια Πληροφόρηση.

Η διαδικασία των επαναλαμβανόμενων παιγνίων ξεκινά με τη δημιουργία ενός παιγνίου σταδίου το οποίο εκτυλίσσεται σε περίοδο $t \epsilon \{0,1,\dots,T\}$. Υπάρχουν n παίκτες αριθμημένοι από $1,\dots,n$. Αναφορικά με τα παίγνια με τέλεια δημόσια παρακολούθηση ορίζουμε ως S_i το σύνολο αμιγών κινήσεων του παίκτη i και το σύνολο των αποδόσεων δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση :

$$u : \prod_i S_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Το σύνολο των μικτών ενεργειών του παίκτη i καθορίζεται ως $\Delta(S_i)$ και το σύνολο των μικτών προφίλ ενεργειών ως $\prod_i \Delta(S_i)$. Για να υπολογίζουμε την απόδοση του συνόλου των παιγνίων σταδίων ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathcal{F} \equiv \{ u \in \mathbb{R}^n : \exists\, s \in S \;\; s.t.\; u = u(s)\} \qquad (2.4)$$

Ενδεικτικά , το σύνολο των εφικτών αποδόσεων αποτελείται από ένα κυρτό τμήμα της συνολικής απόδοσης:

$$\mathcal{F}' \equiv co\, \mathcal{F} \qquad (2.5)$$

Γίνεται αντιληπτό ότι μία απόδοση $u \in \mathcal{F}'$ είναι μη αποτελεσματική αν υπάρχει u' τέτοιο ώστε $u_i' > u_i$ για κάθε i.

Όσον αφορά το σύνολο S_i υποθέτουμε ότι είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του διαστήματος R^k ή κυρτό υποσύνολο του R^k ή έστω πεπερασμένο. Επιπλέον υπόθεση, πέραν του συμπαγούς συνόλου ενεργειών και της συνεχούς συνάρτησης εσόδων είναι η πιθανή ύπαρξη ισορροπίας Nash. Ως ισορροπία κατά Nash , έχουμε ήδη ορίσει το σημείο του συνδυασμού στρατηγικών μέσω του οποίου οι παίκτες επιτυγχάνουν ταυτόχρονα τη βέλτιστη αντίδραση τους.

Επιπλέον , ορίζουμε ως s_i την εκάστοτε στρατηγική του παίκτη . Για ευκολία , το s_i θα καλύπτει στρατηγικές πεπερασμένων παιγνίων είτε με αμιγείς είτε με μικτές ενέργειες , αλλά όσον αφορά τα συνεχή παίγνια θα αφορά μόνο τις αμιγείς ενέργειες. Ουσιαστικά, η παραπάνω επιλογή πηγάζει από το γεγονός ότι η βασική ανάλυση των πεπερασμένων παιγνίων(με αμιγείς ή με μικτές ενέργειες) και των απείρως επαναλαμβανόμενων παιγνίων (με αμιγείς ενέργειες) είναι πανομοιότυπη (Mailath & Samuelson, 2006).

Σημαντική ανησυχία προκαλεί στα επαναλαμβανόμενα παίγνια η ιδέα του αν η απόδοση είναι συνεπής με την συμπεριφορά ισορροπίας. Γενικότερα , κάθε παίκτης προσπαθεί να επιλέξει τη βέλτιστη αντίδραση με βάση , όμως , τις ενέργειες των υπολοίπων. Η χειρότερη απόδοση που θα μπορούσε να αποκομίσει ένας παίκτης προκύπτει στην περίπτωση όπου οι υπόλοιποι παίκτες λειτουργούν μη επιθυμητά . Αυτή η απόδοση ονομάζεται minimax και δίνεται από τον τύπο

$$u_i^p \equiv min_{s_{-i} \in\, S_{-i}}\, max_{s_i \in S_i}\, u_i(s_i, s_{-i}) \qquad (2.6)$$

Ωστόσο, στην εκάστοτε ενέργεια του παίκτη i συμβάλλουν και εξωτερικοί παράγοντες που αφορούν διάφορα δημόσια γεγονότα. Τα τελευταία μπορούν να καθορίσουν τον τρόπο που θα εξελιχθεί κάποια στρατηγική. Προκειμένου να εντοπιστεί και να ποσοτικοποιηθεί μια τέτοια επίδραση χρησιμοποιείται μια τυχαία δημόσια μεταβλητή $\omega \in [\,0, 1\,]$, η οποία είναι παρατηρήσιμη από όλους τους παίκτες και κάθε παίκτης i επιλέγει την ενέργεια $s_i \in S_i$.

Αξίζει να αναφερθεί ότι στα επαναλαμβανόμενα παίγνια με τέλεια δημόσια παρακολούθηση στο τέλος της κάθε περιόδου όλοι οι παίκτες μπορούν να παρατηρήσουν το εκάστοτε επιλεγόμενο προφίλ ενεργειών. Η τέλεια ανάκληση, αποτελεί μια σημαντική υπόθεση έτσι ώστε οι παίκτες να διαμορφώσουν βέλτιστες στρατηγικές.

Με βάση αυτή τη κατάσταση , ορίζουμε την έννοια της ιστορίας , η οποία περιλαμβάνει μία λίστα με προφίλ ενεργειών . Πιο ειδικά ,

$$\mathcal{H}^t \equiv S^t \qquad (2.7)$$

και το σύνολο των πιθανών ιστοριών δίνεται από τον τύπο :

$$\mathcal{H} = \cup_{t=0}^{\infty} \mathcal{H}^t \qquad (2.8)$$

Τόσο οι αμιγείς όσο και οι μικτές στρατηγικές προκύπτουν ως μία συνάρτηση από το σύνολο των πιθανών ιστοριών στο σύνολο των αμιγών ή μικτών ενεργειών και συγκεκριμένα έχουμε ότι :

$$s_i : \mathcal{H} \to S_i$$

$$s_i : \mathcal{H} \to \Delta(S_i)$$

Ωστόσο τα παραπάνω αφορούν πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια. Στην περίπτωση ενός απείρως επαναλαμβανόμενου παίγνιου έχουμε ότι η συνεχής στρατηγική διαμορφώνεται :

$$s_i | h_t(h^\tau) = s_i(h^t h^\tau) \qquad (2.9)$$

όπου $h^t h^\tau$ είναι η αλληλουχία περιόδων, δηλαδή η h^t ακολουθείται από την h^τ. Το θέμα είναι όμως πως για κάθε ιστορία h^t στο αρχικό επαναλαμβανόμενο παίγνιο υφίσταται μία συγκεκριμένη στρατηγική. Όπως δείξαμε για παράδειγμα ανωτέρω :

$$s_i | h_t : \mathcal{H} \to \Delta(S_i)$$

Άρα , το συνεχές παίγνιο είναι απλά ένα υποπαίγνιο, το οποίο είναι στρατηγικά πανομοιότυπο με το αρχικό. Στην περίπτωση του απείρως επαναλαμβανόμενου παίγνιου διαμορφώνεται και η έννοια του μονοπατιού έκβασης , το οποίο είναι μία άπειρη αλληλουχία προφίλ ενεργειών, όπου a $\equiv (s^0, s^1, \ldots) \in S^\infty$. Πιο συγκεκριμένα , το αμιγές στρατηγικό προφίλ s $\equiv (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ δημιουργεί το αντίστοιχο μονοπάτι έκβασης , το οποίο είναι το a(s)=($a^0(s), a^1(s), \ldots$). Αναλύοντας περαιτέρω την απόδοση των παικτών , είναι γνωστό ότι κάθε προφίλ αμιγών ενεργειών καταλήγει σε απόδοση $u_i\left(a^t(s)\right)$ για τον παίκτη i.

Ένα ακόμα ιδιαίτερα σημαντικό ερώτημα είναι το πότε επιτυγχάνεται μια Nash ισορροπία. Βάσει ορισμού που ακολουθεί:

Ορισμός 2.11 Το στρατηγικό προφίλ s είναι Nash ισορροπία αν και μόνο αν ισχύει για όλους τους παίκτες ότι :

$$U_i(s) \geq U_i(s'_i, s_{-i}).$$

Θεώρημα 2.1 Ένα προφίλ στρατηγικών (s_1 , s_2 , … , s_n) αποτελεί τέλεια δημόσια ισορροπία (PPE) αν :

1. Το s_i είναι δημόσια στρατηγική για όλα τα i.

2. Για κάθε ημερομηνία t και κάθε ιστορία h^t οι στρατηγικές είναι ισορροπία κατά Nash.

Μάλιστα, αν το σ είναι ισορροπία Nash αμιγούς στρατηγικής τότε για κάθε παίκτη i θα ισχύει ότι $U_i(\sigma) \geq u_i^p$, όπου ως u_i^p ορίσαμε την minimax απόδοση. Στην περίπτωση, αντίστοιχα , όπου το σ είναι μικτή στρατηγική , τότε ισχύει ότι :

$$U_i(\sigma) \geq u_i \qquad (2.10)$$

Αξίζει να αναφερθεί, ακόμα, η διαφορά στη ζωή των παικτών. Οι παίκτες, οι οποίοι ζουν για μεγάλη διάρκεια συμμετέχουν στο παίγνιο σε κάθε περίοδο και επί της ουσίας μεγιστοποιούν την προεξοφλημένη απόδοση τους όπως αναφέρθηκε ήδη, δηλαδή:

$$U_i(s) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i\left(a^t(s)\right) \qquad (2.11)$$

Αντίθετα, οι παίκτες βραχυπρόθεσμου ορίζοντα δρουν περισσότερο μυωπικά, δηλαδή τους απασχολεί η μεγιστοποίηση της απόδοσης τους την τρέχουσα περίοδο. Λειτουργούν ,σαν παίκτες οι οποίοι εισέρχονται στο παίγνιο την εκάστοτε περίοδο αλλά είναι ενεργοί μόνο σε αυτή τη περίοδο.

Μάλιστα, εφόσον ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο αποτελεί επανάληψη ενός στατικού παιγνίου, γίνεται αντιληπτό ότι ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο θα έχει πάντα ισορροπία. Μία τυπική ισορροπία, θα είναι για παράδειγμα , να επιλέγουν ο παίκτες τις στρατηγικές Nash του στατικού παιγνίου αλλά σε κάθε επανάληψη.

2.2.1 Ισορροπία Nash σε Πεπερασμένα Επαναλαμβανόμενα Παίγνια.

Η ανάλυση της ισορροπίας Nash, όμως ,πρέπει να διακριθεί στις περιπτώσεις του απείρως επαναλαμβανόμενου και πεπερασμένα επαναλαμβανόμενου παιγνίου. Ως πεπερασμένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο ορίζουμε:

Ορισμός 2.12 Έστω ένα στατικό παίγνιο Γ={N, $(S_i)_{i\epsilon N}$, $(u_i)_{i\epsilon N}$} όπου το N ορίζει ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο παικτών , το S_i το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i και u_i μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ που αποτιμά την απόδοση του για κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Ως πεπερασμένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο, ορίζεται το δυναμικό παίγνιο Τ σταδίων , όπου T<∞ και στο οποίο:

1. Το N αποτελεί σύνολο παικτών.

2. Το σύνολο των ενεργειών του κάθε παίκτη i είναι το S_i .

3. Οι ενέργειες του σταδίου t παρατηρούνται εκ των υστέρων από όλους τους παίκτες, όπου t=1,2,…,T.

4. Το σύνολο των τερματικών ιστοριών είναι το σύνολο ακολουθιών $\mathrm{h}^{\mathrm{T}}=(s^1, s^2,.., s^T)$.

5. Ο παίκτης i αποτιμά την τερματική ιστορία h^{T} βάσει της συνάρτησης

$\mathrm{V_i} = \sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \delta^{\mathrm{t}-1} \mathrm{u_i}(s^{\mathrm{t}})$ όπου δ συντελεστής προεξόφλησης με δ ϵ (0,1).

Η διαδικασία των επαναλαμβανόμενων πεπερασμένων παιγνίων, υπενθυμίζουμε, ότι αφορά επανάληψη του παιγνίου σταδίου , έστω t φορές . Χάρη στην τέλεια ανάκληση, οι παίκτες γνωρίζουν και παρατηρούν τις επιλογές και των υπόλοιπων παικτών . Με τον όρο της ιστορίας, έστω ότι οι επιλογές που έχουν διαμορφώσει οι παίκτες στις t επαναλήψεις του παιγνίου συνοψίζονται από την t-ιστορία h^t.

Κάθε επαναλαμβανόμενο παίγνιο, μπορεί να διαχωριστεί σε υποπαίγνια. Με τον όρο υποπαίγνιο καλούμε κάθε παίγνιο το οποίο ξεκινά από τις αποφάσεις του αρχικού παιγνίου, στην ανάπτυξη του συμμετέχουν τουλάχιστον δύο παίκτες του αρχικού παιγνίου και μπορεί να λειτουργήσει αυτόνομα σαν παίγνιο (Βολιώτης, 2015). Μάλιστα, λόγω του προηγούμενου ορισμού φαίνεται ότι το αρχικό παίγνιο αποτελεί στοιχείο του συνόλου των υποπαιγνίων του.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι οι επαναλήψεις του παιγνίου συνοψίζονται στην t-ιστορία h^t, τότε αυτή η ιστορία θα ορίσει ένα υποπαίγνιο. Αυτό το υποπαίγνιο θα ξεκινάει από την περίοδο t+1 και θα περιλαμβάνει αυτό το στάδιο και όσα έπονται αυτού.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα εξετάσουμε την υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία Nash. Βάσει των ορισμών που ακολουθούν :

Ορισμός 2.13 Μία ισορροπία Nash ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου είναι τέλεια κατά υποπαίγνιο αν είναι ισορροπία Nash μετά από κάθε t-ιστορία του παιγνίου.

Ορισμός 2.14 Κάθε στρατηγικό προφίλ s είναι τέλειο κατά υποπαίγνιο αν και μόνο αν δεν υφίστανται στο παίγνιο επικερδείς μονομερείς αποκλίσεις.

Θα εισάγουμε, εκ νέου το παράδειγμα που χρησιμοποιούμε στις αναλύσεις μας, εκείνο του διλήμματος του φυλακισμένου.

Παράδειγμα 2.2

		Υπόδικος 2	
		Σ	Ο
Υπόδικος 1	Σ	-2,-2	-9,0
	Ο	0,-9	-6,-6

Το παίγνιο αυτό διαθέτει μόνο μία ισορροπία κατά Nash , η οποία ήταν ο συνδυασμός στρατηγικών (Ο,Ο). Δηλαδή, οι παίκτες προτιμούσαν την μη συνεργατική λύση και θα ομολογούσαν κι οι δύο. Προκειμένου να εντοπίσουμε τις υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής.

Ειδικότερα, η διαδικασία αναζήτησης της ισορροπίας αυτής θα ξεκινήσει από την τελευταία επανάληψη του παιγνίου, δηλαδή από την $t = T$. Επειδή είναι η τελευταία επανάληψη, οι επιλογές που λαμβάνουν χώρα σε αυτήν δεν επηρεάζουν το μέλλον και δεν επηρεάζονται και από το παρελθόν . Άρα, σε αυτό το στάδιο η ισορροπία Nash κατά υποπαίγνιο είναι ο συνδυασμός (Ο,Ο).

Αντίστοιχα, στην περίοδο $t = T - 1$ οι παίκτες, μέσω της προς τα πίσω επαγωγής έχουν γνώση ότι στο στάδιο Τ θα καταλήξουν στον συνδυασμό (Ο,Ο). Εφόσον ξέρουν ότι ανεξάρτητα από τις επιλογές τους θα καταλήξουν στον συνδυασμό (Ο,Ο) λειτουργούν σαν να μην υπάρχει επόμενο στάδιο και καταλήγουν πάλι στον συνδυασμό (Ο,Ο). Όμως, με βάση αυτή τη λογική κάθε προηγούμενο στάδιο θα καταλήγει στον ίδιο συνδυασμό στρατηγικών και το αποτέλεσμα θα είναι συνέχεια (Ο,Ο) .

Ωστόσο, αυτή η διαδικασία λαμβάνει χώρα σε κάθε επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Ουσιαστικά όταν ένα αρχικό παίγνιο έχει μία και μοναδική ισορροπία, η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία στο επαναλαμβανόμενο υφίσταται και είναι επανάληψη της αρχικής ισορροπίας. Αυτό θα ισχύει σε κάθε πεπερασμένο επαναλαμβανόμενο παίγνιο, διότι όσο πιο συχνή η αλληλεπίδραση μεταξύ των παικτών , τόσο πιο αξιόπιστη η κάθε τιμωρία και άρα όλοι λειτουργούν σαν να μην υπάρχει επόμενη περίοδος (Σταματόπουλος, 2015).

Θεώρημα 2.2 Έστω ότι το παίγνιο σταδίου Γ έχει μία μοναδική ισορροπία Nash. Τότε το πεπερασμένο επαναλαμβανόμενο παίγνιο $G^{T}_{(\delta)}$ έχει μία τέλεια κατά υποπαίγνιο ισορροπία. Με βάση αυτήν, σε κάθε στάδιο επαναλαμβάνεται η ισορροπία Nash του Γ.

2.2.2 Ισορροπία Nash σε Απείρως Επαναλαμβανόμενα Παίγνια.

Σε αυτή την ενότητα θα λάβει χώρα μελέτη της υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας αλλά σε απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια. Θα γίνει, εν συνεχεία , αντιληπτό ότι υπάρχουν αρκετές διαφορές στις διαδικασίες . Στόχος, της διαδικασίας είναι η εύρεση και ανάλυση στρατηγικών , οι οποίες διαθέτουν το στοιχείο της τιμωρίας αλλά και το στοιχείο του επιθυμητού αποτελέσματος.

Προκειμένου να ξεκινήσει η ανάλυση αυτών των παιγνίων, θα ξεκινήσουμε με έναν γενικό ορισμό κατά τον οποίο:

Ορισμός 2.15 Έστω ένα στρατηγικό παίγνιο Γ={Ν, $(S_i)_{i\epsilon N}$, $(u_i)_{i\epsilon N}$} όπου το Ν ορίζει ένα μη κενό και πεπερασμένο σύνολο παικτών , το S_i το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i και u_i μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ που αποτιμά την απόδοση του για κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Ως απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο με παρατηρούμενες ενέργειες ορίζουμε το δυναμικό παίγνιο στο οποίο:

1. Το Ν αποτελεί σύνολο παικτών.

2. Το σύνολο των ενεργειών του κάθε παίκτη i είναι το S_i .

3. Οι ενέργειες του σταδίου t παρατηρούνται εκ των υστέρων από όλους τους παίκτες, όπου t=1,2,… .

4. Το σύνολο των τερματικών ιστοριών είναι το σύνολο ακολουθιών $h^{\infty}=(s^1,s^2,\ldots,)$.

5. Ο παίκτης i αποτιμά την τερματική ιστορία h^{∞} βάσει της συνάρτησης:

$V_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s^t)$ όπου δ συντελεστής προεξόφλησης με δ ϵ (0,1)

ή βάσει της σχέσης $(1-\delta)V_i = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} u_i(s^t)$.

Αναφορικά με την τέλεια κατά υποπαίγνιο ισορροπία στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια, θα χρησιμοποιήσουμε εκ νέου το παράδειγμα του διλήμματος του φυλακισμένου, αλλά με διαφορετικές ποινές.

Παράδειγμα 2.3

		Υπόδικος 2	
		Σ	Ο
Υπόδικος 1	Σ	-2,-2	-9,0
	Ο	0,-9	-6,-6

Θα υποθέσουμε ότι ο συντελεστής προεξόφλησης των αποδόσεων είναι δ και για τους δύο παίκτες. Έστω ότι ο υπόδικος i ακολουθεί την εξής στρατηγική:

- Στο στάδιο t=1 ο εκάστοτε παίκτης i επιλέγει την ενέργεια Σ.
- Στο στάδιο t>1 αν το αποτέλεσμα σε κάθε ένα από τα προηγούμενα στάδια είναι (Σ,Σ) επιλέγει Σ ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση επιλέγει την ενέργεια Ο.

Ειδικότερα, υπάρχει συμφωνία ανάμεσα στους παίκτες και αν κάποιος αποκλίνει από αυτήν ενεργοποιείται η τιμωρία του. Η στρατηγική αυτή καλείται στρατηγική ενεργοποίησης. Όμως, πρέπει να εξεταστεί αν η στρατηγική αυτή είναι η βέλτιστη αντίδραση του κάθε παίκτη. Ενδεικτικά, έστω ότι ο υπόδικος 2 δέχεται να υιοθετήσει τη στρατηγική αυτή.

Εάν ο υπόδικος 1 παρατηρήσει αποτέλεσμα διαφορετικό από το (Σ,Σ) σε κάποια περίοδο με t>1 θα πρέπει να αντιδράσει ανάλογα. Εφόσον γνωρίζει ότι και ο υπόδικος 2 ξέρει ότι έχει παραβιαστεί η συμφωνία , κρίνει ότι ο υπόδικος 2 θα επιλέγει την ενέργεια της ομολογίας. Άρα, η βέλτιστη αντίδραση του υπόδικου 1 είναι να επιλέξει και εκείνος αντίστοιχα να ομολογήσει.

Στην περίπτωση, τώρα, όπου βρισκόμαστε στην περίοδο t=1 είτε σε κάθε άλλη περίπτωση όπου παρατηρεί ο υπόδικος 1 τον συνδυασμό (Σ,Σ), έστω ότι αποφασίζει να επιλέξει να ομολογήσει. Ο υπόδικος 2 , θα έχει επιλέξει Σ και βρισκόμαστε στον συνδυασμό (Ο,Σ) με τον υπόδικο 1 να έχει μηδενική ποινή, καθώς ομολογεί για τον άλλον υπόδικο. Όταν όμως ξεκινήσει η επόμενη περίοδος θα τιμωρηθεί και ο υπόδικος 2 θα επιλέγει μόνιμα την ομολογία. Συνεπώς, σε αυτή την περίοδο η προεξοφλημένη απόδοση του υπόδικου 1 δίνεται από την σχέση:

$$(1-\delta)[(0-6\delta-6\delta^2\ldots)] = (1-\delta)\times\left(\frac{-6\delta}{1-\delta}\right) = -6\delta \qquad (2.12)$$

Έστω ότι τώρα βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου ο υπόδικος 1 έχει επιλέξει να σιωπήσει , αφού έχει ήδη προηγηθεί σαν ιστορία ο συνδυασμός (Σ,Σ) . Τώρα, ο υπόδικος 1 θα δέχεται ποινή αλλά μικρότερη από την περίπτωση της ομολογίας, δηλαδή δύο μήνες. Η απόδοση αυτή θα επαναλαμβάνεται στο διηνεκές και η προεξοφλημένη απόδοση του υπόδικου 1 θα δίνεται από τη σχέση:

$$(1-\delta)[(-2-2\delta-2\delta^2-..)] = (1-\delta)\times(\frac{-2}{1-\delta}) \ = \ -2 \qquad (2.13)$$

Αφού στο παράδειγμα αυτό, η απόδοση είναι αρνητική καθώς απεικονίζει ποινή , δηλαδή κόστος για τον εκάστοτε υπόδικο, προκειμένου να επιλέξει ο υπόδικος 1 να συνεργαστεί θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$-2 > -6\delta \ => \ \delta \geq \frac{1}{3} \qquad (2.14)$$

Το αποτέλεσμα, λοιπόν, που προκύπτει καταλήγει σε τέλεια κατά υποπαίγνιο ισορροπία. Η στρατηγική που υιοθετήθηκε, δημιούργησε δύο είδη υποπαιγνίων , όπου το πρώτο αφορούσε ιστορίες με συνεργατικά αποτελέσματα ενώ το δεύτερο ξεκινά από ιστορίες που περιλάμβαναν τουλάχιστον ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Όσον αφορά τον δεύτερο τύπο υποπαιγνίου, στο κάθε διαφορετικό αποτέλεσμα οι υπόδικοι θα επέλεγαν την ομολογία, άρα θα κατέληγαν στον συνδυασμό (Ο,Ο).

Συνεπώς, θα επιλέγεται ο συνδυασμός αυτός σε κάθε στάδιο και θα αποτελεί ισορροπία για το υποπαίγνιο. Αναφορικά, τώρα , με τον πρώτο τύπο υποπαιγνίου , οι υπόδικοι θα επιλέγουν κάθε φορά να σιωπήσουν. Επομένως , θα καταλήγουν στον συνδυασμό (Σ,Σ). Αυτός ο συνδυασμός αποτελεί ισορροπία κατά Nash, αν το $\delta \geq \frac{1}{3}$.

2.2.3 Εθιμικό Θεώρημα.

Σημαντικό στοιχείο σχετικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια αποτελεί το Δημώδες ή Εθιμικό Θεώρημα. Το τελευταίο υποστηρίζει ότι κάθε εφικτή και αυστηρά λογική απόδοση είναι απόδοση από κάποια τέλεια κατά υποπαίγνιο ισορροπία ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου, όταν όμως οι παίκτες είναι αρκετά υπομονετικοί. Με τον όρο εφικτή απόδοση, όπως είχε αναφερθεί και στην αρχή της ενότητας , αναφερόμαστε σε κάθε απόδοση , η οποία μπορεί να προκύψει από τις στρατηγικές ενός παιγνίου. Μάλιστα, και οι κυρτοί συνδυασμοί συνδυασμών αποδόσεων συνιστούν εφικτές αποδόσεις.

Ορισμός 2.16 Οι αποδόσεις (u_1 , u_2 , … , u_n) είναι εφικτές στο παίγνιο Γ αν προκύπτουν από κάποιο κυρτό συνδυασμό αποδόσεων που αντιστοιχούν στις καθαρές στρατηγικές του Γ. Το σύνολο των εφικτών αποδόσεων θα συμβολίζεται με V.

Προκειμένου να γίνει κατανοητό στην περίπτωση της τέλειας πληροφόρησης και παρακολούθησης θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός απείρως επαναλαμβανόμενου παιγνίου. Τα πρώτα θεωρήματα που αφορούσαν και παίγνια με τέλεια πληροφόρηση αποδείχθηκαν από τους Fudenberg και Maskin το 1986 .

Πιο αναλυτικά, θα θέσουμε το περιβάλλον στο οποίο λειτουργεί το επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Στην παρούσα προσέγγιση θα υποθέσουμε ότι υιοθετούνται αμιγείς στρατηγικές και η απόδοση u : $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ διαθέτει ως πεδίο ορισμού τους συνδυασμούς καθαρών στρατηγικών. Το θεώρημα μπορεί να επεκταθεί και στις μικτές στρατηγικές, όταν όμως εκείνες μπορούν να παρατηρηθούν. Θα γίνει η υπόθεση , ότι οι παίκτες χρησιμοποιούν την minimax στρατηγική τους, δηλαδή ο παίκτης i προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την απόδοση του παίκτη j και επιθυμεί και να τον τιμωρήσει.

Έστω ότι το σύνολο των πιθανών αποδόσεων που οι παίκτες μπορούν να αποκομίσουν στο παίγνιο δίνεται από το σύνολο:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n | \exists\, u(s_1, .., s_n) = u\} \qquad (2.15)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη κυρτή θήκη του παραπάνω συνόλου, και τη συμβολίσουμε με V , αν οι παίκτες επιλέγουν ατομικά ορθολογικές στρατηγικές οι αποδόσεις που θα επιδιώκουν θα ξεπερνούν τις αποδόσεις σε περίπτωση τιμωρίας. Επομένως, θα επιδιώκεται να ανήκουν σε ένα σύνολο της μορφής:

$$V \supset V^* = \{u \in V | u > u^* = 0\} \qquad (2.16)$$

Το εθιμικό θεώρημα διατυπώνεται ως ακολούθως :

Θεώρημα 2.3 Κάθε u ϵ V^* μπορεί να επιτευχθεί ως αποτέλεσμα στην ισορροπία Nash του απείρως επαναλαμβανόμενου παιγνίου Γ όταν οι παίκτες είναι επαρκώς υπομονετικοί , δηλαδή μπορούμε να βρούμε συντελεστή προεξόφλησης $\delta^* < 1$ ώστε για όλους τους παίκτες με δ ϵ (δ^*, 1) το u προκύπτει ως αποτέλεσμα στην ισορροπία.

Ουσιαστικά, το εθιμικό θεώρημα υποστηρίζει ότι οτιδήποτε μπορεί να αποτελέσει μία ισορροπία. Εάν επιτραπεί επαναλαμβανόμενη συμμετοχή σε παίγνιο και υπομονή , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι θα αποκλείσουμε σαν παίκτες τις αποδόσεις που είναι φανερά μη ενδιαφέρουσες ή είναι μη εφικτές. Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου το εθιμικό θεώρημα αποτυγχάνει.

Πιο αναλυτικά, αν οι παίκτες είναι μη επαρκώς υπομονετικοί ή έχουν μικρή διάρκεια ζωής το εθιμικό θεώρημα δεν καλύπτει αυτές τις περιπτώσεις. Μάλιστα, αυτό το θεώρημα θέτει φράγματα στις αποδόσεις , όμως δεν εκφράζει τίποτα σχετικό με τις συμπεριφορές. Τα στρατηγικά προφίλ επιλέγονται απλά για πιο αναλυτική ευκολία χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν τους, για παράδειγμα την αλληλεπίδραση που υφίσταται στα επαναλαμβανόμενα παίγνια.

2.2.4 Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση περί των απείρως επαναλαμβανομένων παιγνίων αξίζει να αναφερθεί ένα σημαντικό θεώρημα , το οποίο έχει διατυπωθεί από τους Aumann και Sharpley(2013) , αλλά και τον Rubinstein(1979). Ουσιαστικά, η ιδέα του θεωρήματος είναι απλή. Για να αποφύγουμε τη μη ενεργοποίηση της τιμωρίας, θα οριστούν στρατηγικές οι οποίες θα τιμωρούν τελικά αυτόν που δεν επιλέγει ενεργοποίηση της τιμωρίας.

Θεώρημα 2.4 Για κάθε αποτέλεσμα u ∈ V^* υπάρχει ένας συνδυασμός στρατηγικών για το άπειρο επαναλαμβανόμενο παίγνιο ώστε να συνιστά υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία Nash.

Έστω ότι ο παίκτης i αποκλίνει. Η στρατηγική ενεργοποίησης, κανονικά ,θα υπαγόρευε στους υπόλοιπους παίκτες να τιμωρήσουν αυτή τη συμπεριφορά. Ας υποθέσουμε, ότι όλοι οι παίκτες ακολουθούν την διαδικασία αυτή, όμως ο παίκτης j δεν επιλέγει να ακολουθήσει την διαδικασία της τιμωρίας. Έτσι, θα διαμορφωθεί καινούρια στρατηγική η οποία θα υπαγορεύει στους παίκτες να εγκαταλείψουν την τιμωρία του παίκτη i και να αρχίσουν να τιμωρούν τον παίκτη j. Επομένως, θα αποτρέψουν εξαρχής τον παίκτη j να μην τιμωρήσει τον αποκλίνοντα παίκτη.

Το βασικότερο, λοιπόν στοιχείο του θεωρήματος αυτού είναι ότι προσφέρει λύση στην περίπτωση όπου όταν κάποιος παίκτης αποκλίνει από τη συμφωνία, ένας ή περισσότεροι παίκτες επιλέγουν ότι η διαδικασία τιμωρίας των παικτών αυτών δεν είναι επικερδής για αυτούς. Όμως, όπως και στο παράδειγμα, μπορούν να διαμορφωθούν στρατηγικές που να αποτρέπουν την μη ενεργοποίηση της τιμωρίας. Επομένως, διασφαλίζεται η ύπαρξη υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας.

2.3 Επαναλαμβανόμενα Παίγνια Ατελούς Πληροφόρησης.

2.3.1 Ισορροπία κατά Nash.

Η προηγούμενη ενότητα επικεντρώθηκε στην ανάλυση παιγνίων με τέλεια πληροφόρηση. Σε αυτά, οι παίκτες είχαν κοινή και ολοκληρωμένη πληροφόρηση αναφορικά με το παίγνιο στο οποίο συμμετέχουν. Χάρη στην έννοια της ιστορίας, οι παίκτες κατείχαν πληροφόρηση αναφορικά με τις προηγούμενες ενέργειες των υπόλοιπων παικτών. Οι αποκλίσεις από την ισορροπία εντοπίζονταν και μπορούσαν να τιμωρηθούν.

Εν αντιθέσει με τα προαναφερθέντα παίγνια , στα παίγνια μη τέλειας πληροφόρησης οι παίκτες διαθέτουν μόνο θορυβώδη ενημέρωση αναφορικά με τις επιλογές που έλαβαν χώρα στο παρελθόν (Mailath & Samuelson, 2006). Ο θόρυβος αυτός ή αλλιώς τα σήματα είναι αυτά τα οποία διακρίνουν την πληροφόρηση σε δημόσια ή ιδιωτική. Όταν οι παίκτες παρατηρούν ένα σήμα , το οποίο είναι δημόσιο αναφερόμαστε στη δημόσια πληροφόρηση, όπου αναλύθηκε στη προηγούμενη ενότητα η τέλεια μορφή της. Αντίστοιχα, αν το σήμα παραμένει ιδιωτικό, δηλαδή μπορεί να είναι διαθέσιμο μόνο για έναν παίκτη, τότε υφίσταται η ιδιωτική παρακολούθηση.

Η δομή του παιγνίου σταδίου στη μη τέλεια δημόσια πληροφόρηση μοιάζει αρκετά με εκείνη της τέλειας πληροφόρησης. Επιτρέπεται η παρουσία παικτών με μικρή και μεγάλη διάρκεια ζωής και ορίζουμε του παίκτες 1,..,n ως εκείνους με την μεγάλη διάρκεια ζωής ενώ n+1,..N θα είναι οι παίκτες με την μικρότερη ζωή. Οι υποθέσεις που χρησιμοποιούνται για το παίγνιο σταδίου παραμένουν οι ίδιες, δηλαδή οι αμιγείς ενέργειες του εκάστοτε παίκτη i δίνονται από το συμπαγές σύνολο S_i και οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα τις ενέργειες τους (Mailath & Samuelson, 2006).

Αντίστοιχα, στη περίπτωση των μικτών στρατηγικών , η αντίστοιχη απεικόνιση των μικτών στρατηγικών παικτών με μακρά διάρκεια ζωής στο αντίστοιχο σύνολο των στατικών ισορροπιών κατά Nash παικτών μικρής διάρκειας ζωής δίνεται από το σύνολο:

B: $\prod_{i=1}^{n} \Delta(Si) \Rightarrow \prod_{i=n+1}^{N} \Delta(Si)$, όπου $\Delta(S_i)$ το σύνολο μικτών στρατηγικών

Πλέον, στο τέλος του παίγνιου σταδίου θα υπάρχει μόνο ένα δημόσιο σήμα y , από ένα σύνολο σημάτων Y , το οποίο είναι πεπερασμένο και το σήμα αυτό πραγματοποιείται με κάποια πιθανότητα βάσει του προφίλ ενεργειών

$$s \in S \equiv \prod_i Si$$

Οπότε η πιθανότητα αυτή ορίζεται ως p(y | s) . Θα υποθέσουμε, ακόμα, ότι το p : Y x S ⟶ [0 , 1] , έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι οι αποδόσεις που θα προκύψουν θα είναι συνεχείς συναρτήσεις των ενεργειών των παικτών. Εφόσον ήδη ορίσαμε την έννοια της απόδοσης, θα πρέπει να γίνει αναφορά στον τρόπο που υπολογίζεται πλέον στην περίπτωση ύπαρξης του σήματος y. Οι παίκτες , δεν έχουν πια καμία άλλη σχετική πληροφόρηση πέραν αυτού του σήματος y και θα ορίσουμε την απόδοση του παίκτη i ως $u_i(y , s_i)$ στο τέλος της κάθε περιόδου με τις αποδόσεις να δίνονται από τον τύπο:

$$u_i(s) = \sum_{y \in Y} u_i^*(y, s_i) p(y|s) \quad (2.17)$$

Επικεντρωνόμαστε , τώρα στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο, όπου όπως έχει ήδη γίνει γνωστό , αποτελεί επανάληψη του παιγνίου σταδίου που μόλις περιγράψαμε. Πλέον, η μόνη διαθέσιμη πληροφόρηση είναι των σύνολο ιστοριών των δικών του επιλογών. Το δημόσιο σήμα που υπάρχει κρίνεται μη επαρκές, ωστόσο η ιστορία του εκάστοτε παίκτη i που περιλαμβάνει αυτό το σήμα και τις δικές του παρελθούσες ενέργειες ορίζεται ως:

$$\mathcal{H}_i \equiv \cup_{t=0}^{\infty}(S_i \times Y)^t \qquad (2.18)$$

Πλέον, κάθε σήμα παλαιάς ενέργειας είναι θορυβώδες και μη ακριβές, όμως είναι παρατηρήσιμο. Η κατανομή του δημόσιου σήματος που ορίσαμε, στην ατελή δημόσια πληροφόρηση επηρεάζεται με αποτέλεσμα να εντοπίζονται αρκετές αποκλίσεις και πολλές μυωπικές ενέργειες. Ουσιαστικά , ο δεσμός ανάμεσα σε τρέχουσες ενέργειες και μελλοντικές επιλογές επηρεάζεται και πρέπει να βρεθεί λύση. Για αυτό το λόγο, εισάγεται η διαδικασία της τιμωρίας.

Όσον αφορά, την ισορροπία κατά Nash, μπορούν να καθοριστούν στρατηγικές, αντίστοιχες με εκείνες που θα διαμορφώνονταν στη περίπτωση της τέλειας παρακολούθησης. Σαφέστατα, θα εντοπίζονται διαφορές , ωστόσο η υιοθέτηση τους θα δημιουργούσε κίνητρα μη απόκλισης επιδρώντας στη κατανομή των σημάτων. Ουσιαστικά, μέσω της τιμωρίας σημάτων , τα οποία θα προκαλούσαν κίνητρο απόκλισης επιτρέπεται η υιοθέτηση της λογικής που αξιοποιούμε στη τέλεια παρακολούθηση, δηλαδή ότι οι παίκτες δεν επιλέγουν μεγιστοποίηση αποδόσεων μυωπικά.

2.3.1.1 Παράδειγμα με υπόδειγμα Green- Porter.

Προκειμένου να κατανοήσουμε την έννοια ισορροπίας στην μη τέλεια δημόσια παρακολούθηση θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα. Ενδεικτικά, θα χρησιμοποιήσουμε το υπόδειγμα των Green και Porter(1984), που αφορά την ανταγωνιστικότητα ποσοτήτων , αλλά σε αρκετά απλοποιημένη μορφή (Obara ,2003). Υποθέτουμε την ύπαρξη δύο επιχειρήσεων, που παράγουν το ίδιο προϊόν. Η εκάστοτε επιχείρηση έχει δύο επιλογές , είτε να παράγει μικρή ποσότητα προϊόντος , που θα την ορίσουμε σαν συνεργασία (Σ) είτε να παράγει μεγάλες ποσότητες του προϊόντος , που θα την ορίσουμε ως μη συνεργασία (ΜΣ).

Ορίζουμε τις πιθανότητες p^0 , p^1 , p^2 και θα ισχύει ότι $p^2 > p^1 > p^0$. Γίνεται αντιληπτό, ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτό που καθορίζει την απόδοση είναι η αντίστοιχη τιμή της εκάστοτε ποσότητας. Ανάλογα με τις ενέργειες που θα επιλέξουν οι επιχειρήσεις καταλήγουν με συγκεκριμένη πιθανότητα σε κάθε απόδοση. Αναλυτικότερα, αν και οι δύο επιχειρήσεις επιλέξουν την συνεργασία, τότε θα προκύψει υψηλή τιμή αλλά με πιθανότητα 1- p^0 ενώ η χαμηλή τιμή θα προκύψει με πιθανότητα p^0 . Αν μία από τις δύο επιχειρήσεις επιλέξει μόνο τη συνεργασία, η τιμή θα είναι υψηλή με πιθανότητα 1- p^1 ενώ η αντίστοιχη χαμηλή με πιθανότητα p^1. Ολοκληρώνοντας, αν και οι δύο επιχειρήσεις επιλέξουν τη μη συνεργασία η τιμή θα είναι υψηλή με πιθανότητα 1- p^2 και αντίστοιχα χαμηλή με p^2.

Έστω ,ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις του παιγνίου σταδίου, το οποίο θα επαναλαμβάνεται, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

Παράδειγμα 2.4		Επιχείρηση 2	
		Σ	ΜΣ
Επιχείρηση 1	Σ	4,4	-1,6
	ΜΣ	6,-1	1,1

Οι έννοιες της υψηλής ή χαμηλής τιμής αποτελούν καθαρά τα σήματα τα οποία έχουν διαθέσιμα οι επιχειρήσεις , λόγω της μη τέλειας δημόσιας παρακολούθησης. Οι ισορροπίες, στις οποίες οι παίκτες καταβάλλουν προσπάθεια, χρειάζονται κίνητρα και βασικό χαρακτηριστικό αυτών των κινήτρων είναι ότι κάποιες πραγματοποιήσεις του εκάστοτε σήματος πρέπει να ακολουθούνται από χαμηλές συνεχείς αξίες. Έτσι, έχουν την μορφή της τιμωρίας αλλά δεν προκύπτουν από την απόκλιση αλλά για να κινητοποιήσουν τους παίκτες.

Έστω, ότι οι επιχειρήσεις επιλέγουν συνεργασία (Σ,Σ) μέχρι να παρατηρηθεί χαμηλή τιμή και επιλέγουν πάντα τη μη συνεργασία (ΜΣ,ΜΣ) σε περίπτωση που εντοπιστεί αυτό το κακό σήμα. Η στρατηγική αυτή , αποτελεί τη στρατηγική ενεργοποίησης.

Σε αυτή τη περίπτωση, ο περιορισμός κινήτρων για την εκάστοτε επιχείρηση δίνεται από:

$$(1-\delta)6+\delta[(1-p^1)V^*+p^1V_*] \le (1-\delta)4+\delta[(1-p^0)V^*+p^0V_*] \qquad (2.19)$$

Όπου ουσιαστικά $V^*=(1-\delta)4+\delta[(1-p^0)V^*+p^0V_*]$ (2.20)

Και $V_*=1$

Μέσω επίλυσης της ανισότητας, και με δοκιμές αποδεικνύεται ότι αν το $\frac{p^1}{p^0}>\frac{5}{3}$ και οι παίκτες είναι αρκετά υπομονετικοί, ικανοποιείται ο περιορισμός.

Αυτό , όμως , το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό είναι ότι ο συνδυασμός στρατηγικών (ΜΣ,ΜΣ) επιλέγεται στο μονοπάτι ισορροπίας. Κανονικά, αν βρισκόταν το παίγνιο σε συνθήκες τέλειας παρακολούθησης , ο συνδυασμός αυτός κατά πάσα πιθανότητα δεν θα επιλεγόταν. Πλέον, μετά τον εντοπισμό του κακού σήματος επιλέγεται ενδεικτική τιμωρία για την απόκλιση όμως δεν επιλέγεται η πιο ακραία τιμωρία. Αντίθετα, καταλήγει σε συνδυασμό στρατηγικών που διατηρούν το κίνητρο των επιχειρήσεων να συνεργαστούν.

Το συμπέρασμα το οποίο συνάγεται από το προηγούμενο παράδειγμα, είναι το γεγονός ότι η συνεχής χαμηλή απόδοση μετά από ένα κακό σήμα (επιλογή συνδυασμού μη συνεργασίας για πάντα) συμβάλει ξεκάθαρα στην παροχή κινήτρων μη απόκλισης . Καθώς οι παίκτες γίνονται ολοένα και περισσότερο υπομονετικοί, το μυωπικό κίνητρο για απόκλιση από την βέλτιστη αντίδραση του παιγνίου σταδίου μειώνεται, όμως ταυτόχρονα ο αντίκτυπος της συνεχούς χαμηλής αξίας αυξάνεται.

2.3.2 Εθιμικό Θεώρημα.

Η ανάλυση των επαναλαμβανόμενων παιγνίων στη μη τέλεια δημόσια πληροφόρηση θα ολοκληρωθεί με την αναφορά στο εθιμικό θεώρημα υπό αυτές τις συνθήκες. Το εθιμικό θεώρημα εφαρμόζεται στα επαναλαμβανόμενα παίγνια μη τέλειας πληροφόρησης κάτω από κάποιες υποθέσεις. Ουσιαστικά, και πάλι επισημαίνει ότι σε περίπτωση ύπαρξης υπομονετικών παικτών, μπορεί να επιτευχθεί σύνολο αποδόσεων υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας. Εάν για κάθε ζεύγος παικτών υπάρχει τουλάχιστον ένα προφίλ ενεργειών , όπου η πληροφόρηση που παρατηρείται δημόσια επιτρέπει οι αποκλίσεις από έναν παίκτη που διαχωρίζονται από τις αποκλίσεις του άλλου, και η διάσταση του συνόλου εφικτών εσόδων ισούται με τον αριθμό παικτών, τότε μπορεί να εφαρμοστεί βάσει των Fudenberg , Levine και Maskin(1994).

Επιπλέον, υποθέτουν ότι αυτή η μη τέλεια πληροφορία εμφανίζεται ως ένα δημόσιο αποτέλεσμα στο τέλος κάθε περιόδου , δηλαδή ο κάθε παίκτης έχει μία μη στατιστικά τέλεια εικόνα για τις ενέργειες του αντιπάλου του. Ωστόσο, αν δεν υπήρχε καμία πληροφόρηση για τις ενέργειες των παικτών , δηλαδή αυτά τα αποτελέσματα ήταν εντελώς μη πληροφοριακά, το εθιμικό θεώρημα θα αποτύγχανε. Πιο συγκεκριμένα, οι Fudenberg και Maskin(1986) απέδειξαν ότι το εθιμικό θεώρημα μπορεί να σταθεί σε ύπαρξη μικρής ποσότητας μη τέλειας πληροφόρησης.

2.3.2.1 Παράδειγμα με υπόδειγμα Radner, Myerson, Maskin.

Όπως και σε κάθε ενότητα και σε κάθε ορισμό, έτσι και εδώ προκειμένου να καταφέρουμε να περιγράψουμε τις ιδιαιτερότητες του θεωρήματος θα αξιοποιήσουμε ένα παράδειγμα. Με στόχο την απλοποίηση της ανάλυσης θα χρησιμοποιήσουμε το παίγνιο συνεργασίας των Radner, Myerson και Maskin(1986) αλλά στην πιο απλή μορφή όπως το απεικόνισε ο Obara(2003).

Θα ορίσουμε το σύνολο των ενεργειών των παικτών ως προσπάθεια (Π) ή ως αποφυγή (Α). Εφόσον εξετάζουμε την περίπτωση μη τέλειας πληροφόρησης , δεχόμαστε δύο σήματα, ένα καλό και ένα κακό σήμα , θα ανήκουν σε ένα σύνολο Υ και θα τα συμβολίσουμε ως $\bar{y}$ το καλό και ως $\underline{y}$ το αντίστοιχο κακό. Οι αποδόσεις του κάθε σήματος θα είναι αντίστοιχα δώδεκα μονάδες για το καλό σήμα και καμία για το κακό σήμα , δηλαδή π($\bar{y}$)=12 και π($\underline{y}$) =0.

Κάθε συνδυασμός ενεργειών συναντάται με μία συγκεκριμένη πιθανότητα. Ενδεικτικά , οι πιθανότητες δίνονται από την εξής κατανομή :

Κατανομή πιθανοτήτων: $\begin{cases} p(\underline{y}|ΠΠ) = \frac{1}{3} \\ p(\underline{y}|ΠΑ) = p(\underline{y}|ΑΠ) = \frac{1}{3} \\ p(\underline{y}|ΑΑ) = \frac{3}{4} \end{cases}$

Τα έσοδα δίνονται από τη συνάρτηση εσόδων:

$$g_i(s) = E_s \frac{\pi(y)}{2} - c(s_i) \qquad (2.21)$$

όπου το s_i ϵ {Π,Α} με τα κόστη να λαμβάνουν αντίστοιχα τις τιμές c(Π)=3 και c(Α)=0 . Συνεπώς, ο πίνακας αποδόσεων προκύπτει ως εξής:

Παράδειγμα 2.5

Παίκτης 2

		Π	Α
Παίκτης 1	Π	1,1	-1,2
	Α	2,-1	0,0

Έστω ότι ο συνδυασμός (u_1 , u_2) αποτελεί τις αποδόσεις των δύο παικτών στην περίπτωση της ισορροπίας και έστω ότι μεγιστοποιεί το άθροισμα των δύο αυτών αποδόσεων. Ας υποθέσουμε, για να εξετάσουμε το εθιμικό θεώρημα σε αυτό το παράδειγμα, ότι το άθροισμα των δύο αποδόσεων στην ισορροπία είναι μεγαλύτερο της μονάδας, δηλαδή ότι :

$$u_1 + u_2 > 1 \qquad (2.22)$$

Ας εξετάσουμε την απόδοση του παίκτη 1, αφού ορίσουμε ως έννοιες την πιθανότητα m_i για i=1,2 που εκφράζει την πιθανότητα και οι δύο παίκτες να επιλέξουν την προσπάθεια και το $w_i(y)$, που θα εκφράζει την συνεχή απόδοση του εκάστοτε παίκτη του παιγνίου μετά από μία πραγματοποίηση του σήματος y. Συνεπώς, η απόδοση του παίκτη i δίνεται από τη σχέση :

$$\mathrm{u_i} = (1-\delta)\mathrm{g_i}(\Pi, \mathrm{m_i}) + \delta\{\, \mathrm{m_i}(\tfrac{2}{3}\,\mathrm{w_i}(\bar{\mathrm{y}}) + \tfrac{1}{3}\mathrm{w_i}(\underline{\mathrm{y}})) + (1-\mathrm{m_i})(\tfrac{1}{3}\mathrm{w_i}(\bar{\mathrm{y}}) + \tfrac{2}{3}\mathrm{w_i}(\underline{\mathrm{y}})\,)\}$$
(2.23)

Για να αναλύσουμε λίγο την σχέση που παραθέσαμε, θα πρέπει να προεξοφληθεί και η περίπτωση της συνεργασίας αλλά και της απόκλισης από αυτήν. Ενδεικτικά, θα εντοπίσουμε την ισορροπία κατά Nash. Εάν ο παίκτης 1 πίστευε ότι ο παίκτης 2 θα επέλεγε την προσπάθεια τότε θα επέλεγε την αποφυγή για μεγαλύτερη απόδοση. Αντίστοιχα, αν θεωρούσε ότι ο παίκτης 2 θα επέλεγε την αποφυγή τότε θα επέλεγε και εκείνος την αποφυγή.

Από την πλευρά του παίκτη 2, αν θεωρούσε ότι ο παίκτης 1 θα επιλέξει την προσπάθεια, με στόχο να αποκομίσει μεγαλύτερη απόδοση θα επέλεγε την αποφυγή. Ολοκληρώνοντας την αναζήτηση της ισορροπίας κατά Nash, αν ο παίκτης 2 έκρινε ότι ο παίκτης 1 θα επιλέξει την αποφυγή θα επέλεγε και εκείνος την ίδια ενέργεια. Άρα, η ισορροπία κατά Nash είναι ο συνδυασμός (Α,Α).

Όμως, κοιτώντας το παίγνιο σταδίου αντιλαμβανόμαστε ότι υφίσταται ένας συνδυασμός ενεργειών ,ο οποίος είναι περισσότερο ωφέλιμος από την υπάρχουσα ισορροπία κατά Nash. Άρα είναι μία κατά Pareto βέλτιστη λύση. Ωστόσο, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι και οι δύο παίκτες θα συνεργαστούν και δεν θα αποκλίνουν , εκτός και αν υπάρχει κάποια γραπτή συμφωνία.

Για αυτό το λόγο , χρησιμοποιούμε μια κατανομή πιθανοτήτων για την έκβαση του συνδυασμού (Π,Π) . Όσον αφορά τον περιορισμό κινήτρων για τον εκάστοτε παίκτη i , αυτός διαμορφώνεται ως εξής :

$$(1-\delta) \leq \delta\ \frac{w_i(\bar{y})-w_i(\underline{y})}{3} \qquad (2.24)$$

Κάνοντας πράξεις στη σχέση (2.24) μπορούμε να την ανασχηματίσουμε και να έχουμε ότι:

$$\mathrm{u_i} = (1-\delta)\mathrm{g_i}(\Pi, \mathrm{m_i}) + \delta \mathrm{m_i}\left(\frac{2}{3}\mathrm{w_i}(\bar{y}) + \frac{1}{3}\mathrm{w_i}\left(\underline{y}\right)\right) + (1-\mathrm{m_i})\left(\frac{1}{3}\mathrm{w_i}(\bar{y}) + \frac{2}{3}\mathrm{w_i}\left(\underline{y}\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{u_i} = (1-\delta)\mathrm{g_i}(\Pi, \mathrm{m_i}) + \ \delta\{\mathrm{w_i}(\bar{y}) - (\mathrm{m_i} + 2(1-\mathrm{m_i}))\frac{\mathrm{w_i}(\bar{y})-\mathrm{w_i}(\underline{y})}{3} \qquad (2.25)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.24) κάνουμε αντικατάσταση στην σχέση (2.25) και καταλήγουμε ότι

$$\mathrm{u_i} \leq (1-\delta)\mathrm{g_i}(\Pi, \mathrm{m_i}) + \ \delta \mathrm{w_i}(\bar{y}) - (\mathrm{m_i} + 2(1-\mathrm{m_i}))(1-\delta) \qquad (2.26)$$

Συνεπώς , αντικαθιστώντας το i για τον εκάστοτε παίκτη κάθε φορά, διαμορφώνονται δύο σχέσεις, τις οποίες και θα προσθέσουμε κατά μέλη. Οπότε προκύπτει για παίκτη

$$\mathrm{u_1} \leq (1-\delta)\mathrm{g_1}(\Pi, \mathrm{m_1}) + \ \delta \mathrm{w_1}(\bar{y}) - (\mathrm{m_1} + 2(1-\mathrm{m_1}))(1-\delta) \qquad (2.27)$$

$$\mathrm{u_2} \leq (1-\delta)\mathrm{g_2}(\Pi, \mathrm{m_2}) + \ \delta \mathrm{w_2}(\bar{y}) - (\mathrm{m_2} + 2(1-\mathrm{m_2}))(1-\delta) \qquad (2.28)$$

Και προσθέτοντας κατά μέλη καταλήγουμε:

$$\mathrm{u_1} + \mathrm{u_2} \leq (1-\delta)(\mathrm{g_1}(\Pi, \mathrm{m_1}) + \mathrm{g_2}(\Pi, \mathrm{m_2})) + \delta(\mathrm{w_1}(\bar{y}) + \mathrm{w_2}(\bar{y})) - (4 - \mathrm{m_1} - \mathrm{m_2})\ (1-\delta) \qquad (2.29)$$

Πλέον, μένει να αντιληφθούμε το πρόσημο της σχέσης αυτής. Στην αρχή , υποθέσαμε ότι το άθροισμα αυτό είναι μικρότερο της μονάδας όμως ισχύει ότι

$$g_1(\Pi, m_1) + g_2(\Pi, m_2) \le 2 \tag{2.30}$$

$$w_1(\bar{y}) + w_2(\bar{y}) \le u_1 + u_2 \tag{2.31}$$

Άρα $u_1 + u_2 \le 2 - (4 - m_1 - m_2)$, όμως τα m_i είναι πιθανότητες επιλογής της προσπάθειας και αθροίζουν στη μονάδα. Επομένως ισχύει ότι

$$u_1 + u_2 \le 2 - (4 - m_1 - m_2) \le 0 \tag{2.32}$$

Όμως αυτό αναιρεί την αρχική μας υπόθεση, δηλαδή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εθιμικό θεώρημα σε αυτή τη περίπτωση. Αυτό συμβαίνει διότι οι παίκτες πρέπει τώρα να χρησιμοποιήσουν αναποτελεσματικό συνδυασμό αποδόσεων μετά την πραγματοποίηση του σήματος y λόγω της συμμετρικής δομής πληροφόρησης. Ο Radner (1986) κατάφερε να αποδείξει ότι το αποτελεσματικό προφίλ αποδόσεων (Π,Π) μπορεί να επιτευχθεί όταν οι παίκτες δεν προεξοφλούν το μέλλον.

2.4 Η Έννοια της Φήμης σε Επαναλαμβανόμενα παίγνια.

Μία επιπλέον έννοια, αυτή της φήμης, αποτελεί ένα αναπόσπαστο σημείο της καθημερινότητας, τόσο των επιχειρήσεων, των κυβερνήσεων όσο και αυτοτελών οντοτήτων, όπως το ίδιο το άτομο. Πιο συγκεκριμένα, μία επιχείρηση αποκτά φήμη μέσω του τρόπου με τον οποίο παρέχει τις υπηρεσίες για τις οποίες λειτουργεί, ένα άτομο μέσω της ειλικρίνειας του και της φερεγγυότητας του προσφέρει καλή εντύπωση και τέλος οι κυβερνήσεις , οι οποίες είναι αξιόπιστες και δίχως ίχνος διαφθοράς, σαφέστατα αποκτούν πολύ καλή φήμη.

Γενικά, η φήμη εξαρτάται και από το χρονικό ορίζοντα της κάθε σχέσης ή συνεργασίας (Mailath & Samuelson, 2006). Ενδεικτικά, πιο εύκολα θα εμπιστευόμασταν μία επιχείρηση , με την οποία συνεργαζόμαστε χρόνια και γνωρίζουμε την ποιότητα της. Ακόμα και αν μία νέα επιχείρηση μας προσέφερε την ίδια υπηρεσία , πιθανώς σε χαμηλότερη τιμή, αν δεν υπάρχουν πληροφορίες για τη φήμη της και δεν έχουμε προηγούμενη συνεργασία, δύσκολα θα την επιλέξουμε.

Αυτό αποτελεί και το βασικό χαρακτηριστικό της φήμης, δηλαδή καταστάσεις και γεγονότα του παρελθόντος δημιουργούν απαιτήσεις και προσδοκίες για το μέλλον. Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια, βοηθούν στην ανάλυση της έννοιας αυτής, καθώς λόγω της φύσης τους οι παίκτες διατηρούν μακροπρόθεσμες σχέσεις.

2.4.1 Δύο Προσεγγίσεις Φήμης.

Γενικότερα, στα επαναλαμβανόμενα παίγνια υφίστανται δύο διαφορετικές προσεγγίσεις αναφορικά με τη φήμη. Η πρώτη, αναφέρεται στην επιλογή ισορροπίας κατά Nash, που όμως περιλαμβάνει και ενέργειες οι οποίες δεν είναι ισορροπία κατά Nash του παιγνίου σταδίου. Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία, θα αναλύσουμε το σκεπτικό αυτό.

Έστω ότι βρισκόμαστε ξανά στην περίπτωση του διλήμματος του φυλακισμένου. Όπως έχουμε αποδείξει , εάν οι παίκτες παραμένουν υπομονετικοί, υπάρχει ισορροπία όπου οι παίκτες συνεργάζονται σε κάθε περίοδο. Η επιλογή της ενέργειας της μη συνεργασίας, δηλαδή απόκλισης από την ισορροπία, σαφέστατα αντιμετωπίζεται ως λιποταξία. Συνεπώς , στο παράδειγμα αυτό θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι οι παίκτες διατηρούν τη φήμη της συνεργασίας, καθώς αυτή είναι η ισορροπία, και την οποιαδήποτε απόκλιση να την παρουσιάσουμε σαν κίνδυνο που μπορεί να καταστρέψει την φήμη αυτή. Επομένως, δεν τίθεται κάποια αλλαγή στη δομή του παιγνίου ή στην αντιμετώπιση του, απλά προστίθεται μία επιπλέον έννοια (Mailath & Samuelson , 2006).

Η δεύτερη προσέγγιση της φήμης, η οποία χαρακτηρίζεται ως αντίθετη προσέγγιση επιλογής της φήμης, ουσιαστικά μπορεί να εκφραστεί με την περίπτωση κατά την οποία ο ένας παίκτης δεν έχει πλήρη εικόνα για τις βλέψεις του αντιπάλου του. Για παράδειγμα, ένας παίκτης μπορεί να είναι σίγουρος ότι μέσω του παιγνίου του διλήμματος του φυλακισμένου θα αποκομίσει απόδοση, όμως μπορεί να υφίσταται μικρή πιθανότητα ότι δεν θα έχει άλλη επιλογή πέραν της τιμωρίας του αντιπάλου, όπως η στρατηγική μία σου και μία μου. Ουσιαστικά, υπάρχει σχέση εξάρτησης ανάμεσα στο κίνητρο διαμόρφωσης φήμης και στο κίνητρο χειραγώγησης του τι πιστεύει ο αντίπαλος ενός παίκτη ότι θα επιλέξει εκείνος.

Υπάρχουν σε αυτή τη περίπτωση όμως και οι επιδράσεις της φήμης. Πιο συγκεκριμένα, μπορούν να εμφανιστούν λόγω της σχέσης ανάμεσα στο παρελθόν και στις μελλοντικές προσδοκίες που επηρεάζουν τη φήμη (Mailath & Samuelson,2006). Προηγουμένως, αναφέραμε ότι όταν υφίσταται καλή συνεργασία και φήμη για μία επιχείρηση, οι πελάτες αναμένουν εξυπηρέτηση ανάλογη αυτής της φήμης της. Όμως, μπορεί να προκύψουν αυτές οι επιδράσεις, όταν εξαιτίας αυτής της λογικής τίθενται περιορισμοί στις αποδόσεις που αποκομίζουν οι παίκτες στο παίγνιο κατά την ισορροπία. Οι περιορισμοί , όμως αυτοί, στην περίπτωση της τέλειας πληροφόρησης, κατά πάσα πιθανότητα δεν θα υπήρχαν.

Σημαντική έννοια στον ορισμό της φήμης αποτελεί ο τύπος δέσμευσης ή συμπεριφοράς. Ουσιαστικά, στα παίγνια αυτά δεν υπάρχουν αποδόσεις για τον εκάστοτε παίκτη αλλά αντίθετα επιλέγουν οι παίκτες σε κάθε επανάληψη του παιγνίου μία συγκεκριμένη στρατηγική. Για να γίνει κατανοητός ο ορισμός του τύπου δέσμευσης , θα χρησιμοποιήσουμε ένα παίγνιο , το οποίο αποτελείται από δύο παίκτες.

Βάσει των Mailath και Samuelson(2006) θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα της επιλογής προϊόντων. Ενδεικτικά, ο πρώτος παίκτης θα είναι μακράς διάρκειας ζωής , σαν μία επιχείρηση η οποία επιλέγει αν θα καταβάλει υψηλή ή χαμηλή προσπάθεια. Αντίστοιχα, σαν δεύτερος παίκτης θεωρείται μία αλληλουχία παικτών μικρής διάρκειας ζωής , που είναι οι καταναλωτές και επιλέγουν ανάμεσα σε εξατομικευμένη ή τυποποιημένη μορφή προϊόντος.

Η διαδικασία του παιγνίου λαμβάνει χώρα σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης. Το παίγνιο σταδίου, το οποίο θα επαναληφθεί , διατυπώνεται ως εξής :

Παράδειγμα 2.6

		Παίκτης 2	
		E	T
	Y	2,3	0,2
Παίκτης 1	X	3,0	1,1

Όπως προαναφέρθηκε, ο παίκτης 1 έχει δύο επιλογές στο παίγνιο αυτό, είτε να καταβάλει υψηλή προσπάθεια(Y) είτε χαμηλή προσπάθεια (X). Αντίστοιχα, ο παίκτης 2 είτε θα προτιμήσει την εξατομικευμένη μορφή προϊόντος (E) ή την τυποποιημένη (T). Ακολουθώντας την μέθοδο που χρησιμοποιούμε προκειμένου να εντοπίζουμε ενδεχόμενες ισορροπίες κατά Nash έχουμε τα εξής συμπεράσματα. Αν ο παίκτης 1 θεωρεί ότι ο παίκτης 2 θα επιλέξει την εξατομικευμένη μορφή (E) τότε θα προτιμήσει την χαμηλή προσπάθεια γιατί του προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση. Στην περίπτωση, όμως, που θεωρήσει ότι ο παίκτης 2 θα ακολουθήσει την τυποποιημένη μορφή , τότε θα επιλέξει να καταβάλει πάλι την χαμηλή προσπάθεια.

Από την πλευρά του παίκτη 2, αν θεωρεί ότι ο παίκτης 1 θα επιλέξει να καταβάλει υψηλή προσπάθεια, θα προτιμήσει την εξατομικευμένη μορφή, που του προσφέρει απόδοση τρία έναντι του δύο. Και τέλος, αν θεωρεί ότι ο παίκτης 1 θα επιλέξει την χαμηλή προσπάθεια , τότε θα επιλέξει την τυποποιημένη μέθοδο για την μέγιστη απόδοση. Συνεπώς, το παίγνιο διαθέτει μία ισορροπία κατά Nash στον συνδυασμό ενεργειών όπου ο παίκτης 1 , δηλαδή η επιχείρηση , καταβάλει χαμηλή προσπάθεια και ο παίκτης 2, δηλαδή ο καταναλωτής, αγοράζει προϊόντα τυποποιημένης μορφής.

Παρατηρώντας όμως το παίγνιο υπάρχει μία κατά Pareto βέλτιστη λύση. Οι παίκτες, αν καταλήξουν στον συνδυασμό (Y,E) θα αποκομίσουν και οι δύο αποδόσεις μεγαλύτερες από το αντίστοιχο σημείο της ισορροπίας κατά Nash. Το πρόβλημα όμως είναι ότι ο καταναλωτής δεν μπορεί να είναι σίγουρος ότι ο παίκτης 1, δηλαδή η επιχείρηση, θα επιλέγει να καταβάλει υψηλή προσπάθεια. Ακόμα και αν η επιχείρηση ξεκινήσει να επιλέγει την υψηλή προσπάθεια κανείς δεν εγγυάται στον καταναλωτή ότι στους επομένους γύρους θα συνεχίσει να το επιλέγει.

Σε αυτό το πρόβλημα θα αποτελέσει λύση η έννοια του τύπου δέσμευσης. Έστω ότι η επιχείρηση, είχε σαν τύπο δέσμευσης την υψηλή προσπάθεια, την οποία συμβολίζουμε ως ξ(Υ). Ακόμα και αν η πιθανότητα η επιχείρηση να υιοθετήσει αυτόν τον τύπο είναι μικρή, έχει μεγάλη επίδραση στον καθορισμό του συνόλου αποδόσεων που θα προκύψουν από το παίγνιο. Ουσιαστικά, αν ο παίκτης 1 επιλέγει σε κάθε περίοδο να καταβάλει υψηλή προσπάθεια , τότε ο τύπος δέσμευσης θα έχει θετική πιθανότητα, ο καταναλωτής εκπλήσσεται και σταδιακά θα οδηγηθεί στην επιλογή της εξατομικευμένης μορφής προϊόντος.

Γενικότερα, σε αρκετές περιπτώσεις υπάρχει το κίνητρο της φήμης. Για παράδειγμα, αν το παιχνίδι επαναλαμβανόταν πεπερασμένες φορές και σε συνθήκες πλήρους πληροφόρησης ο συνδυασμός (Χ,Τ) θα αποτελούσε υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία. Ωστόσο, ακόμα και σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει το κίνητρο η επιχείρηση να διαθέτει τη φήμη της επιλογής καταβολής υψηλής προσπάθειας, λόγω των υψηλότερων αποδόσεων. Επομένως, η χρήση της φήμης και του τύπου δέσμευσης αποτελεί λύση σε αντίστοιχες περιπτώσεις.

2.4.2 Φήμη σε συνθήκες Τέλειας Πληροφόρησης.

Η φήμη , ως έννοια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ,τόσο σε παίγνια με τέλεια παρακολούθηση όσο και σε παίγνια με ατελή παρακολούθηση. Η ανάλυση θα εφαρμοστεί σε παίγνια με τέλεια πληροφόρηση. Όπως είχε γίνει γνωστό σε προηγούμενη ενότητα, η διαφορά ανάμεσα σε τέλεια και ατελή πληροφόρηση είναι ότι στην τελευταία οι παίκτες διαθέτουν θορυβώδη πληροφόρηση αναφορικά με προηγούμενες ενέργειες των υπόλοιπων παικτών.

Έστω, ότι συνεχίζουμε να βρισκόμαστε στο παίγνιο της επιλογής προϊόντος. Η περίπτωση του παιγνίου τέλειας πληροφόρησης αποτελεί μια ειδική περίπτωση. Είχαμε υποθέσει ότι το σύνολο ενεργειών του παίκτη 1, δηλαδή της επιχείρησης , ήταν πεπερασμένο και τώρα το συμβολίζουμε ως A_1 . Αντίστοιχα , το σύνολο ενεργειών του παίκτη 2 , δηλαδή από πλευράς καταναλωτών, θα το ορίσουμε ως A_2. Προς ευκολία κατανόησης παραθέτουμε εκ νέου τη μορφή του παιγνίου σταδίου, η οποία έχει ως εξής:

Παράδειγμα 2.7

		Παίκτης 2	
		Ε	Τ
Παίκτης 1	Υ	2,3	0,2
	Χ	3,0	1,1

Συνεπώς, το σύνολο ενεργειών του παίκτη 1 είναι το A_1={Υ,Χ) και αντίστοιχα του παίκτη 2 το A_2={Ε,Τ}. Θα αντιμετωπίσουμε την περίπτωση αυτή σαν ειδική περίπτωση μη ατελούς πληροφόρησης. Δηλαδή, θα εισάγουμε την έννοια του δημόσιου σήματος , το οποίο θα συμβολίσουμε ως y και ανήκει στο σύνολο Y. Μάλιστα, θα ορίσουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του σήματος y ως $p(y|a_1)$, όπου ως a_1 ορίζουμε μία τυχαία ενέργεια που επιλέγεται από τον σύνολο A_1 . Στην περίπτωση μας , λοιπόν , για να ενσωματώσουμε το σήμα θα θεωρήσουμε ότι το $Y= A_1$, δηλαδή ότι το πεδίο ορισμού του δημόσιου σήματος είναι ίδιο με το σύνολο ενεργειών του παίκτη 1, ουσιαστικά δηλαδή είναι φερέγγυο σήμα. Βάσει αυτής της λογικής, η πιθανότητα εμφάνισης του σήματος κυμαίνεται ως εξής :

$$\begin{cases} p(y|a_1) = 1 & \alpha\nu\ y = a_1 \\ p(y|a_1) = 0 \ \sigma\varepsilon\ \acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta \end{cases}$$

Στα δεδομένα του παιγνίου είχαμε υποθέσει ότι ο παίκτης 1 διαθέτει μακράς διάρκειας ζωή ενώ αντίθετα ο παίκτης 2 διαθέτει μικρής διάρκειας. Εφόσον βρισκόμαστε σε περιβάλλον τέλειας πληροφόρησης θα πρέπει να υπολογιστεί και η ιστορία ή πιο σωστά το σύνολο ιστοριών για τον εκάστοτε παίκτη. Στα επαναλαμβανόμενα παίγνια είχαμε ορίσει ως σύνολο ιστοριών του εκάστοτε παίκτη το σύνολο :

$$\mathcal{H} = \cup_{t=0}^{\infty} \mathcal{H}^t \qquad (2.33)$$

και μάλιστα είχαμε τονίσει ότι η έννοια της ιστορίας περιλαμβάνει το σύνολο των ενεργειών, οπότε :

$$\mathcal{H}^t \equiv S^t \qquad (2.34)$$

Συνεπώς, στο συγκεκριμένο παίγνιο , για τον παίκτη 1 το σύνολο των ιστοριών του δίνεται από :

$$\mathcal{H} = \cup_{t=0}^{\infty} (S_1 \times S_2 \times Y)^t \qquad (2.35)$$

καθώς ο παίκτης 1 γνωρίζει τις ενέργειες των προηγούμενων αντιπάλων του. Το αντίστοιχο σύνολο ιστοριών για των παίκτη 2, που όπως αναφέρθηκε έχει μικρότερη διάρκεια ζωής , δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{H} = \cup_{t=0}^{\infty} (Y)^t \qquad (2.36)$$

διότι εφόσον έχει μικρή διάρκεια ζωής δεν μπορεί να ξέρει τις ενέργειες των προηγούμενων παικτών. Αξίζει να επαναληφθεί το γεγονός , ότι εμείς έχουμε υποθέσει $Y= A_1$, δηλαδή ότι το πεδίο ορισμού του δημόσιου σήματος είναι ίδιο με το σύνολο ενεργειών του παίκτη 1, για να δημιουργήσουμε τις συνθήκες τέλειας πληροφόρησης και παρακολούθησης.

Έστω, ότι διαμορφώνεται τύπος δέσμευσης $\xi \in \Xi$, σύμφωνα με τον οποίο ο παίκτης 1 επιλέγει συνέχεια την υψηλή προσπάθεια. Είναι αναμενόμενο, ότι αν η δέσμευση αυτή προκύπτει από συνεχή επιλογή αυτής της ενέργειας, ο παίκτης 2 οφείλει να αυξήσει τη πιθανότητα υιοθέτησης της ενέργειας αυτής. Βέβαια, θα χρειαστεί αρκετό διάστημα επανάληψης προκειμένου αυτός ο τύπος δέσμευσης να αποτελέσει φήμη για τον παίκτη 2. Η ισορροπία κατά Nash, θα προκύπτει πάλι με στόχο έναν αμοιβαία ωφέλιμο συνδυασμό. Δηλαδή, συνδυασμός στρατηγικών της μορφής (σ_1, σ_2) θα αποτελεί ισορροπία αν για οποιοδήποτε τύπο δέσμευσης ξ_1 με τη σ_1, επιτυγχάνεται η μέγιστη απόδοση του παίκτη 1 μέσω της επανάληψης του παιγνίου και αν σε οποιαδήποτε ιστορία του παίκτη 2 επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή απόδοση.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση της περίπτωσης αυτής οφείλουμε να αναφερθούμε και στις συμπεριφορικές στρατηγικές του κάθε παίκτη. Γενικότερα, σε προηγούμενη θεωρία είχαμε ορίσει την στρατηγική ως εξής:

$$\sigma_i|h_t: \mathcal{H} \rightarrow \Delta(S_i)$$

Επομένως, οι στρατηγικές των παικτών 1 και 2 αντίστοιχα, σε πεπερασμένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο δίνονται από τα μεγέθη:

$$\sigma_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \Delta(S_1)$$

$$\sigma_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow \Delta(S_2)$$

2.4.3 Φήμη σε συνθήκες Ατελούς Πληροφόρησης.

Η ανάλυση τώρα θα επικεντρωθεί στο πως ενσωματώνεται η φήμη στα παίγνια μη τέλειας πληροφόρησης. Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο παράδειγμα, όπου ουσιαστικά τίθεται το ζήτημα της επιλογής προϊόντος. Τονίζουμε, ότι ο παίκτης 1, δηλαδή η επιχείρηση, έχει μακρά διάρκεια ζωής ενώ αντίστοιχα ο παίκτης 2, δηλαδή ο εκάστοτε καταναλωτής, έχει μικρή διάρκεια ζωής. Ενώ στην περίπτωση της τέλειας παρακολούθησης εισαγάγαμε την έννοια του σήματος ως ένα δημόσιο παράγοντα και φερέγγυο , τώρα το σήμα θα αποτελεί ιδιωτική πληροφόρηση.

Πιο αναλυτικά, θα υποθέσουμε ότι ο παίκτης 2 δεν έχει πληροφόρηση αναφορικά με τον τύπο του παίκτη 1. Θα ορίσουμε ως πιθανό τύπο του παίκτη 1 το $\xi \in \Xi$, όπου Ξ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο τύπων. Μάλιστα, ο παίκτης 2 θεωρεί ότι ο τύπος του παίκτη 1 θα ανήκει στο Ξ με βάση μία κατανομή πιθανοτήτων, την οποία συμβολίζουμε ως μ. Σαν ξ_0 θεωρούμε τον κανονικό τύπο του παίκτη 1 και τυπικά ότι η πιθανότητα εμφάνισης του , δηλαδή το $\mu(\xi_0)$ θα είναι μεγαλύτερη συγκριτικά με τις υπόλοιπες πιθανότητες. Επί της ουσίας αυτό συμβαίνει διότι υποθέτουμε ότι είναι πιο σπάνιες οι αποκλίσεις.

Και σε αυτή τη περίπτωση, αναφορικά με την ύπαρξη ισορροπίας κατά Nash, ένας συνδυασμός στρατηγικών της μορφής (σ_1, σ_2) θα αποτελεί ισορροπία αν για οποιοδήποτε τύπο δέσμευσης ξ_1 με τη σ_1, επιτυγχάνεται η μέγιστη απόδοση του παίκτη 1 μέσω της επανάληψης του παιγνίου και αν σε οποιαδήποτε ιστορία του παίκτη 2 επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή απόδοση.

Το σύνολο των ιστοριών στο παίγνιο της τέλειας πληροφόρησης $\mathcal{H}$ αποτελεί το σύνολο των δημοσίων ιστοριών του παιγνίου με μη τέλεια πληροφόρηση. Ουσιαστικά, μία ιστορία για τον παίκτη 1 στον παίγνιο μη τέλειας πληροφόρησης είναι ένα συστατικό του χώρου $\Xi \times \mathcal{H}$, όπου καθορίζει τον τύπο του παίκτη 1 όπως ακριβώς γίνεται και στην περίπτωση της δημόσιας ιστορίας. Βέβαια, το μέγεθος $\mathcal{H}$ αποτελεί και το σύνολο ιστοριών του παίκτη 2 στο παίγνιο μη τέλειας πληροφόρησης. Οπότε, αντίστοιχα οι δύο παίκτες θα μπορούσαν να διαθέτουν τις επόμενες στρατηγικές:

$$\sigma_1 : \mathcal{H} \quad \times\ \Xi \rightarrow\ \Delta(S_1)$$

$$\sigma_2 : \mathcal{H} \quad \rightarrow\ \Delta(S_2)$$

3. Επισκόπηση Θεωρητικών Υποδειγμάτων Επικαλυπτόμενων Γενεών.

3.1 Ανάλυση Επαναλαμβανόμενου Παιγνίου με Επικαλυπτόμενες Γενεές Παικτών.

Εφόσον αναλύσαμε τις βασικές έννοιες αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια , μπορούμε να εντρυφήσουμε σε μία ειδική κατηγορία παιγνίων , η ανάλυση της οποίας αποτελεί και τον κύριο στόχο της εν λόγω εργασίας. Η κατηγορία αυτή ουσιαστικά αφορά τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτών των επαναλαμβανόμενων παιγνίων γίνεται ξεκάθαρο από την ονομασία τους. Δηλαδή, τα παίγνια διεξάγονται ανάμεσα σε παίκτες , ή καλύτερα σε αλληλουχίες παικτών όπου αν έχουν πεπερασμένη διάρκεια ζωής , τους αντικαθιστούν οι απόγονοι τους. Έτσι, τα παίγνια αυτά μπορούν να συνεχίσουν να εκτελούνται επ' άπειρον , αρκεί ο κάθε αρχικός παίκτης να διαθέτει απογόνους ή έστω κάποιον αντικαταστάτη.

Προκειμένου να αναλύσουμε τόσο τη δομή όσο και τη χρησιμότητα των παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών θα βασιστούμε , για αρχή, στην ανάλυση της έρευνας και στα υποδείγματα του Kandori(1992). Στην έρευνα του, προσπαθεί να εξηγήσει την συμπεριφορά συνεργασίας σε έναν οργανισμό που τα μέλη του ζουν πολλά χρόνια, όμως στο πλαίσιο της πεπερασμένης διάρκειας ζωής. Βασικό κίνητρο το οποίο τονίζει είναι το γεγονός ότι η φύση των οικονομικών συναλλαγών προτείνει ότι σχέσεις συνεργασίας ευδοκιμούν , όταν ανάμεσα στους παίκτες της αγοράς υφίσταται κάποια μακροπρόθεσμη σχέση , η οποία τους δεσμεύει.

Για παράδειγμα, στα παίγνια που έχουμε εξετάσει και στις προηγούμενες ενότητες , οι παίκτες μπορεί να είχαν κίνητρο να αποκλίνουν μονομερώς και βραχυπρόθεσμα για μεγαλύτερη απόδοση. Όμως, εάν το παίγνιο συνεχιζόταν φοβούνταν ότι θα τιμωρηθούν στις επόμενες πραγματοποιήσεις του παιγνίου, άρα παρέμεναν συνεπείς.

3.1.1 Δομικά Στοιχεία Παιγνίου Σταδίου.

Η ανάλυση θα ξεκινήσει, όπως σε όλα τα επαναλαμβανόμενα παίγνια γενικότερα, με την επεξήγηση του παιγνίου σταδίου. Υπενθυμίζουμε, ότι το παίγνιο σταδίου είναι στατικό και επαναλαμβάνεται ανάλογα με τις επιθυμίες των παικτών , είτε πεπερασμένες φορές είτε άπειρες. Έστω ότι εξετάζουμε ένα παίγνιο το οποίο αποτελείται από N-παίκτες . Βασικό χαρακτηριστικό για κάθε παίκτη είναι η απόδοση που θα αποκομίσει με βάση τον συνδυασμό ενεργειών με τους υπόλοιπους παίκτες. Η απόδοση, λοιπόν, του σταδίου παιγνίου διατυπώνεται ως εξής :

$$\mathrm{g} : \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_\mathrm{N} \rightarrow \mathbb{R}^\mathrm{N}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ως A_i όπου i ο εκάστοτε παίκτης του παιγνίου , ορίζεται το σύνολο των αμιγών ενεργειών του εκάστοτε παίκτη αντίστοιχα. Όπως είναι εμφανές, η απόδοση εξαρτάται από το σύνολο ενεργειών των παικτών, οι οποίες λαμβάνονται την ίδια στιγμή και σαν τιμή ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών υψωμένο στον αριθμό των παικτών. Αυτό συμβαίνει διότι το σύνολο των παικτών είναι διανύσματα N-διαστάσεων. Στην περίπτωση, τώρα , του εκάστοτε παίκτη, αν ορίσουμε σαν προφίλ ενεργειών του το

$$\mathrm{a} \in \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times \mathrm{A}_\mathrm{N}$$

τότε η απόδοση του παίκτη i θα είναι μία εξίσωση της μορφής $g_i(a)$.

Στην ενότητα των επαναλαμβανόμενων παιγνίων είχαμε τονίσει , στα παίγνια πλήρους πληροφόρησης υποθέσεις αναφορικά με τις ενέργειες και τις αποδόσεις των παικτών (Mailath & Samuelson, 2006) . Ομοίως και στην ανάλυση του Kandori(1992) γίνεται η υπόθεση περί συμπαγούς συνόλου ενεργειών και η υπόθεση της συνεχούς συνάρτησης αποδόσεων. Ουσιαστικά , τα σύνολα ενεργειών των παικτών του παιγνίου θα είναι κλειστά και φραγμένα. Οι παραπάνω υποθέσεις όμως ικανοποιούνται σε κάποιες περιπτώσεις. Ενδεικτικά, πληρούνται όπου το σύνολο ενεργειών A είναι πεπερασμένο.

Στην περίπτωση των επαναλαμβανόμενων παιγνίων που θα εξετάσουμε περαιτέρω , χρησιμοποιείται μία επιπλέον υπόθεση. Πιο αναλυτικά, εισάγεται μια δημόσια τυχαία παράμετρος ,σαν μηχανισμός τυχαιότητας , η οποία συμβολίζεται ως ω με αντίστοιχο πεδίο ορισμού [0,1] . Ουσιαστικά, οι παίκτες θα παρατηρούν το ω προτού επιλέξουν την εκάστοτε ενέργεια τους. Με βάση την τιμή του ω διαμορφώνουν αντίστοιχα την ενέργεια τους, καθώς κάθε δημόσια πληροφορία, έστω και τυχαία, επιδρά στον τρόπο επιλογής του κάθε παίκτη.

Για καλύτερη κατανόηση , το σύνολο ενεργειών , το οποίο λαμβάνει υπόψιν του τη μεταβλητή ω αντί για A_i θα συμβολίζεται ως S_i . Δηλαδή, οι παίκτες παρατηρούν το ω , προσαρμόζουν τη συμπεριφορά τους, επιλέγουν την εκάστοτε ενέργεια A_i και έτσι διαμορφώνουν τη στρατηγική τους ως S_i. Γίνεται αντιληπτό, ότι μέσω της εισαγωγής της στρατηγικής του εκάστοτε παίκτη πρέπει να διαμορφωθεί αντίστοιχα και η εξίσωση αποδόσεων του παιγνίου. Πλέον, ο Kandori(1992) επεκτείνει την εξίσωση αποδόσεων στις στρατηγικές, δηλαδή αντί για τα προφίλ ενεργειών εισάγει τη συνολική στρατηγική με $S \equiv S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N$ με την απόδοση να ορίζεται:

$$\mathrm{g}(\mathrm{s}) = \int_0^1 \mathrm{g}(\mathrm{s}(\omega))\, \mathrm{d}\omega \qquad (3.1)$$

Ουσιαστικά το παραπάνω ολοκλήρωμα απεικονίζει την μέση απόδοση του παιγνίου. Ακολουθεί τη νοοτροπία , την οποία διατυπώσαμε πριν, ότι δηλαδή με βάση τη στρατηγική που προκύπτει από τον μηχανισμό τυχαιότητας που επιδρά στη συμπεριφορά του παίκτη, υπολογίζεται η απόδοση σαν μία μέση απόδοση. Η μεταβλητή του ολοκληρώματος είναι η μεταβλητή ω , για αυτό και τα άκρα του ολοκληρώματος κυμαίνονται από μηδέν μέχρι ένα.

Στο παίγνιο σταδίου , στα επαναλαμβανόμενα παίγνια, είναι σημαντική η λύση minimax ή αλλιώς η ατομικά ορθολογική απόδοση. Όπως είχε αναλυθεί και σε προηγούμενη ενότητα, ουσιαστικά αναφέρεται στο επίπεδο απόδοσης που μπορεί να εξασφαλίσει ο παίκτης , όταν οι υπόλοιποι παίκτες λειτουργούν μη επιθυμητά για εκείνον. Δηλαδή, ο παίκτης προσπαθεί να εξασφαλίσει ένα επίπεδο απόδοσης για τον ίδιο σε συνθήκες, όμως, τιμωρίας από τους υπόλοιπους παίκτες. Γίνεται η επιλογή ενός $m^i = (m^i_{-i}, m^i_i)$ με βάση τα εξής επιχειρήματα:

$$\mathrm{m}^{\mathrm{i}}_{-\mathrm{i}} \in \arg \min_{\mathrm{a}_{-\mathrm{i}} \in \mathrm{A}_{-\mathrm{i}}} \max_{\mathrm{a}_{\mathrm{i}} \in \mathrm{A}_{\mathrm{i}}} \mathrm{g}_{\mathrm{i}}(\mathrm{a})) \quad (3.2)$$

$$\mathrm{m}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{i}} \in \arg \max_{\mathrm{a}_{\mathrm{i}} \in \mathrm{A}_{\mathrm{i}}} \mathrm{g}_{\mathrm{i}}(\mathrm{m}^{\mathrm{i}}_{-\mathrm{i}}, \mathrm{a}_{\mathrm{i}}) \quad (3.3)$$

Ως m^i_i ορίζουμε την ενέργεια του παίκτη i , όταν τιμωρείται ο i, ενώ αντίστοιχα η ενέργεια του εκάστοτε αντιπάλου ορίζεται ως m^i_{-i}. Θα αναλύσουμε , τώρα , τις παραπάνω σχέσεις. Ουσιαστικά στην πρώτη σχέση που αφορά τη συμπεριφορά των αντιπάλων του παίκτη i αναφέρεται ότι οι παίκτες προσπαθούν να εμποδίσουν την μεγιστοποίηση της μέσης απόδοσης του παίκτη i. Αυτό φαίνεται καθώς με βάση τις ενέργειες τους οι αντίπαλοι εμποδίζουν τον στόχο του παίκτη i ,δηλαδή τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης μέσης απόδοσης με βάση την εκάστοτε ενέργεια του. Τέλος, στη δεύτερη σχέση φαίνεται καθαρά ο στόχος που αναφέραμε για τον παίκτη i , δηλαδή η μεγιστοποίηση της μέσης απόδοσης του βάσει της ενέργειας του αντιπάλου του.

Συνεπώς, ορίζουμε ως ατομικά ορθολογική απόδοση το $g_i(m_i)$ για τον παίκτη i και κανονικοποιούμε τις αποδόσεις θέτοντας τες ως μηδενικές για όλους τους παίκτες που αποκλίνουν. Δηλαδή, όταν οι υπόλοιποι κάνουν minimax τον αποκλίνοντα , εκείνος δεν θα κερδίσει τίποτα. Οπότε, το σύνολο των εφικτών αποδόσεων, το οποίο στην ενότητα των επαναλαμβανόμενων παιγνίων είχαμε ορίσει ως κυρτό σύνολο των αποδόσεων, πλέον είναι το εξής:

$$V = \{\, u \in g(S) \mid 0 << u \} \quad (3.4)$$

Το σύνολο των εφικτών αποδόσεων, όπως εκφράζεται στην προηγούμενη σχέση δηλώνει ότι εφικτή απόδοση είναι οποιαδήποτε ανήκει στη μέση απόδοση , όπως την ορίσαμε.

Όσον αφορά την απόδοση ως έννοια γενικότερα πρέπει να εκφράσουμε τη μέγιστη απόδοση που θα μπορούσε να αποκομίσει ο παίκτης i από τη συμμετοχή του στο παίγνιο. Βάσει των εννοιών και των σχέσεων που διατυπώσαμε προκειμένου να καταλήξουμε στην ποσοτικοποίηση της απόδοσης, η μέγιστη απόδοση θα μπορούσε να εκφραστεί ως η ατομική ορθολογική απόδοση όπου προσφέρει την μεγαλύτερη τιμή απόδοσης για δεδομένη επιλογή ενέργειας του παίκτη i , από το σύνολο ενεργειών του που το ορίσαμε A_i . Μαθηματικά, τώρα , θα μπορούσε να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathrm{u_i^*} = \max_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}} \mathrm{g_i(a)} \quad (3.5)$$

Δηλαδή, το u_i^* απεικονίζει τη μέγιστη απόδοση που επιτυγχάνεται για τον παίκτη i μέσω της επιλογής του ενέργειας του σε συνδυασμό με τις επιλογές και των αντιπάλων του, που επιδρούν στο προφίλ ενεργειών. Αντίστοιχα , μπορεί να εκφραστεί και το εύρος της απόδοσης του παίκτη i , δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στη μικρότερη και μεγαλύτερη δυνατή εφικτή απόδοση. Ως μέγιστη απόδοση χαρακτηρίσαμε το u_i^* , δηλαδή τη μεγιστοποίηση της ατομικά ορθολογικής απόδοσης. Συνεπώς, ως ελάχιστη απόδοση θα χαρακτηρίσουμε την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης ορθολογικής απόδοσης. Επομένως, εκφράζεται ως :

$$\Delta \mathrm{u_i^*} = \max_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}} \mathrm{g_i(a)} - \min_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}} \mathrm{g_i(a)} \quad (3.6)$$

Σε κάθε παίγνιο, υφίσταται ο φόβος της μονομερούς απόκλισης ενός παίκτη, αν αποκομίζει μεγαλύτερη απόδοση με αυτόν τον τρόπο από ότι αν συνεργαζόταν ή ακολουθούσε κάποια υπογεγραμμένη συμφωνία, όπως στα παίγνια επικοινωνίας. Γενικότερα, όπως θα αναλύσουμε και σε επόμενη ενότητα , προκειμένου να αποφευχθούν οι αποκλίσεις μπορούν να δοθούν κάποια κίνητρα, όπως τα μπόνους . Όμως, θα πρέπει να υπάρχει μια εικόνα αναφορικά με το μέγεθος της απόδοσης σε περίπτωση απόκλισης του παίκτη i . Η μέγιστη απόδοση , λοιπόν , από την απόκλιση δίνεται από :

$$\mathrm{d_i} = \max_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}, \alpha \in \mathrm{A_i}} (\mathrm{g_i(a_{-i}}, \alpha) - \mathrm{g_i(a)}) \quad (3.7)$$

Πιο αναλυτικά, η μέγιστη απόδοση της απόκλισης υπολογίζεται ως η μεγιστοποίηση της διαφοράς απόδοσης σε περίπτωση απόκλισης μείον την απόδοση που θα αποκόμιζε ο παίκτης σε περίπτωση συνεργασίας. Με τον όρο $g_i(a_{-i}, \alpha)$ ουσιαστικά εκφράζεται η απόδοση που αποκομίζει ο παίκτης όταν αποκλίνει και δεν επιλέγει το προφίλ ενεργειών που έχει συμφωνηθεί.

Η ανάλυση αναφορικά με το παίγνιο σταδίου θα ολοκληρωθεί με την επεξήγηση της απόδοσης σε περίπτωση “minimaxing”. Με τον όρο “minimaxing” αναφερόμαστε στη περίπτωση όπου όλοι οι αντίπαλοι σε κάποιο παίγνιο προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν την απόδοση του παίκτη i . Ουσιαστικά , αυτή η μέθοδος συνήθως λαμβάνει χώρα σε παίγνια στα οποία ο παίκτης αποκλίνει, και αν δεν μπορούν οι αντίπαλοι του να τον τιμωρήσουν εκείνη την περίοδο, στις επόμενες περιόδους προσαρμόζουν τις αποφάσεις τους εναντίον του. Μία αντίστοιχη περίπτωση θα αναλύσουμε και στη συνέχεια της εργασίας.

Το προφίλ, οπότε, της απόδοσης στη περίπτωση της “τιμωρίας” του παίκτη i θα είναι της μορφής :

$$\mathrm{z^i = g(m^i)} \quad (3.8)$$

3.1.2 Απείρως Επαναλαμβανόμενα Παίγνια.

Η έννοια των επικαλυπτόμενων γενεών θα μπορούσε να αναλυθεί, σύμφωνα με τον Kandori (1992) μέσω της χρήσης ενός παραδείγματος απείρως επαναλαμβανόμενου παιγνίου. Ενδεικτικά, θα υποθέσουμε ότι οι παίκτες έχουν πεπερασμένη διάρκεια ζωής, δηλαδή κάποια στιγμή θα πάψουν να υπάρχουν αλλά το παίγνιο θα πρέπει να συνεχίσει να υφίσταται. Δηλαδή, το παίγνιο σταδίου που περιγράψαμε θα πρέπει να συνεχίσει να επαναλαμβάνεται.

Οι παίκτες θα χαρακτηρίζονται ως $\{\, 1(t)\, , 2(t)\, , .. , N(t)\, \}$ με $t = 0{,}1, \dots$. Ως $i(t)$ χαρακτηρίζεται ο εκάστοτε τύπος του παίκτη i ενώ το t θα συμβολίζει τη γενιά στην οποία ανήκει ο παίκτης. Γενικότερα, θα γίνει η υπόθεση ότι η διάρκεια ζωής όλων των παικτών είναι ίδια και ανέρχεται σε T. Στα παίγνια τα οποία έχουμε αναλύσει μέχρι στιγμής, είχε γίνει λόγος για τον συντελεστή προεξόφλησης των αποδόσεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, δεν θα λάβουμε υπόψιν κάποιο συντελεστή προεξόφλησης , καθώς λόγω της πεπερασμένης διάρκειας ζωής των παικτών, τα αποτελέσματα καλύπτουν και μπορούν να επεκταθούν για έναν συντελεστή προεξόφλησης κοντά στη μονάδα.

Οι επικαλυπτόμενες γενεές θα συμβολίζονται μέσω του δείκτη $K = (K_2\, , K_3\, , \dots , K_N)$. Για να γίνει αντιληπτή η έννοια των επικαλυπτόμενων γενεών και η σχέση που υπάρχει ανάμεσα τους εκφράζουμε ότι ο παίκτης $i(t)$ είναι νεότερος από τον παίκτη $(i-1)t$ κατά K_i περιόδους , με τον παίκτη i να παίρνει τις τιμές $i = 2, .. , \dots$. Για παράδειγμα, ο παίκτης $2(t)$ θα είναι νεότερος από τον $1(t)$ κατά K_2 , ο παίκτης $3(t)$ θα είναι νεότερος από τον $2(t)$ κατά K_3 και ούτω καθεξής**.** Για ευκολία, ως περίοδο επικάλυψης χαρακτηρίζουμε τη κοινή περίοδο ανάμεσα σε διαφορετικούς παίκτες i αλλά της ίδιας γενιάς t.

Γενικότερα, όταν αναφερόμαστε σε αυτού του είδους τα δυναμικά παίγνια , ο όρος στα αγγλικά είναι OLG game και παρουσιάζεται με το σύνολο στοιχείων (g, T , K), δηλαδή το παίγνιο σταδίου , τη διάρκεια ζωής και τον δείκτη επικάλυψης K. Όσον αφορά τις αποδόσεις των παικτών, επειδή υπάρχουν και οι μελλοντικές γενιές θα υποθέσουμε ότι ο κάθε παίκτης ενδιαφέρεται μόνο για τη μεγιστοποίηση της δικής του απόδοσης και όχι για τον πλούτο των επόμενων γενεών.

Σε περίπτωση που οι αποδόσεις του παιγνίου σταδίου είναι μία συνεχής αλληλουχία της μορφής $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_T)$ τότε η μέση απόδοση ενός παίκτη θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{T}\sum_{\kappa=1}^{T}\pi_\kappa$$

δηλαδή θα είναι ένας σταθμισμένος μέσος.

Εύλογο κρίνεται να ορίσουμε και την έννοια της στάσιμης ισορροπίας.

Ορισμός 3.1 Γενικότερα, ως στάσιμη στρατηγική σε ένα παίγνιο ορίζουμε τη στρατηγική εκείνη, η οποία είναι ιστορία αλλά είναι χρονικά ανεξάρτητη στο παίγνιο.

Δηλαδή, εξαρτάται καθαρά και μόνο από την κατάσταση που επικρατεί στο παίγνιο. Αναφορικά με την στάσιμη ισορροπία, θα την χρησιμοποιούμε σε περιπτώσεις όπου η ισορροπία κατά Nash θα προκύπτει από επιλογές στάσιμων προφίλ στρατηγικών. Στην προκειμένη , βάσει του Kandori(1992) , θα αναφέρουμε ως στάσιμη την ισορροπία όπου οι παίκτες του ίδιου τύπου, δηλαδή οι $\{i(t), t = 0,1,..\}$ επιλέγουν την ίδια αλληλουχία ενεργειών.

Αν και στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια είναι πιο εύκολο να χειραγωγηθούν οι συμπεριφορές των παικτών, λόγω και της μεγάλης διάρκειας, υφίσταται και στα πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια η ευκαιρία αυτή. Η ευκαιρία αυτή θα μπορούσε να προκύψει σε ένα παίγνιο πεπερασμένης διάρκειας αν για παράδειγμα οι παίκτες ανταμείβουν τον μεγαλύτερης ηλικίας παίκτη λίγο πριν την συνταξιοδότηση του. Η ανταμοιβή αυτή, θα εξαρτάται απόλυτα από την παρελθοντική συμπεριφορά του στο παίγνιο. Μάλιστα, η συμπεριφορά του μπορεί αντί για ανταμοιβή να οδηγήσει σε τιμωρία του.

Προκειμένου, όμως , να υπάρχει το απαιτούμενο χρονικό διάστημα έτσι ώστε οι παίκτες να προλάβουν είτε να ανταμείψουν είτε να τιμωρήσουν τον εκάστοτε παίκτη, θα πρέπει να υπάρχει αρκετό διαθέσιμο χρονικό διάστημα. Το χρονικό διάστημα, δεν απευθύνεται μόνο στη διάρκεια ζωής των παικτών αλλά και στη διάρκεια των επικαλυπτόμενων περιόδων. Ουσιαστικά, η διάρκεια των επικαλυπτόμενων περιόδων πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη, έτσι ώστε να διαμορφωθεί αρκετό ποσό επιβράβευσης, δηλαδή μπόνους για τον κάθε παίκτη.

Η λογική την οποία αναλύσαμε προηγουμένως οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε τέτοιου είδους επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών, κάθε απόδοση που κυριαρχεί κατά Pareto της minimax λύσης, μπορεί να επιτευχθεί σαν υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία. Σαν minimax απόδοση έχουμε ορίσει το ποσό εκείνο που μπορεί να επιτύχει ο παίκτης όταν όλοι οι υπόλοιποι δρουν εναντίον του. Στα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών θα ορίσουμε ότι το σύνολο των μέσων αποδόσεων μίας υποπαιγνιακάς τέλειας στάσιμης ισορροπίας δίνεται από το σύνολο:

$$V(g, T, K) \subset \mathbb{R}^N$$

Ωστόσο, προκειμένου να ισχύει η έκφραση ότι οποιαδήποτε απόδοση κατά Pareto βέλτιστη από την αντίστοιχη minimax απόδοση μπορεί να επιτευχθεί σαν υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία , θα πρέπει να ισχύουν υποθέσεις τις οποίες συμπεριλάβαμε στη λογική που αναλύσαμε. Ειδικότερα , οι απαιτήσεις είναι οι εξής:

Θεώρημα 3.1 Αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών προκειμένου η κάθε κατά Pareto βέλτιστη λύση της minimax λύσης να επιτυγχάνεται ως υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία, θα πρέπει να ισχύει:

1. Οι παίκτες θα πρέπει να είναι υπομονετικοί.
2. Οι επικαλυπτόμενες περίοδοι θα πρέπει να έχουν αρκετή διάρκεια.
3. Η διάρκεια ζωής των παικτών θα πρέπει να είναι αρκετή συγκριτικά με τις επικαλυπτόμενες περιόδους.

3.1.3 Εθιμικό Θεώρημα.

Χάρη στις προηγούμενες υποθέσεις που διατυπώθηκαν, μπορούμε να αναλύσουμε το εθιμικό θεώρημα στα παίγνια αυτά. Στο παράδειγμα που αναλύεται, με στόχο την κατανόηση των επικαλυπτόμενων γενεών δεν απαιτείται μία σημαντική υπόθεση που χρησιμοποιούν οι Fudenberg και Maskin(1986) αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια με προεξόφληση των αποδόσεων τους.

Πιο αναλυτικά, αναφερόμαστε στην υπόθεση της πλήρους διάστασης ή στην αγγλική ορολογία “full dimensionality” αναφορικά με το σύνολο αποδόσεων V. Η ύπαρξη της υπόθεσης ήταν σημαντική καθώς μπορούσε να συμβάλει στην τιμωρία του παίκτη που αποκλίνει. Στην περίπτωση των απείρως επαναλαμβανόμενων παιγνίων είναι απαραίτητη καθώς δίνει τα κατάλληλα κίνητρα στους παίκτες που τιμωρούν έτσι ώστε να συνεχίσουν την διαδικασία και μάλιστα να επωφεληθούν από αυτή τη συμπεριφορά τους.

Το σημαντικότερο όμως στοιχείο, έτσι ώστε να μείνουν ικανοποιημένοι οι παίκτες είναι το να καταφέρουν να επωφεληθούν οι ίδιοι για τη συμπεριφορά τους, αλλά να μην συμπεριληφθεί στο όφελος αυτό ο παίκτης, ο οποίος αποκλίνει. Επομένως, η υπόθεση της πλήρους διάστασης εξασφαλίζει ότι η διαδικασία θα είναι επιτυχημένη και η τιμωρία θα είναι αποτελεσματική, αποκλείοντας τον παίκτη που αποκλίνει από την επιβράβευση.

Όσον αφορά ,όμως, τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών , αυτή η υπόθεση δεν θα χρησιμοποιηθεί. Ο λόγος της κίνησης αυτής του Kandori(1992), είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει η περίπτωση επιβράβευσης του παίκτη που αποκλίνει μαζί με τους παίκτες οι οποίοι αξίζουν όντως την επιβράβευση. Για να γίνει κατανοητό θα αναλύσουμε ένα σύντομο παράδειγμα με βάση το είδος παιγνίου που ορίσαμε προηγουμένως.

Έστω ότι έχουμε επιλέξει ένα παίγνιο με παίκτες της γενιάς t με τους τύπους i=1,2,3 αντίστοιχα. Δηλαδή , αντιμετωπίζουμε ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο με τους παίκτες 1(t) , 2(t) και 3(t). Θα υποθέσουμε, ότι ο παίκτης 2(t) είναι ο εκείνος ο οποίος αποκλίνει και πρέπει να τιμωρηθεί. Αντίστοιχα, αυτοί που πρέπει να λάβουν την επιβράβευση είναι με τη σειρά τους οι παίκτες 1(t) και 3(t). Για να πετύχουμε την μη επιβράβευση του παίκτη 2(t) θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε τη λογική αποδόσεων στο τέλος της ζωής τους.

Ενδεικτικά, με την υιοθέτηση της παροχής της επιβράβευσης λίγο πριν την περίοδο συνταξιοδότησης των παικτών , θα επιτυγχάναμε την επιθυμητή διαδικασία. Ουσιαστικά, θα επιβραβευόταν ο παίκτης 1(t) λίγο πριν την συνταξιοδότηση του , έπειτα ο παίκτης 2(t) θα τιμωρούταν λόγω της απόκλισης του και αφού συνταξιοδοτηθεί ο παίκτης αυτός, θα επιβραβευόταν ο παίκτης 3(t) . Συνεπώς, στα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών προσαρμόζονται οι εκάστοτε αποδόσεις όταν συνταξιοδοτείται η εκάστοτε γενιά. Το εθιμικό θεώρημα στα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3.2 Για κάθε u ϵ V και ε > 0 υπάρχει ένα $\underline{K}$ ώστε για όλα τα $K \geq \underline{K}$,

$$\exists\ \underline{T}\ \forall\ T > \underline{T}\ \exists\ x \in V(g, T, K) \text{ τέτοιο ώστε } ||x - u|| < \varepsilon$$

Το συμπέρασμα , το οποίο συνάγεται είναι το γεγονός ότι το εθιμικό θεώρημα στα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών εξαρτάται κατά πολύ από τις σχέσεις δέσμευσης.

Ορισμός 3.2 Ως δέσμευση, ορίζουμε το ενδεχόμενο ποσό επιβράβευσης χάρη στην καλή συμπεριφορά του επενδυτή χωρίς απόκλιση.

Εφόσον ο παίκτης γνωρίζει ότι αν είναι συνεπής , θα επιβραβευθεί , έχει ένα επιπλέον κίνητρο έτσι ώστε να λειτουργεί σωστά και φαίνεται ότι η δέσμευση αυτή κανονικοποιεί την συμπεριφορά των παικτών για αρκετές περιόδους.

Πρέπει να αναφερθεί το γεγονός ότι για να έχει επίδραση η λογική των αποδόσεων στην συνταξιοδότηση των παικτών, θα πρέπει οι παίκτες να δίνουν αρκετή βαρύτητα στις αποδόσεις τους στο μέλλον. Μάλιστα, οι παίκτες ήδη από όταν είναι νέοι θα πρέπει να δίνουν αρκετή βαρύτητα σε αυτήν την απόδοση αλλιώς δεν θα έχουν κίνητρο να είναι συνεπείς μέχρι τη συνταξιοδότηση τους. Ολοκληρώνοντας, όσο πιο υπομονετικοί οι παίκτες τόσο πιο κοντά στη μονάδα έτεινε ο συντελεστής προεξόφλησης δ. Πλέον, όσο μεγαλύτερη η διάρκεια ζωής των παικτών τόσο μεγαλύτερος και ο συντελεστής προεξόφλησης .

3.1.4 Επέκταση σε Πεπερασμένα Επαναλαμβανόμενα Παίγνια.

3.1.4.1 Δομή και Βασικές Έννοιες αναφορικά με το Παίγνιο Σταδίου.

Η ανάλυση θα επεκταθεί στη περίπτωση ενός παιγνίου, το οποίο όμως επαναλαμβάνεται για πεπερασμένες φορές. Τώρα, το ίδιο πλήθος παικτών αλληλοεπιδρούν για τις πεπερασμένες περιόδους και λαμβάνουν ένα επιπρόσθετο χρηματικό μπόνους κατά την συνταξιοδότηση. Θα διατυπωθεί εκ νέου το παίγνιο σταδίου , καθώς πλέον το παίγνιο σταδίου g, όπως το είχαμε συμβολίσει και προηγουμένως, θα επαναλαμβάνεται για T φορές αλλά λίγο πριν την επανάληψη T θα δέχονται μία έξτρα απόδοση, το μπόνους. Ειδικότερα, θα ορίσουμε ως επιπρόσθετη απόδοση :

$$w \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^N$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν λαμβάνει χώρα προεξόφληση των αποδόσεων για ευκολία.

Το βασικό χαρακτηριστικό των παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών που θα μελετήσουμε στη συγκεκριμένη ενότητα είναι το είδος της δέσμευσης που αναπτύσσεται ανάμεσα στους παίκτες. Η επιπρόσθετη απόδοση, την οποία ορίσαμε ως w θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί ως δέσμευση από πλευράς των παικτών. Γενικά, έχουμε αναφερθεί στην ιδέα της δημιουργίας δέσμευσης ανάμεσα στους παίκτες και στο κατά πόσο συμβάλλει στην εύρυθμη λειτουργία του παιγνίου.

Επομένως, θα χρησιμοποιηθεί η υπόθεση ότι διατυπώνεται μία συμφωνία στο τέλος όμως του παιγνίου, δηλαδή στην τελευταία επανάληψη του παιγνίου σταδίου. Η συμφωνία αυτή, ή καλύτερα το συμβόλαιο το οποίο θα συναφθεί ανάμεσα στους παίκτες θα εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο θα διαμορφωθεί αυτή η δέσμευση και το εκάστοτε ποσό που θα λαμβάνει ο παίκτης.

Αξιοσημείωτο κρίνεται το γεγονός ότι παρότι η δέσμευση αυτή θα διαμορφωθεί στην τελευταία επανάληψη του παιγνίου επιδρά καθαρά και στις προηγούμενες επαναλήψεις του παιγνίου σταδίου. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι στη διαμόρφωση του ποσού επιπρόσθετης απόδοσης επιδρά καθαρά και ο τρόπος συμπεριφοράς του εκάστοτε παίκτη σε όλη τη διάρκεια του παιγνίου.

Η διατύπωση του πεπερασμένου παιγνίου με δεσμεύσεις θα αποτελείται από T επαναλήψεις του παιγνίου σταδίου, από ένα εύρος $\mathcal{W}$ αποδόσεων και θα εκφράζεται ως G (g, T , $\mathcal{W}$) , όπου g το παίγνιο σταδίου. Το παράδειγμα θα αντιμετωπιστεί όπως και κάθε περίπτωση παιγνίου που έχουμε παρουσιάσει. Αρχικά , θα πρέπει να αναλυθούν έννοιες οι οποίες κρίνονται σημαντικές προκειμένου να καταλήξουμε στην ισορροπία κατά Nash.

Στην ενότητα όπου έλαβε χώρα η επεξήγηση αναφορικά με τη δομή και τη λειτουργία του εκάστοτε παιγνίου σταδίου αναφερθήκαμε στην επέκταση της εξίσωσης αποδόσεων λόγω την εισαγωγής της έννοιας της στρατηγικής. Κάθε προφίλ στρατηγικών το ορίσαμε ως S_i με i=1,2,..,N δηλαδή για κάθε παίκτη. Να υπενθυμίσουμε ότι η στρατηγική εισάγει τη μεταβλητή που είναι δημόσια παρατηρήσιμη και επιδρά στη συμπεριφορά των παικτών.

Αρχικά θα αναλυθεί η έννοια του συνόλου μονοπατιών των παιγνίων της μορφής G (g, T , $\mathcal{W}$) .

Ορισμός 3.3 Με τον όρο μονοπάτι αναφερόμαστε στη σειρά των στρατηγικών που επιλέγονται στο εκάστοτε παίγνιο.

Ορισμός 3.4 Ως μονοπάτια ισορροπίας χαρακτηρίζουμε το σύνολο των στρατηγικών των παικτών που οδηγούν σε ισορροπία κατά Nash.

Στην προκειμένη, θα ορίσουμε ως σύνολο μονοπατιών του G (g, T , $\mathcal{W}$) για $t \leq T$ το σύνολο γ^t όπου θα ισχύει ότι:

$$\Gamma^t = \begin{cases} S^t \times \mathcal{W} \ , \ t > 0 \\ \mathcal{W} \ , \quad t = 0 \end{cases} \qquad (3.9)$$

Για να αναλύσουμε λίγο το παραπάνω σύνολο Γ^t , ουσιαστικά το μονοπάτι επηρεάζεται από το σύνολο στρατηγικών των παικτών από την πρώτη επανάληψη και μετά, καθώς τότε εισάγεται η επιλογή ενεργειών των παικτών. Μάλιστα, στο γινόμενο $S^t \times \mathcal{W}$ γίνεται φανερή η επίδραση που έχει το σύνολο των στρατηγικών στο πώς θα διαμορφωθεί το εκάστοτε μονοπάτι.

Επιπλέον, θα εξεταστεί η μορφή των ιστοριών κατά τη διάρκεια των t επαναλήψεων. Επαναλαμβάνουμε ότι με τον όρο ιστορία γίνεται αναφορά στις παρελθοντικές στρατηγικές, στα παρελθοντικά προφίλ ενεργειών του εκάστοτε παίκτη . Στην προκειμένη περίπτωση ορίζεται ως εξής :

$$H^t = \begin{cases} S^t \quad t > 0 \\ \{h_0\} \, , t = 0 \end{cases} \qquad (3.10)$$

Η ιστορία στο t=0 ορίζεται απλά σαν συμβολισμός καθώς είναι λογικό στη μηδενική επανάληψη να μην υπάρχει γνώση οποιασδήποτε στρατηγικής.

Η ανάλυση συνεχίζεται εκφράζοντας την έννοια του πλάνου. Η κύρια διαφορά του πλάνου με το μονοπάτι είναι το γεγονός ότι το πρώτο λαμβάνει υπόψιν τη δοσμένη ιστορία και διαμορφώνει το επιθυμητό μελλοντικό μονοπάτι. Συνεπώς μαθηματικά θα συμβολίζουμε το πλάνο ως

$$f = (f^t)\ ,\ t = 0,1,2,\ldots,T \qquad (3.11)$$

το οποίο διαμορφώνεται , όπως αναλύσαμε , ως εξής:

$$\mathrm{f^t} :\ \mathrm{H^t} \rightarrow \Gamma^{\mathrm{T-t}}$$

δηλαδή, με βάση την ιστορία στην επανάληψη t διαμορφώνεται το μονοπάτι για το μελλοντικό διάστημα επαναλήψεων , το οποίο εκφράζεται ως T-t , η διαφορά ανάμεσα στην τελική και την τρέχουσα επανάληψη. Τα επιθυμητά μελλοντικά μονοπάτια θα πρέπει να είναι συνεπή μεταξύ τους και θα ισχύει ότι:

$$f^t(h^t) = (s^1,\ldots,s^{T-t},w)\ \Rightarrow\ f^{t+1}(h^t,s^1) = (s^2,\ldots,s^{T-t},w) \qquad (3.12)$$

Σε επεξήγηση της παραπάνω σχέσης, ουσιαστικά εκφράζεται το γεγονός ότι το κάθε μελλοντικό μονοπάτι με δεδομένη ιστορία, καθορίζεται τόσο από τις στρατηγικές της κάθε περιόδου όσο και από το επιπρόσθετο έσοδο. Μάλιστα , είναι συνεπές με οποιοδήποτε μελλοντικό μονοπάτι που διαμορφώνεται ανάλογα με την επανάληψη στην οποία βρίσκεται το παίγνιο.

Όπως και σε κάθε είδους παίγνιο θα πρέπει να αναλυθεί ο τρόπος υπολογισμού των αποδόσεων. Σε προηγούμενες αναλύσεις που έλαβαν χώρα στην εργασία είχαμε χρησιμοποιήσει το σύνολο των στρατηγικών και μέσω του κατάλληλου ολοκληρώματος υπολογίζαμε την απόδοση του κάθε παίκτη. Πλέον, αν ο παίκτης του παιγνίου επιλέγει το μονοπάτι $(s^1,\ldots,s^t,w)$ τότε η συνεχής απόδοση θα δίνεται από:

$$\prod(s^1,\ldots,s^t,w) = \sum_{k=1}^{t} g(s^k) + w \qquad (3.13)$$

3.1.4.2 Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash.

Θεώρημα 3.3 Γενικότερα, ως υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία ορίζεται η περίπτωση όπου ο κάθε παίκτης δεν διαθέτει κανένα κίνητρο να αποκλίνει από την οποιαδήποτε ιστορία και διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\forall\ t\ \forall h\ \in\ H^t\ \forall\ i\ \forall s_i\ \in\ S_i\quad g_i\,(s_{-i}^1\,,s_i)\ +\ \prod_i(f^{t+1}(s_{-i}^1\,,s_i))\ \le\ \prod_i(f^t(h))$$

όπου s^1 είναι το πρώτο στοιχείο του πλάνου $\mathrm{f^t(h)}$.

Ας αναλύσουμε την διατύπωση αυτή, δηλαδή τι θα πρέπει να ισχύει προκειμένου να βρισκόμαστε σε υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία. Ουσιαστικά δηλώνει ότι για κάθε επανάληψη t και για κάθε ιστορία h του συνόλου ιστοριών που ορίσαμε ως H^t και για κάθε στρατηγική εκάστοτε παίκτη i, που ανήκει στο σύνολο S_i θα πρέπει να ισχύει μία ανισότητα. Αναλυτικότερα, το άθροισμα της απόδοσης του παίκτη i δεδομένης της στρατηγικής του αντιπάλου του και των συνεχών αποδόσεων του παίκτη i , λόγω επιλογής ενός πλάνου στην επανάληψη t+1, πρέπει να μην ξεπερνά την συνεχή απόδοση του παίκτη της προηγούμενης περιόδου, δηλαδή στην επανάληψη t. Άρα κανένα μελλοντικό πλάνο να μην προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση.

Γενικότερα, αναφορικά με το μονοπάτι των αποδόσεων , αν συμβολίσουμε ως f μια ισορροπία θα είναι της μορφής $(g(s^1),\ldots,g(s^T))$. Μάλιστα, σε αυτό το μονοπάτι αποδόσεων , το μονοπάτι της μηδενικής ιστορίας, δηλαδή της μηδενικής επανάληψης θα δίνεται από τη σχέση:

$$f(h^0) = (s^1,\ldots\ ,s^T,w) \quad (3.14)$$

Τονίσαμε επανειλημμένα ότι η ύπαρξη της επιπρόσθετης απόδοσης είναι εκείνη που συμβάλει στην ομαλή λειτουργία του παιγνίου και στην αντιμετώπιση των πιθανών αποκλίσεων. Δεν έγινε όμως καθορισμός του πως προκύπτει το ποσό αυτό όσο και αν το σύνολο από το οποίο πηγάζει παραμένει ίδιο σε κάθε επανάληψη. Απάντηση σε αυτόν τον προβληματισμό θα δώσει ένα επιπλέον θεώρημα του Kandori(1992) , το οποίο παρατίθεται και διαμορφώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3.4 Για κάθε κλειστό σύνολο $U \subset V$, υπάρχει ένα φραγμένο σύνολο $W \subset \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε

$$\forall\ \ T\ \forall\ u \in U\ (u,..,u)\ \in P(g,T,W)$$

Προκειμένου να διακρίνονται τα μονοπάτια αποδόσεων όλων των υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών θα συμβολιστούν ως το σύνολο $P(g,T,W)$. Έστω ότι το σύνολο αποδόσεων U είναι μεμονωμένο και εμείς προσπαθούμε να ωθήσουμε τους παίκτες να συμπεριφερθούν όπως επιθυμούμε. Για να πετύχουμε το σκοπό μας θα πρέπει να εισαχθούν στο παίγνιο οι έννοιες του μπόνους αλλά αντίστοιχα και της τιμωρίας, για τους παίκτες που λειτουργούν συνεπώς και όσους , αντίστοιχα , αποκλίνουν.

Επομένως, η ποινή ορίζεται ως B στο παίγνιο σταδίου. Σε κάθε επανάληψη ή αλλιώς περίοδο , η ποινή θα υπολογίζεται από το γινόμενο του B επί την εκάστοτε περίοδο. Αυτό συνεπάγεται ότι η συνολική ποινή ενός παιγνίου εξαρτάται φανερά από τον αριθμό των επαναλήψεων και όσο μεγαλύτερος ο αριθμός επαναλήψεων αναλογικά τόσο μεγαλύτερη και η ποινή των παικτών.

Υπάρχει ωστόσο και μία διαφορετική εκδοχή τιμωρίας. Αυτή , αφορά τη περίπτωση όπου ο παίκτης, ο οποίος αποκλίνει , δεν τιμωρείται άμεσα. Οι υπόλοιποι παίκτες αναλαμβάνουν την διαδικασία της τιμωρίας του , για αρκετές περιόδους. Έτσι, εξοικονομούνται χρήματα όσον αφορά στην διαδικασία επιβολής της τιμωρίας και οι υπόλοιποι παίκτες ελέγχουν το παίγνιο και δρουν ανάλογα. Μάλιστα αποτελεί και έναν τρόπο τιμωρίας , ο οποίος διευκολύνει εμμέσως και τη μελλοντική λειτουργία του παιγνίου. Οι παίκτες θα τιμωρούν τον παίκτη που αποκλίνει , για όσες περιόδους χρειαστεί έτσι ώστε να εξαλειφθεί το όφελος του από την ενέργεια αυτή. Έπειτα, θα επιλέγουν όλοι τις επιθυμητές ενέργειες.

Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία τιμωρίας αυτής της μορφής απαιτείται περισσότερη ανάλυση αναφορικά με την διεκπεραίωση της. Γενικότερα, η τιμωρία του παίκτη που αποκλίνει μπορεί κάλλιστα να εκφραστεί ως επιβράβευση των παικτών , οι οποίοι ελέγχουν τη λειτουργία του παιγνίου και τον τιμωρούν. Η επιβράβευση αυτή θα οριστεί, εν αντιθέσει με την ποινή που ήταν B , ως B᾽ . Βάσει των υποθέσεων, τις οποίες και αναλύσαμε , επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι το όφελος, το οποίο αποκομίζει ο παίκτης ο οποίος αποκλίνει, είναι φραγμένο έτσι ώστε και οι περίοδοι όπου οι υπόλοιποι τον τιμωρούν να είναι πεπερασμένες και φραγμένες.

3.1.4.3 Εναλλακτική Διαδικασία Επιβράβευσης.

Απόρροια της ανάλυσης είναι η απορία αναφορικά με το πώς διαμορφώνεται το μέγεθος της ανταμοιβής των παικτών που εν ολίγοις ελέγχουν τον παίκτη που αποκλίνει. Εφόσον η απόδοση που καρπώνεται ο παίκτης που επιλέγει να αποκλίνει είναι ένα μέγεθος πεπερασμένο , για την εκάστοτε απόκλιση θα απαιτείται ένα σταθερό ποσό επιβράβευσης B᾽ . Υπάρχει , ωστόσο , και το ενδεχόμενο των πολλαπλών αποκλίσεων. Σε αυτή τη περίπτωση , αντίστοιχα , θα έπρεπε να δοθεί ανταμοιβή για την εκάστοτε τιμωρία που θα προσφέρουν οι παίκτες.

Γίνεται , λοιπόν, αντιληπτό ότι η συνεχόμενη επιβράβευση θα δημιουργούσε πρόβλημα στη λειτουργία του παιγνίου και αντικειμενικά θα ήταν και περισσότερο κοστοβόρα . Επομένως, ο Kandori (1992), προτείνει μία μορφή ανταμοιβής , την οποία έχουμε εισάγει και στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια. Η μορφή αυτή της ανταμοιβής ουσιαστικά θα προσφέρεται στο τέλος του παιγνίου, σαν αποζημίωση για το καθήκον τους πριν τη λήξη των επαναλήψεων του παιγνίου, όταν θα ασκήσουν το τελευταίο τους καθήκον.

Η ανταμοιβή αυτή παραμένει ελκυστική για τους παίκτες , ακόμα και αν προσφέρεται μόνο στο τέλος του παιγνίου. Ουσιαστικά, παραμένει ελκυστική χάρη στην υπόθεση της ισορροπίας, δηλαδή λόγω του ότι οι παίκτες κάθε φορά που τιμωρούν τον παίκτη που αποκλίνει κρίνουν πως θα είναι και το τελευταίο τους καθήκον. Η μέθοδος αυτή κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς δεν απαιτείται προσδιορισμός του ποσού τιμωρίας και είναι χρήσιμη όταν οι επαναλήψεις του παιγνίου , δηλαδή το T, είναι πολλές.

3.1.4.4 Απόδειξη Ύπαρξης Κοινού Συνόλου τελικών Αποδόσεων για οποιοδήποτε αριθμό Επαναλήψεων Παιγνίου.

Εφόσον αναλύσαμε τη δομή και τον τρόπο τιμωρίας του παίκτη , ο οποίος αποκλίνει πρέπει να εξετάσουμε το θεώρημα το οποίο διατύπωσε ο Kandori(1992) , αναφορικά με το σύνολο αποδόσεων σε οποιοδήποτε φραγμένο υποσύνολο του συνόλου V , που υπάρχει ένα σύνολο επιπρόσθετων αποδόσεων έτσι ώστε κάθε στοιχείο του να αποτελεί υποπαιγνιακά τέλειο μονοπάτι αποδόσεων.

Σε προηγούμενη ανάλυση αναφορικά με το σύνολο αποδόσεων V έχει υποτεθεί ότι είναι φραγμένο και αν υποθέσουμε ότι και το υποσύνολο του V , δηλαδή το U είναι συμπαγές, προκύπτει η διατύπωση ότι :

$$\min_{u \in U} u_i = \underline{u_i} > 0 \qquad (3.15)$$

δηλαδή, θα συμβολιστεί ως ελάχιστη απόδοση του συνόλου αποδόσεων U το $\underline{u_i}$. Γενικότερα, ορίζεται το $\underline{u_i}$ ως θετικός αριθμός καθώς κάθε παίκτης αποζητά όφελος για να συμμετάσχει στο εκάστοτε παίγνιο. Θα γίνει η επιλογή ενός ακέραιου , ο οποίος θα συμβολιστεί ως M^i. Ενδεικτικά,

$$\mathrm{M^i} > \frac{\mathrm{d_i}}{\underline{\mathrm{u_i}}} \qquad (3.16)$$

όπου ο αριθμητής του λόγου αυτού, δηλαδή το d_i , συμβολίζει το μέγιστο όφελος που μπορεί να αποκομίσει ο παίκτης αν επιλέξει να αποκλίνει αντί να συνεργαστεί κατά τη διάρκεια του παιγνίου. Η μέγιστη απόδοση μέσω της απόκλισης για τον παίκτη i υπολογίζεται μέσω:

$$\mathrm{d_i} = \max_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{a} \in \mathrm{A_i}} (\mathrm{g_i}(\mathrm{a_{-i}}, \alpha) - \mathrm{g_i}(\mathrm{a})) \qquad (3.17)$$

δηλαδή, ορίζεται ως η μεγιστοποίηση της διαφοράς της απόδοσης σε περίπτωση απόκλισης μείον την απόδοση του παίκτη i σε περίπτωση συνεργασίας. Ως μεγιστοποίηση του ακέραιου M^i θα οριστεί το M, δηλαδή:

$$M = \max_i M^i \qquad (3.18)$$

Ως σ θα οριστεί η στρατηγική που ανήκει στο σύνολο στρατηγικών S , ενώ αντίστοιχα η απόδοση u θα ανήκει στο σύνολο αποδόσεων και υποσύνολο του συνόλου αποδόσεων V, δηλαδή το U. Το σ, δηλαδή η στρατηγική, ορίζεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$\mathrm{u} = \mathrm{g}(\sigma) \qquad (3.19)$$

Ουσιαστικά, η απόδοση u του συνόλου αποδόσεων U θα προκύπτει ως συνάρτηση αποδόσεων με δεδομένη στρατηγική του παίκτη την σ. Αντίστοιχα, εφόσον δόθηκε ο ορισμός του μονοπατιού ισορροπίας , στην απόδειξη του θεωρήματος αναφορικά με τις αποδόσεις του παίκτη , θα οριστεί ως μονοπάτι για την επανάληψη t χωρίς απόκλιση ως εξής:

$$\gamma^{\mathrm{t}} = (\sigma, \sigma, \dots, \sigma, \mathrm{w}^0) \qquad (3.20)$$

όπου το σ αντιστοιχεί στην στρατηγική μέχρι την επανάληψη t ενώ το w^0 αντιστοιχεί στην επιπρόσθετη απόδοση που αποκομίζει ο παίκτης. Γενικότερα, το μονοπάτι ισορροπίας της τιμωρίας όταν απομένουν t περίοδοι επανάληψης θα προκύπτει ως εξής για κάθε παίκτη i:

$$\gamma^{\mathrm{t}}(\mathrm{i}) = \begin{cases} (\mathrm{m}^{\mathrm{i}}, \dots, \mathrm{m}^{\mathrm{i}}, \sigma, \dots, \sigma, \mathrm{w}^{\mathrm{i}}) & \mathrm{t} \geq \mathrm{M} \\ (\mathrm{m}^{\mathrm{i}}, \dots, \mathrm{m}^{\mathrm{i}}, \underline{\mathrm{w}^{\mathrm{i}}}) & \mathrm{t} < \mathrm{M} \end{cases} \qquad (3.21)$$

Το μονοπάτι ισορροπίας της τιμωρίας μπορεί να προκύψει με δύο διαφορετικούς πιθανούς τρόπους. Ενδεικτικά, αν οι υπόλοιποι παίκτες διαθέτουν περιόδους ούτως ώστε να ασκήσουν την τιμωρία, το μονοπάτι διαμορφώνεται από τον πρώτο υπολογισμό όπου το $t \geq M$. Εάν υπάρχουν οι περίοδοι που χρειάζονται, οι παίκτες θα ασκήσουν την τιμωρία για M περιόδους και έπειτα θα αποκομίσουν την επιπρόσθετη απόδοση ύψους w^i.

Στην αντίθετη περίπτωση, το μονοπάτι θα υπάγεται στην περίπτωση όπου $t < M$ αλλά πλέον οι παίκτες θα τιμωρούν τον παίκτη που αποκλίνει σε όσες περιόδους απομένουν μέχρι να ολοκληρωθεί το παίγνιο . Όταν φτάσει η ολοκλήρωση του παιγνίου , οι παίκτες αυτοί θα ανταμειφθούν λαμβάνοντας την επιπρόσθετη απόδοση ύψους $\underline{w^i}$, η οποία μάλιστα θέτει επιπρόσθετη τιμωρία στον παίκτη που αποκλίνει.

Το σημαντικό στην διατύπωση του w^i και $\underline{w^i}$ αντίστοιχα, είναι ότι στην πρώτη περίπτωση όπου υπάρχει διαθέσιμο χρονικό διάστημα τιμωρίας, η επιπρόσθετη απόδοση θα αντανακλάται στο ποσό w^i και ο παίκτης που αποκλίνει θα τιμωρηθεί μέχρι να εξαλειφθεί το ποσό που κερδίζει από την απόκλιση. Στην περίπτωση, ωστόσο, όπου οι περίοδοι δεν αρκούν, διαμορφώνεται η επιπρόσθετη απόδοση $\underline{w^i}$ όπου ουσιαστικά ενημερώνεις ότι ακόμα και αν δεν αρκεί το υπολειπόμενο διάστημα , ο παίκτης θα τιμωρηθεί παραπάνω έτσι ώστε να εξαλειφθεί το ποσό. Όμως, επειδή ουσιαστικά οι παίκτες ασκούν minimax στρατηγική , εφόσον δεν επιτυγχάνεται η συνεργασία, δέχονται και εκείνοι απώλεια.

Είναι απαραίτητο να τονιστεί ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι επιπρόσθετες αποδόσεις καθώς και το πως λειτουργούν. Πιο αναλυτικά, ως w^0 ορίζεται η απόδοση που επιτυγχάνεται σε περίπτωση όπου δεν αποκλίνει κάποιος παίκτης. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο περιλαμβάνεται και στο μονοπάτι ισορροπίας του παιγνίου, καθώς ένας συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί ισορροπία όταν κανείς δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει.

Αντίθετα, οι αποδόσεις w^i και $\underline{w^i}$ προκύπτουν στις περιπτώσεις όπου κάποιος παίκτης αποκλίνει και αποτελούν χαρακτηριστικό του μονοπατιού τιμωρίας. Οι αποδόσεις $\underline{w^i}$ και w^i επιλέγονται βάσει των σχέσεων:

$$\mathrm{w_i^i = w_i^0} \qquad (3.22)$$

$$\mathrm{w_i^j \ = \ \underline{w}_i^j \ = \ w_i^0 + \ (M-1)\,((-z_i^j \vee 0) \ + \ \underline{u}_i)} \ \ \text{για κάθε}\ \mathrm{i \neq j} \qquad (3.23)$$

$$\mathrm{\underline{w}_i^i \ < \ w_i^0 \ - \ d_i} \qquad (3.24)$$

Προκειμένου να γίνει αντιληπτός ο τρόπος καθορισμού των αποδόσεων θα επισημανθούν κάποια στοιχεία αναφορικά με τις παραπάνω σχέσεις. Θα οριστεί ως σύνολο των επιπρόσθετων αποδόσεων το εξής:

$$\mathcal{W} = \{\, w^0 ,\dots, w^N , \underline{w}^1 ,\dots, \underline{w}^N \} \qquad (3.25)$$

Η απόδοση w^0 προκύπτει στη περίπτωση όπου δεν εντοπίζεται κάποιου είδους απόκλιση στο παίγνιο. Οι αποδόσεις w^1 έως και την απόδοση w^N αφορούν την περίπτωση όπου υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι τιμωρίας του παίκτη που αποκλίνει και τιμωρείται. Και τέλος, οι αποδόσεις $\underline{w}^1$ έως και την απόδοση $\underline{w}^N$ αφορούν την περίπτωση της έλλειψης διαθέσιμων περιόδων, όπου ενημερώνεται ο παίκτης ότι ακόμα και έτσι θα τιμωρηθεί επιπλέον στο τέλος του παιγνίου.

Οι σχέσεις (3.22) και (3.24) ουσιαστικά απεικονίζουν τη διαφορετική επίπτωση που υφίσταται η απόδοση του παίκτη που αποκλίνει. Είναι λογικό, στη περίπτωση όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι για την τιμωρία του , η τελική απόδοση του να είναι μικρότερη σε μέγεθος, από ότι σε αντίθετη περίπτωση , έτσι ώστε να εξαλείφεται το όποιο κέρδος πηγάζει από την απόκλιση . Εξάλλου, επαναλαμβάνουμε ότι οι αποδόσεις $\underline{w^i}$ αναφέρονται στις επιπρόσθετες αποδόσεις των παικτών που τιμωρούν εκείνον που αποκλίνει, όταν δεν υπάρχουν αρκετές περίοδοι και επιβάλει επιπρόσθετη απώλεια στην απόδοση του παίκτη αυτού.

Ενδεικτικά, στη σχέση (3.24) εκφράζεται η επιπλέον τιμωρία, για την οποία κάναμε λόγο στην περίπτωση έλλειψης διαθέσιμων περιόδων τιμωρίας. Εκφράζεται δηλαδή ότι η απόδοση του παίκτη i στην περίπτωση όπου αποκλίνει θα είναι μικρότερη από τη διαφορά της επιπρόσθετης απόδοσης που θα αποκόμιζε αν δεν απέκλινε μείον την απόδοση της απόκλισης. Έτσι, ο Kandori(1992) προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τις πιθανότητες απόκλισης των παικτών.

Αναφορικά με τη σχέση (3.23) , είναι απαραίτητη η επεξήγηση κάποιων όρων. Αρχικά, μία έκφραση της μορφής x v y , ουσιαστικά δηλώνει ότι στον εκάστοτε υπολογισμό που χρειάζεται να γίνει θα χρησιμοποιείται το μέγιστο μέγεθος ανάμεσα στις μεταβλητές x και y. Στην προκειμένη, στην σχέση (3.23) θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέγιστη τιμή ανάμεσα στο μηδέν και τον όρο $-z_i^j$.

Υπενθυμίζουμε, ότι ο όρος z_i^j δηλώνει την απόδοση που αποκομίζει ο παίκτης i κατά την διαδικασία τιμωρίας του παίκτη j. Θα μπορούσε κάλλιστα να θεωρηθεί και ως το κόστος που επιβαρύνει τον παίκτη i λόγω του καθήκοντος του.

Ωστόσο, στην περίπτωση όπου ο παίκτης i αντιμετώπιζε ζημία κατά την τιμωρία του παίκτη που αποκλίνει, ουσιαστικά θα καλυπτόταν και επί της ουσίας θα αποζημιωνόταν για αυτήν. Οπότε, ο παίκτης θα αποκόμιζε και την ελάχιστη απόδοση σίγουρα αλλά και αυτή την έξτρα απόδοση του. Αντικειμενικά, ο Kandori(1992), αναγκάζει όλους τους παίκτες , μέσω αυτών των απωλειών , να λειτουργούν σωστά.

Προκειμένου να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος 3.4 , θα οριστεί πλάνο f. Ως πλάνο, έχει ήδη διατυπωθεί ότι λογίζεται η επιλογή του επιθυμητού μονοπατιού ισορροπίας αφού προηγουμένως λαμβάνει υπόψιν τη δοσμένη και διαθέσιμη ισορροπία. Εν προκειμένω, το πλάνο f ορίζεται ως:

$$\mathrm{f}^0(\mathrm{h}^0) = \gamma^{\mathrm{T}} \qquad (3.26)$$

Ως γ^T ορίζεται το σύνολο των μονοπατιών που διαμορφώνεται και εξισώνεται με το αρχικό πλάνο με δεδομένη ιστορία και όταν ισχύει ότι:

$$\mathrm{f}^{\mathrm{t}-1}(\mathrm{h}) \; = \; (\,\overline{\mathrm{s}}\,,\overline{\gamma}) \qquad (3.27)$$

θα προκύπτει το εξής πλάνο ανάλογα τη στρατηγική:

$$\mathrm{f}^{\mathrm{t}}(\mathrm{h}\,,\mathrm{s}) = \begin{cases} \gamma^{\mathrm{T-t}}(\mathrm{i}) \text{ εάν } \mathrm{s_i} \neq \; \overline{\mathrm{s_i}} \text{ και } \mathrm{s_{-i}} = \overline{\mathrm{s}}_{-\mathrm{i}} \\ \;\overline{\gamma} \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \qquad (3.28)$$

Οπότε, στην περίπτωση όπου ο παίκτης i αποκλίνει, δηλαδή η στρατηγική του διαμορφώνεται διαφορετική από τη συμφωνηθείσα , ενώ ο αντίπαλος του είναι συνεπής , το μονοπάτι διαμορφώνεται για τις υπόλοιπες περιόδους ως $\gamma^{T-t}(i)$. Αντίστοιχα, σε κάθε άλλη περίπτωση θα παραμένει το ίδιο, δηλαδή $\overline{\gamma}$.

3.1.4.5 Ισορροπία κατά Nash.

Επόμενη κίνηση, αναφορικά με το παίγνιο , το οποίο διαμόρφωσε ο Kandori(1992) , με βάση τις παραπάνω υποθέσεις και με τα προαναφερθέντα μονοπάτια, αποτελεί η μελέτη της ισορροπίας. Για να αποδειχθεί η ύπαρξη ισορροπίας, θα πρέπει να εξεταστεί αν υπάρχει κίνητρο απόκλισης στα υπάρχοντα πιθανά μονοπάτια. Προς ευκολία κατανόησης, τα μονοπάτια που υπήρχαν ήταν τρία, ένα στην περίπτωση μη ύπαρξης απόκλισης και τα δύο στην περίπτωση απόκλισης, αναλόγως τη διαθέσιμη περίοδο τιμωρίας.

Έστω, ότι το παίγνιο βρίσκεται στο μονοπάτι γ^t. Εάν , υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι τιμωρίας, δηλαδή t > M ο εκάστοτε παίκτης i αποκομίζει ως μέγιστη απόδοση το d_i από την απόκλιση. Ωστόσο, όπως αναφέραμε αυτό το ποσό θα είναι πολύ μικρότερο από εκείνο που θα κέρδιζε σε περίπτωση συνεργασίας, ακόμα και αν διεκδικούσε την ελάχιστη απόδοση. Ενδεικτικά, ισχύει ότι:

$$\mathrm{Mu_i} > \mathrm{M\underline{u}_i} > \mathrm{d_i} \qquad (3.29)$$

Στην περίπτωση , όμως, όπου δεν υπάρχει επαρκής περίοδος τιμωρίας του παίκτη που αποκλίνει, δηλαδή t < M, η απώλεια του είναι τουλάχιστον ίση με το ποσό , το οποίο αποκομίζει από την απόκλιση. Πιο συγκεκριμένα, είχε εκφραστεί ότι :

$$\underline{\mathrm{w}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} < \mathrm{w}_{\mathrm{i}}^{0} - \mathrm{d_i} \qquad (3.30)$$

δηλαδή, το γεγονός ότι η απόδοση του παίκτη i ,σε περίπτωση που αποκλίνει θα είναι μικρότερη από τη διαφορά της απόδοσης που θα αποκόμιζε αν ήταν συνεπής μείον το μέγιστο ποσό που αποκομίζει από την απόκλιση.

Ως δεύτερη περίπτωση μονοπατιού κρίνεται το $\gamma^t(i)$. Έστω ότι ο παίκτης i αποκλίνει και κερδίζει τη μέγιστη απόδοση της απόκλισης, όμως έπειτα δεν θα έχει κίνητρο να αποκλίνει ξανά. Έστω ότι το παίγνιο συνεχίζεται μετά από την απόκλιση. Η διαδικασία που ακολουθείται αντιστοιχεί στην προηγούμενη περίπτωση. Ουσιαστικά, εάν υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι τιμωρίας χάνει ποσό αρκετά μεγαλύτερο από το d_i και στερείται την απόδοση u_i. Αντίστοιχα, σε μη επαρκείς περιόδους τιμωρίας ο παίκτης χάνει τουλάχιστον d_i.

Η ανάλυση της ισορροπίας ολοκληρώνεται με την περίπτωση του μονοπατιού $\gamma^t(j)$. Τώρα, αυτός που αποκλίνει είναι ο παίκτης j και τιμωρείται από τον παίκτη i. Πρέπει να εξεταστεί αν υπάρχει κίνητρο απόκλισης του παίκτη i από τα καθήκοντα ελέγχου του. Αν επιλέξει την απόκλιση στο μέλλον θα εξοικονομήσει απλά το κόστος το οποίο επωμίστηκε λόγω του καθήκοντος του , το οποίο ανέρχεται στο μέγεθος:

$$(\mathrm{M}-1)\,(-\mathrm{z_i^j} \vee 0)$$

Όσον αφορά τη στιγμή της απόκλισης το μέγιστο όφελος που θα αποκομίσει ισούται με τη μέγιστη απόδοση της απόκλισης, το d_i.

Αναφορικά με τις απώλειες τις οποίες θα δεχθεί μέσω της επιλογής του ο παίκτης i , είναι δεδομένο ότι θα χάσει το όφελος του καθήκοντος. Για να τους προσελκύσει, ο Kandori(1992) στο παράδειγμα του, προσφέρει επιπρόσθετη απόδοση στους παίκτες που εποπτεύουν το παίγνιο. Με την απόκλιση από τα καθήκοντα του , λοιπόν, ο παίκτης i χάνει ένα ποσό που ανέρχεται στο μέγεθος:

$$(\mathrm{M}-1)\,((-\mathrm{z_i^j} \vee 0) + \underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}})$$

Επιπλέον απώλεια είναι και τουλάχιστον η απόδοση που θα του προσφερόταν σε περίπτωση τήρησης του καθήκοντος του και σύνεσης , που ανέρχεται στο u_i. Για να το εκφράσουμε μαθηματικά, η μείωση που θα αντιμετωπίσει υπολογίζεται ως:

$$-(\mathrm{M}-1)\,((-\mathrm{z_i^j} \vee 0) + (\mathrm{M}-1)\,((-\mathrm{z_i^j} \vee 0)+\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}) = \mathrm{M\underline{u}} > \mathrm{d_i} \qquad (3.31)$$

Στην περίπτωση , όμως , όπου δεν υπάρχει επαρκής χρόνος τιμωρίας, η απώλεια στο μέλλον είναι τουλάχιστον:

$$-(\mathrm{M}-1)\ ((-\mathrm{z}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}\ \mathrm{v}\ 0)+(\mathrm{w}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}-\underline{\mathrm{w}}_{\mathrm{i}})\ >\ \mathrm{d}_{\mathrm{i}} \qquad (3.32)$$

Συνεπώς, εφόσον σε κανένα από τα πιθανά μονοπάτια, κανένας από τους παίκτες δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει, τότε υφίσταται υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία. Άρα, το πλάνο f αποτελεί μία υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία.

3.1.4.6 Επεξήγηση Εθιμικού Θεωρήματος.

Για να ολοκληρωθεί η ανάλυση οφείλουμε να επεξηγήσουμε τον τρόπο που προέκυψε και το εθιμικό θεώρημα (θεώρημα 3.2). Κατά κύριο λόγο, βασίζεται στα δεδομένα , τα οποία προέκυψαν στις προηγούμενες αναλύσεις.

Η βασική ιδέα, γύρω από την ύπαρξη και απόδειξη του υπάρχοντος εθιμικού , αφορά παίκτες της ίδιας γενιάς t. Οι ζωές των παικτών ουσιαστικά διαχωρίζονται σε τρείς διαφορετικές φάσεις με το K να συμβολίζει τη διάρκεια της τρίτης φάσης και ισχύει ότι $K= K_1 + K_2 + ... + K_N$. Στην πρώτη φάση , οι παίκτες αυτής της γενιάς θα επιβραβεύουν και θα τιμωρούν παίκτες προηγούμενων γενεών ανάλογα με τη συμπεριφορά τους. Στη δεύτερη φάση ουσιαστικά λειτουργεί κανονικά το παίγνιο και οι παίκτες αποκομίζουν καθορισμένες αποδόσεις.

Αναφορικά με τη τρίτη φάση , οι παίκτες της γενιάς t αποκομίζουν τις επιπρόσθετες αποδόσεις. Το κύριο επιχείρημα στο οποίο βασίζεται το εθιμικό θεώρημα είναι η ιδέα πάνω στην οποία βασίστηκε η προηγούμενη ανάλυση μας , δηλαδή η δυνατότητα μεταβολής των πληρωμών της επιπρόσθετης απόδοσης στη τρίτη φάση. Έτσι, για αρκετό χρονικό διάστημα οι παίκτες μπορούν να δεχθούν πίεση για να λαμβάνουν τις επιθυμητές ενέργειες στη φάση δύο.

Η ισορροπία, λοιπόν , διαμορφώνεται όπως και στις προηγούμενες αναλύσεις, δηλαδή σε περίπτωση απόκλισης του εκάστοτε παίκτη, στη δεύτερη φάση , οι υπόλοιποι τον τιμωρούν για πεπερασμένες περιόδους. Έτσι οι παίκτες επιστρέφουν στο αρχικό μονοπάτι της δεύτερης φάσης, δηλαδή συνεργάζονται και δεν αποκλίνουν. Η επιπρόσθετη απόδοση που προσφέρεται στους παίκτες, οι οποίοι τιμωρούν τον αποκλίνοντα , ουσιαστικά προσφέρεται σε αυτούς στη τρίτη φάση του παιγνίου.

Η διαδικασία αυτή επηρεάζεται και πάλι από το διαθέσιμο διάστημα περιόδων προκειμένου να εξελιχθεί η τιμωρία. Εάν, για παράδειγμα, δεν υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι όταν λαμβάνει χώρα η απόκλιση , η απόδοση του αποκλίνοντα, όπως είχαμε αναφέρει, θα μειωθεί έτσι ώστε σίγουρα να εξαλειφθεί η απόδοση της απόκλισης. Αν υπήρχαν οι επαρκείς περίοδοι τότε η διαδικασία θα λειτουργούσε κανονικά , ο αποκλίνων θα τιμωρούνταν ενώ οι υπόλοιποι θα επιβραβεύονταν.

Όσον αφορά το στοιχείο της ηλικίας, ο Kandori(1992), βασίστηκε στην ιδέα ότι ναι μεν ο μεγαλύτερος ηλικιακά παίκτης θα επιλέξει τη βέλτιστη αντίδραση του στην τελευταία φάση του παιγνίου, αλλά η επιπρόσθετη απόδοση του εξαρτάται καθαρά από τους άλλους παίκτες. Εκείνοι είναι οι υπεύθυνοι να ορίσουν την έξτρα απόδοση του παίκτη αυτού βάσει όμως της προηγούμενης συμπεριφοράς του. Προκύπτει, ωστόσο , το ζήτημα του αν οι παίκτες θα είναι δίκαιοι απέναντι στον μεγαλύτερο ηλικιακά παίκτη. Αυτό, διασφαλίζεται λόγω του ότι αν οι υπόλοιποι παίκτες τον αδικήσουν, όταν έρθουν στη θέση του και οι νεότεροι παίκτες ορίζουν το μπόνους τους, θα τους το μειώσουν ανάλογα για αυτή τη συμπεριφορά τους.

3.2 Ανάλυση Παιγνίων Επικαλυπτόμενων Γενεών με Μικτές Στρατηγικές.

Η ανάλυση των επαναλαμβανόμενων παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών, θα συνεχιστεί με την εξέταση και παρουσίαση της έρευνας του Gossner(1996). Η βασική διαφορά συγκριτικά με το άρθρο του Kandori(1992) και την δική του απόδειξη εθιμικού θεωρήματος, είναι το γεγονός ότι καλύπτει περιπτώσεις στις οποίες οι παίκτες διαμορφώνουν προσδοκίες για την επιλογή τους. Επομένως, αντικείμενο της έρευνας αποτελούν οι μικτές στρατηγικές σε παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών , οι οποίες μάλιστα δεν αποτελούν ένα παρατηρήσιμο στοιχείο για τους υπόλοιπους παίκτες. Γενικά, η μικτή στρατηγική δεν αντιμετωπίζεται σαν η επιλογή μιας κατανομής πιθανότητας στον χώρο στρατηγικών του από τον παίκτη , αλλά σαν μία εικασία των παικτών για την στρατηγική συμπεριφορά των αντιπάλων τους, εκφρασμένη από μία κατανομή πιθανότητας.

Ωστόσο, προκειμένου να διατηρηθεί και η έννοια της ιστορίας, όπως ορίστηκε τόσο στην ενότητα των επαναλαμβανόμενων παιγνίων όσο και στην έρευνα του Kandori(1992), ο Gossner(1996) παρότι χρησιμοποιεί μη παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές, επιτρέπει οι πραγματοποιήσεις των στρατηγικών να είναι παρατηρήσιμες δημόσια. Δηλαδή, ικανοποιείται η ιδιότητα της τέλειας ανάκλησης , όπου σε όλους τους παίκτες είναι γνωστός κάθε συνδυασμός στρατηγικών που έχει προηγηθεί.

Η διαδικασία απόδειξης ενός εθιμικού θεωρήματος στην περίπτωση των μη παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών είναι αντικειμενικά πιο δύσκολη όσον αφορά τις τεχνικές υπολογισμού. Ενδεικτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι που αξιοποιούν την κυρτότητα του συνόλου των εφικτών αποδόσεων ή ένα στατιστικό στοιχείο που θα επιδρούσε στη ιστορία του παιγνίου και θα βασιζόταν στη συχνότητα εμφάνισης κάποιων στρατηγικών. Στην περίπτωση των παιγνίων που έχουν αναλυθεί έως τώρα ένας από τους κύριους στόχους του εθιμικού θεωρήματος, που ισχύει και κατά τον Gossner(1996) ήταν η αναζήτηση υποθέσεων κάτω από τις οποίες κάθε απόδοση ενός συνόλου εφικτών αποδόσεων αποτελούσε και μία μέση απόδοση ισορροπίας.

Μέχρι και τον Gossner(1996), είχαν ήδη υπάρξει έρευνες αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια με παρατηρήσιμες και μη μικτές στρατηγικές, όσον αφορά όμως τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών οι έρευνες επικεντρώνονταν σε παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές. Απέδειξε, λοιπόν, την ύπαρξη εθιμικού θεωρήματος για πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια και προσέφερε επέκταση στα αποτελέσματα περί ύπαρξης εθιμικού θεωρήματος με παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές που προέκυψαν από τους Benoît και Krishna (1985).

Ένα κοινό χαρακτηριστικό ανάμεσα στην έρευνα του Kandori (1992) και σε εκείνη του Gossner(1996) αφορά τη χρήση επιπρόσθετων αποδόσεων στα επαναλαμβανόμενα παίγνια αλλά κοντά στο τέλος των επαναλήψεων του εκάστοτε παιγνίου. Ωστόσο και εκείνος επικέντρωνε την ανάλυση του στα παίγνια με παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές εν αντιθέσει με την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Είναι λογικό, οι μικτές στρατηγικές να μην είναι παρατηρούμενες. Η παρατήρηση τους οδηγεί τους ερευνητές να τις εισάγουν στο σύνολο των αμιγών στρατηγικών.

3.2.1 Δομικά Στοιχεία Παιγνίου Σταδίου.

Για αρχή θα λάβει χώρα η περιγραφή του παιγνίου σταδίου, το οποίο είναι στατικό και έπειτα επαναλαμβάνεται και προκύπτουν τα παίγνια που αναλύονται στη παρούσα εργασία. Γίνεται υπόθεση της ύπαρξης ενός παιγνίου σταδίου , το οποίο θα συμβολίζεται ως G . Θα αποτελείται από ένα σύνολο παικτών , το οποίο πλέον θα συμβολίζεται ως I και θα λαμβάνει τις τιμές $\mathrm{I}=\{1, 2, \ldots, \mathrm{I}\}$. Ο εκάστοτε παίκτης i που ανήκει στο σύνολο I , όπως και σε κάθε είδους παιγνίου, επιλέγει ενέργειες που θα υιοθετήσει μέσω ενός συνόλου που στην προκειμένη συμβολίζεται ως A^{i} και μάλιστα θα είναι πεπερασμένο σύνολο.

Βασικό χαρακτηριστικό για κάθε παίκτη είναι η απόδοση που θα αποκομίσει με βάση τον συνδυασμό ενεργειών που διαμορφώνεται με τους υπόλοιπους παίκτες. Η απόδοση, λοιπόν, του σταδίου παιγνίου G διατυπώνεται από την εξής συνάρτηση:

$$\mathrm{g} : \mathrm{A} = \mathrm{A}^{1} \times \mathrm{A}^{2} \times \ldots \times \mathrm{A}^{\mathrm{I}} = \prod_{\mathrm{i}} \mathrm{A}^{\mathrm{i}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{I}} \qquad (3.33)$$

Προς καλύτερη κατανόηση της σχέσης αυτής, το σύνολο των αποδόσεων καθορίζεται από τις αμιγείς ενέργειες που λαμβάνουν χώρα ταυτοχρόνως στο παίγνιο. Θα αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό υψωμένο εις το πλήθος των παικτών καθώς το σύνολο των παικτών είναι διανύσματα I- διαστάσεων. Η παραπάνω ανάλυση ωστόσο αφορά τις αμιγείς ενέργειες ενώ τον Gossner(1996) τον ενδιαφέρουν κατά κύριο λόγο οι μικτές ενέργειες του εκάστοτε παίκτη i.

Στην περίπτωση , λοιπόν των μικτών στρατηγικών, ο συμβολισμός του συνόλου τέτοιου είδους στρατηγικών είναι $\Delta(A^{\mathrm{i}}) = S^{i}$. Επομένως, αντίστοιχα διαφορετικό θα διαμορφωθεί και το σύνολο των αποδόσεων που αποκομίζει ο εκάστοτε παίκτης και συγκεκριμένα θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$g : S = S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^I = \prod_i S^i \rightarrow \mathbb{R}^I \qquad (3.34)$$

δηλαδή, θα ισχύει ακριβώς η ίδια λογική την οποία υιοθετούν οι αποδόσεις και των αμιγών στρατηγικών.

Οι αμιγείς ενέργειες των αντιπάλων του παίκτη i θα απεικονίζονται ως A^{-i} με το σύνολο αυτών των αμιγών ενεργειών να είναι της μορφής $A^1 \times A^{i-1} \times A^{i+1} \ldots \times A^I$. Αντίστοιχα, προκύπτει και η μικτή ενέργεια του αντιπάλου του παίκτη i από το σύνολο των ενεργειών S^{-i} , το οποίο είναι και αυτό της ίδιας μορφής με πριν δηλαδή διαμορφώνεται ως $S^1 \times S^{i-1} \times S^{i+1} \ldots \times S^I$. Ειδικότερα, αναφορικά με τις στρατηγικές , για κάθε παίκτη i η minimax μικτή στρατηγική εναντίον του παίκτη i θα συμβολίζεται ως m_i^{-i} και θα ανήκει στο σύνολο των ενεργειών S^{-i}. Ενώ, η βέλτιστη αντίδραση στην στρατηγική m_i^{-i} θα συμβολιστεί ως m_i^i έτσι ώστε ο συνδυασμός στρατηγικών $m_i = (m_i^{-i}, m_i^i)$ να ανήκει στο σύνολο S, δηλαδή στις αποδόσεις μικτών ενεργειών.

Όπως και σε κάθε υπόδειγμα μελέτης των παιγνίων που έχουμε αντιμετωπίσει έτσι και εδώ θα πρέπει να διατυπωθούν κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Αρχικά, σύμφωνα με τον Gossner(1996) διαμορφώνεται το σύνολο των εφικτών αποδόσεων του παιγνίου. Αυτό θα συμβολίζεται ως F και θα αποτελεί ένα κυρτό σύνολο των αποδόσεων που προκύπτουν είτε από αμιγείς είτε από μικτές στρατηγικές. Γενικότερα , λοιπόν , θα ισχύει ότι:

$$F = \text{co}\, g(A) \text{ ή } F = \text{co}\, g(S) \qquad (3.35)$$

Ορίζεται , επίσης, το κλειστό σύνολο των ατομικά ορθολογικών και εφικτών αποδόσεων. Δηλαδή, εκείνες οι αποδόσεις που προκύπτουν βάσει της ορθολογικής συμπεριφοράς του εκάστοτε παίκτη και υπάρχει η δυνατότητα να αποκτηθούν. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται ως V και θα δίνεται από τη σχέση:

$$V = F \cap \mathbb{R}_+^I \qquad (3.36)$$

Επομένως, το V αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν ταυτόχρονα και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών , υψωμένο στον αριθμό των παικτών καθώς το σύνολο των παικτών είναι διανύσματα I-διαστάσεων, αλλά και στο σύνολο των εφικτών αποδόσεων. Επιπλέον, χωρίς απώλεια της γενικότητας , θα γίνει η υπόθεση ότι η απόδοση που προκύπτει στο συνδυασμό στρατηγικών που συμβολίσαμε ως m_i είναι μηδενική. Συνεπώς, ο συνδυασμός στρατηγικών που αποτελείται από την στρατηγική του παίκτη i όταν εκείνος αποκλίνει καθώς και τη βέλτιστη αντίδραση σε αυτήν ,αποφέρει μηδέν και ισχύει:

$$g^i(m_i) = 0$$

Ουσιαστικά , δηλαδή, ο Gossner(1996) τονίζει ότι στη περίπτωση που οι υπόλοιποι παίκτες υιοθετούν τη minimax στρατηγική εναντίον του παίκτη i, εκείνος δεν θα κερδίσει απολύτως τίποτα, ακριβώς όπως λειτούργησε και ο Kandori(1992).

3.2.2 Δομή Παιγνίων Επικαλυπτόμενων Γενεών.

Εφόσον ολοκληρώθηκε η περιγραφή του παιγνίου σταδίου, πλέον υπάρχει η δυνατότητα ανάλυσης της δομής του παιγνίου των επικαλυπτόμενων γενεών. Ενδεικτικά, θα σχηματιστούν δύο διαφορετικά είδη παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών. Το πρώτο, θα αφορά τα παίγνια που θα αποτελούνται από παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές , ενώ αντίθετα το δεύτερο από τις μη παρατηρήσιμες.

Το παίγνιο επικαλυπτόμενων γενεών ουσιαστικά διαμορφώνεται μέσα από ένα απείρως επαναλαμβανόμενο παίγνιο που ξεκινάει από τη πρώτη επανάληψη ή διαφορετικά από το πρώτο στάδιο και εκτυλίσσεται μέχρι το άπειρο. Βασικό χαρακτηριστικό και σε αυτό το παίγνιο αποτελούν τόσο οι παίκτες, όσο και ειδικότερα ο τύπος αυτών των παικτών. Γενικότερα, παίκτες που ανήκουν στον ίδιο τύπο θα διαθέτουν κοινό σύνολο ενεργειών και κοινή συνάρτηση αποδόσεων, αντίστοιχα με τους παίκτες κοινού τύπου στην έρευνα του Kandori(1992). Ως παίγνιο επικαλυπτόμενων γενεών , το σύνολο των παικτών αλλάζει κατά τη διάρκεια του χρόνου και ο εκάστοτε παίκτης , ύστερα από κάποιο πεπερασμένο διάστημα, αντικαθίσταται από άλλο παίκτη ίδιου τύπου.

Όσον αφορά το πρώτο στάδιο του παιγνίου, για τον εκάστοτε παίκτη θα αποτελεί και την αντίστοιχη ημερομηνία γέννησης του. Το στοιχείο K θα συμβολίζει το διάνυσμα των επικαλυπτόμενων γενεών και μάλιστα θα ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών υψωμένο εις τον αριθμό των παικτών. Επαναλαμβάνουμε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών που περιλαμβάνει το K διαφέρει καθώς οι παίκτες απεικονίζονται σαν διανύσματα I-διαστάσεων. Το στοιχείο T απεικονίζει τη συνολική διάρκεια του παιγνίου, πόσες φορές δηλαδή θα επαναλαμβάνεται. Μάλιστα, ανάμεσα στην διάρκεια του παιγνίου T και στο δείκτη K υφίσταται μία σχέση όπου:

$$T = \sum_i K^i \qquad (3.37)$$

δηλαδή, η διάρκεια του παιγνίου T ισούται με το άθροισμα των επικαλυπτόμενων γενεών.

Σχετικά με τη διάρκεια ζωής του εκάστοτε παίκτη, ένας γενικός παίκτης της μορφής (i,m) απεικονίζει εκείνον τον παίκτη τύπου i που ανήκει στο σύνολο παικτών I και είναι παίκτης της m-γενιάς. Γενικότερα, η διάρκεια συμμετοχής του μπορεί να υπολογιστεί ποσοτικά και ο παίκτης της μορφής (i,m) θα παίζει από το στάδιο:

$$(m-1)T + \sum_{1<j\leq i} K^j + 1$$

Η μεταβλητή m αποτελεί έναν ακέραιο φυσικό αριθμό, όπου όπως αναφέρθηκε αποτελεί δείκτη της γενεάς του εκάστοτε παίκτη. Θα ολοκληρώσει τη συμμετοχή του στο παίγνιο μέχρι το στάδιο:

$$mT + \sum_{1<j\leq i} K^j$$

Ανάλογα με τη γενιά m στην οποία ανήκει ο κάθε τύπου παίκτης διαμορφώνονται και τα σύνολα των παικτών. Ενδεικτικά, όλοι οι παίκτες , παρότι θα συμμετέχουν στο παίγνιο , μέσα στο διάστημα του οποίου τα άκρα ορίστηκαν προηγουμένως, θα ζουν για T στάδια. Σε αυτή τη κατηγορία , δεν υπάγονται οι παίκτες της μηδενικής γενιάς. Αναφορικά με αυτούς τους παίκτες, όπως είναι εμφανές λόγω της γενιάς τους, δεν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν μαζί με τους υπόλοιπους παίκτες. Η διάρκεια ζωής αυτών των παικτών που συμβολίζονται ως (i,0) με i≠1, ξεκινά από το στάδιο 1 και καταλήγει μέχρι και το στάδιο:

$$\sum_{1<j\leq i} K^j$$

Η διάρκεια των επικαλυπτόμενων γενεών θα συμβολίζεται μέσω του δείκτη K^i . Για να γίνει αντιληπτή η έννοια των επικαλυπτόμενων γενεών και η σχέση που υπάρχει ανάμεσα τους εκφράζουμε ότι ο παίκτης (i,m) είναι ο μεγαλύτερος παίκτης κατά K^i συνεχόμενα στάδια **.** Για ευκολία, ως περίοδο επικάλυψης χαρακτηρίζουμε τη κοινή περίοδο ανάμεσα σε διαφορετικούς παίκτες i αλλά της ίδιας γενιάς m. Σημαντικοί , για την περαιτέρω ανάλυση του παιγνίου, είναι οι συμβολισμοί των παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών με ή χωρίς παρατηρήσιμες μεταβλητές. Έτσι, σαν παίγνιο επικαλυπτόμενων γενεών με δομή K και παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές θα συμβολιστεί κατά τον Gossner(1996) το $G^*(K)$ ενώ αντίστοιχα εκείνο δίχως τις παρατηρήσιμες στρατηγικές συμβολίζεται ως $G(K)$.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σημαντικό στοιχείο των επαναλαμβανόμενων παιγνίων αποτελεί η έννοια της ιστορίας. Στην περίπτωση όπου ένα παίγνιο επαναλαμβανόταν για πεπερασμένο αριθμό περιόδων καλούνταν τερματική ιστορία , δηλαδή η συλλογή περιλάμβανε ενέργειες από την πρώτη περίοδο μέχρι και την T. Στα απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια είχε οριστεί ως τερματική ιστορία η συλλογή μέχρι το άπειρο.

Επομένως, στη προκειμένη έρευνα θα οριστούν εκ νέου οι συμβολισμοί της ιστορίας του κάθε παιγνίου. Εφόσον, χρησιμοποιούνται τα δύο διαφορετικά επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών με τις παρατηρήσιμες και μη μικτές στρατηγικές, θα υπάρξουν αντίστοιχα και δύο διαφορετικοί συμβολισμοί. Όσον αφορά το παίγνιο με τις παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές, το οποίο ορίστηκε ως $G^*(K)$, η ιστορία σε κάθε στάδιο t θα συμβολίζεται ως h_t^* και θα ανήκει στο σύνολο ιστοριών H_t^*. Πιο αναλυτικά, η ιστορία αποτελεί μία αλληλουχία t στοιχείων του συνόλου S . Αυτά τα στοιχεία ουσιαστικά παρουσιάζουν όλες τις μικτές κινήσεις που λαμβάνουν χώρα στο παίγνιο G μέχρι και το στάδιο του παιγνίου t.

Αναφορικά, τώρα, με το παίγνιο των μη παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών εντοπίζονται κάποιες διαφορές. Υπενθυμίζουμε, ότι το παίγνιο επικαλυπτόμενων γενεών με μη παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές συμβολίζεται ως $G(K)$ και αντίστοιχα η εκάστοτε ιστορία του κάθε σταδίου t στο παίγνιο αυτό θα συμβολιστεί ως h_t και θα ανήκει στο σύνολο ιστοριών H_t. Σε αυτό το παίγνιο, η ιστορία h_t θα περιγράφει όλες τις ενέργειες που επιλέγονται από τους παίκτες στο παίγνιο G μέχρι το στάδιο t. Οπότε, η στρατηγική του παίκτη (i,m) ορίζει σε κάθε στάδιο ποιες μικτές ενέργειες υιοθετεί κατά τη διάρκεια της ζωής του αλλά σύμφωνα με την παρελθοντική ιστορία .

Όπως και στο άρθρο του Kandori(1992) έτσι και στην έρευνα του Gossner(1996) για ευκολία θα θεωρηθεί ότι οι αποδόσεις που αποκομίζουν οι παίκτες από το παίγνιο δεν προεξοφλούνται. Γενικά , πάντως, έχει ήδη γίνει αναφορά σε παίγνια παικτών που προεξοφλούν τις αποδόσεις τους με έναν συντελεστή δ, ο οποίος άνηκε στο σύνολο (0,1). Μάλιστα, όσο πιο κοντά στη μονάδα υπολογιζόταν το δ τόσο πιο υπομονετικός χαρακτηριζόταν ο εκάστοτε παίκτης.

Η ανάλυση θα συνεχιστεί με τον καθορισμό της υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας. Προς επανάληψη, ως υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία έχει οριστεί οποιαδήποτε ισορροπία Nash , η οποία παραμένει ισορροπία Nash στο παίγνιο μετά από κάθε t-ιστορία. Στην παρούσα έρευνα, η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία στο κάθε παίγνιο $G^*(K)$ και $G(K)$ ορίζεται ως ένα διάνυσμα στρατηγικών της μορφής:

$$(\sigma_{i,m})_{i \in I, m \in N^*}$$

δηλαδή το σύνολο των στρατηγικών των παικτών τύπου i που ανήκουν στο σύνολο των παικτών I και m γενεάς, που όπως δηλώσαμε ανήκει στους θετικά φυσικούς αριθμούς.

Η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία διαμορφώνεται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε σε κάθε στάδιο του παιγνίου ο εκάστοτε παίκτης να καταφέρνει να μεγιστοποιεί την συνολική του αναμενόμενη απόδοση . Ωστόσο, υπό την προϋπόθεση ότι κάθε διαφορετικός παίκτης της μορφής (j,n) , δηλαδή διαφορετικού τύπου και διαφορετικής γενεάς, ακολουθεί τη στρατηγική $\sigma_{j,n}$. Αναφορικά με την έννοια της ισορροπίας, εισάγεται και η έννοια της στασιμότητας. Ως στάσιμη ισορροπία ορίζεται εκείνη όπου οι παίκτες διαφορετικών γενεών αλλά κοινού τύπου κερδίζουν κοινή μέση απόδοση. Συνεπώς, κάθε ροή αποδόσεων που πηγάζει από μία υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία και προσφέρει σε κάθε παίκτη την ίδια απόδοση, θα αποτελεί υποπαιγνιακά τέλεια απόδοση. Από πλευράς συμβολισμών, για το παίγνιο $G^*(K)$ το σύνολο των στάσιμων αποδόσεων της υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας ορίζεται ως $E^*s(G,K)$ ενώ για το $G(K)$ ορίζεται ως $Es(G,K)$.

3.2.3 Εθιμικό Θεώρημα σε παρατηρήσιμες και μη Μικτές Στρατηγικές.

Ο Gossner (1996), βάσει του άρθρου του Kandori(1992) , διατυπώνει το εξής εθιμικό θεώρημα στην περίπτωση των παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών:

Θεώρημα 3.5 Εάν το $V \cap \mathbb{R}^{I}_{++} \neq \emptyset$ τότε για κάθε

$$\varepsilon > 0 \text{ , } \exists \left(K_0^2, \dots, K_0^I\right) \in \mathbb{N}^{t-1},$$

$$\text{για κάθε } (K^2, \dots, K^I) \gg (K_0^2, \dots, K_0^I) \text{ , } \exists K_0^1 \in \mathbb{N} \text{ , } \quad \forall K^1 > K_0^1, \quad \forall u \in V,$$

$$\mathcal{B}(u, \varepsilon) \cap E^* s(G, K) \neq \emptyset$$

Πιο συγκεκριμένα, εκφράζει το γεγονός ότι κάθε απόδοση της μορφής V μπορεί να προσεγγιστεί από τις αποδόσεις μίας υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας. Ωστόσο, για να καταλήξει σε αυτό το αποτέλεσμα θα πρέπει να ισχύουν οι υποθέσεις του Kandori(1992) , οι οποίες διατυπώνονται ως εξής:

Θεώρημα 3.6 Προκειμένου κάθε απόδοση της μορφής V να μπορεί να προσεγγιστεί από μία υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία θα πρέπει να ισχύουν οι εξής υποθέσεις:

1. Να είναι αρκετά μεγάλες οι περίοδοι επικάλυψης.
2. Να έχουν αρκετά μεγάλη διάρκεια ζωής οι παίκτες.

Προς εξήγηση των υποθέσεων, η πρώτη υπόθεση ουσιαστικά απαιτεί τη συνύπαρξη των παικτών του ίδιου τύπου , για παράδειγμα του τύπου i , για ένα εύλογο χρονικό διάστημα. Η δεύτερη υπόθεση εν ολίγοις απαιτεί τη πάροδο αρκετού χρονικού διαστήματος ανάμεσα στον θάνατο ζευγών παικτών, δηλαδή να ζουν όσο γίνεται πιο πολύ. Αυτή η δομή ουσιαστικά προσφέρεται καθώς ικανοποιεί τον τρόπο επιβράβευσης που εισήγαγε ο Kandori(1992). Ενδεικτικά, η επιβράβευση λαμβάνει χώρα λίγο πριν τη λήξη ζωής του κάθε παίκτη και διαμορφώνεται ανάλογα με τη συμπεριφορά που υιοθέτησε στο παρελθόν.

Γενικότερα , οι παίκτες που μοιράζονται την ίδια γενεά συμμετέχουν και παίζουν ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο κατά τη διάρκεια K^1 σταδίων , έπειτα λαμβάνει χώρα ο θάνατος τους , όμως δεν πεθαίνουν όλοι ταυτόχρονα. Συνεπώς, στη διαδικασία επιβράβευσης , λίγο πριν ολοκληρωθεί η ζωή του παίκτη 1 , αυτός θα αποκομίζει την επιβράβευση του για κάποια διάρκεια σταδίων. Έπειτα, ο παίκτης τύπου 2 θα επιβραβευθεί κατά τη διάρκεια των K^2 σταδίων χωρίς να επιδρά στην απόδοση που έλαβε ο παίκτης τύπου 1 που έληξε η ζωή του. Με αυτόν τον τρόπο, συνεχίζεται η διαδικασία για τους επόμενους τύπους παικτών.

Εφόσον , για τη περίπτωση των μικτών παρατηρήσιμων στρατηγικών αξιοποιήθηκε το εθιμικό θεώρημα του Kandori(1992), τώρα θα αναλυθεί ένα εθιμικό θεώρημα αναφορικά με τις μη παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές. Ειδικότερα, το εθιμικό θεώρημα, σύμφωνα με τον Gossner(1996) διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3.7 Εάν το $\mathrm{V} \cap \mathbb{R}_{++}^{\mathrm{I}} \neq \emptyset$ τότε

για κάθε ε>0 , υπάρχει K_0 που ανήκει $\mathbb{N}^{\mathrm{I}}$, $\text{για κάθε } \mathrm{K} \gg \mathrm{K}_0$, για κάθε u που ανήκει V έτσι ώστε

$$\mathcal{B}(\mathrm{u}, \varepsilon) \cap \mathrm{Es}(\mathrm{G}, \mathrm{K}) \neq \emptyset$$

Η διαδικασία απόδειξης ενός εθιμικού θεωρήματος, στη περίπτωση των επαναλαμβανόμενων παιγνίων με μη παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές είναι περισσότερο σύνθετη από ότι η αντίθετη περίπτωση. Ο Gossner(1996) εισάγει έναν αλγόριθμο, ο οποίος αναλαμβάνει να ορίσει τις στρατηγικές των παικτών κατά τη διάρκεια μιας επικάλυψης, ανάλογα με το στάδιο του παιγνίου. Θα χρησιμοποιηθούν στρατηγικές ισορροπίας, οι οποίες θα οδηγούν σε μία μέση απόδοση πολύ κοντά σε ένα σταθερό u . Για να εντοπίζονται οι αποκλίσεις θα οριστεί ένα Κύριο Μονοπάτι και το u θα προσεγγίζεται από αποδόσεις που αποκομίζονται από αμιγείς στρατηγικές του μονοπατιού αυτού.

Η προσέγγιση της τιμωρίας παραμένει η ίδια, δηλαδή κάθε φορά που κάποιος παίκτης αποκλίνει , όλοι οι υπόλοιποι παίκτες προκειμένου να τον τιμωρήσουν θα υιοθετούν την minimax στρατηγική. Το ζήτημα το οποίο προκύπτει πάλι ,είναι το πως θα εξασφαλιστεί στο παίγνιο ότι οι παίκτες, όταν εντοπίσουν την απόκλιση, θα υιοθετήσουν τη minimax στρατηγική τους. Ο Kandori(1992) το εξασφάλιζε τιμωρώντας πλέον και εκείνους τους παίκτες που δεν τιμωρούσαν τον αποκλίνοντα.

Στη περίπτωση, όμως, των μη παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών σε πεπερασμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια δεν μπορεί να υιοθετηθεί αυτή η λογική. Πλέον, θα χρησιμοποιείται ένα στατιστικό πάνω στην ιστορία του παιγνίου. Δηλαδή, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας τιμωρίας οι παίκτες θα διακρίνονται σε εκείνους που τιμωρούν σωστά και επιδρούν στο παίγνιο, τους 'καλούς' , και σε εκείνους που δεν ολοκληρώνουν σωστά τη τιμωρία, τους λεγόμενους 'κακούς' . Γίνεται αντιληπτό, ότι μόνο όσοι κάνουν σωστά τη δουλειά τους, θα λάβουν μία πρόσθετη επιβράβευση στο τέλος της ζωής τους.

Με στόχο την κατανόηση της διαδικασίας τιμωρίας, ο Gossner(1996) περιγράφει τη περίπτωση όπου ένας παίκτης i θα πρέπει να τιμωρηθεί κατά τη διάρκεια P σταδίων του παιγνίου. Γενικότερα, πρέπει να δοθεί επεξήγηση στο πως θα διακρίνονται οι καλοί από τους κακούς τιμωρούς. Συνεπώς, στο τέλος των περιόδων τιμωρίας θα επέλθει μία σύγκριση ανάμεσα στις ενέργειες που επέλεξαν οι παίκτες τιμωροί κατά τη διάρκεια της τιμωρίας σε σχέση με το τι θα είχε συμβεί αν είχαν επιλέξει συνεχόμενα όλοι τη minimax στρατηγική εναντίον του.

Έχει ήδη οριστεί ότι ο παίκτης θα τιμωρείται για P στάδια, οπότε ορίζεται η ιστορία της ακολουθίας των P σταδίων τιμωρίας ως h=($h_{t_0+1},\dots,h_{t_0+P}$). Για κάθε ενέργεια a που ανήκει στο σύνολο ενεργειών A θα οριστεί το μέγεθος n(a) ,το οποίο ουσιαστικά θα δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η ενέργεια a στο σύνολο ιστοριών h. Αντίστοιχα, θα οριστεί και η ενέργεια του a^{-j} που ανήκει στο σύνολο A^{-j} , με τον αριθμό n(a^{-j}) να υποδηλώνει τον αριθμό των ενεργειών που είναι συμβατές με το a^{-j}. Τώρα, θα χρησιμοποιηθεί το στατιστικό που αναφέραμε πάνω στην ιστορία h. Για κάθε $\eta > 0$ θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{a}_{\eta}^{\mathrm{i,j}} = \mathbb{I}\{\tfrac{1}{\mathrm{P}}\textstyle\sum_{\mathrm{a}\in\mathrm{A}} |\,\mathrm{n(a)} - \mathrm{n(a^{-j})P(m_i^j = a^j)}| \;< \eta\,\} \tag{3.38}$$

Αρχικά , θα γίνει ανάλυση των όρων που περιλαμβάνει η σχέση αυτή. Το σύμβολο $\mathbb{I}$ απεικονίζει μία συνάρτηση δείκτη και η πιθανότητα $P(m_i^j = a^j)$ ουσιαστικά αποτυπώνει τη πιθανότητα ότι ο παίκτης j επιλέγει να παίξει a^j ενώ ταυτόχρονα χρησιμοποιεί το m_i^j, δηλαδή τη minimax στρατηγική κατά του παίκτη i. Γενικότερα, το στατιστικό συμβάλει στο γεγονός ότι εφόσον δεν είναι παρατηρούμενες οι στρατηγικές, οι υπόλοιποι παίκτες δεν εντοπίζουν την απόκλιση και στρέφονται σε μία απόσταση που πηγάζει από συχνότητες. Το μέγεθος $a_{\eta}^{i,j}$ λαμβάνει τις τιμές ένα και μηδέν.

Πιο συγκεκριμένα, αν η αναλογία των ενεργειών που επιλέγει ο παίκτης j είναι κοντά στην αναλογία των ενεργειών της minimax στρατηγικής του παίκτη j εναντίον του αποκλίνοντα παίκτη i , ανεξαρτήτως των επιλογών των άλλων παικτών, λαμβάνει τη τιμή 1. Δηλαδή, ο παίκτης j ολοκληρώνει τη διαδικασία τιμωρίας και επιδρά στο παίγνιο, άρα θα ανήκει στην κατηγορία των 'καλών' τιμωρών.

Η απορία που εύλογα προκύπτει ουσιαστικά αφορά το κατά πόσο τα στατιστικά που χρησιμοποιούνται είναι τα απαραίτητα για το συγκεκριμένο παράδειγμα. Ο Gossner(1996), για να εξαλείψει αυτές τις αμφιβολίες, διατύπωσε δύο λήμματα. Ειδικότερα, ισχύει ότι:

Θεώρημα 3.8 Για κάθε δ > 0 και η > 0 , υπάρχει P_0 στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε P ≥ P_0 αν ο παίκτης j≠i χρησιμοποιεί τη στρατηγική $\mathrm{m_i^j}$ επανειλημμένα κατά τη διάρκεια των P σταδίων δημιουργώντας μία ιστορία h , η πιθανότητα ότι το $\mathrm{a}_{\eta}^{\mathrm{i,j}}$ είναι μηδενικό είναι μικρότερη από δ ανεξαρτήτως των στρατηγικών που υιοθετούν οι άλλοι παίκτες πέρα του j.

Ουσιαστικά , δηλαδή, δηλώνει ότι αν ο κάθε παίκτης j , ο οποίος αναλαμβάνει να τιμωρήσει τον αποκλίνοντα, χρησιμοποιεί τη minimax στρατηγική εναντίον του αποκλίνοντα , κατά τη διάρκεια P σταδίων, έχει μεγάλη πιθανότητα να αποτελέσει ‘καλό’ τιμωρό. Είναι λογικό, όσο πιο κοντά στη minimax στρατηγική βρίσκονται οι ενέργειες των παικτών που οφείλουν να τιμωρήσουν τον αποκλίνοντα, τόσο μεγαλύτερη και η πιθανότητα να ανήκουν στους επιδραστικούς παίκτες.

Αναφορικά με την μέση απόδοση του αποκλίνοντα παίκτη , στη περίπτωση όπου όλοι οι παίκτες που συμμετέχουν στη διαδικασία τιμωρίας είναι ‘καλοί’ και το μέγεθος η είναι αρκετά μικρό, τότε είναι κοντά στη minimax απόδοση του, δηλαδή:

Θεώρημα 3.9 Για κάθε ε>0 , υπάρχει η>0 τέτοιο ώστε για κάθε i και h=$(h_1,\ldots,h_P) \in H_P$, εάν για όλα τα j ≠ i , $a_\eta^{i,j}$=1 τότε

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P} g^i(h_k) < \varepsilon$$

3.2.4 Αλγόριθμος.

Πλέον, μπορεί να γίνει επεξήγηση του αλγορίθμου που δηλώσαμε ότι θα χρησιμοποιηθεί. Πιο συγκεκριμένα, αναφέραμε ότι θα χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος, ο οποίος αναλαμβάνει να ορίσει τις στρατηγικές των παικτών κατά τη διάρκεια μιας επικάλυψης. Συνεπώς, θα μπορεί να ορίσει κάποιες υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες του παιγνίου $G(K)$ που προσφέρουν απόδοση κοντά στο u. Γενικότερα, ο αλγόριθμος ορίζεται σε μία επικάλυψη, όταν ο παίκτης i αποτελεί τον μεγαλύτερο ηλικιακά παίκτη και θα συμβολίζεται ως $\mathcal{K}(i)$. Ο αλγόριθμος, θα περιγράφει ένα Κύριο Μονοπάτι , το οποίο θα εμπεριέχει και το μονοπάτι ισορροπίας και θα περιγράφει τι συμβαίνει στη περίπτωση απόκλισης από αυτό.

Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος $\mathcal{K}(i)$ ορίζει το κύριο μονοπάτι, το οποίο διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad \varPhi\acute{\alpha}\sigma\eta\ \alpha\pi o\zeta\eta\mu\acute{\iota}\omega\sigma\eta\varsigma \\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ t \in [1,R]\ \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \tilde{z}_{+}^{i-1}\ \alpha\nu\ r'=0, \tilde{z}_{-}^{i-1}\ \alpha\nu\ r'=1 \\ \qquad\qquad\qquad K\alpha\nu o\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ \varPhi\acute{\alpha}\sigma\eta \\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ t \in [R+1, K^i-R-P]\ \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \tilde{z}\ \alpha\nu\ \lambda=0\ , \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\ \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \tilde{z}_{-}^{\lambda} \\ \qquad\qquad\qquad \varPhi\acute{\alpha}\sigma\eta\ E\pi\iota\beta\rho\acute{\alpha}\beta\varepsilon\upsilon\sigma\eta\varsigma \\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ t \in [K^i-R-P+1, K^i-P]\ \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \tilde{z}_{-}^{i}\ \alpha\nu\ r(i)=0\ , \\ \tilde{z}_{+}^{i} \alpha\nu\ r(i)=1, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ r'=r(i) \\ \qquad\qquad\qquad T\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}\ \varPhi\acute{\alpha}\sigma\eta \\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ t \in [K^i-P+1, K^i]\ o\iota\ \pi\alpha\acute{\iota}\kappa\tau\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \tau o\upsilon\ i\ \pi\alpha\acute{\iota}\zeta o\upsilon\nu\ \tilde{z} \\ o\ i\ \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \mu\acute{\iota}\alpha\ \beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau\eta\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta\ \tau o\upsilon\varsigma. \\ \varTheta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ \lambda=0\ \kappa\alpha\iota\ \xi\varepsilon\kappa\iota\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\ \mathcal{K}(i+1) \end{cases}$$

Η διαδικασία που ακολουθείται λόγω του αλγορίθμου διαχωρίζεται ανάλογα με τη φάση του παιγνίου στην οποία βρισκόμαστε. Η περισσότερη επικάλυψη απαρτίζεται από τη Κανονική Φάση , με την επιλογή κύκλων ενεργειών της μορφής $(\tilde{a},\tilde{a}),(\tilde{a},\tilde{b})\ και\ (\tilde{b},\tilde{b})$. Αναφορικά με τους κύκλους, υπάρχουν δύο κύκλοι ενεργειών σε αμιγείς στρατηγικές, ο $\tilde{a}$ και ο $\tilde{b}$, οι οποίοι οδηγούν σε μέση απόδοση υ και w, κοντά στο u . Η ύπαρξή τους είναι απαραίτητη , καθώς με αυτούς ο κάθε παίκτης δεν είναι αδιάφορος ανάμεσα στο $\tilde{a}$ και στο $\tilde{b}$ αλλά ο καθένας προτιμά $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ στη minimax στρατηγική του.

Ειδικότερα, κάθε κύκλος ενεργειών θα αποτελείται από ℓ στοιχεία του συνόλου Α, που περιλάμβανε τις ενέργειες του κάθε παίκτη. Επίσης, θα οριστούν κύκλοι μεγέθους 2 ℓ , δηλαδή διπλάσιων στοιχείων του συνόλου Α . Οι κύκλοι ορίζονται ως $\tilde{z}=(\tilde{a},\tilde{b})$ για κάθε παίκτη i. Ανάλογα μάλιστα, με την απόδοση που προσφέρεται κάθε φορά από τον εκάστοτε κύκλο θα ισχύει ότι:

Για κάθε κύκλο $\tilde{z}=(\tilde{a},\tilde{b})$ θα ισχύει ότι

1. $\tilde{z}_+^i$=$(\tilde{a},\tilde{a})$, $\tilde{z}_-^i=(\tilde{b},\tilde{b})$ αν η απόδοση $\upsilon^i > w^i$

2. $\tilde{z}_+^i=(\tilde{b},\tilde{b})$ $\tilde{z}_-^i=(\tilde{a},\tilde{a})$, αν η απόδοση $\upsilon^i < w^i$

όπου $\tilde{z}_+^i$ απεικονίζει τον αγαπημένο κύκλο ενεργειών του παίκτη i

και $\tilde{z}_-^i$ απεικονίζει εκείνον που δεν επιθυμεί ανάμεσα στους $(\tilde{a},\tilde{a})$, $(\tilde{b},\tilde{b})$

Όσον αφορά την περίπτωση της απόκλισης νωρίς από το Κύριο Μονοπάτι, οι υπόλοιποι παίκτες θα τιμωρούν τον αποκλίνοντα κατά την διάρκεια P σταδίων στο P(j). Ύστερα από τα P στάδια , χρησιμοποιείται μία σειρά μεταβλητών της μορφής r(k) με στόχο τη διάκριση των τιμωρών στους 'καλούς' και στους 'κακούς'.

Επόμενη φάση, η οποία ακολουθεί, ονομάζεται Φάση Επιβράβευσης και λαμβάνει χώρα μετά την Κανονική Φάση. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, επιλέγεται ο κύκλος ενεργειών $\tilde{z}_+^i$ αν και μόνο αν ο παίκτης i άνηκε στην κατηγορία των 'καλών' τιμωρών όταν του ζητήθηκε να ασκήσει την τιμωρία. Στην αντίθετη περίπτωση, επιλέγεται ο κύκλος ενεργειών $\tilde{z}_-^i$. Μάλιστα, στην πρώτη περίπτωση, όπου ο τιμωρός ανήκει στους 'καλούς' η μεταβλητή r(k) θα ισούται με τη μονάδα. Συνεπώς, γίνεται εμφανές , ότι η επιβράβευση πηγάζει καθαρά από τη σωστή συμπεριφορά του εκάστοτε παίκτη. Αν δηλαδή ολοκληρώσουν τη διαδικασία της τιμωρίας σωστά και ανήκουν στους 'καλούς' τιμωρούς, τότε θα έρθει και η επιβράβευση.

Σημαντικό στοιχείο στην αρχή της κάθε επικάλυψης αποτελεί η Φάση Αποζημίωσης ή Αντιστάθμισης. Έστω, ότι υφίσταται παίκτης , ο οποίος αποκομίζει μεγαλύτερη απόδοση όταν οι υπόλοιποι παίκτες επιβραβεύονται. Επομένως, θα είχε κάθε λόγο να αποκλίνει επίτηδες από το Κύριο Μονοπάτι, προκειμένου να επιβραβευθούν οι τιμωροί του και εκείνος να ωφεληθεί. Εδώ συμβάλει , λοιπόν, η Φάση Αντιστάθμισης.

Προκειμένου να αποφευχθεί αυτή η συμπεριφορά, η απόδοση της τελευταίας περιόδου επιβράβευσης αντισταθμίζεται, δηλαδή αν παιζόταν ο κύκλος $\tilde{z}_{+}^{i-1}$ για να επιβραβεύσει τον παίκτη i-1 , τότε επαναλαμβάνεται ο μη επιθυμητός κύκλος ενεργειών $\tilde{z}_{-}^{i-1}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει απόδοση. Δηλαδή, ενώ θα επιβραβευόταν ο παίκτης i-1 λόγω των ενεργειών $\tilde{z}_{+}^{i-1}$, αν κάποιος αποκλίνοντας ωφελείται από αυτό, η απόδοση πρέπει να αντισταθμιστεί.

Ολοκληρώνεται η λειτουργία του αλγορίθμου με την Τελική Φάση. Εκεί, ο παίκτης επιλέγει τη βέλτιστη αντίδραση του για τα τελευταία P στάδια της ζωής του. Το βασικότερο όμως πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός ότι μεγάλης ηλικίας παίκτες όπως ο παίκτης i, εφόσον η ζωή τους λήγει, δεν έχουν κίνητρο να τιμωρήσουν κανέναν. Για αυτόν τον λόγο, αν κάποιος παίκτης j≠i αποκλίνει αργά, η επικάλυψη ολοκληρώνεται με μία Nash ισορροπία στο G του LD(j). Επομένως, για να εντοπίζεται ο παίκτης j που έχει αποκλίνει εισάγεται μία μεταβλητή τύπου λ, και ο j τιμωρείται στην επόμενη επικάλυψη κατά τη διάρκεια της Κανονικής Φάσης. Γενικά, ο αλγόριθμος θα ξεκινάει με κάποια συγκεκριμένα δεδομένα, δηλαδή στο t=1 με i=2 , λ=0 , r(j)=1 και r’=0.

3.2.5 Στρατηγική Τιμωρίας.

Με βάση την επεξήγηση που δόθηκε για το κάθε στάδιο ξεχωριστά , πρέπει να αναλυθούν περαιτέρω οι διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στη περίπτωση της απόκλισης και στο πως λειτουργεί η τιμωρία του αποκλίνοντα. Γενικά, αν ο παίκτης j αποκλίνει από το Κύριο Μονοπάτι κατά το στάδιο t_0 μεταφέρεται στο στάδιο P(j) ή LD(j). Πιο αναλυτικά, ο Gossner(1996) έχει ορίσει το πώς θα διαμορφωθεί η τιμωρία ανάλογα με το ποιο είναι το εκάστοτε στάδιο.

Έστω, ότι το στάδιο που λαμβάνει χώρα η απόκλιση επιτρέπει την τιμωρία , δηλαδή δεν πραγματοποιείται αργά. Δηλαδή, αφορά τη περίπτωση όπου ο παίκτης που αποκλίνει, ορίζεται ως j , διαφέρει από τον παίκτη i και αποφασίζει να αποκλίνει σε στάδιο $t_0 \leq K^i - 2P - R$ και τη περίπτωση όπου ο παίκτης i ταυτίζεται με τον παίκτη j και αποκλίνει στο $t_0 \leq K^i - P$. Προς υπενθύμιση, το K^i υποδηλώνει την διάρκεια μίας επικάλυψης, το P συμβολίζει τα στάδια κατά τα οποία εκτυλίσσεται η τιμωρία ενώ το R συμβολίζει τα στάδια κατά τα οποία ο εκάστοτε παίκτης επιβραβεύεται.

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν η διαδικασία της τιμωρίας του παίκτη j , που συμβολίζεται ως P(j) , ξεκινάει παίζοντας το παιχνίδι G για τα επόμενα P στάδια. Έπειτα, ορίζεται εκ νέου η μεταβλητή r(k), η οποία διαχωρίζει τους ‘καλούς’ τιμωρούς από τους αντίστοιχους ΄κακούς’. Ειδικότερα, το r(k) θα δίνεται από τον τύπο r(k)= $a_{\eta}^{i,j}(h_{t_0+1},\dots,h_{t_0+P})$ για κάθε k≠j διατηρώντας το r(j) όμως σταθερό. Υπενθυμίζουμε ότι το $a_{\eta}^{i,j}$ χρησιμοποιείται στο παίγνιο προκειμένου να εντοπιστεί αν η αναλογία των ενεργειών που υιοθετούνται αντιστοιχούν στην αναλογία των minimax στρατηγικών. Ύστερα, επιστρέφουν οι παίκτες και πάλι στο Κύριο Μονοπάτι, δηλαδή παίζουν ότι ορίζεται σε αυτό στο στάδιο $t_0 + P + 1$.

Υφίσταται , όμως, και η περίπτωση όπου η απόκλιση εμφανίζεται αργά και συμβολίζεται ως LD(j). Όσον αφορά το στάδιο σε αυτήν την περίπτωση, διαμορφώνεται αν ο παίκτης i διαφέρει από τον παίκτη j το $t_0 > K^i - 2P - R$. Εδώ όμως επειδή δεν υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι τιμωρίας , εισάγεται μία νέα μεταβλητή λ , η οποία θα εντοπίζει τον παίκτη j και θα τον τιμωρεί στην επόμενη επικάλυψη, στη Κανονική Φάση. Επομένως, θα ορίζεται λ=j , και θα επιλέγεται η ενέργεια e^*, μέχρι το t=K^i. Έπειτα ξεκινάει ο αλγόριθμος της επόμενης επικάλυψης.

3.2.6 Επέκταση Εθιμικών Θεωρημάτων.

Ωστόσο, το υπόδειγμα το οποίο παρουσίασε ο Gossner(1996) , αφορούσε παίγνιο με παίκτες που δεν προεξοφλούσαν τις αποδόσεις τους. Για αυτό το λόγο, παρουσιάζει ως ειδική περίπτωση τη προεξόφληση αποδόσεων. Πιο αναλυτικά, εισάγεται ένας συντελεστής προεξόφλησης Δ με τιμές στο κλειστό σύνολο [0,1]. Διατηρείται ο συμβολισμός $G(K,\Delta)$ για τα επαναλαμβανόμενα παίγνια μη παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών ενώ ως $G^*(K,\Delta)$ ορίζεται το επαναλαμβανόμενο παίγνιο παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών.

Ο Gossner(1996), επαναλαμβάνει τα δύο εθιμικά θεωρήματα που διατυπώνει ο Smith(1992) για προεξοφλούμενα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών σε παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές για περισσότερους από δύο παίκτες. Το πρώτο, καλείται ανομοιόμορφο καθώς δηλώνει ότι όσο πιο υπομονετικός είναι ένας παίκτης, δηλαδή όσο το Δ τείνει στη μονάδα, για ένα u στο σύνολο των αποδόσεων V και για κάθε σταθερό διάνυσμα επικαλύψεων K υπάρχει υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία που οδηγεί στο u.

Το δεύτερο θεώρημα, το οποίο καλείται ομοιόμορφο, αποδεικνύει ότι αν η διάσταση του συνόλου αποδόσεων V είναι το I , κάθε απόδοση u που ανήκει στο σύνολο V μπορεί να προσεγγιστεί από αποδόσεις υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας του παιγνίου G^*(K,Δ). Όμως , αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν ικανοποιούνται δύο υποθέσεις. Αρχικά, θα πρέπει οι παίκτες να είναι υπομονετικοί, δηλαδή το Δ να είναι κοντά στη μονάδα και να είναι αρκετά μεγάλη η περίοδος επικάλυψης.

Το εθιμικό θεώρημα που διατύπωσε ο Gossner(1996) , αναφορικά με τα παίγνια όπου οι μικτές στρατηγικές δεν είναι παρατηρήσιμες , μπορεί να επεκταθεί και στο παίγνιο όπου υφίσταται προεξόφληση, σαν ανομοιόμορφο εθιμικό θεώρημα. Ενδεικτικά, μπορούν να διορθωθούν κάποιες μεταβλητές στον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε , όπως το G και οι αποδόσεις u , που πλέον προεξοφλούνται. Μάλιστα, όλες οι διαφορές που εντοπίζονται στην υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία που παρουσιάζονταν στην απόδειξη του εθιμικού θεωρήματος του είναι τόσο αυστηρές όσο και πεπερασμένες σε αριθμό, και ίσχυαν ακόμα και σε ενδεχόμενη μικρή προεξόφληση αποδόσεων.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα , το οποίο υποστηρίζει ο Gossner(1996) αφορά το κατά πόσο τα εθιμικά θεωρήματα , που ισχύουν σε μη παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές επαναλαμβανόμενων παιγνίων, εφαρμόζονται επιτυχώς και σε παρατηρήσιμες μικτές στρατηγικές. Γενικά, τα παίγνια αυτά αποτελούν ξεκάθαρα δύο διαφορετικές καταστάσεις, και μάλιστα το σύνολο των αποδόσεων των υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών με παρατηρούμενες μικτές στρατηγικές δεν περιλαμβάνεται στο αντίστοιχο σύνολο αποδόσεων των παιγνίων μη παρατηρούμενων μικτών στρατηγικών.

Ωστόσο, έχουν υπάρξει αρκετά εθιμικά θεωρήματα, τα οποία ύστερα από κάποιες προσαρμογές εφαρμόζονται επιτυχώς και στις δύο περιπτώσεις. Γενικά, οι αλγόριθμοι μπορούν να προσαρμοστούν εύκολα και για την περίπτωση των παρατηρούμενων μικτών στρατηγικών, καθώς στις παρατηρούμενες στρατηγικές είναι εμφανές το αν κάποιος παίκτης επιλέγει τη minimax στρατηγική ή όχι.

Ολοκληρώνοντας, ο νέος αλγόριθμος θα διαμορφωθεί ουσιαστικά αντικαθιστώντας την μεταβλητή που χρησιμοποιείται σαν στατιστικό της περιόδου τιμωρίας. Πιο συγκεκριμένα, στον αλγόριθμο, στο τέλος της περιόδου τιμωρίας , το στατιστικό r(k) υπολογιζόταν ως r(k)= $a_{\eta}^{i,j}(h_{t_0+1},\dots,h_{t_0+P})$. Πλέον, το στατιστικό θα λαμβάνει τις τιμές 0 και 1 αντίστοιχα ανάλογα με τις επιλογές του κάθε παίκτη. Αν επαναλαμβάνουν την minimax στρατηγική τους m_j^k κατά τη διάρκεια των P σταδίων τιμωρίας, τότε το r(k)=1. Στην αντίθετη περίπτωση το r(k)=0. Επομένως, οι παίκτες γνωρίζοντας ότι θα αποκομίσουν επιβράβευση στο τέλος της ζωής τους, αν ακολουθήσουν τη minimax στρατηγική, δεν θα έχουν κίνητρο να αποκλίνουν ούτε εκείνοι αλλά ούτε και οι υπόλοιποι από το Κύριο Μονοπάτι.

3.3 Ανάλυση Επαναλαμβανόμενου Παιγνίου με Πεπερασμένης Διάρκειας Επικαλυπτόμενες Γενεές Παικτών.

Αναφορικά με τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών, τα οποία μελετάμε διεξοδικά, ασχολήθηκε και ο Salant (1991). Στην έρευνα του, επικεντρώνεται σε απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια τα οποία , ωστόσο, απαρτίζονται από παίκτες πεπερασμένης διάρκειας ζωής. Έπειτα, όπως σε κάθε παίγνιο επικαλυπτόμενων γενεών, αντικαθίστανται από παίκτες επόμενης γενεάς. Γενικότερα, παίγνια τέτοιας μορφής απεικονίζουν καταστάσεις που βιώνουν επιχειρήσεις σε περιβάλλοντα νομοθετημένα ή ολιγοπωλιακά.

Η έρευνα αυτή βασίζεται σε ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο που απαρτίζεται από δύο παίκτες , των οποίων οι ταυτότητες αλλάζουν με τη πάροδο του χρόνου. Βασικός στόχος του Salant(1991) είναι η ανάλυση της επίδρασης της επικάλυψης στο σχηματισμό στρατηγικών του εκάστοτε παίκτη. Πιο γενικά, κάθε επιχείρηση, κυβέρνηση ή κάποιο πιστωτικό ίδρυμα διαθέτει κάποιο χρονικό ορίζοντα προκειμένου να λάβει τις απαραίτητες για εκείνο αποφάσεις. Ωστόσο, ο οποιοσδήποτε περιορισμός επιδρά στον χρονικό ορίζοντα λήψης αποφάσεων και πολλές φορές οδηγεί σε απώλεια αμοιβαίως ωφελούμενων αποτελεσμάτων.

Το κυριότερο , όμως στοιχείο, όταν για παράδειγμα δύο επιχειρήσεις πρέπει να λάβουν από κοινού αποφάσεις , αποτελεί η υπόθεση περί κοινού πεπερασμένου ορίζοντα. Βεβαίως, υπάρχουν περιπτώσεις που η υπόθεση αυτή ικανοποιείται. Οπότε, τα αποτελέσματα της επαναλαμβανόμενης αλληλεπίδρασης τους συχνά είναι αναπόφευκτα και όχι άριστα, όπως για παράδειγμα η περίπτωση του διλήμματος του φυλακισμένου που εξετάσαμε ήδη αρκετές φορές. Υφίστανται , όμως , και οι περιπτώσεις όπου όντως τα μέλη που αλληλοεπιδρούν δεν μοιράζονται κοινό ορίζοντα αποφάσεων.

Το πρόβλημα , το οποίο πηγάζει από τη διαφορά του ορίζοντα ανάμεσα στους λήπτες αποφάσεων είναι το γεγονός ότι όσων ο ορίζοντας κρίνεται μικρός, μπορεί να λαμβάνουν περισσότερο μυωπικές ευκαιριακές αποφάσεις. Αν όμως υπάρχει το στοιχείο της επικάλυψης, θα αποφεύγονται τέτοιου είδους αποφάσεις και κάθε φορά θα υπάρχει κάποιος , ο οποίος θα ενδιαφέρεται για κάποια επόμενη περίοδο και δεν θα λαμβάνει τέτοιου είδους ευκαιριακές αποφάσεις. Επομένως, στο άρθρο του ο Salant(1991) δημιουργεί ένα υπόδειγμα, το οποίο περιλαμβάνει το στοιχείο της επικάλυψης και αποτελείται από παίκτες, που θα πρέπει να υιοθετούν ενέργειες , οι οποίες θα επιδρούν στη μελλοντική απόδοση που θα αποκομίσουν.

3.3.1 Δομικά Στοιχεία Παιγνίου Σταδίου.

Το υπόδειγμα το οποίο θα διαμορφωθεί, ουσιαστικά αποτελείται από δύο παίκτες, οι οποίοι θα μπορούσαν να είναι είτε οργανισμοί είτε ιδρύματα, αλλά οι βασικές διαφορές που θα προκύπτουν θα αφορούν τους διευθυντές τους. Δηλαδή, οι παίκτες του παιγνίου θα είναι οι διευθυντές. Δεν θα εντοπίζεται καμία διαφορά και μεταβολή στη δομή του εκάστοτε οργανισμού ή ιδρύματος. Το παίγνιο απαρτίζεται από παίκτες δύο τύπων, που θα τους συμβολίσουμε ως Α και Β τύπους. Όσον αφορά τη διάρκεια ζωής των παικτών, επιλέγεται να είναι μεγαλύτερη ή ίση των δύο επαναλήψεων , δηλαδή $T \geq 2$.

Πιο ειδικά, όταν το παίγνιο αποτελείται από παίκτες με διάρκεια ζωής μόλις δύο περιόδους παρουσιάζεται μία διαφορετική δομή αναφορικά με την επικάλυψη , από ότι ένα άλλο παίγνιο με μεγαλύτερης διάρκειας ζωής παίκτες. Αν είναι γνωστό ,ότι οι παίκτες ζουν μόνο για δύο περιόδους , οι μόνοι συνδυασμοί που μπορούν να προκύψουν είναι είτε ο παίκτης τύπου Α να αποτελεί τον νεότερο παίκτη και ο παίκτης τύπου Β τον γηραιότερο ή το αντίστροφο. Εάν όμως οι παίκτες συμμετείχαν στο παίγνιο για παράδειγμα για τρείς περιόδους δεν θα υπήρχε ο περιορισμός αυτός.

Όπως σε κάθε παίγνιο, έτσι και στην έρευνα του Salant(1991) ο κάθε παίκτης θα χαρακτηρίζεται από έναν συνδυασμό της μορφής (j,τ) , όπου το j θα περιγράφει τον τύπο του A ή B αντίστοιχα, ενώ το τ θα συμβολίζει ποια περίοδο γεννήθηκε ο παίκτης αυτός. Οι στρατηγικές που επιλέγει ο κάθε παίκτης θα ανήκουν στο σύνολο X_j , το οποίο θα περιλαμβάνει για ευκολία και τις μικτές και τις αμιγείς στρατηγικές που μπορεί να επιλέξει ο παίκτης j. Το σύνολο των ενεργειών θα παραμένει ίδιο σε κάθε στάδιο του παιγνίου.

Παραμένει σημαντικό στοιχείο η απόδοση που θα αποκομίσει ο κάθε παίκτης κατά τη διάρκεια συμμετοχής του στο παίγνιο. Ενδεικτικά, η απόδοση του παίκτη , ο οποίος ανήκει στον τύπο j και γεννήθηκε τη χρονική στιγμή t θα προκύπτει από τον τύπο:

$$\sum_{t=\tau}^{\tau+T-1} U_j(x_{j,t}, x_{k,t})$$

Δηλαδή, η εκάστοτε απόδοση, είναι και πάλι εξαρτημένη από το συνδυασμό στρατηγικών που υφίστανται. Συγκεκριμένα, το U_j θα συμβολίζει την απόδοση του παίκτη j ενώ αντίστοιχα τα $x_{j,t}$, $x_{k,t}$ συμβολίζουν τις ενέργειες των παικτών τύπου j και k κατά τη περίοδο t. Αναφορικά με τη προεξόφληση των αποδόσεων και ο Salant (1991) επέλεξε για ευκολία πράξεων να μην την εισάγει. Ωστόσο, δηλώνει ότι τα αποτελέσματα του μπορούν κάλλιστα να επεκταθούν και σε ενδεχόμενη προεξόφληση όπως και τα αποτελέσματα του Kandori(1992) και του Gossner (1996).

Από πλευράς στρατηγικών για κάθε παίκτη τύπου j και γέννησης τη χρονική στιγμή τ , θα προκύπτει μία αλληλουχία στρατηγικών της μορφής:

$$(\psi_{j,\tau}, \psi_{j,\tau+1}, \dots, \psi_{j,\tau+T-1})$$

Όλες αυτές οι στρατηγικές του παίκτη j θα ανήκουν σε ένα σύνολο στρατηγικών της μορφής $\Psi^{j,\tau}$. Μάλιστα, εισάγεται εκ νέου και η έννοια της ιστορίας, την οποία ο Salant(1991) συμβολίζει ως h_t και γενικά υπολογίζεται ως:

$$h_t = ((x_{A,0}, x_{B,0}), (x_{A,1}, x_{B,1}), \dots, (x_{A,t-1}, x_{B,t-1})) \qquad (3.39)$$

Πιο αναλυτικά, η εκάστοτε ιστορία της περιόδου t περιλαμβάνει όλους τους συνδυασμούς ενεργειών που έχουν επιλεγεί μέχρι και την προηγούμενη περίοδο της t. Μάλιστα, βάσει των ενεργειών που ακολουθεί ο εκάστοτε παίκτης, δηλαδή βάσει της ιστορίας του θα λαμβάνει μία επιπρόσθετη απόδοση λίγο πριν τη λήξη της ζωής του. Εφόσον, η στρατηγική γενικά καθορίζει τις ενέργειες βάσει της ιστορίας , προκύπτει η μαθηματική διατύπωση:

$$\psi_{j,t} : h_t \rightarrow x_{j,t} \in X_j$$

3.3.2 Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία κατά Nash.

O Salant (1991) επαναλαμβάνει επεξήγηση αναφορικά με την υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία. Γενικότερα, η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία ουσιαστικά εξασφαλίζει ότι ένας παίκτης μεγιστοποιεί την απόδοση που θα αποκομίσει από τη συμμετοχή του στο παίγνιο βάσει της δεδομένης στρατηγικής των υπόλοιπων παικτών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση , η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία αποτελεί συλλογή ορισμένων κανόνων, οι οποίοι ορίζονται ως :

$$\psi^{j,\tau^*} \equiv \{(\psi^*_{j,\tau}, \ldots, \psi^*_{j,\tau+T-1})\} \qquad (3.40)$$

Οι κανόνες αυτοί, συμβάλλουν χάρη στη διαμόρφωση τους στην δημιουργία μίας επιλογής της μορφής ψ^{j,τ^*} , η οποία ικανοποιεί την υπόθεση της υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας. Δηλαδή, μεγιστοποιεί την απόδοση του παίκτη τύπου j και γέννησης την περίοδο τ . Όμως , αυτό επιτυγχάνεται στην περίπτωση όπου οι υπόλοιποι παίκτες πέρα του (j, τ) , οι οποίοι απεικονίζονται ως παίκτες τύπου k και γενιάς σ δηλαδή (k,σ) , υιοθετούν την επιλογή της μορφής ψ^{k,σ^*}.

Προτού εξετάσει διάφορες περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών με παίκτες πεπερασμένης διάρκειας ζωής ο Salant(1991) αποτυπώνει τις υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζει το υπόδειγμα του. Κάποιες από αυτές, μάλιστα, αποτελούν κοινά στοιχεία με εκείνα που υιοθέτησε μετέπειτα ο Kandori(1992) και στη συνέχεια ο Gossner(1996). Αυτές, αφορούν κυρίως το σύνολο αποδόσεων, το σύνολο στρατηγικών καθώς και την ελάχιστη απόδοση που θα μπορούσε να αποκομίσει ο εκάστοτε παίκτης.

Αρχικά, υποθέτει ότι το σύνολο στρατηγικών της μορφής X_j , όπου j αντιστοιχεί στον εκάστοτε τύπο Α ή Β αντίστοιχα, αποτελεί ένα συμπαγές σύνολο και ότι το σύνολο αποδόσεων του παίκτη j , $U_j(x)$, είναι συνεχές . Οι βασικές αυτές υποθέσεις, έχουν ως κύριο στόχο τη διασφάλιση ότι το σύνολο των πιθανών ζευγών αποδόσεων που μπορούν να προκύψουν στο παίγνιο σταδίου είναι συμπαγές. Γενικότερα, οι υποθέσεις αυτές υιοθετούνται έτσι ώστε να διαμορφωθεί ένα περιορισμένο εθιμικό θεώρημα . Πιο συγκεκριμένα, ο Salant(1991) δηλώνει ότι σε παίγνια σταδίου όπου υφίστανται ισορροπίες Nash, και με τις προηγούμενες υποθέσεις διαμορφώνεται το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.10 Κάθε αποτέλεσμα σε παίγνιο σταδίου, το οποίο διαθέτει μία ισορροπία Nash, το οποίο κυριαρχεί επί της επανάληψης της ισορροπίας Nash του παιγνίου σταδίου, μπορεί να προσεγγιστεί σε υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία, για αρκετά μεγάλους ορίζοντες.

Ύστερα από αυτές τις δύο, ο Salant(1991) ενσωματώνει δύο επιπλέον υποθέσεις και πάλι αναφορικά με τις αποδόσεις που αποκομίζουν οι παίκτες. Αρχικά, η πρώτη υπόθεση αφορά την περίπτωση όπου οι παίκτες επιλέγουν να κάνουν maximizing στην απόδοση ενός άλλου παίκτη. Ουσιαστικά αναφέρει ότι ακόμα και αν το επιλέξουν οι απώλειες που μπορεί να υποστούν δεν θα ξεπερνούν σε μέγεθος την minimax απόδοση του. Η τελευταία υπόθεση αφορά το ενδεχόμενο οι παίκτες να ακολουθούν την minimax στρατηγική εναντίον ενός παίκτη. Παρότι υφίσταται κόστος και για τους παίκτες, οι οποίοι αναλαμβάνουν τη διαδικασία της τιμωρίας, η απόδοση τους δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την minimax απόδοση τους. Οπότε και οι δύο αυτές υποθέσεις περιορίζουν τα οφέλη της απόκλισης και τα κόστη τιμωρίας για τους συνεπείς παίκτες.

Εν συνεχεία, θα παρουσιαστούν παραδείγματα δύο κατηγοριών, όπου η κύρια διαφορά εντοπίζεται στο χρονικό ορίζοντα που λειτουργούν οι παίκτες. Ως χρονικό σημείο μετάβασης χαρακτηρίζεται η διάρκεια ζωής T=2. Αυτό, πηγάζει και από το γεγονός ότι στα παίγνια παικτών με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των δύο περιόδων εντοπίζεται μεγαλύτερη ποικιλία στη δομή του παιγνίου, ακόμα και στη περίπτωση των δύο διαθέσιμων τύπων. Ειδικότερα, θα αναλυθεί πρώτα η περίπτωση όπου το παίγνιο αποτελείται από δύο παίκτες, με διάρκεια ζωής τις δύο περιόδους T=2.

Όπως και σε κάθε επαναλαμβανόμενο παίγνιο, είτε πεπερασμένο είτε απείρως επαναλαμβανόμενο, η διαδικασία ξεκινάει και στη μελέτη αυτή με την διατύπωση του παιγνίου σταδίου. Επομένως, το παίγνιο σταδίου είναι το εξής :

Παράδειγμα 3.1

		Παίκτης B	
		Α	Δ
Παίκτης Α	Π	6, 6	2, 10
	Κ	9, 3	3, 4

Αυτό το παίγνιο με τους δύο παίκτες ταυτότητας Α ή Β αντίστοιχα, που αποτελεί το τύπο του κάθε παίκτη θα έχει μια συγκεκριμένη δομή. Ο Salant(1991) τονίζει ότι στις περιπτώσεις όπου οι παίκτες ζουν μόνο για δύο χρόνια ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η επικάλυψη είναι συγκεκριμένος, δηλαδή είτε ο παίκτης τύπου Α θα είναι ο νεότερος και ο Β ο γηραιότερος είτε το αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη περίοδο ο Β παίκτης θα είναι ο μεγαλύτερος και θα χαρακτηρίζεται ως (Β,0) ενώ ο Α ο νεότερος με συμβολισμό (Α,1). Αντίθετα στη δεύτερη περίοδο ο παίκτης Β αντικαθίσταται από έναν νεότερο του ίδιου τύπου παίκτη , δηλαδή τον (Β,2) ενώ ο παίκτης Α γίνεται ο γηραιότερος και παραμένει (Α,1).

Αφότου η διαδικασία λειτουργίας της επικάλυψης αναλύθηκε επαρκώς, πρέπει όπως σε κάθε παίγνιο να εξεταστεί η ύπαρξη ισορροπίας κατά Nash. Η διαδικασία παραμένει η ίδια, δηλαδή εξετάζουμε ποιος συνδυασμός ενεργειών αποτελεί βέλτιστο συνδυασμό και για τους δύο παίκτες. Από την πλευρά του παίκτη τύπου Α, αν ο παίκτης τύπου Β επιλέξει την αριστερή στήλη, θα προτιμήσει να στραφεί στην κάτω γραμμή , όπου θα αποκομίσει απόδοση εννέα εν αντιθέσει με την απόδοση έξι της πάνω γραμμής. Αντίθετα, σε ενδεχόμενη κίνηση του παίκτη τύπου Β στη δεξιά στήλη θα στραφεί πάλι στην κάτω γραμμή με το ίδιο σκεπτικό , της μεγαλύτερης απόδοσης.

Από την οπτική, τώρα, του παίκτη τύπου Β θα αντιδράσει και εκείνος, ως ορθολογικός παίκτης, με κύριο στόχο τη μέγιστη απόδοση. Επομένως, αν ο παίκτης τύπου Β θεωρεί ότι ο παίκτης τύπου Α επιλέξει την πάνω γραμμή ενεργειών, θα επιλέξει τη δεξιά στήλη και θα λάβει δέκα μονάδες απόδοσης. Αντιθέτως, σε πιθανή επιλογή του παίκτη τύπου Α της κάτω γραμμής θα επιλέξει πάλι την δεξιά στήλη για τις τέσσερις μονάδες απόδοσης. Εν κατακλείδι, η ισορροπία κατά Nash που προκύπτει αφορά τον συνδυασμό (Κ,Δ) που προσφέρει στον παίκτη τύπου Α απόδοση τρία ενώ στον παίκτη τύπου Β απόδοση τέσσερα. Ισορροπία κατά Nash θα αποτελούσε και η επανάληψη αυτού του συνδυασμού.

Ωστόσο, ο Salant(1991) θέλει να τονίσει ότι δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αυτή είναι η μοναδική ισορροπία κατά Nash του παιγνίου. Για να το αποδείξει, διαμορφώνει στρατηγικές για το παίγνιο, οι οποίες θα ποικίλουν ανάλογα με την ημερομηνία t. Πιο συγκεκριμένα, αναλόγως με το αν η τιμή του t αποτελεί έναν μονό ή έναν ζυγό αριθμό , η στρατηγική των παικτών θα λαμβάνει τις ακόλουθες ενέργειες:

$$\psi^*_{A,t} \begin{cases} Π \text{ εάν το } t \text{ είναι ζυγός αριθμός και } h_t = (x^A, x^B, \dots, x^A) \\ Κ \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

$$\psi^*_{B,t} \begin{cases} Α \text{ εάν το } t \text{ είναι μονός αριθμός και } h_t = (x^A, x^B, \dots, x^B) \\ Δ \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Ως x^A και x^B ορίζει τους συνδυασμούς που αποφέρουν αντίστοιχα στο παίκτη τύπου Α και στον παίκτη τύπου Β τη μέγιστη δυνατή απόδοση βάσει του παιγνίου σταδίου. Οπότε, το x^A είναι ο συνδυασμός ενεργειών (Κ,Α) που προσφέρει στον παίκτη τύπου Α την μέγιστη απόδοση ενώ στον Β την ελάχιστη δυνατή, δηλαδή τις δέκα μονάδες απόδοσης, ενώ το x^B είναι ο συνδυασμός (Π,Δ) όπου ο παίκτης τύπου Β αποκομίζει τη μέγιστη δυνατή απόδοση ενώ αντίθετα ο παίκτης Α τη ελάχιστη.

Βάσει υιοθέτησης του στρατηγικού ζεύγους που παρουσιάστηκε, προκύπτουν αντίστοιχα και οι αποδόσεις ανά περίοδο για τον κάθε παίκτη. Επομένως, στους συνδυασμούς (Κ,Α) και (Π,Δ) η απόδοση για τον κάθε παίκτη διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathrm{u_A} = \frac{1}{2} \times 9 + \frac{1}{2} \times 2 = 5{,}5 \qquad (3.41)$$

$$\mathrm{u_B} = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 10 = 6{,}5 \qquad (3.42)$$

Αυτός ο συνδυασμός αποδόσεων αποτελεί κομμάτι του πιθανού συνόρου αποδόσεων με αποδόσεις υψηλότερες του συνδυασμού (Κ,Δ). Ολοκληρώνοντας το παράδειγμα, σε περίπτωση όπου οι παίκτες μοιράζονταν κοινό χρονικό ορίζοντα και πεπερασμένο, θα υπήρχε το κίνητρο της υιοθέτησης της ισορροπίας (Κ,Δ). Δεν θα είχαν κίνητρο κάποιοι παίκτες να επιλέξουν πιο ευκαιριακές ενέργειες διότι πολύ απλά θα ενδιαφέρονταν όλοι για το ίδιο χρονικό διάστημα λήψης αποφάσεων. Η ύπαρξη νέων ισορροπιών που προσπαθεί να εισάγει ο Salant(1991) αφορά την περίπτωση όπου υπάρχουν τέτοιες τάσεις και εντοπίζεται η διαφορά στο χρονικό ορίζοντα των παικτών, δηλαδή στις περιπτώσεις επικάλυψης.

Η έννοια της στάσιμης υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας του Salant(1991) αποτέλεσε σημαντικό στοιχείο συζήτησης τόσο στην έρευνα του Kandori(1992) όσο και σε εκείνη του Gossner(1996). Σαφέστατα ο ορισμός είναι κοινός και στις τρεις έρευνες, δηλαδή η στάσιμη υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία είναι μία αλληλουχία κανόνων της μορφής $\{\psi^*_{A,t}, \psi^*_{B,t}\}$ τέτοια ώστε κάθε παίκτης ίδιου τύπου, οποιαδήποτε περίοδο να επιλέγει πανομοιότυπες ενέργειες. Ενδεικτικά, ένας παίκτης της μορφής (j,τ), δηλαδή τύπου j και γέννηση στη χρονική περίοδο τ θα ακολουθεί τις ίδιες ενέργειες με τον παίκτη (j,τ+2) , δηλαδή με έναν παίκτη ίδιου τύπου αλλά με διαφορετική ημερομηνία γέννησης.

Ο Salant(1991) έδωσε περισσότερη έμφαση στη στασιμότητα της υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας, διατυπώνοντας μάλιστα υποθέσεις χάρη στις οποίες αυτή εξασφαλίζεται. Πιο συγκεκριμένα, για ένα σύνολο αποτελεσμάτων της μορφής $(x^y_A, x^0_A, x^y_B, x^0_B)$ θα υφίσταται η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξής προϋποθέσεις:

$$x^0_A \in \text{argmax}\{U_A(x_A, x^y_B) : x_A \in X_A\}$$

$$x^0_B \in \text{argmax}\{U_B(x^y_A, x_B) : x_B \in X_B\}$$

$$U_A(x^y_A, x^0_B) + U_A(x^0_A, x^y_B) \geq U_A(\widetilde{x_A}, x^0_B) \text{ για κάθε } \widetilde{x_A} \in X_A$$

$$U_B(x^0_A, x^y_B) + U_A(x^y_A, x^0_B) \geq U_A(x^0_A, \widetilde{x_B}) \text{ για κάθε } \widetilde{x_B} \in X_B$$

Γενικότερα, οι σχέσεις αυτές χρησιμοποιούνται έτσι ώστε να περιγράψουν τις ενέργειες που εντοπίζονται στη στάσιμη υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία. Μάλιστα, οι δύο τελευταίες προϋποθέσεις κάνουν φανερές τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ο παίκτης j προτιμά ως νεότερος να υιοθετεί την ενέργεια x^y_j για να αποκομίσει την απόδοση U_j αντί να αποκλίνει. Απλά αφορούν μόνο τη περίπτωση παιγνίων που λαμβάνει χώρα η επικάλυψη γενεών και η διάρκεια ζωής των παικτών είναι οι δύο περίοδοι.

Συνεπώς, ο Salant(1991) στην ανάλυση του αναφορικά με τις ισορροπίες κατά Nash στα παίγνια με παίκτες διάρκειας ζωής δύο περιόδων κατάφερε να αποδείξει ότι μπορούν να εμφανιστούν και νέες ισορροπίες πέραν εκείνων που εντοπίζονται ήδη από το παίγνιο σταδίου. Γενικότερα, απέδειξε λοιπόν ότι εφικτά αποτελέσματα, τα οποία προσφέρουν στους παίκτες αμοιβαία πιο ωφέλιμες αποδόσεις συγκριτικά με την επανάληψη της ισορροπίας κατά Nash , μπορούν να προκύψουν στα επικαλυπτόμενα παίγνια , ακόμα και σε παίκτες που ζουν μόνο σε δύο περιόδους. Επιπρόσθετα, εξέτασε και την περίπτωση επαναλαμβανόμενων παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών με παίκτες , όπου η διάρκεια ζωής τους εκτείνεται σε περισσότερες από μόνο δύο περιόδους.

3.3.3 Εθιμικό Θεώρημα.

Με αντικείμενο, λοιπόν, αυτά τα παίγνια διατυπώνονται δύο επιπλέον εθιμικά θεωρήματα, τα οποία χαρακτηρίζονται ως περιορισμένο και ως πιο διευρυμένο εθιμικό θεώρημα αντίστοιχα. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στα δύο αυτά θεωρήματα εντοπίζεται στη διάρκεια που απαιτούν αλλά και στις υποθέσεις στις οποίες βασίζονται.

Πιο αναλυτικά, προτού διατυπωθούν και αναλυθούν περαιτέρω τα δύο αυτά εθιμικά θεωρήματα, κρίνεται εύλογο να σχολιαστούν κάποια σημεία του καθενός. Ειδικότερα, το περιορισμένο εθιμικό θεώρημα, επικεντρώνεται σε αποτελέσματα , δηλαδή συνδυασμούς στρατηγικών, οι οποίοι κυριαρχούν επί της ισορροπίας κατά Nash του παιγνίου σταδίου. Δηλαδή, υποθέτει την ύπαρξη ισορροπίας κατά Nash στο παίγνιο σταδίου. Αντίθετα, το πιο διευρυμένο αναφέρεται γενικά σε ατομικά ορθολογικά και εφικτά ζεύγη αποδόσεων. Σε όλες τις έρευνες που αναλύονται γίνεται η υπόθεση περί ορθολογικότητας των παικτών και μάλιστα είναι μεγάλης βαρύτητας , καθώς έτσι καταλήγουμε και στις ισορροπίες κατά Nash.

Επιπλέον διαφορά ανάμεσα στα δύο αυτά θεωρήματα ουσιαστικά εντοπίζεται στη διάρκεια ζωής των παικτών που συμμετέχουν στα παίγνια επί των οποίων ισχύει το κάθε θεώρημα αντίστοιχα. Πιο αναλυτικά, στο περιορισμένο εθιμικό θεώρημα χρησιμοποιούνται παίκτες, οι οποίοι ζουν για ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα και κατά συνέπεια μπορούν να υπάρξουν μεγάλης διάρκειας επικαλύψεις. Από την πλευρά, τώρα, του πιο διευρυμένου εθιμικού θεωρήματος γίνεται μια πιο συγκεκριμένη οριοθέτηση αναφορικά με τη διάρκεια ζωής των παικτών. Ειδικά, απαιτείται η διάρκεια ζωής των παικτών, προκειμένου να μπορούν να ισχύουν οι τέσσερις υποθέσεις , που διατυπώθηκαν από τον Salant(1991) , να είναι τουλάχιστον ίση με τρείς περιόδους.

Σειρά έχει η διατύπωση του κάθε εθιμικού θεωρήματος. Αρχικά , θα διατυπωθεί το περιορισμένο εθιμικό , για το οποίο σύμφωνα με το Salant(1991) ισχύει ότι:

Θεώρημα 3.11 Το περιορισμένο εθιμικό θεώρημα δείχνει ότι αν υφίσταται μία ισορροπία κατά Nash στο παίγνιο σταδίου , τότε κάθε αποτέλεσμα το οποίο κυριαρχεί την επανάληψη αυτής της ισορροπίας, μπορεί να προσεγγιστεί σαν ισορροπία ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου όπου υπάρχει αρκετό διάστημα επικάλυψης.

Πιο συγκεκριμένα, γίνεται η υπόθεση που αναφέραμε προηγουμένως, σαν σημαντική διαφορά με το πιο διευρυμένο, αναφορικά με την ύπαρξη ισορροπίας κατά Nash στο παίγνιο σταδίου. Εδώ, ο συνδυασμός ενεργειών που αποτελεί αυτή την ισορροπία θα συμβολίζεται ως $\tilde{x}$, και θα αποτελείται από τις ενέργειες $\tilde{x}_A$, από τη πλευρά του παίκτη τύπου Α και την ενέργεια $\tilde{x}_B$, από τη πλευρά του παίκτη τύπου Β. Ο συνδυασμός ενεργειών , δημιουργείται με τέτοιο τρόπο , έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\mathrm{U_j(\tilde{x}) \ \geq \ U_j(x_j, \tilde{x}_k)\ για\ j = A, B\ και\ k \ \neq j} \qquad (3.43)$$

Συνεπώς, η απόδοση που προσφέρεται στην ισορροπία κατά Nash $\tilde{x}$ σε κάθε παίκτη , τύπου Α ή Β αντίστοιχα, είναι μεγαλύτερη ή ίση από την απόδοση που θα προέκυπτε από οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό στρατηγικών**.** Ο Salant (1991) αποδεικνύει, λοιπόν, ότι μπορεί να προσεγγιστεί σε μία ισορροπία ένα εφικτός συνδυασμός ενεργειών, που συμβολίζεται ως $\hat{x}$. Απαιτείται ένας αρκετά μεγάλος χρονικός ορίζοντας , έτσι ώστε ο συνδυασμός ενεργειών $\hat{x}$ να προσφέρει στους παίκτες απόδοση μεγαλύτερη από εκείνη της επανάληψης της ισορροπίας του παιγνίου σταδίου, δηλαδή να ισχύει ότι:

$$U_j(\hat{x}) \ > \ U_j(\tilde{x}) \qquad (3.44)$$

Γενικά, προκειμένου να στηρίξει το περιορισμένο εθιμικό θεώρημα, ο Salant(1991) βασίζεται κυρίως στις δύο πρώτες υποθέσεις , τις οποίες είχε εισάγει αναφορικά με τις διατυπώσεις εθιμικών θεωρημάτων. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτει ότι η συνάρτηση αποδόσεων $U_j(x)$ αποτελεί ένα συνεχές μέγεθος στο x και το σύνολο ενεργειών X_j αποτελεί ένα συμπαγές σύνολο για κάθε τύπο παίκτη. Πάνω σε αυτά βασίζεται , λοιπόν, το περιορισμένο εθιμικό θεώρημα, που διατυπώνεται πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα 3.12 Για κάθε ε>0 , υπάρχει μία διάρκεια ζωής των παικτών $\bar{\mathrm{T}} > 0$ τέτοια ώστε να υφίσταται υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία , που θα προσφέρει αποδόσεις μέσα στην απόσταση ε της απόδοσης $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{j}}$, όταν η διάρκεια ζωής των παικτών είναι Τ> $\bar{\mathrm{T}}$.

Από την άλλη πλευρά, το πιο διευρυμένο εθιμικό θεώρημα βασίζεται και στις τέσσερις υποθέσεις, οι οποίες είχαν διατυπωθεί. Προτού γίνει η ανάλυση των παραγόντων θα παρουσιαστεί το πιο διευρυμένο εθιμικό θεώρημα κατά το οποίο ο Salant(1991) δηλώνει ότι:

Θεώρημα 3.13 Στο πιο διευρυμένο εθιμικό θεώρημα , κάθε ατομικά ορθολογικό και εφικτό ζεύγος αποδόσεων μπορεί να προσεγγιστεί για παίκτες , των οποίων η διάρκεια της επικάλυψης είναι σημαντικά μεγάλη και εντοπίζεται η επικάλυψη για πάνω από τρείς περιόδους.

Επομένως, για να στηρίξει το θεώρημα αυτό, βασίζεται σε όλες τις υποθέσεις. Πιο αναλυτικά, στηρίζεται και στις υποθέσεις που περιόριζαν τόσο το όφελος που αποκομίζει ο αποκλίνων παίκτης όσο και το κόστος που επωμίζονται όσοι συμμετέχουν στη τιμωρία του παίκτη αυτού. Υπενθυμίζουμε, ότι ο αποκλίνων παίκτης, δεν θα μπορεί με αυτή του τη συμπεριφορά να αποκομίσει απόδοση μεγαλύτερη από την ελάχιστη minimax απόδοση. Και επίσης, το κόστος, το οποίο αποκομίζουν οι παίκτες λόγω της υιοθέτησης της minimax στρατηγικής εναντίον του αποκλίνοντα, δεν θα υπερβαίνει τη minimax απόδοση τους. Βεβαίως, υφίστανται ακόμα οι υποθέσεις περί συμπαγούς συνόλου ενεργειών των παικτών τύπου j , δηλαδή το σύνολο X_j και την υπόθεση συνεχούς συνάρτησης αποδόσεων $U_j(x)$.

Πιο συγκεκριμένα, με τις ισχύουσες υποθέσεις ο Salant(1991) διατυπώνει το πιο διευρυμένο εθιμικό θεώρημα ως εξής:

Θεώρημα 3.14 Έστω 3< S< T-2 . Έστω $\hat{x}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\hat{u}_j \equiv U_J(\hat{x})$ για κάθε τύπο j=A ή B , τέτοιο ώστε το $\hat{u}$ να είναι οποιοδήποτε ορθολογικό και εφικτό ζεύγος αποδόσεων. Τότε για δεδομένο ε>0 , υπάρχει $\bar{T} > 0$, τέτοιο ώστε η μέση απόδοση του κάθε παίκτη (j,τ) , $(1/T)[\sum_{\tau}^{\tau+T-1} U_j(x_t)]$ είναι ανάμεσα σε ε του $\hat{u}_j$ σε κάποια ισορροπία όταν T> $\bar{T}$.

Ολοκληρώνοντας, λοιπόν, η γενική εικόνα της έρευνας του Salant(1991) είναι ότι εθιμικά θεωρήματα συνεργασίας μπορούν κάλλιστα να εμφανιστούν και να εφαρμοστούν ακόμα και στα παίγνια που εξέτασε εκείνος, δηλαδή τα μη συνεργατικά απείρως επαναλαμβανόμενα παίγνια, αλλά με επικάλυψη γενεών. Τα παραδείγματα, τα οποία εντοπίζονται στη σημερινή εποχή ποικίλουν. Συγκεκριμένα, το υπόδειγμα που διαμόρφωσε ο Salant (1991) έχει άμεση κοινωνική υπόσταση και κρίνεται ιδιαιτέρως ωφέλιμο σε διαπραγματεύσεις μεγάλων ηγετών ή ακόμα και σε αποφάσεις που λαμβάνονται ταυτοχρόνως από ρυθμιστικές αρχές. Δηλαδή, κατάφερε να αποδείξει ότι παρότι αυτοί οι λήπτες αποφάσεων διαθέτουν μία πεπερασμένη διάρκεια ζωής , εντοπίζονται υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες που μάλιστα οδηγούν και στη προσαρμογή αυτών των αποφάσεων βάσει των συνεργατικών εθιμικών θεωρημάτων.

3.3.4 Συμπεράσματα Έρευνας .

Σαφέστατα, ο Salant(1991) έδωσε ιδιαίτερη έμφαση στον αριθμό των παικτών που συμμετέχουν στο παίγνιο. Σε όσα παίγνια χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη των συμπερασμάτων που ήθελε να καταλήξει, χρησιμοποίησε δύο μόνο παίκτες. Ωστόσο, αυτό αποτελεί ένα στοιχείο , το οποίο επεκτείνει το άρθρο του Crémer (1986). Πιο αναλυτικά , στην έρευνα αυτή η περίπτωση της συνεργασίας αντιμετωπίζεται ως ειδική περίπτωση με μία συγκεκριμένη μορφή .

Από πλευράς συμμετεχόντων, χρησιμοποιούσε στο μοντέλο του Ν παίκτες , με διαφορετική ηλικία μεταξύ τους και με διάρκεια ζωής Ν περιόδων.

Το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε η έρευνα του Crémer (1986), ήταν ότι σε ένα μοντέλο που ορίζονται αυθαίρετα οι Ν παίκτες που διαμόρφωσε, μπορούν να πετύχουν και αυτοί αποτελεσματικούς συνδυασμούς ενεργειών στη ισορροπία. Το θέμα όμως είναι ότι όταν απευθυνόταν σε παίγνια χωρίς όμως να υπάρχει ενδεχόμενο συνεργασίας και τα οποία αποτελούνταν μόνο από δύο παίκτες , εντόπιζε ως ισορροπία μόνο την επανάληψη της ήδη υπάρχουσας ισορροπίας. Δηλαδή, αυτής που ίσχυε στο παίγνιο σταδίου.

Επομένως, ο Salant(1991) χαρακτηρίζει την έρευνα του σαν επέκταση του μοντέλου του Crémer (1986) , καθώς επιτρέποντας την επικάλυψη των παικτών , οδηγεί ακόμα και τα μη συνεργατικά παίγνια σε συμπεριφορές συνεργασίας και στην ύπαρξη πολλαπλών υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών. Βέβαια, ακόμα και αν όντως σε κάποιες περιόδους εντοπιζόταν λήξη της περιόδου συμμετοχής δύο παικτών, πάλι θα μπορούσαν να εφαρμοστούν εθιμικά θεωρήματα. Ο μοναδικός περιορισμός , ο οποίος θα πρέπει να ικανοποιείται είναι να μην πεθαίνουν οι παίκτες όταν λήγει η περίοδος συμμετοχής τους.

Αυτό το επιχείρημα, βασίζεται στη βασική διαδικασία που ισχύει μάλιστα για πολλούς διευθυντές ή γενικά διαχειριστές μίας επιχείρησης. Αναλυτικότερα, αναφέρεται σε επιβραβεύσεις που εξαρτώνται και από το πως θα αποδώσει η επιχείρηση ακόμα και αν εκείνοι δεν συνδράμουν στη λειτουργία της. Άρα, θα συνεχίσουν να έχουν κίνητρο να επιλέγουν ενέργειες συνεργασίας και όχι απλά ευκαιριακές λύσεις, ακόμα και αν δεν συμμετέχουν στο παίγνιο ή καλύτερα στη λήψη των αποφάσεων της εκάστοτε επιχείρησης και αυτό θα υιοθετήσουν και οι απόγονοι, αντικαταστάτες τους.

Εν κατακλείδι, ο Salant(1991) κατάφερε μέσω πολλαπλών περιορισμών, τους οποίους και αναλύσαμε διεξοδικά ,να εκφράσει το τι συμβαίνει στα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών από άποψης ισορροπίας. Δηλαδή, πως προκύπτουν οι υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες σε αυτού του είδους τα παίγνια. Απλά, τα αποτελέσματα επικεντρώνονται στα απείρως επαναλαμβανόμενα με παίκτες πεπερασμένης διάρκειας. Τέλος, θα μπορούσε η έρευνα αυτή να αξιοποιηθεί ιδίως στα συνταξιοδοτικά πλάνα στελεχών , προκειμένου να διαμορφώνεται και ομαλά το παίγνιο ή καλύτερα η διαδικασία λήψης αποφάσεων.

3.4 Σύγκριση Αποτελεσμάτων Τριών Ερευνών.

Όσον αφορά , λοιπόν , την επισκόπηση που έλαβε χώρα στα υποδείγματα των Salant(1991), Kandori(1992) και Gossner(1996) προέκυψαν σημαντικά συμπεράσματα αναφορικά με την ύπαρξη ισορροπιών αλλά και εθιμικών θεωρημάτων στα επαναλαμβανόμενα παίγνια. Από τον Salant(1991) λήφθηκε πληροφόρηση αναφορικά με το πώς μη συνεργατικά παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών εμφανίζουν συνεργατικές συμπεριφορές και υπόκεινται σε εθιμικά συνεργατικά θεωρήματα. Ο Kandori(1992) , προσέφερε συμπεράσματα αναφορικά με τα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών , με πεπερασμένη διάρκειας ζωής παίκτες, οι οποίοι διακρίνονται ανάλογα με τον τύπο τους. Μάλιστα, οι τύποι αυτοί μπορούσαν να είναι οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός.

Η κύρια διαφορά , λοιπόν, ανάμεσα σε Kandori(1992) και Salant(1991) είναι ότι ο πρώτος στην έρευνα του δεν έχει γενικοποιήσει τα αποτελέσματα του δεύτερου, αναφορικά κυρίως με τη διάρκεια των επικαλύψεων. Δεν επιτρέπει δηλαδή ο Kandori(1992) επικάλυψη με διάρκεια τις τρείς περιόδους όπως έκανε ο Salant(1991) στο πιο διευρυμένο εθιμικό θεώρημα. Επιπλέον, βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές έρευνες αποτελεί το γεγονός ότι ο Salant(1991) υιοθέτησε περιορισμούς ακόμα και στη συνάρτηση αποδόσεων. Πιο συγκεκριμένα, αν και οι δύο υποθέτουν ότι η συνάρτηση αποδόσεων είναι συνεχής ο Kandori(1992) είναι εκείνος, ο οποίος έκανε τη πρώτη προσπάθεια προκειμένου να αποδείξει την ύπαρξη εθιμικού θεωρήματος για Ν παίκτες απλά χωρίς επιπλέον περιορισμούς επί της συνάρτησης αποδόσεων των παικτών.

Από πλευράς της έρευνας του Gossner(1996) επικεντρώθηκε στην απόδειξη εθιμικού θεωρήματος σε περίπτωση μη παρατηρήσιμων μικτών στρατηγικών. Ο Salant(1991) επέλεξε να μην υπάρξει στα αποτελέσματα διάκριση ανάμεσα σε μικτές και καθαρές στρατηγικές. Συνεπώς, τις αντιμετώπισε ως παρατηρούμενες, αν και γενικά οι μικτές στρατηγικές αποτελούν εικασίες. Την ίδια λογική υιοθέτησε και ο Kandori(1992) , δηλαδή ασχολήθηκε κυρίως με τις αμιγείς ενέργειες, αλλά τα αποτελέσματα του μπορούσαν να επεκταθούν και στη περίπτωση των παρατηρούμενων μικτών.

Γενικά, ο Gossner (1996) στην προσπάθεια του να αποδείξει την ύπαρξη εθιμικού θεωρήματος αναφορικά με τις μη παρατηρούμενες μικτές στρατηγικές, βασίστηκε κατά πολύ στα αποτελέσματα του Kandori(1992) . Η δυσκολία , ωστόσο, όπου αντιμετώπισε και τον οδήγησε στην εισαγωγή ενός στατιστικού στοιχείου αφορούσε την διαδικασία επιβράβευσης των παικτών. Στην έρευνα του Kandori(1992) , εφόσον όλες οι ενέργειες παρατηρούνταν οι υπόλοιποι παίκτες μπορούσαν να εντοπίσουν μία πιθανή απόκλιση καθώς και την στρατηγική που υιοθετούσαν οι τιμωροί, επιβραβεύοντας τους ύστερα ανάλογα.

Η επιβράβευση αυτή, που λάμβανε χώρα λίγο πριν την λήξη διάρκειας ζωής του κάθε παίκτη, πήγαζε από την παρατήρηση της στρατηγικής που υιοθετούσαν οι παίκτες εναντίον του αποκλίνοντα. Δηλαδή, αν έκαναν minimax τον αποκλίνοντα. Στην έρευνα του Gossner(1996) ωστόσο δεν υπάρχει δυνατότητα παρατήρησης της στρατηγικής που υιοθετούν οι παίκτες. Επομένως, εισήγαγε ένα στατιστικό στοιχείο, το οποίο ανάλογα με την τιμή που λάμβανε έδειχνε αν οι παίκτες επέλεγαν με μεγάλη συχνότητα την minimax στρατηγική εναντίον του αποκλίνοντα. Έτσι διαχωρίζονταν σε ‘καλούς’ και ‘κακούς’ τιμωρούς και επιβραβεύονταν αναλόγως.

4. Εφαρμογές σε Επαναλαμβανόμενα Παίγνια με Επικάλυψη Γενεών.

Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών έχουν αρκετές εφαρμογές ιδίως σε κυβερνήσεις ή επιχειρήσεις , με προφανώς μακρά διάρκεια ζωής, και σημαντική συμβολή στο πώς μπορούν να διαμορφωθούν διάφορες αποζημιώσεις των υπαλλήλων τους. Δηλαδή, με ποιο τρόπο θα μπορούσαν να δοθούν κίνητρα σε διευθυντές ή άλλα στελέχη, προκειμένου να λειτουργούν με συνέπεια και να μεταδίδουν αυτή την ιδιότητα και στους απογόνους τους. Κάτι αντίστοιχο, εξετάστηκε και στην περίπτωση της έρευνας του Salant (1991). Ένα από τα στοιχεία αυτών των παιγνίων, που χρήζει περισσότερης ανάλυσης, είναι η διαμόρφωση των περιόδων τιμωρίας.

Έχει ήδη γίνει αναφορά για τον τρόπο διαμόρφωσης των περιόδων τιμωρίας, που μάλιστα διαφέρει ανάλογα με τις διαθέσιμες περιόδους του εκάστοτε παιγνίου , αλλά και χάρη στο πότε εντοπίζεται η εκάστοτε απόκλιση κάποιου παίκτη. Υπενθυμίζουμε , ότι η τιμωρία αφορά παίκτη, ο οποίος αποκλίνει από τη συνεργασία, και οι αντίπαλοι του αναλαμβάνουν την διαδικασία αυτή.

4.1 Επαναλαμβανόμενο Παίγνιο δύο Παικτών.

Προκειμένου, λοιπόν, να γίνει περισσότερο αντιληπτή η τιμωρία που ασκείται στον αποκλίνοντα , θα αξιοποιηθεί ένα επαναλαμβανόμενο δίλημμα φυλακισμένου.

Το παίγνιο, αυτό , θα αποτελείται από δύο παίκτες, τον παίκτη 1 και τον παίκτη 2 αντίστοιχα. Κάθε φορά, ένα από αυτούς θα αποτελεί τον νεότερο παίκτη ενώ ο άλλος θα είναι γηραιότερος. Η διάρκεια ζωής του κάθε παίκτη θα είναι τα 10 χρόνια, δηλαδή Τ=10 , και θα υφίσταται η δυνατότητα συνεργασίας. Ενδεικτικά, το παίγνιο σταδίου θα διαμορφώνεται ως εξής:

Παράδειγμα 4.1

		Παίκτης 2	
		Α	Δ
Παίκτης 1	Π	3,3	0,6
	Κ	6,0	2,2

Αρχικά, θα βρεθεί η ισορροπία κατά Nash , όπως και σε κάθε παίγνιο. Αναλυτικότερα, αν ο παίκτης 1 επιλέξει την πάνω γραμμή , ο παίκτης 2 θα στραφεί στη δεξιά στήλη για μεγαλύτερη απόδοση, ενώ όμοια αν επιλέξει τη κάτω γραμμή τότε ο παίκτης 2 θα στραφεί στη δεξιά στήλη και πάλι. Από πλευράς του παίκτη 1, αν ο αντίπαλος του επιλέξει την αριστερή στήλη, θα στραφεί στη κάτω γραμμή , ενώ αντίστοιχα αν επιλεγεί η δεξιά στήλη θα επιλέξει την κάτω γραμμή και πάλι. Επομένως, η ισορροπία κατά Nash εντοπίζεται στον συνδυασμό (Κ,Δ).

Ωστόσο, γίνεται αντιληπτό, ότι ο συνδυασμός στρατηγικών (Π,Α) προσφέρει μεγαλύτερη απόδοση τόσο στον παίκτη 1 , όσο και στον παίκτη 2, δηλαδή αποτελεί έναν κατά Pareto βέλτιστο συνδυασμό. Αν οι δύο παίκτες συνεργαστούν, θα επωφεληθούν αμοιβαία. Έστω, λοιπόν, ότι οι παίκτες συμφωνούν να επιλέξουν τον συνδυασμό (Π,Α). Τι θα συμβεί αν κάποιος από τους δύο παίκτες αποκλίνει; Προφανώς, θα λειτουργήσει η διαδικασία τιμωρίας από τον άλλο παίκτη. Ωστόσο, η διαδικασία ποικίλει εξαιτίας των διαθέσιμων περιόδων ζωής των παικτών.

Ας γίνει η υπόθεση , ότι η διαφορά διάρκειας ζωής των παικτών είναι τα πέντε έτη, δηλαδή ο παίκτης 2 είναι 5 χρόνια νεότερος από τον παίκτη 1. Η συνολική διάρκεια ζωής του κάθε παίκτη έχει οριστεί στα 10 έτη. Αναφορικά με την περίοδο επικάλυψης, δηλαδή το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ζουν και οι δύο παίκτες και αλληλοεπιδρούν, αυτό διαμορφώνεται στα 5 χρόνια. Έστω, ότι ο νεότερος παίκτης 2, επιλέγει να αποκλίνει κατά το πρώτο έτος ζωής του. Αν ο παίκτης 2, αποκλίνει στη πρώτη περίοδο θα αποκομίσει έξι μονάδες απόδοσης έναντι των τριών που θα αποκόμιζε στη περίπτωση συνεργασίας. Ο αντίπαλος του, εντοπίζει την απόκλιση αυτή και οφείλει να τιμωρήσει τον αποκλίνοντα αντισταθμίζοντας το επιπλέον ποσό των τριών μονάδων.

Η τιμωρία αυτή, θα προέλθει από την υιοθέτηση της στρατηγικής Nash έναντι της στρατηγικής συνεργασίας από τον αντίπαλο παίκτη 1. Τονίζεται, ότι ο αντίπαλος παίκτης 1 που εντοπίζει την απόκλιση, έχει όφελος να προχωρήσει στη διαδικασία αυτή καθώς αποκομίζει ένα επιπρόσθετο όφελος .Το όφελος αυτό, σύμφωνα με τον Kandori(1992) λαμβάνεται στο τέλος της διάρκειας ζωής του, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα να λιποτακτήσει και να μην τιμωρήσει τον αποκλίνοντα. Η επιπρόσθετη δηλαδή απόδοση που θα οριζόταν για τους δύο παίκτες αν δεν αποκλίνουν θα χαρακτηριστεί ως w^1 και w^2 αντίστοιχα.

Οι αποδόσεις που θα αποκομίσει ο παίκτης 2 θα διαμορφωθούν συγκριτικά με τη χρονική περίοδο ως εξής, χωρίς προεξόφληση:

Πίνακας 4.1

Χρονική Περίοδος	**T=1**	**T=2**	**T=3**	**T=4**
Απόδοση	6	2	2	2

Επομένως, χρειάζονται τρία επιπλέον έτη προκειμένου να αντισταθμιστεί πλήρως η απόδοση που αποκόμισε ο παίκτης 2 λόγω της απόκλισης . Μάλιστα, η ηλικία του παίκτη 1 επιτρέπει τη διαδικασία τιμωρίας του, αποτελώντας λοιπόν ένα αντικίνητρο επί της απόκλισης. Ο παίκτης 1 , αντίθετα , εφόσον επιλέξει τη στρατηγική τιμωρίας, θα αποκομίσει την απόδοση του παιγνίου ωστόσο θα στερηθεί τρείς μονάδες απόδοσης λόγω μη συνεργασίας. Για αυτό, διαμορφώνεται η στρατηγική επιβράβευσης και ορίζεται η επιπρόσθετη απόδοση του παίκτη 1, w^1 , που θα ανέρχεται στις έξι μονάδες προκειμένου να ανταμειφθεί για τη διαδικασία τιμωρίας. Αντίστοιχα, αν συνεργαζόταν η απόδοση που θα αποκόμιζε ο παίκτης 2 θα διαμορφωνόταν ως εξής στα ίδια έτη:

Πίνακας 4.2

Χρονική Περίοδος	**T=1**	**T=2**	**T=3**	**T=4**
Απόδοση	3	3	3	3

Γίνεται , λοιπόν εμφανές ότι ο παίκτης δεν έχει λόγο να αποκλίνει καθώς αντί να αποκομίσει την απόδοση συνεργασίας και το μπόνους δέχεται απώλεια. Συγκεκριμένα, αν συνεργαζόταν θα αποκόμιζε για όλη του τη ζωή τριάντα μονάδες και στο τέλος θα κέρδιζε επιπρόσθετη απόδοση. Αν ωστόσο κανένας δεν αποκλίνει , η επιπρόσθετη αυτή απόδοση θα ήταν μικρότερη των έξι μονάδων. Με την απόκλιση του , ωστόσο, και δεν αποκομίζει το όφελος της απόκλισης και χάνει την επιβράβευση που θα μπορούσε να αποκομίσει ακόμα και σαν τιμωρός. Πλέον, αποκομίζει μόνο την καθαρή απόδοση του παιγνίου.

Η περίπτωση, επομένως, που αναλύθηκε προηγουμένως αφορά τιμωρία από τον παλαιότερο παίκτη στο νεότερο. Έστω, ότι ο παίκτης 2 επιλέγει να αποκλίνει αργά μέσα στο παίγνιο, με αποτέλεσμα να μην προλαβαίνει ο παλαιότερος παίκτης να τον τιμωρήσει. Όπως αποδείχθηκε προηγουμένως, ο αντίπαλος χρειάζεται τρεις περιόδους προκειμένου να αντισταθμίσει το όφελος της απόκλισης. Αν για παράδειγμα, η απόκλιση λάβει χώρα κατά την όγδοη περίοδο, δηλαδή T=8 , ο παλαιότερος παίκτης δεν θα υφίσταται πια , ενώ ακόμα και η ζωή του ίδιου κοντεύει να λήξει.

Εδώ, διακρίνεται η σημαντικότητα των επικαλυπτόμενων γενεών και των απογόνων που αντικαθιστούν τον παλαιότερο παίκτη στην επόμενη επανάληψη του παιγνίου. Ο παίκτης 2, που αποκλίνει, με δόλιο τρόπο θα σκεφθεί να επιλέξει τη κίνηση αυτή , σε χρονική περίοδο όπου ο εκάστοτε αντίπαλος δεν θα προλάβει να τον τιμωρήσει, γιατί θα έχει λήξει η διάρκεια ζωής του. Εφόσον έχει υποτεθεί, ότι η διάρκεια ζωής του κάθε παίκτη αγγίζει τις T=10 περιόδους, αν επιλέξει ο παίκτης 2 να αποκλίνει στην όγδοη περίοδο , ενώ υιοθετώντας την ισορροπία κατά Nash ο αντίπαλος του χρειάζεται τρεις περιόδους, θεωρεί πως δεν θα επωμιστεί όλη τη τιμωρία , αλλά αυτό δεν υφίσταται σαν επιλογή.

Πλέον, ο παίκτης 2 , που στη προηγούμενη περίπτωση ήταν ο νεότερος, αποκτά τον ρόλο του παλαιότερου , καθώς ο αντίπαλος του παίκτης 1 έχει αντικατασταθεί από τον απόγονο του. Επομένως, αντίπαλος του παίκτη 2 είναι ο απόγονος του παίκτη 1, και προκύπτει η αντίθετη περίπτωση , όπου ο αποκλίνοντας είναι ο παλαιός παίκτης ενώ ο τιμωρός ο νέος παίκτης. Τα κίνητρα του νέου παίκτη περί τιμωρίας παραμένουν κοινά , δηλαδή βασίζονται στην επιπρόσθετη απόδοση αλλά και στον πιθανό κίνδυνο που πηγάζει σε περίπτωση όπου εντοπίσει την απόκλιση και δεν τιμωρήσει τον αντίπαλο.

Σε αυτή τη περίπτωση όμως, η απόδοση που θα αποκομίσει ο νεότερος στο τέλος της ζωής του, θα είναι μεγαλύτερη από την απόδοση που αποκόμισε ο πρόγονος του παίκτης 1 στη προηγούμενη περίπτωση. Παρότι, δεν υπάρχουν οι απαιτούμενες περίοδοι για την τιμωρία του παίκτη 2, δεν υφίσταται η περίπτωση να μην επωμιστεί τις ολοκληρωτικές συνέπειες των πράξεων του. Επομένως, σύμφωνα με τον Kandori (1992) , διαμορφώνεται μία επιπρόσθετη απόδοση για τον τιμωρό , η οποία συμβολίζεται ως $\underline{w^i}$ και περιλαμβάνει και την επιπρόσθετη τιμωρία που θα πρέπει να υποβληθεί στον αποκλίνοντα. Συνεπώς, το ποσό $\underline{w^i}$ αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη απόδοση από το w^i που προσέφερε έξι μονάδες και έστω ότι το διαμορφώνουμε στις εννέα μονάδες απόδοσης.

Ουσιαστικά , οι αποδόσεις του αποκλίνοντα, χωρίς προεξόφληση, θα διαμορφωθούν ως εξής:

Πίνακας 4.3

Χρονική Περίοδος	**T=6**	**T=7**	**T=8**	**T=9**	**T=10**
Απόδοση	3	3	6	2	2

Δηλαδή, ενώ ο παίκτης 2 συνεργαζόταν μέχρι και την έβδομη περίοδο επέλεξε να αποκλίνει την όγδοη περίοδο. Ωστόσο, για να αντισταθμιστεί το παραπάνω όφελος της απόκλισης, δεν αρκούν οι δέκα περίοδοι ζωής του αποκλίνοντα.

Πρέπει, από την απόδοση του παίκτη 2 να αφαιρεθεί άλλη μία μονάδα. Η σημαντικότερη , μάλιστα , απώλεια την οποία επωμίζεται αφορά το όφελος εκείνο που αποκομίζουν στο τέλος της ζωής τους όσοι τον τιμωρούν, δηλαδή το $\underline{w'^1}$. Είναι εύλογο, ότι το ποσό που θα αποκόμιζε ο παίκτης που αποκλίνει πρέπει να απομειωθεί ολοκληρωτικά, καθώς δεν υπήρξε συνεπής. Για αυτό το λόγο, η απόδοση του στο τέλος θα μειωθεί κατά αυτή την επιπλέον μονάδα τουλάχιστον και θα στερηθεί την επιβράβευση.

Συνεπώς, γίνεται σαφές ότι όλα εξαρτώνται ξεκάθαρα από τη συμπεριφορά του κάθε παίκτη. Ο Kandori(1992) κατάφερε να αποδείξει ότι μπορεί να διαμορφωθεί στρατηγική τιμωρίας και μεταβαλλόμενης επιβράβευσης που θα αποτελεί αντικίνητρο σε κάθε ενδεχόμενη απόκλιση. Αξίζει να σημειωθεί, ότι και οι παίκτες που δεν αποκλίνουν, αν δεν επιλέξουν να τιμωρήσουν τον αποκλίνοντα και υιοθετήσουν τη στρατηγική συνεργασίας θα αντιμετωπιστούν σαν να αποκλίνουν και θα ασκηθεί η minimax στρατηγική. Ως αποτέλεσμα, η επιπρόσθετη απόδοση και ο κίνδυνος τιμωρίας τους ωθεί στη σωστή κατά τον Kandori επιλογή.

4.2 Επαναλαμβανόμενο Παίγνιο τριών Παικτών.

Μέχρι στιγμής, έχουν εξεταστεί παίγνια , τα οποία αποτελούνται μόνο από δύο παίκτες. Τα συμπεράσματα ωστόσο και η διαδικασία τιμωρίας μπορούν να επεκταθούν και σε παίγνια , τα οποία αποτελούνται από N>2 παίκτες. Θα αξιοποιηθεί η περίπτωση όπου στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο συμμετέχουν τρεις παίκτες. Έστω, ότι υπάρχουν δύο διαθέσιμα παίγνια σταδίου, 2 παικτών και ο τρίτος παίκτης θα επιλέξει σε ποιο από τα δύο παίγνια θα συμμετάσχει.

Παράδειγμα 4.2

		$Π_2$	
		Α	Δ
$Π_1$	Π	4,4,3	0,6,0
	Κ	6,0,0	1,1,1

		$Π_2$	
		Α	Δ
$Π_1$	Π	3,3,5	0,6,0
	Κ	6,0,0	2,2,2

Στο παίγνιο, θα εισαχθεί και ο παίκτης 3. Εν αντιθέσει , με τους δύο παίκτες που αλληλοεπιδρούν στα δύο παίγνια , ο παίκτης 3 θα πρέπει να διαλέξει ανάμεσα στα δύο αυτά παίγνια. Αρχικά, θα πρέπει να βρεθούν οι ισορροπίες κατά Nash στο εκάστοτε παίγνιο για τους παίκτες 1 και 2. Αναλυτικότερα, αν ο παίκτης 1 στο πρώτο παίγνιο, επιλέξει τη πάνω γραμμή ο παίκτης 2 θα στραφεί στη δεξιά στήλη ενώ στη κάτω γραμμή θα στραφεί πάλι στη δεξιά στήλη. Από πλευράς του παίκτη 1, αν ο παίκτης 2 επιλέξει την αριστερή στήλη θα στραφεί στην κάτω γραμμή ενώ στη δεξιά στήλη θα επιλέξει τη κάτω γραμμή.

Συνεπώς, η ισορροπία κατά Nash εντοπίζεται στο συνδυασμό (Κ,Δ). Αντίστοιχα , στο δεύτερο παίγνιο, αν ο παίκτης 1 επιλέξει τη πάνω γραμμή ο παίκτης 2 θα στραφεί στη δεξιά στήλη όπως και στη περίπτωση όπου ο παίκτης 1 επιλέξει τη κάτω γραμμή. Από πλευράς του παίκτη 1 , αν ο παίκτης 2 υιοθετήσει τη στρατηγική αριστερά ο παίκτης 1 θα στραφεί στη κάτω γραμμή , όπως και στην επιλογή της δεξιάς στήλης. Επομένως, και σε αυτό το παίγνιο η ισορροπία εντοπίζεται στο συνδυασμό στρατηγικών (Κ,Δ).

Τώρα, είναι η σειρά του παίκτη 3 να επιλέξει το παίγνιο στο οποίο θα ενταχθεί. Η ισορροπία κατά Nash του αριστερού παιγνίου θα του προσφέρει μία μονάδα εν αντιθέσει με την ισορροπία κατά Nash του δεξιού παιγνίου που προσφέρει δύο μονάδες. Ως ορθολογικός παίκτης, θα επιλέξει το δεύτερο παίγνιο. Προκειμένου το παράδειγμα αυτό να υπόκειται στα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών, θα υποθέσουμε ότι οι παίκτες ζουν για 10 περιόδους, T=10, και έχουν διαφορά ηλικίας δύο περιόδους. Δηλαδή, ο παίκτης 1 είναι δύο περιόδους μεγαλύτερος από τον παίκτη 2 και αυτός με τη σειρά του είναι δύο περιόδους μεγαλύτερος από τον παίκτη 3. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν δεν υπάρξει κάποια απόκλιση και τηρηθεί η συμφωνία , όλοι οι παίκτες θα αποκομίσουν μία έξτρα απόδοση .

Έστω , λοιπόν, ότι οι παίκτες επιλέγουν να συνεργαστούν μεταξύ τους προκειμένου να αποκτήσουν τις αποδόσεις που προσφέρει ο συνδυασμός (Π,Α) αλλά του αριστερού παιγνίου. Θα ήταν συμφέρουσα συνεργασία και για τους τρείς παίκτες. Ας υποθέσουμε, ότι ο παίκτης 3 επιλέγει να αποκλίνει. Οι υπόλοιποι παίκτες, οφείλουν να τον τιμωρήσουν. Θα θεωρήσουμε ότι η απόκλιση λαμβάνει χώρα κατά τη πέμπτη περίοδο, δηλαδή στο Τ=5. Αν ο παίκτης 3 , ήταν συνεπής , οι αποδόσεις του από τη πέμπτη περίοδο θα διαμορφώνονταν ως εξής:

Πίνακας 4.4

Χρονική Περίοδος	**Τ=5**	**Τ=6**	**Τ=7**	**Τ=8**	**Τ=9**	**Τ=10**
Απόδοση	3	3	3	3	3	3

Για ευκολία κατανόησης δεν εισάγεται η έννοια της προεξόφλησης, αλλά σαφέστατα τα αποτελέσματα ικανοποιούνται και με προεξόφληση. Ο παίκτης 3 , θα έχει κίνητρο να αποκλίνει για μεγαλύτερη απόδοση, που επιτυγχάνεται στο δεξί παίγνιο στον συνδυασμό στρατηγικών (Π,Α). Ο παίκτης 3, θα αποκομίσει επομένως δύο μονάδες περισσότερες από εκείνες που δίνονται στη συνεργασία. Οι υπόλοιποι παίκτες, εφόσον εντοπίζουν την απόκλιση οφείλουν να τον τιμωρήσουν. Για αυτό το λόγο, θα στραφούν στην ισορροπία κατά Nash. Έτσι, οι αποδόσεις του παίκτη 3 θα διαμορφωθούν ως εξής:

Πίνακας 4.5

Χρονική Περίοδος	**Τ=5**	**Τ=6**	**Τ=7**	**Τ=8**	**Τ=9**	**Τ=10**
Απόδοση	5	2	2	3	3	3

Δηλαδή, οι δύο επιπλέον μονάδες που καρπώθηκε ο παίκτης 3 με την απόκλιση θα αντισταθμιστούν πλήρως μετά από δύο περιόδους υιοθέτησης του συνδυασμού της ισορροπίας Nash. Η επιβράβευση που θα λάβουν οι παίκτες 1 και 2, που τιμώρησαν τον παίκτη 3 θα συμβολίζονται ως w^1 και w^2 αντίστοιχα. Έστω, ότι αυτή η απόδοση διαμορφώνεται σε $w^1 = w^2 = 5$ μονάδες. Γενικότερα, η απόδοση w^i για κάθε παίκτη i που τιμωρεί απόκλιση θα προσφέρει τις πέντε μονάδες.

Εφόσον εξετάσαμε την πιθανότητα απόκλισης του παίκτη 3, έστω ότι αποκλίνει ο παίκτης 2 την πέμπτη περίοδο. Ο παίκτης 2, αν συνεργαζόταν θα αποκόμιζε και εκείνος τις 4 μονάδες που προσφέρει ο συνδυασμός (Π,Α). Επομένως, οι αποδόσεις του θα διαμορφώνονταν ως εξής:

Πίνακας 4.6

Χρονική Περίοδος	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9	T=10
Απόδοση	4	4	4	4	4	4

Αν όμως, λάμβανε χώρα η απόκλιση, και αποκόμιζε έξι αντί τεσσάρων μονάδων, οι παίκτες 1 και 3 οφείλουν να τον τιμωρήσουν , υιοθετώντας το συνδυασμό στρατηγικών της ισορροπίας Nash. Ενδεικτικά, οι αποδόσεις του θα διαμορφώνονταν ως ακολούθως:

Πίνακας 4.7

Χρονική Περίοδος	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9	T=10
Απόδοση	6	2	4	4	4	4

Οι αποδόσεις επιβράβευσης, που θα λάμβαναν οι παίκτες 1 και 3 , λόγω της εκπλήρωσης της τιμωρίας, αλλά λίγο πριν το τέλος της ζωής τους θα συμβολίζονταν ως w^1 και w^3 αντίστοιχα και θα αντιστοιχούσαν στις πέντε μονάδες. Ο παίκτης 2, ο αποκλίνων, θα αποκομίσει την τελική απόδοση του παιγνίου, ωστόσο και θα έχει αντισταθμιστεί το ποσό της απόκλισης και θα χάσει την επιπρόσθετη απόδοση. Ως τελευταία περίπτωση, είναι η περίπτωση απόκλισης του παίκτη 1. Επειδή, κατά την απόκλιση του αποκομίζει έξι μονάδες, ίδιες με του παίκτη 2 , οι αποδόσεις διαμορφώνονται ακριβώς ίδιες στη συνεργασία:

Πίνακας 4.8

Χρονική Περίοδος	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9	T=10
Απόδοση	4	4	4	4	4	4

και στην απόκλιση:

Πίνακας 4.9

Χρονική Περίοδος	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9	T=10
Απόδοση	6	2	4	4	4	4

Οι επιπρόσθετες αποδόσεις, χάρη στην ικανοποίηση του καθήκοντος τους, τους προσφέρουν τις αποδόσεις w^3 και w^2 των πέντε μονάδων αντίστοιχα . Οι περιπτώσεις, ωστόσο που αναλύθηκαν ,αφορούν αποκλίσεις σε χρονικό διάστημα που θα επέτρεπε τη τιμωρία του αποκλίνοντα. Η διαδικασία τιμωρίας , σε μη διαθέσιμες χρονικές περιόδους, με τρείς τώρα παίκτες, θα απαιτεί την μείωση της απόδοσης του αποκλίνοντα παίκτη , σε όσες διαθέσιμες περιόδους απομένουν. Διατυπώνουμε εκ νέου τα παίγνια σταδίου, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως.

Παράδειγμα 4.3

Π_1 \ Π_2	Α	Δ
Π	4,4,3	0,6,0
Κ	6,0,0	1,1,1

Π_1 \ Π_2	Α	Δ
Π	3,3,5	0,6,0
Κ	6,0,0	2,2,2

Αποδείξαμε, βάσει του κανόνα που έχει παρουσιαστεί, ότι ο συνδυασμός ενεργειών (Κ,Δ) αποτελεί ισορροπία κατά Nash και για τα δύο παίγνια. Ο παίκτης 3, ο οποίος οφείλει να επιλέξει ανάμεσα στα δύο παίγνια, δεδομένων των αποδόσεων που προσφέρονται στις δύο ισορροπίες, θα στραφεί στο δεύτερο παίγνιο. Επαναλαμβάνουμε την υπόθεση περί διαφοράς ηλικίας ανάμεσα στους 3 παίκτες, κατά δύο περιόδους, δηλαδή ο παίκτης 1 είναι δύο περιόδους μεγαλύτερος από τον παίκτη 2 και ο τελευταίος κατά δύο περιόδους μεγαλύτερος από τον παίκτη 3.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θα υποθέσουμε ότι οι παίκτες συμφωνούν να συνεργαστούν προκειμένου να αποκομίσουν τις αποδόσεις του συνδυασμού ενεργειών (Π,Α) του πρώτου παιγνίου. Έστω, ότι ο παίκτης 1 αποφασίζει να αποκλίνει τη τελευταία περίοδο της ζωής του, λίγο πριν αυτή λήξει. Η απόκλιση του, έχει ως στόχο να καρπωθεί έξι μονάδες απόδοσης έναντι των τεσσάρων που θα αποκόμιζε στη συνεργασία, όπου οι αποδόσεις του θα ήταν οι εξής:

Πίνακας 4.10

Χρονική Περίοδος	**T=5**	**T=6**	**T=7**	**T=8**	**T=9**	**T=10**
Απόδοση	4	4	4	4	4	4

Με την απόκλιση, όμως στη τελευταία περίοδο, οι αποδόσεις του θα διαμορφώνονταν ως εξής:

Πίνακας 4.11

Χρονική Περίοδος	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9	T=10
Απόδοση	4	4	4	4	4	6

Γίνεται αντιληπτό, ότι ο παίκτης 1 δεν προλαβαίνει να τιμωρηθεί καθώς έχει αποκομίσει δύο περισσότερες μονάδες. Επομένως, όπως όρισε και ο Kandori(1992), θα δοθεί στους συνεπείς παίκτες επιπρόσθετη απόδοση, μεγαλύτερη από εκείνη που αποκόμιζαν όταν υπήρχαν διαθέσιμες περίοδοι τιμωρίας. Οι αποδόσεις αυτές ,συμβολίζονται ως $\underline{w^2}$ και $\underline{w^3}$ αντίστοιχα, και επιβάλουν επιπρόσθετη ποινή στην τελική απόδοση του παίκτη 1. Τα ποσά αυτά , θα είναι μεγαλύτερα συγκριτικά με τη περίπτωση, όπου υπήρχαν διαθέσιμες περίοδοι τιμωρίας, και έστω ότι ισούνται με $\underline{w^2} = \underline{w^3} = 7$ μονάδες απόδοσης. Ο παίκτης 1 τώρα, που επέλεξε την απόκλιση , και μάλιστα δεν πρόλαβε να τιμωρηθεί όπως του άρμοζε, θα χάσει από την τελική του απόδοση τις επιπλέον μονάδες απόκλισης και θα στερηθεί την ακόμα μεγαλύτερη απόδοση των τιμωρών του.

Ας εξεταστεί η περίπτωση απόκλισης του παίκτη 2 στην τελευταία περίοδο της ζωής του. Πλέον, το παίγνιο εκτυλίσσεται ανάμεσα του και στο παίκτη 3 , αλλά και στον απόγονο του παίκτη 1, καθώς από την όγδοη περίοδο είχε λήξει η διάρκεια ζωής του. Με βάση τη συμφωνία συνεργασίας, ο παίκτης 2 θα αποκόμιζε την απόδοση των τεσσάρων μονάδων, ωστόσο στρέφεται στις έξι μονάδες της απόκλισης με την απόδοση του να διαμορφώνεται ως ακολούθως:

Πίνακας 4.12

Χρονική Περίοδος	T=5	T=6	T=7	T=8	T=9	T=10
Απόδοση	4	4	4	4	4	6

Και πάλι, δεν υπάρχουν διαθέσιμες περίοδοι αντιστάθμισης όλων των μονάδων απόδοσης της απόκλισης, οπότε οι αντίπαλοι του οφείλουν να του μειώσουν την τελική απόδοση του , όπως συνέβη και στην απόκλιση του παίκτη 1. Συνεπώς, θα αποκομίσουν τις αποδόσεις $\underline{w'^1}$ και $\underline{w^3}$ που θα επιβάλουν πρόσθετη ποινή για τον αποκλίνοντα και θα είναι υψηλότερες από τις αποδόσεις που θα αποκόμιζαν στη διαδικασία τιμωρίας με διαθέσιμες χρονικές περιόδους. Απλά, λόγω της απόκλισης θα υποστούν και αυτοί κόστος. Επομένως, οι αποδόσεις $\underline{w'^1}$ και $\underline{w^3}$ θα προσφέρουν επτά μονάδες απόδοσης, ενώ ο αποκλίνων θα αποκομίζει εκ νέου την απόδοση του παιγνίου απομειωμένη κατά τις επιπλέον μονάδες της απόκλισης.

Ολοκληρώνοντας, σειρά έχει η περίπτωση απόκλισης του παίκτη 3. Αν επιλέξει να αποκλίνει κατά την ένατη περίοδο της ζωής του, το παίγνιο συνεχίζεται με τους απογόνους τόσο του παίκτη 1 όσο και του παίκτη 2. Εκείνος, έχει κίνητρο να αποκλίνει προκειμένου να καρπωθεί πέντε μονάδες έναντι των τριών που του προσφέρει ο συνδυασμός συνεργασίας. Υπενθυμίζουμε, ότι οι αποδόσεις , σε περίπτωση συνεργασίας για τον παίκτη 3 θα διαμορφώνονταν ως εξής:

Πίνακας 4.13

Χρονική Περίοδος	**T=5**	**T=6**	**T=7**	**T=8**	**T=9**	**T=10**
Απόδοση	3	3	3	3	3	3

Τώρα, όμως , που στράφηκε στην απόκλιση, οι αποδόσεις του θα διαμορφωθούν:

Πίνακας 4.14

Χρονική Περίοδος	**T=5**	**T=6**	**T=7**	**T=8**	**T=9**	**T=10**
Απόδοση	3	3	3	3	5	2

Δηλαδή, ενώ απαιτούνται δύο μονάδες , για να αντισταθμιστεί πλήρως το όφελος της απόκλισης , η υιοθέτηση της ισορροπίας Nash για την υπολειπόμενη μία περίοδο , δεν το ικανοποιεί. Επομένως, οι απόγονοι των παικτών 1 και 2 αντίστοιχα, θα μειώσουν την τελική απόδοση του αποκλίνοντα και εκείνοι, στο τέλος της ζωής τους θα αποκομίσουν υψηλότερες αποδόσεις, $\underline{w'^1}$ και $\underline{w'^2}$ αντίστοιχα. Αυτές οι αποδόσεις, θα προσφέρουν πάλι επτά μονάδες απόδοσης ενώ ο παίκτης που αποκλίνει θα κερδίσει και πάλι την απόδοση του παιγνίου αλλά μειωμένη κατά το ποσό που δεν πρόλαβε να τιμωρηθεί.

Το συμπέρασμα που συνάγεται είναι ότι η κάθε απόδοση που θα αποκομίσει ο εκάστοτε παίκτης στο τέλος της ζωής του εξαρτάται καθαρά από την συμπεριφορά του μέχρι εκείνη τη περίοδο. Έτσι οι συνεπείς επιβραβεύονται ενώ αντίθετα οι ασυνεπείς τιμωρούνται χάνοντας το ποσό της απόκλισης αλλά και την επιπρόσθετη απόδοση των συνεπών παικτών. Δημιουργείται αντικίνητρο απόκλισης , άρα η διαδικασία τιμωρίας κρίνεται αποτελεσματική.

4.3 Επαναλαμβανόμενο παίγνιο με ασυνέπεια καθήκοντος τιμωρίας αποκλίνοντα.

Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούσαν, ωστόσο τη περίπτωση , όπου οι παίκτες όταν εντόπιζαν την απόκλιση του εκάστοτε παίκτη τον τιμωρούσαν. Παρόλα αυτά, υπάρχει και η περίπτωση , όπου παίκτης ο οποίος εντοπίζει την απόκλιση δεν αντιδρά, δεν τιμωρεί δηλαδή τον αποκλίνοντα. Είναι λογικό, ο παίκτης να τιμωρηθεί για αυτή του την απόκλιση από το καθήκον του.

Έστω, ότι ο παίκτης 1 , αποκλίνει κατά την πέμπτη περίοδο της ζωής του. Όπως παρουσιάστηκε στο αντίστοιχο παράδειγμα, οι παίκτες 2 και 3 οφείλουν να τον τιμωρήσουν υιοθετώντας την ισορροπία κατά Nash. Έστω όμως ότι ο παίκτης 2 επιλέγει να μην τον τιμωρήσει. Πλέον, αυτός κρίνεται ως αποκλίνων παίκτης και πρέπει να τιμωρηθεί. Πιο συγκεκριμένα, οι αποδόσεις του αν τιμωρούσε τον αποκλίνοντα παίκτη 1 θα διαμορφώνονταν ως εξής:

Πίνακας 4.15

Χρονική Περίοδος	**T=4**	**T=5**	**T=6**	**T=7**	**T=8**	**T=9**	**T=10**
Απόδοση	2	4	4	4	4	4	4

Δηλαδή θα τιμωρούσε τον παίκτη 1 , υιοθετώντας τη στρατηγική Nash και αποκομίζοντας δύο μονάδες απόδοσης , αλλά μετά θα επέστρεφε στο συνδυασμό συνεργασίας. Μάλιστα, στο τέλος της ζωής του θα αποκόμιζε και επιπρόσθετη απόδοση συνέπειας, η οποία συμβολίζεται ως w^2, καθώς θα είχε ολοκληρώσει το καθήκον του, η οποία θα ισοδυναμούσε με πέντε μονάδες. Η αποστροφή του , ωστόσο , στους κανόνες που ορίζει το παίγνιο περί αντιμετώπισης της απόκλισης, θα του προσφέρει τις εξής αποδόσεις:

Πίνακας 4.16

Χρονική Περίοδος	**T=4**	**T=5**	**T=6**	**T=7**	**T=8**	**T=9**	**T=10**
Απόδοση	4	2	4	4	4	4	4

Επί της ουσίας, αποκομίζει για ακόμη μία περίοδο την απόδοση της συνεργασίας, καθώς δεν τιμωρεί τον παίκτη 1, όμως οι άλλοι δύο παίκτες οφείλουν να τον τιμωρήσουν, προκειμένου να αντισταθμιστούν αυτές οι επιπλέον δύο μονάδες. Γενικότερα, ο παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει, καθώς θα πρέπει και η απόδοση του να μειωθεί , με στόχο να αντισταθμιστεί το κέρδος της απόκλισης, και μάλιστα θα χάσει και το επιπρόσθετο ποσό στο τέλος της ζωής του , που θα αποκόμιζε αν εκπλήρωνε το καθήκον του. Επί της ουσίας, θα αποκομίσει τις αποδόσεις του παιγνίου , χάνοντας όμως την απόδοση των τιμωρών του που θα ανέρχεται σε πέντε μονάδες. Ενώ, οι τιμωροί του θα επιβραβευθούν με τη διαθέσιμη επιπρόσθετη απόδοση των w^1 και w^3 = πέντε μονάδες. Απλά, μία λογική εκδοχή απαιτεί τη μείωση του τελικού ποσού επιβράβευσης του παίκτη 1 λόγω της αρχικής απόκλισης του.

Από την πλευρά, τώρα, του μη επαρκούς χρονικού διαστήματος, έστω ότι ο παίκτης 3 επιλέγει να αποκλίνει κατά την έβδομη περίοδο. Αποδείξαμε, ότι απαιτούνται 2 περίοδοι προκειμένου να τιμωρηθεί ο παίκτης 3, καθώς θα αποκομίσει πέντε έναντι των τριών μονάδων της συνεργασίας. Ο παίκτης 2 , επιλέγει ξανά να μην τιμωρήσει τον αποκλίνοντα, λόγω του ότι βρίσκεται στη τελευταία περίοδο της ζωής του , οπότε οι αποδόσεις του θα διαμορφωθούν ως εξής:

Πίνακας 4.17

Χρονική Περίοδος	**Τ=4**	**Τ=5**	**Τ=6**	**Τ=7**	**Τ=8**	**Τ=9**	**Τ=10**
Απόδοση	4	4	4	4	4	4	4

Ωστόσο, προκειμένου να τιμωρηθεί ο παίκτης 2, ο οποίος δεν συνεργάστηκε στη διαδικασία τιμωρίας, απαιτείται μία επιπλέον περίοδος ζωής. Οι επιπλέον δύο μονάδες απόδοσης που αποκόμισε, θα αφαιρεθούν από την τελική απόδοση που αποκομίζει φεύγοντας από το παίγνιο. Το βασικότερο, ωστόσο , αντικίνητρο είναι το γεγονός ότι οι αντίπαλοι του θα αποκομίσουν μεγαλύτερη απόδοση $\underline{w^1}$ = $\underline{w^3}$= επτά μονάδες. Απλά, και σε αυτή τη περίπτωση λόγω του ότι η ανταμοιβή διαμορφώνεται βάσει της προηγούμενης συμπεριφοράς του κάθε παίκτη, ο παίκτης 3 που απέκλινε θα πρέπει να δεχθεί μία μείωση της επιβράβευσης του καθώς δεν υπήρξε συνεπής σε όλες τις περιόδους ζωής του.

Επομένως, με τη διαδικασία της επιπρόσθετης απόδοσης στο τέλος της ζωής του κάθε παίκτη, και της μεταβολής αυτής βάσει της συμπεριφοράς του επιτυγχάνεται η αποφυγή αποκλίσεων. Ολοκληρώνοντας, επιβεβαιώνεται η ιδέα γύρω από τη διαδικασία επιβράβευσης που όρισε ο Kandori(1992). Ουσιαστικά, κάθε επιπρόσθετη απόδοση που είναι μεγαλύτερη από το ποσό απόκλισης, σε ορθολογικούς παίκτες , αντιμετωπίζει τον κίνδυνο απόκλισης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα διπλωματική, είχε ως στόχο την εις βάθος μελέτη θεωρητικών υποδειγμάτων που ανέλυαν τα επαναλαμβανόμενα παίγνια με το χαρακτηριστικό των επικαλυπτόμενων γενεών. Ωστόσο, έναν επιπρόσθετο στόχο αποτέλεσε και η εις βάθος κατανόηση της δομής και λειτουργίας των παιγνίων προκειμένου να κατανοηθούν πλήρως τα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών και να γίνει ευκολότερη η κατανόηση της ανάλυσης βιβλιογραφίας που αξιοποιήθηκε.

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο τμήμα της εργασίας κρίνουμε ότι πετύχαμε τη διαμόρφωση μίας σωστής βάσης μελέτης των στατικών παιγνίων. Έγινε η παρουσίαση βασικών εννοιών, όπως ο ορισμός τους, η ισορροπία κατά Nash και ο τρόπος εύρεσης της, οι πιθανές λύσεις και στρατηγικές που υιοθετούν οι παίκτες. Δόθηκε ιδιαίτερη σημασία, προκειμένου να γίνει κατανοητή η επίδραση της πληροφόρησης του εκάστοτε παίκτη στη λειτουργία ενός στατικού παιγνίου. Μάλιστα, σχεδόν όλες οι σημαντικές έννοιες συνδυάστηκαν με αντίστοιχα παραδείγματα, προκειμένου να αξιοποιηθούν σε επόμενες μελέτες και να διευκολύνουν την απορρόφηση εννοιών και διαδικασιών από τον εκάστοτε αναγνώστη.

Στο δεύτερο τμήμα της εργασίας, προχωρώντας τις γνώσεις μας ένα βήμα πιο κοντά στον κύριο στόχο μας, εισήχθη η έννοια των δυναμικών παιγνίων, και συγκεκριμένα των επαναλαμβανόμενων παιγνίων. Γίνεται εκτενής περιγραφή της δομής ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου , με ιδιαίτερη σημασία να δίνεται στην έννοια της ιστορίας , που επηρεάζει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων των παικτών. Διαχωρίστηκαν τα επαναλαμβανόμενα παίγνια , ανάλογα με τον χρονικό ορίζοντα που διέθεταν, σε πεπερασμένα και απείρως επαναλαμβανόμενα, με αντίστοιχα παραδείγματα, έτσι ώστε να επιτύχουμε την πλήρη ανάλυση και κατανόηση τους. Στόχο αυτής της ενότητας, αποτέλεσε και η κατανόηση της επίδρασης της φήμης αλλά και της πληροφόρησης και σε αυτού του είδους παίγνια, με αρκετές εφαρμογές.

Τα βασικά συμπεράσματα, τα οποία συνάγονται από τις δύο πρώτες ενότητες αφορούν καθαρά την επίδραση της ορθολογικότητας στην όλη λειτουργία των παιγνίων καθώς τη συμπεριφορά που υιοθετούν. Γενικότερα, χωρίς την υπόθεση της ορθολογικότητας, δεν θα μπορούσαμε να βρούμε τις βέλτιστες αντιδράσεις και να καταλήξουμε σε λύσεις παιγνίων. Η έλλειψη ορθολογικότητας ενός παίκτη θα αποτελούσε σημαντικό αντικίνητρο για διεξαγωγή συμφωνίας μαζί του. Από την πλευρά των συμπεριφορών, γίνεται εμφανές ότι πιθανές επιβραβεύσεις ή τιμωρίες εξαρτώνται φανερά από αυτές, δηλαδή κάθε αποτέλεσμα αποτελεί συνάρτηση της συμπεριφοράς που υιοθετεί ο καθένας.

Αφότου καταφέραμε να θέσουμε το απαραίτητο υπόβαθρο, στο τρίτο τμήμα της εργασίας ξεκινά η μελέτη των θεωρητικών υποδειγμάτων των επαναλαμβανόμενων παιγνίων με το χαρακτηριστικό των επικαλυπτόμενων γενεών. Η βιβλιογραφική επισκόπηση βασίζεται στα άρθρα των Salant(1991) , Kandori (1992) και Gossner(1996). Μελετώντας εκτενώς τα υποδείγματα που εισήγαγαν και τις υποθέσεις που χρησιμοποίησαν για να καταλήξουν σε σημαντικά και χρήσιμα συμπεράσματα, γίνεται αντιληπτό ότι υιοθετούν και βασίζονται όλοι τους στα αποτελέσματα των προηγούμενων ερευνών από τις δικές τους. Πιο αναλυτικά, συνάγονται συμπεράσματα, τόσο για τη χρήση τους σε διάφορους κλάδους όσο και για την ύπαρξη εθιμικών θεωρημάτων για όλων των ειδών στρατηγικές, αλλά και το διαφορετικό στοιχείο λόγω της διάρθρωσης ηλικιών.

Πιο συγκεκριμένα, μέσα από την έρευνα του Salant(1991) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι παρότι τα επαναλαμβανόμενα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών διαθέτουν ιδιαιτερότητες, κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις, μπορεί να εξασφαλιστεί η ύπαρξη πολλαπλών υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών. Μάλιστα, η έρευνα αυτή αποτελεί στοιχείο χρήσιμο στη διαμόρφωση αποζημίωσης ανώτερων στελεχών αφότου συνταξιοδοτηθούν, καθώς τα αποτελέσματα του αφορούν παίκτες πεπερασμένης διάρκειας που αντικαθίστανται. Με τα προγράμματα επιβράβευσης που εισάγει μετά την λήξη της συμμετοχής ενός παίκτη στο παίγνιο, αφότου έχει αντικατασταθεί από τον απόγονο του, διασφαλίζει την συνεπή συμπεριφορά του.

Ο Kandori(1992), κατάφερε να επεκτείνει την έρευνα του Salant(1991) υπό την έννοια ότι αφαίρεσε κάποιους περιορισμούς προκειμένου να καταλήξει σε συμπεράσματα. Η διαδικασία τιμωρίας των παικτών στο τέλος της ζωής τους, οδηγεί εκ νέου στο συμπέρασμα ότι κάθε απόδοση που θα αποκομίσει ένας παίκτης εξαρτάται από τη συνολική του συμπεριφορά μέχρι το τέλος της ζωής του και μάλιστα είναι στο χέρι των επόμενων γενεών το μέγεθος της επιβράβευσης τους. Αλλά αυτό που αποκτάμε σαν άποψη από όλη την έκταση της έρευνας αυτής είναι ότι η επίδραση στις αποδόσεις των παικτών, μέσω τιμωρίας ή επιβράβευσης, μπορεί να ορίσει τη συμπεριφορά τους και των απογόνων τους. Χάρη σε αυτό εξασφαλίζεται εθιμικό θεώρημα, δηλαδή αμοιβαίως ωφελούμενα αποτελέσματα.

Η έρευνα του Gossner(1996), προσέφερε γνώση για τις μη παρατηρούμενες μικτές στρατηγικές, οι οποίες δεν είχαν συμπεριληφθεί στα εθιμικά θεωρήματα των δύο προηγούμενων ερευνών. Ουσιαστικά , μέχρι τότε όλοι χρησιμοποιούσαν την υπόθεση ότι και οι μικτές στρατηγικές εισάγονται στις αμιγείς ενέργειες. Γενικότερα, συνάγεται το συμπέρασμα ότι κάτω από μία συγκεκριμένη δομή παιγνίου, εξασφαλίζεται και πάλι η ύπαρξη αποδόσεων της υποπαιγνιακά τέλειας ισορροπίας. Η έρευνα αυτή, επιβεβαιώνει την άποψη περί επίδρασης ενδεχόμενης τιμωρίας ή επιβράβευσης στη συμπεριφορά ενός ατόμου.

Βάσει , λοιπόν, των συμπερασμάτων που καταλήξαμε χάρη στη μελέτη των προηγούμενων άρθρων, διαμορφώσαμε στο τελευταίο τμήμα αντίστοιχα παραδείγματα προκειμένου να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαδικασία τιμωρίας, πάνω στην οποία βασίστηκαν τα άρθρα που μελετήσαμε. Αναφορικά με επόμενες μελέτες, επειδή η παρούσα καλύπτει μία καθαρά θεωρητική σκοπιά , μία πρόταση θα αφορούσε την αξιοποίηση των συμπερασμάτων αυτών σε μακροοικονομικό πεδίο. Τα παίγνια επικαλυπτόμενων γενεών, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε έρευνες αναφορικά με την οικονομική ανάπτυξη αλλά και σε ενδεχόμενη αναζήτηση κατανομής πόρων ανάμεσα στις γενεές. Μάλιστα, ως πρόταση κρίνεται η εισαγωγή της στρατηγικής συμπεριφοράς σε περιπτώσεις παιγνίων επικαλυπτόμενων γενεών και αναθεώρηση των αποτελεσμάτων υπό αυτό το πρίσμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Βολιώτης, Δ. (2015). Διαλέξεις στη Θεωρία Παιγνίων . Αθήνα: ΠΕΔΙΟ.

Σταματόπουλος, Γ. (2015). Θεωρία Παιγνίων. Αθήνα: Κάλλιπος.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

Aumann, R. J., & Maschler, M. B. (1995). Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Aumann, R., & Shapley, L. (2013). Long- Term competition- a game theoritic analysis. Annals of Economics and Finance, 14(2): 609-622.

Benoit, J.P., & Krishna, V. (1985). Finitely Repeated Games. Econometrica, 53:905-922.

Bernheim, B. D. (1984). Rationalizable strategic behavior. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 52(4):1007-1028.

Crémer , J. (1986). Cooperation in Ongoing Organizations. Quarterly Journal of Economics, 101:33-49.

Fudenberg, D., & Maskin, E. (1986). The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information. Econometrica, 54(3):533-554.

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). Perfect Bayesian equilibrium and sequential equilibrium. Journal of Economic Theory, 236-260.

Fudenberg, D., Levine, D. K., & Maskin, E. (1994). The folk theorem with imperfect public information. Econometrica, 62:997-1040.

Glicksberg, I. L. (1952). A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points. Proceedings of the American Mathematical Society, 3(1):170-174.

Gossner, O. (May 1996). Overlapping Generations Games with Mixed Strategies. Mathematics of Operations Research, 21(2):477-486.

Green, E., & Porter, R. (1984). Non cooperative collusion under imperfect price Information. Econometrica, 52:87-100.

Kandori, M. (1992). Repeated Games Played by Overlapping Generations of Players. The Review of Economic Studies, 59:81-92.

Mailath, G. J., & Samuelson, L. (2006). Repeated Games and Reputations. Oxford University Press.

Obara, I. (2003). Repeated Games with Imperfect Public,1-13.

Pearce, D. G. (1984). Rationalizable strategic behaviour and the problem of perfection. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 52(4):1029-1050.

Radner, R., Myerson, R., & Maskin, E. (1986). An example of repeated partnership game with discounting and with uniformly inefficient equilibria. Review of Economic Studies, 53:59-69.

Rubinstein, A. (1979). Equilibrium in Super games with the overtaking criterion. Journal of Economic Theory, 21:1-9.

Salant, D. J. (1991). A Repeated Game with Finitely Lived Overlapping Generations of Players. GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR ,3:244-259.

Smith, L. (1992). Folk Theorems in Overlapping Generations Games. Games and Economic Behavior, 4:426-449