



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ
«ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ» ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ
«ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ»

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία
«Εφαρμογή του διωνυμικού υποδείγματος
για αντιστάθμιση και arbitrage»

ΚΕΠΕΣΗΣ ΝΙΚΑΝΔΡΟΣ
ΜΧΡΗ2009

Επιβλέπων Καθηγητής: Επίκουρος Καθηγητής Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Εξεταστική Επιτροπή: Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Πειραιάς, Φεβρουάριος 2022

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία κλείνει τον κύκλο των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Χρηματοοικονομική και Τραπεζική» του τμήματος «Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής» του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Η εκπόνησή της δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την συμβολή κάποιων ανθρώπων που δράττομαι της ευκαιρίας να ευχαριστήσω.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους καθηγητές του τμήματος για τις γνώσεις που αποκόμισα κατά την παρακολούθηση των γνωστικών αντικειμένων τους, για τις υποδείξεις, την καθοδήγηση και την συμπαράστασή τους σε μια ομολογουμένως δύσκολη, αυτή της πανδημίας, συγκυρία.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ανθρωπέλο Μιχαήλ για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθώς και για την επιστημονική και συμβουλευτική καθοδήγηση και ενθάρρυνση που μου προσέφερε σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας μου με τις εύστοχες και πολύ επικοινωνιακές παρατηρήσεις του.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην οικογένειά μου για την συμπαράσταση και την υπομονή τους.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική έχει ως αντικείμενο την εφαρμογή του Διωνυμικού υποδείγματος για αντιστάθμιση και arbitrage. Για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και για σκοπούς σύγκρισης γίνεται χρήση του Διωνυμικού μοντέλου των Cox, Ross και Rubinstein (1979) και του μαθηματικού μοντέλου των Black και Scholes (1973).

Αρχικά παρουσιάζεται το θεωρητικό κομμάτι που είναι απαραίτητο για την κατανόηση της εμπειρικής μελέτης. Στην θεωρία αναπτύσσεται το διακριτό μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein και ακολουθούν ορισμένες μέθοδοι εκτίμησης μεταβλητότητας. Η βασική αδυναμία στην σωστή τιμολόγηση των δικαιωμάτων οφείλεται στο γεγονός ότι για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη μέθοδος δημιουργώντας έτσι εν δυνάμει ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Στην συνέχεια αναπτύσσεται η στρατηγική αντιστάθμισης που θα ακολουθηθεί, η οποία βασίζεται στο συντελεστή ευαισθησίας Δέλτα του δικαιώματος, με σκοπό την εκμετάλλευση των ευκαιριών.

Έπεται η εμπειρική μελέτη ενός δείγματος δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο βασικούς χρηματιστηριακούς δείκτες. Τέλος, ακολουθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων και η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τις μεθόδους αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης και τις μεθόδους εκτίμησης της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου.

Λέξεις Κλειδιά

Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης, Διωνυμικό Μοντέλο, Μοντέλο Black και Scholes, Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Αγοράς, Αντιστάθμιση Δέλτα, Ευκαιρίες Εξισορροπητικής Κερδοσκοπίας, Τεκμαρτή μεταβλητότητα, Χαμόγελο Μεταβλητότητας, Σφάλμα Παρακολούθησης, Εμπειρική Μελέτη.

Abstract

The theme of the thesis concerns the application of the Binomial model for hedging and arbitrage. The binomial model of Cox, Ross and Rubinstein (1979) and the mathematical model of Black and Scholes (1973) are used for option valuation and comparison purposes.

Initially, the theoretical piece is presented which is required for the comprehension of the empirical study. In theory, the discrete model of Cox, Ross and Rubinstein is developed, followed by some methods of estimating volatility. The main disadvantage of the correct pricing of options is that there is no specific method for calculating volatility, thus creating potential arbitrage. The hedging strategy to be followed is then developed, based on the risk sensitivity measure Delta of an option, to accomplish arbitrage.

This is followed by an empirical study of a sample of options with major market indices as the underlying asset. Finally, the results are compared and conclusions are drawn regarding the valuation methods for options and the methods for estimating the volatility of the underlying asset.

Key Words

Options Valuations Models, Binomial Tree, Black & Scholes Models, European Call Options, Delta Hedging, Arbitrage, Implied Volatility, Volatility Smile, Delta Hedging Tracking Error, Empirical Study.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	6
Ιστορική Αναδρομή	6
Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)	9
Περιγραφή Διπλωματικής	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	14
Διωνυμικό Μοντέλο	14
Μέθοδος αποτίμησης Black και Scholes.....	23
Συντελεστής ευαισθησίας Δέλτα	25
Μέθοδοι εκτίμησης μεταβλητότητας	27
Ιστορική Μεταβλητότητα (Historical Volatility)	27
Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility).....	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	37
Στρατηγική αντιστάθμισης και arbitrage	37
Υπερτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά	40
Υποτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά	46
Σφάλμα Παρακολούθησης (Delta Hedging Tracking Error)	52
Υπερτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά	54
Υποτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	58
Εμπειρική ανάλυση	58
Πίνακες αποτελεσμάτων της στρατηγικής.....	60
Σύγκριση και ανάλυση αποτελεσμάτων	68
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	73
Συμπεράσματα	73
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	74
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	76
Πίνακες εκτιμήσεων μεταβλητότητας.....	76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ιστορική Αναδρομή

Οι **Black και Scholes** παρουσίασαν το 1973 στο άρθρο τους “*The pricing of Options and Corporate Liabilities*” το πρώτο μοντέλο για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Πρόκειται για το κυρίαρχο υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης σε συνεχή χρόνο μέχρι και σήμερα παρόλα τα μοντέλα που ακολούθησαν. Το μοντέλο αυτό είχε τεράστια επιρροή στον τρόπο που αποτιμούν οι επενδυτές τα δικαιώματα καθώς και στον τρόπο με το οποίο αντισταθμίζουν την θέση τους. Ήταν πρωτοποριακό, καθώς η αποτίμηση του δικαιώματος γινόταν σύμφωνα με γνωστές παραμέτρους. Το βασικό πλεονέκτημα του ήταν η ταχύτητά του, καθώς δίνει την δυνατότητα στον επενδυτή να αποτιμήσει ένα σημαντικό πλήθος δικαιωμάτων σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα.

Οι βασικές υποθέσεις του υποδείγματος είναι οι εξής:

- Αναφέρεται σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου τα οποία μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην ημερομηνία λήξης.
- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τη λογαριθμικό-κανονική κατανομή με αναμενόμενη ετήσια απόδοση μ και ετήσια μεταβλητότητα σ , που παραμένουν σταθερές στον χρόνο.
- Επιτρέπεται η ανοιχτή πώληση τίτλων (short selling).
- Δεν υπάρχουν φόροι και κόστη συναλλαγών.
- Δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.
- Δεν καταβάλλονται μερίσματα μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.
- Η συναλλαγή των τίτλων γίνεται σε συνεχή χρόνο.
- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι σταθερό και ίδιο για όλες τις λήξεις.

Στην συνέχεια την σκυτάλη παίρνει το Διωνυμικό μοντέλο. Πρόκειται για το βασικό εργαλείο με το οποίο θα ασχοληθούμε στην εργασία μας για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Το μοντέλο των **Cox, Ross και Rubinstein** παρουσιάστηκε το 1979 στο άρθρο τους “*Option Pricing: A Simplified Approach*” και αποτελεί μια από τις βασικές μεθόδους τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης σε διακριτό χρόνο και διακριτές τιμές. Σε αντίθεση με το μοντέλο των Black και Scholes, που είναι μαθηματικά απλούστερο και ταχύτερο στον υπολογισμό των δικαιωμάτων, το Διωνυμικό μοντέλο είναι χρονοβόρο στην κατασκευή του και στους υπολογισμούς. Το πλεονέκτημα που προσφέρει είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικάνικου τύπου που η εξάσκηση τους δεν γίνεται απαραίτητα στην λήξη. Ο τρόπος αποτίμησης του δικαιώματος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο γίνεται μέσω της γραφικής αναπαράστασης της τιμής του υποκείμενου τίτλου και της αντίστοιχης

εσωτερικής αξίας του δικαιώματος. Η γραφική παράσταση λαμβάνει χώρα μεταξύ της ημερομηνίας αποτίμησης και της ημερομηνίας λήξης του χωρίζοντας τον χρόνο σε τακτά χρονικά διαστήματα που αποτελούν τους αντίστοιχους κόμβους. Πρόκειται για μια συγκεκριμένη περίπτωση του μοντέλου των Black και Scholes, γιατί, όταν ο αριθμός των χρονικών αυτών βημάτων αυξάνεται ($n \rightarrow \infty$), συγκλίνει αρκετά γρήγορα με την μέθοδο αποτίμησής τους. Η αξία του δικαιώματος εξαρτάται από τον ρυθμό αύξησης και μείωσης του υποκείμενου τίτλου καθώς και τις αντίστοιχες πιθανότητες ανόδου και καθόδου που θα αναλυθούν στην συνέχεια.

Οι βασικές υποθέσεις του υποδείγματος είναι οι εξής:

- Το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μπορεί να πάρει μόνο δύο πιθανές τιμές σε κάθε χρονικό βήμα.
- Δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.
- Δεν υπάρχουν φόροι και κόστη συναλλαγών.
- Οι επενδυτές βρίσκονται σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Όπως είναι γνωστό, υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου και της μεταβλητότητάς του. Αυτό διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον **Black** στο άρθρο “*Studies of Stock Price Volatility Changes*” (1976) και τον **Christie** στο άρθρο “*The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects*” (1982). Οι παραπάνω διαπίστωσαν ότι υπάρχει ισχυρή θετική συσχέτιση μεταξύ της μεταβλητότητας και της μόχλευσης. Επομένως, καθώς η τιμή της μετοχής κινείται προς τα κάτω, η μόχλευση αυξάνεται και μαζί της η μεταβλητότητα.

Το 1994 οι **Derman και Kani** στο άρθρο τους “*The Volatility Smile and Its Implied Tree*” παρουσιάζουν τα τεκμαρτά δέντρα και επεκτείνουν το μοντέλο των Black και Scholes, ώστε να είναι συνεπές με το χαμόγελο μεταβλητότητας. Συγκεκριμένα, βασική υπόθεση του μοντέλου των Black και Scholes είναι ότι ο υποκείμενος τίτλος ακολουθεί τυχαίο περίπατο με σταθερή μεταβλητότητα. Επομένως, αν το μοντέλο λειτουργεί σωστά και το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, όλα τα δικαιώματα προαίρεσης με κοινή ημερομηνία λήξης πρέπει να έχουν και κοινή τεκμαρτή μεταβλητότητα. Ωστόσο, από το κραχ του 1987 και μετά, παρατηρείται αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της τιμής εξάσκησης των δικαιωμάτων. Έτσι στην πράξη δεν παρατηρείται η λογαριθμοκανονική κατανομή του υποκείμενου τίτλου, καθώς ακολουθεί έναν τροποποιημένο τυχαίο περίπατο με κυμαινόμενη μεταβλητότητα. Στο άρθρο τους παρουσιάζουν πώς μπορούν να εκμεταλλευτούν το χαμόγελο μεταβλητότητας για να εξάγουν συμπεράσματα για τον τροποποιημένο τυχαίο περίπατο που ακολουθεί ο υποκείμενος τίτλος. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουν ένα τεκμαρτό Διωνυμικό δέντρο, στο οποίο η μεταβλητότητα δεν παραμένει σταθερή στους κόμβους, έτσι ώστε να είναι πιο ευέλικτο και να ικανοποιεί τις τιμές των δικαιωμάτων στην αγορά.

Το 2002 οι **Ederington και Guan** στο άρθρο τους “*Why Are Those Options Smiling*” ελέγχουν αν η τεκμαρτή μεταβλητότητα των δικαιωμάτων προαίρεσης με κοινό υποκείμενο τίτλο και κοινή ημερομηνία λήξης διαφέρει ανάλογα με την τιμή εξάσκησης. Αν δεν ισχύει το παραπάνω, τότε το χαμόγελο μεταβλητότητας είναι επίπεδο και δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Επομένως, η στρατηγική αγοράς των υποτιμημένων δικαιωμάτων στο κάτω μέρος του «χαμόγελου» (λόγω χαμηλής τεκμαρτής μεταβλητότητας) και ταυτόχρονης πώλησης των υπερτιμημένων δικαιωμάτων στο πάνω μέρος του «χαμόγελου» (λόγω υψηλής τεκμαρτής μεταβλητότητας) δεν θα πρέπει να είναι κερδοφόρα. Ωστόσο διαπιστώνουν ότι ακολουθώντας στην πράξη την στρατηγική αντιστάθμισης Delta-Gamma Neutral με υποκείμενο τίτλο τον χρηματιστηριακό δείκτη S&P500, αναγνωρίζουν σημαντικά κέρδη και εκμεταλλεύονται τις ευκαιρίες arbitrage. Η διατήρηση της στρατηγικής αντιστάθμισης μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος απαιτεί δυναμική αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου γεγονός που δημιουργεί υψηλά κόστη συναλλαγών εξαλείφοντας έτσι ένα σημαντικό μέρος των κερδών. Επομένως, ακόμα και αν το χαμόγελο μεταβλητότητας δεν οφείλεται αποκλειστικά σε σφάλματα στους τύπους κλειστής μορφής των Black και Scholes, δεν σημαίνει ότι η αγορά είναι αναποτελεσματική. Η αδυναμία στο μοντέλο των Black και Scholes οφείλεται στο γεγονός ότι βασική υπόθεση του μοντέλου είναι η σταθερή μεταβλητότητα σε όλο το χρονικό διάστημα μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος καθώς και στην κατανομή των αποδόσεων του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.

Το 2004 ο **Vähämaa** στο άρθρο του “*Delta Hedging with the Smile*” εξετάζει αν η στρατηγική αντιστάθμισης Δέλτα σύμφωνα με το μοντέλο των Black και Scholes μπορεί να βελτιωθεί λαμβάνοντας υπόψη την αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της τιμής εξάσκησης των δικαιωμάτων. Συγκεκριμένα, η κλίση του χαμόγελου μεταβλητότητας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του δέλτα (smile-adjusted delta), συνυπολογίζοντας με αυτόν τον τρόπο την έμμεση επίδραση στην τιμή του δικαιώματος εξαιτίας της διαχρονικά κυμαινόμενης μεταβλητότητας. Τα εμπειρικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι το smile-adjusted delta είναι μικρότερο από το Δέλτα σύμφωνα με το μοντέλο των Black και Scholes και προσφέρει στον επενδυτή καλύτερη αντιστάθμιση.

Το ίδιο έτος ο **Crépey** στο άρθρο του “*Delta-hedging Vega risk?*” (2004) ακολουθεί την ίδια προσέγγιση για τον υπολογισμό του Δέλτα συνυπολογίζοντας με αυτόν τον τρόπο την έμμεση επίδραση στην τιμή του δικαιώματος εξαιτίας της διαχρονικά κυμαινόμενης μεταβλητότητας και διαπιστώνει ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το Δέλτα σύμφωνα με τους Black και Scholes.

Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Τα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης (Options) αποτελούν μία από τις πιο γνωστές κατηγορίες παραγώγων. Ανεξάρτητα από τα πλεονεκτήματα που παρέχουν τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures) υπάρχει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Ενώ προστατεύουν τον επενδυτή από τον κίνδυνο δυσμενών κινήσεων που θα προκαλούσαν ζημίες στην θέση του, δεν του αφήνουν περιθώριο πραγματοποίησης κερδών σε περίπτωση ευνοϊκών κινήσεων. Τον χαμένο αυτό βαθμό ελευθερίας τον έδωσαν τα δικαιώματα προαίρεσης και για αυτό τον λόγο αυτή η αγορά παραγώγων είναι πλέον από τις πιο γνωστές.

Τα δικαιώματα προαίρεσης αγοράζονται και διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια (exchange-traded options) ή σε εξωχρηματιστηριακές αγορές (over the counter market). Τα δικαιώματα που διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια αποτελούν τυποποιημένα συμβόλαια με συγκεκριμένες τιμές εξάσκησης και συγκεκριμένες ημερομηνίες λήξης. Αντίθετα, τα δικαιώματα που διαπραγματεύονται σε μη οργανωμένες αγορές είναι συμβόλαια οι προδιαγραφές των οποίων όσον αφορά το ποσό, την τιμή εξάσκησης, τον υποκείμενο τίτλο και τον χρόνο μέχρι την λήξη είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Τις περισσότερες φορές ο εκδότης των δικαιωμάτων είναι ένα επαρκώς κεφαλαιοποιημένο ίδρυμα.

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός δικαίωμα προαίρεσης

Υποκείμενος τίτλος (Underlying asset): Ο υποκείμενος τίτλος είναι το προϊόν που ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς/πώλησης έχει την δυνατότητα να αγοράσει/πουλήσει από/στον άλλον αντισυμβαλλόμενο. Μπορεί να είναι μια μετοχή, ένας χρηματιστηριακός δείκτης είτε κάποιο εμπορεύσιμο αγαθό, όπως ο χρυσός.

Τιμή εξάσκησης (Strike price): Αποτελεί την προκαθορισμένη τιμή σύμφωνα με την οποία, αν εξασκηθεί το δικαίωμα, ο αγοραστής/πωλητής μπορεί να αγοράσει/πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο.

Μέγεθος συμβολαίου (Contract size): Το μέγεθος του συμβολαίου περιλαμβάνει τον αριθμό των μετοχών που καλύπτει το κάθε δικαίωμα.

Ημερομηνία λήξης (Time to maturity): Αναφέρεται στο χρονικό πλαίσιο μέσα στο οποίο ένα δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί. Ανάλογα με την δυνατότητα εξάσκησης του μέσα στο χρονικό πλαίσιο, τα δικαιώματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Ανεξάρτητα από τον τύπο του δικαιώματος μετά από αυτό το χρονικό διάστημα το δικαίωμα παύει να ισχύει.

- Αμερικάνικα Δικαιώματα (American Options): Η εξάσκηση του δικαιώματος γίνεται ανά πάσα χρονική στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης.
- Ευρωπαϊκά Δικαιώματα (European Options): Η εξάσκηση του δικαιώματος γίνεται μόνο στην ημερομηνία λήξης.

Ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος (Premium): Το ασφάλιστρο είναι το χρηματικό ποσό που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή. Η τιμή του δικαιώματος αποτελείται από τις παρακάτω δύο συνιστώσες :

$$\text{Ασφάλιστρο} = \text{Εσωτερική αξία} + \text{Χρονική αξία}$$

Η εσωτερική αξία (Intrinsic Value) είναι πάντα θετική ή ίση με το μηδέν και αντιπροσωπεύει τα κέρδη που μπορεί να επιφέρει στον κάτοχο του δικαιώματος, αν πωληθεί στην τρέχουσα ισοτιμία. Ο υπολογισμός της χρονικής αξίας (Time Value) είναι πιο πολύπλοκος και μπορούμε να τον εκμαιεύσουμε αφαιρώντας από την τιμή του δικαιώματος την εσωτερική αξία.

Είδος δικαιώματος και θέση: Θέση αγοράς ή πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Προκύπτουν έτσι συνολικά οι παρακάτω τέσσερις θέσεις.

- Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς (**Long Call**): Ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς καταβάλλει το αρχικό ασφάλιστρο f και έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση στην λήξη να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης K . Επομένως η πληρωμή (payoff) του δικαιώματος καθώς και το συνολικό κέρδος ή ζημία (P|L) στην λήξη υπολογίζεται ως εξής:

$$(\text{Payoff})_T = \max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T < K \end{cases}$$

$$(P|L)_T = -f + \max\{S_T - K, 0\}$$

- Θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς (**Short Call**): Ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς εισπράττει το αρχικό ασφάλιστρο f και έχει την υποχρέωση στην λήξη να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης K , αν το δικαίωμα εξασκηθεί. Επομένως η πληρωμή (payoff) του δικαιώματος καθώς και το συνολικό κέρδος ή ζημία (P|L) στην λήξη υπολογίζεται ως εξής:

$$(\text{Payoff})_T = -\max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & S_T > K \\ 0, & S_T < K \end{cases}$$

$$(P|L)_T = f - \max\{S_T - K, 0\}$$

- Θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης (**Long Put**): Ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης καταβάλλει το αρχικό ασφάλιστρο f και έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, στην λήξη να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης K . Επομένως η πληρωμή (payoff) του δικαιώματος καθώς και το συνολικό κέρδος ή ζημία (P|L) στην λήξη υπολογίζεται ως εξής:

$$(Payoff)_T = \max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} K - S_T, S_T < K \\ 0, S_T > K \end{cases}$$

$$(P|L)_T = -f + \max\{K - S_T, 0\}$$

- Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης (**Short Put**): Ο πωλητής του δικαιώματος πώλησης εισπράττει το αρχικό ασφάλιστρο f και έχει την υποχρέωση στην λήξη να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης K , αν το δικαίωμα εξασκηθεί. Επομένως η πληρωμή (payoff) του δικαιώματος καθώς και το συνολικό κέρδος ή ζημία (P|L) στην λήξη υπολογίζεται ως εξής:

$$(Payoff)_T = -\max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} S_T - K, S_T < K \\ 0, S_T > K \end{cases}$$

$$(P|L)_T = f - \max\{K - S_T, 0\}$$

Παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων

Η τρέχουσα τιμή της μετοχής S_0 : Η τιμή του δικαιώματος αγοράς αυξάνεται, όταν αυξάνεται η τιμή της μετοχής, καθώς αυξάνεται η πιθανότητα να εξασκηθεί το δικαίωμα και αυξάνεται η εσωτερική του αξία. Αντίθετα, η τιμή του δικαιώματος πώλησης μειώνεται, όταν αυξάνεται η τιμή της μετοχής, καθώς μειώνεται η πιθανότητα να εξασκηθεί το δικαίωμα και μειώνεται η εσωτερική του αξία.

Η τιμή εξάσκησης K : Η τιμή του δικαιώματος πώλησης αυξάνεται, όταν αυξάνεται η τιμή εξάσκησης K , καθώς υπάρχει θετική συσχέτιση με την εσωτερική αξία του δικαιώματος. Αντίθετα, η τιμή του δικαιώματος αγοράς μειώνεται, όταν αυξάνεται η τιμή εξάσκησης K , καθώς υπάρχει αρνητική συσχέτιση με την εσωτερική αξία του δικαιώματος.

Ο χρόνος που απομένει μέχρι την λήξη T : Στα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς και πώλησης η αύξηση του χρόνου μέχρι την λήξη T αυξάνει την τιμή τους λόγω της μεγαλύτερης ευελιξίας. Σε γενικές γραμμές, όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος μέχρι την λήξη, τόσο μεγαλύτερη είναι και η τιμή του δικαιώματος, καθώς αυξάνεται η χρονική του αξία. Ωστόσο, όσον αφορά τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα, το παραπάνω συμπέρασμα δεν ισχύει. Για παράδειγμα στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς, αν αναμένεται αύξηση της μερισματικής απόδοσης μεταξύ των δύο ημερομηνιών λήξης, τότε ενδέχεται η τιμή του βραχυχρόνιου συμβολαίου να είναι υψηλότερη.

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r : Η σχέση μεταξύ του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου και των δικαιωμάτων εξαρτάται κυρίως από την συσχέτιση του υποκείμενου τίτλου με το επιτόκιο. Αν η συσχέτιση είναι θετική, τότε η τιμή του δικαιώματος αγοράς/πώλησης αυξάνεται/μειώνεται. Αντίθετα, αν η συσχέτιση είναι αρνητική, τότε η τιμή του δικαιώματος αγοράς/πώλησης μειώνεται/αυξάνεται.

Η μεταβλητότητα σ : Η μεταβλητότητα μετρά την αβεβαιότητα για τις μελλοντικές κινήσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου μέσα σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα αυξάνονται οι πιθανότητες μεγάλης ανόδου ή καθόδου του τίτλου και κατά συνέπεια οι πιθανότητες για θετική πληρωμή των δικαιωμάτων (payoff), καθώς ο κάτοχος ενός δικαιώματος έχει κάτω φράγμα ζημίας το αρχικό ασφάλιστρο που πλήρωσε.

Η μερισματική απόδοση q : Η διανομή μερισμάτων οδηγεί σε πτώση την τιμής του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, η τιμή του δικαιώματος αγοράς/πώλησης μειώνεται/αυξάνεται λόγω της θετικής/αρνητικής σχέσης με την τρέχουσα τιμή της μετοχής.

Περιγραφή Διπλωματικής

Στον παρόν κεφάλαιο έγινε μια σύντομη αναφορά στο Διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein (1979) που χρησιμοποιείται ως βασικό εργαλείο για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης σε διακριτό χρόνο και στο κυρίαρχο υπόδειγμα αποτίμησης σε συνεχή χρόνο των Black και Scholes (1973). Στην συνέχεια έγινε μια ιστορική αναδρομή σε άρθρα σχετικά με το «χαμόγελο» μεταβλητότητας καθώς και σε στρατηγικές αντιστάθμισης που το λαμβάνουν υπόψη. Τέλος, έγινε μια εισαγωγή στην έννοια των δικαιωμάτων, στους βασικούς παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή τους καθώς και στις βασικές θέσεις αγοράς και πώλησης που μπορεί να πάρει ένας επενδυτής.

Στο κεφάλαιο 2 ακολουθεί η λεπτομερής περιγραφή του Διωνυμικού μοντέλου των Cox, Ross και Rubinstein (1979) και των παραμέτρων που είναι απαραίτητες για την κατασκευή του. Ύστερα γίνεται αναφορά στις εξισώσεις κλειστής μορφής για την αποτίμηση του δικαιώματος σύμφωνα με την μέθοδο των Black και Scholes (1973). Καθώς στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αντιστάθμιση κινδύνου και κυρίαρχη παράμετρος είναι το Δέλτα του δικαιώματος, στην συνέχεια αναφέρονται οι μέθοδοι υπολογισμού του και με τις δύο μεθόδους αποτίμησης. Τέλος, γίνεται αναφορά των μεθόδων εκτίμησης της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου που θα χρησιμοποιήσουμε.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου και εκμετάλλευσης ευκαιριών εξισορροπητικής κερδοσκοπίας με εφαρμογή του Διωνυμικού υποδείγματος και του μοντέλου Black και Scholes που περιγράψαμε. Βασικό κομμάτι αυτής της στρατηγικής είναι η εκτίμηση της μεταβλητότητας, για την οποία δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος υπολογισμού, γεγονός που οδηγεί σε διαφορετικές τιμές αποτίμησης των δικαιωμάτων. Η παρουσίαση θα γίνει σε συνδυασμό με δύο παραδείγματα από το δείγμα μας για την καλύτερη κατανόηση. Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στο σφάλμα παρακολούθησης (Delta Hedging Tracking Error) και στις αιτίες στις οποίες αυτό οφείλεται.

Στο κεφάλαιο 4 ακολουθεί η εμπειρική ανάλυση και η συλλογή των αποτελεσμάτων από την στρατηγική που ακολουθήσαμε. Τέλος γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάλογα με την μέθοδο αποτίμησης του δικαιώματος και την μέθοδο εκτίμησης της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου. Προκύπτουν έτσι συμπεράσματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα της κάθε μεθόδου.

Στο κεφάλαιο 5 γίνεται προσπάθεια να δοθούν απαντήσεις στο βασικό ερώτημα αυτής της έρευνας σχετικά με την ύπαρξη μιας και μοναδικής μεταβλητότητας για δικαιώματα ίδιας ληκτότητας ανεξαρτήτως τιμής εξάσκησης. Τέλος, ακολουθούν οι πίνακες των εκτιμήσεων για την μεταβλητότητα και οι βιβλιογραφικές αναφορές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διωνυμικό Μοντέλο

Το Διωνυμικό δέντρο των Cox, Ross και Rubinstein είναι ένα μαθηματικό μοντέλο διακριτού χρόνου και χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Οι βασικές υποθέσεις του μοντέλου είναι ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο, δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage και οι επενδυτές ζουν σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου που θα αναλυθεί στην συνέχεια. Ο χρόνος μέχρι την λήξη T χωρίζεται σε μικρότερα χρονικά διαστήματα Δ_t τα οποία αποτελούν τα βήματα. Σε κάθε βήμα υπάρχουν κόμβοι που αποτελούν τις πιθανές τιμές του υποκείμενου τίτλου. Λόγω της Διωνυμικής κατανομής σε κάθε χρονικό βήμα για κάθε κόμβο η τιμή του υποκείμενου τίτλου μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές.

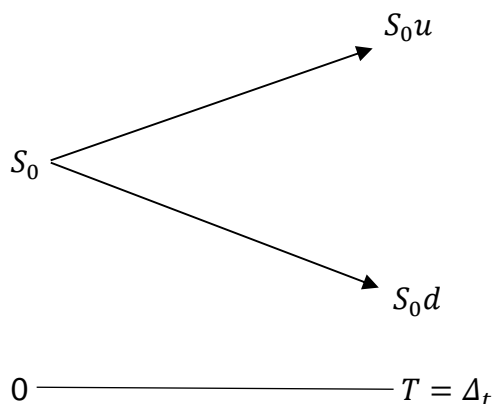
Διωνυμικό δέντρο ενός βήματος

Το Διωνυμικό δέντρο ενός βήματος είναι το πιο απλό μοντέλο, καθώς ο χρόνος μέχρι την λήξη ισούται με το χρονικό βήμα Δ_t . Αυτό σημαίνει ότι ο υποκείμενος τίτλος στην λήξη μπορεί να πάρει μόνο δύο πιθανές τιμές. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, επομένως αυτό θα είναι το χρηματοοικονομικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε για την επεξήγηση και την ανάλυση του μοντέλου.

Έστω ότι έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς f με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή με τρέχουσα τιμή S_0 και τιμή εξάσκησης K . Όπως προαναφέρθηκε η τιμή της μετοχής μπορεί να έχει δύο μοναδικές τιμές στην λήξη οι οποίες είναι οι εξής:

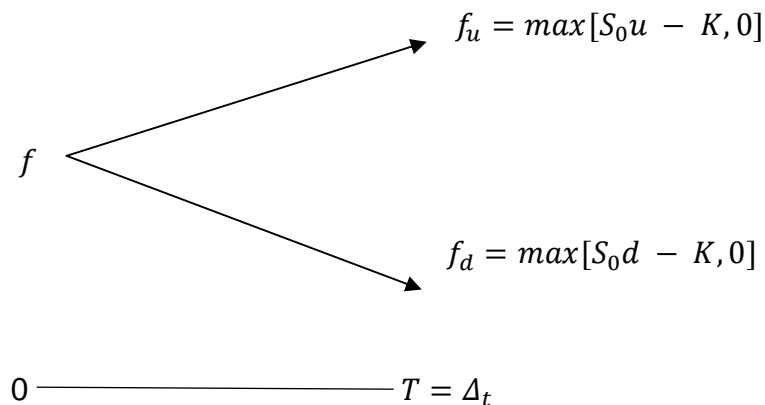
- Με πιθανότητα p να κινηθεί ανοδικά με ποσοστό αύξησης $u - 1$, και η νέα τιμή της μετοχής στην λήξη να είναι S_0u .
- Με πιθανότητα $1 - p$ να κινηθεί καθοδικά με ποσοστό μείωσης $1 - d$, και η νέα τιμή της μετοχής στην λήξη να είναι S_0d .

Δέντρο τιμής της μετοχής



Συμβολίζουμε με f την τιμή του δικαιώματος αγοράς στον χρόνο 0 και με f_u και f_d την πληρωμή (payoff) του δικαιώματος στην λήξη, αν η μετοχή έχει κινηθεί ανοδικά και καθοδικά αντίστοιχα στο επόμενο χρονικό βήμα Δ_t .

Δέντρο τιμής του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς



Όπως προαναφέραμε, βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι οι επενδυτές ζουν σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου (risk neutral world). Αυτή η υπόθεση βοηθάει στην αποτίμηση των παραγώγων και κατά συνέπεια στα δικαιώματα προαίρεσης καθώς προκύπτουν δύο βασικά συμπεράσματα.

- Η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ή οποιουδήποτε υποκείμενου τίτλου είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
- Το επιτόκιο προεξόφλησης που χρησιμοποιούμε για τις μελλοντικές πληρωμές είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Οι αντίστοιχες πιθανότητες p καθώς και η συμπληρωματική της $q = 1 - p$ δεν αποτελούν τις πραγματικές πιθανότητες ανόδου και καθόδου της μετοχής αλλά «ψευδό-πιθανότητες» οι οποίες μας μεταφέρουν στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Η εξίσωση που θα καταλήξουμε εξαλείφει τις προτιμήσεις των επενδυτών σε σχέση με τον κίνδυνο, καθώς δεν εξαρτάται από κάποιο μέτρο κινδύνου. Επομένως όλοι οι τύποι επενδυτών θα καταλήξουν στην ίδια τιμή αποτίμησης του δικαιώματος προαίρεσης.

Η αποτίμηση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (Call Option) που ακολουθεί θα γίνει με δύο προσεγγίσεις, χρησιμοποιώντας αναλογικό ανατοκισμό και συνεχή ανατοκισμό.

Αναλογικός Ανατοκισμός

Σύμφωνα με τον Shreve (2004) για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς θα χρησιμοποιήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που μιμείται την συμπεριφορά του δικαιώματος. Το χαρτοφυλάκιο απομίμησης (replicate portfolio) αποτελείται από:

X_0 : Αρχικός πλούτος

Δ_0 : Μερίδια του υποκείμενου τίτλου

Βασικές Υποθέσεις

- Δεν είναι απαραίτητη η αγορά ακέραιου αριθμού μετοχών.
- Το επιτόκιο με το οποίο ένας επενδυτής δανείζεται ή δανείζει αντίστοιχα είναι κοινό και είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών που σημαίνει ότι η τιμή αγοράς της μετοχής ισούται με την τιμή πώλησης (zero bid-ask spread).
- Η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει μόνο δύο τελικές τιμές λόγω της Διωνυμικής κατανομής.

Επομένως η αρχική χρηματική θέση του επενδυτή είναι $X_0 - \Delta_0 S_0$ καθώς τα $\Delta_0 S_0$ είναι η θέση αγοράς στον υποκείμενο τίτλο. Αν η παραπάνω συνολική θέση είναι αρνητική, σημαίνει ότι ο επενδυτής δανείζεται στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ενώ στην σπάνια περίπτωση που είναι θετική σημαίνει ότι δανείζει στο ίδιο επιτόκιο λαμβάνοντας τόκους.

Η αξία του χαρτοφυλακίου στο επόμενο χρονικό βήμα το οποίο ταυτίζεται με την ημερομηνία λήξης είναι η εξής:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

Επιλέγουμε έτσι τα X_0 και Δ_0 έτσι ώστε $X_1 = f_u$ στην περίπτωση ανοδικής πορείας της μετοχής και $X_1 = f_d$ στην περίπτωση καθοδικής πορείας της μετοχής.

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_0 u - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} f_u \quad [2.1]$$

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_0 d - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} f_d \quad [2.2]$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με p που είναι η πιθανότητα ανόδου και την δεύτερη εξίσωση με q (όπου $q = 1 - p$) που είναι η πιθανότητα καθόδου και τις προσθέτουμε καταλήγοντας:

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} [pS_0u + qS_0d] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} [pf_u + qf_d] \quad [2.3]$$

Επιλέγουμε την πιθανότητα p ώστε να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} [pS_0u + qS_0d] \quad [2.4]$$

Αυτό σημαίνει ότι ο πολλαπλασιαστής του Δ_0 στην εξίσωση [2.3] είναι μηδέν και η τελική εξίσωση που προκύπτει είναι η εξής:

$$X_0 = \frac{1}{1+r} [pf_u + qf_d]$$

Λύνοντας ως προς p στην εξίσωση [2.4]:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} [pS_0u + (1-p)S_0d] = \frac{S_0}{1+r} [(u-d)p + d]$$

Οι αντίστοιχες πιθανότητες ανόδου και καθόδου είναι οι εξής:

$$p = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad q = \frac{u-1-r}{u-d}$$

Για την εύρεση του Δ_0 αφαιρούμε την εξίσωση [2.2] από την [2.1]

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}$$

Καθώς δεν υπάρχουν εύκαιρες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, αφού οι αξίες του χαρτοφυλακίου απομίμησης στους τελικούς κόμβους είναι ίσες με τις αξίες του δικαιώματος αγοράς, πρέπει η τρέχουσα αξία του δικαιώματος να ισούται με τον αρχικό πλούτο επομένως:

$$f = X_0 = \frac{1}{1+r} [pf_u + qf_d]$$

Συνεχής ανατοκισμός

Στην συγκεκριμένη προσέγγιση θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από :

Δ_0 : Μεριδία του υποκείμενου τίτλου

f : Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στον υποκείμενο τίτλο

Υποθέτουμε ότι ο επενδυτής έχει θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς και θέση αγοράς σε Δ_0 μερίδια στον υποκείμενο τίτλο. Επομένως η αρχική χρηματική θέση του επενδυτή είναι:

$$\Pi_0 = \Delta_0 S_0 - f$$

Επειδή οι επενδυτές βρίσκονται στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου η αξία του χαρτοφυλάκιού στην λήξη θα πρέπει να είναι η ίδια ανεξάρτητα με την μεταβολή της τιμής της μετοχής, επομένως:

$$\begin{aligned} \Pi_u = \Pi_d &\Rightarrow \Delta_0 S_0 u - f_u = \Delta_0 S_0 d - f_d \\ &\Rightarrow \Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλάκιού χωρίς κίνδυνο είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r . Με συνεχή κεφαλαιοποίηση ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Pi_u = \Pi_d = \Pi_0 e^{-rT} \\ \Rightarrow \Delta_0 S_0 u - f_u = (\Delta_0 S_0 - f) e^{-rT} \end{aligned} \quad [2.5]$$

Με αντικατάσταση του Δ_0 στην εξίσωση [2.5] υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος σήμερα ως εξής:

$$f = e^{-rT} [p f_u + (1 - p) f_d]$$

Και οι αντίστοιχες πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου:

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}, \quad 1 - p = \frac{u - e^{rT}}{u - d} \quad [2.6]$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου [2.6] η αναμενόμενη τιμή του υποκείμενου τίτλου στο τέλος του χρονικού βήματος, που ταυτίζεται με την ημερομηνία λήξης, είναι:

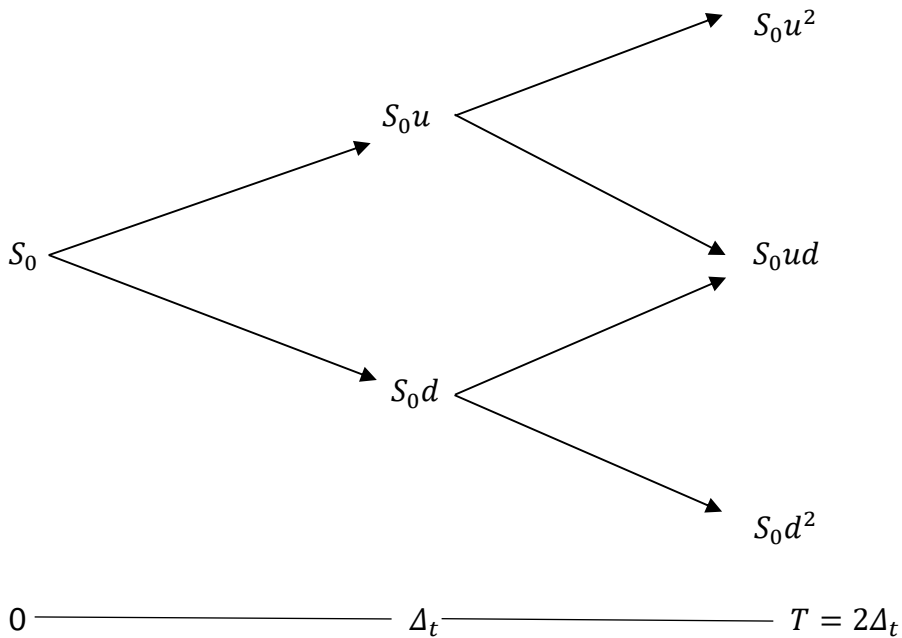
$$E(S_T) = pS_0u + (1 - p)S_0d$$
$$E(S_T) = S_0e^{rT}$$

Η παραπάνω εξίσωση επιβεβαιώνει ότι ο ρυθμός απόδοσης της μετοχής είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

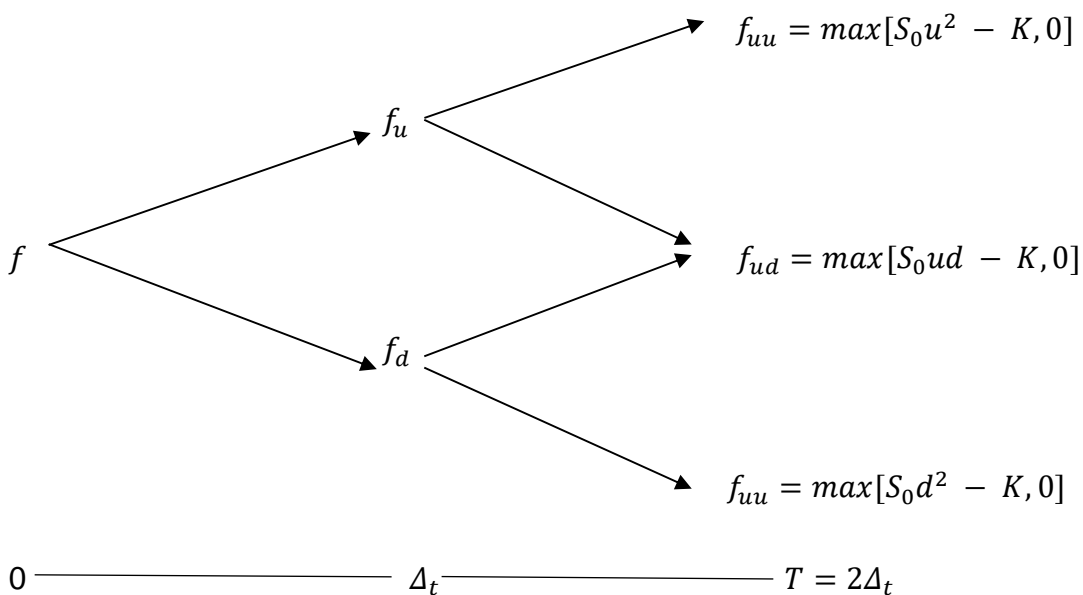
Διωνυμικό δέντρο δύο βημάτων

Σε αυτήν την περίπτωση ο χρόνος μέχρι την λήξη χωρίζεται σε δύο χρονικά βήματα. Κάθε φορά που προσθέτουμε ένα χρονικό βήμα στο Διωνυμικό μοντέλο οι πιθανές τελικές τιμές της μετοχής αυξάνονται κατά μία κάνοντας το μοντέλο πιο ρεαλιστικό. Σκοπός μας πάλι είναι η εύρεση της τιμής του δικαιώματος σήμερα.

Δέντρο τιμής της μετοχής



Δέντρο τιμής του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς



Επομένως για n χρονικά βήματα, όπου n ακέραιος αριθμός, τα μονοπάτια είναι 2^n και οι τελικές τιμές $2 + n$. Στο συγκεκριμένο δέντρο δύο βημάτων η τιμή της μετοχής μπορεί να ακολουθήσει 4 πιθανά μονοπάτια και να έχει 3 τελικές τιμές. Εφόσον ξέρουμε τις τελικές τιμές της μετοχής, μπορούμε να υπολογίσουμε την εσωτερική αξία, δηλαδή την πληρωμή (payoff) του δικαιώματος στην λήξη. Επομένως η διαδικασία θα ξεκινήσει από τους τελικούς κόμβους και στην συνέχεια χρησιμοποιώντας αναλογικό ανατοκισμό βρίσκουμε τις αξίες στο κόμβους την χρονική στιγμή Δ_t .

$$f_u = \frac{1}{1+r} [pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$$

$$f_d = \frac{1}{1+r} [pf_{ud} + (1-p)f_{dd}]$$

Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε την τιμή του δικαιώματος σήμερα στον αρχικό κόμβο του δέντρου:

$$f = \frac{1}{(1+r)^2} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

Σύμφωνα με τους Cox, Ross και Rubinstein η γενικευμένη μορφή της παραπάνω εξίσωσης για n χρονικά βήματα που απομένουν έως την λήξη είναι η εξής :

$$c = \frac{\left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K] \right]}{(1+r)^n}$$

Βασικές παράμετροι του Διωνυμικού υποδείγματος και μερισματική απόδοση

Στην παρούσα εργασία ο υποκείμενος τίτλος είναι χρηματιστηριακός δείκτης, επομένως πρέπει να λάβουμε υπόψη την μερισματική του απόδοση καθώς επηρεάζει την τιμή του δικαιώματος αγοράς αρνητικά. Καθώς η αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης λαμβάνει χώρα στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ή οποιοδήποτε υποκείμενου τίτλου είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Στην περίπτωση που ο υποκείμενος τίτλος έχει μερισματική απόδοση η αναμενόμενη απόδοση σε όρους κεφαλαιακών κερδών είναι $(r - q)$. Επομένως σύμφωνα με τον Hull ο τύπος της καταχρηστικής πιθανότητας ανόδου ουδέτερου κινδύνου καθώς και της συμπληρωματικής της με συνεχή ανατοκισμό είναι ο εξής:

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}, q = 1 - p$$

q : Η ετήσια μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου

Επειδή στην διαδικασία που θα ακολουθήσουμε θα χρησιμοποιήσουμε αναλογικό ανατοκισμό για τον υπολογισμό της πιθανότητας ανόδου και της συμπληρωματικής της, θα χρησιμοποιήσουμε σύμφωνα με τον Shreve τον παρακάτω τύπο:

$$p = \frac{1 + r - q - d}{u - d}, q = 1 - p$$

Για την κατασκευή του Διωνυμικού μοντέλο είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του ρυθμού αύξησης και μείωσης της τιμής του υποκείμενου τίτλου σε κάθε χρονικό βήμα Δt . Πρέπει να ορίσουμε τις τιμές u και d , ώστε να επιτύχουμε την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, καθώς η μεταβλητότητα δίνει μια αίσθηση για το εύρος της τιμής του περιουσιακού στοιχείου στο επόμενο χρονικό βήμα. Σύμφωνα με τους Cox, Ross και Rubinstein οι μεταβλητές u και d ορίζονται ως εξής:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}} \quad , \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

Τέλος για να μην υπάρχουν εύκαιρες εξισοροπητικής κερδοσκοπίας, που είναι βασική υπόθεση του μοντέλου, πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$0 < d < 1 + r < u$$

Μέθοδος αποτίμησης Black και Scholes

Στην προηγούμενη ενότητα έγινε μια επανεξέταση και παρουσίαση του Διωνυμικού μοντέλου με σκοπό την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε διακριτό χρόνο. Στην συγκεκριμένα ενότητα θα ασχοληθούμε με την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε συνεχή χρόνο. Οι Black και Scholes (1973) υποθέτοντας ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown κατέληξαν στις παρακάτω εξισώσεις κλειστής μορφής για την αποτίμηση του δικαιώματος αγοράς (c) και πώλησης (p) αντίστοιχα:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S_0 : η τρέχουσα τιμή της μετοχής

K : η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

$N(X)$: η αθροιστική πιθανότητα κατανομής της $N(0,1)$

r : το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου καθώς η αποτίμηση των δικαιωμάτων γίνεται στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου

T : ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος

σ : η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου

Οι προηγούμενοι τύποι αποτίμησης προϋποθέτουν ότι ο υποκείμενος τίτλος δεν αποδίδει μέρισμα μέχρι την ημερομηνία λήξης. Στην παρούσα εργασία ο υποκείμενος τίτλος είναι χρηματιστηριακός δείκτης επομένως πρέπει να λάβουμε υπόψη την μερισματική του απόδοση. Προκύπτουν έτσι οι παρακάτω τύποι αποτίμησης του δικαιώματος αγοράς (c) και πώλησης (p) αντίστοιχα:

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

q : Η ετήσια μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου.

Σύμφωνα με τους Black και Scholes το αντίστοιχο Δέλτα του δικαιώματος αγοράς και πώλησης, όταν ο υποκείμενος τίτλος έχει μερισματική απόδοση, ορίζεται ως η μερική παράγωγος της αντίστοιχης εξίσωσης αποτίμησης ως προς την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου καταλήγοντας έτσι στους παρακάτω τύπους:

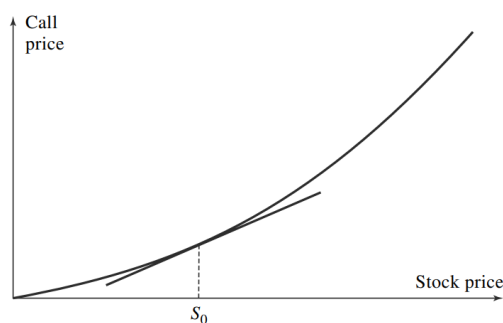
$$\Delta(\text{call}) = \frac{\partial c}{\partial S_0} = e^{-qT} N(d_1)$$

$$\Delta(\text{put}) = \frac{\partial p}{\partial S_0} = e^{-qT} [N(d_1) - 1]$$

Συντελεστής ευαισθησίας Δέλτα

Τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν πέντε συντελεστές ευαισθησίας τα γνωστά Greek Letters, καθώς έχουν πάρει το όνομα τους από το ελληνικό αλφάβητο. Κάθε γράμμα μετρά μια διαφορετική διάσταση του κινδύνου που εμπεριέχεται στην θέση που έχει πάρει κάποιος επενδυτής, όταν έχει θέση αγοράς ή πώλησης σε ένα δικαίωμα προαίρεσης. Τα Greek Letters και ο αντίστοιχος κίνδυνος που μετράνε είναι τα εξής: Delta (Μεταβολή τρέχουσας τιμής μετοχής S_0), Gamma (Μεταβολή Δ), Theta (Μεταβολή του χρόνου μέχρι την λήξη T), Vega (Μεταβλητότητα σ), Rho (Μεταβολή επιτοκίων r). Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με έναν από τους σημαντικότερους συντελεστές ευαισθησίας που είναι το Δέλτα για τον οποίο ακολουθούν τέσσερις ορισμοί που βοηθάνε στην κατανόηση της διαδικασίας που θα ακολουθήσουμε. Το Δέλτα ορίζεται ως:

- Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του δικαιώματος σε σχέση με την μεταβολή της αξίας του υποκείμενου τίτλου. Ένας επενδυτής που προβλέπει την άνοδο μιας μετοχής μπορεί είτε να αγοράσει την ίδια την μετοχή είτε να πάρει θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς. Αν επιλέξει την αγορά του δικαιώματος και η τιμή της μετοχής αυξηθεί κατά μία χρηματική μονάδα, το αντίστοιχο κέρδος του θα είναι Δέλτα χρηματικές μονάδες. Επομένως, αν ορίσουμε το Δέλτα ως ποσοστό, τότε αντιπροσωπεύει το αντίστοιχο ποσοστό κέρδους ή ζημίας της μεταβολής της τιμής της μετοχής. (Στην πραγματικότητα είναι διαφορετικά γιατί καθώς αλλάζει η τιμή του υποκείμενου τίτλου αλλάζει και το Δέλτα καθώς δεν μένει σταθερό. Την συγκεκριμένη ευαισθησία αντιπροσωπεύει το ελληνικό γράμμα Gamma).
- Η πρώτη μερική παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή της μετοχής. Στο διάγραμμα που ακολουθεί αντιπροσωπεύει την κλίση της ευθείας.



Διάγραμμα (2.1): Σχέση μεταξύ της τιμής του υποκείμενου τίτλου και της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς. (Πηγή Hull, C. J., Basu S. (2018) *Options, Futures and Other Derivatives 10th edition*)

- Η αντίστοιχη ισοδύναμη θέση στον υποκείμενο τίτλο σε απόλυτες τιμές. Εξ ορισμού ο υποκείμενος τίτλος έχει Δέλτα ίσο με την μονάδα ενώ σε απόλυτες τιμές το Δέλτα του δικαιώματος κυμαίνεται από μηδέν έως ένα. Αν ο υποκείμενος τίτλος αυξηθεί κατά μία μονάδα και ένας επενδυτής έχει 1 μερίδιο, τότε θα έχει κέρδος 1 χρηματική μονάδα ενώ, αν έχει δικαίωμα με Δέλτα ίσο με Δ_0 τότε θα έχει κέρδος Δ_0 χρηματικές μονάδες. Επομένως είναι σαν να κατέχει Δ_0 μερίδια μετοχών.
- Η πιθανότητα το δικαίωμα προαίρεσης να έχει εσωτερική αξία στην λήξη και να εξασκηθεί (σε απόλυτες τιμές). Ο τελευταίος ορισμός είναι μια στατιστική προσέγγιση που χρησιμοποιείται από τους επενδυτές παρόλο που είναι ανακριβής από μαθηματική άποψη. Επομένως όσο αυξάνεται η τιμή του Δέλτα αυξάνεται και η πιθανότητα εξάσκησης του δικαιώματος στην λήξη.

Μέθοδοι εκτίμησης μεταβλητότητας

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται ορισμένες μέθοδοι εκτίμησης της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου, οι οποίες αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της στρατηγικής. Θεωρώντας ότι τα δικαιώματα προαίρεσης με κοινό υποκείμενο τίτλο και κοινή ημερομηνία λήξης έχουν κοινή μεταβλητότητα, αυτή του υποκείμενου τίτλου ανεξαρτήτως τιμής εξάσκησης, δημιουργούνται εν δυνάμει ευκαιρίες arbitrage, όταν υπάρχουν αποκλίσεις από αυτήν.

Όπως προαναφέραμε, η μεταβλητότητα είναι ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή του δικαιώματος μέσω της χρονικής αξίας (Time Value). Οι άλλοι παράγοντες που καθορίζουν την χρονική αξία είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, η μερισματική απόδοση και ο χρόνος μέχρι την λήξη που είναι γνωστά και υπολογίζονται χωρίς να αποτελούν πρόβλημα. Αντιθέτως για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας δεν υπάρχει κάποιος μοναδικός τρόπος, γεγονός που οδηγεί σε διαφορετικές τιμές αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες και υποδείγματα που ασχολούνται με την έννοια της μεταβλητότητας και πώς μπορεί να εκτιμηθεί. Τα υποδείγματα αυτά χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες οι οποίες είναι οι εξής:

- Ιστορική Μεταβλητότητα (Historical Volatility), η οποία υπολογίζεται με βάση τα ιστορικά δεδομένα της τιμής του περιουσιακού στοιχείου.
- Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility), η οποία αντικατοπτρίζει την «άποψη» της αγοράς. Σε αντίθεση με την ιστορική μεταβλητότητα που βασίζεται σε παρελθοντικά δεδομένα και είναι προσανατολισμένη στο παρελθόν, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι προσανατολισμένη στο μέλλον.

Ωστόσο ένα βασικό μειονέκτημα και στα δύο μοντέλα αποτίμησης που προαναφέραμε είναι ότι υποθέτουν ότι η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, το οποίο δεν συμβαίνει στην πράξη. Στην παρούσα εργασία για την εκτίμηση της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους και από τις δύο κατηγορίες.

Ιστορική Μεταβλητότητα (Historical Volatility)

Για τον υπολογισμό της ιστορικής μεταβλητότητας συγκεντρώνουμε τις τιμές κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου σε τακτά χρονικά διαστήματα, στην συγκεκριμένη έρευνα σε ημερήσια βάση. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις για κάθε περίοδο σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Η μεταβλητότητα σ ορίζεται ως η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου και δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

Όπου \bar{u} ο μέσος όρος των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου.

Υπολογίζοντας την μεταβλητότητα μιας ημέρας μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα. Υποθέτοντας ότι οι αλλαγές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους σε κάθε χρονικό διάστημα, η διακύμανση των αλλαγών της τιμής για μία περίοδο T ημερών είναι T φορές η διακύμανση των αλλαγών της τιμής για μία ημέρα. Επομένως η τυπική απόκλιση, σύμφωνα με την οποία ορίζεται η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου, για μια περίοδο T ημερών θα είναι ίση με \sqrt{T} φορές την ημερήσια τυπική απόκλιση. Επειδή η μεταβλητότητα συνδέεται περισσότερο με τις ημέρες που είναι ανοιχτό το Χρηματιστήριο, για τον υπολογισμό της θα χρησιμοποιήσουμε τον αριθμό των ημερών διαπραγμάτευσης (**Trading days**) και όχι τις ημερολογιακές (Calendar days).

Όπως προαναφέραμε για την εκτίμηση της μεταβλητότητας με ιστορικά δεδομένα οι αποδόσεις υπολογίζονται σε ημερήσια βάση επομένως και η μεταβλητότητα αντίστοιχα θα είναι ημερήσια. Επειδή στην παρούσα εργασία το χρονικό βήμα (κάθε χρονικό βήμα πραγματοποιείται αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου και επανεκτίμηση της μεταβλητότητας) είναι μία εβδομάδα, πρέπει να προσαρμόσουμε την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο :

$$\sigma_{\Delta t} = \sigma_{daily} \sqrt{5}$$

Είναι γνωστό ότι οι πιο πρόσφατες τιμές δίνουν καλύτερη πληροφόρηση σε σύγκριση με τις πιο απομακρυσμένες τιμές στο παρελθόν. Επομένως για να σχηματίσουμε καλύτερες προβλέψεις πρέπει να λάβουμε υπόψη το γεγονός αυτό. Οι μέθοδοι εκτίμησης της μεταβλητότητας σύμφωνα με ιστορικά δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε θα προσπαθήσουν να εξομαλύνουν το παραπάνω πρόβλημα.

Μέσος όρος τυπικών αποκλίσεων (Standard Deviation)

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου για τρία διαφορετικά χρονικά διαστήματα τα οποία είναι τα εξής:

- 3 μήνες, $\sigma_{3m} = \sqrt{\frac{1}{63-1} \sum_{i=1}^{63} (u_i - \bar{u}_{3m})^2}$
- 6 μήνες, $\sigma_{6m} = \sqrt{\frac{1}{126-1} \sum_{i=1}^{126} (u_i - \bar{u}_{6m})^2}$
- 12 μήνες, $\sigma_{12m} = \sqrt{\frac{1}{252-1} \sum_{i=1}^{252} (u_i - \bar{u}_{12m})^2}$

Η τελική εκτίμηση μας για την ημερήσια μεταβλητότητα είναι ο μέσος όρος των παραπάνω τυπικών αποκλίσεων:

$$\sigma = \frac{\sigma_{3m} + \sigma_{6m} + \sigma_{12m}}{3}$$

Με αυτόν τον τρόπο δίνεται μεγαλύτερο βάρος στις πιο πρόσφατες τιμές των αποδόσεων, καθώς εμπεριέχονται και στα τρία δείγματα. Παρόλα αυτά οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις κάθε δείγματος έχουν υπολογιστεί με τον απλό τρόπο που σημαίνει ότι κάθε παρατήρηση έχει το ίδιο βάρος για τον υπολογισμό της εκάστοτε τυπικής απόκλισης. Οι επόμενες μέθοδοι αντιμετωπίζουν αυτό το μειονέκτημα δίνοντας μεγαλύτερο βάρος στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις.

**Γενικευμένο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα
(GARCH)**

Ο όρος μεταβλητότητα αναφέρεται στο φαινόμενο της μεταβαλλόμενης στον χρόνο "υπό συνθήκη" διακύμανσης που χαρακτηρίζει πολλές χρηματοοικονομικές σειρές και καθιστά τα υποδείγματα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικά. Παρατηρούμε επίσης συγκεντρώσεις μεταβλητότητας, βασικό χαρακτηριστικό των χρηματοοικονομικών σειρών, που σημαίνει ότι υπάρχει εναλλαγή περιόδων χαμηλής μεταβλητότητας με άλλες περιόδους μεγάλης μεταβλητότητας. Αυτό το φαινόμενο παρατηρείται κυρίως σε στοιχεία μεγάλης συχνότητας όπως είναι τα ημερήσια στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε. Ο Bollerslev (1986) γενίκευσε την εξίσωση της ARCH διακύμανσης καταλήγοντας έτσι σε ένα γενικευμένο ARCH το γνωστό γενικευμένο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα ή συντομότερα το υπόδειγμα GARCH (p, q). Στο υπόδειγμα GARCH η διακύμανση δεν εξαρτάται μόνο από τις προηγούμενες τιμές των αποδόσεων στο τετράγωνο (υστερήσεις q -τάξεως), αλλά και από τις προηγούμενες τιμές της ίδια της διακύμανσης (υστερήσεις p -τάξεως).

Για την εκτίμηση της μεταβλητότητας θα χρησιμοποιήσουμε την πιο απλή μορφή του μοντέλου το GARCH (1,1). Η εξίσωση για το μοντέλο GARCH (1,1) είναι η εξής:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

Όπου V_L η μακροχρόνια μέση τιμή μεταβλητότητας. Βασική προϋπόθεση τα βάρη των παραμέτρων να έχουν άθροισμα την μονάδα:

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

Αν θέσουμε $\omega = \gamma V_L$ τότε το μοντέλο GARCH (1,1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την τελική μορφή του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων. Επομένως οι παράμετροι προς εκτίμηση είναι το ω , το α και το β .

Με την μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων στην υστέρηση σ_{n-1}^2 καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \\ \sigma_n^2 &= \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta(\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2) \\ &\quad \dots \\ \sigma_n^2 &= \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{j-1} u_{n-j}^2\end{aligned}$$

Όπως φαίνεται, οι συντελεστές του υποδείγματος αυτού φθίνουν γεωμετρικά και κατά συνέπεια η επίδραση μιας μεταβολής στην τρέχουσα διακύμανση μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Εκθετικός σταθμισμένος κινούμενος μέσος όρος (EWMA)

Η τελευταία μέθοδος εκτίμησης γίνεται σύμφωνα με το μοντέλο του εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου όρου. Στο EWMA τα βάρη των τετραγώνων των αποδόσεων μειώνονται με εκθετικό τρόπο καθώς κινούμαστε προς τα πίσω στον χρόνο δίνοντας έτσι μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Η μορφή του είναι η εξής:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

Όπου λ η παράμετρος εξομάλυνσης λάμδα.

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η εκτίμηση για την μεταβλητότητα σήμερα ισούται με την χθεσινή διακύμανση σταθμισμένη με λ και την χθεσινή τετραγωνική απόδοση της τιμής σταθμισμένη με $(1 - \lambda)$.

Με την μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων στην υστέρηση σ_{n-1}^2 και στην συνέχεια στο σ_{n-2}^2 καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2 \\ \sigma_n^2 &= \lambda [\lambda \sigma_{n-2}^2 + (1 - \lambda) u_{n-2}^2] + (1 - \lambda) u_{n-1}^2 \\ \sigma_n^2 &= (1 - \lambda) (u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3 \sigma_{n-3}^2 \\ &\quad \dots \\ \sigma_n^2 &= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2 \end{aligned}$$

Η τιμή της παραμέτρου λάμδα καθορίζει το επίπεδο που η εκτίμηση της μεταβλητότητας σήμερα εξαρτάται από την πιο πρόσφατη τετραγωνική απόδοση. Μια υψηλή τιμή του λάμδα σημαίνει ότι οι εκτιμήσεις της μεταβλητότητας ανταποκρίνονται αργά σε νέες πληροφορίες. Το EWMA μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του μοντέλου GARCH (1,1) με την διαφορά ότι δεν υπάρχει η παράμετρος ω που αναφέρεται στην μακροχρόνια μέση τιμή μεταβλητότητας. Η παράμετρος εξομάλυνσης λάμδα είναι το αντίστοιχο β και η διαφορά $(1 - \lambda)$ το αντίστοιχο α του GARCH.

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Η εκτίμηση των παραμέτρων στα μοντέλα EWMA και GARCH (1,1) γίνεται με την εφαρμογή της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood). Η μέθοδος αυτή δίνει την εκτίμηση που έχει τη μέγιστη πιθανοφάνεια, δηλαδή την τιμή της παραμέτρου η οποία, μεταξύ όλων των άλλων δυνατών τιμών της παραμέτρου, είναι η πιο πιθανή με βάση το δείγμα. Σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών, το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων και ταυτόνομων τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί μια κατανομή η οποία προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι τυχαίες μεταβλητές είναι οι τιμές των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή. Επομένως οι κατάλληλες παράμετροι για τα υποδείγματα είναι αυτές που μεγιστοποιούν την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής. Η καλύτερη εκτίμηση για την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου είναι αυτή που μεγιστοποιεί την παρακάτω συνάρτηση:

$$\prod_{i=1}^m \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(\frac{-u_i^2}{2\sigma_i^2}\right) \right]$$

Η μεγιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης ισοδυναμεί με την μεγιστοποίηση της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας (\ln) αγνοώντας τους σταθερούς παράγοντες. Επομένως η τελική συνάρτηση είναι η εξής:

$$\sum_{i=1}^m \left[-\ln(\sigma_i^2) - \frac{u_i^2}{\sigma_i^2} \right] \quad [2.7]$$

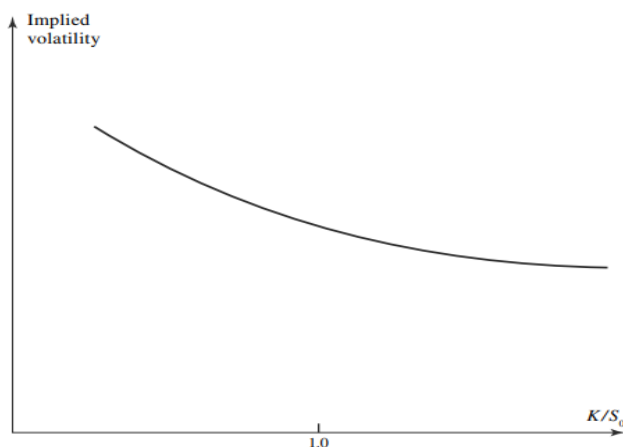
Η εκτίμηση των παραμέτρων του GARCH (1,1) και του EWMA γίνεται με την βοήθεια του Solver στο Excel. Με αυτόν τον τρόπο μεγιστοποιούμε την λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας [2.7] σε κάθε χρονικό βήμα βρίσκοντας τους κατάλληλους εκτιμητές για τα υποδείγματα. Το χρονικό διάστημα είναι σταθερό και αντιστοιχεί σε ένα έτος. Κάθε εβδομάδα προστίθενται στο δείγμα οι παρατηρήσεις της τρέχουσας/τελευταίας εβδομάδας και αφαιρούνται οι παρατηρήσεις της αρχικής. Με αυτόν τον τρόπο επανεκτιμάμε κάθε εβδομάδα τις παραμέτρους των δύο μοντέλων έχοντας καλύτερα αποτελέσματα. Στην περίπτωση του EWMA η μοναδική παράμετρος προς εκτίμηση είναι το λ και ο μοναδικός περιορισμός είναι οι τιμές της να βρίσκονται στο διάστημα $[0,1]$. Αντίστοιχα στην περίπτωση του GARCH (1,1) οι παράμετροι προς εκτίμηση είναι το ω , το α και το β και αντίστοιχα ο μοναδικός περιορισμός είναι οι τιμές τους να βρίσκονται στο διάστημα $[0,1]$.

Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)

Τεκμαρτή Μεταβλητότητα – Χαμόγελο μεταβλητότητας (Volatility Smile)

Το βασικό μειονέκτημα με την ιστορική μεταβλητότητα, ανεξάρτητα από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται, είναι ότι βασίζεται σε ιστορικά δεδομένα ενώ αυτό που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι η μεταβλητότητα σήμερα. Η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι μια εκτίμηση που αποτυπώνει την «άποψη» της αγοράς καθώς καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση του συγκεκριμένου δικαιώματος στην αγορά. Η τιμή επομένως δεν διαμορφώνεται με ιστορικά δεδομένα αλλά με βάση τις προσδοκίες των επενδυτών που αντικατοπτρίζουν πολύ μεγαλύτερη πληροφορία για την κίνηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου στο μέλλον.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η μεταβλητότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε αναφέρεται στον υποκείμενο τίτλο επομένως υπάρχει μια μοναδική τιμή. Παρόλα αυτά έχει παρατηρηθεί ότι η μεταβλητότητα ποικίλει για διαφορετικές τιμές εξάσκησης του δικαιώματος. Συγκεκριμένα υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ τους, καθώς, όσο μειώνεται η τιμή εξάσκησης, αυξάνεται η τεκμαρτή μεταβλητότητα δημιουργώντας έτσι μια ασυμμετρία (Volatility Skew). Όπως προαναφέρθηκε ένας λόγος που παρατηρείται αυτή η κλίση, όπως αποτυπώνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί, είναι η μόχλευση (Leverage). Αυτό διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τους Black (1976) και Christie (1982) και εξηγείται από το ότι, όσο μειώνεται η αξία των μετοχών, αυξάνεται η σχέση χρέους προς ίδια κεφάλαια σε μια εταιρία. Έτσι αυξάνεται η μόχλευση και με την σειρά της η μεταβλητότητά της.



Διάγραμμα (2.2): Χαμόγελο μεταβλητότητας για δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο μετοχή. Ο κάθετος άξονας αντιπροσωπεύει την τεκμαρτή μεταβλητότητα ενώ ο οριζόντιος τον λόγο της τιμής εξάσκησης προς την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου. (Πηγή Hull, C. J., Basu S. (2018) *Options, Futures and Other Derivatives 10th edition*)

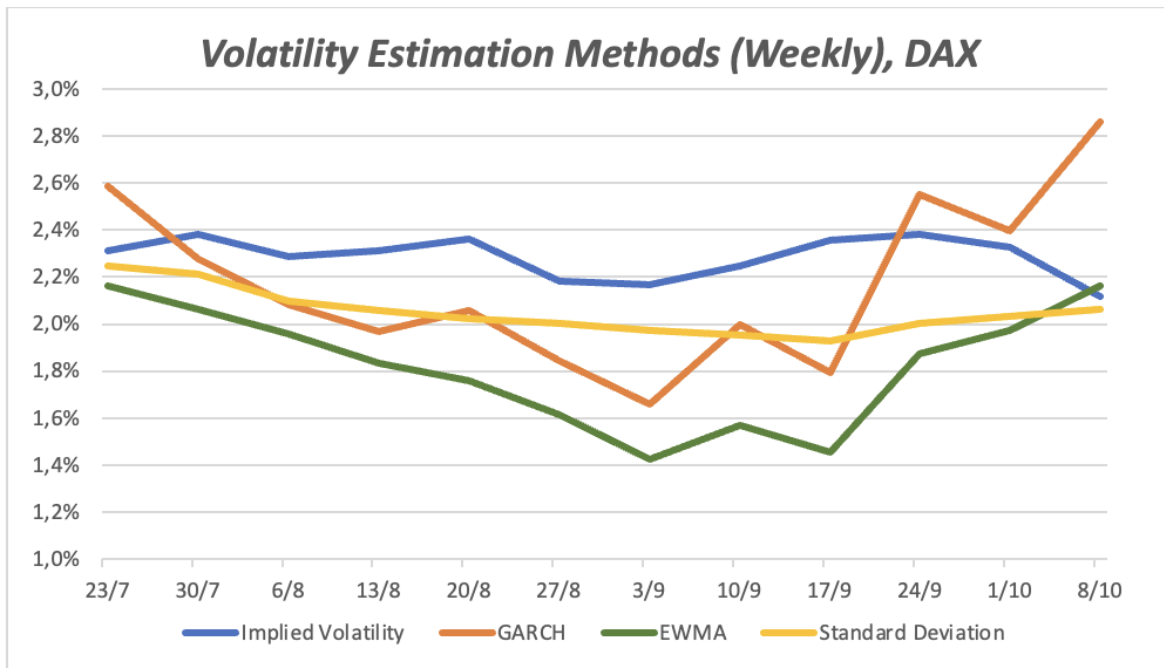
Στην συγκεκριμένη εργασία ο υποκείμενος τίτλος είναι χρηματιστηριακός δείκτης και στην περίπτωση αυτή έχει παρατηρηθεί ένα σχήμα σε μορφή χαμόγελου (Volatility Smile) με αρνητική ασυμμετρία. Η σχέση ανάμεσα στην τεκμαρτή μεταβλητότητα και την τιμή εξάσκησης, για δεδομένο χρόνο μέχρι την λήξη T, αποδεικνύει ότι για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες τιμές εξάσκησης σε σχέση με την τρέχουσα τιμή του δείκτη αντιστοιχεί υψηλή μεταβλητότητα, ενώ για τιμές εξάσκησης κοντά στην τρέχουσα τιμή του δείκτη αντιστοιχεί χαμηλή μεταβλητότητα.

Όπως αναφέρουν και οι Ederington και ο Guan (2002) στο άρθρο τους «*Why Are Those Options Smiling*», ένα μέρος του χαμόγελου μεταβλητότητας μπορεί να οφείλεται σε αδυναμία του μαθηματικού μοντέλου των Black και Scholes. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι βασική υπόθεση του μοντέλου είναι ότι η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος καθώς και στην κατανομή των αποδόσεων του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Οι παραπάνω υποθέσεις ενδέχεται να έχουν επιρροή στο χαμόγελο μεταβλητότητας.

Για την μέθοδο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε οκτώ τιμές εξάσκησης με κοινή ημερομηνία λήξης και με την βοήθεια των εξισώσεων κλειστού τύπου των Black και Scholes θα εκμαιεύουμε την αντίστοιχη μεταβλητότητα σχηματίζοντας έτσι το αντίστοιχο χαμόγελο μεταβλητότητας για κάθε δείκτη. Μια δυσκολία εδώ είναι η αναστροφή του τύπου των Black και Scholes η οποία μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική προσεγγιστική μέθοδο. Για να είναι αντιπροσωπευτική η τιμή και να μην υπάρχουν διαστρεβλώσεις πρέπει να υπάρχει ρευστότητα και για αυτό το λόγο οι τιμές εξάσκησης που θα χρησιμοποιήσουμε βρίσκονται κοντά στην τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου. Για την εκτίμηση της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου χρειαζόμαστε μία μοναδική τιμή και η αμερόληπτη εκτιμήτρια που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν την μέθοδο είναι η μέση τιμή των αντίστοιχων οκτώ τιμών για την μεταβλητότητα.

Η μεταβλητότητα στις εξισώσεις κλειστού τύπου των Black και Scholes είναι ετήσια. Επειδή στην παρούσα εργασία το χρονικό βήμα είναι μία εβδομάδα, πρέπει να προσαρμόσουμε την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma_{\Delta t} = \frac{\sigma_{annual}}{\sqrt{52}}$$



Διάγραμμα (2.3): Παράδειγμα απεικόνισης των εκτιμήσεων για την εβδομαδιαία μεταβλητότητα του Γερμανικού Χρηματιστηριακού δείκτη DAX με τις παραπάνω μεθόδους για κάθε χρονικό βήμα. Το χρονικό διάστημα που αντιπροσωπεύει είναι μεταξύ της πρώτης ημέρας διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων και της τελευταίας αναδιάρθρωσης του χαρτοφυλακίου ένα χρονικό βήμα πριν την ημερομηνία λήξης.

Εν κατακλείδι είναι γνωστό ότι η μεταβλητότητα είναι ένας από τους παράγοντες που επηρεάζει την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης. Επομένως για κάθε τιμή μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου, με τους υπόλοιπους παράγοντες σταθερούς, προκύπτει μια διαφορετική τιμή δικαιώματος στην προσπάθεια αποτίμησής του σε σχέση με την τιμή στην αγορά. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν εν δυνάμει ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας και η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε για να τις εκμεταλλευτούμε είναι το χαρτοφυλακίου ουδέτερου Δέλτα (**Delta neutral strategy**) που παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στρατηγική αντιστάθμισης και arbitrage

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση της διαδικασίας αντιστάθμισης κινδύνου και εκμετάλλευσης ευκαιριών εξισορροπητικής κερδοσκοπίας με εφαρμογή του Διωνυμικού υποδείγματος και του μοντέλου των Black και Scholes που περιγράψαμε.

Στρατηγική Ουδέτερου Δέλτα (Delta Neutral Strategy)

Το Δέλτα ενός δικαιώματος προαίρεσης ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του σε σχέση με την μεταβολή της αξίας του υποκείμενου τίτλου. Ο ορισμός αυτός είναι χρήσιμος για την κατανόηση της διαδικασίας που θέλουμε να ακολουθήσουμε. Στόχος αυτής της στρατηγικής είναι η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου που θα έχει μηδενικό Δέλτα (Delta neutral strategy). Αυτό σημαίνει πως δεν θα πρέπει να υπάρχουν ενδιάμεσα κέρδη ή ζημίες σε περίπτωση μεταβολής της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Επομένως τα κέρδη ή οι ζημίες από την θέση του επενδυτή στο δικαίωμα προαίρεσης πρέπει να αντισταθμίζονται από τα κέρδη ή τις ζημίες στο χαρτοφυλάκιο απομίσθωσης και το μοναδικό στοίχημα να είναι επί της μεταβλητότητας (**Bet On Volatility**). Το συνολικό χαρτοφυλάκιο αποτελείται από την μετοχή, ένα δικαίωμα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο την ίδια μετοχή και δανεισμό ή επένδυση στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς τα οποία έχουν θετικό Δέλτα λόγω της θετικής συσχέτισης με την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Αντίστοιχα εξ ορισμού η τιμή της μετοχής έχει Δέλτα θετικό ίσο με την μονάδα, επομένως για την κατασκευή του Delta neutral portfolio είναι απαραίτητο να πάρουμε αντίθετες θέσεις στα δύο αυτά χρηματοοικονομικά προϊόντα. Προκύπτουν έτσι δύο στρατηγικές και ανάλογα την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη. Οι στρατηγικές αυτές βασίζονται στην θεωρία του χαρτοφυλακίου απομίσθωσης, που παρουσιάστηκε παραπάνω, και σύμφωνα με αυτήν υπάρχει μια μοναδική τιμή του δικαιώματος στην αγορά η οποία εξαλείφει τις ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

Βασικές υποθέσεις της στρατηγικής:

- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου με το οποίο οι επενδυτές μπορούν να δανείσουν και να δανειστούν όσο επιθυμούν είναι μηδενικό. Η υπόθεση αυτή δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα, καθώς οι κεντρικές τράπεζες σχεδόν σε όλο τον κόσμο και συγκεκριμένα αυτές που θα μας απασχολήσουν

έχουν μηδενικά επιτόκια στην προσπάθεια αντιμετώπισης της Πανδημικής Κρίσης του Covid-19.

$$r = 0$$

- Η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου σ παραμένει σταθερή μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Σε κάθε χρονικό βήμα Δ_t γίνεται επανεκτίμηση της μεταβλητότητας με τις μεθόδους που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
- Η αποτίμηση του δικαιώματος προαίρεσης καθώς και ο υπολογισμός του Δέλτα γίνεται με το Διωνυμικό μοντέλο και το μαθηματικό μοντέλο των Black και Scholes από την ημερομηνία διαπραγμάτευσης μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.
- Ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος T είναι διακριτός και χωρίζεται σε N διακριτές περιόδους που συμβολίζονται με Δ_t . Στην παρούσα εργασία ο χρόνος μέχρι την λήξη χωρίζεται σε 12 περιόδους και κάθε μία αντιστοιχεί σε μία εβδομάδα.

$$\Delta_t = \frac{T}{N}$$

- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών που σημαίνει ότι η τιμή αγοράς της μετοχής ισούται με την τιμή πώλησης (zero bid-ask spread).
- Επιτρέπεται η ανοιχτή προθεσμιακή πώλησης των τίτλων (short selling) και δεν έχει κόστος για τον επενδυτή. Ένας πωλητής που δεν κατέχει την μετοχή, μπορεί να λάβει ένα ποσό ίσο με την τιμή της μετοχής εκείνη την στιγμή από τον πωλητή του και στην συνέχεια να τον πληρώσει σε μια προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία ένα ποσό αντίστοιχο με την τιμή της μετοχής εκείνη την ημερομηνία.
- Η ετήσια μερισματική απόδοση q του υποκείμενου τίτλου υπολογίζεται στην αρχή της διαδικασίας και παραμένει σταθερή μέχρι την λήξη του δικαιώματος.
- Δεν είναι απαραίτητη η αγορά ακέραιου αριθμού μετοχών.
- Το μέγεθος του συμβολαίου αποτελείται από ένα δικαίωμα.

Η αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και ο υπολογισμός του Δέλτα θα γίνει σύμφωνα και με τις δύο μεθόδους που προαναφέραμε, το Διωνυμικό μοντέλο και την μέθοδο Black και Scholes. Στην διαδικασία που θα ακολουθήσουμε ο υποκείμενος τίτλος είναι χρηματιστηριακός δείκτης, επομένως πρέπει να λάβουμε υπόψη την μερισματική του απόδοση στον υπολογισμό του Δέλτα, καθώς επηρεάζει την τιμή του δικαιώματος αγοράς αρνητικά. Σύμφωνα με τους Black και Scholes, όπως προαναφέραμε, το Δέλτα υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta(\text{call}) = \frac{\partial c}{\partial S_0} = e^{-qT} N(d_1) = e^{-qT} N\left(\frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Επομένως δεν αποτελεί πρόβλημα καθώς λαμβάνεται υπόψη η μερισματική απόδοση. Αντίθετα ο υπολογισμός του Δέλτα σύμφωνα με το Διωνυμικό μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη την μερισματική απόδοση και για αυτόν τον λόγο θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά τον παρακάτω τύπο:

$$\Delta(\text{call}) = e^{-qT} \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

Είναι προσεγγιστικό καθώς η μερισματική απόδοση είναι συνεχούς χρόνου ενώ το Διωνυμικό μοντέλο διακριτού χρόνου.

Υπερτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά

Είναι γνωστό ότι η μεταβλητότητα έχει θετική συσχέτιση με την αξία του δικαιώματος, οπότε, αν η εκτίμηση μας για την μεταβλητότητα είναι χαμηλότερη από αυτήν της αγοράς (Implied Volatility), το Διωνυμικό μοντέλο και το μοντέλο Black και Scholes θα αποτιμήσουν το δικαίωμα προαίρεσης χαμηλότερα από την αγορά. Επομένως θεωρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι υπερτιμημένη και υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Στόχος της στρατηγικής ουδέτερου Δέλτα είναι η αντιστάθμιση και η εκμετάλλευση των ευκαιριών. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε, όταν η τιμή του δικαιώματος στην αγορά είναι υπερτιμημένη καθώς και ένα παράδειγμα στον Χρηματιστηριακό Δείκτη της Γερμανίας DAX.

Υποκείμενος τίτλος: DAX	
23 Ιουλίου, 2021	
Μέθοδος αποτίμησης δικαιώματος	Διωνυμικό Μοντέλο
Μέθοδος εκτίμησης της μεταβλητότητας	Μέσος όρος τυπικών αποκλίσεων
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_0)	€ 15.669,29
Εκτίμηση Μεταβλητότητας ανά χρονικό βήμα (σ)	2,25%
Δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης (K)	€ 15.350
Τιμή δικαιώματος αγοράς στην αγορά ($V_{0,M}$)	€ 670,20
Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)	2,55%
Ημερομηνία λήξης του δικαιώματος	15-Οκτ
T (σε έτη)	0,23
Αριθμός χρονικών βημάτων (N)	12
Χρονικό βήμα (Δ_t)	0,019
Ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου	0%
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ανά χρονικό βήμα	0%
Ρυθμός αύξησης του υποκείμενου τίτλου (u)	1,02
Ρυθμός μείωσης του υποκείμενου τίτλου (d)	0,98
Πιθανότητα ανόδου (Ουδέτερου κινδύνου)	0,48
Πιθανότητα καθόδου (Ουδέτερου κινδύνου)	0,52
Ετήσια μερισματική απόδοση (q)	2,29%
Μερισματική απόδοση ανά χρονικό βήμα ($q\Delta_t$)	0,04%

Πίνακας (3.1): Δεδομένα για τον Δείκτη της Γερμανίας DAX. (Παράδειγμα 1^ο)

Για την εκτίμηση της μεταβλητότητας στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο του μέσο όρου των τυπικών αποκλίσεων με ιστορικά δεδομένα. Εφόσον γνωρίζουμε την τιμή του δικαιώματος στην αγορά, μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κλειστού τύπου των Black και Scholes, για να εκμαιεύσουμε την τεκμαρτή μεταβλητότητα. Όπως φαίνεται, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι υψηλότερη από την εκτίμηση μας για την μεταβλητότητα γεγονός που οδηγεί σε υψηλότερη τιμή του δικαιώματος στην αγορά. Η αποτίμηση του δικαιώματος προαίρεσης και ο υπολογισμός του Δέλτα, που αποτελεί βασικό παράγοντα της στρατηγικής που θα ακολουθήσουμε, γίνεται σύμφωνα με το Διωνυμικό Μοντέλο. Πράγματι σύμφωνα με το Διωνυμικό μοντέλο η τιμή του δικαιώματος ($V_{0,V}$) που δεν επιτρέπει ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας ανέρχεται στα 617,69 €.

Στρατηγική στον χρόνο $t = 0$

Θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς :	$V_{0,M}$
Θέση αγοράς στον υποκείμενο τίτλο :	$\Delta_0 S_0$
Δανεισμός :	$V_{0,V} - \Delta_0 S_0$
Κέρδος λόγω υπερτιμημένης τιμής :	$V_{0,M} - V_{0,V}$
Χαρτοφυλάκιο :	$X_0 = V_{0,V}$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ $t = 0$	
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_0)	€ 15.669,29
Δέλτα δικαιώματος (Δ_0)	0,59
Θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς	€ 670,20
Θέση αγοράς στον υποκείμενο τίτλο	€ 9.215,87
Δανεισμός	€ (8.598,19)
Χαρτοφυλάκιο	€ 617,69
Κέρδος λόγω υπερτιμημένης τιμής	€ 52,51

Στρατηγική στον χρόνο $t = \Delta_t$

Μετοχικό Κεφάλαιο :	$\Delta_0 S_1$
Χαρτοφυλάκιο :	$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1 + r)(V_{0,V} - \Delta_0 S_0)$
Δανεισμός :	$X_1 - \Delta_1 S_1$
Αποπληρωμή Δανείου :	$(V_{0,V} - \Delta_0 S_0)(1 + r)$
Κέρδος /(Ζημία) :	$X_1 - X_0$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ $t = \Delta_t$	
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_1)	€ 15.544,39
Δέλτα δικαιώματος (Δ_1)	0,55
Μετοχικό Κεφάλαιο	€ 9.142,41
Χαρτοφυλάκιο	€ 544,23
Δανεισμός	€ (8.081,43)
Αποπληρωμή Δανείου	€ 8.598,19
Κέρδος /(Ζημιά)	€ (73,46)

Στρατηγική στον χρόνο $t = 2\Delta_t$

Μετοχικό Κεφάλαιο	: $\Delta_1 S_2$
Χαρτοφυλάκιο	: $X_2 = \Delta_1 S_2 + (1 + r)(X_1 - \Delta_1 S_1)$
Δανεισμός	: $X_2 - \Delta_2 S_2$
Αποπληρωμή Δανείου	: $(X_1 - \Delta_1 S_1)(1 + r)$
Κέρδος /(Ζημιά)	: $X_2 - X_1$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ $t = 2\Delta_t$	
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_2)	€ 15.761,45
Δέλτα δικαιώματος (Δ_2)	0,64
Μετοχικό Κεφάλαιο	€ 8.746,10
Χαρτοφυλάκιο	€ 664,67
Δανεισμός	€ (9.416,60)
Αποπληρωμή Δανείου	€ 8.081,43
Κέρδος /(Ζημιά)	€ 120,45

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος T. Γενικότερα η αξία του χαρτοφυλακίου ορίζεται αναδρομικά ξεκινώντας με X_0 που ισούται με την τιμή του δικαιώματος $V_{0,T}$, σύμφωνα με την μέθοδο αποτίμησης που ακολουθήσαμε, μέσω της εξίσωσης:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - \Delta_n S_n) \quad [3.1]$$

Στην παραπάνω εξίσωση εξαιρείται η θέση που έχει πάρει ο επενδυτής στο δικαίωμα προαίρεσης. Κάθε χρονικό διάστημα Δ_t , το οποίο στην στρατηγική που ακολουθήσαμε στο παράδειγμα μας είναι μία εβδομάδα, αναδιαρθρώνουμε το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να συμβαδίζει με την στρατηγική ουδέτερου Δέλτα και σημειώνουμε τα κέρδη ή τις ζημίες αντίστοιχα από την μεταβολή του χαρτοφυλακίου

απομίμησης. Συγκεκριμένα, επειδή έχουμε θεωρήσει μηδενικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, η εξίσωση [3.1] παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) \\
 \stackrel{r=0}{\implies} X_{n+1} &= \Delta_n S_{n+1} + (X_n - \Delta_n S_n) \\
 X_{n+1} - X_n &= \Delta_n S_{n+1} - \Delta_n S_n \\
 \Delta X &= \Delta_n \Delta S
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Επομένως σύμφωνα με την εξίσωση [3.2] οι μεταβολές στο συνολικό χαρτοφυλάκιο (ΔX) οφείλονται στις μεταβολές της τιμής του υποκείμενου τίτλου ($\Delta_n \Delta S$).

Με την βοήθεια της εξίσωσης [3.2] υπολογίζουμε τα συνολικά κέρδη ή ζημίες του χαρτοφυλακίου μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Ο χρόνος μέχρι την λήξη χωρίζεται σε 12 περιόδους και κάθε περίοδος αντιστοιχεί σε μία εβδομάδα. Στον παρακάτω πίνακα εξαιρείται η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα αγοράς και το κέρδος λόγω υπερτιμημένης τιμής του δικαιώματος στην αγορά.

Trading Portfolio		
$t = \Delta_t$	€	(73,46)
$t = 2\Delta_t$	€	120,45
$t = 3\Delta_t$	€	138,15
$t = 4\Delta_t$	€	(123,04)
$t = 5\Delta_t$	€	29,94
$t = 6\Delta_t$	€	(50,43)
$t = 7\Delta_t$	€	(121,40)
$t = 8\Delta_t$	€	(77,69)
$t = 9\Delta_t$	€	24,09
$t = 10\Delta_t$	€	(240,69)
$t = 11\Delta_t$	€	16,98
$t = T$	€	105,13
Συνολικά Κέρδη/(Ζημίες)	€	(251,98)

Πίνακας (3.2): Κέρδη/(Ζημίες) για κάθε χρονικό βήμα έως την ημερομηνία λήξης από την διαδικασία αντιστάθμισης στο 1^ο παράδειγμα (Εξαιρείται η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα προαίρεσης).

Ημερομηνία λήξης $t = T$

Η θέση πώλησης επί του δικαιώματος αγοράς θα εξεταστεί ξεχωριστά. Το πρώτο βήμα της της στρατηγικής ήταν ο επενδυτής να πάρει θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς εισπράττοντας το αντίστοιχο αντίτιμο. Συγκεκριμένα την χρονική στιγμή $t = 0$ ο επενδυτής αναγνωρίζει ως κέρδος την διαφορά μεταξύ της τιμής που πούλησε το δικαίωμα και της τιμής αποτίμησης. Πρέπει όμως να αναγνωρίσει ως έσοδο την αξία του αρχικού χαρτοφυλακίου η οποία ορίζεται ως το αντίτιμο που εισπράττει από την πώληση του δικαιώματος στην αγορά ($V_{0,M}$) μείον την διαφορά στην τιμολόγηση του δικαιώματος στην αγορά ($V_{0,M} - V_{0,V}$).

$$X_0 = V_{0,M} - (V_{0,M} - V_{0,V}) = V_{0,V}$$

Εκμεταλλευόμενοι την βασική υπόθεση ότι το επιτόκιο με το οποίο γίνεται η προεξόφληση είναι μηδενικό η αναγνώριση των εσόδων μπορεί να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την λήξη του δικαιώματος καθώς δεν υπάρχει χρονική αξία χρήματος.

Εκτός από την τιμή του δικαιώματος, που εισπράττει ο επενδυτής λόγω της θέσης πώλησης στο δικαίωμα αγοράς, ο επενδυτής έχει την υποχρέωση να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε μια προκαθορισμένη τιμή, την τιμή εξάσκησης σε περίπτωση που εξασκηθεί από τον αντισυμβαλλόμενο. Επομένως, αν το δικαίωμα στην λήξη έχει εσωτερική αξία τότε θα αναγνωρίσει ζημιά στο χαρτοφυλάκιο του ίση με:

$$\text{Option Payoff} = (S_T - K)^+$$

Όπου S_T η τιμή διακανονισμού (Settlement Price).

Η τιμή διακανονισμού μπορεί να είναι η τιμή κλεισίματος την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης ή ένας μέσος όρος των τελευταίων τιμών του υποκείμενου τίτλου λίγο πριν την εκπνοή του δικαιώματος. Ο λόγος που η τιμή διακανονισμού (**Settlement Price**) μπορεί να διαφέρει από την τιμή κλεισίματος είναι η αποφυγή ακραίων μεταβολών την τελευταία στιγμή επηρεάζοντας έτσι σημαντικά τις αντίστοιχες πληρωμές. Έτσι για κάθε χρηματιστηριακό δείκτη ορίζουμε την τιμή διακανονισμού ανάλογα με τους κανόνες που ακολουθεί το αντίστοιχο Χρηματιστήριο.

Ακολουθεί ένας λογιστικός πίνακας που συνοψίζει τα συνολικά κέρδη ή τις ζημίες αντίστοιχα από την στρατηγική αντιστάθμισης Δέλτα. Στον συγκεκριμένο πίνακα συμπεριλαμβάνεται και η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα. Συγκεκριμένα το αντίτιμο (Gross Inflow) που εισπράττει από την πώληση του δικαιώματος χωρίζεται

σε δύο συνιστώσες, την διαφορά τιμολόγησης (Mispricing Option) και το αρχικό χαρτοφυλάκιο (Portfolio X_0). Στην ημερομηνία λήξης ο επενδυτής οφείλει επίσης να καταβάλει στον αντισυμβαλλόμενο την θετική εσωτερική αξία του δικαιώματος (Option payoff), αν υπάρχει, καθώς και να εισπράξει/πληρώσει τους τόκους (Interest Paid/Received) από την επένδυση/δανεισμό στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Στην συνέχεια προστίθεται η θέση του επενδυτή από τις αγοροπωλησίες του υποκείμενου τίτλου (Trading P/L) που πραγματοποιηθήκαν για την στρατηγική αντιστάθμισης. Τα συνολικά κέρδη και οι ζημιές (Total P/L) εκφράζονται ως ποσοστό προς την διαφορά τιμολόγησης του δικαιώματος (Mispricing Option).

Cash Accounting P/L	
Cash inflow	
Mispricing option	52,51
Portfolio X_0	617,69
Gross Inflow	670,20
Cash out at Maturity	
Interest Paid/Received	0,00
Option Payoff	(153,75)
Gross Outflow	(153,75)
Cash before Trading Equity	516,45
Trading P/L	(251,98)
Total P/L	264,47
Total P/L (%)	503,6%

Πίνακας (3.3): Συνολικά κέρδη/(ζημιές) από την στρατηγική ουδέτερου Δέλτα στο 1^ο παράδειγμα (συμπεριλαμβάνεται η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα προαίρεσης).

Υποτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά

Αντίθετα αν η εκτίμηση της για την μεταβλητότητα είναι υψηλότερη από αυτήν της αγοράς (Implied Volatility) το Διωνυμικό μοντέλο και το μοντέλο Black και Scholes θα αποτιμήσουν το δικαίωμα προαίρεσης υψηλότερα από την αγορά. Επομένως θεωρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι υποτιμημένη και υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε όταν η τιμή του δικαιώματος στην αγορά είναι υποτιμημένη καθώς και ένα παράδειγμα στον Χρηματιστηριακό Δείκτη της Γερμανίας DAX.

Υποκείμενος τίτλος: DAX	
23 Ιουλίου, 2021	
<i>Μέθοδος αποτίμησης δικαιώματος</i>	<i>Μοντέλο των Black και Scholes</i>
<i>Μέθοδος εκτίμησης της μεταβλητότητας</i>	GARCH
<i>Τρέχουσα τιμή του δείκτη (S_0)</i>	€ 15.669,29
<i>Εκτίμηση Μεταβλητότητας ανά χρονικό βήμα (σ)</i>	2,59%
<i>Δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης (K)</i>	€ 15.450
<i>Τιμή δικαιώματος αγοράς στην αγορά ($V_{0,M}$)</i>	€ 600,40
<i>Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)</i>	2,47%
<i>Ημερομηνία λήξης του δικαιώματος</i>	15-Οκτ
<i>T (σε έτη)</i>	0,23
<i>Αριθμός χρονικών βημάτων (N)</i>	12
<i>Χρονικό βήμα (Δ_t)</i>	0,019
<i>Ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου</i>	0%
<i>Ετήσια μερισματική απόδοση (q)</i>	2,29%

Πίνακας (3.4): Δεδομένα για τον Δείκτη της Γερμανίας DAX. (Παράδειγμα 2^ο)

Για την εκτίμηση της μεταβλητότητας χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο του Γενικευμένου υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικού αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος (GARCH). Όπως φαίνεται η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι χαμηλότερη από την μεταβλητότητα που εκτιμήσαμε γεγονός που οδηγεί σε χαμηλότερη τιμή του δικαιώματος στην αγορά. Η αποτίμηση του δικαιώματος προαίρεσης και ο υπολογισμός του Δέλτα γίνεται σύμφωνα με το μοντέλο των Black και Scholes. Πράγματι σύμφωνα με το μοντέλο των Black και Scholes η τιμή του δικαιώματος ($V_{0,V}$) που δεν επιτρέπει ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας ανέρχεται στα 624,99 €.

Στρατηγική στον χρόνο $t = 0$

Θέση αγοράς στο δικαίωμα αγοράς	: $V_{0,M}$
Θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο	: $\Delta_0 S_0$
Επένδυση/(Δανεισμός)	: $\Delta_0 S_0 - V_{0,V}$
Κέρδος λόγω υποτιμημένης τιμής	: $V_{0,V} - V_{0,M}$
Χαρτοφυλάκιο	: $X_0 = -V_{0,V}$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ $t = 0$	
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_0)	€ 15.669,29
Δέλτα δικαιώματος (Δ_0)	0,55
Θέση αγοράς στο δικαίωμα αγοράς	€ 600,40
Θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο	€ 8.681,78
Επένδυση/(Δανεισμός)	€ 8.056,78
Χαρτοφυλάκιο	€ (624,99)
Κέρδος λόγω υποτιμημένης τιμής	€ 24,59

Στρατηγική στον χρόνο $t = \Delta_t$

Χρηματική θέση μετά από Επένδυση/(Δανεισμό)	: $(\Delta_0 S_0 - V_{0,V})(1 + r)$
Κλείσιμο προηγούμενης θέσης	: $-\Delta_0 S_1$
Χαρτοφυλάκιο	: $X_1 = -\Delta_0 S_1 + (\Delta_0 S_0 + X_0)(1 + r)$
Θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο	: $\Delta_1 S_1$
Επένδυση/Δανεισμός	: $X_1 + \Delta_1 S_1$
Κέρδος/(Ζημία)	: $X_1 - X_0$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ $t = \Delta_t$	
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_1)	€ 15.544,39
Δέλτα δικαιώματος (Δ_1)	0,52
Κλείσιμο προηγούμενης θέσης	€ (8.612,57)
Χρηματική θέση μετά από Επένδυση/(Δανεισμό)	€ 8.056,78
Χαρτοφυλάκιο	€ (555,79)
Θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο	€ 8.070,50
Επένδυση/Δανεισμός	€ 7.514,71
Κέρδος/(Ζημία)	€ 69,20

Στρατηγική στον χρόνο $t = 2\Delta_t$

Χρηματική θέση μετά από Επένδυση/(Δανεισμό)	: $(\Delta_1 S_1 + X_1)(1 + r)$
Κλείσιμο προηγούμενης θέσης	: $-\Delta_1 S_2$
Χαρτοφυλάκιο	: $X_2 = -\Delta_1 S_2 + (\Delta_1 S_1 + X_1)(1 + r)$
Θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο	: $\Delta_2 S_2$
Επένδυση/Δανεισμός	: $X_2 + \Delta_2 S_2$
Κέρδος /(Ζημία)	: $X_2 - X_1$

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ $t = 2\Delta_t$	
Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (S_2)	€ 15.761,45
Δέλτα δικαιώματος (Δ_2)	0,60
Κλείσιμο προηγούμενης θέσης	€ (8.183,20)
Χρηματική θέση μετά από Επένδυση/(Δανεισμό)	€ 7.514,71
Χαρτοφυλάκιο	€ (668,49)
Θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο	€ 9.513,61
Επένδυση/Δανεισμός	€ 8.845,12
Κέρδος /(Ζημία)	€ (112,70)

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος T. Γενικότερα η αξία του χαρτοφυλακίου ορίζεται αναδρομικά ξεκινώντας με X_0 που ισούται με την τιμή του δικαιώματος $-V_{0,V}$ (αρνητικό πρόσημο λόγω θέσης αγοράς επί του δικαιώματος), σύμφωνα με την μέθοδο αποτίμησης που ακολουθήσαμε, μέσω της εξίσωσης:

$$X_{n+1} = -\Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n + \Delta_n S_n) \quad [3.3]$$

Στην παραπάνω εξίσωση εξαιρείται η θέση που έχει ο επενδυτής στο δικαίωμα προαίρεσης. Συγκεκριμένα, επειδή έχουμε θεωρήσει μηδενικό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, η εξίσωση [3.3] παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= -\Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n + \Delta_n S_n) \\
 \stackrel{r=0}{\implies} X_{n+1} &= -\Delta_n S_{n+1} + (X_n + \Delta_n S_n) \\
 X_{n+1} - X_n &= -\Delta_n (S_{n+1} - S_n) \\
 \Delta X &= -\Delta_n \Delta S \quad [3.4]
 \end{aligned}$$

Επομένως, οι μεταβολές στο συνολικό χαρτοφυλάκιο (ΔX) οφείλονται στις μεταβολές της τιμής του υποκείμενου τίτλου ($-\Delta_n \Delta S$). Συγκεκριμένα λόγω της θέσης πώλησης στον υποκείμενο τίτλο η πτώση της τρέχουσας τιμής αποφέρει κέρδη στον επενδυτή. Για αυτό τον λόγο σε αντίθεση με τον τύπο [3.2] υπάρχει αρνητικό πρόσημο στον υπολογισμό των μεταβολών του χαρτοφυλακίου. Παρατηρείται επομένως αρνητική σχέση μεταξύ της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου και της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

Με την βοήθεια της εξίσωσης [3.4] υπολογίζουμε τα συνολικά κέρδη ή ζημίες του χαρτοφυλακίου μέχρι την ημερομηνία λήξης. Στον παρακάτω πίνακα εξαιρείται η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα αγοράς και το κέρδος λόγω υποτιμημένης τιμής του δικαιώματος στην αγορά.

Trading Portfolio	
$t = \Delta_t$	€ 69,20
$t = 2\Delta_t$	€ (112,70)
$t = 3\Delta_t$	€ (130,37)
$t = 4\Delta_t$	€ 118,56
$t = 5\Delta_t$	€ (27,94)
$t = 6\Delta_{7t}$	€ 48,34
$t = 7\Delta_t$	€ 116,86
$t = 8\Delta_t$	€ 69,32
$t = 9\Delta_t$	€ (21,44)
$t = 10\Delta_t$	€ 204,08
$t = 11\Delta_t$	€ (14,01)
$t = T$	€ (109,84)
Συνολικά Κέρδη/(Ζημίες)	€ 210,06

Πίνακας (3.5): Κέρδη/(Ζημίες) για κάθε χρονικό βήμα έως την ημερομηνία λήξης από την διαδικασία αντιστάθμισης στο 2^ο παράδειγμα (Εξαιρείται η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα προαίρεσης).

Ημερομηνία λήξης $t = T$

Η θέση αγοράς επί του δικαιώματος αγοράς θα εξεταστεί ξεχωριστά. Το πρώτο βήμα αυτής της στρατηγικής ήταν ο επενδυτής να πάρει θέση αγοράς στο δικαίωμα αγοράς πληρώνοντας το αντίστοιχο αντίτιμο. Συγκεκριμένα την χρονική στιγμή $t = 0$ ο επενδυτής αναγνωρίζει ως κέρδος την διαφορά μεταξύ της τιμής που αγόρασε το δικαίωμα και της τιμής αποτίμησης. Πρέπει όμως να αναγνωρίσει ως έξοδο την αξία του αρχικού χαρτοφυλακίου, που ορίζεται ως το αντίτιμο που πλήρωσε κατά την αγορά του δικαιώματος στην αγορά ($V_{0,M}$) μείον την διαφορά τιμολόγησης του δικαιώματος στην αγορά ($V_{0,V} - V_{0,M}$).

$$X_0 = -V_{0,M} - (V_{0,V} - V_{0,M}) = -V_{0,V}$$

Αντιστοίχως, επειδή δεν υπάρχει χρονική αξία χρήματος, μπορούμε να αναγνωρίσουμε το κόστος του χαρτοφυλακίου X_0 οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Εκτός από το αντίτιμο που πλήρωσε ο επενδυτής έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης K . Αν το δικαίωμα στην λήξη έχει εσωτερική αξία, τότε θα αναγνωρίσει κέρδος στο χαρτοφυλάκιο ίσο με:

$$\text{Option Payoff} = (S_T - K)^+$$

Όπου S_T η τιμή διακανονισμού (Settlement Price).

Ακολουθεί ένας λογιστικός πίνακας που συνοψίζει τα συνολικά κέρδη ή τις ζημίες αντίστοιχα από την στρατηγική αντιστάθμισης Δέλτα. Στον συγκεκριμένο πίνακα συμπεριλαμβάνεται και η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα προαίρεσης.

Cash Accounting P/L	
Cash Outflow	
Mispricing option	24,59
Portfolio X_0	(624,99)
Gross Outflow	(600,40)
Cash out at Maturity	
Interest Paid	0,00
Option Payoff	53,75
Gross Inflow	53,75
Cash before Trading Equity	(546,65)
Trading P/L	210,06
Total P/L	(336,59)
Total P/L (%)	(1368,6) %

Πίνακας (3.6): Συνολικά κέρδη/(ζημίες) από την στρατηγική ουδέτερου Δέλτα στο 2^ο παράδειγμα (συμπεριλαμβάνεται η θέση του επενδυτή στο δικαίωμα προαίρεσης)

Όσον αφορά στην 2^η περίπτωση ένα μέρος της στρατηγικής αναφέρεται σε επένδυση ή δανεισμό. Σχεδόν πάντα, εκτός της περίπτωσης που το δικαίωμα αγοράς είναι Deep out of the money (δηλαδή η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι κατά πολύ μικρότερη της τιμής εξάσκησης) οπότε και το Δέλτα του δικαιώματος τείνει στο μηδέν, η στρατηγική αυτή ξεκινάει με επένδυση. Αυτό συμβαίνει γιατί το

Δέλτα του δικαιώματος συμβολίζει τον αριθμό των μετοχών στις οποίες πρέπει να έχουμε θέση πώλησης για κάθε ένα δικαίωμα αγοράς. Τα χρήματα που λαμβάνουμε από την θέση πώλησης μείον το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου τα επενδύουμε στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Όσο κοντεύει η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, αν το δικαίωμα έχει εσωτερική αξία, τότε συνεχίζουμε να λαμβάνουμε τόκους (στην συγκεκριμένη περίπτωση μηδενικούς λόγω μηδενικού επιτοκίου). Αν όμως το δικαίωμα εξακολουθεί να έχει αρνητικό χρηματικό ισοδύναμο και το πιο πιθανό σενάριο είναι να μην γίνει εξάσκηση του στην λήξη, τότε το δέλτα τείνει στο μηδέν. Επομένως δεν χρειάζεται πλέον να έχουμε θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο για αντιστάθμιση κινδύνου και δεν έχουμε χρηματικά διαθέσιμα. Επομένως συνεχίζουμε με δανεισμό (roll-over loans), ώστε να καλύπτει το κόστος του χαρτοφυλακίου και να το αναγνωρίσουμε στην λήξη.

Σφάλμα Παρακολούθησης (Delta Hedging Tracking Error)

Σύμφωνα με την θεωρία, αν ένας επενδυτής ακολουθούσε την στρατηγική ουδέτερου Δέλτα που προαναφέραμε, θα έπρεπε να κατέληγε στον χρόνο $t = T$ (ημερομηνία λήξης) πάντα με μοναδικό κέρδος την διαφορά της τιμολόγησης του δικαιώματος στην αγορά εκμεταλλευόμενος τις ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Αντίθετα, όπως είναι φανερό στους πίνακες αποτελεσμάτων που ακολουθούν, στην πράξη δεν συμβαίνει αυτό καταλήγοντας έτσι ακόμα και σε ζημιά σε ορισμένες περιπτώσεις.

Βασική αιτία που συμβαίνει αυτό είναι ότι το Δέλτα του δικαιώματος και κατά συνέπεια το Δέλτα του χαρτοφυλακίου δεν παραμένει σταθερό στην διάρκεια του χρονικού βήματος. Στην πραγματικότητα το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή που ακολουθεί αυτή την στρατηγική έχει μηδενικό Δέλτα μόνο για ένα σύντομο χρονικό διάστημα. Επομένως η αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι δυναμική (dynamic hedging) και όχι στατική (static hedging ή hedge and forget) για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία θα ακολουθήσουμε δυναμική αντιστάθμιση αναδιαρθρώνοντας το χαρτοφυλάκιο μας κάθε εβδομάδα. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου όμως μέσα στο χρονικό βήμα Δt δεν παραμένει σταθερή προκαλώντας μεταβολές στον συντελεστή ευαισθησίας Δέλτα. Η πηγή αυτού του «σφάλματος παρακολούθησης» (tracking error όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία) είναι ότι το Δέλτα είναι μια γραμμική εκτίμηση ενώ η συνάρτηση της τιμής του δικαιώματος και του υποκείμενου τίτλου όχι. Επομένως είτε θα υποτιμά είτε θα υπερεκτιμά την πραγματική μεταβολή της τιμής με αποτέλεσμα όσο μεγαλύτερες είναι οι αλλαγές στις τιμές του υποκείμενου τίτλου τόσο υψηλότερο είναι το αντίστοιχο σφάλμα.

Την μεταβολή αυτή μετράει το Gamma που είναι και αυτό με την σειρά του ένας συντελεστής ευαισθησίας και ορίζεται ως η δεύτερη παράγωγος της αξίας του δικαιώματος ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου ή η πρώτη παράγωγος του Δέλτα ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Επομένως το Gamma μετράει την κυρτότητα. Συγκεκριμένα λόγω της θετικής συσχέτισης ανάμεσα στο Δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς και της τιμής της μετοχής, μια αύξηση/μείωση της τιμής του υποκείμενου τίτλου οδηγεί σε αύξηση/μείωση του Δέλτα του δικαιώματος, επομένως τα δικαιώματα στα οποία έχουμε θέση αγοράς (ανεξάρτητα αν είναι αγοράς ή πώλησης) έχουν θετικό Gamma ενώ τα δικαιώματα στα οποία έχουμε θέση πώλησης αρνητικό. Είναι αναμενόμενο το Gamma ενός δικαιώματος προαίρεσης με ουδέτερο χρηματικό ισοδύναμο (at the money) να είναι υψηλότερο από ένα δικαίωμα με θετικό (in the money) ή αρνητικό χρηματικό ισοδύναμο (out of the money). Συγκεκριμένα, όσο κοντεύει η ημερομηνία λήξης T , απομένει όλο και λιγότερος χρόνος για μεταβολές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε αυτήν την περίπτωση τα δικαιώματα που είναι Deep in the money ή Deep out of the money έχουν σχεδόν μηδενικό Gamma, γιατί το Δέλτα βρίσκεται είτε κοντά στην μονάδα είτε στο μηδέν αντίστοιχα, ενώ τα at the money δικαιώματα έχουν υψηλό Gamma, επειδή οι

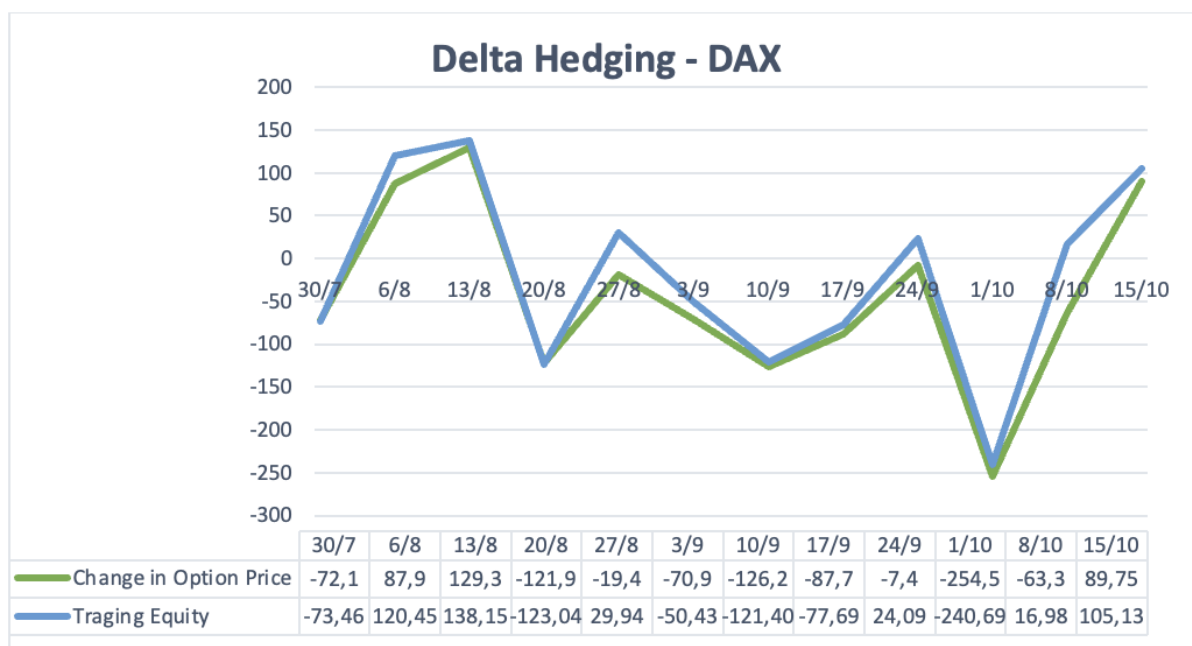
τελευταίες κινήσεις του υποκείμενου τίτλου παίζουν καθοριστικό ρόλο στην εξάσκηση του δικαιώματος. Ένα εφιαλτικό σενάριο για έναν επενδυτή που διαπραγματεύεται δικαιώματα προαίρεσης είναι να πλησιάζει η ημερομηνία λήξης και η τιμή του υποκείμενου τίτλου να είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης.

Μια δεύτερη αιτία για την δημιουργία του σφάλματος παρακολούθησης είναι η κυμαινόμενη μεταβλητότητα μέσα στο χρονικό βήμα Δt . Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, σύμφωνα με τον Vähämaa (2004) και τον Crépey (2004) ο υπολογισμός του Δέλτα, λαμβάνοντας υπόψη την αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τεκμαρτής μεταβλητότητας και της τιμής εξάσκησης των δικαιωμάτων, προσφέρει καλύτερη αντιστάθμιση στον επενδυτή. Η διαπίστωση αυτή ισχύει κυρίως σε αρνητικά ασύμμετρες αγορές (negatively skewed markets), όπως στην συγκεκριμένη περίπτωση, καθώς παρατηρείται μείωση της τεκμαρτής μεταβλητότητας για υψηλές τιμές εξάσκησης του δικαιώματος. Επομένως ο συνυπολογισμός της έμμεσης επίδρασης της μεταβλητότητας στην τιμή του δικαιώματος πιθανότατα να πρόσφερε στον επενδυτή μια καλύτερη θέση αντιστάθμισης.

Υπερτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά

Ο σκοπός αυτής της στρατηγικής είναι η σύγκλιση της τιμής του δικαιώματος στην αγορά με την τιμή του δικαιώματος σύμφωνα με το εκάστοτε μοντέλο αποτίμησης καταλήγοντας με μοναδικό κέρδος την διαφορά στην τιμολόγηση του δικαιώματος.

Σε αυτήν την περίπτωση, όπως προαναφέρθηκε, ο επενδυτής έχει θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς που θεωρεί υπερτιμημένο και θέση αγοράς στον ίδιο τον υποκείμενο τίτλο. Επομένως η πτώση της τιμής του υποκείμενου τίτλου αποτελεί ζημιά για το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του επενδυτή αλλά ταυτόχρονα τον ωφελεί λόγω της θέσης πώλησης στο δικαίωμα αγοράς (καθώς έχει θετική συσχέτιση με την τιμή του υποκείμενου τίτλου). Στο διάγραμμα (3.1) που ακολουθεί αποτυπώνονται οι μεταβολές στην τιμή του δικαιώματος αγοράς και τα κέρδη ή οι ζημίες από την διαδικασία αντιστάθμισης στο 1^ο παράδειγμα.



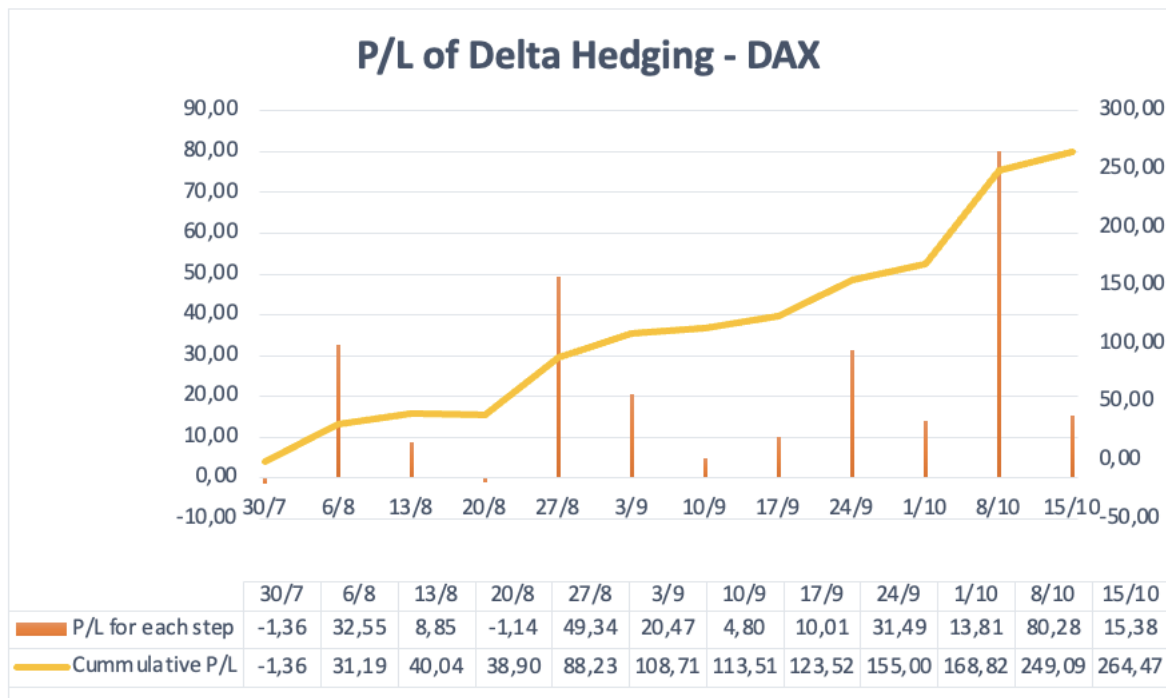
Διάγραμμα (3.1): Οι μεταβολές στην τιμή του δικαιώματος και τα κέρδη/ζημίες από την διαδικασία αντιστάθμισης από το τέλος του πρώτου χρονικού βήματος μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, όταν τα κέρδη από την διαδικασία αντιστάθμισης υπερτερούν της αύξησης της τιμής του δικαιώματος ή οι ζημίες είναι μικρότερες από την αντίστοιχη πτώση της τιμής του δικαιώματος, ο επενδυτής αναγνωρίζει κέρδος. Στην αντίθετη περίπτωση ο επενδυτής ζημιώνεται.

$$Profit|(Loss) = \Delta(Trading) - \Delta(Option Price)$$

[3.5]

Στο διάγραμμα (3.2) με την βοήθεια της εξίσωσης [3.5] υπολογίζεται η παραπάνω διαφορά σε κάθε χρονικό βήμα καθώς και τα συσσωρευτικά κέρδη/(ζημίες) μέχρι την λήξη του δικαιώματος προαίρεσης.

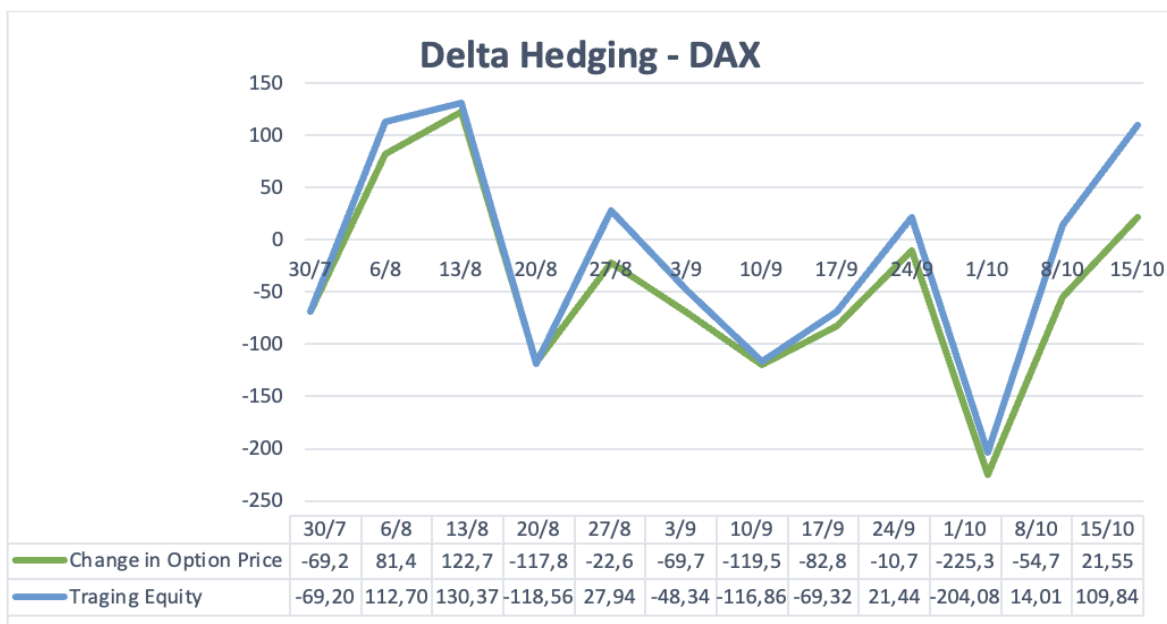


Διάγραμμα (3.2): Συνολικά κέρδη/ζημίες για κάθε χρονικό βήμα από το τέλος του πρώτου χρονικού βήματος μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο επενδυτής καταλήγει με συνολικό κέρδος στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος 264,47 € ενώ η διαφορά στην τιμολόγηση του δικαιώματος ήταν 52,51€. Επιβεβαιώνεται έτσι στην πράξη, τουλάχιστον στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ότι η στρατηγική ουδέτερου Δέλτα δεν επαληθεύει τα αποτελέσματα που θα περιμέναμε σύμφωνα με την θεωρία.

Υποτιμημένη τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στην αγορά

Σε αυτήν την περίπτωση ο επενδυτής έχει θέση αγοράς στο δικαίωμα αγοράς και θέση πώλησης στον υποκείμενο τίτλο. Επομένως η άνοδος της τιμής του υποκείμενου τίτλου αποτελεί ζημία για το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του επενδυτή αλλά ταυτόχρονα τον ωφελεί λόγω της θέσης αγοράς στο δικαίωμα αγοράς (καθώς έχει θετική συσχέτιση με την τιμή του υποκείμενου τίτλου). Στο διάγραμμα (3.3) που ακολουθεί αποτυπώνονται οι μεταβολές στην τιμή του δικαιώματος αγοράς και τα κέρδη ή οι ζημίες από την διαδικασία αντιστάθμισης στο 2^ο παράδειγμα.

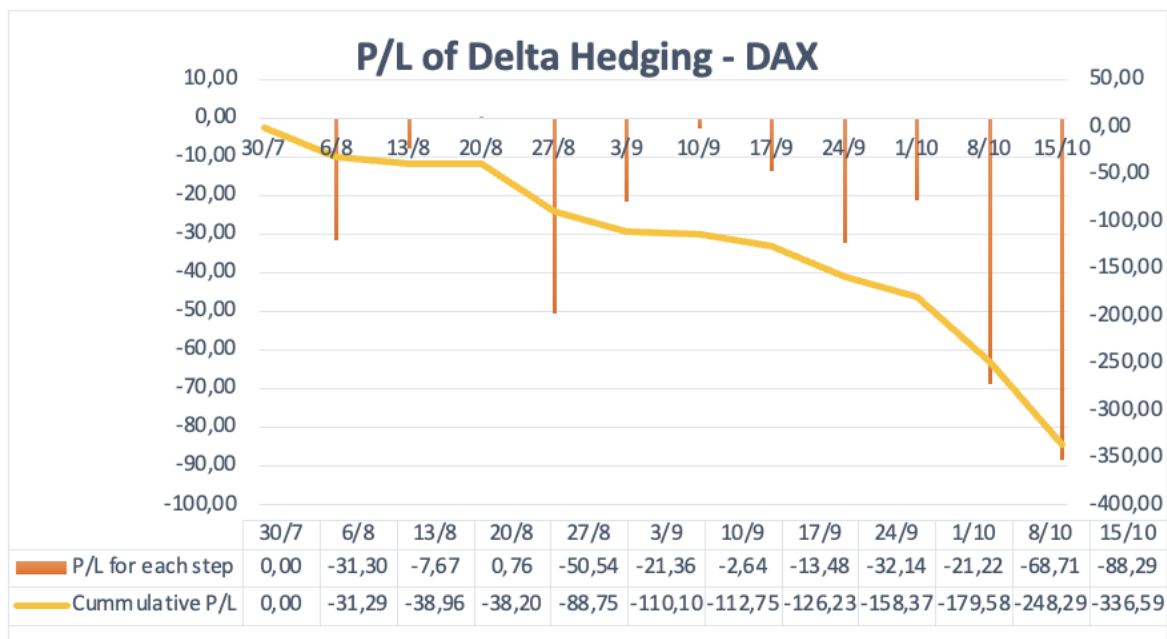


Διάγραμμα (3.3): Οι μεταβολές στην τιμή του δικαιώματος και τα κέρδη/ζημίες από την διαδικασία αντιστάθμισης από το τέλος του πρώτου χρονικού βήματος μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Αντίθετα σε αυτήν την περίπτωση όταν τα κέρδη από την άνοδο της τιμής του δικαιώματος υπερτερούν της ζημίας από την διαδικασία αντιστάθμιση ή η πτώση της τιμής του δικαιώματος είναι μικρότερη από τα αντίστοιχα κέρδη της αντιστάθμισης ο επενδυτής αναγνωρίζει κέρδος. Στην αντίθετη περίπτωση ο επενδυτής ζημιώνεται.

$$Profit|(Loss) = \Delta(Option\ Price) - \Delta(Trading) \quad [3.6]$$

Στο διάγραμμα (3.4) με την βοήθεια της εξίσωσης [3.6] υπολογίζεται η παραπάνω διαφορά σε κάθε χρονικό βήμα καθώς και τα συσσωρευτικά κέρδη/ζημίες μέχρι την λήξη του δικαιώματος.



Διάγραμμα (3.4): Συνολικά κέρδη/ζημίες για κάθε χρονικό βήμα από το τέλος του πρώτου χρονικού βήματος μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο επενδυτής καταλήγει με συνολική ζημία στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (336,59) € ενώ η διαφορά στην τιμολόγηση του δικαιώματος ήταν 24,59€. Επιβεβαιώνεται έτσι και σε αυτό το παράδειγμα ότι η στρατηγική ουδέτερου Δέλτα δεν επαληθεύει τα αποτελέσματα που θα περιμέναμε σύμφωνα με την θεωρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εμπειρική ανάλυση

Το δείγμα περιλαμβάνει συνολικά 8 χρηματιστηριακούς δείκτες. Η έρευνα εστιάζει γεωγραφικά στις αγορές της Ευρωζώνης, της Μεγάλης Βρετανίας και της Ελβετίας. Συγκεκριμένα οι Ευρωπαϊκοί χρηματιστηριακοί δείκτες είναι οι DAX, CAC 40, Euro Stoxx 50, Euro Stoxx 600, PSI 20 και AEX, της Μεγάλης Βρετανίας ο FTSE 100 ενώ της Ελβετίας ο SMI. Η διαδικασία καλύπτει χρονικά μια περίοδο 5 μηνών, από τις 23/7/2021 που είναι η πρώτη ημέρα διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων μέχρι τις 17/12/2021 που είναι η τελευταία ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων του χαρτοφυλακίου μας. Τα δεδομένα που είναι απαραίτητα για την εκπόνηση της διαδικασίας είναι οι τιμές κλεισίματος των εκάστοτε υποκείμενων τίτλων σε ημερήσια βάση έναν χρόνο πριν την αντίστοιχη ημερομηνία διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και οι τιμές των δικαιωμάτων από την ημέρα διαπραγμάτευσης μέχρι την ημερομηνία λήξης τους με εβδομαδιαία συχνότητα παρατηρήσεων. Οι τιμές κλεισίματος των δεικτών χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση της ιστορικής μεταβλητότητας του εκάστοτε δείκτη. Για κάθε δείκτη χρησιμοποιήθηκαν 24 δικαιώματα αγοράς των οποίων οι τιμές εξάσκησης κυμαίνονται στην τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου για να υπάρχει ρευστότητα. Συγκεκριμένα τα δικαιώματα αγοράς που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε 3 διαφορετικές ημερομηνίες λήξης (Οκτώβριος, Νοέμβριος, Δεκέμβριος 2021). Επομένως σε κάθε ημερομηνία λήξης αντιστοιχούν 8 δικαιώματα αγοράς.

Στους πίνακες που ακολουθούν συνοψίζονται τα αποτελέσματα της κάθε διαδικασίας ξεχωριστά. Για σκοπούς σύγκρισης ο πρώτος διαχωρισμός γίνεται με βάση την μέθοδο αποτίμησης που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του δικαιώματος προαίρεσης καθώς και τον υπολογισμό του Δέλτα με αποτέλεσμα να υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες:

- Το Διωνυμικό Μοντέλο διακριτού χρόνου. **(Binomial Tree)**
- Το μοντέλο Black και Scholes συνεχούς χρόνου. **(Black and Scholes)**

Ο δεύτερος διαχωρισμός γίνεται με βάση την μέθοδο εκτίμησης της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου με αποτέλεσμα να υπάρχουν τέσσερις υποκατηγορίες για κάθε μέθοδο αποτίμησης.

- Μέσος όρος τεκμαρτής μεταβλητότητας των δικαιωμάτων προαίρεσης. **(Implied Volatility)**
- Γενικευμένο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα. **(GARCH)**
- Εκθετικός σταθμισμένος κινούμενος μέσος όρος. **(EWMA)**
- Μέσος όρος τυπικών αποκλίσεων. **(Standard Deviation)**

Επομένως για κάθε δικαίωμα προαίρεσης προκύπτουν 8 διαφορετικά αποτελέσματα. Ωστόσο στον παρακάτω πίνακα δεν υπάρχουν τιμές για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Ο λόγος είναι ότι τα κέρδη και οι ζημιές εκφράζονται ως ποσοστό προς την διαφορά τιμολόγησης του δικαιώματος (*Mispricing Option*) και, όταν αυτή η διαφορά δεν είναι σημαντική, δεν υπάρχουν σημαντικές ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας με αποτέλεσμα να προκύπτουν ακραίες τιμές. Για την αποφυγή ακραίων τιμών που θα επηρέαζαν σημαντικά το δείγμα λαμβάνουμε υπόψη μόνο τα αποτελέσματα που πληρούν την παρακάτω προϋπόθεση:

$$\frac{|Τιμή αποτίμησης δικαιώματος - Τιμή δικαιώματος στην αγορά|}{Τιμή δικαιώματος στην αγορά} \geq 3\%$$

Όπου η τιμή αποτίμησης του δικαιώματος είναι η τιμή σύμφωνα με την εκάστοτε μέθοδο αποτίμησης που ακολουθήσαμε. Έτσι το συνολικό δείγμα αντί για 1536 παρατηρήσεις (8 Υποκείμενοι τίτλοι, 2 Μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων, 4 Μέθοδοι εκτίμησης μεταβλητότητας, 8 Τιμές εξάσκησης, 3 Ημερομηνίες λήξης δικαιωμάτων) αποτελείται από 1407 παρατηρήσεις καθώς στις υπόλοιπες περιπτώσεις δεν εντοπίστηκαν σημαντικές ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

Επειδή τα κέρδη εκφράζονται ως ποσοστό προς την διαφορά τιμολόγησης του δικαιώματος, η συναλλαγματική ισοτιμία δεν αποτελεί πρόβλημα και μπορεί να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων στο δείγμα. Στους πίνακες που ακολουθούν το αποτέλεσμα της εκάστοτε στρατηγικής υπολογίζεται ως εξής:

$$Κέρδος/(Ζημία) (\%) = \frac{Συνολικό Κέρδος/(Ζημία)}{Διαφορά Τιμολόγησης Δικαιώματος}$$

Η πρώτη στήλη του κάθε πίνακα με τίτλο «*Moneyness*» αναφέρεται στο χρηματικό ισοδύναμο του εκάστοτε δικαιώματος προαίρεσης. Ένα δικαίωμα αγοράς που μπορεί να επιφέρει κέρδη στον κάτοχο του, αν πουληθεί στην τρέχουσα ισοτιμία, έχει θετικό χρηματικό ισοδύναμο και ο δείκτης *Moneyness* είναι μικρότερος της μονάδας (*In The Money*). Αντίθετα ένα δικαίωμα αγοράς έχει αρνητικό χρηματικό ισοδύναμο (*Out of The Money*), όταν η εξάσκηση του στην τρέχουσα ισοτιμία δεν θα αποφέρει κέρδη στον επενδυτή και ο δείκτης *Moneyness* είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Τέλος, όταν η τρέχουσα ισοτιμία ισούται με την τιμή εξάσκησης, λέγεται ότι το δικαίωμα αγοράς έχει μηδενικό χρηματικό ισοδύναμο και ο δείκτης *Moneyness* είναι ίσος με την μονάδα (*At The Money*).

$$Moneyness = \frac{Stike Price}{Spot Price of Underlying Asset}$$

Πίνακες αποτελεσμάτων της στρατηγικής

CAC 40, Call Option, Maturity 15 October

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	245,30%	-153,70%	-412,00%	124,30%	176,80%	-97,80%	-	95,20%
0,97	441,20%	-113,30%	-252,70%	175,50%	237,00%	-56,50%	-151,00%	102,90%
0,98	715,60%	-57,50%	-119,40%	188,80%	360,30%	-34,90%	-72,50%	107,50%
0,99	-	-26,30%	-41,30%	131,80%	-	-21,50%	-34,70%	109,50%
1,00	-	-11,10%	-11,60%	101,90%	-	-16,70%	-18,70%	120,30%
1,00	-270,10%	-16,40%	-12,40%	134,80%	-278,90%	-22,90%	-21,90%	209,70%
1,01	-123,30%	-22,00%	-15,40%	-148,70%	-194,90%	-34,90%	-35,20%	-
1,02	-89,10%	-30,20%	-22,30%	-34,70%	-188,00%	-54,70%	-59,80%	-371,70%

CAC 40, Call Option, Maturity 19 November

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	183,40%	166,60%	122,90%	148,20%	145,60%	130,40%	100,00%	122,20%
0,98	234,30%	182,30%	128,00%	162,80%	168,00%	150,00%	109,50%	135,10%
0,99	358,50%	204,70%	135,80%	187,10%	220,70%	177,20%	120,90%	154,70%
1,00	-	224,00%	143,00%	211,90%	-	216,90%	135,50%	189,90%
1,00	-	339,00%	190,70%	380,20%	-198,80%	329,90%	164,30%	349,60%
1,01	-69,20%	-	418,50%	-510,20%	-34,30%	-	234,10%	-
1,02	-14,40%	-265,90%	-	-93,80%	-0,30%	-331,40%	-	-89,20%
1,03	-1,30%	-99,10%	-166,70%	-31,30%	2,30%	-107,40%	-231,50%	-38,60%

CAC 40, Call Option, Maturity 17 December

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,98	-94,40%	488,10%	115,10%	87,90%	36,40%	241,80%	71,80%	54,20%
0,99	-225,50%	-	69,90%	39,60%	17,90%	-	54,70%	32,20%
0,99	-424,00%	-	12,20%	-17,80%	-12,60%	-	25,00%	-2,40%
1,00	-893,30%	564,90%	-59,10%	-86,40%	-	182,00%	-23,10%	-54,30%
1,01	1619,90%	298,80%	-186,60%	-215,30%	106,00%	210,70%	-97,10%	-129,90%
1,02	608,10%	277,40%	-466,40%	-487,20%	-8,60%	208,50%	-213,00%	-242,90%
1,02	412,60%	278,20%	-1216,90%	-1168,50%	-53,40%	187,10%	-431,70%	-446,50%
1,05	202,80%	284,90%	1253,50%	1288,80%	-21,10%	154,30%	775,40%	831,50%

AEX, Call Option, Maturity 15 October

<i>Money</i> ness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	140,3%	-418,6%	-	-	136,3%	-	-	-
0,99	274,2%	-226,7%	-384,8%	-625,6%	174,5%	-194,8%	-434,8%	-
1	444,4%	-221,3%	-271,8%	-380,6%	248,4%	-76,7%	-168,6%	-226,5%
1,01	-	-59,7%	-121,7%	-152,5%	-	-12,6%	-46,0%	-58,4%
1,03	68,0%	17,7%	27,2%	31,7%	48,9%	22,2%	40,9%	46,7%
1,04	168,0%	48,4%	125,5%	150,1%	50,9%	17,4%	71,3%	83,7%
1,05	126,3%	33,9%	103,0%	113,4%	-120,2%	-47,5%	6,5%	12,3%
1,07	-140,9%	-63,5%	-73,9%	-78,3%	-343,5%	-142,7%	-119,2%	-128,4%

AEX, Call Option, Maturity 19 November

<i>Money</i> ness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,98	-133,20%	-178,00%	-101,00%	-216,50%	-113,30%	-153,60%	-92,70%	-171,90%
0,98	-191,10%	-252,60%	-120,10%	-369,60%	-150,40%	-189,20%	-106,60%	-250,20%
0,99	-237,80%	-	-125,50%	-611,30%	-209,10%	-256,60%	-119,80%	-
1,00	-273,80%	-	-118,20%	-	-446,60%	-	-147,40%	-
1,00	-	-	-131,80%	350,40%	-	101,40%	-171,90%	353,30%
1,02	10,80%	-103,40%	-	16,30%	29,80%	-112,10%	-	18,00%
1,03	-113,80%	-182,70%	-380,90%	-100,90%	-142,00%	-213,80%	-452,50%	-117,60%
1,04	-335,40%	-359,60%	-660,60%	-295,80%	-326,30%	-358,20%	-666,50%	-275,60%

AEX, Call Option, Maturity 17 December

<i>Money</i> ness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,98	80,70%	-8,10%	-42,00%	-48,70%	171,40%	40,50%	-5,60%	-7,00%
0,99	-49,60%	-84,80%	-76,90%	-90,40%	81,90%	-47,50%	-54,30%	-64,60%
0,99	-147,50%	-184,20%	-111,60%	-133,20%	-56,90%	-159,50%	-98,30%	-119,50%
1,00	-269,80%	-289,60%	-144,70%	-174,30%	-	-335,80%	-139,90%	-175,20%
1,00	-	-666,90%	-181,90%	-239,60%	-	-702,30%	-179,40%	-233,10%
1,01	284,10%	-	-230,50%	-328,30%	611,40%	-	-222,60%	-303,00%
1,02	188,30%	345,60%	-376,90%	-698,00%	341,60%	706,10%	-355,40%	-569,10%
1,04	294,00%	263,40%	-438,20%	-997,70%	285,50%	299,40%	-663,90%	-1920,50%

DAX, Call Option, Maturity 15 October

Moneyiness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	518,50%	-	281,10%	389,30%	458,10%	-	270,40%	360,50%
0,99	714,90%	-1534,80%	346,80%	503,60%	611,50%	-	336,50%	460,70%
1	1059,10%	-977,00%	445,50%	675,40%	942,70%	-1368,60%	455,10%	655,80%
1,01	1499,50%	-681,80%	489,70%	824,20%	1675,10%	-794,20%	586,30%	948,10%
1,03	-	-430,90%	518,10%	946,10%	-	-470,30%	723,50%	1578,30%
1,04	-473,60%	-167,70%	-	-829,40%	-577,50%	-204,30%	-	-1124,70%
1,05	-165,60%	-86,30%	-396,00%	-228,80%	-197,80%	-103,70%	-563,80%	-291,50%
1,07	-88,70%	-53,20%	-248,50%	-137,30%	-96,80%	-59,30%	-242,70%	-142,50%

DAX, Call Option, Maturity 19 November

Moneyiness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,98	431,60%	162,00%	99,30%	203,30%	317,10%	141,60%	89,30%	170,80%
0,98	506,10%	170,10%	104,50%	221,10%	368,80%	149,50%	94,60%	187,20%
0,99	754,00%	187,70%	116,10%	263,10%	592,70%	170,70%	108,20%	235,70%
1,00	-	206,30%	129,40%	310,80%	-	204,10%	127,90%	322,80%
1,00	-	245,80%	149,80%	445,10%	-	259,60%	156,80%	504,50%
1,01	-496,80%	375,90%	202,60%	1293,50%	-601,80%	361,50%	201,30%	1041,10%
1,02	-349,60%	695,00%	295,60%	-	-428,60%	570,10%	271,70%	-
1,02	-329,10%	1050,90%	352,40%	-1628,00%	-396,10%	765,60%	322,30%	-

DAX, Call Option, Maturity 17 December

Moneyiness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,99	193,90%	100,40%	-0,80%	13,50%	223,80%	117,00%	7,00%	18,40%
0,99	332,10%	245,50%	12,40%	24,80%	353,70%	224,80%	11,10%	24,90%
1,00	536,80%	493,60%	25,20%	36,20%	710,50%	-	24,70%	43,80%
1,00	-	-	-8,00%	-6,30%	-	-	2,80%	19,70%
1,01	-537,10%	127,20%	-68,50%	-58,90%	-	54,90%	-37,10%	-29,50%
1,02	-41,50%	133,90%	-112,40%	-134,70%	-48,00%	142,00%	-74,50%	-81,20%
1,02	84,40%	140,30%	-144,30%	-188,80%	87,70%	155,40%	-109,30%	-138,70%
1,03	144,80%	143,20%	-153,60%	-240,30%	138,50%	146,30%	-142,40%	-211,00%

Euro Stoxx 600, Call Option, Maturity 15 October

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	200,20%	350,00%	245,40%	128,80%	179,40%	379,70%	263,30%	131,00%
0,99	293,30%	-	621,60%	165,70%	239,60%	-	504,50%	157,10%
1	559,10%	-477,50%	-	295,30%	358,60%	-529,60%	-	183,10%
1,01	-	-156,40%	-189,20%	299,30%	-	-174,60%	-206,80%	222,90%
1,03	-750,60%	-100,70%	-72,80%	371,20%	-671,50%	-110,70%	-95,90%	569,00%
1,04	-219,00%	-79,70%	-48,10%	-232,70%	-329,30%	-120,70%	-116,40%	-751,20%
1,05	-97,40%	-50,50%	-66,90%	-159,30%	-186,30%	-96,60%	-104,10%	-278,00%
1,07	-38,40%	-28,70%	-46,20%	-83,50%	-63,60%	-46,40%	-61,00%	-105,30%

Euro Stoxx 600, Call Option, Maturity 19 November

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,96	42,20%	37,00%	12,70%	27,40%	39,10%	27,10%	7,60%	20,30%
0,97	51,70%	44,80%	15,80%	29,50%	37,60%	38,10%	13,00%	23,30%
0,98	83,20%	63,80%	28,10%	44,70%	32,30%	50,10%	19,60%	26,20%
1,00	-	93,10%	44,90%	53,70%	-	69,00%	31,60%	36,40%
1,01	10,80%	129,10%	52,40%	81,00%	-22,50%	128,40%	60,00%	103,40%
1,02	-50,30%	-	177,10%	-386,50%	-62,00%	-	160,20%	-
1,03	-94,00%	-522,70%	635,60%	-293,00%	-117,10%	-630,90%	715,40%	-355,40%
1,04	-115,90%	-395,90%	-	-277,70%	-116,40%	-363,50%	-	-269,30%

Euro Stoxx 600, Call Option, Maturity 17 December

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,96	49,40%	68,70%	52,50%	59,80%	50,50%	53,50%	38,30%	42,90%
0,97	43,00%	42,00%	34,10%	36,50%	48,40%	38,60%	28,60%	29,80%
0,98	27,20%	-5,50%	0,50%	-3,20%	50,70%	4,80%	9,10%	5,00%
0,99	1,60%	-112,00%	-27,80%	-44,50%	84,30%	-63,60%	-19,20%	-31,40%
1,00	-	-241,00%	-49,70%	-72,90%	-	-236,30%	-46,20%	-69,80%
1,01	-372,10%	197,50%	-64,80%	-104,80%	-533,60%	-	-42,10%	-75,10%
1,03	-215,00%	60,90%	-75,80%	-148,80%	-249,40%	43,00%	-43,20%	-94,40%
1,04	-14,80%	185,90%	-304,40%	-550,00%	-2,10%	155,20%	-251,80%	-543,50%

Euro Stoxx 50, Call Option, Maturity 15 October

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,96	217,70%	-	604,20%	193,80%	178,80%	-	406,70%	171,50%
0,97	335,70%	-268,20%	-	334,60%	228,80%	-279,70%	-	213,10%
0,99	435,00%	-141,50%	-307,80%	408,90%	349,20%	-160,70%	-362,70%	307,30%
1,00	785,10%	-127,00%	-180,30%	637,20%	-	-129,50%	-188,80%	-
1,01	-503,50%	-111,60%	-130,20%	-382,20%	-853,50%	-136,80%	-183,70%	-746,10%
1,02	-166,90%	-57,30%	-77,80%	-169,00%	-310,10%	-102,00%	-134,60%	-294,10%
1,03	-81,70%	-27,90%	-54,30%	-106,60%	-105,70%	-51,10%	-73,20%	-116,90%
1,05	-32,60%	-12,60%	-37,10%	-51,80%	-36,40%	-24,20%	-46,10%	-58,10%

Euro Stoxx 50, Call Option, Maturity 19 November

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	-19,40%	10,00%	-34,10%	-60,60%	-35,10%	-10,30%	-39,90%	-71,10%
0,98	-83,80%	-8,80%	-44,90%	-167,40%	-75,50%	-12,00%	-44,00%	-134,50%
0,99	-184,80%	-22,20%	-43,90%	-	-185,20%	-29,60%	-52,40%	-434,10%
1,00	-582,10%	-46,40%	-48,50%	-	-	-85,20%	-63,10%	555,40%
1,01	339,50%	-	-70,00%	142,10%	434,10%	-298,70%	-52,20%	148,60%
1,03	107,10%	138,80%	31,00%	37,00%	100,40%	34,40%	105,30%	19,10%
1,04	-55,90%	-216,90%	1973,30%	-86,10%	-73,70%	-239,10%	-	-101,90%
1,05	-116,50%	-268,00%	-1052,40%	-143,70%	-134,30%	-290,00%	-1614,80%	-153,00%

Euro Stoxx 50, Call Option, Maturity 17 December

Moneyess	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,96	11,30%	-110,40%	-17,10%	-18,30%	20,00%	-48,40%	-9,50%	-10,30%
0,99	-26,70%	291,50%	-87,30%	-104,30%	37,20%	225,30%	-60,60%	-71,10%
1,00	103,00%	67,60%	-59,80%	-74,70%	172,10%	47,80%	-51,50%	-70,20%
1,01	-	156,30%	-287,80%	-376,40%	-	151,60%	-211,60%	-279,70%
1,02	436,40%	178,50%	-935,10%	-1594,70%	770,60%	194,60%	-577,20%	-860,80%
1,03	426,20%	167,60%	-	-	501,70%	185,40%	-2545,00%	-
1,05	565,80%	173,10%	2513,00%	1620,50%	429,90%	154,90%	1903,00%	1293,00%
1,06	412,50%	140,90%	632,90%	598,90%	397,00%	116,80%	745,00%	668,60%

FTSE 100, Call Option, Maturity 15 October

Moneyiness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,98	285,50%	-77,80%	-45,60%	-267,20%	188,90%	-60,20%	-35,90%	-322,40%
0,99	627,20%	-84,80%	-62,00%	-293,10%	335,60%	-55,90%	-31,50%	-191,20%
1,00	521,40%	-74,50%	-47,60%	-233,70%	611,40%	-53,00%	-27,40%	-143,80%
1,01	-	-60,70%	-33,90%	-132,50%	-	-53,00%	-26,10%	-114,30%
1,01	-750,40%	-57,40%	-29,70%	-107,90%	-	-54,50%	-27,40%	-105,40%
1,02	-320,30%	-57,70%	-28,60%	-87,20%	-563,80%	-64,90%	-38,30%	-109,40%
1,02	-266,60%	-63,40%	-35,60%	-80,50%	-502,50%	-86,40%	-61,80%	-141,60%
1,03	-286,80%	-53,70%	-46,20%	-92,90%	-436,90%	-96,30%	-77,60%	-155,80%

FTSE 100, Call Option, Maturity 19 November

Moneyiness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,94	98,00%	88,30%	44,00%	73,70%	89,40%	82,60%	44,00%	70,80%
0,97	179,70%	165,60%	60,60%	112,60%	171,10%	156,40%	58,40%	109,10%
0,99	1734,40%	893,30%	96,40%	250,80%	842,40%	573,50%	91,00%	211,30%
0,99	-	2475,50%	114,10%	318,70%	-	1997,90%	109,10%	300,90%
1,01	-524,60%	-707,10%	175,20%	1098,80%	-698,90%	-927,80%	175,90%	1085,90%
1,01	-357,90%	-401,60%	158,90%	-4324,90%	-482,30%	-573,00%	187,40%	4284,50%
1,02	-232,20%	-251,40%	134,80%	-726,90%	-293,50%	-329,70%	165,80%	-1658,10%
1,03	-165,10%	-177,70%	146,70%	-395,00%	-192,40%	-211,20%	180,30%	-547,30%

FTSE 100, Call Option, Maturity 17 December

Moneyiness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,96	92,80%	99,00%	74,70%	66,50%	79,60%	88,60%	59,00%	68,50%
0,98	126,80%	134,70%	50,20%	89,50%	136,70%	105,60%	49,60%	68,90%
0,99	231,10%	122,00%	38,80%	75,50%	216,70%	117,10%	39,80%	67,30%
0,99	431,70%	117,30%	28,00%	52,90%	446,20%	135,60%	28,20%	65,80%
1,00	713,40%	136,80%	7,60%	52,60%	-	172,70%	19,90%	67,80%
1,01	-	251,70%	4,30%	74,90%	-	256,00%	24,10%	80,10%
1,01	-559,90%	665,40%	50,10%	115,70%	-764,10%	485,80%	50,60%	114,10%
1,04	-424,10%	-1403,00%	255,70%	352,10%	-466,60%	-1617,00%	281,10%	419,20%

PSI 20, Call Option, Maturity 15 October

<i>Money</i> ness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
1,01	-82,00%	113,00%	53,00%	-	-86,00%	152,00%	60,90%	-425,20%
1,02	-136,80%	84,70%	57,40%	330,50%	-145,70%	125,00%	74,60%	-
1,04	-223,40%	67,10%	72,50%	149,10%	-487,30%	102,70%	89,80%	196,30%
1,06	751,70%	19,20%	33,50%	-24,50%	-	100,90%	103,80%	142,80%
1,08	1728,30%	86,30%	110,70%	132,80%	811,00%	103,90%	121,40%	155,30%
1,10	258,00%	106,70%	129,40%	179,30%	-53,40%	7,70%	57,20%	23,00%
1,14	841,80%	53,80%	42,70%	102,10%	9,00%	-23,70%	-13,80%	-42,10%
1,18	3779,60%	47,10%	14,60%	21,70%	1225,00%	43,60%	-4,30%	50,70%

PSI 20, Call Option, Maturity 19 November

<i>Money</i> ness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	-65,20%	-2,20%	4,90%	-1,00%	-68,10%	-3,20%	1,60%	-0,80%
0,98	-115,20%	-8,20%	-5,10%	-7,30%	-108,20%	-10,20%	-6,00%	-9,80%
0,99	-227,90%	-13,30%	-12,70%	-15,00%	-194,90%	-18,30%	-14,60%	-22,00%
1,00	-	-19,90%	-18,40%	-23,20%	-	-28,00%	-24,20%	-38,80%
1,00	-	-27,30%	-27,60%	-50,20%	-	-38,90%	-34,60%	-61,70%
1,01	147,30%	-43,60%	-41,80%	-94,70%	38,30%	-49,70%	-44,80%	-92,30%
1,02	72,30%	-62,20%	-50,50%	-163,20%	-64,30%	-57,40%	-52,70%	-130,60%
1,03	24,40%	-66,90%	-59,40%	-294,90%	-152,90%	-51,80%	-52,00%	-153,10%

PSI 20, Call Option, Maturity 17 December

<i>Money</i> ness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,98	146,30%	-	78,70%	62,70%	196,00%	-	84,90%	69,00%
0,99	390,50%	-417,30%	100,30%	76,70%	383,10%	-	117,90%	95,50%
1,00	749,40%	-408,50%	139,40%	109,60%	908,10%	-441,30%	181,70%	144,70%
1,00	-	-379,10%	264,10%	207,10%	-	-383,30%	292,30%	223,90%
1,01	-1197,30%	-176,90%	296,50%	207,20%	-	-193,40%	251,80%	182,90%
1,02	-418,30%	-95,40%	327,50%	189,40%	-601,90%	-97,50%	212,30%	142,80%
1,03	-224,00%	-49,50%	301,90%	135,60%	-283,50%	-44,50%	164,20%	98,90%
1,04	-155,60%	-1,70%	-61,20%	2,80%	-148,10%	-14,10%	59,90%	41,40%

SMI, Call Option, Maturity 15 October

Moneyness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,96	174,50%	38,40%	25,40%	39,40%	134,20%	28,90%	9,30%	21,40%
0,96	170,70%	38,10%	8,10%	20,00%	165,50%	37,20%	6,50%	17,60%
0,97	299,40%	60,70%	9,70%	25,60%	269,20%	66,10%	17,70%	29,00%
0,98	-	130,30%	33,20%	37,40%	-	141,30%	58,90%	81,80%
0,99	-345,30%	147,20%	44,80%	85,80%	-792,60%	220,80%	94,50%	139,80%
1,00	-115,40%	18,80%	26,90%	73,00%	-141,70%	196,50%	68,90%	122,10%
1,01	-11,20%	-	52,90%	140,00%	-24,90%	-	58,40%	142,60%
1,01	13,60%	24,80%	130,60%	-	16,00%	16,80%	64,40%	-

SMI, Call Option, Maturity 19 November

Moneyness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,97	90,30%	82,10%	52,00%	58,80%	92,30%	79,10%	51,00%	61,40%
0,98	100,70%	83,10%	52,20%	64,50%	89,60%	83,70%	58,30%	66,80%
0,99	141,20%	90,70%	72,30%	83,40%	123,40%	97,60%	72,40%	81,80%
1,00	-	144,40%	111,50%	132,20%	-	139,30%	102,70%	123,40%
1,00	-586,60%	277,10%	177,00%	246,40%	-582,50%	259,40%	167,90%	238,00%
1,01	-94,70%	398,10%	180,90%	354,40%	-167,20%	372,10%	197,70%	333,20%
1,02	56,50%	392,40%	103,80%	160,10%	5,80%	463,10%	165,80%	353,90%
1,03	80,20%	-	103,70%	0,90%	60,20%	-	141,60%	-

SMI, Call Option, Maturity 17 December

Moneyness	Binomial Tree				Black and Scholes			
	IV	GARCH	EWMA	SD	IV	GARCH	EWMA	SD
0,99	55,90%	95,70%	52,10%	55,10%	43,10%	72,40%	42,60%	44,10%
1,00	-6,20%	99,10%	52,30%	53,60%	6,60%	63,00%	34,70%	33,10%
1,01	-150,50%	41,80%	27,10%	20,10%	-87,50%	33,60%	16,60%	10,30%
1,02	-	-39,30%	-17,90%	-33,10%	-	-33,10%	-17,90%	-31,90%
1,02	324,70%	-198,70%	-82,70%	-112,70%	540,70%	-167,40%	-74,00%	-100,20%
1,03	218,70%	-403,90%	-165,20%	-205,50%	276,80%	-430,50%	-151,30%	-196,40%
1,04	140,90%	-983,30%	-230,20%	-303,10%	191,80%	-1022,50%	-241,10%	-313,20%
1,07	-39,40%	1069,80%	-434,70%	-597,30%	-41,30%	470,90%	-258,10%	-410,20%

Σύγκριση και ανάλυση αποτελεσμάτων

Μέθοδοι αποτίμησης δικαιώματος

Η πρώτη σύγκριση θα γίνει μεταξύ των δύο μεθόδων αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης, δηλαδή το Διωνυμικό υπόδειγμα των Cox, Ross και Rubinstein (1979) και του μαθηματικού μοντέλου των Black και Scholes (1973). Λόγω της προϋπόθεσης σχετικά με την ύπαρξη σημαντικής διαφοράς στην τιμολόγηση του δικαιώματος τα δύο δείγματα δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο μέγεθος. Συγκεκριμένα το δείγμα του Διωνυμικού μοντέλου αποτελείται από 712 παρατηρήσεις ενώ το δείγμα των Black και Scholes από 695 παρατηρήσεις. Επειδή τα κέρδη και οι ζημιές εκφράζονται ως ποσοστό προς την διαφορά τιμολόγησης του δικαιώματος, για να επαληθευτεί η θεωρία, θα πρέπει το αποτέλεσμα της στρατηγικής να είναι 100%, ώστε το μοναδικό κέρδος να είναι η διαφορά της τιμολόγησης του δικαιώματος.

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι καμία από τις δύο μεθόδους δεν δίνει τα αποτελέσματα που περιμέναμε σύμφωνα με την θεωρία. Ωστόσο και οι δύο μέθοδοι αποφέρουν κατά μέσο όρο κέρδος στον επενδυτή. Συγκεκριμένα το Διωνυμικό μοντέλο επιφέρει κέρδος το 26.54% των κερδών που αναμέναμε, ενώ το μοντέλο των Black και Scholes μόλις το 13.72%. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα το Διωνυμικό μοντέλο υπερτερεί του Black και Scholes και η βασική αιτία που συμβαίνει αυτό είναι το σφάλμα διακριτοποίησης. Επειδή η διαδικασία που ακολουθούμε είναι διακριτού χρόνου και η αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου γίνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα που αντιστοιχούν σε μια εβδομάδα, είναι αναμενόμενο ένα διακριτό μοντέλο να δίνει καλύτερα αποτελέσματα από ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου, όπως είναι των Black και Scholes.

Μια σημαντική αιτία που καμία από τις μεθόδους αποτίμησης δεν επαληθευθεί την θεωρία είναι το σφάλμα κατανομής. Σημαντικό μειονέκτημα με το μοντέλο των Black και Scholes είναι ότι στηρίζεται στην υπόθεση ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή το οποίο δεν συμβαίνει στην πράξη. Οι πραγματικές κατανομές είναι ασύμμετρες και μπορούν να οδηγήσουν λανθασμένα σε υποτίμηση ή υπερτίμηση ενός δικαιώματος μέσω του μοντέλου των Black και Scholes. Αντίστοιχο πρόβλημα παρατηρείται σαφώς και στην περίπτωση του Διωνυμικού μοντέλου, καθώς υποθέτει ότι ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να λάβει μόνο δύο από τις πιθανές τιμές σε κάθε χρονικό βήμα. Η παραπάνω υπόθεση δεν είναι ρεαλιστική, αφού στην πραγματικότητα ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα εύλογο εύρος ή ακόμα και να μην μεταβληθεί καθόλου.

Εκτός από το σφάλμα κατανομής ένα ακόμα μειονέκτημα που παρατηρείται και στα δύο μοντέλα που προαναφέραμε είναι ότι υποθέτουν ότι η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου παραμένει σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος το οποίο δεν συμβαίνει στην πράξη.

Option Pricing Method	Observations	Mean	Standard Deviation	Minimum	Maximum
Binomial Tree	712	0,26539	4,3831	-43,25	37,80
Black and Scholes	695	0,13725	3,8935	-25,45	42,85

Πίνακας (4.1): Στατιστική ανάλυση και σύγκριση των μεθόδων αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Μέθοδοι εκτίμησης της μεταβλητότητας

Η δεύτερη σύγκριση γίνεται μεταξύ των τεσσάρων μεθόδων εκτίμησης της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου ανεξάρτητα με την μέθοδο αποτίμησης που ακολουθήθηκε. Παρατηρούμε ότι τα καλύτερα αποτελέσματα αντιστοιχούν στην μέθοδο της τεκμαρτής μεταβλητότητας (Implied Volatility) και ακολουθούν η μέθοδος του εκθετικού σταθμισμένου κινούμενου μέσου όρου (EWMA), η μέθοδος του μέσου όρου των τυπικών αποκλίσεων (Standard Deviation) και τέλος το γενικευμένο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικό αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα (GARCH). Συγκεκριμένα η μέθοδος του «χαμόγελου» της τεκμαρτής μεταβλητότητας επιστρέφει στον επενδυτή κατά μέσο όρο το 67.87% των κερδών που αναμέναμε. Όπως προαναφέρθηκε, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι μια εκτίμηση που αποτυπώνει την «άποψη» της αγοράς σήμερα και «κοιτάζει μπροστά» σε αντίθεση με τις άλλες τρεις μεθόδους που βασίζονται σε ιστορικά στοιχεία και είναι προσανατολισμένες στο παρελθόν επιβεβαιώνοντας το γεγονός ότι η αγορά «γνωρίζει» καλύτερα.

Επίσης, η τεκμαρτή μεταβλητότητα διαφέρει μεταξύ δικαιωμάτων για τον ίδιο υποκείμενο τίτλο ανάλογα με την τιμή εξάσκησης σχηματίζοντας έτσι το αντίστοιχο χαμόγελο μεταβλητότητας για κάθε δείκτη. Ένα σημαντικό ερώτημα που προσπαθούμε να απαντήσουμε μέσα από αυτήν την έρευνα είναι κατά πόσο υπάρχει μία μοναδική τιμή για την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου η οποία θα είναι κοινή για όλα τα δικαιώματα προαίρεσης με κοινή ημερομηνία λήξης σε αυτόν. Αν ισχύει το παραπάνω ερώτημα, τότε υπάρχουν στην αγορά ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας λόγω των αποκλίσεων της τεκμαρτής μεταβλητότητας του εκάστοτε δικαιώματος από την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να επαληθεύουν σε ικανοποιητικό βαθμό το παραπάνω ερώτημα σύμφωνα με την μέθοδο της τεκμαρτής μεταβλητότητας, καθώς ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων είναι θετικός και κοντά στην μονάδα.

Volatility Estimation	Observations	Mean	Standard Deviation	Minimum	Maximum
Implied Volatility	328	0,67872	4,4777	-11,97	37,80
GARCH	350	-0,00551	3,5295	-16,17	24,76
EWMA	367	0,13283	3,4181	-25,45	25,13
Standard Deviation	362	0,04119	4,9667	-43,25	42,85

Πίνακας (4.2): Στατιστική ανάλυση και σύγκριση των μεθόδων εκτίμησης της μεταβλητότητας ανεξάρτητα από την μέθοδο αποτίμησης.

Μέθοδοι εκτίμησης της μεταβλητότητας και αποτίμησης δικαιώματος

Η τρίτη σύγκριση είναι ακόμα πιο συγκεκριμένη και γίνεται μεταξύ των μεθόδων εκτίμησης της μεταβλητότητας λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη την μέθοδο αποτίμησης του δικαιώματος. Προκύπτουν έτσι τα παρακάτω 8 δείγματα που, όπως ήταν αναμενόμενο, συμφωνούν απόλυτα με τα αποτελέσματα των προηγούμενων συγκρίσεων, καθώς το Διωνυμικό μοντέλο όσον αφορά την μέθοδο αποτίμησης και η μέθοδος της τεκμαρτής μεταβλητότητας είχαν τα καλύτερα αποτελέσματα.

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει από αυτήν την σύγκριση είναι ότι η μέθοδος της τεκμαρτής μεταβλητότητας (Implied Volatility) σε συνδυασμό με το Διωνυμικό μοντέλο για την αποτίμηση του δικαιώματος επιστρέφουν κατά μέσο όρο στον επενδυτή το 99.57% των κερδών που αναμέναμε. Το ποσοστό αυτό επαληθεύει σχεδόν απόλυτα την θεωρία, καθώς ο επενδυτής κατά μέσο όρο εκμεταλλεύεται ακριβώς τις ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας και το μοναδικό κέρδος του είναι η διαφορά της τιμολόγησης του δικαιώματος. Αξίζει να σημειωθεί παρόλα αυτά ότι το συγκεκριμένο δείγμα έχει την υψηλότερη τυπική απόκλιση σε σχέση με τα υπόλοιπα που σημαίνει ότι για κάποιον που ακολουθεί αυτήν την διαδικασία για ένα μεμονωμένο δικαίωμα πιθανότατα το αποτέλεσμα να αποκλίνει αρκετά από τον μέσο όρο.

Option Pricing Method	Volatility Estimation	Observations	Mean	Standard Deviation	Minimum	Maximum
Binomial Tree	Implied Volatility	168	0,99571	5,11491	-11,97	37,80
Binomial Tree	GARCH	176	0,08898	3,71165	-15,35	24,76
Binomial Tree	EWMA	184	0,25625	3,46835	-12,17	25,13
Binomial Tree	Standard Deviaton	184	-0,22353	4,98037	-43,25	16,21
Black and Scholes	Implied Volatility	160	0,34587	3,67932	-8,54	16,75
Black and Scholes	GARCH	174	-0,10109	3,34318	-16,17	19,98
Black and Scholes	EWMA	183	0,008743	3,37186	-25,45	19,03
Black and Scholes	Standard Deviation	178	0,314831	4,95159	-19,21	42,85

Πίνακας (4.3): Στατιστική ανάλυση και σύγκριση των μεθόδων εκτίμησης της μεταβλητότητας ανάλογα με την μέθοδο αποτίμησης του δικαιώματος.

Χρηματικό ισοδύναμο δικαιώματος προαίρεσης

Η τελευταία σύγκριση διαφέρει από τις προηγούμενες, καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη οι μέθοδοι εκτίμησης της μεταβλητότητας και αποτίμησης του δικαιώματος. Το κριτήριο σύγκρισης αυτήν την φορά είναι το χρηματικό ισοδύναμο του εκάστοτε δικαιώματος χωρίζοντας έτσι το συνολικό δείγμα σε τρεις υποκατηγορίες. Είναι φανερό ότι τα δικαιώματα αγοράς με θετικό χρηματικό ισοδύναμο αποδίδουν τα καλύτερα αποτελέσματα επιστρέφοντας κατά μέσο όρο το 73.74% των κερδών που αναμέναμε.

Συγκεκριμένα παρατηρείται αρνητική συσχέτιση μεταξύ των κερδών από την στρατηγική που ακολουθούμε και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης. Μια πιθανή αιτία που συμβαίνει αυτό είναι η υπερτιμολόγηση των δικαιωμάτων που διαπραγματεύονται πάνω από το χρηματικό τους ισοδύναμο λόγω του φόβου των επενδυτών για πιθανή κατάρρευση του χρηματοοικονομικού συστήματος (crashophobia). Ο πρώτος που είχε προτείνει αυτόν τον λόγο για την ποικιλία της μεταβλητότητας ήταν ο Mark Rubinstein. Μέχρι το κραχ του 1987 δεν υπήρχε κανένα σημάδι ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα σχηματίζει το γνωστό «χαμόγελο» ανάλογα με την τιμή εξάσκησης. Από το 1987 και μετά παρατηρείται αυτή η ασυμμετρία, καθώς η τεκμαρτή μεταβλητότητα ενός δικαιώματος με χαμηλή τιμή εξάσκησης (ένα δικαίωμα πώλησης με αρνητικό χρηματικό ισοδύναμο ή ένα δικαίωμα αγοράς με θετικό χρηματικό ισοδύναμο) είναι σημαντικά υψηλότερη από αυτήν ενός δικαιώματος με υψηλή τιμή εξάσκησης (ένα δικαίωμα πώλησης με θετικό χρηματικό ισοδύναμο ή ένα δικαίωμα αγοράς με αρνητικό χρηματικό ισοδύναμο). Για αυτόν τον λόγο το «χαμόγελο» που προαναφέρθηκε παρουσιάζει μια ελαφρά αρνητική ασυμμετρία, καθώς παρατηρείται μια «παχιά» ουρά προς τα αριστερά. Επομένως λόγω της θετικής συσχέτισης της μεταβλητότητας με την τιμή του δικαιώματος η υπερτιμολόγηση των δικαιωμάτων στην αγορά δημιουργεί ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας οι οποίες επιβεβαιώνονται συνηθέστερα στην πράξη. Αξίζει να σημειωθεί ότι το δείγμα των δικαιωμάτων με θετικό χρηματικό ισοδύναμο (In the money) εκτός από την υψηλότερη απόδοση έχει και την χαμηλότερη τυπική απόκλιση.

Moneyness	Observations	Mean	Standard Deviation	Minimum	Maximum
In The Money	496	0,73742	2,58924	-15,35	24,76
At The Money	204	0,45529	3,18556	-13,69	10,59
Out of The Money	707	-0,24652	5,12034	-43,25	42,85

Πίνακας (4.4): Στατιστική ανάλυση και σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάλογα με το χρηματικό ισοδύναμο του δικαιώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

Η σωστή τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης αποτελεί ένα από τα βασικά εργαλεία και για αυτό τον λόγο πολλές έρευνες έχουν βασιστεί σε αυτό. Οι μέθοδοι αποτίμησης που χρησιμοποιήσαμε για την υλοποίηση της στρατηγικής αντιστάθμισης κινδύνου και την τιμολόγηση των δικαιωμάτων είναι το Διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein (1979) και το μαθηματικό μοντέλο των Black και Scholes (1973).

Η εμπειρική μελέτη που ακολούθησε αποτίμησε ένα σημαντικό πλήθος δικαιωμάτων αγοράς σε βασικούς Χρηματιστηριακούς Δείκτες. Είναι γνωστό ότι η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου έχει μια μοναδική τιμή. Αντίστοιχα το κάθε δικαίωμα προαίρεσης αποτελεί ένα ξεχωριστό χρηματοοικονομικό προϊόν το οποίο τιμολογείται σύμφωνα με τις δυνάμεις της προσφοράς και της ζήτησης έχοντας με την σειρά του την δική του μεταβλητότητα για κάθε τιμή εξάσκησης παρόλο που ο υποκείμενος τίτλος παραμένει ο ίδιος. Επομένως το βασικό ερώτημα αυτής της έρευνας είναι κατά πόσο η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου αποτιμάει «δίκαια» τα δικαιώματα σε αυτόν. Η παραπάνω υπόθεση έχει ως συνέπεια την εμφάνιση ευκαιριών εξισορροπητικής κερδοσκοπίας τις οποίες προσπαθήσαμε να εκμεταλλευτούμε αντισταθμίζοντας την θέση μας με την στρατηγική δημιουργίας χαρτοφυλακίου ουδέτερου Δέλτα.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι κατά μέσο όρο επαληθεύονται σε μικρό ποσοστό οι ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Επομένως, δεν ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό η υπόθεση της μοναδικής μεταβλητότητας. Επειδή η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι σε διακριτό χρόνο, όπως ήταν αναμενόμενο, το Διωνυμικό μοντέλο έχει καλύτερα αποτελέσματα από το μοντέλο συνεχούς χρόνου των Black και Scholes. Όσον αφορά τις μεθόδους εκτίμησης της μεταβλητότητας τα καλύτερα αποτελέσματα ήταν σύμφωνα με την μέθοδο της τεκμαρτής μεταβλητότητας η οποία είναι η μοναδική μέθοδος προσανατολισμένη στο μέλλον επιβεβαιώνοντας ότι «η αγορά γνωρίζει καλύτερα». Τέλος παρατηρήθηκε αρνητική συσχέτιση μεταξύ των κερδών από την στρατηγική που ακολουθήθηκε και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης.

Σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε από την εμπειρική μελέτη είναι ότι η μέθοδος της τεκμαρτής μεταβλητότητας (Implied Volatility) σε συνδυασμό με το Διωνυμικό μοντέλο για την αποτίμηση του δικαιώματος και την στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου επαλήθευε ακριβώς τις ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Επομένως υπό αυτές συνθήκες φαίνεται να ισχύει η υπόθεση περί μοναδικής μεταβλητότητας των δικαιωμάτων για κοινή ημερομηνία λήξης. Ωστόσο η στρατηγική αντιστάθμισης μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος απαιτεί δυναμική αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου γεγονός που δημιουργεί υψηλά κόστη συναλλαγών, τα οποία δεν έχουμε λάβει υπόψη, εξαλείφοντας έτσι ένα σημαντικό μέρος των κερδών. Επομένως δεν σημαίνει ότι η αγορά είναι αναποτελεσματική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα

- [1] Black, F. & Scholes, M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol 81, pp. 637–654.
- [2] Black, F. (1976) "Studies of Stock Price Volatility Changes", *Proceedings of the Business and Economics Section of the American Statistical Association*, pp. 177–181.
- [3] Christie, A. A. (1982) "The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects", *Journal of Financial Economics*, Elsevier, Vol.10(4), pp. 407-432.
- [4] Cox, J., S. A. Ross, & M. Rubinstein (1979) "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Elsevier Vol. 7(3), pp. 229-263.
- [5] Crépey, S. (2004) "Delta-hedging Vega risk?", *Quantitative Finance*, Taylor & Francis Journals, Vol.4(5), pp. 559-579.
- [6] Derman, E. & I. Kani (1994) "The Volatility Smile and Its Implied Tree", *RISK* 7(2), pp.139-145, pp. 32-39.
- [7] Ederington, L. H., & W. Guan. (2002) "Why Are Those Options Smiling" *Journal of Derivatives*, Vol 10, pp. 9-34.
- [8] Rendleman, R., & B. Bartter (1979) "Two state Option Pricing", *Journal of Finance*, Vol 34, pp. 1093-1110.
- [9] Vähämaa, S. (2004) "Delta Hedging with the Smile", *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 18(3), pp. 241-255.

Βιβλία

Ξενόγλωσσα

- [1] *Bingham, H. N., Kiesel R. (2004) Risk-Neutral Valuation, Pricing and Hedging of Financial Derivatives, 2nd edition, Springer.*

- [2] *Bodie, Z., Kane A., Marcus A. (2018) Investments, 11th edition, McGraw-Hill Education.*

- [3] *Hull, C. J., Basu S. (2018) Options, Futures and Other Derivatives 10th edition, Pearson Education.*

- [4] *Jawwad, A. F. (2015) An Option Greek Primer-Building Intuition with Delta Hedging and Monte Carlo Simulation Using Excel, Palgrave Macmillan.*

- [5] *Passarelli, D. (2012) Trading Option Greeks, How Time, Volatility, and Other Pricing Factors Drive Profits, 2nd edition, Bloomberg Press.*

- [6] *Shapiro, A. C. & Moles P. (2014) International Financial Management, John Wiley & Sons.*

- [8] *Shreve, E. S. (2004) Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer.*

Ελληνικά

- [9] *Δημέλη, Σ. (2013) Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονολογικών Σειρών, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακες εκτιμήσεων μεταβλητότητας

Ακολουθούν οι πίνακες των εβδομαδιαίων εκτιμήσεων της μεταβλητότητας για κάθε χρηματιστηριακό δείκτη. Στην μέθοδο της τεκμαρτής μεταβλητότητας αντιστοιχούν τρεις στήλες καθώς η εκτίμηση μας διαφέρει για κάθε ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων.

Date	CAC 40, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	2,26%	-	-	2,78%	2,62%	2,07%
30/7	2,43%	-	-	2,31%	2,35%	2,06%
6/8	2,56%	-	-	1,99%	2,06%	2,02%
13/8	2,51%	-	-	1,72%	1,79%	1,97%
20/8	2,39%	-	-	2,85%	2,16%	2,02%
27/8	2,25%	2,11%	-	1,97%	1,90%	2,01%
3/9	2,24%	2,10%	-	1,86%	1,74%	2,00%
10/9	2,39%	2,22%	-	1,87%	1,70%	1,99%
17/9	2,54%	2,29%	-	1,89%	1,61%	1,99%
24/9	2,75%	2,36%	2,37%	2,50%	2,05%	2,05%
1/10	2,73%	2,35%	2,39%	2,45%	2,23%	2,09%
8/10	2,37%	2,14%	2,23%	2,71%	2,39%	2,11%
15/10	-	2,08%	2,17%	2,28%	2,22%	2,11%
22/10	-	2,05%	2,19%	1,79%	1,97%	2,02%
29/10	-	2,29%	2,28%	1,77%	1,82%	1,99%
5/11	-	2,75%	2,47%	1,71%	1,68%	1,95%
12/11	-	3,31%	2,61%	1,68%	1,83%	1,85%
19/11	-	-	3,15%	1,66%	1,80%	1,77%
26/11	-	-	3,99%	1,68%	1,79%	1,78%
3/12	-	-	4,04%	2,31%	1,99%	2,13%
10/12	-	-	3,25%	2,25%	2,05%	2,23%

Date	AEX, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	1,80%	-	-	2,20%	2,13%	2,07%
30/7	1,93%	-	-	2,35%	2,28%	2,11%
6/8	1,91%	-	-	2,06%	2,04%	2,02%
13/8	1,92%	-	-	1,91%	1,87%	1,94%
20/8	2,16%	-	-	1,89%	1,76%	1,90%
27/8	2,15%	1,83%	-	1,87%	1,72%	1,88%
3/9	2,18%	1,85%	-	1,81%	1,64%	1,85%
10/9	2,40%	1,95%	-	1,87%	1,72%	1,83%
17/9	2,73%	2,22%	-	1,80%	1,60%	1,80%
24/9	2,65%	2,12%	2,13%	2,05%	1,78%	1,84%
1/10	2,57%	2,16%	2,15%	2,04%	1,84%	1,90%
8/10	2,58%	2,09%	2,06%	2,66%	2,03%	1,98%
15/10	-	1,94%	2,08%	2,30%	2,04%	2,00%
22/10	-	1,98%	2,20%	1,89%	1,98%	1,94%
29/10	-	2,05%	2,21%	1,71%	1,92%	1,87%
5/11	-	2,15%	2,26%	1,67%	1,88%	1,81%
12/11	-	2,58%	2,33%	1,69%	1,84%	1,78%
19/11	-	-	2,61%	1,69%	1,82%	1,75%
26/11	-	-	3,21%	1,77%	1,82%	1,78%
3/12	-	-	3,00%	2,63%	1,97%	1,99%
10/12	-	-	2,31%	2,87%	2,10%	2,14%

Date	DAX, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	2,31%	-	-	2,59%	2,16%	2,25%
30/7	2,38%	-	-	2,28%	2,06%	2,21%
6/8	2,28%	-	-	2,08%	1,96%	2,10%
13/8	2,31%	-	-	1,97%	1,83%	2,06%
20/8	2,36%	-	-	2,06%	1,76%	2,02%
27/8	2,18%	2,19%	-	1,84%	1,62%	2,00%
3/9	2,17%	2,17%	-	1,66%	1,43%	1,97%
10/9	2,25%	2,24%	-	2,00%	1,57%	1,95%
17/9	2,36%	2,31%	-	1,79%	1,45%	1,93%
24/9	2,38%	2,26%	2,49%	2,55%	1,87%	2,00%
1/10	2,33%	2,18%	2,42%	2,39%	1,97%	2,03%
8/10	2,12%	1,92%	2,26%	2,86%	2,16%	2,06%
15/10	-	1,70%	2,11%	2,31%	2,08%	2,06%
22/10	-	1,61%	2,04%	1,74%	1,95%	1,98%
29/10	-	1,63%	2,02%	1,67%	1,86%	1,91%
5/11	-	1,70%	2,16%	1,69%	1,80%	1,87%
12/11	-	1,92%	2,26%	1,63%	1,75%	1,81%
19/11	-	-	2,67%	1,52%	1,51%	1,77%
26/11	-	-	3,06%	1,63%	1,40%	1,78%
3/12	-	-	2,76%	2,81%	2,19%	2,10%
10/12	-	-	2,41%	2,46%	2,33%	2,19%

Date	Euro Stoxx 600, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	1,98%	-	-	2,25%	2,18%	1,85%
30/7	2,11%	-	-	1,93%	1,95%	1,84%
6/8	2,04%	-	-	1,76%	1,74%	1,78%
13/8	2,17%	-	-	1,60%	1,58%	1,73%
20/8	2,28%	-	-	1,90%	1,60%	1,72%
27/8	2,17%	1,88%	-	1,64%	1,48%	1,70%
3/9	2,21%	1,87%	-	1,55%	1,36%	1,67%
10/9	2,19%	1,89%	-	1,67%	1,42%	1,67%
17/9	2,20%	1,81%	-	1,60%	1,33%	1,65%
24/9	2,32%	1,88%	2,09%	2,04%	1,61%	1,70%
1/10	2,22%	1,88%	2,00%	2,06%	1,75%	1,76%
8/10	2,24%	1,66%	2,00%	2,27%	1,88%	1,78%
15/10	-	1,54%	1,90%	1,93%	1,83%	1,77%
22/10	-	1,54%	1,92%	1,54%	1,71%	1,69%
29/10	-	1,83%	2,05%	1,48%	1,64%	1,66%
5/11	-	1,70%	2,06%	1,46%	1,42%	1,61%
12/11	-	2,48%	2,31%	1,48%	1,61%	1,57%
19/11	-	-	2,67%	1,42%	1,59%	1,52%
26/11	-	-	3,15%	1,53%	1,59%	1,54%
3/12	-	-	3,06%	2,22%	1,74%	1,80%
10/12	-	-	2,70%	2,10%	1,80%	1,88%

Date	Euro Stoxx 50, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	2,21%	-	-	2,76%	2,53%	2,22%
30/7	2,29%	-	-	2,32%	2,34%	2,20%
6/8	2,24%	-	-	2,02%	2,09%	2,13%
13/8	2,18%	-	-	1,83%	1,87%	2,07%
20/8	2,21%	-	-	2,20%	1,84%	2,05%
27/8	2,04%	1,95%	-	1,82%	1,66%	2,03%
3/9	2,04%	1,94%	-	1,73%	1,49%	2,01%
10/9	2,15%	2,05%	-	1,96%	1,59%	2,00%
17/9	2,13%	2,04%	-	1,93%	1,53%	1,99%
24/9	2,52%	2,16%	2,24%	2,62%	2,02%	2,06%
1/10	2,33%	2,04%	2,14%	2,62%	2,27%	2,12%
8/10	2,41%	1,96%	2,12%	3,16%	2,62%	2,17%
15/10	-	1,82%	2,02%	2,53%	2,44%	2,18%
22/10	-	1,82%	2,03%	1,84%	2,19%	2,09%
29/10	-	1,92%	2,06%	1,68%	1,99%	2,04%
5/11	-	1,87%	2,18%	1,65%	1,79%	1,99%
12/11	-	2,66%	2,36%	1,68%	1,92%	1,91%
19/11	-	-	2,71%	1,56%	1,91%	1,87%
26/11	-	-	3,26%	1,71%	1,90%	1,89%
3/12	-	-	3,14%	3,26%	2,12%	2,27%
10/12	-	-	2,80%	2,89%	2,22%	2,40%

Date	FTSE 100, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	1,72%	-	-	2,34%	2,43%	1,99%
30/7	1,78%	-	-	2,24%	2,00%	1,98%
6/8	1,69%	-	-	2,08%	1,71%	1,94%
13/8	1,80%	-	-	2,05%	1,50%	1,88%
20/8	2,03%	-	-	2,22%	1,69%	1,85%
27/8	1,92%	2,03%	-	2,00%	1,42%	1,82%
3/9	2,01%	2,11%	-	1,93%	1,26%	1,80%
10/9	1,90%	2,03%	-	2,05%	1,40%	1,80%
17/9	1,82%	1,98%	-	1,88%	1,22%	1,77%
24/9	2,13%	2,12%	2,28%	2,06%	1,65%	1,80%
1/10	2,02%	2,13%	2,33%	1,93%	1,56%	1,79%
8/10	1,85%	2,00%	2,20%	2,15%	1,79%	1,78%
15/10	-	1,85%	2,08%	1,96%	1,62%	1,78%
22/10	-	1,85%	2,09%	1,77%	1,36%	1,67%
29/10	-	2,07%	2,12%	1,74%	1,20%	1,65%
5/11	-	1,90%	2,08%	1,73%	1,11%	1,62%
12/11	-	1,96%	2,22%	1,78%	1,16%	1,55%
19/11	-	-	2,31%	1,71%	1,08%	1,51%
26/11	-	-	3,03%	1,66%	0,97%	1,51%
3/12	-	-	3,09%	1,87%	2,25%	1,75%
10/12	-	-	3,16%	1,82%	2,21%	1,78%

Date	PSI 20, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	2,02%	-	-	2,50%	2,66%	2,29%
30/7	1,94%	-	-	2,33%	2,41%	2,28%
6/8	2,02%	-	-	2,44%	2,31%	2,28%
13/8	2,10%	-	-	2,20%	2,03%	2,23%
20/8	2,25%	-	-	2,11%	1,86%	2,17%
27/8	2,21%	2,51%	-	1,85%	1,63%	2,14%
3/9	2,45%	2,80%	-	2,13%	1,72%	2,12%
10/9	2,16%	2,47%	-	2,03%	1,73%	2,11%
17/9	2,26%	2,55%	-	2,12%	1,80%	2,09%
24/9	2,44%	2,76%	2,57%	2,84%	2,27%	2,17%
1/10	2,58%	2,87%	2,64%	2,32%	2,12%	2,16%
8/10	2,85%	2,93%	2,68%	2,35%	2,11%	2,19%
15/10	-	3,24%	2,92%	1,97%	1,93%	2,14%
22/10	-	3,44%	3,05%	2,24%	1,98%	2,08%
29/10	-	3,40%	2,75%	2,03%	1,91%	2,01%
5/11	-	3,18%	2,62%	2,29%	2,01%	2,05%
12/11	-	3,90%	2,76%	1,88%	1,96%	2,01%
19/11	-	-	2,24%	2,64%	2,08%	2,09%
26/11	-	-	2,21%	2,01%	2,07%	2,09%
3/12	-	-	3,19%	2,18%	2,13%	2,15%
10/12	-	-	3,39%	2,09%	2,14%	2,18%

Date	SMI, Volatility Estimation Method					
	IV (October)	IV (November)	IV (December)	GARCH	EWMA	SD
23/7	1,90%	-	-	1,63%	1,45%	1,57%
30/7	1,96%	-	-	1,50%	1,44%	1,55%
6/8	1,83%	-	-	1,33%	1,30%	1,47%
13/8	1,97%	-	-	1,44%	1,29%	1,46%
20/8	2,24%	-	-	1,78%	1,32%	1,46%
27/8	2,09%	1,71%	-	1,44%	1,26%	1,43%
3/9	2,04%	1,66%	-	1,23%	1,15%	1,39%
10/9	1,97%	1,63%	-	1,75%	1,29%	1,40%
17/9	2,02%	1,66%	-	1,50%	1,27%	1,41%
24/9	1,89%	1,57%	1,99%	1,69%	1,38%	1,44%
1/10	1,70%	1,54%	1,86%	1,99%	1,66%	1,54%
8/10	1,53%	1,37%	1,74%	2,26%	1,70%	1,55%
15/10	-	1,30%	1,65%	1,51%	1,58%	1,54%
22/10	-	1,23%	1,72%	1,27%	1,48%	1,48%
29/10	-	1,30%	1,75%	1,37%	1,42%	1,45%
5/11	-	1,43%	1,93%	1,33%	1,45%	1,42%
12/11	-	1,04%	1,94%	1,21%	1,43%	1,41%
19/11	-	-	2,66%	1,26%	1,42%	1,39%
26/11	-	-	3,00%	1,35%	1,43%	1,40%
3/12	-	-	2,80%	1,56%	1,47%	1,48%
10/12	-	-	2,21%	1,47%	1,49%	1,51%