# Χωρικός ανταγωνισμός και ισορροπία της αγοράς εκπαίδευσης


Επιβλέπων Καθηγητής:

Μιχελακάκης Νικόλαος

Μεταπτυχιακός φοιτητής:

Μάμαλης Θωμάς


*Ιανουάριος 2022*

# Spatial Competition and Educational Market Balance

Supervisor:

Michelakakis Nikolaos

Postgraduate Student:

Mamalis Thomas

*January 2022*

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει μία πρακτική εφαρμογή του μοντέλου των Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J., 2016 "A comment on 'Vertical mergers and downstream spatial competition with different product varieties. *Economics Letters* 143, pp. 84-86" επί της αγοράς εκπαίδευσης. Περαιτέρω, με την παρούσα εργασία επιχειρείται να εξεταστεί η ισορροπία του αδιάφορου καταναλωτή καθώς και των δύο επιχειρήσεων, οι οποίες προσφέρουν το ίδιο αγαθό W, πριν και αφότου συγχωνευτεί η μία εκ των δύο επιχειρήσεων με τον μοναδικό προμηθευτή του βασικού αγαθού w, απαραίτητου για τη παραγωγή του προσφερόμενου W. Η διαφορά από το άρθρο των Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J., 2016, είναι το γεγονός ότι το κόστος για τη μεταφορά του αγαθού προς τον καταναλωτή εξαρτάται είναι σε τετραγωνική σχέση με την απόσταση, και όχι γραμμική. Το συμπέρασμα είναι ότι ενώ πριν τη κάθετη συγχώνευση η αγορά είναι μοιρασμένη μεταξύ των δύο επιχειρήσεων, μετά τη συγχώνευση η συγχωνευόμενη επιχείρηση κερδίζει μερίδιο της αγοράς πιέζοντας τη δεύτερη μέσω της αύξησης του κόστους του βασικού αγαθού w2 (για το οποίο πλέον η συγχωνευόμενη δεν επιβαρύνεται).

**Λέξεις – κλειδιά:** συγχώνευση, κάθετη συγχώνευση, χωρικός ανταγωνισμός, μεταφορικό κόστος, ισορροπία στην αγορά εκπαίδευσης, ιδιωτικοποίηση, μικτό ολιγοπώλιο

# ABSTRACT

This paper presents a practical application of the model of Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J., 2016 “A comment on 'Vertical mergers and downstream spatial competition with different product varieties. Economics Letters 143, pp. 84-86 ” on the education market. Furthermore, this paper attempts to examine the balance between the indifferent consumer and the two companies, which offer the same good W, before and after one of the two companies merges with the sole supplier of the basic good w, necessary for the production of the offered W. The difference from the article of Eleftheriou, K. & Michelacakis, NJ, 2016, is the fact that the transportation cost depends on the squared distance, and not to the distance with a linear relation. The conclusion is that while before the vertical merger the market was divided between the two companies, after the merger the merging company gains market share by pushing the latter through the increase in the cost of the basic good w2 (for which the merged company is no longer charged).

**Keywords:** merger, vertical merger, spatial competition, transport cost, education market balance, privatization, mixed oligopoly

## Περιεχόμενα

## 1. Πρόλογος

Τα τελευταία χρόνια παρατηρούμε μια έντονη κινητικότητα στις συγχωνεύσεις των επιχειρήσεων. Η χρηματοπιστωτική κρίση που ξεκίνησε το 2008 έπληξε τις οικονομίες πολλών χωρών με αποτέλεσμα την αλλαγή των οικονομικών συνθηκών μέσα στις οποίες δρουν οι επιχειρήσεις. Οι διοικήσεις των επιχειρήσεων, προκειμένου να ανταπεξέλθουν στις νέες αυτές συνθήκες που δημιουργήθηκαν έπρεπε να πάρουν γενναίες αποφάσεις όπως μείωση προσωπικού, αλλαγή στρατηγικών και συγχωνεύσεις.

Στον τομέα των συγχωνεύσεων μπορούμε να διακρίνουμε τρεις τύπους με βάση την συσχέτιση του κλάδου δραστηριότητας, τις οριζόντιες, τις κάθετες και τις μη συσχετισμένες.

Με τον όρο οριζόντιες συγχωνεύσεις εννοούμε την συγχώνευση κατά την οποία ενοποιούνται επιχειρήσεις του ίδιου κλάδου και που ανταγωνίζονται στο ίδιο στάδιο παραγωγικής διαδικασίας χωρίς να μεταβάλλεται το αντικείμενο παραγωγής τους. Οι συγχωνεύσεις και εξαγορές αυτού του τύπου συμβάλλουν σημαντικά στην αύξηση της κυριαρχίας στις αγορές με τη δημιουργία εμποδίων στην είσοδο νέων ανταγωνιστών μέσω της απόκτησης μεγάλων μεριδίων στην αγορά και των εκτεταμένων δικτύων διανομής. (Γεωργακόπουλος, 2004)

Κάθετη συγχώνευση είναι η πράξη κατά την οποία ενοποιούνται επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στον ίδιο κλάδο αλλά σε διαφορετικό επίπεδο παραγωγής, για παράδειγμα μία επιχείρηση παραγωγής χάλυβα με μία αυτοκινητοβιομηχανία. Με αυτόν τον τρόπο, οι επιχειρήσεις επιδιώκουν την μείωση του κόστους παραγωγής, την ανταλλαγή τεχνογνωσίας και γενικότερα την βελτίωση της θέσης τους στην αγορά. Η ενοποίηση αυτή έχει ως αποτέλεσμα την αποδέσμευση των επιχειρήσεων από προμηθευτές ή μεταφορείς. (Γεωργακόπουλος, 2004)

Τέλος οι μη συσχετισμένες συγχωνεύσεις αφορούν επιχειρήσεις με διαφορετικά παραγόμενα προϊόντα.

Οι στρατηγικές αυτές βρίσκουν εφαρμογή και στον χώρο της ιδιωτικής εκπαίδευσης, όπου ο ανταγωνισμός πλέον έχει καταστήσει μονόδρομο τις συνεργασίες ή και τις συγχωνεύσεις. Για παράδειγμα, η ελεύθερη αγορά της ιδιωτικής εκπαίδευσης κατακλύζεται από ελεύθερους επαγγελματίες / καθηγητές, οι οποίοι είναι άγνωστο τι ποιότητας και είδους εργασία παρέχουν. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι η ένταση του ανταγωνισμού με αντίστοιχη εξαιρετική μείωση των τιμών της ώρας μαθήματος. Εναλλακτική δίοδος για τους καθηγητές είναι να συνάψουν συμφωνίες με φροντιστήρια / κέντρα παροχής υπηρεσιών μαθημάτων, ώστε αφενός να εξασφαλίζεται για τον πελάτη η ποιότητα των μαθημάτων και αφετέρου να εξασφαλίζεται μία ικανοποιητική αμοιβή για τον καθηγητή και ικανό πλήθος μαθητών. Ειδικά για μαθήματα εξεζητημένα και ίσως και υψηλότερου βαθμού δυσκολίας, είναι η προτιμότερη λύση η «κάθετη συγχώνευση» ενός καθηγητή με ένα κέντρο που θα τον προτείνει σε μαθητές.

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τα αποτελέσματα της κάθετης συγχώνευσης δύο επιχειρήσεων (ενός καθηγητή και ενός κέντρου μαθημάτων), μιας μονοπωλιακής επιχείρησης (του κέντρου μαθημάτων) που λειτουργεί ως προμηθευτής (πελατών) σε δύο άλλες επιχειρήσεις (καθηγητές), με μία από τις δύο επιχειρήσεις (ενός καθηγητή) που λειτουργούν ως αγοραστές του προϊόντος που παράγει η μονοπωλιακή επιχείρηση.

Σκοπός θα είναι να προσδιορίσουμε το μέγιστο κέρδος των δύο καθηγητών σε συνθήκες ανταγωνισμού προ της συνεργασίας του ενός καθηγητή με το κέντρο μαθημάτων και μετά αυτής, καθώς και αν θα αλλάξει η θέση ισορροπίας αυτών όπως και του μαθητή.

## 2. Θεωρία παιγνίων και δυοπώλιο

Η θεωρία παιγνίων εισήχθη στην οικονομική θεωρία το 1994 με την δημοσίευση του έργου των John von Neumann και Oscar Morgenstern με τίτλο «Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά». Σημαντικό σταθμό στην εξέλιξη της θεωρίας παιγνίων αποτελεί το έργο του John Nash, ο οποίος το 1994 τιμήθηκε με το Νόμπελ Οικονομικών για την συμβολή του στην θεωρία αυτή.

Βασική έννοια στη θεωρία παιγνίων είναι η ισορροπία κατά Nash, σύμφωνα με την οποία οι στρατηγικές που επιλέγουν δύο παίκτες αποτελούν λύση κατά Nash εάν η στρατηγική που επιλέγει ο κάθε παίκτης είναι η καλύτερη δυνατή για τον ίδιο, δεδομένης της στρατηγικής που επιλέγει ο άλλος. Εάν οι δύο στρατηγικές έχουν το συγκριμένο χαρακτηριστικό δεν υπάρχει κίνητρο για κανέναν από τους δύο να αλλάξει στρατηγική. Επομένως θεωρούμε ότι έχουμε την επίτευξη ισορροπίας. (Ψειρίδου & Λιανός, 2015)

Στην οικονομική θεωρία ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παίγνια είναι αυτό του ολιγοπωλίου. Στο ολιγοπώλιο κάθε επιχείρηση πριν προβεί σε οποιαδήποτε ενέργεια πρέπει να λάβει υπόψη και τον τρόπο αντίδρασης των άλλων επιχειρήσεων του κλάδου, σε αντίθεση με μία μονοπωλιακή επιχείρηση η οποία λαμβάνει υπόψη μόνο την αντίδραση των πελατών, όπως αυτή εκφράζεται μέσω της ελαστικότητας ζήτησης. (Ψειρίδου & Λιανός, 2015),

Μια ειδική περίπτωση ολιγοπωλίου είναι το δυοπώλιο, δηλαδή ενός κλάδου όπου υπάρχουν μόνο δύο επιχειρήσεις. Ο Γάλλος μαθηματικός Augustin Cournot, το 1838, μελέτησε πρώτος την περίπτωση ενός δυοπωλίου θεωρώντας ότι οι δύο επιχειρήσεις ανταγωνίζονται πάνω στις παραγόμενες ποσότητες. Από τότε και έπειτα έχουν πραγματοποιηθεί πάρα πολλές έρευνες πάνω στην μελέτη του δυοπωλίου και στην συμπεριφορά των επιχειρήσεων στο σημείο ισορροπίας.

## 3. Ιστορικό του χωρικού ανταγωνισμού

Αρχικά ο Hotelling το 1929 (Hotelling, 1929) μελέτησε το μοντέλο της χωρικής διάταξης θεωρώντας ένα γραμμικό μοντέλο στο οποίο οι καταναλωτές τοποθετήθηκαν ομοιόμορφα στο διάστημα [0,1] και η τιμή χρέωσης ήταν ανεξάρτητη από την θέση του καταναλωτή.

Μερικά χρόνια αργότερα, το 1937, οι Lerner και Singer εισήγαγαν το μοντέλο της χωρικής διάκρισης τιμών, στο οποίο η τιμή του προϊόντος εξαρτάται από την θέση του καταναλωτή και από το κόστος μεταφοράς. (Lerner & Singer, 1937)

Η Barnali Gupta στη εργασία της με τίτλο «Competitive spatial price discrimination with strictly convex production costs» (Gupta, 1994) μελέτησε την ισορροπία μεταξύ δύο ανταγωνιστικών εταιρειών με κυρτό κόστος παραγωγής. Το αποτέλεσμα της εργασίας ήταν να αποδείξει ότι όταν το οριακό κόστος αυξάνεται το κοινωνικό κόστος ελαχιστοποιείται όταν οι εταιρείες τοποθετούνται στα τεταρτημόρια σε διαφορετικές θέσεις από αυτές που θα είχαν εάν το οριακό κόστος παρέμενε σταθερό.

Οι Takatoshi Tabuchi και Jacques-Francois Thisse στην εργασία τους με τίτλο «Asymmetric equilibria in spatial competition» μελέτησαν την περίπτωση κατά την οποία οι καταναλωτές κατανέμονται σύμφωνα με την τριγωνική κατανομή και όχι την ομοιόμορφη. Το συμπέρασμα που κατέληξαν ήταν ότι δεν υπάρχει μία συμμετρική ισορροπία αλλά ότι υπάρχει ισορροπία σε μη συμμετρικά σημεία. (Takatoshi & Thisse, 1995)

Στη συνέχεια ο Braid στην εργασία του με τίτλο «Spatial price discrimination and the locations of firms with different product selections or product varieties» μελέτησε την περίπτωση κατά την οποία στην αγορά δραστηριοποιούνται δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ που παράγουν 3 αγαθά. Η $R_1$ παράγει τα αγαθά U και W ενώ η $R_2$ τα V και W με σταθερό κόστος παραγωγής και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το σημείο ισορροπίας παραμένει το κοινωνικά βέλτιστο. (Braid , 2008)

Στη εργασία τους με τίτλο **Cross-border merger, vertical structure, and spatial competition** οι Beladi , Chakrabarti και Marjit (Beladi, et al., 2008) προσπαθώντας να υπολογίσουν την ισορροπία Nash για την επιλογή της βέλτιστης θέσης δύο επιχειρήσεων που παράγουν και προσφέρουν διαφοροποιημένα αγαθά πριν την συγχώνευση τους με μία μονοπωλιακή επιχείρηση που τους προσφέρει ένα ενδιάμεσο αγαθό, απαραίτητο για την δικιά τους παραγωγή, κατέληξαν σε ένα λανθασμένο συμπέρασμα το οποίο οι Κωνσταντίνος Ελευθερίου και Νικόλαος Μιχελακάκης επισημαίνουν και διορθώνουν στο άρθρο τους με τίτλο «A comment on Vertical mergers and downstream spatial competitions with different product Varieties». (Eleftheriou & Michelacakis, 2016)

Με βάση το άρθρο των Ελευθερίου και Μιχελακάκη θα μελετήσουμε τον χωρικό ανταγωνισμό και την ισορροπία της αγοράς μεταξύ δύο επιχειρήσεων με διαφοροποιημένα αγαθά, τόσο σε εφαρμογή στο χώρο της ιδιωτικής εκπαίδευσης όσο και σε θεωρητικό επίπεδο.

## 4. Ισορροπία στο χώρο της ιδιωτικής εκπαίδευσης

Αναφορικά με τον χωρικό ανταγωνισμό και την ισορροπία της αγοράς μεταξύ δύο επιχειρήσεων με διαφοροποιημένα αγαθά, τόσο σε εφαρμογή στο χώρο της ιδιωτικής εκπαίδευσης όσο και σε θεωρητικό επίπεδο αναπτύχθηκε και μελετήθηκε το μοντέλο των (Eleftheriou & Michelacakis, 2016).

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα του ως άνω μοντέλου στον χώρο της ιδιωτικής εκπαίδευσης. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι στην αγορά υπάρχει ένα κέντρο δια βίου μάθησης M και δύο καθηγητές $R_1$ και $R_2$. Το κέντρο δια βίου μάθησης παρέχει μαθητές στους δύο καθηγητές έναντι κάποιας προμήθειας, επομένως αποτελεί την μονοπωλιακή επιχείρηση.

Ο καθηγητής $R_1$ διδάσκει δύο μαθήματα, το μάθημα της μικροοικονομίας (U) και το μάθημα της οικονομετρίας (W). Ενώ ο καθηγητής $R_2$ προσφέρει το μάθημα της μακροοικονομίας (V) και το μάθημα της οικονομετρίας (W).

Η προμήθεια που απαιτεί η μονοπωλιακή επιχείρηση M από τον καθηγητή $R_1$ αποτελείται από μια χρέωση $w_1$ ανά μαθητή και από ένα σταθερό κόστος $F_1$. Ομοίως για τον $R_2$ το κόστος διαμορφώνεται σε $w_2$ ανά μαθητή και σταθερό κόστος $F_2$.

Πριν από οποιαδήποτε συγχώνευση θεωρούμε ότι η μονοπωλιακή επιχείρηση M χρεώνει και τους δύο καθηγητές ένα ίδιο ποσό w ανά μαθητή και ένα ίδιο σταθερό ποσό F. Το w θα πρέπει να είναι μικρότερο από την μέγιστη τιμή, k, που είναι διατεθειμένοι οι μαθητές να πληρώσουν για να παρακολουθήσουν καθένα από τα μαθήματα.

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι οι μαθητές κατανέμονται ομοιόμορφα σε μία περιοχή που αντιπροσωπεύεται από το διάστημα [0 , 1]. Επίσης υποθέτουμε ότι το ποσοστό των μαθητών που επιθυμούν να παρακολουθήσουν μόνο το μάθημα U είναι c και είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που επιλέγουν μόνο το μάθημα V. Ενώ ένα ποσοστό b επιθυμεί να παρακολουθήσει το μάθημα W. Επομένως αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα ποσοστό m των μαθητών που δεν επιλέγουν κανένα από τα τρία παραπάνω μαθήματα θα ισχύει :

$$b + 2c + m = 1$$

Αν συμβολίσουμε με k την μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένοι οι μαθητές να πληρώσουν για να παρακολουθήσουν καθένα από τα μαθήματα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τόσο ο $R_1$ όσο και ο $R_2$ θα χρεώνουν τα μαθήματα U και V σε τιμή χαμηλότερη από την τιμή k, αφού για τα δύο αυτά μαθήματα οι καθηγητές λειτουργούν σε συνθήκες μονοπωλίου. Σε αντίθεση με το μάθημα W, το οποίο προσφέρεται και από τους δύο και επικρατούν οι συνθήκες ανταγωνισμού Bertrand, οπότε η τιμή του W για τον καθηγητή που βρίσκεται πλησιέστερα στον μαθητή θα είναι ίση με την τιμή που έχει καθορίσει ο καθηγητής που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τον μαθητή.

Οι δύο καθηγητές $R_1$ και $R_2$ καλούνται να επιλέξουν την θέση τους στο διάστημα [0,1], έτσι ώστε η κάθε ένας να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Συμβολίζουμε με x την θέση του $R_1$ και y την θέση του $R_2$ με $x<y$.

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι κάθε ένας από τους καθηγητές $R_1$ , $R_2$ για να παραδώσει το μάθημα πρέπει να μεταφερθεί στον χώρο του μαθητή διανύοντας μία απόσταση d, τότε θα επιβαρυνθεί με μεταφορικό κόστος td, όπου t>0. Τέλος θεωρούμε z την θέση του μαθητή με $z \in [0,1]$.

Όπως αποδεικνύεται στο κεφάλαιο 5.2, η συνάρτηση του κέρδους για τον καθηγητή $R_1$ είναι:

$$\Pi_1(x,y) = c(k-w) - \frac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2] + bt(y-x)x + \frac{bt}{4}(y-x)^2 - F$$

Ενώ για τον καθηγητή $R_2$ έχουμε συνάρτηση κέρδους :

$$\Pi_2(x,y) = c(k-w) - \frac{ct}{2}[y^2 + (1-y)^2] + bt(y-x)(1-y)$$
$$\frac{+bt}{4}(y-x)^2 - F$$

Επομένως, κατ' εφαρμογή της Πρότασης 1 του Κεφαλαίου 5.2, πριν από την κάθετη συγχώνευση του κέντρου δια βίου μάθησης M με κάποιον από τους δύο καθηγητές $R_1$ ή $R_2$ το σημείο ισορροπίας Nash είναι :

$(x,y) = \left(\frac{1}{2} - R, \frac{1}{2} + R\right)$,όπου $R = \frac{b}{4(b+c)}$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο καθηγητής $R_1$ συγχωνεύεται με το κέντρο δια βίου μάθησης M και συμβολίζουμε τώρα με $R_1$ την νέα μορφή που εμφανίστηκε μετά την συγχώνευση αυτή. Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5.3, η συνάρτηση κέρδους για τον καθηγητή $R_1$ είναι:

$$\Pi_1(x,y) = \left(c(k) - \frac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2]\right) + bx[t(y-x) + w_2]$$
$$+ \frac{b}{4t}[t(y-x) + w_2]^2$$

Η συνάρτηση του κέρδους για τον καθηγητή $R_2$ θα πάρει την παρακάτω μορφή:

$$\Pi_2(x,y) = c(k-w_2) - \frac{ct}{2}[y^2 + (1-y)^2] + \frac{b}{4t}[t(y-x) - w_2]^2$$
$$+ b(1-y)[t(y-x) - w_2] - F_2$$

Επομένως, κατ' εφαρμογή της Πρότασης 2 του Κεφαλαίου 5.3, μετά την κάθετη συγχώνευση του καθηγητή $R_1$ με την μονοπωλιακή επιχείρηση M το σημείο ισορροπίας Nash για τους $R_1$ και $R_2$ είναι:

$(x,y) = \left(\frac{1}{2} - R + \frac{bw_2}{2t(b+2c)}, \frac{1}{2} + R + \frac{bw_2}{2t(b+2c)}\right)$,όπου $R = \frac{b}{4(b+c)}$

## 5. Θεωρητικό Μοντέλο

Στη συνέχεια παραθέτουμε ανάλυση της θεωρητικής εκδοχής του ως άνω εφαρμοζόμενου μοντέλου, όπως αυτό αναπτύχθηκε από τους (Eleftheriou & Michelacakis, 2016), προς διευκόλυνση κατανόησης των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 4 ανωτέρω.

Θεωρούμε δύο επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ που παράγουν και διαθέτουν τα προϊόντα τους σε μία περιοχή.

Η επιχείρηση $R_1$ παράγει δύο αγαθά U και W ενώ η $R_2$ παράγει τα αγαθά V και W. Για την παραγωγή των αγαθών αυτών προμηθεύονται από μια μονοπωλιακή επιχείρηση Μ ένα ενδιάμεσο αγαθό. Η μετατροπή του ενδιάμεσου αγαθού σε τελικό θεωρούμε ότι και για τις δύο επιχειρήσεις γίνεται με μηδενικό κόστος, ενώ ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι μηδενικό είναι επίσης και το μεταφορικό κόστος του ενδιάμεσου αγαθού από την επιχείρηση Μ προς τις $R_1$ και $R_2$.

Το κόστος του ενδιάμεσου αγαθού για την επιχείρηση $R_1$ αποτελείται από μια χρέωση $w_1$ ανά μονάδα και από ένα σταθερό κόστος $F_1$. Ομοίως για την $R_2$ το κόστος διαμορφώνεται σε $w_2$ ανά μονάδα και σταθερό κόστος $F_2$.

Πριν από οποιαδήποτε συγχώνευση θεωρούμε ότι η μονοπωλιακή επιχείρηση Μ χρεώνει και τις δύο εταιρείες ένα ίδιο ποσό w ανά μονάδα ενδιάμεσου προϊόντος και ένα ίδιο σταθερό ποσό F. Το w θα πρέπει να είναι μικρότερο από την μέγιστη τιμή, k, που είναι διατεθειμένοι οι καταναλωτές να πληρώσουν για να προμηθευτούν καθένα από τα αγαθά.

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι οι αγοραστές κατανέμονται ομοιόμορφα σε μία περιοχή που αντιπροσωπεύεται από το διάστημα [0 , 1]. Επίσης υποθέτουμε ότι το ποσοστό των αγοραστών που προμηθεύονται μόνο το αγαθό U είναι c και είναι ίσο με το ποσοστό των αγοραστών που επιλέγουν μόνο το αγαθό V. Ενώ το τρίτο αγαθό W αγοράζεται από ένα ποσοστό b. Επομένως αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα ποσοστό m των αγοραστών που δεν επιλέγουν κανένα από τα τρία παραπάνω αγαθά θα ισχύει :

$$b + 2c + m = 1$$

Θεωρούμε επίσης ότι:

$$F = F_1 = F_2 = 0$$

Αν συμβολίσουμε με k την μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένοι οι καταναλωτές να πληρώσουν για να προμηθευτούν καθένα από τα αγαθά οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τόσο η $R_1$ όσο και η $R_2$ θα χρεώνουν τα αγαθά U και V σε τιμή χαμηλότερη από την τιμή k, αφού για τα δύο αυτά αγαθά οι επιχειρήσεις λειτουργούν σε συνθήκες μονοπωλίου. Εν αντιθέσει, για το αγαθό W, το οποίο προσφέρεται και από τις δύο επιχειρήσεις, επικρατούν οι συνθήκες ανταγωνισμού Bertrand, οπότε η τιμή του W για την επιχείρηση που βρίσκεται πλησιέστερα στον καταναλωτή θα είναι ίση με την τιμή που έχει καθορίσει η επιχείρηση που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τον καταναλωτή.

Οι δύο επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ καλούνται να επιλέξουν την θέση τους στο διάστημα [0 ,1], έτσι ώστε η καθεμία να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Συμβολίζουμε με x την θέση της $R_1$ και y την θέση της $R_2$ με $x<y$.

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι μια από τις $R_1$ , $R_2$ θελήσει να μεταφέρει μία μονάδα του παραγόμενου αγαθού της σε μία απόσταση d, τότε θα επιβαρυνθεί με μεταφορικό κόστος td, όπου $t>0$. Τέλος θεωρούμε z την θέση του καταναλωτή με $z \in [0,1]$.

### 5.1. Υπόδειγμα Bertrand

Ο Γάλλος μαθηματικός και οικονομολόγος Joseph Bertrand, το 1883, ασκώντας κριτική στο υπόδειγμα Cournot, θεώρησε ότι οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται σε επίπεδο τιμών και όχι σε επίπεδο ποσοτήτων. Επομένως οι ποσότητες καθορίζονται από την αγορά και οι ανταγωνιστικές επιχειρήσεις επιλέγουν την βέλτιστη απόκριση σε επίπεδο τιμών.

Σύμφωνα με το υπόδειγμα Bertrand αν υπάρχουν δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ που παράγουν ένα ομοιογενές προϊόν και το προσφέρουν σε τιμές $\rho_1$ και $\rho_2$ αντίστοιχα, τότε αν η τιμή $\rho_1$ είναι μικρότερη από την $\rho_2$ όλοι οι καταναλωτές θα αγοράζουν από την $R_1$ εγκαταλείποντας την $R_2$. Αντίστροφα αν η τιμή $\rho_2$ είναι μικρότερη από την $\rho_1$ όλοι οι καταναλωτές θα αγοράζουν από την $R_2$ εγκαταλείποντας την $R_1$. Αν οι δύο τιμές είναι ίσες τότε η καθεμία από τις επιχειρήσεις θα πουλάει ποσότητα ίση με το μισό της συνολικής ζήτησης. Επομένως, κάθε μία από τις επιχειρήσεις έχει συμφέρον αν πουλάει σε τιμή μικρότερη από τον ανταγωνιστή της γιατί με τον τρόπο αυτό θα κατακτά το σύνολο της αγοράς και έτσι θα μεγιστοποιήσει τα έσοδα της.

Αν θεωρήσουμε όμως ότι η επιχείρηση $R_1$ μειώσει την τιμή $\rho_1$ κατά ποσό ε διαμορφώνοντας έτσι την τιμή στην οποία προσφέρει το προϊόν της σε $\rho_1$-ε τότε και η $R_2$ αντιδρώντας θα μειώσει και αυτή την τιμή της κατά ποσό δ ελάχιστα μεγαλύτερο από το ε έτσι ώστε η τιμή $\rho_2$–δ να είναι ελάχιστα μικρότερη από την τιμή $\rho_1$-ε. Η διαδικασία αυτή θα επαναλαμβάνεται μέχρι το σημείο στο οποίο οι τιμές θα γίνουν ίσες με το οριακό κόστος της επιχείρησης με το μεγαλύτερο οριακό κόστος. Έτσι οδηγούμαστε στην ισορροπία Bertrand – Nash όπου ισχύει $\rho_1=\rho_2=MC$ ($MC=\max\{MC_1,MC_2\}$ ), γνωστή και ως παράδοξο του Bertrand.

Στην περίπτωση που αναλύεται στην παρούσα εργασία, όπως είδαμε και στην μοντελοποίηση που προηγήθηκε το κόστος του αγαθού W που προσφέρεται και από τις δύο επιχειρήσεις καθορίζεται από δύο παράγοντες, από το κόστος w του ενδιάμεσου αγαθού που προσφέρει ο μονοπωλιακός προμηθευτής Μ αλλά και από το μεταφορικό κόστος td.

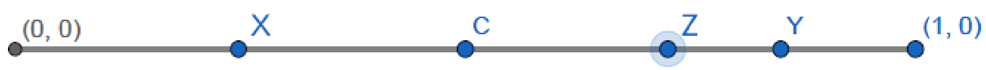
**ΣΧΗΜΑ 1**


Αν θεωρήσουμε ότι ο αγοραστής βρίσκεται στην θέση Z όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα , αρά βρίσκεται πλησιέστερα στη θέση x της επιχείρησης $R_1$, τότε το μεγαλύτερο κόστος εμφανίζεται για την $R_2$ και είναι ίσο με :

$$w + (y - z)t$$

Επομένως η τιμή που προκύπτει σύμφωνα με την ισορροπία Bertrand – Nash θα είναι $w + (y - z)t$.

**ΣΧΗΜΑ 2**




Στην συνέχεια αλλάζουμε την θέση Z του καταναλωτή και τον τοποθετούμε πλησιέστερα στην θέση Y της επιχείρησης $R_2$ (Σχήμα 2). Στην περίπτωση αυτή το μεγαλύτερο κόστος εμφανίζεται για την $R_1$ και είναι ίσο με :

$$w + (z - x)t$$

Επομένως η τιμή που προκύπτει σύμφωνα με την ισορροπία Bertrand – Nash θα είναι $w + (z - x)t$.

### 5.2. Πριν την συγχώνευση

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε την έννοια του αδιάφορου καταναλωτή, αν s η θέση του καταναλωτή αυτού στο διάστημα [0,1] τότε θα ισχύει η ισότητα:

$$t(y - s) = t(s - x)$$

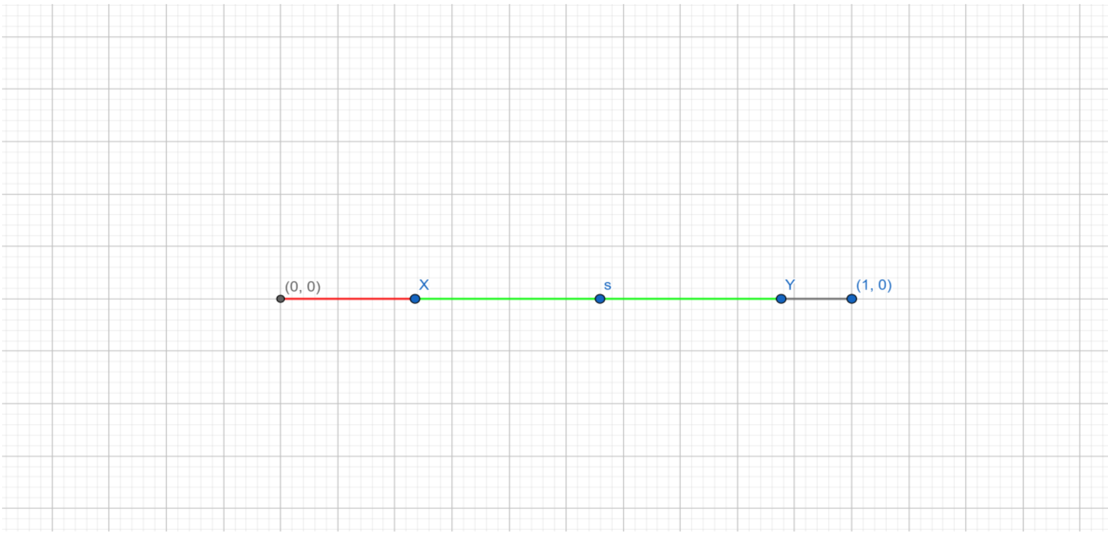
Δηλαδή το μεταφορικό κόστος για τον αδιάφορο καταναλωτή θα είναι το ίδιο είτε το προϊόν το προμηθευτεί από την εταιρεία $R_1$ είτε από την $R_2$.

Από την παραπάνω σχέση, με επίλυση ως προς s, προκύπτει:

$$s = \frac{x + y}{2}$$

Επομένως η θέση του αδιάφορου καταναλωτή βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν οι θέσεις x και y των δύο επιχειρήσεων όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

**ΣΧΗΜΑ 3**




Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το κέρδος της επιχείρησης $R_1$.

Η $R_1$ πουλάει το αγαθό U στην τιμή k και για την πρώτη ύλη πληρώνει ανά μονάδα ποσό w, οπότε το κέρδος ανά μονάδα, είναι:

$$k - w$$

Επειδή προτιμάται από το τμήμα c των καταναλωτών, το κέρδος ανά μονάδα από την πώληση είναι:

$$c(k - w)$$

Επειδή αγαθό U το προσφέρει μόνο η $R_1$, η θέση z του καταναλωτή μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του [0,1], οπότε το συνολικό κέρδος της $R_1$ από την πώληση του U είναι:

$$\int_0^x ct(x - z)dz + \int_x^1 ct(z - x)dz = ct\left(\int_0^x (x - z)dz + \int_x^1 (z - x)dz\right) =$$

$$= ct\left(x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - x + x^2\right) = \frac{ct}{2}[x^2 + (1 - x)^2]$$

Αν η θέση του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση x της $R_1$ (Σχήμα 4) τότε η $R_1$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με την τιμή που έχει καθορίσει η $R_2$ οπότε το συνολικό κέρδος του W για την $R_1$ θα είναι:

$\int_0^x \big((y-z)t + w - (x-z)t - w\big)dt = \int_0^x t(y-x)dt$, εφόσον το z βρίσκεται στο [0,x] . Αν το z βρίσκεται μεταξύ του x και της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή τότε το συνολικό κέρδος γίνεται :

$$\int_x^s t[(y-z)-(z-x)]dz = \int_x^{\frac{x+y}{2}} t(x+y-2z)dz$$

**ΣΧΗΜΑ 4**


Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για τη $R_1$ από την πώληση του W θα είναι :

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}} bt(x+y-2z)dz + \int_0^x bt(y-x)dt$$

Οπότε πριν την συγχώνευση η συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης $R_1$ είναι :

$$\Pi_1(x,y) = \left(c(k-w) - \frac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2]\right)$$
$$+ (\int_0^x b[t(y-x)]dz + \int_x^{\frac{x+y}{2}} b[t(x+y-2z)]dz\ ) \quad (1)$$

Αν στην συνάρτηση $\Pi_1$ υπολογίσουμε τα δύο ολοκληρώματα που περιέχονται, έχουμε :

$$I_1 = \int_0^x b[t(y-x)]dz = bt(y-x)x$$

Επίσης,

$$I_2 = \int_x^{\frac{x+y}{2}} b[t(x+y-2z)]dz = bt(x+y)\left(\frac{x+y}{2}-x\right) - bt\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - x^2\right]$$
$$= bt(x+y)\left(\frac{y-x}{2}\right) - bt\left(\frac{x+y}{2}-x\right)\left(\frac{x+y}{2}+x\right)$$
$$= bt(x+y)\left(\frac{y-x}{2}\right) - bt\left(\frac{y-x}{2}\right)\left(\frac{y+3x}{2}\right)$$
$$= bt\left(\frac{y-x}{2}\right)\left(x+y-\frac{y+3x}{2}\right) = bt\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \frac{bt}{4}(y-x)^2$$

Επομένως με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση του κέρδους για την επιχείρηση $R_1$ , γίνεται :

$$\Pi_1(x,y) = c(k-w) - \tfrac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2] + bt(y-x)x + \tfrac{bt}{4}(y-x)^2 \quad (2)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το κέρδος της επιχείρησης $R_2$.

Η $R_2$ πουλάει το αγαθό V στην τιμή k και για την πρώτη ύλη πληρώνει ανά μονάδα ποσό w, οπότε το κέρδος ανά μονάδα είναι:

$$k - w$$

Επειδή προτιμάται από το τμήμα c των καταναλωτών, το συνολικό κέρδος από την πώληση είναι:

$$c(k-w)$$

Επειδή αγαθό V το προσφέρει μόνο η $R_2$, η θέση z του καταναλωτή μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του [0,1], οπότε το συνολικό κόστος είναι:

$$\int_0^y ct(y-z)dz + \int_y^1 ct(z-y)dz = ct\left(\int_0^y (y-z)dz + \int_y^1 (z-y)dz\right) =$$

$$= ct\left(y^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} - y + y^2\right) = \frac{ct}{2}[y^2 + (1-y)^2]$$

Αν η θέση του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση y της $R_2$ , τότε η $R_2$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με, ή απειροελάχιστα μικρότερη από, την τιμή που έχει καθορίσει η $R_1$ οπότε το συνολικό κέρδος του W για την $R_2$ θα είναι:

$\int_y^1 \big((z-x)t + w - (z-y)t - w\big)dz = \int_y^1 t(y-x)dz$, εφόσον το z βρίσκεται στο [y,1] . Αν το z βρίσκεται μεταξύ του y και της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή τότε το συνολικό κέρδος γίνεται:

$$\int_{s}^{y} t[(z-x)-(y-z)]dz = \int_{\frac{x+y}{2}}^{y} t(2z-x-y)dz$$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για τη $R_2$ από την πώληση του θα είναι:

$$\int_{y}^{1} b[t(y-x)]dz + \int_{\frac{x+y}{2}}^{y} b[t(2z-x-y)]dz$$

Για την επιχείρηση $R_2$, το κέρδος δίνεται από την συνάρτηση $\Pi_2$ , όπου :

$$\Pi_2(x,y) = \left(c(k-w) - \frac{ct}{2}[y^2 + (1-y)^2]\right) + \left(\int_{y}^{1} b[t(y-x)]dz + \int_{\frac{x+y}{2}}^{y} b[t(2z-x-y)]dz\right) \quad (3)$$

Υπολογίζοντας τα δύο ολοκληρώματα που περιέχονται στην συνάρτηση $\Pi_2$, δηλαδή:

$$I_3 = \int_{y}^{1} b[t(y-x)]dz = bt(y-x)(1-y)$$

Επίσης,

$$I_4 = \int_{\frac{x+y}{2}}^{y} b[t(2z-x-y)]dz = bt\left[y^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right] - bt(x+y)\left(y - \frac{x+y}{2}\right)$$
$$= bt\left(y - \frac{x+y}{2}\right)\left(y + \frac{x+y}{2}\right) - bt(x+y)\frac{y-x}{2} = \frac{bt}{4}(y-x)^2$$

Οπότε με αντικατάσταση στην σχέση 2, προκύπτει ότι η συνάρτηση του κέρδους για την επιχείρηση $R_2$ είναι:

$$\Pi_2(x,y) = c(k-w) - \frac{ct}{2}[y^2 + (1-y)^2] + bt(y-x)(1-y) + \frac{bt}{4}(y-x)^2 \quad (4)$$

**Πρόταση 1.** Πριν την κάθετη συγχώνευση των δύο επιχειρήσεων το σημείο ισορροπίας Nash είναι :

$(x,y) = \left(\frac{1}{2} - R, \frac{1}{2} + R\right)$,όπου $R = \frac{b}{4(b+c)}$

**Απόδειξη**

Για να βρούμε τις τιμές που μεγιστοποιούν τα κέρδη των δύο επιχειρήσεων, αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = -\frac{ct}{2}[2x - 2(1-x)] + bt(y-x) - btx - \frac{bt}{2}(y-x) =$$

$$= -\frac{ct}{2}(4x-2) + \frac{bt}{2}y - \frac{3bt}{2}x = -ct(2x-1) + \frac{bt}{2}y - \frac{3bt}{2}x$$

Ακόμα ,

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = -\frac{ct}{2}[2y - 2(1-y)] - bt(y-x) + bt(1-y) + \frac{bt}{2}(y-x) =$$

$$= -\frac{ct}{2}(4y-2) - \frac{bt}{2}(y-x) + bt(1-y)$$

Με χρήση των συνθηκών πρώτης τάξης οι τιμές των x, y οι πιθανές τιμές που μεγιστοποιούν τα κέρδη των δύο επιχειρήσεων θα είναι οι λύσεις του παρακάτω συστήματος,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Όμως ,

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow -ct(2x-1) + \frac{bt}{2}y - \frac{3bt}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{3bt}{2}x + 2ctx = ct + \frac{bt}{2}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2c + by}{3b + 4c} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{ct}{2}(4y-2) - \frac{bt}{2}(y-x) + bt(1-y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2cy + c - \frac{b}{2}y + \frac{b}{2}x + b - by = 0 \Rightarrow -4cy - 3by = -2b - 2c - bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2b + 2c + bx}{3b + 4c} \qquad (6)$$

Αν στην σχέση (6) αντικαταστήσουμε την τιμή του x που υπολογίσαμε στην σχέση (5), έχουμε :

$$y = \frac{2b + 2c + b\dfrac{2c+by}{3b+4c}}{3b+4c} \Rightarrow y(3b+4c)^2 = 2(b+c)(3b+4c) + b(2c+by) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y[(3b+4c)^2 - b^2] = 2(b+c)(3b+4c) + 2bc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(b+c)(3b+4c) + 2bc}{(2b+4c)(4b+4c)} = \frac{6b^2 + 8c^2 + 16bc}{8(b+2c)(b+c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3b^2 + 4c^2 + 8bc}{4(b+2c)(b+c)} = \frac{3(b+2c)\left(b + \frac{2c}{3}\right)}{4(b+2c)(b+c)} \Rightarrow y = \frac{3b+2c}{4(b+c)}$$

Άρα η θέση πιθανού ακροτάτου για την συνάρτηση $\Pi_2$ είναι :

$$y_0 = \frac{3b+2c}{4(b+c)}$$

Στη σχέση (5) αντικαθιστούμε το y με το $y_0$ , οπότε προκύπτει :

$$x_0 = \frac{2c + by_0}{3b+4c} = \frac{2c + b\frac{3b+2c}{4(b+c)}}{3b+4c} = \frac{10bc + 8c^2 + 3b^2}{4(b+c)(3b+4c)} = \frac{b+2c}{4(b+c)}$$

Άρα η θέση πιθανού ακροτάτου για την συνάρτηση $\Pi_1$ είναι :

$$x_0 = \frac{b+2c}{4(b+c)}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των συναρτήσεων $\Pi_1$ και $\Pi_2$ , έτσι ώστε να εξετάσουμε αν τα δύο κρίσιμα σημεία που βρήκαμε είναι τοπικά μέγιστα .

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^2} = -2ct - \frac{3bt}{2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial y^2} = -2ct - \frac{3bt}{2} < 0$$

Οπότε και τα δύο σημεία αποτελούν θέσεις μεγίστου.

Θεωρούμε ,

$$R = \frac{b}{4(b+c)}$$

Οπότε ,

$$x_0 = \frac{2b+2c-b}{4(b+c)} = \frac{1}{2} - \frac{b}{4(b+c)} = \frac{1}{2} - R$$

$$y_0 = \frac{3b+2c}{4(b+c)} = \frac{2b+2c+b}{4(b+c)} = \frac{1}{2} + \frac{b}{4(b+c)} = \frac{1}{2} + R$$

Παρατηρήσεις :

- Από τις σχέσεις (5) και (6) που αποτελούν τις συναρτήσεις καλύτερης απόκρισης των επιχειρήσεων $R_1$ και $R_2$ αντίστοιχα προκύπτει ότι και οι δύο συναρτήσεις έχουν θετική κλίση, επομένως αν η επιχείρηση $R_1$ αυξήσει την τιμή του x, που επιλέγει τότε και η $R_2$ θα αυξήσει την τιμή του y.

- Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής w, δηλαδή το ανά μονάδα κόστος του ενδιάμεσου αγαθού.
- Οι δύο θέσεις $x_0$ και $y_0$ είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο του διαστήματος [0,1].
- Η απόσταση μεταξύ των $R_1$ και $R_2$ είναι : $2R = 2\frac{b}{4(b+c)} = \frac{b}{2(b+c)}$

### 5.3. Μετά την συγχώνευση

Υποθέτουμε ότι η επιχείρηση $R_1$ συγχωνεύεται με την μονοπωλιακή επιχείρηση M (προμηθευτής).

Η νέα επιχείρηση $R_1$ που προκύπτει μετά από την συγχώνευση, πουλάει το αγαθό U στην τιμή k ενώ για την πρώτη ύλη δεν υπάρχει κόστος. Οπότε το κέρδος ανά μονάδα είναι: $k$. Επειδή προτιμάται από το τμήμα c των καταναλωτών, το συνολικό κέρδος είναι: $ck$.

Επειδή αγαθό U το προσφέρει μόνο η $R_1$, η θέση z του καταναλωτή μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του [0,1], οπότε το συνολικό κόστος είναι:

$$\int_0^x ct(x-z)dz + \int_x^1 ct(z-x)dz = ct\left(\int_0^x (x-z)dz + \int_x^1 (z-x)dz\right) =$$

$$= ct\left(x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - x + x^2\right) = \frac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2]$$

Για τον υπολογισμό του κέρδους που προκύπτει για την νέα επιχείρηση $R_1$ από την πώληση του αγαθού U, θα πρέπει να βρούμε την νέα θέση s του αδιάφορου καταναλωτή. Επειδή μόνο η $R_2$ επιβαρύνεται με κόστος $w_2$, πρώτης ύλης η θέση του αδιάφορου καταναλωτή δίνεται από την επίλυση ως προς s της ισότητας:

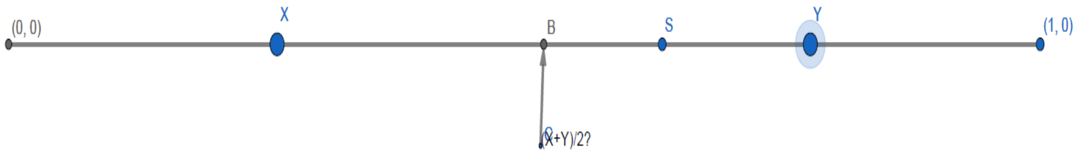
$$t(s-x) = t(y-s) + w_2$$

Οπότε προκύπτει,

$$s = \frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t}$$

Η νέα θέση του αδιάφορου καταναλωτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

**ΣΧΗΜΑ 5**




Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5 θεωρούμε ότι η θέση s του αδιάφορου καταναλωτή βρίσκεται στα αριστερά της θέσης y της επιχείρησης $R_2$, δηλαδή ότι ισχύει η ανισωτική σχέση:

$$\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}<y$$

Εάν είχαμε $\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}\geq y$ τότε :

$$\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}\geq y\Rightarrow w_2\geq (y-x)t$$

Όμως το ανά μονάδα κέρδος για την $R_2$ από την πώληση του W είναι:

$$(y-x)t-w_2\leq 0$$

Οπότε η επιχείρηση $R_2$ θα σταματούσε την παραγωγή του W με αποτέλεσμα να έχουμε δύο μονοπωλιακές επιχειρήσεις για τις οποίες οι βέλτιστες θέσεις θα ήταν στο κέντρο του διαστήματος [0,1] (Hotelling, 1929)

Αν η θέση του z καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση x της $R_1$ τότε η $R_1$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με, η απειροελάχιστα μικρότερη από, την τιμή που έχει καθορίσει η $R_2$ οπότε το συνολικό κέρδος του W για την $R_1$ θα είναι:

$\int_0^x\big((y-z)t+w_2-(x-z)t\big)dt=\int_0^x[t(y-x)+w_2]dt$, εφόσον το z βρίσκεται στο [0,x]. Αν το z βρίσκεται μεταξύ του x και της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή τότε το συνολικό κέρδος γίνεται :

$$\int_x^s[t(y-z)+w_2-t(z-x)]dz=\int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}}[t(x+y-2z)+w_2]dz$$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για τη $R_1$ από την πώληση του θα είναι:

$$\int_0^x b[t(y-x)+w_2]dz+\int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}}b[t(x+y-2z)+w_2]dz$$

Επομένως η συνάρτηση του κέρδους για την $R_1$, μετά την συγχώνευση γίνεται:

$$\Pi_1(x,y) = \left(c(k) - \frac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2]\right) + \left( \int_0^x b[t(y-x) + w_2]dz + \int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}} b[t(x+y-2z) + w_2]dz \right) \quad (7)$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην σχέση (7).

$$J_1 = \int_0^x b[t(y-x) + w_2]dz = bt(y-x)x + bw_2 x = bx[t(y-x) + w_2]$$

$$J_2 = \int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}} b[t(x+y-2z) + w_2]dz = bt(x+y)\left(\frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t} - x\right)$$

$$-bt\left[\left(\frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t}\right)^2 - x^2\right] + bw_2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t} - x\right) =$$

$$= bt(x+y)\left(\frac{y-x}{2} + \frac{w_2}{2t}\right) - bt\left(\frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t} - x\right)\left(\frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t} + x\right) + bw_2\left(\frac{y-x}{2} + \frac{w_2}{2t}\right) =$$

$$= b\left(\frac{y-x}{2} + \frac{w_2}{2t}\right)\left[tx + ty - t\left(\frac{3x+y}{2} + \frac{w_2}{2t}\right) + w_2\right]$$

$$= b\left(\frac{y-x}{2} + \frac{w_2}{2t}\right)\left(tx + ty - t\frac{3x+y}{2} + \frac{w_2}{2}\right)$$

$$= bt\left(\frac{y-x}{2} + \frac{w_2}{2t}\right)\left(x + y - \frac{3x+y}{2} + \frac{w_2}{2t}\right) = bt\left(\frac{y-x}{2} + \frac{w_2}{2t}\right)^2 =$$

$$= \frac{b}{4t}\ [t(y-x) + w_2]^2$$

Επομένως η συνάρτηση του κέρδους για την επιχείρηση $R_1$ θα πάρει την παρακάτω μορφή :

$$\Pi_1(x,y) = \left(c\mathrm{k} - \frac{ct}{2}[x^2 + (1-x)^2]\right) + bx[t(y-x) + w_2] + \frac{b}{4t}[t(y-x) + w_2]^2 \quad (8)$$

Για την επιχείρηση $R_2$, η οποία δεν συμμετέχει στην συγχώνευση, το κέρδος ανά μονάδα από την πώληση c μονάδων του αγαθού V είναι:

$$c(k - w_2)$$

Επειδή το αγαθό V το προσφέρει μόνο η $R_2$, η θέση z του καταναλωτή μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του [0,1]. Επομένως, το κέρδος ανά μονάδα από την πώληση του αγαθού V, είναι:

$$k - w_2 = \mathrm{k} - \mathrm{td} = \mathrm{k} - \mathrm{t(y - z)}$$

Το συνολικό κέρδος από την πώληση του αγαθού V όταν $\mathrm{z} \in [0, \mathrm{y}]$ είναι:

$$\int_0^y k - t(y-z)dz = ky + t\frac{(y-z)^2}{2}\Bigg|_0^y = ky + t\frac{y^2}{2}$$

Ομοίως το συνολικό κέρδος από την πώληση του αγαθού V όταν $z \in [y,1]$ είναι:

$$\int_y^1 k - t(z-y)dz = k(1-y) - t\frac{(z-y)^2}{2}\Bigg|_y^1 = k - ky - t\frac{(1-y)^2}{2}$$

Επομένως το συνολικό κέρδος από την πώληση του αγαθού V όταν $z \in [0,1]$ είναι:

$$ky + t\frac{y^2}{2} + k - ky - t\frac{(1-y)^2}{2} = k + t\left(\frac{y^2}{2} - \frac{(1-y)^2}{2}\right) = k + \frac{t}{2}(y^2 - (1-y)^2)$$

Αν η θέση του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση y της $R_2$ , τότε η $R_2$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με την τιμή που έχει καθορίσει η $R_1$ οπότε το συνολικό κέρδος του W για την $R_2$ θα είναι:

$\int_y^1((z-x)t - (z-y)t - w_2)dt = \int_y^1[t(y-x) - w_2]dt$, εφόσον το z βρίσκεται στο [y,1]. Αν το z βρίσκεται μεταξύ της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή και της θέσης y της $R_2$, τότε το συνολικό κέρδος γίνεται:

$$\int_s^y [t(z-x) - t(y-z) - w_2]dz = \int_{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}}^y [t(2z-x-y) - w_2]dz$$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για τη $R_2$ από την πώληση του θα είναι :

$$\int_y^1 b[t(y-x) - w_2]dz + \int_{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}}^y b[t(2z-x-y) - w_2]dz$$

Οπότε για την επιχείρηση $R_2$, η οποία δεν συμμετέχει στην συγχώνευση, η συνάρτηση του κέρδους γίνεται :

$$\Pi_2(x,y) = c(k - w_2) - \frac{ct}{2}[y^2 + (1-y)^2] + \int_{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}}^y b[t(2z-x-y) - w_2]dz + \int_y^1 b[t(y-x) - w_2]dz \quad (9)$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην σχέση (9).

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος,

$$J_3 = \int_{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}}^y b[t(2z-x-y) - w_2]dz$$

Θέτουμε Α=$\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}$ , οπότε ,

$$J_3=\int_A^y b[t(2z-x-y)-w_2]dz$$

$$=bt\int_A^y 2zdz-bt(x+y)(y-A)-bw_2(y-A)=$$

$$=bt(y^2-A^2)-bt(x+y)(y-A)-bw_2(y-A)$$

$$=bt(y-A)\left(y+A-x-y-\frac{w_2}{t}\right)=$$

$$=bt(y-A)(A-x-w_2)=bt\left(y-\frac{x+y}{2}-\frac{w_2}{2t}\right)\left(\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}-x-\frac{w_2}{t}\right)=$$

$$=bt\left(\frac{y-x}{2}-\frac{w_2}{2t}\right)\left(\frac{y-x}{2}-\frac{w_2}{2t}\right)=bt\left(\frac{y-x}{2}-\frac{w_2}{2t}\right)^2=$$

$$=\frac{b}{4t}[t(y-x)-w_2]^2$$

Επίσης ,

$$J_4=\int_y^1 b[t(y-x)-w_2]dz=b(1-y)[t(y-x)-w_2]$$

Επομένως η συνάρτηση του κέρδους για την επιχείρηση $R_2$ θα πάρει την παρακάτω μορφή :

$$\Pi_2(x,y)=c(k-w_2)-\frac{ct}{2}[y^2+(1-y)^2]+\frac{b}{4t}[t(y-x)-w_2]^2$$
$$+b(1-y)[t(y-x)-w_2] \qquad (10)$$

**Πρόταση 2.** Μετά την κάθετη συγχώνευση τις επιχείρησης $R_1$ με την μονοπωλιακή επιχείρηση Μ το σημείο ισορροπίας Nash για τις επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ είναι:

$(x,y)=\left(\frac{1}{2}-R+\frac{b}{2t(b+2c)}w_2,\frac{1}{2}+R+\frac{b}{2t(b+2c)}w_2\right)$,όπου $R=\frac{b}{4(b+c)}$

**Απόδειξη**

Για να βρούμε τις τιμές που μεγιστοποιούν τα κέρδη των δύο επιχειρήσεων, αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial x}=\frac{-ct}{2}[2x-2(1-x)]+b[t(y-x)+w_2]-btx-\frac{b}{2}[t(y-x)+w_2]=$$

$$-ct(2x-1)+\frac{b}{2}[t(y-x)+w_2]-bt=-2ctx+ct+\frac{bt}{2}(y-x)+\frac{bw_2}{2}-btx$$

Οπότε,

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \left(-2ct - \frac{3bt}{2}\right)x + ct + \frac{bty}{2} + \frac{bw_2}{2}$$

Ακόμα ,

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = \frac{-ct}{2}[2y - 2(1-y)] + \frac{b}{2}[t(y-x) - w_2] - b[t(y-x) - w_2] + bt(1-y)$$
$$=$$
$$-ct(2y-1) - \frac{b}{2}[t(y-x) - w_2] + bt - bty =$$
$$-2cty + ct - \frac{bt}{2}y + \frac{bt}{2}x + \frac{bw_2}{2} + bt - bty =$$
$$\left(-2ct - \frac{3bt}{2}\right)y + \frac{bt}{2}x + \frac{bw_2}{2} + bt + ct$$

Με χρήση των συνθηκών πρώτης τάξης οι τιμές των x , y οι πιθανές τιμές που μεγιστοποιούν τα κέρδη των δύο επιχειρήσεων θα είναι οι λύσεις του παρακάτω συστήματος,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Όμως ,

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left(-2ct - \frac{3bt}{2}\right)x + ct + \frac{bty}{2} + \frac{bw_2}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{ct + \frac{bty}{2} + \frac{bw_2}{2}}{2ct + \frac{3bt}{2}} = \frac{2ct + bty + bw_2}{4ct + 3bt} (11)$$
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left(-2ct - \frac{3bt}{2}\right)y + \frac{bt}{2}x + \frac{bw_2}{2} + bt + ct \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{ct + bt + \frac{btx}{2} + \frac{bw_2}{2}}{2ct + \frac{3bt}{2}} = \frac{2ct + 2bt + btx + bw_2}{4ct + 3bt} (12)$$

Αν στην σχέση (12) αντικαταστήσουμε την τιμή του x που υπολογίσαμε στην σχέση (11), έχουμε :

$$y = \frac{2ct + 2bt + bt\frac{2ct + bty + bw_2}{4ct + 3bt} + bw_2}{4ct + 3bt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(4ct + 3bt)^2 = (2ct + 2bt + bw_2)(4ct + 3bt) + bt(2ct + bty + bw_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(4ct + 3bt)^2 - (bt)^2 y = (2ct + 2bt + bw_2)(4ct + 3bt) + bt(2ct + bw_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{(2ct + 2bt + bw_2)(4ct + 3bt) + bt(2ct + bw_2)}{(4ct + 3bt - bt)(4ct + 3bt + bt)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{(2ct + 2bt)(4ct + 3bt) + bw_2(4ct + 3bt) + bt(2ct + bw_2)}{(4ct + 2bt)(4ct + 4bt)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(ct + bt)(4ct + 3bt) + bw_2(4ct + 3bt) + 2bct^2 + b^2 w_2 t}{8(2ct + bt)(ct + bt)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{4ct + 3bt}{4(2ct + bt)} + \frac{bct^2}{4(2ct + bt)(ct + bt)} + \frac{bw_2(4ct + 3bt + bt)}{8(2ct + bt)(ct + bt)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{4c + 3b}{4(2c + b)} + \frac{bc}{4(2c + b)(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{(4c + 3b)(c + b) + bc}{4(2c + b)(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)}$$

$$y = \frac{4c^2 + 8bc + 3b^2}{4(2c + b)(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)} = \frac{2c + 3b}{4(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)}$$

Άρα η θέση πιθανού ακροτάτου για την συνάρτηση $Π_2$ είναι :

$$y_0 = \frac{3b + 2c}{4(b + c)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)}$$

Στη σχέση (11) αντικαθιστούμε το y με το $y_0$ , οπότε προκύπτει :

$$x = \frac{2ct + bt\left[\frac{2c + 3b}{4(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)}\right] + bw_2}{4ct + 3bt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2ct + bt\frac{2c + 3b}{4(c + b)}}{4ct + 3bt} + \frac{\frac{b^2 t w_2}{2t(2c + b)} + bw_2}{4ct + 3bt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2c + b\frac{2c + 3b}{4(c + b)}}{4c + 3b} + \frac{\frac{b^2}{2(2c + b)} + b}{4ct + 3bt} w_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8c(c + b) + 2bc + 3b^2}{4(4c + 3b)(c + b)} + \frac{b^2 + 2b(2c + b)}{2t(4c + 3b)(2c + b)} w_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8c^2 + 10bc + 3b^2}{4(4c + 3b)(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2c + b}{4(c + b)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)}$$

Άρα η θέση πιθανού ακροτάτου για την συνάρτηση $Π_1$ είναι :

$$x_0 = \frac{b + 2c}{4(b + c)} + \frac{bw_2}{2t(2c + b)}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των συναρτήσεων $\Pi_1$ και $\Pi_2$ , έτσι ώστε να εξετάσουμε αν τα δύο κρίσιμα σημεία που βρήκαμε είναι τοπικά μέγιστα .

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x^2} = -2ct - \frac{3bt}{2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial y^2} = -2ct - \frac{3bt}{2} < 0$$

Οπότε και τα δύο σημεία αποτελούν θέσεις μεγίστου.

Τέλος θεωρούμε ,

$$R = \frac{b}{4(b+c)}$$

Οπότε ,

$$x_0 = \frac{2b+2c-b}{4(b+c)} + \frac{bw_2}{2t(2c+b)} = \frac{1}{2} - \frac{b}{4(b+c)} + \frac{bw_2}{2t(2c+b)} = \frac{1}{2} - R + \frac{bw_2}{2t(2c+b)}$$

$$y_0 = \frac{3b+2c}{4(b+c)} + \frac{bw_2}{2t(2c+b)} = \frac{2b+2c+b}{4(b+c)} + \frac{bw_2}{2t(2c+b)}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{b}{4(b+c)} + \frac{bw_2}{2t(2c+b)} = \frac{1}{2} + R + \frac{bw_2}{2t(2c+b)}$$

Παρατηρήσεις :

- Η θέση του αδιάφορου καταναλωτή, μετά την συγχώνευση, δεν βρίσκεται πια στο μέσο του διάστημα [x, y] που ορίζουν οι θέσεις των δύο επιχειρήσεων αλλά έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά απόσταση ίση με $\frac{w_2}{2t}$.
- Σε σχέση με τις βέλτιστες θέσεις, πριν την συγχώνευση, βλέπουμε ότι οι μετά την συγχώνευση οι βέλτιστες επιλογές θέσεων και των δύο επιχειρήσεων έχουν μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά απόσταση $\frac{bw_2}{2t(2c+b)}$ επίσης παρουσιάζουν μία συμμετρία όπως και πριν την συγχώνευση.
- Η απόσταση, μετά την συγχώνευση, μεταξύ των $R_1$ και $R_2$ είναι:
$$2R = 2\frac{b}{4(b+c)} = \frac{b}{2(b+c)}$$
Δηλαδή παραμένει η ίδια που είχαν και πριν την συγχώνευση.

## 6. Μη γραμμική συνάρτηση μεταφορικού κόστους

Οι Heywood, J. & Wang, Z. στη εργασία τους με τίτλο “ Consistent location conjectutes under spatial price discrimination” (2016) εξετάζουν την περίπτωση κατά την οποία το κόστος παραγωγής δίνεται από την σχέση ½ $kq_i^2$. Στη παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την περίπτωση που το μεταφορικό κόστος δίνεται από τη σχέση $td^2$, και όχι από την td, και θα μελετήσουμε τις συνέπειες της συγκεκριμένης αλλαγής στο σημείο ισορροπίας τόσο πριν την συγχώνευση όσο και μετά από αυτήν.

Σε ότι αφορά τον εντοπισμό του κοινωνικά βέλτιστου σημείου με γραμμικό κόστος μεταφοράς παραπέμπουμε στις εργασίες των Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J. με τίτλο “A unified model of spatial price discrimination” (2016) και “Location decisions and welfare under spatial price discrimination” (2020).

Συγκριτικά με τις ενότητες 5.2 και 5.3 παραπάνω, εδώ θα θεωρήσουμε ότι οι επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ πουλάνε μόνο το κοινό / ανταγωνιστικό αγαθό W και όχι τα μονοπωλιακά U και V, αντίστοιχα.

### 6.1. Πριν την συγχώνευση

Αν θεωρήσουμε s την θέση του αδιάφορου καταναλωτή, τότε:

$$t(y-s)^2 = t(s-x)^2 \Rightarrow |y-s| = |s-x| \Rightarrow s = \frac{x+y}{2}$$

Επομένως παρατηρούμε ότι η θέση του αδιάφορου καταναλωτή παραμένει αμετάβλητη συγκριτικά με τη περίπτωση γραμμικής σχέσης του μεταφορικού κόστους με την απόσταση (κεφάλαιο 5.2).

Πριν τη συγχώνευση, ο προμηθευτής M προμηθεύει τις επιχειρήσεις $R_1$ και $R_2$ με το ενδιάμεσο αγαθό στην ίδια τιμή, η οποία και κανονικοποιείται στο 0, ήτοι:

$w_1=0=w_2$

Όσον αφορά τη πώληση του αγαθού W από την επιχείρηση $R_1$, πριν από την συγχώνευση:

Α) αν η θέση z του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση x της $R_1$, τότε η $R_1$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με την τιμή που έχει καθορίσει η $R_2$ και το κέρδος της $R_1$ από τη πώληση του W στη θέση z θα είναι:

$$\int_0^x (\mathrm{t}(y-z)^2 - t(x-z)^2)dz = \int_0^x [t(y^2+z^2-2yz-x^2-z^2+2xz)]dz = \int_0^x [t(y-x)(x+y-2z)]dz,$$

εφόσον το z βρίσκεται στο [0,x].

Β) αν το z βρίσκεται μεταξύ του x και της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή τότε, επειδή:

$$\int_{x}^{s}[t(y-z)^2-t(z-x)^2]dz=\int_{x}^{\frac{x+y}{2}}[t(y-z)^2-t(z-x)^2]dz$$

το κέρδος γίνεται:

$$\int_{x}^{\frac{x+y}{2}}[t(y-z)^2-t(z-x)^2]dz=\int_{x}^{\frac{x+y}{2}}[t(y-x)(x+y-2z)]dz$$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b=1 (όλοι θα πάρουν από ένα W) των καταναλωτών το κέρδος για τη $R_1$ από την πώληση του θα είναι:

$$\int_{0}^{x}[t(y-x)(x+y-2z)]dz$$
$$+\int_{x}^{\frac{x+y}{2}}[t(y-x)(x+y-2z)]dz=\int_{0}^{\frac{x+y}{2}}[t(y-x)(x+y-2z)]dz$$

Επομένως η συνάρτηση του κέρδους για την $R_1$ από το αγαθό W, μετά την συγχώνευση, γίνεται:

$\Pi_1^W(x,y)=\int_0^s[t(y-z)^2-t(z-x)^2]dz$ (17)

Όσον αφορά τη πώληση του αγαθού W από την επιχείρηση $R_2$, πριν από την συγχώνευση:

A) Αν η θέση του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση y της $R_2$ , τότε η $R_2$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με την ,τιμή που έχει καθορίσει η $R_1$, και το κέρδος της $R_2$ από τη πώληση του W στη θέση z θα είναι:

$$\int_{s}^{y}[t(z-x)^2-t(y-z)^2]dz=\int_{s}^{y}[t(y-x)(2z-x-y)]dz$$

εφόσον το z βρίσκεται μεταξύ της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή και του y, ήτοι στο [s,y].

B) Αν το z βρίσκεται μεταξύ της θέσης y της $R_2$ και του 1, δηλαδή στο [y,1], τότε το κέρδος γίνεται:

$\int_y^1(\mathrm{t}(z-x)^2-\mathrm{t}(y-z)^2)dz=\int_y^1[t(y-x)(2z-x-y)]dz,$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b=1 (όλοι θα πάρουν από ένα W) των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για τη $R_2$ στο [s,1] για την πώληση του W θα είναι :

$$\Pi_2^W(x.y)=\left[\int_{s}^{y}[t(z-x)^2-t(y-z)^2]dz+\int_{y}^{1}[t(z-x)^2-t(y-z)^2]dz\right]\Rightarrow$$

$$\Pi_2^W(x,y)=\int_s^1[t(z-x)^2-t(y-z)^2]dz \qquad (18)$$

Οι θέσεις των $R_1$ και $R_2$ καθορίζονται από την πώληση του αγαθού W. Επομένως, η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση) των συναρτήσεων κέρδους $\Pi_1^W(x,y)$ και $\Pi_2^W(x,y)$ είναι που θα μας δώσουν τις θέσεις x και y.

Από τη σχέση (17) υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}(17)\Rightarrow\int_0^s[t(y-z)^2-t(x-z)^2]dz&=\frac{1}{2}(-2\mathrm{ty}+2\mathrm{tx})\mathrm{s}^2+\mathrm{ty}^2\mathrm{s}-\mathrm{tx}^2\mathrm{s}\\&=\frac{1}{2}(-2ty+2tx)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+ty^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)-tx^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\\&=-\frac{1}{4}\frac{(-tx^2+ty^2)^2}{t(x-y)}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi_1^W}{\partial x}=\left(-\frac{1}{4}\frac{(-tx^2+ty^2)^2}{t(x-y)}\right)'&=\frac{(-tx^2+ty^2)x}{x-y}+\frac{1}{4}\frac{(-tx^2+ty^2)^2}{t(x-y)^2}\\&=\frac{1}{4}\frac{(-tx^2+ty^2)(3tx^2-4txy+ty^2)}{t(x-y)^2}\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για το κέρδος της $R_2$ από το W, έχουμε:

Από τη σχέση (18) υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}(18)\Rightarrow\int_s^1&[t(z-x)^2-t(y-z)^2]dz\\&=\frac{1}{2}(-2\mathrm{tx}+2\mathrm{ty})(1-\mathrm{s}^2)+\mathrm{tx}^2(1-\mathrm{s})-\mathrm{ty}^2(1-\mathrm{s})\\&=\frac{1}{2}(-2tx+2ty)(1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2)+tx^2\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\\&-ty^2\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\\&=-\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)}(4t^2x^2-8t^2xy+4t^2y^2+t^2x^4-2t^2x^2y^2+t^2y^4\\&-4t^2x^3+4t^2x^2y+4t^2y^2x-4t^2y^3)\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \Pi_2^W}{\partial y} = \left( -\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)}(4t^2x^2 - 8t^2xy + 4t^2y^2 + t^2x^4 - 2t^2x^2y^2 + t^2y^4 - 4t^2x^3 + 4t^2x^2y + 4t^2y^2x - 4t^2y^3) \right)'$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)^2}(-4t^2x^3y + 4t^2y^3x - 4t^2x^2 - 4t^2y^2 + t^2x^4 - 3t^2y^4 + 8t^2y^3 + 8t^2x^2y - 16t^2y^2x + 8t^2xy + 2t^2x^2y^2)$$

Με χρήση των συνθηκών πρώτης τάξης οι πιθανές τιμές των x , y που μεγιστοποιούν τα κέρδη των δύο επιχειρήσεων θα είναι οι λύσεις του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^W}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_2^W}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{1}{4}\frac{(-tx^2 + ty^2)(3tx^2 - 4txy + ty^2)}{t(x-y)^2} = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = -\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)^2}(-4t^2x^3y + 4t^2y^3x - 4t^2x^2 - 4t^2y^2 + t^2x^4 - 3t^2y^4 + 8t^2y^3 + 8t^2x^2y - 16t^2y^2x + 8t^2xy + 2t^2x^2y^2) = 0 \qquad (20)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (19) και (20) προκύπτουν οι παρακάτω λύσεις:

1. $x = \frac{1}{2}$ και

$$y: \begin{cases} \mu\varepsilon\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ (21): \begin{cases} y = \frac{3}{2} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (x, y \in [0,1]) \\ y = \frac{1}{2} & \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta \\ y = -\frac{1}{2} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (y < 0) \end{cases} \\ \mu\varepsilon\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ (22): \begin{cases} y = \frac{3}{2} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (x, y \in [0,1]) \\ y = \frac{1}{2} & \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta \\ y = \frac{5}{6} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (\mu\eta\ \kappa o\iota\nu\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta) \end{cases} \end{cases}$$

2. $y = \frac{1}{2}$ και

$$x: \begin{cases} \mu\varepsilon\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ (21): \begin{cases} x = \frac{1}{2} & \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta \\ x = -\frac{1}{2} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (x < 0) \\ x = \frac{1}{6} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (\mu\eta\ \kappa o\iota\nu\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta) \end{cases} \\ \mu\varepsilon\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ \sigma\tau\eta\nu\ (22): \begin{cases} x = \frac{1}{2} & \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta \\ x = -\frac{1}{2} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (x < 0) \\ x = \frac{3}{2} & \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota\ (x > 1) \end{cases} \end{cases}$$

3. $x = \frac{1}{4}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ y = \frac{3}{4}$

### 6.2. Μετά την συγχώνευση

Υποθέτουμε ότι η επιχείρηση $R_1$ συγχωνεύεται με την μονοπωλιακή επιχείρηση Μ (προμηθευτής).

Επειδή μόνο η $R_2$ επιβαρύνεται με κόστος πρώτης ύλης $w_2$, η νέα θέση του αδιάφορου καταναλωτή δίνεται από την επίλυση ως προς s της ισότητας:

$$t(s-x)^2 = t(y-s)^2 + w_2 \Rightarrow \begin{cases} t(y-z)^2 + w_2 - t(z-x)^2, & όταν\ z \in (0,s) \\ t(z-x)^2 - t(y-z)^2 - w_2, & όταν\ z \in (s,1) \end{cases}$$

Οπότε προκύπτει η νέα θέση του αδιάφορου καταναλωτή:

$$s = \frac{x+y}{2} + \frac{w_2}{2t(y-x)}$$

Για τη νέα επιχείρηση $R_1$, που προκύπτει μετά από την συγχώνευση, το κέρδος από την πώληση του αγαθού W είναι:

A) αν η θέση z του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση x της $R_1$, τότε η $R_1$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με την τιμή που έχει καθορίσει η $R_2$ και το κέρδος της $R_1$ για τη πώληση του W θα είναι:

$\int_0^x (\mathrm{t}(y-z)^2 + w_2 - t(x-z)^2)dz = \int_0^x [t(y^2 + z^2 - 2yz - x^2 - z^2 + 2xz) + w_2]dz = \int_0^x [t(y-x)(x+y-2z) + w_2]dz,$

εφόσον το z βρίσκεται στο [0,x].

B) αν η θέση z του καταναλωτή βρίσκεται μεταξύ του x και της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή τότε, επειδή:

$$\int_x^s [t(y-z)^2 + w_2 - t(z-x)^2]dz = \int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}} [t(y-z)^2 + w_2 - t(z-x)^2]dz$$

το κέρδος γίνεται:

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}} [t(y-z)^2 + w_2 - t(z-x)^2]dz =$$
$$= \int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}} [t(y-x)(x+y-2z) + w_2]dz$$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b=1 (όλοι θα πάρουν από ένα W) των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για τη $R_1$ από την πώληση του θα είναι:

$$\int_0^x [t(y-x)(x+y-2z)+w_2]dz + \int_x^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}} [t(y-x)(x+y-2z)+w_2]dz = \int_0^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}} [t(y-x)(x+y-2z)+w_2]dz$$

Επομένως, η συνάρτηση του κέρδος για την $R_1$ από το αγαθό W, μετά την συγχώνευση, γίνεται:

$$\Pi_1^W(x,y) = \int_0^{\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}} [t(y-z)^2 + w_2 - t(z-x)^2]dz \quad (21)$$

Για την επιχείρηση $R_2$ , η οποία δεν συμμετέχει στην συγχώνευση, το κέρδος από την πώληση του αγαθού W είναι:

A) Αν η θέση του καταναλωτή βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση y της $R_2$ , τότε η $R_2$ θα πουλάει το αγαθό W σε τιμή ίση με την τιμή που έχει καθορίσει η $R_1$, και το κέρδος της $R_2$ για τη πώληση του W θα είναι:

$$\int_s^y [t(z-x)^2 - t(y-z)^2 - w_2]dz = \int_s^y [t(y-x)(2z-x-y) - w_2]dz$$

εφόσον το z βρίσκεται μεταξύ της θέσης s του αδιάφορου καταναλωτή και του y, ήτοι στο [s,y].

B) Αν το z βρίσκεται μεταξύ της θέσης y της $R_2$ και του 1, δηλαδή στο [y,1], τότε το κέρδος της $R_2$ για τη πώληση του W γίνεται:

$$\int_y^1 (\mathrm{t}(z-x)^2 - \mathrm{t}(y-z)^2 - w_2)dz = \int_y^1 [t(y-x)(2z-x-y) - w_2]dz.$$

Επειδή το αγαθό W προτιμάται από το τμήμα b=1 (όλοι θα πάρουν από ένα W) των καταναλωτών το συνολικό κέρδος για την $R_2$ στο [s,1] για την πώληση του W θα είναι :

$$\Pi_2^W(x.y) = \left[\int_s^y [t(z-x)^2 - t(y-z)^2 - w_2]dz + \int_y^1 [t(z-x)^2 - t(y-z)^2 - w_2]dz\right] \Rightarrow$$

$$\Pi_2^W(x,y) = \int_s^1 [t(z-x)^2 - t(y-z)^2 - w_2]dz \quad (22)$$

Από τη σχέση (21) υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$
\begin{aligned}
(21) \Rightarrow \int_0^s [t(y-z)^2 + w_2 - t(x-z)^2]dz \\
&= \frac{1}{2}(-2\mathrm{ty} + 2\mathrm{tx})\mathrm{s}^2 + \mathrm{ty}^2\mathrm{s} + \mathrm{w}_2\mathrm{s} - \mathrm{tx}^2\mathrm{s} \\
&= \frac{1}{2}(-2ty + 2tx)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right)^2 \\
&+ ty^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right) + w_2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right) \\
&- tx^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right) = -\frac{1}{4}\frac{(-tx^2 + ty^2 + w_2)^2}{t(x-y)}
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο πρώτης τάξης:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_1^W}{\partial x} = \left(-\frac{1}{4}\frac{(-tx^2 + ty^2 + w_2)^2}{t(x-y)}\right)' \\
&= \frac{(-tx^2 + ty^2 + w_2)x}{x-y} + \frac{1}{4}\frac{(-tx^2 + ty^2 + w_2)^2}{t(x-y)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(-tx^2 + ty^2 + w_2)(3tx^2 - 4txy + ty^2 + w_2)}{t(x-y)^2}
\end{aligned}
$$

Αντίστοιχα, για το b=1 (όλοι θα πάρουν από ένα W)της $R_2$ από το W, έχουμε:

Από τη σχέση (22) υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$
\begin{aligned}
(22) \Rightarrow \int_s^1 [t(z-x)^2 - t(y-z)^2 - w_2]dz \\
&= \frac{1}{2}(-2\mathrm{tx} + 2\mathrm{ty})(1 - \mathrm{s}^2) + \mathrm{tx}^2(1-\mathrm{s}) - \mathrm{w}_2(1-\mathrm{s}) - \mathrm{ty}^2(1-\mathrm{s}) \\
&= \frac{1}{2}(-2tx + 2ty)(1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right)^2) \\
&+ tx^2\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right) \\
&- w_2\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right) \\
&- ty^2\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{w_2}{t(x-y)}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)}(4t^2x^2 - 8t^2xy + 4t^2y^2 + t^2x^4 - 2t^2x^2y^2 \\
&- 2tx^2w_2 + t^2y^4 + 2ty^2w_2 + w_2^2 - 4t^2x^3 + 4t^2x^2y + 4w_2tx \\
&- 4w_2ty + 4t^2y^2x - 4t^2y^3)
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial \Pi_2^W}{\partial y} = \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)}(4t^2x^2 - 8t^2xy + 4t^2y^2 + t^2x^4 - 2t^2x^2y^2 - 2tx^2w_2 + t^2y^4 + 2ty^2w_2 + w_2^2 - 4t^2x^3 + 4t^2x^2y + 4w_2tx - 4w_2ty + 4t^2y^2x - 4t^2y^3)\right)'$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)^2}(-4t^2x^3y + 4t^2y^3x + 4tw_2yx - 4t^2x^2 - 4t^2y^2 + t^2x^4 - 3t^2y^4 + w_2^2 + 8t^2y^3 + 8t^2x^2y - 16t^2y^2x + 8t^2xy + 2t^2x^2y^2 - 2ty^2w_2 - 2tx^2w_2)$$

Με χρήση των συνθηκών πρώτης τάξης οι πιθανές τιμές των x , y των δύο επιχειρήσεων θα είναι οι λύσεις του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_1^W}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_2^W}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{1}{4}\frac{(-tx^2 + ty^2 + w_2)(3tx^2 - 4txy + ty^2 + w_2)}{t(x-y)^2} = 0 \qquad (23)$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = -\frac{1}{4}\frac{1}{t(x-y)^2}(-4t^2x^3y + 4t^2y^3x + 4tw_2yx - 4t^2x^2 - 4t^2y^2 + t^2x^4 - 3t^2y^4 + w_2^2 + 8t^2y^3 + 8t^2x^2y - 16t^2y^2x + 8t^2xy + 2t^2x^2y^2 - 2ty^2w_2 - 2tx^2w_2) = 0 \qquad (24)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (23) και (24) προκύπτουν οι παρακάτω λύσεις:

1. $x = \frac{1}{2}$ και

$$y:\begin{cases} \text{με αντικατάσταση στην } (21): \begin{cases} y=\frac{1}{2}\frac{2t+\sqrt{t^2-4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται } (y>1) \\ y=-\frac{1}{2}\frac{-2t+\sqrt{t^2-4tw_2}}{t} & \text{κοινά αποδεκτή λύση} \\ y=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-t(-t+4w_2)}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \\ y=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-t(-t+4w_2)}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \end{cases} \\ \text{με αντικατάσταση στην } (22): \begin{cases} y=\frac{1}{2}\frac{2t+\sqrt{t^2-4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται } (y>1) \\ y=-\frac{1}{2}\frac{-2t+\sqrt{t^2-4tw_2}}{t} & \text{κοινά αποδεκτή λύση} \\ y=\frac{1}{6}\frac{4t+\sqrt{t^2+12tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \\ y=-\frac{1}{6}\frac{-4t+\sqrt{t^2+12tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \end{cases} \end{cases}$$

Οι ανωτέρω κοινά αποδεκτές λύσεις ισχύουν για $w \in \left(\frac{t^2-1}{4t}, \frac{t}{4}\right)$, το οποίο ισχύει πάντα.

2. $y = \frac{1}{2}$ και

$$x:\begin{cases} \text{με αντικατάσταση στην } (21): \begin{cases} x=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t^2+4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται } (x>y) \\ x=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t^2+4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται } (x<0) \\ x=\frac{1}{6}\frac{2t+\sqrt{t^2-12tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \\ x=-\frac{1}{6}\frac{-2t+\sqrt{t^2-12tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \end{cases} \\ \text{με αντικατάσταση στην } (22): \begin{cases} x=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t^2+4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται } (x>y) \\ x=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t^2+4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται } (x<0) \\ x=\frac{1}{2}\frac{2t+\sqrt{t^2+4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \\ x=-\frac{1}{2}\frac{-2t+\sqrt{t^2+4tw_2}}{t} & \text{απορρίπτεται (μη κοινή λύση)} \end{cases} \end{cases}$$

3. $x = \frac{1}{4}\frac{t+4w_2}{t} \quad και \quad y = \frac{1}{4}\frac{3t+4w_2}{t}$

## 7. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τα αποτελέσματα, των ενοτήτων 5.2, 5.3, 6.1 και 6.2, δηλαδή της ισορροπίας των θέσεων του αδιάφορου καταναλωτή και των δύο επιχειρήσεων, πριν και μετά την συγχώνευση, στη περίπτωση της γραμμικής και στη περίπτωση της μη γραμμικής σχέσης του μεταφορικού κόστους με την απόσταση.

| | | **ΠΡΙΝ** | **ΜΕΤΑ** |
|---|---|---|---|
| **Γραμμική σχέση td** | $s$ | $\frac{x+y}{2}$ | $\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}$ |
| | $(x_0, y_0)$ | $\left(\frac{1}{2}-R, \frac{1}{2}+R\right)$ | $\left(\frac{1}{2}-R+\frac{bw_2}{2t(2c+b)}, \frac{1}{2}+R+\frac{bw_2}{2t(2c+b)}\right)$ |
| **Μη γραμμική σχέση td²** | $s$ | $\frac{x+y}{2}$ | $\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}$ |
| | $(x_0, y_0)$ | $\begin{cases} x_0=\frac{1}{2}, y_0=\frac{1}{2} \\ x_0=\frac{1}{4}, y_0=\frac{3}{4} \end{cases}$ | $\begin{cases} x_0=\frac{1}{2}, y_0=-\frac{1}{2}\frac{-2t+\sqrt{t^2-4tw_2}}{t} \\ x_0=\frac{1}{4}\frac{t+4w_2}{t}, y_0=\frac{1}{4}\frac{3t+4w_2}{t} \end{cases}$ |

- Στη περίπτωση της γραμμικής σχέσης, η θέση του αδιάφορου καταναλωτή, μετά την συγχώνευση, δεν βρίσκεται πια στο μέσο του διάστημα [x, y] που ορίζουν οι θέσεις των δύο επιχειρήσεων αλλά έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά απόσταση ίση με $\frac{w_2}{2t}$.
- Στη περίπτωση της γραμμικής σχέσης, σε σχέση με τις βέλτιστες θέσεις πριν την συγχώνευση, βλέπουμε ότι μετά την συγχώνευση οι βέλτιστες επιλογές θέσεων και των δύο επιχειρήσεων έχουν μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά απόσταση $\frac{bw_2}{2t(2c+b)}$. Επίσης παρουσιάζουν μία συμμετρία όπως και πριν την συγχώνευση.
- Στη περίπτωση της γραμμικής σχέσης, μετά την συγχώνευση, η απόσταση μεταξύ των $R_1$ και $R_2$ είναι:
$$2R = 2\frac{b}{4(b+c)} = \frac{b}{2(b+c)}$$
Δηλαδή παραμένει η ίδια που είχαν και πριν την συγχώνευση.

Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων των δύο περιπτώσεων (γραμμική και μη γραμμική σχέση του μεταφορικού κόστους με την απόσταση), παραθέτουμε τα αποτελέσματα της γραμμικής περίπτωσης όταν b=1 και c=0 (όπως θεωρήσαμε και στη περίπτωση της μη γραμμικής σχέσης).

| | | **ΠΡΙΝ** | **ΜΕΤΑ** |
|---|---|---|---|
| **Γραμμική σχέση td** | $s$ | $\frac{x+y}{2}$ | $\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t}$ |
| | $(x_0, y_0)$ | $\left(\frac{1}{2}-R, \frac{1}{2}+R\right)$ | $\left(\frac{1}{2}-R+\frac{w_2}{2t}, \frac{1}{2}+R+\frac{w_2}{2t}\right)$ |
| **Μη γραμμική σχέση td²** | $s$ | $\frac{x+y}{2}$ | $\frac{x+y}{2}+\frac{w_2}{2t(y-x)}$ |
| | $(x_0, y_0)$ | $\begin{cases} x_0=\frac{1}{2}, y_0=\frac{1}{2} \\ x_0=\frac{1}{4}, y_0=\frac{3}{4} \end{cases}$ | $\begin{cases} x_0=\frac{1}{2}, y_0=-\frac{1}{2}\frac{-2t+\sqrt{t^2-4tw_2}}{t} \\ x_0=\frac{1}{4}\frac{t+4w_2}{t}, y_0=\frac{1}{4}\frac{3t+4w_2}{t} \end{cases}$ |

- Στη περίπτωση της γραμμικής σχέσης, ο αδιάφορος καταναλωτής και οι δύο επιχειρήσεις μετά τη συγχώνευση μετατοπίζονται προς τα δεξιά κατά ίση απόσταση και ίση με $\frac{w_2}{2t}$.
- Στη περίπτωση της μη γραμμικής σχέσης, η θέση του αδιάφορου καταναλωτή, μετά την συγχώνευση, δεν βρίσκεται πια στο μέσο του διάστημα [x, y] που ορίζουν οι θέσεις των δύο επιχειρήσεων αλλά έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά κατά απόσταση ίση με $\frac{w_2}{2t(y-x)}$. Η μετατόπιση αυτή είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στη περίπτωση της γραμμικής σχέσης, καθώς $y-x<1$.
- Στη περίπτωση της μη γραμμικής σχέσης, πριν και μετά τη συγχώνευση, προκύπτουν δύο δυνατές και αποδεκτές λύσεις ισορροπίας των $R_1$ και $R_2$.

  Παρατηρούμε ότι <u>πριν τη συγχώνευση</u>:
  A) η μία εκ των δύο λύσεων δίνει κοινή θέση για τις $R_1$ και $R_2$ ακριβώς στο μέσο του διαστήματος [0,1], και
  B) η δεύτερη δυνατή λύση τις «τοποθετεί» στα τεταρτημόρια του διαστήματος [0,1] με απόσταση μεταξύ τους ½.

<u>Μετά τη συγχώνευση</u>, η θέση των $R_1$ και $R_2$ εξαρτάται από τις μεταβλητές t και w. Ειδικότερα:

Α) η πρώτη εκ των δύο δυνατών λύσεων, αφήνει την R1 στο μέσο του διαστήματος, «πιέζοντας» την R2 να μετατοπιστεί προς το άκρο του διαστήματος, δηλαδή στο 1, όσο μεγαλύτερο είναι το κόστος w2. Με άλλα λόγια, **η R2 δέχεται πιέσεις να χάσει μερίδιο της αγοράς όσο μεγαλύτερο είναι το κόστος w2 που της επιβάλει η νέα συγχωνευμένη R1**.

Β) Βάσει της δεύτερης εκ των δύο δυνατών λύσεων, όπου οι R1 και R2 είναι τοποθετημένες στα τεταρτημόρια του διαστήματος [0,1], όσο μεγαλύτερο είναι το κόστος w2, η μετατόπιση της R1 (μετατόπιση επί έναν συντελεστή ίσο με $1 + 4\frac{w_2}{t}$) είναι συγκριτικά μεγαλύτερη από τη μετατόπιση της R2 (μετατόπιση επί έναν συντελεστή ίσο με $1+\frac{4}{3}\frac{w_2}{t}$). Σημειώνεται ότι επειδή και οι δύο προαναφερθέντες συντελεστές μετατόπισης είναι μεγαλύτεροι της 1, τόσο η R1 όσο και η R2 μετατοπίζονται προς τα δεξιά. Επομένως, **μία αύξηση του επιβαλλόμενου κόστους w2 από την R1 στην R2, ωθεί σε μεγαλύτερη αναλογικά αύξηση του μεριδίου της αγοράς της R1 από την απώλεια που υφίσταται η R2**.

## 8. Βιβλιογραφία


Beladi, Chakrabarti & Marjit, 2008. Vertical mergers and downstream spatial competition with different product varieties. *Economics Letters*, 101, pp. 262-264.

Beladi, H., Chakrabarti, A. & Marjit, S., 2010. Sequential Spatial Competition in Verticaly Related industries with different Product Varieties. *Economics Letters*, 106, pp 112-114.

Braid , M., 2008. Spatial price discrimination and the locations of firms with different product selections or product varietes. *Economics Letters*, 98, pp. 342-347.

Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J., 2016. A comment on 'Vertical mergers and downstream spatial competition with different product varieties. *Economics Letters* 143, pp. 84-86.

Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J., 2016. A unified model of spatial price discrimination. *MPRA* Paper No.72106.

Eleftheriou, K. & Michelacakis, N. J., 2020. Location decisions and welfare under spatial price discrimination. *Managerial and Decision Economics*, 41(7), pp.1202-1210.

Gupta, B., 1994. Competitive spatial price discrimination with strictly convex production costs. *Regional Science and Urban Economics*, 24(2) pp. 265-272.

Heywood, J. S. & Wang, Z., 2016. Consistent location conjectutes under spatial price discrimination. *Journal of Economics*, 117 (2), pp. 167-180.

Hotelling, H., 1929. Stability in Competition. *Economic Journal*, 39, pp. 41-57.

Lerner , A. & Singer, H., 1937. Some notes on Duopoly and spatial competition. *Journal of Political Economy*, 45 pp. 145-186.

Takatoshi, T. & Thisse, J., 1995. Asymmetric equilibria in spatial competition. *International Journal of Industrial Organization*, 13, pp. 213-227.

Γεωργακόπουλος, Λ. Ν., 2004. *Δίκαιο Επιχειρήσεων και Εταιριών.* Αθήνα: Σάκκουλα.

Ψειρίδου, Α. & Λιανός, Θ., 2015. *Η Θεωρία Παιγνίων.* Αθήνα: Κάλλιπος.