Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

ΠΑΤΗΡΗ ΙΩΑΝΝΑ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*

Πειραιάς

Νοέμβριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Συνέλευση του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή της, σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Ψαρράκος Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής
- Μιχαήλ Μπούτσικας, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

THE CLASSICAL RISK MODEL WITH DEPENDENCE AND DIVIDEND STRATEGIES

By

Patiri Ioanna

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

November 2021

Θερμές ευχαριστίες σε όλους τους καθηγητές μου και το διδακτικό προσωπικό του Πανεπιστημίου.

Ιδιαιτέρως να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, για την πολύτιμη βοήθεια του στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, για τις σημαντικές επιστημονικές παρατηρήσεις του, καθώς και τη συνεργασία του.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Μιχαήλ Μπούτσικα και κ. Γεώργιο Ψαρράκο για τη συμμετοχή τους στην παρουσίαση και την αξιολόγηση της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας και η κατανομή των καταβαλλόμενων μερισμάτων, για τις στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος. Θεωρούμε οτι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και των αντίστοιχων μεγεθών ζημιών, θεωρώντας παράλληλα και την ύπαρξη στρατηγικών μερισμάτων. Στην παρούσα εργασία θα εξεταστεί η δομή εξάρτησης μέσω της σύζευξης των Farlie-Gumbel-Morgenstern γνωστή και ως FGM copula. Τότε, για κάθε μία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις και για τις αντίστοιχες τροποποιημένες στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος, θα μελετηθούν οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu, καθώς και τα αναμενόμενα μερίσματα που καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρία μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1 δίνουμε όσα προαπαιτούμενα χρειάζονται από την πλευρά του αναλογισμού καθώς επίσης και την πλευρά των πιθανοτήτων. Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται περιγραφή του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων και παρουσιάζουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu για το προαναφερόμενο μοντέλο και πως μπορεί η συνάρτηση Gerber-Shiu να πάρει πιο απλές μορφές ώστε να δύναται να υπολογιστεί. Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, εισάγουμε μία στρατηγική σταθερού μερίσματος και παρουσιάζουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu και των ροπών των προεξοφλημένων μερισμάτων, κάτω από την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται εισαγωγή της ανανεωτικής θεωρίας και πως αυτή συνδέεται με τη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις ελλειμματικές εξισώσεις, καθώς επίσης και αριθμητικές εφαρμογές που αφορούν τις μορφές της συνάρτησης Gerber-Shiu και το πως μπορεί αυτή να υπολογιστεί. Οι εφαρμογές αφορούν την εκθετική κατανομή καθώς επίσης και την κατανομή Erlang. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 γίνεται παρουσίαση των βασικών συμπερασμάτων της διπλωματικής εργασίας.

ABSRACT

The purpose of this thesis is to present the various bankruptcy measures and the distribution of dividends that were paid, which are related to the stochastic surplus procedures. We consider that there is a dependence between the intermediate times of occurrence of risks and the respective sizes of individual losses, considering at the same time the existence of dividend strategies. In the present project, we examine the aforementioned dependency structure through the Farlie-Gumbel-Morgenstern copula, known as FGM copula. Then, for each of the examined cases and for the corresponding modified stochastic surplus procedures, we will study the Gerber-Shiu functions, and the expected dividends distributed by the insurance company, until the moment of bankruptcy.

In Chapter 1, we introduce the basic tools of the actuarial mathematics and the theory of probability. In Chapter 2, we describe the classic model of the risk theory and present some important results for the Gerber-Shiu function regarding the above model and how can we implement more convenient representation formulas, in order to calculate more easily this function. Also, in the same chapter, we introduce a fixed dividend strategy, and we present the detailed results for the Gerber-Shiu function and the torques of discounted dividends, arising under the aforementioned strategy. In Chapter 3, we introduce the renewal theorem and in which way it is related to the Gerber-Shiu function and the deficit equations. Furthermore, we present the calculation method and the numerical applications, concerning the forms of the Gerber-Shiu function, in the case of the exponential and Erlang distribution. Finally, in Chapter 4 we discuss the results and the main conclusions of the thesis.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Για να γίνει εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εργαλεία που εκτιμούν τον κίνδυνο για τη διαχείριση του λογαριασμού του δανειολήπτη, έως και την πιθανή εγγραφή. Η αύξηση του δανεισμού για έναν υποψήφιο πιστώσεως εκτιμάται, συνήθως, χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης. Η συμφωνία της Βασιλείας 2 είχε ως αντίκτυπο αρνητικές επιπτώσεις στον τρόπο που αξιολογούνταν οι αιτούντες προς πίστωση, αλλά και στην αναπροσαρμογή τραπεζικών πολιτικών. Η εφαρμογή αυτή βοηθά να γίνεται σωστή διάκριση μεταξύ των αιτούντων, τους οποίους ο δανειολήπτης είναι σίγουρος, ότι θα αποπληρώσει ή ξεχρεώσει το δάνειο ή την πιστωτική κάρτα και στους αιτούντες για τους οποίους ο δανειστής αισθάνεται ανασφαλής. Έτσι, για να επιτευχθεί αυτή η διάκριση χρησιμοποιείται ένας κανόνας. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο δανειστής χρησιμοποιεί ένα δείγμα δανειοληπτών, των οποίων η απόδοση της αποπληρωμής έχει παρατηρηθεί. Σημαντικές πληροφορίες, όπως το εισόδημα και τα έτη αποληρωμής του δανείου κάθε δανειολήπτη, είναι διαθέσιμα για διάφορα κοινωνικό - δημογραφικά στοιχεία, αλλά και για άλλα δάνεια ή για άτομα που γειτνιάζουν με αυτά τα χαρακτηριστικά. Διάφορες έρευνες έδειξαν ότι οι δανειστές για να παρατηρήσουν το ρόλο αθέτησης κινδύνου στους όρους του δανείου, αλλά και τις συνέπειες που έχουν αυτα στη συμπεριφορά των νοικοκυριών, χρησιμοποίησαν, την τιμολόγηση των κινδύνων των επιτοκίων, στις αγορές των καταναλωτικών δανείων στα μέσα της δεκαετίας του 1990. Σύμφωνα, με την ερευνήτρια Edelberg τα πρότυπα έχουν τρεις προβλέψεις:

- Πρώτον, το ασφάλιστρο που καταβλήθηκε ανά μονάδα κινδύνου θα έπρεπε να είχε αυξηθεί κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου
- Δεύτερον, τα επίπεδα χρέους θα έπρεπε να είχαν επιδράσει αναλόγως.
- Τρίτον, λιγότερα νοικοκυριά υψηλού κινδύνου θα έπρεπε να είχαν αρνηθεί πίστωση, συμβάλλοντας περαιτέρω στο επιτόκιο που κατανέμεται μεταξύ των δανειζομένων υψηλότερου και χαμηλότερου κινδύνου.

Σύμφωνα με τη μελετη του Edelberg, μετά τα μέσα της δεκαετίας του 1990, παρατηρήθηκε μία σημαντική αύξηση του ασφαλίστρου που έπρεπε να καταβληθεί ανά μονάδα κινδύνου. Για παράδειγμα, για αύξηση 0,01 στην πιθανότητα πτώχευσης, η αντίστοιχη αύξηση επιτοκίου διπλασιάστηκε για δάνεια αυτοκινήτων, τριπλασιάστηκε για την πρώτη υποθήκη, και αυξήθηκε σχεδόν έξι φορές για τη δεύτερη υποθήκη. Ο δανεισμός αυξήθηκε περισσότερο για τα νοικοκυριά χαμηλού κινδύνου, που είδαν το σχετικό κόστος δανεισμού τους να πέφτει. Παράλληλα όμως, ενώ τα νοικοκυριά πολύ υψηλού κινδύνου απέκτησαν εκτεταμένη πρόσβαση σε πιστώσεις, οι αυξήσεις στα ασφάλιστρα κινδύνου υπονοούσαν, ότι ο δανεισμός τους στο σύνολό του είτε αυξήθηκε λιγότερο είτε, μερικές φορές, μειώθηκε.

Με την έγκριση της συμφωνίας της Βασιλείας 2, προστέθηκε ίσως το πιο σημαντικό κριτήριο που επηρεάζει τις διαδικασίες βαθμολόγησης καταναλωτικής πίστης, καθώς έχει καθορίσει τον τρόπο με τον οποίο οι τράπεζες σε μεγάλες χώρες, υπολογίζουν το αποθεματικό τους κεφάλαιο. Το ποσό του ασφαλίστρου, εξαρτάται από τη χρήση ενημερωμένων υποδειγμάτων βαθμολόγησης, για την εκτίμηση της πιθανότητας αθέτησης και άλλων μεθόδων για την εκτίμηση της απώλειας που έχει οριστεί και το ποσό που οφείλεται στην προεπιλογή. Η επίδραση της Βασιλείας 2, σχετικά με το ανταγωνιστικό πλεονέκτημα ενός ιδρύματος, είναι τόσο μεγάλη που η έρευνα για την επάρκεια, την εφαρμοσιμότητα και την εγκυρότητα των υιοθετημένων μοντέλων αποτελεί ένα τεράστιο και ενδιαφέρον θέμα μελέτης. Μια σημαντική χρήση των τεχνικών βαθμολόγησης είναι στην αξιολόγηση των αιτήσεων δανείων μικρών επιχειρήσεων και της παρακολούθησής τους για προσαρμογή πιστωτικού ορίου. Η βαθμολογία καταναλωτικής πίστης χρησιμοποιείται επίσης από κυβερνητικές υπηρεσίες (για παράδειγμα φορολογικές αρχές) όταν αποφασίζει ποιος είναι πιθανό να πληρώσει χρέη, χρησιμοποιείται από επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας όταν αποφασίζει εάν θα επιτρέψει στους καταναλωτές να χρησιμοποιούν ηλεκτρική ενέργεια / φυσικό αέριο κ.λπ. πριν από την πληρωμή.

Η βαθμολόγηση της πιστοληπτικής ικανότητας και η εκτίμηση κινδύνου ήταν μία από τις πιο επιτυχημένες εφαρμογές στατιστικών και επιχειρησιακών ερευνητικών εννοιών, καθώς έχει επιφέρει σημαντικές κοινωνικές επιπτώσεις. Έχει κάνει πρακτική την αξιολόγηση και τη χορήγηση εκατοντάδων εκατομμυρίων αιτήσεων πιστωτικών καρτών και άλλων προϊόντων δανείου και έτσι έχει βελτιώσει σημαντικά τον τρόπο ζωής εκατομμυρίων ανθρώπων σε όλο τον κόσμο. Έχει αυξήσει σημαντικά τον ανταγωνισμό στις πιστωτικές αγορές και αναμφισβήτητα μείωσε το κόστος δανεισμού σε πολλούς. Οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν έχουν εφαρμοστεί σε ένα ευρύ φάσμα πλαισίων λήψης αποφάσεων, μειώνοντας έτσι το κόστος σε όσους παρουσιάζουν ελάχιστο κίνδυνο για τους δανειστές.

Για τη διαχείριση του κινδύνου, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα συνεχώς προσπαθούν να κατασκευάσουν ευφυή συστήματα για να εκτιμήσουν την πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεων από κάποιο πελάτη. Για τη διαδικασία αξιολόγησης, αρχικά, οι εταιρείες εισάγουν τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε πελάτη στον εκάστοτε αλγόριθμο και στη συνέχεια παράγουν ένα πιστωτικό αποτέλεσμα, σύμφωνα με την εκτιμώμενη πιθανότητα ενός χρήστη να αθετήσει τις υποχρεώσεις του. Αυτή η πρακτική επιτρέπει στις εταιρείες να καθορίσουν το επίπεδο κινδύνου στο οποίο είναι διατεθειμένες να λειτουργήσουν και, συνεπώς, να ελαχιστοποιήσουν τις πιθανές απώλειες στις οποίες ενδέχεται να εκτεθούν. Ο στόχος αυτού του πιστωτικού αποτελέσματος, που εξατομικεύεται για κάθε πελάτη, είναι να εκτιμήσει εάν είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να αθετήσει τις οικονομικές του υποχρεώσεις και εάν θα εγκριθεί ή όχι μία πιθανή πίστωση, το ποσό της οποίας είναι σε κατώτερο επίπεδο κινδύνου από αυτό που είναι αποδεκτο από το ίδρυμα (Lawrence & Solomon, 2012). Συνήθως, διάφορες χρηματοοικονομικές εταιρείες σε όλο τον κόσμο έχουν αντιμετωπίσει αυτό το πρόβλημα ταξινόμησης μέσω τυπικών αλγορίθμων δυαδικής ταξινόμησης που δεν είναι ευαίσθητες στο κόστος, όπως λογιστική παλινδρόμηση, νευρωνικά δίκτυα, ανάλυση διακρίσεων, γενετικός προγραμματισμός και δέντρα αποφάσεων, μεταξύ άλλων (Lessmann, Baesens, Seow, Thomas, 2015).

Έτσι, η μοντελοποίηση αυτών των υποδειγμάτων παράγουν βαθμολογίες, και αυτή τη διαδικασία την αναλαμβάνει συνήθως ένα πιστωτικό γραφείο ή ένας οργανισμός αναφοράς καταναλωτών, δηλαδή εταιρείες αφιερωμένες στη συλλογή δεδομένων για άτομα καθ 'όλη τη διάρκεια της οικονομικής τους ζωής. Στη συνέχεια τα γραφεία αυτά, καθιστούν αυτές τις πληροφορίες διαθέσιμες στην αγορά, μέσω πιστωτικών αναφορών, για έναν εν δυνάμει δανειστή (Hurley & Adebayo, 2016). Για το σκοπό αυτό, το γραφείο πίστωσης εξετάζει τη συμπεριφορά των ατόμων με τις χρηματοοικονομικές εταιρείες με τις οποίες έχουν αλληλεπιδράσει και δημιουργεί ένα ποσοτικό αποτέλεσμα από αυτές τις πληροφορίες, το οποίο χρησιμοποιείται συνήθως ως δείκτης για τις εταιρείες δανεισμού, ώστε να εκτιμήσουν την πιθανότητα αθέτησης του εκάστοτε πελάτη. Μεταξύ άλλων, ορισμένοι παράγοντες που μεταβάλλουν τα αποτέλεσμα της οικονομικής έκθεσης είναι ο αριθμός των πιστώσεων στο ιστορικό, ο τύπος των πιστώσεων που αποκτήθηκαν, η χρήση αυτών των πιστώσεων ή πόσες από αυτές είναι διαθέσιμες, τα πιθανά χρέη, οι προεπιλογές πληρωμής εντός ενός ιστορικού, καθώς και οι πτωχεύσεις ή οι καθυστερημένες πληρωμές κτλ. Αυτές οι μεταβλητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν ή να χρησιμοποιηθεί η βαθμολογία ως πρώτη μεταβλητή εισόδου στο υπόδειγμα. Κάθε μέθοδος, ή πιο σωστά, οικογένεια μεθόδων, έχει τα δυνατά και αδύνατα σημεία της, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει κάποιο υπόδειγμα ή συνδυασμός υποδειγμάτων που να υπερτερεί σε κάθε περίπτωση από όλα τα υπόλοιπα.

Η τράπεζα είναι απαραίτητο να αποφασίσει ποιες έννοιες απώλειας πρέπει να χρησιμοποιηθούν, καθώς και αν θα περιλαμβάνονται ρυθμιστικοί βαθμοί σε κλίμακες, έτσι ώστε να επιλεγεί η σωστή μορφή και δομή του συστήματος αξιολόγησης. Τα κύρια στοιχεία γι αυτό το σύστημα αξιολόγησης των τραπεζών , δείχνει να είναι το μείγμα των μεγάλων δανειστών, αλλά και η έκταση στην οποία τα πιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούν ποσοτικά συστήματα, για τη διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου, καθώς και η ανάλυση και πρόβλεψη της κερδοφορίας. Το κάθε πιστωτικό ίδρυμα είναι υπεύθυνο, ώστε να αποφασίσει, εάν θα βαθμολογεί τους δανειολήπτες ανάλογα με την τρέχουσα κατάστασή τους, ή με την αναμενόμενη κατάστασή τους κάτω από ποικίλλες πιέσεις. Οι περισσότερες τράπεζας, χρησιμοποιούν αυτόν τον τρόπο αξιολόγησης, δηλαδή μελετούν την κατάσταση του δανειολήπτη και προβλέπουν την πιθανότητα αθέτησης στο κατώτερο όριο. Η διαφορά στη φιλοσοφία και στο θεωρητικό πλαίσιο, είναι ιδιαίτερα σημαντική, επίσης, και πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν (Treacy and Carey, 1998)

Ένα μεγάλο ποσοστό των θεσμών, όπως είναι οι εποπτικοί οργανισμοί των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής, δεν απαιτούν από τα πιστωτικά ιδρύματα να διατηρούν κανονιστικές ρυθμίσεις, ωστόσο, όμως, απαιτούν την τήρηση αρχείων, ώστε να διασφαλιστεί ότι τα δάνεια μπορούν να κατηγοριοποιούνται επακριβώς. Φυσικά, υπάρχουν περιπτώσες, που παιρνούν από ειδική παρακολούθηση, όμως δεν εμπίπτουν στα ρυθμιστικά προβλήματα, ωστόσο, οι τραπεζικοί λογαριασμοί συνήθως συμπεριλαμβάνουν τρεις ή τέσσερις βαθμούς περιουσιακών στοιχείων σε εσωτερικές κλίμακες. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε, ότι στην περίπτωση που ο αριθμός των βαθμών επιτυχίας, είναι ο ίδιος σε δυο διαφορετικές κλίμακες, ο κίνδυνος που σχετίζεται με τους ίδιους βαθμούς, είναι σχεδοόν πάντα διαφορετικός.

Οι τράπεζες, προκειμένου να υπάρχει όσο το δυνατόν πιο ακριβής και λεπτομερή πληροφορία, χρησιμοποιούν σχετικά τυπικές προσεγγίσεις στη διαχείριση πιστωτικού κινδύνου και είναι ικανές να επιλέξουν να αναλάβουν το κόστος που απαιτείται για τα συστήματα αξιολόγησης με μεγαλύτερο αριθμό βαθμών, ακόμη και αν προκείται για μια ιδιαίτερα δαπανηρή διαδικασία ως προς την ανάλυση και εξήγηση. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι όσο πιο λεπτομερέστερες είναι οι διακρίσεις κινδύνου,τόσο και πιο χρήσιμες είναι για την εκτίμηση της κερδοφορίας, αλλά και για την ανάλυση της κατανομής του κεφαλαίου και των μοντέλων τιμολόγησης. Τα τελευταία χρόνια, όλο και περισσότερες τράπεζες έχουν ξεκινήσει να χρησιμοποιούν τη λογιστική προσέγγιση. Το ποσοτό των βαθμών που χρησμοποιούνται για την διάκριση μεταξύ του σχετικά χαμηλού κινδύνου πίστωσης, έναντι του ποσοστού που χρησιμοποιείται για την διάκριση μεταξύ των επικίνδυνων πιστώσεων, τείνει να διαφέρει με τον επιχειρηματικό συνδυασμό της τράπεζας, πόσο περισσότερο ανα τις διάφορες εταιρίες. Είναι σημαντικό να σημειωθεί, πως οι έχει παρατηρηθεί ότι η κατανομή των βαθμών σε επενδυτικό επίπεδο και κάτω από αυτό, τείνει να είναι πιο ομοιόμορφη στις τράπεζες που ασχολούνται κυρίως με τη μεσαία αγορά (Treacy and Carey, 2000).

Ο πιστωτικός κίνδυνος υπήρξε ανέκαθεν ένα βασικό πρόβλημα στο ευρύτερο πλαίσιο της διαχείρισης κινδύνων στον χρηματοοικονομικό κλάδο. Σύμφωνα με τα πρότυπα που υιοθετήθηκαν από τη Βασιλεία III, οι τρεις βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν τον πιστωτικό κίνδυνο των χρηματοοικονομικών δανειστών είναι η πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεων τους, το ποσοστό ανάκτησης και το άνοιγμα κατά την αθέτηση. Ειδικότερα, στην πλειονότητα των μοντέλων που σχετίζονται με την τιμολόγηση του πιστωτικού κινδύνου και τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου, το ποσοστό ανάκτησης είναι απαραίτητη και πολύ ουσιαστική μεταβλητή (Chen, Zhou, Ji, & Zheng, 2019; Gurtler & Hibbeln, 2013; Hartmann-Wendels, Miller, &Tows , 2014; Shen, Lin, Tang, & Hsiao, 2016). Επιπλέον, το ποσοστό ανάκαμψης είναι επίσης ένας παράγοντας για την εξέταση της αποτελεσματικότητας οποιουδήποτε συστήματος αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας για τις εμπορικές τράπεζες, τις εισηγμένες εταιρείες, τα ΜΜΕ ή οποιαδήποτε περιουσιακά στοιχεία αυτών (Angilella and Sebastiano, 2015; Livingston, Poon & Zhou, 2018; Shi, Chi & Li, 2020; Treacy & Carey, 2000; White, 2010).

Για την ανάλυση πιστωτικών κινδύνων έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες αναλυτικές τεχνικές εκτίμησης. Κάποιες από αυτές περιλαμβάνουν στατιστικές μεθόδους, μοντέλα με βάση ενδεχόμενες απαιτήσεις και κάλυψη αξίας περιουσιακών στοιχείων των υποχρεώσεων χρέους, νευρωνικά δίκτυα και μέθοδοι επιχειρησιακής έρευνας (OR) όπως γραμμικός ή τετραγωνικός προγραμματισμός και ανάλυση δεδομένων (DEA). Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της βιβλιογραφίας επικεντρώνεται στη χρήση χρηματοοικονομικών παραγόντων όπως η ρευστότητα, η δυνατότητα και η κεφαλαιακή διάρθρωση στην αξιολόγηση κινδύνου (Altman and Saunders, 1998; Kumar and Ravi, 2007). Από το πρωτοποριακό έργο του Altman (1968) εμφανίστηκαν μια σειρά στατιστικών μελετών πρόβλεψης πτώχευσης χρησιμοποιώντας μεροληπτική ανάλυση – discriminant analysis (π.χ. Deakin, 1972; Blum, 1974), λογιστική παλινδρόμηση (π.χ. Martin, 1977; Ohlson, 1980; Zavgren, 1985; Keaseyetal., 1990), και ανάλυση probit (π.χ. Zmijewski, 1984; Skogsvik, 1990). Οι πιο πρόσφατες εργασίες σε αυτόν τον τομέα περιλαμβάνουν του Kolarietal (2002), ο οποίος βάσει λογιστικής παλινδρόμησης και αναγνώριση ορισμένων χαρακτηριστικών, ανέπτυξε ένα σύστημα έγκαιρης προειδοποίησης της τράπεζας, για ενδεχόμενη αποτυχία, των Jones και Hensher (2004) που χρησιμοποίησαν ένα μικτό μοντέλο logit για την πρόβλεψη της χρηματοοικονομικής δυσχέρειας, και του Canbasetal (2005), ο οποίος συνδύασε ανάλυση διακρίσεων, probit, logit για να σχηματίσει ένα ολοκληρωμένο σύστημα έγκαιρης προειδοποίησης. Επιπρόσθετα, συστήματα υποστήριξης αποφάσεων, σε συνδυασμό με πολλαπλά κριτήρια τεχνικής λήψης αποφάσεων, εισήχθησαν σε προβλήματα χρηματοοικονομικής φύσης, που αποσκοπούν στην αξιολόγηση του κινδύνου αποτυχίας των επιχειρήσεων (π.χ. Zopounidis, 1987; Mareschal and Brans, 1991; Zopounidisetal., 1992; Diakoulakietal., 1992; Siskosetal., 1994; Zopounidis and Doumpos, 1998; Emeletal., 2003).

Λαμβάνοντας υπόψη τα ελαττώματα του συστήματος αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας που κατά καιρούς δημοσιεύονται και αναλύονται, υπάρχουν κάποιοι δείκτες, οι οποίοι, επιλέγονται για την προσέγγιση της εκτίμησης αθέτησης της πιστοληπτικής ικανότητας (Emekteretal 2015, Rongdaetal 2020).

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε δείκτη παρουσιάζεται η εξής ομαδοποίηση:

1. Ηλικία: Οι νέοι που μόλις εισήλθαν στο χώρο εργασίας τείνουν να έχουν χαμηλότερα εισοδήματα και η ικανότητα αποπληρωμής τους τείνει να είναι χαμηλότερη. Το εισόδημα ατόμων ηλικίας 31-45 είναι σχετικά σταθερό. Το εισόδημα ατόμων άνω των 45 ετών φαίνεται να μειώνεται, με αποτέλεσμα να μειώνεται και η οικονομική τους σταθερότητα.

2. Εκπαίδευση: Γενικά, τα άτομα με υψηλότερα ακαδημαϊκά προσόντα αναμένουμε να έχουν υψηλότερα επίπεδα εισοδήματος, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν υψηλότερα πιστωτικά επίπεδα.

3. Γάμος: Ένας γάμος τείνει να έχει υψηλότερο κόστος. Αυτό επηρεάζει τα παντρεμένα ζευγάρια και τα καθιστά πιο προσεκτικά στα πιστωτικά ζητήματα.

4. Ποσό δανείου: Ένα μεγάλο ποσό δανείου θα προκαλέσει μεγαλύτερη οικονομική πίεση στον οφειλέτη, γεγονός που θα οδηγήσει σε υψηλότερο κίνδυνο αθέτησης.

5. Επιτόκιο δανείου: Ένα υψηλότερο επίπεδο επιτοκίου θα προκαλέσει μεγαλύτερη οικονομική πίεση στον δανειολήπτη, γεγονός που θα οδηγήσει επίσης σε υψηλότερο κίνδυνο αθέτησης.

6. Διάρκεια δανείου: Όσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος αποπληρωμής του δανείου, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα του δανειολήπτη, λόγω των συνεχόμενων αλλαγών της οικονομίας, οπότε ο κίνδυνος αθέτησης είναι μεγαλύτερος.

7. Έσοδα: Όσο υψηλότερο είναι το εισόδημα, τόσο ισχυρότερη είναι η ικανότητα αποπληρωμής ενός δανείου. Επιτυγχάνεται έτσι η χρηματοοικονομική σταθερότητα με αποτέλεσμα ο κίνδυνος χρεοκοπίας να είναι πολύ μειωμένος.

8. Μέγεθος εταιρείας: Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος μονάδας του δανεισμού, τόσο ισχυρότερη είναι η ικανότητα πληρωμής του μισθού, έτσι το πιστωτικό επίπεδο του δανειολήπτη είναι πιο σταθερό.

9. Έτη εργασίας: Όσο πιο πολλά είναι τα έτη εργασίας, τόσο λιγότερο επισφαλής είναι η εργασία κάποιου, με αποτέλεσμα ο κίνδυνος αθέτησης να είναι χαμηλότερος.

10. Υποθήκη ακινήτων: Η ύπαρξη ενός ακινήτου σημαίνει ότι ο δανειολήπτης έχει υψηλότερη χρηματοοικονομική δύναμη με αποτέλεσμα να έχει υψηλότερο πιστωτικό επίπεδο. Η πίεση αποπληρωμής των στεγαστικών δανείων μειώνει την ταμειακή ροή των δανειστών, αυξάνοντας έτσι τον κίνδυνο αθέτησης.

11. Δάνειο αυτοκινήτου: Η κατοχή ενός αυτοκινήτου υποδηλώνει ότι ο δανειολήπτης έχει υψηλότερη χρηματοοικονομική ισχύ και συνεπώς έχει υψηλότερο πιστωτικό επίπεδο. Η πίεση αποπληρωμής ενός καταναλωτικού δανείου μειώνει την ταμειακή ροή των δανειστών, αυξάνοντας έτσι τον κίνδυνο αθέτησης.

12. Ποσοστό δανείων που εξοφλήθηκαν: Οι δανειολήπτες με υψηλότερο ποσοστό ιστορικού δανείων θα έχουν μικρότερη πιθανότητα αποπληρωμής ενός δανείου με αποτέλεσμα αυξημένο κίνδυνο αθέτησης.

13. Ποσοστό σοβαρής καθυστέρησης: Οι δανειολήπτες με υψηλό ποσοστό αποπληρωμής καθυστερημένων υποχρεώσεων έχουν συχνά μεγαλύτερη πιθανότητα μελλοντικού κινδύνου αθέτησης.

14. Πληροφορίες ελέγχου ταυτότητας: Όσο περισσότερος είναι ο αριθμός των πληροφοριών πιστοποίησης του δανειολήπτη, τόσο λιγότερο επισφαλές καθίσταται το προφίλ του, με αποτέλεσμα ο κίνδυνος αθέτησης να μειώνεται.

15. Περιφερειακό κατά κεφαλήν διαθέσιμο εισόδημα: Το κατά κεφαλήν διαθέσιμο εισόδημα σε μια περιοχή, που ανάλογα επηρεάζει και την πιθανότητα

αθέτησης των δανειακών υποχρεώσεων του πελάτη. Όσο μεγαλύτερο το κατα κεφαλήν εισόδημα, τόσο ελαχιστοποιείται η πιθανότητα αθέτησης.

Στην αναλογιστική βιβλιογραφία, μεγάή προσοχή δίνεται στο κλασσικό μοντέλο θεωρίας κινδύνου, στο οποίο οι απαιτήσεις προκύπτουν, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, καθώς και με ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου, όπως του Sparre Andersen. Οι πιθανότητες χρεοκοπίας και άλλα μέτρα χρεοκοπίας, όπως η κατανομή του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, καθώς και το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, έχουν μελετηθεί εκτενώς. Μια ενιαία προσέγγιση, για την κοινή μελέτη αυτών των θεμελιωδών μέτρων χρεοκοπίας με μια μόνο συνάρτηση, έχει προταθεί από τους Gerber και Shiu (1998), οι οποίοι εισήγαγαν τη συνάρτηση αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής για το κλασσικό μοντέλο ρίσκου. Για μια πιο λεπτομερή μελέτη αυτών των μέτρων χρεοκοπίας παραπέμπουμε στους Linand & Willmot (1999) και τις πηγές του άρθρου αυτού. Έκτοτε πολλοί συγγραφείς έχουν μελετήσει διάφορα μοντέλα ανανέωσης κινδύνου με συγκεκριμένους interclaim χρόνους. Όπως είδαμε καθόλη την εργασία, η κατανομή Erlang είναι μια από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες κατανομές στη θεωρία κινδύνου και τη θεωρία ουρών (queueing theory). Πλέον υπάρχουν αρκετά αποτελέσματα σχετικά με την αξιολόγηση της συνάρτησης Gerber - Shiu για μοντέλα ανανέωσης κινδύνου, όταν οι χρόνοι interclaim συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Erlang. Δείτε για παράδειγμα τους Dickson (1998), Dickson και Hipp (1998, 2001), Cheng και Tang (2003), Tsai και Sun (2004), Li και Garrido (2004), Sun (2005), Gerber και Shiu (2005). Κατά τη μελέτη αυτών των μοντέλων θεωρείται ότι τα μεγέθη των claim και οι χρόνοι interclaim είναι αμοιβαία ανεξάρτητα. Παρόλο που η υπόθεση αυτή πράγματι απλουστεύει τη μελέτη αρκετών μέτρων χρεοκοπίας, έχει αποδειχθεί ότι είναι ακατάλληλη και πολύ περιοριστική σε μερικές πραγματικές εφαρμογές. Παραδείγματος χάρη, κατά τη μοντελοποίηση ζημιών λόγω φυσικών καταστροφικών γεγονότων (π.χ. σεισμοί), η ένταση της καταστροφής και ο χρόνος που πέρασε από την τελευταία καταστροφή αναμένεται να εξαρτώνται. Αναφερόμαστε στους Boudreault (2003) και Nikoloulopoulos και Karlis (2008) για τέτοιου είδους δομή εξάρτησης κατά την περίπτωση σεισμού. Πρόσφατα, πολλοί ερευνητές έχουν στρέψει την προσοχή τους σε μοντέλα κινδύνου που περιλαμβάνουν εξάρτηση μεταξύ των μεγεθών claim και των χρόνων interclaim. Η μοντελοποίηση της δομής εξάρτησης έχει οδηγήσει σε ορισμένες γενικεύσεις του κλασσικού μοντέλου κινδύνου. Οι Albrecher και Boxma (2004) επέκτειναν το κλασσικό μοντέλο κινδύνου θεωρώντας ότι ο χρόνος interclaim εξαρτάται με το προηγούμενο μέγεθος claim και μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας. Μια γενίκευση αυτής της δομής εξάρτησης μελετήθηκε από τους Albrecher και Boxma (2005), οι οποίοι εξέτασαν ένα Markov-εξαρτώμενο μοντέλο κινδύνου. Οι Albrecher και Teugels (2006) θεώρησαν αρκετές copulas , ώστε να μοντελοποιήσουν τη δομή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους claim και των χρόνων interclaim και μελέτησαν την ασυμπτώτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας τόσο σε πεπερασμένο όσο και σε άπειρο χρόνο. O Boudreaultetal (2006) επέκτεινε το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, εισάγοντας μια δομή εξάρτησης όπου η κατανομή του επόμενου μεγέθους claim εξαρτάται από το χρονικό διάστημα (που παρήλθε) από το τελευταίο claim και εξέτασαν τη συνάρτηση των Gerber - Shiu. O Mengetal (2008) μελέτησε την πιθανότητα χρεοκοπίας σε ένα μοντέλο ρίσκου με ρύθμιση εξάρτησης, όπου ο χρόνος μεταξύ δύο περιστατικών claim καθορίζει την κατανομή του επόμενου claim. O Cossetteetal (2008, 2010) θεώρησε την κλασσική σύνθετη Poisson κατανομή κινδύνου με μια dependence structure βασισμένη στην (γενικευμένη) Farlie - Gumbel – Morgenstern copula και αξιολόγησαν την συνάρτηση των Gerber - Shiu. O Badescuetal (2009) χρησιμοποιώντας τεχνικές ροής ρευστών μελέτησε τη συνάρτηση των Gerber – Shiu μοντελοποιώντας τη δομή εξάρτησης μέσω δισδιάστατων κατανομών τύπου-φάσης. O Ambagaspitiya (2009) μέσω της τεχνικής παραγοντοποίησης των Wiener – Hopf απέκτησε τις πιθανότητες χρεοκοπίας για δύο τάξεις των δισδιάστατων κατανομών που μοντελοποιούν το μέγεθος claim και το χρόνο interclaim. O Cheungatal (2010) μελέτησε τις δομικές ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης των Gerber – Shiu, υποθέτοντας μια γενική δομή εξάρτησης για το μοντέλο ανανέωσης κινδύνου. O Albrecheretal (2011) απέκτησε κατηγορηματικούς τύπους χρεοκοπίας για μοντέλα με εξάρτηση μεταξύ μόνο των claims ή μεταξύ μόνο των χρόνων interclaim-only μέσω copula. Οι Zhang and Yang (2011) μελέτησαν τις συναρτήσεις των Gerber - Shiu για ένα σύνθετο μοντέλο κινδύνου Poisson με διαταραχή μέσω διάχυσης και δομή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους claim και του χρόνου interclaim βασισμένη στη Farlie - Gumbel – Morgenstern copula.

Σε αυτή την εργασία , λαμβάνουμε υπόψη την ανανέωση ή διαδικασία κινδύνου του Sparre Andersen, με εξάρτηση μεταξύ του μεγέθους claim και του χρόνου interclaim, βασιζόμενοι στην Farlie - Gumbel – Morgenstern copula. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι κατανέμονται σύμφωνα με μια κατανομή Erlang(n). Επομένως τα μοντέλα μας κινδύνου είναι μια επέκταση της κλασσικής σύνθετης διαδικασίας κινδύνου Poisson. Η επιλογή μιας κατανομής Erlang(n) οφείλεται στο γεγονός ότι είναι πιο γενική από την εκθετική κατανομή επιτρέποντας την ευέλικτη μοντελοποίηση των χρόνων και οργανώνεται ως εξής: Αρχικά, περιγράφουμε τη δομή εξάρτησης του προτεινόμενου μοντέλου. Εξάγουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg και αναλύουμε τις ρίζες της. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε μετασχηματισμό Laplace για την συνάρτηση των Gerber - Shiu. Κατόπιν, γίνεται η ανάλυση της συνάρτησης Gerber - Shiu με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα . Τέλος, γίνεται σαφής αναφορά στην ελλειματική εξίσωση της συνάρτησης Gerber - Shiu, στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία και δίνονται ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα μαζί με εκφράσεις για τις discounted κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείματος κατά την χρεοκοπία.

Κεφάλαιο 1: Προαπαιτούμενα Πιθανοτήτων

1.1 Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός:

Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της X ορίζεται να είναι η συνάρτηση

$$\hat{f}_X(s) = E(e^{-sX})$$

Ειδικότερα, αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $p(x) = P(X = x)$ και διακριτό σύνολο στηρίγματος $S = \{x \in \mathbb{R}: p(x) > 0\}$, τότε:

$\hat{f}_X(s) = E(e^{-sX})=\sum_{j\in S} e^{-sj}p(j)$

Αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f_X, το οποίο θα είναι και η πιο συνήθης υπόθεση σε αυτή την εργασία, τότε:

$$\hat{f}_X(s) = E(e^{-sX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-su} f_X(u)du$$

Βέβαια είναι σαφές ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης μετασχηματισμός Laplace είναι το ίδιο με το διάστημα σύγκλισης της αντίστοιχης σειράς ή του αντίστοιχου ολοκληρώματος

Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$E(S) = -\left[\frac{d\hat{f}_X(s)}{ds}\right]_{s=0}, E(S^2) = \left[\frac{d^2\hat{f}_X(s)}{ds^2}\right]_{s=0}, \cdots, E(S^n) = (-1)^n\left[\frac{d^n\hat{f}_X(s)}{ds^n}\right]_{s=0}$$

<u>Θεώρημα αρχικής τιμής</u>:

Έστω μια συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $\hat{f}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της. Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to +\infty} s\,\hat{f}(s)$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $\lim_{t\to 0^+} f(t) = M \in \mathbb{R}$. Αλλάζοντας μεταβλητή στο ολοκλήρωμα παίρνουμε τις διαδοχικές ισότητες:

$$s\,\hat{f}(s) = s\int_0^{+\infty} e^{-st} f_X(t)dt = \int_0^{+\infty} f_X\left(\frac{t}{s}\right)e^{-t}dt$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το ολοκλήρωμα, επομένως:

$$\lim_{s\to+\infty} s\,\hat{f}(s) = \int_0^\infty \lim_{s\to+\infty} f_X\left(\frac{t}{s}\right) e^{-t}\,dt = \int_0^\infty Me^{-t}dt = M = \lim_{t\to0^+} f(t).$$

Θεώρημα τελικής τιμής:

Έστω μια συνάρτηση $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $\hat{f}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της. Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to0} s\,\hat{f}(s)$$

Απόδειξη:

Μπορούμε αρχικά να παρατηρήσουμε ότι:
$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = s\,\hat{f}(s) - \lim_{t\to0^+} f(t) = s\,\hat{f}(s) - f(0^+)$. Τότε όμως επειδή $\lim_{s\to0} e^{-st} = 1$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\lim_{s\to0}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0^+)$$

Επομένως:

$\lim_{s\to0} s\,\hat{f}(s) - f(0^+) = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0^+)$ και άρα $\lim_{s\to0} s\,\hat{f}(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$ που είναι το ζητούμενο.

1.2 Martingales

Θεωρούμε μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\colon t \geq 0\}$ και μια συλλογή από σ-άλγεβρες F_tέτσι ώστε $F_t \subseteq F_{t+1}$. Τότε η στοχαστική ανέλιξη X ονομάζεται martingale αν και μόνο αν για κάθε $t > s$ ισχύει ότι:

$$E(X_t|F_s) = X_s$$

1.3 Σύνθετες τυχαίες μεταβλητές

Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq1}$ και μια ακέραια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή N. Το τυχαίο άθροισμα $S_N = (X_1 + X_2 + \cdots + X_N) \cdot I(N \geq 1)$, ονομάζεται σύνθετη τυχαία μεταβλητή. Η κατανομή της S συνήθως είναι αρκετά δύσκολο να προσδιοριστεί καθώς σύμφωνα με το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$F_S(x) = P(S \le x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S \le x | N = n)\, P(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{S^{*n}}(x)\, p_n$$

Όπου με $F_{S^{*n}}(x)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση κατανομής – συνέλιξη που ορίζεται από το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (εδώ γνωρίζουμε το πλήθος τους γιατί $N = n$). Η δυσκολία υπολογισμού της κατανομής της S έγκειται ακριβώς στο γεγονός ότι η συνάρτηση συνέλιξης $F_{S^{*n}}(x)$ δεν είναι άμεσα υπολογίσιμη.

Ωστόσο, η μέση τιμή της στοχαστικής διαδικασίας $\{S(t): t \ge 0\}$ είναι αρκετά πιο εύκολο να υπολογιστεί. Αυτό έπεται από το θεώρημα διπλής μέσης τιμής καθώς:

$$E\big(S(t)\big) = E\big(E(S(t)|N)\big) = E(N(t)X_1) = E\big(N(t)\big)E(X_1)$$

$$V\big(S(t)\big) = E\big(V(S(t)|N)\big) + V\big(E(S(t)|N)\big)$$

Για να δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού, ας θεωρήσουμε το κλασικό παράδειγμα υπολογισμού όπου $N \sim Poisson(\lambda)$ με ανεξάρτητες και ισόνομες $X \sim \exp(\theta)\,, \theta > 0$. Τότε:

$$F_S(x) = P(S \le x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \cdots + X_n \le x | N = n)\, P(N = n)$$

Είναι γνωστό ότι δοθέντος $N = n$ θα ισχύει ότι $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Gamma(n, \theta)$ και επομένως με αντικατάσταση προκύπτει ότι :

$$F_S(x) = P(S \le x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^x \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} t^{\theta-1} e^{-\theta t} dt$$

Παραγωγίζοντας ως προς x τη συνάρτηση ολοκλήρωμα, προκύπτει οτι:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda\theta)^n}{n!\,\Gamma(n)} x^{\theta-1} e^{-\theta x} = e^{-\lambda}\sqrt{\lambda\theta}\, I_1\big(2\sqrt{\lambda\theta}\big) x^{\theta-1} e^{-\theta x}$$

όπου $I_1(z)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, η οποία ορίζεται μέσω του τύπους:

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^n}{n!\,\Gamma(n+2)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos t} \cos t \, dt$$

Η πυκνότητα αυτή υπολογίζεται λοιπόν σε μια σχετικά κλειστή μορφή, ωστόσο η σταθερά $I_1\big(2\sqrt{\lambda\theta}\big)$ μπορεί να υπολογιστεί μόνο αριθμητικά, μέσω του ολοκληρώματος που ορίστηκε παραπάνω.

Επιπλέον ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής είναι:

$$\widehat{f_S}(s) = E(e^{-s\cdot S}) = E\big(E(e^{-s\cdot S}|N)\big) = E\big(E\big(e^{-s(X_1+\cdots+X_N)}\big|N\big)$$
$$= E(E(e^{-sX_1})^N|N) = \sum_{n\geq 1} \widehat{f_X}(s)^n \, P(N=n)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $N \sim Poisson(\lambda)$ τότε:

$$\widehat{f_S}(s) = \sum_{n\geq 1} \widehat{f_X}(s)^n \, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\lambda\widehat{f_X}(s)\right)^n}{n!} = \exp\left(-\lambda(1-\widehat{f_X}(s)\right)$$

Αν υποθέσουμε για εφαρμογή ότι $X \sim \exp(\theta)$ με $\theta > 0$ τότε:

$$\widehat{f_X}(s) = E(e^{-s\cdot X}) = \int_0^{+\infty} e^{-su}\theta e^{-\theta u}du = \frac{-\theta}{s+\theta}\left[e^{-(s+\theta)u}\right]_0^{u\to+\infty} = \frac{\theta}{s+\theta}\ , s > -\theta$$

και άρα από το προηγούμενο αποτέλεσμα θα είναι:

$$\widehat{f_S}(s) = E(e^{-s\cdot S}) = \exp\left(-\lambda\left(1-\frac{\theta}{s+\theta}\right)\right) = \exp(-\lambda)\exp\left(\frac{\theta\lambda}{s+\theta}\right)$$

Ο τύπος αυτός είναι ιδιαίτερα βοηθητικός καθώς:

$$\frac{d\widehat{f_S}(s)}{ds} = -\exp(-\lambda)\exp\left(\frac{\theta\lambda}{s+\theta}\right)\frac{\theta\lambda}{(s+\theta)^2}$$

$$\frac{d^2\widehat{f_S}(s)}{ds^2} = \exp(-\lambda)\exp\left(\frac{\theta\lambda}{s+\theta}\right)\frac{\theta^2\lambda^2}{(s+\theta)^4} + \exp(-\lambda)\exp\left(\frac{\theta\lambda}{s+\theta}\right)\frac{\theta\lambda}{(s+\theta)^3}$$

Επομένως:

$$E(S) = -\frac{d\widehat{f_S}(s)}{ds}|_{s=0} = \frac{\lambda}{\theta}$$

$$E(S^2) = \frac{d^2\widehat{f_S}(s)}{ds^2}|_{s=0} = \frac{\lambda^2}{\theta^2} + \frac{\lambda}{\theta^2}$$

$$V(S) = \frac{\lambda^2}{\theta^2} + \frac{\lambda}{\theta^2} - \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2 = \frac{\lambda}{\theta^2}$$

Οι σύνθετες τυχαίες μεταβλητές, όπως θα δούμε, έχουν μεγάλη και ευρεία εφαρμογή στα αναλογιστικά μαθηματικά.

1.4 Συνάρτηση πλεονάσματος

Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_j να εκφράζουν τις απαιτήσεις-ύψος των αποζημιώσεων, τις οποίες υποθέτουμε ισόνομες και ανεξάρτητες. Επιπρόσθετα, θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες και ως προς το πλήθος των αποζημιώσεων στο διάστημα $[0,t]$, το οποίο θα συμβολίζεται με $N(t)$. Θα περιοριστούμε στα γεγονότα τα οποία ως ενδεχόμενα ανανεώνονται. Δυο πολύ συνηθισμένες επιλογές για την ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι η ανέλιξη Poisson, υπό την έννοια ότι $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$με $\lambda > 0$ ή $N(t) \sim Bin(t,p)$, όπου το τελευταίο έχει νόημα μόνο όταν ο χρόνος tείναι φυσικός. Τότε είναι άμεσο ότι η τυχαία μεταβλητή $S(t) = I(N(t) \geq 1) \cdot \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$ εκφράζει το ύψος των συνολικών απαιτήσεων στο $[0,t]$. Μαζί με την στοχαστική ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

Θεωρούμε u το αρχικό αποθεματικό της εταιρείας με ύψος ασφαλίστρου $c > 0$. Όπως αναφέρθηκε και πριν, με $N(t)$ συμβολίζουμε την στοχαστική διαδικασία, απαριθμήτρια του αριθμού των κινδύνων, οπότε προέκυψε η ανάγκη περιγραφής της διαδικασίας πλεονάσματος μέσα στον χρόνο. Είναι λογικό ότι ως πλεόνασμα, ορίζεται το αρχικό απόθεμα μαζί με το συνολικό ύψος ασφαλίστρων που έχουν εισπραχθεί εάν από αυτό αφαιρέσουμε το συνολικό ύψος ζημιών-αποζημιώσεων που πρέπει να καταβληθούν τη χρονική στιγμή t. Έτσι, η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος είναι:

$$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$$

Χρησιμοποιώντας όσα έχουμε πει για το c και τη σύνδεση του με το θ, θα ισχύει ότι :

$$U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu - S_{N(t)}\ , \mu = E(X)$$

Τότε η δυναμική της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος δίνεται ως:

$$dU(t) = cdt - dS_{N(t)}, t \geq 0$$

Τότε η μέγιστη σωρευτική απώλεια ορίζεται ως:

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_K = \sum_{i=1}^{k} Li$$

Η L βλέπουμε οτι παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα u και η κατανομή της συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εναλλακτικά,

$$L = max(S(t) - ct) = max\big(u - U(t)\big)$$

Η ποσότητα ct εκφράζει το συνολικό ποσό που εισπράττεται στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι;

$$S(t) = L_1 + L_2 + \cdots + L_{N(t)}$$

Συνάγουμε επίσης ότι η L_1 εκφράζει το ποσό της πτώσης της συνάρτησης πλεονάσματος $U(t)$ κάτω από το επίπεδο u, ενώ η L_2 αντίστοιχα το ποσό της πτώσης της συνάρτησης $U(t)$ κάτω από το επίπεδο $u - L_1$ κ.ο.κ.

Ορίζουμε επιπλέον τον συντελεστή ασφάλειας μέσω της σχέσης:

$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$, όπου απαιτούμε $c > \lambda\mu$. Προκύπτει τότε το επιβαρυμένο ασφάλιστρο

$c = \lambda\mu(1 + \theta)$. Είναι σαφές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά $\frac{c}{\lambda\mu} - 1$ τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας για μια εταιρεία και ταυτόχρονα τόσο μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους υπάρχει. Τέλος, θεωρούμε ότι για κάθε $t > 0$ τα έσοδα του ασφαλιστή έχει νόημα να είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα του, το οποίο συνεπάγεται τη σχέση:

$$E(ct) > E\big(S(t)\big) \Leftrightarrow c > \lambda\mu$$

Παρατήρηση:

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι υπό την ισχύ της, είμαστε βέβαιοι ότι η χρεοκοπία δεν θα συμβεί με πιθανότητα 1.

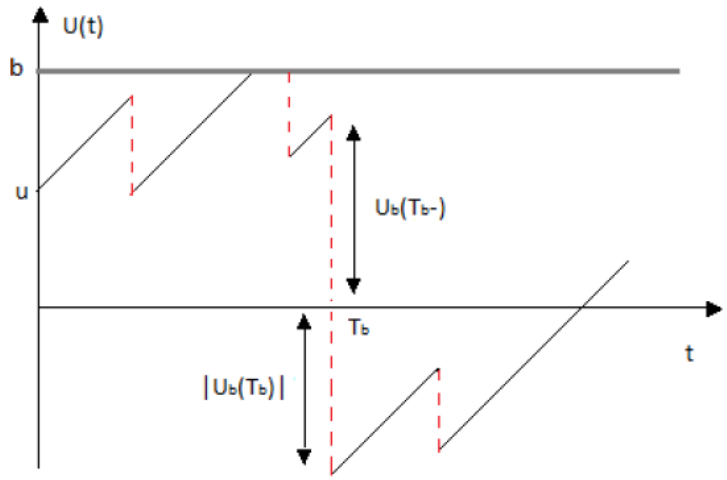
1.5 Η συνάρτηση πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Ορίζουμε ως $\mathrm{U_b(t)}$, την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος με αρχικό αποθεματικό $\mathrm{U_b(0) = u}$ υποθέτοντας όμως τώρα ότι υπάρχει στρατηγική μερίσματος. Επομένως, το πλεόνασμα $\mathrm{U_b(t)}$ δεν δύναται να ξεπεράσει ένα δοθέν όριο b και εκφράζεται ως:

$$\mathrm{U_b(t)} = \begin{cases} \mathrm{u + ct - S(t),} & \mathrm{U_b(t)} < b \\ \mathrm{u - S(t),} & \mathrm{U_b(t) = b} \end{cases}$$

ή ισοδύναμα σε μορφή μεταβολών

$$\Delta\mathrm{U_b(t)} = \begin{cases} \mathrm{cdt - \Delta S(t),} & \mathrm{U_b(t)} < b \\ \mathrm{-\Delta S(t),} & \mathrm{U_b(t) = b} \end{cases}$$



Σχήμα 1. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\mathrm{U_b(t)}$ υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

(*πηγή* Kasanni Aikaterini)

Επιπρόσθετα ορίζουμε τον χρόνο στάσης $\mathrm{T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\},\ u \leq b}$, ως τον χρόνο εκείνον στον οποίο το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό. Ο χρόνος $\mathrm{T_b}$ αναφέρεται ως **χρόνος χρεοκοπίας.** Επίσης, θεωρούμε $\mathrm{U_b(T_b -)}$ να είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία ενώ $\mathrm{|U_b(T_b)|}$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία. Σημειώνεται ότι η ειδική περίπτωση $\mathrm{b = +\infty}$ αναφέρεται και μελετάται ξεχωριστά στην κλασσική θεωρία χρεοκοπίας.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη σταθερού μερίσματος ορίζεται ως ακολούθως:

$$\mathrm{\psi_b(u) = P_r(T_b < \infty) = P_r(U_b(t) < 0), \quad u \leq b}$$

1.6 Χρόνος Χρεοκοπίας

Είναι ο χρόνος $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$, δηλαδή είναι ο πρώτος χρόνος στον οποίο η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος θα γίνει αρνητική. Ο χρόνος χρεοκοπίας T είναι χρόνος στάσης, δηλαδή είναι μια μετρήσιμη διαδικασία ως προς την ανέλιξη $S(t)$ και επιπλέον είναι μια εκτεταμένη τυχαία μεταβλητή καθώς:

$P(T < +\infty) < 1$ δηλαδή $P(T = +\infty) > 0$.

1.7 Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Για δοθέν αποθεματικό $u \geq 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u) = P(T < +\infty | U(0) = u)$$

Ενώ η **πιθανότητα μη χρεοκοπίας** είναι:

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = P(T = +\infty | U(0) = u)$$

Επανερχόμαστε τώρα στη στοχαστική διαδικασία:

$$S(t) = (I(N(t) \geq 1) \cdot \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$$

όπου όπως αναφέρθηκε και πριν είναι η στοχαστική διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων και επιπλέον η τυχαία μεταβλητή X_i αντιπροσωπεύει το i −οστο ύψος απαίτησης, όπου η ακολουθία $(X_i)_{i=1}^{+\infty}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη από μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής F_X και πυκνότητας f_X.

Ορίζουμε ως W_1 τον 1° χρόνο εμφάνισης του πρώτου ύψους απαίτησης ενώ για $i \geq 2$, ορίζουμε ως W_i τον ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ της $i-1$ και της i απαίτησης. Μια πολύ συνηθισμένη υπόθεση για την κατανομή των χρόνων W_i είναι είτε μια εκθετική κατανομή $\exp(\lambda)$με $\lambda > 0$ είτε η κατανομή $Erlang(n, \lambda)$ [ειδική περίπτωση της κατανομής $Gamma(a, b)$]. Τότε έχουμε:

$$f_W(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n}{(\mathrm{n}-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, t, \lambda > 0$$

Επιπλέον $F_W(t) = 1 - e^{-\lambda\, t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, ενώ ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$\widehat{f_W}(s) = E(e^{-sW}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f_W(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\lambda^n}{(\mathrm{n}-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(\lambda+s)t} dt =^{u=t(\lambda+s)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!\,(\lambda+s)^n} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα τυχαία διανύσματα (X_i, W_i) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και συμβολίζουμε με $f_{X,W}(x,t)$ την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας τους, με συνάρτηση κατανομής $F_{X,W}(x,t)$. Εισάγουμε τώρα, την (FGM) copula που εισήχθη από τους Farlie-Gumbel-Morgenstern προκειμένου να οριστεί η εξάρτηση του ύψους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων. Η (FGM) copula έχει προταθεί και χρησιμοποιηθεί πολλές φορές για το συγκεκριμένο κλάδο, ενδεικτικά αναφέρουμε τους (Chadjiconstantinidis and Vrontos, 2014).

Η (FGM) copula δίνεται ως εξής:

$$C_{\theta}^{FGM}(u_1,u_2) = u_1u_2 + \theta u_1u_2(1-u_1)(1-u_2), 0 \le u_1,u_2 \le 1, -1 \le \theta \le 1$$

Τότε χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό θα είναι για $x,t \ge 0$:

$$\begin{aligned} F_{X,W}(x,t) &= C_{\theta}^{FGM}\big(F_X(x),F_W(t)\big) \\ &= F_X(x)F_W(t) + \theta F_X(x)F_W(t)\big(1-F_X(x)\big)\big(1-F_W(t)\big) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $\theta = 0$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές (X,W) θα είναι ανεξάρτητες καθώς

$$F_{X,W}(x,t) = C_{0}^{FGM}\big(F_X(x),F_W(t)\big) = F_X(x)F_W(t)$$

Η (FGM) copula επιτρέπει τόσο αρνητικές όσο και θετικές εξαρτήσεις, αναλόγως τις τιμές του θ.

Χρησιμοποιώντας τώρα την $\overline{F_X}(x) = 1 - F_X(x), \overline{F_W}(t) = 1 - F_W(t)$, ο παραπάνω τύπος γράφεται στη συμπαγή μορφή:

$$F_{X,W}(x,t) = F_X(x)F_W(t) + \theta F_X(x)F_W(t)\overline{F_X}(x)\overline{F_W}(t), x,t \ge 0$$

Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$c_{\theta}^{FGM}(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 C_{\theta}^{FGM}(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 1 + \theta(1-2u_1)(1-2u_2)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,W}(x,t)$ τότε κατά τα γνωστά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης, θα είναι:

$$f_{X,W}(x,t) = \frac{\partial^2 F_{X,W}(x,t)}{\partial x \partial t} = c_{\theta}^{FGM}\big(F_X(x),F_W(t)\big)f_X(x)f_W(t)$$

$$= f_X(x)f_W(t) + \theta \frac{f_X(x)}{1-2F_X(x)} f_W(t)(2\,\overline{F_W}(t) - 1), x,t \ge 0.$$

Με βάση την υπόθεση ότι $W \sim Erlang(n,\lambda)$ θα είναι:

$$\begin{aligned} f_{X,W}(x,t) = f_X(x)&\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} \\ &+ \theta \frac{f_X(x)}{1-2F_X(x)}\left[2\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-2\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)\right. \\ &\left. - \frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\right], x,t \ge 0 \end{aligned}$$

Τότε όμως, η δεσμευμένη κατανομή της $X|W = t$ θα είναι:

$$f_{X|W}(x) = \frac{f_{X,W}(x,t)}{f_W(t)} = f_X(x) + \theta \frac{f_X(x)}{1-2F_X(x)}(2\,\overline{F_W}(t) - 1)$$

$$= f_X(x) + \theta \frac{f_X(x)}{1 - 2F_X(x)} \left[2e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - 1 \right], x, t \geq 0$$

1.8 Η εξίσωση Lundberg

Θεωρούμε τη συνάρτηση πλεονάσματος $\{U(t); t \geq 0\}$. Υποθέτουμε $V_0 = 0$ και

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Θεωρούμε επίσης τη διακριτή εκδοχή της στοχαστικής ανέλιξης $\{U(t); t \geq 0\}$, την οποία θα συμβολίζουμε με

$$U_k = U(V_k) = u + cV_k - \sum_{i=1}^{k} (cW_i - X_i)$$

Η μεταβλητή V_k εκφράζει τον χρόνο άφιξης της κ-οστής απαίτησης. Ψάχνουμε $s \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η στοχαστική διαδικασία $\{e^{-rV_k + sU_k}; k \in \mathbb{N}\}$ να είναι martingale.

Αυτή η διαδικασία είναι martingale αν και μόνο αν:

$$E\left(e^{-rW} e^{s(cW-X)}\right) = E\left(e^{(cs-r)W} e^{-sX}\right) = 1 \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση Lundberg στη θεωρία κινδύνου.

Η εξίσωση αυτή τότε μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$E\left(e^{-rW} e^{s(cW-X)}\right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{t(cs-r)} e^{-sx} f_{X,W}(x,t)\, dxdt$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{t(cs-r)} e^{-sx} \left(f_X(x) - \theta h(x)\right) f_W(t)\, dxdt$$

$$+2\theta \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{t(cs-r)} e^{-sx} h(x) f_W(t) \bar{F}_W(t)\, dxdt$$

$$= \left[\hat{f}(s) - \theta \hat{h}(s)\right] \widehat{f_W}(r - cs) + 2\theta \;\hat{h}(s) \int_0^{+\infty} e^{-t(r-cs)} f_W(t)\, \bar{F}_W(t) dt$$

Από τις σχέσεις που έχουμε για τα $f_W(t), \bar{F}_W(t)$ είναι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(r-cs)} f_W(t)\, \bar{\bar{F}}_W(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(r-cs)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) e^{-2\lambda t} dt$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{+\infty} e^{-t(r+2\lambda-cs)} t^{n+i-1} dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(n+k-1)!}{(r+2\lambda-cs)^{n+k}}$$

$$= \lambda^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \frac{\lambda^k}{(r+2\lambda-cs)^{n+k}} \ (2)$$

Έτσι συνδυάζοντας τις σχέσεις λαμβάνουμε ότι:

$$E\left(e^{-rW} e^{s(cW-X)}\right) = \left[\hat{f}_X(s) - \theta\, \hat{h}(s)\right] \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + 2\theta \hat{h}(s) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \frac{\lambda^k}{(r+2\lambda-cs)^{n+k}} \ (3)$$

Έτσι καταλήγουμε στη γενικευμένη εξίσωση Lundberg η οποία δίνεται σε μια συμπαγή μορφή ως εξής:

$$\hat{f}_X(s) \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta \hat{h}(s) \left[2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \frac{\lambda^k}{(r+2\lambda-cs)^{n+k}} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n \right] = 1 \ (4)$$

Πρόταση:

Αν για το επιτόκιο ανατοκισμού ισχύει ότι $r > 0, \theta \neq 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς $3n-1$ ρίζες, οι οποίες συμβολίζονται με $\rho_1(r), \cdots, \rho_{3n-1}(r)$ και επιπλέον αυτές βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό επίπεδο όπου ισχύει ότι $Re\left(\rho_i(r)\right) > 0$.

Για την απόδειξη της πρότασης χρειάζεται ν' αναφερθούμε στο Θεώρημα Rouche.

Θεώρημα Rouche

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C αλλά και στο εσωτερικό της. Αν ισχύει ότι $|g(z)| < |f(z)|$ πάνω στην καμπύλη C τότε οι συναρτήσεις $f+g, f$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της καμπύλης C.

Απόδειξη της πρότασης:

Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg μπορεί να γραφτεί και στην ισοδύναμη μορφή:

$$\lambda^n \hat{f}_X(s)(r+2\lambda-cs)^{2n-1} + \theta\, \lambda^n \hat{h}(s)\Big[\Big[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\lambda^{\kappa}(r+\lambda-cs)^n(r+\lambda-cs)^{n-k-1} - (r+2\lambda-cs)^{2n-1}\Big] = (r+\lambda-cs)^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1} \ (5)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι αυτή η ισοδύναμη εξίσωση έχει $3n-1$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο με θετικά πραγματικά μέρη. Σταθεροποιούμε τώρα $R>0$ και ορίζουμε το σύνολο

$C_R=\{s\in\mathbb{C}: |s|=R, Re(s)\geq 0\}$. Αργότερα θα αφήσουμε $R\to+\infty$. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rouche πάνω στην κλειστή θήκη του $C=\lim_{R\to+\infty} C_R$. Τώρα θα διακρίνουμε τις εξής δυο περιπτώσεις:

- Έστω ότι $Re(s)>0$. Τότε $|r+\lambda-cs|\to+\infty, |r+2\lambda-cs|\to+\infty$ καθώς $R\to+\infty$ και έτσι

$$\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta\hat{h}(s)\left[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]$$

$$\leq \left|\hat{f}_X(s)\right|\frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n} + \left|\theta\hat{h}(s)\right|\left|\left[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$\leq \left|\hat{f}_X(s)\right|\frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n} + \left|\theta\hat{h}(s)\right|\left[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^{n+k}}{|r+2\lambda-cs|^{n+k}} + \frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n}\right]$$

Επειδή όμως $|r+\lambda-cs|\to+\infty, |r+2\lambda-cs|\to+\infty$, τότε μπορούμε άμεσα να δούμε ότι καθώς $R\to+\infty$

$$\left|\hat{f}_X(s)\right|\frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n} + \left|\theta\hat{h}(s)\right|\left[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^{n+k}}{|r+2\lambda-cs|^{n+k}} + \frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n}\right]\to 0$$

Επομένως είναι σωστό να υποθέσουμε ότι

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta\hat{h}(s)\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]\right| < 1$$

Εισάγουμε τώρα τη βοηθητική τυχαία μεταβλητή Z η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x) = 2f_X(x)F_X(x)$. Καταρχάς η g είναι πράγματι συνάρτηση πυκνότητας αφού

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} \left[\left(F_X(x)\right)^2\right]' dx = \lim_{x\to+\infty}\left(F_X(x)\right)^2 - \lim_{x\to 0}\left(F_X(x)\right)^2 = 1$$

Ορίζουμε κατά τα γνωστά και τον μετασχηματισμό Laplace της Z με

$$\hat{g}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x)dx$$

Θα χρειαστούμε και τη συνάρτηση

$$\hat{d}_r(s) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n$$

- Ας υποθέσουμε λοιπόν τώρα ότι s μιγαδικός στο σύνολο C_Rμε $Re(s) = 0$

Τότε για $r > 0$ έχουμε:

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta\hat{h}(s)\left[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$= \left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta[\hat{f}_X(s) - \hat{g}(s)]\hat{d}_r(s)\right| \le \left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right| + \left|\theta[\hat{f}_X(s) - \hat{g}(s)]\hat{d}_r(s)\right|$$

$$= \left|\hat{f}_X(s)\right|\frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n} + |\theta|\left|\hat{f}_X(s) - \hat{g}(s)\right|\left|\hat{d}_r(s)\right| \le \frac{\lambda^n}{|r+\lambda-cs|^n} + |\theta|\left|\hat{d}_r(s)\right|$$

$$\le \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n + |\theta|\left|\hat{d}_r(0)\right| \le \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n + \left|\hat{d}_r(0)\right|$$

Δείχνουμε τώρα ότι όταν $r > 0$ τότε $\left|\hat{d}_r(0)\right| > 0$. Πράγματι, είναι:

$$\hat{d}_r(0) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{2\lambda}{r+2\lambda}\right)^{n+k} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n$$

$$\ge \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2\lambda}{r+2\lambda}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2\lambda}{r+2\lambda}\right)^n 2^{n-1} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n > 0$$

Στη τελευταία σειρά χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα από τη συνδυαστική

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^n, για\ κάθε\ n \ge 0$$

Έτσι καταλήγουμε ότι στην περίπτωση όπου ο s είναι φανταστικός ισχύει ότι:

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta\hat{h}(s)\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$\leq \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n + \hat{d}_r(0) = \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^n$$

$$= 2\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda}\right)^{\kappa} < 2\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}$$

$$= 2\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda}\right)^n 2^{n-1} = \left(\frac{2\lambda}{r+2\lambda}\right)^n < 1$$

καθώς $\frac{\lambda}{r+2\lambda} < \frac{1}{2}$. Επομένως αποδείχθηκε ότι σε κάθε περίπτωση ότι:

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta\hat{h}(s)\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]\right| < 1$$

και οπότε λόγω ισοδυναμίας θα είναι και

$$\left|\lambda^n\hat{f}_X(s)(r+2\lambda-cs)^{2n-1} + \theta\ \lambda^n\hat{h}(s)[\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\lambda^{\kappa}(r+\lambda-cs)^n(r+\lambda-cs)^{n-k-1} - (r+2\lambda-cs)^{2n-1}\right]\right| < |(r+\lambda-cs)^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1}|$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rouche πάνω στην καμπύλη C_R. Τότε λοιπόν θα έχουμε ότι η συνάρτηση

$T(s) = \lambda^n\hat{f}_X(s)(r+2\lambda-cs)^{2n-1} + \theta\ \lambda^n\hat{h}(s)[\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\lambda^{\kappa}(r+\lambda-cs)^n(r+\lambda-cs)^{n-k-1} - (r+2\lambda-cs)^{2n-1}\right]$ θα έχει το ίδιο πλήθος λύσεων με την συνάρτηση

$$P(s) = (r+\lambda-cs)^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1}$$

Όμως η εξίσωση $P(s)=0$ έχει ακριβώς $n+2n-1=3n-1$ ρίζες οι οποίες βρίσκονται εντός του συνόλου C_R για κάθε $R>0$. Σημειώνεται σε αυτό το σημείο ότι αν $r=0$, τότε οι υποθέσεις για το Θεώρημα Rouche δεν πληρούνται καθώς αν $s=0$ έχουμε:

$$\left|\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n + \theta\hat{h}(s)\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{r+2\lambda-cs}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{r+\lambda-cs}\right)^n\right]\right|$$

$$= \left|1+\theta\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right]\right| = \left|1+\theta\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}2^{n-1} - 1\right]\right| = 1$$

Αυτό σημαίνει ότι για $r=0$ μια προφανής ρίζα της εξίσωση Lundberg είναι η $s=0$. Η περίπτωση $r=0$ είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία είναι και ειδική περίπτωση της συνάρτησης ποινής Gerber-Shiu (Kyprianou, 2013).

Πρόταση:

Αν για το επιτόκιο ανατοκισμού ισχύει ότι $r=0, \theta \neq 0$, τότε η εξίσωση Lundberg έχει ακριβώς $3n-2$ ρίζες, οι οποίες συμβολίζονται με $\rho_1(r), \cdots, \rho_{3n-2}(r)$ και επιπλέον αυτές βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό επίπεδο όπου ισχύει ότι $Re\big(\rho_i(r)\big) > 0$ ενώ έχει ως ρίζα επίσης και το $s=0$.

Απόδειξη:

Για $R>0$, Θέτουμε $z = 1 - \frac{s}{R}$ και ορίζουμε τα σύνολα $D_R = \{s \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. Συμβολίζουμε με D το σύνολο $D = \lim_{R \to +\infty} D_R$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις:

$\lambda^n \hat{f}_X(s)(2\lambda - cs)^{2n-1} + \theta\, \lambda^n \hat{h}(s)\Big[\Big[2\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \lambda^{\kappa}(\lambda - cs)^n(\lambda - cs)^{n-k-1} - (2\lambda - cs)^{2n-1}\Big]$ και $(\lambda - cs)^n(2\lambda - cs)^{2n-1}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις πάνω στο σύνολο D. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Klimenok πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{d}{dz}\left\{1 - \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda - cR(1-z)}\right)^n - \theta \hat{h}(R - Rz)\left[2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{2\lambda - c(R-Rz)}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{\lambda - c(R-Rz)}\right)^n\right]\right\}_{z=1} > 0$$

Όμως

$E\Big(e^{(R-Rz)(cW-X)}\Big) = \hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda - cR(1-z)}\right)^n + \theta \hat{h}(\kappa - \kappa z)\left[2\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{\lambda}{2\lambda - c(R-Rz)}\right)^{n+\kappa} - \left(\frac{\lambda}{\lambda - c(R-Rz)}\right)^n\right]$

Οπότε η ζητούμενη ανισότητα επαναδιατυπώνεται ως:

$$\frac{d}{dz}\Big\{1 - E\Big(e^{(R-Rz)(cW-X)}\Big)\Big\}_{z=1} > 0$$

Επιπλέον έχουμε ότι $\frac{d}{dz}\Big\{1 - E\Big(e^{(R-Rz)(cW-X)}\Big)\Big\}_{z=1} = RE(cW - X)$ όπου ξέρουμε όμως ότι το τελευταίο θα είναι θετικό λόγω του γεγονότος ότι $E(cW_i - X_i) > 0$ αν $c > \frac{\lambda}{n}E(X)$

το οποίο έχει απαιτηθεί και επομένως το θεώρημα Klimenok μπορεί να εφαρμοστεί για να πάρουμε το συμπέρασμα της Πρότασης.

1.9 Η μελέτη της χρεοκοπίας στη ειδική περίπτωση του Διωνυμικού μοντέλου

Για απλότητα θα υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή στο σύνολο $\mathbb{N}$ με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$, δηλαδή $P(X = x) = f(x)$.

Υποθέτουμε επίσης ότι σε μια περίοδο υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα:

Ενδεχόμενο (Ι): Ζημία με πιθανότητα $0 < p < 1$ και:

Ενδεχόμενο (ΙΙ): Να μη γίνει ζημία με πιθανότητα $0 < q = 1 - p < 1$, επομένως η πιθανότητα να σημειωθούν πάνω από 1 ζημιές σε μια χρονική περίοδο είναι αμελητέα και πρακτικά ίση με 0.

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας αναλύεται σε τρεις συνιστώσες με τον εξής τρόπο:

Συνιστώσα 1: Δεν γίνεται καμία ζημιά με πιθανότητα q και το αποθεματικό αυξάνεται κατά μια χρηματική μονάδα, οπότε έπεται η πιθανότητα μετέπειτα χρεοκοπίας με πιθανότητα $\psi(u + 1)$.

Συνιστώσα 2: Έχουμε ακριβώς μια ζημιά με πιθανότητα p. Τότε για να μη συμβεί χρεοκοπία, θα πρέπει το ύψος της ζημιάς να είναι ένας αριθμός x για τον οποίο ισχύει η ανισότητα

$x < u + 1$, καθώς μόνο έτσι η εταιρεία έχει το επαρκές απόθεμα να καλύψει οικονομικά τη ζημιά και έπειτα πολλαπλασιάζουμε με την πιθανότητα να γίνει μετέπειτα χρεοκοπία με πιθανότητα $\psi(u + 1 - x)$ καθώς πλέον το νέο αποθεματικό θα έχει ύψος $u + 1 - x$.

Συνιστώσα 3: Να γίνει απευθείας ακριβώς μια ζημιά με πιθανότητα p αλλά το ύψος της ζημιάς x να είναι τέτοιο ώστε

$$\psi(u) = q\psi(u + 1) + p\sum_{x=1}^{u} \psi(u + 1 - x)f(x) + p\sum_{x=u+1}^{+\infty} f(x)\,, u \geq 1$$

Κεφάλαιο 2: Η συνάρτηση Gerber και Shiu

2.1 Προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας κατά Gerber και Shiu

Οι Gerber και Shiu θέλησαν να μελετήσουν από κοινού το χρόνο χρεοκοπίας T, την μεταβλητή $U(T)$, η οποία εκφράζει το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, και ποιο ήταν το πλεόνασμα πριν τη στιγμή χρεοκοπίας $U(T-)$. Η προσπάθεια τους ήταν να κατασκευάσουν μια συνάρτηση ποινής η οποία αποτελείται και από τις τρεις ποσότητες που μόλις αναφέρθηκαν.

Η συνάρτηση των Gerber και Shiu υποθέτει ότι έχουμε μια συνάρτηση βάρους-ποινής δυο μεταβλητών:

$$w: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

Η συνάρτηση τότε των Gerber και Shiu ορίζεται ως εξής (Kyprianou, 2013):

$$\Phi_r(u) = E\left(e^{-rt} w\left(u(T-1), |u(T)|\right) I(T < +\infty) \middle| U(0) = u\right) \ (7)$$

Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής T καθώς και η κατανομή των $U(T-1), U(T)$ είναι γνωστές σε κλειστή μορφή, τότε από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής θα έχουμε:

$$\Phi_r(u) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-rt} w(x, y) f(x, y, t | U(0) = u) \, dx dy dt \ (8)$$

Ανάλογα με την επιλογή της συνάρτησης ποινής w, η Φ_r παίρνει τη μορφή διάφορων γνωστών συναρτήσεων. Για παράδειγμα:

A) Αν $w(x, y) = 1$ οπότε στην ουσία δεν υπάρχει ποινή και το επιτόκιο είναι $r > 0$, τότε:

$$m_r(u) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-rt} \cdot 1 \cdot f(x, y, t | U(0) = u) \, dx dy dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-rt} f(t | U(0) = u) dt = M_T(u) (9)$$

όπου είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T

B) Αν όμως $w(x, y) = 1, r = 0$ τότε παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας έχοντας αρχίσει από αποθεματικό u (Ahn and Badescu, 2007), καθώς

$$m_r(u) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 1 \cdot 1 \cdot f(x, y, t | U(0) = u) \, dx dy dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t|U(0) = u)dt = P(T < +\infty|U(0) = u) = \psi(u)(10)$$

2.2 Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Για δοθέν $u \geq 0$ ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$\gamma_1(u) = \int_{u}^{+\infty} w(u, x-u) f_X(x)dx \, , \gamma_2(u) = \int_{u}^{+\infty} w(u, x-u)h(x)dx$$

$$\sigma_{1,r}(u) = \int_{0}^{u} m_r(u-x)f_X(x)dx + \gamma_1(u), \sigma_{2,r}(u) = \int_{0}^{u} m_r(u-x)h_X(x)dx + \gamma_2(u)$$

Για τη συνάρτηση $m_r(u)$, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, δεσμεύοντας ως προς τον πρώτο χρόνο που θα έχουμε το 1ο ύψος απαίτησης. Τότε:

$$m_r(u) = \int_{0}^{+\infty} e^{-rt} \left\{ \int_{0}^{u+ct} m_r(u+ct-x) f_{X,W}(x,t)dx + \int_{u+ct}^{+\infty} w(u+ct, x-u-ct) f_{X,W}(x,t)\, dx \right\} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-rt} f_W(t)[\sigma_{1,r}(u+ct) - \theta\sigma_{2,r}(u+ct)]dt$$

$$+2\theta \int_{0}^{+\infty} e^{-rt} f_W(t) \overline{F_W}(t) \sigma_{2,r}(u+ct)dt$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα, θέτοντας $y = u + ct$. Τότε

$dy = cdt$. Όταν $t \to 0^+$ έχουμε $y \to u^+$ ενώ όταν $t \to +\infty$ τότε $y \to +\infty$, επομένως:

$$c \cdot m_r(u) = \int_{u}^{+\infty} e^{-r\frac{y-u}{c}} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right) [\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\,]dy$$

$$+2\theta \int_{u}^{+\infty} e^{-r\frac{y-u}{c}} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right) \overline{F_W}\left(\frac{y-u}{c}\right) \sigma_{2,r}(y) dy$$

Συνεχίζοντας πάνω στην υπόθεση ότι $W \sim Erlang(n, \lambda)$, αντικαθιστούμε τις εκφράσεις που έχουμε για τις συναρτήσεις $f_W, \overline{F_W}$ και έτσι έχουμε:

$$c^n \cdot m_r(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_{u}^{+\infty} e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\right] dy$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_{u}^{+\infty} e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{y-u}{c}\right)^k\right) \sigma_{2,r}(y) dy$$

Αν λοιπόν ονομάσουμε με $\widehat{m_r}(s)$ τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτηση Gerber-Shiu, δηλαδή:

$$\widehat{m_r}(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{-su} m_r(u)\, du$$

τότε θα είναι:

$$c^n \widehat{m_r}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} c^n m_r(u)\, du = \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left[\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\right] dy + \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{y-u}{c}\right)^k\right) \sigma_{2,r}(y) dy$$

Για να μπορούμε να προχωρήσουμε τους υπολογισμούς, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα:

Για κάθε $a > 0, \kappa \in \mathbb{Z}^+$ ισχύει ότι:

$$\int_0^y (y-u)^k e^{-au} du = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j j! \binom{k}{j} \frac{y^{k-j}}{a^{j+1}} + (-1)^{k+1} \frac{k!}{a^{k+1}} e^{-ay}$$

Απόδειξη:

Για $\kappa = 0$ είναι:

$$\int_0^y e^{-au} du = \frac{1}{a}\left[-e^{-au}\right]_{u=0}^{u=y} = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-ay}\right] = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-ay}$$

το οποίο ισούται με την τιμή της παράστασης $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j j!\binom{k}{j}\frac{y^{k-j}}{a^{j+1}} + (-1)^{k+1}\frac{k!}{a^{k+1}}e^{-ay}$ για $\kappa = 0$

Για $\kappa = 1$ είναι:

$$\int_0^y (y-u)e^{-au}du = \frac{1}{a^2}(ay + e^{-ay} - 1)$$

Από την άλλη η τιμή του αθροίσματος $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j j!\binom{k}{j}\frac{y^{k-j}}{a^{j+1}} + (-1)^{k+1}\frac{k!}{a^{k+1}}e^{-ay}$ για $\kappa = 1$ θα δώσει:

$$\sum_{j=0}^{1}(-1)^j j!\binom{1}{j}\frac{y^{1-j}}{a^{j+1}} + (-1)^2\frac{1!}{a^2}e^{-ay}$$

$$= \frac{1}{a}y - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}e^{-ay} = \frac{1}{a^2}(ay + e^{-ay} - 1)$$

Επομένως η ισότητα ισχύει και για το $k = 1$

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση για κάποιο τυχόν $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση είναι αληθής και για το $\mathrm{n}+1$. Εφαρμόζοντας μια φορά την ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα έχουμε:

$$\int_0^y (y-u)^{n+1}e^{-au}du = \int_0^y (y-u)^{n+1}\left[\frac{-1}{a}e^{-au}\right]' du$$

$$= -\frac{1}{a}\left[(y-u)^{n+1}e^{-au}\right]_{u=0}^{u=y} + \frac{n+1}{a}\int_0^y (y-u)^n e^{-au}du$$

Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιούμε την επαγωγική υπόθεση για το ολοκλήρωμα $\int_0^y (y-u)^n e^{-au}du$. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στον τύπο:

$$\int_0^y (y-u)^{n+1}e^{-au}du$$

$$= \frac{1}{a}y^{n+1}e^{-ay} + \frac{n+1}{a}\left[\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j!\binom{n}{j}\frac{y^{n-j}}{a^{j+1}} + (-1)^{n+1}\frac{n!}{a^{n+1}}e^{-ay}\right]$$

$$= \frac{1}{a} y^{n+1} e^{-ay} + \sum_{j=0}^{n} (n+1)(-1)^j j! \binom{n}{j} \frac{y^{n-j}}{a^{j+2}} + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{a^{n+2}} e^{-ay}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητή στο άθροισμα και χρησιμοποιώντας και την ταυτότητα

$$(n+1)\binom{n}{j} = (n+1)\frac{n!}{(n-j)!\,j!} = \frac{(j+1)(n+1)!}{\big(n+1-(j+1)\big)!\,(j+1)!} = (j+1)\binom{n+1}{j+1}$$

Καταλήγουμε τελικά στη ζητούμενη σχέση:

$$\int_0^y (y-u)^{n+1} e^{-au} du = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j j! \binom{n+1}{j} \frac{y^{n+1-j}}{a^j} + (-1)^{n+2} \frac{(n+1)!}{a^{n+2}} e^{-ay}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Επιστρέφοντας τώρα πίσω στη σχέση:

$c^n \widehat{m_r}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} c^n m_r(u)\, du = \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}} (y - u)^{n-1} \left[\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\ \right] dydu + \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}} (y - u)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{y-u}{c}\right)^k \right) \sigma_{2,r}(y) dy$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}\right) [\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\ ] \int_0^y (y-u)^{n-1} \exp\left(\left(s - \frac{r+\lambda}{c}\right) u\right) du\, dy + \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}\right) \sigma_{2,r}(y) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{c^k k!} \int_0^y (y - u)^{n-k-1} \exp\left(\left(s - \frac{r+2\lambda}{c}\right) u)\ \right) du\, dy$$

Για $i = 1,2$, ορίζουμε τις ποσότητες

$$\hat{\sigma}_{i,r}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} \sigma_{i,r}(u)\, du$$

και επιπλέον

$$\hat{B}_r(s) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \frac{j!\binom{n-1}{j}}{\left(s-\frac{r+\lambda}{c}\right)^{j+1}}\int_0^{+\infty} y^{n-j-1}\exp\left(-\frac{r+\lambda}{c}y\right)[\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\,]\,dy$$

$$+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i i!}\sum_{j=0}^{n+k-1}(-1)^j \frac{j!\binom{n+k-1}{j}}{\left(s-\frac{r+2\lambda}{c}\right)^{j+1}}\int_0^{+\infty} y^{n+k-1-j}\exp\left(-\frac{r+2\lambda}{c}y\right)\sigma_{2,r}(y)dy$$

Τότε με χρήση του Λήμματος παίρνουμε τη σχέση:

$$c^n\widehat{m_r}(s) = (-1)^n\frac{\lambda^n}{\left(s-\frac{r+\lambda}{c}\right)^n}\left[\hat{\sigma}_{1,r}(s) - \theta\,\hat{\sigma}_{2,r}(s)\right]$$

$$+2\theta\lambda^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^k}{c^k\left(s-\frac{r+2\lambda}{c}\right)^{n+k}}\hat{\sigma}_{2,r}(s) + \hat{B}_r(s)$$

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε και τον μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων γ_1, γ_2:

$$\hat{\gamma}_i(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su}\gamma_i(u)du$$

Τότε έχουμε

$$\hat{\sigma}_{1,r}(s) = \hat{m}_r(s)\hat{f}_X(s) + \hat{\gamma}_1(s), \hat{\sigma}_{1,r}(s) = \hat{m}_r(s)\hat{h}(s) + \hat{\gamma}_2(s)$$

Συνεπώς, μπορούμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα της συνάρτησης $\hat{m}_r(s)$ καθώς:

$$\hat{m}_r(s)\left(c^n - \frac{\lambda^n}{\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^n}\left[\hat{f}_X(s) - \theta\hat{h}(s)\right] - 2\theta\lambda^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^k}{c^k\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{n+k}}\hat{h}(s)\right)$$

$$= \frac{\lambda^n}{\left(\frac{r+\lambda}{c} - s\right)^n} [\hat{\gamma}_1(s) - \theta \hat{\gamma}_2(s)]$$

$$+ 2\theta\lambda^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \frac{\lambda^k}{c^k \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{n+k}} \hat{\gamma}_2(s) + \hat{B}_r(s)$$

Θεώρημα:

Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε την κατανομή Erlang(n), στηριζόμενοι στην FGM copula, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{m}_r(s) = \frac{\hat{\beta}_{1,r}(s) + \hat{\beta}_{2,r}(s)}{\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)} \ (12)$$

όπου οι συναρτήσεις αυτές δίνονται από τους εξής τύπους:

$$\hat{h}_{1,r}(s) = \left(\frac{r+\lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}$$

$$\hat{h}_{2,r}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{f}_X(s) \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} + \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{h}(s) \times$$

$$\left[2\left(\frac{r+\lambda}{c} - s\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^\kappa}{c^k} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{n-k-1} - \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}\right]$$

$$\hat{\beta}_{1,r}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{\gamma}_1(s) \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} + \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \hat{\gamma}_2(s) \times$$

$$\left[2\left(\frac{r+\lambda}{c} - s\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^\kappa}{c^k} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{n-k-1} - \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}\right]$$

Τέλος, η συνάρτηση $\hat{\beta}_{2,r}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο με μεταβλητή το s, βαθμού το πολύ $3n - 2$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\beta}_{2,r}(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,r}(s) \prod_{k=1, k\neq j}^{3n-1} \frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k} \ (13)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση και στα δυο μέλη με $\frac{\left(\frac{r+\lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}}{c^n}$. Τότε είναι:

$$\frac{\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}}{c^{n}}\widehat{m_r}(s)\left(c^{n}-\frac{\lambda^{n}}{\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n}}\left[\widehat{f_X}(s)-\theta\hat{h}(s)\right]\right.$$

$$\left.-2\theta\lambda^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^{k}}{c^{k}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{n+k}}\hat{h}(s)\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}}{c^{n}}\frac{\lambda^{n}}{\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n}}\left[\hat{\gamma}_1(s)-\theta\hat{\gamma}_2(s)\right]$$

$$+2\theta\lambda^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^{k}}{c^{k}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{n+k}}\hat{\gamma}_2(s)+\hat{B}_r(s)$$

Λύνοντας τώρα ως προς τον μετασχηματισμό Laplace $\widehat{m_r}(s)$ καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση του θεωρήματος,

$$\widehat{m}_r(s)=\frac{\hat{\beta}_{1,r}(s)+\hat{\beta}_{2,r}(s)}{\hat{h}_{1,r}(s)-\hat{h}_{2,r}(s)}$$

με:

$$\hat{\beta}_{2,r}(s)=\frac{1}{c^{n}}\hat{h}_{1,r}(s)\hat{B}_r(s)$$

$$=-\left(\frac{\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}j!\binom{n-1}{j}\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n-j-1}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\hat{\mu}_j\left(\frac{r+\lambda}{c}\right)\right.$$

$$+\frac{2\theta\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k}}{c^{k}k!}\sum_{j=0}^{n+k-1}j!\binom{n+k-1}{j}\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}\right.$$

$$\left.\left.-s\right)^{2n-j-2}\hat{\delta}_{k,j}\left(\frac{r+2\lambda}{c}\right)\right)$$

$$=-\left(\frac{\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}j!\binom{n-1}{j}\left(\frac{r+\lambda}{c}-s\right)^{n-j-1}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\hat{\mu}_j\left(\frac{r+\lambda}{c}\right)\right.$$

$$+\frac{2\theta\lambda^{n}}{c^{n}(n-1)!}\sum_{j=0}^{2n-2}\frac{\lambda^{k}}{c^{k}k!}\sum_{k=max\{0,j+1-n\}}^{n-1}j!\frac{\lambda^{k}}{c^{k}k!}\binom{n+k-1}{j}\left(\frac{r+\lambda}{c}\right.$$

$$\left.\left.-s\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-j-2}\hat{\delta}_{k,j}\left(\frac{r+2\lambda}{c}\right)\right)$$

το οποίο όμως είναι πολυώνυμο ως προς τη μεταβλητή s το οποίο έχει μέγιστο βαθμό $3n-2$. Επιπλέον οι βοηθητικές συναρτήσεις $\widehat{\mu_j}$και $\hat{\delta}_{k,j}$ ορίζονται ως εξής:

$$\hat{\mu}_j(x) = \int_0^{+\infty} y^{n-1-j} \exp(-xy)\left[\sigma_{1,r}(y) - \theta\sigma_{2,r}(y)\right] dy$$

$$\hat{\delta}_{k,j}(x) = \int_0^{+\infty} y^{n+k-1-j} \exp(-xy)\, \sigma_{2,r}(y)\, dy$$

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση Lundberg που έχουμε αναφέρει προηγουμένως μπορεί να γραφτεί ως

$\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι οι αριθμοί $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{3n-1}$ είναι οι ρίζες του παρονομαστή της παράστασης

$$\widehat{m}_r(s) = \frac{\hat{\beta}_{1,r}(s) + \hat{\beta}_{2,r}(s)}{\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)}$$

Όμως επειδή η συνάρτηση $\widehat{m}_r(s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση, επομένως για να διατηρεί αυτή την ιδιότητα θα πρέπει όλες οι απροσδιοριστίες να άρονται, οπότε οι αριθμοί $\rho_1, \cdots, \rho_{3n-1}$ και άρα θα έχουμε ότι $\hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) + \hat{\beta}_{2,r}(\rho_j) = 0, j = 1, \cdots, 3n-1$ ή

$\hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) = -\hat{\beta}_{2,r}(\rho_j), j = 1, \cdots, 3n-1$. Όμως η συνάρτηση $\hat{\beta}_{2,r}(s)$ είναι πολυώνυμο ως προς s βαθμού το πολύ $3n-2$, εφαρμόζουμε την παρεμβολή Lagrange στα σημεία $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{3n-1}$ ως εξής

Θεωρούμε αρχικά τα πολυώνυμα

$$L_1(x) = \frac{(x-\rho_2)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_{3n-1})}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\cdots(\rho_1-\rho_{3n-1})}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-\rho_1)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_{3n-1})}{(\rho_2-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)\cdots(\rho_2-\rho_{3n-1})}$$

$$\cdots$$

$$L_j(x) = \prod_{k=1, k\neq j}^{3n-1} \frac{(x-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}, j = 1, 2, \cdots, 3n-1$$

Τότε

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{1,r}(s) &= \hat{\beta}_{1,r}(\rho_1)L_1(s) + \hat{\beta}_{1,r}(\rho_2)L_2(s) + \cdots + \hat{\beta}_{1,r}(\rho_{3n-1})L_{3n-1}(s)\\ &= -\hat{\beta}_{2,r}(\rho_1)L_1(s) - \hat{\beta}_{2,r}(\rho_2)L_2(s) - \cdots - \hat{\beta}_{2,r}(\rho_{3n-1})L_{3n-1}(s)\end{aligned}$$

$$= -\sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{2,r}(\rho_j) L_j(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{2,r}(\rho_j) \prod_{k=1, k\neq j}^{3n-1} \frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}$$

2.3 Ανάλυση της συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu όταν $u = 0$

Θα μελετήσουμε ορισμένες ποσότητες που συνδέονται με την καταστροφή και την χρεοκοπία, θέτοντας στη συνάρτηση Gerber-Shiu όπου u την τιμή 0. Θα υποτεθεί ότι οι ρίζες

$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{3n-1}$ είναι διακεκριμένες. Από το θεώρημα αρχικής τιμής έχουμε:

$$m_r(0) = \lim_{s\to+\infty} s\,\hat{m}_r(s) = \lim_{s\to+\infty} s\,\frac{\hat{\beta}_{1,r}(s) + \hat{\beta}_{2,r}(s)}{\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα

$$\hat{\beta}_{2,r}(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) \prod_{k=1, k\neq j}^{3n-1} \frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}$$

Παίρνουμε ότι :

$$m_r(0) = \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{\hat{\beta}_{1,r}(s)}{s^{3n-2}} - \frac{1}{s^{3n-2}} \sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}}{\frac{\hat{h}_{1,r}(s)}{s^{3n-1}} - \frac{\hat{h}_{2,r}(s)}{s^{3n-1}}}$$

$$= \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{1}{s^{3n-2}} \sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}}{(-1)^{3n-1}}$$

$$= \frac{-\sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{1}{(\rho_j-\rho_k)}}{(-1)^{3n-1}} = \sum_{j=1}^{3n-1} \hat{\beta}_{1,r}(\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{1}{(\rho_j-\rho_k)}$$

Θεωρούμε τώρα τις ποσότητες

$$b_{1,r}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1}$$

και

$$b_{2,r}(s) = \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \left[2 \left(\frac{r+\lambda}{c} - s \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{c^k} \binom{n+k-1}{n-1} \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s \right)^{n-k-1} - \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \right]$$

Τότε από τη σχέση

$$\hat{\beta}_{1,r}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n} \widehat{\gamma_1}(s) \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} + \theta \frac{\lambda^n}{c^n} \widehat{\gamma_2}(s) \times$$
$$\left[2 \left(\frac{r+\lambda}{c} - s \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^\kappa}{c^k} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s \right)^{n-k-1} - \left(\frac{r+2\lambda}{c} - s \right)^{2n-1} \right]$$

προκύπτει ότι:

$$\hat{\beta}_{1,r}(s) = b_{1,r}(s) \hat{\gamma}_1(s) + b_{2,r}(s) \hat{\gamma}_2(s)$$

Επιπλέον αν

$$b_{kj} = \frac{b_{k,r}(\rho_j)}{\prod_{i=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{1}{(\rho_j - \rho_i)}}, k = 1,2, j = 1,2, \cdots, 3n-1$$

Τότε όμως

$$m_r(0) = \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{b_{1,r}(\rho_j) \widehat{\gamma_1}(\rho_j) + b_{2,r}(\rho_j) \widehat{\gamma_2}(\rho_j)}{\prod_{i=1,k\neq j}^{3n-1} \frac{1}{(\rho_j - \rho_i)}} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{3n-1} b_{kj} \, \widehat{\gamma_k}(\rho_j)$$

Τώρα, επειδή

$$\gamma_1(x) = \int_x^{+\infty} w(x, y-x) \, f_X(y) dy = \int_0^{+\infty} w(x,y) f_X(x+y) \, dy$$

θα είναι:

$$\widehat{\gamma_1}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \gamma_1(x) dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-sx} w(x,y) \, f_X(x+y) dy$$

και με όμοιο τρόπο θα έχουμε

$$\widehat{\gamma_2}(s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-sx} w(x,y) \, h(x+y) dy$$

Επομένως:

$m_r(0) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} w(x,y)\left[f_X(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j x} + h(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j x}\right] dy\, dx$ (14)

Έστω $f(x,y,t|0)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της συνάρτησης πλεονάσματος και με έλλειμα και μέγεθος καταστροφής y και t η χρονική στιγμή καταστροφής, δοθέντος ότι $U(0)=0$. Επίσης με $f_r(x,y|0)$ συμβολίζουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος και του ελλείματος/καταστροφής, δοθέντος ότι $U(0)=0$. Τότε θα είναι:

$$f_r(x,y|0) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} f(x,y,t|0) dt$$

Από την εξίσωση (16) των Cheung et al (2010), για $u=0$ έχουμε :

$$m_r(0) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-rt} w(x,y) f(x,y,t|0) dt dy dx = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x,y) f_r(x,y|0)\, dy dx$$

Τότε λόγω της σχέσης

$$m_r(0) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x,y)\left[f_X(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j x} + h(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j x}\right] dy\, dx$$

επομένως:

$$f_r(x,y|0) = f_X(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j x} + h(x+y) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j x} \quad (15)$$

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε τον τελεστή Dickson-Hipp T_r, ο οποίος δρα πάνω σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις του $\mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο:

$$T_r g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-r(y-x)} g(y) dy,\ x \geq 0, r \in \mathbb{C}, Re(r) \geq 0$$

Ιδιότητες του τελεστή T_r

1.

$$T_r g(0) = \int_x^{+\infty} e^{-ry} g(y) dy\ = \hat{g}(r), r \in \mathbb{C}, Re(r) \geq 0$$

2.

$$T_{r_1} T_{r_2} g(x) = T_{r_2} T_{r_1} g(x) = -\frac{T_{r_2} g(x) - T_{r_1} g(x)}{r_2 - r_1}, x \geq 0, r \in \mathbb{C}, Re(r) \geq 0$$

3.

$$\widehat{T_r g}(s) = T_r \hat{g}(s) = T_s T_r g(0) = \frac{\hat{g}(s) - \hat{g}(r)}{r - s}, r \neq s \in \mathbb{C}$$

$$T_r \hat{g}(s) = \int_s^{+\infty} e^{-r(y-s)} \hat{g}(s) dy \ = \int_s^{+\infty} e^{-r(y-s)} \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{-ry+s(r-x)}\, g(x) dy dx = \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{-ry+s(r-x)}\, g(x) dy dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{s(r-x)} g(x) [-e^{-rs}]\, dx$$

4.

Για κάθε $r_1, r_2, \cdots, r_m$ διακεκριμένους μιγαδικούς, θεωρούμε το πολυώνυμο $\pi_m(s) = (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_m)$. Τότε ισχύει ότι

$$T_{r_1} T_{r_2} \cdots T_{r_m} g(x) = (-1)^m \sum_{i=1}^{m} \frac{T_{r_i} g(x)}{\pi'_m(r_i)} \ , \forall\, x \geq 0$$

και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace:

$$T_s T_{r_1} T_{r_2} \cdots T_{r_m} g(0) = (-1)^m \left[\frac{\hat{g}(s)}{\pi_m(s)} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{g}(r_i)}{(s - r_i)\pi'_m(r_i)} \right]$$

Έστω $f_{1,r}(x|0) = \int_0^{+\infty} f_r(x, y|0) dy$η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας της συνάρτησης πλεονάσματος και

$f_{2,r}(y|0) = \int_0^{+\infty} f_r(x, y|0) dx$η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας της συνάρτησης ελλείματος υποθέτοντας ότι $U(0) = 0$. Επειδή

$$\int_0^{+\infty} h(x + y) dy = \int_x^{+\infty} h(y) dy = \int_x^{+\infty} f_X(y)[1 - 2F_X(y)]\, dy = -F_X(x)\overline{F_X}(x)$$

Τότε είναι άμεσο ότι

$$f_{1,r}(x|0) = \int_0^{+\infty} f_r(x, y|0)\, dy \ = \overline{F_X}(x) \left[\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,r} e^{-\rho_j x} - F_X(x) \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,r} e^{-\rho_j x} \right]$$

$$f_{1,r}(y|0)=\int_0^{+\infty} f_r(x,y|0)\,dx \;=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,r}\int_0^{+\infty} e^{-\rho_j x} f_X(x+y)dx$$
$$+\sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,r}\int_0^{+\infty} e^{-\rho_j x} h(x+y)dx$$
$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,r}T_{\rho_j}f_X(y)+\sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,r}T_{\rho_j}h(y)$$

Επιπρόσθετα, ο μετασχηματισμούς Laplace της συνάρτησης $f_{2,r}$ είναι:

$$\widehat{f_{2,r}}(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sy}f_{2,r}(y|0)\,dy=T_s f_{2,r}(0|0)$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j}T_sT_{\rho_j}f_X(0)+\sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j}T_sT_{\rho_j}h(0)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ιδιότητα που έχει ο τελεστής T_r είναι:

$$\widehat{f_{2,r}}(s)=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,r}\widehat{f_X}(\rho_j)+b_{2,r}\hat{h}(\rho_j)}{s-\rho_j}-\widehat{f_X}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,r}}{s-\rho_j}-\hat{h}(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,r}}{s-\rho_j}$$

Χρησιμοποιώντας παρεμβολή Lagrange μπορούμε να δούμε ότι:

$$\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j}=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,r}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_\kappa-\rho_j)}=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\lambda^n(r+2\lambda-c\rho_j)^{2n-1}}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_\kappa-\rho_j)}$$
$$=-\frac{\lambda^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{k=1}^{3n-1}(\rho_k-s)}$$

και

$$\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,r}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_\kappa-\rho_j)}$$
$$=\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\theta\lambda^n\left[2(r+\lambda-c\rho_j)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k-1}\lambda^\kappa(r+2\lambda-c\rho_j)^{n-k-1}-(r+2\lambda-c\rho_j)^{2n-1}\right]}{c^{3n-1}(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_\kappa-\rho_j)}$$

$$= -\frac{\theta\lambda^n \left[2\left(r+\lambda-c\rho_j\right)^n \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k-1}\lambda^\kappa\left(r+2\lambda-c\rho_j\right)^{n-k-1} - \left(r+2\lambda-c\rho_j\right)^{2n-1}\right]}{c^{3n-1}\prod_{k=1}^{3n-1}(\rho_k - s)}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της $\widehat{f_{2,r}}(s)$ τελικά θα είναι:

$$\widehat{f_{2,r}}(s) = 1 - \frac{1}{c^{3n-1}\prod_{k=1}^{3n-1}(\rho_k - s)}\left\{(r+\lambda-cs)^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1} - \lambda^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1}\hat{f}_X(s) - \theta\lambda^n\left[2(r+\lambda-cs)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k-1}\lambda^\kappa\left(r+2\lambda-c\rho_j\right)^{n-k-1} - \left(r+2\lambda-c\rho_j\right)^{2n-1}\right]\hat{h}(s)\right\}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί συμπαγώς και στη μορφή

$$\widehat{f_{2,r}}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)}{\prod_{k=1}^{3n-1}(\rho_k - s)}$$

Ειδική περίπτωση

Αν τώρα θέσουμε τη συνάρτηση ποινής να είναι $w(x,y) = 1$, τότε μπορούμε να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνο χρεοκοπίας T, δοθέντος ότι $U(0) = 0$. Πράγματι αυτό θα είναι:

$$\widehat{m_T}(0) = E(e^{-rT}I(T<+\infty)|U(0)=0) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_r(x,y|0)dydx$$

$$= \int_0^{+\infty} f_{2,r}(y|0)dy = \lim_{s\to 0}\hat{f}_{2,r}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,r}(0) - \hat{h}_{2,r}(0)}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{3n-1}}$$

$$= 1 - \frac{(r+2\lambda)^{2n-1}[(r+\lambda)^n - \lambda^n]}{c^{3n-1}\prod_{k=1}^{3n-1}\rho_\kappa}$$

Επιπλέον για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(0)$, δοθέντος $U(0) = u$ θα έχουμε:

$$\psi(0) = \lim_{r\to 0^+} E(e^{-rT}I(T<+\infty)|U(0)=0)$$

$$= 1 - \lim_{r\to 0^+}\frac{(r+2\lambda)^{2n-1}[(r+\lambda)^n - \lambda^n]}{c^{3n-1}\prod_{k=1}^{3n-1}\rho_\kappa} = 1 - \frac{n2^{2n-1}\lambda^{3n-2}}{c^{3n-1}\rho_1'(0)\rho^*(0)}$$

όπου έχουμε θέσει $\rho^*(0) = \prod_{i=2}^{3n-1}\rho_i(0)$, $\rho_1'(0) = \lim_{r\to 0^+}\frac{d\rho_1(r)}{dr}$. Ωστόσο, η ποσότητα $\rho_1'(0)$ μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια ως εξής:

Το $\rho_1(r)$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $\hat{h}_1(s) = \hat{h}_2(s)$. Αν παραγωγίσουμε ως προς r θα έχουμε ότι:

$$n\, 2^{2n-1}\lambda^{3n-2}[1 - c\rho_1'(0)] + (2n-1)2^{2n-2}\lambda^{3n-2}[1 - c\rho_1'(0)]$$
$$= (2n-1)2^{2n-2}\lambda^{3n-2} + 2^{2n-1}\lambda^{3n-1}\left[\rho_1'(0)\widehat{f_X}'(0) - \theta\rho_1'(0)\hat{h}'(0)\right]$$
$$+\theta 2^n\lambda^{3n-1}\rho_1'(0)\hat{h}'(0)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Όμως $\hat{f}_X(s) = E(e^{-sX})$, επομένως $\hat{f}_X'(s) = -E(Xe^{-sX})$ και άρα $\hat{f}_X'(0) = -E(X)$. Χρησιμοποιώντας τώρα ξανά την συνδυαστική ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^n, n \geq 0$$

μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι

$\rho_1'(0) = \frac{n}{nc-\lambda E(X)} = \frac{E(W)}{cE(W)-E(X)}$ και έτσι καταλήγουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας θα είναι:

$$\psi(0) = 1 - \frac{2^{2n-1}\lambda^{3n-2}[nc - \lambda E(X)]}{c^{3n-1}\rho^*(0)} < 1 \ (16)$$

2.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Ορισμός 2

Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{r} \geq 0$ και $0 \leq \mathrm{u} \leq \mathrm{b}$. Τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ορίζεται ως:

$$\mathrm{m_b(u)} = \mathrm{E}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}\mathrm{T_b}}\, \mathrm{w}(\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b}-), |\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b})|)\, \mathrm{I}(\mathrm{T_b} < \infty) | \mathrm{U_b}(0) = \mathrm{u}\},\ \ 0 \leq \mathrm{u} \leq \mathrm{b}$$

όπου είναι r το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού ενώ η w είναι μια διδιάστατη συνάρτηση, ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ με$0 \leq \mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y}) < \infty$ και

$$\mathrm{I}(\mathrm{T_b} < \infty) = \begin{cases} 1, & \mathrm{T_b} < \infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\mathrm{m_r}(\mathrm{u};\mathrm{b})$ είναι εξαιρετικά σημαντική διότι μέσω αυτής μπορούμε να έχουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τις από κοινού και τις περιθώριες συναρτήσεις των $\mathrm{T_b}, \mathrm{U_b}(\mathrm{T_b}-)$, και $|\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b})|$. Για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής και με βάση τον ορισμό της $\mathrm{m_r}(\mathrm{u};\mathrm{b})$ προκύπτουν οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις:

Α) Αν θέσουμε $\mathrm{r} = 0$ και $\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1$ τότε οδηγούμαστε στην πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη σταθερών μερισμάτων:

$$\psi_{\mathrm{b}}(\mathrm{u}) \coloneqq \mathrm{E}\{\, \mathrm{I}(\mathrm{T_b} < \infty) |\, \mathrm{U_b}(0) = \mathrm{u}\} = \mathrm{P_r}(\mathrm{T_b} < \infty) |\, \mathrm{U_b}(0),$$

Β) Αν τώρα υποτεθεί ότι $\mathrm{r} > 0$, $\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b,

$$\mathrm{m_{T_b}}(\,\mathrm{u};\mathrm{b}) \coloneqq \mathrm{E}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}\mathrm{T_b}}\, \mathrm{I}(\mathrm{T_b} < \infty) |\, \mathrm{U_b}(0) = \mathrm{u}\},$$

Γ) Αν επιλέξουμε$\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{I}\,(\mathrm{x} = \mathrm{x_1})\, \mathrm{I}\,(\mathrm{y} = \mathrm{x_2})$ και $r > 0$, τότε θα λάβουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $(\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b}\,-), |\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b})|)$,

$$\mathrm{f}(\mathrm{x_1},\mathrm{x_2}|\mathrm{u}) = \mathrm{E}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}\mathrm{T_b}}\, \mathrm{I}(\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b}\,-) = \mathrm{x_1}, |\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b})| = \mathrm{x_2})\, \mathrm{I}(\mathrm{T_b} < \infty) |\, \mathrm{U_b}(0) = \mathrm{u}\}$$

Δ) Στην περίπτωση όπου για $\mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{I}(\mathrm{x} = \mathrm{x_1})$ και $r > 0$, λαμβάνουμε μόνο την προεξοφλημένη σ.π.π. της τ.μ. $\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b}\,-)$,

$$\mathrm{h}(\mathrm{x_1}|\mathrm{u}) = \mathrm{E}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{r}\mathrm{T_b}}\, \mathrm{I}(\mathrm{U_b}(\mathrm{T_b}\,-) = \mathrm{x_1}\;\; \mathrm{I}(\mathrm{T_b} < \infty) |\, \mathrm{U_b}(0) = \mathrm{u}\},$$

Ε) Επιπρόσθετα αν $r > 0$ και $w(x, y) = I(y = x_2)$, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu θα δώσει την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας. της τ.μ. $|U_b(T_b)|$,

$$g(x_2|u) = E\{e^{-rT_b} I(|U_b(T_b)|) = x_2 \ I(T_b < \infty)| \ U_b(0) = u\},$$

ΣΤ) Τέλος αν $r > 0$, $w(x, y) = x_1^k$ παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία,

$$E\left\{e^{-rT_b}|U_b(T_b)|^k \ I(T_b < \infty)| \ U_b(0) = u\right\}$$

ενώ αντίστοιχα για $r > 0$ και $w(x, y) = x_2^k$ οδηγεί στην εύρεση της προεξοφλημένης ροπής τάξης k του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία,

$$E\left\{e^{-rT_b}|U_b(T_b -)|^k \ I(T_b < \infty)| \ U_b(0) = u\right\}$$

Τώρα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε για τη διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$, ότι ουσιαστικά μιλάμε για μια πολύ ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος στην οποία όμως δεν υπάρχει η στρατηγική μερίσματος. Επομένως αν αφήσουμε $b \to +\infty$ τότε θα έχουμε

$$\lim_{b\to\infty} U_b(t) = U(t) \text{και επομένως} \lim_{b\to\infty} m_b(t) = m(u)$$

Πόρισμα 2.

Η γενική λύση της ολοκληρωτικής-διαφορικής εξίσωσης

$$m_b'(u) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_b(u-x)f(x)dx + \frac{\lambda+r}{c}m_b(u) - \frac{\lambda}{c}z(u), 0 \le u \le b$$

δίνεται ως εξής:

$$\mathrm{m_b(u) = m_b(0)\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)z(x)dx}\ ,\quad \mathrm{u \geq 0}(17)$$

όπου η $\mathrm{v(u)}$ικανοποιεί την ισότητα

$$v'(u) = \frac{\lambda + r}{c}v(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \mathrm{\upsilon(u-x)f(x)dx}\ , u \geq 0$$

με $\mathrm{\upsilon(0) = 1}$.

Τώρα είναι εφικτό να βρεθεί η γενική λύση της $\mathrm{m_b(u)}$ μέσω της κλασσικής συνάρτησης Gerber-Shiu $\mathrm{m_r(u)}$

Πρόταση . Η γενική λύση της ολοκληρωτικής-διαφορικής εξίσωσης $m_b'(u) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_b(u-x)f(x)dx + \frac{\lambda+r}{c}m_b(u) - \frac{\lambda}{c}z(u)$ με οριακή συνθήκη $m_b'(b) = 0$

$$\mathrm{m_b(u) = \ m_r(u) + k(b)\upsilon(u),} \qquad 0\ \leq \mathrm{u}\ \leq \mathrm{b}$$

όπου η σταθερά $\mathrm{k(b)}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$\mathrm{k(b)} = -\frac{\mathrm{m'_r(b)}}{\mathrm{\upsilon'(b)}}$ (η απόδειξη παραλείπεται)

Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας, θα γίνει αναλυτική μελέτη των καταβαλλόμενων μερισμάτων τα οποία δίνονται πριν τον χρόνο της επικείμενης χρεοκοπίας και θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα που αφορούν την κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων.

2.5 Η κατανομή των καταβαλλόμενων μερισμάτων

Έστω ότι η $\mathrm{D_u}$είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβάλλονται στους δικαιούχους μέχρι τη στιγμή εμφάνισης και της χρεοκοπίας. Ορίζουμε την ποσότητα$\mathrm{V_n(u;b) = E[D_u^n]}$με$\mathrm{V_0(u;b) = E[D_u^0] = 1}$. Θα βρούμε μια ολοκληρωτική-διαφορική εξίσωση για την

$V_n(u;b)$παρουσία μιας οριακής συνθήκες. Έπειτα, θα παρουσιαστούν ορισμένα αναλυτικά αποτελέσματα για την ειδική περίπτωση όπου οι ατομικές απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες και εν συνεχεία θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων.

Θεώρημα 2.1. Για κάθε $n \geq 1$, η $V_n(u;b)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση

$$V'_n(u;b) = \frac{\lambda + nr}{c} V_n(u;b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u V_n(u-y;b)f(y)dy, \quad (18) \quad 0 \leq u \leq b$$

με οριακή συνθήκη

$$V'_n(u;b)|_{u=b} = nV_{n-1}(b;b)$$

Επιπρόσθετα, θα μελετήσουμε μια ειδική εφαρμογή αυτού του θεωρήματος όταν το ύψος των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με $\alpha > 0$. Θα συμβολίζουμε με X την τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το ύψος της απαίτησης με θετική παράμετρο $\alpha > 0$. Τότε η συνάρτηση κατανομής καθώς και η συνάρτηση πυκνότητας δίνονται ως εξής: $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ και $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ αντίστοιχα.

Τότε, η εξίσωση (18) γίνεται:

$$V'_n(u;b) = \frac{\lambda + nr}{c} V_n(u;b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\, V_n(u-x;b)dx$$

$$= \frac{\lambda + nr}{c} V_n(u;b) - \frac{\lambda\alpha}{c}\int_0^u e^{-(u-x)}\, V_n(x;b)dx$$

$$= \frac{\lambda + nr}{c} V_n(u;b) - \frac{\lambda\alpha}{c} e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\, V_n(x;b)dx \quad (19)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση (19) ως προς τη μεταβλητή u λαμβάνουμε:

$$V''_n(u;b) = \frac{\lambda + nr}{c} V'_n(u;b) - \frac{\lambda\alpha}{c}(-\alpha)e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\, V_n(x;b)dx$$

$$-\frac{\lambda\alpha}{c} e^{-\alpha u} e^{\alpha u}\, V_n(u;b)$$

$$= \frac{\lambda + nr}{c} V'_n(u;b) + \frac{\lambda a^2}{c} e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\, V_n(x;b)dx \; - \frac{\lambda\alpha}{c}\, V_n(u;b) \; (20)$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (20) έχουμε:

$$V''_n(u;b) + \left(\alpha - \frac{\lambda + nr}{c}\right) V'_n(u;b) - \frac{\alpha nr}{c} V_n(u;b) = 0$$

Σύμφωνα με τους Gerber και Shiu (1998) για την εν λόγω κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων από τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg προκύπτει ότι:

$$s^2 + \left(\alpha - \frac{\lambda + nr}{c}\right) s - \frac{\alpha nr}{c} = 0 \; (21)$$

επομένως:

$$V_n(u;b) = k_{1,n} e^{\rho_{1,n} u} + k_{2,n} e^{\rho_{2,n} u} \; (22)$$

Συμβολίζουμε με $\rho_{1,n}$ και $\rho_{2,n}$ τις λύσεις της εξίσωσης (21). Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη σχέση (22) στην σχέση (18) και επιπλέον χρησιμοποιούμε τον ορισμός της f όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω και παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητήu, για τις σταθερές $k_{1,n}$ και $k_{2,n}$ προκύπτει σχέση:

$$\frac{k_{1,n}}{k_{2,n}} = -\frac{a + \rho_{1,n}}{a + \rho_{2,n}}$$

Τότε όμως θα είναι

$$V_n(u;b) = \frac{k_{1,n}}{a + \rho_{1,n}} \left[(a + \rho_{1,n}) e^{\rho_{1,n} u} - (a + \rho_{2,n}) e^{\rho_{2,n} u} \right]$$

με οριακή συνθήκη

$$V'_n(u;b)|_{u=b} = nV_{n-1}(b;b) = \frac{k_{1,n}}{a + \rho_{1,n}} \left[(a + \rho_{1,n}) e^{\rho_{1,n} b} - (a + \rho_{2,n}) e^{\rho_{2,n} b} \right]$$

Έτσι τελικά όμως οδηγούμαστε στη σχέση:

$$V_n(u;b) = nV_{n-1}(b;b) \frac{(a + \rho_{1,n}) e^{\rho_{1,n} u} - (a + \rho_{2,n}) e^{\rho_{2,n} u}}{(a + \rho_{1,n}) e^{\rho_{1,n} b} - (a + \rho_{2,n}) e^{\rho_{2,n} b}} \; (23)$$

2.6 Η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων

Συμβολίζουμε με τη συνάρτηση $V_1(u;b) = V(u;b)$ την τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων, έχοντας ορίσει και $n = 1$

Σύμφωνα με το θεώρημα (2.1) οδηγούμαστε στο ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα. Η συνάρτηση $V(u;b)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση

$$V'(u;b) = \frac{\lambda + r}{c} V(u;b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u V(u-y;b)f(y)dy \ (24), \qquad 0 \le u \le b$$

με οριακή συνθήκη

$$V'^{(u;b)|_{u=b}} = 1(25)$$

Για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της ολοκληρωτικής διαφορικής εξίσωσης (24) χρησιμοποιούμε το ακόλουθο πολύ καταλυτικό θεώρημα.

Θεώρημα . Η συνάρτηση $V(u;b)$ ικανοποιεί την ισότητα

$$V(u;b) = \frac{\upsilon(u)}{\upsilon'(b)}, \qquad 0 \le u \le b$$

με$\upsilon(u) = \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)'} e^{\rho\upsilon}$, $u \ge 0$ και $\psi(u)$ η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Απόδειξη.

Θέτουμε $\varphi(u)= V(u;b)$, $\alpha = \frac{\lambda+r}{c}$,$\beta = -\frac{\lambda}{c}$, $h(y) = f(y)$ και $\gamma = 0$. Τότε έπεται ότι η φ ικανοποιεί την εξίσωση $\varphi'(u) = \frac{\lambda+r}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_o^u \phi(u-x)h(x)dx$

από όπου έπεται ότι η γενική λύση της ολοκληρωτικής-διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$\varphi(u) = \varphi(0)\upsilon(u) \ (26), \text{με } u \ge 0$$

Η προαναφερθείσα σχέση ισχύει για κάθε $u \ge 0$ επομένως θα ισχύει και για $u \in [0,b]$και συνεπώς

$$V(u;b) = V(0;b)\upsilon(u), \qquad 0 \le u \le b$$

Όπου $\upsilon(u) = \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)} e^{\rho u}, \quad u \geq 0$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση και έπειτα θέτοντας σαν όριο το $u = b$ παίρνουμε

$$V'(u;b)|_{u=b} = V(0;b)\upsilon'(u)$$

Τέλος, η οριακή συνθήκη (25) συνεπάγεται ότι $V(0;b) = \frac{1}{\upsilon'(b)}$ το οποίο αν αντικατασταθεί στη σχέση (26) προκύπτει το ζητούμενο.

Το κλασσικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου. Στην ενότητα που ακολουθεί δίνουμε αναλυτικά την παραπάνω θεωρία για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου υπό την ύπαρξη σταθερού ορίου μερίσματος.

2.7 Το ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση μέσω FGM copula και με στρατηγική σταθερού μερίσματος

Στην παρούσα υποενότητα, θα μελετήσουμε ως ειδική περίπτωση, την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου με εξάρτηση μέσω της FGM copula με στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος. Υπό την ύπαρξη στρατηγικής πληρωμής μερίσματος, στη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ υποθέτουμε ένα μη μεταβλητό όριο μερίσματος $b > 0$. Έτσι οποτεδήποτε έχουμε $u \leq b$, τότε τα μερίσματα καταβάλλονται συνεχώς στους δικαιούχους έως ότου υπάρξει νέας απαίτηση (Deng et al., 2012). Στην περίπτωση όπου το πλεόνασμα δεν φθάσει στο επίπεδο δεν πληρώνονται μερίσματα στους δικαιούχους. Δηλώνοντας την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος, με την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος, με $\{U_b(t), t \geq 0\}$ συνεπάγεται ότι το $U_b(t)$δεν μπορεί ποτέ να ξεπεράσει τον υποτιθέμενο όριο $b > 0$.

Επίσης, με $D_b(t) = c\int_0^t I(U_b(t) > b)dt$ θα συμβολίζουμε τα συνολικά μη-προεξοφλημένα μερίσματα που έχουν πληρωθεί μέχρι και τη χρονική στιγμή t, υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος με όριο b. Τότε, η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση $U_b(t) = U(t) - D_b(t)$ και ικανοποιεί την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dU_b(t) = \begin{cases} -dS(t), & U_b(t) = b \\ cdt - dS(t), & 0 \leq U_b(t) \leq b \end{cases}$$

Όπως έχει φανεί στο σύνολο της εργασίας, δύο σημαντικά μέτρα που σχετίζονται τόσο με τη χρεοκοπία όσο και με τη διαδικασία πλεονάσματος είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu. Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε αυτές τις ποσότητες. Έστω $\mathrm{T_b} = \inf_{t\geq 0}\{\mathrm{t}, \mathrm{U_b}(\mathrm{t}) < 0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας για τη διαδικασία πλεονάσματος που δίνεται από δηλαδή η μεταβλητή $\mathrm{T_b}$ είναι ο «πρώτος» χρόνος κατά τον οποίο η διαδικασία πλεονάσματος $\mathrm{U_b}(\mathrm{t})$ γίνεται για πρώτη φορά αρνητική.

2.8 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu υπό άλλη οπτική

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού φράγματος μερίσματος b ορίζεται ως:

$$m_r(u;b) \coloneqq E\{e^{-rT_b}w(U_b(T_b-),|U_b(T_b)|)I(T_b<\infty)|U_b(0)=u\},$$
$$0\leq u\leq b$$

όπου r η ένταση ανατοκισμού. Πιο αναλυτικά, η συνάρτηση m_r είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται συνάρτηση ποινής (penalty function), το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία συμβολίζεται με $U_b(T_b-)$, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία συμβολίζεται με $|U_b(T_b)|$ και τέλος η δείκτρια συνάρτηση $I(T_b<\infty)$ του ενδεχομένου να εμφανιστεί η χρεοκοπία.

Σημείωση: Όταν έχουμε $r=0, w(x,y)=1$, η $m_r(u;b)$ μετατρέπεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_b(u) \coloneqq E(I(T_b<\infty)|U_b(0)=u) = P_r(T_b<\infty)U_b(0)=u)$ ενώ για r>0, w(x,y)=1, μετατρέπεται στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b στο σημείο r ή η προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία συμβολίζεται με $m_{T_b}(u)$ με

$$m_{T_b}(u) \coloneqq E\{e^{-rT_b}I(T_b<\infty)|U_b(0)=u\}, \quad 0\leq u\leq b$$

Για επιπλέον μέτρα χρεοκοπίας, συμπεριλαμβανομένης της συνάρτησης των Gerber-Shiu $m_r(u;b)$ βλέπε Lin et al (2003). Όταν τώρα πάρουμε $b\to\infty$ το υπόδειγμα συγκλίνει προς το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου απουσία στρατηγικής σταθερού ορίου μερίσματος με την κατανομή Erlang(n) για τους ενδιάμεσους χρόνους και με εξαρτημένη δομή βασισμένη στην FGM copula.

Αν υποτεθεί ότι $r > 0$, τότε αυτή υποδηλώνει την ένταση ανατοκισμού για την προεξόφληση των μερισμάτων και επιπρόσθετα η $D_{u,b}$ δηλώνει την παρούσα αξία όλων των καταβληθέντων μερισμάτων στους δικαιούχους μερίσματος, μέχρι τη στιγμή χρεοκοπίας T_b. Συνεπώς μπορούμε να δούμε ότι:

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-r\tau} dD_r(t).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $V(u;b)$ ως την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία όλων των καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας T_b, έτσι ώστε

$$V(u;b) = E\left[D_{u,b} | U_b(0) = u\right], \qquad 0 \le u \le b.$$

Επομένως,

$$0 \le V(u;b) \le c \int_0^{\infty} e^{-r\tau} dt = \frac{c}{r} \kappa\alpha\iota \lim_{u\to\infty} V(u;b) = \frac{c}{r}$$

που συνεπάγεται την ύπαρξη της $V(u;b)$.

2.9 Βασικά Αποτελέσματα

Σε αυτή την υποενότητα, αποδεικνύουμε δύο λήμματα τα οποία είναι θεμελιώδης λίθος για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων που μας ζητούνται.

Σημείωση: Συμβολίζουμε με I και D τον ταυτοτικό και διαφορικό τελεστή, αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $D^k(.)$ και $(.)^k$.

Λήμμα

Έστω $A_m(u)$ και $\varepsilon(u),\ u \geq 0$ διαφορίσιμες συναρτήσεις οι οποίες πληρούν τις αναδρομικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφονται ως εξής:

$$A'_m(u) = \alpha A_m(u) - mA_{m-1}(u)\ (27), \qquad m \geq 1$$
$$A'_0(u) = \alpha A_0(u) - \varepsilon(u)$$

Τότε, έχουμε:

$$(\alpha I - D)^{m+1} A_m(u) = m!\,\varepsilon(u), \qquad m \geq 0$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον τελεστή στην συνάρτηση $A_m(u)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha I - D)^{m+1} A_m(u) &= (\alpha I - D)^m[(aI - D)A_m(u)]\\ &= (\alpha I - D)^m \alpha A_m(u) - (\alpha I - D)^m A'_m(u)\\ &= (\alpha I - D)^m\ [aA_m(u) - A'_m(u)]\\ &= (\alpha I - D)^m[\alpha A_m(u) - \alpha A_m(u) + mA_{m-1}(u)]\\ &= (\alpha I - D)^m mA_{m-1}(u)\end{aligned}$$

διαδοχικά, λόγω της παραπάνω ισότητας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha I - D)^{m+1} A_m(u) &= m!\,(aI - D)A_0(u)\\ &= am!\,A_0(u) - m!\,A'_0(u)\\ &= m!\,(aA_0(u) - A'_0(u))\\ &= m!\,\varepsilon(u)\end{aligned}$$

Λήμμα

Έστω $A_m(u), u \geq 0$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την αναδρομική διαφορική εξίσωση (27). Τότε για την κ-παράγωγο της συνάρτησης $A_m(u)$, για$1 \leq \kappa \leq m - 1$ ή ισοδύναμα $m \geq k - 1$ έχουμε

$$A_m^{(k)}(u) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \prod_{x=0}^{j-1} (m - x) a^{k-1-j}\, A'_{m-j}(u)$$

και για $k = m + r + 1,\ \ r \geq 0\ \ έχουμε$

$$A_m^{(m+r+1)}(u) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+r}{j} \prod_{x=0}^{j-1} (m-x) a^{m+r-j} A'_{m-j}(u)$$

$$+ (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{r} \frac{(m+r-j)!}{(r-j)!} a^{r-j} \varepsilon^j(u) \quad (28)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu (Zhang et al., 2009), υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, θα υπολογίσουμε μία μη-ομογενή ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση $m_r(u;b)$ και στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις οριακές συνθήκες για αυτή την εξίσωση. Ακολούθως, θα υπολογίσουμε μία λύση για τη μη-ομογενή ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση με οριακές συνθήκες, η οποία θα είναι το άθροισμα μίας ειδικής λύσης, και πιο συγκεκριμένα, τη συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_r(u;\infty)$ σε ένα περιβάλλον χωρίς στρατηγική σταθερού μερίσματος και ενός συνδυασμού από γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ολοκληρωτική διαφορικής εξίσωσης.

2.10 Η ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση των Gerber-Shiu

Σε αυτό το σημείο, ορίζουμε όσες υποθέσεις θα χρειαστούν οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην πορεία. Πιο αναλυτικά, για $u \geq 0$, έχουμε

$$\gamma_1(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) f_X(x) dx, \gamma_2(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) h(x) dx$$

$$\sigma_{1,r}(u;b) = \int_0^u m_r(u-x;b) f_X(x) dx + \gamma_1(u), \sigma_{2,r}(u;b)$$

$$= \int_0^u m_r(u-x;b) h(x) dx + \gamma_2(u),$$

Χρησιμοποιώντας ανανεωτικά επιχειρήματα και δεσμεύοντας ως προς το χρόνο εμφάνισης αλλά και το ποσό της πρώτης απαίτησης (βλ. αναλυτικότερα σε Landriault (2008) και Cossetteetal (2001)) για $0 \leq u \leq b$έχουμε:

$$
\begin{aligned}
m_r(u;b) = \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \Bigg\{ \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)\, f_{X,W}(x,t)dx \\
+ \int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct, x-u-ct)\, f_{X,W}(x,t)dx \Bigg\} dt \\
+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \Bigg\{ \int_0^{b} m_r(b-x;b)\, f_{X,W}(x,t)dx + \int_b^{\infty} w(b, x-b)\, f_{X,W}(x,t)dx \Bigg\} dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)\, f_{X,W}(x,t)dxdt \\
+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct, x-u-ct)\, f_{X,W}(x,t)dxdt \\
+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_0^{b} m_r(b-x;b)\, f_{X,W}(x,t)dxdt + \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_b^{\infty} w(b, x-b)\, f_{X,W}(x,t)dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)\big[f_X(x)f_W(t) + \theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\big]\, dxdt \\
+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct, x-u-ct)\big[f_X(x)f_W(t) + \theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\big]\, dxdt \\
+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_0^{b} m_r(b-x;b)\, \big[f_X(x)f_W(t) + \theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\big]dxdt \\
+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_b^{\infty} w(b, x-b)\, \big[f_X(x)f_W(t) + \theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\big]dxdt
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b) f_X(x) f_W(t)\,dxdt$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)\theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\,dxdt$$

$$+ \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct, x-u-ct)\theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\,dxdt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_0^{b} m_r(b-x;b)\, f_X(x) f_W(t)\,dxdt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_0^{b} m_r(b-x;b)\, \theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\,dxdt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_b^{\infty} w(b, x-b)\, f_X(x) f_W(t)\,dxdt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} \int_b^{\infty} w(b, x-b)\, \theta h(x) f_W(t)[2\bar{F}_w(t)-1]\,dxdt$$

$$= \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b) f_X(x) f_W(t)\,dxdt$$

$$+ 2\theta \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b) h(x) f_W(t)\bar{F}_w(t)\,dxdt$$

$$- \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} \int_0^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)\theta h(x) f_W(t)\,dxdt \; + \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-rt} f_W(t)\gamma_1(u$$

$$+ ct)dt + 2\theta \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-rt} f_W(t)\bar{F}_W(t)\,\gamma_2(u+ct)dt - \int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-rt}\theta f_W(t)\gamma_2(u+ct)dt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau}\int_{0}^{b} m_r(b-x;b)\, f_X(x) f_W(t)dxdt$$

$$+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau}\int_{0}^{b} m_r(b-x;b)\, h(x) f_W(t)\bar{F}_w(t)dxdt$$

$$-\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau}\int_{0}^{b} m_r(b-x;b)\,\theta h(x) f_W(t)dxdt+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau}\int_{0}^{b} f_W(t)\gamma_1(b)\, dt$$

$$+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau}\gamma_2(b) f_W(t)\bar{F}_w(t)dt-\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau}\gamma_2(b) f_W(t)dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} f_W(t)\left[\int_{0}^{u+ct} m_r(u+ct-x;b) f_X(x)dx+\gamma_1(u+ct)\right]dt$$

$$+2\theta\int_{0}^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} f_W(t)\bar{F}_w(t)\left[\int_{0}^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)h(x)\, dx+\gamma_2(u+ct)\right]dt$$

$$+2\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} f_W(t)\bar{F}_w(t)\left[\int_{0}^{b} m_r(b-x;b)h(x)\, dx+\gamma_2(b)\right]dt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} f_W(t)\left[\int_{0}^{b} m_r(b-x;b) f_X(x)\, dx+\gamma_1(b)\right]dt$$

$$-\theta\int_{0}^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} f_W(t)\left[\int_{0}^{u+ct} m_r(u+ct-x;b)h(x)\, dx+\gamma_2(u+ct)\right]dt$$

$$-\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} f_W(t)\left[\int_{0}^{b} m_r(b-x;b)h(x)\, dx+\gamma_2(b)\right]dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} f_W(t)\left[\sigma_{1,r}(u+ct;b) - \theta\sigma_{2,r}(u+ct;b)\right]dt$$

$$+ 2\theta \int_{0}^{\frac{b-u}{c}} e^{-r\tau} f_W(t)\bar{F}_w(t)\sigma_{2,r}(u+ct;b)dt + 2\theta \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} f_W(t)\bar{F}_w(t)\sigma_{2,r}(b;b)dt$$

$$+ \int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-r\tau} f_W(t)\left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right]dt$$

Θέτοντας $y = u + ct$,η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$m_r(u;b) = \int_{u}^{b} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,r}(y;b) - \theta\sigma_{2,r}(y;b)\right]\frac{1}{c}dy$$

$$+2\theta \int_{u}^{b} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\bar{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,r}(y;b)\frac{1}{c}dy$$

$$+2\theta \int_{b}^{\infty} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\bar{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,r}(b;b)\frac{1}{c}dy$$

$$+\int_{b}^{\infty} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right]\frac{1}{c}dy$$

$$\Rightarrow cm_r(u;b) = \int_{u}^{b} \mathrm{e}^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,r}(y;b) - \theta\sigma_{2,r}(y;b)\right]dy$$

$$+ 2\theta \int_{u}^{b} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\bar{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,r}(y;b)dy$$

$$+ 2\theta \int_{b}^{\infty} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\bar{F}_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\sigma_{2,r}(b;b)dy$$

$$+ \int_{b}^{\infty} e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} f_W\left(\frac{y-u}{c}\right)\left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right]dy$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις f_W και $\bar{F}_W$ όπως αυτές ορίστηκαν στις σχέσεις έχουμε:

$cm_r(u;b)$

$$= \int_u^b e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)}\left[\sigma_{1,r}(y;b) - \theta\sigma_{2,r}(y;b)\right]dy$$

$$+ 2\theta \int_u^b e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i \sigma_{2,r}(y;b)dy$$

$$+ \int_b^\infty e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)}\left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right]dy$$

$$+ 2\theta \int_b^\infty e^{-r\left(\frac{y-u}{c}\right)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^{n-1} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} e^{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i \sigma_{2,r}(b;b)dy$$

$$\Rightarrow c^n m_r(u;b) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,r}(y;b) - \theta\sigma_{2,r}(y;b)\right]dy$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,r}(y;b)dy$$

$$+ \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^\infty e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right]dy$$

$$+ \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^\infty e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,r}(b;b)dy$$

Για $0 \le u \le b$, ορίζουμε την εξίσωση

$$B_{n-1}(u;b) = \int_u^\infty e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,r}(yb;b) - \theta\sigma_{2,r}(y \wedge b;b)\right]dy \quad (29)$$

και

$$\Gamma_{n+i-1}(u;b) = \int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}} (y-u)^{n-1}\sigma_{2,r}(y \wedge b;b)dy$$

Όπου $\alpha \wedge b = min\{\alpha, b\}$.

Άρα, για $0 \leq u \leq b$ η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
c^n m_r(u;b) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,r}(y;b)-\theta\sigma_{2,r}(y;b)\right]dy \\
&+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,r}(y;b)dy \\
&+\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^\infty e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,r}(b;b)-\theta\sigma_{2,r}(b;b)\right]dy \\
&+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_b^\infty e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,r}(b;b)dy \\
&=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^\infty e^{-\frac{(r+\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[\sigma_{1,r}(y\wedge b;b)-\theta\sigma_{2,r}(y\wedge b;b)\right]dy \\
&+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\int_u^b e^{-\frac{(r+2\lambda)(y-u)}{c}}(y-u)^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}\left(\frac{y-u}{c}\right)^i\right]\sigma_{2,r}(y\wedge b;b)dy \\
&=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}B_{n-1}(u;b)+\frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!\,c^i}\Gamma_{n+i-1}(u;b).
\end{aligned}
$$

Είναι δυνατόν να επαληθευτεί ότι για $0 \leq u \leq b$, η εξίσωση $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί την εξίσωση (27) για $m = n-1$, $\alpha = (r+\lambda)/c$ και $\varepsilon(u) = \sigma_{1,r}(u;b) - \theta\sigma_{1,r}(u;b)$ ενώ αντίστοιχα, η εξίσωση $\Gamma_{n+i-1}(u;b)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις (4.5) και (4.6) με $m = n+i-1$, $\alpha = (r+2\lambda)/c$ και $\varepsilon(u) = \sigma_{2,r}(u;b)$.

Τώρα για $0 \leq u \leq b$ έχουμε το εξής:

$$\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^n B_{\mathrm{n-1}}(u) = (n-1)!\left[\sigma_{1,r}(u;b)-\theta\sigma_{2,r}(u;b)\right]$$

Και

$$\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n+i}\Gamma_{n+i-1}(u) = (n+i-1)!\,\sigma_{2,r}(u;b)$$

και στο ίδιο πλαίσιο, εφαρμόζουμε τον τελεστή $\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\cdot\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n+i}$στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης για να προκύψει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω τώρα $\sigma_{1,r}(u;b), i=1{,}2$ διαφορίσιμες συναρτήσεις του u. Επομένως, η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_r(u;b)$ για Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με δομή εξάρτησης βασισμένη στην σύζευξη FGM και σταθερό όριο μερίσματος b, ικανοποιεί την εξήςολοκληρο-διαφορική εξίσωση:

$$\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n+i}m_r(u;b)$$
$$=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\sigma_{1,r}(u;b)-\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\sigma_{2,r}(u;b)$$
$$+\frac{2\theta\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}\sigma_{2,r}(u;b)$$

για $0\leq u\leq b$.

Οριακές συνθήκες

Για να βρούμε μία έκφραση της συνάρτησης των Gerber-Shiu $m_r(u;b)$ πρέπει να βρεθούν οριακές συνθήκες για την ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση.

Θεώρημα:

Έστω τώρα $\sigma_{1,r}(u;b), i=1{,}2$ διαφορίσιμες συναρτήσεις του u,και η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_r(u;b)$ ικανοποιεί τις $3n-1$ οριακές συνθήκες

$$m_r^{(k)}(b;b)=0\ \ \gamma\iota\alpha k=1,2,\ldots,n$$

και

$$m_r^{(n+r_1)}(b;b)=(-1)^n\frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!}\sum_{j=1}^{r1}\frac{(n+r_1-1-j)!}{(r_1-j)!}\left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^{r_1-j}\Big[\sigma_{1,r}^{(j)}(b;b)$$
$$-\theta\sigma_{2,r}^{(j)}(b;b)\Big]$$

$$+2\theta \frac{\lambda^n}{c^n(n-1)!} \sum_{i=0}^{(r_1-1)\wedge(n-1)} (-1)^{n+i} \frac{\lambda^i}{c^i i!} \sum_{j=1}^{r_1 1-i} \frac{(n+r_1-1-j)!}{(r_1-i-j)!} \left(\frac{r+2\lambda}{c}\right)^{r_1-i-j} \sigma_{2,r}^{(i)}(b;b)$$

Για $r_1 = 1,2, \dots ,2n-1$.

Απόδειξη. Για την k-οστής τάξης παράγωγο και για $u = b$ στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.16) έχουμε ότι:

$$c^n m_r^{(k)}(b;b) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} B_{n-1}^{(k)}(b;b) + \frac{2\theta\lambda^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!\, c^i} \Gamma_{n+i-1}^{(k)}(b;\mathrm{b})$$

Με $0 \leq u \leq b,\ n \geq 2$ και αφού η $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί την (28), τότε:

$$B'_{n-1}(b;b) = \frac{r+\lambda}{c} B_{n-1}(b;b) - (n-1)B_{n-2}(b;b)$$

Όμοια, για $0 \leq u \leq b,\ y \geq u$έχουμε ότι $y \wedge b = b$ για $u = b$. Αξιοποιώντας τώρα την (29) η παραπάνω σχέση μας δίνει:

$$\begin{aligned} B'_{n-1}(b;b) = {} & \frac{r+\lambda}{c}(n-1)! \left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^{n-1} \left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right] \\ & - (n-1)(n-2)! \left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^{n-2} \left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right] = 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή μας σχέση:

$$\int_u^{\infty} e^{-\alpha(y-u)}(y-u)^k = \frac{k!}{a^{k+1}},\ \ k = 0,1,2, \dots$$

Με τον ίδιο τρόπο, κάνοντας χρήση της εξίσωσης (29) λαμβάνουμε ότι $B'_0(b;b) = 0$ και συνεπώς $B'_{n-1}(b;b) = 0$ για $n-1 \geq 0$. Όμοια, αν $0 \leq u \leq b$ ακολουθώντας την ίδια λογικά παίρνουμε ότι $\Gamma'_{n+i-1}(b;b) = 0$ για $n+i-1 \geq 0$.

Ακολούθως, για $1 \leq k \leq n$ και $0 \leq j \leq k$ έχουμε $n-1-j \geq 0$ και άρα $B'_{n-1-j}(b;b) = 0$. Επίσης, ισχύει ότι $B_{n-1}^{(k)}(b;b) = 0$ για $1 \leq k \leq n$αφού η $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί για $m = n-1$ την εξής σχέση:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Για $1 \leq k \leq n$ και $i \geq 0$ έχουμε $1 \leq k \leq n+i$ και όμοια, για $0 \leq j \leq k-1$ λαμβάνουμε:

$n+i-1-j \geq 0$. Συνεπάγεται ότι $\Gamma'_{n+i-1-j}(b;b) = 0$, από το οποίο αντιλαμβανόμαστε ότι $\Gamma_{n+i-j}^{(k)}(b;b) = 0$ για $1 \leq k \leq n$.

Για $k = n + r_1$, $r_1 \geq 1$ και για $m = n-1$ η $B_{n-1}(u;b)$ ικανοποιεί την (28) και αφού $0 \leq j \leq n-1$ έχουμε ότι $B'_{n-1-j}(b;b) = 0$. Κάνοντας χρήση της εξίσωσης (28) και της συνάρτησης $B_{n-1}(u;b)$ για $u = b$, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} B_{n-1}^{(n+r_1)}(b;b) &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{m+r1}{j} \prod_{x=0}^{j-1} (m-x) \left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^{m+r1-j} B'_{n-1-j}(b;b) \\ &+ (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{r1} \frac{(m+r1-j)!}{(r1-j)!} \left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^{r1-j} \left[\sigma_{1,r}^{(j)}(b;\mathrm{b}) - \theta \sigma_{2,r}^{(j)}(b;b)\right] \\ &= (-1)^n \sum_{j=1}^{r1} \frac{(n+r1-1-j)!}{(r1-j)!} \left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^{r1-j} \left[\sigma_{1,r}^{(j)}(b;b) - \theta \sigma_{2,r}^{(j)}(b;b)\right], \gamma\iota\alpha r \geq 1 \end{aligned}$$

Για $0 \leq j \leq n+i-1$, έχουμε ότι $\Gamma'_{n+i-1-j}(b;b) = 0$ και αφού η $\Gamma_{n+i-1}(u;b)$, για $m = n+i-1$, για $u = b$έχουμε:

$$\Gamma_{n+i-1}^{(n+r1)}(b;b) = \begin{cases} 0, & r_1 = 0 \\ (-1)^n \sum_{j=1}^{r1} \frac{(n+i+r1-1-j)!}{(r1-j)!} \left(\frac{r+2\lambda}{c}\right)^{r_1-j} \sigma_{2,r}^{(j)}(b;b), & r_1 \geq 1 \end{cases}$$

και άρα $\Gamma_{n+i-1}^{(n+r_1)}(b;b) = \Gamma_{n+i-1}^{(n+i+r_1-i)}(b;b) \neq 0$ για $r_1 - i \geq 1$ οπότε λαμβάνουμε ότι$\Gamma_{n+i-1}^{(n+r_1)}(\mathrm{b};b) \neq 0$ για $i \leq r1-1$. Επομένως,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i i!} \Gamma_{n+i-1}^{(n+r_1)}(b;b)$$

$$= \sum_{i=0}^{(r_1-1)\wedge(n-1)} \frac{\lambda^i}{c^i i!} (-1)^{n+i} \sum_{j=1}^{r1-i} \frac{(n+r_1-1-j)!}{(r_1-i-j)!} \left(\frac{r+2\lambda}{c}\right)^{r_1-i-j} \sigma_{2,r}^{(j)}(b;b),$$

για $r_1 \geq 1$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $k=0$, η τιμή της $m_r(u;b)$ για $u=b$ λαμβάνεται από την

$$m_r(b;b) = \left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right] \int_0^\infty e^{-rt} f_W(t)dt + 2\theta\sigma_{2,r}(b;b) \int_0^\infty e^{-rt} f_W(t)\bar{F}_W(t)dt$$

και όμοια, με αντικατάσταση στις σχέσεις $f_W(t)$ και $\bar{F}_W(t)$ από τις εξισώσεις (3.3) και (3.4), λαμβάνουμε ότι:

$$m_r(b;b) = \left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right] \int_0^\infty e^{-(r+\lambda)t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} dt$$

$$+ 2\theta\sigma_{2,r}(b;b) \int_0^\infty e^{-(r+2\lambda)t}\, t^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^n(\lambda t)^i}{(n-1)!\, i!} dt \Rightarrow m_r(b;b)$$

$$= \left[\sigma_{1,r}(b;b) - \theta\sigma_{2,r}(b;b)\right] \left(\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^n$$

$$+ 2\theta\sigma_{2,r}(b;b) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{2\lambda+r}\right)^{n+i}$$

η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί και ως οριακή συνθήκη.

<u>Μια γενική λύση για την $m_r(u;b)$</u>

Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε έκφραση για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού ορίου μερίσματος. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αυτή δεν εξαρτάται από το σταθερό όριο μερίσματος b. Άρα, η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_r(u;\infty)$ χωρίς την ύπαρξη μιας στρατηγικής μερίσματος, αποτελεί μία λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, όπως έχει ήδη αποδειχθεί, ικανοποιώντας την παρακάτω μη ομογενή ολοκληρωτική διαφορική εξίσωση βαθμού $3n-1$.

$$\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n+i} m_r(u;\infty)$$

$$=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\left(\int_0^u m_r(u-x;\infty)f_X(x)dx+\gamma_1(u)\right)$$

$$-\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\left(\int_0^u m_r(u-x;\infty)h(x)dx+\gamma_2(u)\right)$$

$$+2\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}$$

$$x\left(\int_0^u m_r(u-x;\infty)h(x)dx+\gamma_2(u)\right),\qquad 0\le u\le\infty$$

Με βάση τα όσα έχουν προηγηθεί μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_r(u;b)$, $0\le u\le b$ ικανοποιεί μία μη-ομογενή εξίσωση βαθμού $3n-1$. Συνεπώς με βάση το θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων λαμβάνουμε ότι η λύση της μη-ομογενούς ολοκληρωτικής διαφορικής εξίσωσης βαθμού $3n-1$η οποία λαμβάνεται από τα παραπάνω θεωρήματα, μπορεί να εκφραστεί ως το μίας ειδικής λύσης της $m_r(u;\infty)$, δηλαδή της συνάρτησης των Gerber-Shiu χωρίς στρατηγική μερίσματος, και ενός γραμμικού συνδυασμού από $3n-1$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξής ομογενούς ολοκληρωτικής διαφορικής εξίσωσης βαθμού $3n-1$με $0\le u\le\infty$

$$\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{\mathrm{r}+2\lambda}{\mathrm{c}}\mathrm{I}-\mathrm{D}\right)^{2\mathrm{n}-\mathrm{i}} \mathrm{u_r}(\upsilon)$$

$$=\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\int_0^u u_r(u-x)f_X(x)dx-\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{2n-1}\int_0^u u_r(u-x)h(x)dx$$

$$+2\theta\frac{\lambda^n}{c^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i-1}{i}\frac{\lambda^i}{c^i}\left(\frac{r+\lambda}{c}I-D\right)^{n}\left(\frac{r+2\lambda}{c}I-D\right)^{n-i-1}\int_0^u u_r(u-x)h(x)dx$$

Τέλος, είναι σαφές σύμφωνα με τα παραπάνω ότι οι αρχικές συνθήκες $\upsilon_{\mathrm{r}}(0), \upsilon_{\mathrm{r}}^{(1)}(0), \ldots \upsilon_{\mathrm{r}}^{(3\mathrm{n}-2)}(0)$ καθορίζουν μονοσήμαντα τη λύση της εξίσωσης .

Κεφάλαιο 3:Ανανεωτική Θεωρία

Η ανανεωτική συνάρτηση ορίζεται ως $m(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{S^{*n}}(t)\,, x \geq 0$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$m(t) = E\big(N(t)\big) = E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} I_{\{S_n \leq t\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{S^{*n}}(t)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $m(t)$ είναι το ολοκλήρωμα Stieljes:

$$\widetilde{m(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\widetilde{F_X}(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}$$

όπου $\widetilde{F_X}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της τυχαίας μεταβλητής X

Η ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση $m(t)$ μπορεί να προκύψει με φυσιολογικό τρόπο με χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας, με δέσμευση ως προς το πρώτο γεγονός ως εξής:

$$m(t) = E\big(N(t)\big) = E\big(E(N(t)|S_1)\big) = \int_0^{+\infty} E(N(t)|S_1 = u) dF_X(u)$$

Ισχύει ότι $E(N(t)|S_1) = \begin{cases} 0, t < u \\ 1 + E\big(N(t-u)\big), t \geq u \end{cases}$

Τότε χωρίζοντας το ολοκλήρωμα στο $[0, +\infty)$ στα υποδιαστήματα $[0, t]$ και $[t, +\infty)$ έχουμε:

$$m(t) = \int_0^t dF_X(u) + \int_t^{+\infty} m(t-u) dF_X(u)$$

$$m(t) = F_X(t) + \int_0^t m(t-u) dF_X(u)$$

Η εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι έχει τη γενική μορφή της ανανεωτικής θεωρίας:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) = d(t) + (h * F)(t)$$

Μια τέτοια εξίσωση έχει ως μοναδική λύση την:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) = d(t) + (h * m_X)(t)$$

3.1 Ελλειμματική Ανανεωτική εξίσωση

Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση έχει τη μορφή:

$$h(u) = g(u) + \lambda \int_0^u h(u-x)dF(x)\,, u \in [0,+\infty), 0 < \lambda < 1$$

Η μοναδική λύση μιας τέτοιας εξίσωσης είναι:

$$h(u) = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^u g(u-x)dH(x)$$

με $H(x) = (1-\lambda)\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n F_{S^{*n}}(x)$

Η συνάρτηση των Gerber και Shiu ικανοποιεί την παραπάνω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$\varphi(u) = g(u) + \lambda \int_o^u \varphi(u-x)g(x)dx\,, u \in [0,+\infty)$$

όπου η σταθερά λ βρίσκεται στο διάστημα (0,1) ενώ η $g(x)$ είναι η παράγωγος της $G(x)$, δηλαδή η παραπάνω εξίσωση γράφεται και στη μορφή:

$$\varphi(u) = g(u) + \lambda \int_o^u \varphi(u-x)dG(x)\,, u \in [0,+\infty)$$

Τότε η λύση της εξίσωσης αυτής δίνεται ως εξής:

$$\varphi(x) = g(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^x g(x-y)dH(y)$$

$$H(y) = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n F_{S^{*n}}(x)$$

Πράγματι για τη συνάρτηση Gerber-Shiu θα έχουμε ότι αυτή ικανοποιεί την εξίσωση:

$$m_r(u) = \int_0^u m_r(u-y)\left\{\int_0^{+\infty} f_r(x,y|0)dx\right\}dy + G_r(u)\,, u \in [0,+\infty)$$

$$= \int_0^u m_r(u-y)\, f_{2,r}(y|0)dy + G_r(u), u \in [0,+\infty)$$

όπου $f_{2,r}(y|0) = \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} T_{\rho_j} f_X(y) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} T_{\rho_j} h(y)$ και

$$G_r(u) = \int_u^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(x+u, y-u) f_r(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_u^{+\infty}\int_0^{+\infty} w(s,t) f_r(s-u, t+u|0)dsdt$$

Επειδή $\int_0^{+\infty} f_{2,r}(y|0)dy = m_T(0) < 1$. Θα δώσουμε τώρα έναν εναλλακτικό τύπο υπολογισμού για τη συνάρτηση $f_{2,r}(y|0)$. Έχουμε δει και πιο πριν ότι η συνάρτηση $\hat{h}_{1,r}(s)$ είναι πολυώνυμο του s βαθμού το πολύ $3n-1$. Από την παρεμβολή Lagrangeγια το $\hat{h}_{1,r}(s)$, επειδή αυτό διέρχεται από τα σημεία $\left(0, \hat{h}_{1,r}(0)\right), \left(\rho_j, \hat{h}_{1,r}(\rho_j)\right), j = 1,2,\cdots,3n-1$, θα είναι:

$$\hat{h}_{1,r}(s) = \hat{h}_{1,r}(0)\prod_{j=1}^{3n-1}\frac{s-\rho_j}{-\rho_j} + s\prod_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{1,r}(\rho_j)}{\rho_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_\kappa}$$

Επιπλέον θα ισχύει:

$$\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)$$

$$= \pi_{3n-1}(s)\left[\frac{\hat{h}_{1,r}(0)}{\pi_{3n-1}(0)} - \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,r}(\rho_j)}{(-\rho_j)\pi'_{3n-1}(\rho_j)} + \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,r}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\pi'_{3n-1}(\rho_j)} - \frac{\hat{h}_{2,r}(s)}{\pi_{3n-1}(s)}\right]$$

όπου $\pi_{3n-1}(s) = \prod_{k=1}^{3n-1}(s-\rho_k)$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{h}_{1,r}(\rho_j) = \hat{h}_{2,r}(\rho_j), j = 1,\cdots,3n-1$, επομένως:

$$\frac{\hat{h}_{1,r}(0)}{T(0)} + \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,r}(\rho_j)}{\rho_j T'(\rho_j)} = \frac{\left(\frac{r+\lambda}{c}\right)^n\left(\frac{r+2\lambda}{c}\right)^{2n-1}}{\prod_{j=1}^{3n-1} -\rho_j} + \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\left(\frac{r+\lambda}{c}-\rho_j\right)^n\left(\frac{r+2\lambda}{c}-\rho_j\right)^{2n-1}}{\rho_j\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_k-\rho_j)}$$

$$= \frac{(r+\lambda)^n(r+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{j=1}^{3n-1}(-\rho_j)} + (-1)^{3n-1}\left\{1 - \frac{(r+\lambda)^n(r+2\lambda)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{j=1}^{3n-1}\rho_j}\right\} = (-1)^{3n-1}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s) = (-1)^{3n-1}\pi_{3n-1}(s)\left[1 - T_s T_{\rho_1}\cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,r}(0)\right]$$

Έτσι θα έχουμε:

$$\hat{f}_{2,r}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)}{\prod_{j=1}^{3n-1}(\rho_j - s)} = 1 - \frac{(-1)^{3n-1}\pi_{3n-1}(s)\big[1 - T_s T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,r}(0)\big]}{(-1)^{3n-1}\pi_{3n-1}(s)}$$

$$= T_s T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,r}(0)$$

Έτσι όμως με αντιστροφή θα είναι και: $f_{2,r}(y|0) = T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,r}(y)$.

Λόγω των ιδιοτήτων του τελεστή Disckson-Hipp που έχουν αναφερθεί, η $f_{2,r}(y|0)$ είναι υπολογίσιμη. Τώρα θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $G_r(u)$. Είναι:

$$G_r(u) = \int_0^{+\infty}\int_u^{+\infty} w(s,t)\left[f_X(s,t)\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} e^{-\rho_j(s-u)} + h(s,t)\sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} e^{-\rho_j(s-u)}\right] dsdt$$

$$\sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j}\int_u^{+\infty} e^{-\rho_j(s-u)}\int_0^{+\infty} w(s,t) f_X(s+t) dtds$$

$$+\sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j}\int_u^{+\infty} e^{-\rho_j(s-u)}\int_0^{+\infty} w(s,t) h(s+t) dtds$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j}\int_u^{+\infty} e^{-\rho_j(s-u)}\gamma_1(s)ds + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j}\int_u^{+\infty} e^{-\rho_j(s-u)}\gamma_2(s)ds$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j} T_{\rho_j}\gamma_i(u)$$

Τώρα για τον μετασχηματισμό Laplace της G_r έχουμε:

$$\hat{G}_r(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} G_r(u) du = T_s G_r(0) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3n-1} b_{i,j} T_s T_{\rho_j}\gamma_i(0)$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}\hat{\gamma}_1(\rho_j) + b_{2,j}\hat{\gamma}_2(\rho_j)}{s-\rho_j} - \hat{\gamma}_1(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j} - \hat{\gamma}_2(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,r}(\rho_j)\hat{\gamma}_1(\rho_j) + b_{2,r}(\rho_j)\hat{\gamma}_2(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_j-\rho_k)} - \hat{\gamma}_1(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{1,j}}{s-\rho_j} - \hat{\gamma}_2(s)\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{b_{2,j}}{s-\rho_j}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2$ παίρνουμε:

$$\hat{G}_r(s) = \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{\beta}_{1,r}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1}(\rho_j-\rho_k)} + \frac{\lambda^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1}}{c^{3n-1}\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i - s)}$$

$$+\theta \frac{\lambda^n \left[2(r+\lambda-cs)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-k} \lambda^k (r+2\lambda-cs)^{n-k-1} - (r+2\lambda-cs)^{2n-1}\right]}{c^{3n-1} \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)} \hat{\gamma}_2(s)$$

$$= \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\hat{\beta}_{1,r}(\rho_j)}{(s-\rho_j) \prod_{k=1,k\neq j}^{3n-1} (\rho_j - \rho_k)} + \frac{b_{1,r}(s)\hat{\gamma}_1(s) + b_{2,r}\hat{\gamma}_2(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}$$

$$= (-1)^{3n-1} \left[\frac{\hat{\beta}_{1,r}(s)}{T(s)} - \sum_{j=1}^{3n-1} \frac{\hat{\beta}_{1,r}(\rho_j)}{(s-\rho_j) T'(\rho_j)}\right] = T_s T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} \beta_{1,r}(0)$$

Επομένως μέσω αντιστροφής παίρνουμε ότι $G_r(u) = T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} \beta_{1,r}(u)$

Σημειώνουμε και εδώ ότι η συνάρτηση $G_r(u)$ είναι υπολογίσιμη λόγω των ιδιοτήτων του τελεστή Disckson-Hipp.

Καταλήγουμε τότε στις επόμενες δυο προτάσεις:

Πρόταση 1

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu, $m_r(u)$ ακολουθεί την ελλειματική ανανεωτική εξίσωση:

$$m_r(u) = \int_0^u m_r(u-y) f_{2,r}(y|0) dy + G_r(u), u \in [0,+\infty)$$

με $f_{2,r}(y|0) = T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,r}(y), G_r(u) = T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} \beta_{1,r}(u)$

Επιπλέον όμως χρησιμοποιώντας την μορφή λύσης της ελλειμματικής ανανεωτική εξίσωσης θα ισχύει ότι:

$$m_r(u) = \frac{1}{1+k_r} \int_0^u m_r(u-y) \theta_r(y) dy + \frac{1}{1+k_r} \Lambda_r(u), u \in [0,+\infty)$$

Η σταθερά κ_r ορίζεται ως $k_r = \frac{1}{1+T_0 T_{\rho_1} \cdots T_{\rho_{3n-1}} h_{2,r}(0)} = m_T(0)$ και $\Lambda_r(u) = (1+k_r) G_r(u)$,

$\theta_r(u) = (1+k_r) f_{2,r}(y|0)$, η οποία είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η επόμενη πρόταση ωστόσο είναι εξαιρετικής σημασίας καθώς ουσιαστικά δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace του τυχαίου χρόνου χρεοκοπίας T, είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Πρόταση 2

Ο μετασχηματισμός Laplace$m_T(u)$, του χρόνου χρεοκοπίας T ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$m_T(u) = \int_0^u m_T(u-y) f_{2,r}(y|0)\, dy + \int_u^{+\infty} f_{2,r}(y|0)\, dy$$

$$= \frac{1}{1+k_r} \int_0^u m_T(u-y)\theta_r(u)dy + \frac{1}{1+k_r} \overline{\Theta}_r(u), u \in [0, +\infty)$$

με $\overline{\Theta}_r(u) = \int_u^{+\infty} \theta_r(y)dy$ ενώ $\overline{\Theta}_r^*(u)$ είναι η j-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης

$\overline{\Theta}_r(u)$.

Επιπρόσθετα η m_T έχει σειριακή αναπαράσταση:

$$m_T(u) = \frac{k_r}{1+k_r} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k_r}\right)^j \overline{\Theta}_r^*(u)\,, u \in [0, +\infty)$$

Απόδειξη:

Θέτουμε σαν συνάρτηση ποινής στην συνάρτηση Gerber-Shiu$w(x, y) = 1$

Τότε θα ισχύει ότι:

$$\gamma_1(u) = \int_u^{+\infty} w(u, x-u) f_X(x)dx = \int_u^{+\infty} f_X(x)dx = T_0 f(u)$$

$$\gamma_2(u) = \int_u^{+\infty} w(u, x-u) h(x)dx = \int_u^{+\infty} h(x)dx = T_0 h(u)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση για την συνάρτηση $G_r(u)$ παίρνουμε:

$$G_r(u) = \sum_{j=1}^{3n-1} b_{1,j} T_{\rho_j} T_0 f_X(u) + \sum_{j=1}^{3n-1} b_{2,j} T_{\rho_j} T_0 h(u) = T_0 f_{2,r}(u|0) = \int_u^{+\infty} f_{2,r}(y|0)dy$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο.

3.2 Εκθετική κατανομή

Ας υποθέσουμε ότι οι απαιτήσεις X_j ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $a > 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = ae^{-ax}, x > 0$ και μετασχηματισμό Laplace $\widehat{f_X}(s) = \frac{a}{a+s}, s > -a$. Θεωρούμε τον χρόνο χρεοκοπίας T. Θα βρούμε αρχικά τον μετασχηματισμό Laplace της τυχαίας μεταβλητής T, τον οποίο θα συμβολίσουμε με $\widehat{m}_T(s)$. Είναι:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{m_T(0) - \hat{f}_{2,r}(s)}{s\left[1 - \hat{f}_{2,r}(s)\right]} = \frac{1 - \hat{f}_{2,r}(s) - [1 - m_T(0)]}{s\left[1 - \hat{f}_{2,r}(s)\right]}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s) = \left[1 - \hat{f}_{2,r}(s)\right] \prod_{k=1}^{3n-1} (\rho_k - s)$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s) - [1 - m_T(0)] \prod_{k=1}^{3n-1} (\rho_k - s)}{s\left[\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s)\right]}$$

Επειδή τώρα η κατανομή των απαιτήσεων είναι εκθετική μπορούμε να βρούμε ότι

$$\hat{h}_{1,r}(s) - \hat{h}_{2,r}(s) = \frac{Q_{3n+1,r}(s)}{c^{3n-1}(a+s)(2a+s)}$$

$$\begin{aligned} Q_{3n+1,r}(s) = {} & (a+s)(2a+s)(r+\lambda-cs)^n(r+2\lambda-cs)^{2n-1} \\ & - a\lambda^n s(2a+s)(r+2\lambda-cs)^{2n-1} \\ & -\theta a\lambda^n s\left[2(r+\lambda-cs)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} \lambda^k (r+2\lambda-cs)^{n-k-1} \right. \\ & \left. - (r+2\lambda-cs)^{2n-1}\right] \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $Q_{3n+1,r}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $3n+1$ με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $(-c)^{3n-1}$ επομένως θα έχει ακριβώς $3n+1$ μιγαδικές ρίζες. Επίσης η εξίσωση $\hat{h}_{1,r}(s) = \hat{h}_{2,r}(s)$ αποτυπώνει την γενικευμένη εξίσωση Lundberg, η οποία έχει $3n-1$ ρίζες$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{3n-1}$ με θετικό πραγματικό μέρος , οι οποίες θα είναι αναγκαστικά λύσεις και της $Q_{3n+1,r}(s)$. Τότε η $Q_{3n+1,r}(s)$ θα έχει και δυο ακόμη ρίζες $-R_1(r), -R_2(r)$ με $Re\left(R_i(r)\right) > 0$ για $i = 1,2$. Συνεπώς η $Q_{3n+1,r}(s)$ έχει μια παραγοντοποίηση της μορφής

$Q_{3n+1,r}(s) = (-c)^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2) \prod_{k=1}^{3n-1}(s-\rho_k) = c^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2) \prod_{k=1}^{3n-1}(\rho_k - s).$

Αντικαθιστώντας στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T παίρνουμε ότι:

$$\widehat{m}_T(s) = \frac{(s+R_1)(s+R_2) - [1 - m_T(0)](a+s)(2a+s)}{s(s+R_1)(s+R_2)}$$

Για να είναι πεπερασμένος ο μετασχηματισμός Laplace θα πρέπει ο αριθμητής να έχει ρίζα τον αριθμό $s = 0$, διαφορετικά θα έχει απροσδιόριστη μορφή

Ο αριθμητής για $s = 0$ δίνει: $(0+R_1)(0+R_2) - [1 - m_T(0)](a+0)(2a+0) = 0$

$R_1R_2 - 2a^2[1 - m_T(0)] = 0 \Leftrightarrow 1 - m_T(0) = \frac{R_1R_2}{2a^2} \Leftrightarrow m_T(0) = \frac{2a^2 - R_1R_2}{2a^2}$. Τότε:

$$\widehat{m}_T(s)=\frac{(s+R_1)(s+R_2)-\frac{R_1R_2}{2a^2}(a+s)(2a+s)}{s(s+R_1)(s+R_2)}$$
$$=\frac{\left(1-\frac{R_1R_2}{2a^2}\right)s+R_1+R_2-\frac{3R_1R_2}{2a}}{(s+R_1)(s+R_2)}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι οι ρίζες R_1,R_2 είναι διακεκριμένες και κάνουμε ανάλυση κλασμάτων σε απλούστερα προκειμένου να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace. Σύμφωνα με την ανάλυση αυτή έχουμε:

$$\widehat{m}_T(s)=\frac{R_2}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_1}{2a}+\frac{R_1^2}{2a^2}\right)\frac{1}{s+R_1}+\frac{R_1}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_2}{2a}+\frac{R_2^2}{2a^2}\right)\frac{1}{s+R_2}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$m_T(u)=\frac{R_2(r)}{R_2(r)-R_1(r)}\left(1-\frac{3R_1(r)}{2a}+\frac{R_1^2(r)}{2a^2}\right)e^{-R_1(r)u}$$
$$+\frac{R_1(r)}{R_2(r)-R_1(r)}\left(1-\frac{3R_2(r)}{2a}+\frac{R_2^2(r)}{2a^2}\right)e^{-R_2(r)u}$$

Επίσης η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\psi(u)=\lim_{r\to0^+}m_T(u)$. Προκειμένου να βρεθούν οι από κοινού και οι περιθώριες των τυχαίων μεταβλητών $U(T^-),|U(T)|$μέσω των ιδιοτήτων που περιγράφηκαν ανωτέρω πρέπει να βρούμε τις ποσότητες $\Psi_j(u)$ για κάθε $j=1,2,\cdots,3n-1$. Λόγω των προηγούμενων ιδιοτήτων έχουμε:

$$\Psi_j(u)=\frac{R_2}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_1}{2a}+\frac{R_1^2}{2a^2}\right)\frac{R_1}{R_1+\rho_j}e^{-R_1u}$$
$$+\frac{R_1}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_2}{2a}+\frac{R_2^2}{2a^2}\right)\frac{R_2}{R_2+\rho_j}e^{-R_2u}$$
$$+\left(\frac{R_2}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_1}{2a}+\frac{R_1^2}{2a^2}\right)\frac{1}{R_1+\rho_j}+\frac{R_1}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_2}{2a}+\frac{R_2^2}{2a^2}\right)\frac{1}{R_2+\rho_j}\right)\rho_je^{\rho_ju}$$

Έτσι λοιπόν η κατανομή των $U(T^-),|U(T)|$ θα είναι:

Αν $u\in[0,x)$τότε:

$$f_r(x,y|u)=\frac{2a^3}{R_1R_2}e^{-a(x+y)}\sum_{j=1}^{3n-1}\left[b_{1,j}-b_{2,j}\left(1-e^{-2a(x+y)}\right)\right]$$
$$\times\left[\frac{(a+\rho_j)(2a+\rho_j)R_1R_2}{2a^2}e^{-\rho_j(x-u)}-\sum_{k=1}^{2}\frac{\zeta_{k,r}R_k}{R_k+\rho_j}e^{-R_ku+\rho_jx}\right]$$

Αν όμως $u\in[x,+\infty)$ τότε

$$f_r(x,y|u) = \frac{2a^3}{R_1R_2} e^{-a(x+y)} \sum_{j=1}^{3n-1} \left[b_{1,j} - b_{2,j}\left(1 - e^{-2a(x+y)}\right)\right] \times \left[\frac{(a+\rho_j)(2a+\rho_j)R_1R_2}{2a^2} e^{-\rho_j(x-u)} - \sum_{k=1}^{2} \frac{\zeta_{k,r}R_k}{R_k+\rho_j} e^{-R_k u}\left[e^{R_k u} - e^{-\rho_j x}\right]\right]$$

3.3 Το μοντέλο κινδύνου Erlang

Έστω η κατανομή απαιτήσεων $X \sim \exp(1), W \sim Erlang(2,2)$ και $\theta = -1$ στον τύπο του FGM copula. Τότε σύμφωνα με το ίδιο, για $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ έχουμε:

$$C_\theta^{FGM}(u_1,u_2) = u_1u_2 - u_1u_2(1-u_1)(1-u_2)$$

Έτσι για τις τυχαίες μεταβλητές X, W θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{X,W}(x,t) &= C_\theta^{FGM}\left(F_X(x), F_W(t)\right) \\ &= F_X(x)F_W(t) - F_X(x)F_W(t)\left(1-F_X(x)\right)\left(1-F_W(t)\right). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας θα δίνεται από τη σχέση:

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)f_W(t) - h(x)f_W(t)[2\,\bar{F}_W(t) - 1], x,t \geq 0$$

με $h(x) = f(x)[1 - 2F_X(x)]$

Για το αριθμητικό μας παράδειγμα θα θεωρήσουμε ότι $W \sim Erlang(\lambda, n)$ με$\lambda = 2, n = 2$ και $\theta = -1, r = 0, c = 1.5$ (το ασφάλιστρο). Τότε χρησιμοποιώντας όλες τις σχέσεις που έχουμε περιγράψει, λαμβάνουμε ότι:

$$\hat{h}_{1,0}(s) = \left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3$$

$\hat{h}_{2,0}(s) = \frac{4}{1.5^2} \cdot \frac{1}{1+s}\left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3 - \frac{4}{1.5^2}\hat{h}(s)\left[2\left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \sum_{k=0}^{1}\left(\frac{2}{1.5}\right)^k \binom{1+k}{k}\left(\frac{4}{1.5} - s\right)^{1-k} - \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3\right]$. Έτσι:

$$\hat{h}_{2,0}(s) = \frac{4}{1.5^2} \cdot \frac{1}{1+s} \cdot \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3 - \frac{4}{1.5^2}\hat{h}(s)\left[2\left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2\left(\frac{16}{3} - s\right) - \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3\right]$$

Επιπλέον $h(x) = f_X(x)[1 - 2F_X(x)] = e^{-x}[1 - 2(1 - e^{-x})] = e^{-x}[2e^{-x} - 1]$

$= 2e^{-2x} - e^{-x}, x > 0$. Επομένως $\hat{h}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$. Κάνοντας αντικατάσταση τον μετασχηματισμό Laplace της h και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$Q_{3n+1}(s) = c^{3n-1}(1+s)(2+s)\left[\hat{h}_{1,0}(s) - \hat{h}_{2,0}(s)\right]$, υπολογίζουμε όλες τις ρίζες της Q με χρήση του wolfram alpha από όπου και έπονται οι ρίζες:

$$-R_2 = -2.15172, -R_1 = -0.348773, \rho_1 = 0, \rho_2 = 1.80106, \rho_3 = 3.64, \rho_4 = 2.35925 - 1.2773 \cdot i, \rho_4 = \overline{\rho_3}$$

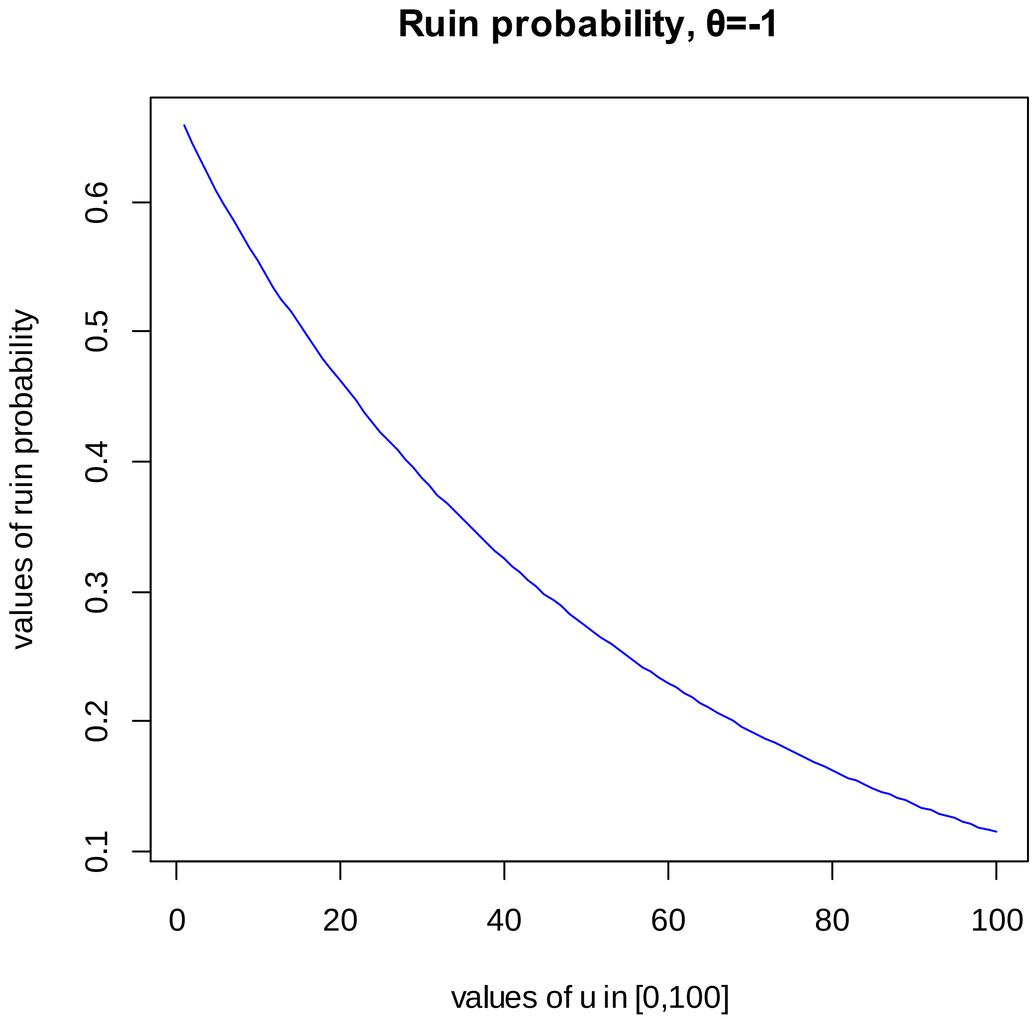
Θα υπολογίσουμε αναλυτικά την συνάρτηση $m_T(u)$ ως εξής:

$$m_T(u) = \frac{2.15172}{2.15172 - 0.348773}\left(1 - \frac{3 \cdot 0.348773}{2} + \frac{0.348773}{2}\right) e^{-0.348773u} + \frac{0.348773}{2.15172 - 0.348773}\left(1 - \frac{3 \cdot 2.15172}{2} + \frac{2.15172^2}{2}\right) e^{-2.15172u}$$

Έτσι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ως συνάρτηση του αρχικού πλεονάσματος u, θα δίνεται από τον τύπο:

$$m_T(u) = 0.4964965 \cdot e^{-0.348773u} - 0.8787344 e^{-2.15172u}$$

```
R1=2.06731
R2=0.790898
u=m1=c(1:100)
h=5/100
u[1]=0
m1[1]=(R2/(R2-R1))*(1-3*R1/2-R1^2/2)*exp(-R1*u[1])+(R1/(R2-R1))*(1-3*R2/2-R2^2/2)*exp(-R2*u[1])
for(i in 2:100){
u[i]=u[i-1]+h
m1[i]=(R2/(R2-R1))*(1-3*R1/2-R1^2/2)*exp(-R1*u[i])+(R1/(R2-R1))*(1-3*R2/2-R2^2/2)*exp(-R2*u[i])
}
plot(m1,type="l",col="blue",main="Ruin probability, θ=-1",
xlab="values of u in [0,100]",
ylab="values of ruin probability")
```



Τώρα, για την ειδική περίπτωση της ανεξαρτησίας, παίρνουμε στο FGM copula $\theta = 0$ επομένως:

$$\hat{h}_{1,0}(s) = \left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3$$

$$\hat{h}_{1,0}(s) = \frac{4}{1.5^2} \cdot \frac{1}{1+s}\left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3$$

$$Q_{4,0}(s) = 1.5^5(1+s)(2+s)\left[\left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3 - \frac{4}{1.5^2} \cdot \frac{1}{1+s}\left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3\right]$$

Υπολογίζουμε όλες τις ρίζες της Q με χρήση του wolfram alpha από όπου και έπονται οι ρίζες:

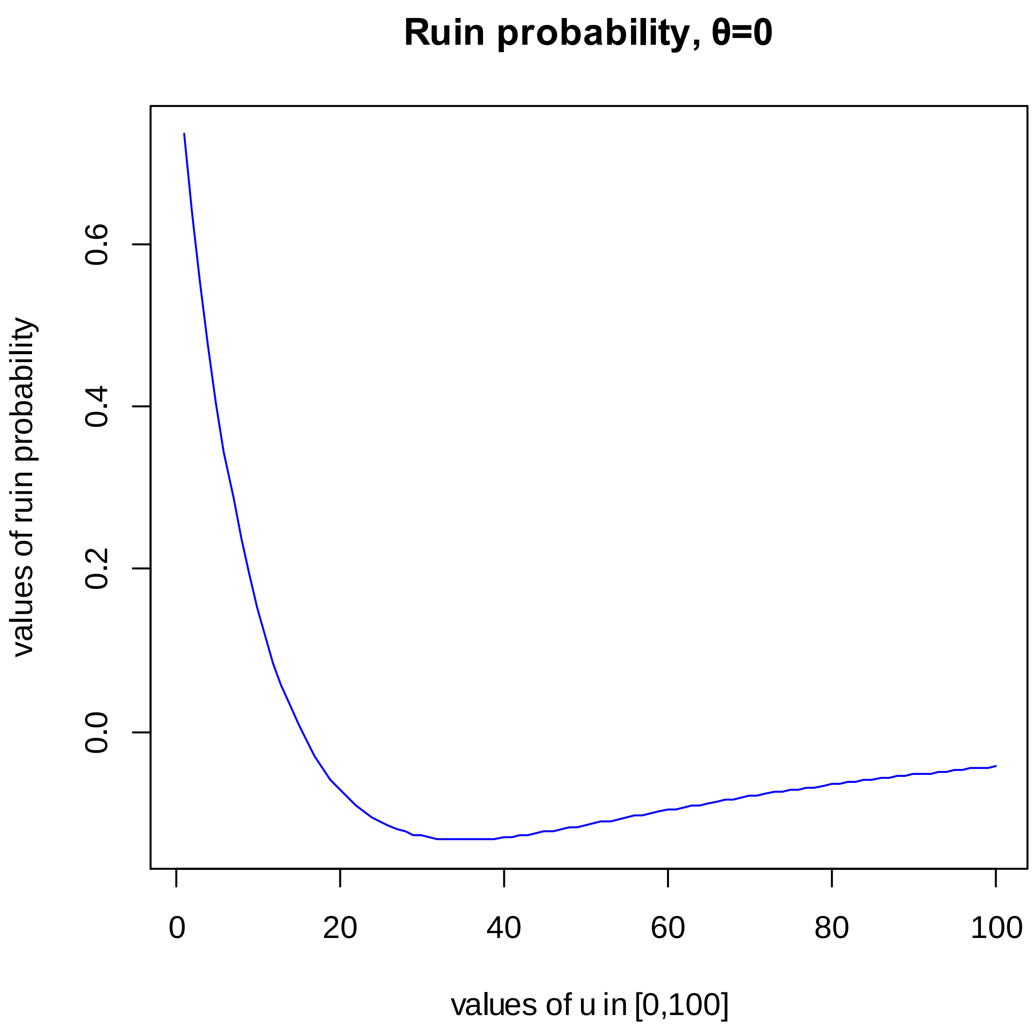
$$-R_2 = -2, -R_1 = -0.424972, \rho_1 = 0, \rho_2 = 2.09164, \rho_3 = 2.6667, \rho_4 = 2.6665 - 0.00003 \cdot i, \rho_4 = \overline{\rho_3}$$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά την συνάρτηση $m_T(u)$ ως εξής:

$$m_T(u) = \frac{2}{2-0.424972}\left(1-\frac{3\cdot 0.424972}{2}+\frac{0.424972}{2}\right)e^{-0.424972u} + \frac{0.348773}{2-0.424972}\left(1-\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{2.^2}{2}\right)e^{-2u}$$

Έτσι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ως συνάρτηση του αρχικού πλεονάσματος u, θα δίνεται από τον τύπο:

$$m_T(u) = 1.079275\cdot e^{-0.424972u} - 0.3456972e^{-2u}$$



Τέλος υπολογίζουμε μια ακόμη φορά τα παραπάνω και για $\theta = 1$:

$$\hat{h}_{1,0}(s) = \left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3$$

$\hat{h}_{2,0}(s) = \frac{4}{1.5^2} \cdot \frac{1}{1+s}\left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3 + \frac{4}{1.5^2}\hat{h}(s)\left[2\left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \sum_{k=0}^{1}\left(\frac{2}{1.5}\right)^k \binom{1+k}{k}\left(\frac{4}{1.5} - s\right)^{1-k} - \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3\right]$. Έτσι:

$$\hat{h}_{2,0}(s) = \frac{4}{1.5^2} \cdot \frac{1}{1+s} \cdot \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3 + \frac{4}{1.5^2}\hat{h}(s)\left[2\left(\frac{2}{1.5} - s\right)^2 \left(\frac{16}{3} - s\right) - \left(\frac{4}{1.5} - s\right)^3\right]$$

$Q_{3n+1}(s) = c^{3n-1}(1+s)(2+s)\left[\hat{h}_{1,0}(s) - \hat{h}_{2,0}(s)\right]$. Υπολογίζουμε όλες τις ρίζες της Q με χρήση του wolfram alpha από όπου και έπονται οι ρίζες:

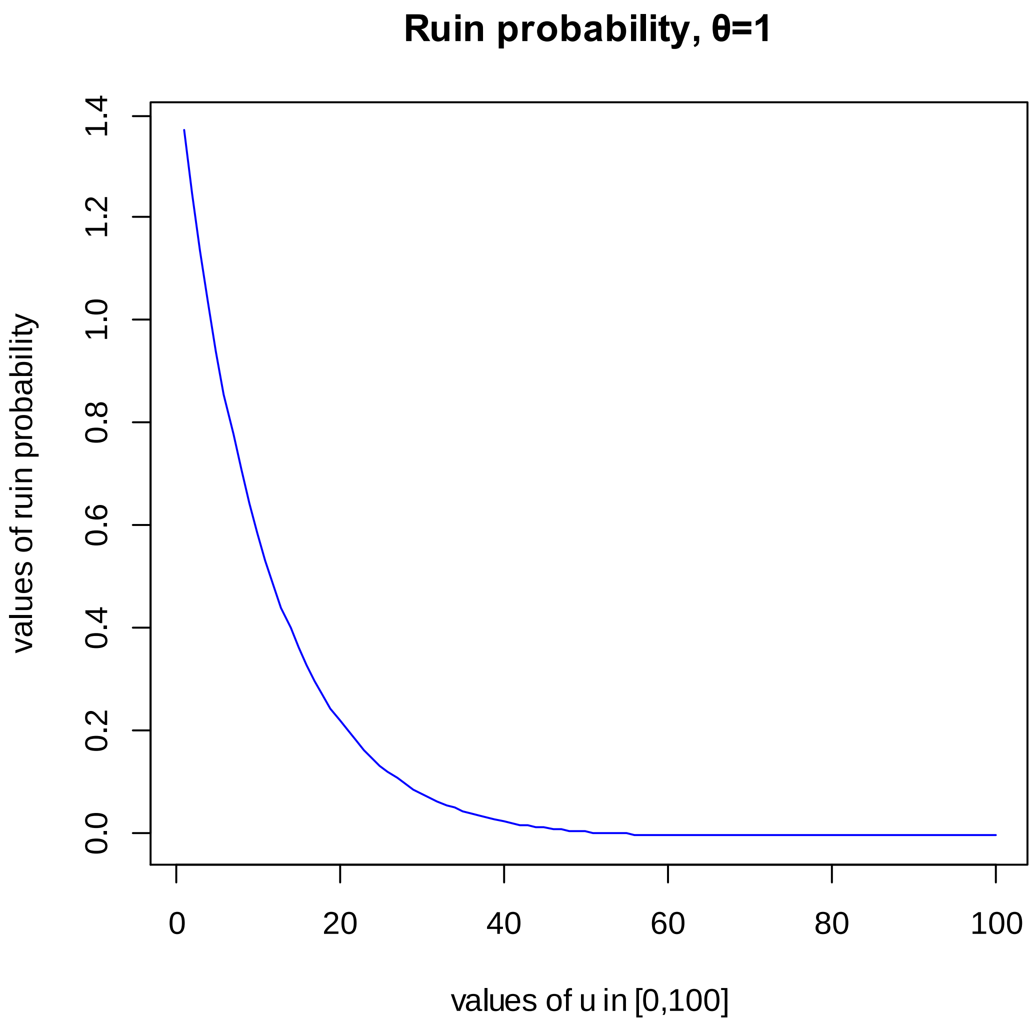
$$-R_2 = -1.81155, -R_1 = -0.540943, \rho_1 = 0, \rho_2 = 1.67965 - 0.334413 \cdot i, \rho_3 = \overline{\rho_2}, \quad \rho_4 = 3.32993 - 0.800356 \cdot i, \rho_5 = \overline{\rho_4}$$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά την συνάρτηση $m_T(u)$ ως εξής:

$$m_T(u) = \frac{1.81155}{1.81155 - 0.540943}\left(1 - \frac{3 \cdot 0.540943}{2} + \frac{0.0.540943}{2}\right)e^{-0.540943u} + \frac{0.540943}{1.81155 - 0.540943}\left(1 - \frac{3 \cdot 1.81155}{2} + \frac{1.81155^2}{2}\right)e^{-1.81155u}$$

Έτσι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ως συνάρτηση του αρχικού πλεονάσματος u, θα δίνεται από τον τύπο:

$$m_T(u) = 1.429698 \cdot e^{-0.540943u} - -0.06027418e^{-1.81155u}$$



Ruin probability, θ=1
values of ruin probability
values of u in [0,100]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0
20
40
60
80
100

Κεφάλαιο 4: Σύνοψη και συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, αναλύουμε το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου καθώς και την επίδραση της συνάρτησης Gerber-Shiu ως προς την εξαγωγή ορισμένων συμπερασμάτων . Η διαχείρηση κινδύνου βασίζεται στην εκτίμηση σημαντικών μεγεθών προκειμένου να διαπιστωθούν ορθά συμπεράσματα για τα μοντέλα που θα ακολουθήσουν οι ασφαλιστικές εταιρείες. Τέτοια μεγέθη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και η τιμή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία. Παρουσιάζουμε τα μέτρα της χρεοκοπίας που προκύπτουν, τόσο από την κλασσική, όσο και από τη γενικευμένη εξίσωση Gerber-Shiu για διάφορα μοντέλα κινδύνου. Στη συνέχεια συμπεριλάβαμε την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών στη συνάρτηση ποινής, όπου περιλαμβάνεται το πλεόνασμα πριν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Επιπρόσθετα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης του Lundberg μας επιτρέπουν να αναγνωρίσουμε τις άγνωστες ποσότητες. Μελετήσαμε ότι στην πρώτη πτώση του πλεονάσματος, η $m_r(u)$ ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία εξαρτάται από τρεις μεταβλητές $(T, U(T)$, $|U(T-)|)$. Επίσης, λαμβάνουμε υπόψη τη διαδικασία κινδύνου Sparre Andersen, με εξάρτηση μεταξύ του μεγέθους claim και του χρόνου interclaim, βασιζόμενοι στην Farlie - Gumbel – Morgenstern copula. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι κατανέμονται σύμφωνα με μια κατανομή Erlang(n). Επομένως τα μοντέλα μας κινδύνου είναι μια επέκταση της κλασσικής σύνθετης διαδικασίας κινδύνου Poisson. Η επιλογή μιας κατανομής Erlang(n) οφείλεται στο γεγονός ότι είναι πιο γενική από την εκθετική κατανομή επιτρέποντας την ευέλικτη μοντελοποίηση των χρόνων και οργανώνεται ως εξής: Αρχικά, περιγράφουμε τη δομή εξάρτησης του προτεινόμενου μοντέλου. Εξάγουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg και αναλύουμε τις ρίζες της. Στη συνέχια πραγματοποιούμε μετασχηματισμό Laplace για την συνάρτηση των Gerber - Shiu. Κατόπιν γίνεται η ανάλυση της συνάρτησης Gerber - Shiu με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα . Τέλος γίνεται σαφής αναφορά στην ελλειματική εξίσωση της συνάρτησης Gerber - Shiu, στον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία και μάλιστα δίνονται ορισμένα αριθμητικά αποτελέσματα μαζί με εκφράσεις για τις discounted κατανομές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείματος κατά την χρεοκοπία. Κλείνοντας, πραγματοποιήσαμε ανάλυση της κατανομής Erlang. Η συγκεκριμένη κατανομή παρέχει μία καλή προσέγγιση στη μελέτη των δεδομένων. Η μελέτη βασίστηκε στις τυχαίες μεταβλητές των ενδιάμεσων χρόνων των απαιτήσεων και των ατομικών υψών τους, τόσο στην περίπτωση της ανεξαρτησίας τους, όσο και στην περίπτωση της εξάρτησης τους.

Βιβλιογραφία

Rongda Chen a,b,c,**, Xinhao Chen a, ChengluJina,c,*, Yiyang Chen a, Jiayi Chen (2020) Credit rating of online lending borrowers using recovery rates, *International Review of Economics and Finance,* 68, 204–216.

BCBS - Basel Committee on Banking Supervision. (2011). Basel III counterparty credit risk frequently asked questions. Basel: Bank for International Settlements.

Chen, R., Zhou, H., Jin, C., & Zheng, W. (2019). Modeling of recovery rate for a given default by non-parametric method. Pacific-Basin Finance Journal, 57, 101085.

Gurtler, M., &Hibbeln, M. (2013). Improvements in loss given default forecasts for bank loans. Journal of Banking &Finance, 37(7), 2354-236.

Hartmann-Wendels, T., Miller, P., & Tows, E. (2014). Loss given default for leasing: Parametric and nonparametric estimations. Journal of Banking &Finance, 40, 364–437.

Shen, C.-H., Lin, S.-J., Tang, D.-P., & Hsiao, Y.-J. (2016). The relationship between financial disputes and financial literacy. Pacific-Basin Finance Journal, 36, 46–65.

Livingston, M., Poon, W. P., & Zhou, L. (2018). Are Chinese credit ratings relevant? A study of the Chinese bond market and credit rating industry. Journal of Banking & Finance, 87, 216–232.

Treacy, W. F., & Carey, M. (2000). Credit risk rating systems at large US banks. Journal of Banking &Finance, 24(1–2), 167–201.

Angilella, S., &Mazzù, S. (2015). The financing of innovative SMEs: A multicriteria credit rating model. European Journal of Operational Research, 244(2), 540–554.

Edelberg Wendy (2006) Risk-based pricing of interest rates for consumer loans, *Journal of Monetary Economics*, 53, 2283–2298.

Crook Jonathan N., Edelman David B., and Thomas Lyn C. (2007) Recent developments in consumer credit risk assessment, *European Journal of Operational Research*, 183, 1447–1465.

Lawrence, D. & Solomon, A. (2012). Managing a consumer lending business. Solomon Lawrence Partners.

Lessmann, S., Baesens, B., Seow, H.-V., & Thomas, L. C. (2015). Benchmarking state-of-the-art classification algorithms for credit scoring: An update of research. European Journal of Operational Research, 247(1), 124–136.

Hurley, M., & Adebayo, J. (2016). Credit scoring in the era of big data. Yale Journal of Law & Technology, 18, 149–216.

Roa Luisa, Correa-Bahnsen Alejandro, Suarez Gabriel, Cort´es-Tejada Fernando, Luque A. Maria, Bravo Cristian (2021) Super-app behavioral patterns in credit risk models: Financial, statistical and regulatory implications, Expert Systems With Applications, 169, 114486.

Treacy William F. and Carey Mark (2000) Credit risk rating systems at large US banks, *Journal of Banking & Finance*, 24, 167-201.

Ravi Kumar, P., Ravi, V., 2007. Bankruptcy prediction in banks and firms via statistical and intelligent techniques – A review. *European Journal of Operational Research* 180, 1–28.

Altman, E.I., Saunders, A., 1998. Credit risk measurement: Developments over the last 20 years. *Journal of Banking and Finance* 21, 1721–1742.

Diakoulaki, D., Mavrotas, G., Papayannakis, L., 1992. A multicriteria approach for evaluating the performance of industrial firms. *Omega* 20 (4), 467–474.

Siskos, Y., Zopounidis, C., Pouliezos, A., 1994. An integrated DSS for financing firms by an industrial development bank in Greece*. Decision Support Systems* 12, 151–168.

Mareschal, B., Brans, J.P., 1991. Bankadviser: An industrial evaluation system. *European Journal of Operational Research* 54, 318–324.

Skogsvik, K., 1990. Current cost accounting ratios as predictors of business failure: The Swedish case. *Journal of Business Finance and Accounting* 17 (1), 137–160.

Zmijewski, M.E., 1984. Methodological issues related to estimation of financial distress prediction models. *Journal of Accounting Research* 22 (Supplement), 58–59.

Zavgren, C.V., 1985. Assessing the vulnerability to failure of American industrial firms: A logistic analysis. *Journal of Business Finance and Accounting* 12 (1), 19–45.

Kassani Aikaterini, «Στοχαστικές Διαδικασίες πλεονάσματος με εξάρτηση και στρατηγικές μερισμάτων», μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Ιούνιος 2016.

Keasey, K., McGuinness, P., Short, H., 1990. Multilogit approach to predicting corporate failure – Further analysis and the issue of signal consistency. *Omega* 18 (1), 85–94.

Kolari, J., Glennon, D., Shin, H., Caputo, M., 2002. Predicting large US commercial bank failures*. Journal of Economics and Business* 54 (32), 361–387.

Martin, D., 1977. Early warning of bank failure: A logit regression approach. *Journal of Banking and Finance* 1, 249–276.

Ohlson, J.A., 1980. Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy. *Journal of Accounting Research* 19, 61–80.

Zopounidis, C., 1987. A multicriteria decision-making methodology for the evaluation of the risk of failure and an application. *Foundations of Control Engineering* 12 (1), 45–67.

Zopounidis, C., Doumpos, M., 1998. Developing a multicriteria decision support system for financial classification problems: The Finclas system. *Optimization Methods and Software* 8, 277–304.

Blum, M., 1974. Failing company discriminant analysis. *Journal of Accounting Research*, 1–25.

Deakin, E.B., 1972. A discriminant analysis of predictors of business failure. *Journal of Accounting Research*, 167–179.

Emel, A.B., Oral, M., Reisman, A., Yolalan, R., 2003. A credit scoring approach for the commercial banking sector. *Socio-Economic Planning Sciences* 37, 103–123.

Jones, S., Hensher, D.A., 2004. Predicting firm financial distress: A mixed logit model. *Accounting Review* 79 (4), 1011–1038.

Canbas, S., Canbas, S., Cabuk, A., Kilic, S.B., 2005. Prediction of commercial bank failure via multivariate statistical analysis of financial structure: The Turkish case. *European Journal of Operational Research* 166, 528–546.

Edelberg Wendy (2006) Risk-based pricing of interest rates for consumer loans, *Journal of Monetary Economics*, 53, 2283–2298.

Chadjiconstantinidis Stathis and Vrontos Spyridon (2014) *On a renewal risk process with dependence under a Farlie - Gumbel- Morgenstern Copula*, 1-32.

Kyprianou Andreas E. (2013) *Gerber–Shiu Risk Theory*, Springer.

Ahn Soohan and Badescu Andrei L.(2007), On the analysis of the Gerber–Shiu discounted penalty function for risk processes with Markovian arrivals, *Insurance: Mathematics and Economics*, 41, 234–249

Deng Chao, Zhou Jieming, Deng Yingchun (2012) The Gerber–Shiu discounted penalty function in a delayed renewal risk model with multi-layer dividend strategy, *Statistics and Probability Letters*, 82, 1648–1656

Zhang Zhimin, Li Shuanming, Yang Hu (2009) The Gerber–Shiu discounted penalty functions for a risk model with two classes of claims, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230, 643–655.

Κασαννή Αικατερίνη Σ. (2016) *«ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ»*, Διπλωματική Εργασία.

Ζησούδα Λελούδα (2017) *''ΜΕΤΡΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΧΡΟΝΟ''*, Διπλωματική Εργασία.