ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

στην

«ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

Σύγκριση Πιθανοτήτων Χρεοκοπίας με χρήση Στοχαστικών Διατάξεων

Γραμματικοπούλου Δήμητρα Παναγιώτα

Διπλωματική Εργασία

η οποία υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς 2021

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν …….. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελής επιτροπή:

1. Αναπληρωτής Καθηγητής, Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)

2. Επίκουρος Καθηγητής, Πιτσέλης Γεώργιος

3. Αναπληρωτής Καθηγητής, Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

A Comparison of Ruin Probabilities using Stochastic Orders

Grammatikopoulou Dimitra Panagiota

MCs Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece 2021

Στους γονείς μου Αναστάσιο & Αναστασία…

…στις αδελφές μου Γεωργία & Αγγελική

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου Κωνσταντίνο Πολίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια της επίβλεψης του μέχρι την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας μου.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που στήριξε κάθε μου προσπάθεια σε όλη την ακαδημαϊκή μου πορεία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι να μπορέσουμε να συνδέσουμε την Πιθανότητα Χρεοκοπίας στο Συλλογικό Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου με κάποιες βασικές Στοχαστικές Διατάξεις.

Χρησιμοποιώντας τα χαρακτηριστικά του Συλλογικού Προτύπου καθώς και τις ιδιότητες των Στοχαστικών Διατάξεων που αναφέρονται και περιγράφονται στη συνέχεια, έχουμε καταλήξει σε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τη σύγκριση της Πιθανότητας Χρεοκοπίας δυο χαρτοφυλακίων, γνωρίζοντας εκ των προτέρων τις κατανομές που ακολουθούν οι ατομικές ζημιές σε κάθε ένα από αυτά τα χαρτοφυλάκια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μία αναφορά στην έννοια του Αναλογισμού και στο πώς ο αναλογισμός χρησιμοποιείται και εφαρμόζεται στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Επίσης, περιγράφεται το Συλλογικό Πρότυπο καθώς και η χρησιμότητα των Στοχαστικών Διαδικασιών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το Συλλογικό Πρότυπο στη Θεωρία Χρεοκοπίας καθώς και διάφορες σημαντικές έννοιες γύρω από αυτό όπως είναι το ύψος και το πλήθος των ατομικών απαιτήσεων, οι συνολικές απαιτήσεις, η κατανομή τους και η πιθανογεννήτρια της κατανομής, καθώς και η σύνθετη κατανομή Poisson. Επιπλέον, γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία χρεοκοπίας και παρουσιάζονται χρήσιμες έννοιες και ποσότητες όπως η Ανέλιξη του πλεονάσματος, η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο, η χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση, ο χρόνος της χρεοκοπίας, τα κλιμακωτά ύψη και τέλος η μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή με τον ορισμό της μερικής διάταξης και παρουσιάζονται η Συνήθης Στοχαστική Διάταξη, η Στοχαστική Διάταξη Ανακοπής Ζημιάς, η Στοχαστική Διάταξη Convex Order και η Στοχαστική Διάταξη Harmonic Mean Residual Life Order, αναφέροντας τις βασικές ιδιότητες για κάθε μια από αυτές.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται πέντε παραδείγματα που στόχο έχουν τη σύγκριση της πιθανότητας χρεοκοπίας δυο ξεχωριστών χαρτοφυλακίων χωρίς να υπάρχει προκαθορισμένο αρχικό αποθεματικό. Στα παραδείγματα αυτά χρησιμοποιούνται η εκθετική κατανομή και η μείξη εκθετικών κατανομών για τα ύψη των ατομικών απαιτήσεων κάθε χαρτοφυλακίου, καθώς και οι ιδιότητες των στοχαστικών διατάξεων που εφαρμόζονται σε κάθε παράδειγμα. Ο υπολογισμός όλων των απαραίτητων ποσοτήτων μέχρι την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας γίνεται με τη χρήση του πακέτου Mathematica. Σε κάθε παράδειγμα, υπάρχουν και σχετικές γραφικές παραστάσεις οι οποίες απεικονίζουν τις ποσότητες που υπολογίζονται για καλύτερη κατανόηση.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to connect the Ruin Theory with some basic Stochastic Processes. Initially the thesis presents the Collective Model and its characteristics as well as a number of Stochastic Processes with their properties. This analysis aims to draw specific conclusions regarding Ruin Theory. For instance, knowing in advance the losses distributions of two Individual portfolios, we could extract comparative conclusions about the Ruin Theory of those two portfolios.

In the first chapter, a literature review concerning the concept of Actuarial Science and how it is used and applied to insurance companies is presented. Also, the Collective Model as well as the usefulness of the Stochastic Processes is described.

In the second chapter, the Collective Model in Ruin Theory is presented as well as various important concepts around it such as height and amount of the individual claims, the total claims, their distribution and the probability generating function of the distribution, as well as the Poisson complex distribution. In addition, an introduction to Ruin Theory is given and useful concepts and quantities such as surplus growth, the possibility of bankruptcy in indefinite time, bankruptcy with the first compensation, the time of bankruptcy, the stepped heights and finally the maximum cumulative loss are presented.

In the third chapter, an introduction regarding the definition of partial processes is given and then a number of Stochastic Processes (First Stochastic Dominance, Stop Loss, Convex Order, Harmonic Mean Residual Life Order) are presented, along with their basic properties.

Finally, in the fourth chapter there are five examples that aim to assess through comparisons the ruin probability. These examples use the exponential distribution and the combination of exponential distributions for the heights of individual requirements of each portfolio, as well as the properties of the stochastic Processes that apply to each example. The calculation of all the necessary quantities is performed in order to reach the ruin probability of each portfolio. Each example is accompanied by various graphs which depict the quantities calculated for better understanding. For the purposes of the dissertation, the package Mathematica has been selected and utilized.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Σκοπός της Αναλογιστικής επιστήμης είναι η ανάλυση του οικονομικού αντίκτυπου που έχουν οι κίνδυνοι που αναλαμβάνουν διάφοροι οικονομικοί οργανισμοί όπως είναι για παράδειγμα οι ασφαλιστικές εταιρείες, οι συμβουλευτικές εταιρείες και τα συνταξιοδοτικά ταμεία. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της αβεβαιότητας που οφείλεται στους ασφαλιστικούς και χρηματοοικονομικούς κινδύνους που αναλαμβάνει ο εκάστοτε οργανισμός, όπως για παράδειγμα η αποζημίωση των ασφαλισμένων για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Με βάση τη στατιστική και την πιθανοθεωρία, χρειάζεται να υπάρχει μεγάλη κατανόηση των οικονομικών, χρηματοοικονομικών, δημογραφικών και ασφαλιστικών κινδύνων για να μπορέσει ένας Αναλογιστής να προβλέψει όσο το δυνατόν καλύτερα τον υποκείμενο κίνδυνο κάνοντας τις βέλτιστες υποθέσεις για το ρίσκο που αναλαμβάνει η κάθε επιχείρηση. Με βάση τις αναλογιστικές μεθόδους και τα διάφορα διεθνή πρότυπα γίνεται ανάλυση και ποσοτικοποίηση του ρίσκου, υπολογίζοντας την πιθανότητα εμφάνισης των κινδύνων και εκτιμώντας την πιθανή χρηματοοικονομική τους επίδραση με στόχο τη διαχείριση και τον περιορισμό αυτών.

Ιστορικά, η αναλογιστική επιστήμη χρησιμοποιούσε ντετερμινιστικά μοντέλα για την κατασκευή πινάκων και ασφάλιστρων. Ωστόσο, η επιστήμη αυτή έχει περάσει από επαναστατικές αλλαγές κατά τη διάρκεια των τελευταίων 30 ετών, λόγω της διάδοσης των υπολογιστών υψηλής ταχύτητας και την ένωση των στοχαστικών αναλογιστικών μοντέλων με τη σύγχρονη οικονομική θεωρία (Frees, 1990).

Ένα από τα σημαντικότερα μοντέλα στον Αναλογισμό και στη θεωρία κινδύνων, αφορά το συλλογικό πρότυπο, με βάση το οποίο υπολογίζεται και η πιθανότητα χρεοκοπίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ζημιών στο χρόνο, εξετάζοντας τα έσοδα και τα έξοδα της ασφαλιστικής εταιρείας. Οι ποσότητες αυτές χρειάζεται να παρακολουθούνται καθώς μεταβάλλονται χρονικά και επομένως λόγω της αβεβαιότητας που υπάρχει καθίσταται αναγκαία η χρήση κατάλληλων στοχαστικών διαδικασιών.

Από τα πρότυπα που έχουν μελετηθεί, αυτό που έχει παρουσιάσει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη θεωρία χρεοκοπίας είναι το κλασικό πρότυπο που μελετάται και στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Η πιθανότητα χρεοκοπίας που όπως αποδεικνύεται συνδέεται άμεσα με τη μέγιστη σωρευτική απώλεια, αποτελεί ένα από τα συνηθέστερα μέτρα αξιοπιστίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

Για την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, ο αναλογιστής επιδιώκει την καλύτερη εκτίμηση για το αποθεματικό που θα πρέπει να διαθέτει η ασφαλιστική επιχείρηση. Για κάποιο σταθερό αρχικό αποθεματικό, ανάμεσα σε δύο χαρτοφυλάκια, θα επιλεγόταν αυτό που θα έδινε τη μικρότερη πιθανότητα χρεοκοπίας μετά από σχετικές μελέτες.

Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό δυο χαρτοφυλακίων δεν είναι προκαθορισμένο, είναι πιο περίπλοκο να επιλεγεί για ποιο από τα δύο η εταιρεία αναλαμβάνει μικρότερο κίνδυνο.

Όπως αποδεικνύεται, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί μέσω την μέγιστης σωρευτικής απώλειας ως η ουρά αυτής της ποσότητας η οποία αποτελεί μια σύνθετη κατανομή.

Για να μπορέσουν να συγκριθούν δύο σύνθετες κατανομές και να διαπιστωθεί ποιο χαρτοφυλάκιο θεωρείται περισσότερο επικίνδυνο για την εταιρεία, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες κάποιον στοχαστικών διαδικασιών μεταξύ τυχαίων μεταβλητών.

Στη συγκεκριμένη εργασία διερευνάται μέσω σχετικών παραδειγμάτων, αν μεταξύ δύο συναρτήσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε δυο ανταγωνιστικά χαρτοφυλάκια, η μία είναι «μικρότερη» από την άλλη με βάση τις στοχαστικές διατάξεις που παρουσιάζονται και για συγκεκριμένες κατανομές του ύψους των ατομικών αποζημιώσεων.

2. Συλλογικό Πρότυπο στη Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1 Το Συλλογικό Πρότυπο

Θεωρώντας ότι έχουμε να μελετήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, σκοπός μας θα ήταν η μελέτη των υποχρεώσεων που θα έχει η ασφαλιστική εταιρεία, κυρίως ως προς τους ασφαλισμένους. Με τον όρο υποχρέωση ή ζημία εννοούμε την αποζημίωση των απαιτήσεων που θα προκύψουν στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα το οποίο εξετάζεται.

Στο συλλογικό πρότυπο το οποίο και θα αναλύσουμε, έχει νόημα να αντιμετωπίσουμε το χαρτοφυλάκιο ως σύνολο. Θα εστιάσουμε δηλαδή στις συνολικές υποχρεώσεις τις ασφαλιστικής εταιρείας προς όλους τους ασφαλισμένους στο δεδομένο χρονικό διάστημα και όχι στις εκάστοτε ζημίες που θα προκύψουν από τις απαιτήσεις του κάθε ασφαλισμένου ατομικά.

Έχει νόημα λοιπόν, να ορίσουμε τις εξής τυχαίες μεταβλητές για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα το οποίο εξετάζουμε:

- Την διακριτή τυχαία μεταβλητή N η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο {0,1,2,…} και αντιπροσωπεύει το συνολικό πλήθος των απαιτήσεων που θα φτάσουν στην ασφαλιστική εταιρεία.
- Τις τυχαίες μεταβλητές X_i οι οποίες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή F. Οι τυχαίες αυτές μεταβλητές X_1, X_2, X_3,… συμβολίζουν τα μεγέθη των ατομικών αποζημιώσεων που θα φτάσουν στην ασφαλιστική εταιρεία και η κατανομή F την οποία ακολουθούν μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή.
- Τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή S, το μέγεθος της οποίας υποδηλώνει τις συνολικές απαιτήσεις της ασφαλιστικής εταιρείας και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i\,, & N = 1,2,\ldots \\ 0\,, & N = 0 \end{cases}$$

Για λόγους απλούστευσης μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη μορφή $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, εφόσον είναι δεδομένο ότι S=0 εάν N=0. Δηλαδή εάν δεν έρθει κάποια απαίτηση προς την ασφαλιστική εταιρεία δεν θα υπάρχει καμία υποχρέωση αποζημίωσης.

2.1.1 Η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων S

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας και να εκτιμήσουμε το μέγεθος της συνολικής ζημιάς S, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις κατανομές των τυχαίων μεταβλητών N και X_i και να επικεντρωθούμε στην εύρεση της κατανομής της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής S.

Για το πλήθος των ατομικών απαιτήσεων N, έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = P(N = n), \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Ενώ οι τυχαίες μεταβλητές που δηλώνουν το ύψος των ανεξάρτητων και ισόνομων ατομικών απαιτήσεων Xi, έχουν την κοινή συνάρτηση κατανομής που συμβολίζεται με F.

Για το ύψος των συνολικών απαιτήσεων S του χαρτοφυλακίου, έχουμε την ακόλουθη συνάρτηση κατανομής :

$$G(x) = P(S \leq x), \qquad x \geq 0$$

Η κατανομή αυτή είναι σύνθετη εφόσον εξαρτάται από τις κατανομές των τυχαίων μεταβλητών N και Xi. Όπως αναφέρθηκε, η τυχαία μεταβλητή N παίρνει μη-αρνητικές και ακέραιες τιμές, ενώ η κατανομή F μπορεί να είναι διακριτή ή συνεχής. Επομένως, με βάση την κατανομή F, η κατανομή της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής S μπορεί να έχει τις εξής μορφές:

1. Εάν η τυχαία μεταβλητή X των ατομικών απαιτήσεων είναι διακριτή, τότε και η τυχαία μεταβλητή S θα είναι διακριτή ως άθροισμα διακριτών τυχαίων μεταβλητών.
2. Εάν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε ανάλογα από την τιμή της πιθανότητας $P(N = 0)$, η S μπορεί να είναι:
    i. Αν $P(N = 0) = 0$, η τυχαία μεταβλητή S θα είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.
    ii. Αν $P(N = 0) > 0$, η τυχαία μεταβλητή S θα είναι μικτού τύπου. Θα έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν ίση με $P(S = 0) = P(N = 0) = p_0$ και θα είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Αναφέρεται ότι, τον βασικότερο ρόλο στον υπολογισμό της κατανομής της S η οποία ορίζεται ως το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών X_i, $S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N$, τον έχει η τυχαία μεταβλητή N και όχι η μεταβλητή X.

Ακολουθεί ένα βασικό αποτέλεσμα για τον συνάρτησης $G(x)$.

Πρόταση 2.1.1.1

Για τη συνάρτηση κατανομής $G(x)$ των συνολικών αποζημιώσεων ισχύει η σχέση:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \qquad x \geq 0$$

Όπου, για $n = 0$, η συνέλιξη $F^{*0}(x)$ ορίζεται ως εξής:

$F^{*0}(x) = 0$ για $x = 0$, ενώ έχουμε $F^{*0}(x) = 1$ για $x \geq 0$

Απόδειξη

Το ενδεχόμενο $\{S \le x\}$ εμφανίζεται όταν το πλήθος των αποζημιώσεων παίρνει την τιμή $N = n$ για κάποιο n=0,1,2,… και το μέγεθος αυτών των αποζημιώσεων είναι το πολύ x. Επειδή τα ενδεχόμενα $\{N = n\}$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, παίρνουμε ότι:

$$\{S \le X\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \le x \text{ και } N = n\}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι:

$$G(x) = P(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \le x \text{ και } N = n)$$

Στην συνέχεια, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε ότι:

$$P(S \le x \text{ και } N = n) = P(S \le x | N = n) P(N = n)$$

Για τη δεσμευμένη πιθανότητα στο δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης παρατηρούμε ότι για $n = 1,2,\dots$,

$$P(S \le x | N = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le x\right) = F^{*n}(x)$$

Η σχέση αυτή αληθεύει επίσης και για $n = 0$ εφόσον στην περίπτωση αυτή ισχύει προφανώς $P(S \le x | N = 0) = 1$ για κάθε $x \ge 0$, και το αποτέλεσμα της πρότασης προκύπτει από τις τρείς τελευταίες σχέσεις.

Παράδειγμα 2.1.1.1

Στο συλλογικό πρότυπο, έστω ότι η κατανομή των ατομικών αποζημιώσεων είναι η εκθετική με μέση τιμή 4, ενώ η τυχαία μεταβλητή N που δηλώνει το πλήθος των αποζημιώσεων έχει την ακόλουθη συνάρτηση πιθανότητας.

$$P(N = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(N = 1) = \frac{3}{6}, \quad P(N = 2) = \frac{2}{6}$$

Ζητείται η εύρεση της συνάρτησης κατανομής του συνολικού κινδύνου S καθώς και των ακόλουθων πιθανοτήτων

- $P(S \le 4)$,
- $P(1 < S \le 3)$.

Λύση

Με βάση την Πρόταση 2.1.1.1 ισχύει ότι,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \qquad x \ge 0$$

Βλέπουμε ότι το πλήθος των ζημιών δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη ή ίση του 3. Επομένως θα είναι $p_n = 0 \; για \; n \geq 3$ και η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{2} p_n F^{*n}(x) = p_0 F^{*0}(x) + p_1 F^{*1}(x) + p_2 F^{*2}(x), \qquad x \geq 0$$

Ισχύει ότι,

$F^{*0}(x) = 1, \; x \geq 0$ και $F^{*1}(x) = F(x), \; x \geq 0$

άρα η σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$G(x) = p_0 + p_1 F(x) + p_2 F^{*2}(x), \quad x \geq 0$$

όπου πιθανότητες p_0, p_1, p_2 δίνονται.

Είναι γνωστό ότι στην εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, η μέση τιμή θα είναι ίση με $\frac{1}{\lambda}$, επομένως προκύπτει ότι οι ατομικές ζημιές ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{4}$ και η συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = 1 - e^{\lambda x} = 1 - e^{-x/4}, \; x \geq 0$$

Για την εύρεση της δεύτερης συνέλιξης $F^{*2}(x)$ θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους α και λ, όπου α είναι το πλήθος του αθροίσματος και λ είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής. Η κατανομή Erlang είναι ειδική περίπτωση της κατανομής Gamma.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Gamma με παραμέτρους α, λ είναι:

$$f(x) = \frac{\lambda^a x^{\alpha-1} e^{-x\lambda}}{\Gamma(\alpha)}, \; x > 0, \; \alpha > 0, \; \lambda > 0$$

όπου για ακέραιο α, ισχύει $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) = (\alpha - 1)!$

Επομένως, η πυκνότητα που αντιστοιχεί στην κατανομή $F^{*2}(x)$ για $\alpha = 2 \; και \; \lambda = \frac{1}{4}$ θα είναι η εξής:

$$f^{*2}(x) = \frac{\lambda^a x^{\alpha-1} e^{-x\lambda}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 x e^{-x/4}}{\Gamma(2)} = \frac{x e^{-x/4}}{16}, \; x \geq 0$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής θα είναι η εξής:

$$F^{*2}(x) = \int_0^x \frac{y e^{-y/4}}{16} dy = \int_0^x \frac{1}{16} y \left(-4e^{-y/4}\right)' dy = \int_0^x \frac{1}{4} y \left(-e^{-y/4}\right)' dy$$

$$= \left[-\frac{1}{4}y\left(e^{-y/4}\right)\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{4}e^{-y/4}dy = -\frac{1}{4}xe^{-x/4} + \left[\frac{1}{4}\left(-4e^{-y/4}\right)\right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{4}xe^{-x/4} + \left(1 - e^{-x/4}\right) = 1 - \frac{x+4}{4}e^{-x/4}, \ \ \gamma\iota\alpha\ x \geq 0$$

Συνεπώς, για τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S θα έχουμε:

$$G(x) = p_0 + p_1F(x) + p_2F^{*2}(x) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}\left(1 - e^{-x/4}\right) + \frac{2}{6}\left(1 - \frac{x+4}{4}e^{-x/4}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{6}e^{-x/4} - \frac{x+4}{12}e^{-x/4} = 1 - \frac{x+10}{12}e^{-x/4}, \ \ \gamma\iota\alpha\ x \geq 0$$

Προκύπτει ότι, η G είναι μια μεικτή κατανομή με μάζα πιθανότητας στο μηδέν ίση με:

$$G(0) = P(S=0) = P(N=0) = p_0 = \frac{1}{6}, \ \ \gamma\iota\alpha\ x \geq 0$$

και είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \infty)$.

Πιο συγκεκριμένα, για τη συνάρτηση κατανομής του συνολικού κινδύνου S, έχουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$G(x) = P(S \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6}, & x = 0 \\ 1 - \frac{x+10}{12}e^{-x/4}, & x > 0 \end{cases}$$

Έχοντας πλέον την συνάρτηση κατανομής μπορούμε να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες κάνοντας αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο

- $P(S \leq 4) = G(4) = 1 - \frac{4+10}{12}e^{-4/4} = 1 - \frac{7}{6}e^{-1} \cong 0{,}570807$
- $P(1 < S \leq 3) = G(3) - G(1) = \frac{11}{12}e^{-1/4} - \frac{13}{12}e^{-3/4} \cong 0{,}20217$

□

2.1.2. Η πιθανογεννήτρια της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων

Για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων S στον συλλογικό πρότυπο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση στην περίπτωση που οι ατομικές απαιτήσεις εκφράζονται από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, καθώς όπως αναφέρθηκε, σε αυτή την περίπτωση και οι συνολικές απαιτήσεις θα παίρνουν ακέραιες και μη αρνητικές τιμές αντίστοιχα.

Πρόταση 2.1.2.1

Έστω S η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το μέγεθος των συνολικών απαιτήσεων στο συλλογικό πρότυπο. Θεωρούμε ότι οι ατομικές απαιτήσεις X_1, X_2, X_3,… , είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την ίδια κατανομή, ορισμένη στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Αν οι $P_X(t)$, $P_N(t)$ και $P_S(t)$ δηλώνουν τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των μεταβλητών X_i, N και S στο πρότυπο αυτό αντίστοιχα, τότε οι γεννήτριες αυτές συναρτήσεις συνδέονται με τη σχέση:

$$P_S(t) = P_N(P_X(t))$$

Απόδειξη

Γνωρίζοντας ότι ισχύουν τα εξής:

- $M_S(t) = M_N(\ln M_X(t))$
- $P_X(t) = M_X(\ln t)$

ο τύπος της πιθανογεννήτριας θα μας δώσει διαδοχικά:

$$P_S(t) = M_S(\ln t) = M_N(\ln M_X(\ln t)) = M_N(\ln P_X(t)) = P_N\left(e^{\ln P_X(t)}\right) = P_N(P_X(t))$$

□

2.1.3 Η σύνθετη κατανομή Poisson

Στο συλλογικό πρότυπο, το πιο σύνηθες είναι να χρησιμοποιείται η κατανομή Poisson για την τυχαία μεταβλητή N η οποία εκφράζει το πλήθος των ατομικών απαιτήσεων X_i.

Θα έχουμε ότι $N \sim Poi(\lambda)$ με παράμετρο $\lambda \geq 0$ με μέση τιμή $E(N) = \lambda$ και διακύμανση $Var(N) = \lambda$. Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή S που εκφράζει τις συνολικές απαιτήσεις θα ακολουθεί τη σύνθετη Poisson κατανομή.

Αν για τις ατομικές απαιτήσεις με κατανομή F, έχουμε ότι $E(X_i^k) = \mu_k$ για τη ροπή k-τάξης, μπορούμε να υπολογίσουμε την πρώτη και δεύτερη ροπή για να βρούμε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των συνολικών απαιτήσεων βασιζόμενοι στην ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 2.1.2.2

Για τη μέση τιμή της σύνθετης τυχαίας μεταβλητής S, παίρνουμε ότι:

$$E(S) = E(N)E(X_i) = \lambda\mu_1$$

ενώ για την διακύμανση προκύπτει αντίστοιχα ότι:

$$Var(S) = E(N)(\mu_2 - {\mu_1}^2) + {\mu_1}^2 Var(N) = \lambda\mu_2$$

εφόσον $E(N) = Var(N) = \lambda$.

Επομένως, η δεύτερη ροπή της S γύρω από το μηδέν θα είναι:

$$E(S^2) = [E(S)]^2 + Var(S) = (\lambda\mu_1)^2 + \lambda\mu_2$$

Παράδειγμα 2.1.2.1

Έστω ότι τα ύψη των ατομικών αποζημιώσεων X_i ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = 8$ και το πλήθος τους ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 4$. Να βρεθεί η μέση τιμή, η διακύμανση και η ροπογεννήτρια των συνολικών απαιτήσεων S.

Λύση

Για την τυχαία μεταβλητή των ατομικών ζημιών δίνεται ότι $X_i \sim Exp(\theta)$, όπου θ=8, επομένως:

$$E(X) = \mu_1 = \frac{1}{8}, \qquad E(X^2) = \mu_2 = \frac{2}{8^2}, \qquad M_X(t) = \frac{8}{8-t}, \;\; t < 8$$

Αντίστοιχα, για την τυχαία μεταβλητή N δίνεται ότι $N \sim Poi(\lambda)$ με λ=4, επομένως

$$E(N) = \lambda = 4$$

Για την μέση τιμή και τη διακύμανση των συνολικών απαιτήσεων S παίρνουμε αντίστοιχα:

$$E(S) = \lambda\mu_1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(S) = \lambda\mu_2 = \frac{1}{8}$$

Για τη ροπογεννήτρια της σύνθετης Poisson χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$M_S(t) = exp[\lambda(M_X(t) - 1)]$$

παίρνουμε ότι για $t < 8$,

$$M_S(t) = exp\left[4\left(\frac{8}{8-t} - 1\right)\right] = exp\left[\frac{4t}{8-t}\right]$$

□

2.2 Η Θεωρία Χρεοκοπίας – Το Κλασικό Πρότυπο

Με βάση το συλλογικό πρότυπο που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μας ενδιέφερε να βρούμε το ύψος των συνολικών απαιτήσεων, δηλαδή το μέγεθος των συνολικών εξόδων μιας ασφαλιστικής εταιρείας σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Μελετώντας την θεωρία χρεοκοπίας, σκοπός είναι εκτός από τα έξοδα, να εξετάσουμε και τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας τα οποία εκφράζονται κυρίως υπό την μορφή ασφαλίστρων που καταβάλλονται από τους ασφαλισμένους.

Επιπλέον ενώ στο συλλογικό πρότυπο η μελέτη βασιζόταν σε ένα συγκεκριμένο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα, στη θεωρία χρεοκοπίας μας ενδιαφέρει η συνεχής εξέλιξη του χαρτοφυλακίου στο χρόνο.

Είναι λοιπόν αναγκαία η χρήση μίας σύνθετης στοχαστικής ανέλιξης, συγκεκριμένα της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος, μέσω της οποίας θα μπορέσουμε να μελετήσουμε τη θεωρία χρεοκοπίας.

Το κλασικό πρότυπο της θεωρίας χρεοκοπίας είναι αυτό το οποίο εξετάζεται περισσότερο και αναφέρεται σε συνεχή χρόνο. Βασιζόμενοι στο κλασικό πρότυπο θα δούμε διάφορες ποσότητες οι οποίες είναι χρήσιμες για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αναφορικά με άλλες μελέτες, το πρότυπο θα μπορούσε να μελετηθεί και σε άλλες μορφές ανάλογα με το αν ο χρόνος είναι πεπερασμένος ή άπειρος, συνεχής ή διακριτός.

2.2.1 Ανέλιξη του πλεονάσματος

Για τη μελέτη του μεγέθους των συνολικών αποζημιώσεων σχετικά με το πώς εξελίσσονται αυτές στο χρόνο, θα βασιστούμε στην ακόλουθη στοχαστική ανέλιξη

$$\{S(t) : t \geq 0\}$$

Βασικό ρόλο παίζει η στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$, η οποία ονομάζεται απαριθμήτρια και δηλώνει το πλήθος των συνολικών αποζημιώσεων. Ισχύει ότι, για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, η ποσότητα $N(t)$, είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία δηλώνει το πλήθος των αποζημιώσεων συγκεκριμένα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και ορίζεται ως εξής

Ορισμός 2.2.1.1

Μια στοχαστική ανέλιξη στο χρόνο, $\{N(t) : t \geq 0\}$, ονομάζεται απαριθμήτρια ανέλιξη όταν καταγράφει το πλήθος των εμφανίσεων ενός γεγονότος στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Με άλλα λόγια, για κάθε $t \geq 0$, η μεταβλητή $N(t)$ δηλώνει πόσες φορές έχει εμφανιστεί το γεγονός που μας ενδιαφέρει έως τη χρονική στιγμή t.

Ισχύει ότι $P(N(0) = 0) = 1$.

Επομένως, η σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε t με βάση την σχέση που ακολουθεί:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \alpha\nu\ N(t) \geq 1 \\ 0, & \alpha\nu\ N(t) = 0 \end{cases}$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, στη θεωρία χρεοκοπίας εκτός από τα έξοδα της ασφαλιστικής εταιρείας μας ενδιαφέρουν αντίστοιχα και τα έσοδα οπότε έχει νόημα να ορίσουμε και μία ακόμα συνάρτηση $P(t)$ η οποία θα είναι μια αύξουσα μαθηματική συνάρτηση και θα δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που καταβάλλονται προς την ασφαλιστική εταιρεία κατά το χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Επιπλέον, ορίζουμε τις εξής ποσότητες

- Έστω c το ασφάλιστρο το οποίο καταβάλλεται στη μονάδα του χρόνου. Θα ισχύει επομένως ότι στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ η εταιρεία θα εισπράξει συνολικά έσοδα ύψους ct.
- Έστω u το αποθεματικό που η ασφαλιστική εταιρεία θα έχει με σκοπό να καλύψει τυχόν υψηλές αποζημιώσεις στην αρχή του χαρτοφυλακίου, σε χρόνο δηλαδή που δεν θα έχει εισπράξει αρκετά ασφάλιστρα.

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 2.2.1.2

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από τη σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

όπου u είναι το αποθεματικό που διαθέτει η εταιρεία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, $P(t)$ είναι το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$ και $S(t)$ είναι η σύνθετη ανέλιξη των συνολικών απαιτήσεων στο ίδιο χρονικό διάστημα. Το $U(t)$ καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t, ενώ το $U(0) = u$ λέγεται αρχικό αποθεματικό ή αρχικό πλεόνασμα.

Οι ποσότητες $U(t)$ και $S(t)$ είναι τυχαίες μεταβλητές όταν αναφερόμαστε σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Επομένως έχει νόημα να εξετάσουμε γι' αυτές την μέση τιμή και την διακύμανσή τους.

Παράδειγμα 2.2.1.1

Έστω ότι, στην ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ με $U(t) = u + P(t) - S(t),\ t \geq 0$, η ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μία ανέλιξη Poisson με ένταση λ.

Έστω ακόμη, ότι η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι $E(X_i) = \mu_1$ για κάθε $i = 1,2, \ldots$

Τότε για την μέση τιμή του πλεονάσματος $E\big(U(t)\big)$ θα έχουμε ότι

$$E\big(U(t)\big) = u + P(t) - \lambda\mu_1 t$$

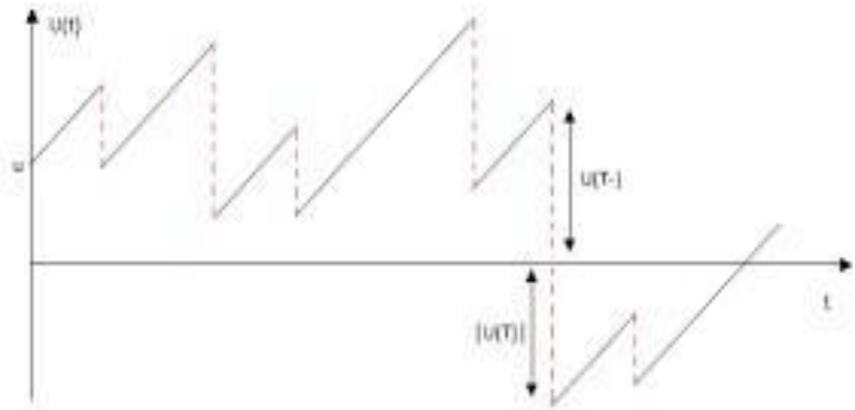
εφόσον οι ποσότητες u και P(t) θεωρούμε ότι δεν είναι τυχαίες μεταβλητές και για τη μέση τιμή της συνέλιξης $S(t)$ ισχύει ότι:

- $E[S(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] = E[N(t)]E[X_i]$
- $E[N(t)] = \lambda t$

2.2.2 Υποθέσεις του κλασικού προτύπου

Σχετικά με το κλασικό πρότυπο της θεωρίας χρεοκοπίας αναφέρονται κάποιες υποθέσεις που πρέπει να πληρούνται

- $P(t) = ct$ για κάποιο $c > 0$, δηλαδή η $P(t)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση
- οι μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το πλήθος των αποζημιώσεων $N(t)$, σε οποιοδήποτε διάστημα $[0, t]$
- η ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson και κατά συνέπεια η ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$ θα είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.
- ισχύει η σχέση $c > \lambda\mu_1$, η οποία δηλώνει ότι τα αναμενόμενα έσοδα c στη μονάδα του χρόνου θα είναι πάντα μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα τα οποία στη συγκεκριμένη σχέση προκύπτουν ως το γινόμενο της μέσης αποζημίωσης μ_1 με το μέσο ρυθμό των αποζημιώσεων λ.



Σχήμα 2.1: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος U(t). Σημειώσεις: Πολίτης Κωνσταντίνος.

Ορισμός 2.2.2.1

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο με αρχικό αποθεματικό u είναι μια φθίνουσα συνάρτηση η οποία συμβολίζεται με $\psi(u)$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 \mid U(0) = u]$$

Πολλές φορές, η δέσμευση μέσα στην πιθανότητα παραλείπεται εφόσον είναι σαφές ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u, γράφουμε απλώς ότι

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0]$$

Πρόταση 2.2.2.1

Αν δεν ισχύει η σχέση $c > \lambda\mu_1$, τότε αποδεικνύεται ότι η χρεοκοπία είναι βέβαιη όσο μεγάλο και αν είναι το αρχικό αποθεματικό u. Δηλαδή $\psi(u) = 1 \quad \forall\, u \geq 0$.

Αντιθέτως, αν ισχύει ότι $c > \lambda\mu_1$, τότε ισχύει ότι $\psi(u) < 1 \quad \forall\, u \geq 0$.

Ορισμός 2.2.2.2

Το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας θ στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$$

Η ποσότητα αυτή είναι πάντα θετική εφόσον ισχύει $c > \lambda\mu_1$ και κατά βάση στην πραγματικότητα θα παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1. Εκφράζουμε συνήθως αυτή την ποσότητα ως ποσοστό και ισχύει ότι για συγκεκριμένη τιμή του αρχικού αποθεματικού u, όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφόσον $\theta > 0$ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη $c > \lambda\mu_1$, αυτή αναφέρεται ως συνθήκη του καθαρού κέρδους.

Έχουμε ορίσει την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο. Όμως κρίνεται πιο ρεαλιστικό να βρούμε αυτήν την πιθανότητα για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας θα είναι μία αύξουσα συνάρτηση η οποία θα συμβολίζεται με $\psi(u,t)$ και θα δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u,t) = P(U(\tau) < 0 \text{ για κάποιο } 0 < \tau \leq t$$

2.2.3 Πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο και συντελεστής προσαρμογής

Σχετικά με το κλασικό πρότυπο της θεωρίας χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο είδαμε πως όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με u, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τη φθίνουσα συνάρτηση $\psi(u)$.

Θα ορίσουμε λοιπόν αντίστοιχα, την πιθανότητα μη χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου η οποία θα είναι μια αύξουσα συνάρτηση η οποία θα ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u), \quad \text{για } u \geq 0$$

για την οποία ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$.

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ είναι μία μεικτή κατανομή η οποία έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν αφού $\delta(0) > 0$ για μηδενικό αρχικό αποθεματικό, ενώ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \infty)$.

Πρόταση 2.2.3.1

Στο κλασικό μοντέλο, η $\delta(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x)\,dx$$

η οποία είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση καθώς σε αυτήν υπάρχει η παράγωγος της δ αλλά επίσης υπάρχει και ένα ολοκλήρωμα στο οποίο περιλαμβάνεται.

Πρόταση 2.2.3.2

Η συνάρτηση $\delta(u)$ η οποία μας δίνει την πιθανότητα μη χρεοκοπίας. Ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,\bar{F}(x)dx, \qquad u \geq 0$$

όπου $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, είναι η συνάρτηση δεξιάς ουράς του ύψους των ατομικών αποζημιώσεων είτε αυτές παίρνουν διακριτές είτε παίρνουν συνεχείς τιμές.

Χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση, θα υπολογίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν έχουμε μηδενικό αρχικό αποθεματικό u και μέσω αυτής θα υπολογίσουμε και την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Παίρνοντας τα όρια για $u \to \infty$ έχουμε ότι:

- $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$
- $\lim_{u\to\infty} \delta(u-x) = 1$
- $\lim_{u\to\infty} \int_0^u \bar{F}(x)\,dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)\,dx = \mu_1$

Άρα κάνοντας αντικατάσταση παίρνουμε ότι:

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \delta(u-x)\,\bar{F}(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 1 = \delta(0) + \frac{\lambda\mu_1}{c}$$

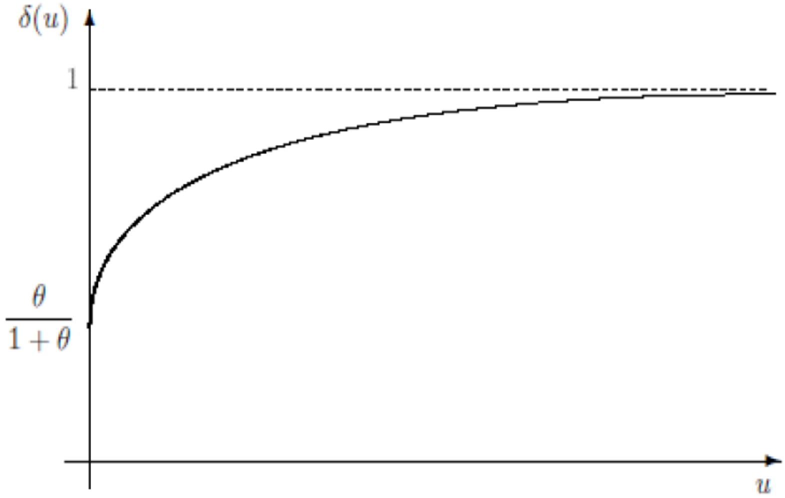
$$\Leftrightarrow \delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c}$$

Όπως αναφέραμε το περιθώριο ασφαλείας δίνεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \theta = \frac{c}{\lambda\mu_1}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάνοντας αντικατάσταση μπορούμε να εκφράσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(0)$ συναρτήσει του περιθωρίου κινδύνου θ ως εξής:

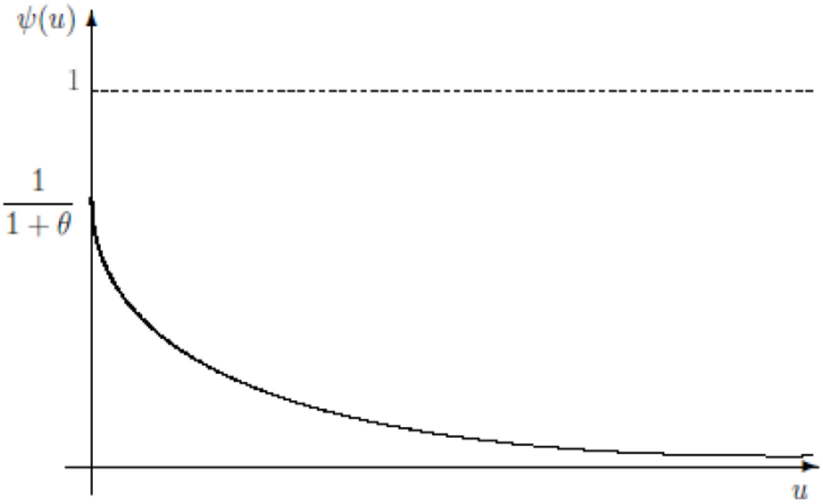
$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$$



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας Σημειώσεις: Πολίτης Κωνσταντίνος.

Επομένως, κάνοντας χρήση της σχέσης $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ καταλήγουμε ότι η αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ίσο με μηδέν θα δίνεται από τον τύπο:

$$\psi(0) = 1 + \delta(0) = \frac{1}{1+\theta}$$



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Σημειώσεις: Πολίτης Κωνσταντίνος.

Επιπλέον, έχοντας την συνάρτηση δ(0) μπορούμε να εκφράσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας δ(u) που είδαμε στην πρόταση 2.2.3.2 μέσω της ακόλουθης ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,\bar{F}(x)dx, \qquad u \geq 0$$

Έστω τώρα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $H(x)$, γνωστή και ως συνάρτηση ισορροπίας, η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H(x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy\,, \quad \mu\varepsilon\ \bar{H}(x) = 1 - H(x)$$

Τότε η $\delta(u)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x)\,dH(x), \qquad u \geq 0$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση που συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας καταλήγουμε στον ακόλουθο τύπο:

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c}\bar{H}(u) + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x)\,dH(x)$$

Για να μετατραπεί η ανωτέρω ανανεωτική εξίσωση σε μια κανονική, θα πρέπει να υπάρχει ένα $R > 0$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\int_0^\infty e^{Rx}dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1 + \theta$$

ή, ισοδύναμα:

$$\frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty \bar{F}(x)e^{Rx}dx = \frac{c}{\lambda\mu_1} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \bar{F}(x)e^{Rx}dx = \frac{c}{\lambda}$$

Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι:

$$\frac{c}{\lambda} = \left[\frac{1}{R}e^{Rx}\bar{F}(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{R}e^{Rx}f(x)dx$$

επειδή όμως η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων δίνεται από τη σχέση:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{Rx}f(x)dx$$

καταλήγουμε τελικά στον παρακάτω τύπο σχετικά με την ύπαρξη του R:

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R}M(R) = \frac{c}{\lambda}$$

όπου η σταθερά R θα είναι η λύση της εξίσωσης:

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r}M(r) = \frac{c}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}$$

Κάνοντας χρήση του τύπου του περιθωρίου ασφαλείας $\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1$, έχουμε ότι

$M(R) = 1 + (1+\theta)\mu_1 R$ και καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.3.1

Η θετική σταθερά R η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda \mu_1} = 1 + \theta$ ή την σχέση $M(R) = 1 + (1+\theta)\mu_1 R$ ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής.

Η εξίσωση

$$M(r) = 1 + (1+\theta)\mu_1 r$$

ως λύση της οποίας προκύπτει ο συντελεστής προσαρμογής ονομάζεται εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής, ή αλλιώς, εξίσωση του Lundberg.

Παρατηρήσεις

- Ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει στις περιπτώσεις που η ροπογεννήτρια $M(r)$ απειρίζεται για κάθε $r > 0$.
- ο συντελεστής προσαρμογής όταν υπάρχει ορίζεται μονοσήμαντα
- για τη ροπογεννήτρια $M(r)$ έχουμε ότι $\lim_{r \to 0} M(r) = 1$, $\lim_{r \to \infty} M(r) = \infty$.

Σε αρκετές περιπτώσεις οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή οπότε θα υπολογίσουμε υπό αυτή τη συνθήκη τον συντελεστή προσαρμογής στο κλασικό πρότυπο μέσα από ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.3.1

Να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασικό πρότυπο όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η εκθετική με παράμετρο β.

Λύση

Δίνεται ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η $Exp(\beta)$.

Η συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από τον τύπο $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$ και η ροπογεννήτρια από τον τύπο $M(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}$ και κάνοντας κατάλληλες πράξεις έχουμε διαδοχικά

$$\lambda M(r) = cr + \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \frac{\beta}{\beta - r} = cr + \lambda, \quad \text{για } r < \beta$$

$$\Leftrightarrow \beta\lambda = cr(\beta - r) + \lambda(\beta - r) \Leftrightarrow cr\beta - cr^2 - \lambda r = 0$$

Από τη δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση παίρνουμε δυο ρίζες, την $r_1 = 0$ η οποία απορρίπτεται και η άλλη ρίζα η οποία είναι και η αποδεκτή προκύπτει από την σχέση $cr = c\beta - \lambda$.

Τελικά ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασικό πρότυπο όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο β, δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{R} = \beta - \frac{\lambda}{c}$$

Ενώ αν θέλουμε να εκφράσουμε τον συντελεστή προσαρμογής συναρτήσει του περιθωρίου ασφαλείας θ, έχουμε ότι

$$\mathrm{R} = \frac{\theta\beta}{1+\theta}$$

Κάποιες φορές, ανάλογα με την κατανομή των αποζημιώσεων στο κλασικό πρότυπο, είναι αρκετά δύσκολο να υπολογιστεί με ακρίβεια ο συντελεστής προσαρμογής. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται άλλες μέθοδοι με στόχο την εύρεση του. Μια τέτοια περίπτωση είναι και η χρήση ενός φράγματος για το R το οποίο θα δίνεται από τη σχέση

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}$$

Στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων υπάρχουν αντίστοιχα περιπτώσεις κατά τις οποίες δεν είναι δυνατή η εύρεση αναλυτικού τύπου για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για το λόγο αυτό γίνεται συνήθως χρήση δυο βασικών αποτελεσμάτων για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Το ένα αφορά το άνω φράγμα που προκύπτει από την ανισότητα του Lundberg και το άλλο αφορά μια προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό u είναι αρκετά υψηλό η οποία προκύπτει από τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer – Lundberg.

Πρόταση 2.2.3.3 – Η ανισότητα του Lundberg

Στο κλασικό υπόδειγμα η πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \qquad \text{για κάθε } u \geq 0$$

Πρόταση 2.2.3.4 – Ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer – Lundberg

Με την προϋπόθεση ότι

$$\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ στο κλασικό πρότυπο ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}, \qquad \text{καθώς } u \to \infty,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$$

όπου η σταθερά $C > 0$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$C = \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}$$

2.2.4 Χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση

Ιδιαίτερα χρήσιμος είναι και ο υπολογισμός της χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση $\psi_1(u)$ καθώς μας βοηθάει να βγάλουμε συμπεράσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για παράδειγμα, σε περιπτώσεις που η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας δεν είναι δυνατή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη αποζημίωση ως ένα κάτω φράγμα καθώς όταν το αρχικό αποθεματικό είναι ίσο με u η πιθανότητα να χρεοκοπήσει το χαρτοφυλάκιο με την πρώτη ζημία είναι μικρότερη ή ίση της πιθανότητας χρεοκοπίας στο άπειρο. Ισχύει δηλαδή ότι $\psi_1(u) \leq \psi(u)$ για κάθε $u \geq 0$.

Επιπλέον, η πιθανότητα αυτή μπορεί να εκφράσει τη συνολική οικονομική ζημία που θα προκληθεί από ένα και μόνο καταστροφικό γεγονός. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε χρεοκοπία από ένα ζημιογόνο γεγονός.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής βασιζόμαστε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2.4.1

Στο κλασικό πρότυπο, έστω λ η ένταση της ανέλιξης Poisson η οποία περιγράφει τις αφίξεις των απαιτήσεων και c η ένταση του ασφαλίστρου. Τότε η πιθανότητα $\psi_1(u)$ να συμβεί χρεοκοπία με την πρώτη αποζημίωση ισούται με

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[1 - F(u + ct)]dt$$

όπου F είναι η συνάρτηση κατανομής για το μέγεθος μιας αποζημίωσης.

2.2.5 Χρόνος χρεοκοπίας, κλιμακωτά ύψη και μέγιστη σωρευτική απώλεια

Όπως αναφέρθηκε στον ορισμό 2.2.1.2, η ανέλιξη του πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,, \qquad t \geq 0$$

Ορισμός 2.2.5.1

Ο χρόνος χρεοκοπίας, είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή η οποία συμβολίζεται με Τ και ορίζεται ως εξής

$$T = \begin{cases} min\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, \quad \alpha\nu\ U(t) \geq 0\ \forall t \end{cases}$$

Είναι δηλαδή η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία εμφανίζεται χρεοκοπία στο χαρτοφυλάκιο που εξετάζεται . Η τυχαία μεταβλητή Τ είναι ελλειμματική εφόσον μπορεί να λάβει την τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα εάν δεν επέλθει χρεοκοπία.

Προκύπτει άμεσα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να δοθεί μέσω του χρόνου χρεοκοπίας από τον ακόλουθο τύπο

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty)$$

Ας θεωρήσουμε μία επιπλέον μεταβλητή, η οποία θα δηλώνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, την οποία θα συμβολίζουμε με L. Η μεταβλητή αυτή θα παίρνει πάντα θετικές τιμές καθώς εξετάζει την πτώση του πλεονάσματος κατά απόλυτη τιμή. Θα ισχύει ότι $L_1 = 0$, αν και εφόσον δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό.

Έστω ότι, η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u θα συμβεί τη χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα θα πάρει την τιμή $u_1 = U(t_1)$. Τότε με βάση τον ορισμό της, η μεταβλητή L_1 θα ισούται με $L_1 = u - u_1$.

Ανάλογα ορίζονται επαγωγικά και οι τυχαίες μεταβλητές $L_2 = u_1 - u_2, L_3 = u_2 - u_3, \dots$ οι οποίες δηλώνουν την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή $u_1, u_2, \dots$ αντίστοιχα. Η ακολουθία αυτή θα θεωρείται πεπερασμένη όταν οι τιμές της γίνουν μηδενικές από μια χρονική στιγμή και μετά, δηλαδή αν $L_j = 0 \; για \; j = i, i + 1, \dots$.

Οι μεταβλητές αυτές είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Αναφέρονται επίσης και ως κλιμακωτά ύψη, που παρουσιάζουν την σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από το αρχικό αποθεματικό u, έως τη στιγμή που θα επέλθει χρεοκοπία στο χαρτοφυλάκιο, ή αν αυτή δεν συμβεί, έως την ελάχιστη τιμή που παίρνει η ανέλιξη $\{U(t): t \geq 0\}$.

Το πλήθος των θα εκφράζεται μέσω της διακριτής τυχαίας μεταβλητής K η οποία είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών $L_1, L_2, L_3, \dots$ και παίρνει ακέραιες και μη-αρνητικές τιμές.

Ορισμός 2.2.5.2

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή L, η οποία θα εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u και θα ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια. Η μεταβλητή αυτή θα ορίζεται ως εξής

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \sum_{i=1}^{K} L_i, & αν \; K \geq 1 \\ 0, & αν \; K = 0 \end{cases}$$

Η κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L συνδέεται άμεσα με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Από τον ορισμό της παρατηρούμε ότι η L είναι μια μεικτή μεταβλητή και συγκεκριμένα μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν με θετική πιθανότητα, ενώ η κατανομή αυτής στο (0,∞) είναι συνεχής.

Το πλήθος των κλιμακωτών υψών εκφράζεται μέσω της τυχαίας μεταβλητής K, που είναι διακριτή εφόσον παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές και πιο συγκεκριμένα βλέπουμε ότι ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή.

Συνεπάγεται ότι η κατανομή της μεικτής τυχαίας μεταβλητής L θα είναι σύνθετη γεωμετρική.

Η πιθανότητα η L να πάρει την τιμή μηδέν θα είναι

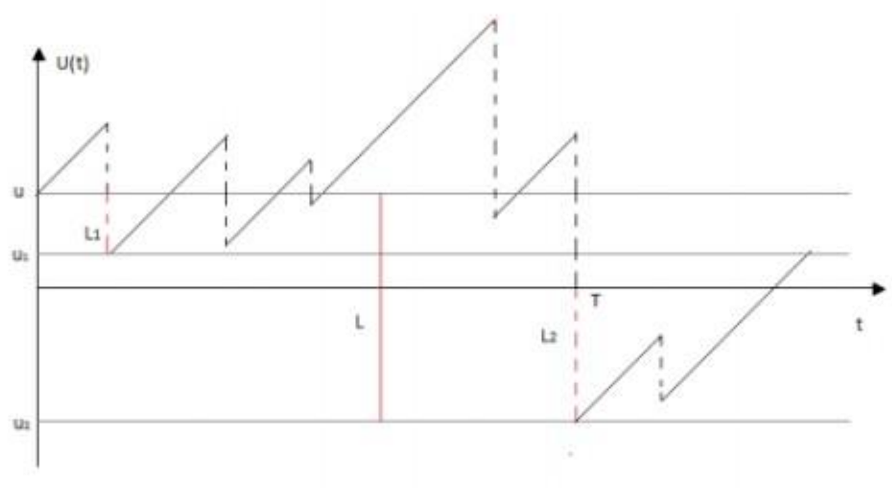
$$P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0)$$

Ενώ για u>0, η αντίστοιχη ποσότητα $P(L > u)$ εκφράζει την πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβεί μια σταθερή τιμή u. Αυτή η ποσότητα όμως εκφράζει την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, επομένως προκύπτει ότι

$$P(L > u) = \psi(u)$$

ενώ επίσης θα έχουμε $P(L \leq u) = \delta(u)$.

Στο ακόλουθο διάγραμμα απεικονίζονται τα κλιμακωτά ύψη $L_1, L_2, L_3, \ldots$ καθώς και η μέγιστη σωρευτική απώλεια L.



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση των μεταβλητών L_i και της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L στην ανέλιξη του πλεονάσματος. Σημειώσεις: Πολίτης Κωνσταντίνος.

3. Βασικές Στοχαστικές Διατάξεις

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου, είναι η μελέτη ορισμένων αρκετά σημαντικών στοχαστικών διατάξεων. Στο πεδίο του Αναλογισμού οι στοχαστικές διατάξεις είναι αρκετά χρήσιμες καθώς μας βοηθούν στο να καταλήξουμε σε βασικά συμπεράσματα και λάβουμε σημαντικές αποφάσεις. Ένα παράδειγμα, είναι η χρησιμότητα τους κατά τη σύγκριση δυο χαρτοφυλακίων, για τα οποία δεν είναι εξαρχής προφανές ποιο από αυτά είναι περισσότερο ζημιογόνο.

Συγκεκριμένα, σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούν οι παρακάτω στοχαστικές διατάξεις:

- Συνήθης στοχαστική διάταξη (First Stochastic Dominance) - ST
- Stop Loss - SL
- Harmonic Mean Residual Life - HMRL
- Convex Order - CX

Γενικά, οι σχέσεις των διάφορων στοχαστικών διατάξεων αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των σχέσεων της μερικής διάταξης γι' αυτό το λόγο θα ορίσουμε πρώτα την μερική διάταξη μέσω των σχέσεων των συνόλων.

Ορισμός 3.1

Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα αυθαίρετο σύνολο S καλείται μερική διάταξη αν πληρούνται τα εξής:

i. *Ανακλαστικότητα: $x \leq x$ για κάθε $x \in S$.*
ii. *Μεταβατικότητα: Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε θα ισχύει ότι $x \leq z$.*
iii. *Αντισυμμετρικότητα: Αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε θα ισχύει ότι $x = y$.*

Για να συνδέσουμε λοιπόν τη μερική διάταξη με τις στοχαστικές διατάξεις αρκεί να θεωρήσουμε το σύνολο S όλων των συναρτήσεων κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X. Τότε κάθε μερική διάταξη εντός αυτού του συνόλου S θα ονομάζεται στοχαστική διάταξη.

Όπου X, θα θεωρούμε τις ατομικές απαιτήσεις και η συνάρτηση κατανομής αυτών θα ορίζεται ως $F_X(t) = P(X \leq t)$, για κάθε πραγματικό αριθμό t.

3.1 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη - ST

Ορισμός 3.1.1

Η τυχαία μεταβλητή X θεωρείται μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζεται με $X \leq_{ST} Y$, αν για κάθε πραγματικό t, ισχύει ότι

$$F_X(t) \geq F_Y(t)$$

Ή ισοδύναμα, αν για κάθε πραγματικό t, ισχύει ότι

$$\bar{F}_X(t) \le \bar{F}_Y(t)$$

όπου $\bar{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$, $\bar{F}_Y(t) = 1 - F_Y(t)$ *είναι οι συναρτήσεις δεξιάς ουράς των τυχαίων μεταβλητών* X, Y *αντίστοιχα* (Goovaerts, et al, 1990)

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια κάποια αποτελέσματα από το βιβλίο των Denuit, et al, (2005).

Θεώρημα 3.1.1

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική και ισχύει ότι η f είναι μια αύξουσα συνάρτηση, τότε θα έχουμε ότι

$$f(X) \le_{ST} f(Y)$$

Θεώρημα 3.1.2

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική και επίσης οι τυχαίες μεταβλητές X,Y έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε θα ισχύουν τα εξής:

- $X \le_{ST} Y \Rightarrow E(X) \le E(Y)$
- $X \le_{ST} Y \Rightarrow E(X^n) \le E(Y^n)$, για X,Y μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 3.1.3

Έστω ότι οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ *και* $Y_1, Y_2, \dots, Y_3$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει ότι $X_i \le_{ST} Y_i \ \forall i > 0$. Τότε, θα ισχύει επίσης ότι

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le_{ST} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Θεώρημα 3.1.4

Έστω και πάλι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ *και* $Y_1, Y_2, \dots, Y_3$ για τις οποίες ισχύει ότι $X_i \le_{ST} Y_i \ \forall i > 0$. Για κάθε αύξουσα συνάρτηση $\Psi: R^n \to R$, θα ισχύει ότι

$$\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \le_{ST} \Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

Θεώρημα 3.1.5

Αν για δυο τυχαίες μεταβλητές X,Y ισχύει ότι $X \le_{ST} Y$ και επίσης ισχύει ότι $E(X) = E(Y)$ τότε προκύπτει ότι αυτές οι δυο κατανομές είναι ισόνομες, ακολουθούν δηλαδή την ίδια κατανομή.

Απόδειξη (Denuit, et al, 2005)

Έστω η τυχαία μεταβλητή X, με μέση τιμή η οποία δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$E(X) = \int_0^{\infty} \big(1 - F_X(t)\big)dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt$$

Έστω επίσης η τυχαία μεταβλητή Y, με μέση τιμή η οποία δίνεται αντίστοιχα από την ακόλουθη σχέση

$$E(Y) = \int_0^\infty \left(1 - F_Y(t)\right)dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t)dt$$

Τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$E(X) - E(Y) =$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(1 - F_X(t)\right)dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t)dt\right) - \left(\int_0^\infty \left(1 - F_Y(t)\right)dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t)dt\right) = 0,$$

από όπου συνεπάγεται ότι,

$$\int_{-\infty}^\infty F_X(t) - F_Y(t)\, dt = 0$$

Όμως ισχύει ότι $X \leq_{ST} Y$ και $F_X(t) \geq F_Y(t)$, επομένως το παραπάνω ολοκλήρωμα θα είναι μη αρνητικό και καταλήγουμε ότι εφόσον $E(X) - E(Y) = 0$ θα ισχύει ότι $F_X(t) = F_Y(t)$.

Θεώρημα 3.1.6

Αν υπό τη συνήθη στοχαστική διάταξη η τυχαία μεταβλητή X δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ, είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ, τότε θα ισχύει ότι και η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y. Επομένως θα ισχύει το ακόλουθο:

$$A\nu\ X|\Theta = \theta \ \leq_{ST} Y|\Theta = \theta, \forall\theta \Rightarrow X \leq_{ST} Y$$

Denuit, et al, 2005

3.2 Στοχαστική Διάταξη Ανακοπής Ζημιάς (Stop Loss) - SL

Με σκοπό την κάλυψη των αναγκών και την διαχείριση του κινδύνου τους, οι ασφαλιστικές εταιρείες απευθύνονται σε άλλες εταιρείες στις οποίες μεταφέρουν μέρος των κινδύνων που αναλαμβάνουν. Αυτές οι εταιρείες ονομάζονται αντασφαλιστικές. Με βάση τη μέθοδο που οι αντασφαλιστικές εταιρείες αναλαμβάνουν ένα μέρος των κινδύνων αλλά και εισπράττουν τα αντασφάλιστρα από τις ασφαλιστικές εταιρείες, οι αντασφάλιση χωρίζεται σε δυο βασικά είδη, τις Αναλογικές συμβάσεις και τις Μη Αναλογικές Συμβάσεις αντασφάλισης.

Οι αναλογικές συμβάσεις χωρίζονται στις ακόλουθες αντασφάλειες:

- Σταθερού ποσοστού (Quota Share) και
- Υπερβάλλοντος κεφαλαίου ή ποσού (Surplus)

Ενώ οι μη-αναλογικές συμβάσεις χωρίζονται στις εξής αντασφάλειες:

- Υπερβάλλοντος Ποσού Ζημιας (Excess of Loss)
- Ανακοπής Ζημιας (Stop-Loss)

Εμείς θα αναφερθούμε στην μη αναλογική κάλυψη Stop-Loss παρόλα αυτά για λόγους πλήρης κατανόησης θα περιγράψουμε και την Excess of Loss.

Σύμβαση υπερβάλλοντος ζημίας (Excess of Loss)

Κατά τη σύμβαση αυτή ορίζεται ένα προκαθορισμένο όριο ιδίας κράτησης για κάθε κίνδυνο, το όποιο δηλώνει το ποσό μέχρι το οποίο η ασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει να καλύψει γι' αυτή τη συγκεκριμένη ζημιά. Για ζημιές οι οποίες ξεπερνούν αυτό το όριο, η ασφαλιστική εταιρεία μεταφέρει το υπόλοιπο ποσό στην αντασφαλιστική εταιρεία. Η αντασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει να καλύψει η ίδια αυτή την επιπλέον αποζημίωση εφόσον δεν ξεπερνάει ένα επίσης προκαθορισμένο ποσό κάλυψης από την αντασφαλιστική εταιρεία. Στην περίπτωση που οι ζημιές ξεπερνούν και το όριο αποζημίωσης του αντασφαλιστή, αυτό το επιπλέον ποσό επιστρέφει πίσω στον πρωτασφαλιστή.

Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχει όριο ιδίας κράτησης 1000€ και έστω ότι το ποσό που αναλαμβάνει να καλύψει ο αντασφαλιστής είναι έως 2000€. Έστω επίσης ότι έρχεται στην ασφαλιστική εταιρεία μια ζημία προς αποζημίωση ύψους 5000€. Επειδή η ζημιά ξεπερνάει το όριο ιδίας κράτησης των 1000€, ο αντασφαλιστής αναλαμβάνει να καλύψει αυτό το επιπλέον ποσό έως τα 2000€. Επειδή όμως η ζημιά δεν έχει καλυφθεί πλήρως, το ποσό που απομένει (2000€ ακόμα) επιστρέφει και αυτό στον ασφαλιστή προς αποζημίωση.

Για να καλύψει αυτά τα ενδεχόμενα η ασφαλιστική εταιρεία συνήθως προχωράει σε σύναψη επιπλέον αντασφαλιστήριων συμβολαίων με ανώτερα όρια ιδίας κράτησης τα οποία ενεργοποιούνται όταν ξεπεραστεί το ποσό μέγιστης αποζημίωσης από τον προηγούμενο αντασφαλιστή.

Σύμβαση ανακοπής Ζημίας (Stop-Loss)

Η σύμβαση ανακοπής ζημίας είναι και αυτή μια μη αναλογική σύμβαση αντασφάλισης με βάση την οποία η αντασφαλιστική εταιρεία αναλαμβάνει να καλύψει αντί της ασφαλιστικής τις αποζημιώσεις οι οποίες ξεπερνούν αντίστοιχα ένα προκαθορισμένο όριο ιδίας κράτησης. Η διαφορά έγκειται στο ότι σε μία τέτοια σύμβαση, η αντασφαλιστική εταιρεία δεν αναλαμβάνει την αποζημίωση κάθε ζημίας ξεχωριστά αλλά το χαρτοφυλάκιο αντιμετωπίζεται συνολικά. Όταν λοιπόν, για ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, οι συνολικές αποζημιώσεις ξεπεράσουν το όριο ιδίας κράτησης, τότε το ποσό που υπολείπεται καλύπτεται από την αντασφαλιστική εταιρεία. Μία επιπλέον διαφορά με την προηγούμενη σύμβαση, είναι ότι με την Stop- Loss, η αντασφαλιστική εταιρεία δεν ορίζει κάποιο μέγιστο όριο κάλυψης. Αναλαμβάνει να καλύψει ολόκληρο το ποσό που υπερισχύει του ορίου ιδίας κράτησης, αρκεί οι ζημίες που καλείται να αποζημιώσει να έχουν συμβεί εντός συγκεκριμένου και προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος.

Ορισμός 3.2.1

Έστω όριο ιδίας κράτησης t. Το ασφάλιστρο Stop-Loss που συμβολίζεται με $\Pi_x(t)$ θα ισούται με τη μέση τιμή των συνολικών απαιτήσεων που ξεπερνούν αυτό το όριο ιδίας κράτησης και δίνεται μέσω του τύπου

$$\Pi_X(t) = E[(X-t)]_+$$

όπου $(X-t)_+ = max\{X-t\} = \begin{cases} X-t, & X>t \\ 0, & X \le t \end{cases}$

Επομένως έχουμε,

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} (x-t) f_X(x)\, dx$$

Denuit, et al, 2005

<u>Στοχαστική Διάταξη Ανακοπής Ζημια - Stop-Loss (SL)</u>

Σε αντιστοιχία με την αντασφαλιστική σύμβαση Stop-Loss, ορίζεται στη συνέχεια η στοχαστική διάταξη Stop-Loss. Αυτή η στοχαστική διάταξη, είναι χρήσιμη για την σύγκριση των απαιτήσεων μιας πρωτασφαλίστριας εταιρείας η οποία έχει συνάψει σύμβαση Stop-Loss με μια αντασφαλίστρια εταιρεία με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω.

Ορισμός 3.2.2

Υπό τη στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση της τυχαίας μεταβλητής Y και θα συμβολίζουμε με $X \le_{SL} Y$ αν και μόνο αν ισχύει ότι,

$$\Pi_X(t) \le \Pi_Y(t) \;\forall\, t \in R$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι,

$$X \le_{SL} Y \Leftrightarrow \int_t^{\infty} (x-t) f_X(x)\, dx \le \int_t^{\infty} (x-t) f_Y(x)\, dx, \qquad \forall\, t \in R$$

Denuit, et al, 2005

Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη από την Y υπό την διάταξη ανακοπής ζημίας, όταν τα ασφάλιστρα Stop-Loss για την X είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα της Y.

Σε αυτή την περίπτωση, θα ισχύει ότι η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y και θα έχει επίσης μικρότερη μεταβλητότητα.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια βασικά θεωρήματα από το βιβλίο των

Denuit, et al (2005).

Θεώρημα 3.2.1

Με βάση τη στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση της τυχαίας μεταβλητής Y και θα συμβολίζουμε με $X \le_{SL} Y$

αν και μόνο αν για κάθε αύξουσα κυρτή συνάρτηση g(X) για την οποία υπάρχει η μέση της τιμή ισχύει ότι

$$E[g(X)] \leq E[g(Y)]$$

Θεώρημα 3.2.2

Για δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y θα ισχύει υπό τη διάταξη ανακοπής ζημιάς ότι $X \leq_{SL} Y$ αν και μόνο αν για κάθε αύξουσα συνάρτηση t ισχύει ότι,

$$t(X) \leq_{SL} t(Y)$$

Θεώρημα 3.2.3

Έστω δυο ακολουθίες ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ τέτοιες ώστε υπό τη διάταξη ανακοπής ζημιάς να ισχύει ότι $X_i \leq_{SL} Y_i$, για i=1,2, … ,n, τότε γι' αυτές τις τυχαίες μεταβλητές έχουμε ότι,

$$\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq_{SL} \Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

3.3 Στοχαστική Διάταξη Convex Order – CX

Η στοχαστική διάταξη Convex Order έχει παρόμοιες ιδιότητες με την Stop-Loss, με τη διαφορά ότι εστιάζει μόνο στην μεταβλητότητα των τυχαίων μεταβλητών και όχι στο μέγεθος αυτών.

Επίσης, αναφέρεται ότι σε αντίθεση με τη συνήθη στοχαστική διάταξη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση δυο τυχαίων μεταβλητών διαφορετικής κατανομής, οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή.

Ορισμός 3.3.1

Για δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες ισχύει ότι E(X)=E(Y), θα ισχύει ότι η X είναι μικρότερη ή ίση από την Y υπό την convex order και θα συμβολίζεται με $X \leq_{CX} Y$*, αν και μόνο αν,*

$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \ \forall \ t \in R$$

Denuit, et al, 2005

Δηλαδή, εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την Y υπό την convex order, τότε θα ισχύει ότι τα καθαρά ασφάλιστρα για την X θα είναι ίσα με αυτά της Y, ενώ τα ασφάλιστρα stop-loss για την X θα είναι πάντοτε μικρότερα ή ίσα από αυτά που αντιστοιχούν στην Y.

Συνεπάγεται ότι,

$$X \leq_{CX} Y \Rightarrow \min[Y] \leq \min[X], \max[Y] \geq \max[X]$$

δηλαδή, ισχύει ότι η τυχαία μεταβλητή Y έχει μεγαλύτερο εύρος από την X.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα 3.3.1

Έστω η κυρτή συνάρτηση u για την οποία ισχύει ότι η πρώτη παράγωγος της u' είναι αύξουσα συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Έστω επίσης οι τυχαίες μεταβλητές X και Y. Τότε, η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη ή ίση από την Y υπό την convex order και θα συμβολίζεται ως $X \leq_{CX} Y$, αν και μόνο αν, για κάθε κυρτή συνάρτηση για την οποία υπάρχει η μέση της τιμή ισχύει ότι,

$$E[u(X)] \leq E[u(Y)]$$

Denuit, et al, 2005

Θεώρημα 3.3.2

Έστω η κυρτή συνάρτηση $u(x) = x^2$ και οι τυχαίες μεταβλητές X και Y. Εάν ισχύει ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση από την Y υπό την convex order, δηλαδή αν $X \leq_{CX} Y$, τότε θα ισχύει ότι

$$E[X^2] \leq E[Y^2]$$

και επομένως

$$V[X] \leq V[Y]$$

Μέσω αυτής της ιδιότητας γίνεται αντιληπτό ότι η convex order είναι μία στοχαστική διάταξη που εξετάζει τη μεταβλητότητα δυο τυχαίων μεταβλητών. Εφαρμόζεται σε τυχαίες μεταβλητές με κοινή αναμενόμενη τιμή και συγκρίνει τη διασπορά αυτών.

Denuit, et al, 2005

Θεώρημα 3.3.3

Εάν για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y ισχύουν τα ακόλουθα:

- $X \leq_{CX} Y$
- $V[X] = V[Y]$

Τότε, συμπεραίνεται ότι αυτές οι τυχαίες μεταβλητές είναι και ισόνομες, ακολουθούν δηλαδή την ίδια κατανομή και συμβολίζουμε το παραπάνω με $X =_d Y$.

Denuit, et al, 2005

Θεώρημα 3.3.4

Έστω η ακολουθία $\{X_1, X_2, \dots\}$ από ισόνομές τυχαίες μεταβλητές, όπου για $i \to \infty$ ισχύει ότι:

$$(X_i)_+ \Rightarrow (X)_+ \text{ και } E[(X_i)_+] \to E[(X)_+]$$

Εδώ το σύμβολο ⇒ δηλώνει ασθενή σύγκλιση, δηλαδή σύγκλιση κατά κατανομή.

Έστω επίσης η ακολουθία $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ από ισόνομές τυχαίες μεταβλητές, όπου για $j \to \infty$ ισχύει ότι:

$$(Y_i)_+ \Rightarrow (Y)_+ \text{ και } E[(Y_j)_+] \to E[(Y)_+]$$

Τότε, εάν για κάθε i, j ισχύει ότι $X_i \leq_{CX} Y_j$, προκύπτει ότι για $i \to \infty$ και $j \to \infty$ θα ισχύει επίσης ότι $X \leq_{CX} Y$.

Denuit, et al, 2005

Αναφέρεται ότι η στοχαστική διάταξη stop-loss είναι γνωστή και ως "increasing convex order" εφόσον για την convex order η ανωτέρω σχέση ικανοποιείται για κάθε κυρτή συνάρτηση ενώ για την stop-loss ικανοποιείται μόνο για τις αύξουσες κυρτές συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.3.5

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X και Y. Θα ισχύει ότι $X \leq_{SL} Y$, αν και μόνο αν, υπάρχει τυχαία μεταβλητή Z τέτοια ώστε,

$$X \leq_{SL} Z \leq_{CX} Y$$

Denuit, et al, 2005

3.4 Στοχαστική Διάταξη Harmonic Mean Residual Life Order – HMRL

Το 1987 ορίστηκε η στοχαστική διάταξη harmonic mean residual life order, η οποία, όπως θα δούμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συνδέσει την κατανομή του ύψους ζημιών στο συλλογικό πρότυπο με τα κλιμακωτά ύψη και κατά συνέπεια με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ορισμός 3.4.1

Για δύο μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές X και Y, θα θεωρούμε ότι η X είναι μικρότερη από την Y υπό την στοχαστική διάταξη harmonic mean residual life order και θα συμβολίζουμε με $X \leq_{hmrl} Y$ αν για κάθε $t \geq 0$, ισχύει ότι,

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}_X(u)du}{E[X]} \leq \frac{\int_t^\infty \bar{F}_Y(u)du}{E[Y]}$$

όπου, $\bar{F}_X = 1 - F_X$ και $\bar{F}_Y = 1 - F_Y$.

Αντίστοιχα, για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι,

$$\frac{E[(X-t)_+]}{E[X]} \leq \frac{E[(Y-t)_+]}{E[Y]}$$

Ιδιότητα 3.4.1

Από την τελευταία σχέση, προκύπτει άμεσα ότι για κάθε μη φθίνουσα κυρτή συνάρτηση $g: R^+ \to R$, θα ισχύει ότι $X \leq_{hmrl} Y$, αν και μόνο αν,

$$\frac{E[g(X)]}{E[X]} \leq \frac{E[g(Y)]}{E[Y]}$$

Denuit, et al, 2005

Θεώρημα 3.4.1

Μια σημαντική ιδιότητα που προκύπτει από τη στοχαστική διάταξη harmonic mean residual life order, είναι ότι οποιαδήποτε μίξη δυο κατανομών οι οποίες ορίζονται υπό αυτήν τη στοχαστική διάταξη, θα είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω και θα έχουν ως όρια τις μεταβλητές της κάθε κατανομής.

Έστω λοιπόν ότι για τις μεταβλητές X και Y ισχύει ότι $X \leq_{hmrl} Y$. Ορίζουμε τη σχέση $F_Z = \beta F_X + (1-\beta)F_Y$, για κάποιο $\beta \in (0,1)$. Τότε, θα έχουμε ότι

$$\mathrm{X} \leq_{\mathrm{hmrl}} \mathrm{Z} \leq_{\mathrm{hmrl}} \mathrm{Y}$$

Shaked and Shanthikuman, 2007

Ιδιότητα 3.4.2

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή Y υπό τη στοχαστική διάταξη harmonic mean residual life order, θα ισχύει το εξής ακόλουθο:

$$\mathrm{X} \leq_{\mathrm{hmrl}} Y \Rightarrow E[X|X>0] \leq E[Y|Y>0]$$

Ενώ για X>0, Y>0 προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathrm{X} \leq_{\mathrm{hmrl}} Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$$

Επίσης, αν E[X]=E[Y] και από την ιδιότητα 3.4.1 συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{X} \leq_{\mathrm{hmrl}} Y \Leftrightarrow X \leq_{CX} Y$$

Δηλαδή αν οι μεταβλητές *X και Y* έχουν την ίδια μέση τιμή, η διάταξη *harmonic mean residual life συμπίπτει με τη διάταξη convex order.*

4. Στοχαστικές Διατάξεις για Μεταβλητές στη Θεωρία Χρεοκοπίας

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα συνδυάσουμε όσα προαναφέρθηκαν με σκοπό να δούμε στην πράξη, μέσω κάποιων παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε δυο χαρτοφυλάκια με τη βοήθεια των στοχαστικών διατάξεων.

4.1 Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται μέσω Εκθετικής Κατανομής και Μείξης Εκθετικών αντίστοιχα

Έστω ότι, έχουμε δυο χαρτοφυλάκια με ατομικές ζημίες $X_i \; και \; Y_i$ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι, αν οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_i είναι μικρότερες ή ίσες από τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές Y_i υπό τη στοχαστική διάταξη Convex Order και επίσης ισχύει ότι $E(X) = E(Y)$, τότε αντίστοιχα και η μέγιστη σωρευτική απώλεια του πρώτου χαρτοφυλακίου, θα είναι μικρότερη ή ίση από τη μέγιστη σωρευτική απώλεια του δεύτερου χαρτοφυλακίου υπό τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

Επομένως, θα έχουμε αποδείξει ότι, η πιθανότητα χρεοκοπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου θα είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα χρεοκοπίας του δεύτερου χαρτοφυλακίου.

Δηλαδή, θα ισχύει ότι

$$X_i \leq_{CX} Y_i \; \forall i > 0 \; \Leftrightarrow \; L_{i,X} \leq_{ST} L_{i,Y} \Leftrightarrow L_X \leq_{ST} L_Y \Leftrightarrow \psi_X(u) \leq \psi_Y(u)$$

Όπου:

- $L_{i,X}$, L_X και $\psi_X(u)$ θα είναι αντίστοιχα, τα κλιμακωτά ύψη, η μέγιστη σωρευτική απώλεια και η πιθανότητα χρεοκοπίας που αντιστοιχούν στο πρώτο χαρτοφυλάκιο, ενώ
- $L_{i,Y}$, L_Y και $\psi_Y(u)$ θα είναι αντίστοιχα, τα κλιμακωτά ύψη, η μέγιστη σωρευτική απώλεια και η πιθανότητα χρεοκοπίας που αντιστοιχούν στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο.

Πρόταση 4.1.1

Έστω f η κατανομή των ατομικών ζημιών X_i και μ_X η μέση τους τιμή. Τότε ισχύει ότι, το κλιμακωτό ύψος $L_{1,X}$ ακολουθεί μία συνεχή κατανομή με πυκνότητα

$$\frac{[1 - F(x)]}{\mu_X}$$

Δηλαδή,

$$P(L_{1,X} \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_X}[1 - F(y)]dy, \qquad x \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι η συνάρτηση κατανομής H που αναφέρεται και ως συνάρτηση ισορροπίας.

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{L}_{1,\mathrm{X}} \leq \mathrm{x}\right) = \mathrm{H}(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{x} \geq 0$$

Πρόταση 4.1.2

Ισχύει ότι, εάν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι εκθετική, με μία παράμετρο έστω β, δηλαδή $\mathrm{X_i} \sim \mathrm{Exp}(\beta)$, τότε η μεταβλητή $\mathrm{L_1}$θα ακολουθεί επίσης την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο β.

Απόδειξη – Πηγή: Πολίτης (2012)

Για τη συνάρτηση κατανομής του κλιμακωτού ύψους $\mathrm{L_1}$ προκύπτει άμεσα μέσω της προηγούμενης πρότασης το ακόλουθο

$$\mathrm{P}(\mathrm{L}_1 \leq \mathrm{x}) = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{1}{\mu_{\mathrm{X}}}[1 - \mathrm{F}(\mathrm{y})]\mathrm{dy} = \beta \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\beta \mathrm{y}} \mathrm{dy} = \beta\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta \mathrm{x}}\right] = 1 - \mathrm{e}^{-\beta \mathrm{x}}$$

Επομένως αποδείχθηκε ότι $\mathrm{L_i} \sim \mathrm{Exp}(\beta)$.

Ιδιότητα 4.1.1

Έστω δυο χαρτοφυλάκια ζημιών. Από τον ορισμό της Convex Order δείξαμε ότι για τις μεταβλητές X_i και Y_i, οι οποίες έχουν κοινή μέση τιμή, ισχύει ότι

$$X_i \leq_{CX} Y_i$$

Όπου X_i θεωρούμε τις ατομικές ζημίες στο πρώτο χαρτοφυλάκιο και Y_i αντίστοιχα το ύψος των ατομικών ζημιών που ανήκουν στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο.

Από τον ορισμό της συνήθους στοχαστικής διάταξης έχουμε ότι

$$X_i \leq_{ST} Y_i \ \Rightarrow F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$$

Άμεσα έπεται ότι

$$1 - F_X(t) \leq 1 - F_Y(t) \Rightarrow \frac{1}{\mu_X}[1 - F_X(t)] \leq \frac{1}{\mu_Y}\left[1 - F_y(t)\right] \Rightarrow L_{1,X} \leq L_{1,Y}$$

Επομένως, καταλήξαμε στο ότι, αν οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι μικρότερες ή ίσες από τις Y_i υπό την στοχαστική διάταξη Convex Order και οι τυχαίες μεταβλητές αυτές έχουν ίδια μέση τιμή, τότε και τα κλιμακωτά ύψη του πρώτου χαρτοφυλακίου θα είναι μικρότερα ή ίσα από τα κλιμακωτά ύψη του δεύτερου χαρτοφυλακίου υπό τη συνήθης στοχαστική διάταξη.

Δηλαδή για $E(X) = E(Y)$ θα έχουμε ότι,

$$X_i \leq_{CX} Y_i \Rightarrow L_{1,X} \leq_{ST} L_{1,Y}$$

Ιδιότητα 4.1.2

Έστω τα κλιμακωτά ύψη $L_{1,X}, L_{2,X}, L_{3,\mathrm{X}}, \ldots$ που αντιστοιχούν στα ύψη των ατομικών ζημιώνX_i του πρώτου χαρτοφυλακίου και τα κλιμακωτά ύψη $L_{1,Y}, L_{2,Y}, L_{3,\mathrm{Y}}, \ldots$ που αντιστοιχούν στα ύψη των ατομικών ζημιών Y_i του δεύτερου χαρτοφυλακίου.

Τότε θα έχουμε ότι,

$$\left.\begin{array}{r} L_{i,X} \leq_{ST} L_{i,Y} \\ M \leq_{ST} N \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i}^{M} L_{i,X} \leq_{ST} \sum_{i}^{N} L_{i,Y} \Rightarrow L_X \leq_{ST} L_Y$$

Ισχύει λοιπόν, ότι και η μέγιστη σωρευτική απώλεια του πρώτου χαρτοφυλακίου η οποία συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας, θα είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης σωρευτικής απώλειας του δεύτερου χαρτοφυλακίου υπό τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

Ιδιότητα 4.1.3

Όπως είναι γνωστό η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu_{1,X}}{c}\overline{H}(u) + \frac{\lambda\mu_{1,X}}{c}\int_0^u \psi(u-x)\,dH(x)$$

Ή αντίστοιχα

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\overline{H}(u) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x)\,dH(x)$$

$$\Rightarrow \psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\overline{H}(u) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x)\,\hat{f}_e(s)dx$$

Όπου $\hat{f}_e(s)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας των κλιμακωτών υψών.

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος έχει τη μορφή μιας συνέλιξης.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης, προκύπτει ότι

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{1+\theta}\hat{\overline{H}}(s) + \frac{1}{1+\theta}\hat{\psi}(s)\hat{f}_e(s)$$

Λύνοντας ως προς $\widehat{\psi}(s)$, έχουμε

$$\hat{\psi}(s) = \frac{\hat{\overline{H}}(s)}{1+\theta-\hat{f}_e(s)}, \qquad s \geq 0$$

Η τελευταία αποτελεί μια πολύ χρήσιμη σχέση καθώς μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας και μετά μπορούμε πλέον εύκολα μέσω του αντίστροφου του μετασχηματισμού Laplace να υπολογίσουμε και την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε ένα παράδειγμα δυο χαρτοφυλακίων με τα ανωτέρω χαρακτηριστικά για καλύτερη κατανόηση των όσων αναφέρθηκαν με στόχο τη σύγκριση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας αυτών.

Παράδειγμα 4.1.1 – Χαρτοφυλάκια με κοινή μέση τιμή.

Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών Α. Το ύψος των ατομικών απαιτήσεων αυτού του χαρτοφυλακίου θα εκφράζεται μέσω των τυχαίων μεταβλητών X_i ,οι οποίες ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E(X) = 5/12$. Δίνεται επίσης ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson λ για την άφιξη των αποζημιώσεων θα ισούται με 1 και η ένταση του ασφαλίστρου c θα ισούται με 2.

Η συνάρτηση πιθανότητας των ατομικών ζημιών X_i θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$f(x) = \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}$$

Δηλαδή οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{12}{5}$.

Εφόσον μιλάμε για συνάρτηση πιθανότητας θα ισχύει ότι το ολοκλήρωμα αυτής της σχέσης θα ισούται με τη μονάδα.

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \int_0^\infty \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}\ dx = 1$$

Επίσης έχουμε ότι

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)\ dx = \int_0^\infty x \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}\ dx = \frac{12}{5} \int_0^\infty x e^{-\frac{12}{5}x}\ dx = \frac{5}{12} = \mu_{1,X}$$

Αντίστοιχα για την δεύτερη και τρίτη ροπή έχουμε

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}\ dx = \frac{25}{72}$$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}\ dx = \frac{125}{288}$$

Η διακύμανση θα υπολογισθεί ως εξής

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^\infty x^2 \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}\ dx - \left[\int_0^\infty x \frac{12}{5} e^{-\frac{12}{5}x}\ \ dx\right]^2 = 0{,}173611$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = 1 - e^{-\frac{12}{5}x}$$

Και μέσω αυτής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{12}{5}x}$$

Μια ακόμη χρήσιμη ποσότητα είναι η ροπογεννήτρια των X_i η οποία ισούται με

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx}\frac{12}{5}e^{-\frac{12}{5}x}\,dx = \frac{12}{5}\int_0^\infty e^{\left(t-\frac{12}{5}\right)x}\,dx = \frac{12}{12-5t}$$

Όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό της, η μεικτή τυχαία μεταβλητή L, η οποία δηλώνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, και αναφέρεται και ως μέγιστη σωρευτική απώλεια, συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της σχέσης

$$P(L > u) = \psi(u)$$

Δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά της κατανομής της σωρευτικής απώλειας L.

Καθώς επίσης και με την πιθανότητα μη χρεοκοπίας ως ακολούθως

$$P(L \leq u) = \delta(u)$$

Εφόσον τα ύψη των ατομικών αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{12}{5}$, όπως αποδείχθηκε στην Πρόταση 4.1.3, η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα είναι επίσης εκθετική με την ίδια παράμετρο.

Γνωρίζουμε όμως εξ ορισμού ότι η κατανομή τους δίνεται επίσης από την συνάρτηση ισορροπίας η οποία προκύπτει ως εξής

$$H_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}}\int_0^x \bar{F}(t)dt = \frac{12}{5}\int_0^x e^{-\frac{12}{5}t}dt = 1 - e^{-12x/5}$$

η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\frac{12}{5}$, όπως αναμενόταν.

Η ουρά αυτής θα είναι,

$$\overline{H_X}(x) = 1 - H_X(x) = e^{-12x/5}$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$f_e(x) = {H_X}'(x) = 2{,}4e^{-12x/5}$$

Για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου δίνεται αντίστοιχα ότι λ=1 και c=2.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_{1,X}} - 1 = 3{,}8$$

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής R, εφόσον οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\beta = \frac{12}{5}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση

$$R_X = \beta - \frac{\lambda}{c} = \frac{12}{5} - \frac{1}{2} = 1{,}9$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής R μέσω της παρακάτω εξίσωσης

$$M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}$$

Και επειδή

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_{1,X}} - 1$$

Παίρνουμε ισοδύναμα

$$M(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_{1,X} r$$

Η οποία ονομάζεται εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής ή εξίσωση του Lundberg.

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_X(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1+3{,}8} = 0{,}208333$$

Για να βρούμε την πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας $1 - H_X(x)$, της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $f_e(s)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{H_X}(s) = \frac{1}{\frac{12}{5} + s}$$

$$\hat{f_e}(s) = \frac{12}{5\left(\frac{12}{5} + s\right)}$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_X}(s) = \widehat{\psi_X}(s) = \frac{1}{(\frac{12}{5} + s)(4{,}8 - \frac{12}{5(\frac{12}{5} + s)})}$$

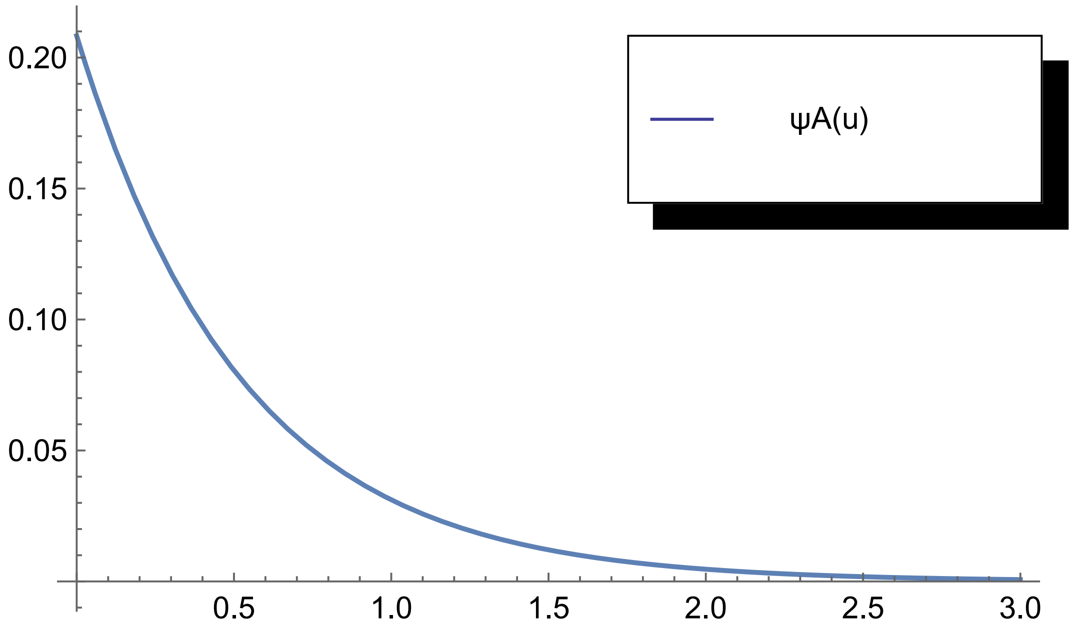
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συγκεκριμένα έχουμε ότι,

$${L_{\psi_X}}^{-1}(s) = 0{,}20833 e^{-1{,}89s}$$

Άρα τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α θα είναι ίση με

$$\psi_X(u) = 0{,}20833 e^{-1{,}89u}$$



Σχήμα 4.1: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Α.

Έστω τώρα ένα δεύτερο χαρτοφυλάκιο Β για το οποίο δίνεται ότι το ύψος των ατομικών ζημιών Y_i ακολουθούν μία μείξη εκθετικών κατανομών με μέση τιμή ίση με 5/12 ίση με τη μέση τιμή των αποζημιώσεων του χαρτοφυλακίου Α.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων Y_i θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$g(y) = \frac{4e^{-4y}}{3} + \frac{4e^{-2y}}{3}$$

με παραμέτρους $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 2$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$.

Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλίστρου θα είναι και πάλι λ=1 και c=2 αντίστοιχα.

Θα υπολογίσουμε τις ίδιες ποσότητες με το χαρτοφυλάκιο Α έτσι ώστε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας αυτού του χαρτοφυλακίου και να μπορέσουμε να την συγκρίνουμε με την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α.

Η g(y) είναι μία πυκνότητα πιθανότητας εφόσον ισχύει και το ακόλουθο

$$\int_0^\infty g(y)\ dy = \int_0^\infty \frac{4e^{-4y}}{3} + \frac{4e^{-2y}}{3}\ dy = 1$$

Επίσης έχουμε κοινή μέση τιμή με το Α χαρτοφυλάκιο επομένως ισχύει ότι

$$E(Y)=\int_0^{\infty} yg(y)\ dy=\int_0^{\infty} y\left(\frac{4e^{-4y}}{3}+\frac{4e^{-2y}}{3}\right)\ dy=\frac{4}{3}\int_0^{\infty} ye^{-6y}\ dy=\frac{5}{12}=\mu_{1,Y}$$

Η δεύτερη και η τρίτη ροπή υπολογίζονται ως εξής

$$E(Y^2)=\int_0^{\infty} y^2\left(\frac{4e^{-4y}}{3}+\frac{4e^{-2y}}{3}\right)\ dy=\frac{3}{8}$$

$$E(Y^3)=\int_0^{\infty} y^3\left(\frac{4e^{-4y}}{3}+\frac{4e^{-2y}}{3}\right)\ dy=\frac{17}{32}$$

Η διακύμανση προκύπτει μέσω του ακόλουθου τύπου

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$$

$$Var(Y)=\int_0^{\infty} y^2\left(\frac{4e^{-4y}}{3}+\frac{4e^{-2y}}{3}\right)\ dy-\left[\int_0^{\infty} y\left(\frac{4e^{-4y}}{3}+\frac{4e^{-2y}}{3}\right)\ dy\right]^2=0{,}201389$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων του δεύτερου χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την σχέση

$$G(y)=\int_0^{y} g(t)\ dt=1-\frac{e^{-4y}}{3}-\frac{2e^{-2y}}{3}$$

και μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{G}(y)=1-G(y)=\frac{e^{-4y}}{3}+\frac{2e^{-2y}}{3}$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων Y_i έχουμε

$$M_Y(t)=\int\limits_0^{\infty} e^{ty}g(y)\,dy=\int\limits_0^{\infty} e^{ty}\left(\frac{4e^{-4y}}{3}+\frac{4e^{-2y}}{3}\right)dy=-\frac{8(-3+t)}{3(-4+t)(-2+t)}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα υπολογιστεί και πάλι μέσω της συνάρτηση ισορροπίας οπότε θα είναι

$$H_Y(y)=\frac{1}{\mu_{1,Y}}\int_0^{y}\bar{G}(t)dt=\frac{12}{5}\int_0^{y}\frac{e^{-4t}}{3}+\frac{2e^{-2t}}{3}dt=0{,}19(5-e^{-4y}-4e^{-2y})$$

Και η ουρά αυτής,

$$\overline{H_Y}(y)=1-H_Y(y)=0{,}2e^{-4y}+0{,}8e^{-2y}$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$g_e(y)=H_Y{}'(y)=0{,}2(4e^{-4y}+8e^{-2y})$$

Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλίστρου θα παίρνουν και για αυτό το χαρτοφυλάκιο τις τιμές λ=1 και c=2 αντίστοιχα.

Συνεπώς, το περιθώριο ασφαλείας θ θα είναι και πάλι ίσο με

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_{1,Y}} - 1 = 3{,}8$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογισθεί ως η λύση της εξίσωσης του Lundberg

$$M_Y(r) = 1 + (1+\theta)\mu_{1,Y} r$$

από την οποία προκύπτει τελικά ότι

$$R_Y = 1{,}64132$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας του B χαρτοφυλακίου με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_Y(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1+3{,}8} = 0{,}208333$$

Για να βρούμε την πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας 1- H_Y (y), της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $g_e(y)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Παίρνουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_Y}}(s) = \frac{1}{s} + \frac{0{,}8}{2+s} + \frac{0{,}2}{4+s}$$

$$\hat{g}_e(s) = 0{,}2\left(\frac{8}{2+s} + \frac{4}{4+s}\right)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_Y}(s) = \widehat{\psi_Y}(s) = \frac{\frac{1}{s} + \frac{0{,}8}{2+s} + \frac{0{,}2}{4+s}}{4{,}8 - 0{,}2\left(\frac{8}{2+s} + \frac{4}{4+s}\right)}$$

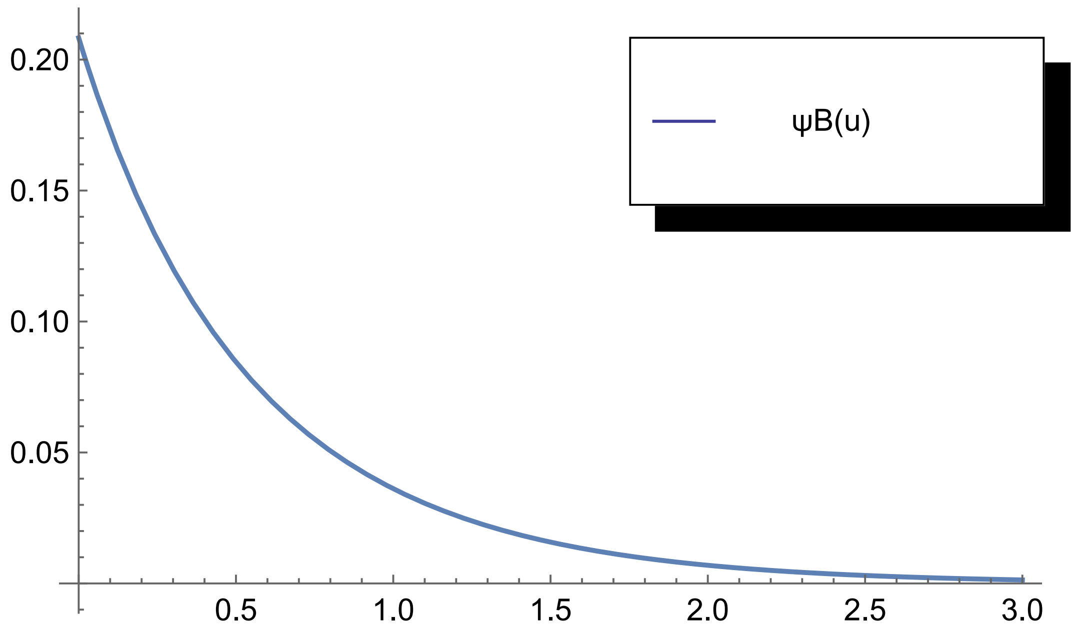
Μέσω της τελευταίας σχέσης, βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε και πάλι στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συνεπώς θα είναι,

$${L_{\psi_Y}}^{-1}(s) = 0{,}024e^{-3{,}859u} + 0{,}184e^{-1{,}6413u}$$

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B θα είναι ίση με

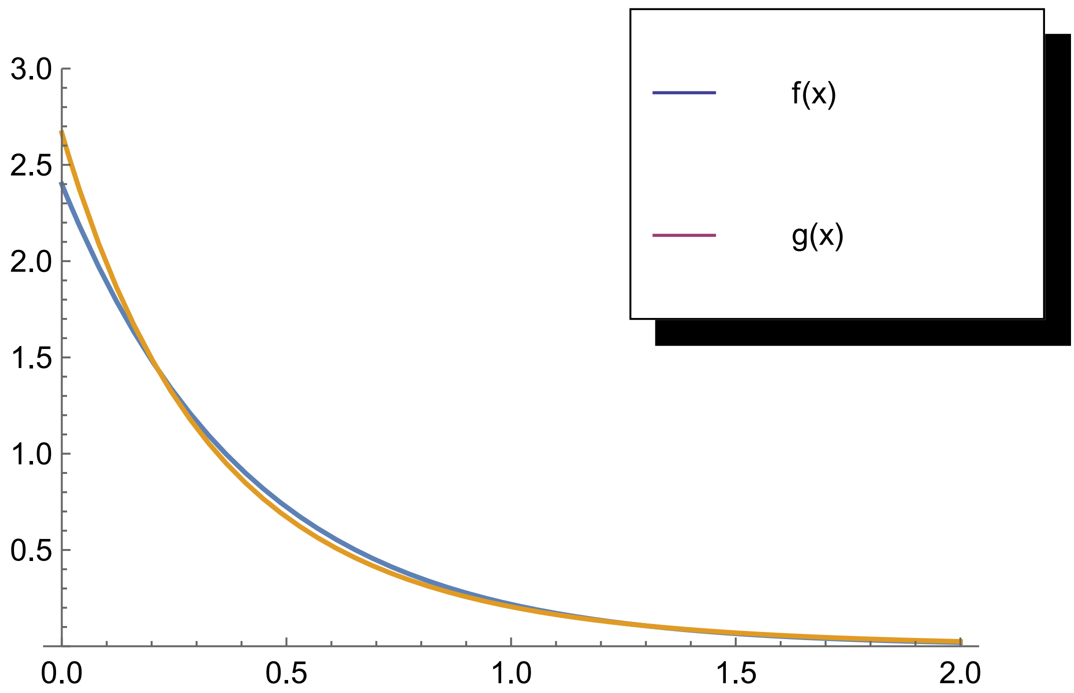
$$\psi_Y(u) = 0{,}024e^{-3{,}859u} + 0{,}184e^{-1{,}6413u}$$



Σχήμα 4.2: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Β.

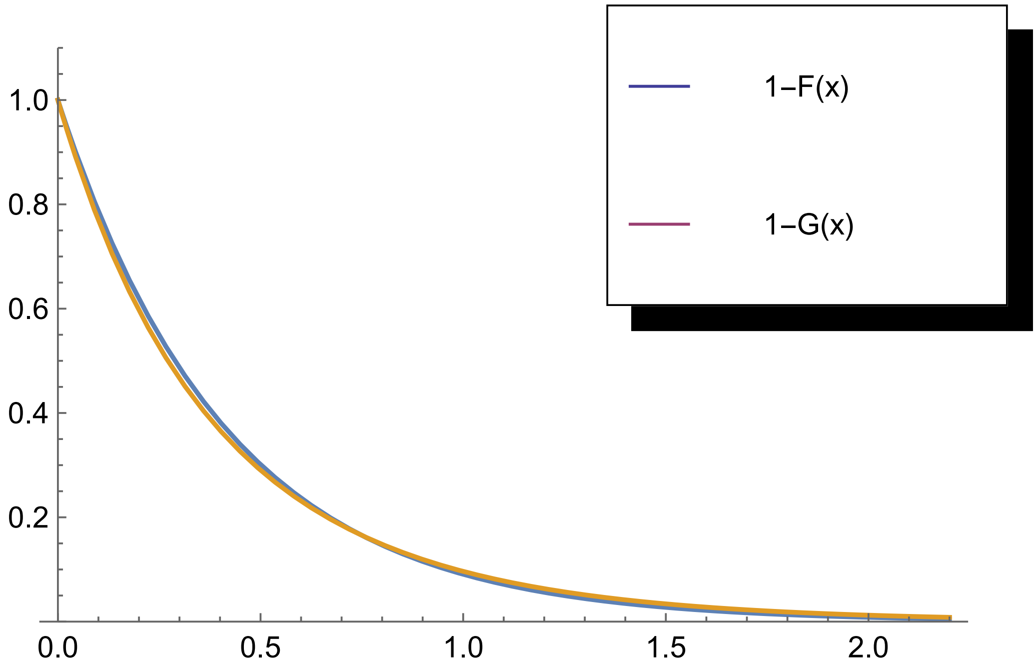
Συγκρίνοντας σχηματικά τις πυκνότητες των δυο χαρτοφυλακίων φαίνεται ότι τέμνονται καθώς όπως έχουμε ήδη αναφέρει ολοκληρώνουν και οι δυο στη μονάδα.

Για μικρές τιμές του x παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της g(x) είναι πάνω από την f(x), ενώ στην συνέχεια τέμνονται και η f(x) περνάει πάνω από την g(x). Για μεγαλύτερες τιμές του x οι δυο πυκνότητες είναι αρκετά κοντά η μία στην άλλη.



Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας της Εκθετικής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Αντίστοιχα στο παρακάτω σχήμα 4.4 βλέπουμε πως και οι ουρές των κατανομών των δυο χαρτοφυλακίων τέμνονται και δεν είναι αυστηρά η μία πάνω από την άλλη.



Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση της ουράς της συνάρτησης κατανομής της Εκθετικής κατανομής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις πυκνότητες των χαρτοφυλακίων και μέσω των παρακάτω τύπων έχουμε για τα καθαρά ασφάλιστρα των δύο χαρτοφυλακίων οτι

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} (x-t) f_X(x)\, dx = \frac{5}{12} e^{-12t/5}$$

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} (y-t) f_Y(y)\, dy = \frac{1}{12} e^{-4t}(1+4e^{2t})$$

Παρουσιάζοντας σχηματικά τα παραπάνω προκύπτει ότι το διάγραμμα των καθαρών ασφαλίστρων του πρώτου χαρτοφυλακίου είναι κάτω από το αντίστοιχο του δεύτερου χαρτοφυλακίου. Δηλαδή ισχύει οτι,

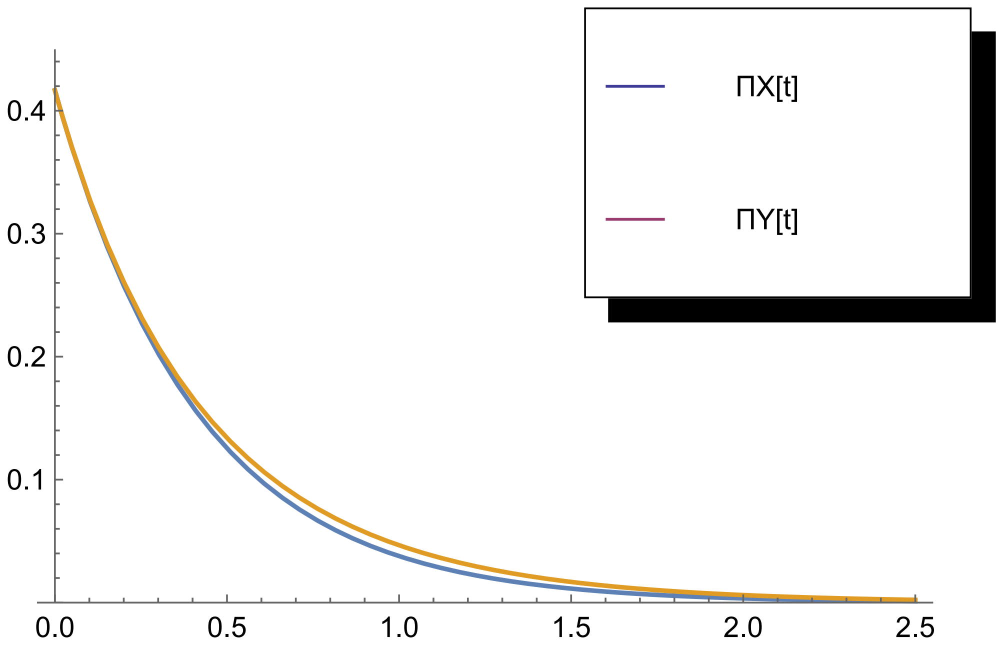
$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t)$$

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 3.3 για τη στοχαστική διάταξη Convex Order, αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t)\ \forall\, t \in R$$

για δύο μεταβλητές X και Y ίδια μέση τιμή, τότε ισχύει ότι η X είναι μικρότερη ή ίση από την Y υπό την convex order στοχαστική διάταξη. Δηλαδή,

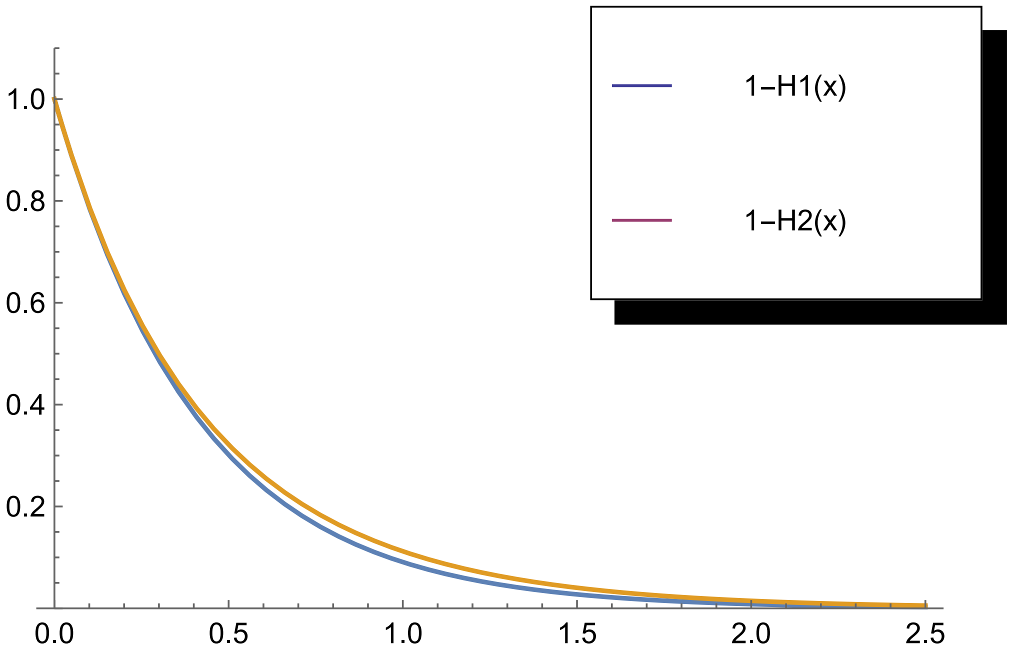
$$X \leq_{CX} Y$$



Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση των καθαρών ασφαλίστρων της Εκθετικής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Από τις ιδιότητες 4.1.1 και 4.1.2, προκύπτει ότι, σχηματικά θα πρέπει επίσης τα κλιμακωτά ύψη καθώς και η μέγιστη σωρευτική απώλεια του χαρτοφυλακίου Α είναι κάτω από τις αντίστοιχες ποσότητες του χαρτοφυλακίου Β.

Από το παρακάτω σχήμα είναι φανερό ότι η ουρά της κατανομής ισορροπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου με την εκθετική κατανομή είναι κάτω από την ουρά της κατανομής ισορροπίας του δεύτερου χαρτοφυλακίου με την μείξη εκθετικών.



Σχήμα 4.6: Γραφική παράσταση της ουράς της κατανομής ισορροπίας για την Εκθετική κατανομή και τη μείξη εκθετικών αντίστοιχα.

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι οι ατομικές ζημίες X_iτου πρώτου χαρτοφυλακίου που ακολουθούν την εκθετική κατανομή είναι μικρότερες ή ίσες από τις ατομικές ζημιές Y_i του δεύτερου χαρτοφυλακίου που εκφράζονται μέσω μιας μείξης εκθετικών κατανομών, υπό την στοχαστική διάταξη Convex Order.

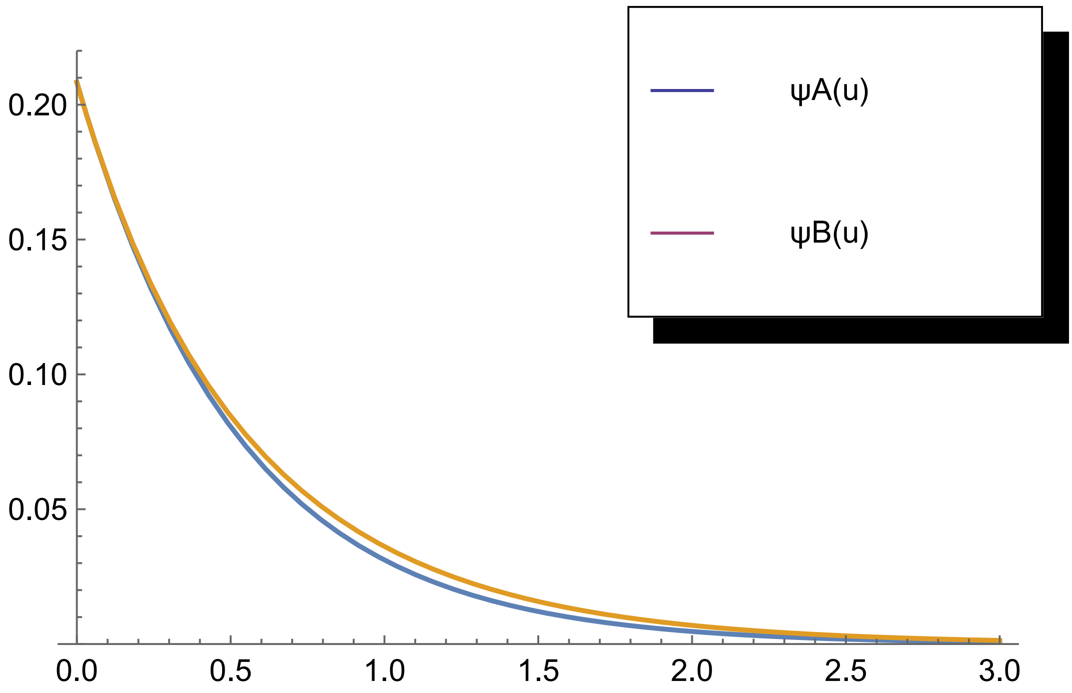
Ακολούθως, τα κλιμακωτά ύψη και η μέγιστη σωρευτική απώλεια των τυχαίων μεταβλητών X_i είναι μικρότερα ή ίσα από τα κλιμακωτά ύψη και τη μέγιστη σωρευτική απώλεια των τυχαίων μεταβλητών Y_i.

Τέλος, για την πιθανότητα χρεοκοπίας είδαμε ότι συνδέεται με τη μέγιστη σωρευτική απώλεια μέσω της παρακάτω σχέσης

$$P(L > u) = \psi(u)$$

Δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ουρά της κατανομής της σωρευτικής απώλειας L.

Καταλήγουμε λοιπόν στο τελευταίο σχήμα με τις πιθανότητες χρεοκοπίας και των δύο χαρτοφυλακίων, από το οποίο είναι προφανές ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το χαρτοφυλάκιο A είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή u.



Σχήμα 4.7: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας του A και B χαρτοφυλακίου αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας επομένως δυο χαρτοφυλάκια, των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται από μια Εκθετική κατανομή και μια μείξη Εκθετικών με ίδια μέση τιμή, και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της στοχαστικής διάταξης Convex Order, καταλήγουμε στο ότι το η πιθανότητα χρεοκοπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του δεύτερου.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι χαρτοφυλάκιο Β είναι περισσότερο ζημιογόνο από το χαρτοφυλάκιο Α.

□

Παράδειγμα 4.1.2 – Χαρτοφυλάκια με διαφορετική μέση τιμή, όπου η μέση τιμή της Εκθετικής είναι μικρότερη από τη μέση τιμή της Μίξης Εκθετικών.

Θα εξετάσουμε δυο χαρτοφυλάκια των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, από μια εκθετική κατανομή και μία μείξη εκθετικών, που όμως έχουν διαφορετική μέση τιμή.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο Α του οποίου οι αποζημιώσεις X_i εκφράζονται από την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/3, δηλαδή

$$f(x) = 3e^{-3x}$$

Καθώς και το χαρτοφυλάκιο Β του οποίου οι αποζημιώσεις Y_i εκφράζονται από μια μείξη τριών εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$g(y) = \frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{3} + \frac{2e^{-2y}}{3}$$

Με παραμέτρους $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1 = \frac{2}{6}, \alpha_2 = \frac{3}{6}, \alpha_3 = \frac{1}{6}$

Για το πρώτο χαρτοφυλάκιο έχουμε,

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \int_0^\infty 3e^{-3x}\ dx = 1$$

Επίσης έχουμε ότι

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\ dx = \int_0^\infty x3e^{-3x}\ dx = 3\int_0^\infty xe^{-3x}\ dx = \frac{1}{3} = \mu_{1,X}$$

Για τον υπολογισμό της δεύτερης και τρίτης ροπή έχουμε

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 3e^{-3x}\ dx = \frac{2}{9}$$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 3e^{-3x}\ dx = \frac{2}{9}$$

Η διακύμανση θα είναι

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^{\infty} x^2 3e^{-3x} \, dx - \left[\int_0^{\infty} x3e^{-3x} \, dx\right]^2 = 0{,}11111$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$F(x) = \int_0^{x} f(t) \, dt = 1 - e^{-3x}$$

Και μέσω αυτής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-3x}$$

Μια ακόμη χρήσιμη ποσότητα είναι η ροπογεννήτρια των X_i η οποία ισούται με

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) \, dx = \int_0^{\infty} e^{tx} 3e^{-3x} \, dx = 3\int_0^{\infty} e^{(t-3)x} \, dx = -\frac{3}{t-3}$$

Εφόσον τα ύψη των ατομικών αποζημιώσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 3, περιμένουμε και πάλι η κατανομή των κλιμακωτών υψών να είναι επίσης εκθετική με παράμετρο 3.

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται επίσης από την κατανομή ισορροπίας ως εξής

$$H_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_0^{x} \bar{F}(t) dt = \frac{12}{5} \int_0^{x} e^{-3t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-3x}$$

η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο 3.

Η ουρά της θα είναι,

$$\overline{H_X}(x) = 1 - H_X(x) = \mathrm{e}^{-3x}$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$f_e(x) = H_X{}'(x) = 3\mathrm{e}^{-3x}$$

Για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου δίνεται αντίστοιχα ότι λ=4 και c=3.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_{1,X}} - 1 = 1{,}25$$

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής R, εφόσον οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 3, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση

$$R_X = \beta - \frac{\lambda}{c} = 3 - \frac{4}{3} = 1{,}6667$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_X(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1+3{,}8} = 0{,}4444$$

Για να βρούμε την πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας $1 - H_X(x)$, της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $f_e(s)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_X}}(s) = \frac{1}{3+s}$$

$$\hat{f}_e(s) = \frac{3}{3+s}$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_X}(s) = \widehat{\psi_X}(s) = \frac{1}{(3+s)(2{,}25 - \frac{3}{3+s})}$$

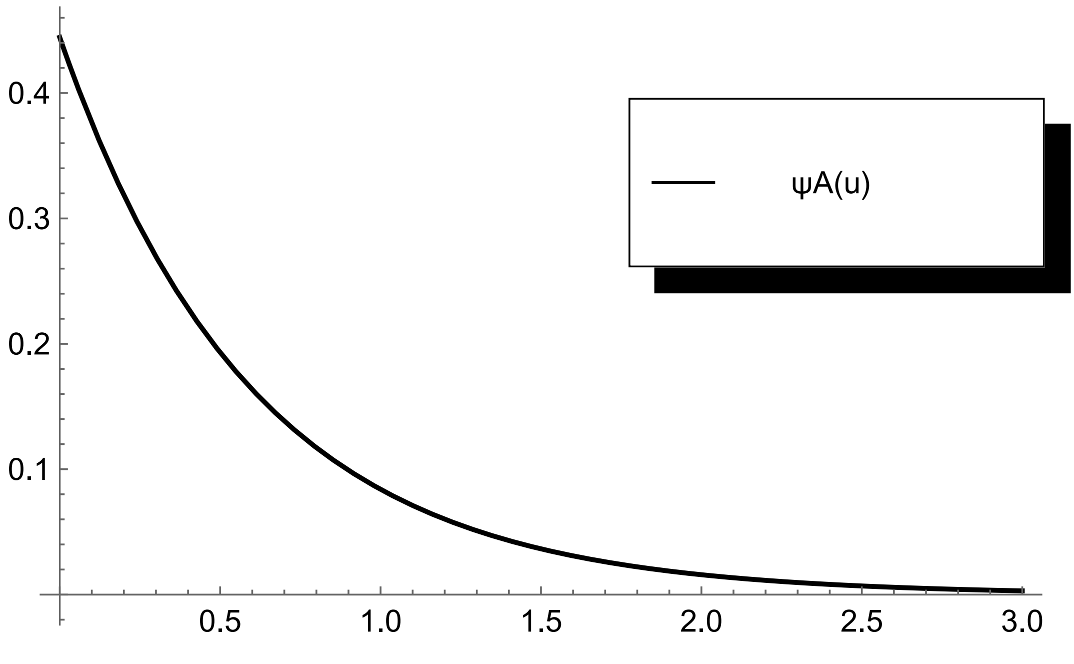
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συγκεκριμένα έχουμε ότι,

$$L_{\psi_X}{}^{-1}(s) = 0{,}4444e^{-1{,}6667s}$$

Άρα τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α θα είναι ίση με

$$\psi_X(u) = 0{,}4444e^{-1{,}6667u}$$



Σχήμα 4.8: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Α.

Για το δεύτερο χαρτοφυλάκιο έχουμε αντίστοιχα τις παρακάτω ποσότητες,

$$\int_0^{\infty} g(y)\ dy = \int_0^{\infty} \frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\ dy = 1$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} yg(y)\ dy = \int_0^{\infty} y\left(\frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\right) dy = \frac{11}{30} = \mu_{1,Y}$$

Η δεύτερη και η τρίτη ροπή υπολογίζονται ως εξής

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} y^2\left(\frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\right) dy = \frac{131}{450} = 0{,}29111$$

$$E(Y^3) = \int_0^{\infty} y^3\left(\frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\right) dy = \frac{1661}{4500} = 0{,}36911$$

Η διακύμανση προκύπτει μέσω του ακόλουθου τύπου

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$Var(Y) = \int_0^{\infty} y^2\left(\frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\right) dy - \left[\int_0^{\infty} y\left(\frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\right)\ dy\right]^2 = 0{,}234667$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων του δεύτερου χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την σχέση

$$G(y) = \int_0^{y} g(t)\ dt = \frac{6 - e^{-5y} - 3e^{-3y} - 2e^{-2y}}{6}$$

και μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{G}(y) = 1 - G(y) = 1 + \frac{-6 + e^{-5y} + 3e^{-3y} + 2e^{-2y}}{6}$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων Y_i έχουμε

$$M_Y(t) = \int_0^{\infty} e^{ty} g(y)\, dy = \int_0^{\infty} e^{ty}\left(\frac{5e^{-5y}}{6} + \frac{3e^{-3y}}{2} + \frac{2e^{-2y}}{3}\right) dy = \frac{5}{30-6t} + \frac{2}{6-3t} + \frac{3}{6-2t}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα υπολογιστεί και πάλι μέσω της συνάρτηση ισορροπίας οπότε θα είναι

$$H_Y(y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^{y} \bar{G}(t) dt = \frac{11}{30} \int_0^{y} 1 + \frac{-6 + e^{-5y} + 3e^{-3y} + 2e^{-2y}}{6} dt$$
$$= 0{,}091(11 - e^{-5y} - 5e^{-3y} - 5e^{-2y})$$

Και η ουρά αυτής,

$$\overline{H_Y}(y) = 1 - H_Y(y) = e^{-5y}[0{,}091 + e^{2y}(0{,}4545 + 0{,}4545e^{y})]$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε ,

$$g_e(y) = {H_Y}'(y) = 0{,}091(5e^{-5y} + 15e^{-3y} + 10e^{-2y})$$

Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλίστρου θα παίρνουν και για αυτό το χαρτοφυλάκιο τις τιμές λ=4 και c=3 αντίστοιχα.

Συνεπώς, το περιθώριο ασφαλείας θ θα είναι και πάλι ίσο με

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_{1,Y}} - 1 = 1{,}04545$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογισθεί ως η λύση της εξίσωσης του Lundberg

$$M_Y(r) = 1 + (1+\theta)\mu_{1,Y}r$$

από την οποία παίρνουμε ότι

$$R_Y = 1{,}21672$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας του Β χαρτοφυλακίου με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_Y(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1+1{,}045} = 0{,}48889$$

Ο μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας 1-H_Y (s) θα είναι

$$\widehat{\overline{H_Y}}(s) = \frac{0{,}4545}{2+s} + \frac{0{,}4545}{3+s} + \frac{0{,}091}{5+s}$$

Ο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $g_e(s)$

$$\hat{g}_e(s) = 0{,}091\left(\frac{10}{2+s} + \frac{15}{3+s} + \frac{5}{5+s}\right)$$

Επομένως και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_Y}(s) = \widehat{\psi_Y}(s) = \frac{\frac{0{,}4545}{2+s} + \frac{0{,}4545}{3+s} + \frac{0{,}091}{5+s}}{2{,}045 - 0{,}091(\frac{10}{2+s} + \frac{15}{3+s} + \frac{5}{5+s})}$$

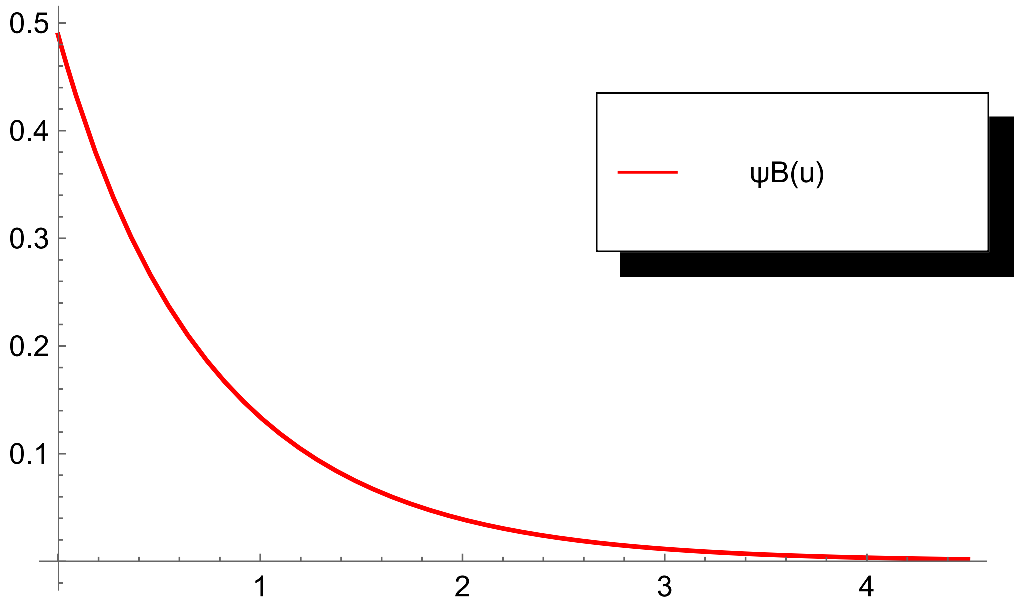
Μέσω της τελευταίας σχέσης, βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Έχουμε,

$${L_{\psi_Y}}^{-1}(s) = 0{,}00995e^{-4{,}853u} + 0{,}0366e^{-2{,}5966u} + 0{,}4424e^{-1{,}217u}$$

Τελικά, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Β θα δίνεται από τον τύπο

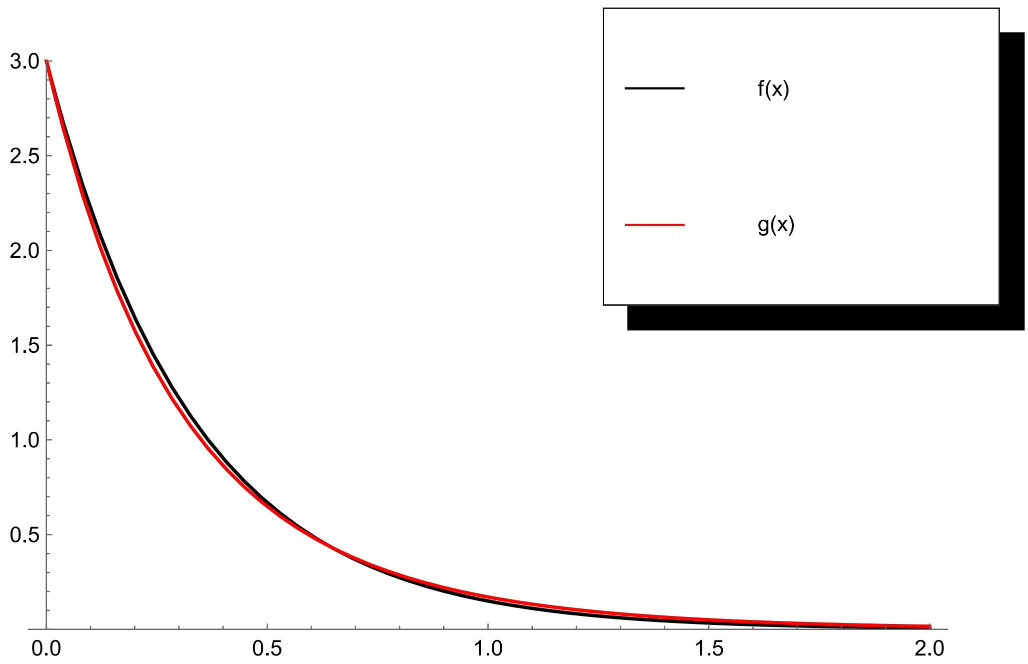
$$\psi_Y(u) = 0{,}00995e^{-4{,}853u} + 0{,}0366e^{-2{,}5966u} + 0{,}4424e^{-1{,}217u}$$



Σχήμα 4.9: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Β.

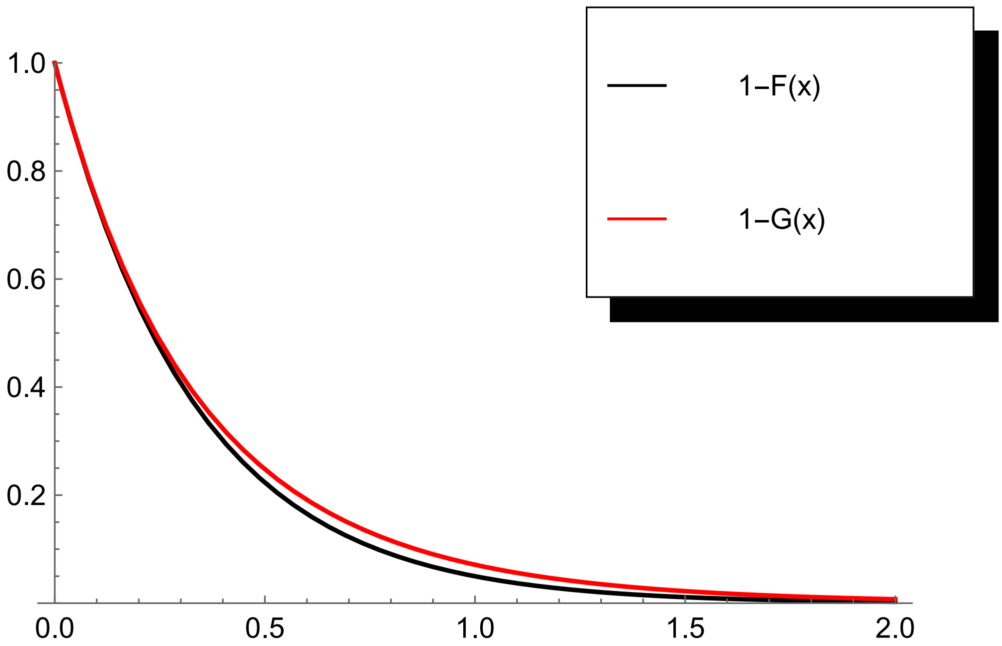
Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποιες γραφικές παραστάσεις με σκοπό τη σύγκριση των διάφορων ποσοτήτων των δύο χαρτοφυλακίων όπως τις υπολογίσαμε παραπάνω.

Στο σχήμα 4.10 βλέπουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας οι οποίες τέμνονται και δεν είναι αυστηρά η μία πάνω από την άλλη.



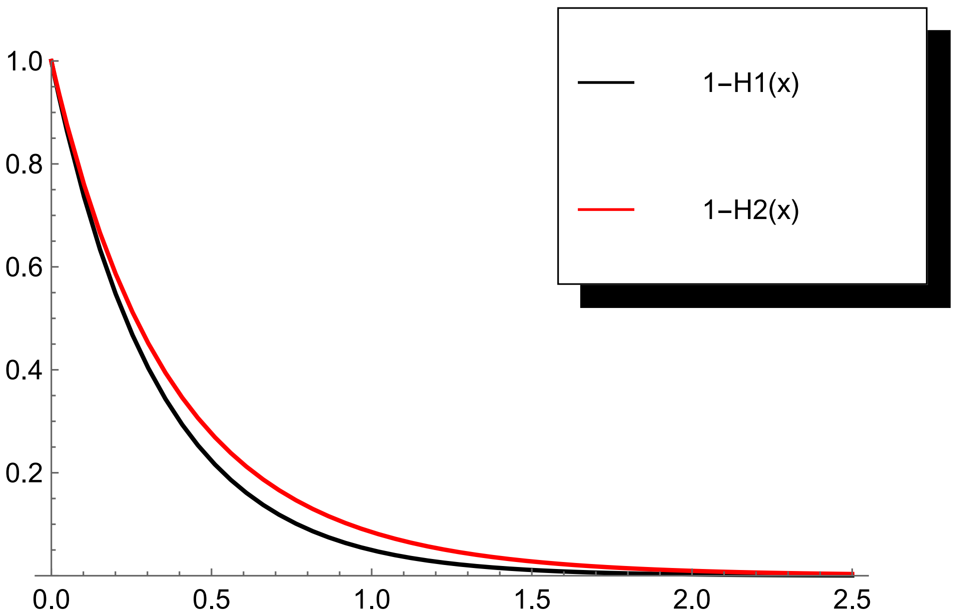
Σχήμα 4.10: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας της Εκθετικής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Στο σχήμα 4.11 παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών των δυο χαρτοφυλακίων και παρατηρούμε πως η ουρά της εκθετικής κατανομής είναι κάτω από την ουρά της μείξης εκθετικών κατανομών.



Σχήμα 4.11: Γραφική παράσταση της ουράς της συνάρτησης κατανομής της Εκθετικής κατανομής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Στο σχήμα 4.12 είναι φανερό ότι η ουρά της κατανομής ισορροπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου με την εκθετική κατανομή είναι κάτω από την ουρά της κατανομής ισορροπίας του δεύτερου χαρτοφυλακίου με την μείξη εκθετικών.

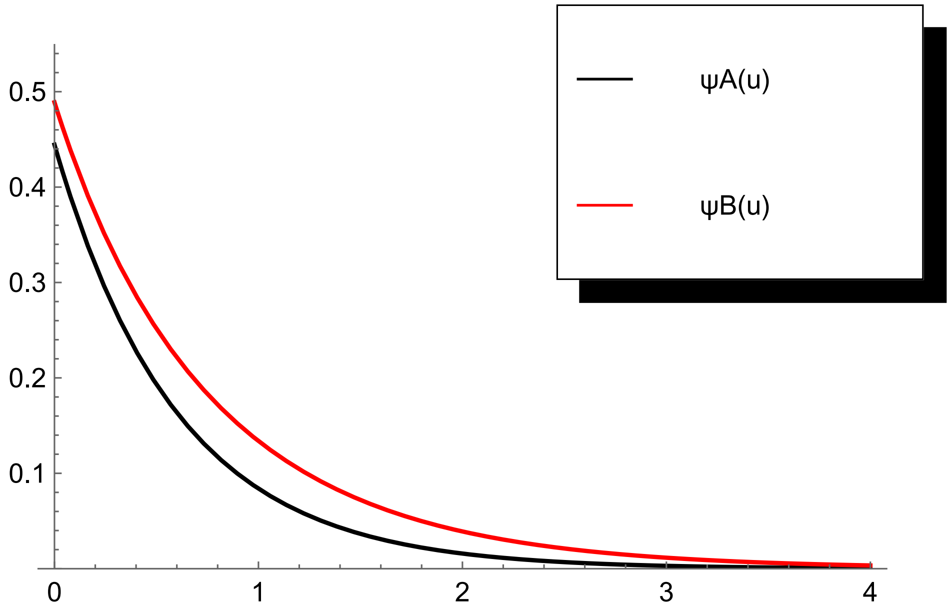


Σχήμα 4.12: Γραφική παράσταση της ουράς της κατανομής ισορροπίας για την Εκθετική κατανομή και τη μείξη εκθετικών αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη σωρευτική απώλεια συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της ακόλουθης σχέσης,

$$P(L > u) = \psi(u)$$

Παρουσιάζοντας γραφικά και τις πιθανότητες χρεοκοπίας των δύο χαρτοφυλακίων στο σχήμα 4.13, φαίνεται ξεκάθαρα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το χαρτοφυλάκιο A είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου B για κάθε τιμή u.



Σχήμα 4.13: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας του A και B χαρτοφυλακίου αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας επομένως δυο χαρτοφυλάκια, των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται από μια Εκθετική κατανομή και μια μίξη Εκθετικών με διαφορετική μέση τιμή, και συγκεκριμένα $E(Y) > E(X)$, καταλήγουμε στο ότι το η πιθανότητα χρεοκοπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του δεύτερου.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι χαρτοφυλάκιο B είναι ζημιογόνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο A.

□

Παράδειγμα 4.1.3 – Χαρτοφυλάκια με διαφορετική μέση τιμή, όπου η μέση τιμή της Εκθετικής είναι μικρότερη από τη μέση τιμή της Μίξης Εκθετικών .

Έστω ότι έχουμε το χαρτοφυλάκιο Β του παραδείγματος 4.1.2 και έστω επίσης ότι το χαρτοφυλάκιο Α ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο 2.

Τότε η συνάρτηση πιθανότητας των ατομικών απαιτήσεων κάτω από αυτό το χαρτοφυλάκιο θα δίνονται από τη σχέση,

$$f(x) = 2e^{-2x}$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \int_0^\infty 2e^{-2x}\ dx = 1$$

Για τις δυο πρώτες ροπές και τη διακύμανση έχουμε,

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\ dx = \int_0^\infty x2e^{-2x}\ dx = 2\int_0^\infty xe^{-2x}\ dx = \frac{1}{2} = \mu_{1,X}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 2e^{-2x}\ dx = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^\infty x^2 2e^{-2x}\ dx - \left[\int_0^\infty x2e^{-2x}\ \ dx\right]^2 = 0{,}25$$

Η συνάρτηση θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = 1 - e^{-2x}$$

Και μέσω αυτής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-2x}$$

Μια ακόμη χρήσιμη ποσότητα είναι η ροπογεννήτρια των X_i η οποία ισούται με

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{tx} 3e^{-3x}\, dx = 3\int_0^\infty e^{(t-3)x}\, dx = -\frac{2}{t-2}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα είναι

$$H_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_0^x \bar{F}(t)dt = 2\int_0^x e^{-2t}dt = 1 - e^{-2x}$$

η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο 2.

Η ουρά της κατανομής ισορροπίας θα είναι,

$$\overline{H_X}(x) = 1 - H_X(x) = e^{-2x}$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$f_e(x) = {H_X}'(x) = 2e^{-2x}$$

Για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου θα ισχύει και πάλι ότι λ=4 και c=3.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_{1,X}} - 1 = 0{,}5$$

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής R, εφόσον οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 3, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση

$$R_X = \beta - \frac{\lambda}{c} = 0{,}6667$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_X(0) = \frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1+0{,}5} = 0{,}6667$$

Για να βρούμε την πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας $1 - H_X(x)$, της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $f_e(s)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_X}}(s) = \frac{1}{2+s}$$

$$\hat{f_e}(s) = \frac{2}{2+s}$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_X}(s) = \widehat{\psi_X}(s) = \frac{1}{(2+s)(1{,}5 - \frac{2}{2+s})}$$

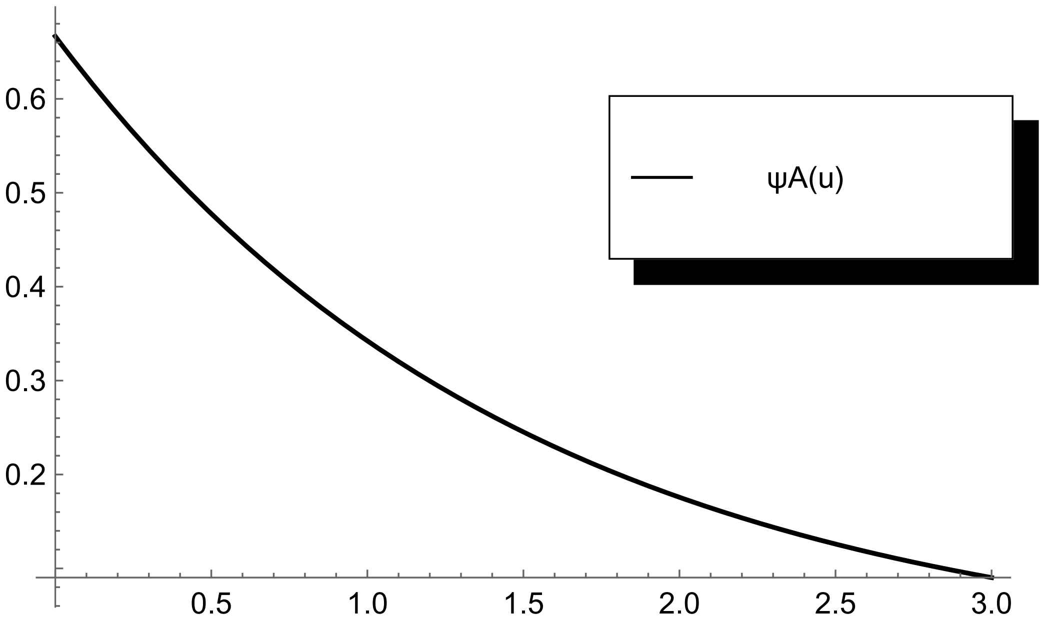
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συγκεκριμένα έχουμε ότι,

$${L_{\psi_X}}^{-1}(s) = 0{,}6667e^{-0{,}6667s}$$

Άρα τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α θα είναι ίση με

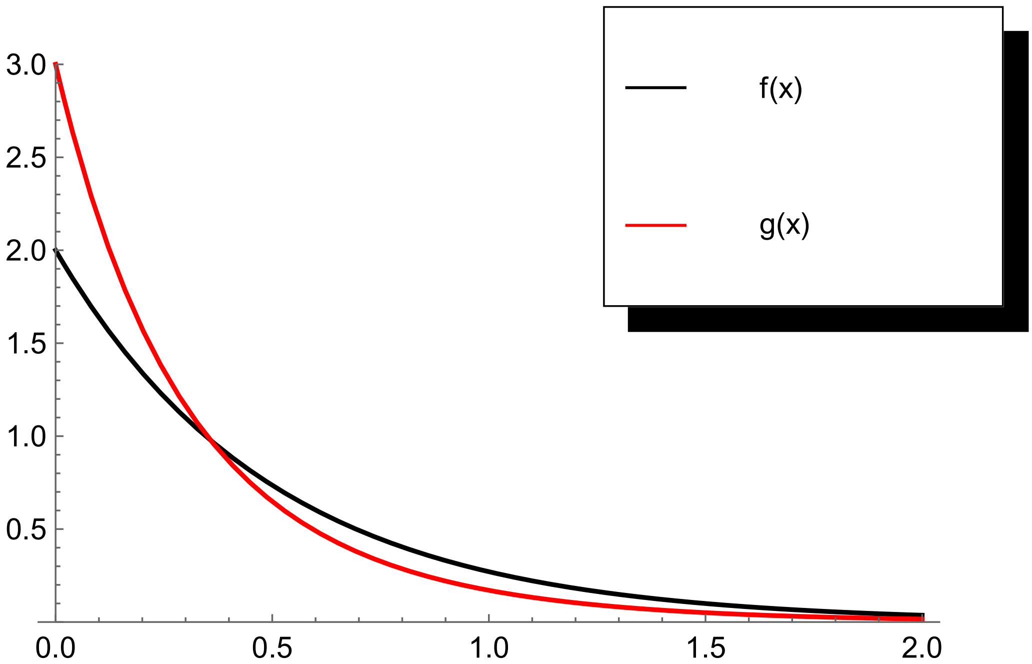
$$\psi_X(u) = 0{,}6667e^{-0{,}6667u}$$



Σχήμα 4.14: Γραφική παράσταση πιθανότητας χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α

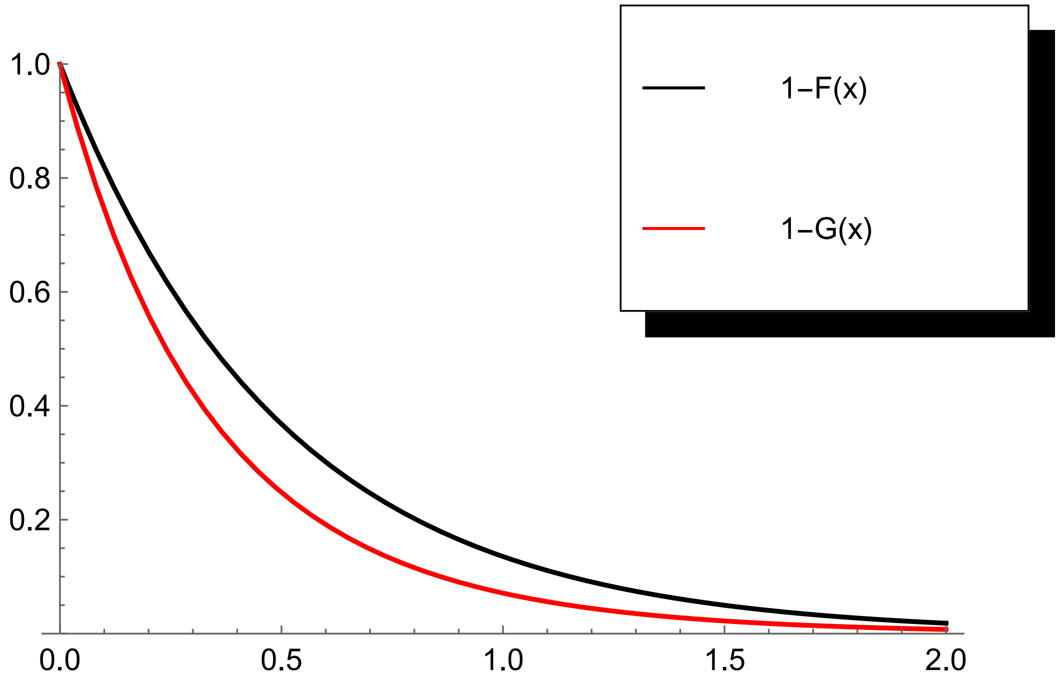
Τότε, γνωρίζοντας τις αντίστοιχες ποσότητες του χαρτοφυλακίου Β από το παράδειγμα 4.1.2 μπορούμε να συγκρίνουμε και σχηματικά τα δύο αυτά χαρτοφυλάκια.

Στο σχήμα 4.15 βλέπουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας οι οποίες τέμνονται και δεν είναι αυστηρά η μία πάνω από την άλλη.



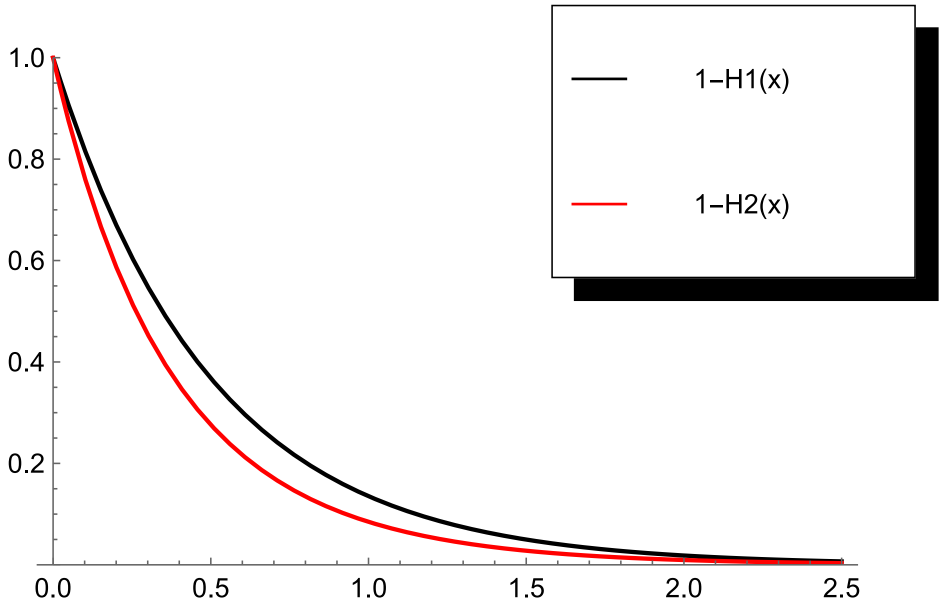
Σχήμα 4.15: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας της Εκθετικής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Στο σχήμα 4.16 παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών των δυο χαρτοφυλακίων και παρατηρούμε πως αυτή τη φορά η ουρά της εκθετικής κατανομής είναι πάνω από την ουρά της μείξης εκθετικών κατανομών.



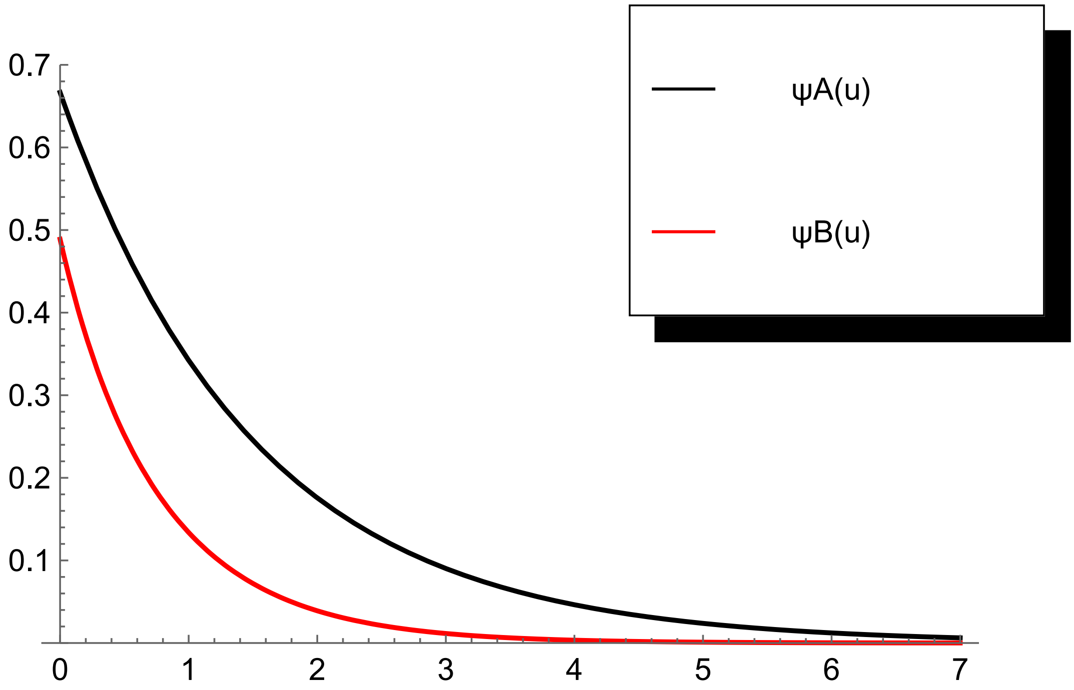
Σχήμα 4.16: Γραφική παράσταση της ουράς της συνάρτησης κατανομής της Εκθετικής κατανομής και της μείξης Εκθετικών αντίστοιχα.

Στο σχήμα 4.17 είναι φανερό ότι επίσης η ουρά της κατανομής ισορροπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου με την εκθετική κατανομή είναι πάνω από την ουρά της κατανομής ισορροπίας του δεύτερου χαρτοφυλακίου με την μείξη εκθετικών.



Σχήμα 4.17: Γραφική παράσταση της ουράς της κατανομής ισορροπίας για την Εκθετική κατανομή και τη μείξη εκθετικών αντίστοιχα.

Τελικά, παρουσιάζοντας γραφικά και τις πιθανότητες χρεοκοπίας των δύο χαρτοφυλακίων στο σχήμα 4.18, φαίνεται ξεκάθαρα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας για το χαρτοφυλάκιο Α είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Β για κάθε τιμή u.



Σχήμα 4.18: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας του Α και Β χαρτοφυλακίου αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας επομένως δυο χαρτοφυλάκια, των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται από μια Εκθετική κατανομή και μια μίξη Εκθετικών με διαφορετική μέση τιμή, και συγκεκριμένα εάν ισχύει ότι $E(X) > E(Y)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας του πρώτου χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του δεύτερου.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι χαρτοφυλάκιο Α είναι ζημιογόνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο Β.

□

4.2 Σύγκριση Χαρτοφυλακίων που εκφράζονται από Μίξεις Εκθετικών Κατανομών

Όπως είδαμε στην ενότητα 3.1, αν για κάθε πραγματικό t, ισχύει ότι

$$F_X(t) \geq F_Y(t)$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$$

Τότε η τυχαία μεταβλητή X θεωρείται ότι είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

Από τις ιδιότητες της συνήθους στοχαστικής διάταξης, για δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y που η πρώτη είναι μικρότερη η ίση από τη δεύτερη υπό τη διάταξη αυτή , και οι οποίες έχουν πεπερασμένη μέση τιμή, θα ισχύει ότι

$$\mathrm{X} \leq_{\mathrm{ST}} \mathrm{Y} \Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X}) \leq \mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

Επίσης από τις ιδιότητες γνωρίζουμε ότι για τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ και $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \dots, \mathrm{Y}_3$ για τις οποίες ισχύει ότι $\mathrm{X}_\mathrm{i} \leq_{\mathrm{ST}} \mathrm{Y}_\mathrm{i}\ \forall \mathrm{i} > 0$ θα έχουμε ότι

$$\Psi(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}) \leq_{\mathrm{ST}} \Psi(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \dots, \mathrm{Y}_\mathrm{n})$$

όπου $\Psi: \mathrm{R}^\mathrm{n} \to \mathrm{R}$, αύξουσα συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.2.1 – Χαρτοφυλάκια με διαφορετική μέση τιμή

Έστω δυο χαρτοφυλάκια A και B των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω μείξεων εκθετικών κατανομών. Θα βρούμε τις ποσότητες που χρειαζόμαστε μέχρι να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας επαληθεύοντας και τις ανωτέρω ιδιότητες, ώστε να είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τα δύο αυτά χαρτοφυλάκια.

Συγκεκριμένα για το χαρτοφυλάκιο A, δίνεται ότι το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων εκφράζεται μέσω μίας μείξης εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}$$

με παραμέτρους $\beta_1 = 5, \beta_2 = 3$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει ότι

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \int_0^\infty \frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\ dx = 1$$

Για την μέση τιμή έχουμε

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\ dx = \int_0^\infty x\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x5e^{-5x} + x3e^{-3x}\, dx = \frac{4}{15} = \mu_{1,X}$$

Υπολογίζουμε και την δεύτερη και τρίτη ροπή

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2}\right) dx = \frac{34}{225}$$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 \left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2} \right) dx = \frac{152}{1125}$$

Η διακύμανση θα των απαιτήσεων είναι

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^\infty x^2 \left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2} \right) dx - \left[\int_0^\infty x \left(\frac{5e^{-5x}}{2} + \frac{3e^{-3x}}{2} \right) \, dx \right]^2 = 0{,}08$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων θα δίνεται από την σχέση

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \left(\frac{5e^{-5t}}{2} + \frac{3e^{-3t}}{2} \right) dt = 1 - \frac{e^{-5x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{2}$$

Μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει άμεσα η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως εξής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{e^{-5x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων X_i θα έχουμε

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x) \, dx = \int_0^\infty e^{tx} \left(\frac{5e^{-5t}}{2} + \frac{3e^{-3t}}{2} \right) dx = \frac{15 - 4t}{15 - 8t + t^2}$$

Όπως είδαμε, η κατανομή των κλιμακωτών υψών δίνεται εξ ορισμού από την συνάρτηση κατανομής ισορροπίας. Επομένως, έχουμε

$$H_X(x) = \frac{1}{\mu_{1,X}} \int_0^x \bar{F}(t) dt = \frac{15}{4} \int_0^x \left(\frac{e^{-5x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2} \right) dt = \frac{1}{8} (8 - 3e^{-5x} - 5e^{-3x})$$

Η ουρά της συνάρτησης ισορροπίας θα είναι,

$$\overline{H_X}(x) = 1 - H_X(x) = \frac{1}{8} e^{-5x} (3 + 5e^{2x})$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$f_e(x) = H_X{}'(x) = \frac{1}{8} (15e^{-5x} + 15e^{-3x})$$

Για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου δίνεται αντίστοιχα ότι λ=2 και c=3.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ_X, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta_X = \frac{c}{\lambda \mu_{1,X}} - 1 = 4{,}625$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογιστεί ως λύση της εξίσωσης του Lundberg.

$$M(r) = 1 + (1 + \theta_X) \mu_{1,X} r$$

Από την οποία βρίσκουμε ότι

$$R_X = 2{,}61257$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u=0 είναι

$$\psi_X(0) = \frac{1}{1+\theta_X} = \frac{1}{1+4{,}625} = 0{,}17778$$

Για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας $1 - H_X(x)$, της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $f_e(s)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_X}}(s) = \frac{5}{8(3+s)} + \frac{3}{8(5+s)}$$

$$\hat{f}_e(s) = \frac{1}{8}(\frac{15}{3+s} + \frac{15}{5+s})$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_X}(s) = \widehat{\psi_X}(s) = \frac{\frac{5}{8(3+s)} + \frac{3}{8(5+s)}}{5{,}625 + \frac{1}{8}\left(-\frac{15}{3+s} - \frac{15}{5+s}\right)}$$

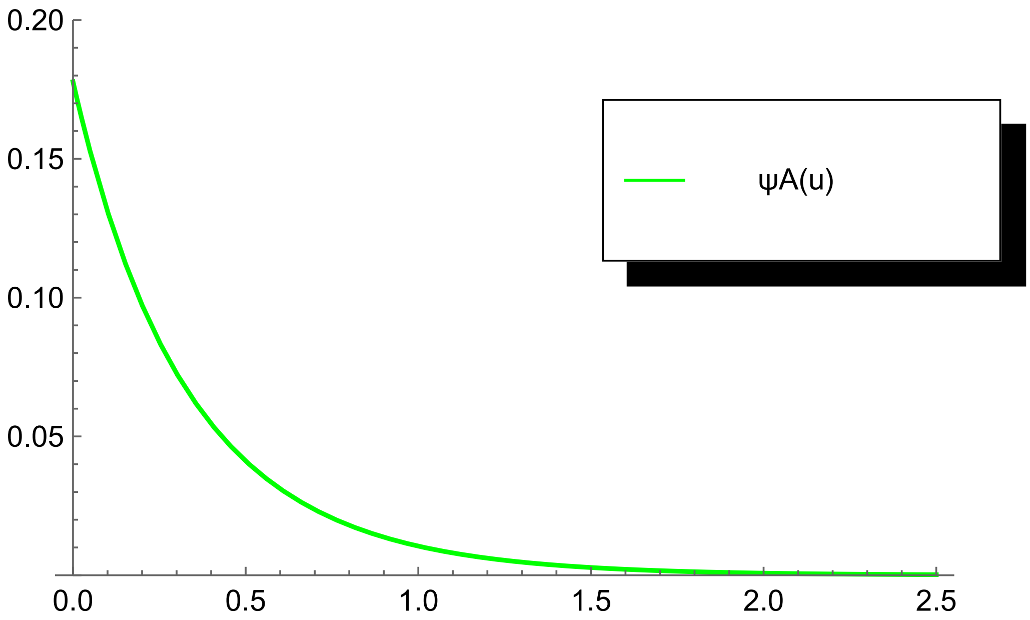
Μέσω της τελευταίας σχέσης, υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace θα είναι

$${L_{\psi_X}}^{-1}(s) = 0{,}0397e^{-4{,}72076u} + 0{,}13808e^{-2{,}61257u}$$

Τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α θα είναι ίση με

$$\psi_X(u) = 0{,}0397e^{-4{,}72076u} + 0{,}13808e^{-2{,}61257u}$$



Σχήμα 4.19: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Α.

Για το χαρτοφυλάκιο Β, δίνεται ότι το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων εκφράζεται και πάλι μέσω μίας μείξης εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$g(y) = \frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}$$

με παραμέτρους $r_1 = 6$, $r_2 = 2$ και αντίστοιχα βάρη $a_1 = \frac{2}{5}, \alpha_2 = \frac{3}{5}$.

Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλίστρου θα είναι και πάλι λ=2 και c=3 αντίστοιχα.

Θα υπολογίσουμε τις ίδιες ποσότητες με το χαρτοφυλάκιο Α έτσι ώστε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας και αυτού του χαρτοφυλακίου και να μπορέσουμε να την συγκρίνουμε με την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α.

Για την g(y) που είναι μία πυκνότητα πιθανότητας ισχύει ότι

$$\int_0^\infty g(y)\ dy = \int_0^\infty \frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5} dy = 1$$

Η μέση τιμή της κατανομής αυτής θα είναι

$$E(Y) = \int_0^\infty yg(y)\ dy = \int_0^\infty y\left(\frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}\right) dy = \frac{11}{30} = \mu_{1,Y}$$

Για τη δεύτερη και την τρίτη ροπή έχουμε

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \left(\frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}\right) dy = \frac{29}{90}$$

$$E(Y^3) = \int_0^\infty y^3 \left(\frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}\right) dy = \frac{83}{180}$$

Η διακύμανση προκύπτει μέσω του ακόλουθου τύπου

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$Var(Y) = \int_0^\infty y^2 \left(\frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}\right) dy - \left[\int_0^\infty y \left(\frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}\right) dy\right]^2 = 0{,}187778$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου Β θα δίνεται από την σχέση

$$G(y) = \int_0^y g(t)\ dt = 1 - \frac{2e^{-6y}}{5} - \frac{3e^{-2y}}{5}$$

και μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{G}(y) = 1 - G(y) = \frac{2e^{-6y}}{5} + \frac{3e^{-2y}}{5}$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων Y_i έχουμε

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{ty} g(y)\, dy = \int_0^\infty e^{ty} \left(\frac{12e^{-6y}}{5} + \frac{6e^{-2y}}{5}\right) dy = \frac{60 - 18t}{60 - 40t + 5t^2}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα υπολογιστεί και πάλι μέσω της συνάρτησης της κατανομής ισορροπίας οπότε θα είναι

$$H_Y(y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^y \bar{G}(t) dt = \frac{12}{5} \int_0^y \frac{2e^{-6y}}{5} + \frac{3e^{-2y}}{5} dt = 0{,}090(11 - 2e^{-6x} - 9e^{-2x})$$

Και η ουρά αυτής,

$$\overline{H_Y}(y) = 1 - H_Y(y) = e^{-6x}(0{,}1818 + 0{,}8182e^{4x})$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$g_e(y) = {H_Y}'(y) = 0{,}0909(12e^{-6x} + 18e^{-2x})$$

Για το περιθώριο ασφαλείας θ_Y θα έχουμε

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda \mu_{1,Y}} - 1 = 3{,}0909$$

Ο συντελεστής προσαρμογής R θα υπολογισθεί ως η λύση της εξίσωσης του Lundberg

$$M_Y(r) = 1 + (1 + \theta_Y)\mu_{1,Y} r$$

από την οποία προκύπτει τελικά ότι

$$R_Y = 1{,}57435$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας του Β χαρτοφυλακίου με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_Y(0) = \frac{1}{1+\theta_Y} = \frac{1}{1+3{,}0909} = 0{,}24444$$

Για να βρούμε την πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας 1- H_Y (y), της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $g_e(y)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_Y}}(s) = \frac{0{,}8182}{2+s} + \frac{0{,}1818}{6+s}$$

$$\hat{g}_e(s) = 0{,}0909\left(\frac{12}{6+s} + \frac{18}{2+s}\right)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_Y}(s) = \widehat{\psi_Y}(s) = \frac{\frac{0{,}8182}{2+s} + \frac{0{,}1818}{6+s}}{4{,}09091 - 0{,}0909(\frac{18}{2+s} + \frac{12}{6+s})}$$

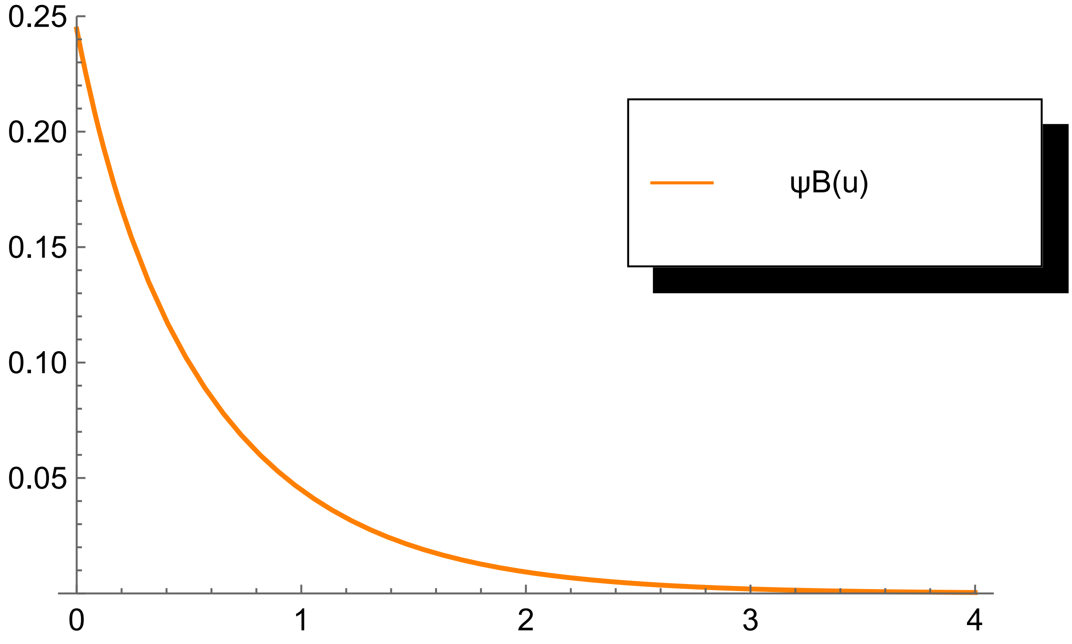
Μέσω της τελευταίας σχέσης, βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε και πάλι στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συνεπώς θα είναι,

$$L_{\psi_Y}{}^{-1}(s) = 0{,}0236e^{-5{,}8198u} + 0{,}1542e^{-1{,}695u}$$

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Β θα είναι ίση με

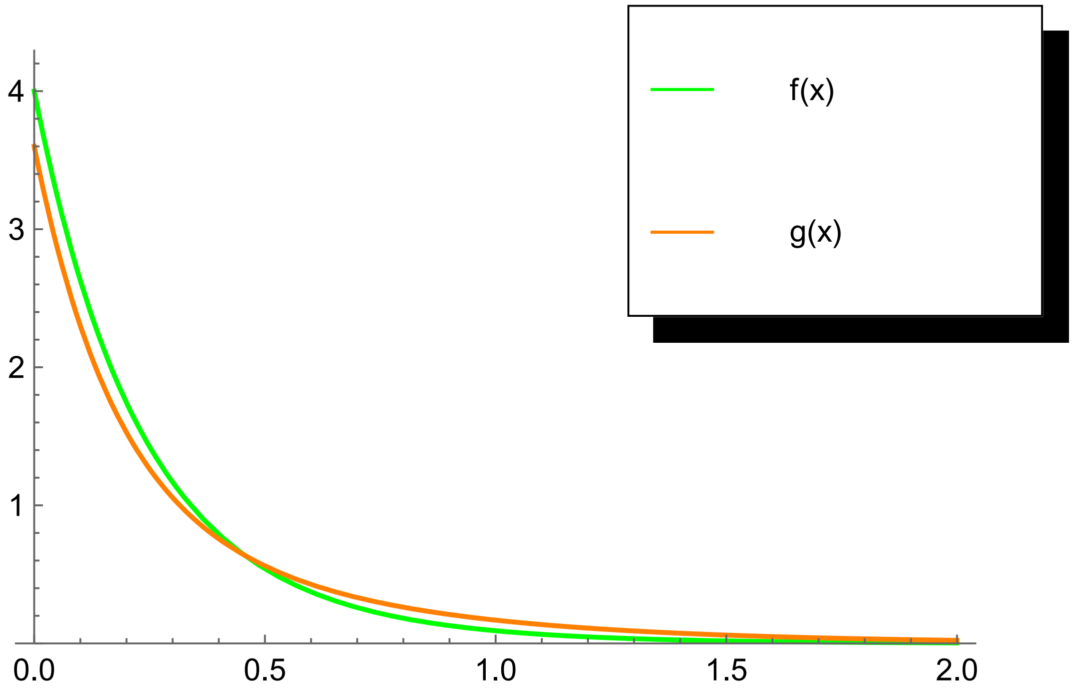
$$\psi_Y(u) = 0{,}0236e^{-5{,}8198u} + 0{,}1542e^{-1{,}695u}$$



Σχήμα 4.20: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Β.

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Αρχικά για τις συναρτήσεις πυκνότητας παρατηρούμε στο ακόλουθο σχήμα ότι τέμνονται καθώς και οι δύο ολοκληρώνουν στην μονάδα και δεν θα μπορούσε να είναι αυστηρά η μία πάνω από την άλλη για κάθε τιμή του x.



Σχήμα 4.21: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας των αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

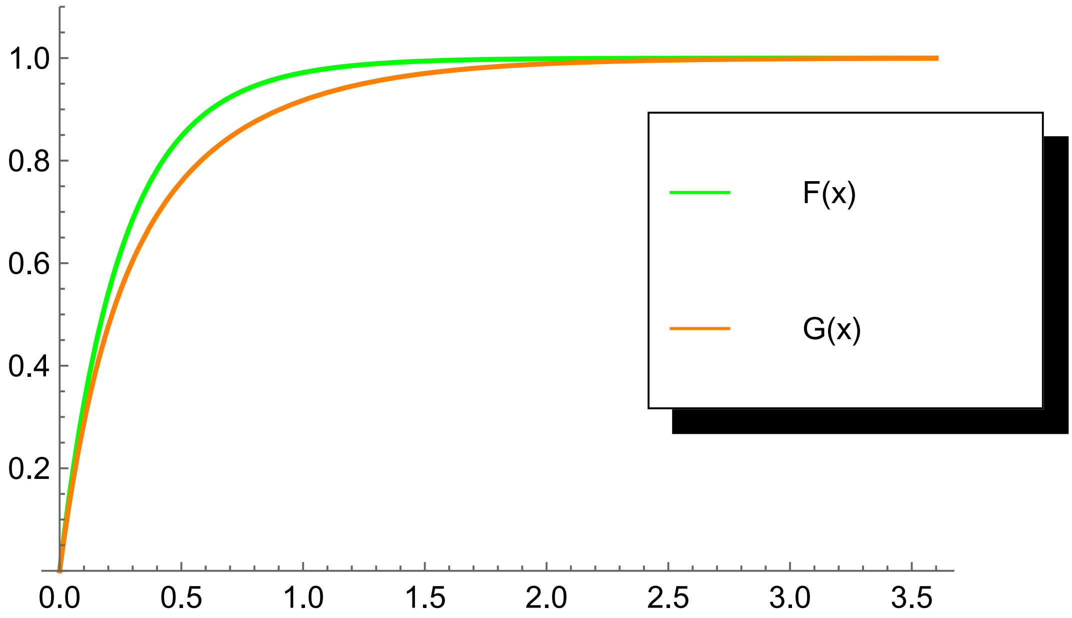
Στα δύο επόμενα σχήματα φαίνονται αντίστοιχα η γραφική παράσταση των συναρτήσεων των κατανομών και των συναρτήσεων των ουρών των κατανομών των δυο χαρτοφυλακίων. Είναι φανερό από το σχήμα 4.22 ότι

$$\mathrm{F_X(t)} \geq \mathrm{F_Y(t)}, \qquad \text{για κάθε } t$$

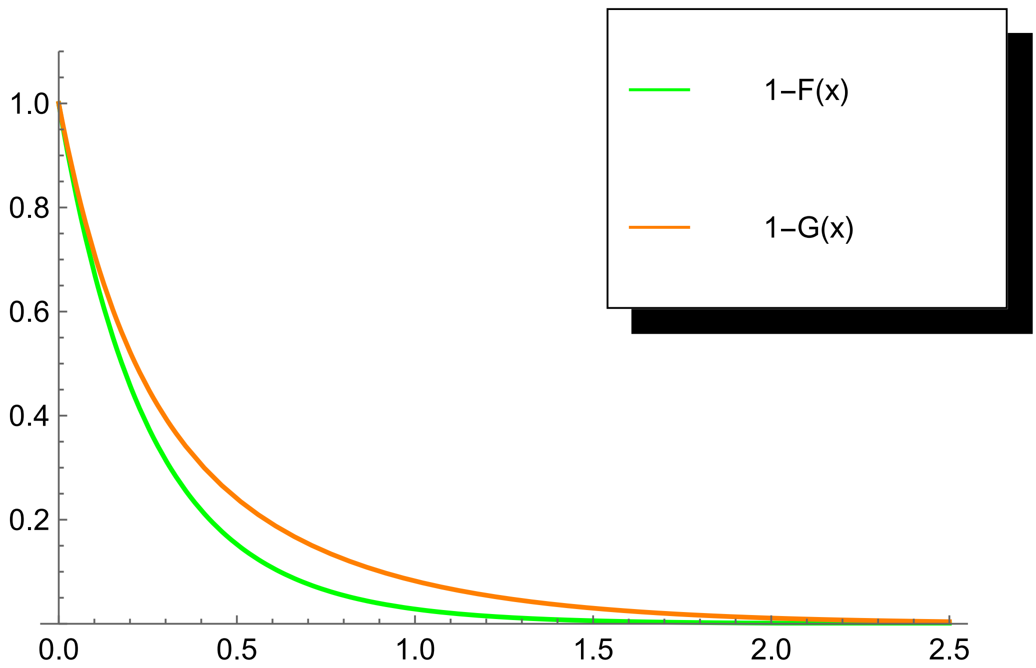
Και αντίστοιχα από το σχήμα 4.23 ότι,

$$\mathrm{\bar{F}_X(t)} \leq \mathrm{\bar{F}_Y(t)}, \qquad \text{για κάθε } t$$

Επομένως από τον ορισμό της συνήθους στοχαστικής διάταξης παίρνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη.

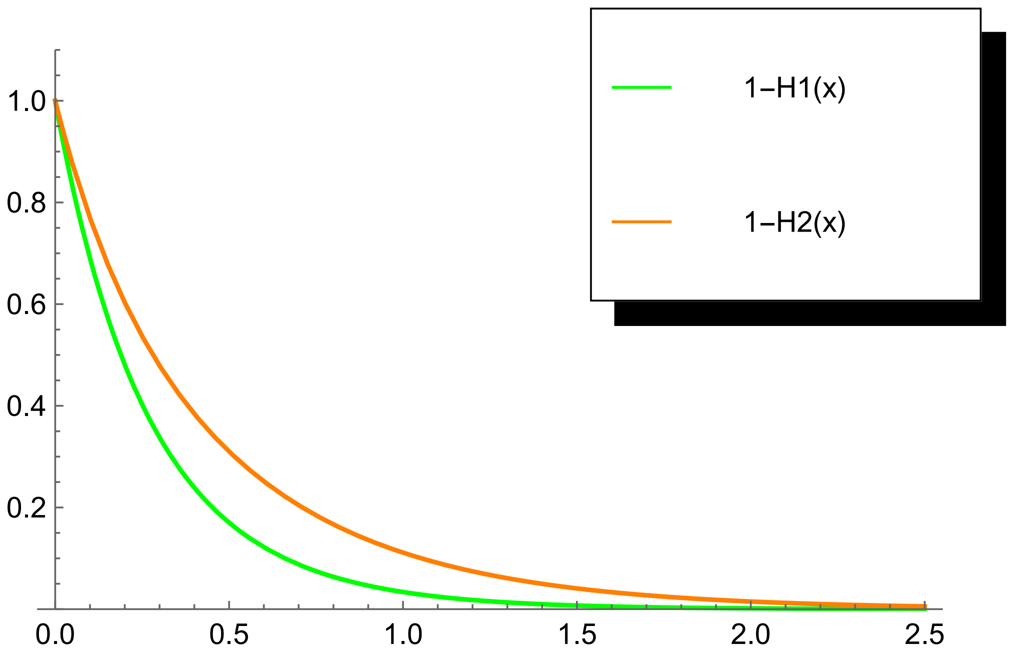


Σχήμα 4.22: Γραφική παράσταση της κατανομής του χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.



Σχήμα 4.23: Γραφική παράσταση της ουράς της κατανομής του χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των ουρών των κατανομών ισορροπίας του χαρτοφυλακίου Α και Β αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο Α είναι κάτω από την γραφική παράσταση του χαρτοφυλακίου Β για κάθε τιμή του x.

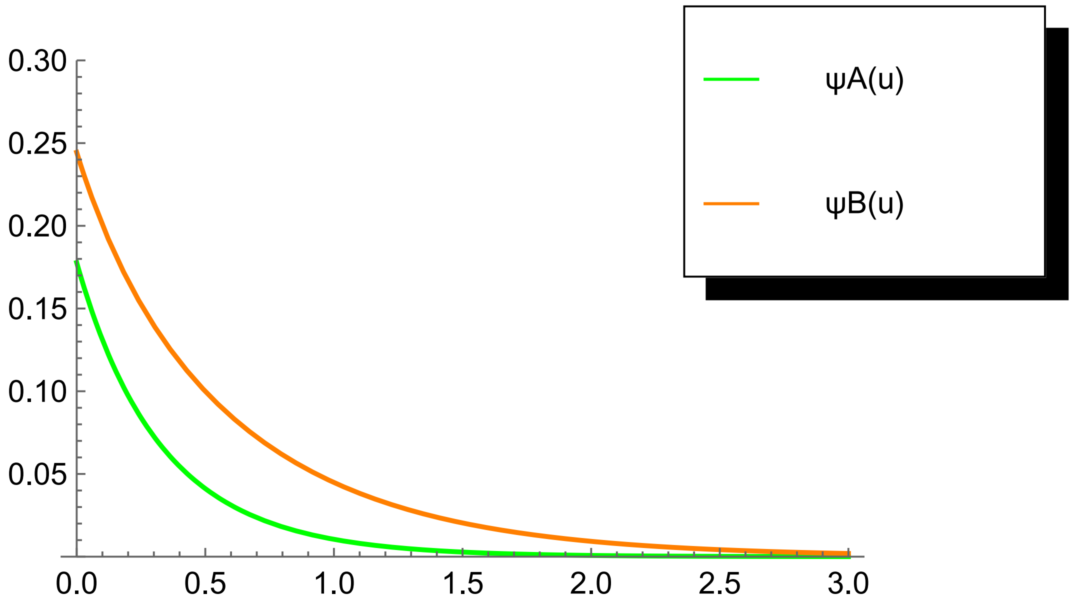


Σχήμα 4.24: Γραφική παράσταση της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας του χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι οι ατομικές ζημίες X_i του χαρτοφυλακίου Α είναι μικρότερες ή ίσες από τις ατομικές ζημιές Y_i του χαρτοφυλακίου Β, υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη.

Επίσης, όπως αναφέρεται και στις ιδιότητες της Συνήθους Στοχαστικής Διάταξης, ισχύει ότι η μέση τιμή των αποζημιώσεων X_i του χαρτοφυλακίου Α είναι μικρότερη από τη μέση τιμή των αποζημιώσεων Y_i του χαρτοφυλακίου Β.

Μέσω των ιδιοτήτων προκύπτει επίσης ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Α θα πρέπει να είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Β. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα και από το ακόλουθο σχήμα των πιθανοτήτων χρεοκοπίας.



Σχήμα 4.25: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας των χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, για δυο χαρτοφυλάκια των οποίων οι αποζημιώσεις εκφράζονται μέσω μίξεων εκθετικών κατανομών με διαφορετική μέση τιμή, αν η ουρά της κατανομής των X_i είναι σχηματικά κάτω από την ουρά της κατανομής των Y_i, τότε υπό την Συνήθη Στοχαστική Διάταξη έχουμε ότι

$$\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$$

και επίσης,

$$\psi_X(u) \leq \psi_Y(u)$$

Επομένως καταλήγουμε ότι το χαρτοφυλάκιο Β είναι περισσότερο ζημιογόνο συγκριτικά με το χαρτοφυλάκιο Α.

□

Παράδειγμα 4.2.2 – Χαρτοφυλάκια με κοινή μέση τιμή.

Αντίστοιχα με το παράδειγμα 4.2.1 θεωρούμε δυο χαρτοφυλάκια Α και Β των οποίων οι ατομικές αποζημιώσεις εκφράζονται και για τα δυο χαρτοφυλάκια μέσω μείξης εκθετικών κατανομών.

Συγκεκριμένα στο χαρτοφυλάκιο Α, η συνάρτηση πυκνότητας των αποζημιώσεων θα είναι μία μείξη εκθετικών με παραμέτρους $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{7}$ και βάρη $\alpha_1 = \frac{1}{3}\ και\ \alpha_2 = \frac{2}{3}$ αντίστοιχα η οποία εκφράζεται μέσω του παρακάτω τύπου

$$f(x) = \frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}$$

Εφόσον πρόκειται για συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ισχύει ότι

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}\ dx = 1$$

Για την μέση τιμή έχουμε

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\ dx = \int_0^\infty x\left(\frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}\right)\ dx = 6 = \mu_{1,X}.$$

Υπολογίζουμε και την δεύτερη και τρίτη ροπή

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\left(\frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}\right)\ dx = 76,$$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3\left(\frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}\right)\ dx = 1500$$

Η διακύμανση θα των απαιτήσεων είναι

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \int_0^\infty x^2\left(\frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}\right)\ dx - \left[\int_0^\infty x\left(\frac{e^{-x/4}}{12} + \frac{2e^{-x/7}}{21}\right)\ dx\right]^2 = 40$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων και συνάρτηση της ουράς της κατανομής θα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x \left(\frac{5e^{-5t}}{2} + \frac{3e^{-3t}}{2}\right)\ dt = 1 - \frac{e^{-x/4}}{3} - \frac{2e^{-x/7}}{3},$$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{e^{-x/4}}{3} + \frac{2e^{-x/7}}{3}$$

Για τον υπολογισμό της ροπογεννήτριας των αποζημιώσεων X_i θα έχουμε

$$M_X(t)=\int_0^\infty e^{tx}f(x)\,dx=\int_0^\infty e^{tx}\left(\frac{5e^{-5t}}{2}+\frac{3e^{-3t}}{2}\right)dx=\frac{1-5t}{1-11t+28t^2},\quad για\ t<\frac{1}{7}$$

Όπως είδαμε, η κατανομή των κλιμακωτών υψών προκύπτει μέσω της συνάρτησης κατανομής ισορροπίας. Επομένως, έχουμε

$$H_X(x)=\frac{1}{\mu_{1,X}}\int_0^x \bar{F}(t)dt=\frac{1}{6}\int_0^x\left(\frac{5e^{-5t}}{2}+\frac{3e^{-3t}}{2}\right)dt=\frac{1}{9}(9-2e^{-x/4}-7e^{-x/7})$$

Αφαιρώντας την παραπάνω ποσότητα από την μονάδα καταλήγουμε στην ουρά της συνάρτησης ισορροπίας η οποία θα είναι,

$$\overline{H_X}(x)=1-H_X(x)=\frac{1}{9}e^{-x/4}\left(2+7e^{3x/28}\right)$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$f_e(x)=H_X{}'(x)=\frac{1}{9}\left(\frac{e^{-x/4}}{2}+e^{-x/7}\right)$$

Για την ένταση της ανέλιξης Poisson και την ένταση του ασφαλίστρου δίνεται αντίστοιχα ότι λ=2 και c=15.

Επομένως, το περιθώριο ασφαλείας θ_X, μπορεί να υπολογισθεί μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\theta_X=\frac{c}{\lambda\mu_{1,X}}-1=0{,}25$$

Η τιμή του συντελεστής προσαρμογής R θα είναι η λύση της εξίσωσης του Lundberg.

$$M(r)=1+(1+\theta_X)\mu_{1,X}r$$

Συγκεκριμένα παίρνουμε ότι

$$R_X=0{,}031297$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u=0 είναι

$$\psi_X(0)=\frac{1}{1+\theta_X}=\frac{1}{1+0{,}25}=0{,}8$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της ουράς της κατανομής ισορροπίας, $1-H_X(x)$, θα είναι

$$\widehat{\overline{H_X}}(s)=\frac{7}{9(\frac{1}{7}+s)}+\frac{2}{9(\frac{1}{4}+s)}$$

Ενώ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $f_e(s)$ θα είναι,

$$\hat{f}_e(s) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\frac{1}{7}+s} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}+s\right)}\right)$$

Για τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας έχουμε αντίστοιχα

$$L_{\psi_X}(s) = \widehat{\psi_X}(s) = \frac{\frac{7}{9(\frac{1}{7}+s)} + \frac{2}{9(\frac{1}{4}+s)}}{1{,}25 + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{\frac{1}{7}+s} - \frac{1}{2(\frac{1}{4}+s)}\right)}$$

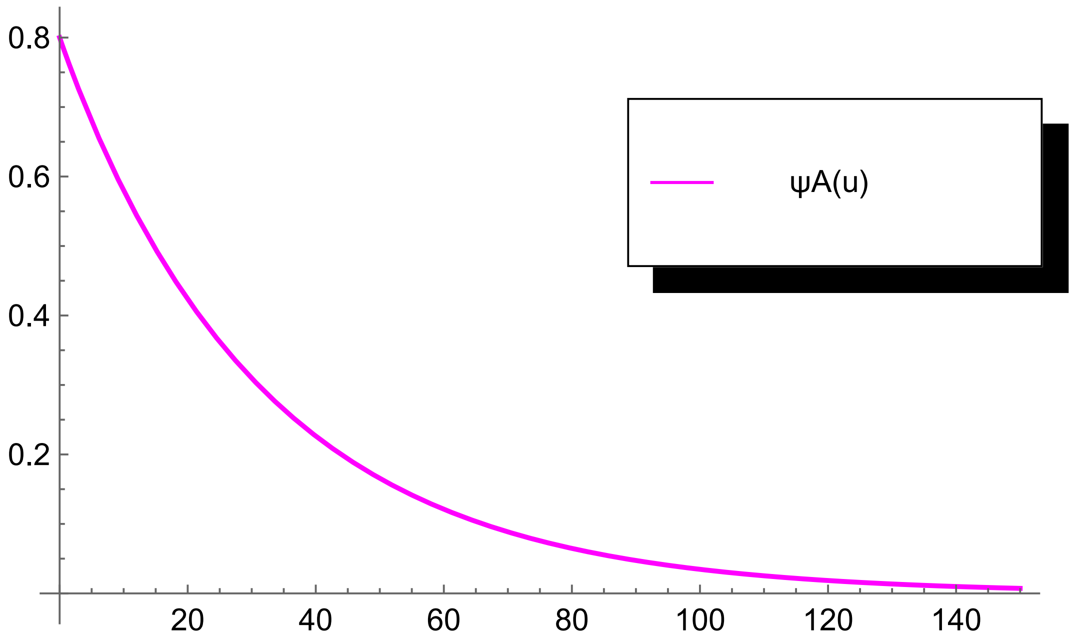
Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της τελευταίας σχέσης μπορούμε να καταλήξουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Δηλαδή θα έχουμε,

$$L_{\psi_X}{}^{-1}(s) = 0{,}00827e^{-0{,}228227u} + 0{,}791729e^{-0{,}031297u}$$

Τελικά η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου A θα είναι ίση με

$$\psi_X(u) = 0{,}00827e^{-0{,}228227u} + 0{,}791729e^{-0{,}031297u}$$



Σχήμα 4.26: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου A.

Για το χαρτοφυλάκιο B, δίνεται ότι το ύψος των ατομικών αποζημιώσεων εκφράζεται και πάλι μέσω μίας μείξης εκθετικών κατανομών με την ίδια μέση τιμή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$g(y) = \frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}$$

με παραμέτρους $r_1 = \frac{1}{5}$, $r_2 = \frac{4}{5}$ και αντίστοιχα βάρη $a_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{7}$.

Η ένταση της ανέλιξης Poisson και η ένταση του ασφαλίστρου θα είναι και πάλι λ=2 και c=15 αντίστοιχα.

Για την g(y) προφανώς θα ισχύει ότι

$$\int_0^\infty g(y)\ dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35} dy = 1$$

Η μέση τιμή της κατανομής του χαρτοφυλακίου Β θα είναι ίση με τη μέση τιμή του χαρτοφυλακίου Β και θα υπολογίζεται μέσω την σχέσης

$$E(Y) = \int_0^\infty yg(y)\ dy = \int_0^\infty y\left(\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}\right) dy = 6 = \mu_{1,Y}$$

Για τη δεύτερη και την τρίτη ροπή έχουμε

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \left(\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}\right) dy = 80$$

$$E(Y^3) = \int_0^\infty y^3 \left(\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}\right) dy = 1656$$

Η διακύμανση προκύπτει μέσω του ακόλουθου τύπου

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$Var(Y) = \int_0^\infty y^2 \left(\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}\right) dy - \left[\int_0^\infty y\left(\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}\right) dy\right]^2 = 44$$

Η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου Β θα δίνεται από την σχέση

$$G(y) = \int_0^y g(t)\ dt = 1 - \frac{e^{-y/2}}{5} - \frac{4e^{-y/7}}{5}$$

και μέσω της συνάρτησης κατανομής προκύπτει και η συνάρτηση δεξιάς ουράς ως ακολούθως

$$\bar{G}(y) = 1 - G(y) = \frac{e^{-y/2}}{5} + \frac{4e^{-y/7}}{5}$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων Y_i έχουμε

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{ty} g(y)\, dy = \int_0^\infty e^{ty} \left(\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4e^{-y/7}}{35}\right) dy = \frac{1-3t}{1-9t+14t^2},\quad για\ t < \frac{1}{7}$$

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών θα υπολογιστεί και πάλι μέσω της συνάρτησης της κατανομής ισορροπίας οπότε θα είναι

$$H_Y(y) = \frac{1}{\mu_{1,Y}} \int_0^y \bar{G}(t) dt = \frac{12}{5} \int_0^y \frac{e^{-t/2}}{5} + \frac{4e^{-t/7}}{5} dt = \frac{1}{6}(6 - \frac{2e^{-y/2}}{5} - \frac{28e^{-y/7}}{5})$$

Και η ουρά αυτής,

$$\overline{H_Y}(y) = 1 - H_Y(y) = \frac{1}{15}e^{-y/2}(1 + 14e^{5y/14})$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών έχουμε,

$$g_e(y) = H_Y{}'(y) = \frac{1}{6}\left(\frac{e^{-y/2}}{5} + \frac{4e^{-y/7}}{5}\right)$$

Για το περιθώριο ασφαλείας θ_Y θα έχουμε

$$\theta_Y = \frac{c}{\lambda\mu_{1,Y}} - 1 = 0{,}25$$

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας του Β χαρτοφυλακίου με αρχικό αποθεματικό u=0, έχουμε,

$$\psi_Y(0) = \frac{1}{1 + \theta_Y} = \frac{1}{1 + 0{,}25} = 0{,}8$$

Για να βρούμε την πιθανότητας χρεοκοπίας θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον μετασχηματισμό Laplace της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας 1- H_Y (y), της συνάρτησης πυκνότητας των κλιμακωτών υψών $g_e(y)$ και μέσω αυτού θα υπολογίσουμε και τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Έχουμε διαδοχικά,

$$\widehat{\overline{H_Y}}(s) = \frac{14}{15(\frac{1}{7} + s)} + \frac{1}{15(\frac{1}{2} + s)}$$

$$\hat{g}_e(s) = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{5(\frac{1}{7} + s)} + \frac{1}{5(\frac{1}{2} + s)}\right)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας θα είναι

$$L_{\psi_Y}(s) = \widehat{\psi_Y}(s) = \frac{\frac{14}{15(\frac{1}{7} + s)} + \frac{1}{15(\frac{1}{2} + s)}}{1{,}25\ + \frac{1}{6}(-\frac{4}{5(\frac{1}{7} + s)} - \frac{1}{5(\frac{1}{2} + s)})}$$

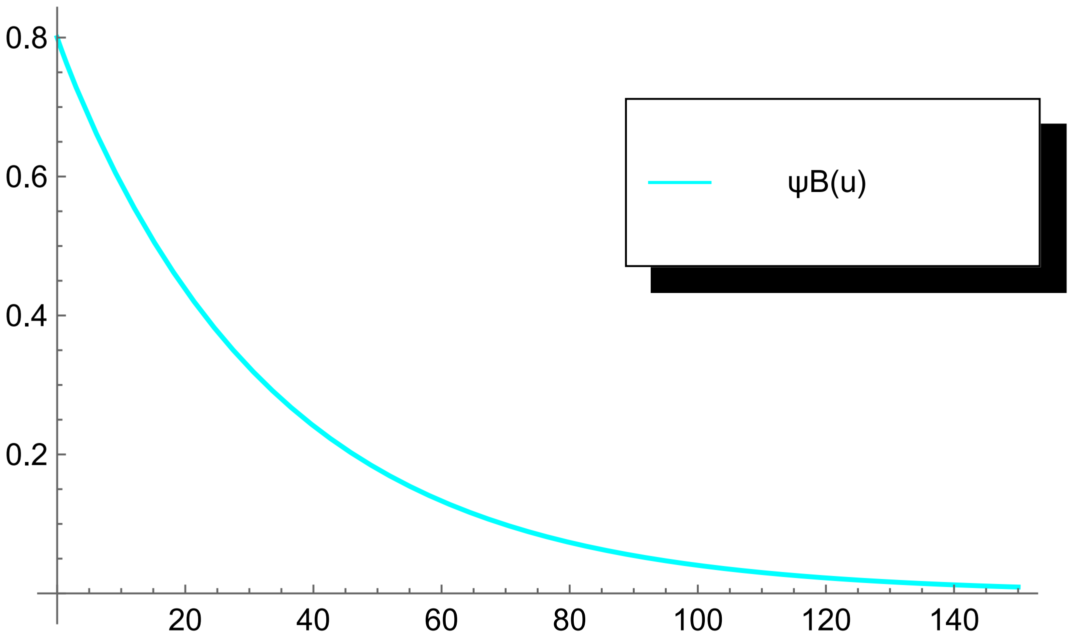
Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της προηγούμενης σχέσης καταλήγουμε στην πιθανότητα χρεοκοπίας.

Συνεπώς θα είναι,

$$L_{\psi_Y}{}^{-1}(s) = 0{,}0063e^{-0{,}4797u} + 0{,}7937e^{-0{,}0298u}$$

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου Β θα είναι ίση με

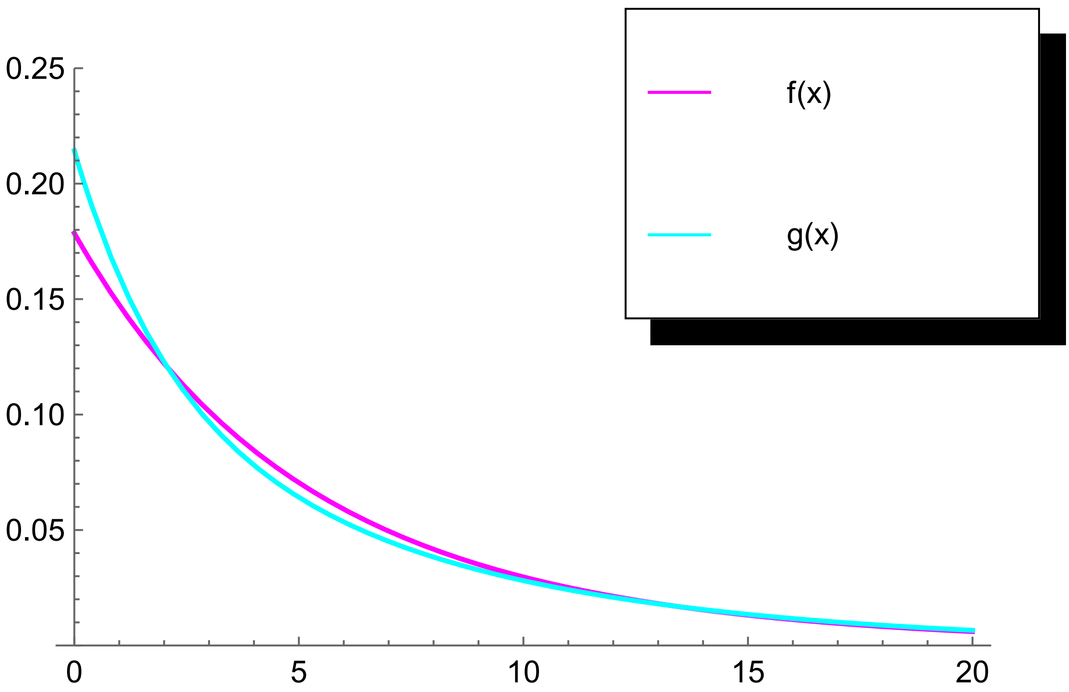
$$\psi_Y(u) = 0{,}0063e^{-0{,}4797u} + 0{,}7937e^{-0{,}0298u}$$



Σχήμα 4.27: Πιθανότητα Χρεοκοπίας Χαρτοφυλακίου Β.

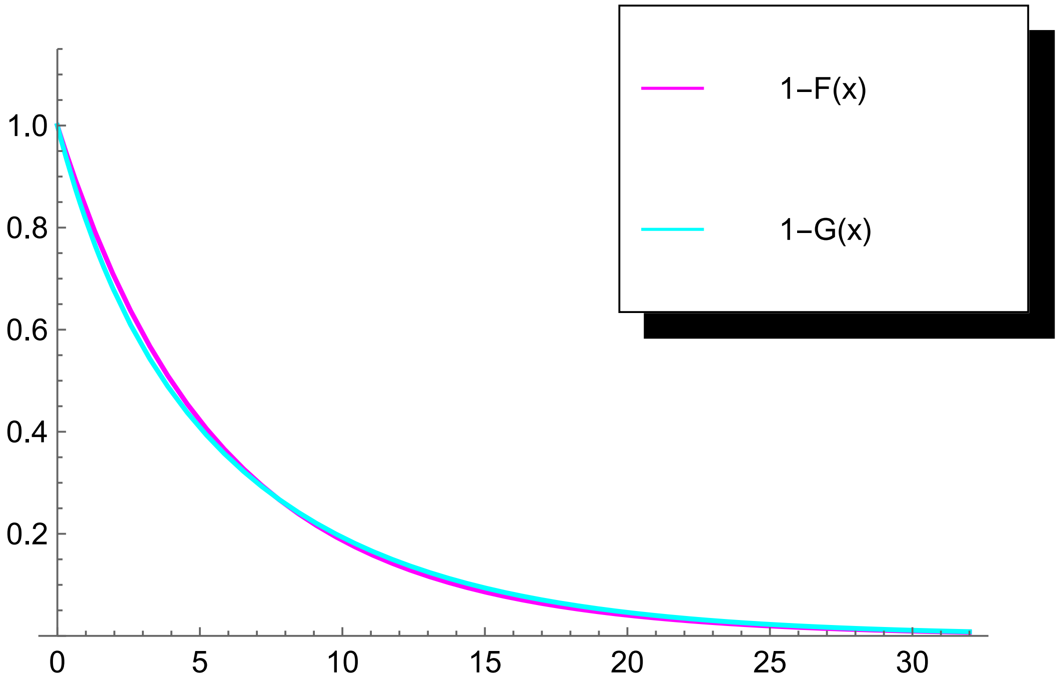
Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε σχηματικά τα δύο χαρτοφυλάκια.

Όπως ήταν αναμενόμενο παρατηρούμε στο σχήμα 4.28 ότι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας τέμνονται και δεν είναι αυστηρά η μία πάνω από την άλλη για κάθε τιμή του x.



Σχήμα 4.28: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας των αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

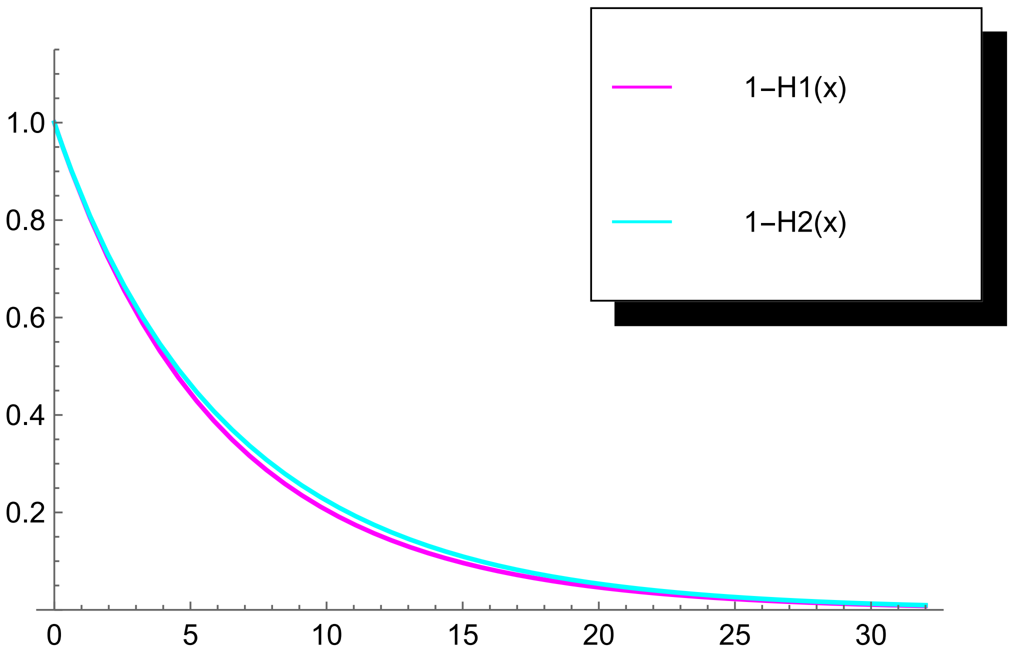
Στο σχήμα 4.29 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι ουρές των κατανομών και φαίνεται ότι για τα δυο αυτά χαρτοφυλάκια οι ουρές σχεδόν συμπίπτουν μεταξύ τους.



Σχήμα 4.29: Γραφική παράσταση της ουράς της κατανομής του χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

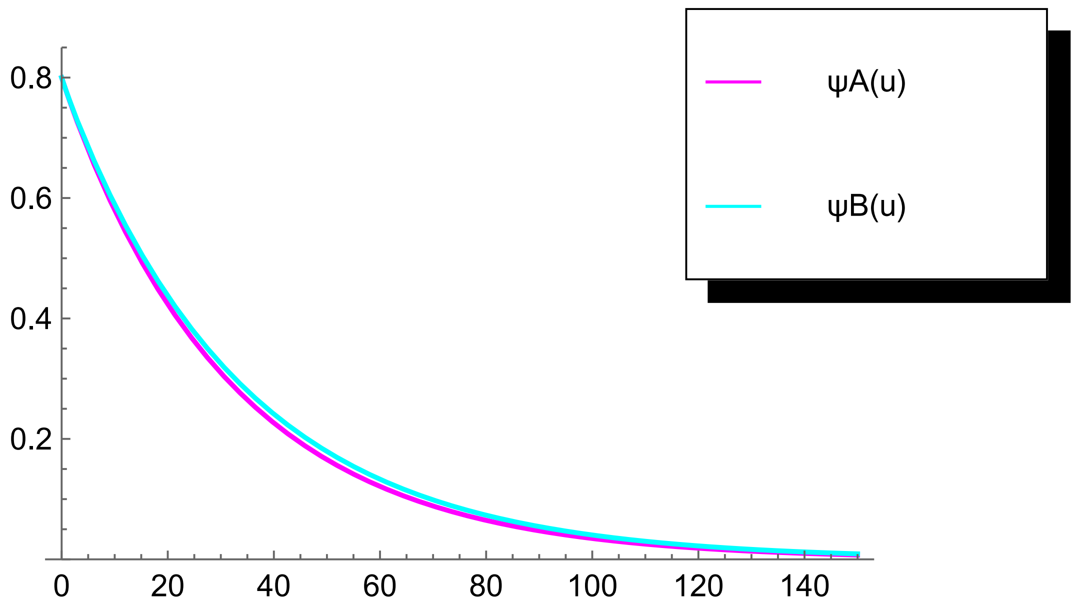
Στο ακόλουθο σχήμα 4.30 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των ουρών των κατανομών ισορροπίας του χαρτοφυλακίου Α και Β αντίστοιχα.

Παρατηρείται και πάλι ότι οι ουρές τους σχεδόν συμπίπτουν για κάθε τιμή του x.



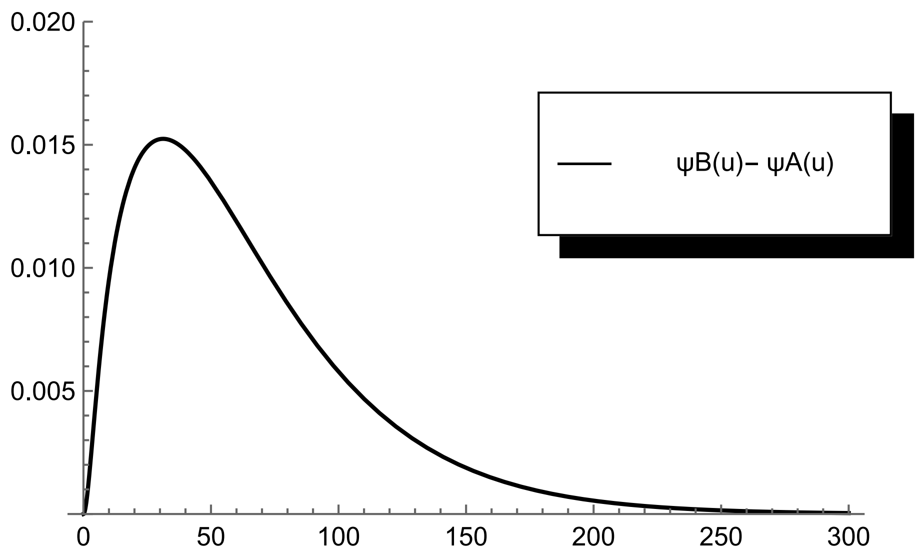
Σχήμα 4.30: Γραφική παράσταση της ουράς της συνάρτησης ισορροπίας του χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε τελικά το ακόλουθο σχήμα 4.31 από το οποίο φαίνεται ότι και οι πιθανότητες χρεοκοπίας για τα συγκεκριμένα χαρτοφυλάκια σχεδόν συμπίπτουν.



Σχήμα 4.31: Γραφική παράσταση των πιθανοτήτων χρεοκοπίας των χαρτοφυλακίων A και B αντίστοιχα.

Για να φανεί πιο ξεκάθαρα το αν οι δύο πιθανότητες χρεοκοπίας τέμνονται για κάποιο u, παρουσιάζεται επιπρόσθετα το σχεδιάγραμμα της διαφοράς αυτών, στο οποίο παρατηρούμε ότι η καμπύλη είναι πάντα πάνω από τον άξονα των x. Επομένως η μία πιθανότητα χρεοκοπίας είναι πάντα μεγαλύτερη από την άλλη.



Σχήμα 4.32: Γραφική παράσταση της διαφοράς $\psi_Y(u) - \psi_X(u)$.

Συνεπώς, για δυο χαρτοφυλάκια που ακολουθούν μίξη εκθετικών κατανομών με διαφορετικές παραμέτρους και κοινή μέση τιμή, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό το σημείο ποιο από τα δυο χαρτοφυλάκια είναι περισσότερο ζημιογόνο για την ασφαλιστική εταιρεία.

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα δυο χαρτοφυλάκια και να καταλήξουμε ποιο από τα δύο θα επιλέγαμε ως περισσότερο ζημιογόνο, θα βγάλουμε κάποια σχέση για τα Stop-Loss ασφάλιστρα των δύο χαρτοφυλακίων για τη μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.3 για τη Στοχαστική Διάταξη Ανακοπής Ζημίας, το ασφάλιστρο Stop-Loss για τις αρχικές ζημιές που συμβολίζεται με $\Pi_x(t)$ θα ισούται με τη μέση τιμή των συνολικών απαιτήσεων που ξεπερνούν αυτό το όριο ιδίας κράτησης και θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\Pi_X(t) = E[(X-t)]_+$$

Επομένως για τις αρχικές ζημιές έχουμε,

$$\Pi_X(t) = \int_t^\infty (x-t) f_X(x)\, dx = \int_t^\infty \bar{F}_X(x) dx$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση στα κλιμακωτά ύψη και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$P(L > u) = \bar{F}_L(x) = \psi(u)$$

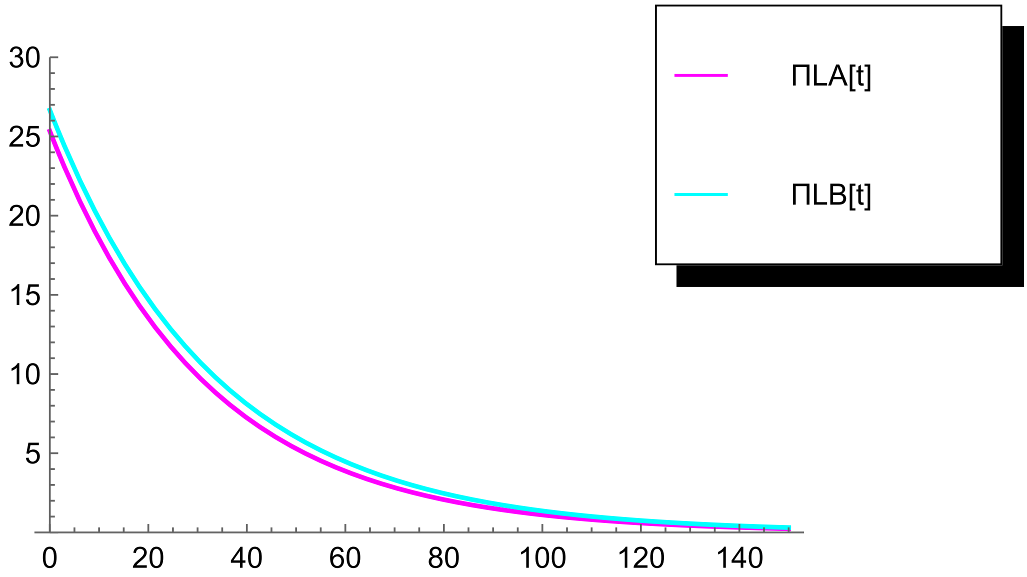
βρίσκουμε για το χαρτοφυλάκιο Α,

$$\Pi_{L_A}(t) = \int_t^\infty \bar{F}_{L_A}(x)\, dx = \int_t^\infty \psi_X(x)\, dx = 0{,}0362 e^{-0{,}2282t} + 25{,}297 e^{-0{,}0313t}$$

Και αντίστοιχα για το χαρτοφυλάκιο Β,

$$\Pi_{L_B}(t) = \int_t^\infty \bar{F}_{L_B}(x)\, dx = \int_t^\infty \psi_Y(x)\, dx = 0{,}0132 e^{-0{,}47975t} + 26{,}6535 e^{-0{,}0298t}$$

Από τη γραφική παράσταση των ασφαλίστρων Stop-Loss της μέγιστης σωρευτικής απώλειας, βλέπουμε ότι η καμπύλη που αντιστοιχεί στο χαρτοφυλάκιο Β είναι πάνω από του χαρτοφυλακίου Α.



Σχήμα 4.33: Γραφική παράσταση των Stop-Loss ασφαλίστρων της μέγιστης σωρευτικής απώλειας των χαρτοφυλακίων Α και Β αντίστοιχα.

Επιπλέον, το δεύτερο χαρτοφυλάκιο παρατηρούμε ότι έχει και μεγαλύτερη διακύμανση σε σχέση με το πρώτο. Συγκεκριμένα,

$$Var(X) = 40$$

Ενώ,

$$Var(Y) = 44$$

Επομένως, αν μία ασφαλιστική εταιρεία είχε στη διάθεση της αυτά τα δύο χαρτοφυλάκια, θα χρέωνε μεγαλύτερο ασφάλιστρο στο χαρτοφυλάκιο Β.

Παρότι λοιπόν δεν μπορούμε να βγάλουμε εύκολα κάποιο συμπέρασμα αποκλειστικά από την πιθανότητα χρεοκοπίας, συγκρίνοντας τα ασφάλιστρα Stop-Loss καταλήγουμε στο ότι ανάμεσα σε αυτά τα δυο χαρτοφυλάκια η ασφαλιστική εταιρεία θα επέλεγε το πρώτο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – Παρουσίαση εντολών στο Mathematica

Παρουσίαση των εντολών που χρησιμοποιήθηκαν για την εφαρμογή του Παραδείγματος 4.2.2

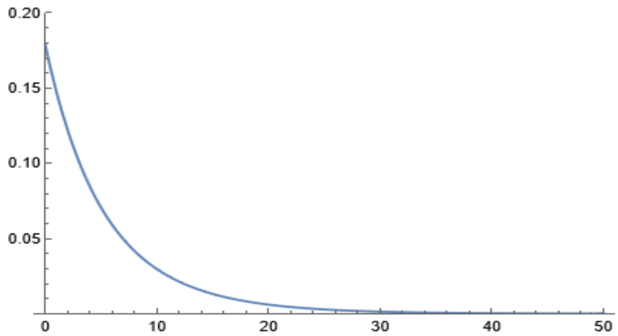
```
In[•]:= "Χαρτοφυλάκιο A"
Out[•]= Χαρτοφυλάκιο A

In[•]:= f[x_] := 1/12*Exp[-x/4] + 2/21*Exp[-x/7]
                     εκθετική συνάρτηση      εκθετική συνάρ

In[•]:= f[x]
```

$$\text{Out}[\cdot]= \frac{e^{-x/4}}{12}+\frac{2\,e^{-x/7}}{21}$$

```
In[•]:= Plot[{f[x]}, {x, 0, 50}, PlotRange → {0, 0.2}]
        διάγραμμα                 εύρος διαγράμματος
```

Out[•]=



```
In[•]:= Integrate[f[x], {x, 0, Infinity}]
        αόριστο ολοκλήρωμα    άπειρο
Out[•]= 1

In[•]:= μ = Integrate[x*f[x], {x, 0, Infinity}]
            αόριστο ολοκλήρωμα      άπειρο
Out[•]= 6

In[•]:= μ2 = Integrate[(x^2)*f[x], {x, 0, Infinity}]
             αόριστο ολοκλήρωμα           άπειρο
Out[•]= 76

In[•]:= μ3 = Integrate[(x^3)*f[x], {x, 0, Infinity}]
             αόριστο ολοκλήρωμα           άπειρο
Out[•]= 1500

In[•]:= Var = μ2 - μ^2 // N
                        α
Out[•]= 40.

In[•]:= F[x_] := Integrate[f[y], {y, 0, x}]
                 αόριστο ολοκλήρωμα

In[•]:= F[x]
```

$$\text{Out}[\cdot]= 1-\frac{e^{-x/4}}{3}-\frac{2\,e^{-x/7}}{3}$$

```
In[•]:= TailOfF[x_] := 1 - F[x]

In[•]:= TailOfF[x]
```

$$\text{Out}[\cdot]= \frac{e^{-x/4}}{3}+\frac{2\,e^{-x/7}}{3}$$

```
In[]:= Fe[x_] := Integrate[TailOfF[y], {y, 0, x}, Assumptions → x > 0] / μ
                 αόριστο ολοκλήρωμα                      υποθέσεις

In[]:= Fe[x]
```

Out[]= $\frac{1}{9}\times\left(9-2\,e^{-x/4}-7\,e^{-x/7}\right)$

```
In[]:= TailOfFe[x_] := FullSimplify[1 - Fe[x]]
                       πλήρης απλοποίηση

In[]:= TailOfFe[x]
```

Out[]= $\frac{1}{9}\,e^{-x/4}\left(2+7\,e^{3x/28}\right)$

```
In[]:= M1[t_] := Integrate[Exp[x*t]*f[x], {x, 0, Infinity}]
                 αόριστο ολ···  εκθετική συνάρτηση  άπειρο

In[]:= M1[t_] := Integrate[Exp[x*t]*f[x], {x, 0, Infinity}, Assumptions → t < 1/7]
                 αόριστο ολ···  εκθετική συνάρτηση  άπειρο       υποθέσεις

In[]:= M1[t]
```

Out[]= $\frac{1-5\,t}{1-11\,t+28\,t^2}$

```
c = 15
l = 2
theta1 = (c/(l*μ)) - 1 // N
                         α

Out[]= 15

Out[]= 2

Out[]= 0.25

In[]:= P1 = Solve[M1[t] == 1 + (1 + theta1)*μ*t, t]
            λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[]= {{t → 0.}, {t → 0.0312972}, {t → 0.228227}}

In[]:= "Επιλέγουμε τη μικρότερη θετική τιμή ως λύση της εξίσωσης"

In[]:= R1 = 0.03129721675356088`

Out[]= 0.0312972

In[]:= fe[x_] := D[Fe[x], x]
                 μερική παράγωγο
```

Out[]= $0.111111\times\left(0.5\times 2.71828^{-0.25\,x}+2.71828^{-0.142857\,x}\right)$

```
In[]:= LaplaceH1[s_] := LaplaceTransform[1 - Fe[t], t, s]
                        λαπλασιανός μετασχηματισμός

LaplaceH1[s]
```

Out[]= $\frac{7}{9\times\left(\frac{1}{7}+s\right)}+\frac{2}{9\times\left(\frac{1}{4}+s\right)}$

```
In[]:= Laplacefe[s_] := LaplaceTransform[fe[t], t, s]
                        λαπλασιανός μετασχηματισμός

Laplacefe[s]
```

Out[]= $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\frac{1}{7}+s}+\frac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}+s\right)}\right)$

```
In[]:= LaplaceTransformPsi1[s] = LaplaceH1[s] / (1 + theta1 - Laplacefe[s])
```

Out[]= $\frac{\frac{7}{9\times\left(\frac{1}{7}+s\right)}+\frac{2}{9\times\left(\frac{1}{4}+s\right)}}{1.25+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{\frac{1}{7}+s}-\frac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}+s\right)}\right)}$

In[∘]:=
```
psi1[u_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi1[s], s, u]
```
αντίστροφος λαπλασιανός

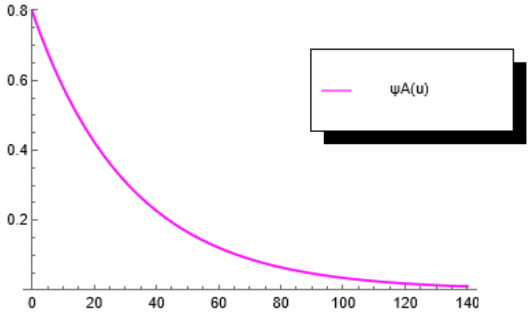
In[∘]:=
```
psi1[u]
```

Out[∘]= $0.00827146\, e^{-0.228227\, u} + 0.791729\, e^{-0.0312972\, u}$

In[∘]:=
```
Needs["PlotLegends`"]
```
υποχρεωτικά

In[∘]:=
```
Plot[psi1[u], {u, 0, 140}, PlotRange → {0, 0.8}, PlotLegend → {"ψA(u)"}, LegendPosition → {.2, .1},
 PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1]}]
```
διάγραμμα | εύρος διαγράμματος | στυλ διαγράμμ··· | μοντέλο RGB

Out[∘]=



In[∘]:=
```
"Χαρτοφυλάκιο Β"
```

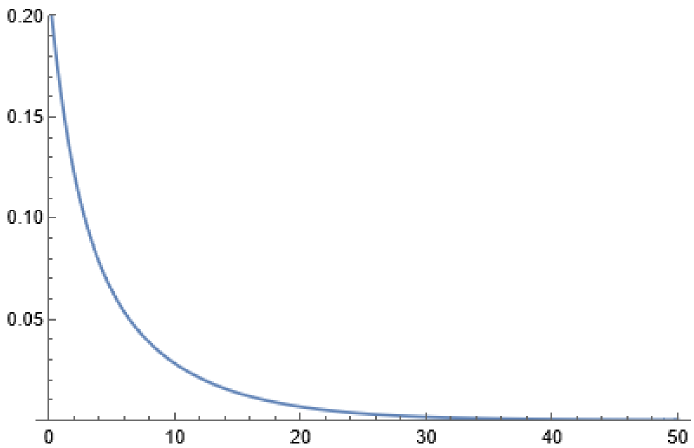
In[∘]:=
```
g[x_] := 1 / 10 * Exp[-x / 2] + (4 / 35) * Exp[-x / 7]
```
εκθετική συνάρτηση | εκθετική συνάρ

In[∘]:=
```
g[y]
```

Out[∘]= $\frac{e^{-y/2}}{10} + \frac{4\, e^{-y/7}}{35}$

In[∘]:=
```
Plot[{g[x]}, {x, 0, 50}, PlotRange → {0, 0.2}]
```
διάγραμμα | εύρος διαγράμματος

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Integrate[g[x], {x, 0, Infinity}]
```
αόριστο ολοκλήρωμα | άπειρο

Out[∘]= 1

In[•]:=
```
μ' = Integrate[x*g[x], {x, 0, Infinity}]
```
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο

Out[•]= 6

In[•]:=
```
μ' = Integrate[x*g[x], {x, 0, Infinity}] // N
```
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο α

Out[•]= 6.

In[•]:=
```
μ2' = Integrate[(x^2)*g[x], {x, 0, Infinity}]
```
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο

Out[•]= 80

In[•]:=
```
μ3' = Integrate[(x^3)*g[x], {x, 0, Infinity}]
```
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο

Out[•]= 1656

In[•]:=
```
Var = μ2' - μ'^2
```

Out[•]= 44.

In[•]:=
```
G[x_] := Integrate[g[y], {y, 0, x}]
```
αόριστο ολοκλήρωμα

In[•]:=
```
G[y]
```

Out[•]= $1-\frac{e^{-y/2}}{5}-\frac{4\,e^{-y/7}}{5}$

In[•]:=
```
TailOfG[x_] := 1 - G[x]
```

In[•]:=
```
TailOfG[x]
```

Out[•]= $\frac{e^{-x/2}}{5}+\frac{4\,e^{-x/7}}{5}$

In[•]:=
```
Ge[x_] := Integrate[TailOfG[y], {y, 0, x}, Assumptions → x > 0] / μ'
Ge[x]
```
αόριστο ολοκλήρωμα υποθέσεις

Out[•]= $0.166667\times\left(6-\frac{2\,e^{-x/2}}{5}-\frac{28\,e^{-x/7}}{5}\right)$

In[•]:=
```
TailOfGe[x_] := FullSimplify[1 - Ge[x]]
```
πλήρης απλοποίηση

In[•]:=
```
TailOfGe[x]
```

Out[•]= $e^{-x/2}\left(0.0666667+0.933333\,e^{5x/14}\right)$

In[•]:=
```
M2[t_] := Integrate[Exp[y*t]*g[y], {y, 0, Infinity}]
```
αόριστο ολ⋯ εκθετική συνάρτηση άπειρο

In[•]:=
```
M2[t]
```

Out[•]= $\boxed{\frac{1-3t}{1+t(-9+14t)} \quad \text{if } \mathrm{Re}[t]<\frac{1}{7}}$

In[•]:=
```
M2[t_] := Integrate[Exp[y*t]*g[y], {y, 0, Infinity}, Assumptions → t < 1/7]
```
αόριστο ολ⋯ εκθετική συνάρτηση άπειρο υποθέσεις

In[•]:=
```
M2[t]
```

Out[•]= $\frac{1-3t}{1-9t+14t^2}$

```
In[•]:=
theta2 = (c / (l * μ')) - 1
Out[•]= 0.25

In[•]:= P2 = Solve[M2[t] == 1 + (1 + theta2) * μ' * t, t]
        λύση εξισώσεων και ανισώσεων
Out[•]= {{t → 0.}, {t → 0.0297777}, {t → 0.479746}}

In[•]:= R2 = 1.5743526898033051`
Out[•]= 1.57435

In[•]:= psi[0] = 1 / (1 + theta2) // N
                                     α
Out[•]= 0.8

In[•]:= ge[x_] := D[Ge[x], x]
                 μερική παράγωγο
In[•]:= ge[x]
```

$$\text{Out}[\circ]= 0.166667\left(\frac{e^{-x/2}}{5}+\frac{4\,e^{-x/7}}{5}\right)$$

```
In[•]:= LaplaceH2[s_] := LaplaceTransform[1 - Ge[t], t, s]
                         λαπλασιανός μετασχηματισμός
        LaplaceH2[s]
```

$$\text{Out}[\circ]= 0.+\frac{0.933333}{\frac{1}{7}+s}+\frac{0.0666667}{\frac{1}{2}+s}$$

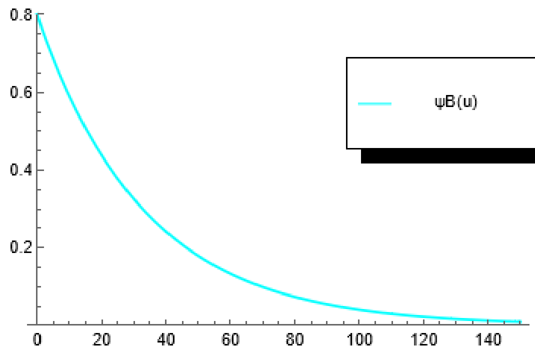
```
In[•]:= Laplacege[s_] := LaplaceTransform[ge[t], t, s]
                         λαπλασιανός μετασχηματισμός
        Laplacege[s]
```

$$\text{Out}[\circ]= 0.166667\left(\frac{4}{5\times\left(\frac{1}{7}+s\right)}+\frac{1}{5\times\left(\frac{1}{2}+s\right)}\right)$$

```
In[•]:= LaplaceTransformPsi2[s] = LaplaceH2[s] / (1 + theta2 - Laplacege[s])
```

$$\text{Out}[\circ]= \frac{0.+\frac{0.933333}{\frac{1}{7}+s}+\frac{0.0666667}{\frac{1}{2}+s}}{1.25-0.166667\left(\frac{4}{5\times\left(\frac{1}{7}+s\right)}+\frac{1}{5\times\left(\frac{1}{2}+s\right)}\right)}$$

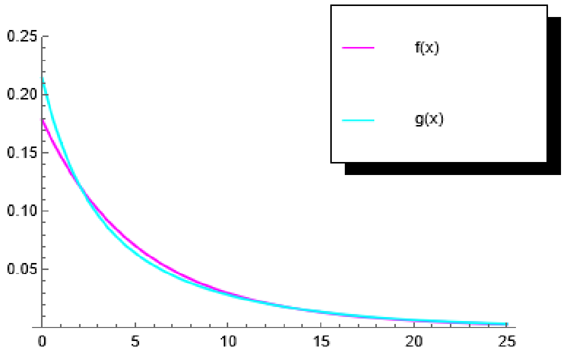
```
In[•]:= psi2[u_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi2[s], s, u]
                    αντίστροφος λαπλασιανός
In[•]:= Plot[psi2[u], {u, 0, 150}, PlotRange → {0, .8}, PlotLegend → {"ψB(u)"}, LegendPosition → {.2, .1},
        διάγραμμα                  εύρος διαγράμματος
         PlotStyle → {RGBColor[0, 1, 1]}]
         στυλ διαγράμμ···  μοντέλο RGB
Out[•]=
```



In[•]:= "Γραφικές παραστάσεις για σύγκριση των δυο χαρτοφυλακίων"

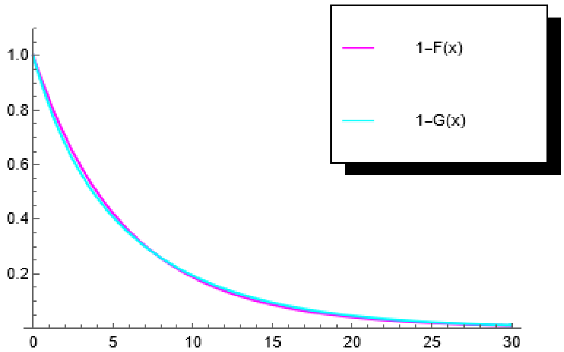
In[•]:=
```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 25}, PlotRange → {0, .25}, PlotLegend → {"f(x)", "g(x)"},
διάγραμμα                      εύρος διαγράμματος
  LegendPosition → {.2, .1}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], RGBColor[0, 1, 1]}]
                             στυλ διαγράμμ···  μοντέλο RGB          μοντέλο RGB
```

Out[•]=



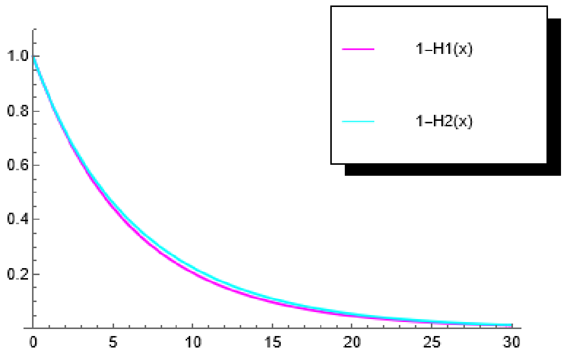
In[•]:=
```
Plot[{TailOfF[x], TailOfG[x]}, {x, 0, 30}, PlotRange → {0, 1.1}, PlotLegend → {"1-F(x)", "1-G(x)"},
διάγραμμα                                  εύρος διαγράμματος
  LegendPosition → {.2, .1}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], RGBColor[0, 1, 1]}]
                             στυλ διαγράμμ···  μοντέλο RGB          μοντέλο RGB
```

Out[•]=



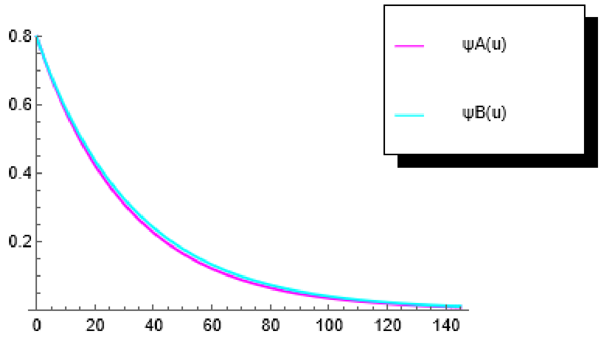
In[•]:=
```
Plot[{TailOfFe[x], TailOfGe[x]}, {x, 0, 30}, PlotRange → {0, 1.1}, PlotLegend → {"1-H1(x)", "1-H2(x)"},
διάγραμμα                                    εύρος διαγράμματος
  LegendPosition → {.2, .1}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], RGBColor[0, 1, 1]}]
                             στυλ διαγράμμ···  μοντέλο RGB          μοντέλο RGB
```

Out[•]=



In[∘]:=
```
Plot[{psi1[u], psi2[u]}, {u, 0, 145}, PlotRange → {0, 0.8}, PlotLegend → {"ψA(u)", "ψB(u)"},
διάγραμμα                              εύρος διαγράμματος
 LegendPosition → {.5, .1}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], RGBColor[0, 1, 1]}]
                            στυλ διαγράμμ···  μοντέλο RGB        μοντέλο RGB
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
PLA[t_] := Integrate[psi1[u], {u, t, Infinity}]
           αόριστο ολοκλήρωμα              άπειρο
```

In[∘]:=
```
PLA[t]
```

Out[∘]= $0.0362423\, e^{-0.228227\, t} + 25.2971\, e^{-0.0312972\, t}$

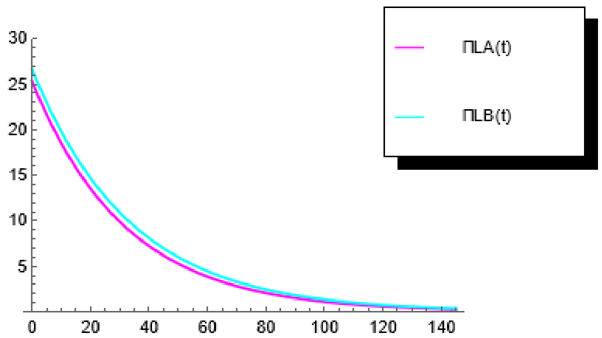
In[∘]:=
```
PLB[t_] := Integrate[psi2[u], {u, t, Infinity}]
           αόριστο ολοκλήρωμα              άπειρο
```

In[∘]:=
```
PLB[t]
```

Out[∘]= $0.0131771\, e^{-0.479746\, t} + 26.6535\, e^{-0.0297777\, t}$

In[∘]:=
```
Plot[{PLA[t], PLB[t]}, {t, 0, 145}, PlotRange → {0, 30}, PlotLegend → {"ΠLA(t)", "ΠLB(t)"},
διάγραμμα                            εύρος διαγράμματος
 LegendPosition → {.5, .1}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], RGBColor[0, 1, 1]}]
                            στυλ διαγράμμ···  μοντέλο RGB        μοντέλο RGB
```

Out[∘]=



Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

1. Κούτρας Μ., 2005, *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές,* μέρος Ι, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

2. Πιτσέλης Γ., 2018, *Κατανομές Μ.Π.Λ.ΟΥ.Ζ. (Μακριές, Παχιές, ή Λεπτές Ουρές Ζημιοκατανομών),* Εκδόσεις Παπαζήση.

3. Πολίτης Κ., 2012, *Εισαγωγή στην Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας,* Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

4. Πολίτης Κ., 2018*, Σημειώσεις Π.Μ.Σ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου»*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

5. Χατζηκωνσταντινίδης Ε., 2018*, Σημειώσεις Π.Μ.Σ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνου»*, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξενόγλωσση

6. M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts and R. Kaas, 2005, *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models,* John Wiley and Sons, Ltd.

7. M. Shaked, J.G Shanthikumar, 2007, *Stochastic Orders (Second edition)*, Springer New York.