



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**«ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ
ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LARLACE»**

Πιστέντη Μαριλένα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική
Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,

Οκτώβριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Επίκουρος Καθηγητής Πιτσέλης Γεώργιος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE

AND RISK MANAGEMENT

**«STOCHASTIC ORDERS BASED ON THE MOMENT
GENERATING FUNCTION AND THE LAPLACE TRANSFORM»**

Pistenti Marilena

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the
University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the
degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus,

October 2021

This thesis was approved unanimously by the three-member Commission of Inquiry appointed by the department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No..... Meeting in accordance with the laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management

Committee members were:

- Associate Professor Politis Konstantinos (Supervisor)
- Assistant Professor Pitselis Georgios
- Associate Professor Psarrakos Georgios

The approval of the thesis by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus does not imply acceptance of the opinions of the author.

*Στους γονείς μου,
Γιώργο και Άντρη
και στον αδελφό μου,
Αντρέα*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Πολίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, για την αμέριστη βοήθεια και καθοδήγηση του σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος, κ. Γεώργιο Πιτσέλη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Γεώργιο Ψαρράκο για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συμπαράσταση και υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών αλλά και της ζωής μου γενικότερα.

Περίληψη

Ένας από τους βασικούς στόχους των αναλογιστών είναι, συγκρίνοντας κάποιες τυχαίες καταστάσεις, να επιλέξουν αυτή με το λιγότερο ρίσκο. Οι συγκρίσεις αυτές βασίζονται κυρίως στη σύγκριση των μέσων τιμών ή και διακυμάνσεων τους, που όμως σε ορισμένες περιπτώσεις δεν είναι πολύ βοηθητικές. Έτσι, αναπτύχθηκε η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων, η οποία εξασφαλίζει μια πιο λεπτομερή και ακριβή σύγκριση.

Δύο από τα είδη στοχαστικών διατάξεων με ευρεία χρήση στην Αναλογιστική Επιστήμη τα τελευταία χρόνια, είναι η διάταξη της Ροπογεννήτριας και του Μετασχηματισμού Laplace. Στην πρώτη περίπτωση είναι απαραίτητη η ύπαρξη της ροπογεννήτριας για τις μεταβλητές που εξετάζουμε, ενώ στη δεύτερη περίπτωση όχι.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιαστούν και να μελετηθούν οι ιδιότητες των δύο αυτών διατάξεων, καθώς και να εξεταστεί η σχέση τους με άλλα είδη στοχαστικών διατάξεων. Επίσης, στόχος είναι να γίνουν εφαρμογές σε ορισμένες κατανομές όπου θα πραγματοποιηθούν συγκρίσεις σε Μετασχηματισμούς Laplace και Ροπογεννήτριες και κατ' επέκταση στη θεωρία συλλογικού κινδύνου.

Στο κεφάλαιο 1, γίνεται μια εισαγωγή στη ροπογεννήτρια και το μετασχηματισμό Laplace. Παρουσιάζεται η θεωρία τους, αναφέρονται οι ιδιότητες τους και πραγματοποιούνται ορισμένες εφαρμογές σε συνεχείς και διακριτές κατανομές. Τέλος, περιγράφεται η σχέση ανάμεσα στη ροπογεννήτρια και το μετασχηματισμό Laplace και παρουσιάζονται οι ομοιότητες και οι διαφορές τους.

Στο κεφάλαιο 2, πραγματοποιείται μια εισαγωγή στις στοχαστικές διατάξεις. Αρχικά, δίνεται ο ορισμός των μερικών διατάξεων, καθώς οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν ειδική περίπτωση αυτών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται διάφορα είδη στοχαστικών διατάξεων. Συγκεκριμένα, δίνονται οι ορισμοί και οι ιδιότητες της συνήθους στοχαστικής διάταξης, των διατάξεων παχιάς ουράς, λόγου πιθανοφάνειας, κυρτότητας, ανακοπής ζημιάς και βαθμίδας κινδύνου. Τέλος, παρουσιάζονται οι σχέσεις μεταξύ τους.

Στο κεφάλαιο 3, ορίζονται οι διατάξεις της Ροπογεννήτριας και του Μετασχηματισμού Laplace, ώστε να είναι εφικτό στη συνέχεια να γίνουν συγκρίσεις των δύο αυτών διατάξεων σε μεταβλητές από την ίδια αλλά και από διαφορετική οικογένεια κατανομών. Εξετάζονται οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η μία συνάρτηση είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τις διατάξεις αυτές και μέσα από εφαρμογές, πραγματοποιείται θεωρητική αλλά και πρακτική απόδειξη με ένα διάγραμμα για την κάθε σύγκριση. Επίσης, ορίζεται η διάταξη κατά ροπές και παρουσιάζεται η σχέση που έχει με τις διατάξεις Ροπογεννήτριας και Μετασχηματισμού Laplace.

Στο κεφάλαιο 4, ορίζεται το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και εστιάζοντας στη διάταξη της Ροπογεννήτριας και του Μετασχηματισμού Laplace, εξετάζεται το εξής ερώτημα: Το γεγονός ότι οι ατομικές ζημιές ενός χαρτοφυλακίου είναι μικρότερες από τις ατομικές ζημιές κάποιου άλλου ως προς αυτές τις διατάξεις, συνεπάγεται το γεγονός ότι το ένα χαρτοφυλάκιο θα είναι συνολικά λιγότερο ριψοκίνδυνο από το

άλλο; Το ερώτημα αυτό βρίσκει απάντηση μέσα από ένα θεωρητικό αποτέλεσμα, καθώς και μια εφαρμογή στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου.

Abstract

One of the main goals of actuaries is, by comparing some random situations, to choose the one with the least risk. These comparisons are mainly based on the comparison of their means and variances, which in some cases are not very helpful. Thus, the theory of stochastic orders was developed, which provides a more detailed and accurate comparison.

Two of the most widely used types of stochastic orders in Actuarial Science in recent years are the Moment Generating Function (MGF) Order and the Laplace Transform Order. In the former, the existence of MGF is necessary for the variables we are comparing, while in the latter it is not.

The purpose of this dissertation is to present and study the properties of these two orders, as well as to examine their relationship with other types of stochastic orders. Further, the aim is to make applications in certain distributions, where comparisons will be made in Laplace Transforms and Moment Generating Functions and consequently in the Collective Risk Model.

In Chapter 1, the Moment Generating Function and the Laplace Transform are introduced. Their theory and properties are presented and certain applications in continuous and discrete distributions are made. Finally, the relationship between the MGF and the Laplace Transform is described, and their similarities and differences presented.

In Chapter 2, the Stochastic Orders are introduced. At first, the definition of the Partial Orders is presented, as the Stochastic Orders form a special case of them. Subsequently, some Stochastic Orders are presented, together with their definitions and properties. Amongst them are the Usual Stochastic Order, the Thicker Tailed Order, the Likelihood Ratio Order, the Convex Order, the Stop Loss Order and the Hazard Rate Order. Then the relations between them are outlined.

In Chapter 3, the MGF and the Laplace Transform Order are defined, so that it can be possible to then make some comparisons in those orders in variables of the same but also of a different family of distributions. The conditions under which one function is greater than the other according to these orders are also examined and through some applications a theoretical and practical proof with a diagram for each of the comparisons is devised. Lastly, the Moment Order is defined and its relationship between the MGF and Laplace Transform Order presented.

Chapter 4 defines the collective risk model. Focusing on the MGF and the Laplace Transform Order, the following question is posed: Does the fact that the individual losses of one portfolio are less than the individual losses of another in terms of these orders, entail that one portfolio will be less risky than the other overall? This question is answered through a theoretical result, as well as an application to the collective model of risk theory.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	8
Abstract	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή στη Ροπογεννήτρια και το Μετασχηματισμό Laplace	14
1.1 Εισαγωγή	14
1.2 Ροπογεννήτρια	14
1.2.1 Ιδιότητες Ροπογεννήτριας.....	14
1.2.2 Παραδείγματα-Εφαρμογές Ροπογεννήτριας	18
1.3 Μετασχηματισμός Laplace	24
1.3.1 Παρατηρήσεις-Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace.....	25
1.3.2 Παραδείγματα Μετασχηματισμού Laplace	27
1.4 Σχέση ανάμεσα στη Ροπογεννήτρια και το Μετασχηματισμό Laplace	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Στοχαστικές Διατάξεις.....	32
2.1 Εισαγωγή	32
2.2 Μερική Διάταξη.....	33
2.3 Ορισμοί και Ιδιότητες Ορισμένων Στοχαστικών Διατάξεων	33
2.3.1 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη (Usual Stochastic Order)	33
2.3.2 Διατάξεις Παχιάς Ουράς (Thicker Tailed Orders).....	36
2.3.3 Διατάξεις Λόγου Πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio Orders).....	38
2.3.4 Διατάξεις Κυρτότητας (Convex Orders).....	40
2.3.5 Διατάξεις Ανακοπής Ζημιάς (Stop Loss Orders).....	41
2.3.6 Διατάξεις Βαθμίδας Κινδύνου (Hazard Rate Orders).....	44
2.3.7 Σχέσεις Μεταξύ Στοχαστικών Διατάξεων.....	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Εφαρμογές και Συγκρίσεις Μετασχηματισμών Laplace και Ροπογεννητριών .	48
3.1 Εισαγωγή	48
3.2 Διάταξη Μετασχηματισμού Laplace και Ροπογεννήτριας.....	48
3.3 Διάταξη Κατά Ροπές	49
3.4 Εφαρμογή σε Δύο Εκθετικές Κατανομές.....	50
3.5 Εφαρμογή σε Δύο Γάμμα Κατανομές.....	57
3.6 Εφαρμογή σε Σύγκριση Μείξης Εκθετικών με Εκθετική	66
3.7 Εφαρμογή σε Δύο Μείξεις Εκθετικών	75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου	84
4.1 Εισαγωγή	84
4.2 Μοντέλο Συλλογικού Κινδύνου.....	85
4.3 Εφαρμογή στο Συλλογικό Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου	87
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	96

Ξένη	96
Ελληνική	96
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	97
Εντολές Mathematica.....	97

Κατάλογος Γραφικών Παραστάσεων

Γραφική Παράσταση 1.3.2.1 - Μετασχηματισμός Laplace Εκθετικής κατανομής.....	28
Γραφική Παράσταση 1.3.2.2 - Μετασχηματισμός Laplace Γάμμα κατανομής.....	29
Γραφική Παράσταση 1.3.2.3 - Μετασχηματισμός Laplace Διακριτής Ομοιόμορφης κατανομής.....	30
Γραφική Παράσταση 2.3.6.1 - Συνάρτηση Βαθμίδας Κινδύνου τ.μ. $X \sim U(a,b)$	46
Γραφική Παράσταση 3.4.1 - Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Exp}(3)$, $Y \sim \text{Exp}(7)$	53
Γραφική Παράσταση 3.4.2 - Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Exp}(3)$, $Y \sim \text{Exp}(7)$	56
Γραφική Παράσταση 3.5.1 - Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(5,2)$, $Y \sim \text{Gamma}(8,2)$	59
Γραφική Παράσταση 3.5.2 - Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(6,10)$, $Y \sim \text{Gamma}(6,15)$	61
Γραφική Παράσταση 3.5.3 - Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(3,2)$, $Y \sim \text{Gamma}(4,2)$	64
Γραφική Παράσταση 3.5.4 - Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(6,10)$, $Y \sim \text{Gamma}(6,15)$	66
Γραφική Παράσταση 3.6.1 - Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Εκθετική}$, $Y \sim \text{Μείξη εκθετικών}$	73
Γραφική Παράσταση 3.6.2 - Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Εκθετική}$, $Y \sim \text{Μείξη εκθετικών}$	75
Γραφική Παράσταση 3.7.1 - Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Μείξη εκθετικών}$ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$, $Y \sim \text{Μείξη εκθετικών}$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$	81
Γραφική Παράσταση 3.7.2 - Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Μείξη εκθετικών}$ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$, $Y \sim \text{Μείξη εκθετικών}$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$	83
Γραφική Παράσταση 4.3.1 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Εκθετική}$, $Y \sim \text{Μείξη εκθετικών}$	90
Γραφική Παράσταση 4.3.2 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $S_X \sim \text{Εκθετική}$, $S_Y \sim \text{Μείξη εκθετικών}$	94

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή στη Ροπογεννήτρια και το Μετασχηματισμό Laplace

1.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, οι στοχαστικές διατάξεις διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο σε διάφορους κλάδους επιστημών. Η θεωρία τους αποτελεί βασικό εργαλείο στην προσέγγιση προβλημάτων και καταλυτικό παράγοντα σε αποφάσεις που πρέπει να παρθούν.

Υπάρχουν πάρα πολλά είδη στοχαστικών διατάξεων, τουλάχιστον 10-15 αυτή τη στιγμή. Εμείς θα επικεντρωθούμε σε δύο: τη ροπογεννήτρια και το μετασχηματισμό Laplace. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποια γενικά πράγματα για τη ροπογεννήτρια και το μετασχηματισμό Laplace, τόσο θεωρητικά όσο και με συγκεκριμένα παραδείγματα.

1.2 Ροπογεννήτρια

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με $M_X(t)$ και ορίζεται ως

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Η τ.μ. X μπορεί να είναι είτε διακριτή είτε συνεχής. Αν είναι διακριτή, η ροπογεννήτρια ορίζεται ως

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$$

Ενώ αν είναι συνεχής, η ροπογεννήτρια ορίζεται ως

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

(Πιτσέλης, 2018)

1.2.1 Ιδιότητες Ροπογεννήτριας

α) Ισχύει πάντα ότι $M_X(0) = 1$, αφού για $t = 0$ έχουμε

$$M_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$$

π.χ.:

$$M_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{0x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

β) Από την πιο πάνω ιδιότητα προκύπτει ότι $0 < M_X(t) < 1$, $t < 0$
 και $1 \leq M_X(t) \leq \infty$, $t \geq 0$

γ) Η ροπογεννήτρια μπορεί και να απειρίζεται. Όλες οι τ.μ. που ακολουθούν κατανομές με μακριές (βαριές) ουρές, δεν έχουν ροπογεννήτριες.

π.χ. η Λογαριθμοκανονική κατανομή έχει βαριά δεξιά ουρά και η ροπογεννήτρια απειρίζεται $\forall t > 0$.

δ) Οι ροπές της τ.μ. X μπορούν να υπολογιστούν αν πάρουμε διαδοχικές παραγώγους της ροπογεννήτριας $M_X(t)$:

1^η ροπή:

$$\left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X)$$

2^η ροπή:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X^2)$$

Γενικά, r -ροπή:

$$\left. \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X^r)$$

Από αυτή την ιδιότητα καταλαβαίνουμε και την ονομασία της ροπογεννήτριας, αφού από αυτή “γεννιούνται” οι ροπές κάθε τάξης για αντίστοιχες κατανομές.

ε) Αντίστροφα, γνωρίζοντας όλες τις ροπές μιας κατανομής, μπορεί να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια ως εξής:

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E(X^r)}{r!} t^r$$

στ) Η μέση τιμή και η διασπορά, σε σχέση με τη ροπογεννήτρια, υπολογίζονται αντίστοιχα ως εξής:

$$\left. \frac{d}{dt} \ln [M_X(t)] \right|_{t=0} = \left. \frac{\frac{d}{dt} M_X(t)}{M_X(t)} \right|_{t=0} = E(X)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \ln[M_X(t)] \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{\frac{d}{dt} M_X(t)}{M_X(t)} \right|_{t=0} = \left. \frac{\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) - \frac{d}{dt} M_X(t) \frac{d}{dt} M_X(t)}{(M_X(t))^2} \right|_{t=0} \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \text{Var}(X) \end{aligned}$$

ζ) Η ροπογεννήτρια χαρακτηρίζει μια κατανομή. Όταν έχουμε δύο ροπογεννήτριες που συμπίπτουν σε ένα διάστημα που περιλαμβάνει το μηδέν, τότε και οι αντίστοιχες κατανομές συμπίπτουν. Συγκεκριμένα:

Αν $M_X(t)$, $M_Y(t)$ ροπογεννήτριες με τ.μ. X, Y αντίστοιχα και

$M_X(t) = M_Y(t) \forall t \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για τον μετασχηματισμό Laplace αλλά θα τη δούμε αναλυτικά στην πορεία.

η) Αν X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τ.μ. με αντίστοιχες ροπογεννήτριες $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$ τότε η ροπογεννήτρια αθροίσματος $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ υπολογίζεται ως εξής:

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

δηλαδή η ροπογεννήτρια του αθροίσματος για ανεξάρτητες τ.μ. είναι το γινόμενο των ροπογεννητριών.

Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη αθροισμάτων ανεξάρτητων τ.μ. και με βάση αυτή μπορεί να γίνει υπολογισμός της ροπογεννήτριας κατανομών αν η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει γραφτεί ως άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.

Έτσι, μπορούμε να βρούμε αμέσως τη ροπογεννήτρια στη Διωνυμική Κατανομή, η οποία γράφεται σαν άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ.:

Έστω $X \sim b(n, p)$. Τότε $X := \sum_{i=1}^n X_i$, όπου $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Bernoulli είναι $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$, $0 < p < 1$ και η ροπογεννήτρια της υπολογίζεται εύκολα:

$$M_{X_i}(t) = E(e^{tx}) = e^{t \cdot 1} p + e^{t \cdot 0} (1-p) = pe^t + (1-p) = pe^t + q$$

κάνοντας χρήση του

$$p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$$

Από την ιδιότητα (η) προκύπτει $M_X(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$, όπου $M_{X_i}(t) = pe^t + q$ όπως δείξαμε πιο πάνω.

Τελικά,

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^n (pe^t + q) = (pe^t + q)^n$$

θ) Εκτός από τη μελέτη κατανομής αθροίσματος τ.μ., οι ροπογεννήτριες χρησιμεύουν και στη μελέτη σύνθετων κατανομών.

Σύνθετη Κατανομή:

Έστω X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., και N διακριτή τ.μ. ανεξάρτητη από τις X_i .

Τότε η τ.μ. που ορίζεται ως

$$S := \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N = 1, 2, \dots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

είναι μια σύνθετη τ.μ. και η κατανομή της λέγεται σύνθετη κατανομή.

Το όνομα της σύνθετης κατανομής προέρχεται συνήθως από την κατανομή της τ.μ. N π.χ. για $N \sim Bi$, η κατανομή της S λέγεται σύνθετη διωνυμική.

Καταλήγουμε στην ακόλουθη ιδιότητα:

Έστω οι τ.μ. X_i, N, S , και $M_X(t), M_N(t), M_S(t)$ οι ροπογεννήτριες τους αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

$$M_S(t) = M_N[\ln M_X(t)]$$

(Πολίτης, 2020)

1.2.2 Παραδείγματα-Εφαρμογές Ροπογεννήτριας

Ακολουθούν έξι παραδείγματα: τρία για συνεχή κατανομή και τρία για διακριτή αντίστοιχα:

1) ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = 4e^{-4x}$, $x > 0$

Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} 4e^{-4x} dx = 4 \int_0^{\infty} e^{-(4-t)x} dx \\ &= 4 \left[\frac{e^{-(4-t)x}}{-(4-t)} \right]_0^{\infty} = 4 \left[\frac{e^{-\infty}}{-(4-t)} + \frac{e^0}{4-t} \right] = 4 \left[0 + \frac{1}{4-t} \right] = \frac{4}{4-t}, t < 4 \end{aligned}$$

Η 1^η ροπή:

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{4}{(4-t)^2} \right|_{t=0} = \frac{4}{(4-0)^2} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$$

Η 2^η ροπή:

$$E(X^2) = \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{8}{(4-t)^3} \right|_{t=0} = \frac{8}{4^3} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

Τη διασπορά μπορούμε να τη βρούμε με δύο τρόπους.

Για τον 1^ο τρόπο χρειαζόμαστε το $\frac{d^2}{dt^2} \ln [M_X(t)]$, οπότε:

$$M_X(t) = \frac{4}{4-t}$$

$$\ln [M_X(t)] = \ln 4 - \ln(4-t),$$

$$\frac{d}{dt} \ln [M_X(t)] = 0 + \frac{1}{4-t} = \frac{1}{4-t} \text{ και } \frac{d^2}{dt^2} \ln [M_X(t)] = \frac{1}{(4-t)^2}$$

Συμπεπώς:

$$\text{Var}(X) = \frac{d^2}{dt^2} \ln [M_X(t)] \Big|_{t=0} = \frac{1}{(4-t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Ή απλούστερα με το 2^ο τρόπο:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

Γενικότερα, για μια τ.μ. X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0$$

ισχύουν:

$$E(X) = \frac{1}{\theta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}, \quad M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}, \quad t < \theta$$

2) ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$

Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{tx}}{(b-a)t} \Big|_a^b = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

Η 1^η ροπή:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Η 2^η ροπή:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

Η διασπορά:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3) ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0 \text{ και } \alpha, \beta > 0$$

ή εναλλακτικά

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, x > 0 \text{ και } \alpha, \beta > 0$$

Παρατηρούμε ότι αν στις πιο πάνω σχέσεις θέσουμε $\alpha = 1$ και $\beta = \theta$, θα πάρουμε την εκθετική σ.π.π.

$\Gamma(\alpha)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα που ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad x > 0, \quad \alpha > 0$$

Ισχύουν: $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!, \quad \alpha > 0, \quad \alpha: \text{ακέραιος}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα έτσι όπως την ορίσαμε με τη δεύτερη σχέση.

Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x(\frac{1}{\beta} - t)}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/(\frac{\beta}{1-t\beta})}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx = \frac{(\frac{\beta}{1-t\beta})^\alpha}{\beta^\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/(\frac{\beta}{1-t\beta})}}{(\frac{\beta}{1-t\beta})^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 1 αφού η σχέση εντός του ολοκληρώματος είναι η σ.π.π. της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους $(\alpha, \frac{\beta}{1-t\beta})$.

Η 1^η ροπή:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x^{(\alpha+1)-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\alpha \Gamma(\alpha) \beta}{\Gamma(\alpha)} = \alpha \beta \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 1, καθώς η σχέση εντός του ολοκληρώματος είναι η σ.π.π. της κατανομής Γάμμα με παραμέτρους $(\alpha+1, \beta)$.

Η 2^η ροπή:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x^{(\alpha+2)-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha+2)} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με τη μονάδα, αφού η σχέση εντός του ολοκληρώματος είναι η σ.π.π. της κατανομής Γάμμα η οποία έχει παραμέτρους $(\alpha+2, \beta)$.

Η διασπορά:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2 \end{aligned}$$

4) ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω η τ.μ. X η οποία δηλώνει το αποτέλεσμα ρίψης ενός ζαριού, με

$$P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_x e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=1}^6 e^{tx} \frac{1}{6} = \frac{e^t}{6} + \frac{e^{2t}}{6} + \dots + \frac{e^{6t}}{6} \\ &= \frac{e^t}{6} (1 + e^t + \dots + e^{5t}) = \frac{e^t}{6} \sum_{x=0}^5 e^{tx} = \frac{1}{6} e^t \left(\frac{e^{6t} - 1}{e^t - 1} \right) \end{aligned}$$

έχοντας υπόψιν ότι $\sum_{x=0}^{n-1} a^x = \frac{1-a^n}{1-a}$.

Η 1^η ροπή:

$$\begin{aligned} E(X) &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = 1 \frac{e^t}{6} + 2 \frac{e^{2t}}{6} + \dots + 6 \frac{e^{6t}}{6} \Big|_{t=0} = 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + \dots + 6 \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Η 2^η ροπή:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = 1 \frac{e^t}{6} + (2)(2) \frac{e^{2t}}{6} + \dots + (6)(6) \frac{e^{6t}}{6} \Big|_{t=0} \\ &= 1^2 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

Η διασπορά:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}$$

Γενικότερα, για μια τ.μ. X που ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = \frac{1}{k}$, $x = 1, 2, \dots, k$ ισχύουν:

$$E(X) = \frac{k+1}{2}, \quad Var(X) = \frac{k^2-1}{12}, \quad M_X(t) = \sum_x e^{tx} \frac{1}{k}$$

5) ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$ και $0 \leq p \leq 1$

Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} e^{tx} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$

που με βάση το διωνυμικό θεώρημα $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

αυτό είναι ίσο με $[pe^t + (1-p)]^n$.

Παρατήρηση: Έχουμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα για τη ροπογεννήτρια της Διωνυμικής Κατανομής με τον άλλο τρόπο υπολογισμού που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω όταν γράψαμε τη Διωνυμική Κατανομή σαν άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. (βλ. ιδιότητα (η)).

Η 1^η ροπή:

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = npe^t [pe^t + (1-p)]^{n-1} \Big|_{t=0} = np$$

Η 2^η ροπή:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} \\ &= npe^t [pe^t + (1-p)]^{n-1} + n(n-1)pe^t [pe^t + (1-p)]^{n-2} pe^t \Big|_{t=0} \\ &= np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Η διασπορά:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p)$$

6) ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Έστω η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$ και $\lambda > 0$

Η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

Από τη σχέση $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\alpha^x}{x!} = e^\alpha$, καταλήγουμε στο ότι το πιο πάνω ισούται με

$$e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Η 1^η ροπή:

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda$$

Η 2^η ροπή:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t + e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Η διασπορά:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

(Πιτσέλης, 2018)

1.3 Μετασχηματισμός Laplace

Η ροπογεννήτρια και ο μετασχηματισμός Laplace έχουν στενή σύνδεση, καθώς ο μετασχηματισμός Laplace είναι η επέκταση της σχέσης που ορίζει τη ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} dF(x), \quad t \geq 0$$

για $t < 0$.

Για το λόγο αυτό, αντί για t γράφουμε $-s$, όπου $s \geq 0$.

Ορισμός 1.3.1: Έστω F συνάρτηση κατανομής όπου $F(0^-) = 0$, δηλαδή F σ.κ μιας μεταβλητής που παίρνει μη αρνητικές τιμές. Ο μετασχηματισμός Laplace της F συμβολίζεται με \mathcal{L}_F και ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \quad \forall s \geq 0$$

Η σ.κ. F μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή:

Α) Όταν είναι συνεχής με πυκνότητα f , ή γενικότερα αν f ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f συμβολίζεται με $\hat{f}(s)$ και ορίζεται ως:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad s \geq 0$$

Β) Όταν είναι διακριτής τ.μ. X η οποία παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, ο μετασχηματισμός Laplace της F δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L}_F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} P(X = k)$$

(Πολίτης, 2020)

1.3.1 Παρατηρήσεις-Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

- 1) Για τ.μ. X με συνεχή σ.κ. F , από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace και της μέσης τιμής, ισχύει $\mathcal{L}_F(s) = E(e^{-sX})$ που θυμίζει την αντίστοιχη σχέση για τη ροπογεννήτρια.
- 2) Αν η F είναι κατανομή με πυκνότητα f , τότε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace και την περίπτωση (Α) προκύπτει ότι $\mathcal{L}_F(s) = \hat{f}(s), \forall s \geq 0$.
- 3) Παρόλο που στον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace θεωρήσαμε κατανομές με τιμές μόνο στον θετικό ημιάξονα $[0, +\infty]$, η ροπογεννήτρια και ο μετασχηματισμός Laplace ορίζονται και για κατανομές με τιμές σε όλο το $(-\infty, +\infty)$.
- 4) Ένα πλεονέκτημα του μετασχηματισμού Laplace σε σχέση με τη ροπογεννήτρια είναι ότι αυτός ορίζεται πάντα και είναι πεπερασμένος $\forall s \geq 0$, σε αντίθεση με τη ροπογεννήτρια που σε κάποιες περιπτώσεις απειρίζεται $\forall t \geq 0$ (π.χ Λογαριθμοκανονική, Pareto). Αυτό ισχύει αφού για $s \geq 0$ έχουμε $e^{-sx} \leq 1$, άρα

$$\mathcal{L}_F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \leq \int_0^{\infty} 1 dF(x) = 1$$

από το οποίο διαπιστώνουμε ότι το $\Pi.T$ του μετασχηματισμού Laplace βρίσκεται πάντα στο $[0,1]$.

- 5) Η στενή σχέση που συνδέει τον μετασχηματισμό Laplace με τη ροπογεννήτρια καθιστά τις γνωστές ιδιότητες τους από τις πιθανότητες κοινές. Η ιδιότητα της συνέλιξης δύο κατανομών είναι μία από αυτές:

Έστω F, G σ.κ. και $F * G$ η συνέλιξη τους έτσι ώστε

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(x-y)dG(y)$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης είναι ίσος με το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών Laplace των δύο κατανομών:

$$\mathcal{L}_{F*G}(s) = \mathcal{L}_F(s) \cdot \mathcal{L}_G(s) , \quad \forall s \geq 0$$

Αντίστοιχα, όταν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, +\infty)$ ισχύει ότι η συνέλιξη τους

$$h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$$

είναι και αυτή ολοκληρώσιμη στο $[0, +\infty)$. Ο μετασχηματισμός Laplace της h ικανοποιεί τη σχέση

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s) \text{ για } s \geq 0 .$$

Για συνελίξεις περισσότερων από δύο συναρτήσεων ισχύουν ανάλογες ιδιότητες:

Έστω F_1, F_2, \dots, F_n σ.κ. Τότε ισχύει $\mathcal{L}_{F_1 * F_2 * \dots * F_n}(s) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{F_i}(s)$

- 6) Μια πολύ σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace είναι ότι χαρακτηρίζει μια κατανομή. Αν για παράδειγμα έχουμε δύο σ.κ F και G στο $[0, +\infty)$ και ισχύει η σχέση

$$\mathcal{L}_F(s) = \mathcal{L}_G(s) , \quad \forall s \geq 0$$

τότε ισχύει και ότι $F = G$, δηλαδή οι δύο κατανομές ταυτίζονται.

Συνεπώς για τον υπολογισμό μιας κατανομής, αρκεί να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace της κατανομής και αντιστρέφοντας τον να βρούμε τη σ.κ. που θέλουμε.

- 7) Όπως και στη ροπογεννήτρια υπάρχουν σχέσεις συσχέτισης της με την 1^η και 2^η ροπή, έτσι και στο μετασχηματισμό Laplace, για την 1^η και 2^η παράγωγο του ισχύουν τα ακόλουθα:

$$E(X) = -\mathcal{L}'_F(0) \text{ και } E(X^2) = \mathcal{L}''_F(0)$$

για πεπερασμένες δύο πρώτες ροπές. Για ροπές ανώτερης τάξης ισχύουν ανάλογες σχέσεις.

- 8) Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί γραμμική συνάρτηση όταν έχουμε να κάνουμε με μείξεις κατανομών. Έστω η σ.κ F μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x), \quad 0 < a_i < 1 \text{ για } i = 1, 2, \\ a_1 + a_2 = 1 \text{ και } F_1, F_2 \text{ σ.κ}$$

Τότε ισχύει

$$\mathcal{L}_F(s) = a_1 \cdot \mathcal{L}_{F_1}(s) + a_2 \cdot \mathcal{L}_{F_2}(s), \quad s \geq 0$$

Για την περίπτωση που η F γράφεται σαν μείξη περισσότερων από δύο σ.κ. ισχύει αντίστοιχη σχέση.

(Πολίτης, 2020)

1.3.2 Παραδείγματα Μετασχηματισμού Laplace

Αφού είδαμε τη ροπογεννήτρια στην εκθετική κατανομή, θα δούμε τώρα πώς λειτουργεί ο μετασχηματισμός Laplace στην ίδια κατανομή.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ:

Η σ.π.π. της εκθετικής είναι $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$

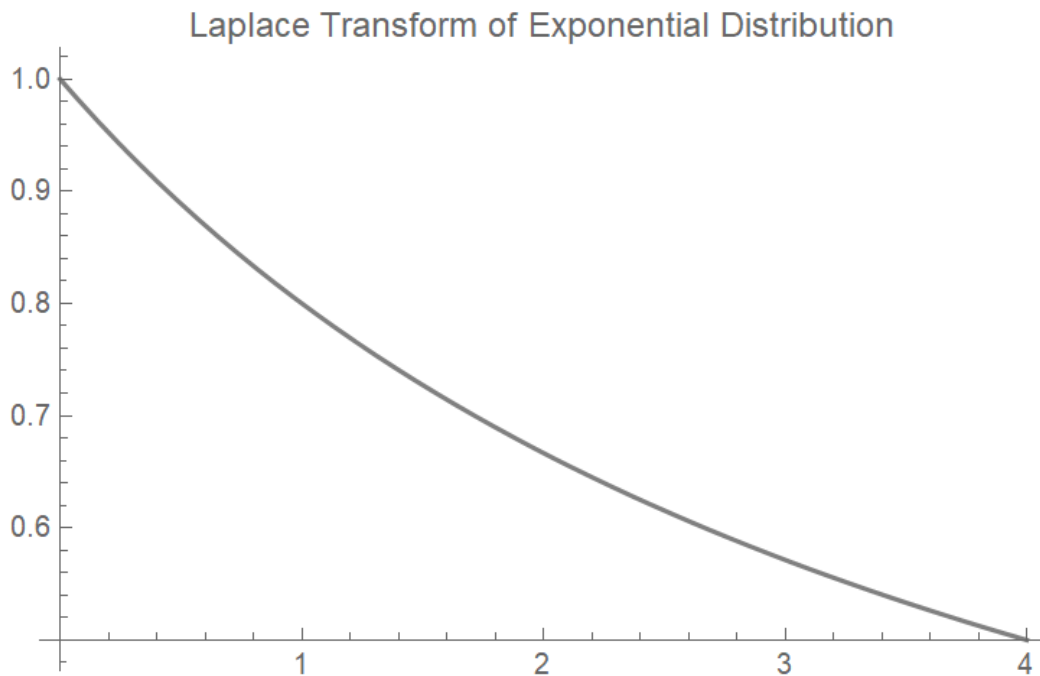
Η σ.κ. της είναι $F(x) = 1 - e^{-\theta x}$, $x \geq 0$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta x} e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} \theta e^{-x(\theta+s)} dx \\ &= \frac{\theta e^{-x(\theta+s)}}{-(\theta+s)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{\theta e^0}{-(\theta+s)} = \frac{\theta}{\theta+s}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s \geq 0$ άρα ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει για κάθε $s \geq 0$ σε αντίθεση με τη ροπογεννήτρια της εκθετικής που, όπως έχουμε δει πιο πάνω, είναι πεπερασμένη μόνο στο $[0, \theta)$. (Πολίτης, 2020)

Ένα ενδεικτικό διάγραμμα για το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής κατανομής είναι το ακόλουθο:



Γραφική Παράσταση 1.3.2.1 – Μετασχηματισμός Laplace Εκθετικής κατανομής

ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ:

Η σ.π.π. της Γάμμα(α, β) είναι $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}$, $x \geq 0$, $\alpha, \beta > 0$.

Όπως αναφέραμε, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$, $\alpha > 0$, α ακέραιος

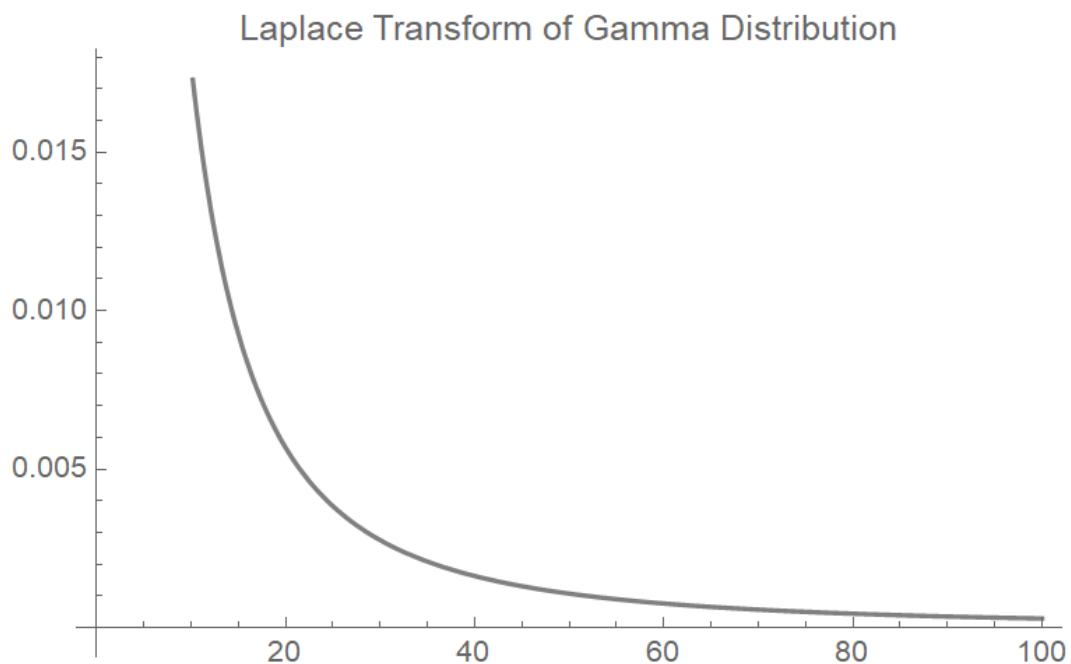
Έτσι, η σ.π.π. γίνεται $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{(\alpha-1)!}$. Αφού μιλάμε για Γάμμα κατανομή, είναι γνωστό ότι η σ.κ. F της Γάμμα είναι η συνέλιξη α εκθετικών σ.κ. που έχουν παράμετρο β .

Από τη σχέση $\mathcal{L}_{F_1 * F_2 * \dots * F_n}(s) = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_{F_i}(s)$ που αναφέραμε παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψιν το προηγούμενο παράδειγμα για την εκθετική κατανομή, καταλήγουμε στον ακόλουθο μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathcal{L}_F(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^\alpha, \quad \forall s \geq 0$$

(Πολίτης, 2020)

Ακολουθεί ενδεικτικό διάγραμμα για το μετασχηματισμό Laplace της κατανομής Γάμμα:



Γραφική Παράσταση 1.3.2.2 – Μετασχηματισμός Laplace Γάμμα κατανομής

Ας δούμε τώρα και ένα παράδειγμα μετασχηματισμού Laplace σε διακριτή κατανομή. Θα χρησιμοποιήσουμε τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή την οποία είδαμε και πιο πάνω σε σχέση με τη ροπογεννήτρια.

ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ:

Η συνάρτηση πυκνότητας της διακριτής ομοιόμορφης κατανομής είναι

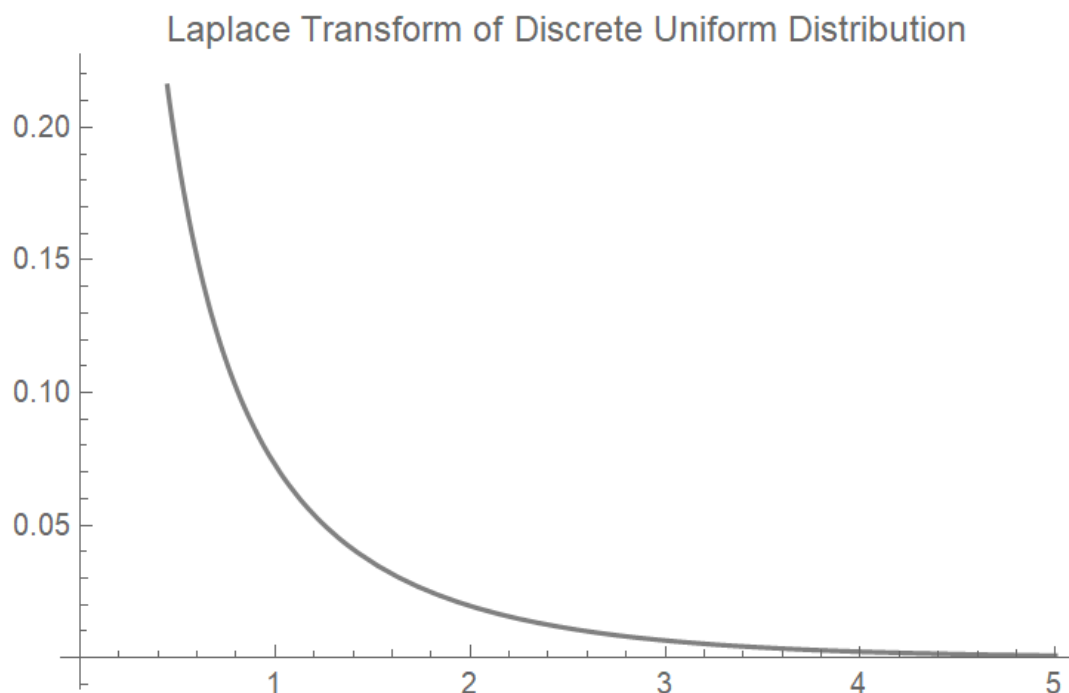
$$f(x) = \frac{1}{k}, x = 1, 2, \dots, k$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-sk} \frac{1}{k} = \frac{e^{-s}}{k} + \frac{e^{-2s}}{k} \dots + \frac{e^{-ks}}{k} \\ &= \frac{e^{-s}}{k} (1 + e^{-s} + \dots + e^{-(k-1)s}) = \frac{e^{-s}}{k} \sum_{k=0}^{k-1} e^{-sk} \\ &= \frac{e^{-s}}{k} \left(\frac{1 - e^{-sk}}{1 - e^{-s}} \right)\end{aligned}$$

έχοντας υπόψιν ότι $\sum_{x=0}^{n-1} a^x = \frac{1-a^n}{1-a}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace στη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή έχει την εξής μορφή:



Γραφική Παράσταση 1.3.2.3 – Μετασχηματισμός Laplace Διακριτής Ομοιόμορφης κατανομής

1.4 Σχέση ανάμεσα στη Ροπογεννήτρια και το Μετασχηματισμό Laplace

Όπως έχουμε δει και παραπάνω, η ροπογεννήτρια και ο μετασχηματισμός Laplace έχουν στενή σύνδεση, αφού ο μετασχηματισμός Laplace είναι η επέκταση του ορισμού της ροπογεννήτριας. Η στενή σχέση που συνδέει τις δύο αυτές διατάξεις, καθιστά τις γνωστές ιδιότητες τους από τις πιθανότητες κοινές και πολλές σχέσεις που ισχύουν για το μετασχηματισμό Laplace θυμίζουν τις αντίστοιχες σχέσεις για τη ροπογεννήτρια.

Εκτός από τις πολλές ομοιότητες τους όμως, υπάρχουν και κάποιες σημαντικές διαφορές. Μία από αυτές είναι ότι ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται πάντα σε αντίθεση με τη ροπογεννήτρια που σε κάποιες περιπτώσεις απειρίζεται. Για να μπορώ να μιλάω για διάταξη ροπογεννήτριας θα πρέπει να υπάρχει ροπογεννήτρια. Συγκεκριμένα, η ροπογεννήτρια δεν ορίζεται για κατανομές που έχουν βαριά ουρά, ενώ ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να οριστεί για όλες τις κατανομές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Στοχαστικές Διατάξεις

2.1 Εισαγωγή

Ένας από τους κύριους στόχους των αναλογιστών είναι η σύγκριση τυχαίων ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, συγκρίνοντας την επικινδυνότητα τυχαίων καταστάσεων, είναι σε θέση να διαλέξουν αυτή που περιλαμβάνει το λιγότερο ρίσκο. Οι συγκρίσεις αυτές βασίζονται κυρίως στη σύγκριση ορισμένων μέτρων που σχετίζονται με αυτές τις τυχαίες ποσότητες. Για παράδειγμα, μια πολύ κοινή πρακτική σύγκρισης τ.μ. αφορά τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις τους. Συγκεκριμένα, επιλέγεται η τ.μ. με τη μικρότερη μέση τιμή και εάν οι μέσες τιμές συμπίπτουν, τότε επιλέγεται η τ.μ. με την μικρότερη διακύμανση.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι συγκρίσεις που βασίζονται μόνο σε δύο μεμονωμένα μέτρα δεν είναι πολύ βοηθητικές. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Έστω οι τ.μ. X και Y που ακολουθούν την κατανομή Weibull, με σ.κ $F(x) = 1 - e^{-x^4}$ και $G(x) = 1 - e^{-x^{-1/3}}$ για $x > 0$, αντίστοιχα.

Η σ.κ. της κατανομής Weibull έχει γενική μορφή $F(X) = 1 - e^{-\theta x^\gamma}$, $x > 0$ και η μέση τιμή της υπολογίζεται από $E(X) = \frac{\Gamma(\frac{1+\gamma}{\gamma})}{\theta^{1/\gamma}}$.

Για την πρώτη σ.κ. έχουμε $\theta = 1, \gamma = 4$ οπότε $E(X) = \frac{\Gamma(\frac{1+4}{4})}{1^{1/4}} = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$

Με χρήση του Mathematica, βρίσκουμε ότι $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = 0,9064$

Για τη δεύτερη σ.κ. έχουμε $\theta = 1, \gamma = \frac{1}{3}$ οπότε $E(Y) = \frac{\Gamma(3+1)}{1^3} = \Gamma(4) = (4-1)! = 3! = 6$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $E[X] = 0.9064 < E[Y] = 6$.

Έστω τώρα ότι οι τ.μ. X, Y υποδηλώνουν την τυχαία διάρκεια επιβίωσης των ασθενών στο πλαίσιο δύο θεραπειών. Τότε, αν εξετάσουμε μόνο τις μέσες τιμές, μπορούμε να πούμε ότι το X έχει λιγότερο αναμενόμενο χρόνο επιβίωσης από το Y .

Ωστόσο, εάν εξετάσουμε την πιθανότητα επιβίωσης για ένα καθορισμένο χρονικό σημείο $t \geq 0$ έχουμε ότι:

$$P[X > t] \geq P[Y > t], \forall t \in [0, 1] \text{ και } P[X > t] \leq P[Y > t], \forall t \in [1, +\infty)$$

Ως εκ τούτου, η σύγκριση των μέσων τιμών δεν διασφαλίζει ότι οι πιθανότητες επιβίωσης οποιαδήποτε χρονική στιγμή t διατάσσονται με την ίδια λογική. Η ανάγκη για λεπτομερέστερη σύγκριση δύο τυχαίων ποσοτήτων αποτέλεσε την προέλευση της θεωρίας των στοχαστικών διατάξεων που έχει αναπτυχθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια (Belzunce, 2010).

Για κάποιο τυχαίο κίνδυνο, όπου πρέπει να ληφθούν αποφάσεις με ρίσκο, η χρήση των στοχαστικών διατάξεων είναι αναγκαία. Οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν

σπουδαίο εργαλείο στη σύγκριση επικινδυνότητας μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων και μας οδηγούν σε χρήσιμες προσεγγιστικές τεχνικές υπολογισμού.

2.2 Μερική Διάταξη

Θα αναφερθούμε αρχικά στον ορισμό των μερικών διατάξεων, αφού οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν ειδική περίπτωση αυτών.

Μια διμελής σχέση $<$ σε ένα αυθαίρετο σύνολο S , ονομάζεται μερική διάταξη αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) Αντανακλαστικότητα : $x < x$, $\forall x \in S$
- ii) Μεταβατικότητα : αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$
- iii) Αντισυμμετρία : αν $x < y$ και $y < x$, τότε $x = y$

Στην ειδική περίπτωση που το σύνολο S περιέχει τις σ.κ. των τ.μ. με πραγματικές τιμές, η μερική αυτή διάταξη ορίζεται ως στοχαστική διάταξη. (Goovaerts, et al, 1990)

2.3 Ορισμοί και Ιδιότητες Ορισμένων Στοχαστικών Διατάξεων

Όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή, η χρήση στοχαστικών διατάξεων προκύπτει όταν οι συγκρίσεις μεμονωμένων μέτρων δεν παρέχουν ικανοποιητικές πληροφορίες για εξαγωγή συμπερασμάτων. Για παράδειγμα, εάν η τ.μ. X υποδηλώνει την τυχαία διάρκεια ζωής ενός ζωντανού οργανισμού, μια ενδιαφέρουσα συνάρτηση σε αυτό το πλαίσιο είναι η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(t)$, δηλαδή η πιθανότητα επιβίωσης οποιουδήποτε καθορισμένου χρονικού σημείου $t \geq 0$. Η συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως: $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$. Αν έχουμε κι άλλη τ.μ. τυχαίας διάρκειας ζωής Y με συνάρτηση επιβίωσης \bar{G} τότε έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί εάν μία από τις δύο συναρτήσεις επιβίωσης βρίσκεται πάνω ή κάτω από την άλλη. Αυτή η βασική ιδέα χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της συνήθους (ή απλής) στοχαστικής διάταξης (Belzunce, 2010).

2.3.1 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη (Usual Stochastic Order)

Δίνονται δύο τ.μ. X και Y , με συναρτήσεις επιβίωσης \bar{F} και \bar{G} , αντίστοιχα. Λέμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη, δηλαδή $X \leq_{st} Y$, αν ισχύει:

$$\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t), \quad \forall t > 0$$

Σχόλιο: Σε πολλά βιβλία η διάταξη ορίζεται για όλα τα t , ενώ σε κάποια άλλα μόνο για θετικές τιμές του t . Εμείς στον αναλογισμό δεν χρησιμοποιούμε αρνητικές τιμές για το t γιατί συνήθως όλες οι μεταβλητές που εξετάζουμε είναι κάποιοι κίνδυνοι, οι οποίοι είναι μη αρνητικοί. Αυτοί οι κίνδυνοι μπορεί να είναι είτε ατομικές ζημιές, είτε χρόνος ζωής κάποιου κ.ο.κ. Άρα περιοριζόμαστε σε $t \geq 0$.

Είναι σαφές ότι πρόκειται για μερική διάταξη στο σύνολο των σ.κ. και είναι αντανakλαστική και μεταβατική. Επιπλέον, γνωρίζοντας ότι

$$\bar{F}(t) = \Pr(X > t) = 1 - F(t)$$

τότε η πιο πάνω σχέση είναι ισοδύναμη με

$$F(t) \geq G(t), \quad \forall t < 0$$

και

$$\Pr(X > t) \leq \Pr(Y > t), \quad \forall t > 0$$

Η συνήθης στοχαστική διάταξη, δε συγκρίνει τη μεταβλητότητα αλλά τη θέση των τ.μ. Ο ορισμός της, είναι ένας τρόπος διατύπωσης με αυστηρό τρόπο της ιδέας ότι η τ.μ. X είναι λιγότερο πιθανό από την Y να πάρει μεγάλες τιμές. Ωστόσο, δύο δοθείσες σ.κ., μπορούν να διασταυρωθούν και ένας από τους κύριους τομείς έρευνας στο πεδίο των στοχαστικών διατάξεων είναι να μελετηθεί κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί να διασφαλιστεί η στοχαστική διάταξη. Κατά την εξέταση δύο δειγμάτων, ένα πρώτο βήμα, είναι να γίνει το γράφημα των εμπειρικών συναρτήσεων επιβίωσης. Για τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n η εμπειρική συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως $\bar{F}_n(x) \equiv 1 - F_n(x)$.

Μια άλλη εναλλακτική είναι να γίνει το γράφημα της καμπύλης $(F(x), G(x))$, δηλαδή ενός *PP plot*, και εάν $X \leq_{st} Y$, τότε τα σημεία του *PP plot* θα πρέπει να βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο $x = y$ (Belzunce, 2010).

Για τη στοχαστική διάταξη $X \leq_{st} Y$ ισχύει ότι η μέση τιμή της τ.μ. X είναι μικρότερη από αυτήν της τ.μ. Y :

$$E(X) \leq E(Y)$$

Βέβαια, δεν ισχύει το αντίστροφο. Έχουμε λοιπόν:

$$X \leq_{st} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

αλλά

$$E(X) \leq E(Y) \not\Rightarrow X \leq_{st} Y$$

Ένα αντιπαράδειγμα είναι όταν η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Bernoulli(p) με $p = \frac{1}{2}$ και πιθανότητα $Pr[Y = k] = 1$, όπου k μια σταθερά ανάμεσα στο $\frac{1}{2}$ και το 1.

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στοχαστικά μεγαλύτεροι κίνδυνοι έχουν και μεγαλύτερη μέση τιμή. (Kaas et al, 2008)

Εάν τώρα $X \leq_{st} Y$ και $E(X) = E(Y)$ τότε οι τ.μ. X και Y ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός της στοχαστικής διάταξης είναι ο εξής:

Έστω δύο τ.μ. X και Y . Τότε $X \leq_{st} Y$ αν και μόνο αν

$$E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$$

όπου φ αύξουσα συνάρτηση.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η στοχαστική διάταξη σχετίζεται με ένα σημαντικό μέτρο στη θεωρία κινδύνου, το VaR , δηλαδή την αξία σε κίνδυνο. Η αξία σε κίνδυνο δηλώνει το πως η αξία στην αγορά ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων είναι πιθανόν να μειωθεί στη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

Έστω λοιπόν μια τ.μ. X με σ.κ F . Η αξία σε κίνδυνο στο σημείο $p \in (0,1)$ δίνεται από τη σχέση

$$VaR[X; p] \equiv F_X^{-1}(p)$$

δηλαδή το $VaR[X; p]$ είναι το $100p$ ποσοστημόριο της κατανομής κινδύνου της X .

Όσον αφορά το VaR έχουμε ότι

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow VaR[X; p] \leq VaR[Y; p], \quad \forall p \in [0,1]$$

Σχετικά με το διάγραμμα των σημείων $(VaR[X; p], VaR[Y; p])$, το οποίο είναι QQ plot, έχουμε ότι $X \leq_{st} Y$ αν τα σημεία του QQ plot βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο $x = y$ (Belzunce, 2010).

Επιπλέον,

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow VaR[X; F_Y(t)] \leq t, \quad \forall t$$

Ένα τελευταίο θεώρημα σχετικά με την αξία σε κίνδυνο είναι το ακόλουθο:

$$F_X(\text{VaR}[Y; p]) \geq p, \quad \forall p \in [0,1]$$

2.3.2 Διατάξεις Παχιάς Ουράς (Thicker Tailed Orders)

Όπως προαναφέραμε, μια συνηθισμένη πρακτική σύγκρισης πιθανών κινδύνων, αφορά τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις τους. Επιλέγουμε συνήθως τον κίνδυνο με τη μικρότερη μέση τιμή και αν αυτές συμπίπτουν, τότε διαλέγουμε τον κίνδυνο με τη μικρότερη διακύμανση.

Ένα είδος διάταξης των κινδύνων που βασίζεται κυρίως στη μέση τιμή τους, είναι οι διατάξεις παχιάς ουράς (Thicker Tailed orders, tt)

Ένας κίνδυνος είναι πιο επικίνδυνος από έναν άλλο αν οι ακραίες τιμές του έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα. Συγκεκριμένα, ο κίνδυνος Y είναι μεγαλύτερος ή ίσος ως προς τη διάταξη παχιάς ουράς από τον κίνδυνο X , ($Y \geq_{tt} X$) αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

- 1) $E(X) = E(Y)$
- 2) Υπάρχει πραγματικός αριθμός x_0 με $\Pr(X \leq x) \leq \Pr(Y \leq x)$ για μικρά x με $x < x_0$ αλλά $\Pr(X \leq x) \geq \Pr(Y \leq x)$ όταν $x > x_0$ (Kaas et al, 2008).

Έστω δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής που τέμνονται. Μία επαρκής συνθήκη για να τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο, είναι ότι η διαφορά τους αρχικά αυξάνεται, έπειτα μειώνεται, και αυξάνεται ξανά. Αυτό οδηγεί στο ακόλουθο θεώρημα:

Έστω X και Y δύο κίνδυνοι, μη ισόνομοι, με ίσες πεπερασμένες μέσες τιμές $E(X) = E(Y)$. Εάν υπάρχουν διαστήματα I_1 , I_2 και I_3 με $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [0, \infty)$ και το I_2 να βρίσκεται μεταξύ των I_1 και I_3 έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f_X(x) < f_Y(x)$ για τα I_1 και I_3 , και $f_X(x) > f_Y(x)$ για το I_2 , τότε οι αθροιστικές σ.κ. των τ.μ. X και Y τέμνονται μόνο μια φορά. Εδώ, $I_1 = [0,0]$ ή $I_2 = [b, b]$ μπορούν να ισχύουν αν οι σ.π.π. είναι διακριτές.

Άρα λοιπόν αν οι σ.π.π. των τ.μ. X, Y τέμνονται δύο φορές, τότε οι αθροιστικές σ.κ. τους τέμνονται μόνο μία φορά.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα που αποδεικνύει ότι η διωνυμική κατανομή έχει λεπτότερη ουρά από την κατανομή Poisson:

Μια Διωνυμική(n, p), όπως έχουμε δει αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο, έχει μέση τιμή

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = npe^t [pe^t + (1-p)]^{n-1} \Big|_{t=0} = np$$

και διασπορά

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np(1-p)$$

Μια κατανομή $Poisson(np)$ όπως έχουμε επίσης δει στο δεύτερο κεφάλαιο, έχει μέση τιμή

$$E(X) = \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. e^{-np} e^{npe^t} npe^t \right|_{t=0} = np$$

και διασπορά:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = np(np+1) - (np)^2 \\ &= (np)^2 + np - (np)^2 = np \end{aligned}$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι μια $Διωνυμική(n, p)$ και μια $Poisson(np)$ έχουν την ίδια μέση τιμή, ενώ η $Poisson$ έχει μεγαλύτερη διασπορά, καθώς ισχύει $0 < p < 1$.

Παρακάτω θα εξετάσουμε αν η κατανομή $Poisson$ έχει παχύτερη ουρά από τη διωνυμική κατανομή.

Έστω λοιπόν δύο διακριτές σ.π.π. $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα, οι οποίες ικανοποιούν τις ιδιότητες τομής του προηγούμενου θεωρήματος. Καθώς $f(x) > g(x) > 0$ ισοδυναμεί με $r(x) := \frac{f(x)}{g(x)} > 1$, μπορούμε να το αποδείξουμε δείχνοντας ότι το $r(x)$ αυξάνεται μέχρι μια συγκεκριμένη τιμή του x , και μειώνεται μετά από αυτό.

Γράφοντας $q = 1 - p$ έχουμε:

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\binom{n}{x} p^x q^{n-x}}{(np)^x e^{-np} / x!} = \frac{n(n-1) \dots (n-x+1)}{n^x q^x} q^n e^{np}$$

Εξετάζοντας τώρα το λόγο των διαδοχικών τιμών του $r(x)$, για $x = 1, 2, \dots$ έχουμε:

$$\frac{r(x)}{r(x-1)} = \frac{n-x+1}{nq} \leq 1 \text{ αν και μόνο αν } x \geq np + 1$$

Καθώς $f(\cdot)$ και $g(\cdot)$ έχουν ίσες μέσες τιμές, πρέπει να τέμνονται τουλάχιστον δύο φορές. Τότε όμως, το $r(x)$ πρέπει να διασχίσει το οριζόντιο επίπεδο 1 δύο φορές. Οπότε το $r(x) < 1$ πρέπει να ισχύει τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες τιμές του x ,

ενώ το $r(x) > 1$ πρέπει να ισχύει για ενδιάμεσες τιμές του x σε ένα διάστημα περίπου $np + 1$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα, μπορούμε να δούμε ότι η κατανομή *Poisson* έχει πράγματι παχύτερες ουρές από μια διωνυμική κατανομή με ίδια μέση τιμή (*Kaas et al, 2008*).

2.3.3 Διατάξεις Λόγου Πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio Orders)

Προκειμένου να μελετηθούν οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας απαιτείται η ποσοτική σύγκριση των σ.π.π. των τ.μ. X και Y καθώς αυξάνεται ο χρόνος t . Για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τη μονοτονία του πληθικού λόγου πιθανοφανειών, προκειμένου να συμπεράνουμε αν η σ.π.π. της μίας μεταβλητής αυξάνεται ή μειώνεται συγκριτικά με τη σ.π.π. της άλλης. Με βάση αυτά, θα παρουσιάσουμε παρακάτω τη βασική θεωρία των διατάξεων λόγου πιθανοφάνειας.

Ορισμός 2.3.3.1: Έστω δύο τ.μ. X και Y με σ.π.π. f και g αντίστοιχα. Λέμε ότι το X είναι μικρότερο του Y με τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, και συμβολίζεται με $X \leq_{lr} Y$ αν ισχύει

$$\frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως προς } t$$

όπου $f_X(t), f_Y(t)$ οι σ.π.π. των τ.μ. X και Y αντίστοιχα.

Ισοδύναμα, η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, και συμβολίζεται με $X \leq_{lr} Y$ αν ισχύει (*Belzunce, 2010*):

$$f(x)g(y) \geq f(y)g(x), \quad \forall x \leq y$$

Για παράδειγμα, αν πάρουμε δύο Γάμμα κατανομές με τ.μ. X και Y και σ.π.π.

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0$$

και

$$g(x) = \frac{\delta^\gamma x^{\gamma-1} e^{-x\delta}}{\Gamma(\gamma)}, \quad x > 0, \quad \gamma, \delta > 0$$

αντίστοιχα, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $X \leq_{lr} Y$ αν $\alpha \leq \gamma$ και $\beta \geq \delta$
 Συγκεκριμένα, για $\alpha \leq \gamma$ και $\beta \geq \delta$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f(x)g(y) &\geq f(y)g(x) \\
 \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\delta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-y\delta}}{\Gamma(\gamma)} &\geq \frac{\beta^\alpha y^{\alpha-1} e^{-y\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\delta^\gamma x^{\gamma-1} e^{-x\delta}}{\Gamma(\gamma)} \\
 x^{\alpha-1} e^{-x\beta} y^{\gamma-1} e^{-y\delta} &\geq y^{\alpha-1} e^{-y\beta} x^{\gamma-1} e^{-x\delta} \\
 \frac{x^\alpha}{x} \cdot \frac{1}{e^{x\beta}} \cdot \frac{y^\gamma}{y} \cdot \frac{1}{e^{y\delta}} &\geq \frac{y^\alpha}{y} \cdot \frac{1}{e^{y\beta}} \cdot \frac{x^\gamma}{x} \cdot \frac{1}{e^{x\delta}} \\
 \frac{x^\alpha y^\gamma}{e^{x\beta} e^{y\delta}} &\geq \frac{y^\alpha x^\gamma}{e^{y\beta} e^{x\delta}} \\
 \frac{e^{x\delta}}{e^{x\beta}} \cdot \frac{x^\alpha}{y^\alpha} &\geq \frac{x^\gamma}{y^\gamma} \cdot \frac{e^{y\delta}}{e^{y\beta}} \\
 \left(\frac{e^\delta}{e^\beta}\right)^x \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &\geq \left(\frac{e^\delta}{e^\beta}\right)^y \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^\gamma
 \end{aligned}$$

κάτι που ισχύει μόνο όταν $x \leq y$. Έτσι διαπιστώνουμε τελικά ότι $X \leq_{lr} Y$.

Ακολουθούν τρία θεωρήματα που αφορούν τις διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας και συνδέονται με την κυρτότητα και το πότε μία τ.μ. είναι λογαριθμικά κοίλη. Θα δώσουμε όμως πρώτα τον ορισμό μιας λογαριθμικά κοίλης τ.μ.

Ορισμός 2.3.3.2: Μία τ.μ. X έχει λογαριθμικά κοίλη σ.π.π. $f_X(x)$ στο διάστημα (α, β) αν και μόνο αν η συνάρτηση $\ln f_X(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Δηλαδή, αν ισχύει

$$\frac{d^2}{dx^2} (\ln f_X(x)) < 0$$

Θεώρημα 2.3.3.1: Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n με λογαριθμικά κοίλες σ.π.π. και $X_i \leq_{lr} Y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Τότε

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Θεώρημα 2.3.3.2: Έστω ανεξάρτητες τ.μ. X_1, X_2, \dots, X_n με λογαριθμικά κοίλες σ.π.π. Τότε

$$\left(X_i / \sum_{j=1}^m X_j = s_1 \right) <_{lr} \left(X_i / \sum_{j=1}^m X_j = s_2 \right), \quad \text{όπου } s_1 < s_2$$

Θεώρημα 2.3.3.3: Η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφάνειας αν και μόνο αν η συνάρτηση

$$p \rightarrow F_Y(\text{VaR}[X; p]) \text{ είναι κυρτή.}$$

Ισοδύναμα, $X \leq_{lr} Y$ αν και μόνο αν το *PP plot* είναι κυρτό.

2.3.4 Διατάξεις Κυρτότητας (Convex Orders)

Σε αυτή την υποενότητα θα αναφερθούμε στις διατάξεις κυρτότητας. Τόσο οι διατάξεις αυτές όσο και οι διατάξεις ανακοπής ζημιάς που θα δούμε στη συνέχεια, εστιάζουν στη διακύμανση των τ.μ. που μελετάμε. Έστω δύο τ.μ. X και Y , με ίσες μέσες τιμές, οι οποίες περιγράφουν τις αποδόσεις δύο επενδύσεων με υψηλό κίνδυνο. Έχοντας πάντα ως στόχο την αποστροφή του κινδύνου, θα επιλέξουμε την επένδυση με τη μικρότερη διακύμανση.

Παρακάτω θα αναφερθούμε στον ορισμό των διατάξεων κυρτότητας:

Έστω οι τ.μ. X και Y . Η τ.μ. Y είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. X ως προς τη διάταξη κυρτότητας, αν $E(u(X)) < E(u(Y))$ για κάθε κυρτή συνάρτηση $u(\cdot)$ με πεπερασμένη μέση τιμή. Θα γράφουμε $X \leq_{cx} Y$.

Αντίστοιχος ορισμός για τις διατάξεις κυρτότητας δίνεται στη συνέχεια:

Αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για κάθε $d \in (-\infty, \infty)$:

$$E[(X - d)_+] \leq E[(Y - d)_+], \quad \text{και}$$

$$E[(d - X)_+] \leq E[(d - Y)_+],$$

τότε η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη κυρτότητας, δηλαδή $X \leq_{cx} Y$.

Παρατηρούμε ότι προσθέτοντας το d στο πρώτο μέρος ανισοτήτων και θέτοντας $d \rightarrow -\infty$ οδηγούμαστε στο $E[X] \leq E[Y]$. Από την άλλη, αφαιρώντας το d στο δεύτερο μέρος ανισοτήτων και θέτοντας $d \rightarrow +\infty$ οδηγούμαστε στο $E[X] \geq E[Y]$. Ως εκ τούτου, $E[X] = E[Y]$ πρέπει να ισχύει για δύο τ.μ. ώστε να είναι κυρτά διατεταγμένες (Kaas et al, 2008).

Η διάταξη κυρτότητας μπορεί να χαρακτηριστεί από τη συνάρτηση ανακοπής ζημιάς, την οποία θα δούμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα. Όσον αφορά λοιπόν τη συνάρτηση ανακοπής ζημιάς, έχουμε ότι $X \leq_{cx} Y$ αν και μόνο αν

$$E[(X - t)_+] \leq E[(Y - t)_+], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Εκτός από τη θεωρία κινδύνου, η διάταξη κυρτότητας ενδιαφέρει και αρκετές περιπτώσεις όπου η στοχαστική διάταξη δεν ισχύει. Επίσης, αν οι συναρτήσεις επιβίωσης τέμνονται μόνο μία φορά και η συνάρτηση επιβίωσης του X είναι μικρότερη από αυτή του Y μετά το σημείο τομής, τότε ισχύει ότι $X \leq_{cx} Y$ (Belzunce, 2010).

Ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

1. $X \leq_{cx} Y \Rightarrow E[(X - E(X))^n] < E[(Y - E(Y))^n]$
για $n = 2 \Rightarrow Var(X) \leq Var(Y)$
2. Αν $X \leq_{cx} Y$ και $Var(X) = Var(Y)$, τότε $X =_d Y$
3. Αν $X \leq_{cx} Y$, τότε $\min\{Y\} < \min\{X\}$ και
 $\max\{Y\} > \max\{X\}$
Η τ.μ. Y έχει μεγαλύτερο εύρος από την τ.μ. X
4. Αν η τ.μ. Z είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. X, Y τότε
 $X \leq_{cx} Y \Rightarrow X + Z \leq_{cx} Y + Z$
5. Αν ισχύει $(X/\theta = \theta) \leq_{cx} (Y/\theta = \theta)$, $\forall \theta \in \Omega_\theta$, όπου Ω_θ ο παραμετρικός χώρος της τ.μ. θ , τότε $X \leq_{cx} Y$
6. Αν $X \leq_{cx} Y$ και $f(\cdot)$ είναι κυρτή, τότε $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$. Αν $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$ για κάθε κυρτή συνάρτηση $f(\cdot)$, τότε $X \leq_{cx} Y$

2.3.5 Διατάξεις Ανακοπής Ζημιάς (Stop Loss Orders)

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, οι διατάξεις κυρτότητας συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των τ.μ. ενώ οι απλές στοχαστικές διατάξεις συγκρίνουν το μέγεθος των τ.μ. Οι διατάξεις ανακοπής ζημιάς συνδέουν τις δύο αυτές διατάξεις. Αυτό οδηγεί στο γεγονός ότι η έννοια “μικρότερη” στις διατάξεις αυτές, σημαίνει ότι η συγκεκριμένη τ.μ. είναι ταυτόχρονα μικρότερη τόσο σε μέγεθος όσο και σε διακύμανση.

Έστω η τ.μ. X . Τότε η συνάρτηση ανακοπής ζημιάς ορίζεται ως

$$\pi_X(t) = E[(X - t)_+] = \int_x^{+\infty} \bar{F}(u) du, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $(x)^+ = x$ αν $x \geq 0$ και $(x)^+ = 0$ αν $x < 0$.

Η συνάρτηση ανακοπής ζημιάς είναι γνωστή στο πλαίσιο των αναλογιστικών κινδύνων. Αν η τ.μ. X δηλώνει τον τυχαίο κίνδυνο για μια ασφαλιστική εταιρεία, είναι σύνηθες να τον μεταβιβάσει σε αντασφαλιστική εταιρεία. Ειδικότερα, η πρώτη εταιρεία φέρει ολόκληρο τον κίνδυνο, αρκεί ο κίνδυνος να είναι μικρότερος από μια σταθερή τιμή t . Και αν $X > t$ τότε η αντασφαλιστική εταιρεία θα αναλάβει το ποσό $X - t$. Αυτό καλείται συμβόλαιο ανακοπής ζημιάς με σταθερή διατήρηση t . Το αναμενόμενο κόστος για την αντασφαλιστική εταιρεία $E[(X - t)_+]$ ονομάζεται καθαρό ασφάλιστρο (Belzunce, 2010).

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό της διάταξης ανακοπής ζημιάς:

Έστω οι τ.μ. X και Y . Η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη ανακοπής ζημιάς, και θα γράφουμε $X \leq_{sl} Y$ αν

$$\pi_X(t) \leq \pi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Έτσι, για ζεύγη τ.μ. με διατεταγμένα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς, αν το X έχει μικρότερα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς από το Y , τότε λέμε ότι το X είναι μικρότερο από το Y ως προς τη διάταξη ανακοπής ζημιάς.

Το $\pi_X(t)$ στον ορισμό, είναι το ασφάλιστρο ανακοπής ζημιάς, το οποίο ισούται με τη μέση τιμή των συνολικών απαιτήσεων που ξεπερνούν το όριο ίδιας κράτησης t .

Ισχύει:

$$\pi_X(t) = E[(X - t)_+] = \int_t^\infty \bar{F}_X(u) du = \int_t^\infty 1 - F_X(u) du$$

$$\text{όπου } (X - t)_+ = \max\{X - t, 0\} = \begin{cases} X - t, & X > t \\ 0, & X \leq t \end{cases}$$

Επίσης,

$$\pi_X(t) = E[(X - t)_+] = \int_t^\infty (x - t) f_X(x) dx$$

Έτσι, ο ορισμό της διάταξης ανακοπής ζημιάς που αναφέραμε παραπάνω, είναι ισοδύναμος με:

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow \int_t^\infty 1 - F_X(u) du \leq \int_t^\infty 1 - F_Y(u) du, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

και

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow \int_t^\infty (x - t) f_X(x) dx \leq \int_t^\infty (x - t) f_Y(x) dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ χρήσιμο για την αναλογιστική μοντελοποίηση, καθώς επιτρέπει τη δημιουργία μοντέλων για τις συνολικές ζημιές από τα οποία προκύπτουν άνω φράγματα για τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιάς (stop-loss premiums).

Οι διατάξεις ανακοπής ζημιάς παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες με τις διατάξεις κυρτότητας. Η σύνδεση τους φαίνεται από τη σχέση:

$$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ X \leq_{sl} Y \end{cases}$$

Για τις διατάξεις ανακοπής ζημιάς ισχύουν τα εξής:

1. $X \leq_{sl} Y \Rightarrow X + Z \leq_{sl} Y + Z$
αν η τ.μ. Z είναι ανεξάρτητη από τις τ.μ. X, Y
2. Αν ισχύει $(X/\theta = \theta) \leq_{sl} (Y/\theta = \theta)$, $\forall \theta \in \Omega_\theta$, όπου Ω_θ ο παραμετρικός χώρος της τ.μ. θ , τότε $X \leq_{sl} Y$
3. Αν $X \leq_{sl} Y$, τότε υπάρχει τ.μ. Z έ.ώ. $X \leq_{st} Z \leq_{cx} Y$
4. $X \leq_{sl} Y \Rightarrow f(X) \leq_{sl} f(Y)$, όπου f αύξουσα και κυρτή συνάρτηση
5. Έστω $X_i \leq_{sl} Y_i$, $\forall i$ όπου X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n ανεξάρτητες τ.μ. Τότε για κάθε αύξουσα κυρτή συνάρτηση $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq_{sl} \Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε κίνδυνος Z που είναι μεγαλύτερος ως προς τη διάταξη ανακοπής ζημιάς από τον κίνδυνο X , είναι πιο επικίνδυνος από έναν ενδιάμεσο κίνδυνο Y που και αυτός με τη σειρά του είναι μεγαλύτερος από τον X .

Θεώρημα διαχωρισμού για τη διάταξη ανακοπής ζημιάς:

Αν $X \leq_{sl} Z$ και $E(X) < E(Z)$, τότε υπάρχει τ.μ. Y για την οποία

α) $X \leq_{st} Y$

β) $Y \leq_{sl} Z$ και $E(Y) = E(Z)$

Η διάταξη ανακοπής ζημιάς εφαρμόζεται για ζημιές, δηλαδή μη αρνητικούς κινδύνους. Δύο τ.μ. με την ίδια μέση τιμή και διατεταγμένα ασφάλιστρα ανακοπής ζημιών για κάθε d , συμπεριλαμβανομένου και των αρνητικών τιμών του d , καλούνται διατάξεις κυρτότητας.

Υπάρχει το εξής θεώρημα:

Το $X \leq_{sl} Y$ ισχύει αν και μόνο αν $E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$, για κάθε αύξουσα κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας $u(\cdot)$.

Ως συνέπεια του θεωρήματος αυτού, οι αναμενόμενες τιμές των κυρτών συναρτήσεων διατάσσονται. Δεδομένου ότι όλες οι συναρτήσεις της μορφής x^α με $\alpha \geq 1$ είναι κυρτές, έχουμε ότι $E(X^k) \leq E(Y^k)$, $k = 1, 2, \dots$ Συγκεκριμένα, ένας πιο επικίνδυνος κίνδυνος, με ίδια μέση τιμή, έχει μεγαλύτερη διακύμανση. Αν όμως οι μέσες τιμές των X και Y δεν είναι ίσες, αυτό δε συμβαίνει πάντα.

Ένα αντιπαράδειγμα: $X \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$ και $Y \equiv 1$ (Kaas et al, 2008).

2.3.6 Διατάξεις Βαθμίδας Κινδύνου (Hazard Rate Orders)

Σε αυτή την υποενότητα θα ασχοληθούμε με τις διατάξεις βαθμίδας κινδύνου, αφού πρώτα όμως κάνουμε μια ομαλή εισαγωγή για να καταλήξουμε στον ορισμό τους.

Αν έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ δύο μηχανημάτων ίδιας τιμής με υπολειπόμενους χρόνους ζωής X και Y αντίστοιχα και ισχύει ότι $X \leq_{st} Y$, τότε προφανώς θα επιλέξουμε το μηχανήμα Y . Στην περίπτωση όμως που τα μηχανήματα θα μετράνε ήδη ένα χρόνο παλαιότητας, οι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής τους θα είναι X' και Y' και θα ισχύει $\Pr(X' > t) = \Pr(X > 1 + t/X > 1)$ και $\Pr(Y' > t) = \Pr(Y > 1 + t/Y > 1)$. Σε αυτή την περίπτωση δεν είναι προφανής όπως πριν η επιλογή μας. Σ' αυτό το πρόβλημα μπορούν να μας βοηθήσουν οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου, οι οποίες μελετάνε ποσότητες $(X - t/X > t)$ και $(Y - t/Y > t)$.

Οι διατάξεις αυτές, εφαρμόζονται συχνά στον τομέα της ανασφάλισης, καθώς η ποσότητα $X - t/X > t$ που αναφέραμε παραπάνω υποδεικνύει το ποσό που πληρώνει ο ανασφαλιστής σε ένα συμβόλαιο ανακοπής ζημιάς, δεδομένου ότι η ζημιά είχε φτάσει στο όριο t .

Για να καταλήξουμε στον ορισμό των διατάξεων βαθμίδας κινδύνου θα αναφερθούμε στη σύγκριση των συναρτήσεων επιβίωσης, η οποία μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, μπορούμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της αναλογίας δύο συναρτήσεων επιβίωσης, μελετώντας αν το $\bar{F}(x)/\bar{G}(x)$ μειώνεται. Ισοδύναμα, για να αποφύγουμε προβλήματα με μηδενικές τιμές στον παρονομαστή, μπορούμε να μελετήσουμε το εξής: $\bar{F}(x)\bar{G}(y) \geq \bar{F}(y)\bar{G}(x)$, $\forall x \leq y$.

Η συνθήκη αυτή μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Έστω δύο τ.μ. X και Y , με συναρτήσεις κατανομής F και G αντίστοιχα. Θα λέμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την Y ως προς τη διάταξη βαθμίδας κινδύνου, και θα γράφουμε $X \leq_{hr} Y$, αν ισχύει η συνθήκη

$$\bar{F}(x)\bar{G}(y) \geq \bar{F}(y)\bar{G}(x), \quad \forall x \leq y$$

Ισοδύναμα, $X \leq_{hr} Y$ αν και μόνο αν ισχύει

$$(X/X > t) \leq_{st} (Y/Y > t), \quad \forall t > 0$$

Η διάταξη βαθμίδας κινδύνου μπορεί να χαρακτηριστεί, στην απόλυτα συνεχή περίπτωση, από τις συναρτήσεις βαθμίδας κινδύνου. Έστω μια τ.μ. X με απόλυτα συνεχή σ.κ. F και σ.π.π. f . Η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου ορίζεται ως $r(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ για κάθε t για το οποίο ισχύει $\bar{F}(t) > 0$. Η βαθμίδα κινδύνου μετράει, κατά μία έννοια, την “πιθανότητα” μιας άμεσης αποτυχίας για κάθε χρονική στιγμή t , όταν το X υποδηλώνει την τυχαία διάρκεια ζωής μιας μονάδας ή ενός συστήματος. Έστω δύο τ.μ. X και Y με βαθμίδες κινδύνου r και s αντίστοιχα. Τότε, $X \leq_{hr} Y$ αν και μόνο αν $r(t) \geq s(t)$ για κάθε t έτσι ώστε $\bar{F}(t), \bar{G}(t) > 0$ (Belzunce, 2010).

Ας δούμε στην πράξη ένα παράδειγμα για τη συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου:

Έστω η τ.μ. X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή με παραμέτρους a, b .

Τότε:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a, b)$$

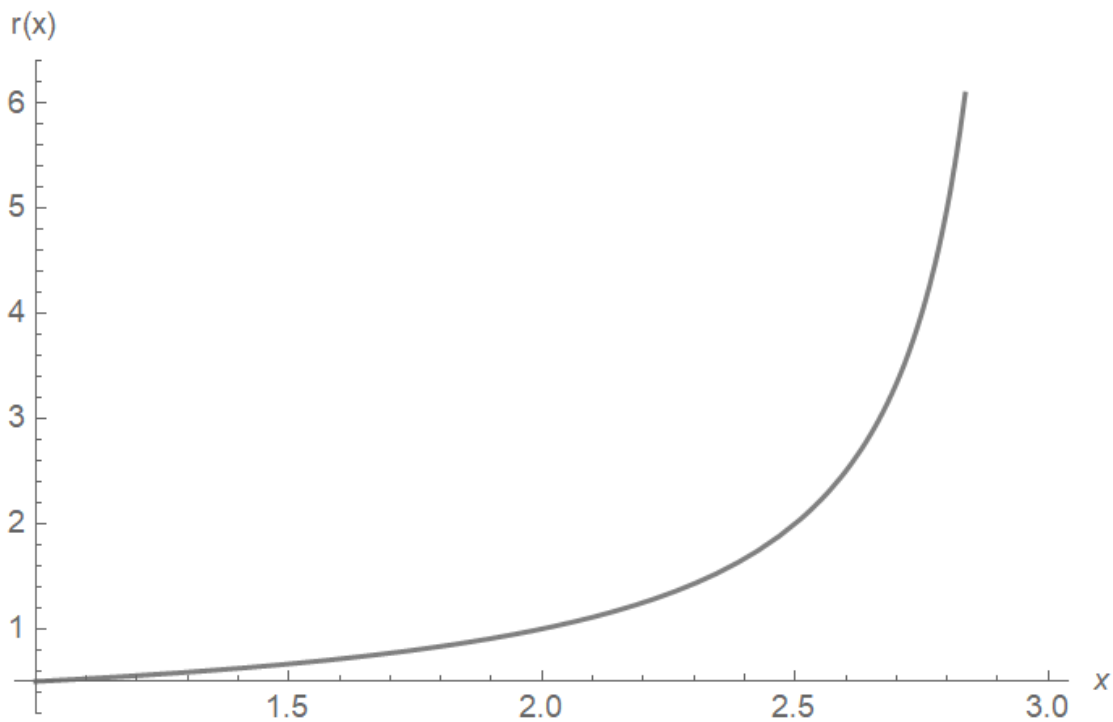
$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a}$$

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\frac{1}{b-a}}{\frac{b-x}{b-a}} = \frac{1}{b-x}$$

Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, π.χ. για $a = 1$ και $b = 3$, έχουμε το εξής διάγραμμα:

Hazard Rate of Continuous Uniform Distribution



Γραφική Παράσταση 2.3.6.1 – Συνάρτηση Βαθμίδας Κινδύνου τ.μ. $X \sim U(a,b)$

2.3.7 Σχέσεις Μεταξύ Στοχαστικών Διατάξεων

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις διάφορες μορφές στοχαστικών διατάξεων που έχουμε δει. Κάποιες από αυτές θα δούμε ότι είναι πιο ισχυρές από κάποιες άλλες. Γνωρίζοντας τη στοχαστική διάταξη μεταξύ δύο τ.μ. X, Y κάποιας ισχυρότερης μορφής, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα και για τη στοχαστική διάταξη άλλων μορφών διατάξεων.

Η διάταξη λόγου πιθανοφανειών είναι ισχυρότερη από τη διάταξη βαθμίδας κινδύνου. Αν η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη λόγου πιθανοφανειών, τότε η τ.μ. X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Επομένως: $X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y$.

Η διάταξη βαθμίδας κινδύνου είναι ισχυρότερη από τη συνήθη στοχαστική διάταξη. Αν η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y , ως προς τη διάταξη βαθμίδας κινδύνου, τότε η τ.μ. X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη στοχαστική διάταξη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Επομένως: $X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$.

Η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι ισχυρότερη από τη διάταξη ανακοπής ζημίας. Αν η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y , ως προς τη συνήθη στοχαστική διάταξη,

τότε η τ.μ. X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη ανακοπής ζημίας. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Επομένως: $X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{sl} Y$ (Belzunce, 2010).

Από τα πιο πάνω προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$X \leq_{lr} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{sl} Y$$

Βάσει τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας αποτελούν την πιο ισχυρή μορφή στοχαστικής διάταξης, σε αντίθεση με τις διατάξεις ανακοπής ζημίας που αποτελούν ασθενέστερες μορφές στοχαστικών διατάξεων.

Εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace και της ροπογεννήτριας, ο ορισμός των οποίων δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Εφαρμογές και Συγκρίσεις Μετασχηματισμών Laplace και Ροπογεννητριών

3.1 Εισαγωγή

Θα ξεκινήσουμε με συγκρίσεις από την ίδια οικογένεια κατανομών, αλλά με διαφορετικές παραμέτρους, και θα δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η μία συνάρτηση είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace και κάτω από ποιες προϋποθέσεις η μια είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη της ροπογεννήτριας, αφού πρώτα ορίσουμε φυσικά τις δύο αυτές διατάξεις. Έπειτα, θα συνεχίσουμε με συγκρίσεις μεταβλητών οι οποίες ακολουθούν διαφορετικές κατανομές. Θα δούμε θεωρητικά την απόδειξη σε εφαρμογές αλλά θα βοηθήσει να έχουμε και ένα διάγραμμα που θα φαίνονται και οι δύο συναρτήσεις των μετασχηματισμών Laplace για να δούμε αν ο ένας είναι ακριβώς πάνω από τον άλλο. Επομένως για κάθε σύγκριση θα πραγματοποιούνται δύο πράγματα:

1^ο) θεωρητική σύγκριση με πράξεις και

2^ο) σχήμα όπου θα φαίνονται στο ίδιο διάγραμμα οι δύο καμπύλες, δηλαδή οι δύο γραφικές παραστάσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace και οι δύο γραφικές παραστάσεις για τις ροπογεννήτριες.

3.2 Διάταξη Μετασχηματισμού Laplace και Ροπογεννήτριας

Έστω X, Y δύο μη-αρνητικές τ.μ.

Η τ.μ. Y είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. X ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace, αν $E(e^{-tX}) \geq E(e^{-tY})$ για κάθε $t > 0$. Θα γράφουμε $X \leq_{lt} Y$.

Ή διαφορετικά,

$$X \leq_{lt} Y \text{ αν } L_X(s) \geq L_Y(s), \quad \forall s \geq 0 \quad (3.2.1)$$

όπου

$$L_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \quad \text{και} \quad L_Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} dG(y), \quad \forall s \geq 0$$

(Klar-Muller, 2003)

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι κάποιοι συγγραφείς, για παράδειγμα ο Denuit, ορίζουν τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace με αντίστροφη φορά. Δηλαδή, ορίζουν $X \leq_{lt} Y$ αν ισχύει η ανίσωση $E(e^{-tX}) \leq E(e^{-tY})$.

Η τ.μ. Y είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. X ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας, αν η $E(e^{t_0 Y})$ είναι πεπερασμένη για $t_0 > 0$ και $E(e^{tX}) \leq E(e^{tY})$ για κάθε $t > 0$. Θα γράφουμε $X \leq_{mgf} Y$.

Ή διαφορετικά,

$$X \leq_{mgf} Y \text{ αν } \Psi_X(t) \leq \Psi_Y(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2.2)$$

όπου

$$\Psi_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} dF(x) \quad \text{και} \quad \Psi_Y(t) = \int_0^\infty e^{ty} dG(y), \quad \forall t \geq 0$$

Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι $X \leq_{mgf} Y$ αν και μόνο αν

$$\int_0^\infty e^{tx} \bar{F}(x) dx \leq \int_0^\infty e^{tx} \bar{G}(x) dx, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2.3)$$

(Klar-Muller, 2003)

Φυσικά, έχει νόημα να μιλάμε για διάταξη ροπογεννήτριας μόνο αν η ροπογεννήτρια υπάρχει για τουλάχιστον κάποιες τιμές. Επομένως, προσθέτουμε την απαίτηση ότι η $E(e^{t_0 Y})$ είναι πεπερασμένη για κάποια $t_0 > 0$. Παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών όπου η συνάρτηση $t \mapsto E(e^{tY})$ είναι πεπερασμένη, είναι ένα διάστημα, και ότι η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα και παραγοντοποιείται επ' άπειρον.

Η διάταξη ροπογεννήτριας, σε αντίθεση με τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace, δεν αποτέλεσε μεγάλο αντικείμενο απασχόλησης στο παρελθόν. Η έννοια της διάταξης της ροπογεννήτριας και το σύμβολό της, χρησιμοποιήθηκαν από κάποιους συγγραφείς ως ισοδύναμα της διάταξης του μετασχηματισμού Laplace. (Shaked-Shanthikumar, 1994)

3.3 Διάταξη Κατά Ροπές

Ανοιχτό πρόβλημα παραμένει ο χαρακτηρισμός της μέγιστης γεννήτριας της διάταξης ροπογεννήτριας, δηλαδή της μέγιστης κατηγορίας συναρτήσεων f για τις οποίες το $X \leq_{mgf} Y$ ικανοποιεί τη σχέση $E(f(X)) \leq E(f(Y))$. Το γεγονός ότι η μέγιστη αυτή γεννήτρια περιέχει όλες τις συναρτήσεις με μη-αρνητικούς όλων των διατάξεων, δεν αληθεύει. Αυτή η τάξη συναρτήσεων χαρακτηρίζει τη λεγόμενη διάταξη ροπών, η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

Έστω δύο μη-αρνητικές τ.μ. Η X είναι μικρότερη από την Y σύμφωνα με τη διάταξη ροπών, αν $E(X^k) \leq E(Y^k)$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ροπές της X είναι μικρότερες από όλες τις ροπές της Y . Θα γράφουμε $X \leq_{mom} Y$.

Προφανώς, η διάταξη αυτή είναι αυστηρά ισχυρότερη από τη διάταξη της ροπογεννήτριας. Η σχέση μεταξύ τους, φαίνεται επίσης και από το πιο κάτω θεώρημα:

Η σχέση $X \leq_{mgf} Y$ ισχύει αν και μόνο αν

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(i+1)!} E(X^i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(i+1)!} E(Y^i), \quad \forall t > 0$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα όπου φαίνεται να ισχύει η διάταξη των ροπών και να μην ισχύει η διάταξη της ροπογεννήτριας:

Έστω η τ.μ. X με πιθανότητες $P(X = 1) = 0.204$, $P(X = 2) = 0.678$ και $P(X = 10) = 0.118$.

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το Y ακολουθεί εκθετική κατανομή με $E(Y) = E(X) = 2.74$. Τότε, $X \leq_{mgf} Y$, αλλά $E(X^3) > E(Y^3)$, έτσι $X \not\leq_{mom} Y$.

Έτσι αποδεικνύεται ότι η \leq_{mom} είναι ισχυρότερη από την \leq_{mgf} . (Klar-Muller, 2003)

Εκτός από τη διάταξη κατά ροπές, η στοχαστική διάταξη είναι επίσης ισχυρότερη από τη διάταξη ροπογεννήτριας. Η στοχαστική διάταξη συνεπάγεται και τη διάταξη ροπογεννήτριας και τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace. Αν υπάρχει στοχαστική διάταξη τότε η μία ουρά είναι παντού μικρότερη από την άλλη ουρά, που αυτό συνεπάγεται ότι ο ένας μετασχηματισμός Laplace είναι μικρότερος από τον άλλο. Το ίδιο συνεπάγεται και για τη ροπογεννήτρια. Προφανώς, μεταξύ τους οι \leq_{mgf} και \leq_{it} καμία δεν συνεπάγεται την άλλη.

3.4 Εφαρμογή σε Δύο Εκθετικές Κατανομές

Ένα πρώτο παράδειγμα:

Έχουμε δύο τ.μ. X και Y , όπου η X ακολουθεί την εκθετική με παράμετρο θ_1 και η Y ακολουθεί την εκθετική με παράμετρο θ_2 . Θέλουμε να δούμε αν η μία είναι στοχαστικά μικρότερη σύμφωνα με το μετασχηματισμό Laplace από την άλλη, αν γνωρίζουμε ότι $\theta_1 \leq \theta_2$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι

$$f_X(t) = \theta_1 e^{-\theta_1 t}, \quad t > 0$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι

$$f_Y(t) = \theta_2 e^{-\theta_2 t}, \quad t > 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της X είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_X(t) dt = \int_0^{\infty} \theta_1 e^{-\theta_1 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \theta_1 e^{-t(\theta_1+s)} \\ &= \frac{\theta_1 e^{-t(\theta_1+s)}}{-(\theta_1+s)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{\theta_1 e^0}{-(\theta_1+s)} = \frac{\theta_1}{\theta_1+s}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της Y είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_Y(t) dt = \int_0^{\infty} \theta_2 e^{-\theta_2 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \theta_2 e^{-t(\theta_2+s)} dt \\ &= \frac{\theta_2 e^{-t(\theta_2+s)}}{-(\theta_2+s)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{\theta_2 e^0}{-(\theta_2+s)} = \frac{\theta_2}{\theta_2+s}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε τη σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις $\mathcal{L}_X(s)$ και $\mathcal{L}_Y(s)$.

Έχουμε ως δεδομένο ότι $\theta_1 \leq \theta_2$.

Θα προσπαθήσουμε να σχηματίσουμε σε αυτή την ανισότητα τις τελικές σχέσεις των $\mathcal{L}_X(s)$ και $\mathcal{L}_Y(s)$ κάνοντας κάποιες απλές πράξεις.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με s και έχουμε

$$\theta_1 s \leq \theta_2 s$$

Προσθέτουμε στα δύο μέλη την ποσότητα $\theta_1 \theta_2$ και έχουμε

$$\theta_1 s + \theta_1 \theta_2 \leq \theta_2 s + \theta_1 \theta_2$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα τα θ_1 και θ_2 αντίστοιχα και η σχέση μετατρέπεται ως

$$\theta_1(s + \theta_2) \leq \theta_2(s + \theta_1)$$

Φέρνουμε τα θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα, στα ίδια μέλη και τελικά καταλήγουμε στο εξής:

$$\frac{\theta_1}{\theta_1 + s} \leq \frac{\theta_2}{\theta_2 + s}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{L}_X(s) \leq \mathcal{L}_Y(s)$, $\forall s \geq 0$.

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

$$Y \leq_{lt} X$$

Εφαρμογή για $\theta_1 = 3$ και $\theta_2 = 7$:

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta_1 = 3$ και η τ.μ. Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta_2 = 7$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι

$$f_X(t) = 3e^{-3t}, \quad t > 0$$

και αντίστοιχα της Y

$$f_Y(t) = 7e^{-7t}, \quad t > 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της X είναι:

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{\theta_1}{\theta_1 + s} = \frac{3}{3 + s}, \quad s \geq 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της Y είναι:

$$\mathcal{L}_Y(s) = \frac{\theta_2}{\theta_2 + s} = \frac{7}{7 + s}, \quad s \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $s \geq 0$ ισχύει

$$\frac{3}{3+s} \leq \frac{7}{7+s}$$

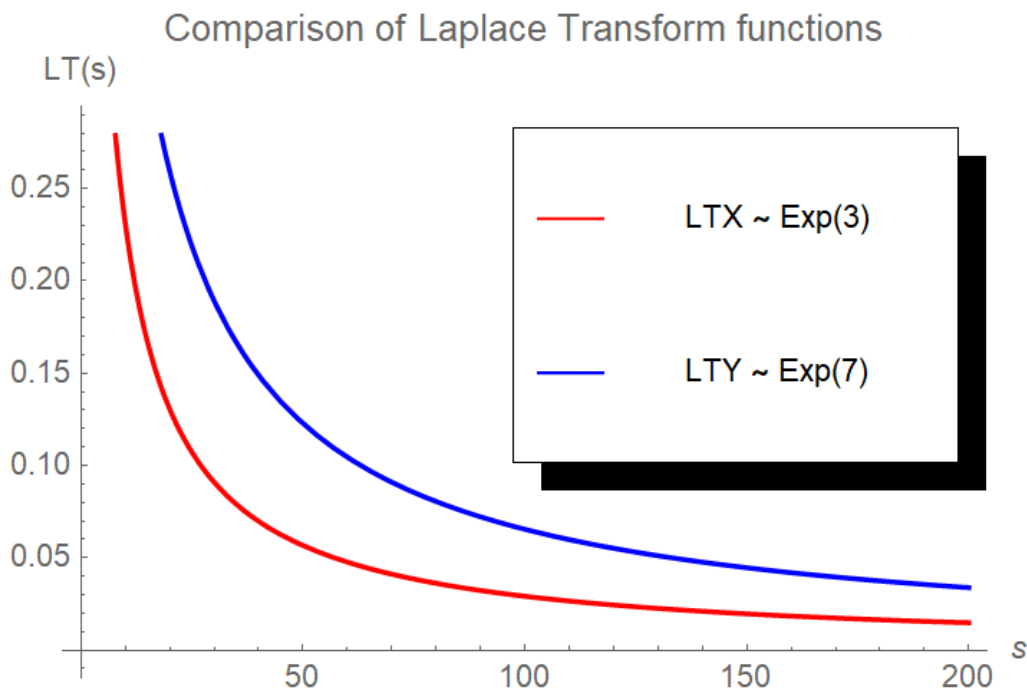
και επαληθεύει τη γενική σχέση που αποδείξαμε πιο πάνω:

$$\mathcal{L}_X(s) \leq \mathcal{L}_Y(s), \quad \forall s \geq 0$$

Συνεπώς η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

$$Y \leq_{lt} X$$

Αφού έχουμε κάνει τη θεωρητική ανάλυση και μια πρακτική εφαρμογή για τη σύγκριση των μετασχηματισμών Laplace, θα το δούμε τώρα και σχηματικά:



Γραφική Παράσταση 3.4.1 – Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace
των τ.μ. $X \sim \text{Exp}(3)$, $Y \sim \text{Exp}(7)$

Στο σχήμα 3.4.1 βλέπουμε συγκριτικά τις δύο γραφικές αναπαραστάσεις των μετασχηματισμών Laplace. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. Y είναι πιο πάνω

από αυτή της X . Το συμπέρασμα που εξάγουμε από αυτό είναι ότι ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X είναι μικρότερος από αυτόν της τ.μ. Y . Αυτό επαληθεύει την αλγεβρική ανάλυση που κάναμε πιο πάνω.

Σχετικά με τη ροπογεννήτρια της τ.μ. X , έχοντας πάλι ως δεδομένο ότι $\theta_1 \leq \theta_2$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx = \theta_1 \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1-t)x} dx \\ &= \theta_1 \left[\frac{e^{-(\theta_1-t)x}}{-(\theta_1-t)} \right]_0^{\infty} = \theta_1 \left[\frac{e^{-\infty}}{-(\theta_1-t)} + \frac{e^0}{\theta_1-t} \right] = \theta_1 \left[0 + \frac{1}{\theta_1-t} \right] \\ &= \frac{\theta_1}{\theta_1-t}, \quad t < \theta_1 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την τ.μ. Y η ροπογεννήτρια υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = \int_0^{\infty} e^{ty} f(y) dy = \int_0^{\infty} e^{ty} \theta_2 e^{-\theta_2 y} dy = \theta_2 \int_0^{\infty} e^{-(\theta_2-t)y} dy \\ &= \theta_2 \left[\frac{e^{-(\theta_2-t)y}}{-(\theta_2-t)} \right]_0^{\infty} = \theta_2 \left[\frac{e^{-\infty}}{-(\theta_2-t)} + \frac{e^0}{\theta_2-t} \right] = \theta_2 \left[0 + \frac{1}{\theta_2-t} \right] \\ &= \frac{\theta_2}{\theta_2-t}, \quad t < \theta_2 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα δε συγκλίνει πάντα, καθώς η ροπογεννήτρια δεν ορίζεται για $t \geq \theta_1$ και αντίστοιχα για $t \geq \theta_2$.

Θα εξετάσουμε τη σχέση ανάμεσα στην $M_X(t)$ και $M_Y(t)$.

Έχουμε ως δεδομένο ότι $\theta_1 \leq \theta_2$.

Όπως κάναμε και με το μετασχηματισμό Laplace, έτσι και τώρα, θα προσπαθήσουμε να σχηματίσουμε βάσει αυτής της ανισότητας τις τελικές σχέσεις των $M_X(t)$ και $M_Y(t)$.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t και έχουμε

$$\theta_1 t \leq \theta_2 t$$

Πολλαπλασιάζουμε με -1 και τα δύο μέλη και η ανισότητα αλλάζει φορά

$$-\theta_1 t \geq -\theta_2 t$$

Προσθέτουμε στα δύο μέλη την ποσότητα $\theta_1\theta_2$ και έχουμε

$$\theta_1\theta_2 - \theta_1 t \geq \theta_1\theta_2 - \theta_2 t$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα τα θ_1 και θ_2 αντίστοιχα και η σχέση μετατρέπεται ως

$$\theta_1(\theta_2 - t) \geq \theta_2(\theta_1 - t)$$

Φέρνουμε τα θ_1 και θ_2 , αντίστοιχα, στα ίδια μέλη και τελικά καταλήγουμε στο εξής

$$\frac{\theta_1}{\theta_1 - t} \geq \frac{\theta_2}{\theta_2 - t}$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$M_X(t) \geq M_Y(t), \quad \forall 0 < t < \theta_1$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.2), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$Y \leq_{mgf} X$$

Εφαρμογή για $\theta_1 = 3$ και $\theta_2 = 7$:

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. X είναι

$$M_X(t) = \frac{\theta_1}{\theta_1 - t} = \frac{3}{3 - t}, \quad t < 3$$

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. Y είναι

$$M_Y(t) = \frac{\theta_2}{\theta_2 - t} = \frac{7}{7 - t}, \quad t < 7$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

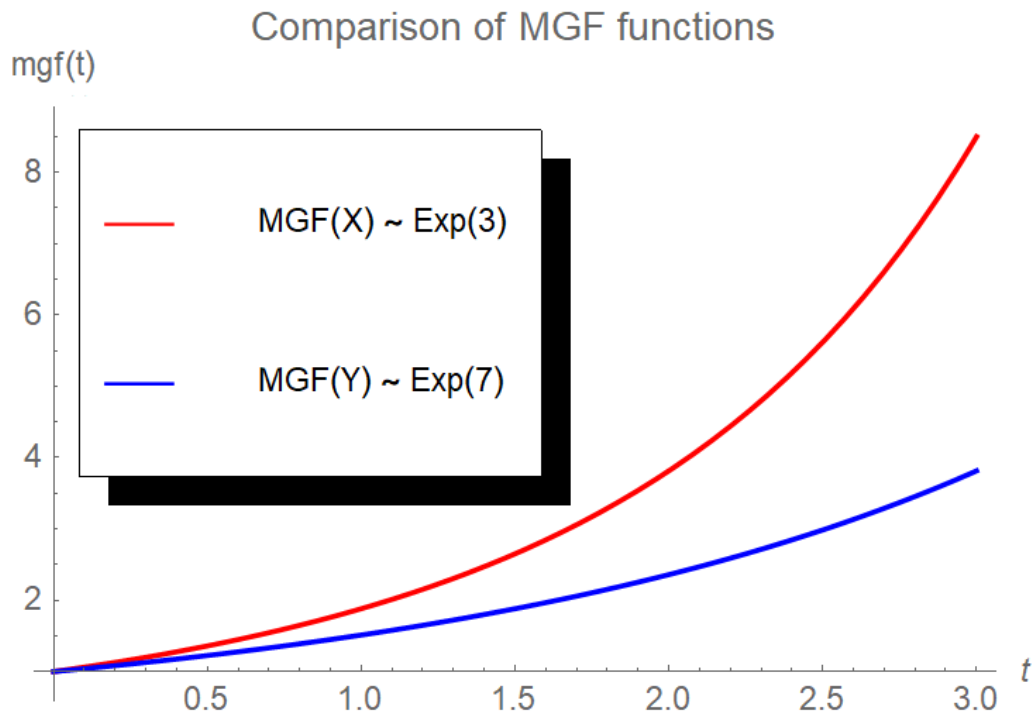
$$\frac{3}{3 - t} \geq \frac{7}{7 - t}, \quad \forall 0 < t < 3$$

το οποίο επαληθεύει τη γενική σχέση που αποδείξαμε πιο πάνω:

$$M_X(t) \geq M_Y(t), \quad \forall 0 < t < \theta_1$$

Έτσι, βλέπουμε ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$Y \leq_{mgf} X$$



Γραφική Παράσταση 3.4.2 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ. $X \sim \text{Exp}(3)$, $Y \sim \text{Exp}(7)$

Στο διάγραμμα 3.4.2 βλέπουμε συγκριτικά τις δύο γραφικές παραστάσεις των ροπογεννητριών. Λαμβάνοντας υπόψιν σε ποιο σημείο απειρίζεται η ροπογεννήτρια στην εκθετική κατανομή, καθορίζουμε τα όρια έτσι ώστε να σταματάνε σε αυτό το σημείο οι δύο καμπύλες. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. X είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. Y . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τ.μ. Y είναι μικρότερη από την τ.μ. X ως προς τη ροπογεννήτρια. Έτσι επαληθεύεται και σχηματικά η αλγεβρική ανάλυση που κάναμε προηγουμένως.

3.5 Εφαρμογή σε Δύο Γάμμα Κατανομές

Ένα δεύτερο παράδειγμα που μπορούμε να δούμε, είναι αν πάρουμε δύο κατανομές Γάμμα. Η κατανομή Γάμμα, όπως ξέρουμε, μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής.

Έστω λοιπόν ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (α, β) και η τ.μ. Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (γ, δ) .

Κρατώντας τη μια παράμετρο της Γάμμα σταθερή και αλλάζοντας την άλλη, θα εξετάσουμε αν είναι η μια μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με το μετασχηματισμό Laplace και αντίστοιχα με τη ροπογεννήτρια.

Η σ.π.π. της $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0$$

Η σ.π.π. της $\Gamma(\gamma, \delta)$ είναι:

$$f(x) = \frac{\delta^\gamma x^{\gamma-1} e^{-x\delta}}{\Gamma(\gamma)}, \quad x \geq 0, \quad \gamma, \delta > 0$$

Αρχικά, όσον αφορά το μετασχηματισμό Laplace της $\Gamma(\alpha, \beta)$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής υψωμένος εις την n , (όπου n θετικός ακέραιος), αφού είναι συνέλιξη n εκθετικών σ.κ. με παράμετρο b . Αναλυτικότερα παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

Έτσι, έχουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό Laplace για την τ.μ. X :

$$\mathcal{L}_X(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^\alpha, \quad \forall s \geq 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace για την τ.μ. Y είναι:

$$\mathcal{L}_Y(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\delta}{\delta + s}\right)^\gamma, \quad \forall s \geq 0$$

Θα εξετάσουμε 2 περιπτώσεις. Αρχικά, κρατώντας το β σταθερό και αλλάζοντας το α , θα δούμε σε αυτή την περίπτωση αν είναι το ένα μικρότερο από το άλλο. Έπειτα,

αν κρατάμε το α σταθερό στον εκθέτη και αλλάζουμε το β , πάρουμε δηλαδή β_1 και β_2 , θα εξετάσουμε αν είναι το ένα μικρότερο από το άλλο.

1^η περίπτωση: Κρατάμε σταθερό το β και αλλάζουμε το α

Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (α_1, β) και η τ.μ. Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (α_2, β) .

Τότε για τη Γάμμα(α_1, β) ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{L}_X(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha_1}, \quad s \geq 0$$

Αντίστοιχα, για τη Γάμμα(α_2, β) ο μετασχηματισμός Laplace έχει ως εξής

$$\mathcal{L}_Y(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha_2}, \quad s \geq 0$$

Για $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$\left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha_1} > \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha_2}$$

αφού η βάση είναι ίδια, ισχύει ότι $\frac{\beta}{\beta + s} < 1$, και ο εκθέτης α_2 είναι μεγαλύτερος από τον εκθέτη α_1

Οπότε

$$\mathcal{L}_X(s) > \mathcal{L}_Y(s), \quad \forall s \geq 0$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

$$X \leq_{lt} Y$$

Εφαρμογή για $\beta = 2$, $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_2 = 8$:

Ο μετασχηματισμός Laplace για την τ.μ. X είναι

$$\mathcal{L}_X(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{2}{2 + s}\right)^5$$

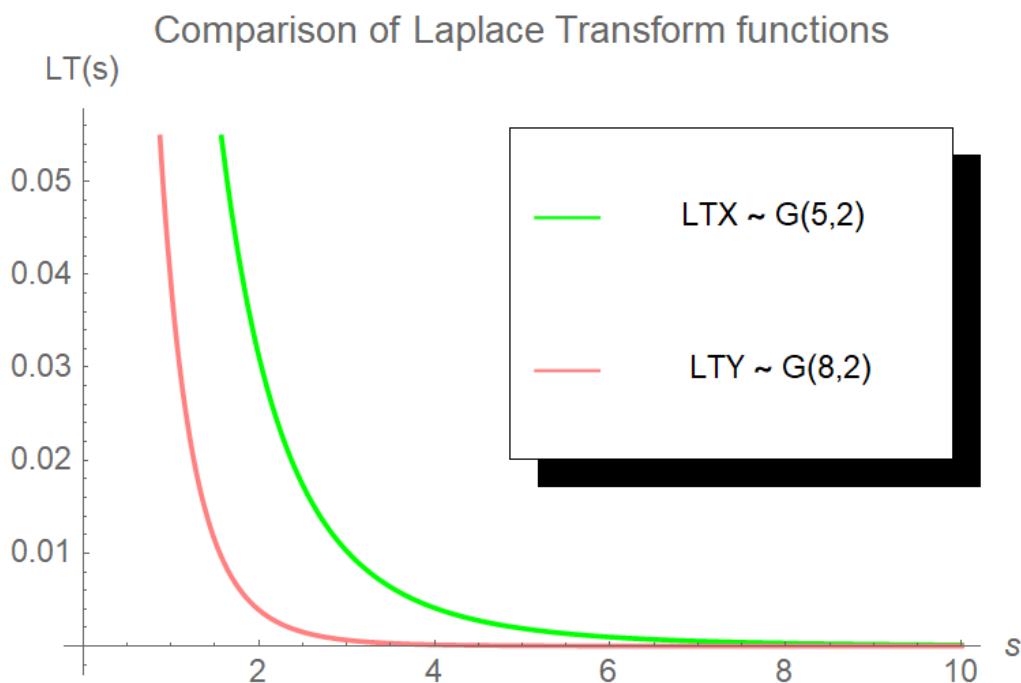
Ο μετασχηματισμός Laplace για την τ.μ. Y είναι

$$\mathcal{L}_Y(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^{\alpha_2} = \left(\frac{2}{2 + s}\right)^8$$

Διαπιστώνουμε ότι για κάθε θετική τιμή του s ισχύει ότι

$$\left(\frac{2}{2 + s}\right)^5 > \left(\frac{2}{2 + s}\right)^8$$

κάτι που επαληθεύει και τη γενική σχέση που αποδείξαμε πιο πάνω.



Γραφική Παράσταση 3.5.1 – Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(5,2)$, $Y \sim \text{Gamma}(8,2)$

Στο σχήμα 3.5.1 βλέπουμε συγκριτικά τις δύο γραφικές παραστάσεις των μετασχηματισμών Laplace. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. X είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. Y . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τ.μ. Y είναι μικρότερη ως προς το μετασχηματισμό Laplace από την τ.μ. X . Αυτό επαληθεύει το συμπέρασμα της αλγεβρικής ανάλυσης που κάναμε πιο πάνω.

2^η περίπτωση: Κρατάμε σταθερό το α και αλλάζουμε το β

Για τη Γάμμα(α, β_1) ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{L}_X(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + s}\right)^\alpha, \quad s \geq 0$$

Για τη Γάμμα(α, β_2) ο μετασχηματισμός Laplace έχει ως εξής

$$\mathcal{L}_Y(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}\right)^\alpha, \quad s \geq 0$$

Αν $\beta_1 < \beta_2$:

Καθώς το κλάσμα με το μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο για κάθε θετική τιμή των β_1, β_2 και αφού $\beta_2 > \beta_1$ και ο εκθέτης μένει σταθερός, καταλήγουμε στο ότι

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + s}\right)^\alpha < \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}\right)^\alpha$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}_X(s) < \mathcal{L}_Y(s), \quad \forall s \geq 0$$

Οπότε, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

$$Y \leq_{lt} X$$

Εφαρμογή για $\alpha = 6, \beta_1 = 10$ και $\beta_2 = 15$:

Για τη Γάμμα($6, 10$) έχουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}_X(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + s}\right)^\alpha = \left(\frac{10}{10 + s}\right)^6$$

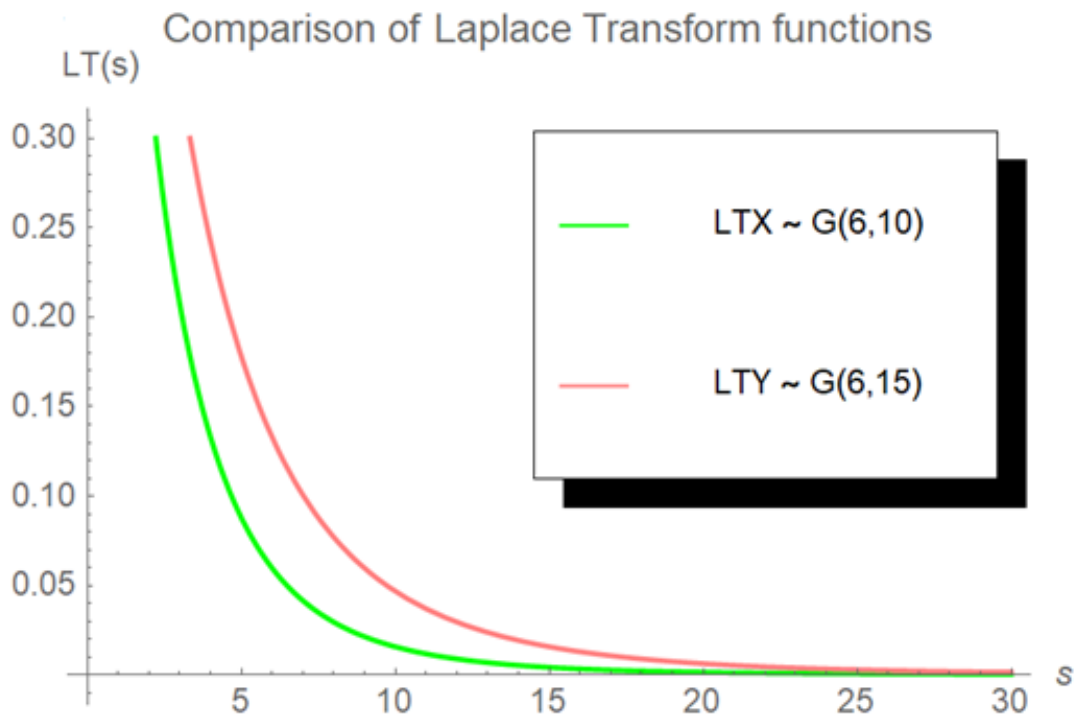
Αντίστοιχα, για τη Γάμμα($6, 15$) ο μετασχηματισμός Laplace έχει ως εξής

$$\mathcal{L}_Y(s) = \hat{f}(s) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}\right)^\alpha = \left(\frac{15}{15 + s}\right)^6$$

Για κάθε $s > 0$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{10}{10 + s}\right)^6 < \left(\frac{15}{15 + s}\right)^6$$

Και έτσι καταλήγουμε στο ίδιο γενικό αποτέλεσμα που είδαμε πιο πάνω.



Γραφική Παράσταση 3.5.2 – Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(6,10)$, $Y \sim \text{Gamma}(6,15)$

Το σχήμα 3.5.2 παριστάνει τις δύο γραφικές παραστάσεις των μετασχηματισμών Laplace. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. Y είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. X . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τον μετασχηματισμό Laplace. Έτσι, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με την αλγεβρική ανάλυση που προηγήθηκε.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι

$$\text{Για } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ ισχύει ότι } \mathcal{L}_{F_X}(s) > \mathcal{L}_{F_Y}(s), \quad \forall s \geq 0$$

$$\text{Για } \beta_1 < \beta_2 \text{ ισχύει ότι } \mathcal{L}_{F_X}(s) < \mathcal{L}_{F_Y}(s), \quad \forall s \geq 0$$

Σχετικά με τη ροπογεννήτρια της τ.μ. X

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx = \int_0^{\infty} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο για $t < \beta$.

Αν λοιπόν $t < \beta$ τότε η τιμή του ολοκληρώματος είναι η εξής:

$$\frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} \int_0^{\infty} \frac{(\beta-t)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$$

Έχοντας αυτό τον περιορισμό στην τιμή του t για τη ροπογεννήτρια στην κατανομή Γάμμα, θα δούμε και παρακάτω στη γραφική παράσταση που θα κάνουμε, ότι το σχήμα σταματάει στο β και δεν μπορεί να πάει παραπάνω γιατί δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια για μεγαλύτερες τιμές.

1^η περίπτωση: Κρατάμε σταθερό το β και αλλάζουμε το α

Έστω η τ.μ. X ακολουθεί την $G(\alpha_1, \beta)$ και η τ.μ. Y ακολουθεί την $G(\alpha_2, \beta)$. Η ροπογεννήτρια για την τ.μ. X είναι $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1}$ και αντίστοιχα για την τ.μ. Y είναι $M_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_2}$.

Για $\alpha_1 < \alpha_2$:

Αρχικά για $t < \beta$ έχουμε $\frac{\beta}{\beta-t} > 1$. Οπότε, έχοντας την ίδια βάση και μεγαλύτερο αριθμητή από παρονομαστή, αφού $\alpha_1 < \alpha_2$ καταλήγουμε στο ότι $\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1} < \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_2}$ άρα τελικά $M_X(t) < M_Y(t)$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.2), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$X \leq_{mgf} Y$$

Εφαρμογή για $\beta = 2$, $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 4$:

Για τη Γάμμα(3,2) έχουμε

$$M_X(t) = \left(\frac{2}{2-t}\right)^3, \quad t < 2$$

Για τη Γάμμα(4,2) έχουμε

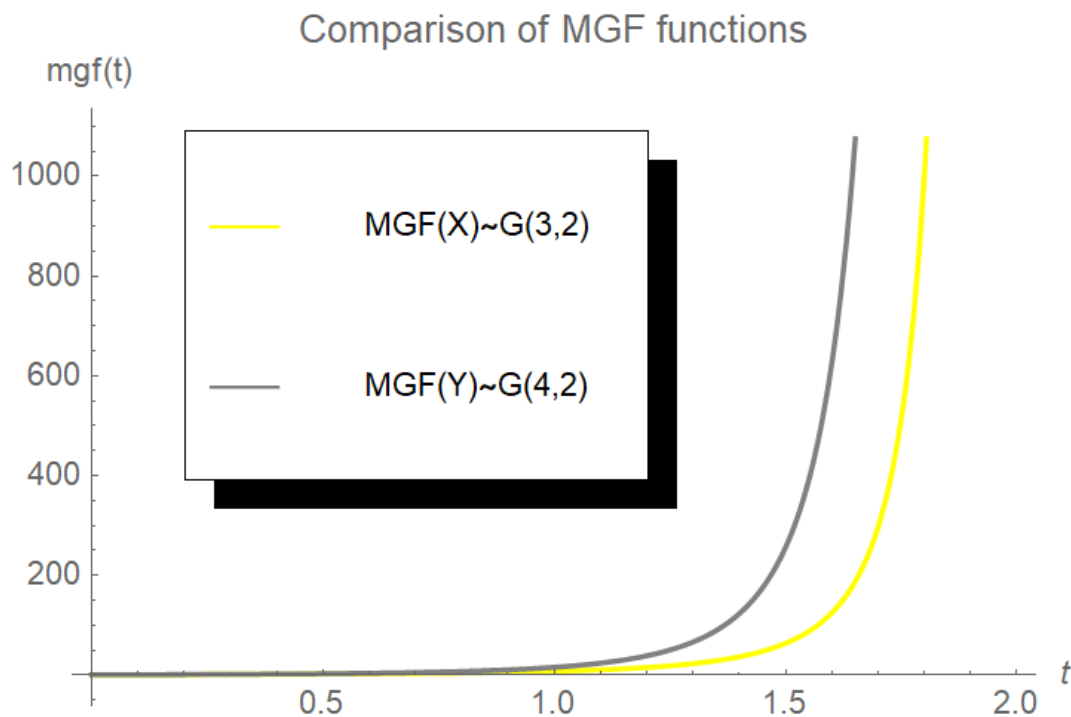
$$M_Y(t) = \left(\frac{2}{2-t}\right)^4, \quad t < 2$$

Διαπιστώνουμε ότι

$$\left(\frac{2}{2-t}\right)^3 < \left(\frac{2}{2-t}\right)^4, \quad t < 2$$

Άρα επαληθεύεται το ότι $M_X(t) < M_Y(t)$ και συνεπώς ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$X \leq_{mgf} Y$$



*Γραφική Παράσταση 3.5.3 – Σύγκριση Ροπογεννητριών
των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(3,2)$, $Y \sim \text{Gamma}(4,2)$*

Στο διάγραμμα 3.5.3 βλέπουμε συγκριτικά τις δύο γραφικές παραστάσεις των ροπογεννητριών. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. Y είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. X . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ροπογεννήτρια της τ.μ. Y είναι μεγαλύτερη από αυτήν της τ.μ. X . Διαπιστώνουμε με αυτό τον τρόπο ότι το συμπέρασμα είναι το ίδιο αλγεβρικά και σχηματικά.

2^η περίπτωση: Κρατάμε σταθερό το α και αλλάζουμε το β

Έστω η τ.μ. X ακολουθεί την $G(\alpha, \beta_1)$ και η τ.μ. Y ακολουθεί την $G(\alpha, \beta_2)$. Η ροπογεννήτρια για την τ.μ. X είναι $M_X(t) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t}\right)^\alpha$ και αντίστοιχα για την τ.μ. Y είναι $M_Y(t) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)^\alpha$.

Για $\beta_1 < \beta_2$:

Κρατώντας το α σταθερό και έχοντας υπόψιν ότι $t < \beta_1, \beta_2$, αφού το β_1 είναι μικρότερο από το β_2 , πάντα ο παρονομαστής της ροπογεννήτριας της τ.μ. X θα είναι μικρότερος, που σημαίνει μεγαλύτερο κλάσμα, άρα έχουμε ότι $\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - t}\right)^\alpha > \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - t}\right)^\alpha$.

Άρα τελικά $M_X(t) > M_Y(t)$.

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.2), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$Y \leq_{mgf} X$$

Εφαρμογή για $\alpha = 6$, $\beta_1 = 10$ και $\beta_2 = 15$:

Για τη Γάμμα(6,10) έχουμε

$$M_X(t) = \left(\frac{10}{10-t}\right)^6, \quad t < 10$$

Για τη Γάμμα(6,15) έχουμε

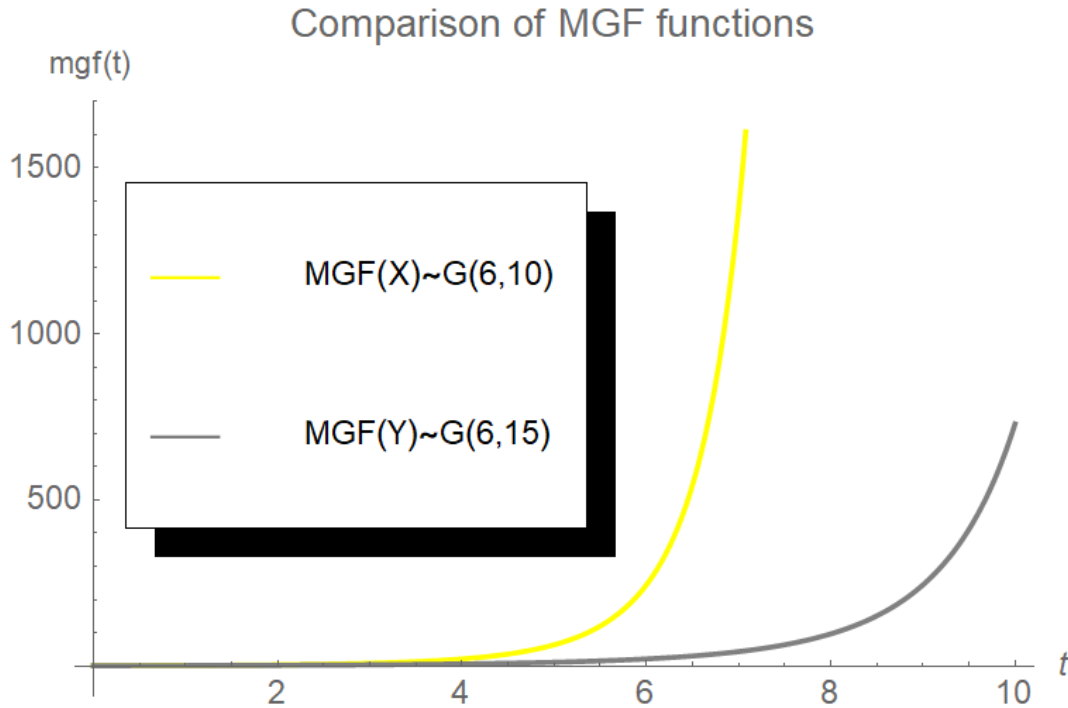
$$M_Y(t) = \left(\frac{15}{15-t}\right)^6, \quad t < 15$$

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{10}{10-t}\right)^6 > \left(\frac{15}{15-t}\right)^6, \quad \forall t < 10$$

Έτσι επαληθεύεται ότι $M_X(t) > M_Y(t)$ και συνεπώς ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$Y \leq_{mgf} X$$



Γραφική Παράσταση 3.5.4 – Σύγκριση Ροπογεννητριών
των τ.μ. $X \sim \text{Gamma}(6,10)$, $Y \sim \text{Gamma}(6,15)$

Στο διάγραμμα 3.5.4 βλέπουμε συγκριτικά τις δύο γραφικές παραστάσεις των ροπογεννητριών. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. X είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. Y . Το συμπέρασμα λοιπόν που εξάγεται από το σχήμα, είναι ότι ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X είναι μεγαλύτερος από τον μετασχηματισμό Laplace της τ.μ. Y . Έτσι, με θεωρία και πράξη καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

3.6 Εφαρμογή σε Σύγκριση Μείξης Εκθετικών με Εκθετική

Αρχικά, επειδή δεν έχουμε αναφερθεί καθόλου προηγουμένως σε μείξεις εκθετικών, θα γίνει μια μικρή αναφορά εδώ για το πώς ορίζεται, πριν ξεκινήσουμε το παράδειγμα.

Μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x} + \dots + a_n b_n e^{-b_n x} = \sum_{i=1}^n a_i b_i e^{-b_i x}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n > 0$$

και με αναγκαία συνθήκη

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

λέγεται μείξη n εκθετικών κατανομών με παραμέτρους b_1, b_2, \dots, b_n και αντίστοιχα βάρη a_1, a_2, \dots, a_n (Πολίτης, 2019).

Ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί γραμμική συνάρτηση όταν έχουμε να κάνουμε με μείξεις κατανομών. Έστω η σ.κ F μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) , \quad 0 < a_i < 1 \text{ για } i = 1, 2$$

$$a_1 + a_2 = 1 \text{ και } F_1, F_2 \text{ σ.κ}$$

Τότε ισχύει

$$\mathcal{L}_F(s) = a_1 \cdot \mathcal{L}_{F_1}(s) + a_2 \cdot \mathcal{L}_{F_2}(s) , \quad s \geq 0$$

Για την περίπτωση που η F γράφεται σαν μείξη περισσότερων από δύο σ.κ. ισχύει αντίστοιχη σχέση.

Προχωρώντας τώρα στο παράδειγμα:

Έστω η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$$

και η τ.μ. Y ακολουθεί τη μείξη εκθετικών κατανομών με σ.π.π.

$$f_Y(x) = \lambda \mu e^{-x\mu} + (1 - \lambda) k e^{-xk}$$

Έχουμε πάρει λοιπόν μια μείξη εκθετικών με παραμέτρους k, μ και βάρη λ για τη μία και $1 - \lambda$ για την άλλη. Έχει νόημα να συγκρίνουμε τη μείξη εκθετικών με την εκθετική όταν έχουν την ίδια μέση τιμή.

Η μέση τιμή της εκθετικής είναι

$$E(X) = \frac{1}{\theta}$$

Η μέση τιμή της μείξης εκθετικών είναι

$$E(Y) = \lambda \frac{1}{k} + (1 - \lambda) \frac{1}{\mu}$$

Θα συγκρίνουμε λοιπόν τις τ.μ. X και Y ως προς το μετασχηματισμό Laplace και τη ροπογεννήτρια αν γνωρίζουμε ότι οι τ.μ. X, Y έχουν την ίδια μέση τιμή:

$$\frac{1}{\theta} = \lambda \frac{1}{k} + (1 - \lambda) \frac{1}{\mu}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $k < \theta < \mu$. Το θ αναγκαστικά θα πρέπει να είναι ανάμεσα στα k, μ για να έχουμε ισότητα. Οπότε είτε θα έχουμε $k < \theta < \mu$, είτε $\mu < \theta < k$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της X είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_X(t) dt = \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \theta e^{-t(\theta+s)} \\ &= \frac{\theta e^{-t(\theta+s)}}{-(\theta+s)} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{\theta e^0}{-(\theta+s)} = \frac{\theta}{\theta+s}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της Y είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_Y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [\lambda \mu e^{-t\mu} + (1 - \lambda) k e^{-tk}] dt \\ &= \int_0^{\infty} [e^{-st} (\lambda \mu e^{-t\mu}) + e^{-st} (1 - \lambda) k e^{-tk}] dt \\ &= \lambda \mu \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{-t\mu}) dt + (1 - \lambda) k \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{-tk}) dt \\ &= \lambda \mu \int_0^{\infty} e^{-t(s+\mu)} dt + (1 - \lambda) k \int_0^{\infty} e^{-t(s+k)} dt \\ &= \lambda \mu \frac{e^{-t(s+\mu)}}{-(s+\mu)} \Big|_0^{\infty} + (1 - \lambda) k \frac{e^{-t(s+k)}}{-(s+k)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \lambda \mu \left(0 + \frac{1}{s+\mu} \right) + (1 - \lambda) k \left(0 + \frac{1}{s+k} \right) = \frac{\lambda \mu}{s+\mu} + \frac{(1 - \lambda) k}{s+k} \\ &= \frac{\lambda \mu}{s+\mu} + \frac{k}{s+k} - \frac{\lambda k}{s+k}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι μετασχηματισμοί Laplace για τις τ.μ. X και Y αντίστοιχα, είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(s) &= \frac{\theta}{\theta+s}, \quad s \geq 0 \\ \mathcal{L}_Y(s) &= \frac{\lambda \mu}{s+\mu} + \frac{k}{s+k} - \frac{\lambda k}{s+k}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε πολλές παραμέτρους στις πιο πάνω σχέσεις, είναι δύσκολο να καταλήξουμε σε κάποιο γενικό αποτέλεσμα και αν ακόμη καταφέρουμε να βγάλουμε κάποια συνθήκη, αυτή θα είναι πολύπλοκη. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε, είναι να βάλουμε συγκεκριμένες τιμές για μερικές παραμέτρους και να βγάλουμε μια συνθήκη για τα υπόλοιπα. Αυτό θα αποτελέσει μια αριθμητική διερεύνηση και όχι απόδειξη.

Έστω $k = 1$ και $\mu = 2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(s) &= \frac{2\lambda}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{\lambda}{s+1} \\ &= \frac{2\lambda(s+1) + (s+2)(1-\lambda)}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{\lambda s + s + 2}{(s+1)(s+2)}, \quad s \geq 0\end{aligned}$$

και

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{\theta}{\theta + s}, \quad s \geq 0$$

Το επιτρεπτό διάστημα τιμών για τα βάρη λ και $1 - \lambda$ της μείξης εκθετικών είναι περιορισμένο. Θα πρέπει να ισχύει $0 < \lambda < 1$. Επίσης, το θ όπως αναφέραμε και προηγουμένως, βρίσκεται μεταξύ των k και μ άρα ισχύει ότι $1 < \theta < 2$ και προφανώς $\lambda < \theta$. Βάσει αυτών των περιορισμών για τις τιμές των λ και θ , και με τη βοήθεια του Mathematica, βλέπουμε ότι $\mathcal{L}_X(s) > \mathcal{L}_Y(s)$ για κάθε θετική τιμή του s . Αυτό βέβαια δεν μπορεί να αποτελέσει απόδειξη, καθώς δεν έχουμε καταλήξει σε κάποια γενική συνθήκη, αλλά κάναμε μια αριθμητική διερεύνηση δίνοντας κάποιες συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους μας.

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1), και για αυτές τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

$$X \leq_{lt} Y$$

Η ροπογεννήτρια της X είναι:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \theta e^{-\theta x} dx = \theta \int_0^{\infty} e^{-(\theta-t)x} dx \\ &= \theta \left[\frac{e^{-(\theta-t)x}}{-(\theta-t)} \right]_0^{\infty} = \theta \left[\frac{e^{-\infty}}{-(\theta-t)} + \frac{e^0}{\theta-t} \right] = \theta \left[0 + \frac{1}{\theta-t} \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\theta}{\theta - t}, \quad t < \theta$$

Η ροπογεννήτρια της Y είναι:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = \int_0^{\infty} e^{ty} f(y) dy = \int_0^{\infty} e^{ty} [\lambda \mu e^{-y\mu} + (1 - \lambda)k e^{-yk}] dy \\ &= \lambda \mu \int_0^{\infty} (e^{ty} e^{-y\mu}) dy + (1 - \lambda)k \int_0^{\infty} (e^{ty} e^{-yk}) dy \\ &= \lambda \mu \int_0^{\infty} e^{-y(\mu-t)} dy + (1 - \lambda)k \int_0^{\infty} e^{-y(k-t)} dy \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Για να υπάρχει ροπογεννήτρια στη μείξη εκθετικών, αφού έχω δύο ολοκληρώματα, πρέπει να συγκλίνουν και τα δύο, άρα πρέπει να περιορίσω το t έτσι ώστε να είναι μικρότερο από το minimum των δύο παραμέτρων. Έτσι, αφού για να συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα πρέπει $t < \mu$ και για να συγκλίνει το δεύτερο πρέπει $t < k$, και γνωρίζοντας ότι $k < \theta < \mu$, έχουμε τελικά σαν περιορισμό για τη ροπογεννήτρια το $t < k$.

Συνεχίζοντας τις πράξεις και λύνοντας τα ολοκληρώματα βάσει του πιο πάνω περιορισμού, καταλήγουμε στο εξής:

$$\begin{aligned} \lambda \mu \left[\frac{e^{-y(\mu-t)}}{-(\mu-t)} \right]_0^{\infty} + (1 - \lambda)k \left[\frac{e^{-y(k-t)}}{-(k-t)} \right]_0^{\infty} &= \lambda \mu \left(0 + \frac{1}{\mu-t} \right) + (1 - \lambda)k \left(0 + \frac{1}{k-t} \right) \\ &= \frac{\lambda \mu}{\mu-t} + \frac{(1 - \lambda)k}{k-t} = \frac{\lambda \mu}{\mu-t} + \frac{k}{k-t} - \frac{\lambda k}{k-t}, \quad t < k \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε και πάλι πολλές παραμέτρους, είναι δύσκολο να καταλήξουμε σε κάποιο γενικό τύπο για να συγκρίνουμε τις ροπογεννήτριες. Θα πραγματοποιήσουμε μια αριθμητική διερεύνηση, ορίζοντας σταθερές τιμές στις παραμέτρους k και μ για να βγάλουμε μια συνθήκη για τα υπόλοιπα.

Έστω $k = 2$ και $\mu = 5$:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \frac{5\lambda}{5-t} + \frac{2}{2-t} - \frac{2\lambda}{2-t}, \quad t < 2 \\ &= \frac{5\lambda(2-t) + (2-2\lambda)(5-t)}{(5-t)(2-t)}, \quad t < 2 \\ &= \frac{10 - 3\lambda t - 2t}{(5-t)(2-t)}, \quad t < 2 \end{aligned}$$

και

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}, \quad t < \theta$$

Το επιτρεπτό διάστημα τιμών για τα βάρη λ και $1 - \lambda$ της μείξης εκθετικών είναι περιορισμένο. Θα πρέπει να ισχύει $0 < \lambda < 1$. Επίσης, το θ όπως αναφέραμε και προηγουμένως, βρίσκεται μεταξύ των k και μ άρα ισχύει ότι $2 < \theta < 5$ και προφανώς $\lambda < \theta$. Βάσει αυτών των περιορισμών για τις τιμές των λ και θ , και με τη βοήθεια του Mathematica, βλέπουμε ότι $M_X(t) < M_Y(t)$ για τιμές του $t < k$ σύμφωνα με την αριθμητική διερεύνηση που πραγματοποιήσαμε, χωρίς αυτό να αποτελεί απόδειξη καθώς δεν έχουμε καταλήξει σε κάποιο γενικό τύπο.

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.2), και για αυτές τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$X \leq_{mgf} Y$$

Όταν έχουμε δύο κινδύνους και ο ένας έχει μικρότερη μέση τιμή από τον άλλο, τότε ξέρουμε ποιος είναι πιο επικίνδυνος χωρίς να χρησιμοποιήσουμε κάποια συνθήκη ή κριτήριο. Σαφώς στις περισσότερες περιπτώσεις θα επιλέξουμε αυτόν με τη μικρότερη μέση τιμή αφού θέλουμε το λιγότερο ριψοκίνδυνο χαρτοφυλάκιο. Κάτι όμως που έχει μεγάλο ενδιαφέρον στην πράξη στον αναλογισμό και αξίζει να δούμε, είναι όταν οι κίνδυνοι έχουν την ίδια μέση τιμή. Εκεί υπάρχει μεν ένα κριτήριο, όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη ενότητα, επιλέγοντας αυτόν με τη μικρότερη διασπορά. Το συγκεκριμένο κριτήριο δεν είναι το μοναδικό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα.

Αν πάρουμε μια μείξη εκθετικών και μια εκθετική με την ίδια μέση τιμή, αν συγκρίνουμε τις ουρές τους θα διαπιστώσουμε ότι τέμνονται. Συνεπώς η μία δεν είναι στοχαστικά μικρότερη από την άλλη, καθώς αν θυμηθούμε τον ορισμό της στοχαστικής διάταξης, τότε θα πρέπει η μια ουρά να είναι παντού πάνω από την άλλη. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν έχουν την ίδια μέση τιμή. Αν ίσχυε η στοχαστική διάταξη θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει και η διάταξη Laplace. Μήπως όμως, παρόλο που δεν ισχύει η στοχαστική διάταξη, ισχύει η διάταξη Laplace που είναι πιο ασθενής; Θα κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο μετασχηματισμών Laplace και θα δούμε τί γίνεται. Το ίδιο και με τις ροπογεννήτριες.

Έστω ότι οι τ.μ. X και Y έχουν τις ίδιες μέσες τιμές.

Θα γίνει εφαρμογή για $\theta = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{6}$, $\mu = \frac{1}{2}$:

$$E(X) = \frac{1}{\theta} = E(Y) = \lambda \frac{1}{k} + (1 - \lambda) \frac{1}{\mu} = 3$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X για αυτές τις τιμές των παραμέτρων είναι:

$$\mathcal{L}_X(s) = \frac{\theta}{\theta + s} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + s} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1 + 3s}{3}} = \frac{1}{1 + 3s}, \quad \forall s \geq 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. Y για αυτές τις τιμές των παραμέτρων είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(s) &= \frac{\lambda\mu}{s + \mu} + \frac{(1 - \lambda)k}{s + k} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}}{s + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{8}}{s + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{24}}{s + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2s + 1}{2}} + \frac{\frac{3}{24}}{\frac{6s + 1}{6}} \\ &= \frac{2}{8(2s + 1)} + \frac{18}{24(6s + 1)} = \frac{1}{4(2s + 1)} + \frac{3}{4(6s + 1)}, \quad \forall s \geq 0 \end{aligned}$$

Προσπαθώντας να συγκρίνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο τ.μ., θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του s ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{1 + 3s} > \frac{1}{4(2s + 1)} + \frac{3}{4(6s + 1)}$$

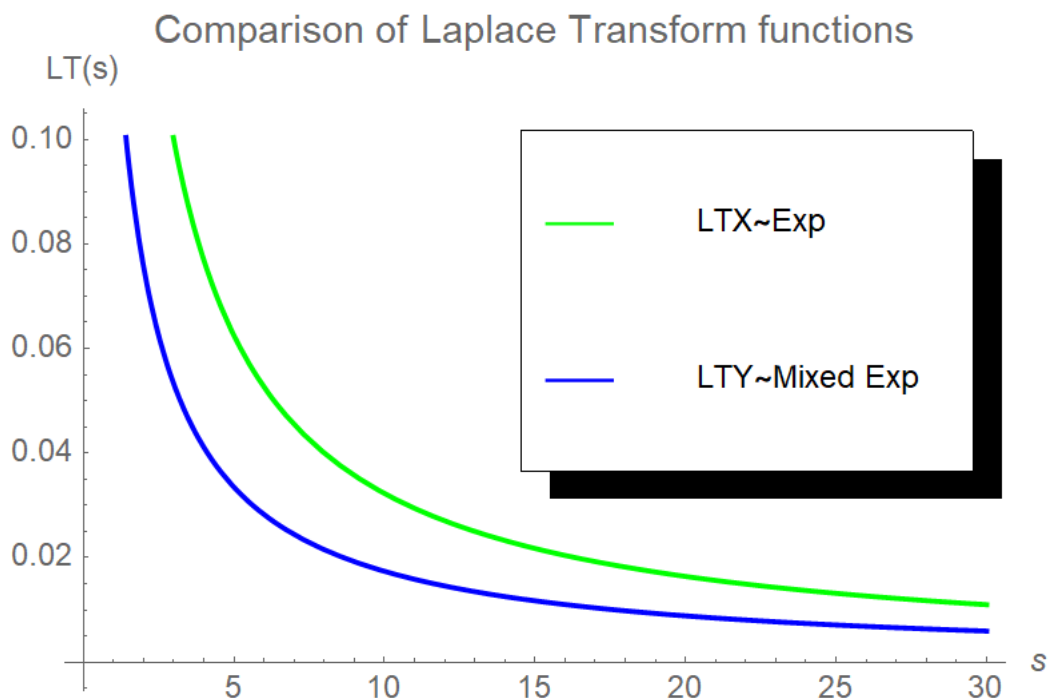
και, αν η σχέση αυτή αληθεύει για κάθε $s \geq 0$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η μία μεταβλητή είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη των μετασχηματισμών Laplace. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 3s} > \frac{1}{4} \left[\frac{12s + 4}{12s^2 + 8s + 1} \right] &\Leftrightarrow 48s^2 + 32s + 4 > 12s + 4 + 36s^2 + 12s \Leftrightarrow \\ &12s^2 + 8s > 0 \end{aligned}$$

που ισχύει πάντα για κάθε $s \geq 0$. Οπότε έτσι επαληθεύεται η αρχική μας υπόθεση και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\mathcal{L}_X(s) > \mathcal{L}_Y(s), \quad \forall s \geq 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως όταν δύο τ.μ. X και Y έχουν την ίδια μέση τιμή, παρόλο που η μία δεν είναι στοχαστικά μικρότερη από την άλλη, μπορεί ο ένας μετασχηματισμός Laplace να είναι πάνω από τον άλλο. Δηλαδή η μία μεταβλητή να είναι μικρότερη από την άλλη ως προς τη διάταξη μετασχηματισμών Laplace.



Γραφική Παράσταση 3.6.1 – Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ.

$X \sim$ Εκθετική, $Y \sim$ Μείξη εκθετικών

Το σχήμα 3.6.1 παριστάνει τις δύο γραφικές παραστάσεις των μετασχηματισμών Laplace. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. X είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. Y . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τ.μ. Y είναι μικρότερη από την τ.μ. X ως προς το μετασχηματισμό Laplace. Έτσι, πρακτικά, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με προηγουμένως που εφαρμόσαμε θεωρητική μελέτη.

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. X είναι:

$$M_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - t} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1-3t}{3}} = \frac{1}{1-3t}, \quad t < \frac{1}{3}$$

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. Y είναι:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \frac{\lambda\mu}{\mu - t} + \frac{k(1-\lambda)}{k - t} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} + \frac{\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{6} - t} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1-2t}{2}} + \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1-6t}{6}} \\ &= \frac{1}{4(1-2t)} + \frac{3}{4(1-6t)}, \quad t < \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Για να συγκρίνουμε τις ροπογεννήτριες των δύο τ.μ., θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του t ισχύει το πιο κάτω:

$$\frac{1}{1-3t} > \frac{1}{4(1-2t)} + \frac{3}{4(1-6t)}$$

Αν αληθεύει για κάθε $t < \frac{1}{6}$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η μία μεταβλητή είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη των ροπογεννητριών. Έχουμε:

$$\frac{1}{1-3t} > \frac{1}{4} \left[\frac{4-12t}{12t^2-8t+1} \right] \Leftrightarrow 12t^2 - 8t + 1 > 9t^2 - 6t + 1 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t > 0$$

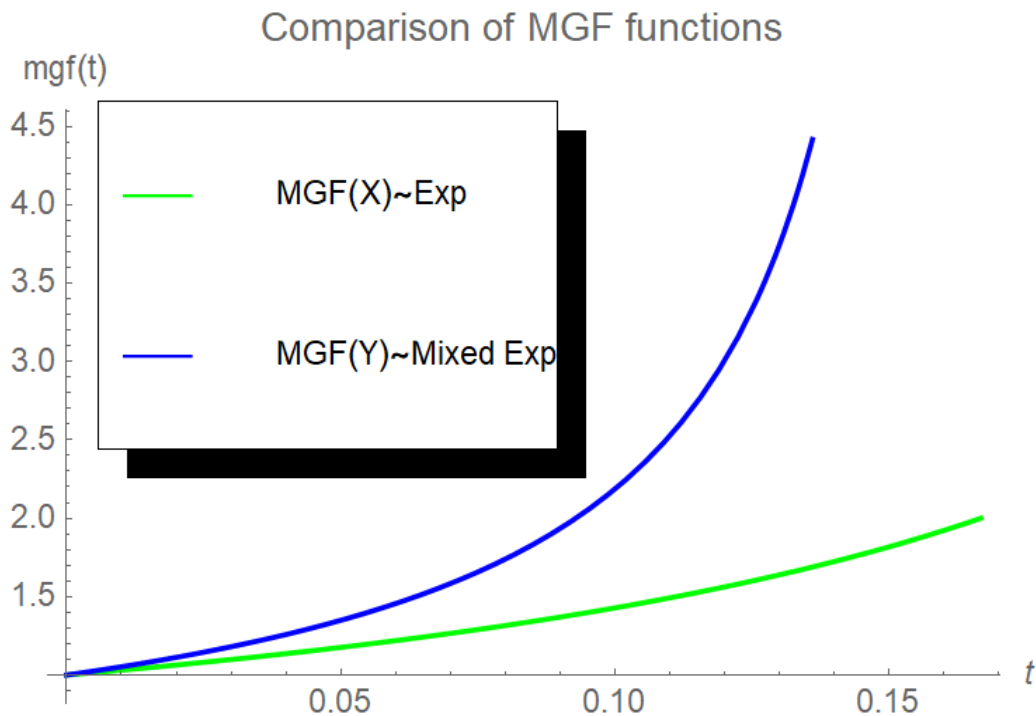
που είναι άτοπο για $t < \frac{1}{6}$. Οπότε η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει και συνεπώς η ανίσωση θα πρέπει να έχει αντίθετη φορά:

$$\frac{1}{1-3t} < \frac{1}{4(1-2t)} + \frac{3}{4(1-6t)}, \quad t < \frac{1}{6}$$

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι:

$$M_X(t) < M_Y(t)$$

Συνεπώς, όταν δύο τ.μ. X και Y έχουν την ίδια μέση τιμή, παρόλο που αυτό σημαίνει ότι η μία δεν είναι στοχαστικά μικρότερη από την άλλη, μπορεί η μία ροπογεννήτρια να είναι πάνω από την άλλη.



Γραφική Παράσταση 3.6.2 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ.

$X \sim$ Εκθετική, $Y \sim$ Μείξη εκθετικών

Στο σχήμα 3.6.2 βλέπουμε τις δύο γραφικές παραστάσεις των ροπογεννητριών των τ.μ. X και Y . Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. Y είναι πιο πάνω από την καμπύλη της τ.μ. X . Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι η ροπογεννήτρια της τ.μ. Y είναι μεγαλύτερη από αυτήν της τ.μ. X . Έτσι, επαληθεύεται το συμπέρασμα μας για $M_X(t) < M_Y(t)$.

3.7 Εφαρμογή σε Δύο Μείξεις Εκθετικών

Έστω η τ.μ. X ακολουθεί τη μείξη εκθετικών κατανομών με σ.π.π.

$$f_X(x) = kle^{-xl} + (1 - k)me^{-xm}$$

Έστω η τ.μ. Y ακολουθεί τη μείξη εκθετικών κατανομών με σ.π.π.

$$f_Y(y) = \kappa \lambda e^{-y\lambda} + (1 - \kappa) \mu e^{-y\mu}$$

Η μέση τιμή της τ.μ. X είναι:

$$E(X) = k \frac{1}{m} + (1 - k) \frac{1}{l}$$

Η μέση τιμή της τ.μ. Y είναι:

$$E(Y) = \kappa \frac{1}{\mu} + (1 - \kappa) \frac{1}{\lambda}$$

Θα συγκρίνουμε τις τ.μ. X και Y ως προς το μετασχηματισμό Laplace και τη ροπογεννήτρια αν γνωρίζουμε ότι

$$k \frac{1}{m} + (1 - k) \frac{1}{l} = \kappa \frac{1}{\mu} + (1 - \kappa) \frac{1}{\lambda}, \quad k, l, m, \kappa, \lambda, \mu \geq 1,$$

δηλαδή όταν οι τ.μ. X, Y έχουν την ίδια μέση τιμή.

Η μέση τιμή της τ.μ. X είναι

$$E(X) = k \frac{1}{m} + (1 - k) \frac{1}{l}$$

Η μέση τιμή της τ.μ. Y είναι

$$E(Y) = \kappa \frac{1}{\mu} + (1 - \kappa) \frac{1}{\lambda}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της X είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_X(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [k l e^{-tl} + (1-k)m e^{-tm}] dt \\
&= \int_0^{\infty} [e^{-st} (k l e^{-tl}) + e^{-st} (1-k)m e^{-tm}] dt \\
&= k l \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{-tl}) dt + (1-k)m \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{-tm}) dt \\
&= k l \int_0^{\infty} e^{-t(s+l)} dt + (1-k)m \int_0^{\infty} e^{-t(s+m)} dt = \frac{k l}{s+l} + \frac{(1-k)m}{s+m} \\
&= \frac{k l}{s+l} + \frac{m}{s+m} - \frac{k m}{s+m}, \quad s \geq 0
\end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της Y είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_Y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [\kappa \lambda e^{-t\lambda} + (1-\kappa)\mu e^{-t\mu}] dt \\
&= \int_0^{\infty} [e^{-st} (\kappa \lambda e^{-t\lambda}) + e^{-st} (1-\kappa)\mu e^{-t\mu}] dt \\
&= \kappa \lambda \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{-t\lambda}) dt + (1-\kappa)\mu \int_0^{\infty} (e^{-st} e^{-t\mu}) dt \\
&= \kappa \lambda \int_0^{\infty} e^{-t(s+\lambda)} dt + (1-\kappa)\mu \int_0^{\infty} e^{-t(s+\mu)} dt = \frac{\kappa \lambda}{s+\lambda} + \frac{(1-\kappa)\mu}{s+\mu} \\
&= \frac{\kappa \lambda}{s+\lambda} + \frac{\mu}{s+\mu} - \frac{\kappa \mu}{s+\mu}, \quad s \geq 0
\end{aligned}$$

Η ροπογεννήτρια της X είναι:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} [k l e^{-xl} + (1-k)m e^{-xm}] dx \\
&= k l \int_0^{\infty} (e^{tx} e^{-xl}) dx + (1-k)m \int_0^{\infty} (e^{tx} e^{-xm}) dx \\
&= k l \int_0^{\infty} e^{-x(l-t)} dx + (1-k)m \int_0^{\infty} e^{-x(m-t)} dx
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Στη μείξη εκθετικών, για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα που σπάσαμε στα δύο πρέπει να συγκλίνει και το ένα και το άλλο. Άρα πρέπει το t να είναι μικρότερο από το minimum των δύο παραμέτρων.

Για να συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα πρέπει $t < l$. Για να συγκλίνει το δεύτερο πρέπει $t < m$, και γνωρίζοντας ότι $l < \theta < m$, έχουμε τελικά σαν περιορισμό για τη ροπογεννήτρια το $t < l$.

Συνεχίζοντας τις πράξεις και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα βάσει του πιο πάνω περιορισμού, καταλήγουμε στο εξής:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= kl \frac{e^{-x(l-t)}}{-(l-t)} \Big|_0^\infty + (1-k)m \frac{e^{-x(m-t)}}{-(m-t)} \Big|_0^\infty \\
&= kl \left(0 + \frac{1}{l-t}\right) + (1-k)m \left(0 + \frac{1}{m-t}\right) = \frac{kl}{l-t} + \frac{(1-k)m}{m-t} \\
&= \frac{kl}{l-t} + \frac{m}{m-t} - \frac{mk}{m-t}, \quad t < l
\end{aligned}$$

Η ροπογεννήτρια της Y είναι:

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) = \int_0^\infty e^{ty} f(y) dy = \int_0^\infty e^{ty} [\kappa \lambda e^{-y\lambda} + (1-\kappa)\mu e^{-y\mu}] dy \\
&= \kappa \lambda \int_0^\infty (e^{ty} e^{-y\lambda}) dy + (1-\kappa)\mu \int_0^\infty (e^{ty} e^{-y\mu}) dy \\
&= \kappa \lambda \int_0^\infty e^{-y(\lambda-t)} dy + (1-\kappa)\mu \int_0^\infty e^{-y(\mu-t)} dy
\end{aligned}$$

Για να συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα θα πρέπει $t < \lambda$, ενώ για να συγκλίνει το δεύτερο θα πρέπει $t < \mu$. Γνωρίζοντας ότι $\lambda < \theta < \mu$, έχουμε τελικά σαν περιορισμό για τη ροπογεννήτρια το $t < \lambda$ αφού πρέπει να είναι μικρότερο από το ελάχιστο των δύο παραμέτρων.

Συνεχίζοντας τις πράξεις και λύνοντας τα ολοκληρώματα λαμβάνοντας υπόψιν και τον περιορισμό για το t , καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \kappa \lambda \frac{e^{-x(\lambda-t)}}{-(\lambda-t)} \Big|_0^\infty + (1-\kappa)\mu \frac{e^{-x(\mu-t)}}{-(\mu-t)} \Big|_0^\infty \\
&= \kappa \lambda \left(0 + \frac{1}{\lambda-t}\right) + (1-\kappa)\mu \left(0 + \frac{1}{\mu-t}\right) = \frac{\kappa \lambda}{\lambda-t} + \frac{(1-\kappa)\mu}{\mu-t} \\
&= \frac{\kappa \lambda}{\lambda-t} + \frac{\mu}{\mu-t} - \frac{\mu \kappa}{\mu-t}, \quad t < \lambda
\end{aligned}$$

Σε αυτή την εφαρμογή που έχουμε δύο μείξεις εκθετικών, είναι αρκετά δύσκολο να βγάλουμε γενική συνθήκη, για αυτό το λόγο θα το δούμε μόνο αριθμητικά και σχηματικά. Θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι μέσες τιμές των τ.μ. είναι ίσες γιατί αυτό στην πράξη έχει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Έστω λοιπόν ότι οι τ.μ. X και Y έχουν τις ίδιες μέσες τιμές.

Θα γίνει εφαρμογή για τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων: $k = \frac{1}{4}$, $l = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{7}$ για την τ.μ. X και $\kappa = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{8}$ για την τ.μ. Y .

Η σ.π.π. της τ.μ. X είναι

$$\begin{aligned} f_X(x) &= kle^{-xl} + (1-k)me^{-xm} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{7} e^{-\frac{1}{7}x} \\ &= \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} e^{-\frac{1}{7}x} = \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{3}{28} e^{-\frac{1}{7}x} \end{aligned}$$

Η σ.π.π. της τ.μ. Y είναι

$$f_Y(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} = \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} = \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{8}x}$$

Η μέση τιμή των δύο τ.μ. είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot 7 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 3 = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ E(Y) &= \frac{1}{3} \cdot 8 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

Έτσι όπως προαναφέραμε $E(X) = E(Y)$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(s) &= \frac{kl}{s+l} + \frac{m}{s+m} - \frac{km}{s+m} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{s+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{s+\frac{1}{7}} - \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}}{s+\frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{12}}{s+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{s+\frac{1}{7}} - \frac{\frac{1}{28}}{s+\frac{1}{7}} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3s+1}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{\frac{7s+1}{7}} - \frac{\frac{1}{28}}{\frac{7s+1}{7}} = \frac{3}{12(3s+1)} + \frac{1}{7s+1} - \frac{7}{28(7s+1)} \\ &= \frac{1}{4(3s+1)} + \frac{1}{7s+1} - \frac{1}{4(7s+1)} = \frac{1}{4(3s+1)} + \frac{3}{4(7s+1)}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. Y είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(s) &= \frac{\kappa\lambda}{s+\lambda} + \frac{\mu}{s+\mu} - \frac{\kappa\mu}{s+\mu} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{s+\frac{1}{8}} - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{s+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{s+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{s+\frac{1}{8}} - \frac{\frac{1}{24}}{s+\frac{1}{8}} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2s+1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{8s+1}{8}} - \frac{\frac{1}{24}}{\frac{8s+1}{8}} = \frac{1}{3(2s+1)} + \frac{1}{8s+1} - \frac{1}{3(8s+1)} \\ &= \frac{1}{3(2s+1)} + \frac{2}{3(8s+1)}, \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Θέλουμε να συγκρίνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο τ.μ. που εξετάζουμε. Θα μελετήσουμε για ποιες τιμές του s ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\frac{1}{4(3s+1)} + \frac{3}{4(7s+1)} < \frac{1}{3(2s+1)} + \frac{2}{3(8s+1)}$$

Αν λοιπόν διαπιστώσουμε ότι η σχέση αυτή αληθεύει για κάθε θετική τιμή του s , τότε θα μπορούμε να πούμε ότι η μία μεταβλητή είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη των μετασχηματισμών Laplace.

Συνεχίζοντας τις πράξεις, έχουμε:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{16s+4}{21s^2+10s+1} \right] < \frac{1}{3} \left[\frac{12s+3}{16s^2+10s+1} \right] \Leftrightarrow$$

$$(48s+12)(16s^2+10s+1) < (48s+12)(21s^2+10s+1) \Leftrightarrow$$

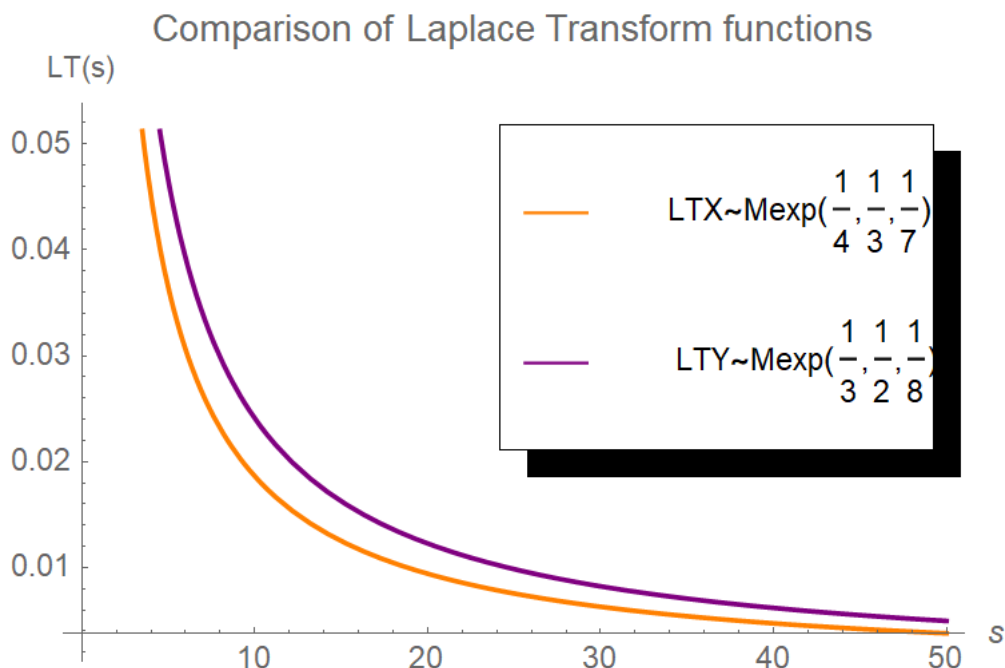
$$0 < 5s^2, \quad \forall s \geq 0$$

κάτι που προφανώς ισχύει πάντα, οπότε ο ισχυρισμός μας είναι σωστός και τελικά ισχύει

$$L_X(t) < L_Y(t)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μεγαλύτερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

$$Y \leq_{lt} X$$



Γραφική Παράσταση 3.7.1 – Σύγκριση Μετασχηματισμών Laplace των τ.μ.

$$X \sim \text{Μείξη εκθετικών } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right), Y \sim \text{Μείξη εκθετικών } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

Το διάγραμμα 3.7.1 μας δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των δύο μετασχηματισμών Laplace των τ.μ. X και Y . Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. Y είναι πάνω από την καμπύλη της τ.μ. X . Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X είναι, όπως είδαμε και πιο πάνω με τις πράξεις που εφαρμόσαμε, μικρότερος από αυτόν της τ.μ. Y .

Η ροπογεννήτρια της X είναι:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{kl}{l-t} + \frac{m}{m-t} - \frac{mk}{m-t} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-t} + \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-t} - \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{7}-t} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}-t} + \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}-t} - \frac{\frac{1}{28}}{\frac{1}{7}-t} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1-3t}{3}} + \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1-7t}{7}} - \frac{\frac{1}{28}}{\frac{1-7t}{7}} = \frac{3}{12(1-3t)} + \frac{1}{1-7t} - \frac{1}{4(1-7t)} \\ &= \frac{1}{4(1-3t)} + \frac{3}{4(1-7t)}, \quad t < \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Η ροπογεννήτρια της Y είναι:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \frac{\kappa\lambda}{\lambda-t} + \frac{\mu}{\mu-t} - \frac{\mu\kappa}{\mu-t} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}-t} - \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{8}-t} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-t} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}-t} - \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{8}-t} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1-2t}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1-8t}{8}} - \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1-8t}{8}} = \frac{2}{6(1-2t)} + \frac{1}{1-8t} - \frac{1}{3(1-8t)} \\ &= \frac{1}{3(1-2t)} + \frac{2}{3(1-8t)}, \quad t < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Προσπαθώντας να συγκρίνουμε τις ροπογεννήτριες των δύο τ.μ., θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του s ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{4(1-3t)} + \frac{3}{4(1-7t)} < \frac{1}{3(1-2t)} + \frac{2}{3(1-8t)}$$

και, αν αληθεύει για κάθε $t < \frac{1}{8}$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η μία μεταβλητή είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη των ροπογεννητριών. Έχουμε λοιπόν:

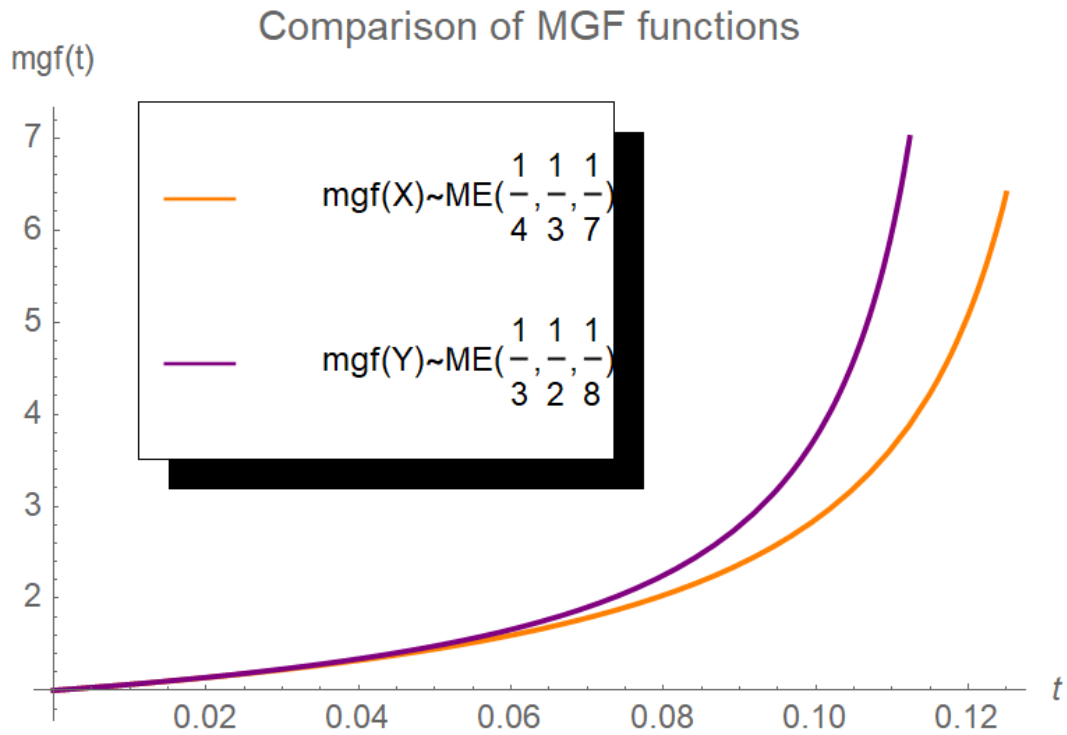
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[\frac{4-16t}{21t^2-10t+1} \right] < \frac{1}{3} \left[\frac{3-12t}{16t^2-10t+1} \right] &\Rightarrow \frac{1-4t}{21t^2-10t+1} < \frac{1-4t}{16t^2-10t+1} \Rightarrow \\ 16t^2-10t+1 < 21t^2-10t+1 &\Rightarrow 16t^2 < 21t^2, \quad t < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

κάτι που ισχύει πάντα, οπότε η υπόθεση μας είναι σωστή. Συνεπώς:

$$M_X(t) < M_Y(t)$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.2), συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη από την τ.μ. Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας:

$$X \leq_{mgf} Y$$



Γραφική Παράσταση 3.7.2 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ.

$$X \sim \text{Μείξη εκθετικών} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7} \right), Y \sim \text{Μείξη εκθετικών} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right)$$

Το διάγραμμα 3.7.2 παριστάνει τις γραφικές παραστάσεις των δύο ροπογεννητριών των τ.μ. X και Y . Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της τ.μ. Y είναι πάνω από την καμπύλη της τ.μ. X . Συμπεραίνουμε έτσι ότι η τ.μ. X είναι μικρότερη ως προς τη ροπογεννήτρια από την τ.μ. Y . Έτσι, επαληθεύεται το συμπέρασμα μας για $M_X(t) < M_Y(t)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου

4.1 Εισαγωγή

Η διάταξη της ροπογεννήτριας έχει κάποιες κοινές ιδιότητες με τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace. Μία από αυτές είναι η εξής:

Έστω X_1, X_2, \dots και Y_1, Y_2, \dots ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανομημένες μη αρνητικές τ.μ. με $X_i \leq_{mgf} Y_i$ και M, N διακριτές τυχαίες μεταβλητές με μη αρνητικές τιμές, οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τις (X_i) και (Y_i) αντίστοιχα, με $M \leq_{mgf} N$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^M X_i \leq_{mgf} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (4.1.1)$$

(Klar-Muller, 2003)

Αυτό είναι ένα τυχαίο άθροισμα (random sum). Κάτι που κάνουν συχνά οι αναλογιστές και έχει ενδιαφέρον είναι να συγκρίνουν δύο χαρτοφυλάκια και να βλέπουν τι είναι πιο ριψοκίνδυνο. Αν τα X_i είναι οι απαιτήσεις (claims) για το 1^ο χαρτοφυλάκιο και Y_i οι απαιτήσεις (claims) για το 2^ο, τότε το $\sum_{i=1}^M X_i$ παριστάνει τις συνολικές απαιτήσεις για το 1^ο χαρτοφυλάκιο και το $\sum_{i=1}^N Y_i$ τις συνολικές απαιτήσεις για το 2^ο. Είναι στην ουσία μια σύνθετη κατανομή (compound distribution).

Εφόσον εμείς τώρα χρησιμοποιούμε αυτές τις δύο διατάξεις, της ροπογεννήτριας και του μετασχηματισμού Laplace, θέλουμε να δούμε εάν το γεγονός ότι οι ατομικές ζημιές του ενός είναι μικρότερες από τις ατομικές ζημιές του άλλου ως προς αυτές τις διατάξεις, συνεπάγεται το γεγονός ότι το ένα χαρτοφυλάκιο θα είναι συνολικά λιγότερο ριψοκίνδυνο από το άλλο. Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί εύκολα εξαιτίας αυτής της σχέσης, η οποία αναφέρεται στη διάταξη της ροπογεννήτριας και ισχύει η αντίστοιχη για το μετασχηματισμό Laplace. Φυσικά, είναι κάτι που δεν ισχύει για όλες τις διατάξεις.

Με το ίδιο σκεπτικό, μπορούμε να εξετάσουμε το πρόβλημα στη θεωρία χρεοκοπίας. Αν έχουμε δηλαδή κάποιες ατομικές ζημιές X_i και Y_i , συγκρίνοντας πάλι δύο χαρτοφυλάκια, θέλουμε να δούμε αν η πιθανότητα χρεοκοπίας για το ένα είναι μικρότερη από την πιθανότητα χρεοκοπίας για το άλλο.

Για πλήρη κατανόηση των παραπάνω, θα μελετήσουμε στη συνέχεια το μοντέλο συλλογικού κινδύνου θεωρητικά και πρακτικά με παραδείγματα.

4.2 Μοντέλο Συλλογικού Κινδύνου

Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την τ.μ. S , η οποία εκφράζει το μέγεθος (ύψος) των συνολικών ζημιών για ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που περιγράφεται από το μοντέλο συλλογικού κινδύνου και ορίζεται ως:

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

Για να μπορούμε να μελετήσουμε την τ.μ. S , θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την κατανομή που ακολουθεί. Για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών ζημιών στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου, πρέπει να υπολογίσουμε την κατανομή του αθροίσματος ενός πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων τ.μ. Σε πολλές περιπτώσεις, με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων γίνεται ευκολότερος ο υπολογισμός της κατανομής της τ.μ. S .

Η δυσκολία στη μελέτη της τ.μ. S , οφείλεται στο τυχαίο πλήθος όρων που πρέπει να προστεθούν, δηλαδή το πλήθος των αποζημιώσεων, το οποίο συμβολίζεται με N . Αν όμως είναι γνωστό το N , (για παράδειγμα $N = n$), τότε αυτόματα γνωρίζουμε και το πλήθος των όρων της τ.μ. S , οπότε και την ακριβή τιμή της, αφού μιλάμε πλέον για πεπερασμένο και όχι τυχαίο πλήθος όρων.

Στη συνέχεια θα δοθούν γενικοί τύποι υπολογισμού της σ.κ., της συνάρτησης επιβίωσης καθώς και της σ.π.π. της τ.μ. S μέσω των συνελιξων της τ.μ. X . Οι τύποι αυτοί ισχύουν για οποιαδήποτε κατανομή των τ.μ. N και X , έτσι η μέθοδος υπολογισμού της κατανομής της τ.μ. S αναφέρεται ως βασική μέθοδος. (Χατζηκωνσταντινίδης, 2019)

Βασική Μέθοδος: Για $x \geq 0$, ισχύουν τα ακόλουθα:

α)

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$$

όπου $G(x) = Pr(S \leq x)$ η σ.κ. της S και $F^{*n}(x) = Pr(S \leq x/N = n)$

β)

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \bar{F}^{*n}(x)$$

όπου $\bar{G}(x) = Pr(S > x) = 1 - G(x)$ η συνάρτηση επιβίωσης της S

γ) Αν η X είναι μη-αρνητική ακέραια τ.μ., τότε για $x = 0$, έχουμε

$$g(0) = \begin{cases} p_0, & \text{αν } f(0) = 0 \\ P_N(f(0)), & \text{αν } f(0) \neq 0 \end{cases}$$

όπου $P_N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. N ,

και για $x = 1, 2, 3, \dots$ ισχύει

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)$$

ενώ αν η X είναι θετική ακέραια τ.μ., δηλαδή αν $X \in \{1, 2, \dots\}$, τότε έχουμε

$$g(0) = p_0$$

και

$$g(x) = \sum_{n=1}^x p_n f^{*n}(x)$$

όπου $g(x)$ η σ.π.π. της S

δ) Αν η X είναι συνεχής τ.μ. και $\Pr(N = 0) = p_0 = 0$, τότε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)$$

ε) Αν η X είναι συνεχής τ.μ. και $\Pr(N = 0) = p_0 > 0$, τότε

$$g(x) = \begin{cases} p_0, & x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), & x > 0 \end{cases}$$

Θεώρημα 4.2.1: Για τις συνολικές αποζημιώσεις ισχύουν οι σχέσεις

$$E(S) = E(N)E(X)$$

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E(X^2)$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα η ροπογεννήτρια, η πιθανογεννήτρια, ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π., ο μετασχηματισμός Laplace της σ.κ. και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης επιβίωσης, είναι πολύ χρήσιμες για τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων της τ.μ. S . Μέσω των γεννητριών συναρτήσεων μπορούμε να υπολογίσουμε μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, καθώς και να βρούμε αναδρομικούς και ασυμπτωτικούς τύπους για την κατανομή, γενικότερα, τυχαίων αθροισμάτων τ.μ. Ο υπολογισμός των γεννητριών συναρτήσεων

της τ.μ. S γίνεται μέσω των γεννητριών συναρτήσεων των τ.μ. X και N . Ισχύουν (Χατζηκωνσταντινίδης, 2019) :

$$\alpha) M_S(t) = M_N[\ln M_X(t)]$$

$$\beta) M_S(t) = P_N[M_X(t)]$$

$$\gamma) P_S(u) = P_N[P_X(u)]$$

$$\delta) \hat{g}(s) = P_N[\hat{f}(s)]$$

4.3 Εφαρμογή στο Συλλογικό Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μια εφαρμογή στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου με ένα παράδειγμα μείξης εκθετικών κατανομών συγκριτικά με μια απλή εκθετική κατανομή.

Εφαρμογή 4.3.1: Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή με σ.π.π.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

και ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ οι οποίες ακολουθούν τη μείξη εκθετικών κατανομών με σ.π.π.

$$f_Y(x) = \theta \mu e^{-x\mu} + (1 - \theta) m e^{-xm}$$

Οι τ.μ. X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X και Y αντίστοιχα. Θα συγκρίνουμε

- i) τους ατομικούς κινδύνους X_i και Y_i ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας, καθώς και
- ii) τις συνολικές αποζημιώσεις των χαρτοφυλακίων X και Y επίσης ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας.

Θα συγκρίνουμε τις τ.μ. X και Y ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας αν γνωρίζουμε ότι οι τ.μ. X, Y έχουν την ίδια μέση τιμή:

$$\frac{1}{\lambda} = \theta \frac{1}{\mu} + (1 - \theta) \frac{1}{m}, \quad \lambda, \mu, m \geq 1$$

Έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, \quad 0 < p < 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Θα γίνει εφαρμογή για $\lambda = 3, \theta = \frac{1}{3}, \mu = 2, m = 4, p = 0.4, q = 0.6$

i) Οι τ.μ. X και Y που συγκρίνονται έχουν ίδια μέση τιμή:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = E(Y) = \theta \frac{1}{\mu} + (1 - \theta) \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$$

Η σ.π.π. της τ.μ. X είναι

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 3e^{-3x}$$

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. X είναι

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{3}{3 - t}, \quad t < 3$$

Η σ.π.π. της τ.μ. Y είναι

$$f_Y(x) = \theta \mu e^{-x\mu} + (1 - \theta) m e^{-xm} = \frac{2}{3} e^{-2x} + \frac{8}{3} e^{-4x} \cong 0.67 e^{-2x} + 2.67 e^{-4x}$$

Η ροπογεννήτρια της τ.μ. Y είναι

$$M_Y(t) = \frac{\theta \mu}{\mu - t} + \frac{m(1 - \theta)}{m - t} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2}{2 - t} + \frac{4(1 - \frac{1}{3})}{4 - t} = \frac{2}{3(2 - t)} + \frac{8}{3(4 - t)}, \quad t < 2$$

Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τις ροπογεννήτριες των δύο τ.μ. εξετάζοντας για ποιες τιμές του t ισχύει η σχέση

$$\frac{3}{3 - t} > \frac{2}{3(2 - t)} + \frac{8}{3(4 - t)}$$

Αν η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $t < 2$, τότε μπορούμε να πούμε ότι η μία μεταβλητή είναι μικρότερη από την άλλη σύμφωνα με τη διάταξη της ροπογεννήτριας.

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{3}{3-t} > \frac{1}{3} \left[\frac{2}{2-t} + \frac{8}{4-t} \right] \Rightarrow \frac{3}{3-t} > \frac{8-10t+16}{24-18t+3t^2} \Leftrightarrow$$

$$72-54t+9t^2 > 24-30t+48-8t+10t^2-16t \Leftrightarrow$$

$$0 > t^2, \quad t < 2$$

το οποίο φυσικά είναι άτοπο.

Έτσι, η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει και συνεπώς η ανίσωση θα πρέπει να έχει αντίθετη φορά:

$$\frac{3}{3-t} < \frac{2}{3(2-t)} + \frac{8}{3(4-t)}, \quad t < 2$$

Οπότε, ισχύει

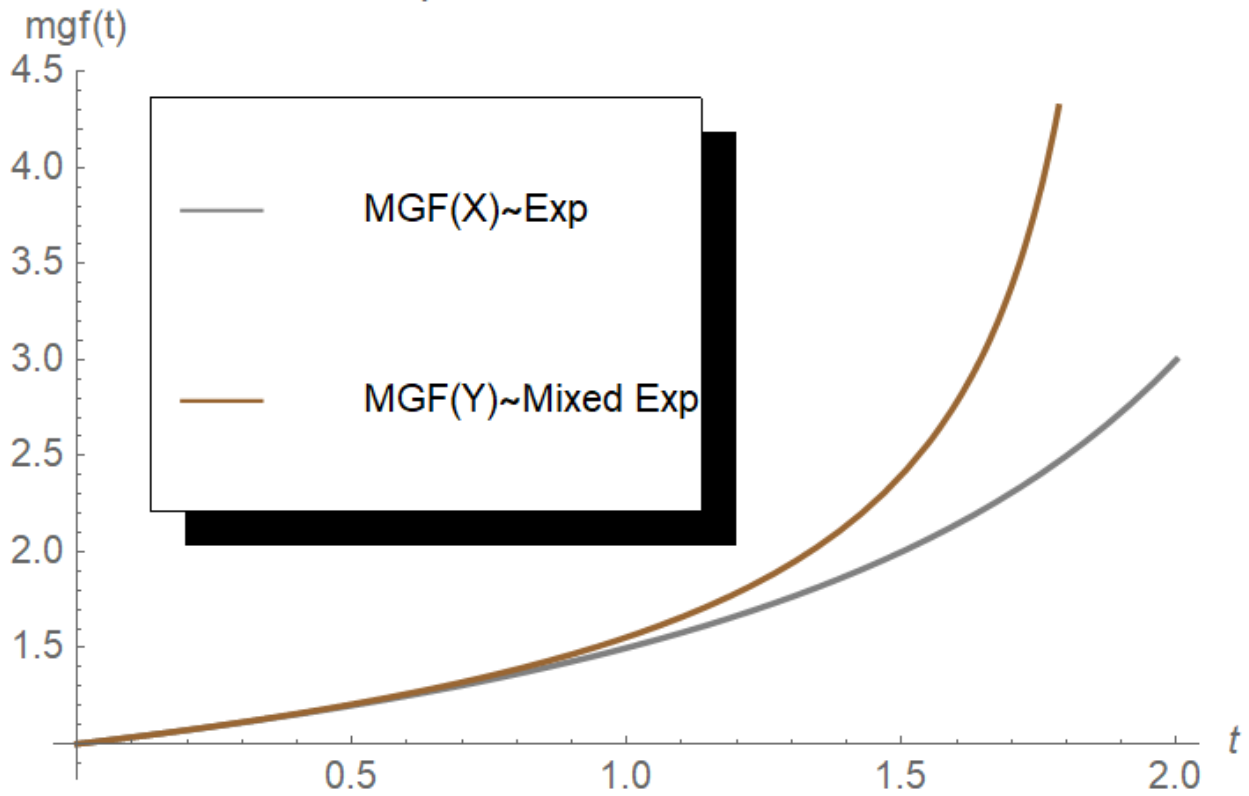
$$M_X(t) < M_Y(t), \quad \forall t < 2$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.2.2) ισχύει ότι

$$X \leq_{mgf} Y$$

Ακολουθεί η γραφική παράσταση των ροπογεννητριών των τ.μ. X, Y η οποία επαληθεύει το πιο πάνω συμπέρασμα. Όπως βλέπουμε η γραφική παράσταση της Y είναι πιο πάνω από αυτήν της X , επομένως η ροπογεννήτρια της Y έχει αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή από τη ροπογεννήτρια της X .

Comparison of MGF functions



Γραφική Παράσταση 4.3.1 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ.

$X \sim$ Εκθετική, $Y \sim$ Μείξη εκθετικών

Με βάση όλα τα πιο πάνω, συμπεραίνουμε ότι η εκθετική κατανομή υπολείπεται της μείξης εκθετικών κατανομών ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας, δοθείσης ισότητας των αντίστοιχων μέσων τιμών τους.

- ii) Ορίζεται S_X η τ.μ. των συνολικών αποζημιώσεων στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου για ατομικές ζημιές X :

$$S_X = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

$$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Ισχύει το εξής:

$$\bar{G}_X(x) = qe^{-p\lambda x} = 0.6e^{-1.2x}, \quad x \geq 0$$

Ορίζεται S_Y η τ.μ. των συνολικών αποζημιώσεων στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου για ατομικές ζημιές Y :

$$S_Y = \begin{cases} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

$N \in \{0,1,2, \dots\}$

Ισχύουν τα εξής:

$$\bar{G}_Y(x) = a_1 e^{-x\rho_1} + a_2 e^{-x\rho_2}, \quad x \geq 0$$

και

$$g_Y(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ a_1 \rho_1 e^{-x\rho_1} + a_2 \rho_2 e^{-x\rho_2}, & x > 0 \end{cases}$$

όπου,

$$a_1 = q \frac{(1 - \theta)\mu + \theta m - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$a_2 = q \frac{\rho_2 - (1 - \theta)\mu - \theta m}{\rho_2 - \rho_1}$$

και $-\rho_1, -\rho_2$ οι διακριτές ρίζες της εξίσωσης:

$$s^2 + [(1 - q\theta)\mu + (p + q\theta)m]s + p\mu m = 0$$

(Χατζηκωνσταντινίδης, 2019)

Αντικαθιστώντας τις τιμές της εφαρμογής:

$$\lambda = 3, \theta = \frac{1}{3}, \mu = 2, m = 4, p = 0.4, q = 0.6$$

προκύπτει η ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$s^2 + [(1 - 0.2)2 + (0.4 + 0.2)4]s + 3.2 = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + 4s + 3.2 = 0$$

Η λύση της πιο πάνω εξίσωσης είναι οι ρίζες ρ_1, ρ_2 :

$$\rho_1 = -2.8944$$

$$\rho_2 = -1.1056$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στα a_1, a_2 έχουμε:

$$a_1 = 0.0764$$

$$a_2 = 0.5236$$

Η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. S_Y είναι:

$$\bar{G}_Y(x) = 0.0764e^{-2.8944x} + 0.5236e^{-1.1056x}$$

Από (3.2.3):

$X \leq_{mgf} Y$ αν και μόνο αν

$$\int_0^{\infty} e^{tx} \bar{G}_X(x) dx \leq \int_0^{\infty} e^{tx} \bar{G}_Y(x) dx, \quad \forall t \geq 0$$

Στο παράδειγμα μας,

$$A = \int_0^{\infty} e^{tx} \bar{G}_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} (0.6e^{-1.2x}) dx = \int_0^{\infty} 0.6e^{-(1.2-t)x} dx$$

Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα θα πρέπει ο συντελεστής του x να είναι αρνητικός, άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο για $t < 1.2$. Για αυτές τις τιμές του t η τιμή του ολοκληρώματος είναι:

$$\left[\frac{0.6e^{-(1.2-t)x}}{-(1.2-t)} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{0.6}{-(1.2-t)} = \frac{0.6}{1.2-t}, \quad t < 1.2$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\infty} e^{tx} \bar{G}_Y(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} (0.0764e^{-2.8944x} + 0.5236e^{-1.1056x}) dx \\ &= \int_0^{\infty} (0.0764e^{(t-2.8944)x} + 0.5236e^{(t-1.1056)x}) dx \end{aligned}$$

Για να συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα θα πρέπει $t < 2.8944$. Για να συγκλίνει το δεύτερο ολοκλήρωμα θα πρέπει $t < 1.1056$. Για να συγκλίνουν και τα δύο θα πρέπει

το t να είναι μικρότερο από το minimum των τιμών, άρα $t < 1.1056$. Για αυτές τις τιμές του t το ολοκλήρωμα είναι:

$$\left[\frac{0.0764e^{(t-2.8944)x}}{(t-2.8944)} \right]_0^\infty + \left[\frac{0.5236e^{(t-1.1056)x}}{(t-1.1056)} \right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{0.0764}{(t-2.8944)} + 0 - \frac{0.5236}{(t-1.1056)} = \frac{0.0764}{2.8944-t} + \frac{0.5236}{1.1056-t}, t < 1.1056$$

Έστω ότι ισχύει:

$$\frac{0.6}{1.2-t} < \frac{0.0764}{2.8944-t} + \frac{0.5236}{1.1056-t}, \quad t < 1.1056$$

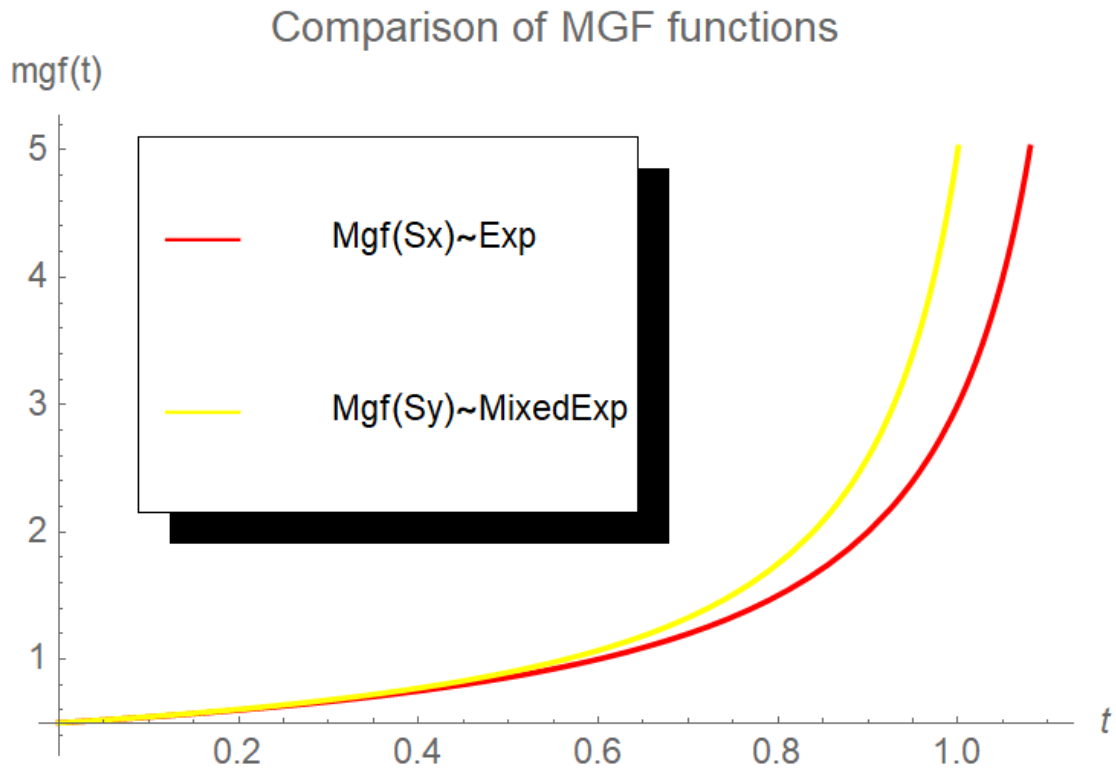
Μετά από πράξεις, θα καταλήξουμε σε μια σχέση που είτε ισχύει πάντα είτε σε μια άτοπη σχέση και έτσι θα μπορέσουμε να κρίνουμε κατά πόσο ισχύει αυτό που υποθέσαμε. Έχουμε:

$$\frac{0.6}{1.2-t} < \frac{1.6-0.6t}{t^2-4t+3.2} \Rightarrow 0.6t^2 - 2.4t + 1.92 < 1.92 - 0.72t - 1.6t + 0.6t^2$$

$$-2.4t < -2.32t \Rightarrow 0 < 0.08t, \quad t < 1.1056$$

που ισχύει πάντα για αυτές τις τιμές του t . Έτσι, επαληθεύεται ο ισχυρισμός μας και βασισμένοι στη σχέση (3.2.3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για $0 < t < 1.1056$:

$$S_X \leq_{mgf} S_Y$$



Γραφική Παράσταση 4.3.2 – Σύγκριση Ροπογεννητριών των τ.μ.

$S_X \sim$ Εκθετική, $S_Y \sim$ Μείξη εκθετικών

Επομένως, με αυτή την εφαρμογή αποδείξαμε και πρακτικά ότι αν οι ατομικές ζημιές σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι μικρότερες από τις ατομικές ζημιές ενός άλλου χαρτοφυλακίου ως προς τη διάταξη της ροπογεννήτριας, τότε και το ένα χαρτοφυλάκιο θα είναι συνολικά λιγότερο ριψοκίνδυνο από το άλλο.

Ακριβώς ίδιο αποτέλεσμα με τη σχέση (5.1.1) των Klar-Muller για τη διάταξη της ροπογεννήτριας είναι η ακόλουθη πρόταση για τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace:

Έστω X και Y δύο μη αρνητικές τ.μ. έτσι ώστε $E(X) = E(Y)$. Τότε ισχύει:

$$X \leq_{lt} Y \Leftrightarrow \tilde{X} \leq_{lt} \tilde{Y}$$

(Denuit, 2001)

Επομένως, αντίστοιχα αποτελέσματα με τα πιο πάνω που αφορούν τη ροπογεννήτρια, θα έχουμε και για το μετασχηματισμό Laplace.

Παρατηρήσεις:

- 1) Ο Denuit, όπως και κάποιοι άλλοι συγγραφείς, ορίζουν τη διάταξη του μετασχηματισμού Laplace με αντίστροφη φορά, οπότε με αυτό το δεδομένο ορίζουν τη συγκεκριμένη πρόταση ως $X \leq_{lt} Y \Leftrightarrow \tilde{Y} \leq_{lt} \tilde{X}$.
- 2) Τα \tilde{X}, \tilde{Y} στο δεξιό μέλος της πρότασης, είναι τα κλιμακωτά ύψη. Είναι δηλαδή μεταβλητές που έχουν ως κατανομή την equilibrium distribution.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη

1. Belzunce F. (2010). *An Introduction to the Theory of Stochastic Orders*. Boletín de Estadística e Investigación Operativa. **26**, 4-18
2. Denuit M. (2001). *Laplace Transform Ordering of Actuarial Quantities*. Insurance Math. Econom. **29**, 83-102
3. Goovaerts M.J., Kaas R., AE van Heerwaarden, Bauwelinckx T. (1990). *Effective Actuarial Methods*. North-Holland, Amsterdam.
4. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer, New York.
5. Klar B., Muller A. (2003). *Characterizations of Classes of Lifetime Distributions Generalizing the NBUE Class*. J. Appl. Prob. **40**, 20-32
6. Shaked M., Shanthikumar J.G. (1994). *Stochastic Orders and their Applications*. Academic Press, Boston.

Ελληνική

1. Πιτσέλης Γ. (2018), Κατανομές Μ.Π.Λ.ΟΥ.Ζ (Μακριές, Παχιές, ή Λεπτές Ουρές Ζημιοκατανομών). Εκδόσεις Παπαζήση
2. Πολίτης Κ. (2019), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Θεωρία Κινδύνου ΙΙ. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
3. Πολίτης Κ. (2020), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Προπτυχιακού Μαθήματος Ειδικά Θέματα Πιθανοτήτων, Α Μέρος. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς
4. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2019), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Θεωρία Κινδύνου Ι. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εντολές Mathematica

Εφαρμογή 1 – Γραφική Παράσταση 1.3.2.1

```
Plot[4/(4+s),{s,0,4}, PlotRange->Automatic, PlotStyle->Gray, PlotLabel-> "Laplace Transform of Exponential Distribution"]
```

Εφαρμογή 2 – Γραφική Παράσταση 1.3.2.2

```
Plot[3/(3+s)^2,{s,0,100}, PlotRange->Automatic, PlotStyle->Gray, PlotLabel-> "Laplace Transform of Gamma Distribution"]
```

Εφαρμογή 3 – Γραφική Παράσταση 1.3.2.3

```
Plot[ $\frac{e^{-s}}{8} \left( \frac{1-e^{-8s}}{1-e^{-s}} \right)$ ,{s,0,4}, PlotRange->Automatic, PlotStyle->Gray, PlotLabel-> "Laplace Transform of Discrete Uniform Distribution"]
```

Εφαρμογή 4 – Γραφική Παράσταση 2.3.6.1

```
Plot[1/(3-x), {x,1,3}, PlotRange->Automatic, AxesLabel->{x, "r(x)"}, PlotStyle->Gray, PlotLabel-> "Hazard Rate of Continuous Uniform Distribution"]
```

Εφαρμογή 5 – Γραφική Παράσταση 3.4.1

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
LTX[s_] := 3/(3 + s) /; s >= 0
```

```
LY[s_] := 7/(7 + s) /; s >= 0
```

```
Plot[{LTX[s], LY[s]}, {s, 0, 200}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {s, "LT(s)"}, PlotStyle -> {Red, Blue}, PlotLegend -> {"LTX ~ Exp(3)", "LY ~ Exp(7) "}, LegendPosition -> {-0.1, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of Laplace Transform functions"]
```

Εφαρμογή 6 – Γραφική Παράσταση 3.4.2

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
MX[t_] := 3/(3 - t) /; t < 3
```

```
MY[t_] := 7/(7 - t) /; t < 7
```

```
Plot[{MX[t], MY[t]}, {t, 0, 3}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Red, Blue}, PlotLegend -> {"MGF(X) ~ Exp(3) ", "MGF(Y) ~ Exp(7) "},
LegendPosition ->{-0.9,-0.2},PlotLabel-> "Comparison of MGF functions"]
```

Εφαρμογή 7 – Γραφική Παράσταση 3.5.1

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
LTX[s_] := (2/(2 + s))^5;/s>=0
```

```
LY[s_] := (2/(2 + s))^8;/s>=0
```

```
Plot[{LTX[s], LTY[s]}, {s, 0, 10}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {s, "LT(s)"},
PlotStyle -> {Green, Pink}, PlotLegend -> {"LTX ~ G(5,2)", " LTY ~ G(8,2)"},
LegendPosition->{-0.1,-0.2}, PlotLabel -> "Comparison of Laplace Transform
functions"]
```

Εφαρμογή 8 – Γραφική Παράσταση 3.5.2

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
LTX[s_] := (10/(10 + s))^6;/s>=0
```

```
LY[s_] := (15/(15 + s))^6;/s>=0
```

```
Plot[{LTX[s], LTY[s]}, {s, 0, 30}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {s, "LT(s)"},
PlotStyle -> {Green, Pink}, PlotLegend -> {"LTX ~ G(6,10)", " LTY ~ G(6,15)"},
LegendPosition->{-0.1,-0.2}, PlotLabel -> "Comparison of Laplace Transform
functions"]
```

Εφαρμογή 9 – Γραφική Παράσταση 3.5.3

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
MX[t_] := (2/(2 - t))^3;/t<2
```

```
MY[t_] := (2/(2 - t))^4;/t<2
```

```
Plot[{MX[t], MY[t]}, {t, 0, 2}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Yellow, Gray}, PlotLegend -> {"MGF(X)~G(3,2) ", "MGF(Y)~G(4,2) "},
LegendPosition -> { -0.85, -0.15}, PlotLabel -> "Comparison of MGF functions"]
```

Εφαρμογή 10 – Γραφική Παράσταση 3.5.4

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
MX[t_] := (10/(10 - t))^6 /; t < 10
```

```
MY[t_] := (15/(15 - t))^6 /; t < 15
```

```
Plot[{MX[t], MY[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Yellow, Gray}, PlotLegend -> {"MGF(X)~G(6,10)", "MGF(Y)~G(6,15)"},
LegendPosition -> {-0.8,-0.3}, PlotLabel -> "Comparison of MGF functions"]
```

Εφαρμογή 11 – Γραφική Παράσταση 3.6.1

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
LTX[s_] := 1/(1 + 3 s) /; s >= 0
```

```
LTY[s_] := (1/(6*(5 s + 1))) + (1/(5*(12 s + 1))) /; s >= 0
```

```
Plot[{LTX[s], LTY[s]}, {s, 0, 30}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {s, "LT(s)"},
PlotStyle -> {Green, Blue}, PlotLegend -> {"LTX~Exp", "LTY~Mixed Exp"},
LegendPosition -> {-0.1, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of Laplace Transform
functions"]
```

Εφαρμογή 12 – Γραφική Παράσταση 3.6.2

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
MX[t_] := 1/(1 - 3 t) /; t < 1/3
```

```
MY[t_] := (1/(6*(1 - 5 t))) + (5/(6*(1 - 12 t))) /; t < 1/12
```

```
Plot[{MX[t], MY[t]}, {t, 0, 1/12}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Green, Blue}, PlotLegend -> {"MGF(X)~Exp", "MGF(Y)~Mixed Exp"},
LegendPosition -> {-0.85, -0.15}, PlotLabel -> "Comparison of MGF functions"]
```

Εφαρμογή 13 – Γραφική Παράσταση 3.7.1

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
LTX[s_] := 1/4 (((1/(3 s + 1))) + (3/((7 s + 1)))) /; s >= 0
```

```
LTY[s_] := 1/3 (((1/(2 s + 1))) + (2/((8 s + 1)))) /; s >= 0
```

```
Plot[{LTX[s], LTY[s]}, {s, 0, 50}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {s, "LT(s)"},
PlotStyle -> { Orange, Purple }, PlotLegend-> {"LTX~Mexp( $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$ ) ", " LTY~Mexp
( $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ )"}, LegendPosition -> {-0.1, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of Laplace
Transform functions"]
```

Εφαρμογή 14 – Γραφική Παράσταση 3.7.2

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
MX[t_] := 1/4 (((1/(1 - 3 t))) + (3/((1 - 7 t)))) /; t < 1/7
```

$MY[t_] := 1/3 (((1/(1 - 2 t))) + (2/((1 - 8 t)))) /; t < 1/8$

Plot[{MX[t], MY[t]}, {t, 0, 1/8}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Orange, Purple}, PlotLegend -> {" mgf(X)~ME($\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$)",
", "mgf(Y)~ME($\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$)"}, LegendPosition -> {-0.7, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of
MGF functions"]

Εφαρμογή 15 – Γραφική Παράσταση 4.3.1

Needs["PlotLegends`"]

$MX[t_] := 3/(3 - t) /; t < 3$

$MY[t_] := 2/(3(2-t))+8/(3(4-t)) /; t < 2$

Plot[{MX[t], MY[t]}, {t, 0, 2}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Gray, Brown}, PlotLegend -> {"MGF(X)~Exp", "MGF(Y)~Mixed Exp"},
LegendPosition -> {-0.8, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of MGF functions"]

Εφαρμογή 16 – Γραφική Παράσταση 4.3.2

Needs["PlotLegends`"]

$A[t_] := 0.6/(1.2 - t) /; t < 1.2$

$B[t_] := (0.0764/(2.8944-t)) + (0.5236/(1.1056-t)) /; t < 1.1056$

Plot[{A[t], B[t]}, {t, 0, 1.1056}, PlotRange -> Automatic, AxesLabel -> {t, "mgf(t)"},
PlotStyle -> {Red, Yellow}, PlotLegend -> {"Mgf(Sx)~Exp", "Mgf(Sy)~Mixed Exp"},
LegendPosition -> {-0.8, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of MGF functions"]