

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ ΤΩΝ ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΩΝ
ΜΙΑΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σαρχιανάκη Ελένη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Ευαγγελάρας Χαράλαμπος, Επίκουρος Καθηγητής
- Μπερσίμης Σωτήριος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS**

**CONTROL CHARTS FOR THE NUMBER OF NONCONFORMITIES OF
A PROCESS**

By

Eleni Sarchianaki

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in fulfillment
of the requirements for the degree of Master of Science
in Applied Statistics.

Piraeus

September 2021

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου είναι μια ευρέως διαδεδομένη τεχνική που χρησιμοποιείται για την άμεση ανίχνευση της μεταβλητότητας ειδικών αιτιών σε μια διεργασία. Έχουν σαν στόχο να εντοπίζουν έγκαιρα οποιουδήποτε είδους μεταβλητότητας που μπορεί να οδηγήσει την υπό μελέτη μεταβλητή της παραγωγικής διαδικασίας, εκτός προδιαγραφών του κατασκευαστή. Συνεπώς, τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για τη διατήρηση ενός χαρακτηριστικού εντός ελέγχου.

Στην παρούσα διπλωματική παρουσιάζουμε μια επισκόπηση των διαγραμμάτων ελέγχου για Poisson δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε συνοπτικά τη γενική θεωρία των διαγραμμάτων ελέγχου. Εστιάζουμε κυρίως στα διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων και για τον μέσο αριθμό των ελαττωμάτων σε μία διεργασία.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε αναλυτικά τα Poisson διαγράμματα ελέγχου και την απόδοσή τους. Σε αυτά τα διαγράμματα ελέγχου σχεδιάζεται μια μόνο στατιστική συνάρτηση για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της διεργασίας. Επιπλέον, υπολογίζουμε το μέσο μήκος ροής των Poisson διαγραμμάτων ελέγχου.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 3 συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου έχοντας κάνει ορισμένες ομαδοποιήσεις σε αυτά, με βάση το μέσο μήκος ροής (ARL) και προτείνουμε ποιο διάγραμμα ελέγχου είναι το πιο κατάλληλο για την ανίχνευση ενός σήματος εκτός ελέγχου για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής.

Abstract

Control charts are a widely used technique used to directly detect the variability of specific causes in a process. Control charts aim to detect in time any kind of variability that may lead to the variable of the production process under study, outside the manufacturer's specifications. Therefore, control charts are used to keep a feature in control.

In this dissertation we present an overview of control charts for Poisson data. More specifically, in Chapter 1 we briefly present the general theory of control charts. We focus mainly on control charts for the number of defects and the average number of defects in a process.

In Chapter 2 we present in detail the Poisson control diagrams and their performance. In these control charts a single statistical function is plotted to monitor the average value of the process. In addition, we calculate the average run length (ARL) of the Poisson control charts.

Finally, in Chapter 3 we compare the control charts having done the groupings on them, based on the average run length and suggest which control chart is most suitable for detecting an out-of-control signal for various shifts of the mean value.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω θερμά :

- Τον κ. Δημήτριο Αντζουλάκο (επιβλέποντα καθηγητή) για την άψογη συνεργασία και την υποστήριξη που μου προσέφερε για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής τον κ. Ευαγγελάρα Χαράλαμπο και τον κ. Μπερσίμη Σωτήριο για την επίβλεψή της.
- Την οικογένεια μου, που με στηρίζει συνεχώς και είναι δίπλα μου σε κάθε επιλογή μου.
- Τους φίλους μου και όλους εκείνους που βρίσκονται δίπλα μου και με ενθαρρύνουν να πραγματοποιώ τους στόχους μου και να ακολουθώ τις επιλογές μου.

Πίνακας Περιεχομένων

1. Διαγράμματα Ελέγχου

- 1.1. Εισαγωγή
- 1.2. Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου
- 1.3. Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου
- 1.4. Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II
- 1.5. Μέσο μήκος ροής (ARL)
- 1.6. Διάγραμμα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων
- 1.7. Διαγράμματα ελέγχου για τον μέσο αριθμό των ελαττωμάτων

2. Poisson Διαγράμματα Ελέγχου

- 2.1 Εισαγωγή
- 2.2 Το PMA διάγραμμα ελέγχου
- 2.3 Το PEWMA διάγραμμα ελέγχου
- 2.4. Το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου
- 2.5. Το PGWMA διάγραμμα ελέγχου
- 2.6. Το Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου

3. Σύγκριση των Διαγραμμάτων Ελέγχου

- 3.1 Εισαγωγή
- 3.2 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PMA, PEWMA και PCUSUM
- 3.3 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA και PCUSUM
- 3.4 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PGWMA και PDEWMA
- 3.5 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA, PDEWMA, PGWMA, PCUSUM

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

Παράρτημα

Κ. Κώδικες για τα Poisson Διαγράμματα Ελέγχου

Κ.1 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των ARL_i για το PMA διάγραμμα ελέγχου.

Κ.2 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου.

Κ.3 R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PEWMA και το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου.

Κ.4 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου.

Κ.5 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PGWMA διάγραμμα ελέγχου.

Κ.6 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου.

Πίνακες

Πίνακας 1.1. Τιμές ARL για διάφορα c διαγράμματα ελέγχου: $c_0 = 10, 20, 30, 40$

Πίνακας 1.2. Ελαττώματα κατά την εκτύπωση της ταπετσαρίας ανά 100 πόδια

Πίνακας 1.3. Συνολικά ελαττώματα σε κάθε σύνολο σελίδων

Πίνακας 1.4. Τιμές $U_i = X_i/n_i$ και UCL_i ($1 \leq i \leq 25$)

Πίνακας 2.1. ARL τιμές για το c και το PMA διάγραμμα ελέγχου ($w = 2, 3, 4$)

Πίνακας 2.2. Εφαρμογή 1: Αριθμός ελαττωμάτων και τιμές της PMA στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4

Πίνακας 2.3. Εφαρμογή 2: Αριθμός ελαττωμάτων και τιμές της PMA στατιστικής συνάρτησης για $w = 2, 3$ και 4 (αρχικά δεδομένα)

Πίνακας 2.4. Εφαρμογή 2: Αριθμός ελαττωμάτων και τιμές της PMA στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4 (περιορισμένα δεδομένα)

Πίνακας 2.5. ARL τιμές για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($c_0 = 12$, $ARL_0 = 500$, $\lambda = 0.05, 0.2, 0.4$)

Πίνακας 2.6. ARL τιμές για το c και το PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($c_0 = 12$, $ARL_0 = 319.77$, $\lambda = 0.05, 0.1, 0.2$)

Πίνακας 2.7. Δεδομένα του παραδείγματος των Borror, Champ & Rigdon (1998)

Πίνακας 2.8. Τιμές K για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου και τιμές L τιμές για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($ARL_0 = 200$, $\lambda = 0.05(0.05)(0.5)$, $c_0 = 4, 8, 12, 20$)

Πίνακας 2.9. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 4$

Πίνακας 2.10. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 8$

Πίνακας 2.11. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 12$

Πίνακας 2.12. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 20$

Πίνακας 2.13. Δεδομένα του παραδείγματος των Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington (2003)

Πίνακας 2.14. Δεδομένα προσομοίωσης που παράγονται από την κατανομή Poisson με $\mu_1 = 9$

Πίνακας 2.15. Συνδυασμοί (c_0, q, a, L) διαγραμμάτων για PGWMA με ασυμπτωτικά όρια ελέγχου όταν $ARL_0 \approx 500$

Πίνακας 2.16. Πίνακας ARL για το διάγραμμα PGWMA όταν $q = 0.9, a = 1, c_0 = 8, ARL_0 = 500$

Πίνακας 2.17. Τα ARL του διαγράμματος PCUSUM για διάφορες τιμές της μέσης διαδικασίας και για διαφορετικούς συνδυασμούς του (k, h) , με $h = 10$ και $k = 1, 1.2, 1.4, 1.7, 2, 2.5, 3, 5$

Πίνακας 2.18. Δεδομένα Poisson CUSUM ($k = 5$ και $h = 10$)

Πίνακας 2.19. Τιμές ARL για το PCUSUM (h, k) και το c διάγραμμα ελέγχου

Πίνακας 2.20. Προσομοιωμένα δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου PCUSUM

Πίνακας 3.1. Σύγκριση ARL μεταξύ PMA διαγραμμάτων ελέγχου και $c, PEWMA, PDEWMA, PGWMA, PCUSUM$ για $c_0 = 12$

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

Σχήμα 1.2. Καμπύλες ARL για διάφορα c διαγράμματα ελέγχου: $c_0 = 10, 20, 30, 40$

Σχήμα 1.3. Πιθανότητα σφάλματος τύπου II για διάφορα c διαγράμματα ελέγχου:
 $c_0 = 10, 20, 30, 40$

Σχήμα 1.4. Πρώτο δοκιμαστικό c διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Σχήμα 1.5. Τελικό c διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Σχήμα 1.6. Πρώτο δοκιμαστικό u διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Σχήμα 1.7. Τελικό c διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Σχήμα 2.1. Εφαρμογή 1: Διάγραμμα ελέγχου c

Σχήμα 2.2. Εφαρμογή 1: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 2$

Σχήμα 2.3. Εφαρμογή 1: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 3$

Σχήμα 2.4. Εφαρμογή 1: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 4$

Σχήμα 2.5. Εφαρμογή 2: Διάγραμμα ελέγχου c (αρχικά δεδομένα)

Σχήμα 2.6. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 2$ (αρχικά δεδομένα)

Σχήμα 2.7. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 3$ (αρχικά δεδομένα)

Σχήμα 2.8. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 4$ (αρχικά δεδομένα)

Σχήμα 2.9. Εφαρμογή 2: Διάγραμμα ελέγχου c (περιορισμένα δεδομένα)

Σχήμα 2.10. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 2$ (περιορισμένα
δεδομένα)

Σχήμα 2.11. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 3$ (περιορισμένα
δεδομένα)

Σχήμα 2.12. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 4$ (περιορισμένα δεδομένα)

Σχήμα 2.13. ARL καμπύλες PEWMA διαγραμμάτων ελέγχου ($c_0 = 12$, $ARL_0 = 500$, $\lambda = 0.05, 0.2, 0.4$)

Σχήμα 2.14. Τυπικό c διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.7

Σχήμα 2.15. PEWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.7 ($\lambda = 0.2$)

Σχήμα 2.16. PEWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.7 με σταθερά όρια ($\lambda = 0.2$)

Σχήμα 2.17. Τυπικό c διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13

Σχήμα 2.18. PDEWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13

Σχήμα 2.19. Διάγραμμα c -chart $c_0 = 8$ για προσομοιωμένα δεδομένα Poisson με $\mu_1 = 9$

Σχήμα 2.20. Διάγραμμα EWMA $c_0 = 8$ $\lambda = 0.05$ $ARL_0 = 500$ για προσομοιωμένα δεδομένα Poisson με $\mu_1 = 9$

Σχήμα 2.21. Διάγραμμα GWMA $c_0 = 8$ $a = 0.7$ $q = 0.95$ $ARL_0 = 500$ για προσομοιωμένα δεδομένα Poisson με $\mu_1 = 9$

Σχήμα 2.22. Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου

Σχήμα 2.23. ARL καμπύλες του c και του PCUSUM($h = 11, k = 5$) διαγράμματος ελέγχου ($c_0 = 12$)

Σχήμα 2.24. ARL καμπύλες του c και του PCUSUM($h = 5, k = 18$) διαγράμματος ελέγχου ($c_0 = 12$)

Σχήμα 2.25. Διάγραμμα ελέγχου c για τα δεδομένα του Πίνακα 2.20

Σχήμα 2.26. PCUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.20

Σχήμα 2.27. PEWMA, PCUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $c_0 = 12$ και $ARL_0 = 500$

Σχήμα 2.28. PDEWMA, PGWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $c_0 = 8$ και $ARL_0 = 500$

Σχήμα 2.29. PCUSUM,PEWMA, PDEWMA,PGWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $c_0 = 8$ και $ARL_0 = 500$

Σχήμα 3.1. Σύγκριση διαγραμμάτων PEWMA και PCUSUM διάγραμμα ελέγχου για ($c_0 = 12, c_1=20, ARL_0 = 490.7$)

Σχήμα 3.2. Σύγκριση διαγραμμάτων PEWMA και PCUSUM διάγραμμα ελέγχου για ($c_0 = 12, c_1=24 ARL_0 = 491.06$)

Σχήμα 3.3. PDEWMA,PGWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $c_0 = 8$ και $ARL_0 = 500$.

Σχήμα 3.4. PCUSUM,PEWMA, PDEWMA,PGWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $c_0 = 10$ και $ARL_0 = 500$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαγράμματα Ελέγχου

1.1. Εισαγωγή

Κάθε άνθρωπος που αποφασίζει να αγοράσει ένα προϊόν (ή υπηρεσία) αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής ανάμεσα σε ομοειδή προϊόντα που ικανοποιούν την ίδια ανάγκη. Η επιλογή του προϊόντος από τον καταναλωτή καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες, την ποιότητα και την τιμή του.

Η αναγνώριση αυτών των δύο κύριων παραγόντων οι οποίοι καθορίζουν τις αγοραστικές συνήθειες των καταναλωτών οδήγησε τις επιχειρήσεις στην αναζήτηση επιχειρηματικών τακτικών που θα οδηγήσουν στη βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η αναζήτηση αυτή οδήγησε σε μια σειρά παρεμβάσεων στο επιχειρηματικό περιβάλλον οι οποίες τελικά διαμόρφωσαν νέα πλαίσια λειτουργίας και διοίκησης των επιχειρήσεων με τελικό στόχο και σκοπό τη διαρκή βελτίωση της ποιότητας.

Ο **Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας** αντιπροσωπεύει την παλαιότερη, καθώς και την πιο γνωστή μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών, με σκοπό την βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων (ή υπηρεσιών). Περιέχει ένα σύνολο μεθόδων ανάλυσης στατιστικών δεδομένων που αφορά τους τομείς του Σχεδιασμού και Ανάλυσης Πειραμάτων (*Design of Experiments*), τον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών (*Statistical Process Control*) και τη Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*).

Σε κάθε παραγωγική διεργασία υπάρχει ένα αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικρών αιτιών οι οποίες αναφέρονται ως *τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας*. Μία διεργασία, η οποία λειτουργεί υπό την παρουσία τέτοιων αιτιών μεταβλητότητας ορίζεται ως **εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία** (*in statistical control process*).

Από την άλλη, μία διεργασία μπορεί να εμφανίζει άλλες μορφές μεταβλητότητας, οι οποίες δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά αφορούν αλλαγή στο επίπεδο κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος, όπως είναι για παράδειγμα η κακή ποιότητα της πρώτη ύλη ή η ελαττωματική πρώτη ύλη. Αυτές οι αιτίες ονομάζονται *ειδικές αιτίες μεταβλητότητας*. Μία διεργασία που λειτουργεί υπό την παρουσία τέτοιων αιτιών μεταβλητότητας ορίζεται ως **εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία** (*out of statistical control process*).

Το βασικό αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μία διεργασία, ώστε να μπορέσουν να γίνουν άμεσα οι διορθώσεις προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα χαμηλής ποιότητας. Αυτό επιτυγχάνεται με τα διαγράμματα ελέγχου τα οποία εντοπίζουν διεργασίες όπου παρουσιάζεται ειδική αιτία μεταβλητότητας.

1.2. Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου

Σε μία παραγωγική διεργασία μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού X το οποίο είναι τυχαία μεταβλητή, δηλαδή ένα χαρακτηριστικό των προϊόντων που παράγονται. Η διαδικασία παρακολούθησης αυτής της ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X , όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X έστω τα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$ ($t = 1, 2, \dots$) μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης που εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Συνεπώς, η διαχρονική παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Λαμβάνουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n > 1$) από την παραγωγή της μηχανής σε

διαφορετικά χρονικά διαστήματα και χρησιμοποιούμε την στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tn})/n$, η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής. Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή.



Σχήμα 1. 2. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές W_t είναι εντός των ορίων ελέγχου το οποίο σημαίνει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επίσης το σχήμα έχει κεντρική γραμμή η οποία παριστάνει το μέσο επίπεδο της διεργασίας και συνήθως είναι η μέση τιμή της W όπως προκύπτει από την λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας. Στην περίπτωση που τιμές της W βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου τότε η διεργασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου και θα πρέπει να ελέγξουμε για ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Επιπλέον, σε ένα διάγραμμα ελέγχου δεν ελέγχουμε μόνο αν τα σημεία είναι εντός των ορίων ελέγχου αλλά και την περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιείται συνήθως το μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits), το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω πλαίσιο.

Μοντέλο ορίων L σίγμα
$UCL = \mu_W + L\sigma_W$
$CL = \mu_W$
$LCL = \mu_W - L\sigma_W$

Τα μ_W και σ_W δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου. Ο αριθμός L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Όταν $L = 3$ τότε αναφερόμαστε για όρια ελέγχου τριών σίγμα (3σ). Για μεγάλες τιμές του L η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει και έτσι μειώνεται η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιείται στους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, λέμε ότι μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I (ή ρίσκο α), αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II (ή ρίσκο β). Για μικρές τιμές του L έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (το w_α συμβολίζει το άνω α -ποσοστιαίο σημείο της W).

Μοντέλο ορίων πιθανότητας α
$UCL = w_{\alpha/2}$
$CL = w_{0.5}$
$LCL = w_{1-\alpha/2}$

1.3. Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου έχουν διάφορα χαρακτηριστικά και μπορούν να ταξινομηθούν με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά σε διάφορες κατηγορίες.

- Ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό έχουμε διαγράμματα ελέγχου για **μεταβλητές** (control charts for variables) και διαγράμματα ελέγχου για **ιδιότητες** (control charts for attributes)
- Εάν το μέγεθος των δειγμάτων μετρήσεων είναι μεγαλύτερο της μονάδας αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **δείγματα ή ομάδες** (control charts for rational subgroups), ενώ αν λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους ένα τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **μεμονωμένες παρατηρήσεις** (control charts for individual observations).
- Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή t είναι εξαρτημένες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται σε προηγούμενες χρονικές στιγμές τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (control charts for autocorrelated processes), ενώ αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται στο χρόνο $t - 1$ αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **ασυσχέτιστες διεργασίες** (control charts for uncorrelated processes).
- Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό αναφερόμαστε σε **μονομεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου, ενώ αν οι μετρήσεις αναφέρονται σε περισσότερα χαρακτηριστικά αναφερόμαστε σε **πολυμεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου.
- Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν μια γνωστή κατανομή τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου, ενώ στην αντίθετη περίπτωση αναφερόμαστε σε **μη-παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου.
- Ανάλογα με την στατιστική θεωρία που στηρίζει την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες:
 - (i) Διαγράμματα ελέγχου τύπου **Shewhart** (Shewhart control charts)

- (ii) Διαγράμματα ελέγχου τύπου **Cusum** (Cumulative Sum control charts).
- (iii) Διαγράμματα ελέγχου τύπου **EWMA** (Exponentially weighted moving average control charts)).

1.4. Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν δύο φάσεις για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας χρησιμοποιώντας διαγράμματα ελέγχου, η Φάση I και η Φάση II που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

- **Φάση I:** Σε αυτή τη φάση συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία που αναλύονται όλα μαζί ταυτοχρόνως, για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να “φέρει” τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου με τη χρησιμοποίηση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective). Γενικά πολύ περισσότερες δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται κατά την διάρκεια αυτής της φάσης πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Ο διαχειριστής της διαδικασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που συλλέχθηκαν τα δεδομένα.

- **Φάση II:** Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγξουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από την διεργασία ο διαχειριστής δίνει άμεσα

μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Σε αυτή την φάση ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό.

1.5. Μέσο μήκος ροής (ARL)

Μια πολύ βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (average run length) του διαγράμματος. Η τυχαία μεταβλητή T που δηλώνει το πλήθος των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ονομάζεται μήκος ροής (run length) του διαγράμματος. Η ποσότητα ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα έως ότου λάβουμε για πρώτη φορά ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, δηλαδή $ARL = E(T)$. Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με απεικονιζόμενη ποσότητα την W ή οποία έχει εντός ελέγχου μέση τιμή μ_0 , τυπική απόκλιση σ_0 και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα α εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος με $L\sigma$ όρια ελέγχου είναι ίση με

$$\alpha = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(\mu_0 + L\sigma_0) + F_0(\mu_0 - L\sigma_0).$$

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

αφού το μήκος ροής ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας α . Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το ARL_0 έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας ή αλλιώς ο αριθμός των λανθασμένων συναγερμών.

Για μια εκτός ελέγχου διεργασία, με απεικονιζόμενη ποσότητα την W ή οποία έχει εκτός ελέγχου μέση τιμή μ_1 , τυπική απόκλιση σ_1 και συνάρτηση κατανομής $F_1(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα $1 - \beta$ εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος είναι ίση με

$$1 - \beta = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(\mu_0 + L\sigma_0) + F_1(\mu_0 - L\sigma_0)$$

και το εκτός μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Προφανώς σε μία διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το ARL_1 , έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων (και συνεπώς ο χρόνος) που απαιτούνται για να γίνει αντιληπτό ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Αν για την τυχαία μεταβλητή W είναι γνωστό ότι ακολουθεί κανονική κατανομή τότε έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\Phi(-L)}.$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου προκύπτει ότι

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} \cong 370.$$

Αν η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής W μετατοπιστεί από τη θέση μ_0 στη θέση $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$, τότε

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{2 - \Phi(L - \delta) - \Phi(L + \delta)}.$$

Η χρήση του ARL ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια γιατί το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” ARL (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο). Αυτό συμβαίνει γιατί η κατανομή του μήκους ροής T είναι μια γεωμετρική κατανομή και συνεπώς η μέση τιμή της δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδίως για μικρές τιμές του p , αφού σε αυτήν την περίπτωση η διακύμανση της γεωμετρικής κατανομής είναι αρκετά μεγάλη.

1.6. Διάγραμμα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου, στην περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε τον συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα

επιθεώρησης, γίνεται χρήση του διαγράμματος ελέγχου c . Η βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων X σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή Poisson. Η υπόθεση αυτή συνεπάγεται ότι η πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος σε οποιοδήποτε σημείο μιας μονάδας επιθεώρησης πρέπει να είναι μικρή.

Είναι γνωστό ότι αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim P(c)$, τότε

$$P(X = x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$\mu_X = \sigma_X^2 = c.$$

Σε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του συνολικού αριθμού των ελαττωμάτων που εμφανίζονται στις μονάδες επιθεώρησης απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση $W_i = X_i, (i \geq 1)$, όπου $X_i (i \geq 1)$ δηλώνει τον αριθμό των ελαττωμάτων στην i μονάδα επιθεώρησης. Υποθέτοντας ότι η εντός ελέγχου κατανομή του συνολικού αριθμού των ελαττωμάτων που εμφανίζονται στις μονάδες επιθεώρησης είναι η $P(c_0)$, τότε τα όρια ελέγχου 3σ Φάσης II του επονομαζόμενου c διαγράμματος ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL = c_0 + 3\sqrt{c_0}$$

$$CL = c_0$$

$$LCL = c_0 - 3\sqrt{c_0}$$

Σημειώνεται ότι αν το LCL πάρει αρνητική τιμή (που συμβαίνει όταν $c_0 < 9$), τότε το θέτουμε ίσο με το 0.

Για την κατασκευή ενός c διαγράμματος ελέγχου Φάσης I, δηλαδή στην περίπτωση όπου το c_0 είναι άγνωστο, κάνουμε την υπόθεση ότι έχουμε στη διάθεσή μας m προκαταρκτικές μονάδες επιθεώρησης. Έστω X_i ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων στην i μονάδα επιθεώρησης ($1 \leq i \leq m$).

Θέτοντας

$$\bar{c} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{C}) = c_0$. Έτσι η ποσότητα \bar{C} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της παραμέτρου c_0 και επομένως τα όρια ελέγχου 3σ Φάσης I του c διαγράμματος ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$$

$$CL = \bar{C}$$

$$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$$

Η πιθανότητα σφάλματος τύπου I σε ένα c διάγραμμα ελέγχου (Φάσης II) υπολογίζεται από τη σχέση

$$\alpha = P(X \notin [LCL, UCL] | X \sim P(c_0)) = 1 - \sum_{x=[LCL]}^{[UCL]} e^{-c_0} \frac{c_0^x}{x!}$$

όπου c_0 είναι η εντός ελέγχου μέση τιμή του αριθμού των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης, το $[x]$ συμβολίζει το κάτω ακέραιο μέρος του x ή απλά ακέραιο μέρος του x , ενώ το $\lceil x \rceil$ συμβολίζει το πάνω ακέραιο μέρος του x .

Η πιθανότητα σφάλματος τύπου II σε ένα c διάγραμμα ελέγχου (Φάσης II), στην περίπτωση που είναι η εντός ελέγχου μέση τιμή των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης έχει μετατοπιστεί στη θέση c_1 υπολογίζεται από τη σχέση

$$\beta = P(LCL \leq X \leq UCL | X \sim P(c_1)) = \sum_{x=[LCL]}^{[UCL]} e^{-c_1} \frac{c_1^x}{x!}$$

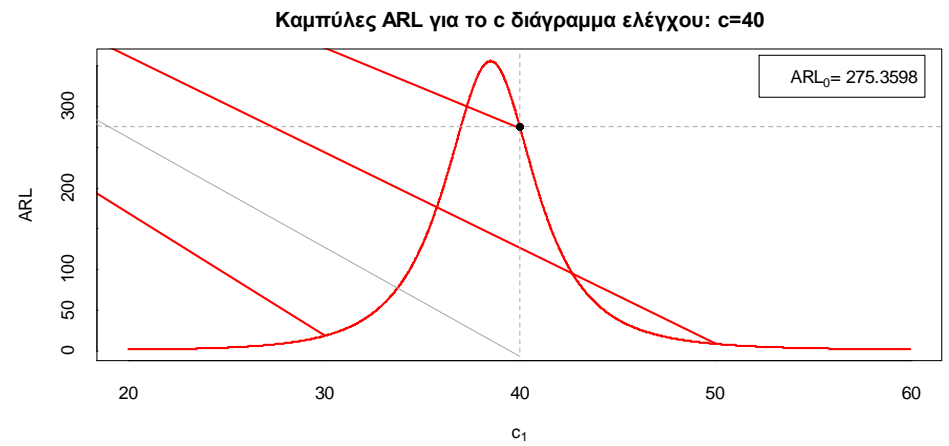
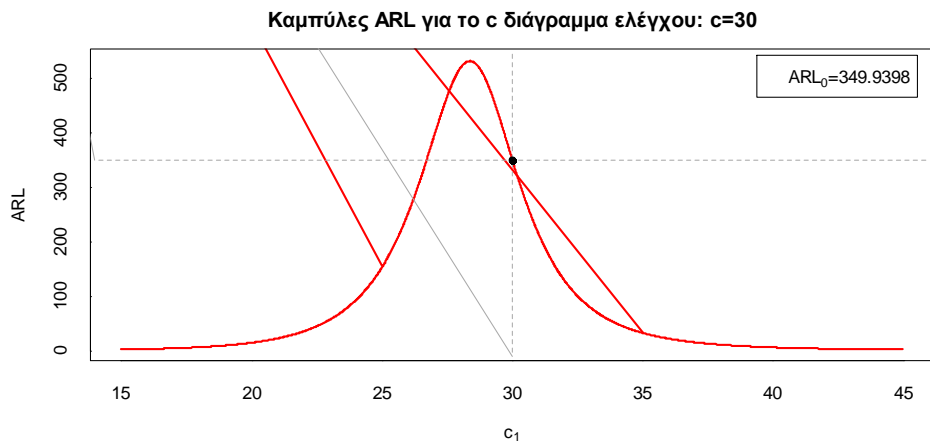
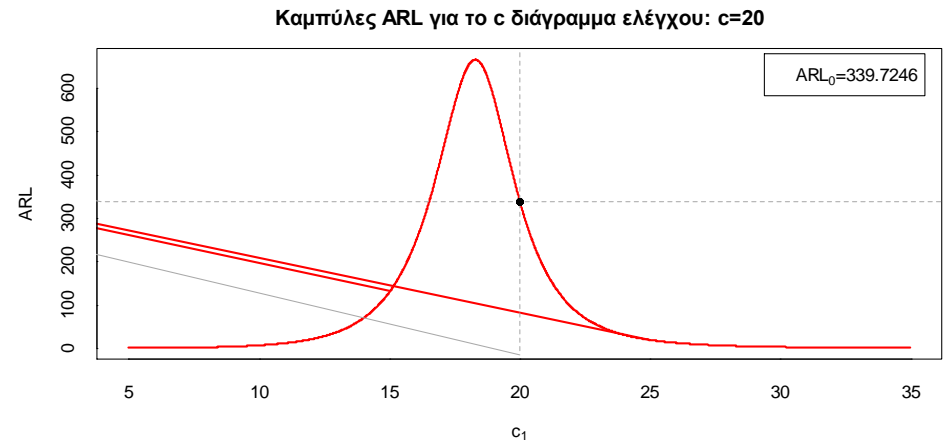
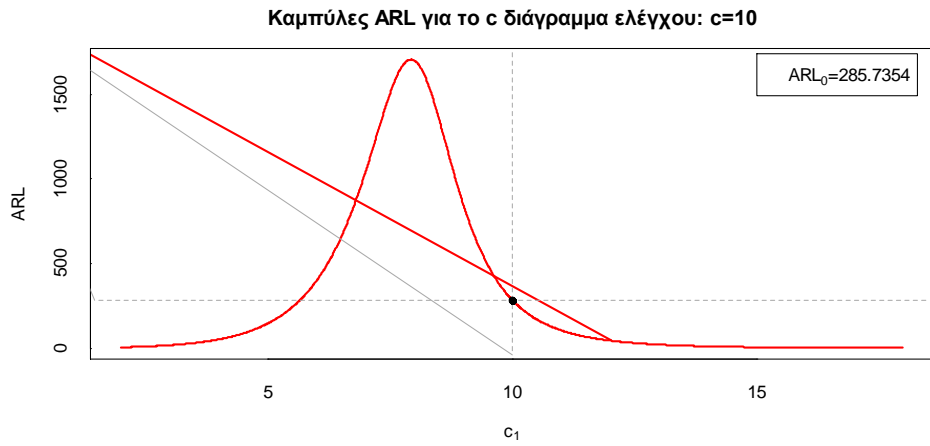
Για το εντός και εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ισχύουν οι γνωστοί τύποι

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

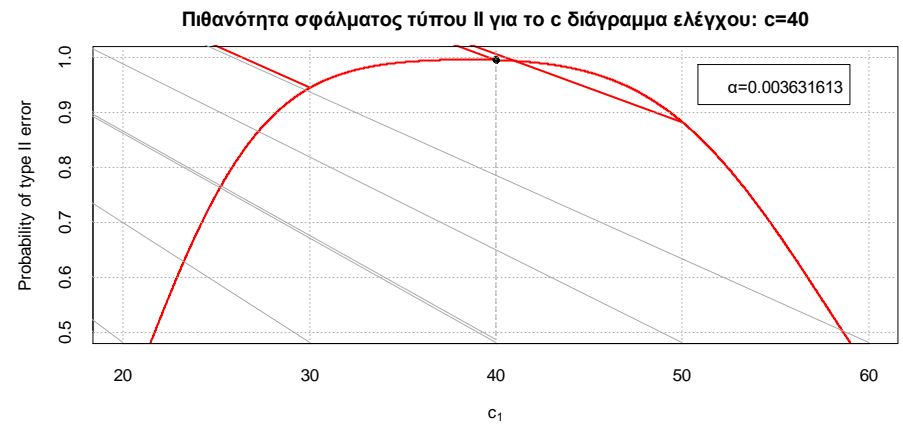
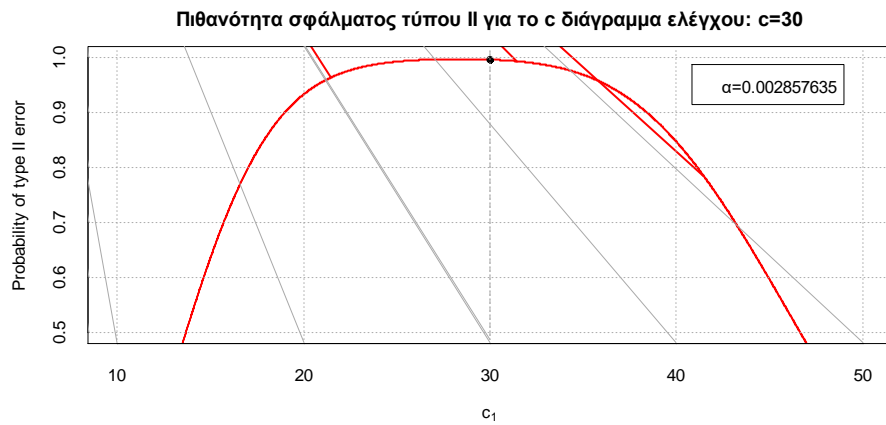
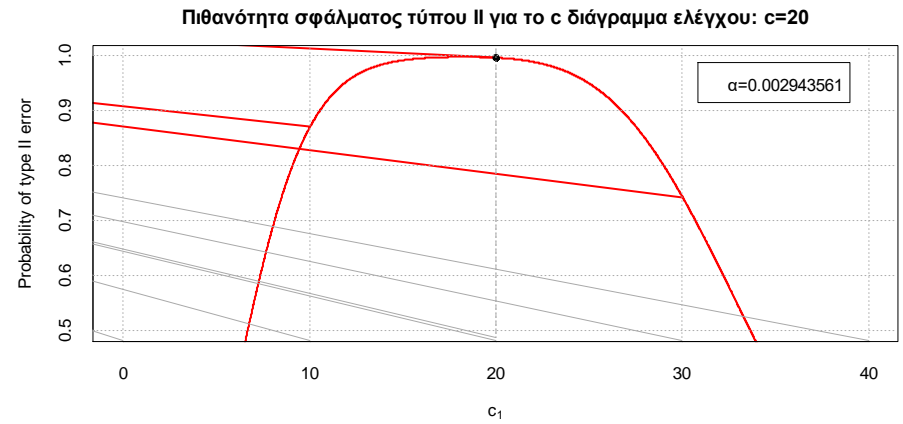
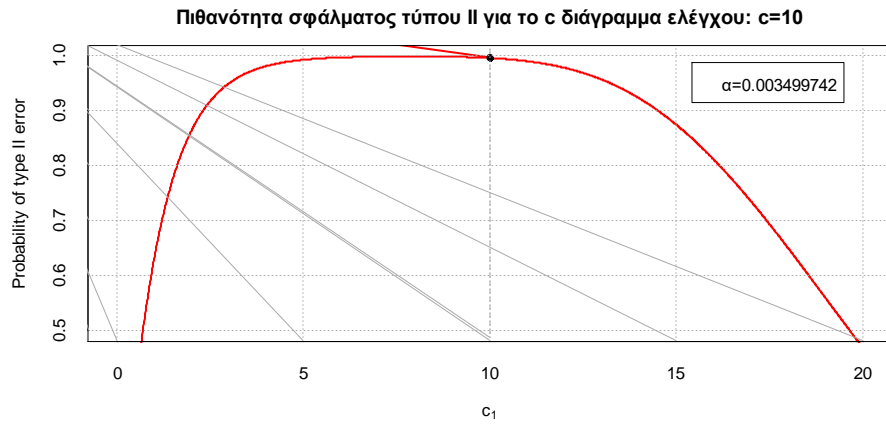
Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τιμές του μέσου μήκους ροής για διάφορα c διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ . Στα δύο επόμενα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις του μέσου μήκους ροής και της πιθανότητας σφάλματος τύπου II.

Πίνακας 1.1. Τιμές *ARL* για διάφορα *c* διαγράμματα ελέγχου: $c_0 = 10, 20, 30, 40$

$c_0 = 10$		$c_0 = 20$		$c_0 = 30$		$c_0 = 40$	
c_1	<i>ARL</i>	c_1	<i>ARL</i>	c_1	<i>ARL</i>	c_1	<i>ARL</i>
1	2.72	2	1.00	12	1.47	22	2.12
2	7.39	4	1.12	14	2.15	24	3.19
3	20.09	6	1.65	16	3.64	26	5.25
4	54.60	8	3.19	18	7.01	28	9.44
5	148.41	10	7.68	20	15.12	30	18.37
6	402.59	12	21.82	22	35.99	32	38.45
7	1045.71	14	70.26	24	93.13	34	85.65
8	1699.52	16	245.93	26	251.88	36	194.17
9	847.92	18	650.36	28	517.96	38	345.24
10	285.74	20	339.72	30	349.94	40	275.36
11	107.46	22	94.63	32	129.20	42	126.66
12	46.98	24	31.85	34	50.22	44	56.22
13	23.44	26	13.32	36	22.46	46	27.29
14	13.07	28	6.69	38	11.46	48	14.63
15	8.01	30	3.91	40	6.57	50	8.59
16	5.33	32	2.60	42	4.17	52	5.48
17	3.79	34	1.91	44	2.90	54	3.77
18	2.86	36	1.53	46	2.17	56	2.76
19	2.28	38	1.31	48	1.73	58	2.15



Σχήμα 1.2. Καμπύλες ARL για διάφορα c διαγράμματα ελέγχου: $c_0 = 10, 20, 30, 40$



Σχήμα 1.3. Πιθανότητα σφάλματος τύπου II για διάφορα c διαγράμματα ελέγχου: $c_0 = 10, 20, 30, 40$

- **Εφαρμογή 1**

Ο μηχανικός ποιότητας ενός κατασκευαστή ταπετσαριών θέλει να αξιολογήσει τη σταθερότητα της διαδικασίας εκτύπωσης. Κάθε ημέρα ο μηχανικός παίρνει ένα δείγμα 100 ποδιών (ft) ταπετσαρίας και καταγράφει τον αριθμό των ελαττωμάτων της εκτύπωσης, τα οποία περιλαμβάνουν επιχρίσματα εκτύπωσης, στρεβλώσεις μοτίβων, απουσία μελανιού, κ.ά. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι αριθμοί των ελαττωμάτων που βρέθηκαν σε 25 ημέρες. (πηγή: MINITAB 17 (2010)).

Πίνακας 1.2. Ελαττώματα κατά την εκτύπωση της ταπετσαρίας ανά 100 πόδια

Ημέρα (<i>i</i>)	Ελαττώματα (X_i)	Ημέρα (<i>i</i>)	Ελαττώματα (X_i)
1	24	14	41
2	28	15	25
3	36	16	38
4	47	17	21
5	23	18	29
6	26	19	38
7	29	20	32
8	45	21	45
9	48	22	42
10	32	23	26
11	45	24	38
12	56	25	45
13	58		

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι

$$\bar{c} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{25}}{25} = \frac{917}{25} = 36.68.$$

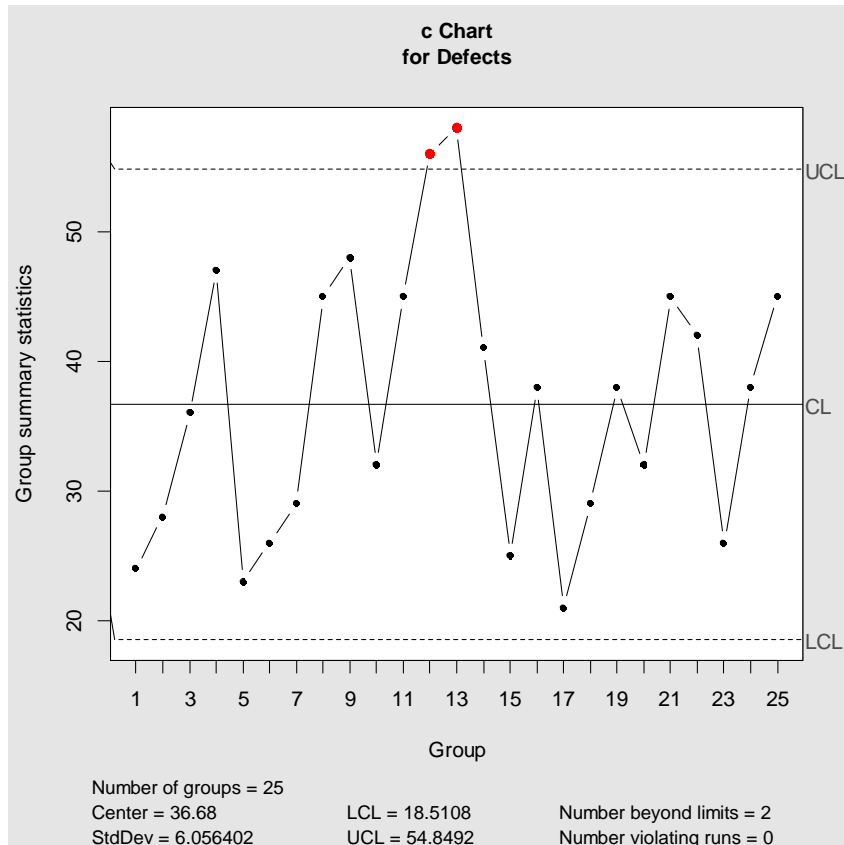
Υποθέτοντας ότι ο αριθμός των ελαττωμάτων ακολουθεί την κατανομή Poisson, τα όρια ελέγχου Φάσης Ι του *c* διαγράμματος ελέγχου είναι τα

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 54.8492$$

$$CL = \bar{c} = 36.88$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 18.5108.$$

Το *c* διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 1.4. Πρώτο δοκιμαστικό c διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Από το c διάγραμμα ελέγχου προκύπτει ότι 2 σημεία βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου, το 12^ο και το 13^ο. Υποθέτοντας ότι τη 12^η και τη 13^η ημέρα εμφανίστηκαν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας στη διεργασία, τα σημεία αυτά πρέπει να αφαιρεθούν και να επανυπολογιστούν τα όρια ελέγχου Φάσης I. Έτσι

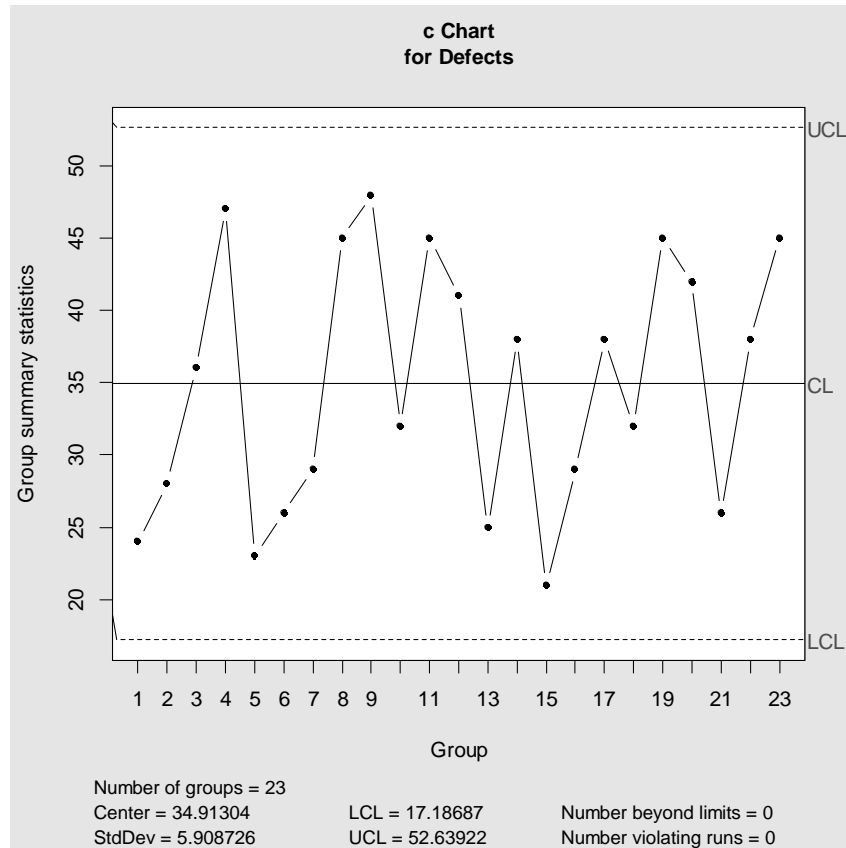
$$\bar{c} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_{25}) - (X_{12} + X_{13})}{23} = \frac{917 - 114}{23} = 34.91304$$

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 52.63922$$

$$CL = \bar{c} = 34.91304$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 17.18687.$$

Το νέο c διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 1.5. Τελικό c διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Εφόσον όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους φαίνεται να είναι τυχαία, τα παραπάνω όρια ελέγχου θα είναι τα όρια ελέγχου Φάσης II.

1.7. Διαγράμματα ελέγχου για τον μέσο αριθμό των ελαττωμάτων

Για την κατασκευή διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης γίνεται χρήση του u διαγράμματος ελέγχου. Η βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων X σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή Poisson. Η κύρια διαφορά με το c διάγραμμα ελέγχου είναι ότι το u διάγραμμα

χρησιμοποιείται όταν ελέγχονται δείγματα μονάδων επιθεώρησης με διαφορετικό μέγεθος δείγματος.

Για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων που εμφανίζονται στις μονάδες επιθεώρησης στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση $U_i = X_i/n_i$ ($i \geq 1$) όπου X_i δηλώνει τον συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων που βρέθηκαν στο i δείγμα που αποτελείται από n_i μονάδες επιθεώρησης. Υποθέτουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή του συνολικού αριθμού των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης είναι η $P(c_0)$. Αφού $X_i \sim P(n_i c_0)$, παίρνουμε ότι $\mu_{U_i} = c_0$ και $\sigma_{U_i}^2 = c_0/n_i$ ($i \geq 1$). Έτσι τα 3σ όρια ελέγχου Φάσης II του επονομαζόμενου u διαγράμματος ελέγχου, για το i σημείο του διαγράμματος, δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL_i = c_0 + 3 \sqrt{\frac{c_0}{n_i}}$$

$$CL = c_0$$

$$LCL_i = c_0 - 3 \sqrt{\frac{c_0}{n_i}}$$

Για την κατασκευή ενός u διαγράμματος ελέγχου Φάσης I, δηλαδή στην περίπτωση όπου το c_0 είναι άγνωστο, κάνουμε την υπόθεση ότι έχουμε στη διάθεσή μας m προκαταρκτικά δείγματα μονάδων επιθεώρησης. Έστω X_i ($1 \leq i \leq m$) ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων που βρέθηκαν στο i δείγμα που αποτελείται από n_i μονάδες επιθεώρησης ($1 \leq i \leq m$). Θέτοντας

$$\bar{U} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{U}) = c_0$. Έτσι η ποσότητα \bar{U} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της παραμέτρου c_0 και επομένως τα 3σ όρια ελέγχου Φάσης I του u διαγράμματος ελέγχου, για το i σημείο του διαγράμματος, δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL_i = \bar{U} + 3 \sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$$

$$CL_i = \bar{U}$$

$$LCL_i = \bar{U} - 3 \sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$$

Η πιθανότητα σφάλματος τύπου I σε ένα u διάγραμμα ελέγχου (Φάσης II) με $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_m = n$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\alpha = P(X \notin [nLCL, nUCL] | X \sim P(nc_0)) = 1 - \sum_{x=[nLCL]}^{[nUCL]} e^{-nc_0} \frac{(nc_0)^x}{x!}$$

όπου c_0 είναι η εντός ελέγχου μέση τιμή των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης. Αντίστοιχα, η πιθανότητα σφάλματος τύπου II στην περίπτωση που η εντός ελέγχου μέση τιμή των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης έχει μετατοπιστεί στη θέση c_1 υπολογίζεται από τη σχέση

$$\beta = P(nLCL \leq X \leq nUCL | X \sim P(nc_1)) = \sum_{x=[nLCL]}^{[nUCL]} e^{-nc_1} \frac{(nc_1)^x}{x!}$$

Για το εντός και εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ισχύουν οι γνωστοί τύποι

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

• Εφαρμογή 2

Ο διευθυντής του τμήματος παραγγελιών μιας βιομηχανικής μονάδας θέλει να αξιολογήσει την ποιότητα της καταγραφής των παραγγελιών. Ο διευθυντής επιλέγει τυχαία 25 σύνολα σελίδων από διαδοχικές παραγγελίες και μετράει τον αριθμό των τυπογραφικών σφαλμάτων (ελαττώματα). Κάθε σύνολο σελίδων έχει διαφορετικό αριθμό σελίδων και τα αποτελέσματα της έρευνάς του δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1.3. Συνολικά ελαττώματα σε κάθε σύνολο σελίδων

Παραγγελία (<i>i</i>)	Ελαττώματα (<i>X_i</i>)	Αριθμός Σελίδων (<i>n_i</i>)	Παραγγελία (<i>i</i>)	Ελαττώματα (<i>X_i</i>)	Αριθμός Σελίδων (<i>n_i</i>)
1	3	30	14	8	31
2	4	24	15	5	24
3	2	23	16	7	27
4	6	25	17	4	27
5	5	32	18	17	30
6	18	30	19	5	32
7	6	24	20	8	24
8	5	30	21	6	26
9	10	27	22	8	32
10	4	24	23	9	30
11	4	30	24	5	24
12	7	32	25	3	25
13	5	26			

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι

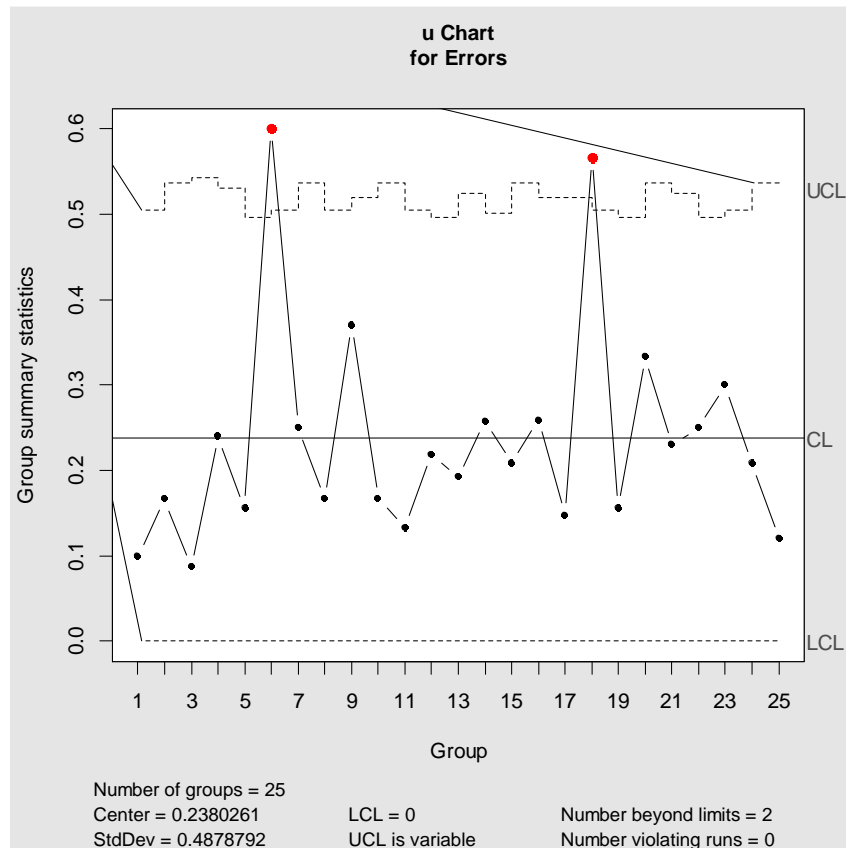
$$\bar{U} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{25}}{25} = \frac{134}{689} = 0.2380261$$

Υποθέτοντας ότι ο αριθμός των ελαττωμάτων ακολουθεί την κατανομή Poisson, οι τιμές U_i και τα όρια ελέγχου UCL_i Φάσης I του u διαγράμματος ελέγχου ($LCL_i = 0$) για $1 \leq i \leq 25$ δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 1.4. Τιμές $U_i = X_i/n_i$ και UCL_i ($1 \leq i \leq 25$)

<i>i</i>	U_i	UCL_i	<i>i</i>	U_i	UCL_i
1	0.10000000	0.5052486	14	0.25806452	0.5009032
2	0.16666667	0.5367899	15	0.20833333	0.5367899
3	0.08695652	0.5432157	16	0.25925926	0.5197033
4	0.24000000	0.5307537	17	0.14814815	0.5197033
5	0.15625000	0.4967631	18	0.56666667	0.5052486
6	0.60000000	0.5052486	19	0.15625000	0.4967631
7	0.25000000	0.5367899	20	0.33333333	0.5367899
8	0.16666667	0.5052486	21	0.23076923	0.5250691
9	0.37037037	0.5197033	22	0.25000000	0.4967631
10	0.16666667	0.5367899	23	0.30000000	0.5052486
11	0.13333333	0.5052486	24	0.20833333	0.5367899
12	0.21875000	0.4967631	25	0.12000000	0.5307537
13	0.19230769	0.5250691			

Το u διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο:

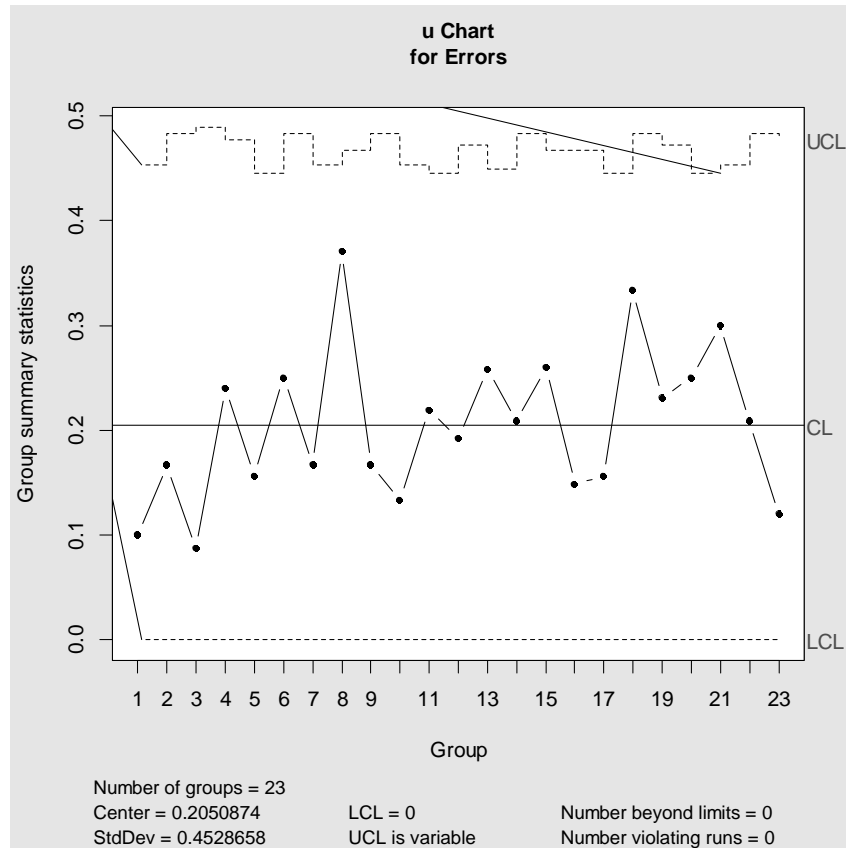


Σχήμα 1.6. Πρώτο δοκιμαστικό u διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Από το u διάγραμμα ελέγχου προκύπτει ότι 2 σημεία βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου, το 6^ο και το 18^ο. Υποθέτοντας ότι στο 6^ο και στο 18^ο σύνολο σελίδων εμφανίστηκαν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας στη διεργασία, πρέπει να αφαιρεθούν οι συγκεκριμένες παρατηρήσεις και να επανυπολογιστούν τα όρια ελέγχου Φάσης I χρησιμοποιώντας νέα τιμή για το \bar{U} την ακόλουθη

$$\bar{U} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_{25}) - (X_6 + X_{18})}{23} = \frac{129}{629} = 0.2050874.$$

Το νέο u διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 1.7. Τελικό *u* διάγραμμα ελέγχου Φάσης I

Εφόσον όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους φαίνεται να είναι τυχαία, τα παραπάνω όρια ελέγχου θα είναι τα όρια ελέγχου Φάσης II.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Poisson διαγράμματα ελέγχου

2.1. Εισαγωγή

Το πρώτο διάγραμμα που μελετάμε είναι το Poisson Moving Average διάγραμμα ελέγχου, το οποίο προήλθε από τον Khoο(2004). Όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου, στην περίπτωση που θέλουμε να μελετήσουμε τον συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα θα βασιζόμασταν στο c διάγραμμα ελέγχου, το οποίο προτάθηκε από τον Shewhart (1926). Ωστόσο, όπως διαπιστώσαμε, το c διάγραμμα ελέγχου είναι σχετικά αργό στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Για τον παραπάνω λόγο θα παρουσιάσουμε το PMA που θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα της αργής ανίχνευσης αυτών των μετατοπίσεων, βασιζόμενοι στην κατασκευή ενός Poisson κινούμενου μέσου ενός διαγράμματος ελέγχου. Αρχικά παρουσιάζουμε τιμές για το μέσο μήκος ροής του (δίπλευρου) PMA διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ και δύο εφαρμογές που παρουσιάζουν τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης του διαγράμματος PMA.

Το δεύτερο διάγραμμα που μελετάμε είναι το Poisson εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου διάγραμμα ελέγχου (PEWMA) το οποίο το πρότειναν οι Borror, Champ & Rigdon (1998) για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων μιας διεργασίας σε Poisson δεδομένα. Αρχικά παρουσιάζουμε τις ARL τιμές για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου και κάνουμε συγκρίσεις του c διαγράμματος ελέγχου και του PEWMA διαγράμματος για Poisson δεδομένα.

Στην συνέχεια μελετάμε το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου, το οποίο πρότειναν οι Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington(2003). Στην παρούσα εργασία επεκτείνεται η ιδέα του διαγράμματος PEWMA για να δημιουργήσει ένα νέο διάγραμμα που ονομάζουμε διάγραμμα Poisson DEWMA. Λαμβάνουμε τα ARL και τις τυπικές

αποκλίσεις των μήκους διαδρομής του διαγράμματος PDEWMA χρησιμοποιώντας μια μέθοδο προσομοίωσης και τα συγκρίνουμε με αυτά του διαγράμματος PEWMA. Το διάγραμμα ελέγχου PDEWMA φαίνεται να είναι λίγο πιο αποτελεσματικό από το κλασικό PEWMA διάγραμμα ελέγχου για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας, και αρκετά πιο αποτελεσματικό για μικρές μετατοπίσεις. Παρουσιάζουμε και μία εφαρμογή, η οποία συγκρίνει το διάγραμμα c με το PDEWMA.

Το τέταρτο διάγραμμα που μελετάμε είναι το PGWMA διάγραμμα ελέγχου που πρότειναν οι Sheu & Chiu (2007). Για την παρακολούθηση παρατηρήσεων Poisson, χρησιμοποιούμε το γενικώς σταθμισμένο διάγραμμα ελέγχου μέσου όρου (PGWMA) που αναπτύχθηκε από τους Sheu και Lin (2003) για να ανιχνεύσουμε τις μετατοπίσεις. Επίσης έχει καλύτερη στατιστική απόδοση από άλλα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση των παρατηρήσεων Poisson και είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Το PGWMA είναι ένα γενικευμένο μοντέλο για το οποίο το διάγραμμα PEWMA και το διάγραμμα c είναι ειδικές περιπτώσεις. Παρουσιάζουμε μία εφαρμογή για την σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου c , PGWMA και PEWMA.

Το τελευταίο διάγραμμα ελέγχου που μελετάμε είναι το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου που πρότεινε ο Lucas (1985). Στην παρούσα εργασία περιγράφουμε τις διαδικασίες σχεδιασμού και υλοποίησης για δεδομένα Poisson. Αρχικά το PCUSUM έχει την δυνατότητα να ανιχνεύει πιο γρήγορα εάν μια κατάσταση βρίσκεται εκτός ελέγχου από ότι ένα c διάγραμμα ελέγχου. Παρουσιάζουμε εφαρμογές που συγκρίνουν την εφαρμογή των PCUSUM διαγραμμάτων ελέγχου με τα διαγράμματα c .

2.2. Το PMA διάγραμμα ελέγχου

Το c διάγραμμα ελέγχου που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση του συνολικού αριθμού των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης του προϊόντος, όταν η

πιθανότητα εμφάνισης ενός ελαττώματος είναι σχετικά μικρή. Η κατανομή του αριθμού των ελαττωμάτων θεωρείται ότι είναι η κατανομή Poisson με παράμετρο c . Το διάγραμμα ελέγχου c είναι σχετικά αργό στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του συνολικού αριθμού των ελαττωμάτων, δηλαδή της παραμέτρου c . Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται μια πιο αποτελεσματική εναλλακτική λύση που βασίζεται στην κατασκευή ενός Poisson κινούμενου μέσου διαγράμματος ελέγχου (Poisson Moving Average control chart, PMA) Το διάγραμμα αυτό εισήχθη από τον Khoo (2004). Το PMA διάγραμμα ελέγχου έχει αποδειχθεί ότι παρέχει, στις περισσότερες περιπτώσεις, μεγαλύτερα ARL εντός ελέγχου και μικρότερα ARL εκτός ελέγχου σε σχέση με το κλασικό διάγραμμα ελέγχου c .

Όσον αφορά τον σχεδιασμό του PMA διαγράμματος ελέγχου, ας υποθέσουμε ότι ο (συνολικός) αριθμός των μη συμμορφώσεων (ελαττωμάτων) στις μονάδες επιθεώρησης του προϊόντος είναι c_1, c_2, c_3, \dots . Για τις παρατηρήσεις $c_i, i \geq 1$, υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες και $c_i \sim P(c)$. Οι κινούμενοι μέσοι $M_i, i = 1, 2, 3, \dots$, αυτών των παρατηρήσεων μήκους w δίνονται από τον τύπο

$$M_i = \frac{\sum_{j=1}^i c_j}{i}, \quad i < w,$$

και

$$M_i = \frac{c_i + c_{i-1} + \dots + c_{i-w+1}}{w} = \frac{\sum_{j=i-w+1}^i c_j}{w}, \quad i \geq w.$$

Για παράδειγμα, εάν $w = 4$, τότε

$$M_1 = \frac{c_1}{1} = c_1,$$

$$M_2 = \frac{c_1 + c_2}{2},$$

$$M_3 = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3}$$

και

$$M_i = \frac{c_i + c_{i-1} + c_{i-2} + c_{i-3}}{4}, \quad i \geq 4.$$

Για $i \geq w$ έχουμε

$$E(M_i) = E\left(\frac{1}{w} \sum_{j=i-w+1}^i c_j\right) = \frac{1}{w} \sum_{j=i-w+1}^i E(c_j) = \frac{1}{w}(wc) = c$$

και

$$Var(M_i) = Var\left(\frac{1}{w} \sum_{j=i-w+1}^i c_j\right) = \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^i Var(c_j) = \frac{1}{w^2}(wc) = \frac{c}{w}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι για τις περιόδους $i = 1, 2, \dots, w - 1$, η μέση τιμή και η διακύμανση του κινούμενου μέσου όρου M_i είναι c και c/i , αντίστοιχα.

Τα 3σ όρια ελέγχου για το PMA διάγραμμα ελέγχου για τις περιόδους $i \geq w$, είναι

$$UCL_M = c + 3\sqrt{c/w}$$

$$CL_M = c$$

$$LCL_M = \max\{0, c - 3\sqrt{c/w}\}$$

ενώ για τις περιόδους $i = 1, 2, \dots, w - 1$, τα όρια ελέγχου είναι

$$UCL_M = c + 3\sqrt{c/i}$$

$$CL_M = c$$

$$LCL_M = \max\{0, c - 3\sqrt{c/i}\}.$$

Εάν η τιμή της παραμέτρου c δεν είναι διαθέσιμη, τότε τα όρια ελέγχου λαμβάνονται χρησιμοποιώντας ένα προκαταρκτικό δείγμα μονάδων επιθεώρησης μεγέθους m , καταγράφοντας τον αριθμό των ελαττωμάτων σε κάθε μια από αυτές, έστω c_1, c_2, \dots, c_m , και αντικαθιστώντας στους παραπάνω τύπους το c με την εκτίμησή του \bar{c} , όπου

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i}{m}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τιμές για το μέσο μήκος ροής του (δίπλευρου) PMA διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ για τις περιπτώσεις όπου η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου c , έστω c_0 , είναι ίση με 1, 3, 10 και 16. Για εκτός ελέγχου τιμή της παραμέτρου c , έστω c_1 , έχουμε πάρει τις τιμές

$$c_1 = c_0 + d \cdot \sqrt{c_0}$$

για $d = 0, 0.25, 0.5, \dots, 3$. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις $w = 2, 3$ και 4 . Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον Πίνακα 2.1 και έχουν προκύψει με προσομοίωση (έγιναν 10000 επαναλήψεις). Ο σχετικός κώδικας στη γλώσσα R δίνεται στο Παράρτημα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, για το PMA διάγραμμα ελέγχου, οι εντός ελέγχου τιμές ARL είναι μεγαλύτερες και οι εκτός ελέγχου τιμές ARL είναι μικρότερες αν συγκριθούν με αυτές του κλασικού c διαγράμματος ελέγχου. Οι τιμές που προέκυψαν είναι συγκρίσιμες με αυτές που έδωσε ο Khoo (2004).

Πίνακας 2.1. ARL τιμές για το c και το PMA διάγραμμα ελέγχου ($w = 2, 3, 4$)

Shift	$c_0 = 1$				$c_0 = 3$			
	c chart	PMA			c chart	PMA		
$w = 2$		$w = 3$	$w = 4$	$w = 2$		$w = 3$	$w = 4$	
0.00	274.85	256.12	347.80	526.94	263.38	308.78	514.95	458.74
0.25	109.61	86.83	98.97	123.35	113.81	107.70	143.88	119.76
0.50	54.21	38.89	40.68	45.67	57.20	46.93	54.30	44.29
0.75	30.96	20.86	20.42	21.48	32.25	23.70	25.23	20.50
1.00	19.22	12.97	12.26	12.42	19.50	13.93	14.14	12.01
1.25	12.93	8.79	8.33	8.20	12.70	9.10	9.06	7.86
1.50	9.34	6.40	6.03	5.84	8.93	6.40	6.24	5.56
1.75	7.01	4.90	4.65	4.47	6.46	4.71	4.64	4.27
2.00	5.44	3.93	3.71	3.59	4.93	3.71	3.64	3.44
2.25	4.41	3.25	3.08	2.95	3.93	3.00	2.95	2.83
2.50	3.67	2.78	2.64	2.54	3.23	2.52	2.47	2.40
2.75	3.15	2.41	2.29	2.21	2.71	2.15	2.11	2.07
3.00	2.73	2.11	2.01	1.97	2.34	1.87	1.83	1.81
Shift	$c_0 = 10$				$c_0 = 16$			
	c chart	PMA			c chart	PMA		
$w = 2$		$w = 3$	$w = 4$	$w = 2$		$w = 3$	$w = 4$	
0.00	285.35	371.90	423.00	376.08	435.63	283.62	370.99	565.01
0.25	131.13	139.40	143.62	123.82	197.99	121.88	138.96	180.12
0.50	65.35	59.04	54.73	44.77	95.59	53.48	53.54	60.03
0.75	35.97	28.54	24.73	20.64	51.37	26.52	24.41	25.54
1.00	21.16	15.66	13.40	11.46	29.45	14.59	13.16	13.40
1.25	13.35	9.73	8.39	7.28	17.56	9.10	8.18	8.10
1.50	8.98	6.57	5.73	5.20	11.58	6.12	5.58	5.53
1.75	6.42	4.70	4.26	3.95	7.85	4.48	4.17	4.14
2.00	4.75	3.61	3.33	3.12	5.65	3.44	3.26	3.20
2.25	3.62	2.85	2.68	2.57	4.20	2.80	2.65	2.61
2.50	2.91	2.33	2.23	2.18	3.26	2.32	2.22	2.20
2.75	2.42	1.97	1.90	1.88	2.67	1.98	1.91	1.90
3.00	2.05	1.70	1.65	1.64	2.21	1.71	1.68	1.67

Οι τρεις εγγραφές με έντονη γραφή (bold) αντιπροσωπεύουν τις τρεις περιπτώσεις όπου οι (εντός ελέγχου) τιμές ARL του PMA διαγράμματος ελέγχου βρέθηκαν μικρότερες των αντίστοιχων τιμών του c διαγράμματος ελέγχου.

- **Εφαρμογή 1**

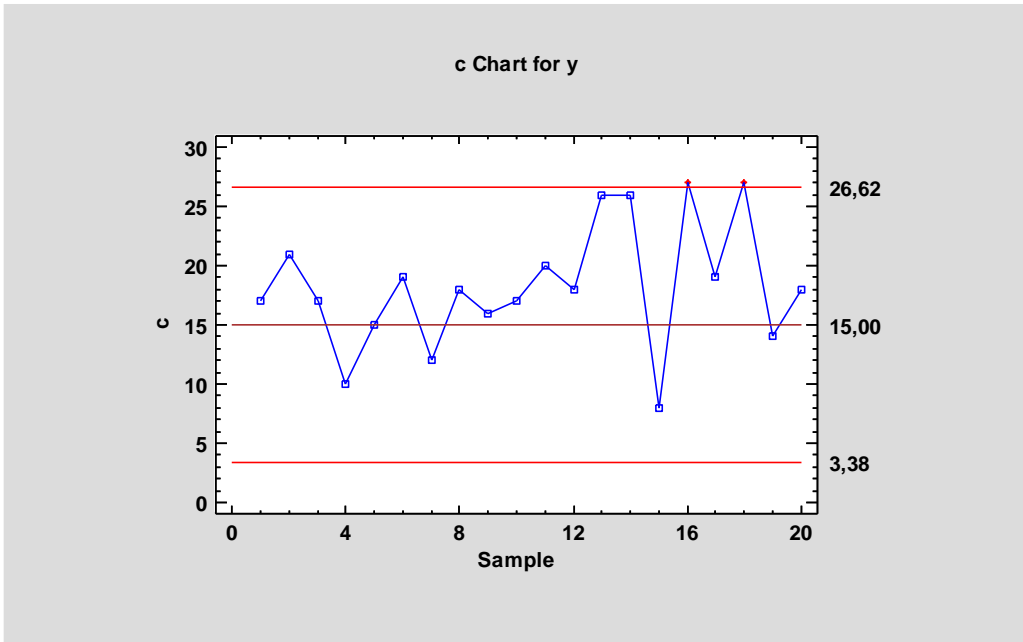
Η συγκεκριμένη εφαρμογή προϋποθέτει ότι είναι γνωστή η εντός ελέγχου μέση τιμή για τον αριθμό των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα

επιθεώρησης ο οποίος κατανέμεται σύμφωνα με μια κατανομή Poisson. Για τα πρώτα 10 δείγματα η εντός ελέγχου μέση τιμή είναι $c_0 = 15$, ενώ για τα επόμενα 10 δείγματα, η μέση τιμή αυξάνεται κατά μία τυπική απόκλιση, με εκτός ελέγχου μέση τιμή $c_1 = 15 + \sqrt{15}$. Τα όρια ελέγχου για το διάγραμμα ελέγχου c και για το Poisson κινούμενου μέσου διάγραμμα ελέγχου υπολογίζονται με βάση την εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 15$.

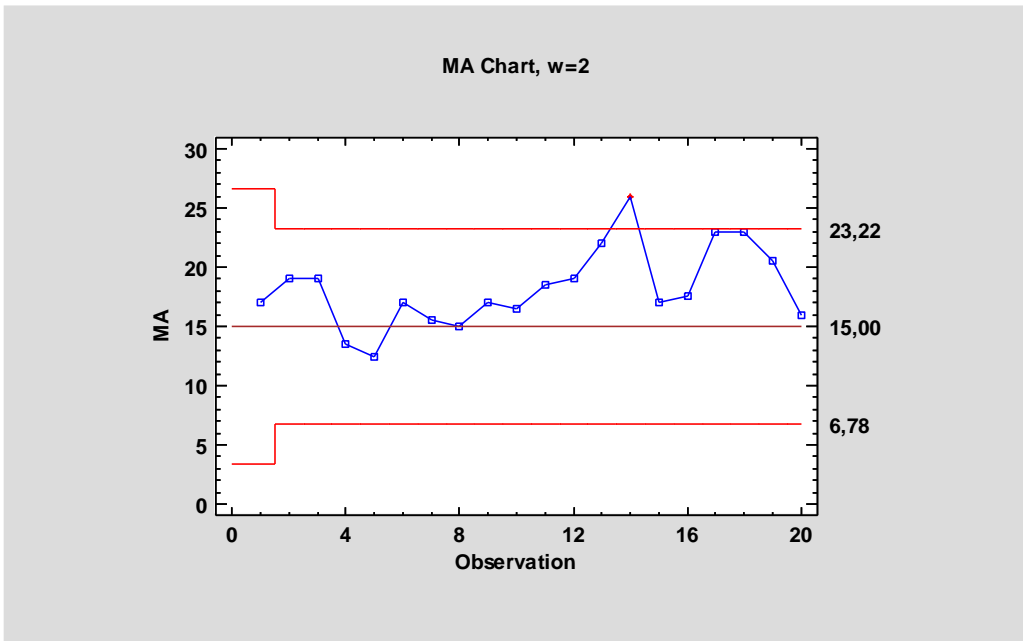
Οι τιμές για τους αριθμούς των ελαττωμάτων στις μονάδες επιθεώρησης και οι αντίστοιχες τιμές των κινούμενων μέσων για τις περιπτώσεις $w = 2, 3$ και 4 δίνονται στον Πίνακα 2.2. Τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου δίνονται στα Σχήματα 2.1-2.4, αντίστοιχα. Φαίνεται ξεκάθαρα ότι το διάγραμμα ελέγχου PMA και για τις τρεις τιμές του w δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 14, ενώ το διάγραμμα ελέγχου c δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο δείγμα 16, δηλαδή δύο δείγματα αργότερα.

Πίνακας 2.2. Εφαρμογή 1: Αριθμός ελαττωμάτων και τιμές της PMA στατιστικής συνάρτησης για $w = 2, 3$ και 4 .

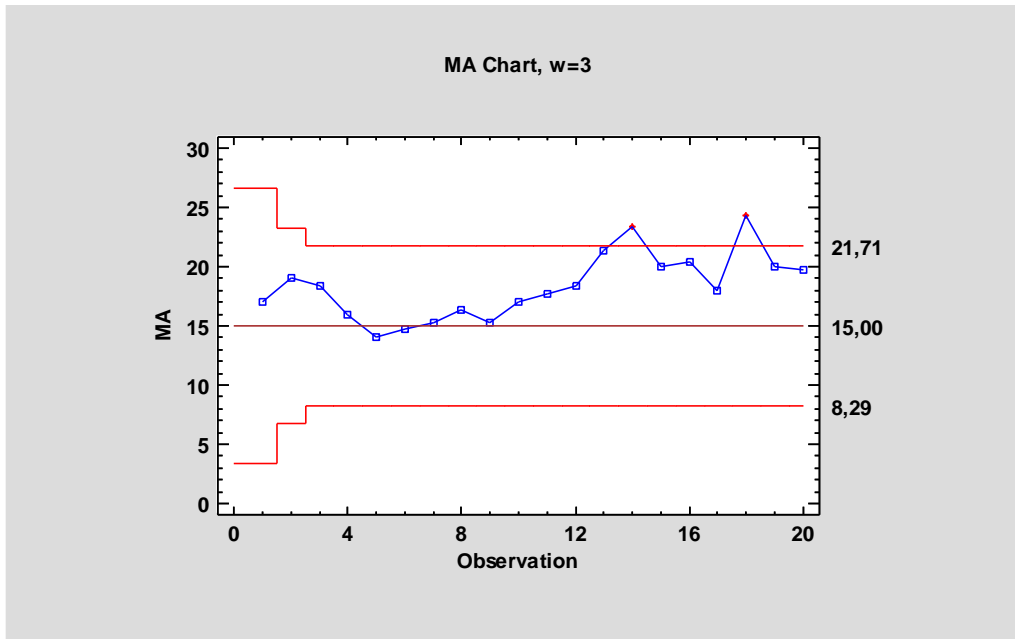
Μονάδα επιθεώρησης	Αριθμός ελαττωμάτων	Στατιστική PMA		
		$w = 2$	$w = 3$	$w = 4$
1	17	17.00	17.00	17.00
2	21	19.00	19.00	19.00
3	17	19.00	18.33	18.33
4	10	13.50	16.00	16.25
5	15	12.50	14.00	15.75
6	19	17.00	14.67	15.25
7	12	15.50	15.33	14.00
8	18	15.00	16.33	16.00
9	16	17.00	15.33	16.25
10	17	16.50	17.00	15.75
11	20	18.50	17.67	17.75
12	18	19.00	18.33	17.75
13	26	22.00	21.33	20.25
14	26	26.00	23.33	22.50
15	8	17.00	20.00	19.50
16	27	17.50	20.33	21.75
17	19	23.00	18.00	20.00
18	27	23.00	24.33	20.25
19	14	20.50	20.00	21.75
20	18	16.00	19.67	19.50



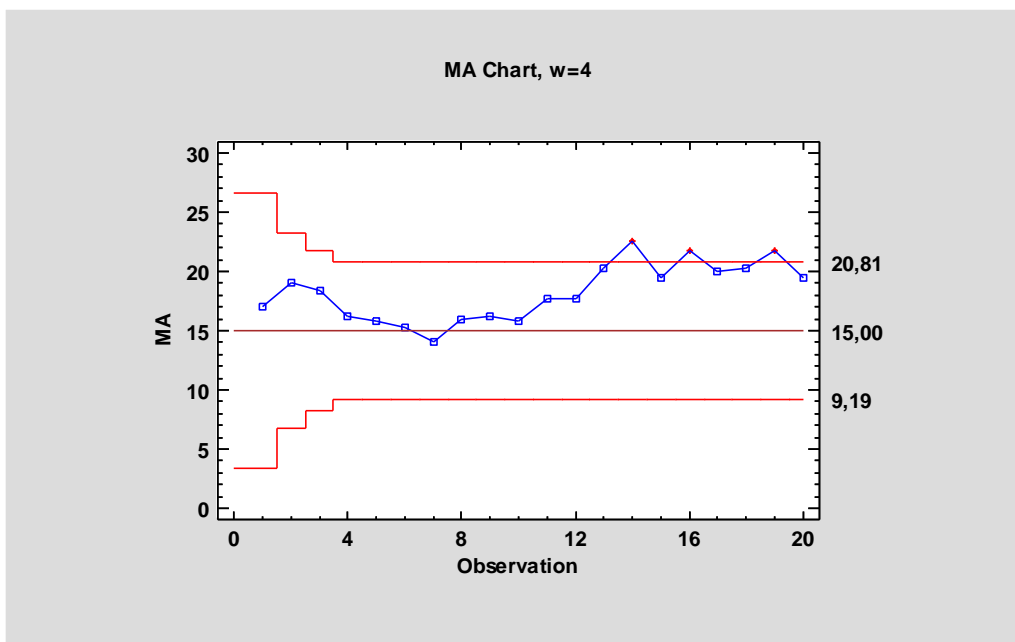
Σχήμα 2.1. Εφαρμογή 1: Διάγραμμα ελέγχου c



Σχήμα 2.2. Εφαρμογή 1: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 2$



Σχήμα 2.3. Εφαρμογή 1: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 3$



Σχήμα 2.4. Εφαρμογή 1: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 4$

- **Εφαρμογή 2**

Η συγκεκριμένη εφαρμογή βασίζεται σε ένα σύνολο δεδομένων που ελήφθησαν από τον Montgomery (1991) που αφορούν αριθμό ελαττωμάτων που

παρατηρήθηκαν σε 26 διαδοχικά δείγματα που το καθένα αποτελείται από 100 τυπωμένα κυκλώματα. Τα δεδομένα δίνονται στον Πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3. Εφαρμογή 2: Αριθμός ελαττωμάτων και τιμές της ΡΜΑ στατιστικής συνάρτησης για $w = 2, 3$ και 4 (αρχικά δεδομένα)

Μονάδα επιθεώρησης	Αριθμός ελαττωμάτων	Στατιστική ΡΜΑ		
		$w = 2$	$w = 3$	$w = 4$
1	21	21.00	21.00	21.00
2	24	22.50	22.50	22.50
3	16	20.00	20.33	20.33
4	12	14.00	17.33	18.25
5	15	13.50	14.33	16.75
6	5	10.00	10.67	12.00
7	28	16.50	16.00	15.00
8	20	24.00	17.67	17.00
9	31	25.50	26.33	21.00
10	25	28.00	25.33	26.00
11	20	22.50	25.33	24.00
12	24	22.00	23.00	25.00
13	16	20.00	20.00	21.25
14	19	17.50	19.67	19.75
15	10	14.50	15.00	17.25
16	17	13.50	15.33	15.50
17	13	15.00	13.33	14.75
18	22	17.50	17.33	15.50
19	18	20.00	17.67	17.50
20	39	28.50	26.33	23.00
21	30	34.50	29.00	27.25
22	24	27.00	31.00	27.75
23	16	20.00	23.33	27.25
24	19	17.50	19.67	22.25
25	17	18.00	17.33	19.00
26	15	16.00	17.00	16.75

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή η παράμετρος της κατανομής Poisson είναι άγνωστη. Για την εκτίμησή της χρησιμοποιούμε τα 26 δείγματα που περιέχουν συνολικά 516 ελαττώματα και έτσι η εκτίμηση της παραμέτρου c είναι

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^{26} c_i}{26} = \frac{516}{26} = 19.85.$$

Επομένως, τα δοκιμαστικά όρια ελέγχου για το c διάγραμμα είναι

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19.85 + 3\sqrt{19.85} = 33.22,$$

$$CL = \bar{c} = 19.85,$$

$$LCL = \max\{0, \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}\} = \max\{0, 19.85 - 3\sqrt{19.85}\} = 6.48.$$

Τα δοκιμαστικά όρια ελέγχου για τα PMA διαγράμματα ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4 δίνονται ακολούθως:

- $w = 2$

$$\text{Για } i = 1 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 33.22, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 6.48$$

$$\text{Για } i \geq 2 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 29.30, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 10.40$$

- $w = 3$

$$\text{Για } i = 1 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 33.22, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 6.48$$

$$\text{Για } i = 2 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 29.30, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 10.40$$

$$\text{Για } i \geq 3 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 27.57, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 12.13$$

- $w = 4$

$$\text{Για } i = 1 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 33.22, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 6.48$$

$$\text{Για } i = 2 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 29.30, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 10.40$$

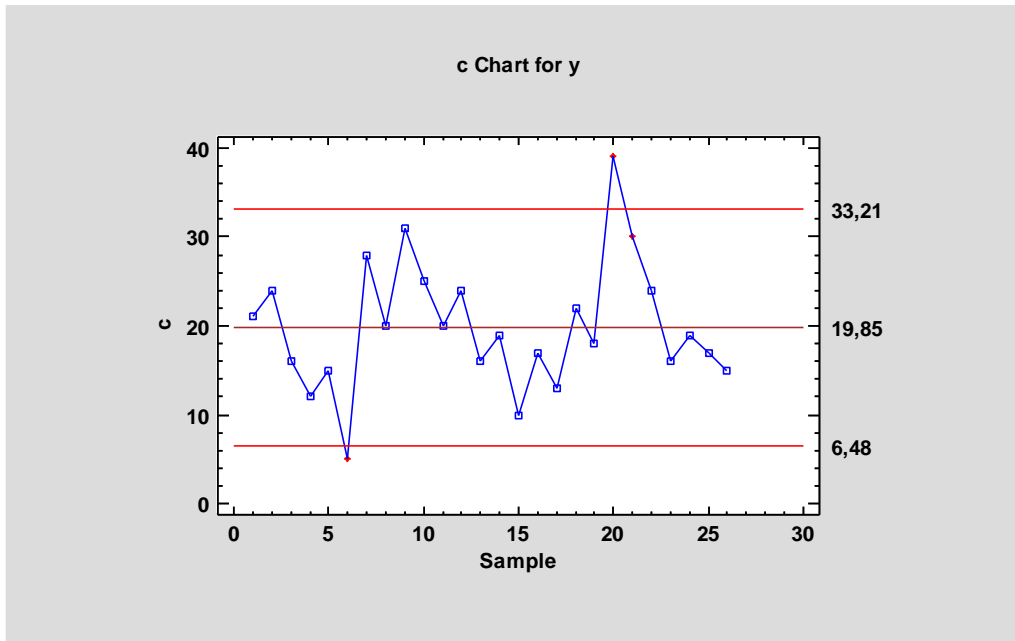
$$\text{Για } i = 3 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 27.57, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 12.13$$

$$\text{Για } i \geq 4 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 26.53, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 13.17$$

Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε

$$CL_M = \bar{c} = 19.85.$$

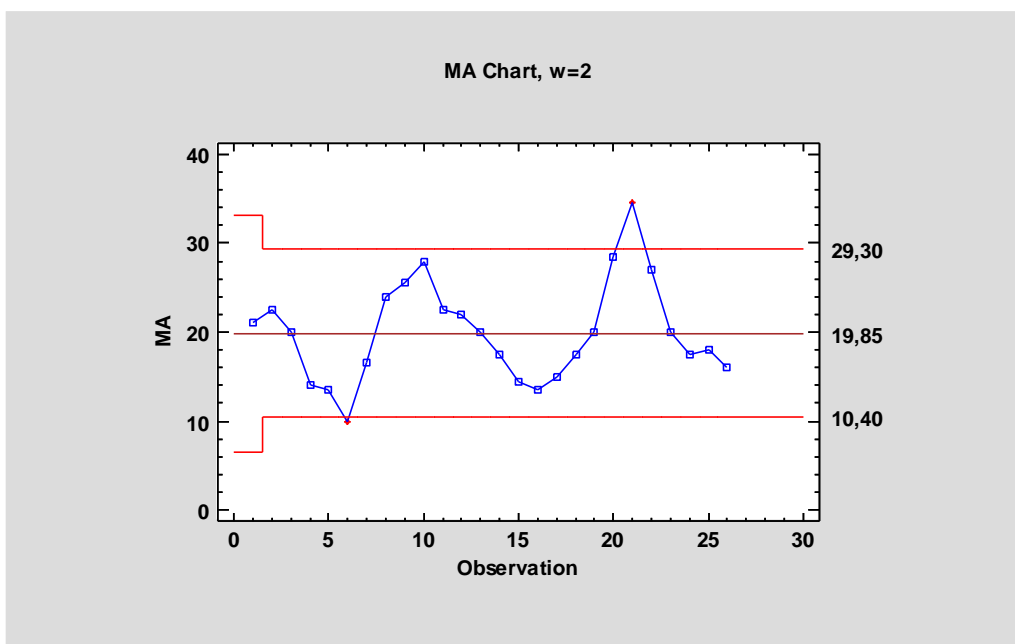
Τα διάγραμμα ελέγχου c δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



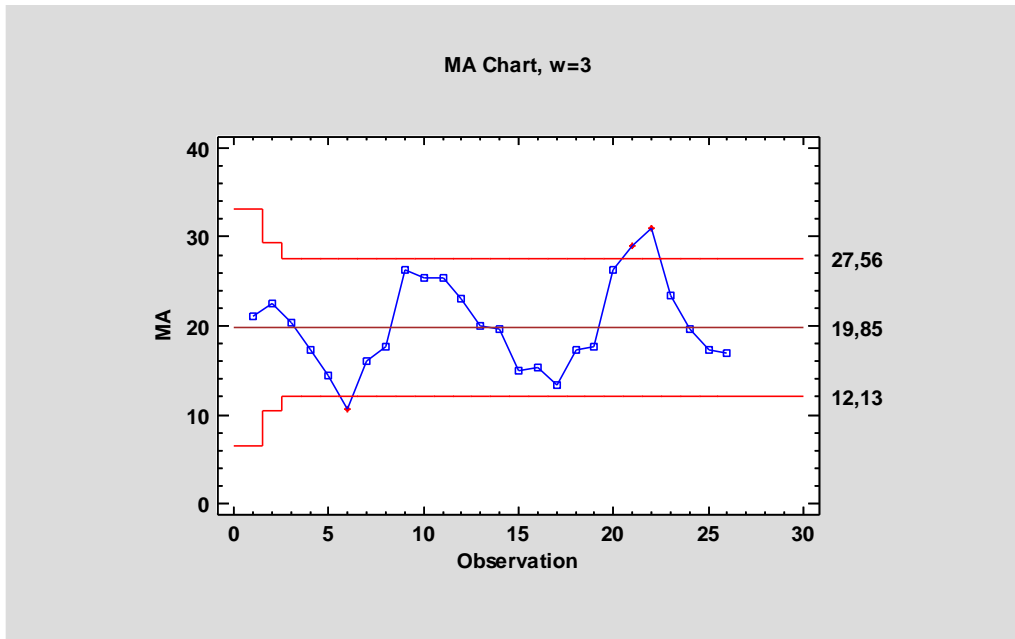
Σχήμα 2.5. Εφαρμογή 2: Διάγραμμα ελέγχου c (αρχικά δεδομένα)

Όπως φαίνεται δύο σημεία απεικονίζονται έξω από τα όρια ελέγχου του διαγράμματος ελέγχου c , τα σημεία που αντιστοιχούν στο 6^ο και το 20^ο δείγμα.

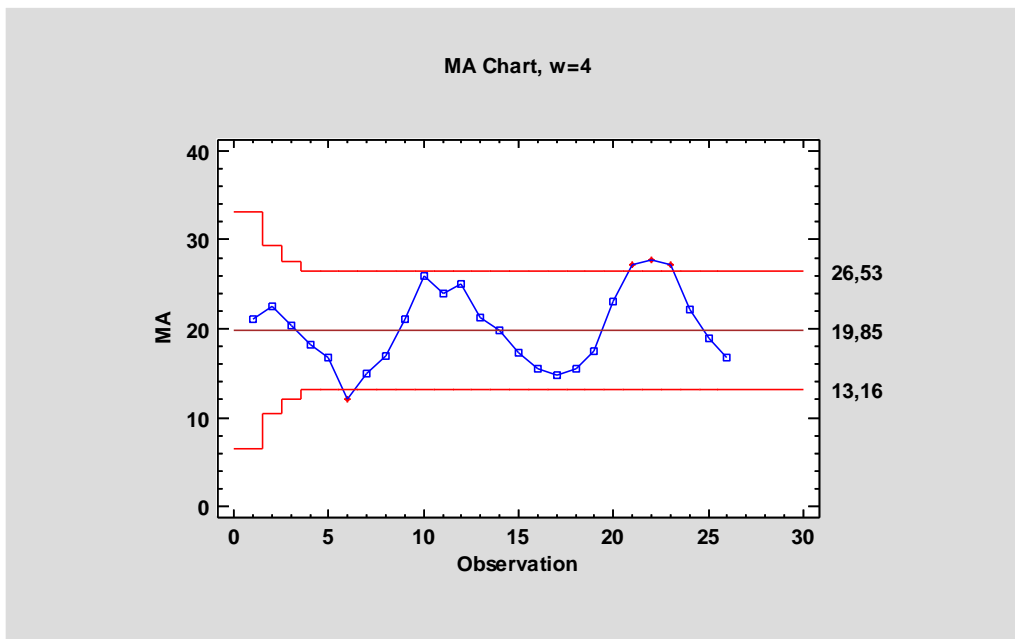
Τα PMA διαγράμματα ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4 δίνονται στα Σχήματα 2.6-2.9, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.6. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 2$ (αρχικά δεδομένα)



Σχήμα 2.7. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 3$ (αρχικά δεδομένα)



Σχήμα 2.8. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 4$ (αρχικά δεδομένα)

Παρατηρούμε ότι εκτός των ορίων ελέγχου του PMA διαγράμματος ελέγχου της περίπτωσης $w = 2$ είναι τα σημεία 6 και 21, στην περίπτωση $w = 3$ είναι τα σημεία 6, 21 και 22, και στην περίπτωση $w = 4$ είναι τα σημεία 6, 21, 22 και 23. Επομένως κάποιες παρατηρήσεις θα πρέπει να αποκλειστούν και να κατασκευαστούν νέα,

αναθεωρημένα όρια ελέγχου. Δεδομένου ότι η στατιστική συνάρτηση του κινούμενου μέσου ενσωματώνει πληροφορίες από περισσότερες από μία παρατηρήσεις, ο καθορισμός των παρατηρήσεων που θα εξαιρεθούν από τον υπολογισμό των αναθεωρημένων ορίων ελέγχου θα πρέπει να γίνει με προσοχή. Αν και σε όλα τα PMA διαγράμματα ελέγχου το 6^ο σημείο βρίσκεται κάτω από το αντίστοιχο LCL_M στη διαμόρφωση της στατιστικής PMA του 6^{ου} σημείου συνεισφέρει διαφορετικός αριθμός παρατηρήσεων.

Για παράδειγμα, για την περίπτωση $w = 2$, πρέπει να εξεταστεί ο αριθμός των ελαττωμάτων στις παρατηρήσεις 6 και 5 πριν αποφασιστεί ποια θα χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω διερεύνηση και ποια για πιθανό αποκλεισμό στον υπολογισμό των αναθεωρημένων ορίων ελέγχου. Επειδή το σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία στο 6^ο σημείο πέφτει κάτω από το LCL_M , είναι λογικό να διερευνηθεί η χαμηλότερη από τις δύο καταχωρήσεις που αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις 5 και 6. Ο αριθμός των ελαττωμάτων της 6^{ης} παρατήρησης 6 είναι 5, ενώ ο αριθμός των ελαττωμάτων της 5^{ης} παρατήρησης είναι 15. Ως εκ τούτου, η 6^η παρατήρηση διερευνάται για πιθανές ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Η χρήση αυτής της προσέγγισης στις περιπτώσεις $w = 3$ και $w = 4$ καταλήγει στο ίδιο συμπέρασμα.

Μια παρόμοια προσέγγιση χρησιμοποιείται για τα υπόλοιπα σημεία που βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου. Ωστόσο για αυτά η παρατήρηση με τον υψηλότερο αριθμό ελαττωμάτων εξετάζεται αφού τα εκτός ελέγχου σημεία βρίσκονται πάνω από το άνω όριο ελέγχου. Η παρατήρηση 20 με αριθμό ελαττωμάτων 39 βρέθηκε να έχει τον μεγαλύτερο αριθμό ελαττωμάτων και για τις τρεις περιπτώσεις. Ως εκ τούτου διερευνάται για πιθανές ειδικές αιτίες μεταβλητότητας.

Όπως αναφέρεται στο Montgomery (1991), οι έρευνες των παρατηρήσεων 6 και 20 αποκαλύπτουν ότι τα σήματα εκτός ελέγχου που προκαλούνται από αυτές τις δύο παρατηρήσεις οφείλονται σε έναν νέο επιθεωρητή και ένα πρόβλημα ελέγχου θερμοκρασίας, αντίστοιχα. Έτσι, γίνονται διορθωτικές ενέργειες και φαίνεται επίσης λογικό να εξαιρεθούν οι παρατηρήσεις 6 και 20 από τον υπολογισμό των αναθεωρημένων ορίων ελέγχου. Στον Πίνακα 2.4 δίνονται οι νέες τιμές της στατιστικής συνάρτησης PMA μετά την αφαίρεση των παρατηρήσεων 6 και 20.

Πίνακας 2.4. Εφαρμογή 2: Αριθμός ελαττωμάτων και τιμές της PMA στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4 (περιορισμένα δεδομένα)

Μονάδα επιθεώρησης	Αριθμός ελαττωμάτων	Στατιστική PMA		
		$w = 2$	$w = 3$	$w = 4$
1	21	21.00	21.00	21.00
2	24	22.50	22.50	22.50
3	16	20.00	20.33	20.33
4	12	14.00	17.33	18.25
5	15	13.50	14.33	16.75
7	28	21.50	18.33	17.75
8	20	24.00	21.00	18.75
9	31	25.50	26.33	23.50
10	25	28.00	25.33	26.00
11	20	22.50	25.33	24.00
12	24	22.00	23.00	25.00
13	16	20.00	20.00	21.25
14	19	17.50	19.67	19.75
15	10	14.50	15.00	17.25
16	17	13.50	15.33	15.50
17	13	15.00	13.33	14.75
18	22	17.50	17.33	15.50
19	18	20.00	17.67	17.50
21	30	24.00	23.33	20.25
22	24	27.00	24.00	23.50
23	16	20.00	23.33	22.00
24	19	17.50	19.67	22.25
25	17	18.00	17.33	19.00
26	15	16.00	17.00	16.75

Για τον υπολογισμό των αναθεωρημένων ορίων ελέγχου έχουμε καταρχήν ότι

$$\bar{c} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 6,20}}^{26} c_i = \frac{472}{24} = 19.67.$$

Επομένως, τα αναθεωρημένα όρια ελέγχου για το c διάγραμμα ελέγχου είναι

$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19.67 + 3\sqrt{19.67} = 32.97,$$

$$CL = \bar{c} = 19.67,$$

$$LCL = \max\{0, \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}\} = \max\{0, 19.67 - 3\sqrt{19.67}\} = 6.37.$$

Τα αναθεωρημένα όρια ελέγχου για τα PMA διαγράμματα ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4 δίνονται ακολούθως:

- $w = 2$

$$\text{Για } i = 1 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 32.97, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 6.37$$

$$\text{Για } i \geq 2 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 29.08, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 10.26$$

- $w = 3$

$$\text{Για } i = 1 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 32.97, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 6.37$$

$$\text{Για } i = 2 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 29.08, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 10.26$$

$$\text{Για } i \geq 3 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 27.35, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 11.99$$

- $w = 4$

$$\text{Για } i = 1 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 32.97, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 6.37$$

$$\text{Για } i = 2 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 29.08, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{i}} = 10.26$$

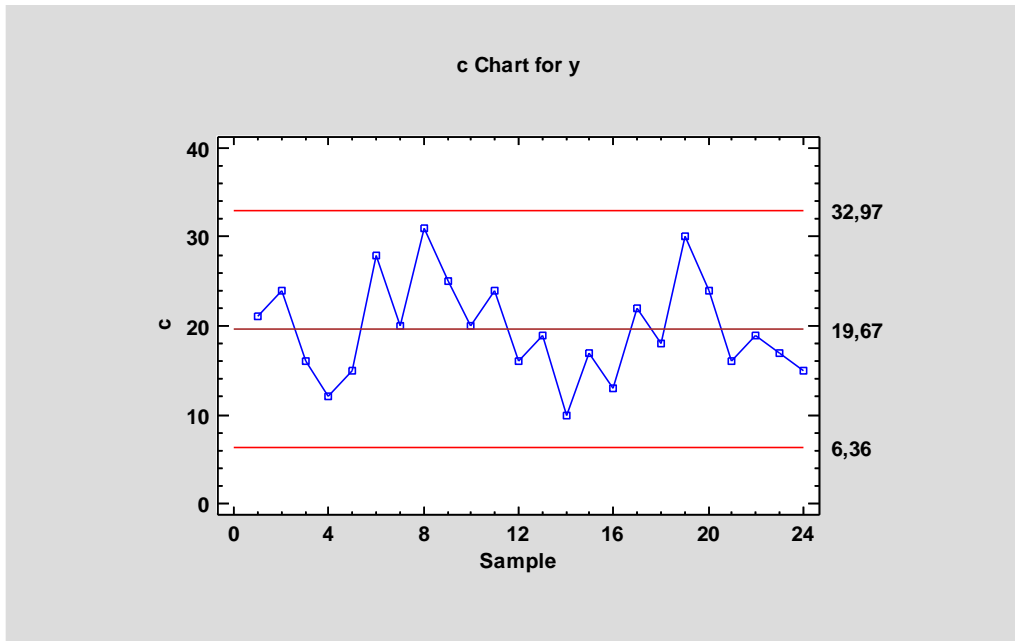
$$\text{Για } i = 3 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 27.35, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 11.99$$

$$\text{Για } i \geq 4 \text{ έχουμε: } UCL_M = \bar{c} + 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 26.32, \quad LCL_M = \bar{c} - 3\sqrt{\frac{\bar{c}}{w}} = 13.02$$

Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε

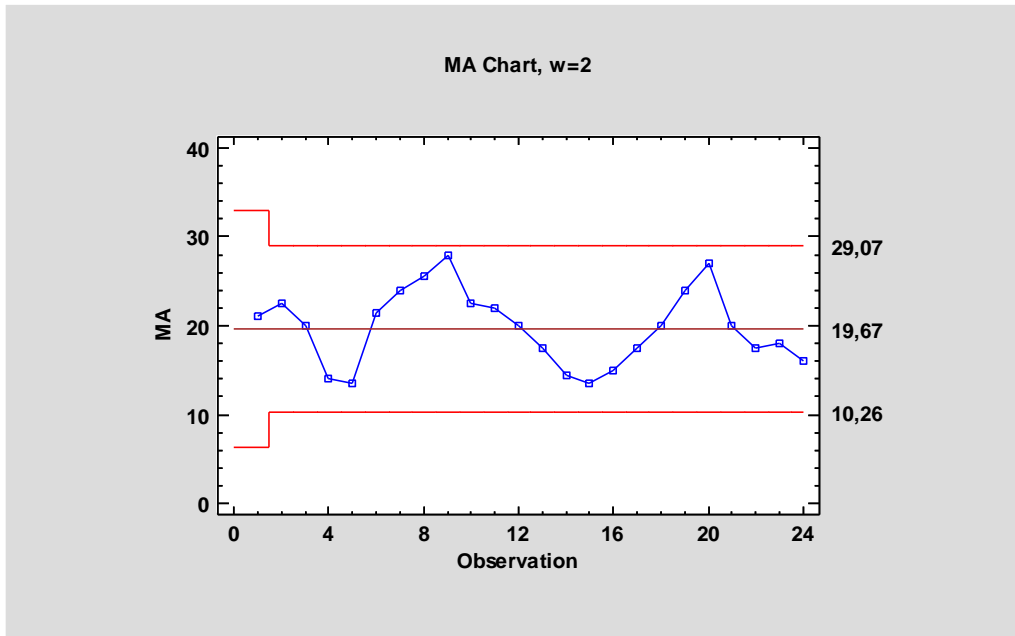
$$CL_M = \bar{c} = 19.67.$$

Το (αναθεωρημένο) διάγραμμα ελέγχου c δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

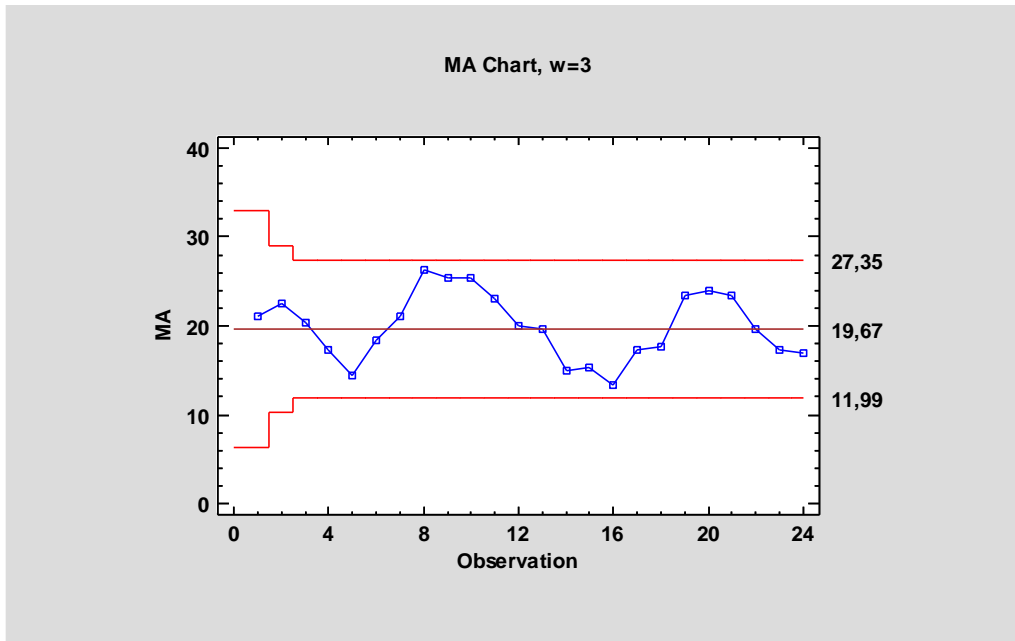


Σχήμα 2.9. Εφαρμογή 2: Διάγραμμα ελέγχου c (περιορισμένα δεδομένα)

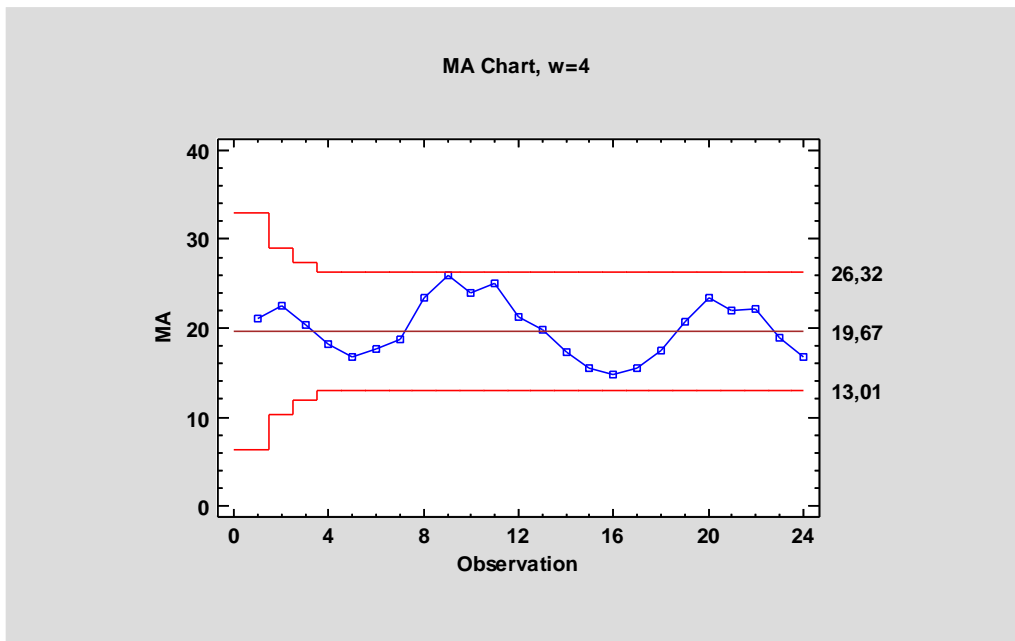
Τα PMA διαγράμματα ελέγχου για $w = 2, 3$ και 4 δίνονται στα Σχήματα 2.10-2.12, αντίστοιχα.



Σχήμα 2.10. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 2$ (περιορισμένα δεδομένα)



Σχήμα 2.11. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 3$ (περιορισμένα δεδομένα)



Σχήμα 2.12. Εφαρμογή 2: PMA διάγραμμα ελέγχου για $w = 4$ (περιορισμένα δεδομένα)

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα δεν υπάρχουν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου και επομένως αυτά τα αναθεωρημένα όρια ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη Φάση II των διαγραμμάτων ελέγχου.

2.3. Το PEWMA διάγραμμα ελέγχου

Ο εκθετικά σταθμισμένος κινούμενος μέσος (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA) χρησιμοποιήθηκε από τον Roberts (1959) προκειμένου να κατασκευαστεί το ομώνυμο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας που περιγράφεται από μια κανονική κατανομή. Το αντίστοιχο Poisson EWMA (PEWMA) διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων μιας διεργασίας προτάθηκε από τους Borror, Champ & Rigdon (1998).

Ας υποθέσουμε ότι καταγράφουμε τον αριθμό X_i , $i \geq 1$, των ελαττωμάτων σε διαδοχικές μονάδες επιθεώρησης. Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i , $i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή Poisson. Όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου θεωρούμε ότι $X_i \sim P(c_0)$, $i \geq 1$. Για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων της διεργασίας, οι Borror, Champ & Rigdon (1998), πρότειναν τη χρησιμοποίηση της στατιστικής συνάρτησης

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad i \geq 1,$$

όπου $0 < \lambda \leq 1$ είναι μια σταθερά και συνήθως

$$Z_0 = c_0.$$

Όταν η τιμή c_0 δεν είναι γνωστή τότε θέτουμε

$$Z_0 = \bar{c}$$

όπου \bar{c} είναι ο μέσος όρος του αριθμού των ελαττωμάτων σε ένα προκαταρκτικό δείγμα μονάδων επιθεώρησης.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι για $i \geq 1$, έχουμε

$$E(Z_i) = c_0$$

και

$$Var(Z_i) = \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}] c_0$$

ενώ για μεγάλες τιμές του i έχουμε ότι

$$Var(Z_i) \approx \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) c_0.$$

Το (δίπλευρο) διάγραμμα ελέγχου EWMA θα δώσει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία όταν $Z_i < LCL$, ή όταν $Z_i > UCL$. Τα όρια ελέγχου LCL και UCL και η κεντρική γραμμή CL βρίσκονται με τη βοήθεια των σχέσεων

$$LCL = c_0 - L\sqrt{Var(Z_i)},$$

$$UCL = c_0 + L\sqrt{Var(Z_i)},$$

$$CL = c_0.$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, ο συντελεστής L καθορίζει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Η παραπάνω περίπτωση αναφέρεται ως συμμετρική περίπτωση γιατί χρησιμοποιείται ίδια τιμή για το L στον τύπο υπολογισμού του LCL και του UCL . Ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διαφορετικές τιμές. Συνήθως η τιμή του L προσδιορίζεται έτσι ώστε να επιτυγχάνεται καθορισμένη τιμή για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_0) δοθείσης της τιμής του λ .

Στην πράξη επιλέγουμε το λ έτσι ώστε $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$. Βέβαια όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του λ τόσο μεγαλύτερο είναι το βάρος των πιο πρόσφατων παρατηρήσεων στη διαμόρφωση της τιμής της στατιστικής συνάρτησης Z . Για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου της κατανομής απαιτείται επιλογή μικρής τιμής του λ .

Για τον υπολογισμό τον μέσου μήκους ροής του διαγράμματος PEWMA χρησιμοποιείται προσέγγιση μέσω αλυσίδων Markov (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Brook & Evans (1972), Borror, Champ & Rigdon (1998) και Morais & Knoth (2020)).

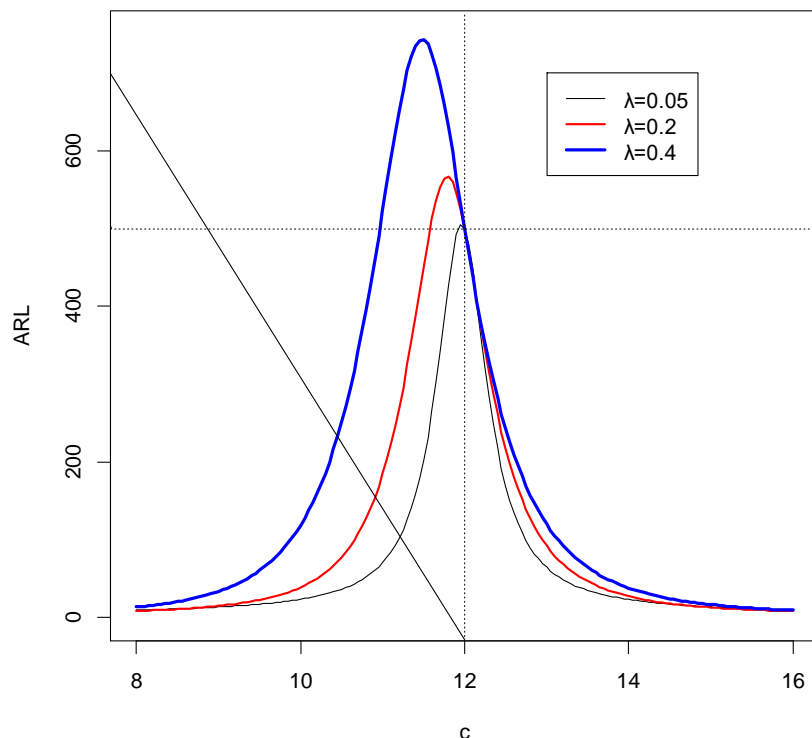
Για να διαπιστωθεί η επιρροή του λ στις τιμές ARL του διαγράμματος PEWMA δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα για το οποίο έχουμε $c_0 = 12$ και $ARL_0 = 500$. Με τη βοήθεια της συνάρτησης `pois.ewma.crit` του πακέτου `spc` της R βρίσκουμε ότι για να επιτύχουμε τη συγκεκριμένη τιμή ARL_0 για $\lambda = 0.05$ θα πρέπει να πάρουμε $L = 2.6201$, για $\lambda = 0.2$ θα πρέπει να πάρουμε $L = 2.9764$, ενώ για $\lambda = 0.05$ θα πρέπει να πάρουμε $L = 3.0978$. Οι τιμές ARL για διάφορες τιμές της μέσης τιμής c της κατανομής που δίνονται στον Πίνακα 2.5 έχουν υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης `pois.ewma.arl` του πακέτου `spc` της R.

Πίνακας 2.5. ARL τιμές για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($c_0 = 12$, $ARL_0 = 500$, $\lambda = 0.05, 0.2, 0.4$)

c	ARL ($\lambda=0.05$)	ARL ($\lambda=0.2$)	ARL ($\lambda=0.4$)
2	3.57	2.31	2.07
3	3.98	2.69	2.32
4	4.45	3.09	2.77
5	5.10	3.63	3.48
6	6.01	4.46	4.73
7	7.35	5.84	7.27
8	9.52	8.51	13.57
9	13.60	15.07	33.77
10	23.66	38.79	119.03
11	70.74	184.63	523.16
12	500.03	500.07	500.01
13	64.35	92.28	120.02
14	23.26	27.30	38.13
15	13.67	13.07	16.77
16	9.68	8.15	9.37
17	7.52	5.86	6.17
18	6.17	4.59	4.52
19	5.25	3.79	3.56
20	4.58	3.25	2.94
21	4.08	2.85	2.52
22	3.69	2.56	2.21

Παρατηρούμε ότι μικρές τιμές του λ είναι πιο κατάλληλες για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της μέσης τιμής c της κατανομής του αριθμού των ελαττωμάτων, ενώ για μεγάλες μετατοπίσεις πιο κατάλληλες είναι μεγάλες τιμές του λ . Επίσης μικρές τιμές του λ βελτιώνουν και τη μεροληπτική συμπεριφορά (biased behaviour) των ARL τιμών ειδικά για μετατοπίσεις της μέσης τιμής c σε χαμηλότερο επίπεδο όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

ARL τιμές για διαγράμματα ελέγχου PEWMA



Σχήμα 2.13. ARL καμπύλες PEWMA διαγραμμάτων ελέγχου ($c_0 = 12$, $ARL_0 = 500$, $\lambda = 0.05, 0.2, 0.4$)

Επίσης από τον παρακάτω πίνακα είναι προφανές ότι το PEWMA διάγραμμα ελέγχου υπερέχει του κλασικού c διαγράμματος ελέγχου σχεδόν για όλες τις μετατοπίσεις του c πλην κάποιων αρκετά ακραίων τιμών.

Πίνακας 2.6. ARL τιμές για το c και το PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($c_0 = 12$, $ARL_0 = 319.77$, $\lambda = 0.05, 0.1, 0.2$)

c	ARL c - chart $L = 3$	ARL ($\lambda=0.05$) $L = 2.4305$	ARL ($\lambda=0.1$) $L = 2.6463$	ARL ($\lambda=0.2$) $L = 2.8148$
1	1.36	3.01	2.52	2.01
2	2.46	3.25	2.88	2.17
3	5.02	3.70	3.09	2.50
4	10.92	4.15	3.43	2.89
5	24.74	4.74	3.96	3.40

6	57.63	5.56	4.71	4.14
7	137.05	6.78	5.85	5.36
8	329.97	8.74	7.77	7.64
9	768.68	12.35	11.63	12.95
10	1257.65	21.02	22.14	30.44
11	804.65	58.01	74.57	124.03
12	319.77	319.78	319.82	319.77
13	130.65	53.86	59.75	70.86
14	59.79	20.76	20.62	23.01
15	30.54	12.46	11.48	11.59
16	17.17	8.90	7.87	7.42
17	10.50	6.95	6.00	5.42
18	6.90	5.72	4.87	4.28
19	4.83	4.88	4.12	3.56
20	3.58	4.27	3.59	3.06

- **Εφαρμογή**

Για την εφαρμογή των παραπάνω θα αναλύσουμε το παράδειγμα των Borrer, Champ & Rigdon (1998). Τα δεδομένα του παραδείγματος δίνονται στη στήλη X_i του παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.7. Δεδομένα του παραδείγματος των Borrer, Champ & Rigdon (1998)

i	X_i	Z_i	i	X_i	Z_i
1	5	4.200	21	7	3.791
2	3	3.960	22	2	3.433
3	4	3.968	23	1	2.946
4	0	3.174	24	2	2.757
5	2	2.940	25	6	3.406
6	9	4.125	26	2	3.124
7	2	3.721	27	3	3.100
8	2	3.377	28	2	2.880
9	4	3.502	29	0	2.304
10	1	3.001	30	1	2.043
11	2	2.801	31	3	2.234

12	6	3.441	32	5	2.788
13	5	3.753	33	4	3.030
14	1	3.202	34	6	3.624
15	7	3.696	35	1	3.099
16	3	3.769	36	3	3.079
17	2	3.415	37	1	2.663
18	0	2.732	38	0	2.131
19	4	2.986	39	3	2.305
20	3	2.989	40	1	2.044

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα γίνεται η υπόθεση ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή του αριθμού των ελαττωμάτων είναι $c_0 = 4$. Τα όρια ελέγχου του τυπικού διαγράμματος ελέγχου c με 3σ όρια ελέγχου είναι

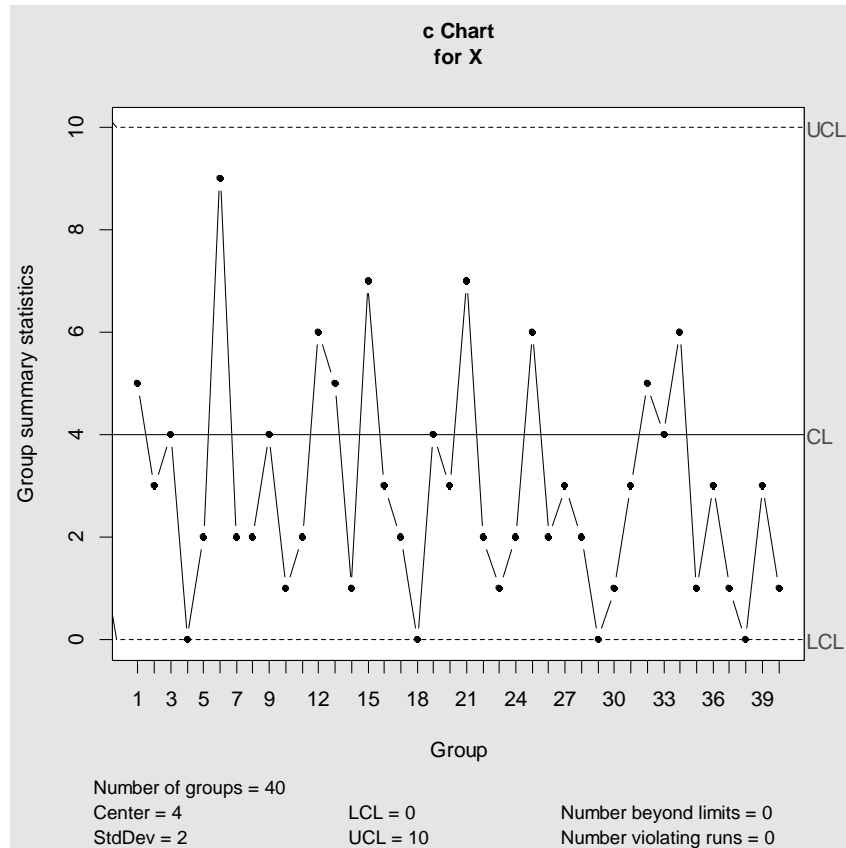
$$LCL = c_0 - 3\sqrt{c_0} = 4 - 3\sqrt{4} = -2$$

$$UCL = c_0 + 3\sqrt{c_0} = 4 + 3\sqrt{4} = 10.$$

Αφού το LCL είναι μικρότερο από το μηδέν, ορίζουμε $LCL = 0$. Έτσι, το τυπικό c διάγραμμα ελέγχου δεν μπορεί να ανιχνεύσει μια καθοδική μετατόπιση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων. Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι

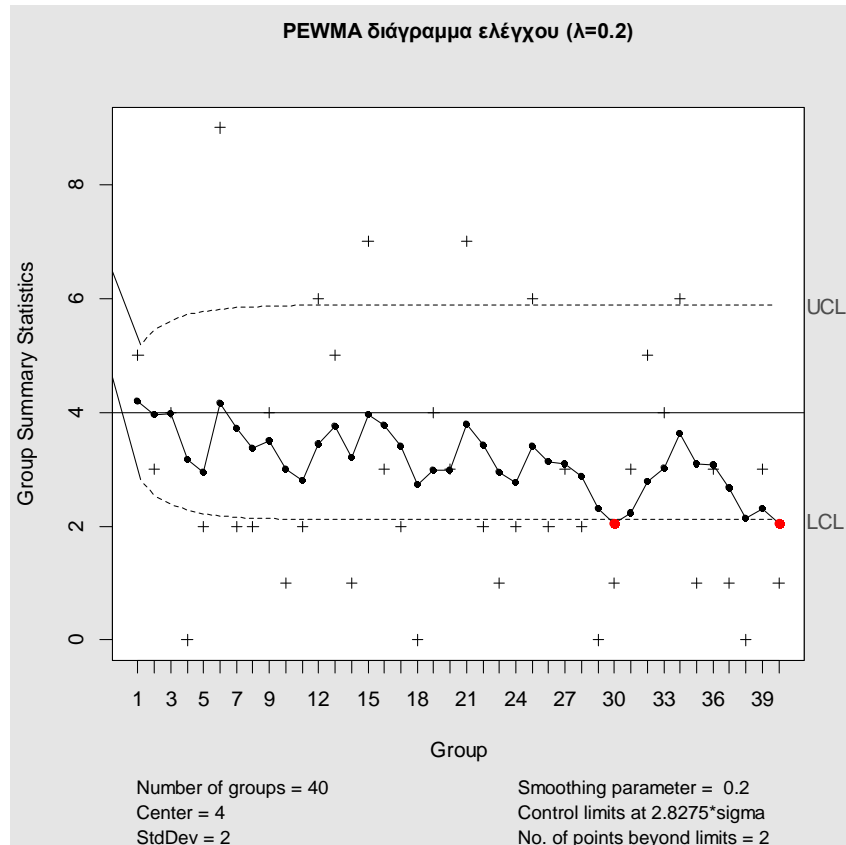
$$ARL_0 = \frac{1}{P(X > 10 | X \sim P(4))} = \frac{1}{0.002839766} \approx 352.$$

Το τυπικό c διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα από το οποίο προκύπτει ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου



Σχήμα 2.14. Τυπικό c διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.7

Για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου επιλέγουμε $\lambda = 0.2$ και προκειμένου να έχουμε $ARL_0 = 352$ θα πρέπει να θέσουμε $L = 2.8275$. Οι τιμές της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης Z_i στο διάγραμμα ελέγχου δίνονται στο Πίνακα 2.7. το PEWMA διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο.



Σχήμα 2.15. PEWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.7 ($\lambda = 0.2$)

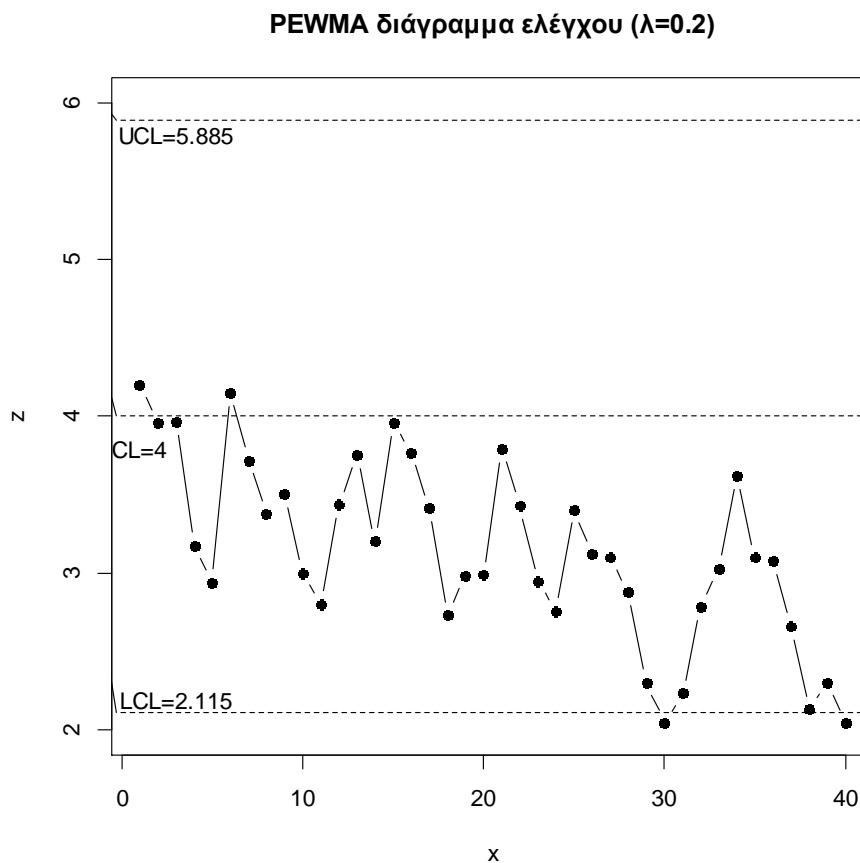
Παρατηρούμε ότι το PEWMA διάγραμμα ελέγχου δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας στην 30^η παρατήρηση για την οποία $Z_{30} = 2.043$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε PEWMA διάγραμμα ελέγχου με σταθερά όρια ελέγχου, δηλαδή

$$LCL = c_0 - L \sqrt{\frac{c_0 \lambda}{2 - \lambda}} = 4 - 2.8275 \sqrt{\frac{4(0.2)}{2 - 0.2}} = 2.115$$

$$UCL = c_0 + L \sqrt{\frac{c_0 \lambda}{2 - \lambda}} = 4 + 2.8275 \sqrt{\frac{4(0.2)}{2 - 0.2}} = 5.885$$

Το διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο και τα συμπεράσματα παραμένουν τα ίδια.



Σχήμα 2.16. PEWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.7 με σταθερά όρια ($\lambda = 0.2$).

2.4. Το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται το διπλά εκθετικά σταθμισμένο κινούμενου μέσου διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων μιας διεργασίας (Poisson Double Exponentially Weighted Moving Average, PDEWMA) που εισήχθη από τους Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington (2003). Οι συγγραφείς αυτοί εφάρμοσαν τη μεθοδολογία των Shamma, Amin & Shamma (1991) και Shampa & Shampa (1992) για το διπλά εκθετικά σταθμισμένο κινούμενου μέσου διάγραμμα ελέγχου (DEWMA) σε δεδομένα από κατανομή Poisson. Έδειξαν ότι το διάγραμμα ελέγχου PDEWMA είναι ελαφρώς πιο

αποτελεσματικό από το κλασικό PEWMA διάγραμμα ελέγχου για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας, και αρκετά πιο αποτελεσματικό για μικρές μετατοπίσεις.

Ας υποθέσουμε ότι καταγράφουμε τον αριθμό των ελαττωμάτων X_t , $t \geq 1$, σε διαδοχικές μονάδες επιθεώρησης. Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_t , $t \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή Poisson. Όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου θεωρούμε ότι $X_t \sim P(c_0)$, $t \geq 1$. Για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων της διεργασίας, οι Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington (2003) πρότειναν τη χρησιμοποίηση της στατιστικής συνάρτησης

$$Z_t = \lambda Y_t + (1 - \lambda)Z_{t-1}, \quad t \geq 1$$

όπου

$$Y_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)Y_{t-1}, \quad t \geq 1$$

με αρχικές συνθήκες

$$Y_0 = Z_0 = c_0$$

και $0 < \lambda \leq 1$. Όταν η τιμή c_0 δεν είναι γνωστή τότε θέτουμε

$$Y_0 = Z_0 = \bar{c}$$

όπου \bar{c} είναι ο μέσος όρος του αριθμού των ελαττωμάτων σε ένα προκαταρκτικό δείγμα μονάδων επιθεώρησης.

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$Z_t = \lambda^2 \sum_{i=1}^t (t - i + 1)(1 - \lambda)^{t-i} X_i + t\lambda(1 - \lambda)^t Z_0 + (1 - \lambda)^t Z_0, \quad t \geq 1.$$

Επίσης, είναι σχετικά εύκολο να διαπιστωθεί ότι για $t \geq 1$, έχουμε

$$E(Z_t) = c_0$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) = & \lambda^4 [1 + (1 - \lambda)^2 - (t + 1)^2 (1 - \lambda)^{2t} + (2t^2 + 2t - 1)(1 - \lambda)^{2t+2} - \\ & - t^2 (1 - \lambda)^{2t+4}] \frac{c_0}{[1 - (1 - \lambda)^2]^3}. \end{aligned}$$

Για μεγάλες τιμές του t έχουμε ότι

$$\text{Var}(Z_t) \approx \frac{\lambda(2 - 2\lambda + \lambda^2)}{(2 - \lambda)^3} c_0.$$

Το (δίπλευρο) διάγραμμα ελέγχου PDEWMA θα δώσει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασίας όταν $Z_t < LCL$, ή όταν $Z_t > UCL$. Τα όρια ελέγχου LCL και UCL και η κεντρική γραμμή CL του διαγράμματος βρίσκονται με τη βοήθεια των σχέσεων

$$UCL = c_0 + K\sqrt{Var(Z_t)},$$

$$CL = c_0,$$

$$LCL_t = \max(0, c_0 - K\sqrt{Var(Z_t)}).$$

Στον ακόλουθο πίνακα (δείτε Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington (2003)) δίνονται ζευγάρια της μορφής (λ, K) για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου που επιτυγχάνουν $ARL_0 = 200$ για διάφορες τιμές του c_0 . Δίνονται επίσης αντίστοιχα ζευγάρια της μορφής (λ, L) για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι τιμές στον πίνακα προέκυψαν με προσομοίωση.

Πίνακας 2.8. Τιμές K για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου και τιμές L τιμές για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($ARL_0 = 200, \lambda = 0.05(0.05)(0.5), c_0 = 4, 8, 12, 20$).

λ	K	ARL	λ	L	ARL
$c_0 = 4$					
0.05	1.703	200.4	0.05	2.277	200.0
0.10	1.995	200.2	0.10	2.484	200.1
0.20	2.291	200.2	0.20	2.655	200.2
0.25	2.388	200.2	0.25	2.704	200.2
0.30	2.467	200.0	0.30	2.747	200.0
0.40	2.590	200.3	0.40	2.810	200.2
0.50	2.686	200.1	0.50	2.865	200.3
$c_0 = 8$					
0.05	1.713	200.3	0.05	2.276	200.2
0.10	1.992	200.0	0.10	2.478	200.2
0.20	2.295	200.3	0.20	2.653	200.5
0.25	2.393	200.1	0.25	2.695	200.1
0.30	2.474	200.2	0.30	2.730	200.1

0.40	2.591	200.4	0.40	2.779	200.0
0.50	2.681	200.2	0.50	2.819	200.5
$c_0 = 12$					
0.05	1.710	200.3	0.05	2.282	200.3
0.10	1.992	200.0	0.10	2.481	200.2
0.20	2.295	200.3	0.20	2.646	200.3
0.25	2.393	200.1	0.25	2.695	200.3
0.30	2.474	200.2	0.30	2.727	200.3
0.40	2.591	200.4	0.40	2.771	200.2
0.50	2.681	200.2	0.50	2.799	200.1
$c_0 = 20$					
0.05	1.704	200.0	0.05	2.276	200.2
0.10	1.991	200.1	0.10	2.481	200.1
0.20	2.294	200.4	0.20	2.651	200.1
0.25	2.392	200.5	0.25	2.695	200.0
0.30	2.469	200.2	0.30	2.727	200.1
0.40	2.591	200.0	0.40	2.769	200.0
0.50	2.680	200.0	0.50	2.796	200.0

Στους ακόλουθους 4 πίνακες δίνονται τιμές ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για διάφορες τιμές της παραμέτρου c της κατανομής Poisson. Οι τιμές ARL για το διάγραμμα ελέγχου PEWMA δίνονται σε παρένθεση. Για τις παραμέτρους λ , L και K των διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές του Πίνακα 2.8.

Πίνακας 2.9. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 4$.

c								
λ	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
0.05	2.0 (2.9)	4.3 (5.7)	14.8 (18.4)	200.4 (200.3)	15.1 (16.2)	5.2 (5.7)	2.8 (3.2)	1.9 (2.2)
0.10	2.3 (3.3)	5.2 (6.7)	17.2 (23.0)	199.8 (200.1)	16.7 (18.1)	5.8 (6.2)	3.1 (3.4)	2.1 (2.3)
0.20	3.1 (3.8)	6.3 (8.3)	22.0 (37.5)	200.3 (200.3)	19.5 (21.2)	6.6 (7.1)	3.5 (3.8)	2.4 (2.6)
0.25	3.3	6.6	24.9	200.2	20.4	6.7	3.6	2.4

	(4.0)	(9.4)	(51.1)	(200.3)	(22.3)	(7.4)	(3.9)	(2.7)
0.30	3.4 (4.2)	7.0 (10.9)	28.8 (70.9)	200.1 (199.9)	21.0 (23.3)	6.8 (7.6)	3.6 (4.0)	2.4 (2.7)
0.40	3.6 (5.3)	8.1 (18.2)	40.7 (168.4)	200.3 (200.1)	23.0 (25.9)	7.4 (8.3)	3.9 (4.2)	2.6 (2.8)
0.50	4.0 (7.3)	10.5 (41.5)	66.5 (514.0)	200.0 (200.4)	24.8 (28.6)	7.7 (9.0)	4.0 (4.5)	2.7 (2.8)

Πίνακας 2.10. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 8$.

c								
λ	4.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	16.0
0.05	2.3 (3.3)	8.1 (10.2)	24.8 (31.2)	200.2 (200.2)	24.5 (27.9)	8.7 (9.8)	2.9 (3.5)	1.3 (1.5)
0.10	2.9 (3.7)	9.8 (12.1)	30.0 (39.8)	200.0 (200.1)	28.6 (32.4)	10.1 (11.0)	3.4 (3.9)	1.4 (1.6)
0.20	3.5 (4.2)	11.6 (16.0)	39.7 (63.7)	200.2 (200.7)	34.5 (38.0)	11.3 (12.6)	3.9 (4.2)	1.5 (1.7)
0.25	3.7 (4.5)	12.5 (18.7)	45.4 (80.7)	200.1 (200.3)	36.5 (40.2)	11.7 (13.4)	3.9 (4.3)	1.5 (1.7)
0.30	3.8 (4.7)	13.6 (22.5)	52.2 (99.8)	200.2 (200.0)	38.6 (42.1)	12.2 (14.1)	4.0 (4.4)	1.6 (1.7)
0.40	4.1 (5.5)	16.8 (34.5)	69.4 (156.7)	200.4 (200.0)	42.0 (46.1)	13.5 (15.6)	4.3 (4.6)	1.7 (1.7)
0.50	4.4 (6.8)	22.3 (57.4)	97.0 (243.4)	200.1 (200.6)	44.9 (50.4)	14.6 (17.3)	4.4 (4.9)	1.7 (1.7)

Πίνακας 2.11. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 12$.

c								
λ	6.0	9.0	10.0	12.0	14.0	15.0	18.0	24.0
0.05	1.7 (2.3)	5.7 (7.2)	11.5 (14.0)	200.6 (200.5)	11.6 (13.3)	6.2 (7.1)	2.2 (2.6)	1.1 (1.2)
0.10	2.0 (2.7)	6.9 (8.4)	13.6 (16.9)	200.1 (200.5)	13.6 (15.2)	7.3 (8.0)	2.5 (2.8)	1.2 (1.3)
0.20	2.4 (3.0)	8.1 (10.4)	16.4 (23.1)	200.1 (200.2)	15.6 (18.0)	8.0 (9.0)	2.8 (3.1)	1.2 (1.4)
0.25	2.6	8.6	18.0	199.8	16.6	8.4	2.9	1.3

	(3.1)	(11.6)	(27.6)	(200.6)	(19.1)	(9.5)	(3.2)	(1.4)
0.30	2.7 (3.2)	9.1 (13.3)	19.9 (33.2)	200.5 (200.5)	17.4 (20.4)	8.7 (10.0)	3.0 (3.2)	1.3 (1.4)
0.40	2.8 (3.5)	10.5 (17.7)	25.0 (48.8)	199.9 (200.2)	19.2 (22.8)	9.3 (11.1)	3.0 (3.4)	1.3 (1.4)
0.50	3.1 (3.9)	13.1 (25.1)	33.3 (72.9)	200.2 (200.1)	21.5 (25.3)	10.3 (12.5)	3.3 (3.5)	1.4 (1.4)

Πίνακας 2.12. Σύγκριση τιμών ARL για τα διαγράμματα ελέγχου PDEWMA και PEWMA για $ARL_0 = 200$ και $c_0 = 20$.

c								
λ	10.0	16.0	18.0	20.0	22.0	24.0	28.0	30.0
0.05	1.3 (1.7)	5.5 (6.9)	17.3 (21.0)	200.2 (200.2)	17.4 (20.0)	5.9 (6.8)	2.0 (2.5)	1.5 (1.9)
0.10	1.4 (1.9)	6.5 (7.9)	20.4 (25.8)	200.1 (200.1)	20.1 (23.1)	6.8 (7.6)	2.3 (2.7)	1.7 (2.0)
0.20	1.7 (1.9)	7.7 (9.6)	25.8 (36.9)	200.1 (199.9)	24.1 (28.1)	7.7 (8.5)	2.7 (2.9)	2.0 (2.1)
0.25	1.7 (2.1)	8.1 (10.6)	28.6 (43.4)	200.4 (200.0)	25.6 (30.4)	8.0 (9.1)	2.7 (3.0)	2.0 (2.2)
0.30	1.9 (2.1)	8.6 (11.8)	32.2 (51.4)	200.0 (200.1)	27.6 (32.4)	8.3 (9.6)	2.9 (3.1)	2.1 (2.3)
0.40	1.9 (2.2)	9.8 (15.0)	40.6 (71.9)	200.1 (200.2)	30.8 (36.6)	9.0 (10.7)	2.9 (3.2)	2.1 (2.3)
0.50	1.9 (2.2)	11.6 (20.1)	52.2 (97.5)	200.0 (200.1)	34.2 (40.4)	9.7 (12.2)	2.9 (3.4)	2.1 (2.4)

Στο παράρτημα δίνεται κώδικας με τον οποίο μπορούν να προκύψουν οι τιμές των παραπάνω πινάκων. Για παράδειγμα, για 20000 προσομοιώσεις με εντός ελέγχου $c_0 = 8$, εκτός ελέγχου $c_1 = 9$, $\lambda = 0.2$, $L = 2.653$ και $K = 2.295$ έχουμε $ARL = 38.00985$ για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου και $ARL = 34.45385$ για το PDEWMA.

Μια σημαντική παρατήρηση που προκύπτει από τους παραπάνω πίνακες είναι ότι οι εκτός ελέγχου ARL τιμές του διαγράμματος PDEWMA είναι μικρότερες από εκείνες του διαγράμματος PEWMA, και η διαφορά είναι σημαντική. Ειδικότερα το διάγραμμα PDEWMA αποδίδει πολύ καλύτερα από το διάγραμμα PEWMA στην

ανίχνευση μικρών μειώσεων του μέσου και αποδίδει παρόμοια ή ελαφρώς καλύτερα στην ανίχνευση αυξήσεων του μέσου.

Οι Borror, Champ & Rigdon (1998) σημείωσαν ότι το χαμηλότερο όριο ελέγχου για το διάγραμμα PEWMA είναι συνήθως θετικό, έτσι ώστε να μπορούν να ανιχνευθούν μεταβολές του μέσου προς τα κάτω (βελτίωση της διεργασίας). Το ίδιο ισχύει και στο διάγραμμα PDEWMA.

• Εφαρμογή

Για την εφαρμογή των παραπάνω θα αναλύσουμε ένα σύνολο δεδομένων από τον Montgomery (2001), που τροποποιήθηκε από τους Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington (2003). Ποιο συγκεκριμένα υπάρχουν 30 δεδομένα, εκ των οποίων τα πρώτα 20 προέρχονται από κατανομή Poisson με παράμετρο $c = 19.67$, και τα υπόλοιπα 10 από κατανομή Poisson με παράμετρο $c = 16$. Τα 30 δεδομένα του παραδείγματος δίνονται στη στήλη X_t του Πίνακα 2.13. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις στατιστικές συναρτήσεις Y_t , Z_t και τα όρια ελέγχου LCL και UCL του PDEWMA διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιώντας τις τιμές $c_0 = 19.67$, $\lambda = 0.2$ και $K = 2.384$.

Πίνακας 2.13. Δεδομένα του παραδείγματος των Zhang, Govindaraju, Lai & Bebbington (2003)

t	X_t	Y_t	Z_t	LCL	UCL
1	16	18.93600	19.52320	19.24707	20.09293
2	18	18.74880	19.36832	18.87202	20.46798
3	12	17.39904	18.97446	18.53151	20.80849
4	15	16.91923	18.56342	18.23948	21.10052
5	24	18.33539	18.51781	17.99769	21.34231
6	21	18.86831	18.58791	17.80237	21.53763
7	28	20.69465	19.00926	17.64754	21.69246
8	20	20.55572	19.31855	17.52668	21.81332
9	25	21.44457	19.74375	17.43357	21.90643
10	19	20.95566	19.98614	17.36265	21.97735
11	18	20.36453	20.06181	17.30920	22.03080
12	21	20.49162	20.14778	17.26928	22.07072
13	16	19.59330	20.03688	17.23973	22.10027
14	22	20.07464	20.04443	17.21803	22.12197

15	19	19.85971	20.00749	17.20221	22.13779
16	12	18.28777	19.66354	17.19075	22.14925
17	14	17.43021	19.21688	17.18250	22.15750
18	9	15.74417	18.52234	17.17660	22.16340
19	16	15.79534	17.97694	17.17241	22.16759
20	21	16.83627	17.74880	17.16943	22.17057
21	21	17.66902	17.73285	17.16734	22.17266
22	17	17.53521	17.69332	17.16587	22.17413
23	18	17.62817	17.68029	17.16484	22.17516
24	24	18.90254	17.92474	17.16412	22.17588
25	20	19.12203	18.16420	17.16362	22.17638
26	9	17.09762	17.95088	17.16328	22.17672
27	11	15.87810	17.53633	17.16304	22.17696
28	10	14.70248	16.96956	17.16288	22.17712
29	10	13.76198	16.32804	17.16277	22.17723
30	15	14.00959	15.86435	17.16269	22.17731

Τα όρια ελέγχου του τυπικού διαγράμματος ελέγχου c με 3σ όρια ελέγχου είναι

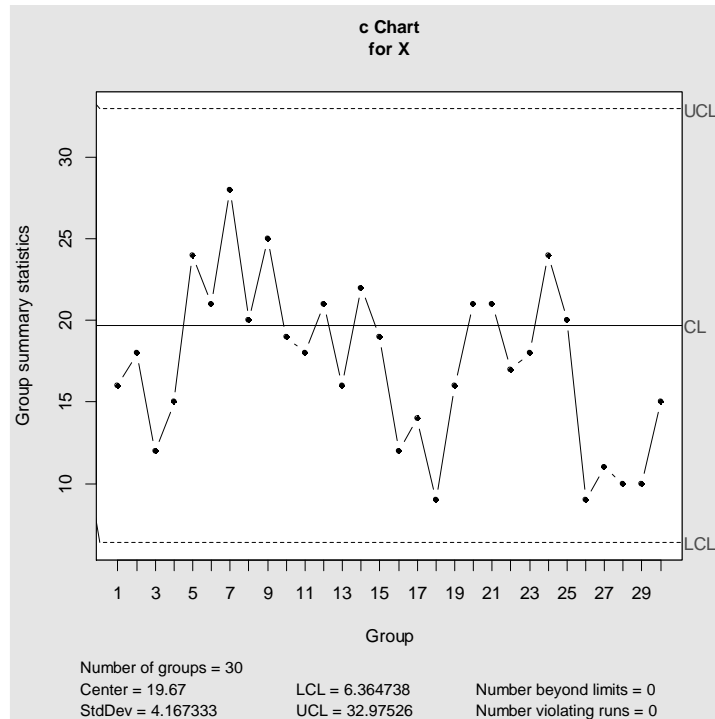
$$LCL = c_0 - 3\sqrt{c_0} = 19.67 - 3\sqrt{19.67} = 6.37$$

$$UCL = c_0 + 3\sqrt{c_0} = 19.67 + 3\sqrt{19.67} = 32.97$$

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι

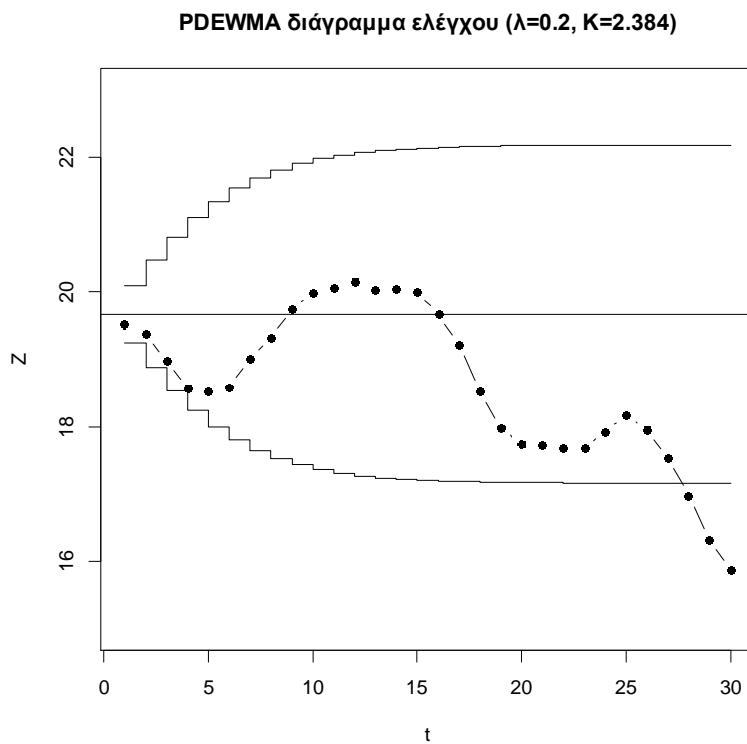
$$ARL_0 \approx 250.$$

Το τυπικό c διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα από το οποίο προκύπτει ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου.



Σχήμα 2.17. Τυπικό c διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13

Το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2.18. PDEWMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.13

Το σχήμα δείχνει, σωστά, ότι η διαδικασία είναι υπό έλεγχο για τα πρώτα 20 σημεία, ενώ δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας στην 28^η παρατήρηση.

2.5. Το PGWMA διάγραμμα ελέγχου

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα γενικευμένο σταθμισμένο κινούμενου μέσου διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων μιας διεργασίας (Poisson Generally Weighted Moving Average, PGWMA) που εισήχθη από τους Sheu & Chiu (2007). Οι συγγραφείς αυτοί εφάρμοσαν τη μεθοδολογία του GWMA διαγράμματος ελέγχου των Sheu & Lin (2003) για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας, σε δεδομένα από κατανομή Poisson. Έδειξαν ότι το διάγραμμα ελέγχου PGWMA έχει καλύτερη απόδοση έναντι άλλων διαγραμμάτων για μικρές μετατοπίσεις του μέσου.

Ας υποθέσουμε ότι καταγράφουμε τον αριθμό των ελαττωμάτων X_t , $t \geq 1$, σε διαδοχικές μονάδες επιθεώρησης. Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_t , $t \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή Poisson. Όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου θεωρούμε ότι $X_t \sim P(c_0)$, $t \geq 1$.

Έστω επίσης N ο αριθμός των δοκιμών (παρατηρήσεων ή δειγμάτων) έως ότου εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο. Η PGWMA στατιστική συνάρτηση για το διάγραμμα PGWMA ορίζεται ως εξής

$$Z_t = \sum_{i=1}^t P(N = i)X_{t-i+1} + P(N > t)Z_0$$

όπου $Z_0 = c_0$. Για πιο εύκολους υπολογισμούς, τα βάρη του X_t μπορούν να γραφτούν ως $P(N > t) = q^{t^a}$, οπότε $P(N = i) = P(N > i - 1) - P(N > i) = q^{(i-1)^a} - q^{i^a}$, όπου η παράμετρος σχεδιασμού $0 \leq q < 1$ είναι σταθερή και η παράμετρος ρύθμισης $a > 0$ καθορίζεται στην πράξη. Η παραπάνω κατανομή της τ.μ. N αντιστοιχεί σε μια διακριτή κατανομή Weibull (δείτε Nakagawa & Osaki (1975)).

Έτσι η PGWMA στατιστική συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$Z_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)^a} - q^{i^a}) X_{t-i+1} + q^{t^a} c_0.$$

Η μέση τιμή της Z_t είναι

$$E(Z_t) = c_0$$

και η διακύμανση είναι

$$Var(Z_t) = Q_t c_0,$$

όπου

$$Q_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)^a} - q^{i^a})^2.$$

Τα (χρονικά μεταβαλλόμενα) όρια ελέγχου του διαγράμματος ελέγχου PGWMA είναι

$$UCL_t = c_0 + L\sqrt{Q_t c_0},$$

$$CL = c_0,$$

$$LCL_t = \max(0, c_0 - L\sqrt{Q_t c_0})$$

όπου ο παράγοντας L καθορίζει το πλάτος των ορίων ελέγχου. Για μεγάλες τιμές t , τα ασυμπτωτικά (ή σταθερά) όρια ελέγχου είναι

$$UCL = c_0 + L\sqrt{Q c_0},$$

$$CL = c_0,$$

$$LCL = \max(0, c_0 - L\sqrt{Q c_0}).$$

όπου

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t.$$

Η διεργασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου εάν η στατιστική Z_t βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου. Επιπλέον, το διάγραμμα ελέγχου PGWMA ανάγεται στο PEWMA διάγραμμα ελέγχου για $a = 1$ και $q = 1 - \lambda$ ($0 < \lambda \leq 1$), και στο c διάγραμμα ελέγχου για $q = 0$.

Οι Sheu και Chiu (2007) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα διαγράμματα ελέγχου PGWMA με $q = 0.95$ και $a = 0.7 - 0.9$ είναι τα διαγράμματα PGWMA με την καλύτερη απόδοση. Επίσης για μέτριες έως μεγάλες μετατοπίσεις προς τα κάτω, το διάγραμμα PDEWMA έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα PGWMA.

Στον ακόλουθο ενδεικτικό πίνακα (δείτε Sheu & Chiu (2007)) δίνονται ζευγάρια της μορφής (q, a, L) για το PGWMA διάγραμμα ελέγχου που επιτυγχάνουν $ARL_0 = 500$ για διάφορες τιμές του c_0 . Οι τιμές στον πίνακα προέκυψαν με προσομοίωση.

Πίνακας 2.14. Συνδυασμοί (q, a, L) με $ARL_0 = 500$ για διάφορες τιμές του c_0

q	a	L $c_0 = 4$	L $c_0 = 5$	L $c_0 = 6$	L $c_0 = 7$	L $c_0 = 8$	L $c_0 = 10$
0.7	0.5	3.268	3.2256	3.1995	3.178	3.1645	3.143
0.7	0.6	3.226	3.189	3.168	3.148	3.137	3.122
0.7	0.7	3.1859	3.157	3.139	3.126	3.115	3.103
0.7	0.8	3.1575	3.134	3.115	3.1035	3.096	3.085
0.7	0.9	3.133	3.113	3.099	3.085	3.078	3.07
0.7	1.0	3.1155	3.094	3.078	3.072	3.068	3.058
0.8	0.5	3.195	3.162	3.1405	3.125	3.115	3.102
0.8	0.6	3.136	3.1132	3.0975	3.0885	3.081	3.068
0.8	0.7	3.0901	3.076	3.061	3.055	3.0495	3.041
0.8	0.8	3.0563	3.0425	3.032	3.027	3.022	3.016
0.8	0.9	3.027	3.0185	3.011	3.007	3.004	2.998
0.8	1.0	3.0045	2.999	2.994	2.99	2.986	2.9825
0.85	0.5	3.139	3.1168	3.098	3.088	3.0815	3.069
0.85	0.6	3.075	3.06	3.049	3.0415	3.036	3.027
0.85	0.7	3.0237	3.013	3.006	3.002	2.9985	2.991
0.85	0.8	2.983	2.98	2.971	2.968	2.965	2.96
0.85	0.9	2.956	2.95	2.947	2.945	2.941	2.937
0.85	1.0	2.939	2.93	2.925	2.926	2.924	2.924
0.9	0.5	3.069	3.054	3.044	3.0345	3.031	3.024
0.9	0.6	2.992	2.98	2.974	2.971	2.967	2.966
0.9	0.7	2.931	2.924	2.92	2.917	2.915	2.913
0.9	0.8	2.886	2.878	2.876	2.875	2.874	2.871
0.9	0.9	2.855	2.851	2.847	2.846	2.846	2.846
0.9	1.0	2.834	2.832	2.833	2.8315	2.83	2.824
0.95	0.5	2.973	2.964	2.956	2.956	2.95	2.946
0.95	0.6	2.851	2.8445	2.844	2.84	2.84	2.836
0.95	0.7	2.754	2.749	2.75	2.748	2.748	2.745
0.95	0.8	2.692	2.688	2.689	2.686	2.69	2.689
0.95	0.9	2.657	2.657	2.655	2.654	2.656	2.654
0.95	1.0	2.64	2.64	2.639	2.644	2.642	2.64

Στο παράρτημα δίνεται κώδικας με τον οποίο μπορούν να προκύψουν οι τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Για παράδειγμα, για 10000 προσομοιώσεις

με εντός ελέγχου $c_0 = 8$, εκτός ελέγχου $c_1 = 9$, $q = 0.95$, $a = 0.8$ και $L = 2.69$ έχουμε $ARL = 36.30645$.

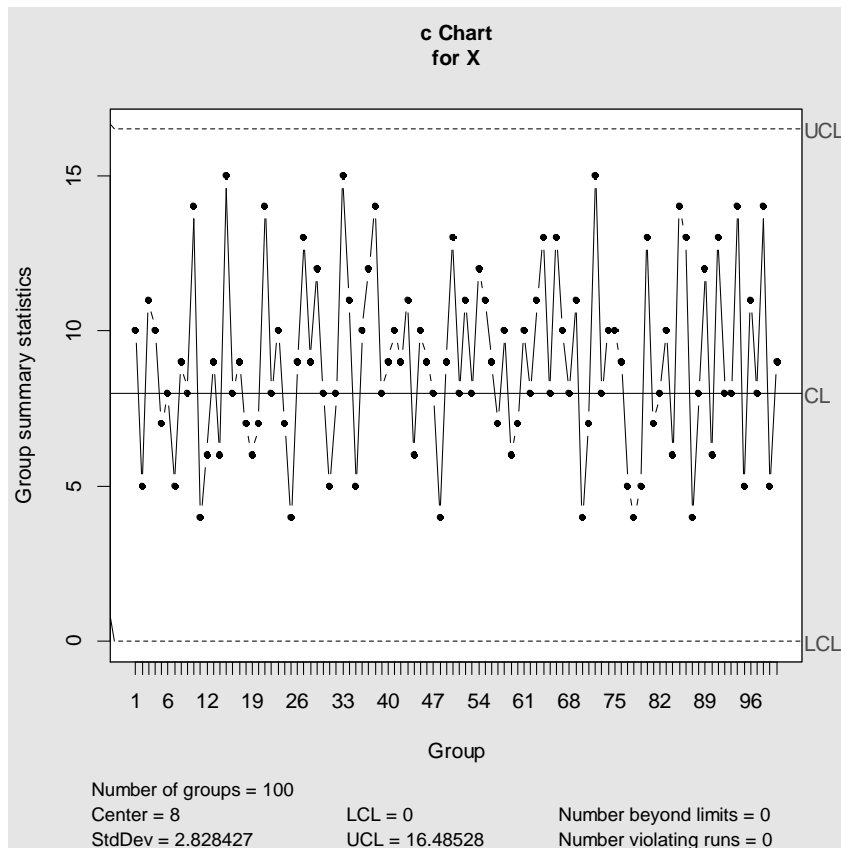
- **Εφαρμογή**

Για την εφαρμογή των παραπάνω θα αναλύσουμε ένα σύνολο δεδομένων από τους Sheu & Chiu (2007). Ποιο συγκεκριμένα υπάρχουν 100 προσομοιωμένα δεδομένα που προέρχονται από κατανομή Poisson με παράμετρο $c_1 = 9$. Ωστόσο θεωρούμε ότι η εντός ελέγχου τιμή για την παράμετρο της κατανομής Poisson είναι $c_0 = 8$.

Πίνακας 2.15. Δεδομένα του παραδείγματος των Sheu & Chiu (2007)

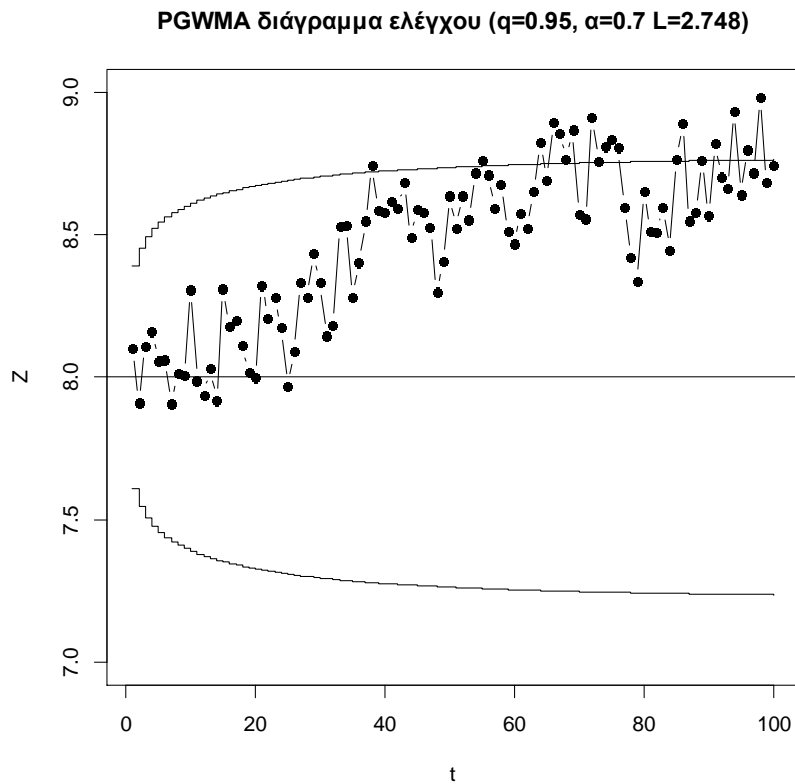
i	X_i	i	X_i	i	X_i	i	X_i
1	10	26	9	51	8	76	9
2	5	27	13	52	11	77	5
3	11	28	9	53	8	78	4
4	10	29	12	54	12	79	5
5	7	30	8	55	11	80	13
6	8	31	5	56	9	81	7
7	5	32	8	57	7	82	8
8	9	33	15	58	10	83	10
9	8	34	11	59	6	84	6
10	14	35	5	60	7	85	14
11	4	36	10	61	10	86	13
12	6	37	12	62	8	87	4
13	9	38	14	63	11	88	8
14	6	39	8	64	13	89	12
15	15	40	9	65	8	90	6
16	8	41	10	66	13	91	13
17	9	42	9	67	10	92	8
18	7	43	11	68	8	93	8
19	6	44	6	69	11	94	14
20	7	45	10	70	4	95	5
21	14	46	9	71	7	96	11
22	8	47	8	72	15	97	8
23	10	48	4	73	8	98	14
24	7	49	9	74	10	99	5
25	4	50	13	75	10	100	9

Το κλασικό c διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ δίνεται στο Σχήμα 2.19. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.



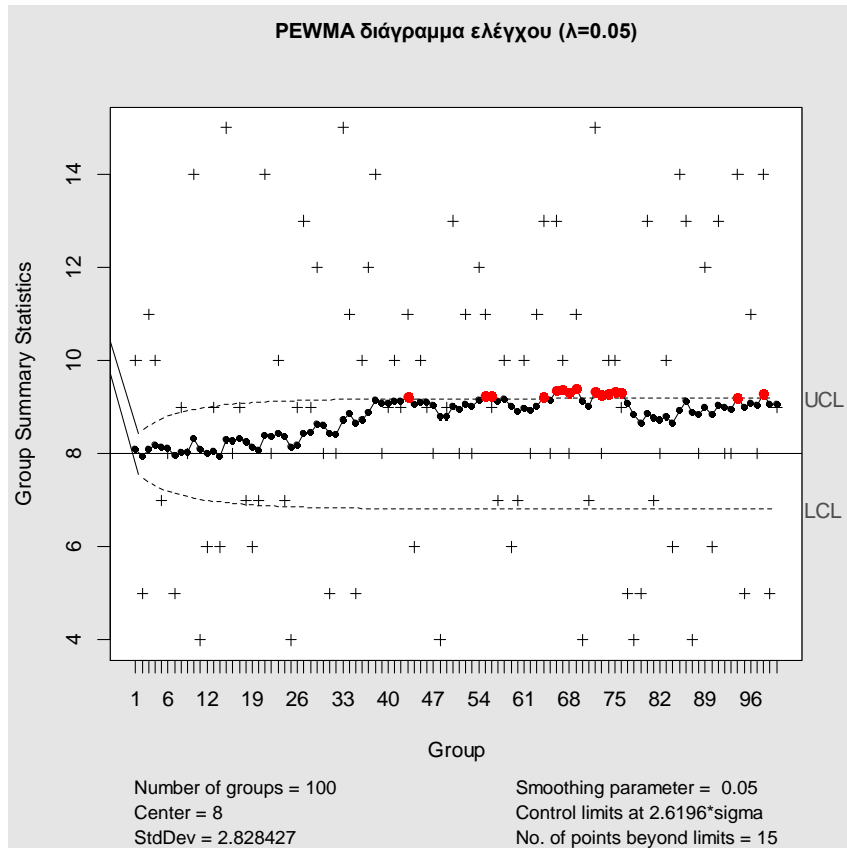
Σχήμα 2.19. Διάγραμμα ελέγχου c με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.15.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το PGWMA διάγραμμα ελέγχου με παραμέτρους χρησιμοποιώντας $q = 0.95$, $a = 0.7$ και $ARL_0 = 500$, οπότε $L = 2.748$. Παρατηρούμε ότι για πρώτη φορά έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο σημείο 38.



Σχήμα 2.20. PGWMA διάγραμμα ελέγχου ($q = 0.95, a = 0.7, ARL_0 = 500, L = 2.748$) για τα δεδομένα του Πίνακα 2.15.

Σύμφωνα με τους Sheu & Chiu (2007) ένα ανταγωνιστικό διάγραμμα ελέγχου είναι το PEWMA με παραμέτρους $\lambda = 0.05$ και $L = 2.6169$, το οποίο δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.21. PEWMA διάγραμμα ελέγχου ($\lambda = 0.05$ και $L = 2.6169$) για τα δεδομένα του Πίνακα 2.15.

Παρατηρούμε ότι για πρώτη φορά έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας στο σημείο 43, δηλαδή αργότερα σε σχέση με το PGWMA διάγραμμα ελέγχου.

Κλείνοντας την παρουσίαση του PGWMA διαγράμματος ελέγχου σημειώνουμε τα ακόλουθα πλεονεκτήματά του:

- (α) Ανιχνεύει γρήγορα την εκτός ελέγχου διεργασία, ιδιαίτερα όταν η μετατόπιση της μέσης τιμής είναι πολύ μικρή.
- (β) Περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις το κλασικό c διάγραμμα ελέγχου αλλά και το διάγραμμα ελέγχου PEWMA.
- (γ) Το κάτω όριο ελέγχου του διαγράμματος PGWMA είναι συνήθως θετικό και κατά συνέπεια, μπορούν να ανιχνευθούν μειώσεις στη μέση τιμή το οποίο συνεπάγεται βελτίωση της διεργασίας.

Τα διαγράμματα PGWMA με την καλύτερη απόδοση είναι αυτά με παραμέτρους σχεδίασης $q = 0.95$ και $a = 0.7 - 0.9$. Το διάγραμμα PGWMA έχει καλύτερη απόδοση από το διάγραμμα PEWMA σε σχεδόν όλες τις μετατοπίσεις της μέσης τιμής. Επιπλέον, όταν η μετατόπιση της διαδικασίας προς τα κάτω δεν είναι πολύ μικρή, η απόδοση ARL του διαγράμματος PGWMA είναι ελαφρώς κατώτερη από το διάγραμμα PDEWMA.

2.6. Το Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου

Το διάγραμμα ελέγχου CUSUM για συνεχή χαρακτηριστικά (μεταβλητές) εμφανίστηκε πρώτη φορά από τον Page (1954). Ο Lucas (1985) τροποποίησε αυτό το διάγραμμα ώστε να γίνεται παρακολούθηση δεδομένων Poisson και παρουσίασε το Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου (PCUSUM).

Ας υποθέσουμε ότι καταγράφουμε τον αριθμό των ελαττωμάτων $X_t, t \geq 1$, σε διαδοχικές μονάδες επιθεώρησης. Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_t, t \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή Poisson. Όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου θεωρούμε ότι $X_t \sim P(c_0), t \geq 1$. Η στατιστική συνάρτηση του διαγράμματος PCUSUM για τον εντοπισμό αυξήσεων στη μέση τιμή της διεργασίας είναι η

$$S_t = \max(0, X_t - k + S_{t-1}), \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

ενώ για τον εντοπισμό μειώσεων στη μέση τιμή της διεργασίας είναι η

$$S_t = \max(0, k - X_t + S_{t-1}), \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Στις παραπάνω σχέσεις $S_0 = 0$ (συνηθίζεται ωστόσο και η τιμή $S_0 = h/2$, όπου h το διάστημα απόφασης) και k είναι η τιμή αναφοράς που μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την αποδεκτή μέση τιμή c_0 (εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας) και μια μη αποδεκτή μέση τιμή c_1 (εκτός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας). Η τιμή αναφοράς k δίνεται από τον τύπο

$$k = \frac{c_1 - c_0}{\ln c_1 - \ln c_0}$$

η οποία στρογγυλοποιείται συνήθως στον πλησιέστερο ακέραιο. Για τον εντοπισμό αυξήσεων, η διαδικασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου εάν η στατιστική

συνάρτηση S_t είναι ίση ή υπερβαίνει το διάστημα απόφασης h . Πίνακες με τιμές ARL (δείτε Lucas (1985)) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του κατάλληλου h έτσι ώστε να έχουμε το επιθυμητό ARL_0 (μεγάλη τιμή) μικρή τιμή για το ARL_1 στην προκαθορισμένη τιμή c_1 .

- **Εφαρμογή 1**

Στον Πίνακα 2.18 παρουσιάζεται μία εφαρμογή ενός PCUSUM μοντέλου με παραμέτρους $k = 5$, $h = 10$ και $S_0 = 0$.

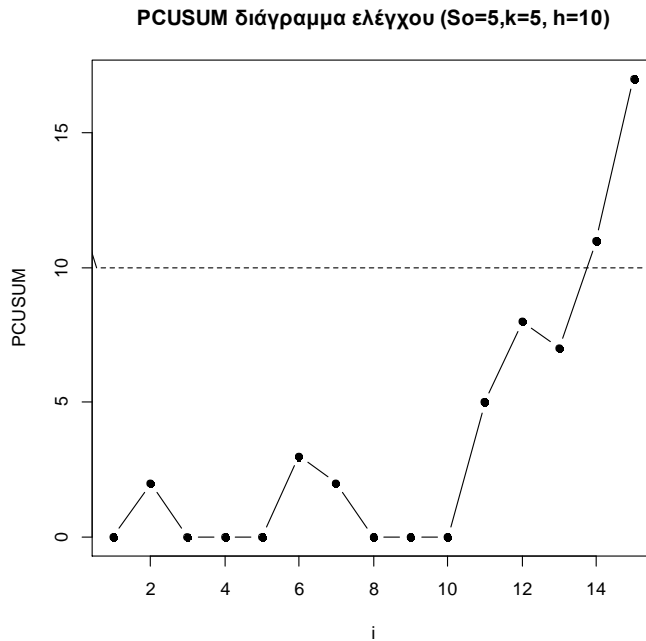
Πίνακας 2.18. Δεδομένα Poisson CUSUM ($k = 5$ και $h = 10$)

t	X_t	S_t
1	3	0
2	7	2
3	2	0
4	0	0
5	2	0
6	8	3
7	4	2
8	0	0
9	2	0
10	3	0
11	10	5
12	8	8
13	4	7
14	9	11
15	11	17

Ο πίνακας αποτελείται από τις μετρήσεις X_t , για $t = 1, 2, \dots, 15$, και από τις αριθμητικές τιμές S_t του διαγράμματος Poisson CUSUM με $S_0 = 0$, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$S_t = \max(0, X_t - k + S_{t-1}), \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Οι πρώτες 10 παρατηρήσεις προέρχονται από κατανομή Poisson με εντός ελέγχου μέση τιμή 4, και οι υπόλοιπες από κατανομή Poisson με μέση τιμή 7. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.22 η διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου μέχρι και την 13^η παρατήρηση, ενώ για πρώτη φορά θα δώσει σήμα εκτός ελέγχου στην 14^η παρατήρηση με τιμή $S_{14} = 11$.



Σχήμα 2.22. Poisson CUSUM διάγραμμα ελέγχου

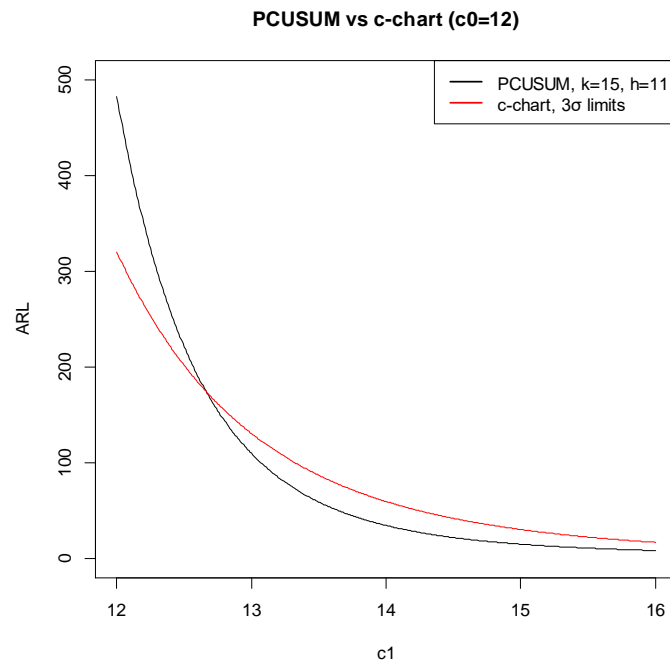
Στον Πίνακα 2.19 συγκρίνουμε την απόδοση του c διαγράμματος ελέγχου με δύο διαγράμματα ελέγχου PCUSUM. Το πρώτο PCUSUM διάγραμμα ελέγχου είναι σχεδιασμένο να ανιχνεύει μετατοπίσεις του μέσου έως 1.5 φορές το c_0 , και το δεύτερο να ανιχνεύει μετατοπίσεις του μέσου έως 2 φορές το c_0 . Ο μέσος c_0 επιλέχθηκε να είναι 1, 4, 8 και 12. Τα μέσα μήκη ροής υπολογίστηκαν για διάφορες θετικές μετατοπίσεις σε μονάδες τυπικής απόκλισης ($c_1 = c_0 + d\sqrt{c_0}$). Για το σχεδιασμό των PCUSUM διαγραμμάτων ελέγχου προσδιορίσαμε αρχικά την τιμή αναφοράς k από το γνωστό τύπο η οποία στη συνέχεια στρογγυλοποιήθηκε στον πλησιέστερο ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του k . Από τον Πίνακα 2.19 φαίνεται σε σχεδόν όλες τις περιπτώσεις το PCUSUM έχει υψηλότερα ARL εντός ελέγχου και χαμηλότερα ARL εκτός ελέγχου σε σχέση με το διάγραμμα c .

Πίνακας 2.19. Τιμές ARL για το PCUSUM (h, k) και το c διάγραμμα ελέγχου

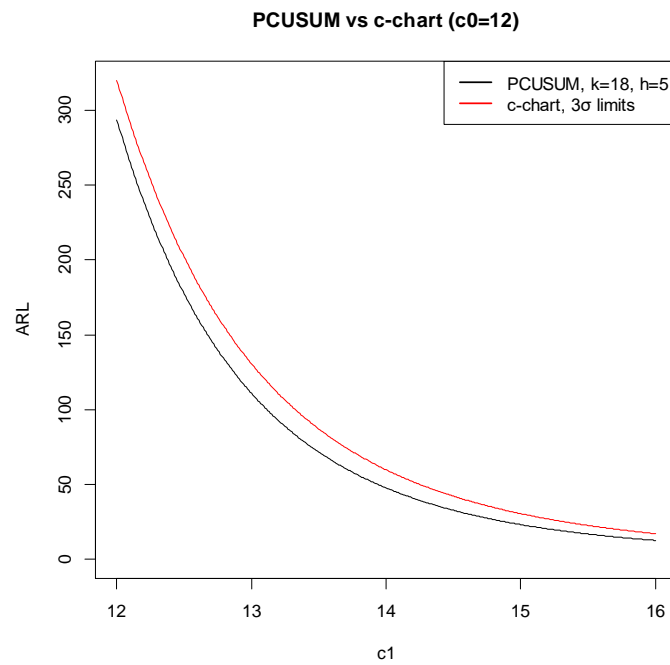
1.5 c_0				
	c chart	Poisson CUSUM(2,2)	c chart	Poisson CUSUM(8,5)
d	1		4	
0.0	52.66441	42.96848	122.96731	171.77960
0.5	15.23404	11.95368	31.41882	20.86057
1.0	6.99905	5.59701	11.91554	7.75618
1.5	4.12501	3.44638	5.89956	4.59411
2.0	2.83472	2.48162	3.52888	3.29577
2.5	2.15812	1.96642	2.42370	2.60311
	c chart	Poisson CUSUM(10,10)	c chart	Poisson CUSUM(11,15)
d	8		12	
0.0	268.96027	331.06950	319.77018	482.23510
0.5	60.91709	32.66314	72.89667	45.75776
1.0	20.05047	9.51173	23.11572	11.35025
1.5	8.69587	5.00330	9.61503	5.38454
2.0	4.64807	3.39296	4.94970	3.47006
2.5	2.91786	2.59948	3.01499	2.58752

2 c_0				
	c chart	Poisson CUSUM(2,2)	c chart	Poisson CUSUM(5,6)
d	1		4	
0.0	52.66441	42.96848	122.96731	172.73020
0.5	15.23404	11.95368	31.41882	28.62898
1.0	6.99905	5.59701	11.91554	9.29946
1.5	4.12501	3.44638	5.89956	4.72464
2.0	2.83472	2.48162	3.52888	3.08047
2.5	2.15812	1.96642	2.42370	2.30177
	c chart	Poisson CUSUM(6,12)	c Chart	Poisson CUSUM(5,18)
d	8		12	
0.0	268.96027	432.08630	319.77018	293.48820
0.5	60.91709	66.02839	72.89667	59.05882
1.0	20.05047	16.86755	23.11572	17.27674
1.5	8.69587	6.81979	9.61503	7.06966
2.0	4.64807	3.81922	4.94970	3.80525
2.5	2.91786	2.60399	3.01499	2.49167

Ενδεικτικά, για την περίπτωση $c_0 = 12$, δίνουμε στα δύο ακόλουθα σχήματα τις καμπύλες ARL για τις δύο περιπτώσεις του παραπάνω πίνακα.



Σχήμα 2.23. ARL καμπύλες του c και του PCUSUM($h = 11, k = 5$) διαγράμματος ελέγχου ($c_0 = 12$)



Σχήμα 2.24. ARL καμπύλες του c και του PCUSUM($h = 5, k = 18$) διαγράμματος ελέγχου ($c_0 = 12$)

Το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου έχει αρκετά πλεονεκτήματα. Αρχικά είναι εύκολο να υπολογιστεί και να αναπαραχθεί γραφικά. Το διάγραμμα ελέγχου c προϋποθέτει κάποιου είδους συμμετρία γύρω από τη μέση τιμή, ενώ το PCUSUM δεν χρησιμοποιεί αυτή την υπόθεση. Επίσης όταν η μέση τιμή της κατανομής Poisson είναι μικρότερη από τρεις φορές την τετραγωνική της ρίζα, το κατώτερο όριο ελέγχου στο διάγραμμα c το θέτουμε ίσο με μηδέν, «παραμορφώνοντας» έτσι τις πιθανότητες εντός των ορίων ελέγχου.

Η διαδικασία CUSUM έχει αποδειχθεί ότι είναι ανθεκτική στην παραβίαση της υπόθεσης ότι τα δεδομένα προέρχονται από μια διαδικασία Poisson.

Το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου μπορεί να σχεδιαστεί για να ανιχνεύει συγκεκριμένες αυξήσεις ή μειώσεις στη μέση τιμή, κάτι το οποίο δεν ισχύει για το διάγραμμα c και φαίνεται να είναι πολύ καλύτερο για την ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων από το c .

- **Εφαρμογή 2**

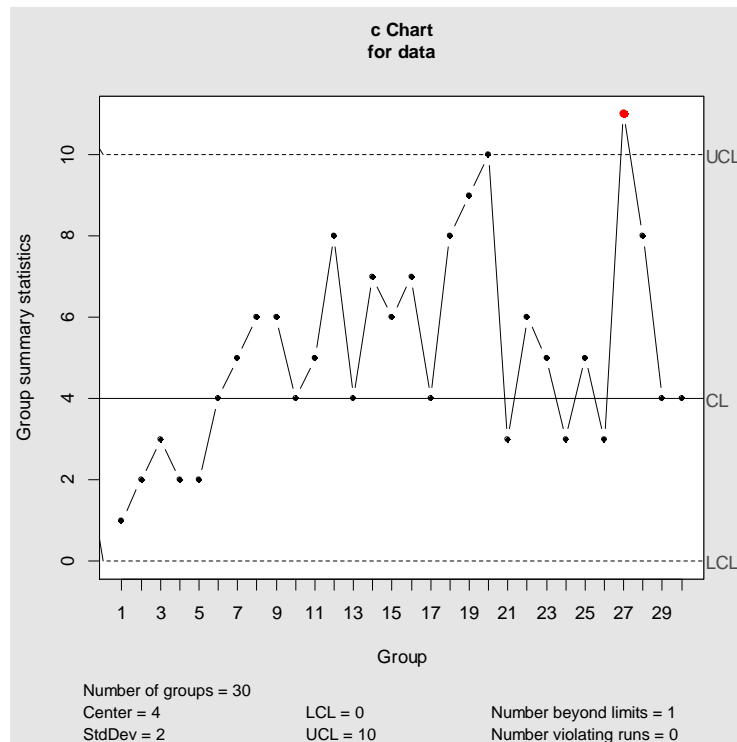
Για να επιδείξουμε το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου παίρνουμε τυχαίο δείγμα 10 παρατηρήσεων από την κατανομή $P(4)$ (δηλαδή $c_0 = 4$, και στη συνέχεια άλλες 20 τυχαίες παρατηρήσεις από την κατανομή $P(6)$ (δηλαδή $c_1 = 1.5c_0$). Για το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου επιλέγουμε $k = 5$ και $h = 8$ σύμφωνα με τον Πίνακα 2.19. Οι τιμές της στατιστικής PCUSUM δίνονται στον Πίνακα 2.20.

Πίνακας 2.20. Προσομοιωμένα δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου PCUSUM

t	X_t	S_t	t	X_t	S_t
1	1	0	16	7	8
2	2	0	17	4	7
3	3	0	18	8	10
4	2	0	19	9	14
5	2	0	20	10	19
6	4	0	21	3	17
7	5	0	22	6	18
8	6	1	23	5	18

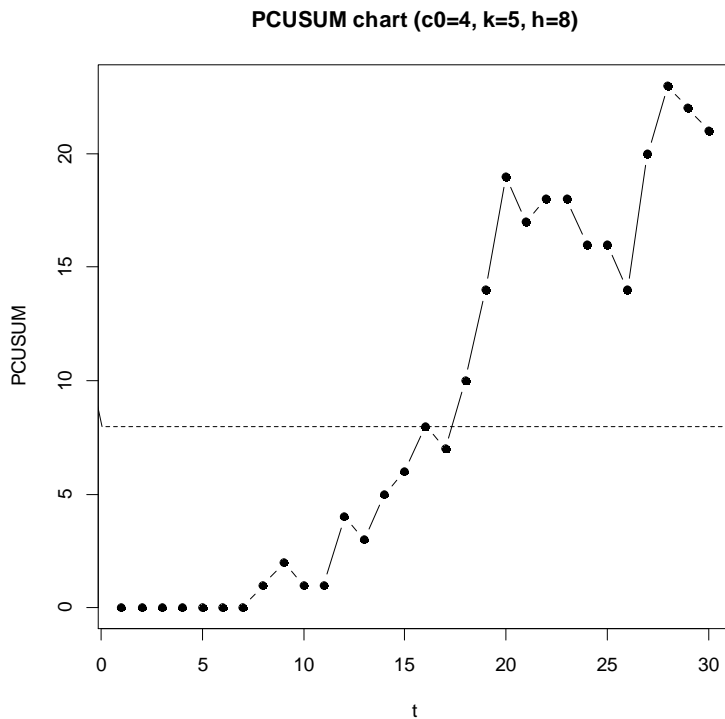
9	6	2	24	3	16
10	4	1	25	5	16
11	5	1	26	3	14
12	8	4	27	11	20
13	4	3	28	8	23
14	7	5	29	4	22
15	6	6	30	4	21

Το c διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα, από το οποίο προκύπτει ότι εντοπίζεται η μετατόπιση στη μέση τιμή στην 27^η παρατήρηση.



Σχήμα 2.25. Διάγραμμα ελέγχου c για τα δεδομένα του Πίνακα 2.20

Το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα, από το οποίο προκύπτει ότι εντοπίζεται η μετατόπιση στη μέση τιμή πολύ πιο γρήγορα, στη 18^η παρατήρηση.



Σχήμα 2.26. PCUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.20

Ολοκληρώνοντας το παρόν Κεφάλαιο σημειώνουμε ότι στο Παράρτημα δίνονται Κώδικες στη γλώσσα προγραμματισμού R με τους οποίους εξήχθησαν οι βασικοί πίνακες και τα βασικά σχήματα του παρόντος κεφαλαίου. Επίσης στη Βιβλιογραφία προτείνονται άρθρα που θα μπορούσαν να καλύψουν πλήρως τυχόν ερωτήματα σχετικά με τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου, όπως και παρουσιάζονται νεότερα άρθρα και επεκτάσεις τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σύγκριση των Διαγραμμάτων Ελέγχου

3.1 Εισαγωγή

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να διερευνήσει ποιο από τα διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 έχει την καλύτερη συμπεριφορά στο να εντοπίζει μετατοπίσεις στο μέσο μιας διεργασίας όσο το δυνατό πιο γρήγορα. Για να κάνουμε αυτή τη σύγκριση θα χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο σύγκρισης το μέσο μήκος ροής (ARL). Για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο θα εντοπίζουμε ποιο διάγραμμα ελέγχου έχει το μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα διαγράμματα μεταξύ τους πρώτα από όλα θα πρέπει να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί κυρίως η συνήθης περίπτωση $ARL_0 = 500$ (περίπου). Αρχικά στην Παράγραφο 3.2. θα γίνει σύγκριση των διαγραμμάτων PMA, PEWMA και PCUSUM με εντός ελέγχου μέσου μήκος ροής $ARL_0 = 371.9$ περίπου. Στην Παράγραφο 3.2. θα γίνει σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA και PCUSUM. Μία άλλη ομάδα διαγραμμάτων ελέγχου που θα συγκριθούν είναι τα PDEWMA και PGWMA. Τέλος θα γίνει σύγκριση μεταξύ των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA, PDEWMA, PGWMA, PCUSUM.

3.2 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PMA, PEWMA και PCUSUM

Ο στόχος της παρούσας ενότητας είναι να παρουσιάσουμε αναλυτικά και να συγκρίνουμε τις τιμές ARL των διαγραμμάτων ελέγχου PMA, PEWMA και PCUSUM σε μια ενδεικτική περίπτωση αφού η μελέτη μας κατέληξε σε παρόμοια συμπεράσματα και στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Επιλέχθηκε εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 10$ με εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_0 = 371.9$.

Η σύγκριση γίνεται ώστε να βρεθεί ποιο από τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου είναι καλύτερο στο να εντοπίζει μετατοπίσεις της μέσης τιμής πιο γρήγορα.

Για την επιλογή των παραμέτρων κάθε διαγράμματος καθορίστηκε πρώτα το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_0 = 371.9$ που αντιστοιχεί στο PMA διάγραμμα ελέγχου με $w = 2$ και εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 10$. Οι τιμές ARL αυτού του διαγράμματος δίνονται στον Πίνακα 2.1 του Κεφαλαίου 2.

Συνεχίζοντας, για το διάγραμμα ελέγχου PEWMA οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 10$ έτσι ώστε να επιτευχθεί $ARL_0 = 371.9$ είναι $\lambda = 0.53$ που οδηγεί στην τιμή $L = 3.0448$. Η επιλογή αυτών των τιμών αντιστοιχούν στο βέλτιστο PEWMA διάγραμμα ελέγχου για τιμή εκτός ελέγχου μέσου ίση με $c_1 = 2c_0 = 20$ (αρκετά μεγάλη μετατόπιση).

Αντίστοιχα για το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου με $c_0 = 10$ και $c_1 = 20$ οι παράμετροι είναι για $k = 14$ και $h = 6.5$ που δίνουν $ARL_0 = 371.4$.

Στον Πίνακα 3.1 δίνονται οι τιμές ARL των προαναφερθέντων διαγραμμάτων ελέγχου.

Πίνακας 3.1. Τιμές ARL διαγραμμάτων ελέγχου PMA, PEWMA και PCUSUM για $c_0 = 10$ και $ARL_0 = 371.9$

Shift	$c_0 = 10$		
	PMA ($w = 2$)	PEWMA ($\lambda = 0.53, L = 3.0448$)	PCUSUM ($k = 14, h = 6.5$)
c			
10	371.90	371.90	371.43
10.79	139.40	124.13	133.64
11.58	59.04	48.84	55.09
12.37	28.54	23.28	26.15

13.16	15.66	13.04	14.25
13.95	9.73	8.30	8.79
14.66	6.57	5.82	6.01
15.53	4.70	4.39	4.45
16.32	3.61	3.49	3.50
17.11	2.85	2.89	2.88
17.9	2.33	2.47	2.45
18.69	1.97	2.16	2.14
19.48	1.70	1.93	1.91
20.27	1.50	1.74	1.73
21.06	1.35	1.60	1.59
21.85	1.25	1.48	1.47
22.64	1.16	1.38	1.38

Παρατηρούμε ότι για τιμές $c < 17$ περίπου, το διάγραμμα PEWMA εντοπίζει πιο γρήγορα αυτές τις (μικρές) μετατοπίσεις σε σχέση με τα άλλα δύο διαγράμματα. Για τιμές $c > 17$ περίπου, το διάγραμμα PMA εντοπίζει πιο γρήγορα τις (μεγάλες) μετατοπίσεις. Ενώ περιμένουμε τα PEWMA και PCUSUM να είναι γενικώς καλύτερα του PMA σε μικρές μετατοπίσεις, αυτό δεν ισχύει για μεγάλες μετατοπίσεις αν και η βελτιστοποίησή τους έγινε για μεγάλη τιμή του εκτός ελέγχου c που θέλουμε να εντοπίσουμε γρήγορα ($c_1 = 20$).

3.3 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA και PCUSUM

Σε αυτή την παράγραφο θα συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου PEWMA και PCUSUM για εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 12$ σε δύο περιπτώσεις:

- $ARL_0 = 490.8$, βελτιστοποίηση για $c_1 = 20$
- $ARL_0 = 491.06$ βελτιστοποίηση για $c_1 = 24$

Για το PEWMA διάγραμμα για $c_0 = 12$ και συγκεκριμένο ARL_0 μπορούν να δημιουργηθούν αρκετά διαγράμματα ελέγχου με πολλούς συνδυασμούς των παραμέτρων λ και L . Επιλέγοντας συγκεκριμένη τιμή για το c_1 , ώστε να επιτευχθεί το ελάχιστο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 για αυτή την τιμή, προκύπτει μοναδικός συνδυασμός για τα λ και L . Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης `pois.ewma.arl` του πακέτου `spc` της R.

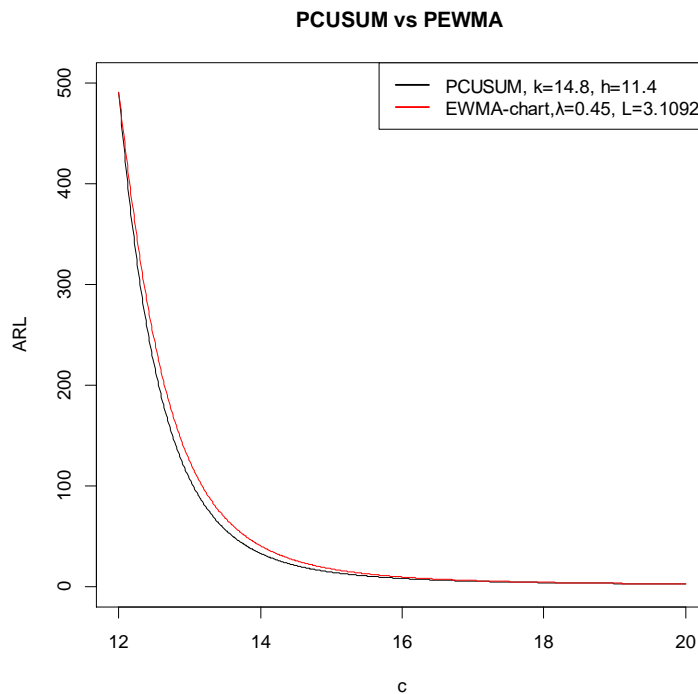
Στην περίπτωση μας θα επιλέξουμε δύο εκτός ελέγχου τιμές, την $c_1 = 20$ και την

$c_1 = 24$. Για την $c_1 = 20$, με $ARL_0 = 490.8$ για $c_0 = 12$, οι παράμετροι που βελτιστοποιούν την απόδοση του διαγράμματος είναι $L = 3.1092$ και $\lambda = 0.45$. Για την $c_1 = 24$, με $ARL_0 = 491.06$ για $c_0 = 12$, οι παράμετροι που βελτιστοποιούν την απόδοση του διαγράμματος είναι $L = 3.1526$ και $\lambda = 0.6$.

Για το PCUSUM διάγραμμα για $c_0 = 12$ και συγκεκριμένο ARL_0 υπάρχουν επίσης αρκετοί συνδυασμοί παραμέτρων (k, h) που το επιτυγχάνουν. Επιλέγοντας συγκεκριμένη τιμή για το c_1 , ώστε να επιτευχθεί το ελάχιστο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 για αυτή την τιμή, προκύπτει μοναδικός συνδυασμός για τα (k, h) . Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης `pois.cusum.crit` του πακέτου `spc` της R. Έτσι για τις αντίστοιχες περιπτώσεις με το PEWMA, για $c_1 = 20$ παίρνουμε $k = 14.8$ και $h = 11.4$, ενώ για $c_1 = 24$ παίρνουμε $k = 17.3$ και $h = 6.4$.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου φαίνονται παρακάτω για τις περιπτώσεις $c_1 = 20$ και $c_1 = 24$.

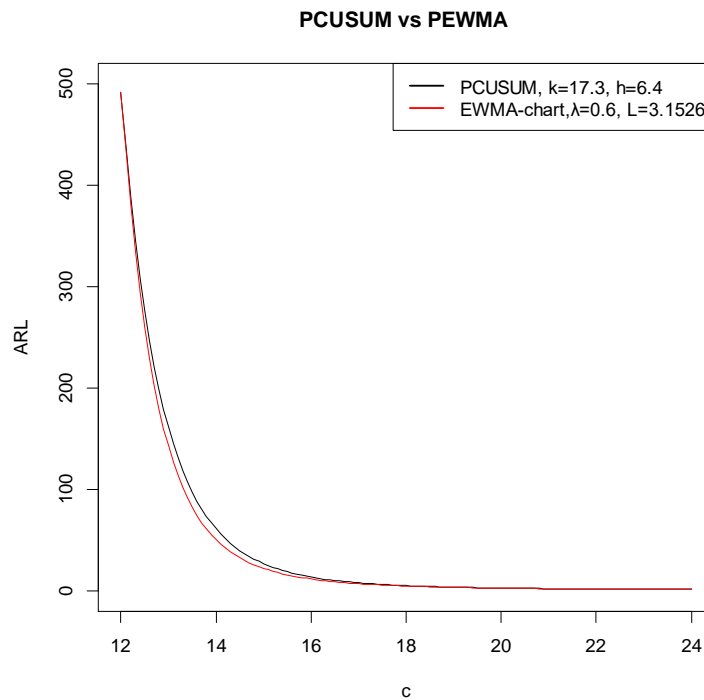
- **Περίπτωση 1: $c_1 = 20$**



Σχήμα 3.1. Σύγκριση διαγραμμάτων PEWMA και PCUSUM διάγραμμα ελέγχου για
 $(c_0 = 12, c_1=20, ARL_0 = 490.7)$

Το διάγραμμα PCUSUM φαίνεται να γίνεται πιο γρήγορο στο να εντοπίζει πιο γρήγορα μικρές μετατοπίσεις σε σχέση με το διάγραμμα ελέγχου PEWMA όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1.

- **Περίπτωση 2:** $c_1 = 24$



Σχήμα 3.2. Σύγκριση διαγραμμάτων PEWMA και PCUSUM διάγραμμα ελέγχου για
 $(c_0 = 12, c_1=24 ARL_0 = 491.06)$

Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι το διάγραμμα PEWMA φαίνεται να γίνεται πιο γρήγορο στο να εντοπίζει πιο γρήγορα μικρές μετατοπίσεις σε σχέση με το διάγραμμα ελέγχου PCUSUM.

Συμπερασματικά, κανένα από τα PEWMA και PCUSUM διαγράμματα ελέγχου δεν είναι καλύτερο από το άλλο σε κάθε περίπτωση. Σημαντικό ρόλο παίζει και η τιμή στην οποία βελτιστοποιείται το κάθε διάγραμμα.

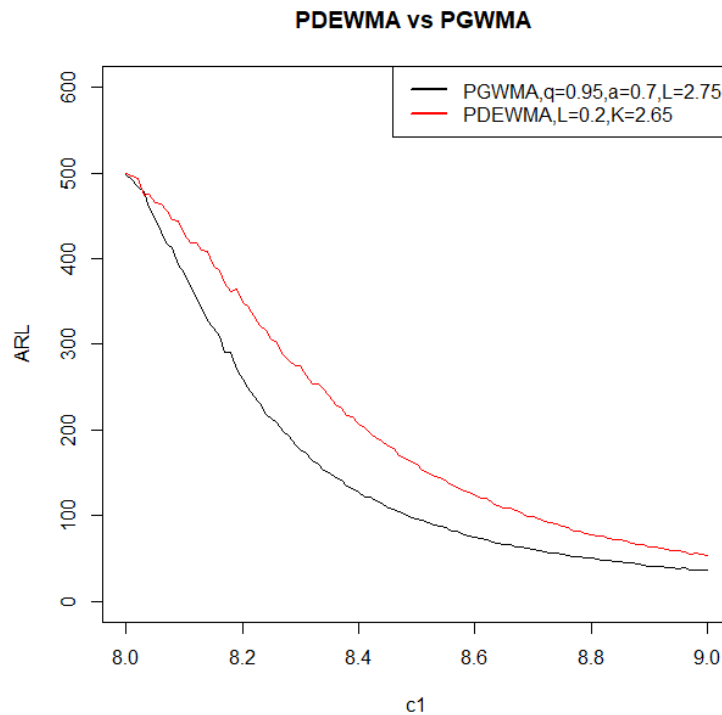
3.4 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PGWMA και PDEWMA

Σε αυτή την παράγραφο θα συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου PGWMA και PDEWMA με $ARL_0 = 500$ για εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 8$, εκτός ελέγχου μέση τιμή $c_1 = 9$. Για την εύρεση των σχετικών παραμέτρων των διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι προσομοίωσης.

Για το PGWMA διάγραμμα ελέγχου για $c_0 = 8$ και $ARL_0 = 500$ μπορούν να βρεθούν αρκετά διαγράμματα ελέγχου με συνδυασμούς των παραμέτρων q, a, L . Οπότε χρειάστηκε να συγκρίνουμε τους συνδυασμούς των παραμέτρων ώστε να βρεθεί συνδυασμός που να αποδίδει το βέλτιστο ARL , δηλαδή εκείνο το εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής που είναι ελάχιστο για $c_1 = 9$. Με βάση τον έλεγχο που έγινε για εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 8$, για εκτός ελέγχου μέση τιμή $c_1 = 9$ και $ARL_0 = 500$ οι παράμετροι που βρέθηκαν είναι $q = 0.95$, $a = 0.7$ και $L = 2.7$.

Για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου για $c_0 = 8$ και $ARL_0 = 500$ μπορούν να βρεθούν αρκετά διαγράμματα ελέγχου με συνδυασμούς των παραμέτρων L, K . Συγκρίναμε διάφορους συνδυασμούς παραμέτρων ώστε να βρεθεί ο συνδυασμός που να αποδίδει το βέλτιστο ARL , δηλαδή εκείνο το εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής που είναι ελάχιστο για $c_1 = 9$. Με βάση τον έλεγχο που έγινε για εντός ελέγχου μέση τιμή $c_0 = 8$, για εκτός ελέγχου μέση τιμή $c_1 = 9$ και $ARL_0 = 500$ οι παράμετροι που βρέθηκαν είναι $L = 0.2$ και $K = 2.65$.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.3. Σύγκριση διαγραμμάτων PGWMA και PDEWMA ($c_0 = 8, c_1=9, ARL_0 = 500$)

Το PGWMA διάγραμμα ελέγχου φαίνεται να είναι πιο γρήγορο στο να ανιχνεύει τιμές εκτός ελέγχου σε σχέση με το PDEWMA όπως φαίνεται από το Σχήμα 3.3. Η συμπεριφορά αυτή ωστόσο δεν παρατηρήθηκε και σε άλλους συνδυασμούς των παραμέτρων c_0, c_1 και ARL_0 .

3.5 Σύγκριση των διαγραμμάτων ελέγχου PEWMA, PDEWMA, PGWMA και PCUSUM

Σε αυτή την παράγραφο θα συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου PEWMA, PCUSUM, PDEWMA και PGWMA για $c_0 = 10$. Για το PEWMA διάγραμμα για $c_0 = 10$ και συγκεκριμένο ARL_0 μπορούν να δημιουργηθούν αρκετά διαγράμματα ελέγχου με πολλούς συνδυασμούς των παραμέτρων λ και L . Επιλέγοντας συγκεκριμένη τιμές για το c_1 , ώστε να επιτευχθεί το ελάχιστο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 για

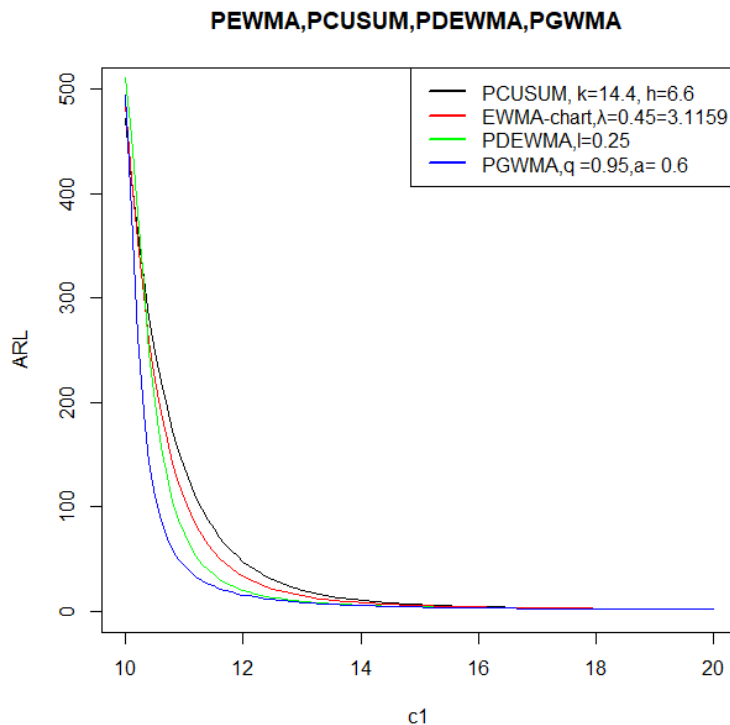
αυτή την τιμή, προκύπτει μοναδικός συνδυασμός για τα λ και L . Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης `pois.ewma.arl` του πακέτου `spc` της R.

Στην περίπτωση μας θα επιλέξουμε την εκτός ελέγχου μέση τιμή, τη $c_1 = 20$ και για την $c_1 = 20$, με $ARL_0 = 484$ για $c_0 = 10$, οι παράμετροι που βελτιστοποιούν την απόδοση του ARL είναι $L = 3.1159$ και $\lambda = 0.45$. Για το PCUSUM διάγραμμα για $c_0 = 10$ και το συγκεκριμένο ARL_0 υπάρχουν επίσης αρκετοί συνδυασμοί παραμέτρων (k, h) που το επιτυγχάνουν. Επιλέγοντας συγκεκριμένη τιμές για το c_1 , ώστε να επιτευχθεί το ελάχιστο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 για αυτή την τιμή, προκύπτει μοναδικός συνδυασμός για τα (k, h) . Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης `pois.cusum.crit` του πακέτου `spc` της R. Έτσι για την περίπτωση $c_1 = 20$ και $ARL_0 = 471$ παίρνουμε $k = 14.4$ και $h = 6.6$.

Για το PGWMA διάγραμμα ελέγχου για $c_0 = 10$ και συγκεκριμένο ARL_0 μπορούν να δημιουργηθούν αρκετά διαγράμματα ελέγχου με πολλούς συνδυασμούς των παραμέτρων q, a, L . Οπότε χρειάστηκε να συγκρίνουμε τους συνδυασμούς των παραμέτρων ώστε να βρεθεί συνδυασμός που αποδίδει το βέλτιστο ARL, δηλαδή εκείνο το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής που είναι ελάχιστο. Με βάση τον έλεγχο που έγινε για $c_0 = 10$, επιλέγοντας την εκτός ελέγχου μέση τιμή να είναι $c_1 = 20$ και $ARL_0 = 493$ οι παράμετροι που επιλέχθηκαν είναι για $q = 0.95$, $a = 0.6$ και $L = 2.836$.

Για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου για $c_0 = 10$ και συγκεκριμένο ARL_0 μπορούν επίσης να δημιουργηθούν αρκετά διαγράμματα ελέγχου με πολλούς συνδυασμούς των παραμέτρων L, K . Αντίστοιχα χρειάστηκε να συγκρίνουμε τους συνδυασμούς για τις παραμέτρους ώστε να βρεθεί συνδυασμός που αποδίδει το βέλτιστο ARL. Με βάση τον έλεγχο που έγινε για $c_0 = 10$, επιλέγοντας την εκτός ελέγχου μέση τιμή να είναι $c_1 = 20$ και $ARL_0 = 510$ οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για να επιτευχθεί $ARL_0 = 500$, είναι για $L = 0.25$ και $K = 2.75$.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.4. Σύγκριση διαγραμμάτων PCUSUM,PEWMA, PDEWMA και PGWMA
($c_0 = 8, c_1=9, ARL_0 = 500$)

Το PGWMA διάγραμμα ελέγχου φαίνεται να είναι πιο γρήγορο στο να ανιχνεύει τιμές εκτός ελέγχου σε αντίθεση με τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4.

Συμπερασματικά από τις παραπάνω συγκρίσεις που κάναμε για τα διαγράμματα ελέγχου δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα σχετικά με το ποιο είναι το ομοιόμορφα καλύτερο διάγραμμα για συγκεκριμένες τιμές της εντός και εκτός ελέγχου μέσης τιμής και του ARL_0 . Ωστόσο φαίνεται να υπερτερεί το διάγραμμα ελέγχου PGWMA στις περισσότερες περιπτώσεις λόγω περισσότερων παραμέτρων (τριών).

Σημειώνουμε ότι με την πρώτη βασική ομαδοποίηση κανένα από τα PEWMA και PCUSUM διαγράμματα ελέγχου δεν είναι ομοιόμορφα καλύτερο από το άλλο. Σημαντικό ρόλο παίζει και η εκτός ελέγχου μέση τιμή στην οποία βελτιστοποιείται το κάθε διάγραμμα.

Ωστόσο στην δεύτερη ομαδοποίηση φαίνεται να έχουμε το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου να είναι πιο γρήγορο στο να ανιχνεύει τιμές εκτός ελέγχου σε αντίθεση με το PGWMA. Οπότε το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου είναι ομοιόμορφα καλύτερο από το PGWMA διάγραμμα.

Τέλος από την σύγκριση που κάναμε με όλα τα διαγράμματα ελέγχου που μελετήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το PGWMA διάγραμμα ελέγχου είναι ομοιόμορφα καλύτερο από τα υπόλοιπα για μικρές και για μεγάλες μετατοπίσεις στις περιπτώσεις που εξετάσαμε.

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

- [1] Manuel Cabral Morais¹ Sven Knoth². *Improving the ARL profile and the accuracy of its calculation for Poisson EWMA charts.*
- [2] M. Borrer, Charles W. Champ & Steven E. Rigdon (1998). *Poisson EWMA Control Charts Connie.*
- [3] Michael B. C. Khoo (2004). *Poisson Moving Average Versus c Chart for Nonconformities.*
- [4] Minitab 17 Statistical Software (2010). *[Computer software]. State College, PA: Minitab, Inc. (www.minitab.com)*
- [5] Lingyun Zhang , K. Govindaraju , C. D. Lai & M. S. Bebbington. *Poisson DEWMA Control Chart.*
- [6] Lucas (1985). *Counted Data CUSUM's.*
- [7] Shawky E. Shamma , Raid W. Amin & Amal K. Shamma. *A double exponentially weighted moving average control procedure with variable sampling intervals.*
- [8] Shey-Huei Sheu & Wen-Chih Chiu. *Poisson GWMA Control Chart.*
- [9] Shey-Huei Sheu a & Ling Yang. *The Generally Weighted Moving Average Control Chart for Monitoring the Process Median.*
- [10] Testik (2007). *Conditional and marginal performance of the Poisson CUSUM control chart with parameter.*
- [11] Vasileios Alevizakos & Christos Koukouvinos. *A comparative study on Poisson control charts.*
- [12] Wen-Chih Chiu & Shey-Huei Sheu. *Fast Initial Response Features for Poisson GWMA Control Charts.*
- [13] White & Keats (1996). *ARLs and Higher-Order Run-.*
- [14] White,Keats & Stanley (1997). *Poisson CUSUM versus c chart for defect data.*

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [15] Αντζουλάκος, Δ. (2010). Πανεπιστημιακές σημειώσεις: Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Μ.Δ.Ε Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Παράρτημα

Κ. Κώδικες για τα Poisson Διαγράμματα Ελέγχου

Κ.1 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό των ARL_i για το PMA διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει των ARL_i για το PMA διάγραμμα ελέγχου.

```
> lamda <- 16
> L <- 3
> UCL <- floor(lamda+3*sqrt(lamda))
> LCL <- ceiling(lamda-3*sqrt(lamda))
> UCL;LCL
[1] 28
[1] 4
> d <- seq(0,3,0.25)
> out.lam <- lamda+sqrt(lamda)*d
> beta <- ppois(UCL,out.lam)-ppois(LCL-1,out.lam)
> arl <- 1/(1-beta)
> mat <- cbind(d,arl)
> rownames(mat) <- rep("", times=length(d))
> mat
      d      arl
0.00 438.267445
0.25 199.025724
0.50  96.921858
0.75  51.167229
1.00  29.123336
1.25  17.739509
1.50  11.482868
1.75   7.849483
2.00   5.634829
2.25   4.226555
2.50   3.297500
2.75   2.664885
3.00   2.222387
>
> L <- 3                # Lσ control limits
> w <- 4                # Length of moving average
> c.in <- 16            # Εντός ελέγχου τιμή του c=c.in
> d <- seq(0,3,0.25)    # Μετατόπιση # Για σωστά γραφήματα d <-
seq(0,3,0.01)
> c.out <- c.in+d*sqrt(c.in) # Εκτός ελέγχου τιμή του c.out=c.in+d*sqrt(c.in)
> simu <- 10000
>
> cycle <- 8000
> UCL <- rep(0, times=cycle)
> LCL <- rep(0, times=cycle)
> for (i in 1:cycle) {
+   if (i<w) {
+     UCL[i] <- c.in+L*sqrt(c.in/i)
+     LCL[i] <- c.in-L*sqrt(c.in/i)
+   }
+   else {
```

```

+       UCL[i] <- c.in+L*sqrt(c.in/w)
+       LCL[i] <- c.in-L*sqrt(c.in/w)
+   }
+ }
> library(pracma)
> m <- length(d)
> ARL <- rep(0, times=m)
> for (k in 1:m) {
+   counter <- rep(0, times=simu)
+   for (j in 1:simu) {
+     set.seed(j)
+     x <- rpois(cycle,c.out[k])
+     z <- movavg(x,w,type="s")
+     for (i in 1:cycle) {
+       counter[j] <- counter[j]+1
+       if (z[i+1]>UCL[i] | z[i+1]<LCL[i]) break
+     }
+   }
+   ARL[k] <- mean(counter)
+ }

> mat <- cbind(d,ARL)
> rownames(mat) <- rep("", times=length(d))
> mat
  d      ARL
0.00 565.0145
0.25 180.1178
0.50  60.0289
0.75   25.6
1.00   13.4
1.25   8.10
1.50   5.53
1.75   4.14
2.00   3.20
2.25   2.61
2.50   2.20
2.75   1.90
3.00   1.67
> plot(d,ARL,type="b")

```

K.2 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το PEWMA διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 500$.

```

> library(spc)
> lam <- 12
> out.lam <- seq(8,16,by=0.05)
> ARL0 <- 500
>
> lambda <- 0.05
> A <- pois.ewma.crit(lambda, L0=ARL0, mu0=lam, z0=lam, mcdesign="transfer")
> print(round(A, digits=4))
  A
2.6201
> ##### ARL profile of the PEWMA chart
> ARL1 <- rep(NA, length(out.lam))
> for ( i in 1:length(out.lam) )

```

```

+   ARL1[i] <- pois.ewma.arl(lambda, AL=A, AU=A, mu0=lam, z0=lam,
mu=out.lam[i], mcdesign="transfer")
>
> lambda <- 0.2
> A <- pois.ewma.crit(lambda, L0=ARL0, mu0=lam, z0=lam, mcdesign="transfer")
> print(round(A, digits=4))
      A
2.9764
> ##### ARL profile of the PEWMA chart
> ARL2 <- rep(NA, length(out.lam))
> for ( i in 1:length(out.lam) )
+   ARL2[i] <- pois.ewma.arl(lambda, AL=A, AU=A, mu0=lam, z0=lam,
mu=out.lam[i], mcdesign="transfer")
>
> lambda <- 0.4
> A <- pois.ewma.crit(lambda, L0=ARL0, mu0=lam, z0=lam, mcdesign="transfer")
> print(round(A, digits=4))
      A
3.0978
> ARL3 <- rep(NA, length(out.lam))
> for ( i in 1:length(out.lam) )
+   ARL3[i] <- pois.ewma.arl(lambda, AL=A, AU=A, mu0=lam, z0=lam,
mu=out.lam[i], mcdesign="transfer")
>
> mat <- cbind(out.lam, ARL1, ARL2, ARL3)
> rownames(mat) <- rep("", times=length(out.lam))
> colnames(mat) <-c("d", "  ARL - PEWMA ( $\lambda=0.05$ )", "  ARL - PEWMA ( $\lambda=0.2$ )", "
ARL - PEWMA ( $\lambda=0.4$ )")
> round(mat, digits=2)
> c <- out.lam
> plot(c,ARL1,type="l",lwd=1,main="ARL τιμές για διαγράμματα ελέγχου PEWMA",
ylim=c(0,750), ylab="ARL")
> points(c,ARL2,type="l",col="red", lwd=2)
> points(c,ARL3,type="l",col="blue", lwd=3)
> legend(13, 700, c( " $\lambda=0.05$ ",
" $\lambda=0.2$ ", " $\lambda=0.4$ " ), col=c("black", "red", "blue"), lwd=c(1,2,3) )
> abline(h=500, lty=3)
> abline(v=12, lty=3)

> library(spc)
> lam <- 12
> L <- 3
> UCL <- floor(lam+3*sqrt(lam))
> LCL <- ceiling(lam-3*sqrt(lam))
> UCL;LCL
      [1] 22
      [1]  2
> (out.lam <- seq(1,20,by=1))
      [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
> beta <- ppois(UCL, out.lam)-ppois(LCL-1, out.lam)
> ARL <- 1/(1-beta)
> mat <- cbind(c=out.lam,ARL=ARL)
> rownames(mat) <- rep("", times=length(out.lam))
> mat
      c      ARL
1      1  1.359141
2      2  2.463019
3      3  5.021384
4      4 10.919630
5      5 24.735524
6      6 57.632351
7      7 137.053701
8      8 329.973221

```

```

9 768.683190
10 1257.646435
11 804.654815
12 319.770185
13 130.649006
14 59.791923
15 30.535154
16 17.169492
17 10.496176
18 6.900825
19 4.834162
20 3.579243
> (ARL0 <- ARL[12])
[1] 319.7702

> lambda <- 0.05
> A <- pois.ewma.crit(lambda, L0=ARL0, mu0=lam, z0=lam, mcdesign="transfer")
> print(round(A, digits=4))
A
2.4305
> ##### ARL profile of the PEWMA chart
> ARL1 <- rep(NA, length(out.lam))
> for ( i in 1:length(out.lam) )
+   ARL1[i] <- pois.ewma.arl(lambda, AL=A, AU=A, mu0=lam, z0=lam,
mu=out.lam[i], mcdesign="transfer")
>
> lambda <- 0.10
> A <- pois.ewma.crit(lambda, L0=ARL0, mu0=lam, z0=lam, mcdesign="transfer")
> print(round(A, digits=4))
A
2.6463
> ##### ARL profile of the PEWMA chart
> ARL2 <- rep(NA, length(out.lam))
> for ( i in 1:length(out.lam) )
+   ARL2[i] <- pois.ewma.arl(lambda, AL=A, AU=A, mu0=lam, z0=lam,
mu=out.lam[i], mcdesign="transfer")
>
>
> lambda <- 0.20
> A <- pois.ewma.crit(lambda, L0=ARL0, mu0=lam, z0=lam, mcdesign="transfer")
> print(round(A, digits=4))
A
2.8148
> ##### ARL profile of the PEWMA chart
> ARL3 <- rep(NA, length(out.lam))
> for ( i in 1:length(out.lam) )
+   ARL3[i] <- pois.ewma.arl(lambda, AL=A, AU=A, mu0=lam, z0=lam,
mu=out.lam[i], mcdesign="transfer")
>
>
> mat <- cbind(out.lam, ARL, ARL1, ARL2, ARL3)
> rownames(mat) <- rep("", times=length(out.lam))
> colnames(mat) <- c("c", " ARL - c chart", " ARL - ( $\lambda=0.05$ )", " ARL -
( $\lambda=0.1$ )", " ARL - ( $\lambda=0.2$ )")
> round(mat, digits=2)

```

K.3 R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PEWMA και το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου.


```

> λ <- lam <- 0.2
> L <- 2.653
> c0 <- 8
> a <- 1
> c1 <- c0+a
> simu <- 20000 # Number of simulations
> cycle <- 10000
> UCL <- rep(0, times=cycle)
> LCL <- rep(0, times=cycle)
> for (i in 1:cycle) {
  UCL[i] <- c0+L*sqrt(c0*(lam/(2-lam))*(1-(1-lam)^(2*i)))
  LCL[i] <- c0-L*sqrt(c0*(lam/(2-lam))*(1-(1-lam)^(2*i)))
}
> counter.pewma <- rep(0, times=simu)
> for (j in 1:simu) {
+   set.seed(j)
+   x <- rpois(cycle,lambda=c1)
+   z <- c(c0,rep(0, times=cycle))
+   for (i in 1:cycle) {
+     counter.pewma[j] <- counter.pewma[j]+1
+     z[i+1] <- lam*x[i]+(1-lam)*z[i]
+     if (z[i+1]>UCL[i] | z[i+1]<LCL[i]) break
+   }
+ }
> ARL.pewma <- mean(counter.pewma)
> ARL.pewma
[1] 38.00985

```

K.4 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PDEWMA διάγραμμα ελέγχου.

```

> λ <- L <- 0.2
> K <- 2.295
> c0 <- 8
> a <- 1
> c1 <- c0+a
> simu <- 20000
> cycle <- 10000
> t <- 1:cycle
> f <- c0/((1-(1-L)^2)^3)
> Var <- f*(L^4)*( 1+(1-L)^2 - ((t+1)^2)*((1-L)^(2*t)) +
  (2*(t^2)+2*t-1)*((1-L)^(2*t+2)) - (t^2)*((1-L)^(2*t+4)) )
> UCL=c0+K*sqrt(Var)
> LCL=c0-K*sqrt(Var)
> counter.pdewma <- rep(0, times=simu)
> for (j in 1:simu) {
+   set.seed(j)
+   x <- rpois(cycle,lambda=c1)
+   y <- c(c0,rep(0, times=cycle))
+   for (i in 1:cycle) {
+     y[i+1] <- lam*x[i]+(1-lam)*y[i]
+   }
+   z <- c(c0,rep(0, times=cycle))
+   for (i in 1:cycle) {
+     counter.pdewma[j] <- counter.pdewma[j]+1
+     z[i+1] <- lam*y[i+1]+(1-lam)*z[i]
+     if (z[i+1]>UCL[i] | z[i+1]<LCL[i]) break
+   }
+ }

```

```

+         }
+     }
> ARL.pdewma <- mean(counter.pdewma)
> ARL.pdewma
[1] 34.45385

```

K.5 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PGWMA διάγραμμα ελέγχου.

```

> #####
> # PGWMA ARL EVALUATION
> # PGWMA Parameters
> #####
> q <- 0.95
> a <- 0.8
> L <- 2.69
> c0 <- 8      # Εντός ελέγχου μέση τιμή
> c1 <- 9      # Εκτός ελέγχου μέση τιμή
> simu <- 20000 # Number of simulations
> #####
> # Control Limits for each one of the simu charts
> # Maximum number of points in each chart: cycle
> #####
> cycle <- 10000
> i <- 1:cycle
> v <- q^((i-1)^a)-q^(i^a)
> Qt <- cumsum(v^2)
> Var <- c0*Qt
> UCL=c0+L*sqrt(Var)
> LCL=c0-L*sqrt(Var)
>
> #####
> # cycle: Number of points in each chart
> # (simu charts in total) until the ooc signal
> # ARL=mean(counter.pgwma)
> #####
> counter.pgwma <- rep(0, times=simu)
> for (j in 1:simu) {
+   set.seed(j)
+   x <- rpois(cycle,lambda=c1)
+   z <- c(c0,rep(0, times=cycle))
+   for (t in 1:cycle) {
+     counter.pgwma[j] <- counter.pgwma[j]+1
+     z[t+1] <- sum(v[1:t]*rev(x[1:t]))+c0*(q^(t^a))
+     if (z[t+1]>UCL[t] | z[t+1]<LCL[t]) break
+   }
+ }
> ARL.pgwma <- mean(counter.pgwma)
> ARL.pgwma
[1] 36.30645
>

```

K.6 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το PCUSUM διάγραμμα ελέγχου.

```

> library(spc)
> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=0.25 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) #####
> k <- .25
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
      arl
438.125

> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=0.5 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
> k <- 0.5
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
      arl
224.4167

> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=1 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
> k <- 1
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
      arl
117.5

> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=2 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
> k <- 2
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
      arl
63.64377

> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=3 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
> k <- 3
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h

```

```

> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
  arl
45.13

>
> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=5 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
> k <- 5
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
  arl
29.80754

> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=7 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
> k <- 7
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
  arl
22.9651

> #####Poisson CUSUM Average Run Lengths (k=10 ,
h=10,mu0=(1,1.2,1.4,1.7,2,2.5,3,5) ) #####
>
> k <- 10
> h <- 10
> m <- 4
> km <- m * k
> hm <- m * h
> mu0 <- 1* k
> ARL <- pois.cusum.arl(mu0, km, hm-1, m)
> print(ARL)
  arl
17.62485

```