Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής – Ανάπτυξη Λογισμικού και Τεχνητής Νοημοσύνης»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**Αλγόριθμοι για επίλυση συζευγμένων συνεχών παιγνίων** **Algorithms for couple constraint continuous games**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Γεωργία Μαρούλη Κουβουτσάκη**
Πατρώνυμο	**Πολυχρόνης**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΣΠ/19020**
Επιβλέπων	**Διονύσιος Σωτηρόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Σεπτέμβριος 2021**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Διονύσιος Σωτηρόπουλος Επίκουρος Καθηγητής	Γεώργιος Τσιχριντζής Καθηγητής	Ευάγγελος Σακκόπουλος Επίκουρος Καθηγητής

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η βιβλιογραφική μελέτη των αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης παιγνίων όπου οι παίκτες αντιμετωπίζουν περιορισμούς στον συνδυασμένο χώρο στρατηγικής. Σε αυτού του είδους προβλήματα ένας ρυθμιστικός φορέας μπορεί να στοχεύει στη συμμόρφωση των παικτών σε συγκεκριμένα πρότυπα ή την επιβολή επιβαρύνσεων. Η έννοια της λύσης για αυτά τα παίγνια είναι γνωστή ως γενικευμένη ισορροπία Nash . Οι υφιστάμενοι αλγόριθμοι βασίζονται σε δύο προσεγγίσεις : είτε την εύρεση μεμονωμένης λύσης του προβλήματος είτε την εύρεση ενός βέλτιστου συνόλου λύσεων από τις οποίες επιλέγεται κάποια.

Abstract

The purpose of this paper is to study the literature on algorithms to solve optimization problems of game theory where players face limitations in the combined strategy space. In such problems, a regulator may aim to make players comply with certain standards or impose charges. The concept of solution for these games is known as generalized Nash equilibrium. The existing algorithms are based on two approaches; either finding an individual solution to the problem or finding an optimal set of solutions from which to choose.

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η βιβλιογραφική μελέτη των αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων με περιορισμούς, συγκεκριμένα σε προβλήματα μη-συνεργατικών παιγνίων. Η Θεωρία Παιγνίων είναι η μελέτη των διαδικασιών λήψης στρατηγικών αποφάσεων και ασχολείται με την μαθηματική μοντελοποίηση ανταγωνιστικών καταστάσεων με στόχο την εκτίμηση του αποτελέσματός τους.

Στο Κεφάλαιο 2 εξηγείται το πρόβλημα και δίνονται οι βασικοί ορισμοί που θα χρειαστούν στη συνέχεια ώστε αναλυθούν οι αλγόριθμοι. Στο Κεφάλαιο 3 αναφέρονται αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που επιστρέφουν μια μεμονωμένη λύση στα προβλήματα, αυτός είναι ο πρώτος τρόπος προσέγγισης αυτών των προβλημάτων. Στο Κεφαλαιο 4 αναλύεται η δεύτερη γενική προσέγγιση είναι ο προσδιορισμός ενός συνόλου βέλτιστων λύσεων Pareto (Pareto optimal set) ή ενός αντιπροσωπευτικού υποσυνόλου.

2.Βασικοί Ορισμοί

2.1 Παίγνιο

Ένα παίγνιο είναι η επίσημη αναπαράσταση μίας κατάστασης στην οποία ένας αριθμός ατόμων αλληλεπιδρούν σε ένα πλαίσιο στρατηγικής αλληλεξάρτησης. Δηλαδή η ευημερία του κάθε ατόμου εξαρτάται όχι μόνο από τις δικές του δράσεις αλλά και από τις δράσεις των άλλων ατόμων. Επιπλέον οι δράσεις που είναι καλύτερες να κάνει αυτό το άτομο μπορεί να εξαρτώνται από τις αναμενόμενες δράσεις των άλλων ατόμων. Ένα παίγνιο σε κανονική μορφή αποτελείται από

1) Ένα σύνολο παικτών n = {1, 2,..., n}
2) Για κάθε παίκτη i, ένα σύνολο διαθέσιμων στρατηγικών Si , i=1,…n .
3) Για κάθε παίκτη i, μια συνάρτηση ευημερίας (ή απόδοσης ή αντικειμενική συνάρτηση)
   Ui : S1 x ... x Sn → R (συμβολίζεται και θ_v ή φ_i κ.α.)

- Η συνάρτηση απόδοσης περιγράφει το όφελος που αποκομίζει ένας παίκτης από την τελική έκβαση.
- Το στοιχείο σε αυτή τη συνάρτηση δεν αφορά μόνο την επιλογή του ενός αλλά εξαρτάται από την επιλογή όλων των παικτών.

Προφίλ στρατηγικών: Κάθε διάνυσμα της μορφής (s_1, ..., s_n) , με $s_i \in$ Si .Κάθε προφίλ αντιστοιχεί σε μια έκβαση του παιγνίου και εξαρτάται από τις επιλογές όλων των παικτών. Συνήθως διαχωρίζεται σε δύο μέρη S= (s_i, s_{-i}) (εναλλακτικός συμβολισμός (x^v, $\mathbf{x}^{-v}$)) . Το s_i είναι το διάνυσμα που υποδηλώνει το τι θα μπορούσε να κάνει ο παίκτης i, ενώ το s_{-i} υποδηλώνει τι θα μπορούσε να κάνει καθένας από τους άλλους παίκτες.

Παράδειγμα

Δύο εργάτες έχουν δύο επιλογές, είτε δουλεύουν σκληρά είτε όχι. Υπάρχει κόστος για την προσπάθεια. Στο τέλος μοιράζονται τα αποτελέσματα.

Πίνακας αναπαράστασης αποδόσεων*

Εργ.2 / Εργ. 1	Προσπάθεια	Όχι προσπάθεια
Προσπάθεια	(2,2)	(-1,3)
Όχι προσπάθεια	(3,-1)	(0,0)

- Αν μόνο ένας παίκτης αποφάσίζει τότε πρέπει να κάνει προσπάθεια, αφού η απόδοση είναι υψηλότερη από το κόστος της προσπάθειας.
- Αν είναι συλλογική η απόφαση, τότε πρέπει και οι δύο να προσπαθήσουν (Προσπάθεια, Προσπάθεια)
- Αν αποφασίζουν ξεχωριστά τα δύο αυτά άτομα, τότε οι επιλογές των παικτών είναι αλληλένδετες και σε κάθε περίπτωση δεν πρέπει να επιλεγεί η προσπάθεια. Η επιλογή «Όχι Προσπάθεια » είναι *κυρίαρχη στρατηγική*, δηλαδή δίνει την καλύτερη απόδοση ανεξάρτητα από το τι πιστεύεται ότι θα επιλεγεί από τους άλλους παίκτες.

*Δεν έχουν όλα τα παίγνια πίνακα αναπαράστασης αποδόσεων , μόνο εάν ο αριθμός επιλογών είναι πεπερασμένος.

2.2 Nash Equilibrium

Το πρόβλημα ισορροπίας Nash (NEP) αναφέρεται επίσημα για πρώτη φορά από τον Nash , στις δημοσιεύσεις του το 1950 και 1951. Ωστόσο, η ιδέα της ισορροπίας εμφανίζεται πολύ νωρίτερα από τον Cournot (1938), στα πλαίσια της ολιγοπωλιστικής οικονομίας. Η ισορροπία Nash είναι μία έννοια της θεωρίας παιγνίων όπου το βέλτιστο αποτέλεσμα του παιγνίου είναι αυτό κατά το οποίο κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει από την επιλεγμένη του στρατηγική αφού λάβει υπόψιν την επιλογή του αντιπάλου. Συνολικά, ένα άτομο δεν μπορεί να λάβει σταδιακά όφελος αν αλλάξει την επιλογή του, θεωρώντας ότι οι άλλοι παίκτες παραμένουν σταθεροί στην επιλογή τους. Θα αναλυθεί περισσότερο στην συνέχεια. (Andreu Mas-Colell et al., 1995)

2.3 Generalized Nash Equilibrium

Μία προέκταση του NEP χρειάστηκε για να περιγραφεί η περίπτωση που οι παίκτες αλληλεπιδρούν στο επίπεδο του συνόλου των στρατηγικών. Το πρόβλημα γενικευμένης ισορροπίας Nash (Generalized Nash Equilibrium Problem για συντομία το GNEP) εισήχθη από τον Debreu το 1952. Το 1954 σε δημοσίευσή τους ο Debreu με τον Arrow αναφέρουν «Σε ένα παίγνιο η απόδοση του κάθε παίκτη εξαρτάται από τις στρατηγικές που έχουν επιλεχθεί από όλους, αλλά το πεδίο από το οποίο επιλέγονται οι στρατηγικές δίνεται σε κάθε παίκτη ανεξάρτητα των στρατηγικές που επιλέγουν οι άλλοι παίκτες».

Το GNEP είναι ένα σημαντικό μοντέλο που προήλθε από τις οικονομικές επιστήμες, αλλά εν τέλει έχει εφαρμογή σε πολλούς διαφορετικούς τομείς. Αν και το GNEP έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως τα τελευταία 50 χρόνια, μόνο από τα μέσα της δεκαετίας του 1990 η έρευνα για αυτό το θέμα κέρδισε έδαφος, ειδικά στην κοινότητα επιχειρησιακής έρευνας (Operations Research OR). Παρόλο που το GNEP θεωρείται πρόβλημα των οικονομικών , στην πραγματικότητα αφορά πολλούς διαφορετικούς κλάδους (π.χ. μηχανικής, μαθηματικών, επιστήμης υπολογιστών, επιχειρησιακής έρευνας). Επειδή το πρόβλημα αυτό συναντάται σε τόσους διαφορετικούς τομείς κάποιες φορές ερευνητές εργάστηκαν ανεξάρτητα αγνοώντας τα υπάρχοντα δεδομένα. Οι ερευνητές από τα διαφορετικά πεδία μελετώντας το GNEP, έδωσαν στο πρόβλημα πολλά διαφορετικά ονόματα. Στην βιβλιογραφία εμφανίζεται ως ψευδο-παίγνιο (pseudo-game), κοινωνικό πρόβλημα ισορροπίας (social equilibrium problem) , προγραμματισμός ισορροπίας (equilibrium programming), συζευγμένο πρόβλημα ισορροπίας (coupled constraint equilibrium problem) και αφηρημένη οικονομία (abstract economy).

Τυπικά, το GNEP αποτελείται από N παίκτες, κάθε παίκτης ν ελέγχει τις μεταβλητές

$x^{\nu} \in \mathbb{R}^{n_{\nu}}$. Συμβολίζουμε με **x** το διάνυσμα που σχηματίζεται από όλες τις μεταβλητές απόφασης:

$\mathbf{x} := (x^1 \ \dots \ x^N)$

το οποίο έχει διάσταση $n := \sum_{\nu=1}^{N} n_{\nu}$, και με $\mathbf{x}^{-\nu}$ το διάνυσμα που σχηματίζεται από τις μεταβλητές απόφασης όλων των παικτών εκτός από αυτές του παίκτη ν. Για να δώσουμε έμφαση στις μεταβλητές του ν-οστού παίκτη στο **x**, γράφουμε μερικές φορές $(x^{\nu}, \mathbf{x}^{-\nu})$ αντί για **x**. Σημειώστε ότι αυτό εξακολουθεί να είναι το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^{\nu}, \ldots, x^N)$ και ότι, συγκεκριμένα, ο συμβολισμός $(x^{\nu}, \mathbf{x}^{-\nu})$ δεν σημαίνει ότι τα στοιχεία μπλοκ του x αναδιατάσσονται με τέτοιο τρόπο ώστε το x^{ν} να γίνει πρώτο μπλοκ.

Κάθε παίκτης έχει μια αντικειμενική συνάρτηση $\theta_{\nu}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που εξαρτάται από τις μεταβλητές x^{ν} καθώς και από τις μεταβλητές $x^{-\nu}$ όλων των άλλων παικτών. Αυτή η χαρτογράφηση (mapping) θ_{ν} συχνά ονομάζεται συνάρτηση ευημερίας (utility function) του παίκτη ν, μερικές φορές επίσης ονομάζεται συνάρτηση απόδοσης (*payoff function*) ή η απώλειας (*loss function*), ανάλογα με τη συγκεκριμένη εφαρμογή στην οποία προκύπτει το GNEP.

Επιπλέον, η στρατηγική κάθε παίκτη πρέπει να ανήκει σε ένα σύνολο $X_{\nu}(\mathbf{x}^{-\nu}) \subseteq \mathbb{R}^{n_{\nu}}$ που εξαρτάται από τις στρατηγικές των αντίπαλων παικτών και ονομάζουμε εφικτό σύνολο (feasible set) ή χώρος στρατηγικών (strategy space) του παίκτη ν. Ο στόχος του παίκτη ν, δεδομένης της στρατηγικής των άλλων παικτών $\mathbf{x}^{-\nu}$, είναι να

επιλέξει μια στρατηγική x^{ν} που επιλύει το πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**

$minimize_{x^{\nu}} \quad \theta_{\nu}(x^{\nu}, \mathbf{x}^{-n})$ όπου $x^{\nu} \in X_{\nu}(\mathbf{x}^{-\nu})$. (1)

Για οποιοδήποτε $\mathbf{x}^{-\nu}$, το σύνολο των λύσεων του προβλήματος (1) συμβολίζεται

$S_{\nu}(\mathbf{x}^{-\nu})$.

Το GNEP είναι το πρόβλημα εύρεσης διανύσματος $\bar{\mathbf{x}}$ έτσι ώστε

$\bar{x}_{\nu} \in S_{\nu}(\bar{\boldsymbol{x}}^{-\nu})$ για κάθε ν = 1,….., N.

Ένα τέτοιο σημείο $\bar{\mathbf{x}}$ ονομάζεται γενικευμένο σημείο ισορροπίας Nash ή πιο απλά μία λύση του .Επομένως ένα σημείο $\bar{\mathbf{x}}$ είναι σημείο ισορροπίας εάν κανένας παίκτης δεν μπορεί να μειώσει την αντικειμενική του συνάρτηση αλλάζοντας μονομερώς το $\bar{x}^{\nu}$ σε οποιοδήποτε άλλη εφικτή λύση. Συμβολίζοντας με S($\mathbf{x}$) το σύνολο S($\mathbf{x}$): = $\prod_{\nu=1}^{N} S_\nu\ (\boldsymbol{x}^{-\nu})$, βλέπουμε ότι μπορούμε να πούμε ότι το $\bar{\mathbf{x}}$ είναι μια λύση εάν $\bar{\mathbf{x}} \in S\ (\bar{\mathbf{x}})$, δηλ. εάν $\bar{\mathbf{x}}$ είναι ένα σταθερό σημείο της χαρτογράφησης S (σημείο-προς-σύνολο).

Εάν τα εφικτά σύνολα $X^\nu\ (x^{-\nu})$ δεν εξαρτώνται από τις στρατηγικές των αντίπαλων παικτών, έχουμε $X_\nu\ (x^{-\nu}) = X_\nu$ για κάποιο σύνολο $X_\nu \subseteq \mathbb{R}^{n_\nu}$ και όλα τα ν = 1, ..., Ν, τότε το GNEP εκφυλίζεται στην τυπική ισορροπία Nash (NEP για συντομία).

Παράδειγμα 1

Έστω ένα παίγνιο με δύο παίκτες, δηλαδή N = 2, με $n_1 = 1$ και $n_2 = 1$, έτσι ώστε κάθε παίκτης να ελέγχει μια μεταβλητή (για λόγους απλότητας ορίζουμε x: = x_1^1 και y: = x_1^2). Ας υποθέσουμε ότι τα προβλήματα των παικτών είναι

$\min_x\ (x-1)^2$ $\qquad$ $\min_y\ (y-\frac{1}{2})^2$

όπου $x + y \leq 1$, $\quad$ όπου $x + y \leq 1$.

Τα σύνολα των βέλτιστων λύσεων είναι

$$S_1(y) = \begin{cases} 1\,, & \text{if } y \leq 0 \\ 1-y\,, & \text{if } y \geq 0 \end{cases}, \quad \text{και} \quad S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,, & \text{if } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x\,, & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Και οι δύο παίκτες θέλουν να ελαχιστοποιήσουν μία σχέση, για την πρώτη σχέση το x πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο 1 και για την δεύτερη σχέση το y να είναι κοντά στο ½. Για αυτόν τον λόγο ο περιορισμός θα ισχύει ως ισότητα χ+y=1, αφού πάντα ο πρώτος παίκτης έχει κίνητρο να αυξήσει το x όσο πιο κοντά είναι δυνατόν στο 1.

Το $S_1(y)$ δείχνει για κάθε y που επιλέγει ο παίκτης 2 ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη 1. Εάν y<=0 τότε το καλύτερο για τον παίκτη 1 είναι να επιλέξει X=1. Ενώ εάν y> θέλει να επιλέξει όσο μεγαλύτερο x γίνεται, οπότε 1-y (εφόσον ο περιορισμός ισχύει με ισότητα). Και αντίστοιχα για τον παίκτη 2.

Οι λύσεις του προβλήματος δίνονται από (α, 1 − α) για κάθε α ∈ [1/2, 1]. Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις με διαφορετικές τιμές και για τους δύο παίκτες. (Facchinei, F., & Kanzow, C. ,2010)

2.4 Βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων

(Multi-objective Optimization - MO)

Οι πολυ-αντικειμενικές μορφές είναι ρεαλιστικά μοντέλα για πολλά σύνθετα προβλήματα βελτιστοποίησης μηχανικής. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίσης πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων εμφανίζεται όταν θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε ταυτόχρονα πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις (Ching-Lai Hwang et al., 1979). Οι συναρτήσεις αυτές συνήθως έρχονται σε αντίθεση μεταξύ τους, δηλαδή, υπάρχει περίπρωση αν βελτιωθεί μία από αυτές να χειροτερέψουν οι υπόλοιπες. Για παράδειγμα, στην διεξαγωγή μίας έρευνας με τη χρήση ερωτηματολογίου στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η πληροφορία που εξάγουμε από τους ερωτηθέντες όμως ταυτόχρονα στόχος είναι και η ελαχιστοποίηση των ερωτήσεων έτσι ώστε το ερωτηματολόγιο να είναι προσιτό σε αυτούς. Το GNEP είναι ένα πρόβλημα με πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις.

Υπόθεση κυρτότητας

Μία πολύ κοινή υπόθεση που γίνεται και συχνά ικανοποιείται είναι ότι για κάθε παίκτη ν και κάθε $\boldsymbol{x}^{-\nu}$, η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή και το σύνολο $X_\nu(\mathbf{x}^{-\nu})$ κλειστό και κυρτό.

3. Αλγόριθμοι που συγκλίνουν σε λύση του GNEP

3.1 Πρακτικοί Αλγόριθμοι

Είναι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται συχνά από μηχανικούς και άλλους ειδικοί για την επίλυση εφαρμοσμένων προβλημάτων. Υπάρχουν δύο τροποποιήσεις τέτοιων αλγορίθμων για την επίλυση του GNEP, αυτοί του Jacobi και του Gauss – Seidel. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι αρκετά απλοί εννοιολογικά, αλλά η σύγκλισή τους είναι άγνωστη ή υπάρχει κάτω από περιοριστικές συνθήκες. Έστω ότι το GNEP ορίζεται όπως στην (1). (Chernov, A. V.,2019).

3.1.1 Μη-γραμμική μέθοδος τύπου Jacobi (Non-Linear Jacobi type Method)

Βήμα 1) Επέλεξε ένα αρχικό σημείο $x^0 = x^{0,1},..., x^{0,N}$ και θέσε k=0.

Βήμα 2) Αν x^k ικανοποιεί ένα κατάλληλο κριτήριο τερματισμού : Σταμάτα.

Βήμα 3) Για ν = 1,..., N Υπολόγισε μια λύση $x^{k+1,\nu}$ του

$\min \theta_\nu (x^\nu , x^{k,-\nu})$ υπό τους περιορισμούς $x^\nu \in X_\nu (x^{k,-\nu})$.

Τέλος_επανάληψης

Βήμα 4) Θέσε $x^{k+1} := x^{k+1,1},..., x^{k+1,N}$. Πήγαινε στο Βήμα 2.

Σε κάθε επανάληψη k, ο αλγόριθμος πρέπει να λύσει N προβλήματα βελτιστοποίησης στο (Βήμα 3): Για κάθε $\nu \in \{1, ..., N\}$ η αντικειμενική συνάρτηση

$\theta\nu (x^{k, 1}, ..., x^{k, \nu-1}, x^\nu, x^{k, \nu+1}, ..., x^{k, N})$

πρέπει να ελαχιστοποιηθεί σε όλες τις $x^\nu \in X_\nu (x^{-\nu})$, ενώ όλες οι μεταβλητές μπλοκ

$x^{k, \mu}$ των άλλων παικτών $\mu \neq \nu$ είναι σταθερές. Ωστόσο, αυτή η έκδοση δεν χρησιμοποιεί τις νεότερες πληροφορίες, καθώς, κατά τον υπολογισμό x^ν, έχουμε ήδη τις νέες μεταβλητές $x^{k+1,1}, ..., x^{k+1, \nu-1}$ και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί για

$x^{k, 1}, ..., x^{k, \nu-1}$. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές με τις νέες τιμές τόσο στην θ_ν όσο και στα εφικτά σύνολα. Έτσι καταλήγουμε στην παρακάτω μέθοδο τύπου Gauss – Seidel.

3.1.2 Μέθοδος τύπου Gauss – Seidel

Βήμα1) Επέλεξε ένα σημείο εκκίνησης $x^0 =(x^{0,1}, ..., x^{0, N})$

και όριστε k: = 0.

Βήμα2) Εάν το x^k ικανοποιεί ένα κατάλληλο κριτήριο τερματισμού: Σταμάτα.

Βήμα 3) Για ν = 1, ..., N

Υπολόγισε μία λύση $x^{k+1, \nu}$ του

$\min \theta\nu (x^{k+1,1}, ..., x^{k+1, \nu-1}, x^\nu, x^{k, \nu+1}, ..., x^{k, N})$

s.t. $x^\nu \in X_\nu (x^{k+1,1}, ..., x^{k+1, \nu-1}, x^{k, \nu+1}, ... x^{k, N})$.

Τέλος_επανάληψης

Βήμα 4) Όρισε $x^{k+1}: = (x^{k+1,1}, ..., x^{k+1, N})$

$k \leftarrow k + 1$ και πήγαινε στο (Βήμα 2).

Αν και οι προηγούμενοι αλγόριθμοι είναι εννοιολογικά απλοί, οι ιδιότητες σύγκλισής τους δεν είναι καλά κατανοητές. Ακόμη και στην περίπτωση ενός τυπικού NEP, εάν ολόκληρη η ακολουθία $\{\mathbf{x}^k\}$ (υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει) η οποία δημιουργείται από κάποια από αυτές τις μεθόδους , συγκλίνει σε ένα σημείο $\bar{x}$, τότε το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας Nash του NEP. Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι απαραίτητα αληθές αν το $\bar{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης μιας τέτοιας ακολουθίας. Οι συνθήκες που εγγυώνται τη σύγκλιση ολόκληρης της ακολουθίας $\{ x^k \}$, συνήθως δεν είναι γνωστές ή είναι εξαιρετικά περιοριστικές. Η κατάσταση γίνεται ακόμη πιο περίπλοκη για τα GNEP όπου για να αποδειχθούν κατάλληλα αποτελέσματα σύγκλισης απαιτούνται πρόσθετες ιδιότητες περιορισμών. Σε ορισμένες εφαρμογές, ωστόσο, μπορεί να αποδειχθεί η σύγκλιση αυτών των μεθόδων βλ. Pang et al. (2007). Η ειδική περίπτωση στην οποία οι αντικειμενικές συναρτήσεις του GNEP δεν εξαρτώνται από τις μεταβλητές των άλλων παικτών αναλύονται στη δημοσίευση Facchinei et al. (2007c). Εκεί αποδεικνύεται ότι μία τροποποίηση της μεθόδου τύπου Gauss – Seidel από τον δεύτερο αλγόριθμο, όπου προστίθενται στις αντικειμενικές συναρτήσεις κάποιοι όροι έτσι ώστε τα υποπροβλήματα που λύωνται στο Βήμα 3 να γίνουν

$\min \theta\nu (x^{k+1,1}, ..., x^{k+1, \nu-1}, x^\nu, x^{k, \nu+1}, ..., x^{k, N})+ \tau^k \| x^\nu - x^{k, \nu} \|^2$

όπου $x^\nu \in X_\nu (x^{k+1,1}, ..., x^{k+1, \nu-1}, x^{k, \nu+1}, ... x^{k, N})$,

(όπου $\tau^k > 0$ και πιθανώς τείνει στο 0), έχει σημαντικές ιδιότητες σύγκλισης.

Μεταξύ άλλων, αν ισχύει η **υπόθεση της κυρτότητας**, κάθε σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας που παράγεται από τον δεύτερο αλγόριθμο είναι μια λύση του GNEP (δεν υπάρχει ανάγκη σύγκλισης ολόκληρης της αλληλουχίας). Οι μέθοδοι που περιγράφονται είναι απλές και εύκολες να εφαρμοστούν, και αυτό εξηγεί τη δημοτικότητά τους μεταξύ των επαγγελματιών.

3.2 Αριθμητικές Μέθοδοι επίλυσης GNEP

3.2.1 Ορισμοί και Θεωρήματα

Συνάρτηση Nikaido-Isoda

Η χαρτογράφηση

Ψ(x,y) : = $\sum_{i=1}^{N}[\theta_\nu(x^\nu, \boldsymbol{x}^{-\nu}) - [\theta_\nu(y^\nu, \boldsymbol{x}^{-\nu})]$.

Καλείται συνάρτηση Nikaido-Isoda (NI) ή συνάρτηση Ky Fan του GNEP.

Έστω ότι **x** και **y** είναι δύο εφικτά σημεία για το GNEP. Κάθε όρος του αθροίσματος αναπαριστά την βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση του παίκτη ν, όταν αλλάζει την επιλογή του από x^ν σε y^νκαθώς οι υπόλοιποι παίκτες παραμένουν στην επιλογή $x^{-\nu}$. Τα σημεία ισορροπίας του GNEP είναι αδύνατον να έχουν οποιαδήποτε βελτίωση για οποιαδήποτε εφικτή λύση y.

Ισοδύναμες διατυπώσεις του GNEP

Οι ισοδύναμες διατυπώσεις του GNEP εκτός του ότι καταφέρνουν να συνδέσουν το GNEP με άλλα πιο γνωστά προβλήματα, πολλές φορές γίνονται η βάση για την ανάπτυξη θεωριών και για αλγορίθμων.

Θεώρημα

Έστω Ψ η συνάρτηση NI του GNEP, ορίζουμε

$\mathbf{X}(\mathbf{x}) := \prod_{\nu=1}^{N} X_\nu(x^{-\nu})$, $\hat{V}(\mathbf{x}) := \sup_{y \in \boldsymbol{X}(x)} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Τότε

a) $\hat{V}(\boldsymbol{x}) \geq 0$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$.

b) $\hat{V}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$ και $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{x}})$ αν και μόνο αν $\bar{\boldsymbol{x}}$ είναι λύση του GNEP.

Το θεώρημα χαρακτηρίζει τις λύσεις του GNEP ως ένα σύνολο σημείων $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{x}})$ τέτοιο ώστε $0 = \hat{V}(\bar{\boldsymbol{x}}) \leq \hat{V}(\boldsymbol{x})$ για κάθε $x \in \boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{x}})$.

(Facchinei, F., & Kanzow, C. ,2010).

Θεώρημα

Δοθείσας της υπόθεσης κυρτότητας, έστω ένα GNEP, υποθέτουμε επίσης ότι οι αντικειμενικές συναρτήσεις θ_ν είναι C^1. Τότε ένα σημείο $\bar{\boldsymbol{x}}$ είναι σημείο γενικευμένης ισορροπίας Nash αν και μόνο αν είναι λύση της

QVI ($\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$, **F(x)), (Quasi-Variational Inequality**-Σχεδόν Παραλλαγή Ανισότητας). Ονομάζεται έτσι επειδή το σύνολο περιορισμών εξαρτάται από την στρατηγική ***x*.**

Το πρόβλημα QVI αποτελείται από την εύρεση ενός διανύσματος $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{x}})$ τέτοιου ώστε $(y - \bar{\boldsymbol{x}})^T \mathbf{F}(\bar{\boldsymbol{x}}) \geq 0$ για κάθε $y \in \boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{x}})$.

$\mathbf{X}(\mathbf{x}) := \prod_{\nu=1}^{N} X_\nu(x^{-\nu})$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (\nabla_{x^\nu}\theta_\nu(x))_{\nu=1}^{N}$

*Το $\bar{\boldsymbol{x}}$ (αν υπάρχει)είναι τέτοιο ώστε $\mathbf{F}(\bar{\boldsymbol{x}})$ είναι κάθετο στο σύνολο $\boldsymbol{X}(\bar{\boldsymbol{x}})$ στο $\bar{\boldsymbol{x}}$**.** Μία λύση του QVI , $\bar{\boldsymbol{x}}$ επιλύει ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης με περιορισμούς.

$\bar{\boldsymbol{x}} = \arg \max_{x \in \boldsymbol{X}(x)} \theta(x)$

Έφόσον υπάρχει αριθμητική μέθοδος επίλυσης QVI αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης με περιορισμούς που αναπαριστάται ως QVI. (Krawczyk, J. , 2007).

Συνθήκες KKT

Υποθέτοντας ότι το GNEP ορίζεται όπως στο (1) και τα σύνολα $X_\nu(x^{-\nu})$ δίνονται από $X_\nu(\boldsymbol{x}^{-\nu}) = \{x^\nu \in \mathbb{R}^\nu: g^\nu(x^\nu, \boldsymbol{x}^{-\nu}) \leq 0\}$ και όλες οι συναρτήσεις είναι C^1 μπορούμε να γράψουμε τις συνθήκες KKT για το πρόβλημα κάθε παίκτη. Η συνένωσή τους μας δίνει τις συνθήκες KKT του GNEP. Έστω $\bar{\boldsymbol{x}}$ μία λύση του GNEP , τότε για τον παίκτη ν , υπάρχει ένα διάνυσμα $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^\nu$ πολλαπλασιαστών έτσι ώστε οι κλασικές συνθήκες KKT $\nabla_{x^\nu} L_\nu(x^\nu, \bar{\boldsymbol{x}}^\nu, \lambda^\nu) = 0$

$0 \leq \lambda^\nu \perp -g^\nu(x^\nu, \boldsymbol{x}^{-\nu}) \geq 0$

να ικανοποιούνται από $(\bar{x}^\nu, \bar{\lambda}^\nu)$, όπου $L_\nu(\boldsymbol{x}, \lambda^\nu) := \theta_\nu(x) + \lambda^\nu \, g^\nu(\boldsymbol{x})^T$ η συνάρτηση Lagrange που σχετίζεται με το πρόβλημα βελτιστοποίησης του παίκτη ν. Συνενώνοντας αυτά τα Ν συστήματα καταλήγουμε στο ότι αν $\bar{\boldsymbol{x}}$ μία λύση του GNEP και αν ικανοποιείται ο κατάλληλος περιορισμός για όλους τους παίκτες, τότε υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in R^m$ που μαζί με το $\bar{x}$ ικανοποιεί το σύστημα.

$L(x, \lambda) = 0,$

$0 \leq \lambda \perp -g(x) \geq 0,$

όπου

$$\boldsymbol{\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \vdots \\ g^N(x) \end{pmatrix}, \text{ and } \mathbf{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} L_1(\boldsymbol{x}, \lambda^1) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} L_N(\boldsymbol{x}, \lambda^N) \end{pmatrix}.$$

(Facchinei, F., & Kanzow, C. ,2010).

Εναλλακτικός ορισμός GNEP

Θεωρούμε ένα κοίλο (concave) παίγνιο, δηλαδή, ένα παίγνιο στο οποίο οι n παίκτες έχουν συναρτήσεις αποδόσεων $(\varphi_i)_{i = 1, \dots n}$ συνεχείς στο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_n) \in X \subset R^m$ και κοίλες στο $x_i \in R^{mi}$, έτσι ώστε το σύνολο στρατηγικών X είναι ένα κυρτό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του R^m. Η λύση στο παίγνιο είναι ένα $\mathbf{x}^*$ που ικανοποιεί

$$\varphi_i(\mathbf{x}^*) = \max_{yi \mid \mathbf{x}* \in X} \varphi i\, (yi \mid \boldsymbol{x}^*) \quad (2)$$

όπου yi | **x**≡ $(x_1, x_2, \dots y_i, \dots x_n)$ δηλώνει μια συλλογή ενεργειών όταν ο i-στος παίκτης (ή πράκτορας-agent) «προσπαθεί» y_i ενώ οι υπόλοιποι πράκτορες παίζουν x_j, j = 1, 2, ... i - 1, i +1, ... ν. Στο $\mathbf{x}^*$ κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει τη δική του απόδοση με μονομερή αλλαγή στη στρατηγική του.

Το παίγνιο (2) θα ονομάζεται παίγνιο συζευγμένων περιορισμών (à la Rosen 1965). Το συζευγμένο αναφέρεται στο γεγονός ότι η δράση ενός παίκτη επηρεάζει τις πιθανές ενέργειες των άλλων παικτών. Στην ειδική περίπτωση όπου $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ δηλαδή, η δράση του κάθε παίκτη περιορίζεται ξεχωριστά, το παίγνιο λέγεται ότι έχει μη-συζευγμένους περιορισμούς (uncoupled constraints).

<u>Θεώρημα:</u> Υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας για κάθε κοίλο παιχνίδι n ατόμων.

Είναι γνωστό ότι εάν κάθε παίκτης έχει μια συνάρτηση απόδοσης που είναι συνεχής σε όλες τις δράσεις όλων των παικτών και κοίλη σε σχέση με τη δική του στρατηγική ενώ οι στρατηγικές των άλλων παικτών παραμένουν σταθερές, τότε το παιχνίδι πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας Nash.

Οι προϋποθέσεις για η μοναδικότητα αυτού του σημείου ισορροπόιας βασίζονται στην έννοια της διαγώνιας αυστηρής κοιλότητας (Diagonal Strict Concativity- **DSC**) της κοινής συνάρτησης απόδοσης (joint payoff function)

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{r} \in R_+^n \quad (3)$$

Το διάνυσμα **r** αποτελείται από τα βάρη r_i με τα οποία ένας ρυθμιστής αξιολογεί την απόδοση ενός μεμονωμένου πράκτορα (π.χ., από την άποψη της κοινότητας). Τα βάρη **r** βοηθούν τον ρυθμιστή να προσαρμόσει τα επίπεδα ευθύνης των παικτών για την ικανοποίηση του περιορισμού. Εάν όλοι οι παίκτες αντιμετωπίζονται ισότιμα, δηλαδή, το βάρος της ευθύνης του κάθε παίκτη κατανέμεται ομοιόμορφα, τότε r = [1 1 ...].

<u>Ορισμός</u> Η συνάρτηση κοινής απόδοσης $f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi_i(\mathbf{x}), \; \mathbf{r} \in R_+^n$ καλείται

διαγώνια αυστηρά κοίλη (DSC) για $\mathbf{x} \in X$ και σταθερό **r** εάν για κάθε $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$

έχουμε

$$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)' g(\mathbf{x}^1, \mathbf{r}) + (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)' g(\mathbf{x}^2, \mathbf{r}) > 0$$

όπου g (**x**, **r**) είναι η ψευδο-κλίση του

$$g(\mathbf{x},\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_1 \nabla_1 \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ r_n \nabla_n \varphi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Αυτός ο ορισμός βασίζεται στη διαφορισιμότητα των συναρτήσεων απόδοσης $\varphi_i(x)$, i = 1, ... ν. Για δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ένα κριτήριο για να είναι DSC είναι το παρακάτω:

Αν το Ιακωβιανό μητρώο του g (**x**, r) (ή, ισοδύναμα, το ψευδο-Εσσιανό μητρώο του f (**x**, **r**)) είναι απόλυτα αρνητικό.

Η οικονομική ερμηνεία του DSC εξηγείται ως εξής: Ένα παιχνίδι του οποίου η από κοινού συνάρτηση απόδοσης είναι DSC (ή, για συντομία, ένα παίγνιο που είναι DSC), είναι ένα παίγνιο κατά το οποίο κάθε παίκτης έχει μεγαλύτερο έλεγχο στη δική του απόδοση από ότι έχουν οι άλλοι παίκτες πάνω σε αυτή. Αυτό το χαρακτηριστικό συναντάται σε πολλά οικονομικά μοντέλα και είναι επιθυμητό. (Krawczyk, J. ,2007).

3.2.1 Αλγόριθμος του Rosen

Ο αλγόριθμος προβολής κλίσης του Rosen (1965) αποτελείται την ελαχιστοποίηση υπό περιορισμούς της νόρμας της ψευδο-κλίσης (pseudo-gradient)

$$\mathrm{g}(\mathbf{x},\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_1\nabla_1\varphi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ r_n\nabla_{\mathrm{n}}\varphi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Ο αλγόριθμος αναλύεται ως εξής:

Βήμα 1) Αρχή

Βήμα 2) Υπολόγισε τις ψευδο-κλίσεις των αποδόσεων στα εφικτά σημεία $\mathbf{x}^{(m)}$, όπου m είναι ο αριθμός της επανάληψης και j = 1, 2, ..., n:

$$\boldsymbol{\gamma}_j^{(m)} = r_j \cdot \nabla_j\varphi_j\,(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\,(m)}$$

Βήμα 3) Κάνε ένα βήμα προς την κατεύθυνση της ψευδο-κλίσης

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \kappa^{(m)}\boldsymbol{\gamma}^{(m)}$$

όπου κ(m) είναι τέτοιο ώστε το x (m + 1) επιτυγχάνει είτε τον πρώτο ενεργό περιορισμό είτε η νόρμα της ψευδο-κλίσης ελαχιστοποιείται.

Επανάλαβε τα (Βήμα 2) και (Βήμα 3) έως ότου η νόρμα της ψευδο-κλίσης είναι αρκετά μικρή.

Βήμα 4) Προσδιόρισε τους πολλαπλασιαστές Karush-Kuhn-Tucker.

Όπως και για κάθε αλγόριθμο κλίσης, η σύγκλιση του αλγορίθμου του Rosen εξαρτάται από την κοιλότητα της βασικής συνάρτησης (εδώ, για την από κοινού απόδοση f ($\mathbf{x}$, $\mathbf{r}$) (joint payoff), βλ. (3)). Για παιχνίδια που είναι DSC, η σύγκλιση είναι γρήγορη και αξιόπιστη. (Krawczyk, J. 2007).

3.2.3 Η προσέγγιση NIRA

Το NIRA είναι το ακρωνύμιο που χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει μια μέθοδο αναζήτησης ισορροπίας με βάση τη συνάρτηση (δύο μεταβλητών) Nikaido – Isoda και έναν αλγόριθμο χαλάρωσης (Relaxation Algorithm).Η ελαχιστοποίηση/μεγιστοποίηση αυτής της συνάρτησης μπορεί να προσφέρει μια λύση σε ένα παίγνιο συζευγμένων περιορισμών (GNEP).

Οι συνθήκες σύγκλισης του αλγορίθμου δεν βασίζονται στην ομαλότητα των συναρτήσεων απόδοσης. Ωστόσο, εάν οι συναρτήσεις απόδοσης είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες, η επαλήθευση της σύγκλισης γίνεται πολύ πιο εύκολη. Επιπλέον, για τέτοια ομαλά παίγνια, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η μέθοδος NIRA συγκλίνει σε ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας Nash συνεπάγεται την διαγώνια αυστηρή κοιλότητα του παιγνίου. Αυτό σημαίνει ότι εάν το παίγνιο ικανοποιεί τις συνθήκες για τη σύγκλιση της μεθόδου NIRA και ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει, τότε το σημείο σύγκλισης είναι είναι σημείο συζευγμένης ισορροπίας με περιορισμούς (λύση του GNEP). Επιπλέον, η μέθοδος NIRA χρησιμοποιεί τους πολλαπλασιαστές Lagrange ως βασικό μέρος της διαδικασίας λύσης.

Το NIRA χρησιμοποιήθηκε στις δημοσιεύσεις Berridge and Krawczyk (1997), Contreras et al. (2004) και Krawczyk και Uryasev (2000) για τη λύση πολλών άπειρων παιγνίων με ποικίλη πολυπλοκότητα. Στην δημοσίευση Krawczyk (2005) επιλύθηκε ένα δυναμικό παίγνιο ανοιχτού βρόχου River Pollution μέσω του NIRA. Στο συγκεκριμένο άρθρο, αναλύονται θέματα διοίκησης και οικονομικών μιας διαδικασίας μετάβασης, από μια κατάσταση μολυσμένου περιβάλλοντος σε μία κατάσταση κατά την οποία οι παίκτες συμμορφώνονται με τα πρότυπα

Παρακάτω παρουσιάζεται η συνάρτηση Nikaido – Isoda (βλ. Nikaido και Isoda 1955). Αυτή η συνάρτηση μετατρέπει ένα πρόβλημα ισορροπίας σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. (Krawczyk, J.,2007).

Συνάρτηση Nikaido–Isoda (με βάση τον ορισμό (2) του GNEP)

Αν φ_i η συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i , τότε η *συνάρτηση Nikaido–Isoda* $\Psi : (X_1 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times \cdots \times X_n) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}[\varphi_i(y_i|\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{x})]. \quad (4)$$

Σύμφωνα με τους Uryasev και Rubinstein (1994) είναι επακόλουθο του ορισμού ότι

Ψ (**x**, **x**) ≡ 0 **x** ∈ X. (5)

Κάθε όρος του αθροίσματος μπορεί να θεωρηθεί ως η βελτίωση της απόδοσης που θα λάβει ένας παίκτης με αλλαγή της δράσης του από x_i σε y_i, ενώ όλοι οι άλλοι οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν σύμφωνα με το **x**. Η συνάρτηση αντιπροσωπεύει έτσι το άθροισμα αυτών των βελτιώσεων στην απόδοση. Σημειώστε ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει αυτή η συνάρτηση για ένα δεδομένο **x** είναι πάντα μη αρνητική, σύμφωνα με το συμπέρασμα (5). Επίσης, η συνάρτηση είναι μη-θετική παντού όταν είτε το x είτε το y είναι ένα σημείο ισορροπίας Nash, καθώς σε μία κατάσταση ισορροπίας κανένας παίκτης δεν μπορεί να κάνει μονομερή βελτίωση στην απόδοσή του, και έτσι κάθε όρος του αθροίσματος σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να είναι το πολύ μηδέν.

Όταν η συνάρτηση Nikaido – Isoda δεν μπορεί να γίνει (σημαντικά) θετική για ένα δεδομένο y, έχουμε (περίπου) φτάσει στο σημείο ισορροπίας Nash. Αυτή η παρατήρηση είναι χρήσιμη στην κατασκευή μια συνθήκης τερματισμού για τον αλγόριθμό, δηλαδή, επιλέγετε ένα ε> 0 έτσι ώστε, όταν $\max_{y\in X}$ Ψ($\mathbf{x}^s$, **y**) <ε, όπου x^s∈ X υπολογίζεται στην τρέχουσα επανάληψη s, τότε η ισορροπία έχει επιτευχθεί σε επαρκή βαθμό ακρίβειας. (Krawczyk, J. ,2007).

Σημείο κανονικοποιημένης ισορροπίας Nash

Ένα σημείο **x***∈ X ονομάζεται σημείο κανονικοποιημένης ισορροπίας Nash αν

$$\max_{(x_i|\boldsymbol{x}^*)\in X} \Psi(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{y}) = 0\,.$$

<u>Λήμμα 1</u> Ένα κανονικοποιημένο σημείο ισορροπίας Nash είναι επίσης σημείο ισορροπίας Nash.

<u>Λήμμα 2</u> Ένα σημείο ισορροπίας Nash είναι ένα κανονικοποιημένο σημείο ισορροπίας Nash εάν το σύνολο συλλογικής δράσης X ικανοποιεί

X = X1 × ⋯ × Xn, Xi ⊂ R^{mi}.

Ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση Nikaido – Isoda για τον υπολογισμό της κανονικοποιημένης ισορροπία Nash αναλύεται παρακάτω. Λόγω του λήμματος 1, το σημείο που υπολογίζεται, είναι προφανώς σημείο ισορροπίας Nash. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου θέλουμε να προχωρήσουμε προς ένα σημείο που είναι «βελτιωμένο» σε σχέση με αυτό που είμαστε. Για το σκοπό αυτό, παρουσιάζεται ο ακόλουθος ορισμός.

Η βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης (optimum response function)

Η βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης στο σημείο **x** είναι

$Z(x) = \arg\max_{y\in X} \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{y})$, **x** , Z(**x**) ∈ X.

Εν συντομία, η συνάρτηση επιστρέφει το σύνολο των στρατηγικών των παικτών, όταν όλοι επιχειρούν μονομερώς να μεγιστοποιήσουν τις αποδόσεις τους. (Krawczyk, J.B. & Uryasev, S. , 2000).

<u>Ορισμός</u> Έστω το X να είναι ένα κυρτό υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^m$. Μια συνεχής συνάρτηση f: X → R καλείται ***ασθενώς κυρτή*** (weakly convex) στο X εάν για όλα τα **x** ∈ X, **y** ∈ X, $0 \le a \le 1$ ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

αf (**x**) + (1 - α) f (**y**) ≥ f (α**x** + (1 - α) **y**) + α (1 - α) r (**x**, **y**),

όπου το υπόλοιπο r: X × X → $\mathbb{R}$ ικανοποιεί

$\frac{r\,(x,y)}{||x-y||} \to 0$, καθώς **x** → **z**, **y** → **z**,

για όλα τα **z** ∈ X.

<u>Ορισμός.</u> Μια συνάρτηση f (x) ονομάζεται ***ασθενώς κοίλη*** (weakly concave) στο X εάν η συνάρτηση −f (x) είναι ασθενώς κυρτή στο X. Έστω Ψ: X × X → R να είναι μια συνάρτηση που ορίζεται σε ένα γινόμενο X × X, όπου το X είναι ένα κυρτό κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδη space Rm. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η Ψ (x, z) είναι ασθενώς κυρτή στο X σε σχέση με το πρώτο όρισμα, δηλαδή,

α**Ψ** (**x**, **z**) + (1 - α) **Ψ** (**y**, **z**)> **Ψ** (α**x** + (1 - α) **y**, **z**) + α (1 - α) r_z (**x**, **y**) (6)

για όλα τα **x**, **y**, **z** ∈ X, $0 \le a \le 1$ και

$\frac{r_z\,(x,y)}{||x-y||} \to 0$, καθώς ||**x** – **y**|| → 0, για όλα τα **z** ∈ X.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση **Ψ** (**z**, **y**) είναι ασθενώς κοίλη σε σχέση με το δεύτερο όρισμα σχετικά με το X, δηλαδή,

$\alpha\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + (1 - \alpha)\, \mathbf{\Psi}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{\Psi}(\mathbf{z}, \alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\, \mathbf{y}) + \alpha(1 - \alpha)\, \mu_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7)$

για όλα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, $0 \leq a \leq 1$, και επίσης

$\frac{\mu_Z(\mathbf{x},\mathbf{y})}{||\mathbf{x} - \mathbf{y}||} \to 0$ καθώς $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \to 0$, για όλα τα $\mathbf{z} \in X$.

Ορισμός Η συνάρτηση $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ αναφέρεται ως ασθενώς κυρτή-κοίλη, εάν πληροί τις προϋποθέσεις (6) και (7).

(Krawczyk, J.B. & Uryasev, S., 2000).

3.2.4 Αλγόριθμος χαλάρωσης (Relaxation Algorithm)

Ο αλγόριθμος χαλάρωσης δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$\mathbf{x}^{s+1} = (1 - \alpha_s)\mathbf{x}^s + \alpha_s Z(\mathbf{x}^s), \qquad s = 0, 1, 2, ...,$

όπου $0 < \alpha_s \leq 1$. Η επανάληψη στο βήμα s + 1 κατασκευάζεται ως σταθμισμένος μέσος όρος του σημείου βελτίωσης $Z(\mathbf{x}^s)$ και του τρέχοντος σημείου $\mathbf{x}^s$. Αυτός ο μέσος όρος εξασφαλίζει τη σύγκλιση του αλγορίθμου κάτω από ορισμένες συνθήκες.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τον αλγόριθμο είτε εκτελώντας στατική βελτιστοποίηση είτε υπολογίζοντας διαδοχικές ενέργειες παικτών που συγκλίνουν σε σημείο ισορροπίας με μια διαδικασία σε πραγματικό χρόνο. Εάν όλες οι αποδόσεις είναι γνωστές, μπορούμε να βρούμε απευθείας την ισορροπία Nash χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμος χαλάρωσης. Ωστόσο, εάν έχουμε πρόσβαση μόνο στη συνάρτηση απόδοσης ενός παίκτη και τις προηγούμενες ενέργειες όλων των παικτών, τότε σε κάθε στάδιο της διαδικασίας σε πραγματικό χρόνο επιλέγουμε τη βέλτιστη απόκριση για αυτόν τον παίκτη, υποθέτοντας ότι οι άλλοι παίκτες θα παίξουν όπως είχαν στην προηγούμενη περίοδο. Με αυτόν τον τρόπο, η σύγκλιση στο σημείο κανονικοποιημένης ισορροπία Nash θα εμφανιστεί ως $s \to \infty$. Κάνοντας αρκετές επαναλήψεις του αλγορίθμου, στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε το σημείο ισορροπίας Nash $\mathbf{x}^*$ με καθορισμένη ακρίβεια.

Συνθήκες για την ύπαρξη ισορροπίας Nash και σύγκλιση του αλγορίθμου χαλάρωσης

Οι προϋποθέσεις που ακολουθούν μπορεί να φαίνονται αρκετά περιοριστικές, αλλά στην πραγματικότητα μια μεγάλη κατηγορία παιγνίων τις ικανοποιεί. Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει τις συνθήκες σύγκλισης για τον αλγόριθμο χαλάρωσης.

Θεώρημα Υπάρχει ένα μοναδικό κανονικοποιημένο σημείο ισορροπίας Nash στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος χαλάρωσης εάν:

(1) Το X είναι ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο $\mathbb{R}^m$,

(2) η συνάρτηση Nikaido – Isoda $\mathbf{\Psi}: X \times X \to R$ είναι ασθενώς κυρτή-κοίλη συνάρτηση και $\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ για $\mathbf{x} \in X$,

(3) η βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης $Z(\mathbf{x})$ έχει μοναδική τιμή και είναι συνεχής στο X,

(4) ο όρος $r_z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X ως προς το z για όλα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,

(5) ικανοποιούνται οι υπόλοιποι όροι

$r_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mu_x(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq \beta(\|x - y\|)$, $x, y \in X$,

όπου $\beta(0)=0$ και β γνησίως αύξουσα συνάρτηση (δηλ. $\beta(t_2) > \beta(t_1)$ αν $t_2 > t_1$)

(6) οι παράμετροι χαλάρωσης ικανοποιούν τις

(α) $\alpha_s > 0$,

(β) $\sum_{s=0}^{\infty} a_s = \infty$,

(c) $\alpha_s \to 0$ καθώς $s \to \infty$.

Το κυρτό σύνολο X μπορεί να αντιπροσωπεύει συζευγμένους περιορισμούς και η πέμπτη προϋπόθεση μπορεί να ικανοποιηθεί σε περίπτωση μη-διαφορήσιμων συναρτήσεων απόδοσης.

3.2.5 Ο αλγόριθμος χαλάρωσης με βελτιστοποιημένο μέγεθος βήματος

Για να συγκλίνει ο αλγόριθμος, μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε ακολουθία $\{\alpha_s\}$ που ικανοποιεί την τελευταία συνθήκη του θεωρήματος για τη σύγκλιση του αλγορίθμου χαλάρωσης. Ωστόσο, έχει υπολογιστική σημασία η προσπάθεια βελτιστοποίησης ταχύτητας σύγκλισης. Τα κατάλληλα μεγέθη βημάτων μπορούν να ληφθούν με τη μέθοδο “trial and error” (δοκιμή και σφάλμα), έχει βρεθεί ότι η χρήση ενός σταθερού βήματος $\alpha_s \equiv 0,5$ οδηγεί σε γρήγορη σύγκλιση στη πλειοψηφία των πειραμάτων .

Σε αυτήν την περίπτωση, το α_s μπορεί να θεωρηθεί σταθερό έως ότου επιτευχθούν οι συνθήκες σύγκλισης, και στη συνέχεια αποσυντίθεται με παράγοντες $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\ldots$

Ορισμός Ας υποθέσουμε ότι φτάνουμε στο $\mathbf{x}^*$ στην επανάληψη s.

Τότε a_s^* είναι βέλτιστο μονού βήματος (*one-step optimal*). Το s είναι one-step optimal εάν ελαχιστοποιεί τη βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης στο $\mathbf{x}^{s+1}$. Δηλαδή, εάν

$a_s^* = \arg \min_{a \in [0,1)} \{\max_{y \in X} \boldsymbol{\Psi}(x^{s+1}(a), \boldsymbol{y})\}$.

Για τη σύγκλισης του αλγορίθμου με βελτιστοποιημένο μέγεθος βήματος είναι αναγκαίο να ικανοποιούνται οι προηγούμενες συνθήκες σύγκλισης μόνο που αντί για την τελευταία θα πρέπει να ισχύει

$a_s^* = \arg \min_{a \in [0,1)} \{\max_{y \in X} \boldsymbol{\Psi}(x^{s+1}(a), \boldsymbol{y})\}$.

Εννοείται ότι θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιήσουμε βελτιστοποίηση δύο βημάτων, ή ακόμη και n βημάτων. Ωστόσο, η χρήση οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερου από το ένα θα είχε μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Διαπιστώνεται ότι η βελτιστοποίηση ενός βήματος οδηγεί σε μικρότερο αριθμό επαναλήψεων, αλλά σε κάθε βήμα της επανάληψης χρειάζεται περισσότερος χρόνος από ότι θα χρειαζόταν αν χρησιμοποιούνταν σταθερά μεγέθη βημάτων. (Berridge, S., & Krawczyk, J. B. ,1997).

Σε ένα παράδειγμα χρήσης του αλγορίθμου χαλάρωσης στο αρθρο Krawczyk, J.B. & Uryasev, S. (2000). εξετάζεται το πρόβλημα “River Basin Pollution Game” που αφορά τη ρύπανση της λεκάνης απορροής ενός ποταμού. Τα αριθμητικά πειράματα που αναφέρονται, διεξήχθησαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό όπως MATHEMATICA και MATLAB. Το συγκεκριμένο πρόβλημα επιλέχθηκε στη μελέτη διότι μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα γενικό παράδειγμα του τρόπου διασφάλισης περιβαλλοντικής συμμόρφωσης των παικτών. Για την επίλυση αυτού του παιγνίου με συζευγμένους περιορισμούς χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος χαλάρωσης. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange αξιοποιούνται ως φόροι, με σκοπό να υποχρεωθούν οι παίκτες να περιορίσουν τις ρυπογόνες δραστηριότητές τους. Στο παίγνιο “River Basin Pollution Game”, θεωρούνται τρεις παίκτες, j = 1, 2, 3, οι οποίοι βρίσκονται κατά μήκος ενός ποταμού. Κάθε πράκτορας ασχολείται με μια οικονομική δραστηριότητα, όπως για παράδειγμα παραγωγή χαρτοπολτού, σε ένα επιλεγμένο επίπεδο x_j. Οι παίκτες πρέπει να ικανοποιούν τις περιβαλλοντικές συνθήκες που έχουν οριστεί από την τοπική αρχή. Οι ρύποι είναι δυνατό να αποβληθούν στον ποταμό. Οι δύο σταθμοί παρακολούθησης, l = 1, 2, βρίσκονται κατά μήκος του ποταμού, ώστε η τοπική αρχή να ελέγχει τις δραστηριότητές των πρακτόρων. Η τοπική αρχή έχει ορίσει τα μέγιστα επίπεδα συγκέντρωσης ρύπων. Στο παίγνιο οι πράκτορες επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη, αποφασίζουν τις δράσεις τους, οι οποίες έχουν συζευγμένους περιορισμούς.

Για τον υπολογισμό της ισορροπίας Nash στο παίγνιο, αξιοποιείται ο αλγόριθμος χαλάρωσης με βελτιστοποιημένο μέγεθος βήματος. Η χρήση του αλγορίθμου με βελτιστοποιημένο μέγεθος βήματος, επέφερε ως αποτέλεσμα έναν πολύ μικρότερο αριθμό επαναλήψεων για τη σύγκλιση. Ωστόσο, ο χρόνος υπολογισμού μιας επανάληψης εξαρτάται από την αποτελεσματικότητα της μεθόδου ελαχιστοποίησης. Σε μερικές περιπτώσεις, η μέθοδος ελαχιστοποίησης ήταν αναποτελεσματική, καθώς οι συνολικοί χρόνοι υπολογισμού κοντά σε αυτούς του αλγόριθμου χαλάρωσης με το σταθερό βήμα. Τα αριθμητικά πειράματα απέδειξαν ο αλγόριθμος χαλάρωσης είναι ένα αποτελεσματικό υπολογιστικό εργαλείο για την επίλυση της συζευγμένης ισορροπίας Nash.

3.2.6 Μέθοδοι ποινών (Penalty Methods)

Μια άλλη ιδέα για την βελτιστοποίηση με περιορισμούς είναι να απαλλαγούμε από τους περίπλοκους συζευγμένους περιορισμούς σε ένα GNEP και να λύσουμε ένα τυπικό NEP προσθέτοντας τους κοινούς περιορισμούς ως όρο ποινής στην αντικειμενική συνάρτηση κάθε παίκτη. Αυτή η προσέγγιση υποστηρίχθηκε για πρώτη φορά στο (Fukushima and Pang 2005). Παρόμοιες αναφορές αλλά για τη μέθοδο της διαδοχικής ποινής στους Fukushima and Pang (2005), με τη διαφορά ότι σε αυτήν την τελευταία περίπτωση τα προβλήματα που τους επιβάλλονται οι ποινές είναι διαφορίσιμα, αλλά η παράμετρος ποινής πρέπει να φτάσει στο άπειρο για να υπάρξει σύγκλιση.

Για αυτές τις μεθόδους, δεν υπάρχει αρκετή πρακτική εμπειρία. Οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για τη σύγκλιση των μεθόδων ποινής δεν φαίνονται πολύ ισχυρές. Επίσης δύσκολο να συγκριθούν με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στις μεθόδους που περιγράφονται στις προηγούμενες υποενότητες.

3.2.7 Μέθοδοι που βασίζονται σε Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις (Ordinary Differential Equations-ODE)

Υπάρχει η δυνατότητα να χαρακτηριστούν οι λύσεις των GNEP ως στάσιμα σημεία ενός συγκεκριμένου συστήματος συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων (για συντομία ODE). Χρησιμοποιώντας τυπικούς χαρακτηρισμούς για λύσεις μεταβλητής ανισότητας (VI(**X**,**F**)), προκύπτει ότι μια μεταβλητή είναι λύση του GNEP εάν και μόνο εάν ικανοποιεί την εξίσωση σταθερού σημείου $\mathbf{x} = P_X(\mathbf{x} - \gamma\, \mathbf{F}(x))$

για κάποια σταθερή παράμετρο $\gamma > 0$.

Άλλες προσεγγίσεις ODE, πάντα υπό αρκετά αυστηρές υποθέσεις κυρτότητας/μονοτονίας, δίνονται στο έγγραφο του Rosen (1965), το οποίο βασίζεται στις συνθήκες KKT, στο Flåm (1993) και στο Cavazzuti et al (2002)

3.2.8 Μέθοδοι Newton

Όλες οι μέθοδοι έχουν εξετάσει μέχρι τώρα είναι γενικές μέθοδοι, δηλαδή έχουν σχεδιαστεί για να συγκλίνουν σε μια λύση όταν το σημείο εκκίνησης είναι πιθανότατα πολύ μακριά από την ίδια τη λύση.

Το πρωτότυπο ενός τοπικού αλγορίθμου είναι προφανώς η μέθοδος του Νεύτωνα που παρουσιάζει έναν υπερ -γραμμικό/τετραγωνικό ρυθμό σύγκλισης. Η επέκταση αυτής της μεθόδου για το GNEP έχει ερευνηθεί στο άρθρο (Facchinei et al 2007b, Pang 2002).

3.3 Πρόβλημα Βελτιστοποίησης ελέγχου ισχύος πολλαπλών χρηστών

Μέχρι τώρα το κλασικό μοτίβο για τη μελέτη του GNEP ήταν: (α) εξετάστε ένα GNEP (β) να το μετατρέψετε σε άλλο, καλύτερο κατανοητό, πρόβλημα (γ) εφαρμόστε για το τελευταίο πρόβλημα ορισμένα γνωστά αποτελέσματα. Δυστυχώς, αυτή η κλασική προσέγγιση είχε κάπως περιορισμένη επιτυχία. Ο κύριος λόγος είναι ότι από τη στιγμή που οι επιβεβλημένοι περιορισμοί στο μετασχηματισμένο πρόβλημα , επιβάλλονται στο αρχικό πρόβλημα, αποδεικνύονται να είναι εξαιρετικά απαιτητικοί ή δύσκολης ερμηνείας. Ένας άλλος τρόπος είναι η μελέτη προβλήματων με ειδικές δομές που προκύπτουν από κάποιες πραγματικές εφαρμογές. Αυτό έχει ήδη γίνει για ορισμένες από τις πρόσφατες εφαρμογές των GNEP, ιδίως εκείνων που προέρχονται από εφαρμογές ιστού και τηλεπικοινωνιών.

Λόγω του χαμηλού κόστους υποδομής και της υψηλής ταχύτητας επικοινωνίας δεδομένων, η τεχνολογία ψηφιακής συνδρομητικής γραμμής (DSL) είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για ευρυζωνική πρόσβαση στο διαδίκτυο. Στο DSL, ο έλεγχος ισχύος του σχεδιασμού συστημάτων επικοινωνίας πολλαπλών χρηστών περιορισμένων παρεμβολών είναι ένα σημαντικό ζήτημα και έχει επίσης προσελκύσει σημαντικά την προσοχή τόσο στον ακαδημαϊκό χώρο όσο και στη βιομηχανία. Ο έλεγχος ισχύος αναφέρεται αναγκάζοντας κάθε χρήστη να μεταδώσει αρκετή ισχύ έτσι ώστε να μπορεί να επιτύχει την απαιτούμενη ποιότητα χωρίς να προκαλεί περιττές παρεμβολές άλλους χρήστες σε αυτά τα συστήματα.

Στο DSL, ο έλεγχος ισχύος πολλαπλών χρηστών είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης (Multiuser Power Control Optimization Problems - MPCOP) και ένας τυπικός τρόπος μέτρησης της παραγωγικότητας του συστήματος είναι το άθροισμα των τιμών όλων των χρηστών. (Cendrillon, Moonen, Verliden, Bostoen, & Yu, 2004; Cherubini, Eleftheriou, & Olcer, 2000; Song, Chung, Guinness & Cioffi, 2002).

Δυστυχώς, σε αυτό το πλαίσιο, το πρόβλημα βελτιστοποίησης για τη μεγιστοποίηση του αθροίσματος των τιμών είναι μη-κυρτό με πολλές τοπικές λύσεις (Song et al., 2002). Μια μέθοδος που ήταν πολύ επιτυχής στην επίλυση του ελέγχου ισχύος πολλαπλών χρηστών είναι προσέγγιση της θεωρίας παιγνίων. Οι Yu, Ginis και Cioffi (2002) θεώρησαν το πρόβλημα ελέγχου ισχύος πολλαπλών χρηστών σε ένα κανάλι παρεμβολής επιλεκτικής συχνότητας, μη-συνεργατικό παίγνιο και η παρατήρηση κλειδί του είναι ότι ο ρυθμός δεδομένων κάθε χρήστη DSL είναι μια κοίλη συνάρτηση του δικού του διανύσματος φάσματος ισχύος, όταν τα διανύσματα ισχύος των παρεμβολών των χρηστών είναι σταθερά.

Οι Luo και Pang (2006) παρουσίασαν μια σύγκλιση ανάλυσης επαναληπτικού αλγορίθμου πλήρωσης νερού (Iterative Waterfilling Algorithm - IWFA) με πιο ρεαλιστικό πλαίσιο ρυθμίσεων καναλιού και για αυθαίρετο αριθμό χρηστών. Στο συγκεκριμένο άρθρο οι συγγραφείς επαναδιατυπώνουν το παίγνιο DSL Nash (που προκύπτει από τη διανεμημένη εφαρμογή του IWFA) ως ένα ισοδύναμο πρόβλημα μικτής γραμμικής συμπληρωματικότητας (Linear Complementarity Problem - LCP) και εφαρμόζουν την υπάρχουσα θεωρία για το LCP για την ανάλυση της συμπεριφορά σύγκλισης του IWFA. Η ανάλυσή αυτή όχι μόνο ενισχύει σημαντικά τα υπάρχοντα αποτελέσματα σύγκλισης, αλλά επίσης αποφέρει ξεκάθαρη εικόνα για το IWFA. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των συμμετρικών παρεμβολών, οι χρήστες του IWFA συνεργάζονται στην πράξη εν αγνοία τους για να ελαχιστοποιήσουν ένα κοινό τετραγωνικό κόστος, παρόλο που η αρχική τους πρόθεση είναι να μεγιστοποιήσουν το ατομικό τους ποσό.

Στην εφαρμογή βελτιστοποίησης ελέγχου ισχύος πολλαπλών χρηστών προβλήματα MPCOP, συχνά χρειάζονται λύσεις σε πραγματικό χρόνο. Ωστόσο, οι κλασικές μέθοδοι βελτιστοποίησης δεν είναι κατάλληλες για προβλήματα με πολλές διαστάσεις (χαρακτηριστικά) ή αυστηρή απαίτηση χρόνου υπολογισμού. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η ουσία της βελτιστοποίησης μέσω νευρωνικών δικτύων έγκειται στην εγγενή φύση της παράλληλης και κατανεμημένης επεξεργασίας πληροφοριών και της διαθεσιμότητας υλοποίησης hardware (υλικού). (Hopfield & Tank, 1985; Tank & Hopfield, 1986).

Από το έργο των Hopfield και Tank, υπήρξε ενδιαφέρον για τη διερεύνηση της θεωρίας, της μεθοδολογίας και των εφαρμογών επαναλαμβανόμενων νευρωνικών δικτύων (Recurrent Neural Network - RNN) για βελτιστοποίηση. Με βάση τις συναρτήσεις ποινών (penalty functions), τις συναρτήσεις Lagrange και τις πρωτογενής και διπλές συναρτήσεις, αναπτύχθηκαν πολλά νευρωνικά δίκτυα για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων βελτιστοποίησης και αυτά τα νευρωνικά δίκτυα βελτίωσαν την απόδοση σε επίπεδο ολικής σύγκλισης και παράλληλης υπολογιστικής υλοποίησης.

Οι He & Li, (2014) με κίνητρο την αποτελεσματικότητα και αποδοτικότητα του μέθοδο βελτιστοποίησης νευρωνικών δικτύων, προσπάθησαν να λύσουν το MPCOP χρησιμοποιώντας προσέγγιση νευρωνικού δικτύου. Σε σύγκριση με πολλούς αλγόριθμους, η συμβολή τους είναι ο σχεδιάσμός νευρωνικού δικτύου για την επίλυση του προβλήματος ελέγχου ισχύος πολλαπλών χρηστών. Διαμέσου της εφαρμογής της μεθόδου, οι συνθήκες βελτιστοποίησης Karush – Kuhn – Tacker της επίτευξης ισορροπίας Nash ανταγωνιστικού παιγνίου, η οποία προκύπτει από το MPCOP, αναδιατυπώνεται ως ένα ισοδύναμο πρόβλημα LCP. Με βάση το LCP, προτείνεται ένα νευρωνικό δίκτυο προβολής για την επίλυση του παιγνίου ισορροπίας Nash.

Αξιοποιώντας τη θεωρία συνάρτησης Lyapunov, φαίνεται ότι το προτεινόμενο νευρωνικό δίκτυο είναι σταθερό στη συνάρτηση Lyapunov και συγκλίνει εξ ολοκλήρου σε σύνολα ισορροπίας Nash, ενώ υπό συγκεκριμένες συνθήκες, αποδεικνύεται πως το προτεινόμενο νευρωνικό δίκτυο συγκλίνει εξ ολοκλήρου σε μοναδικό σημείο ισορροπίας Nash. Επίσης τα αποτελέσματα προσομοίωσης σε αριθμητικά παραδείγματα αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητα και την απόδοση επαναλαμβανόμενου νευρωνικού δικτύου (Recurrent Neural Network - RNN), για την επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης ελέγχου ισχύος πολλαπλών χρηστών MPCOP.

4. Προσεγγίσεις για βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών με προσδιορισμό ενός συνόλου βέλτιστων λύσεων Pareto

Υπάρχουν δύο γενικές προσεγγίσεις για βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων.

- Η πρώτη προσέγγιση είναι ο συνδυασμός όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων σε μία σύνθετη συνάρτηση ή η μετακίνηση όλων των αντικειμενικών συναρτήσεων πλην μίας, στο σύνολο περιορισμών. Στην πρώτη περίπτωση, ο προσδιορισμός μίας μοναδικής αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατός με μεθόδους όπως θεωρία χρησιμότητας, μέθοδος σταθμισμένου αθροίσματος, κ.λπ., αλλά το πρόβλημα έγκειται στην σωστή επιλογή των βαρών ή των συναρτήσεων χρησιμότητας για να περιγραφούν οι προτιμήσεις του λήπτη αποφάσεων. Στην πράξη, αυτοί οι προσδιορισμοί είναι δύσκολο να γίνουν σωστά και με ακρίβεια, ακόμη και για κάποιον πολύ οικείο με το πεδίο του προβλήματος. Αυτό είναι το μειονέκτημα ότι απαιτείται κλιμάκωση μεταξύ των αντικειμενικών συναρτήσεων, επίσης μικρές διαταραχές στα βάρη μπορεί μερικές φορές να οδηγήσουν σε αρκετά διαφορετικές λύσεις. Στην δεύτερη περίπτωση, το πρόβλημα είναι ότι για να μετακινηθούν οι αντικειμενικές συναρτήσεις στο σύνολο περιορισμών, για κάθε μία από αυτές τις πρώην αντικειμενικές πρέπει να καθοριστεί μία περιοριστική τιμή. Αυτό μπορεί να είναι αυθαίρετο. Και στις δύο περιπτώσεις, μια μέθοδος βελτιστοποίησης θα επέστρεφε μια μεμονωμένη λύση και όχι ένα σύνολο από λύσεις που μπορούν να εξεταστούν. Για αυτόν τον λόγο, οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων προτιμούν συχνά ένα σύνολο καλών λύσεων λαμβάνοντας υπόψη τους τις πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις.

- Η δεύτερη γενική προσέγγιση είναι ο προσδιορισμός ενός συνόλου βέλτιστων λύσεων Pareto (Pareto optimal set) ή ενός αντιπροσωπευτικού υποσυνόλου.Το σύνολο βέλτιστων λύσεων Pareto ένα σύνολο λύσεων που δεν είναι κυρίαρχες η μία της άλλης. Κατά την μετακίνηση από τη μία λύση Pareto στην άλλη, υπάρχει πάντα ένα συγκεκριμένο ποσό που «θυσιάζεται» σε μία ή περισσότερες αντικειμενικές συναρτήσεις για την επίτευξη ενός ορισμένου ποσού κέρδους στις άλλες. Τα σύνολα βέλτιστων λύσεων Pareto προτιμούνται συχνά περισσότερο από τις μεμονωμένες λύσεις επειδή μπορεί να είναι πιο πρακτικά όταν εξετάζονται προβλήματα στην πραγματική ζωή, αφού η τελική λύση του λήπτη αποφάσεων προκύπτει από μια ανταλλαγή. Τα βέλτιστα σύνολα Pareto μπορούν να έχουν ποικίλα μεγέθη, αλλά το μέγεθος του συνόλου Pareto συνήθως αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού των αντικειμενικών συναρτήσεων.

4.1 Ορισμοί

Διαμόρφωση πολύ-αντικειμενικής βελτιστοποίησης

Έστω κάποιος υπεύθυνος για τη λήψη αποφάσεων, που επιθυμεί να βελτιστοποιήσει K αντικειμενικές συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι ανάλογες (οι συντελεστές είναι διαφορετικής κλίμακας) και ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων δεν έχει σαφή προτίμηση ανάμεσα στις αντικειμενικές συναρτήσεις. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, Οι αντικειμενικές συναρτήσεις είναι τύπου ελαχιστοποίησης – το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα μεγιστοποίησης πολλαπλασιάζοντας με μείον ένα. Ένα πολύ-αντικειμενικό πρόβλημα απόφασης

Το πρόβλημα απόφασης με τους στόχους K ορίζεται ως εξής:

Δοθέντος ενός n-διάστατου διανύσματος μεταβλητής απόφασης $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots x_n\}$ στον χώρο των λύσεων $\mathbf{X}$, βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ * που ελαχιστοποιεί ένα δεδομένο σύνολο αντικειμενικών συναρτήσεων K

$z(\mathbf{x}^*)=\{z_1(\mathbf{x}^*), \ldots, z_K(\mathbf{x}^*)\}$. Ο χώρος των λύσεων $\mathbf{X}$ περιορίζεται γενικά από μια σειρά περιορισμών, $g_j(\mathbf{x}^*) = b_j$ για $j = 1, \ldots, m$ και οριοθετεί τις μεταβλητές απόφασης.

Σε πολλά πραγματικά προβλήματα, οι στόχοι που εξετάζονται συγκρούονται μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, βελτιστοποίηση x σε σχέση με έναν μόνο στόχο οδηγεί συχνά σε μη-αποδεκτά αποτελέσματα σε σχέση με τους άλλους στόχους. Επομένως, μία τέλεια πολύ-αντικειμενική λύση που να βελτιστοποιεί ταυτόχρονα κάθε αντικειμενική συνάρτηση είναι σχεδόν αδύνατη. Μία λογική λύση σε ένα πολύ-αντικειμενικό πρόβλημα είναι η διερεύνηση ενός συνόλου λύσεων, καθεμία από τις οποίες ικανοποιεί τους στόχους σε αποδεκτό επίπεδο χωρίς να κυριαρχείται από οποιαδήποτε άλλη λύση.

Κυριαρχία (Dominance)

Εάν όλες οι αντικειμενικές συναρτήσεις προορίζονται για ελαχιστοποίηση, μία εφικτή λύση x λέγεται ότι κυριαρχεί μια άλλη εφικτή λύση y

($x \succ y$), άν και μόνο άν, $z_i(\mathbf{x}) \leq z_i(\mathbf{y})$ για $i = 1, \ldots, K$ και $z_j(x) < z_j(y)$ για τουλάχιστον μία αντικειμενική συνάρτηση j.

Βέλτιστη λύση Pareto (Pareto optimal solution)

Μια λύση λέγεται ότι είναι βέλτιστη Pareto εάν δεν κυριαρχείται από καμία άλλη

λύση στον χώρο των λύσεων. Μία βέλτιστη λύση Pareto δεν μπορεί να βελτιωθεί σε σχέση με οποιοδήποτε αντικειμενική συνάρτηση χωρίς να χειροτερεύει τουλάχιστον μία άλλη. Για πολλά προβλήματα, ο αριθμός των βέλτιστων λύσεων Pareto είναι τεράστιος (ίσως άπειρος).

Σύνολο Βέλτιστων λύσεων Pareto (Pareto Optimal Set)

Το σύνολο όλων των εφικτών μη-κυρίαρχων λύσεων στο **X** αναφέρεται ως *βέλτιστο σύνολο Pareto* (Pareto optimal set) , και για ένα δεδομένο βέλτιστο σύνολο Pareto, οι αντίστοιχες τιμές αντικειμενικής συνάρτησης στον αντικειμενικό χώρο ονομάζεται *Pareto front*.

Ο απώτερος στόχος ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων είναι ο εντοπισμός λύσεων στο βέλτιστο σύνολο Pareto. Ωστόσο, ο προσδιορισμός ολόκληρου του βέλτιστου σύνολο Pareto, για πολλά πολύ- αντικειμενικά προβλήματα, είναι πρακτικά ανέφικτος λόγω του μεγέθους του. Επιπλέον, για πολλά προβλήματα, ειδικά για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, απόδειξη της βέλτιστης λύσης είναι υπολογιστικά ανέφικτη. Ως εκ τούτου, μια πρακτική προσέγγιση για τη βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων είναι η διερεύνηση ενός συνόλου καλύτερων γνωστών λύσεων (best known Pareto set) που αντιπροσωπεύουν το βέλτιστο σύνολο Pareto όσο το δυνατόν καλύτερα.

Η προσέγγιση ένας πολυ-αντικειμενικής βελτιστοποίησης πρέπει να επιτύχει τους ακόλουθους τρεις αντικρουόμενους στόχους:

1. Το best-known Pareto front πρέπει να είναι όσο κοντά είναι δυνατό στο πραγματικό Pareto front. Στην ιδανική περίπτωση, το σύνολο best-known Pareto πρέπει να είναι ένα υποσύνολο του βέλτιστου συνόλου Pareto.

2. Οι λύσεις στο σύνολο best-known Pareto πρέπει να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και διαφορετικές πάνω στο Pareto front για να παρέχει στον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων μία πραγματική εικόνα των επιλογών που έχει.

3. To best known Pareto front πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικό του σύνολου του φάσματος του Pareto front. Αυτό απαιτεί διερεύνηση λύσεων στα άκρα του χώρου των αντικειμενικών συναρτήσεων

Για ένα δεδομένο υπολογιστικό όριο χρόνου, ο πρώτος στόχος εξυπηρετείται καλύτερα εστιάζοντας την αναζήτηση σε μία συγκεκριμένη περιοχή του Pareto front. Αντιθέτως, ο δεύτερος στόχος απαιτεί η προσπάθεια αναζήτησης να διανέμεται ομοιόμορφα στο Pareto front. Ο τρίτος στόχος απαιτεί την επέκταση του Pareto front και στα δύο άκρα, εξερευνώντας νέες ακραίες λύσεις. Ένας τρόπος για την επίτευξη των τριών αυτών στόχων είναι οι γενετικοί αλγόριθμοι. (Konaka, A., David, W. Coit & Smith, A.E.,2006).

4.2 Genetic Algorithms -GA (Γενετικοί Αλγόριθμοι)

Η ιδέα των γενετικών αλγορίθμων αναπτύχθηκε από τον Holland και τους συναδέλφους στις δεκαετίες του 1960 και του 1970. Οι GA εμπνέονται από τη εξελικτική θεωρία που εξηγεί την προέλευση των ειδών. Στην φύση, τα αδύναμα και αταίριαστα είδη στο περιβάλλον τους έρχονται αντιμέτωπα με εξαφάνιση λόγω της φυσικής επιλογής. Τα δυνατά είδη έχουν μεγαλύτερη ευκαιρία να μεταδώσουν τα γονίδια τους στο τις μελλοντικές γενιές μέσω αναπαραγωγής. Μακροπρόθεσμα, είδη που μεταφέρουν τον σωστό συνδυασμό στα γονίδια τους κυριαρχούν στον πληθυσμό τους. Μερικές φορές, κατά τη διάρκεια της αργής διαδικασίας της εξέλιξης, μπορεί να εμφανιστούν τυχαίες αλλαγές στα γονίδια. Εάν αυτές οι αλλαγές παρέχουν πρόσθετα πλεονεκτήματα κατά την πρόκληση της επιβίωσης, νέα είδη εξελίσσονται από τα παλιά. Οι ανεπιτυχείς αλλαγές εξαλείφονται με φυσική επιλογή.

Στην ορολογία των GA, το διάνυσμα της λύσης $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ ονομάζεται άτομο ή χρωμόσωμα. Τα χρωμοσώματα είναι κατασκευασμένα από διακριτές μονάδες που ονομάζονται γονίδια. Κάθε γονίδιο ελέγχει ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά του χρωμοσώματος. Στην αρχική υλοποίηση του GA από τον Holland, τα γονίδια θεωρούνται δυαδικά ψηφία. Σε μεταγενέστερες υλοποιήσεις, εισάγονται πιο ποικίλοι τύποι γονιδίων. Κανονικά, ένα χρωμόσωμα αντιστοιχεί σε μία μοναδική λύση $\mathbf{x}$ στο χώρο των λύσεων. Αυτό απαιτεί έναν μηχανισμό χαρτογράφησης μεταξύ του χώρου λύσεων και των χρωμοσωμάτων. Αυτή η χαρτογράφηση ονομάζεται κωδικοποίηση. Στην πραγματικότητα, οι GA δουλεύουν στην κωδικοποίηση ενός προβλήματος, όχι στο πρόβλημα το ίδιο.

Οι GA λειτουργούν με μια συλλογή χρωμοσωμάτων, που ονομάζεται *πληθυσμός(population)*. Ο πληθυσμός είναι συνήθως τυχαία αρχικοποιημένος. Καθώς εξελίσσεται η αναζήτηση, ο πληθυσμός περιλαμβάνει λύσεις όλο και πιο κοντά στο επιθυμητό, και τελικά συγκλίνει, δηλαδή κυριαρχείται από μία μόνο λύση.

Οι GA χρησιμοποιούν δύο τελεστές για να δημιουργήσει νέες λύσεις από τις υπάρχουσες: διασταύρωση (crossover) και μετάλλαξη(mutation). Ο τελεστής crossover είναι ο πιο σημαντικός των GA. Στο crossover, συνήθως δύο χρωμοσώματα, που ονομάζονται *γονείς*, συνδυάζονται μαζί για να σχηματίσουν νέα χρωμοσώματα, που ονομάζονται *απόγονοι*. Οι γονείς επιλέγονται μεταξύ των υπαρχόντων χρωμοσωματικών ατόμων στον πληθυσμό και προτιμούν την καταλληλόλητα, έτσι ο απόγονος αναμένεται να κληρονομήσει τα καλά γονίδια που δημιουργούν οι γονείς. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον τελεστή crossover, είναι αναμενόμενο να εμφφανίζονται πιο συχνά γονίδια καλών χρωμοσωμάτων στον πληθυσμό, οδηγώντας τελικά σε σύγκλιση σε μια συνολική καλή λύση.

Ο τελεστής μετάλλαξης εισάγει τυχαίες αλλαγές στα χαρακτηριστικά των χρωμοσωμάτων. Η μετάλλαξη εφαρμόζεται γενικά σε επίπεδο γονιδίου. Σε τυπικές εφαρμογές GA, ο ρυθμός μετάλλαξης (πιθανότητα αλλαγής των ιδιοτήτων του ενός γονίδιου) είναι πολύ μικρός και εξαρτάται από το μήκος του χρωμοσώματος. Συνεπώς, το νέο χρωμόσωμα που παράγεται από μετάλλαξη δεν θα είναι πολύ διαφορετικό από το πρωτότυπο. Η μετάλλαξη παίζει κρίσιμο ρόλο στους GA. Οπως συζητήθηκε νωρίτερα, το crossover οδηγεί τον πληθυσμό να συγκλίνει κάνοντας τα χρωμοσώματα στον πληθυσμό όμοια. Η μετάλλαξη επαναφέρει τη γενετική ποικιλομορφία στον πληθυσμό και βοηθά την αναζήτηση ξεφύγει από τα τοπικά βέλτιστα.

Η αναπαραγωγή περιλαμβάνει επιλογή χρωμοσωμάτων για την επόμενη γενιά. Στην πιο γενική περίπτωση, η καταλληλότητα ενός ατόμου καθορίζει την πιθανότητα επιβίωσής του για την επόμενη γενιά. Υπάρχουν διαφορετικές διαδικασίες επιλογής στους GA ανάλογα με το πώς χρησιμοποιούνται οι τιμές καταλληλότητας. Αναλογική επιλογή, κατάταξη και επιλογή τουρνουά είναι οι πιο δημοφιλείς διαδικασίες επιλογής. Η διαδικασία ενός γενικού GA δίνεται ως εξής:

Βήμα 1: Θέσε t = 1. Δημιούργησε τυχαία N λύσεις για τη δημιουργία του πρώτου πληθυσμού, P_1. Αξιολογήστε την καταλληλότητα των λύσεων στο P_1.

Βήμα 2: Crossover: Δημιουργία πληθυσμού απογόνων Q_t

ως εξής:

2.1. Επέλεξε δύο λύσεις x και y από P_t με βάση τις τιμές καταλληλότητας.

2.2. Χρησιμοποιώντας έναν τελεστή crossover, δημιούργησε έναν απόγονο

και προσθέσέ τον στο Q_t.

Βήμα 3: Μετάλλαξη: Μετέτρεψε κάθε λύση $\mathbf{x} \in Q_t$ με προκαθορισμένο ρυθμό μετάλλαξης.

Βήμα 4: Εκχώρηση καταλληλότητας: Αξιολόγησε και εκχώρησε μια τιμή καταλληλότητας για κάθε λύση $x \in Q_t$ με βάση την τιμή της αντικειμενικής της συνάρτησης και την μη-δυνατότητα(infeasibility).

Βήμα 5: Επιλογή: Επέλεξε N λύσεις από Q_t με βάση την καταλληλότητά τους και αντιγράψτε τα στο Pt + 1.

Βήμα 6: Εάν ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού, τερμάτισε την αναζήτηση και επέστρεψε στον τρέχοντα πληθυσμό, αλλιώς, όρισε t = t + 1 και πήγαινε στο Βήμα 2.

4.2.1 Πολυ-αντικειμενικοί GA (Multi-objective GA)

Όντας μια προσέγγιση που βασίζεται στον πληθυσμό, οι GA είναι κατάλληλοι για την επίλυση πολύ-αντικειμενικών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ένας γενικός μονο-αντικειμενικός GA μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να βρεθεί ένα σύνολο από πολλαπλές μη κυριαρχούσες λύσεις σε μία μόνο εκτέλεση. Η ικανότητα του GA να κάνει αναζήτηση ταυτόχρονα σε διαφορετικές περιοχές του χώρου των λύσεων καθιστά δυνατή την εύρεση ενός διαφορετικού συνόλου λύσεων για δύσκολα προβλήματα με μη κυρτούς, ασυνεχείς και πολυτροπικούς χώρους λύσεων.

Ο τελεστής crossover του GA μπορεί να εκμεταλλευτεί δομές καλών λύσεων για διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις (στόχους) για τη δημιουργία νέων μη κυρίαρχων λύσεων σε ανεξερεύνητα μέρη του Pareto front. Επιπλέον, οι περισσότεροι GA πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων δεν απαιτούν ο χρήστης να δώσει προτεραιότητα, να κλιμακώσει ή να σταθμίσει τους στόχους. Ως εκ τούτου, οι GA είναι η πιο δημοφιλής ευρετική προσέγγιση σε πολύ-αντικειμενικά προβλήματα σχεδιασμού και βελτιστοποίησης

Αυτές χρησιμοποίησαν μια μετα-ευρετική τεχνική και το 70% όλων των μετα-ευρετικών προσεγγίσεων βασίστηκαν σε εξελικτικές προσεγγίσεις.Οι λύσεις Pareto που εντοπίζονται από την εφαρμογή γενετικών αλγορίθμων GA, μπορούν να αποτελέσουν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα για περαιτέρω έρευνα. Επίσης, ο έλεγχος του συνόλου Pareto, σε καθορισμένο μέγεθος, κρίνεται ως κρίσιμος για να διατηρηθεί η υπολογιστική προσπάθεια σε ένα λογικό επίπεδο. (Konaka, A., David, W. Coit & Smith, A.E. ,2006).

4.3 Ανίχνευση ισορροπίας με εξελικτικές πολυ-αντικειμενικές προσεγγίσεις

Οι πολυ-αντικειμενικές εξελικτικές προσεγγίσεις που βασίζονται σε Pareto χρησιμοποιούν την έννοια της κυριαρχίας Pareto για να συγκρίνουν δύο πιθανές λύσεις και αποδίδουν τιμές καταλληλότητας στα άτομα. Η αντικατάσταση της σχέσης κυριαρχίας Pareto με μια άλλη θα μπορούσε να οδηγήσει την αναζήτηση προς ένα διαφορετικό σύνολο λύσεων. Έτσι, χρησιμοποιώντας μια γενετική σχέση για ισορροπίες Nash (Lung and Dumitrescu 2008) η αναζήτηση κατευθύνεται προς την ισορροπία του παιγνίου. Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς στα GNEP, η αναζήτηση θα κατευθυνθεί προς GNE του παιγνίου.

4.3.1 Μέθοδοι

Το μαθηματικό μοντέλο ενός GNEP είναι παρόμοιο με αυτό ενός MOP (multiobjective optimization problem) με την έννοια ότι πολλοί παίκτες στοχεύουν στη μεγιστοποίηση των αποδόσεων τους (αποπληρωμές) ταυτόχρονα, και τα GNEP συνήθως παρουσιάζουν πολλαπλές λύσεις που ιδανικά θα πρέπει να ανιχνεύονται σε μία μόνο εκτέλεση, παρόμοια με τα MOP. Η βασική διαφορά μεταξύ τους βρίσκεται στην έννοια της λύσης: αντί να γίνεται αναζήτηση για το Pareto front ο στόχος είναι η εύρεση του γενικευμένου συνόλου ισορροπίας Nash.

Η υπόθεσή μας είναι ότι αντικαθιστώντας τη σχέση κυριαρχίας Pareto, μέσα σε μια εξελικτική μέθοδο αναζήτησης, με τη γενετική σχέση για GNEs, τότε η αναζήτηση κατευθύνεται προς τις λύσεις του GNEP και έτσι να εκμεταλλευτούμε τη δύναμη και την ευελιξία που παρέχονται από αυτές μεθόδους. Επιπλέον, δεδομένου ότι η γενεσιουργός σχέση δεν έχει όλα τα μειονεκτήματα που έχει η σχέση κυριαρχίας Pareto (Mihoc et al. 2010), η συμπεριφορά των αλγορίθμων ενδέχεται να διαφέρει σημαντικά όταν εξετάζονται παίγνια πολλών παικτών. Οι ακόλουθες μέθοδοι που βασίζονται στο Pareto έχουν δοκιμαστεί στα πλαίσια του GNEP:

Το **GDE3** αντιπροσωπεύει την επέκταση του αλγόριθμου Διαφορικής Εξέλιξης (Storn and Price 1997) σε πολύ-αντικειμενικά προβλήματα. Το GDE3 δημιουργεί να διανύσματα δοκιμής και επιλέγει τα νέα άτομα με βάση την αδύναμη κυριαρχία του Pareto. Στο τέλος κάθε γενιάς το μέγεθος του πληθυσμού διατηρείται με βάση τη μη κυριαρχία και την απόσταση συνωστισμού (το μέγεθος του πληθυσμού μπορεί να αυξηθεί σε κάθε γενιά εάν το διάνυσμα δοκιμής δεν σχετίζεται με τον γονέα του με βάση την κυριαρχία του Pareto) (Kukkonen και Lampinen 2005).

Η **MOPSO** κυριαρχία Pareto χρησιμοποιείται σε αλγόριθμο βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (Coello et αϊ. 2002). Διατηρείται και χρησιμοποιείται επίσης ένα αρχείο με σωματίδια που δεν κυριαρχούνται για να καθοδηγήσει την αναζήτηση. Για να διατηρηθεί η διαφορετικότητα, ο χώρος αναζήτησης χωρίζεται σε υπερκύβους . Στην αρχική του μορφή, ο αλγόριθμος δεν μπορεί να χειριστεί περιορισμούς.

Το **MO-CMA** είναι μια άλλη επέκταση ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης σε πολύ-αντικειμενικά προβλήματα (Igel et al. 2007). Ένας πληθυσμός λύσεων εξελίσσεται ανάλογα με το CMA-ES (Hansen and Ostermeier 2001), ως επιλογή για ταξινόμηση με βάση την απόσταση πλήθους (ή τη συνεισφορά υπέρτασης).

Ο **NSGA-II** είναι ένας εξελικτικός αλγόριθμος πολλαπλών στόχων που χρησιμοποιεί μια διαδικασία ταξινόμησης μη-κυριαρχίας, όπου κάθε άτομο ταξινομείται ανάλογα με το επίπεδο μη κυριαρχίας. Η απόσταση από τον συνωστισμό χρησιμοποιείται για τη διατήρηση της ποικιλότητας (Deb et al. 2002).

Το **NSLS** είναι ένας αλγόριθμος που συνδυάζει τοπική αναζήτηση και ταξινόμηση χωρίς κυριαρχία για επίλυση σε προβλήματα βελτιστοποίησης πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων (Chen et al. 2015). Σε κάθε γενιά μία τοπική αναζήτηση χρησιμοποιείται για την απόκτηση παιδικού πληθυσμού. Η κυριαρχία του Pareto χρησιμοποιείται για τη διαλογή του παιδιού και μητρικών πληθυσμών σε μέτωπα που δεν κυριαρχούνται και για να επιλέγει τον πληθυσμό για την επόμενη γενιά.

Το **θ-DEA** αντιμετωπίζει τη βελτιστοποίηση πολύ- αντικειμενικών συναρτήσεων προτείνοντας μια νέα σχέση κυριαρχίας (Yuan et al. 2016). Βασικά ο αλγόριθμος NSGA-III (Deb and Jain 2014) παρέχει αυτή τη σχέση κυριαρχίας στη φάση περιβαλλοντικής επιλογής για την προώθηση της διαφορετικότητας.Το θ-DEA χρησιμοποιεί το σχήμα καταλληλότητας του MOEA/D (Zhang and Li 2007).Το θ αντιπροσωπεύει την ποινή που εφαρμόζεται στην απόσταση που υπολογίζεται στον αντικειμενικό χώρο μεταξύ λύσεων και πλησιέστερου διάνυσματος που δίνεται από τα σημεία αναφοράς.

Ο σχεδιασμός προσεγγίσεων με βάση το σύνολο Pareto για την εξελικτική βελτιστοποίηση πολλαπλών αντικειμενικών συναρτήσεων είναι στα πρώτα στάδια και δεν έχει διερευνηθεί πλήρως. Τα πειράματα με τέτοιες μεθόδους δείχνουν ότι απλώς αλλάζοντας τη σχέση κυριαρχίας Pareto με μια γενεσιουργή σχέση για γενικευμένες ισορροπίες Nash, η αναζήτησή κατευθύνεται προς το σύνολο των προβλημάτων GNE.

(Lung, R. I., Gaskó, N., & Suciu, M. A. ,2020).

5.Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή μελετά μια σημαντική κατηγορία παιγνίων (GNEP) που εμφανίζεται σε διαφορετικούς κλάδους όπως μηχανικής, μαθηματικών, επιστήμης υπολογιστών, επιχειρησιακής έρευνας. Τα κοινά χαρακτηριστικά τους είναι ότι οι χώροι στρατηγικής των παικτών είναι συζευγμένοι. Η χρήση του μοντέλου GNEP αυξάνεται σταθερά τα τελευταία χρόνια σε διαφορετικούς επιστημονικούς τομείς. Οι δύο γενικές προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος είναι α) οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που επιστρέφουν μία μεμονωμένη λύση και β) είναι μέσω του προσδιορισμού ενός συνόλου βέλτιστων λύσεων Pareto (Pareto optimal set) ή ενός αντιπροσωπευτικού υποσυνόλου. Τα σύνολα βέλτιστων λύσεων Pareto προτιμούνται συχνά περισσότερο από τις μεμονωμένες λύσεις επειδή σε πραγματικά προβλήματα η τελική λύση προκύπτει από ανταλλαγή.

Βιβλιογραφία

Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green - Microeconomic theory (1995, Oxford University Press)

Bogachev, V.I. (2007). Measure theory. *Springer Science & Business Media*, 1.

Chernov, A. V. (2019). On Some Approaches to Find Nash Equilibrium in Concave Games. Automation and Remote Control, 80(5), 964-988.

Krawczyk, J. (2007). Numerical solutions to coupled-constraint (or generalised Nash) equilibrium problems. Computational Management Science, 4(2), 183-204.

Facchinei, F., & Kanzow, C. (2010). Generalized Nash equilibrium problems. Annals of Operations Research, 175(1), 177-211.

Berridge, S., & Krawczyk, J. B. (1997). Relaxation algorithms in finding Nash equilibria. Available at SSRN 66448.

Krawczyk, J.B. & Uryasev, S. (2000). Relaxation algorithms to find Nash equilibria with economic applications. *Environmental Modeling and Assessment*, 5, 63–73.

Dou, Z., Yan, X., Wang, D., Deng, X. & Tong, J. (2019). Finding Mixed Strategy Nash Equilibrium for Continuous Games through Deep Learning. *arXiv:1910.12075v1 [cs.GT]*, 1-11.

Konaka, A., David, W. Coit & Smith, A.E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering and System Safety*, 91, 992–1007.

Lung, R. I., Gaskó, N., & Suciu, M. A. (2020). Pareto-based evolutionary multiobjective approaches and the generalized Nash equilibrium problem. Journal of Heuristics, 1-24.

Uryas’ ev, S. & Rubinstein, R.Y. (1994). On relaxation algorithms in computation of non-cooperative equilibria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6), 1263–126.

Xing, H., Junzhi Y., Tingwen H., Chuandong, L. & Chaojie, L. (2014). Neural network for solving Nash equilibrium problem in application of multiuser power control. *Neural Networks*, 57, 73-78.

Ching-Lai Hwang; Abu Syed Md Masud (1979). Multiple objective decision making, methods and applications: a state-of-the-art survey. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-09111-2.

He, X., Yu, J., Huang, T., Li, C., & Li, C. (2014). Neural network for solving Nash equilibrium problem in application of multiuser power control. Neural Networks, 57, 73-78.

Luo, Z. Q., & Pang, J. S. (2006). Analysis of iterative waterfilling algorithm for multiuser power control in digital subscriber lines. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2006, 1-10.