ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Μουσκοβίας Χαράλαμπος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2021

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

RISK MEASURES WITH APPLICATIONS IN RUIN THEORY

by

Mouskovias Charalampos

MSc Dissertation

Submitted to the of Department Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus
September 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
- Κ. Πολίτης (Επιβλέπων)
- Γ. Ψαρράκος
- Γ. Πιτσέλης

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με το πέρας αυτής της εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη που από την πρώτη στιγμή και μέχρι το τέλος της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, ήταν πάντα δίπλα μου και με υπομονή, με καθοδηγούσε, με συμβούλευε και με βοηθούσε ανελλιπώς ούτως ώστε να καταφέρω να φτάσω εδώ σήμερα. Δε θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες μου και προς στα υπόλοιπα αξιότιμα μέλη της επιτροπής, κύριο Γεώργιο Πιτσέλη και κύριο Γεώργιο Ψαρράκο. Τέλος θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου που από την αρχή μέχρι το τέλος αυτής της πορείας ήταν πάντα δίπλα μου.

Στην πολυαγαπημένη μου

μητέρα Λάουρα,

στις αδερφές μου

Αρετή και Νικολέττα

και στον αγαπημένο μου
παππού Νικόλα

Περίληψη - Εισαγωγή

Στην ανασκόπηση της ιστορίας της εξέλιξης του ανθρώπινου είδους παρατηρούμε ότι ανέκαθεν ο άνθρωπος ήταν εκτεθειμένος σε κίνδυνο είτε από φαινόμενα της φύσης, είτε από άλλα είδη της πανίδας για τα οποία ο ίδιος αποτελούσε τροφή. Αργότερα όταν και δημιούργησε ομάδες και κοινωνίες δημιούργησε υποδομές που σταδιακά μείωναν τις δύο πρώτες περιπτώσεις κινδύνου. Ταυτόχρονα ο άνθρωπος άρχισε να αποκτά αγαθά και σε κάθε αγαθό αντιστοιχούσε μια αξία. Η αξία αυτή δεν ήταν πάντοτε σταθερή αλλά μεταβάλλονταν σε σχέση με τις εκάστοτε συνθήκες, κυρίως δε όσο μικρότερη ποσότητα συναντούσε στον πλανήτη Γη ή όσο περισσότερο χρηστικό ήταν τόσο μεγαλύτερη αξία είχε το αγαθό. Το θέμα που τον απασχόλησε ήταν η αποτίμηση της αξίας αυτής και επίσης η αξία της απώλειας ή καταστροφής λόγω έκθεσης σε κίνδυνο.

Στον τομέα της αποτίμησης συνέβαλαν αρχικά οι πιθανότητες αποτίμησης της αβεβαιότητας του κινδύνου και κατόπιν περισσότερο συστηματικά με την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης ένας ξεχωριστός κλάδος αυτός της διαχείρισης του κινδύνου από πιο εξειδικευμένα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Η συμβολή της τεχνολογίας της πληροφορικής στην ανάλυση του κινδύνου πραγματώθηκε μέσα από την ανάπτυξη λογισμικού κώδικα και ταχύτατων επεξεργαστών στην ανάλυση και επεξεργασία των δεδομένων. Η εργασία αυτή στοχεύει να παρουσιάσει τα παραπάνω αυτά χαρακτηριστικά μέσα από την ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία και επίσης να συνεισφέρει με χρήση πρωτότυπων αποδείξεων σε εμπλουτισμό της γνώσης και βήμα για την περαιτέρω μελέτη του θέματος αυτού από κάθε άλλον ενδιαφερόμενο.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε ιστορικά δεδομένα που αρχικά οριοθετούν έντεχνα την ύπαρξη της αβεβαιότητας και κατόπιν τον έλεγχο αυτής μέσα από τη θεωρία παιγνίων και πιθανοτήτων.

Στο Κεφάλαιο 2 αναλύουμε τις βασικές αρχές της θεωρίας χρεοκοπίας, για ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων, μέσα από τις δομικές παραμέτρους που είναι ικανές να προβλέψουν το χρόνο που δύναται να συμβεί η χρεοκοπία και ως εκ τούτου οι διαδικασίες αποφυγής ή μετάθεσης στο διηνεκές της στιγμής αυτής. Η παρουσίαση αυτή πλαισιώνεται με παραδείγματα τόσο σε περιπτώσεις κινδύνου στο συνεχή χρόνο αλλά και στο διακριτό επίσης.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται ανασκόπηση στα είδη αλλά και στα γενικά μέτρα κινδύνου και πώς αποτιμάται ο κίνδυνος με ασφάλιστρο.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε αυτό που κατά την άποψή μας αποτέλεσε το θεμελιώδες ζήτημα διαχρονικά, και αναφερόμαστε στην αξία του αγαθού σε κίνδυνο. Από το Κεφάλαιο αυτό δεν θα μπορούσε ασφαλώς να απουσιάζει η αναφορά σε κίνδυνο μεγάλου μεγέθους για τον οποίο είτε απουσιάζει πληροφόρηση είτε συμβαίνει σε πολύ μικρή συχνότητα.

Αναφερόμαστε ως εκ τούτου στην ουρά της αξίας σε κίνδυνο. Επιπρόσθετα στο Κεφάλαιο αυτό συνεισφέρουμε με πρωτότυπες αναλυτικούς υπολογισμούς σε παραδείγματα και ασφαλώς όπου δεν μας το επιτρέπει η αναλυτική διαδικασία, τότε και χρησιμοποιούμε το λογισμικό Mathematica.

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μια προσπάθεια να συνδυαστούν τα Κεφάλαια 2, 3 και 4 μαζί. Αντίστοιχα όπως και στο Κεφάλαιο 3 συνεισφέρουμε με αναλυτικές αποδείξεις.

Θεωρούμε ότι η διπλωματική αυτή, αποτελεί έναν κρίκο στη συνέχεια της αλυσίδας αυτών με στόχο την αναβάθμιση της γνώσης σε θέματα στη διαχείριση κινδύνου. Όπως και εδώ έγινε βιβλιογραφική χρήση προηγουμένων μελετών συναδέλφων μεταπτυχιακών, έτσι και ευελπιστούμε να φανεί η παρούσα μελέτη χρήσιμη σε κάθε νέο ενδιαφερόμενο στη διαχείριση κινδύνου.

Abstract - Introduction

By reviewing the history of the human species we find that human has always been exposed to danger, either from natural phenomena or from other species of fauna from which he was hunted and killed. As time passed, humans started forming small groups and societies, which eventually initiated inventions like infrastructures that gradually reduced the first two cases of dangers discussed above. Also during that time, humans began to acquire goods and each good matched with a given value. This value was not constant but varied in relations to the conditions of the given time. To put simply - the smaller the quantity found on planet Earth or the more useful a good was, the greater the value. This convinced mankind to discuss and evaluate the valuation of good and also the value of loss or destruction due to exposure to risk.

The first component that contributed towards the field of valuation was the chances of evaluating risk then more systematically with the development of mathematical science, a separate branch of risk management was formed by more specialized financial institutions. The contribution of information technology to risk analysis was made through the development of code software and fast processors in data analysis and processing.

This dissertation aims to present the above characteristics through Greek and International literature and also to contribute with the use of original evidence to enrich knowledge and give way for the further review and study of this topic by any other interested party.

In Chapter 1, we present historical data that first describe the existence of uncertainty and then through the theory of games and probabilities.

In Chapter 2, we analyze the basic principles of bankruptcy theory through the structural parameters that are able to predict the time when bankruptcy can occur and carry on to the procedures on how to avoid or postpone to the perpetual moment. This presentation is framed with examples both in cases of danger in continuous time and in the discrete as well.

Chapter 3 reviews the types but also the general risk measures and how the risk is assessed with a premium.

In Chapter 4, we present what in our view has been the fundamental issue over time, and we refer to the value of the good at stake. This chapter could certainly not be without reference to a large-scale risk that is either lacking in information or occurs very rarely. We are therefore referring to the value-at-risk queue. In addition, in this chapter we contribute with original detailed proofs with examples and of course where the analytical process does not allow us, then we use the Mathematica software.

In Chapter 5, an attempt is made to combine Chapters 2, 3 and 4 together. Respectively as in chapter 3 we contribute with detailed proofs.

We consider that this dissertation, is a link in the continuation of this chain with the aim of upgrading knowledge in issues in risk management. As in the past, bibliographic use has been made of previous studies, including those by fellow graduates, so we hope that this study will be useful to anyone new to those interested in risk management.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Βέβαιον το αβέβαιον

Ο *Έμπορος της Βενετίας* είναι ένα από τα πιο γνωστά έργα του Ουίλιαμ Σαίξπηρ (Shakespeare, 2005). Υπολογίζεται ότι γράφτηκε μεταξύ 1594 και 1597. Το έργο αναφέρεται στον έμπορο Αντόνιο κι όχι στον ανταγωνιστή του, τον Εβραίο τοκογλύφο Σάιλοκ. Ο Σάιλοκ είναι ένας πολύπαθος χαρακτήρας, αλλά είναι κι αυτός που προκαλεί το μαρτύριο του Αντόνιο, με αποτέλεσμα η απέχθεια ή η συμπάθεια για το πρόσωπό του να επαφίεται στην κρίση του κοινού.

Ο Μπασάνιο, ένας νεαρός από τη Βενετία, θέλει να ταξιδέψει στο Μπελμόντε για να πολιορκήσει την όμορφη και πλούσια κληρονόμο Πόρσια. Γι' αυτό ζητά βοήθεια από το φίλο του, τον έμπορο Αντόνιο, προκειμένου να του δώσει 3000 δουκάτα για τα έξοδα του ταξιδιού του για τρεις μήνες. Καθώς όλα τα πλοία του Αντόνιο δεν έχουν ακόμα ολοκληρώσει τα ταξίδια τους στη θάλασσα, ζητά δάνειο από τον Εβραίο τοκογλύφο Σάιλοκ. Εφόσον ο Αντόνιο είχε καταφερθεί εναντίον του, κακόβουλα ο Σάιλοκ προτείνει τον εξής όρο στο συμβόλαιο: αν ο έμπορος Αντόνιο αδυνατεί να ξοφλήσει το δάνειό του μέσα στον ορισμένο χρόνο, ο Σάιλοκ θα πάρει μια λίβρα σάρκας από οποιοδήποτε μέρος του σώματός του.

Ο Αντόνιο, έκπληκτος από τη "γενναιοδωρία" του Σάιλοκ που δε ζητεί χρήματα ως αντάλλαγμα, αποδέχεται τον όρο κι έτσι ο Μπασάνιο, μαζί με το φίλο του, Γκρατσιάνο, φεύγουν για το Μπελμόντε (Shakespeare, 2005).

Στη Βενετία, μαθαίνεται πως όλα τα καράβια του έμπορου Αντόνιο έχουν χαθεί στη θάλασσα κι έτσι αδυνατεί να ξεπληρώσει το δάνειο. Ο Σάιλοκ βάζει να συλλάβουν τον Αντόνιο, αποφασισμένος να πάρει εκδίκηση από τους Χριστιανούς. Η δραματική κορύφωση του έργου πραγματοποιείται στο δικαστήριο του Δόγη της Βενετίας. Ο Αντόνιο προσφέρεται να αποζημιώσει το Σάιλοκ με τα διπλά χρήματα (6000 δουκάτα), αλλά ο τοκογλύφος επιμένει κι απαιτεί μια λίβρα σάρκας από τον έμπορο. Ο Δούκας συμβουλεύεται τον Μπαλτάσαρ, έναν νεαρό μελετητή του νόμου, που έχει καταφτάσει με το βοηθό του. Ο Μπαλτάσαρ ζητά από το Σάιλοκ να δείξει έλεος, αλλά εκείνος αρνείται, οπότε το δικαστήριο του επιτρέπει να πάρει αυτό που ζητά από τον Αντόνιο.

Την τελευταία στιγμή, αναδεικνύει μια λεπτομέρεια: ο όρος έλεγε να αφαιρεθεί μια λίβρα σάρκας, άρα όχι αίμα. Αν ο Σάιλοκ έχυνε αίμα του Αντόνιο, όλη η περιουσία του θα κατασχόταν. Ηττημένος, ο Σάιλοκ αποδέχεται την πληρωμή του με χρήματα, αλλά ο Μπαλτάσαρ αναφέρει ότι η περιουσία του πρέπει να κατασχεθεί, μισή από την κυβέρνηση και μισή από τον έμπορο Αντόνιο, επειδή αποπειράθηκε να αφαιρέσει τη ζωή ενός πολίτη.

Από την πλευρά που ενδιαφέρει την τρέχουσα μελέτη, τόσο ο Σάιλοκ όσο και ο Αντώνιο απέτυχαν να κάνουν ορθή πρόβλεψη ή έστω να σκεφτούν τις προϋποθέσεις ώστε να μειώσουν το ρίσκο της επένδυσης από την πλευρά του καθενός. Δεν είδαν ακριβώς αυτές τις λεπτομέρειες που κάνουν την κάθε επένδυση ευάλωτη σε κινδύνους. Από την πλευρά του Αντόνιο, αγνοήθηκε ο κίνδυνος μιας "πλωτής" αξίας όπως είναι τα πλοία, ενώ από την πλευρά του Σάιλοκ υπερίσχυσε το συναίσθημα της αντιδικίας ή εκδίκησης (Shakespeare, 2005).

Πόσο σημαντική ήταν η χρήση των πιθανοτήτων στη μείωση του ρίσκου επένδυσης;

Ιστορικά (Deulofeu, 2011), έχουν υπάρξει δύο βασικές κινητήριες δυνάμεις για την ανάπτυξη νέων μαθηματικών: Η ανθρώπινη πνευματική περιέργεια και η ευρύτερη επιστημονική ή κοινωνική αναγκαιότητα της κάθε εποχής. Για παράδειγμα, οι πρακτικές ανάγκες της μέτρησης εδαφών και αποστάσεων στην αρχαιότητα αποτέλεσαν σημαντικό κίνητρο για την ανάπτυξη της επίπεδης Ευκλείδειας γεωμετρίας. Παρομοίως, η ανάγκη για την κατανόηση και την πρόβλεψη της κίνησης των στερεών σωμάτων – όπως π.χ. των πλανητών ή των βλημάτων που χρησιμοποιούνταν σε πολεμικές μάχες – ήταν ένα από τα σημαντικά κίνητρα για την ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού από τον Newton και τον Leibniz.
Ένα πιο πρόσφατο παράδειγμα είναι η ανάπτυξη μιας νέας μαθηματικής θεωρίας για την περιγραφή και ακριβή μέτρηση της "πληροφορίας". Μάλλον, το σημαντικότερο κίνητρο για την ανάπτυξη των πιθανοτήτων – δηλαδή μιας μαθηματικά αυστηρής θεωρίας για την κατανόηση «τυχαίων»

φαινομένων και γενικότερα καταστάσεων στις οποίες υπάρχει ένα σημαντικό μέρος "αβεβαιότητας" - ήταν το πάθος του ανθρώπου για τον τζόγο ή γενικότερα τα παίγνια (Deulofeu, 2011).

1.2 Ιστορική αναδρομή στα παίγνια και τις πιθανότητες

Η αφετηρία της συστηματικής μελέτης των πιθανοτήτων (Deulofeu, 2011) ως επιστημονικό πεδίο τοποθετείται στα μέσα του 17^{ου} αιώνα και συγκεκριμένα στην αλληλογραφία μεταξύ δύο σημαντικών μαθηματικών της εποχής, του Pascal και του Fermat, με αντικείμενο την κατανόηση ενός τυχερού παιγνίου. Στην πραγματικότητα, από τη στιγμή που η ανθρωπότητα άρχιζε να παίζει παιχνίδια, αναπτύσσοντας παράλληλα τα μαθηματικά, δεν είναι δυνατός ο διαχωρισμός αυτού που θα μπορούσαμε να ονομάσουμε σοβαρά μαθηματικά από τα παιγνιώδη ή ψυχαγωγικά μαθηματικά. Το 1612 το πρώτο βιβλίο αφιερωμένο εξολοκλήρου στα ψυχαγωγικά μαθηματικά, το Problemes plaisant set delectables qui font par les nombres (προβλήματα ευχάριστα και ανιχνεύσιμα που δημιουργούν οι αριθμοί) του Claude-Gaspard Bachet de Meziriac, κυκλοφόρησε στη Γαλλία. Αυτός ο μαθηματικός, ποιητής και μεταφραστής που αποτελεί ένα από τα πρώτα μέλη της Γαλλικής Ακαδημίας, είναι περισσότερο γνωστός ως ο συγγραφέας του σχολιασμού της λατινικής έκδοσης των Αριθμητικών του Διόφαντου (1621) και στο οποίο ο Fermat διατύπωσε την διάσημη εικασία του.

Αν και οι περίπλοκες θεωρίες για την πιθανότητα εφαρμόζονται στις μέρες μας σε ποικίλους τομείς, καθώς η αβεβαιότητα είναι στον κόσμο μας πολύ πιο συχνή από τη βεβαιότητα, η πραγματικότητα είναι ότι η προέλευση της πιθανότητας συνδέεται άρρηκτα με τα τυχερά παιχνίδια. Πράγματι , μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πως η αρχή της μαθηματικής διατύπωσης μιας θεωρίας για την τύχη που βασίζεται στην έννοια της πιθανότητας εμφανίστηκε στη Γαλλία στα μέσα του 17^{ου} αιώνα και πιο συγκεκριμένα στην αλληλογραφία που διατηρούσε ο Pascal με τον Fermat το 1654 σχετικά με τα ερωτήματα που είχε εγείρει ο ιππότης του Μερέ. Ο τελευταίος ζήτησε από τον Pascal να του δώσει μια εξήγηση για το αποτέλεσμα ορισμένων τυχερών παιχνιδιών που βασίζονταν στο ρίξιμο των ζαριών. Αυτό έδωσε τη δυνατότητα στους αλληλογραφούντες να θεμελιώσουν βασικές έννοιες στις πιθανότητες (Deulofeu, 2011).

Μετά την θεμελίωση των βασικών εννοιών από τους Pascal-Fermat, την "σκυτάλη" ανέλαβαν (από τον 18^{ο} στον 19^{ο} αιώνα), άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με ψυχαγωγικά προβλήματα και ξεχωρίζουμε τον I. Newton (1642-1727), τον L. Euler (1707-1783) και τον C. Gauss (1777-1855). Ο Newton στα πλαίσια του Arithmetica Universalis (Παγκόσμια Αριθμητική, 1707) εισήγαγε το πρόβλημα των πιθανοτήτων με ζάρια. Ο Euler με συνεισφορά στον τομέα της Συνδυαστικής ανάλυσης και το περίφημο "πρόβλημα των γεφυρών" του Konisberg (1759) και ο Gauss εισάγοντας το "πρόβλημα των οχτώ βασιλισσών" αρχικά, και κατόπιν διατύπωσε και απέδειξε μια σειρά από θεμελιώδη αποτελέσματα, τα οποία αποτελούν τη βάση ολόκληρης της σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων έως και σήμερα. Στην ανασκόπησή του επίσης ο Jordi Deulofeu (2011) επικεντρώνεται στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) το οποίο εξηγεί πως μέσα από την πλήρη αταξία μερικές φορές γεννιέται η τάξη. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 10 φορές, το ποσοστό ένδειξης "κορώνα" είναι αβέβαιο καθώς δύναται να εμφανισθεί η όψη αυτή από καμία έως και 10 φορές. Αν όμως η επανάληψη αυτή είναι 10000 ή παραπάνω, τότε το ποσοστό ένδειξης "κορώνα" πλησιάζει το 50% και τείνει όλο και περισσότερο σε αυτό όσο ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνει. Ή επίσης, η επαναληψιμότητα ενός πειράματος σε μεγάλο αριθμό τείνει να "σχηματίσει" μια συμμετρία ή αλλιώς κανονικότητα γύρω από μια μέση τιμή.

Σύμφωνα με το συγγραφέα Jordi Deulofeu (2011) η ιστορία του κεντρικού οριακού θεωρήματος είναι αρκετά ενδιαφέρουσα. Η πρώτη έκδοσή του το 1733 στηρίζεται στον A. De Moivre ο οποίος χρησιμοποίησε την κανονική κατανομή ώστε να προσεγγίσει την κατανομή του πλήθους εμφάνισης κεφαλής κατόπιν ρίψης νομίσματος. Αργότερα ο Pierre-Simon Laplace δημοσίευσε στο έργο του Theorie analytique des probabilities το 1812 την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.

Όμως, ποιο φυσικό χαρακτηριστικό κρύβεται πίσω από την τάξη και την προβλεψιμότητα ως αποτέλεσμα των πολλών επαναλήψεων; Είναι η ανεξαρτησία αυτή των πειραμάτων, δηλαδή η έκβαση του ενός πειράματος δεν καθορίζει το επόμενο και δεν καθορίζεται από το προηγούμενο πείραμα. Ως τις αρχές του 18^{ου} αιώνα και μερικές δεκαετίες αργότερα, η μελέτη των πιθανοτήτων βασίζονταν πράγματι σχεδόν εξολοκλήρου πάνω στην υπόθεση της ανεξαρτησίας.

Ως αποτέλεσμα, θεωρούμε ότι αν πιάσουμε στο χέρι μας ένα νόμισμα και το ρίξουμε, θα φέρει ένδειξη "κορώνα" με πιθανότητα 50% όχι γιατί έχουμε ζυγίσει το μέταλλο σε κάθε πλευρά του ή γιατί έχουμε υπολογίσει τον αριθμό περιστροφών, την απόσταση του από το έδαφος και την επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων στην ταυτόχρονη περιστροφική του κίνηση, αλλά γιατί κάθε πλευρά του νομίσματος αιτιοκρατικά στο σύμπαν δικαιούται το μερίδιο της. Το ίδιο ισχύει και με το ζάρι (1/6 η πιθανότητα κάθε διακριτής ένδειξης). Άρα και ένα δοχείο που περιέχει 4 άσπρες (Ο), 5 μαύρες και μια κίτρινη σφαίρες, η πιθανότητα να προκύψει άσπρη σε μια δοκιμή είναι 4/10 γιατί με βάση αυτά που διατύπωσε ο von Mises (με επανατοποθέτηση) (Deulofeu, 2011).

$$\lim_{n\to\infty} P(\square) = \frac{4}{10}$$

1.3 Βασικές αρχές των πιθανοτήτων

Αντίστοιχα, και στη βάση της έναρξης μιας νέας επιχειρηματικής δραστηριότητας, η τράπεζα πιθανοθεωρεί την εκ των προτέρων επιβίωση της νεοφυούς επιχείρησης, για την προφανώς αποπληρωμή του δανείου με βάση το ιστορικό παρόμοιων εταιρειών.

Είναι ευνόητο ότι σε ένα παίγνιο ή σε μια δραστηριότητα συμμετέχουν οι πιθανότητες. Αλλά τι είναι αυτό που παρακινεί το ανθρώπινο είδος είτε τη συμμετοχή σε παίγνιο είτε την έναρξη δραστηριότητας; Το ένστικτο σαφώς, αλλά και το ότι η συμμετοχή αυξάνει την πιθανότητα νίκης σε αυτόν που "υπολογίζει". Για παράδειγμα, όσοι κατανοούν τους νόμους των πιθανοτήτων αποφεύγουν τη συμμετοχή σε παίγνια τύπου tzoker κλπ. για τον πολύ απλό λόγο ότι η πιθανότητα νίκης πολλαπλασιασμένη με την απόδοση είναι μικρότερη του 1, συνεπώς το παίγνιο δεν θεωρείται "δίκαιο". Επομένως, παρακινούμενοι από το ένστικτο, συμμετέχουν για πιθανότητα νίκης $\frac{1}{\binom{45}{5} 20}$ όταν είναι 10000 φορές πιο πιθανό να τους έρθει μια γλάστρα στο κεφάλι καθώς περπατούν, αλλά προφανώς δεν το λαμβάνουν υπόψη.

Στην παραπάνω παράγραφο εισάγαμε έμμεσα την έννοια της απόδοσης ή του κέρδους. Το κέρδος είναι συνδυασμός απόδοσης και πιθανότητας αυτής, και αυτός ο συνδυασμός ορίζεται ως "μοντέλο". Το μοντέλο έχει ως κύρια αποστολή να προβλέψει με το μικρότερο δυνατό σφάλμα τον πραγματικό κόσμο και η καλή προσαρμογή του βασίζεται είτε σε μεγάλο όγκο πληροφορίας είτε σε χρήση κατάλληλων κατανομών.

Για τον προσδιορισμό του όρου "κατανομή" θα αναλύσουμε μια σύντομη διαδρομή προς την κατεύθυνση αυτής (Κούτρας, 2004).

Αρχικά χρειαζόμαστε ένα δειγματικό χώρο Ω, το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος. Αν πρόκειται για το ζάρι τότε Ω ={1,2,3,4,5,6}, αν πρόκειται για την κατάσταση μιας εταιρείας μια τυχαία χρονική στιγμή τότε Ω = {κερδοφόρα, ζημιογόνα}, κλπ.

Οποιοδήποτε υποσύνολο $A \subset \Omega$ ονομάζεται ενδεχόμενο. Στην περίπτωση όπου το ενδεχόμενο είναι μονοσύνολο, π.χ $A = \{\alpha\},\ \alpha \in \Omega$ τότε ονομάζεται στοιχειώδες ενδεχόμενο.

Ένα μέτρο πιθανότητας είναι μια συνάρτηση

$$\wp : F \rightarrow [0,1]$$

όπου F είναι δυναμοσύνολο του Ω και ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\wp(A) \geq 0$ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in F$
- $\wp(\Omega) = 1$
- Αν δύο ενδεχόμενα $A, B \in F$ είναι ασυμβίβαστα τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ένας δειγματικός χώρος διαμερίζεται από τα ενδεχόμενα

$$A_1, \ldots, A_\nu : \bigcup_{j=1,\ldots,\nu} A_j = \Omega, \qquad \underset{i \neq j}{A_i \cap A_j} = \varnothing$$

Δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητα αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα του Β δεδομένου του Α είναι

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

1.3.1 Τυχαίες μεταβλητές

Μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) είναι μια οποιαδήποτε ποσότητα που εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Μαθηματικά, μια τ.μ. είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει μια τυχαία μεταβλητή X συμβολίζεται S_X (Κούτρας, 2004).

Μια τ.μ. είναι διακριτή αν το σύνολο τιμών της είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο, αλλά αριθμήσιμο.

- Η πιθανότητα είναι συνάρτηση $P: X \to [0,1]$ και ορίζεται ως $f(x) = P(X = x),\ x \in S_x$.
- Η ροπή κ-τάξεως της τ.μ. X είναι $\rho_\kappa = E\left(X^\kappa\right) = \sum_{x \in S_x} x \cdot f(x)$ όπου για κ=1 ορίζεται η μέση ή αναμενόμενη τιμή ή μαθηματική ελπίδα, και για κ=2, η κεντρική ροπή $Var(X) = E\left((X-\rho_1)^2\right)$ προσδιορίζει την διασπορά ή διακύμανση της τ.μ. X
- Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ ώστε $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in S_x, t \leq x} f(t)\,, x \in \mathbb{R}$

Μια τ.μ. είναι συνεχής αν το σύνολο τιμών της είναι ορισμένο σε διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ή σε ένωση διαστημάτων.

- Η πυκνότητα (πιθανότητας) είναι η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής F δηλαδή,

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \text{ όπου } F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η συνάρτηση $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ ώστε

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

- Η ροπή κ-τάξεως της τ.μ. X είναι $\rho_\kappa = E\left(X^\kappa\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ όπου για κ=1 ορίζεται η μέση ή αναμενόμενη τιμή ή μαθηματική ελπίδα, και για κ=2, η κεντρική ροπή $Var(X) = E\left((X-\rho_1)^2\right)$ προσδιορίζει την διασπορά ή διακύμανση της τ.μ. X

Η συνάρτηση ροπογεννήτριας μιας τ.μ. X ορίζεται ως

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

και ο υπολογισμός αυτής ακολουθεί το γενικό κανόνα της αναμενόμενης τιμής έστω συνάρτησης $g(X)$ της τ.μ. X, δηλαδή

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in S} g(x) \cdot f(x), & S \subseteq \mathbb{Z} \\ \int_{x \in S} g(x) \cdot f(x)dx\,, & S \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

αν θέσουμε $g(X) = e^{tX}$

Η ρπογεννήτρια συνάρτηση επιτρέπει μέσω της κ-παραγώγου την εξαγωγή της ροπής κ-τάξεως της τ.μ. X

$$M_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = E(X^k)$$

Η συνάρτηση πιθανογεννήτριας μιας διακριτής τ.μ X ορίζεται ως

$$P_X(t) = E(t^X) = \sum_{x \in S} t^x \cdot f_X(x)$$

Η σχέση μεταξύ ροπογεννήτριας (*M*) και πιθανογεννήτριας (*P*) συνάρτησης είναι

$$P(t) = M(lnt), \quad M(t) = P(e^t)$$

1.3.2 Άθροισμα τυχαίων μεταβλητών

Έχοντας κατανοήσει τα χαρακτηριστικά κάθε τυχαίας μεταβλητής, θα δούμε πως αυτές αθροίζονται ώστε να προκύψει μια νέα τ.μ. έστω *Υ* (Κούτρας, 2004).

Η κατανομή της *Υ* εφόσον πρόκειται για άθροισμα πεπερασμένου πλήθους τ.μ. είναι πράξη συνέλιξης με βαθμό που καθορίζεται από το πλήθος των τ.μ. που αθροίζονται. Για παράδειγμα, αν προσθέσουμε δύο τ.μ. X και Z με συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Z(z)$ αντίστοιχα, τότε έχουμε συνέλιξη 2^{ου} βαθμού με συνάρτηση πιθανότητας (ή πυκνότητας, αντίστοιχα).

$$f_Y(y) = \sum_{t \le y} f_X(t) \cdot f_Z(y-t), \text{ αν είναι διακριτές, και}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(t) \cdot f_Z(y-t)dt, \text{ αν είναι συνεχείς}$$

Στην περίπτωση πεπερασμένου πλήθους ισόνομων τ.μ. που αθροίζονται, δηλαδή

$Y = X_1 + \ldots + X_n$, τότε,

$f_Y(y) = f^{*(n)}(y) = \sum_{t \le y} f_X(t) \cdot f^{*(n-1)}(y-t)$, αν είναι διακριτές, και

$f_Y(y) = f^{*(n)}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(t) \cdot f^{*(n-1)}(y-t)dt$, αν είναι συνεχείς

Όπου σύμβολο $*$ υποδηλώνει την συνελικτική πράξη, και $f^{*(0)}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$

Η χρήση της ροπογεννήτριας συνάρτησης από την άλλη επιτρέπει σε αρκετές περιπτώσεις την εύρεση της κατανομής της συνέλιξης καθώς η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος είναι γινόμενο ροπογεννητριών συναρτήσεων των τ.μ. εφόσον αυτές είναι ανεξάρτητες, δηλαδή

$$M_X(t) \cdot M_Z(t) = M_{X+Z}(t)$$

και, για $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \left(M_X(t)\right)^n$$

Μια άλλη εξίσου σημαντική περίπτωση που αφορά τη δημιουργία νέας κατανομής από διακριτή μίξη κατανομών. Η διακριτή μίξη κατανομών είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στη θεωρία κινδύνου ώστε να προσομοιώσει κινδύνους που έχουν διαφορετική συχνότητα σε μικρά, μεσαία και μεγάλα μεγέθη (Κούτρας, 2004).

Έστω τ.μ. $X_1,\ldots,X_n$ από διαφορετικές κατανομές με συνάρτηση πυκνότητας $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ αντίστοιχα, τότε η μίξη αυτών με συντελεστές (βάρη) $w_1,\ldots,w_n$, ώστε $w_1+\ldots+w_n = 1$, αποδίδει την νέα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f_i(x)$$

και ροπή k-τάξης αυτής $\sum_{i=1}^{n} w_i E\left(X_i^k\right)$

Στη θεωρία κινδύνου (Dickson, Hardy, Waters, 2009) τόσο το μέγεθος της ατομικής ζημιάς (*X*) αλλά και το πλήθος των ζημιών (*N*) είναι συνήθως άγνωστα εκ των προτέρων. Σε αυτή την περίπτωση εφόσον μοντελοποιηθούν κατάλληλα με κατανομή, τότε η συνολική ζημιά S περιγράφεται από το μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S = \begin{cases} X_1 + \cdots + X_N, & N > 0 \\ 0 & , N = 0 \end{cases} \qquad \alpha\nu\ f(0) = 0$$

ή

$$S = X_1 + \ldots + X_N, \text{ αν } f(0) \neq 0$$

Για μεγάλα χαρτοφυλάκια, ακολούθως του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ),

$$S \sim Normal(\mu, \sigma^2)$$

όπου,

$$\mu = E(S) = E(X) \cdot E(N), \quad \sigma^2 = Var(S) = Var(X) \cdot E(N) + Var(N) \cdot E^2(X)$$

Αν το χαρτοφυλάκιο χωρίζεται σε m-κατηγορίες, τότε

$$S = S_1 + \ldots + S_m$$

όπου $S_j = X_1^{(j)} + \ldots + X_{Nj}^{(j)}$, j=1,…,m ο επιμέρους συνολικός κίνδυνος της j- κατηγορίας, με ατομικό κίνδυνο τ.μ. $X^{(j)}$ και πλήθος κινδύνων τ.μ. N_j. Ισχύει,

$$E(S) = E(S_1) + \ldots + E(S_m)$$

$Var(S) = Var(S_1) + \ldots + Var(S_m)$ (λόγω ανεξαρτησίας χαρτοφυλακίων)
όπου, $E(S_j) = E(X^{(j)}) \cdot E(N_j)$
και $Var(S_j) = Var(X^{(j)}) \cdot E(N_j) + Var(N_j) \cdot E^2(X^{(j)})$

Η κατανομή της συνολικής ζημιάς προκύπτει είτε με χρήση ροπογεννήτριας συνάρτησης αν η τ.μ. X είναι συνεχής τ.μ.

$$M_S(t) = P_N\{M_X(t)\}$$

είτε με χρήση πιθανογεννήτριας συνάρτησης αν η τ.μ. X είναι διακριτή τ.μ.

$$P_S(t) = P_N\{P_X(t)\},$$

όπου P_S, P_N, P_X είναι οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των μεταβλητών S, N, X_i αντίστοιχα.
Έστω ότι η συνάρτηση ροπογεννήτριας της συνεχούς συνολικής ζημιάς είναι

$$M_S(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot M_1(t) + \ldots + \alpha_k \cdot M_k(t)$$

όπου $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=1$, και $M_1, \ldots, M_k$ είναι ροπογεννήτριες συναρτήσεις κατανομών, τότε η συνάρτηση κατανομής της συνολικής ζημιάς είναι

$$F_S(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot F_1(t)+\ldots+\alpha_k \cdot F_k(t), \qquad t \geq 0$$

και η συνάρτηση πυκνότητας

$$f_s(t) = \begin{cases} a_0 & , \quad t = 0 \\ a_1 f_1(t) + \cdots + a_k f_k(t), & t > 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση όπου η τ.μ. X είναι διακριτή, άρα και η συνολική ζημιά S είναι διακριτή τ.μ. τότε η συνάρτηση πιθανότητας $g(x) = P\ (S = x)$ είναι

$$= P(S = x) = g(x) = \begin{cases} P_N\big(f_x(0)\big), x = 0 & , \quad f_x(0) = 0 \\ P(N = 0), x = 0 & , \quad f_x(0) = 0 \\ \dfrac{1}{1 - af_x(0)} \displaystyle\sum_{i=1}^{x} \left(a + \frac{b}{x} i\right) f_x(i) g(x - i), & x \neq 0 \end{cases}$$

όπου a, b είναι παράμετροι της οικογένειας κατανομών $R(a, b, 0)$ με συνθήκη

$$P(N = n) = P(N = n - 1) \cdot \left(a + \frac{b}{n}\right), n = 1,2, \ldots$$

Στην οικογένεια αυτή κατανομών ανήκει η Poisson με παράμετρο $\lambda>0$ όπου $\alpha=0$ και $b = \lambda$, η αρνητική διωνυμική με παραμέτρους $r>0$ και $0<p<1$ όπου $\alpha=q$ και $b=(r-1)q$ και η διωνυμική με παραμέτρους n και $0<p<1$ με $\alpha = -(n + 1)p/q$ και $b=p/q$. Η γεωμετρική κατανομή είναι υποπερίπτωση της αρνητικής διωνυμικής με $r=1$ συνεπώς $\alpha=q$ και $b=0$.

Στην περίπτωση όπου η κατανομή της τμ N δεν είναι στην οικογένεια κατανομών $R(a, b, 0)$ τότε, η συνάρτηση πιθανότητας της S υπολογίζεται από τον τύπο

$$g(x) = P(S = x) = \sum_{i=1}^{n} f^{*(i)}(x) \cdot P(N = i)$$

Παράδειγμα κατανομής που δεν ανήκει στην οικογένεια κατανομών $R(a, b, 0)$ είναι η διακριτή ομοιόμορφη $N \in \{1, \ldots, k\}$ με πιθανότητες

$$P(N = i) = \begin{cases} 1/k, & i = 1, \ldots, k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Στις πιθανότητες γίνεται συχνά χρήση μιας οικογένειας τ.μ. X_1, X_2 ,…. Αν η οικογένεια αυτή έχει χρονική αναφορά, δηλαδή, $\{X_t : t \in T\}$, t είναι ο χρόνος, τότε ορίζεται ως στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό ή συνεχή χρόνο αν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο ή μη αριθμήσιμο αντίστοιχα (Πολίτης, 2017). Ειδικότερα, μια στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο λέμε ότι είναι ανέλιξη Markov όταν ικανοποιεί την κάτωθι σχέση:

$$P(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = P(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1})$$

και αντίστοιχα σε συνεχή χρόνο όταν ικανοποιεί την κάτωθι σχέση:

$$P\big(X_t = x | X_{t(n)} = x_{t(n)}, \ldots, X_{t(0)} = x_{t(0)}\big) = P\big(X_t = x | X_{t(n)} = x_{t(n)}\big),$$

$$t(0) < t(1) < \ldots < t(n)$$

Μια ανανεωτική ανέλιξη είναι μια στοχαστική απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Θεωρητικά, μια βασική σχέση που καθορίζει την ανανεωτική ανέλιξη X_t είναι $X_t \geq n$ όταν και μόνο όταν $Y_n \leq t$, δηλαδή έχουμε τουλάχιστον n- γεγονότα ως τον χρόνο t και ο χρόνος αναμονής έως ότου συμβούν n γεγονότα είναι το πολύ t.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1 Εισαγωγή

Η αποτίμηση του χρόνου χρεοκοπίας αποτέλεσε και αποτελεί ένα από τα κυρίαρχα ζητήματα με σκοπό είτε να ληφθούν τα απαραίτητα μέτρα αποφυγής της χρεοκοπίας ή ισοδυνάμως μετάθεσης αυτής στο διηνεκές. Στο Κεφάλαιο αυτό γίνεται αναλυτική παρουσίαση των βασικών αρχών που περιγράφουν την πιθανότητα και χρόνο χρεοκοπίας και παρατίθενται παραδείγματα μετάθεσης του χρόνου στο διηνεκές.

2.2 Βασικές αρχές

Θεωρούμε το ύψος ατομικής ζημιάς ως τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), έστω X, η οποία μοντελοποιείται από τα προηγούμενα έτη εμπειρίας και αναφέρεται σε ομοιογενή χαρτοφυλάκια κινδύνου (Πολίτης, 2017). Για την μοντελοποίηση της κατανομής της ατομικής ζημιάς εργαζόμαστε με βάση τον έλεγχο καλής προσαρμογής X^2του Pearson μιας κατανομής που υποθετικά θεωρούμε ότι προσαρμόζεται στα δεδομένα (μηδενική υπόθεση) που έχουν προκύψει από προηγούμενα έτη εμπειρίας.
Σε ότι αφορά το πλήθος ζημιών στη μονάδα χρόνου (π.χ. ένα έτος), πρόκειται για επίσης τυχαία μεταβλητή, έστω N, η οποία προσδιορίζεται συχνά ως κατανομή Poisson με στόχο να αναδείξει το μέγιστο βαθμό τυχαιότητας. Η συνάρτηση πιθανότητας της Poisson με παράμετρο λ>0 είναι

$$f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2, \dots.$$

με αναμενόμενη τιμή και διασπορά ίσες με λ, και ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Η παράμετρός της είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών στη μονάδα του χρόνου, έστω λ>0, και προσδιορίζεται από την εμπειρία ή άλλες πιο σύνθετες μεθόδους εκτίμησης πλαισιωμένες από έλεγχο υπόθεσης αναφορικά της ορθής επιλογής στην τιμή της παραμέτρου αυτής. Σε ότι αφορά τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ >0 είναι ο δειγματικός μέσος του πλήθους ζημιών των ν-προηγούμενων μοναδιαίων περιόδων:

$$\hat{\lambda} = \bar{N} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} N_i$$

οπου N_{i} είναι το παρατηρηθέν πλήθος ζημιών την i- μοναδιαία μονάδα χρόνου, i=1,…,ν, για ν το πλήθος μετρήσεων. Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ>0 είναι αμερόληπτος και ελάχιστης διασποράς (Πολίτης, 2017).

Για να είμαστε περισσότερο ακριβείς, η παράμετρος λ>0 δύναται να είναι και η ίδια μια τυχαία μεταβλητή, η οποία μεταβάλλεται μεταξύ των συνθηκών. Σε αυτή την περίπτωση, το πλήθος των ζημιών N εκφράζεται ως δεσμευμένη κατανομή $N|\lambda$ ~Poisson(λ), όπου λ είναι μια άλλη κατανομή. Σε αυτήν την περίπτωση ο αναμενόμενος αριθμός ζημιών ανεξάρτητα της παραμέτρου λ είναι

$$E(N) = E\{E(N|\lambda)\} = E(\lambda)$$

και η διασπορά αντίστοιχα

$$Var(N) = Var\{E(N|\lambda)\} + E\{Var(N|\lambda)\} = Var\{\lambda\} + E\{\lambda\}$$

Η επέκταση της μελέτης σε χρονικό διάστημα (0, t), t>0 επαναπροσδιορίζει το πλήθος των ζημιών, δηλαδή $N(t)$ και χαρακτηρίζεται ως ανέλιξη Poisson με παράμετρο λt. Σε αυτή την περίπτωση η σημασιολογία της παραμέτρου λ>0 επεκτείνεται στην αναφορά της έντασης ζημιών. Προφανώς η ένταση ζημιών λ αναφέρεται σε χαρτοφυλάκιο ομοιογενών κινδύνων. Για παράδειγμα, η ένταση ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών αυτοκινήτου αναμένεται να είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την ένταση ζημιών σε χαρτοφυλάκιο ζημιών δεξαμενοπλοίων μεταφοράς υγρού φορτίου μεγάλης

χωρητικότητας. Στη δεύτερη όμως περίπτωση το μέγεθος της ζημιάς αναμένεται να είναι πολυ μεγαλύτερο (καταστροφικός κίνδυνος) (Πολίτης, 2017).
Στη θεωρία κινδύνου θεωρούμε συνήθως ότι η ανέλιξη του πλήθους ζημιών $N(t)$ είναι ανανεωτική, δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Για την περίπτωση της ανέλιξης Poisson, οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι τ.μ. *ό*που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$, με συνάρτηση κατανομής

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}, y > 0\ .$$

Η εκθετική κατανομή δεν έχει μνήμη, πράγματι η πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < s + y$ (έως την επόμενη απαίτηση) δοθέντος ότι $Y>s$ είναι ίση με την πιθανότητα να μεσολαβήσει χρονικό διάστημα $Y < y$:

$$P(Y < s + y | Y > s) = \frac{P(s < Y < s + y)}{P(Y > s)} = \frac{F_Y(s + y) - F_Y(s)}{\bar{F}_Y(s)}$$

$$= \frac{\bar{F}_Y(s) - \bar{F}_Y(s + y)}{\bar{F}_Y(s)} = 1 - e^{-\lambda y} = P(Y < y)$$

Αντίστοιχα η ανέλιξη Poisson δεν έχει μνήμη, καθώς αν υποθέσουμε ότι στο χρονικό διάστημα $(0,\ t)$ συμβαίνουν k-ζημιές, τότε η πιθανότητα να συμβούν $k + n$ ζημιές στο χρονικό διάστημα $(0,\ s)$, $s > t$ είναι ίση με την πιθανότητα να συμβούν n- ζημιές στο διάστημα $(0, s - t)$.

$$P(N(s) = k + n | N(t) = k) = \frac{P(N(t) = k, N(s) = k + n)}{P(N(t) = k)} = \frac{P(N(t) = k, N(s - t) = n)}{P(N(t) = k)}$$

$$= \frac{P(N(t) = k)\ P(N(s - t) = n)}{P(N(t) = k)} = P(N(s - t) = n)$$

Συνδυάζοντας το πλήθος ζημιών και το ύψος ζημιάς στο χρονικό διάστημα $(0,t)$, οι συνολικές ζημιές, όπως εξελίσσονται στο χρόνο, παριστάνονται με μία σύνθετη ανέλιξη Poisson

$$S(t) \sim CP(\lambda t, fX)$$

όπου f_X είναι η συνάρτηση πυκνότητας ή πιθανότητας της ατομικής ζημιάς, και περιγράφεται από το κάτωθι μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S(t) = \begin{cases} 0 & ,N(t) = 0 \\ X_1 + \cdots X_{N(t)} & ,N(t) > 0 \end{cases}$$

2.3 Κλασσικό μοντέλο Χρεοκοπίας

2.3.1 Σε συνεχή χρόνο t>0

Βασικό μέλημα μιας εταιρείας η οποία έχει ταμειακές ροές, εισροές και εκροές είναι να αποφύγει ή κατ' ελάχιστον να μειώσει την πιθανότητα χρεοκοπίας επιβιώνοντας έτσι για μεγάλο χρονικό διάστημα (θεωρητικά, στο διηνεκές). Στην περίπτωση αυτή μελετά για κάθε χρονική στιγμή t την ανέλιξη πλεονάσματος $u(t)$ σε σχέση με το απόθεμα $u = u(0)$, την ένταση ταμειακών εισροών c>0 (εισροές στη μονάδα του χρόνου) και την ανέλιξη των συνολικών εκροών $S(t)$:

$$u(t) = u + ct - S(t)$$

Η εταιρεία προγραμματίζει την ένταση ταμειακών εισροών c (ένταση του ασφαλίστρου) να υπερβαίνει την αναμενόμενη συνολική ζημιά στη μονάδα του χρόνου $E(S(t)) = \lambda\, E(X)$, διότι σε αντίθετη περίπτωση η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι βέβαιη (Πολίτης, 2017).

Σημασιολογικά, η σχέση $c > \lambda E(X)$ είναι αναγκαία αλλά μη ικανή μη χρεοκοπίας, καθώς μια μεγάλη σε ύψος ζημιά X δύναται να δημιουργήσει έλλειμμα πλεονάσματος. Για το λόγο αυτό η εταιρεία χρειάζεται να έχει αναλογιστικό τμήμα που να εκτιμά την πιθανότητα μεγάλου ύψους ζημιάς.

Πώς χρεοκοπεί όμως μια εταιρεία μια χρονική στιγμή *T;* Αν το πλεόνασμα γίνει κάποια στιγμή αρνητικό, οπότε τότε είναι έλλειμα πλεονάσματος:

$$u(T) < 0 \Leftrightarrow S(T) > u + c\,T$$

Εδώ T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, που ορίζεται από τη σχέση

$$T = \begin{cases} inf\{\, t: U(t) < 0\} \\ \infty, U(t) > 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

και είναι μία ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, εφόσον μπορεί με θετική πιθανότητα να απειρίζεται.

Όταν το πρόβλημα της χρεοκοπίας εξετάζεται σε πεπερασμένο χρόνο, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως διμετάβλητη συνάρτηση του αποθέματος και του χρόνου

$$\Psi(u,t) = \mathrm{P_r}\left(\exists\tau, 0 < \tau < t : u(\tau) < 0\right)$$

η πιθανότητα μειώνεται για μεγαλύτερο απόθεμα, $\frac{\partial\Psi}{\partial u} < 0$ και αυξάνεται στο χρόνο, $\frac{\partial\Psi}{\partial t} > 0$. Είναι γεγονός λοιπόν ότι υψηλό απόθεμα μειώνει μεν την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς όμως να είναι ικανή συνθήκη να τη διατηρήσει χαμηλή στο χρόνο. Για το λόγο αυτό επιβάλλεται αλλαγή στρατηγικής λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα σε ότι αφορά κυρίως την μοντελοποίηση της τ.μ. ύψους ζημιάς ή την θεώρηση της έντασης των ζημιών ως συνάρτηση του χρόνου $\lambda(t)$ παρά σταθερή. Στο διηνεκές πάντως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά μονομεταβλητή συνάρτηση ως προς το αρχικό απόθεμα:

$$\Psi(u) = \lim_{t\to\infty}\Psi(u,t)$$

Μια βασική και σχετικά απλή παράμετρος που καθορίζει τον κίνδυνο χρεοκοπίας είναι το περιθώριο ασφάλειας θ>0 που εκφράζει το σχετικό αναμενόμενο κέρδος για την εταιρεία στη μονάδα του χρόνου:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1$$

Εύλογα θα παρατηρούσε κανείς ότι όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφάλειας τόσο μειώνεται ο κίνδυνος χρεοκοπίας. Αυτό ισχύει εν μέρει, αλλά υψηλές τιμές του περιθωρίου ασφάλειας, κυρίως θ>1, θέτουν θέμα χαμηλής ανταγωνιστικότητας βάζοντας σε κίνδυνο μελλοντικές ταμειακές εισροές (Πολίτης, 2017).

Το αναμενόμενο ύψος ζημιάς $E(X)$ και το περιθώριο ασφάλειας θ αποτελούν βασικές παραμέτρους για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας

$$\delta(u) = 1 - \Psi(u)$$

η οποία υπολογίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$(\theta + 1)E(X)\frac{d\delta(u)}{du} = \delta(u) - \int_0^u \delta(u-x)f(x)dx$$

με αρχική τιμή $\delta(0) = \theta/(1+\theta)$.

Η εταιρεία δύναται να εκτιμήσει το κάτω και πάνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας στο διηνεκές σύμφωνα με την ανισότητα:

$$\frac{\bar{H}(u)}{\bar{H}(u)+\theta} \leq \Psi(u) \leq e^{-R\cdot u}$$

όπου

$$\bar{H}(u) = \frac{1}{E(X)}\int_u^{\infty} \bar{F}_X(x)dx$$

και ο συντελεστής προσαρμογής R είναι θετική λύση της εξίσωσης του Lundberg:

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R}M_X(R) = \frac{c}{\lambda}$$

όπου $M_X(t)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του ύψους ατομικής ζημιάς X
Στην ειδική περίπτωση όπου η ατομική απαίτηση είναι εκθετική κατανομή παραμέτρου έστω $\beta>0$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές υπολογίζεται με ακρίβεια από την σχέση

$$\psi(u) = \psi(0)\cdot e^{-R\cdot u}, \quad R = \beta\cdot\frac{\theta}{\theta+1}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει τη δυνατότητα να αναθεωρήσουμε το αποθεματικό ώστε να μειώσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας κάτω από ορισμένο επιθυμητό όριο p:

$$\psi(u) \leq p \Leftrightarrow \psi(0)\cdot e^{-R\cdot u} \leq p \Leftrightarrow e^{-R\cdot u} \leq \frac{p}{\psi(0)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -R\cdot u \leq \ln\left(\frac{p}{\psi(0)}\right) \Leftrightarrow u \geq -\frac{1}{R}\cdot\ln\left(\frac{p}{\psi(0)}\right)$$

Άρα, για την επίτευξη αυτή απαιτείται ελάχιστο αποθεματικό $-\frac{1}{R}\cdot\ln\left(\frac{p}{\psi(0)}\right)$

Ένα άνω φράγμα για το συντελεστή αυτόν δίνεται από τη σχέση

$$R \leq \frac{2E(X)\theta}{E(X^2)}$$

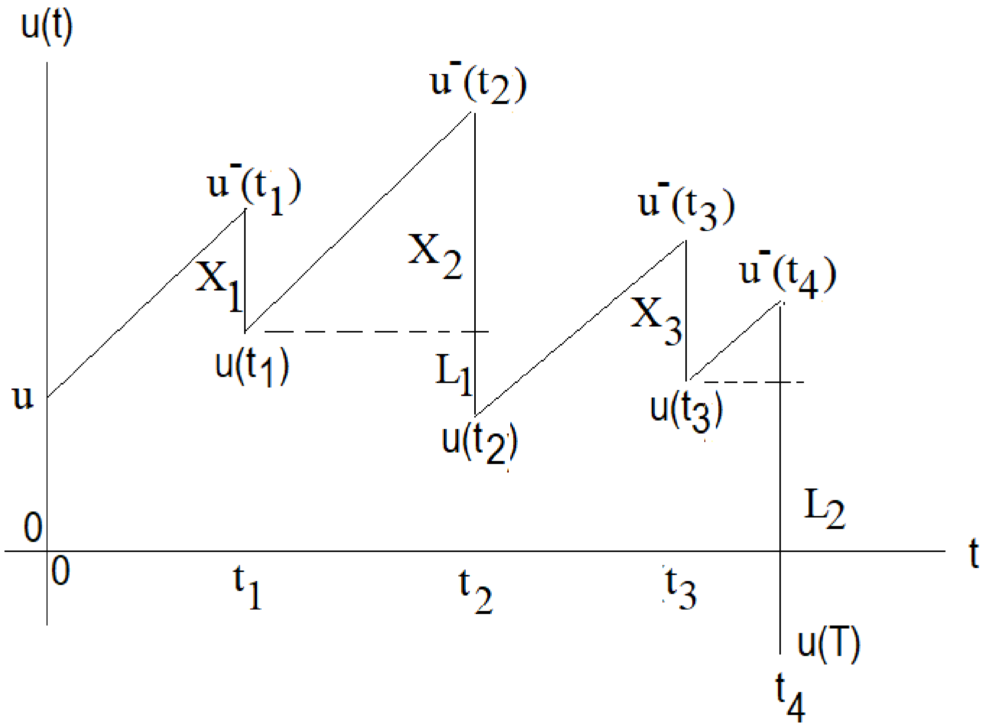
Διαγραμματικά, η ανέλιξη πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο ακολουθεί μια διαδρομή ανόδου με κλίση όπου κατόπιν διακόπτεται από τις ατομικές απαιτήσεις με τη μορφή «πτώσης». Για να μελετήσουμε το φαινόμενο της χρεοκοπίας, εξετάζουμε τις χρονικές στιγμές όπου παρατηρείται ένα νέο ελάχιστο στην ανέλιξη του πλεονάσματος.
Συγκεκριμένα, μετά την πληρωμή μιας απαίτησης η τιμή του πλεονάσματος μπορεί να:

α) παρουσιάζει ένα νέο ελάχιστο,

β) μην παρουσιάζει ένα νέο ελάχιστο,

γ) είναι υπό το μηδέν, οπότε έχουμε χρεοκοπία.

Ας δείξουμε εδώ ένα διάγραμμα με τις αναλυτικές φάσεις.



u είναι το απόθεμα τη χρονική στιγμή t=0 (u = $u(0)$)

t_j είναι οι χρόνοι απαιτήσεων

$X_1, X_2, \ldots$ είναι τα μεγέθη των ατομικών απαιτήσεων

$u(t_j)$ είναι το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t_j

$u^{-}(t_j) = u(t_j) + X_j$ είναι το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t_j ακριβώς πριν την απαίτηση X_j

$L_j = -\min\{u(t_{i+1}) - u(t_i), 0\}$είναι η πτώση πλεονάσματος

$u(T)<0$ είναι το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

Μεταξύ των απαιτήσεων το πλεόνασμα έχει γραμμική θετική εξέλιξη. Στο χρόνο της απαίτησης φαίνεται ξεκάθαρα η πτώση που μειώνει στιγμιαία το πλεόνασμα.

Το εν λόγω διάγραμμα σχεδιάστηκε για την καλύτερη δυνατή κατανόηση και υποθέτει τέσσερεις συνολικά απαιτήσεις όπου στη δε τέταρτη έχουμε χρεοκοπία.

Στο παραπάνω γράφημα παρουσιάζονται οι 4 απαιτήσεις όπου οδηγούν σε χρεοκοπία (με την τελευταία απαίτηση). Οι πτώσεις πλεονάσματος L_1και L_2 αντιστοιχούν σε χρόνους t_2 και t_4, δηλαδή η ανέλιξη παρουσιάζει ελάχιστο μετά την πληρωμή της 2ης και της 4ης απαίτησης

(Πολίτης, 2017). Το άθροισμα των πτώσεων πλεονάσματος $L_1 + L_2 = L$ είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια με ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_L(u) = \frac{\theta}{1+\theta-M_{L_1}(u)}$$

Γενικότερα η πτώση πλεονάσματος είναι επίσης τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x \left(1-F_X(t)\right) dt, \qquad x>0$$

Μια σημαντική πληροφόρηση που επιθυμεί κάθε εταιρεία είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη απαίτηση που θα σημάνει και την πρόωρη αναστολή λειτουργίας της ενδεχομένως. Η πιθανότητα αυτή ορίζεται ως

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \left(1-F_X\left(u+c\cdot t\right)\right) dt$$

Παράδειγμα με εφαρμογή σε συνεχές χρόνο

Έστω το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχές χρόνο, όπου η ατομική απαίτηση είναι τ.μ. Χ εκθετική κατανομή παραμέτρου β = 0.1, άρα η μέση ατομική απαίτηση είναι $E(X)$=10 ν.μ. Έστω ότι ο ρυθμός πληρωμής ασφαλίστρων είναι c=3 ν.μ., ο ρυθμός απαίτησης λ=0.1, δηλαδή οι αφίξεις απαιτήσεων ακολουθούν Poisson με παράμετρο $0.1t$ στο διάστημα (0, t), και το απόθεμα της εταιρείας είναι u=10 ν.μ.

Τότε παρατηρούμε ότι η χρεοκοπία στο διηνεκές είναι αβέβαιη διότι c = 3 > 1. Αυτό δεν διασφαλίζει 100% τη μη χρεοκοπία, αλλά το αβέβαιο αυτής.

Το περιθώριο ασφάλειας είναι θ = 2 > 0, υψηλό εφόσον είναι μεγαλύτερο από την τιμή 1 που καθιστά την εταιρεία λιγότερο ανταγωνιστική ή ελκυστική σε ότι αφορά το ασφάλιστρο. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα η επιλογή αυτού του συντελεστή θ χαρακτηρίζει την εταιρεία περισσότερο κινδυνόφοβη έναντι κινδυνόφιλη. Πράγματι, ακόμη και χωρίς αποθεματικό (u=0) η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ψ(0) = 0.3333.

Η εταιρεία μπορεί να έχει ακριβή εικόνα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές $(\psi(u,t),\ t \to \infty)$ υπολογίζοντας αρχικά το συντελεστή προσαρμογής R = 0.0667, οπότε και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι 17.11%. Για την περίπτωση που θα επιθυμούσε η εταιρεία να μειώσει κάτω από 5% την πιθανότητα αυτή, τότε θα όφειλε να έχει αρχικό αποθεματικό 18.44 ν.μ., πράγματι αυξημένο.

Αρχικοποιώντας το πρόβλημα, δηλαδή με αρχικό αποθεματικό 10 ν.μ., η πτώση πλεονάσματος είναι επίσης εκθετική κατανομή παραμέτρου β και η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη απαίτηση είναι 9.2%. Αν το αποθεματικό αρχικά είναι τόσο όσο (18.44 ν.μ) να επιτυγχάνεται χρεοκοπία στο διηνεκές το πολύ 5%, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με την πρώτη απαίτηση μειώνεται από 9.2% σε 3.95%.

Η πρότασή μας στην παραπάνω εταιρεία θα ήταν να μειώσει το περιθώριο ασφάλειας μειώνοντας το ρυθμό ασφαλίστρου ώστε να αυξήσει την ανταγωνιστικότητα χωρίς να κινδυνεύει να χρεοκοπήσει διότι οι πιθανότητες είτε με την πρώτη απαίτηση είτε στο διηνεκές είναι πράγματι μικρές.

2.3.2 Σε διακριτό χρόνο n

Σε αντίθεση με τη συνέχεια του χρόνου όπου η χρεοκοπία συμβαίνει οποιαδήποτε στιγμή το πλεόνασμα γίνει αρνητικό, η διάκριση του χρόνου σε περιόδους περιορίζει την περίπτωση χρεοκοπίας μόνο σε αυτές τις διακριτές περιόδους (Πολίτης, 2017). Έτσι, η εταιρεία υπολογίζει το πλεόνασμα σε περιόδους 1, 2, …, n, …:

$$U(n) = u + c \cdot n - S(n)$$

όπου $S(n)$ είναι το άθροισμα των απαιτήσεων $W_1 + \ldots + W_n$ ανά χρονική περίοδο και κάθε περιοδική απαίτηση είναι μοντέλο συλλογικού κινδύνου σε σχέση με το ύψος ατομικής ζημιάς και το πλήθος ζημιών N που είναι κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda>0$, άρα η περιοδική απαίτηση είναι σύνθετη Poisson:

$$W \sim \mathrm{CP}(\lambda, f_X)$$

Συνδυάζοντας την ένταση c του ασφαλίστρου και την περιοδική απαίτηση W, το κέρδος περιόδου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $G = c - W$ και το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας στο διακριτό χρόνο είναι:

$$u(n) = u + \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Στο μοντέλο αυτό η περίοδος χρεοκοπίας είναι

$$\tilde{T} = \min\{n: u(n) \leq 0, u(n-1) > 0\}$$

και ο συντελεστής προσαρμογής $\tilde{R}$ δύναται εκτός από την εξίσωση του Lundberg να εκτιμηθεί από την εξίσωση της ροπογεννήτριας συνάρτησης των περιοδικών απαιτήσεων

$$M_W(\tilde{R}) = e^{c\tilde{R}}$$

ή του περιοδικού κέρδους

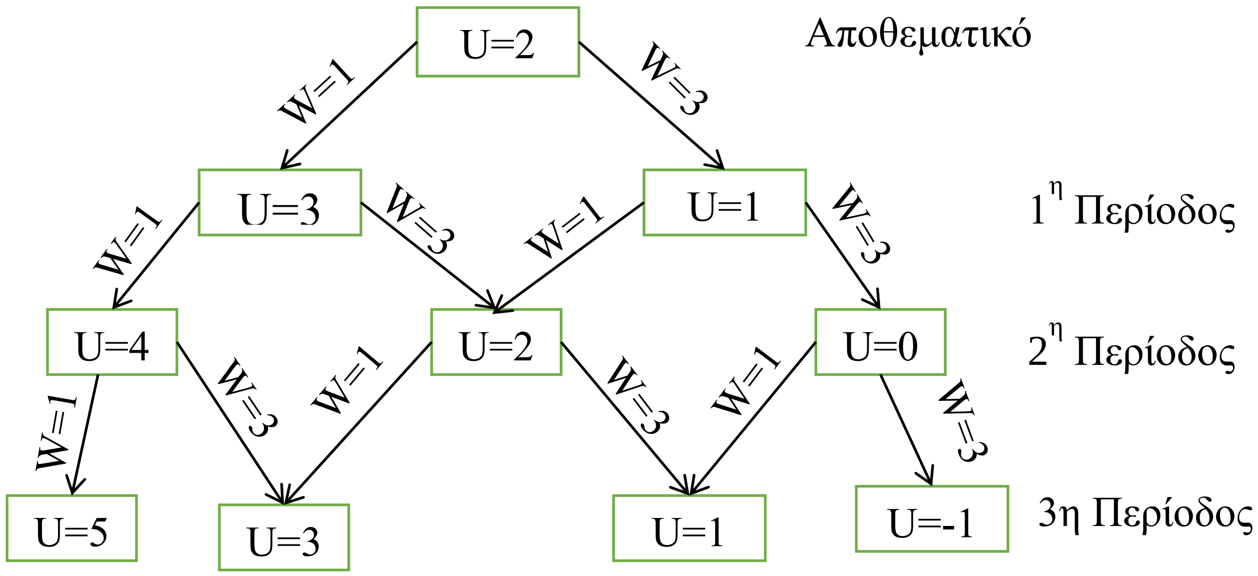
$$M_G(-\tilde{R}) = 1$$

Τέλος, η πιθανότητα χρεοκοπίας με έλλειμμα χρεοκοπίας $u_{\tilde{T}} < 0$ μπορεί να βρεθεί με βάση τη σχέση

$$\tilde{\Psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E\left(e^{-\tilde{R}u_{\tilde{T}}}\right)}$$

Παράδειγμα με εφαρμογή σε διακριτό χρόνο

Έστω ότι το αποθεματικό της εταιρείας είναι u=2 ν.μ. και η περιοδική απαίτηση είναι τ.μ. W με τιμές στο σύνολο {1, 3} με συνάρτηση πιθανότητας $P(W$=1)=0.6 και $P(W$=3)=0.4. Έστω ότι η εταιρεία θέτει ρυθμό ασφαλίστρου c=2. Παρατηρούμε ότι $c > E(W)$=1.8, άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας στο διηνεκές δεν είναι βέβαιη.
Τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη ροή του αποθεματικού ανά έτος με το κάτωθι δενδροδιάγραμμα, έστω για 3 περιόδους:



Σύμφωνα με την παραπάνω ροή του αποθεματικού για κάθε χρονική περίοδο διακρίνονται δύο περιπτώσεις περιοδικών απαιτήσεων. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει περίπτωση χρεοκοπίας είτε την πρώτη είτε την δεύτερη περίοδο, δηλαδή $P(\tilde{T} \leq 2) = 0$. Η χρεοκοπία είναι δυνατή την τρίτη περίοδο ($u_3 = -1 < 0$) αν κάθε ετήσια περιοδική απαίτηση είναι 3ν.μ. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι και λόγω ισονομίας και ανεξαρτησίας των περιοδικών απαιτήσεων:

$$P\left(\tilde{T} = 3\right) = P\left(W_1 = 3, W_2 = 3, W_3 = 3\right) = \left\{P\left(W_1 = 3\right)\right\}^3 = 6.4\%$$

Επίσης δίνεται και μια επαλήθευση αναφορικά με την μη χρεοκοπία στο διηνεκές αν ακολουθήσουμε το αριστερό μονοπάτι όπου η περιοδική απαίτηση είναι 1 ν.μ. και το αποθεματικό αυξάνεται ετησίως κατά 1 ν.μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γενικά μέτρα κινδύνου

3.1 Γενική εισαγωγή

Ο προσδιορισμός του κινδύνου σε μια επιχείρηση αποτελεί ζήτημα επιβίωσης αρχικά ώστε να καλυφθεί το μέγεθός του. Με την έννοια προσδιορισμού αναφερόμαστε στην μοντελοποίηση του εφόσον συνάδουν τυχαία χαρακτηριστικά στο μέγεθός του. Στο Κεφάλαιο 2 έχουμε αναφέρει αναλυτικά τα χαρακτηριστικά αυτά (συνάρτηση κατανομής, κλπ.) που συμβάλλουν στην βέλτιστη προσέγγιση του κινδύνου. Αρχικά θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την ετερογένεια των κινδύνων δημιουργώντας κατηγορίες αυτών, ώστε εντός κάθε κατηγορίας να υφίστανται ομοιογένεια (βλ. Κεφάλαιο 2, μοντέλο συλλογικού κινδύνου) και μεταξύ των κατηγοριών ετερογένεια. Για παράδειγμα, σε μια κατηγορία θα τοποθετήσουμε την ασφάλιση πλοίων, σε άλλη κατηγορία την ασφάλιση επενδυτικών ομολόγων, σε άλλη κατηγορία τη ασφάλιση βιομηχανικού εξοπλισμού κ.ο.κ.

3.2 Εισαγωγή στον κίνδυνο

Δύο βασικές κατηγορίες (Παπαβασιλείου, 2019) αποτελούν τις διαστάσεις του κινδύνου:
ο *χρηματοοικονομικός κίνδυνος* και ο *ασφαλιστικός κίνδυνος*.
Ο πρώτος αναφέρεται στη ζημιά από επένδυση λόγω μεταβολής των οικονομικών δεδομένων σε επίπεδο κράτους ή σε παγκόσμιο επίπεδο. Οι συνιστώσες του χρηματοοικονομικού κινδύνου είναι

- Ο *κίνδυνος αγοράς*, που προκύπτει από την αλληλεπίδραση αγοραίων τιμών που αφορούν τη μεταβολή στην αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας σε σχέση με τις υποχρεώσεις αυτής που επίσης μεταβάλλονται λόγω πληθωρισμού ή υποτίμηση νομίσματος

- Ο *πιστωτικός κίνδυνος* που προκύπτει από την αδυναμία του οφειλέτη να ανταπεξέλθει στην οικονομική εκπλήρωση των υποχρεώσεών του, οπότε και αυτή μετακυλύεται στους πιστωτές, κατόπιν στο κράτος, κατόπιν στην ένωση κρατών (αν υφίσταται) κλπ. Για παράδειγμα, μια εγχώρια ναυτιλιακή εταιρεία έχοντας λάβει δάνειο από την πιστώτρια τράπεζα, αδυνατεί στην αποπληρωμή του ακόμα και κατόπιν εκποίησης των περιουσιακών στοιχείων (πλοία, ακίνητα, κλπ.). Η πιστώτρια τράπεζα έγκειται υπό την εποπτεία της Τράπεζας της Ελλάδος (επίσημη ιστοσελίδα, https://www.bankofgreece.gr/trapeza/rolos-kai-armodiotites), η οποία επίσης έγκειται υπό την εποπτεία της Ευρωπαϊκής Κεντρικής Τράπεζας
- Ο κίνδυνος ρευστότητας, δηλαδή η μείωση του αποθεματικού λόγω αύξησης των ζημιών σε σχέση με σταθερά έσοδα όπως για παράδειγμα αναλύσαμε στο κλασσικό μοντέλο ανέλιξης πλεονάσματος (Κεφάλαιο 2).

Σχετικά με τον ασφαλιστικό κίνδυνο αναφερόμαστε στις κατηγορίες Ασφαλίσεων Ζωής και Ασφαλίσεων κατά Ζημιών.
Στην περίπτωση Ασφαλίσεων Ζωής περιλαμβάνονται η υγεία, η αποταμίευση, η συνταξιοδότηση, τα ατυχήματα, η απώλεια εισοδήματος κλπ.
Στην περίπτωση Ασφαλίσεων κατά Ζημιών αναφερόμαστε στην αβεβαιότητα των τεχνικών αποτελεσμάτων της ασφαλιστικής εταιρείας. Η αβεβαιότητα αναφέρεται στον:

- *Κίνδυνο ασφαλίστρων*, που αφορά τα ασφάλιστρα όταν δεν επαρκούν για την κάλυψη των αποζημιώσεων (Αντζουλάκος, 2005). Για παράδειγμα, ασφαλίζεται με ισόβια κάλυψη ένα άτομο ώστε σε περίπτωση θανάτου να εισπράξει ο δικαιούχος αποζημίωση. Ας υποθέσουμε ότι με βάση τα δημογραφικά χαρακτηριστικά ανήκει σε κατηγορία χαμηλού κινδύνου που εκφράζεται από χαμηλή ένταση θνησιμότητας, άρα και υψηλό προσδόκιμο ζωής. Συνεπώς, τα ασφάλιστρα που θα καταβάλλει κατά την έναρξη της ασφάλισης αναμένονται να τοκισθούν από την ασφαλιστική ώστε να δημιουργηθεί απόθεμα για την κάλυψη της αποζημίωσης τη στιγμή του θανάτου. Εν τούτοις, ένα απροσδόκητο συμβάν που οδηγεί σε θάνατο πολύ κοντά χρονικά στην έναρξη της ασφάλισης οδηγεί σε εκροή σημαντικού ποσού από τα ταμεία της ασφαλιστικής

- *Κίνδυνος αποθεμάτων,* λόγω διακυμάνσεων στους χρόνους απαίτησης, ένταση απαιτήσεων (υψηλός ρυθμός αφίξεων με βάση την κατανομή Poisson που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 2), σφοδρότητα απαιτήσεων (μέγεθος απαιτήσεων, επίσης βλ. Κεφάλαιο 2)
- *Κίνδυνος καταστροφών,* λόγω απρόβλεπτων φαινομένων (π.χ. σεισμοί, εκρήξεις σε πυρηνικά εργοστάσια, κλπ.) που οδηγούν σε μη αναμενόμενες εκταμιεύσεις αποζημιώσεων.

Σύμφωνα με την μελέτη του Παπαβασιλείου (2019) είναι σημαντικό να προβλεφθεί η μελλοντική τιμή του χαρτοφυλακίου ως άθροισμα κινδύνων. Δηλαδή, μας ενδιαφέρει τόσο το μέγεθος του κινδύνου αλλά και η δυνατότητα κάλυψης αυτού.

Στο βιβλίο των Dickson, Hardy, Waters (2009), για την ασφαλιστική εταιρεία ο οργανισμός που ασφαλίζεται αποτελεί κίνδυνο και η απόφαση για ασφάλιση περιέχει ρίσκο. Το ρίσκο αυξάνεται όταν αγνοούνται βασικές παράμετροι. Για παράδειγμα, ένας οργανισμός επιθυμεί να ασφαλισθεί ώστε να μειώσει τον κίνδυνο απώλειας ταμειακών ροών λόγω πιθανού ατυχήματος ή απρόβλεπτης μείωσης των πωλήσεων, και η επιθυμία αυτή είναι λογικά μεγαλύτερη αν δεν έχει αναπροσαρμόσει τη λειτουργία του ή παραγωγή σε σχέση με τις τρέχουσες κοινωνικές και οικονομικές συνθήκες. Η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να γνωρίζει την οικονομική κατάσταση του οργανισμού που ασφαλίζει όπως επίσης και την όποια επένδυση σε παραγωγή προϊόντος ώστε να κάνει ορθολογιστική αποτίμηση του κινδύνου ασφάλισης του οργανισμού αυτού. Γενικότερα, για έναν ασφαλιστικό οργανισμό, εταιρεία ασφαλιστική ή αντασφαλιστική, ο εντοπισμός και η διαχείριση των κινδύνων θα πρέπει να είναι ο κεντρικός στόχος της στρατηγικής διαχείρισης κάθε οργανισμού με στόχο οι κίνδυνοι να εντοπίζονται, να παρακολουθούνται, να διαχειρίζονται μεθοδικά και σε συνεχή βάση ώστε να ελαχιστοποιούνται. Ο κίνδυνος αφορά την ζημιά που θα αποφέρει στην ασφαλιστική ή αντασφαλιστική εταιρεία ένα μεμονωμένο άτομο ή μια επιχειρηματική δραστηριότητα ενός οργανισμού.

Παρότι ένα μεμονωμένο άτομο κατατάσσεται σε χαμηλό μέγεθος κινδύνου συγκριτικά με το μέγεθος μιας μεγάλης επένδυσης (π.χ. αγορά εξοπλισμού για παραγωγή νέου προϊόντος), κινητής αξίας (π.χ. αεροσκάφη ή δεξαμενόπλοια μεγάλης χωρητικότητας) ή ακίνητης αξίας (π.χ. πολυώροφα κτίρια), εντούτοις η συχνότητα εμφάνισης απαιτήσεων χαμηλού κινδύνου είναι πολύ μεγαλύτερη της συχνότητας εμφάνισης υψηλών κινδύνων (πολύ απλό, αν θεωρήσουμε την εκθετική κατανομή μεγέθους κινδύνου). Συνεπώς, στο αναλογιστικό τμήμα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη σημασία της αποτίμησης των μικρών μεν αλλά συχνότερων κινδύνων δε.

3.3 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Γενικά στη μέτρηση κινδύνου ισχύει ένα αξίωμα (Παπαβασιλείου, 2019): *δεν υπάρχει σωστό μέτρο κινδύνου, καθώς διαφορετικά μέτρα κινδύνου αντιπροσωπεύουν διαφορετικούς τρόπους σκέψης*. Εντούτοις, η μελέτη των μέτρων κινδύνου είναι σε συνάφεια με τις αναλογιστικές αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου. Σύμφωνα με τις αρχές αυτές (Hardy, 2006), έστω μια ασφαλιστική εταιρεία η οποία υπόκειται σε κίνδυνο Χ. Η γενική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου Π στηρίζεται στο ελάχιστο ποσό Π το οποίο είναι αυτό που καταβάλλει ο ασφαλισμένος είτε ιδιώτης είτε ασφαλισμένη εταιρεία για να γίνει σύναψη της σχέσης μεταξύ των δύο πλευρών. Βασική αρχή, το συνολικό ασφάλιστρο να υπερβαίνει τη συνολική απαίτηση:

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i \geq \sum_{i=1}^{n} X_i$$

όπου Π_i είναι το ασφάλιστρο που καταβάλλει η εταιρεία i για την κάλυψη του κινδύνου X_i. Δεν υπάρχει εκ των προτέρων σχέση μεταξύ των τιμών αυτών, αλλά μόνο σε επίπεδο μέσων τιμών, δηλαδή

$$\Pi_i \geq E\left(X_i\right)$$

και εισάγοντας επίσης το περιθώριο ασφάλειας $\theta > 0$

$$\Pi_i \geq E\left(X_i\right)\cdot\left(1+\theta_i\right)$$

ώστε να μειώσει τον κίνδυνο.

Παρακάτω παρουσιάζονται τρόποι υπολογισμοί του ασφαλίστρου (Hardy, 2006),

1) Καθαρό ενιαίο ασφάλιστρο, που στηρίζεται στην αρχή της ισοδυναμίας

$$\Pi_i = E\left(X_i\right)$$

Εκφράζει ουδέτερη στάση απέναντι στον κίνδυνο.

2) Καθαρό ενιαίο ασφάλιστρο, που στηρίζεται στην επιβάρυνση θ>0

$$\Pi_i = E\left(X_i\right)\cdot\left(1+\theta\right)$$

Εκφράζει περισσότερο αμυντική στάση απέναντι στον κίνδυνο για μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή επιβάρυνσης θ.

3) Καθαρό ενιαίο ασφάλιστρο, που στηρίζεται στην αρχή της διακύμανσης με παράγοντα α>0

$$\Pi_i = E\left(X_i\right) + \alpha \cdot Var\left(X_i\right)$$

Λαμβάνει υπόψη τη μεταβλητότητα του κινδύνου ώστε όσο περισσότερο μεταβλητότητα, άρα και αβεβαιότητα, τόσο περισσότερη αμυντική στάση.

4) Η περίπτωση (3) αλλά για τυπική απόκλιση αντί της διασποράς

$$\Pi_i = E(X_i) + \alpha \cdot \sigma(X_i)$$

5) Καθαρό ενιαίο ασφάλιστρο, που στηρίζεται στην εκθετική αρχή

$$\Pi_i = \frac{1}{\alpha}\log\left(m_i(a)\right)$$

όπου m_i είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της X_i και η παράμετρος $\alpha>0$ είναι παράμετρος αποστροφή στον κίνδυνο, ώστε αν α πολύ κοντά στο 0, προκύπτει το καθαρό ασφάλιστρο, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του α λαμβάνεται η μέγιστη τιμή του κινδύνου.

Κάνοντας μια επισκόπηση των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου, ξεκινάμε από τον Buhlmann H. (1970), ο οποίος εισήγαγε την αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου μηδενικής ωφελιμότητας:

$$u(0) = E[u(\Pi - X)]$$

όπου $u(x)$ είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας, $u(0)$ είναι η ωφελιμότητα μηδενικού κεφαλαίου (πριν την ασφάλιση) και $u(\Pi - X)$ η ωφελιμότητα μετά από μια ασφάλιση κατά του κινδύνου X με ασφάλιστρο Π.

Το μέτρο κινδύνου μέσης τιμής είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$f(\Pi) = E(f(X))$$

όπου f είναι μια μη φθίνουσα και μη αρνητική συνάρτηση πεπερασμένη. Για $f(x) = x$ έχουμε το καθαρό ασφάλιστρο, ενώ για $f(x) = e^{\alpha x}$ την εκθετική αρχή ασφαλίστρου.

Επίσης, σύμφωνα με τον Gerber (1979), το ασφάλιστρο Π της Ελβετικής αρχής είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$E[w(X - z\,\Pi)] = w\,[(1 - z)\,\Pi]$$

όπου w είναι μια μη αρνητική μη φθίνουσα πραγματική συνάρτηση, και $0 < z < 1$.

3.4 Μέτρα κινδύνου

Όπως είδαμε στην *ενότητα 3.2.*, μια συνάρτηση ωφελιμότητας, έστω u, δύναται να ποσοτικοποιεί τις *οικονομικές προτιμήσεις*. Με τον όρο αυτό εννοούμε την ιεράρχηση ενός συνόλου οικονομικών προοπτικών ενδεχομένων. Η συνάρτηση u μεταφράζει τα διάφορα χρηματικά ποσά σε υποκειμενική ωφελιμότητα με την παραδοχή της *υπόθεσης προσδοκώμενης ωφελιμότητας*. Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, πυξίδα για τις οικονομικές αποφάσεις είναι η μαθηματική ελπίδα της συνάρτησης ωφελιμότητας $E(u)$ και στόχος είναι η μεγιστοποίηση αυτής, σύμφωνα με την αρχή του Bernoulli.
Στο σημείο αυτό προκύπτει ένα σημαντικό ερώτημα: ποια είναι τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης ωφελιμότητας; Κρίνοντας στη βάση της λογικής (Kaas R, Goovaerts M and Dhaene J, 2008), αν διαθέτουμε δύο χρηματικά ποσά μεγέθους X και Y ώστε $X < Y$ τότε αναμένουμε $u(X) < u(Y)$. Η παραπάνω λογική περιέχει την μαθηματική έννοια της γνησίας αύξουσας συνάρτησης, της συνάρτησης ωφελιμότητας, δηλαδή $u'(x) > 0$. Σαφέστατα υπάρχει πληθώρα τέτοιων συναρτήσεων όπως παράδειγμα οι εκθετικές, λογαριθμικές, γραμμικές κ.ο.κ. (με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων). Η διαδικασία φιλτραρίσματος της κατάλληλης συνάρτησης συνάδει με τις προτιμήσεις του χρήστη.
Μια πρώτη, ιδιαίτερα σημαντική διάκριση ανάμεσα στις συναρτήσεις ωφελιμότητας βασίζεται στο πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $u''(x)$, δηλαδή στο κατά πόσο είναι θετική $u''(x) > 0$ άρα κυρτή ή αρνητική $u''(x)<0$ άρα κοίλη, δοθέντος όμως ότι σε κάθε περίπτωση θα διατηρείται η βασική αρχή της γνήσιας αύξουσας συνάρτησης ωφελιμότητας.
Στην περίπτωση όπου είναι κοίλη, σημαίνει ότι ο ρυθμός αύξησης $u'(x)$ της $u(x)$ φθίνει καθώς το x αυξάνει. Πρόκειται δηλαδή για το νόμο της *φθίνουσας οριακής ωφελιμότητας*. Οι επενδυτές που επιλέγουν τα χαρακτηριστικά αυτά της συνάρτησης ωφελιμότητας χαρακτηρίζονται από μη "απληστία", δηλαδή, καθώς αποκτούν περισσότερα αγαθά, η όρεξή τους για πρόσθετα αγαθά αμβλύνεται. Οι επενδυτές αυτοί χαρακτηρίζονται επίσης ως συντηρητικοί στις οικονομικές τους κινήσεις και αποδίδουν μεγαλύτερη σημασία στην ασφάλεια και λιγότερη σημασία σε κάποιο δελεαστικό μεν, αβέβαιο δε, ενδεχόμενο κέρδους. Επειδή αποφεύγουν τα ρίσκα, χαρακτηρίζονται ως *κινδυνόφοβα άτομα* και όταν βρίσκονται ενώπιον ενός κινδύνου X, είναι διατεθειμένα να καταβάλουν ασφάλιστρο μεγαλύτερο της μαθηματικής ελπίδας: $\Pi \geq E(X)$. Αντίθετα, όταν βρίσκονται αντιμέτωπα με κάποιο τυχαίο κερδοφόρο εγχείρημα, τείνουν να προτιμούν (αν έχουν τέτοια επιλογή) το βέβαιο *σταθερό ισοδύναμο* του τυχαίου εγχειρήματος από το εγχείρημα.

Εκ των πραγμάτων, ο κίνδυνος είναι μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, έστω X. Το μέτρο κινδύνου είναι μια συνάρτηση $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε $\rho(X)$ είναι το μέτρο κινδύνου. Εννοιολογικά, το μέτρο κινδύνου είναι το επιπλέον ποσό που πρέπει να προστεθεί στον κίνδυνο ώστε το ρίσκο να είναι αποδεκτό (Denuit, Dhaene, Goovaerts and Kass, 2005). Ποσοτικά δε, μεγαλύτερες τιμές της συνάρτηση $\rho(X)$ συνδέονται με μεγαλύτερη επικινδυνότητα του X. Όπως περιγράψαμε και στο Κεφάλαιο 2, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερο κίνδυνο. Προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση, κρίνεται απαραίτητος ο προσδιορισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων ή ισοδύναμα η τιμή $\rho(X)$ ως κεφαλαιακός κίνδυνος. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι X είναι πιθανή ζημιά σε χαρτοφυλάκιο. Τότε $\rho(X)$ είναι το κεφαλαιακό ποσό που χρειάζεται να προστεθεί στο χαρτοφυλάκιο ως ασφάλεια και να γίνει αποδεκτό από έναν εσωτερικό ή εξωτερικό ελεγκτή κινδύνου.

Στο βιβλίο των De Vijlder F, Goovaerts M and Haezendonck (1984) θεμελιώνονται βασικές αρχές που ικανοποιούνται από τη συνάρτηση στα μέτρα κινδύνου τις οποίες και παραθέτουμε συνοπτικά:

- [1] $\rho(X) \geq E(X)$ το μέτρο κινδύνου οφείλει να έχει μη αρνητικό περιθώριο ασφάλειας και να είναι τουλάχιστον όσο ο αναμενόμενος κίνδυνος, ώστε να αποφεύγεται η βεβαιότητα χρεοκοπίας
- [2] $\rho(X+c) = \rho(X) + c$ το μέτρο κινδύνου λειτουργεί προσθετικά σε κάθε σταθερή υποχρέωση. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε σταθερή αύξηση υποχρέωσης πρέπει να συνεπάγεται ισόποση αύξηση κεφαλαίου ή ισοδύναμα $\rho(c) = c$. Η τελευταία σχέση επίσης ορίζεται ως ιδιότητα της σταθερότητας του μέτρου κινδύνου και ερμηνεύεται ως εξής: για την αντιμετώπιση μη τυχαίας απώλειας μεγέθους c, η ασφαλιστική εταιρεία οφείλει να έχει ισόποσο κεφάλαιο επίσης ύψους c
- [3] $\rho(cX) = c\rho(X)$ το μέτρο κινδύνου ακολουθεί την αρχή της θετικής ομοιογένειας: αν ο κίνδυνος αυξηθεί τότε αυξάνεται ισόποσα το μέτρο κινδύνου
- [4] $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ το μέτρο κινδύνου λειτουργεί υποπροσθετικά, δηλαδή η ανισότητα είναι γνήσια όταν οι κίνδυνοι έχουν μικρή θετική εξάρτηση και από την άλλη έχουμε ισότητα όταν οι κίνδυνοι εμφανίζουν μέγιστη θετική εξάρτηση: $\lim_{r \to 1} \rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$, όπου r είναι ο δείκτης εξάρτησης. Η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας διασφαλίζει ότι μια συγχώνευση εταιρειών δεν δημιουργεί πρόσθετους κινδύνους. Από την άλλη η ιδιότητα της προσθετικότητας παράγει κίνδυνο

όσο το άθροισμα των επιμέρους κινδύνων στην περίπτωση όπου οι δύο εταιρείες έχουν πλήρως συναφή δραστηριότητα οπότε και η έκθεση σε κίνδυνο είναι ακριβώς η ίδια.

- [5] $\rho(X) = \rho(\rho(X|Y))$ το μέτρο κινδύνου ακολουθεί την αρχή της επαναληψιμότητας (βλ. απόδειξη στο βιβλίο των Kaas R et al, 2008)

- [6] $P_r(X \leq Y) = 1 \iff \rho(X) \leq \rho(Y)$ το μέτρο κινδύνου ακολουθεί την αρχή της μονοτονίας του κινδύνου
- [7] $\lim_{n\to\infty} \rho\,(X_n) = \rho(X)$ για μια ακολουθία κινδύνων $\{X_n\}_{n=1,2...}$ η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην X

  Και τέλος η αρχή της αντικειμενικότητας όπου η $\rho(X)$ εξαρτάται σημαντικά από την συνάρτηση κατανομής του κινδύνου, $F(X)$.

Οι παραπάνω αρχές λειτουργούν είτε ανεξάρτητα είτε συνδυαστικά μεταξύ τους και χρησιμοποιούνται για στρατηγικές όπως:

Η αντιμετώπιση των μη αναμενόμενων ζημιών. Οι ασφαλιστικές εταιρείες και οι τράπεζες χρησιμοποιούν κάποια κεφάλαια ως προστασία για την αντιμετώπιση αυτή. Τα κεφάλαια αυτά ποσοτικοποιούνται με την έννοια του οικονομικού κεφαλαίου (Economic Capital; EC) που προκύπτει αν από το μέτρο κινδύνου της συνολικής απώλειας S της εταιρείας αφαιρεθεί η αναμενόμενη απώλεια: $EC(S) = \rho(S) - E(S)$. Η σχέση αυτή είναι ιδιαιτέρως κατατοπιστική διότι φανερώνει ότι το μέτρο κινδύνου της απώλειας περιέχει εκτός της κάλυψης της αναμενόμενης απώλειας $E(S)$, και την ασφάλεια έναντι των μη αναμενόμενων απωλειών $EC(S) + E(S) = \rho(S)$

Το προσδοκώμενο κέρδος σε σχέση με τον κίνδυνο. Πρακτικά, η απόδοση μικρού κέρδους που πραγματοποιήθηκε από έκθεση σε υψηλό κίνδυνο δεν αξιολογείται θετικά από τον οργανισμό. Για το λόγο αυτό, η αντίστοιχη απόδοση υπολογίζεται με τη βοήθεια μεθόδου απόδοσης των σταθμισμένων κεφαλαίων:

$$ERAR(R,\rho) = \frac{E(R)}{\rho(S)}$$

όπου R είναι τα κέρδη της εταιρείας, $R = P - S, P$ είναι το ασφάλιστρο και S είναι το σύνολο των απαιτήσεων. Πρακτικά, οι οργανισμοί ενδιαφέρονται για μεγιστοποίηση του παραπάνω κλάσματος το οποίο πραγματοποιείται είτε με αύξηση των κερδών είτε με μείωση των απωλειών, είτε με συνδυασμό αυτών.

Συνολικά, η συνάρτηση μέτρου κινδύνου συνδυάζεται με την αξία κινδύνου ώστε να υλοποιηθεί μια βέλτιστη κεφαλαιακή απαίτηση για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Η συνάρτηση μέτρου κινδύνου χρησιμοποιείται από τις ρυθμιστικές και εποπτικές αρχές ως μέτρο φερεγγυότητας ώστε μια ασφαλιστική εταιρεία να έχει διαθέσιμο κεφάλαιο τουλάχιστον $\rho(X)$ ώστε η εταιρεία να είναι σε θέση να καλύψει τις μελλοντικές απαιτήσεις. Ειδικότερα, πρόκειται για προστασία της περίπτωσης όπου τα ασφάλιστρα και τα αποθέματα της εταιρείας αποδειχθούν ανεπαρκή. Η διασφάλιση αυτή φερεγγυότητας βασίζεται στην αρχή του μικρότερου κατά το δυνατό ελλείμματος:

$$E\left(X-\rho(X)\right)^{+}, \text{ όπου } \left(X-\rho(X)\right)^{+}=\begin{cases} 0, & X \le \rho(X) \\ X-\rho(X), & X>\rho(X) \end{cases}$$

Παρότι όσο μεγαλύτερο είναι το κεφάλαιο τόσο μικρότερο είναι το έλλειμμα, δημιουργείται κόστος λόγω κράτησης κεφαλαίων. Η κεφαλαιακή απαίτηση που συνοψίζει τα δύο αντίρροπα κριτήρια είναι:

$$\min_{\rho(X)}\left\{E\left(X-\rho(X)\right)^{+}+\rho(X)\cdot\varepsilon\right\}, 0<\varepsilon<1$$

όπου ε είναι δείκτης του κατά πόσο το κόστος κεφαλαίου λαμβάνεται υπόψη (Denuit et al, 2005).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εκτιμώντας την αξία του ρίσκου

4.1 Εισαγωγή

Η πηγή της οικονομίας είναι οι συναλλαγές μεταξύ των ανθρώπων ή μεταξύ των εταιρειών ή και μεταξύ περισσότερο οργανωμένων δομών όπως είναι τα κράτη ή ακόμα περισσότερο οι ενώσεις κρατών. Σε κάθε συναλλαγή, εφόσον υπάρχει προσδοκία κέρδους, θα υπάρχει και ρίσκο. Οι ασφαλιστικές εταιρείες, τράπεζες ή πιστωτικοί οργανισμοί αναλαμβάνουν το ρίσκο με ανάλογο αντίτιμο το οποίο είναι συνάρτηση της επικινδυνότητας. Αυτό είναι περισσότερο φανερό στην χρηματοδότηση εταιρειών από τράπεζες. Η εταιρεία επιθυμεί λήψη δανείου από την τράπεζα για την αγορά μηχανών παραγωγής προϊόντος και η τράπεζα οφείλει να μετρήσει τον κίνδυνο λαμβάνοντας υπόψη την πιθανή χρεοκοπία της εταιρείας οπότε και τη μη δυνατότητα εξόφλησης του δανείου.

4.2 Αξία σε κίνδυνο

Η μέτρηση αυτή ως αξία σε κίνδυνο έχει την συντομογραφία VaR, ακρωνύμια του Value-at-Risk (Denuit et al, 2005).

Η αξία της χρήσης κατανομών και πιθανοτήτων καθιστά περισσότερο προσδιοριστική την έννοια της αξίας κινδύνου VaR σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα δοθέντος επιπέδου πιθανότητας p (Denuit et al, 2005). Η αξία κινδύνου X και πιθανότητας p είναι:

$$VaR(X;p) = F_X^{-1}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < p\}$$

όπου F_X είναι η συνάρτηση κατανομής του κινδύνου X.

Η παραπάνω σχέση είναι ιδιαιτέρως χρηστική διότι για κάθε πραγματικό αριθμό x και πιθανότητα p ισχύουν (Πολίτης, 2014):

$$VaR(X;p) \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x)$$

Η σχέση αυτή είναι επίσης σχέση αντικειμενικότητας του VaR δεδομένου ότι εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση κατανομής του κινδύνου.

Με βάση τον ορισμό της αξίας σε κίνδυνο που παρουσιάσαμε παραπάνω, προκύπτουν οι κάτωθι ιδιότητες (Kaas, Goovaerts and Dhaene, 2008):

- $VaR(X;p) \le \max\{X\}, \forall p \in (0,1)$, δηλαδή το VaR δεν υπερβαίνει το μέγιστο κίνδυνο και ως εκ τούτου δεν έχει μεγάλο περιθώριο ασφάλειας και μάλιστα δεν αποκλείεται αυτό να είναι και μη θετικό αν στην σχέση $VaR(X;p) \le x \Leftrightarrow p \le F_X(x)$ θέσουμε $x = E(X)$, οπότε προκύπτει ότι $VaR(X;p) \le E(X) \Leftrightarrow p \le F_X(E(X))$ δηλαδή για πιθανότητες μικρότερες από p.
- Ιδιότητα *γραμμικότητας*: $VaR(aX+b;p) = a \cdot VaR(X;p) + b$, όπου X είναι ο στοχαστικός κίνδυνος και b είναι ο σταθερός (ντετερμινιστικός) κίνδυνος. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το VaR είναι ανάλογο του κινδύνου X ή σταθερό ως προς τον ντετερμινιστικό κίνδυνο b. Ειδικότερα για τον σταθερό κίνδυνο παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πρόσθετο περιθώριο ασφάλειας.
- *Μονοτονική* ιδιότητα: $P_r(X \le Y) = 1 \Leftrightarrow VaR(X;p) \le VaR(Y;p)$
- *Σύγκλισης κατά κατανομή*: $\lim_{n\to\infty} VaR(X_n;p) = VaR(X;p)$, για μια ακολουθία κινδύνων $\{X_n\}_{n=1,2...}$ η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην X.
- *Προσθετικότητα ανεξάρτητων κινδύνων* $\{X_n\}_{n=1,2...}: VaR(S;p) = \sum_{j=1}^{n} VaR(X_j;p)$, όπου $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Στην περίπτωση δε όπου δεν ισχύει η ανεξαρτησία δεν ισχύει η παραπάνω σχέση. Για παράδειγμα για δύο συναφείς μεταξύ τους κινδύνους X, Y το VaR του αθροίσματος αυτών είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο του αθροίσματος των επιμέρους VaR. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα δύο κινδύνους X και Y που έχουν υψηλή θετική συσχέτιση επειδή έχουν αλληλένδετες δραστηριότητες όπως πχ η επιβατηγός ναυτιλία και ο εσωτερικός τουρισμός μιας χώρας. Η διακύμανση του συνολικού κινδύνου είναι

το άθροισμα των διακυμάνσεων των επιμέρους κινδύνων στο οποίο επιπλέον προστίθεται η θετική συνδιασπορά κινδύνων λόγω θετικής συσχέτισης. Με απλά λόγια, αν πάει καλά ο εσωτερικός τουρισμός τότε θα ενισχυθεί και η επιβατική κίνηση προς όφελος της ναυτιλίας. Θα το βλέπαμε πιο αναλυτικά ως εξής: Έστω ένας κίνδυνος που αφορά την επιβατηγό ναυτιλία και ένας άλλος κίνδυνος που συνδέεται με τον τουρισμό. Ας υποθέσουμε ότι οι δύο αυτοί κίνδυνοι παριστάνονται με δύο τυχαίες μεταβλητές, με μέσες τιμές μ_1, μ_2 αντίστοιχα και διασπορές σ_1^2 , σ_2^2 . Θεωρώντας τους δύο κινδύνους μαζί, η διασπορά συνολικά είναι

$$h(\rho;\sigma_1^2,\sigma_2^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\cdot\rho\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2 > \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

όπου παρατηρούμε ότι, ως συνάρτηση του συντελεστή συσχέτισης ρ, η διασπορά του συνολικού κινδύνου είναι γνησίως αύξουσα:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}h = 2\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2 > 0$$

δηλαδή αυξάνει για μεγαλύτερη συσχέτιση ή μειώνεται για μικρότερη συσχέτιση. Επενδύσεις τέτοιου τύπου χαρακτηρίζονται ως υψηλού κινδύνου (εφόσον εδώ περιμένουμε ότι η τιμή του ρ θα είναι θετική) και με την παραπάνω σχέση αποτυπώνεται σημαντικό μέρος της αλήθειας του χαρακτηρισμού αυτού.

Υπάρχει στον αντίποδα η περίπτωση της μείωσης του κινδύνου μέσω επένδυσης σε ανταγωνιστικού τύπου επενδύσεις. Για παράδειγμα, έστω η επένδυση σε εταιρείες Α και Β όπου έχουν ανταγωνιστικά προϊόντα, όπως η επιβατηγός ναυτιλία και η αερομεταφορά. Θεωρώντας ότι η άνοδος των πωλήσεων στη μια εταιρεία συνοδεύεται από μείωση σε πωλήσεις στην άλλη, τότε η συσχέτιση ρ είναι αρνητική και η διασπορά του συνολικού κινδύνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των επιμέρους διασπορών:

$$h(\rho;\sigma_1^2,\sigma_2^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\cdot\rho\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Η στρατηγική αυτή μπορεί μεν να μειώνει τον συνολικό κίνδυνο, εντούτοις επιφέρει χαμηλότερα κέρδη ή ζημιές.

Παρόλα αυτά, σύμφωνα με τους Denuit et al, (2005, σελ. 96), υπάρχουν περιπτώσεις υποπροσθετικότητας στο VaR. Αναφέρει δε χαρακτηριστικά τις περιπτώσεις πολυμεταβλητών κανονικών τυχαίων μεταβλητών: έστω $X_1, \dots, X_n$ πολυμεταβλητές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} VaR\left[X_i; p\right] \leq VaR\left[\sum_{i=1}^{n} X_i; p\right]$$

Η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας δεν ισχύει επίσης για κατανομές όπως η Pareto(α=1, θ=1) για την οποία δεν ορίζεται τόσο η μέση τιμή (αναγκαία συνθήκη α>1) όσο και η διασπορά αυτής (αναγκαία συνθήκη α>2), οπότε σύμφωνα με τους Denuit et al, (2005), δεν μπορεί να ισχύσει και η ακριβώς παραπάνω σχέση της υποπροσθετικότητας.

Η συνάρτηση του μέτρου κινδύνου $\rho(X)$ συνδυάζεται με την αξία σε κίνδυνο VaR ώστε να προκύψει η ελαχιστοποίηση που αναφέραμε παραπάνω σε ότι αφορά το υψηλό κεφάλαιο που αυξάνει τη φερεγγυότητα μεν, αλλά αυξάνει και το κόστος κράτησης (Denuit et al, 2005):

$$\rho(X) = VaR\left(X; p = 1-\varepsilon\right)$$

Προκύπτει ως εκ τούτου η χρησιμότητα του VaR για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών οικονομικών κεφαλαίων (EC):

$$EC(S\,;\,p) = VaR(S\,;\,p) - E(S)$$

Το επίπεδο p είναι η πιθανότητα επάρκειας του κεφαλαίου κάλυψης των αναμενόμενων ζημιών.

4.3 Ουρά της αξίας σε κίνδυνο

Η παραπάνω σχέση εμφανίζει ένα μειονέκτημα, αυτό της μη πληροφόρησης για την δεξιά ουρά της συνάρτησης κατανομής και ειδικότερα την πάχυνση αυτής. Με τον όρο πάχυνση εννοούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο βαρύτερη η δεξιά ουρά της κατανομής. Μπορεί λοιπόν να έχουμε μικρή συχνότητα κινδύνων αλλά μπορεί η μία έστω ζημιά να είναι τεραστίου μεγέθους, π.χ. βύθιση δεξαμενόπλοιου υψηλής χωρητικότητας με σημαντικό φορτίο υγρού τύπου. Η αξία σε κίνδυνο με ουρά (Tail; T) προσδιορίζεται από τη συντομογραφία $TVaR$ και υπολογίζεται (Denuit et al, 2005) για κάποιον κίνδυνο εκφρασμένο με τμ X σε πιθανότητα p ως εξής:

$$TVaR(X;p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR(X;u)du$$

Οι βασικές ιδιότητες είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες του VaR:

- $TVaR(X;p) \leq \max(X)$
- $TVaR(a \cdot X + b; p) = a \cdot TVaR(aX;p) + b$
- *Παρουσία ανεξάρτητων κινδύνων* $\{X_n\}_{n=1,2...}$: $TVaR(S;p) = \sum_{j=1}^{n} TVaR(X_j;p)$, όπου $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$.
- $P_r(X \leq Y) = 1 \Leftrightarrow TVaR(X;p) \leq TVaR(Y;p)$
- $\lim_{n\to\infty} TVaR(X_n\,;p) = TVaR(X;p)$ για μια ακολουθία κινδύνων $\{X_n\}_{n=1,2...}$ η οποία συγκλίνει κατά κατανομή στην X.
- $EC(S\,;\,p) = TVaR(S\,;\,p) - E(S)$

Πρόσθετες ιδιότητες ή διαφορετικές σε σχέση με το VaR:

- $TVaR(X;p) \geq E(X)$, συνεπώς το περιθώριο ασφάλειας είναι τουλάχιστον 0

$\frac{d}{dp}TVaR(X;p) \geq 0$ (για απόδειξη, βλ. Πολίτης, 2014)

- $TVaR(X+Y;p) \leq TVaR(X;p) + TVaR(Y;p)$, ιδιότητα υποπροσθετικότητας που δεν ισχύει στο VaR. Λόγω της σπουδαιότητας της σχέσης αυτής θα παραθέσουμε παρακάτω την απόδειξη, την οποία έχουν αποδείξει οι Denuit et al (2005, σελ. 76), υποθέτοντας έναν κυρτό γραμμικό συνδυασμό τ.μ. X και Y (κυρτός γραμμικός συνδυασμός των X , Y είναι η τ.μ. $Z = \alpha X + \beta Y, \alpha + \beta = 1, 0 < \alpha, \beta < 1$) και χρησιμοποιώντας την σχέση που συνδέει το $TVaR$ με τον αναμενόμενο κίνδυνο ($E(X)$) καθώς επίσης και το VaR (Denuit et al, 2005, σελ. 75):

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\left(E(X) - \int_0^p VaR[X;\eta]d\eta\right)$$

διότι πράγματι,

$$E(X)=\int_0^1 VaR[X;\eta]d\eta \Rightarrow E(X)=\int_0^p VaR[X;\eta]d\eta+\int_p^1 VaR[X;\eta]d\eta \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\eta]d\eta=\frac{1}{1-p}\left(E(X)-\int_0^p VaR[X;\eta]d\eta\right)\Leftrightarrow$$

$$TVaR[X;p]=\frac{1}{1-p}\left(E(X)-\int_0^p VaR[X;\eta]d\eta\right)$$

Θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα: έστω ανεξάρτητες και ισόνομες κατανομές τ.μ. X, Y που ακολουθούν την εκθετική με παράμετρο $\beta > 0$. Τότε, εφόσον η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής παραμέτρου $\beta > 0$ είναι

$$F_X(x)=y \Leftrightarrow 1-e^{-\beta x}=y \Leftrightarrow e^{-\beta x}=1-y \Leftrightarrow -\beta x=\ln(1-y) \Leftrightarrow x=-\frac{\ln(1-y)}{\beta}$$

συνεπώς,

$$VaR[X;p]=F_X^{-1}(p)=-\frac{\ln(1-p)}{\beta}$$

$$VaR[Y;p]=F_Y^{-1}(p)=-\frac{\ln(1-p)}{\beta}$$

Προτού προχωρήσουμε το παράδειγμα μας, εδώ αξίζει να σημειώσουμε το γεγονός ότι, η περίπτωση της προσθετικότητας στο VaR δεν ισχύει πάντοτε, εφόσον σύμφωνα και με τους Denuit et al, (2005, σελ. 96) και στο αντιπαράδειγμα το οποίο παρατίθεται και αναφερθήκαμε πιο πάνω, που αφορά την περίπτωση της Pareto, μας δίνει την περίπτωση του VaR ως υποπροσθετικό. Στη δική μας όμως περίπτωση και στο παράδειγμα που εξετάζουμε, θεωρούμε, όπως εξηγήσαμε και παραπάνω, ότι ισχύει η ιδιότητα της προσθετικότητας στο VaR.

Το άθροισμα των εκθετικών τ.μ X και Y είναι κατανομή Γάμα με παραμέτρους 2 και $\beta > 0$ και συνάρτηση κατανομής

$$F_{X+Y}(z)=1-e^{-\beta z}(1+\beta z), \qquad z>0$$

Ο στόχος είναι η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης $z=F_{X+Y}^{-1}(u)$. Δηλαδή η αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης $u=1-e^{-\beta z}(1+\beta z)$ ως προς z. Για την εξίσωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση W του Lambert. Τα παρακάτω έχουν πηγή από το πρόγραμμα Mathematica στο online εγχειρίδιο χρήσης συναρτήσεων (https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html). Η συνάρτηση W, ορίζεται στο διάστημα (-e^{-1}, ∞), το πεδίο τιμών της είναι όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι η αντίστροφη συνάρτηση της

$$f(W) = W \cdot e^{W}$$

και επιλύεται όπως παραθέτουμε κάτωθι:

$$f(W) = w \cdot e^{w} \Leftrightarrow w = f^{-1}(w \cdot e^{w}) = W(w \cdot e^{w})$$

Όπως παρατηρούμε και αναφέρεται στο εγχειρίδιο του Mathematica επίσης, χρησιμοποιείται ειδικά για την επίλυση εξισώσεων που περιέχουν πολυώνυμο και εκθετική συνάρτηση όπως πράγματι στην δική μας περίπτωση.

Συνεπώς, και με βάση την παραπάνω τεκμηρίωση η επίλυση της εξίσωσης $u = 1 - e^{-\beta z}(1 + \beta z)$ πραγματοποιείται με χρήση του παρακάτω κώδικα.

```
k[x_]=1-Exp[-b*x]*(1+b*x)

1-©-b x (1+b x)

Solve[k[x]□y, x]

{{x→(-1-ProductLog[(-1+y)/©])/b}}
```

που μας δίνει,

$$VaR[X+Y;p] = F_{X+Y}^{-1}(p) = -\frac{1 + \mathrm{ProductLog}\left[\frac{-1+p}{e}\right]}{\beta}$$

όπου, η συνάρτηση ProductLog του Mathematica αντιστοιχεί στη συνάρτηση W του Lambert.

Στο σημείο αυτό και για να αποδείξουμε όσα αναφέρουμε σε σχέση με την υποπροσθετικότητα στο $TVaR$, παραθέτουμε κώδικα στο Mathematica, ο οποίος κώδικας, υπολογίζει και αναπαριστά για διάφορες τιμές του $\beta > 0$ στο εύρος του $0 < p < 1$ τα $TVaR[X+Y;p]$ και $TVaR[X;p] + TVaR[Y;p]$:

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

In[27]:= VaR[u_] = -Log[(1 - u)]/b

Out[27]= -(Log[1 - u]/b)

In[28]:= TVaRX[p_] = 1/(1 - p)*Integrate[VaR[u], {u, p, 1}]

Out[28]= ConditionalExpression[((-1 + p) (-1 + Log[1 - p]))/(b (1 - p)), p < 1]

In[29]:= TVaRY[p_] = TVaRX[p]

Out[29]= ConditionalExpression[((-1 + p) (-1 + Log[1 - p]))/b, p < 1]

In[30]:= VaRXY[u_] = (1 + ProductLog[(-1 + u)/Exp[1]])/b

Out[30]= (1 + ProductLog[(-1 + u)/e])/b

In[31]:= TVaRXY[p_] = 1/(1 - p)*Integrate[VaRXY[u], {u, p, 1}]

Out[31]= (e (-1 + e^ProductLog[(-1 + p)/e]) + (-1 + p) ProductLog[(-1 + p)/e])/(b (1 - p))

In[56]:= b = 5

Out[56]= 5

In[57]:= TVaRZ[p_] = TVaRX[p] + TVaRY[p]

Out[57]= ConditionalExpression[1/5 (-1 + p) (-1 + Log[1 - p]) + (((-1 + p) (-1 + Log[1 - p]))/(5 (1 - p)))[p], p <
1]

In[58]:= Plot[TVaRXY[p], {p, 0, 1}]

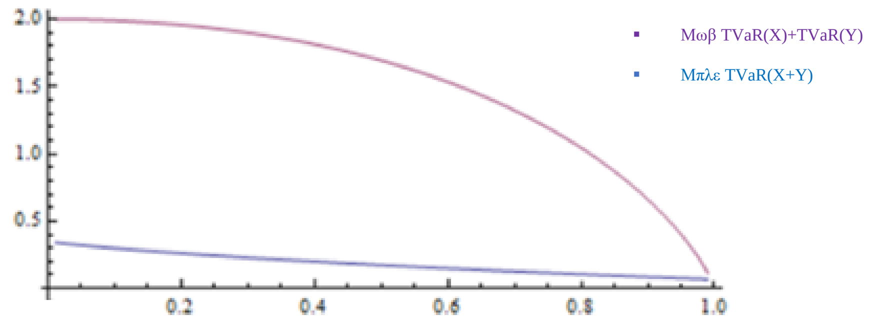
In[59]:= F[p_] = 2*((p - 1)*(-1 + Log[1 - p]))/b

Out[59]= 2/5 (-1 + p) (-1 + Log[1 - p])

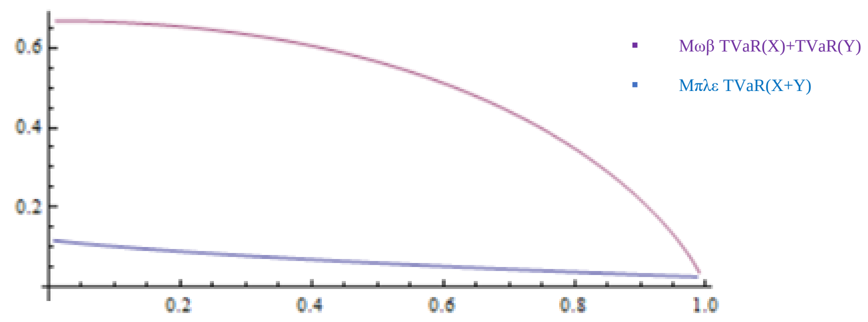
In[60]:= Plot[F[p], {p, 0.01, 0.99}]

In[61]:= Plot[{TVaRXY[p], F[p]}, {p, 0.01, 0.99}]

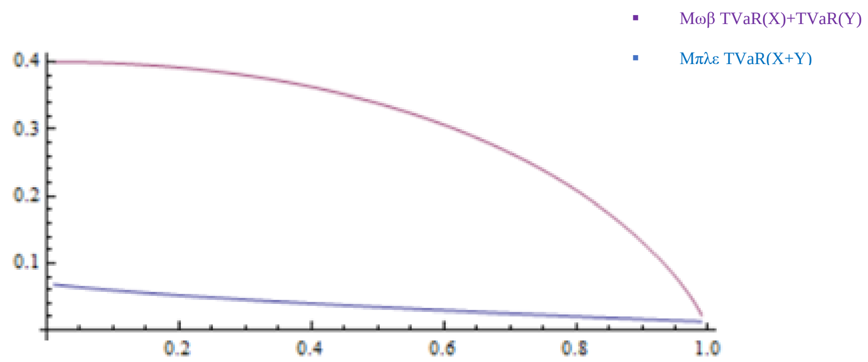
Γράφημα 1: για $\beta = 1$



Γράφημα 2: για $\boldsymbol{\beta = 3}$



Γράφημα 3: για $\boldsymbol{\beta = 5}$



Στα παραπάνω γραφήματα της ουράς της αξίας σε κίνδυνο (κατακόρυφος άξονας) ως προς p (οριζόντιος άξονας), η καμπύλη μπλε χρώματος αναπαριστά το $TVaR[X+Y;p]$ και με μωβ η καμπύλη του $TVaR[X;p]+TVaR[Y;p]$. Παρατηρούμε ότι ισχύει η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας στην ουρά της αξίας σε κίνδυνο.

Έτσι αποδεικνύεται ότι:

$$F_{X+Y}^{-1}(u) \leq F_X^{-1}(u) + F_Y^{-1}(u) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-p} \cdot F_{X+Y}^{-1}(u) \leq \frac{1}{1-p} \cdot F_X^{-1}(u) + \frac{1}{1-p} \cdot F_Y^{-1}(u) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-p} \cdot \int_p^1 F_{X+Y}^{-1}(u)du \leq \frac{1}{1-p} \cdot \int_p^1 F_X^{-1}(u)du + \frac{1}{1-p} \cdot \int_p^1 F_Y^{-1}(u)du \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1-p} \cdot \int_p^1 VaR[X+Y;u]du \leq \frac{1}{1-p} \cdot \int_p^1 VaR[X;u]du + \frac{1}{1-p} \cdot \int_p^1 VaR[Y;u]du \Leftrightarrow$$

$$TVaR[X+Y;p] \leq TVaR[X;p] + TVaR[Y;p]$$

δηλαδή, ισχύει η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

Αυτό θα μπορούσε να μεταφράζεται ως εξής: η σφοδρότητα και των δύο κινδύνων μαζί δεν υπερβαίνει το άθροισμα της σφοδρότητας του ενός και του άλλου κινδύνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μέτρα Κινδύνου με εφαρμογές στη Θεωρία Χρεοκοπίας

5.1 Βασικές αρχές χρεοκοπίας - κινδυνοφοβία έναντι κινδυνοφιλίας

Στο κλασσικό μοντέλο της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος $u(t)$ που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2, $u(t) = u + c \cdot t - S(t)$, η κινδυνοφοβία αυτή θα μπορούσε να μεταφράζεται για μια ασφαλιστική εταιρεία με αρχικό υψηλό απόθεμα u σε συνδυασμό με υψηλό συντελεστή περιθώριου ασφάλειας $\theta > 0$:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot E(X)} - 1$$

το οποίο πραγματώνεται με υψηλό ασφάλιστρο c ιδιαίτερα όταν ο αναμενόμενος κίνδυνος είναι μεγάλος.

Η άλλη περίπτωση, δηλαδή της κυρτής συνάρτησης ωφελιμότητας $u''(x)>0$, χαρακτηρίζει τα άτομα ως *κινδυνόφιλα*. Τα άτομα αυτά ακολουθούν τη βασική αρχή του Έλληνα μεγιστάνα Αριστοτέλη Ωνάση (Evans, 1987) *δεν υπάρχει κέρδος χωρίς ρίσκο* (αποτυπώθηκε στα αγγλικά ως *no risk no gain*). Επίσης ακολουθούν το νόμο της αύξουσας οριακής ωφελιμότητας: όσο πλουσιότερα γίνονται, τόσο κυνηγούν τον πρόσθετο πλούτο. Ένα παίγνιο ή ένας μεγάλος επιχειρηματικός κίνδυνος έλκει τα άτομα αυτά περισσότερο από το σταθερό ισοδύναμο του, ώστε όταν αντιμετωπίσουν τέτοιο κίνδυνο X είναι διατεθειμένα να πληρώσουν ασφάλιστρο Π, μικρότερο της μαθηματικής ελπίδας του κινδύνου: $\Pi \leq E(X)$; Όπως και ο Α. Ωνάσης, έτσι τα πολύ μεγάλα επιχειρηματικά δαιμόνια είναι πιθανότατα κινδυνόφιλοι.

Στο κλασσικό μοντέλο της ανέλιξης πλεονάσματος που παρουσιάσαμε παραπάνω οι κινδυνόφιλες ασφαλιστικές εταιρείες προτιμούν μεγαλύτερο συντελεστή περιθωρίου ασφάλειας $\theta>0$ για να αντισταθμίσουν ενδεχομένως το μεγάλο αναμενόμενο κίνδυνο.

Η κινδυνοφοβία ή κινδυνοφιλία μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας την γνωστή ανισότητα Jensen (Κουτσόπουλος, 1999):
Αν η συνάρτηση φ είναι κυρτή τότε $E\left(\phi\left(X\right)\right) \geq \phi\left(E\left(X\right)\right)$. Αν η συνάρτηση φ είναι κοίλη, τότε $E\left(\phi\left(X\right)\right) \leq \phi\left(E\left(X\right)\right)$. Οι ανισότητες αυτές του Jensen χαρακτηρίζουν τις παρακάτω ιδιότητες:
Αν το άτομο είναι κινδυνόφοβο και είναι διατεθειμένο να καταβάλλει ποσό $G > E(X)$ για να ασφαλισθεί, απαιτεί επίσης $G > E(X)$ για να καλύψει κίνδυνο, δέχεται ποσό $K < E(X)$ για να απαλλαγεί από τυχαίο κέρδος και επίσης διαθέτει ποσό $K < E(X)$ για να εμπλακεί σε τυχαίο κέρδος (Dickson et al, 2009).
Για το κινδυνόφιλο άτομο ισχύουν ακριβώς τα αντίθετα, δηλαδή, αν είναι διατεθειμένο να καταβάλλει ποσό $G < E(X)$ για να ασφαλισθεί, απαιτεί επίσης $G < E(X)$ για να καλύψει κίνδυνο, δέχεται ποσό $K > E(X)$ για να απαλλαγεί από τυχαίο κέρδος και επίσης διαθέτει ποσό $K > E(X)$ για να εμπλακεί σε τυχαίο κέρδος.
Για την περίπτωση της ασφάλισης ισχύουν τα εξής πρόσθετα συμπεράσματα:
Και από τη θεωρία και εκ των πραγμάτων, ο ασφαλιστής είναι υποχρεωμένος να χρεώνει ασφάλιστρο $G > E(X)$. Δηλαδή, έχει συνάρτηση ωφελιμότητας κοίλη (κινδυνόφοβος). Έστω ότι υπάρχει κινδυνόφιλο άτομο που επιδιώκει ασφάλιστρο $G < E(X)$, οπότε και δεν είναι εφικτή η σύναψη ασφαλιστικής σχέσης. Σύναψη ασφαλιστικής σχέσης δύναται να πραγματοποιηθεί εφόσον το προς ασφάλιση άτομο (α) είναι κινδυνόφοβο και διατεθειμένο να καταβάλλει ασφάλιστρο $G > E(X)$ και επιπρόσθετα το μέγιστο ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένο να καταβάλλει το άτομο (α) είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το ελάχιστο ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να δεχθεί ο ασφαλιστής (A):

$$G_{\max}^{(a)} \geq G_{\min}^{(A)},$$

όπου $G_{\max}^{(a)}$ είναι το ασφάλιστρο του επιθυμούντος την ασφάλιση και $G_{\min}^{(A)}$ είναι το ασφάλιστρο που προτείνει ο ασφαλιστής.
Τέλος, να σημειώσουμε ότι στο σύνορο μεταξύ των κυρτών και κοίλων συναρτήσεων ωφελιμότητας βρίσκονται οι γραμμικές συναρτήσεις ωφελιμότητας $u(x) = \alpha + \beta x$, οι οποίες και αντιστοιχούν στην αρχή της μαθηματικής ελπίδας, $\Pi = E(X)$ (Π το ασφάλιστρο) (Κουτσόπουλος, 1999). Τα άτομα που βαδίζουν στο σύνορο αυτό δεν είναι ούτε κινδυνόφοβα ούτε κινδυνόφιλα, αλλά πλήρως ουδέτερα. Στο χώρο της κοινωνικοοικονομίας τα ουδέτερα άτομα είναι σε ποσοστό λιγότερα από τα κινδυνόφοβα και τα κινδυνόφιλα (Gilbert D et al, 2010), πιθανόν και λόγω της έλλειψης ρεαλισμού στην αρχή της μαθηματικής ελπίδας.

Πράγματι, απεικονιστικές μελέτες PET του εγκεφάλου (Hunziker & Mazzola, 1995) έδωσαν ενδείξεις για τις περιοχές του εγκεφάλου που ενεργοποιούνται στα άτομα χαμηλού ή υψηλού ρίσκου. Τα άτομα ανάληψης χαμηλού ρίσκου εμφανίζουν περισσότερη δραστηριότητα στο αριστερό ημισφαίριο το επονομαζόμενο και ως λογικό ή συντηρητικό, σε αντίθεση με τα άτομα ανάληψης υψηλού ρίσκου που εμφανίζουν περισσότερη δραστηριότητα στο δεξιό ημισφαίριο, το επονομαζόμενο και ως της φαντασίας ή της δημιουργίας.

Κλείνουμε την συσχέτιση λοιπόν της διάθεσης ανάληψης ρίσκου με τους πρωταγωνιστές της εισαγωγής μας, τον δανειστή Σάιλοκ και τον δανειζόμενο έμπορο Αντόνιο. Τον μεν πρώτο θα τον χαρακτηρίζαμε ως κινδυνόφοβο και το δεύτερο ως κινδυνόφιλο.

5.2 Η αξία σε κίνδυνο και ο προσδιορισμός του ενδεχόμενου χρεοκοπίας

Σύμφωνα με τον τους Trufin et al, (2011), η αξία σε κίνδυνο ποσοτικοποιεί την πιθανότητα του μεγέθους απώλειας κεφαλαίου ενός χαρτοφυλακίου σε μια ημέρα, εβδομάδα, μήνα, έτος, κ.ο.κ. Δεν είναι τυχαίο, ότι τα τελευταία χρόνια η αξία σε κίνδυνο αποτελεί σημείο αναφοράς. Για παράδειγμα, όπως διαπιστώνεται από τους Trufin et al, (2011), μια ασφαλιστική εταιρεία διαθέτει επαρκές κεφάλαιο το οποίο να είναι ικανό να καλύψει τις αποζημιώσεις και άλλα έξοδα μη προβλεπόμενα. Το κεφάλαιο αυτό προσδιορίζεται σε σχέση με την τρέχουσα, ενδεχομένως ετήσια, αξία σε κίνδυνο.

Το χρονικό πλαίσιο αναφοράς όμως δεν είναι απολύτως σαφές και δύναται να διαφέρει μεταξύ εταιρειών. Για παράδειγμα, ο χρονικός ορίζοντας εκτιμάται ανάλογα με τον αριθμό κινδύνων που εκτίθεται μια εταιρεία. Μια εταιρεία η οποία εκτίθεται σε ασφαλιστικές καλύψεις ζημιών υγείας, χρηματοδότηση επενδύσεων, τοποθέτηση διαθεσίμων κεφαλαίων σε χρηματοαγορές, κλπ, ιδιαιτέρως δε ανεξάρτητους (κατά το δοκούν) κινδύνους, οφείλει να αναπροσαρμόζει την αξία σε κίνδυνο (συνολικό) πιο τακτικά έναντι μιας εταιρείας η οποία διαχειρίζεται ένα είδος κινδύνου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν για παράδειγμα ο κίνδυνος X_j έχει πιθανότητα $0<p_j<\varepsilon<1$ να προκαλέσει αναταράξεις στην οικονομική πολιτική της εταιρείας, όπου ε είναι μια μικρή ποσότητα, τότε η πιθανότητα να προκληθεί τουλάχιστον ένα τέτοιο συμβάν είναι (δοθέντος της ανεξαρτησίας των κινδύνων) σημαντικά μεγάλη σε σχέση με την πιθανότητα ενός μεμονωμένου τυχαίου συμβάντος:

$$1-\prod_{j=1}^{n} p_j > 1-\varepsilon^n > \varepsilon > \max_{j=1,\dots,n}\left(p_j\right)$$

Η προσαρμογή των μοντέλων στο χρόνο εφαρμόσθηκε από τον F. Lundberg (για τον οποίο έχει γίνει εκτεταμένη αναφορά στα μοντέλα χρεοκοπίας στο Κεφάλαιο 2) το 1903. Η προσθήκη του χρόνου πλαισιώνει το μοντέλο ανέλιξης πλεονάσματος με δυναμικό χαρακτήρα καθώς οι συνθήκες μεταβάλλονται σε ότι αφορά είτε το μέγεθος της ζημιάς είτε το πλήθος αυτών. Ο Lundberg εισήγαγε την πλήρη τυχαιότητα στο χρόνο άφιξης ζημιών μοντελοποιώντας το πλήθος τους σε ορισμένο χρονικό πεδίο με την κατανομή Poisson και κατόπιν με την ανέλιξη Poisson σε ευρύτερο χρονικό πεδίο. Σε συνεργασία με τον H. Cramer αντιστοίχισε την αξία σε κίνδυνο με τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Η πιθανότητα αυτή μεταβάλλεται στο χρόνο και είναι ευαίσθητη σε ότι αφορά την αρχικοποίηση του αποθέματος το οποίο η εταιρεία συνήθως αν δεν το αυξάνει τότε και μπορεί μεν η πιθανότητα στο διηνεκές να μην είναι βέβαιη (υπό ορισμένες προϋποθέσεις που ορίσαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2), αλλά εντούτοις όπως εύστοχα εισηγούνται οι Trufin et al, (2011), αυτή αυξάνει.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε αναλυτικά και γραφικά τις πτώσεις πλεονάσματος (L_1, L_2, ….), το άθροισμα των οποίων διαμορφώνει τη μέγιστη σωρευτική απώλεια (L). Η μέγιστη σωρευτική απώλεια είναι κίνδυνος την αξία του οποίου οφείλουμε να λάβουμε υπόψη, γιατί η κατανομή της συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Υπάρχει σύνδεση μεταξύ της πτώσης πλεονάσματος και του ύψους απαίτησης X. Για παράδειγμα, αν το ύψος απαίτησης X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο β>0 και συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}, x > 0$, τότε και η πτώση πλεονάσματος ακολουθεί εκθετική κατανομή ίδιας παραμέτρου και αναμενόμενου κινδύνου αντίστοιχα. Πράγματι, η συνάρτηση κατανομής της πτώσης πλεονάσματος είναι (απόδειξη):

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x \left(1 - F_X(t)\right) dt = \frac{1}{1/\beta} \cdot \int_0^x e^{-\beta t} dt = \int_0^x \beta e^{-\beta t} dt = 1 - e^{-\beta x}, x > 0$$

και αντιστοιχεί στην εκθετική παραμέτρου β >0.

Ένα άλλο παράδειγμα, σχετικά με το μέγεθος της απαίτησης X ως κατανομή Pareto με παραμέτρους α>0, δ>0, συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = 1 - \frac{\delta^a}{(x+\delta)^a}, x > 0$ και μέση τιμή $E(X) = \delta/(\alpha - 1)$ τότε και η πτώση πλεονάσματος είναι Pareto με παραμέτρους $\alpha - 1$ ($\alpha > 1$) και δ>0 (Πολίτης Κ., 2017) και μέση τιμή $E(L_1) = \delta/(\alpha\text{-}2)$.

$$F_{L_1}(x) = \frac{1}{E(X)} \cdot \int_0^x \left(1 - F_X(t)\right) dt = \frac{a-1}{\delta} \cdot \int_0^x \frac{\delta^\alpha}{(t+\delta)^\alpha} dt = \int_0^x \frac{(a-1)\delta^{\alpha-1}}{(t+\delta)^\alpha} dt = F_2(x)$$

όπου $f_2(x) = \frac{(a-1)\delta^{\alpha-1}}{(x+\delta)^\alpha}, x > 0$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Pareto με παραμέτρους $\alpha - 1 > 0$ και $\delta > 0$.

Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τους Trufin et al, (2011), συγκρίνοντας δύο πιθανούς κινδύνους X και Y , έστω με $E(X) < E(Y)$, τότε και οι αντίστοιχες πτώσεις L_1^X , L_1^Y θα έχουν την ίδια διάταξη στις αναμενόμενες τιμές $\mathrm{E}\left(L_1^X\right) < \mathrm{E}\left(L_1^Y\right)$. Πρακτικά, αν X είναι Pareto με παραμέτρους α>0 και δ>0 και Y είναι Pareto με παραμέτρους α-1 και δ, τότε $E(X) < E(Y)$ και οι αντίστοιχες πτώσεις πλεονάσματος θα είναι L_1^X και L_1^Y , κατανομές Pareto με παραμέτρους α-2 και δ και Pareto με παραμέτρους α-3 και δ, με μέσες τιμές

$$\mathrm{E}\left(L_1^X\right) = \frac{\delta}{\alpha-2} < \mathrm{E}\left(L_1^Y\right) = \frac{\delta}{\alpha-3}$$

Στη μελέτη των Denuit et al, (2005), διατυπώθηκε η θέση ότι η εκτίμηση κινδύνου αποτελεί το ετήσιο αποθεματικό ώστε δοθέντος αρχικού αποθεματικού u, η πιθανότητα χρεοκοπίας δεν υπερβαίνει κάποιο μέγεθος "σχετικά μικρό", έστω ε >0 (βλ. εφαρμογή, Κεφάλαιο 2). Εντούτοις, οι Trufin et al (2011) στη μελέτη τους συνδέουν το μέγεθος ε>0 με την πιθανότητα χρεοκοπίας και την αξία σε κίνδυνο μέσω της κάτωθι σχέσης:

$$\rho_\varepsilon[X] = \inf\left\{u \geq 0 \mid \psi(u) \leq \varepsilon\right\} = \psi^{-1}(\varepsilon)$$

που μεταφράζεται ως εξής:

$\rho_\varepsilon[X]$ είναι το ελάχιστο ποσό κεφαλαίου βάσει κινδύνου X που διασφαλίζει την ελάχιστη πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω απαιτήσεων. Η σχέση αυτή προσδιορίζει με ακρίβεια το μέτρο κινδύνου, σε αντίθεση με την ανισότητα Lundberg που φράσει σε διάστημα την πιθανότητα χρεοκοπίας (και δύναται να είναι ευρύ ώστε να μην αποτελεί καλή προσέγγιση). Επιπρόσθετα, υπάρχουν κατανομές κινδύνων ώστε δεν είναι εφικτό να προσδιορίσουμε το άνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας του Lundberg:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

διότι δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια της κατανομής του κινδύνου (περιπτώσεις κινδύνων πολύ βαριάς ουράς) και κατά συνέπεια δεν επιλύεται η εξίσωση του Lundberg (βλ. Κεφάλαιο 2) ως προς τον συντελεστή προσαρμογής R. Τέτοιες κατανομές είναι για παράδειγμα η Pareto, η Weibull και κυρίως οι λογαριθμοκατανομές με κύριο χαρακτηριστικό την πολύ βαριά ουρά. Ένα άλλο σημαντικό όφελος της παραπάνω σχέσης είναι η μη εξάρτηση του μέτρου κινδύνου $\rho_\varepsilon[X]$ από την ένταση ζημιών λ>0. Αντιθέτως, το μέτρο κινδύνου $\rho_\varepsilon[X]$ εξαρτάται από την κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L:

$$\rho_\varepsilon[X] = F_L^{-1}(1-\varepsilon) = \inf\left\{t \ge 0 \mid F_L(t) \ge 1-\varepsilon\right\}$$

Ας δούμε τη χρηστικότητα της παραπάνω σχέσεως στην περίπτωση όπου η κατανομή του αρχικού κινδύνου είναι εκθετική παραμέτρου β >0. Τότε η κατανομή της πτώσεως πλεονάσματος είναι επίσης εκθετική παραμέτρου β>0 και η μέγιστη σωρευτική απώλεια είναι κατανομή με ροπογεννήτρια (βλ. Κεφάλαιο 2)

$$M_L(t) = \frac{\theta}{1+\theta - M_{L_1}(t)} = \frac{\theta}{1+\theta-\dfrac{\beta}{\beta-t}} = \frac{\theta\cdot(\beta-t)}{(1+\theta)(\beta-t)-\beta} = \frac{\theta\beta-\theta t}{(1+\theta)(\beta-t)-\beta}$$

Ας υποθέσουμε ότι το περιθώριο ασφάλειας είναι θ=1, τότε

$$M_L(t) = \frac{\beta-t}{2(\beta-t)-\beta} = \frac{\beta-t}{\beta-2t} = p + q\frac{\beta}{\beta-2t} \Leftrightarrow \qquad (p+q=1)$$

$$\beta - t = p(\beta-2t) + q\beta \Leftrightarrow \beta - t = p(\beta-2t) + (1-p)\beta \Leftrightarrow$$

$$\beta - t = p\beta - 2pt + \beta - p\beta \Leftrightarrow p = q = \frac{1}{2}$$

άρα,

$$M_L(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta-2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(\beta/2)}{(\beta/2)-t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}M_1(t)$$

όπου,

$$M_1(t) = \frac{(\beta/2)}{(\beta/2)-t}, \qquad t < \beta/2$$

είναι ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\beta/2$.

Και κατά συνέπεια, η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L είναι

$$F_L(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{\beta}{2}t}, t \geq 0$$

όπου $F_1(t) = 1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}, t > 0$ είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\beta/2$.

Κατά συνέπεια, το μέτρο κινδύνου

$$\rho_\varepsilon[X] = F_L^{-1}(1-\varepsilon) = inf\{t \geq 0 | F_L(t) \geq 1-\varepsilon\} = inf\left\{t \geq 0 | 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{\beta}{2}t} \geq 1-\varepsilon\right\}$$

$$= inf\left\{t \geq 0 | \frac{1}{2}e^{-\frac{\beta}{2}t} \leq \varepsilon\right\} = inf\left\{t \geq 0 | e^{-\frac{\beta}{2}t} \leq 2\varepsilon\right\} = inf\left\{t \geq 0 | -\frac{\beta t}{2} \leq \ln(2\varepsilon)\right\}$$

$$= inf\{t \geq 0 | \beta t \geq -2\ln(2\varepsilon)\} = inf\left\{t \geq 0 | t \geq \frac{-2\ln(2\varepsilon)}{\beta}\right\} = \frac{-2\ln(2\varepsilon)}{\beta}$$

Πρακτικά, η σχέση που δείξαμε, $\rho_\varepsilon[X] = \dfrac{-2\ln(2\varepsilon)}{\beta} = -2\ln(2\varepsilon)\cdot E(X)$ προσδιορίζει το μέτρο κινδύνου ως προς την παράμετρο β>0 της εκθετικής κατανομής κινδύνου ή του αναμενόμενου κινδύνου και του μικρού μεγέθους ε πιθανότητας χρεοκοπίας. Παρατηρούμε ότι πράγματι επαληθεύεται ότι για μεγαλύτερο αναμενόμενο κίνδυνο, $E(X)$ έχουμε μεγαλύτερο μέτρο κινδύνου. Σε σχέση με την πιθανότητα ε>0 , προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα (1) ότι μειώνοντας την πιθανότητα ε >0, τότε το μέτρο κινδύνου αυξάνεται σε σχέση με τον αναμενόμενο κίνδυνο.

Πίνακας (1)

ε	$\rho_\varepsilon[X]$
0.1	3.219 $E(X)$
0.01	7.824 $E(X)$
0.001	12.429 $E(X)$

Συνοψίζοντας, η παραπάνω σχέση απεικονίζει το μέτρο κινδύνου με τα χαρακτηριστικά της κατανομής (παράμετροι) και το περιθώριο για την πιθανότητα χρεοκοπίας ε>0.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι διπλασιάζουμε το περιθώριο ασφάλειας $\theta = 2$. Τότε

$$M_L(t) = \frac{2\beta - 2t}{3(\beta - t) - \beta} = \frac{2\beta - 2t}{2\beta - 3t} = \left(\text{θέτουμε } \tilde{\beta} = 2\beta\right) = \frac{\tilde{\beta} - 2t}{\tilde{\beta} - 3t} = p + q \cdot \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\beta} - 3t} \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\beta} - 2t = p\left(\tilde{\beta} - 3t\right) + q\tilde{\beta} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$$

άρα,

$$M_L(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\beta} - 3t} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{\left(\tilde{\beta}/3\right)}{\left(\tilde{\beta}/3\right) - t} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M_2(t)$$

όπου

$$M_2(t) = \frac{\left(\tilde{\beta}/3\right)}{\left(\tilde{\beta}/3\right) - t} = \frac{(2\beta/3)}{(2\beta/3) - t}, \qquad t < 2\beta/3$$

είναι ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $2\beta/3$.

Και κατά συνέπεια, η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L είναι

$$F_L(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}F_2(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{2\beta}{3}t}\right) = 1 - \frac{1}{3}e^{-\frac{2\beta}{3}t}, t \geq 0$$

όπου $F_2(t) = 1 - e^{-\frac{2\beta}{3}t}$ $t \geq 0$ είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο 2 β/3.

Κατά συνέπεια, το μέτρο κινδύνου

$$\rho_\varepsilon[X] = F_L^{-1}(1-\varepsilon) = inf\{t \geq 0 | F_L(t) \geq 1-\varepsilon\} = inf\left\{t \geq 0 | 1 - \frac{1}{3}e^{-\frac{2\beta}{3}t} \geq 1-\varepsilon\right\}$$

$$= inf\left\{t \geq 0 | \frac{1}{3}e^{-\frac{2\beta}{3}t} \leq \varepsilon\right\} = inf\left\{t \geq 0 | e^{-\frac{2\beta}{3}t} \leq 3\varepsilon\right\} = inf\left\{t \geq 0 | -\frac{2\beta t}{3} \leq \ln(3\varepsilon)\right\}$$

$$= inf\{t \geq 0 | 2\beta t \geq -3\ln(3\varepsilon)\} = inf\left\{t \geq 0 | t \geq \frac{-3\ln(3\varepsilon)}{2\beta}\right\} = \frac{-3\ln(3\varepsilon)}{2\beta}$$

Πρακτικά, η σχέση που δείξαμε για το μέτρο κινδύνου για δύο διαφορετικά περιθώρια ασφάλειας,

$$\rho_\varepsilon[X;\theta=1] = \frac{-2\ln(2\varepsilon)}{\beta} = -2\ln(2\varepsilon)\cdot E(X)$$

$$\rho_\varepsilon[X;\theta=2] = \frac{-3\ln(3\varepsilon)}{2\beta} = -3\ln(3\varepsilon)\cdot\frac{E(X)}{2}$$

Προσδιορίζει το μέτρο κινδύνου ως προς την παράμετρο β>0 της εκθετικής κατανομής κινδύνου ή του αναμενόμενου κινδύνου και του μικρού μεγέθους ε πιθανότητας χρεοκοπίας. Παρατηρούμε ότι πράγματι επαληθεύεται ότι για μεγαλύτερο αναμενόμενο κίνδυνο, $E(X)$ έχουμε μεγαλύτερο μέτρο κινδύνου. Συνοψίζοντας, η παραπάνω σχέση απεικονίζει το μέτρο κινδύνου με τα χαρακτηριστικά της κατανομής (παράμετροι) και την πιθανότητα περιθωρίου χρεοκοπίας ε>0.

Τα παραπάνω παραδείγματα αφορούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου β >0 ως προσομοίωση του κινδύνου, δηλαδή ως μοντέλο για την κατανομή των αποζημιώσεων. Θα αναλύσουμε παρακάτω την περίπτωση του κινδύνου ο οποίος ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους k>0, β>0 όπου k είναι φυσικός αριθμός, άρα ονομάζεται και κατανομή Erlang.

Η κατανομή Erlang (k, β) είναι το άθροισμα ισόνομων και ανεξάρτητων X_1,…, X_k, εκθετικών μεταβλητών παραμέτρου β>0: Y=X_1+…+X_k, Y~Erlang(k, β).

Σύμφωνα με την ιδιότητα της προσθετικότητας,

$$\rho_\varepsilon[Y] = \rho_\varepsilon[\sum_{i=1}^{k} X_i] = \sum_{i=1}^{k}\rho_\varepsilon[X_i] = k\cdot\rho_\varepsilon[X_1]$$

Άρα, το μέτρο κινδύνου της Γάμμα (ή Erlang) με παραμέτρους k >0 και β >0 είναι k-πολλαπλάσιο του μέτρου κινδύνου της εκθετικής παραμέτρου β>0.

Σε σχέση με την πιθανότητα ε>0 , προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα (2) όπου ο κίνδυνος X είναι εκθετική κατανομή παραμέτρου β>0 και Y είναι κατανομή Γάμμα παραμέτρων k=3 και β>0, ότι μειώνοντας την πιθανότητα ε>0 τότε αυξάνεται αναλογικά του αναμενόμενου κινδύνου, το μέτρο κινδύνου. Το μέτρο κινδύνου επίσης μειώνεται για μεγαλύτερο περιθώριο ασφάλειας σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας (2)

ε	$\rho_\varepsilon[X;\theta=1]$	$\rho_\varepsilon[X;\theta=2]$	$\rho_\varepsilon[Y;\theta=1]$	$\rho_\varepsilon[Y;\theta=2]$
0.1	3.219 $E(X)$	1.8060 $E(X)$	9.657 $E(X)$	5.418 $E(X)$
0.01	7.824 $E(X)$	5.2598 $E(X)$	23.472 $E(X)$	15.7794 $E(X)$
0.001	12.429 $E(X)$	8.7137 $E(X)$	37.287 $E(X)$	26.1411 $E(X)$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω αριθμητική ανάλυση, ώστε να επιβεβαιώσουμε τις τέσσερις ιδιότητες των Trufin et al (2011) επιλέγοντας ως κίνδυνο το πρώτο παράδειγμα της εκθετικής κατανομής με περιθώριο ασφάλειας θ=1:

(i) το μέτρο κινδύνου είναι γραμμικό, $\rho_\varepsilon[\alpha X]=\alpha\cdot\rho_\varepsilon[X]$, $\alpha>0$. Δηλαδή σε πολλαπλάσιο κίνδυνο αντιστοιχεί ίσο πολλαπλάσιο μέτρο κινδύνου

Πράγματι, $\rho_\varepsilon[\alpha X]=\rho_\varepsilon[Y]=\dfrac{-2\ln(2\varepsilon)}{\beta/a}=-2\ln(2\varepsilon)\cdot E(X)\cdot a=a\cdot\rho_\varepsilon[X]$

($Y = \alpha X$ είναι εκθετική κατανομή παραμέτρου β/α)

(ii) $X\le Y\Rightarrow\rho_\varepsilon[X]\le\rho_\varepsilon[Y]$

Πράγματι, έστω δύο εκθετικοί κίνδυνοι X και Y παραμέτρων β_1, β_2 >0 αντίστοιχα με β_1> β_2δηλαδή, $E(X)$ < $E(Y)$, τότε

$\rho_\varepsilon[X]=-2\ln(2\varepsilon)\cdot E(X)<-2\ln(2\varepsilon)\cdot E(Y)=\rho_\varepsilon[Y]$

(iii) Έστω κίνδυνοι X και Y, και Z είναι ίδιας κατανομής με την Y αλλά περισσότερο θετικά συσχετισμένη της X από ό,τι η Y με την X, τότε $\rho_\varepsilon[X+Y] \le \rho_\varepsilon[X+Z]$

Όπως δείξαμε στην αρχή του κεφαλαίου 4 (σελ.33), η πρόσθεση δύο θετικά συσχετισμένων κινδύνων αυξάνει περισσότερο τον κίνδυνο σε σχέση με το βαθμό θετικής συσχέτισης μεταξύ τους. Συνεπώς έστω $W = X + Y$ και $V = X + Z$, τότε εφόσον η X με την Z εμφανίζουν μεγαλύτερη θετική συσχέτιση σε σχέση με την θετική συσχέτιση των X και Y, άρα, $W \le V \Rightarrow \rho_\varepsilon[W] \le \rho_\varepsilon[V]$

Για να δούμε ένα απλό παράδειγμα, έστω $Y= \alpha_1 X$ και $Z=\alpha_2 X$, $0 < a_1 < a_2 < 1$

$$\rho_\varepsilon[X+Y] = \rho_\varepsilon[X+\alpha_1 X] = (1+\alpha_1)\rho_\varepsilon[X]$$

$$\rho_\varepsilon[X+Z] = \rho_\varepsilon[X+\alpha_2 X] = (1+\alpha_2)\rho_\varepsilon[X] \ge (1+\alpha_1)\rho_\varepsilon[X] = \rho_\varepsilon[X+Y]$$

οπότε πράγματι ισχύει

(iv) Αν ο κίνδυνος Z είναι μίξη των κινδύνων X, Y και $X+Y$, τότε ισχύει ότι $\rho_\varepsilon[Z] \le \rho_\varepsilon[X] + \rho_\varepsilon[Y]$, μια σχέση την οποία οι Trufin et al (2011) αποδεικνύουν. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα εύχρηστη για την περίπτωση κατά την οποία έχουμε κίνδυνο Z ο οποίος είναι μίξη εκθετικών κινδύνων X και Y παραμέτρων β_1>0 και β_2 >0 αντίστοιχα. Προκύπτει ότι το μέτρο κινδύνου της μίξης των κινδύνων X, Y και
$X+Y$ μειώνεται σε σχέση με το άθροισμα των επιμέρους μέτρων κινδύνων των X και Y.

Η ουρά της αξίας σε κίνδυνο ($TVaR(X)$), προσδιορίζεται τέλος, από τους Trufin et al (2011) σε σχέση με την αξία σε κίνδυνο που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο αυτό ως εξής:

$$\bar{\rho}_\varepsilon[X] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \rho_w[X]dw = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \psi^{-1}(w)dw = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon F_L^{-1}(1-w)dw$$

όπου ρ_w είναι η αξία σε κίνδυνο μετρούμενη σε μέγεθος $0<w<1$, $\psi^{-1}(w)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας, και $F_L^{-1}(1-w)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L.

Η παραπάνω σχέση αναδεικνύει την ουρά της αξίας σε κίνδυνο $\bar{\rho}_\varepsilon[X]$ σε ουρά της αξίας σε κίνδυνο της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L:

$$X \le L \Rightarrow TVaR[X;\varepsilon] \le TVaR[L;\varepsilon] = \bar{\rho}_\varepsilon[X]$$

Συνοπτικά από τα παραπάνω, η ουρά της αξίας σε κίνδυνο $\bar{\rho}_\varepsilon[X]$ αναπαριστά το αναγκαίο κεφάλαιο που καλύπτει τις απαιτήσεις μαζί με άλλες ασφαλιστικές ζημιές με πιθανότητα μεγαλύτερη 1-ε.

Σύμφωνα με το παράδειγμά μας παραπάνω όπου ο κίνδυνος είναι εκθετική κατανομή παραμέτρου β>0, τότε

$$\bar{\rho}_\varepsilon[X;\theta=1] = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^\varepsilon \rho_w[X]dw = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^\varepsilon \frac{-2\ln(2w)}{\beta}dw = \frac{-2}{\varepsilon\cdot\beta}\cdot\int_0^\varepsilon \ln(2w)dw =$$

$$\frac{-2}{\varepsilon\cdot\beta}\cdot\int_0^\varepsilon w'\cdot\ln(2w)dw = \frac{-2}{\varepsilon\cdot\beta}\cdot\left[w\cdot\ln(2w)\right]_0^\varepsilon - \frac{-2}{\varepsilon\cdot\beta}\cdot\int_0^\varepsilon dw =$$

$$\frac{-2}{\varepsilon\cdot\beta}\cdot\left(\varepsilon\cdot\ln(2\varepsilon)\right) - \frac{-2}{\varepsilon\cdot\beta}\cdot\varepsilon = \frac{-2}{\beta}\cdot\ln(2\varepsilon) + \frac{2}{\beta} = \frac{2}{\beta}\cdot\left(1-\ln(2\varepsilon)\right) =$$

$$2E(X)\left(1-\ln(2\varepsilon)\right)$$

και,

$$\bar{\rho}_{\varepsilon}\left[X;\theta=2\right]=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_{0}^{\varepsilon}\rho_{w}\left[X\right]dw=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_{0}^{\varepsilon}\frac{-3\ln(3w)}{2\beta}dw=\frac{-3}{\varepsilon\cdot 2\beta}\cdot\int_{0}^{\varepsilon}\ln(3w)dw=$$

$$\frac{-3}{\varepsilon\cdot 2\beta}\cdot\int_{0}^{\varepsilon}w'\cdot\ln(3w)dw=\frac{-3}{\varepsilon\cdot 2\beta}\cdot\left[w\cdot\ln(3w)\right]_{0}^{\varepsilon}-\frac{-3}{\varepsilon\cdot 2\beta}\cdot\int_{0}^{\varepsilon}dw=$$

$$\frac{-3}{\varepsilon\cdot 2\beta}\cdot\left(\varepsilon\cdot\ln(3\varepsilon)\right)-\frac{-3}{\varepsilon\cdot 2\beta}\cdot\varepsilon=\frac{-3}{2\beta}\cdot\ln(3\varepsilon)+\frac{3}{2\beta}=$$

$$\frac{3}{2\beta}\cdot\left(1-\ln(3\varepsilon)\right)=1,5E\left(X\right)\left(1-\ln(3\varepsilon)\right)$$

Δηλαδή, δοθέντος κινδύνου X, η ουρά της αξίας σε κίνδυνο είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς την πιθανότητα $\varepsilon>0$:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bar{\rho}_{\varepsilon}\left[X;\theta=1\right]=-\frac{2E(X)}{\varepsilon}<0$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bar{\rho}_{\varepsilon}\left[X;\theta=2\right]=-\frac{1,5E(X)}{\varepsilon}<0$$

Στον παρακάτω πίνακα (3) παρουσιάζουμε το μέτρο της ουράς της αξίας σε κίνδυνο για τιμές του ε (στήλη 1) στην περίπτωση κινδύνου εκθετικής κατανομής με περιθώριο ασφάλειας θ=1 (στήλη 2) και θ=2 (στήλη 3) ως προς τον αναμενόμενο κίνδυνο ($E(X)$). Σε ότι αφορά την περίπτωση κινδύνου κατανομής Γάμμα (ή Erlang) με παραμέτρους 3 και β>0 (όπως και στον πίνακα 2), παρότι η κατανομή αυτή είναι συνέλιξη 3ου βαθμού ($Y = X_1 + X_2 + X_3$) ισόνομων και ανεξάρτητων εκθετικών, εντούτοις, λόγω της ιδιότητας της υποπροσθετικότητας παρουσιάζουμε το άνω φράγμα σε σχέση επίσης με τον αναμενόμενο κίνδυνο της εκθετικής κατανομής (στήλη 4 για θ=1 και στήλη 5 για θ=2).

Πίνακας (3)

ε	$\bar{\rho}_{\varepsilon}[X;\theta=1]$	$\bar{\rho}_{\varepsilon}[X;\theta=2]$	$\bar{\rho}_{\varepsilon}[Y;\theta=1]$	$\bar{\rho}_{\varepsilon}[Y;\theta=2]$
0.1	$5.219\ E(X)$	$3.306\ E(X)$	$\leq 15.657\ E(X)$	$\leq 9.918\ E(X)$
0.01	$9.824\ E(X)$	$6.760\ E(X)$	$\leq 29.472\ E(X)$	$\leq 20.280\ E(X)$
0.001	$14.429\ E(X)$	$10.214\ E(X)$	$\leq 43.287\ E(X)$	$\leq 30.642\ E(X)$

Γενικά Συμπεράσματα

Η προσαρμογή κατανομής στον κίνδυνο αποτελεί βασική διαδικασία σε ότι αφορά εκτίμηση χρόνου χρεοκοπίας για κάποια εταιρεία ή οργανισμό, αλλά και για την αξία ενός αγαθού παρουσία του κινδύνου. Η κατάλληλη επιλογή της κατανομής και ο κατάλληλος χειρισμός παραμέτρων, όπως η αύξηση του αποθεματικού της εταιρείας ή το μεγαλύτερο περιθώριο ασφάλειας, καθιστά δυνατή τη μείωση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Κάθε επιχείρηση υπόκειται σε κίνδυνο, το μέτρο του οποίου εκτιμάται ως το επιπλέον ποσό που πρέπει να προστεθεί σε αυτόν, ώστε το ρίσκο στο οποίο εκτίθεται να είναι αποδεκτό. Αυτό επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό ασφαλίστρου από την αναλογιστική αρχή της ασφαλιστικής εταιρείας που παρέχει την προστασία έναντι του κινδύνου αυτού στην επιχείρηση. Η βασική αρχή είναι ότι το ασφάλιστρο υπερβαίνει την όποια συνολική απαίτηση προκύπτει λόγω της έκθεσης στον κίνδυνο.

Τόσο η ασφαλιστική εταιρεία όσο και η επιχείρηση προσδοκούν κέρδος, συνεπώς το ρίσκο είναι ανάλογο του μέτρου κινδύνου και αυτό με τη σειρά του ανάλογο της αξίας που υπόκειται σε κίνδυνο ή απλά της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Για τις περιπτώσεις μεγάλου μεγέθους κινδύνου που έχει πολύ μικρή συχνότητα ή δεν έχει εμφανιστεί ακόμα, τότε το μέτρο κινδύνου είναι ανάλογο της ουράς της αξίας σε κίνδυνο $TVaR$. Παρατηρήσαμε, κατόπιν βιβλιογραφικής επισκόπησης, και κατανοήσαμε με παραδείγματα ότι στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η αξία που υπόκειται σε περισσότερους κινδύνους (ανεξάρτητους) επιμερίζεται στο άθροισμα των αξιών των επιμέρους κινδύνων (ιδιότητα προσθετικότητας). Σε ότι αφορά όμως την ουρά της αξίας που υπόκειται σε περισσότερους κινδύνους (επίσης ανεξάρτητους) αυτή δεν υπερβαίνει τον αντίστοιχο επιμερισμό στο άθροισμα.

Η αξία σε κίνδυνο είναι σε αντιστοίχηση με την πιθανότητα χρεοκοπίας της επιχείρησης ή της ασφαλιστικής εταιρείας, καθώς το μέτρο κινδύνου και η ανάλογη αυτού αξία σε κίνδυνο εξαρτώνται από την κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας σε συνδυασμό με το περιθώριο ασφάλειας: το μέτρο κινδύνου και η ανάλογη αυτού αξία σε κίνδυνο αυξάνονται σε σχέση με τον αναμενόμενο κίνδυνο, και μειώνονται σε σχέση με το περιθώριο ασφάλειας και το περιθώριο για την πιθανότητα χρεοκοπίας (εκθετική κατανομή και κατανομή Erlang). Το παραπάνω συμπέρασμα προέκυψε και για την ουρά της αξίας σε κίνδυνο είτε με ακριβείς τιμές (εκθετική κατανομή) είτε με τα άνω φράγματα των τιμών αυτών (κατανομή Erlang).

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αντζουλάκος Δ. : *Πανεπιστημιακές σημειώσεις μαθήματος Ασφαλίσεις Ζωής* ΙΙ, Πειραιάς 2005

Κούτρας Μ. : *Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος Ι,* Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 2004

Κουτσόπουλος Κ. : *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία Κινδύνων,* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1999

Παπαβασιλείου Β. : *Ποσοτικά Μέτρα Κινδύνου με εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά και στον Αναλογισμό,* Διπλωματική Εργασία. Παν. Πειραιώς 2019, Πειραιάς.

Πολίτης Θ. : *Μέτρα Κινδύνου στην Αναλογιστική Επιστήμη,* Διπλωματική Εργασία. Παν. Πειραιώς 2014, Πειραιάς.

Πολίτης Κ. : *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου,* Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα 2017

Ξένη

Buhlmann H. : *Mathematical Methods in Risk Theory*, 1970, Springer Verlag

Deulofeu J.: *Φυλακισμένοι με διλήμματα και κυρίαρχες στρατηγικές. Η θεωρία των παιγνίων.*, Εκδόσεις 4π, Αθήνα 2011

Denuit M, Dhaene J, Goovaerts M and Kass R: *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons Ltd., 2005

De Vijlder F, Goovaerts M and Haezendonck J : *Insurance Premiums: Theory and Applications*. North-Holland, Amsterdam 1984

Dickson D, Hardy M, Waters H: *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge Univ. Press, UK 2009

Evans P. : *Ωνάσης*, Εκδόσεις Κάκτος, Αθήνα 1987

Gerber H: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Huebner Foundation, Monograph, 1979

Gilbert D, Schacter D., Wegner D., Nock M. : *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*, Εκδόσεις Gutemberg, Αθήνα 2010

Hunziker E., Mazzola G. : *Η νευρωνική ζούγκλα*, Εκδόσεις Τραυλός-Κωσταράκη, Αθήνα 1995

Shakespeare William: *Ο Έμπορος της Βενετίας*. Εκδότης Ανεμοδείκτης, Αθήνα 2005

Trufin, J., Albrecher, H. & Denuit, M.: *Properties of a Risk Measure Derived from Ruin Theory*, Geneva Risk Insur Rev 36, 174–188, 2011