

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

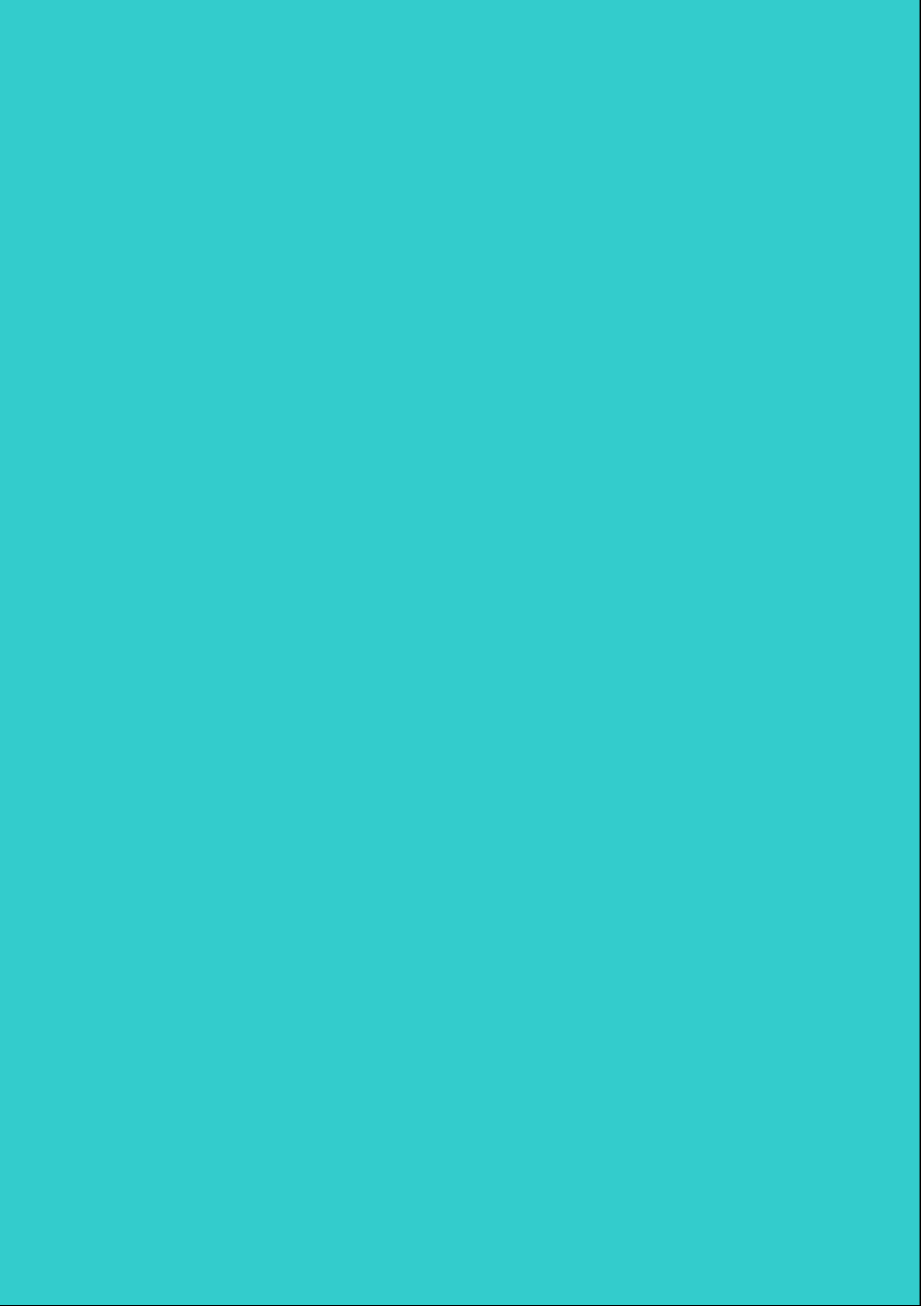
**ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ**  
**ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ**  
**ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ**

**Νικόλαος Δ. Κόσμιος**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς  
Οκτώβριος 2020



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ**  
**ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ**  
**ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ**

**Νικόλαος Δ. Κόσμιος**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς  
Οκτώβριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επίκουρος Καθηγητής Ευαγγελάρας Χαράλαμπος (Επιβλέπων)
- Επίκουρος Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος
- Ομότιμος Καθηγητής Τσίμπος Κλέων

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**  
**School of Finance and Statistics**



**Department of Statistics and Insurance Science**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**MINIMUM ABERRATION AND  
GENERALIZED MINIMUM  
ABERRATION DESIGNS**

By

**Nikolaos D. Kosmios**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment  
of the requirements for the degree of Master of Science in  
Applied Statistics

Piraeus, Greece  
October 2020



*Στους γονείς μου  
Δημήτρη και Αγγελική*





## Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ευαγγελάρα για το ενδιαφέρον και την υπομονή του, την έμπνευση που μου έδωσε αλλά και την καθοδήγηση του για τη συγγραφή και διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της Εξεταστικής επιτροπής, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Γεώργιο Τζαβελά και τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Κλέων Τσίμπος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών, όπου μέσα από τις διαλέξεις και τις παρουσιάσεις τους, μου μετέδωσαν σημαντικές γνώσεις για την έναρξη της επαγγελματικής μου καριέρας.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου, που πίστεψαν σε μένα και με στήριξαν ώστε να ολοκληρώσω με επιτυχία τόσο τις μεταπτυχιακές, όσο και τις προπτυχιακές μου σπουδές.



## Περίληψη

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί και οι ιδιότητες τους αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι κάθε έρευνας σε αρκετά επιστημονικά πεδία και από την εφαρμογή τους μπορούμε να αποκτήσουμε σημαντική πληροφορία για τη συμπεριφορά ενός συστήματος όταν αυτό τεθεί κάτω από προκαθορισμένες συνθήκες.

Η έννοια πείραμα μπορεί να οριστεί ως μια σειρά από διαδοχικούς ελέγχους κατά τους οποίους στοχευμένες αλλαγές στις διάφορες στάθμες των παραγόντων που εξετάζονται, θα καταλήξουν να έχουν αισθητή ή ανεπαίσθητη επιρροή στο αποτέλεσμα του.

Ένας σχεδιασμός παραγόντων αντιπροσωπεύει μια ακολουθία πειραμάτων στα οποία εισέρχονται παράγοντες και καθορίζονται τα επίπεδά τους. Ο παραγοντικός σχεδιασμός παίρνει μορφή μέσα από έναν πίνακα του οποίου κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα και κάθε γραμμή να υποδηλώνει μία εκτέλεση του πειράματος.

Καθώς ο αριθμός των παραγοντικών επιδράσεων που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε αυξάνεται, κατά αναλογία και το κόστος για την υλοποίηση ενός πειράματος μεγαλώνει. Η εφαρμογή παραγοντικών πειραμάτων στα οποία εξετάζονται πολλοί παράγοντες και ταυτόχρονα ο περιορισμός στο κόστος της πραγματοποίησής τους, μας οδήγησαν στους σχεδιασμούς ελάχιστης απόκλισης και γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης και θα τους αναλύσουμε σε αυτή την διπλωματική εργασία.



# Abstract

Experimental designs and their properties constitute a fundamental part of each scientific research and from their applications we can receive meaningful information about how a system reacts when it's been under predetermined conditions.

Experiment could be defined as a series of consecutive tests in which if purposeful alternations are made in the levels of the factors, will result having a significant or negligible impact on the outcome.

A factorial design represents a sequence of experiments in which factors are used as input variables and their levels are specified. The factorial design obtains its form through a matrix, in which each column represents a factor (input variable), and each row represents an experimental run.

However, as the number of the effects that we are interested to evaluate is increasing, the cost for the implementation of the experiment is rising proportionally. The realization of factorial experiments in which many factors are investigated and simultaneously the requirement that they are performed with the minimum financial cost, led us to the minimum aberration and generalized minimum aberration designs and we will analyse them in this thesis.



# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	xvii
<b>1. Απλοί και σύνθετοι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί</b>	<b>1</b>
1.1 Βασικές αρχές των παραγοντικών σχεδιασμών και οι πλήρεις $2^k$ παραγοντικοί σχεδιασμοί	4
1.2 Απλοί (regular) $2^{k-p}$ κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί	7
1.3 Σύνθετοι (non regular) $2^{k-m}$ κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί	11
<b>2. Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί και τα κριτήρια της διακριτικής ικανότητας και της ελάχιστης απόκλισης</b>	<b>15</b>
2.1 Το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας	21
2.2 Το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης	22
2.3 Ορθογώνιοι Σχηματισμοί	24
<b>3. Κριτήρια γενικευμένης διακριτικής ικανότητας και γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης</b>	<b>27</b>
3.1 Γενικευμένη διακριτική ικανότητα (generalized resolution) Το διάνυσμα συχνοτήτων σύγχυσης (Confounding Frequency Vector) και η Γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση (generalized resolution)	29
3.2 Υπολογισμός των γενικευμένων κριτηρίων σε απλούς (regular) σχεδιασμούς	30
3.3	32
<b>4. Αξιολόγηση σχεδιασμών 12,16,20 και 24 εκτελέσεων με 3,4 και 5 στήλες</b>	<b>37</b>
4.1 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 12 εκτελέσεις και 3,4 και 5 στήλες	37
4.2 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 16 εκτελέσεις και 3,4 και 5 στήλες	38
4.3 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 20 εκτελέσεις και 3,4 και 5 στήλες	40
4.4 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 24 εκτελέσεις και 3,4 και 5 στήλες	42
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>47</b>

## Κατάλογος Πινάκων

- 1-1 Συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων για τον  $2^2$  πειραματικό παραγοντικό σχεδιασμό
- 1-2 Πίνακας αλγεβρικών πρόσημων του πλήρους  $2^3$  παραγοντικού σχεδιασμού
- 1-3 Το σύνολο των ταυτόσημων επιδράσεων του  $2^{3-1}$  με ορίζουσα σχέση  $I = -BC$
- 1-4 Ο  $2_{III}^{3-1}$  με ορίζουσα σχέση  $I = -ABC$
- 2-1 D1: Ένας  $2^{6-2}$  κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός
- 2-2 D2: Ένας  $2^{6-2}$  κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός
- 2-3 D3: Ένας  $2^{6-2}$  κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός
- 2-4 Το πλήθος των ορθογώνιων σχηματισμών με 12,16,20 & 24 γραμμές και 3,4 & 5 στήλες
- 3-1 Υπολογισμός ποσοτήτων σε ορθογώνιο σχηματισμό με 24 γραμμές και 4 στήλες
- 3-2 Πίνακες υπολογισμού ποσοτήτων για τον D1
- 4-1 Υπολογισμός CFV για ορθογώνιους σχεδιασμούς με 12 εκτελέσεις και 3,4 & 5 στήλες
- 4-2 Υπολογισμός CFV για ορθογώνιους σχεδιασμούς με 16 εκτελέσεις και 3,4 & 5 στήλες
- 4-3 Υπολογισμός CFV για ορθογώνιους σχεδιασμούς με 20 εκτελέσεις και 3,4 & 5 στήλες
- 4-4 Υπολογισμός CFV για ορθογώνιους σχεδιασμούς με 24 εκτελέσεις και 3,4 & 5 στήλες







# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Απλοί και σύνθετοι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί στις μέρες μας καθίστανται εξαιρετικά χρήσιμοι και σημαντικοί για την μελέτη της αποτελεσματικότητας τόσο παραγωγικών διαδικασιών, όσο και συστημάτων (Montgomery, 2013). Η συνεισφορά τους τοποθετείται σε διαφορετικούς ερευνητικούς τομείς, όπως στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας στη βιομηχανία, στη βιοστατιστική με την ανάπτυξη νέων ιατρικών φαρμάκων, στην έρευνα για την προώθηση νέων αγαθών από τις επιχειρήσεις αλλά και στη μεγιστοποίηση της απόδοσης των καλλιεργειών στη γεωργία. Η απαρχή, ωστόσο, των πειραματικών σχεδιασμών τοποθετείται στη δεκαετία του 30' και στις αναλύσεις του R.A. Fisher.

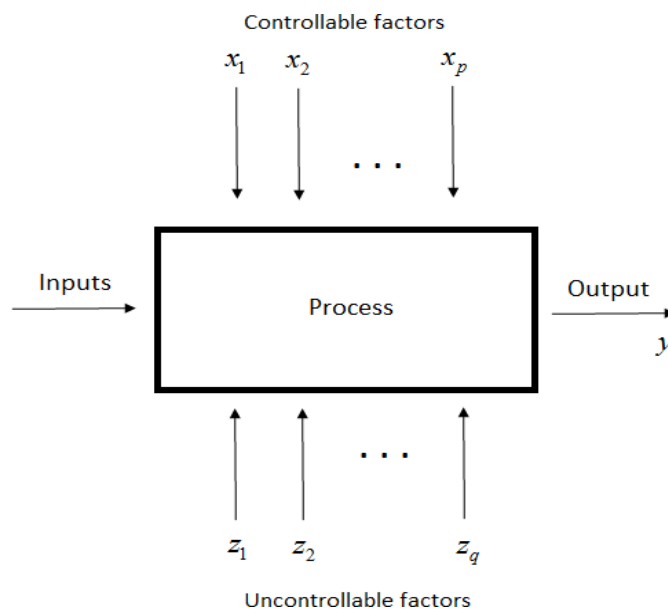
Οι πειραματικοί σχεδιασμοί και η ανάλυσή τους έχουν απασχολήσει έκτοτε αρκετά τη διεθνή και παγκόσμια βιβλιογραφία μέσα από την συνεχή αναζήτηση των βέλτιστων δυνατών πειραματικών σχεδιασμών, καθότι ένας καλός πειραματικός σχεδιασμός μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της απόδοσης μιας διεργασίας, καθώς και να μειώσει τη μεταβλητότητα, το χρόνο ανάπτυξης και το συνολικό κόστος αυτής (Montgomery, 2006). Ειδικά στη γεωργία οι απαιτήσεις μεγάλων εκτάσεων γης και διαθέσιμου χρόνου, όπως και η μεταβλητότητα μεταξύ των διαφορετικών χωροταξικών τεμαχίων γης, οδήγησαν στην ανάγκη ανάπτυξης των βασικότερων αρχών ενός καλού πειραματικού σχεδιασμού, που δεν είναι άλλοι, από την ομαδοποίηση, την τυχαιοποίηση, την επανάληψη (Montgomery, 2006) και την ορθογωνιότητα.

Το διακύβευμα της διερεύνησης των σχέσεων μεταξύ διαφόρων παραγόντων και της λήψης της μέγιστης δυνατής πληροφόρησης μέσω των λιγότερων δυνατών δοκιμών ή πειραμάτων καθιστά έναν καλό πειραματικό σχεδιασμό πιο χρήσιμο από την πραγματική πλήρη ανάλυση, λόγω μείωσης του απαιτούμενου χρόνου και κόστους. Ειδικότερα, οι

κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί διακρίνονται αφενός για το χαμηλότερο κόστος τους, ως προς την μελέτη των επιδράσεων δύο ή περισσότερων ταυτοχρόνως παραγόντων (Wu & Hamada, 2000) και αφετέρου για την ανίχνευση των σημαντικότερων εξ' όλων των παραγόντων από τα πρώιμα ακόμη στάδια της διερεύνησης.

Με τον όρο πειραματικό σχεδιασμό ορίζουμε έναν έλεγχο ή μια σειρά ελέγχων στους οποίους μεταβάλλουμε εκ προμελέτης τα επίπεδα των παραγόντων μιας διαδικασίας ή ενός συστήματος με σκοπό την παρατήρηση και τον προσδιορισμό των μεταβολών που επέρχονται στη μεταβλητή απόκρισης (Montgomery, 2013) ή αλλιώς στο αποτέλεσμα που μετριέται στο πείραμα (*treatment effect*). Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1, που ακολουθεί, οι επιδράσεις των παραγόντων αποτελούν άγνωστες παραμέτρους στα πλαίσια ενός πειραματικού σχεδιασμού. Ελεγχόμενοι παράγοντες είναι εκείνοι των οποίων τα επίπεδα μπορούν να ρυθμιστούν από τον πειραματιστή ενώ, από την άλλη πλευρά, οι μη ελεγχόμενοι παράγοντες δεν μπορούν να ρυθμιστούν από τον πειραματιστή αλλά μπορούν να μετρηθούν στο πείραμα (Montgomery, 2013,16).

**Σχήμα 1.1:** Το γενικό μοντέλο μιας διαδικασίας ή ενός συστήματος



Στα πλαίσια λοιπόν κάθε πειραματικού σχεδιασμού, ερμηνεύοντας και το Σχήμα 1.1 στους στόχους περιλαμβάνεται ο προσδιορισμός των παραγόντων που επηρεάζουν τη μεταβλητή απόκριση  $y$ , ο προσδιορισμός του επιπέδου ή τη στάθμης των ελεγχόμενων

παραγόντων  $x_p$ , ώστε η μεταβλητή απόκρισης να βρίσκεται στα επιθυμητά πλαίσια τιμών, ο προσδιορισμός του επιπέδου ή της στάθμης των ελεγχόμενων παραγόντων  $x_p$ , ώστε η μεταβλητότητα της μεταβλητής απόκρισης να είναι μικρή και τέλος ο προσδιορισμός του επιπέδου ή τη στάθμης των ελεγχόμενων παραγόντων  $x_p$ , ώστε οι επιδράσεις των ανεξέλεγκτων παραγόντων  $z_q$  να ελαχιστοποιούνται στο έπαρκο (Montgomery, 2013).

Ειδικότερα, η συνολική μεταβλητότητα χωρίζεται σε επιμέρους τμήματα, και πιο συγκεκριμένα: στη μεταβλητότητα που οφείλεται στους παράγοντες, στη μεταβλητότητα που οφείλεται στις μεταβλητές πλαισίου, δηλαδή σε εκείνες τις μεταβλητές που ενδέχεται να επηρεάζουν τη μεταβλητή απόκρισης οι οποίες όμως είναι αδιάφορες ως προς τους σκοπούς της πειραματικής διαδικασίας και ως τούτου τίθενται υπό έλεγχο προκειμένου να εξαφανιστεί η επίδρασή τους, και τέλος στη μεταβλητότητα που οφείλεται στο πειραματικό σφάλμα, το οποίο ορίζεται, ως εκείνη η μεταβλητότητα της μεταβλητής απόκρισης, η οποία δεν μπορεί να αποδοθεί σε αλλαγή του συνδυασμού των επιπέδων των παραγόντων ή σε μεταβολή της κατάστασης μιας μεταβλητής πλαισίου (όπως σε Ευαγγελάρας, 2012).

Αυτός ο διαχωρισμός επιτυγχάνεται μέσω τριών θεμελιωδών αρχών (Wu & Hamada, 2009, 8-9), που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη σε κάθε πειραματικό σχεδιασμό και πιο συγκεκριμένα μέσω:

- της *τυχαιοποίησης* (randomization), δηλαδή, της τυχαίας κατανομής των πειραματικών μονάδων στους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων. Η τυχαιοποίηση προστατεύει από μεταβλητές, που μπορεί να είναι άγνωστες στο πείραμα, αλλά να προσκρούουν στην απόκριση και ως εκ τούτου μειώνει την ανεπιθύμητη επίδραση υποκειμενικών κρίσεων στην κατανομή των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων,
- της *ομαδοποίησης* (blocking), δηλαδή, της προσπάθειας ελέγχου των επιπέδων μιας μεταβλητής πλαισίου. Για να θεωρηθεί αποτελεσματική η ομαδοποίηση, αξίζει να σημειωθεί ότι θα πρέπει η μεταβλητότητα εντός των ομάδων να είναι πολύ μικρότερη από την μεταβλητότητα μεταξύ των ομάδων και

- της επανάληψης (replication), δηλαδή, της επαναληπτικής παρατήρησης της μεταβλητής απόκρισης για κάθε συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων. Μέσω της επανάληψης μειώνεται η μεταβλητότητα των εκτιμώμενων επιδράσεων των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων και ενισχύεται η δυνατότητα ανίχνευσης διαφορών μεταξύ των τελευταίων.

## 1.1 Βασικές αρχές των παραγοντικών σχεδιασμών και οι πλήρεις $2^k$ παραγοντικοί σχεδιασμοί

Ένας πειραματικός σχεδιασμός στον οποίο εμπλέκονται  $k$  ( $\geq 2$ ) παράγοντες  $F_1, F_2, \dots, F_k$  οι οποίοι έχουν  $s_1, \dots, s_k$  επίπεδα αντίστοιχα, καλείται παραγοντικός πειραματικός σχεδιασμός. Αναλυτικότερα, εάν ισχύει, ότι  $s_1 = \dots = s_k = s$ , τότε γίνεται λόγος για ένα συμμετρικό  $s_1 \times \dots \times s_k = s^k$  παραγοντικό σχεδιασμό ενώ σε αντίθετη περίπτωση ο σχεδιασμός καλείται μη συμμετρικός. Έστω, ότι  $s_i$  τα επίπεδα του  $i$ -οστού παράγοντα  $F_i$  για  $1 \leq i \leq k$  τα οποία μπορούν να κωδικοποιηθούν ως  $0, 1, \dots, s_i - 1$ , τότε κάθε συνδυασμός όλων των επιπέδων των  $k$  παραγόντων εντάσσεται στην  $k$ -οστή διάταξη των  $j_1, \dots, j_k$  όπου  $j_i \in \{0, 1, \dots, s_i - 1\}$ ,  $1 \leq i \leq k$  συγκροτώντας  $\prod s_i$  συνδυασμούς των θεραπειών. Κάθε συνδυασμός, λοιπόν, των επιπέδων των παραγόντων ονομάζεται συνδυασμός αγωγών ή θεραπειών (treatment combination) ή διαφορετικά εκτέλεση (run).

Αναλυτικότερα, οποιοσδήποτε  $s^k$  παραγοντικός σχεδιασμός περιέχει  $k$  κύριες επιδράσεις,  $\binom{k}{2}$  αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων,  $\binom{k}{3}$  αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων, ..., και μια αλληλεπίδραση  $k$ -παραγόντων. Σε γενικές, λοιπόν, γραμμές υπάρχουν  $k$  κύριες επιδράσεις, οι οποίες ονομάζονται κύριες εφόσον εμπλέκεται ένας μόνο παράγον ο οποίος ανήκει στους πρωταρχικούς του πειράματος και  $\binom{k}{s}$  αλληλεπιδράσεις  $s$  παραγόντων.

Για παράδειγμα αν έχουμε 2 παράγοντες  $F_1, F_2$  ( $k = 2$ ) δύο επιπέδων ( $s_1 = s_2 = 2$ ) συνολικά υπάρχουν 4 συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων, που περιγράφονται στον Πίνακα 1.1, που ακολουθεί.

**Πίνακας 1.1:** Παράδειγμα συνδυασμού των επιπέδων των παραγόντων για τον  $2^2$  πειραματικό παραγοντικό σχεδιασμό

<i>Συνδυασμοί επιπέδων των παραγόντων</i>	<i>Ερμηνεία</i>
00	Και οι δύο παράγοντες είναι στη χαμηλή στάθμη.
01	Ο πρώτος παράγων στη χαμηλή και ο δεύτερος στην υψηλή στάθμη.
10	Ο πρώτος στην υψηλή και ο δεύτερος στην χαμηλή στάθμη.
11	Και οι δύο παράγοντες στην υψηλή στάθμη.

Ένα πειραματικό μοντέλο, που εξετάζει τόσο τις κύριες επιδράσεις όσο και τις αλληλεπιδράσεις ονομάζεται πλήρες. Οι πιο συνήθεις παραγοντικοί σχεδιασμοί τόσο στην πράξη όσο και σε επίπεδο βιβλιογραφίας είναι οι παραγοντικοί σχεδιασμοί με δύο επίπεδα.

Μια πλήρη επανάληψη του συγκεκριμένου σχεδιασμού για  $k$  παράγοντες έχει συνολικό αριθμό εκτελέσεων ίσο με  $N = 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$  και ονομάζεται  $2^k$  παραγοντικός σχεδιασμός. Πιο συγκεκριμένα, οι  $2^k$  παραγοντικοί σχεδιασμοί είναι πολύ αποδοτικοί γιατί επιτρέπουν τη διερεύνηση πολλών παραγόντων με χρήση ενός σχετικά μικρού αριθμού δοκιμών (Montgomery, 2013), ενώ συγκριτικά με τα παραγοντικά πειράματα, στους  $2^k$  παραγοντικούς σχεδιασμούς τόσο οι συμβολισμοί αλλά και οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι. Βασικό μειονέκτημά τους αποτελεί το γεγονός, πως η αύξηση του αριθμού των παραγόντων επιφέρει ταυτόχρονη αύξηση του πλήθους των παρατηρήσεων, που απαιτούνται για μια πλήρη επανάληψη του σχεδιασμού, έτσι για παράδειγμα μια πλήρη επανάληψη ενός  $2^5$  σχεδιασμού απαιτούνται 32 παρατηρήσεις, ενός  $2^6$  απαιτούνται 64 παρατηρήσεις, ενός  $2^7$  απαιτούνται 128 παρατηρήσεις κλπ.

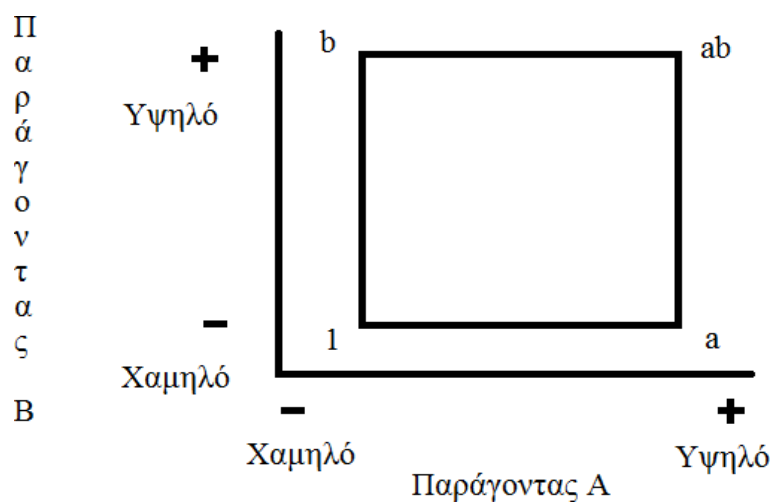
Τα επίπεδα των παραγόντων συνήθως συμβολίζονται με +1 για το υψηλό επίπεδο του παράγοντα και με -1 για το χαμηλό επίπεδο, ενώ οι παράγοντες αλλά και οι παραγοντικές επιδράσεις συμβολίζονται με κεφαλαία λατινικά γράμματα (A,B,C κλπ.). Για τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων γίνεται χρήση συνδυασμών είτε των προσήμων

είτε πεζών λατινικών γραμμάτων. Πιο συγκεκριμένα, η υψηλή στάθμη οποιουδήποτε παράγοντα στο συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων συμβολίζεται με το αντίστοιχο μικρό λατινικό γράμμα και κατά συνέπεια η απουσία του εν λόγω γράμματος υποδηλώνει την χαμηλή στάθμη του παράγοντα στον συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων.

Κατά αυτόν τον τρόπο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.2, που αποτελεί, μια γεωμετρική αναπαράσταση του  $2^2$  παραγοντικού σχεδιασμού:

- Με «a» περιγράφεται ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων με τον παράγοντα A στην υψηλή του στάθμη και τον παράγοντα B στην χαμηλή,
- Με «b» περιγράφεται ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων με τον παράγοντα A στην χαμηλή του στάθμη και τον παράγοντα B στην υψηλή,
- Με «ab» περιγράφεται ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων και με τους δύο παράγοντες στην υψηλή στάθμη
- και τέλος με το (1) περιγράφεται ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων και με τους δύο παράγοντες στην χαμηλή στάθμη (Montgomery, 2013, 187).

**Σχήμα 1.2:** Η γεωμετρική αναπαράσταση του  $2^2$  πειραματικού σχεδιασμού





Καθιερωμένη τακτική αποτελεί η εγγραφή των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων με τη διάταξη (1),a,b,ab η οποία αναφέρεται ως τυπική διάταξη των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων. Για την εγγραφή στην τυπική διάταξη εισάγεται κάθε φορά ένας εκ των παραγόντων ενώ κάθε νέος παράγοντας που εισάγεται συνδυάζεται με το σύνολο των προϊστάμενων. Για παράδειγμα η τυπική διάταξη ενός  $2^4$  παραγοντικού σχεδιασμού είναι η κάτωθι:

(1),a,b,ab,c,ac,bc,abc,d,ad,bd,abd,cd,acd,bcd

## 1.2 Απλοί (regular) $2^k - p$ κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

Η αύξηση του αριθμού των παραγόντων σε έναν  $2^k$  παραγοντικό σχεδιασμό επιφέρει ταυτόχρονη ταχεία αύξηση του αριθμού των απαιτούμενων εκτελέσεων για κάθε πλήρη επανάληψη του πειράματος. Η ανάγκη εξοικονόμησης των περιορισμένων οικονομικών πόρων αλλά και του χρόνου του αναγκαίου υπολογιστικού κόστους σε συνδυασμό με την υπόθεση, ότι ορισμένος αριθμός υψηλής τάξεως αλληλεπιδράσεων είναι αμελητέες, καθιστά δυνατή την λήψη της επιθυμητής πληροφορίας για τις κύριες επιδράσεις και της επιδράσεις χαμηλής τάξεως με την εκτέλεση μόνο ενός υποσυνόλου των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων (κλάσμα) του πλήρους  $2^k$  παραγοντικού σχεδιασμού. Αυτοί οι σχεδιασμοί ονομάζονται κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί και αποτελούν μέρος των ευρύτερα χρησιμοποιούμενων σχεδιασμών σε πληθώρα πρακτικών προβλημάτων ενώ η κυριότερη χρήση τους τοποθετείται σε παραγοντικά πειράματα κρησαρίσματος (screening experiments) (Chen, 1998, 186). Ως τμήμα των ορθογώνιων παραγοντικών σχεδιασμών διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: στους απλούς (regular) κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, οι οποίοι έχουν απλή δομή σύμφωνα με την οποία οποιοσδήποτε δύο επιδράσεις είναι είτε ορθογώνιες, είτε πλήρως ταυτόσημες και στους σύνθετους (non-regular) κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, που έχουν σύνθετη δομή, όπου οι επιδράσεις είναι μήτε ορθογώνιες μήτε πλήρως ταυτόσημες (όπως σε Evangelaras & Koukouvinos, 2004).

Για παράδειγμα το  $\frac{1}{2}$  κλάσμα του πλήρους  $2^3$  παραγοντικού σχεδιασμού έχει 4 συγκεκριμένους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων ενώ για τον πλήρη σχεδιασμό, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1.2 αλγεβρικών προσήμων του  $2^3$  απαιτούνται 8 εκτελέσεις.

**Πίνακας 1.2:** Ο πίνακας αλγεβρικών προσήμων του πλήρους  $2^3$  παραγοντικού σχεδιασμού

Συνδυασμός Επιπέδων Παραγόντων	Παραγοντικές Επιδράσεις							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Ο απλός  $2^{3-1}$  κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός δημιουργείται από τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων, που έχουν αρνητικό πρόσημο για παράδειγμα στη στήλη BC (θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε άλλη στήλη αλληλεπιδράσεων στη θέση της). Η BC, εν προκειμένω, ονομάζεται γεννήτορας (generator) του  $\frac{1}{2}$  κλάσματος του πλήρους  $2^3$  σχεδιασμού ή λέξη (word), ενώ από την ισότητα  $I = -BC$ , η εν λόγω σχέση ονομάζεται ορίζουσα σχέση (defining relation) του σχεδιασμού.

Γενικά, ένας απλός  $2^{k-p}$  κλασματικός σχεδιασμός έχει  $p$  ανεξάρτητους γεννήτορες, οι οποίοι ορίζουν και  $p$  (αρχικές) ορίζουσες σχέσεις. Από αυτές δημιουργούνται συνολικά  $2^{p-1}$  «λέξεις» που ορίζουν πλήρως τη δομή του σχεδιασμού. Το σύνολο των λέξεων αυτών φανερώνει τη δομή του σχεδιασμού και είναι η βάση του κριτηρίου της ελάχιστης απόκλισης. Σημειώνεται ότι κάθε παραγοντική επίδραση έχει  $2^{p-1}$  ταυτόσημες με αυτήν επιδράσεις. Παράλληλα αξίζει να υπογραμμιστεί ότι η ύπαρξη των ορίζουσών σχέσεων αποτελεί ουσιαστικά τη βασική διάκριση μεταξύ απλών και σύνθετων κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών.

Προφανώς, λοιπόν, η επιλογή των αρχικών ορίζουσών σχέσεων επηρεάζει και τη δομή που έχουν στον κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό οι ταυτόσημες επιδράσεις. Στο

συγκεκριμένο, λοιπόν, παράδειγμα, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1.3, που ακολουθεί, δύο από τις τρεις κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες, καθότι  $B = -C$ , γεγονός που δημιουργεί ουσιαστικό πρόβλημα σε κάθε προσπάθεια αντιστοιχίας των παραγόντων με τις επιδράσεις που έχουν στο πείραμα. Η στήλη των ταυτόσημων επιδράσεων του Πίνακα 1.3 έχει προκύψει από το γινόμενο των επιδράσεων με την ορίζουσα, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά και στην δεύτερη στήλη όπου παρουσιάζονται τα γινόμενα των επιδράσεων. Ο προσδιορισμός του συνόλου των ταυτόσημων επιδράσεων καλείται και δομή των ταυτόσημων επιδράσεων και για μικρά κλάσματα παραγοντικών σχεδιασμών δημιουργεί αυξημένο υπολογιστικό κόστος.

**Πίνακας 1.3:** Το σύνολο των ταυτόσημων (alias set) επιδράσεων του  $2^{3-1}$  με ορίζουσα σχέση την  $I = -BC$

<i>Επίδραση</i>	<i>Ορίζουσα <math>I = -BC</math></i>	<i>Ταυτόσημες επιδράσεις</i>
<i>A</i>	$A(-BC) = -ABC$	$A = -ABC$
<i>B</i>	$B(-BC) = -C$	$B = -C$
<i>AB</i>	$AB(-BC) = -AC$	$AB = -AC$
<i>C</i>	$C(-BC) = -B$	$C = -B$
<i>AC</i>	$AC(-BC) = -AB$	$AC = -AB$
<i>BC</i>	$BC(-BC) = -I$	$BC = -I$
<i>ABC</i>	$ABC(-BC) = -A$	$ABC = -A$

Η επιλογή των βέλτιστων (optimal) κλασμάτων γίνεται με βάση διάφορα κριτήρια τα πιο συνήθη εκ των οποίων είναι η διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού (resolution), που προτάθηκε από τους Box & Hunter (1961) και η ελάχιστη απόκλιση (minimum aberration), που προτάθηκε από τους Fries & Hunter (1980).<sup>§§</sup> Ειδικότερα, η διακριτική ικανότητα ενός κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού με δύο επίπεδα είναι ίση με το μήκος της μικρότερης «λέξης» που χρησιμοποιείται σε ορίζουσα σχέση σαν γεννήτορας. Συνήθως είναι επιθυμητοί σχεδιασμοί που έχουν την υψηλότερη δυνατή διακριτική ικανότητα.

Αναλυτικότερα, οι σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας *III*, *IV* και *V* είναι οι πιο δημοφιλείς και συνοψίζονται ως εξής (Box & Hunter, 1961, 319):

- *Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III:* στους εν λόγω σχεδιασμούς καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Αν στο παράδειγμα του Πίνακα 1.4 παίρναμε ως ορίζουσα σχέση του  $2^{3-1}$ , είτε την  $I = -ABC$  είτε την  $I = ABC$ , τότε ο παραγόμενος,  $2^{3-1}$  κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός θα ήταν διακριτικής ικανότητας III και μπορεί να συμβολιστεί ως  $2_{III}^{3-1}$ . Παρακάτω δίνεται ο πίνακας προσήμων του  $2_{III}^{3-1}$  με ορίζουσα σχέση την σχέση  $I = -ABC$ .

**Πίνακας 1.4:** Ο  $2_{III}^{3-1}$  με ορίζουσα την σχέση  $I = -ABC$

**Παραγοντικές επιδράσεις**

A	B	C
—	—	—
+	+	—
+	—	+
—	+	+

Αντίθετα, το κλάσμα με ορίζουσα σχέση την  $I = -BC$  όπως προαναφέρθηκε (ο κλασματικός σχεδιασμός  $2_{II}^{3-1}$ ), έχει κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες μεταξύ τους. Ωστόσο αξίζει να αναφερθεί επιγραμματικά, πως υπάρχει η δυνατότητα να μετατραπεί ένας σχεδιασμός από διακριτικής ικανότητας III σε σχεδιασμό διακριτικής ικανότητας IV κατά τους Box, Hunter & Hunter (1978, pp. 398-399) μέσω της διαδικασίας «fold over» του σχεδιασμού δηλαδή μέσω επανάληψης του σχεδιασμού με αντεστραμμένα τα πρόσημα.

- *Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας IV:* στους εν λόγω σχεδιασμούς καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή με οποιαδήποτε αλληλεπίδραση δύο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Για παράδειγμα, ο  $2^{4-1}$  με ορίζουσα σχέση την  $I = ABCD$  είναι διακριτικής ικανότητας IV και μπορεί να συμβολιστεί ως  $2_{IV}^{4-1}$ .
- *Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας V:* στους εν λόγω σχεδιασμούς καμία κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δύο παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη

με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή με οποιαδήποτε αλληλεπίδραση δύο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων. Για παράδειγμα, ο  $2^{5-1}$  με ορίζουσα σχέση την  $I = ABCDE$  είναι διακριτικής ικανότητας  $V$  και μπορεί να συμβολιστεί ως  $2_V^{5-1}$ .

Εν ολίγοις λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω, εφόσον είναι γνωστά σε ένα σχεδιασμό τα επίπεδα των παραγόντων, το σύνολο αυτών αλλά το σύνολο των δυνατών εκτελέσεων ο πειραματιστής μπορεί να επιλέξει έναν  $2^{k-p}$  κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό με τη μέγιστη δυνατή διακριτική ικανότητα. Το κριτήριο της εν λόγω επιλογής στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως κριτήριο της μέγιστης διακριτικής ικανότητας (*maximum resolution criterion*) και θα γίνει εκτενέστερη σε αυτό αναφορά στο επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Ο λόγος, ωστόσο, επιλογής της υψηλότερης δυνατής διακριτικής ικανότητας  $R \geq 3$  προκύπτει από την ανάγκη λήψης μονοσήμαντων ερμηνειών, που να αφορούν στα δεδομένα του πειράματος και την θεώρηση αμελητέων όσο το δυνατόν υψηλότερης τάξεως αλληλεπιδράσεων.

### **1.3 Σύνθετοι (non regular) $2^{k-p}$ κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί**

Οι σύνθετοι (non-regular) κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί, έχουν σύνθετη δομή σύμφωνα με την οποία οι επιδράσεις των παραγόντων είναι, μήτε ορθογώνιες, μήτε πλήρως ταυτόσημες (όπως σε Evangelaras & Koukouninos, 2004). Ο κυριότερος λόγος χρήσης των σύνθετων  $2^{k-m}$  παραγοντικών σχεδιασμών είναι η οικονομία στο πλήθος των εκτελέσεων και η ευελιξία στην επιλογή των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων (Wu, C.F.J. & Hamada, M.S., 2009, 390). Το πλήθος των δοκιμών δεν αποτελεί, όπως ισχύει για τους απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, δύναμη του 2 αλλά απλά πολλαπλάσιο του 4. Γενικά, ανήκουν στην οικογένεια των ορθογώνιων σχηματισμών με  $n$  γραμμές και  $k$  στήλες.

Σύνθετοι κλασματικοί σχεδιασμοί μπορεί να προκύψουν από κορεσμένους ορθογώνιους σχηματισμούς  $OA(n, n-1, 2, 2)$ , δηλαδή από σχηματισμούς που έχουν το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στηλών  $(n-1)$  για δοθέν πλήθος γραμμών  $n = 4k$ , απλά επιλέγοντας  $k$  από τις συνολικά  $n-1$  διαθέσιμες στήλες. Τέτοιοι κορεσμένοι σχεδιασμοί

δόθηκαν από τους Plackett & Burman (1946) εξ' ου και έχει επικρατήσει στη διεθνή βιβλιογραφία η αναφορά στα σχέδια αυτά, ως Plackett & Burman designs (Wu, C.F.J. & Hamada, M.S., 2009, 376). Τα σχέδια, που προτείνουν οι Plackett & Burman, δημιουργούνται με μεταθέσεις στοιχείων ενός διανύσματος γραμμή μέσω κυκλικής διαρρύθμισης (cyclic arrangement). Πιο συγκεκριμένα η δεύτερη γραμμή παράγεται από την πρώτη μετακινώντας όλα τα στοιχεία μια θέση δεξιά και τοποθετώντας την τελευταία εγγραφή στην πρώτη θέση. Η τρίτη γραμμή δημιουργείται κατά την ως άνωθεν μεθοδολογία από τη δεύτερη γραμμή και η διαδικασία ολοκληρώνεται με τη διαρρυθμιστική αυτή παραγωγή των  $N-1$  γραμμών, ενώ μια γραμμή με  $-1$ 'ες τοποθετείται στην  $N$  γραμμή του πίνακα (Wu, C.F.J. & Hamada, M.S., 2009, 376). Η προτεινόμενη μέθοδος της *cyclic arrangement* μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντιστοίχως και στις στήλες αλλά δεν εφαρμόζεται για  $n$  ίσο με 28, 52, 76 και 100. Οι πιο δημοφιλείς σχεδιασμοί Plackett & Burman είναι με 8, 12, 20, και 24 εκτελέσεις.

Παράλληλα, κάποιοι σχεδιασμοί Plackett & Burman μπορούν να δημιουργηθούν από τους πίνακες Hadamard (Wu, C.F.J. & Hamada, M.S., 2009, 390). Πιο συγκεκριμένα, αν υπάρχει ένας Hadamard πίνακας τάξεως  $n=4k$ , τότε υπάρχει και ένας κορεσμένος ορθογώνιος σχηματισμός  $OA(n, n-1, 2, 2)$  (Hedayat, Sloane & Stufken, 1999, 148). Στο Σχήμα 1.3, που ακολουθεί, για παράδειγμα, παρουσιάζεται ο πίνακας Hadamard  $H_8$  από τον οποίο μπορούμε να “κατασκευάσουμε” τον ορθογώνιο σχεδιασμό  $OA(8, 7, 2, 2)$ .

**Σχήμα 1.3:** Ο Hadamard πίνακας  $H_8$  (Sylvester type) και ο ορθογώνιος σχηματισμός  $OA(8, 7, 2, 2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Να αναφερθεί επιγραμματικά, πως το παραγόμενο γινόμενο  $H_a \otimes H_b$  δύο πινάκων Hadamard τάξεως  $a$  και  $b$  αντίστοιχα είναι ένας επίσης Hadamard πίνακας τάξεως  $ab$ . Αυτοί οι πίνακες τάξεως  $2b, 4b, 8b, 16b, 32b...$  που αποτελούν το γινόμενο του Hadamard πίνακα

τάξεως  $b$  και του  $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , οι επονομαζόμενοι πίνακες τύπου Sylvester όπως είναι και ο πίνακας  $H_8$  του Σχήματος 1.5.

Σχετικά με την εκτίμηση επιδράσεων στους σύνθετους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, οι Wang και Wu διέκριναν τη δυνατότητα εκτίμησης κάποιων αλληλεπιδράσεων μέσω της αρχής της κρυφής προβολικότητας (hidden projection property). Πιο συγκεκριμένα, ένας σχεδιασμός θεωρείται ότι έχει κρυφή προβολικότητα, αν επιτρέπει κάποιες ή όλες τις αλληλεπιδράσεις να εκτιμηθούν μαζί με τις κύριες επιδράσεις, ακόμη και όταν δεν έχει την κατάλληλη διακριτική ικανότητα ή άλλες συνδυαστικές ιδιότητες, που θα επέτρεπαν αυτή την εκτίμησή (Wang και Wu, 1995). Για τους σχεδιασμούς Plackett & Burman, η εν λόγω ιδιότητα είναι αποτέλεσμα των πολύπλοκων ταυτόσημων σχηματισμών μεταξύ των κύριων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων. Στην κατεύθυνση αυτή, ο Cheng (1995) απέδειξε ότι η ένας σχεδιασμός που προκύπτει από έναν  $OA(n, q, 2, 2)$  με  $q \geq 4$  και  $n=8k+4$ , με επιλογή οποιωνδήποτε 4 στηλών του, έχει την ιδιότητα όλες οι κύριες επιδράσεις και οι αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξεως των εν λόγω παραγόντων να είναι εκτιμήσιμες, εφόσον αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερες τάξεως θεωρηθούν ασήμαντες.





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί και τα κριτήρια της διακριτικής ικανότητας και της ελάχιστης απόκλισης

Επειδή οι  $2^k$  πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί απαιτούν να εκτελούνται συνολικά  $2^k$  δοκιμές (πειράματα), τα πλήρη παραγοντικά σχέδια σπάνια χρησιμοποιούνται στην πράξη για μεγάλο πλήθος παραγόντων  $k$  ( $k \geq 7$ ). Για οικονομικούς λόγους, τα κλασματικά παραγοντικά πειράματα, τα οποία αποτελούνται από ένα υποσύνολο ή κλάσμα των δοκιμών του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού, χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη. Σε αυτά τα κλασματικά πειραματικά πλάνα είναι συνηθισμένο φαινόμενο η εμφάνιση σύγχυσης (aliasing, confounding) στις παραγοντικές επιδράσεις, αφού πλέον δεν εκτιμώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη, όπως στους πλήρεις παραγοντικούς σχεδιασμούς. Η επιλογή λοιπόν κατάλληλου κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού γίνεται κυρίως με βάση τα κριτήρια της διακριτικής ικανότητας και της ελάχιστης απόκλισης.

Η κατασκευή των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών βασίζεται στην έννοια του γεννήτορα. Γενικά, Ένας  $2^{k-p}$  κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός, αποτελείται από  $2^{k-p}$  συνολικά πειραματικές δοκιμές και αποτελεί το  $1/2^p$  κλάσμα του  $2^k$  πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού. Για την κατασκευή τους απαιτείται η επιλογή  $p$  ανεξάρτητων γεννήτορων, οι οποίοι θα δημιουργήσουν ουσιαστικά το σχεδιασμό. Η διαδικασία κατασκευής συνοπτικά έχει ως εξής: Αρχικά δημιουργείται ένας πλήρης  $2^m$  πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός, όπου  $m=k-p$ . Στη συνέχεια, επιλέγονται  $p$  το πλήθος αλληλεπιδράσεις των  $m$  (αρχικών) στηλών ως γεννήτορες και οι στήλες που αντιστοιχούν σε αυτές προστίθενται στις  $m$  αρχικές, ώστε τελικά να προκύψει ένας σχεδιασμός με  $2^{k-p}$  γραμμές και  $k$  ( $=m+p$ ) στήλες.

Από τους γεννήτορες του σχεδιασμού εξάγονται πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για τις ιδιότητες του σχεδιασμού. Οι  $p$  γεννήτορες δημιουργούν τις  $p$  ορίζουσες σχέσεις του

σχεδιασμού που, με τη σειρά τους, δίνουν πληροφορία για τη δομή των ταυτόσημων επιδράσεων (aliasing, confounding) που προκύπτουν στον κλασματικό σχεδιασμό. Μία οριζουσα σχέση είναι της μορφής  $I = Q$ , όπου  $Q$  είναι μια συγκεκριμένη παραγοντική αλληλεπίδραση. Το πλήθος των παραγόντων που συνθέτουν την αλληλεπίδραση ορίζει και το μήκος της. Γενικά, σε έναν  $2^{k-p}$  κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, υπάρχουν συνολικά  $2^p - 1$  οριζουσες σχέσεις που προκύπτουν από τις  $p$  αρχικές οριζουσες σχέσεις (με βάση τους γεννήτορες). Το συγκεκριμένο πλήθος οφείλεται στο γεγονός ότι  $I \times I = I$ .

Για παράδειγμα, ας κατασκευάσουμε έναν  $2^{6-2}$  κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, που στο εξής θα καλείται D1. Θα χρειαστεί να γράψουμε τον πλήρη  $2^4$  ( $m = 4 = 6 - 2$ ) παραγοντικό σχεδιασμό και να επιλέξουμε στη συνέχεια  $p=2$  γεννήτορες. Αν συμβολίζουμε με 1, 2, 3 και 4 τις τέσσερις στήλες του αρχικού σχεδιασμού, θα χρησιμοποιήσουμε τις αλληλεπιδράσεις  $1 \times 2$  και  $1 \times 3 \times 4$  ως γεννήτορες για να φτιάξουμε τις στήλες 5 και 6 του σχεδιασμού. Συνεπώς θα έχουμε ότι  $5 = 1 \times 2$  και  $6 = 1 \times 3 \times 4$ . Ο σχεδιασμός φαίνεται παρακάτω.

1	2	3	4	5 (=1x2)	6 (=1x3x4)
-1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
-1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	1

Από τους 2 γεννήτορες  $5 = 1 \times 2$  και  $6 = 1 \times 3 \times 4$ , προκύπτει ότι  $5 \times 5 = 1 \times 2 \times 5$  και  $6 \times 6 = 1 \times 3 \times 4 \times 6$ , συνεπώς, έχουμε τις 2 αρχικές οριζουσες σχέσεις  $I = 125$  και  $I = 1346$  (στο εξής δεν θα αναγράφεται το σύμβολο του πολλαπλασιασμού, για συντομία). Επειδή όμως  $I = I \times I$ , έχουμε ότι  $I = 125 \times 1346$  ή τελικά  $I = 23456$ . Έτσι, προκύπτει και μία τρίτη οριζουσα σχέση. Το σύνολο λοιπόν των  $2^p - 1 = 2^2 - 1 = 3$  οριζουσών σχέσεων του σχεδιασμού είναι:

$$I = 125 = 1346 = 23456$$

Η σχέση αυτή ουσιαστικά καθορίζει το κλάσμα, και χρησιμοποιείται για την μελέτη της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση  $I = 125 = 1346 = 23456$  με όλες τις παραγοντικές επιδράσεις. Για τον σχεδιασμό D1 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 I &= 125 = 1346 = 23456 \\
 1 &= 25 = 346 = 123456 \\
 2 &= 15 = 12346 = 3456 \\
 3 &= 1235 = 146 = 2456 \\
 4 &= 1245 = 136 = 2356 \\
 5 &= 12 = 13456 = 2346 \\
 6 &= 1256 = 134 = 2345 \\
 13 &= 235 = 46 = 12456 \\
 14 &= 245 = 36 = 12356 \\
 16 &= 256 = 34 = 12345 \\
 23 &= 135 = 1246 = 456 \\
 24 &= 145 = 1236 = 356 \\
 26 &= 156 = 1234 = 345 \\
 35 &= 123 = 1456 = 246 \\
 45 &= 124 = 1356 = 236 \\
 56 &= 126 = 1345 = 234
 \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, η κύρια επίδραση 1 ταυτίζεται με την αλληλεπίδραση 25, την αλληλεπίδραση 346 και την αλληλεπίδραση 123456. Συνεπώς, μπορούμε να εκτιμήσουμε μόνο μία από αυτές, χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο σχεδιασμό. Γενικά, παρατηρούμε ότι στο σχεδιασμό D1 οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους, αλλά συγχέονται με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Ας κατασκευάσουμε τώρα και πάλι έναν  $2^{6-2}$  κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, που στο εξής θα καλείται D2, χρησιμοποιώντας ως γεννήτορες τις αλληλεπιδράσεις 123 και 134

ως γεννήτορες για να φτιάξουμε τις στήλες 5 και 6 του σχεδιασμού. Συνεπώς θα έχουμε ότι  $5 = 123$  και  $6 = 134$ . Ο σχεδιασμός φαίνεται παρακάτω.

1	2	3	4	5 (=123)	6 (=134)
-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1
-1	-1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
-1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1

Από τους 2 γεννήτορες  $5 = 123$  και  $6 = 134$ , προκύπτει ότι  $55 = 1235$  και  $66 = 1346$ , συνεπώς, έχουμε τις 2 αρχικές ορίζουσες σχέσεις  $I = 1235$  και  $I = 1346$ . Επειδή όμως  $I = I \times I$ , έχουμε ότι  $I = 1235 \times 1346$  ή τελικά  $I = 2456$ . Έτσι, προκύπτει και μία τρίτη ορίζουσα σχέση. Το σύνολο λοιπόν των  $2^p - 1 = 2^2 - 1 = 3$  ορίζουσών σχέσεων του σχεδιασμού είναι:

$$I = 1235 = 1346 = 2456$$

Η σχέση αυτή ουσιαστικά καθορίζει το κλάσμα, και χρησιμοποιείται για την μελέτη της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση  $I = 1235 = 1346 = 2456$  με όλες τις παραγοντικές επιδράσεις. Για τον σχεδιασμό D2 προκύπτει ότι:

$$I = 1235 = 1346 = 2456$$

$$1 = 235 = 346 = 12456$$

$$2 = 135 = 12346 = 456$$

$$3 = 125 = 146 = 23456$$

$$4 = 12345 = 136 = 256$$

$$5 = 123 = 13456 = 246$$

$$6 = 12356 = 134 = 245$$

$$13 = 25 = 46 = 123456$$

$$\begin{aligned}
14 &= 2345 = 36 = 1256 \\
16 &= 2356 = 34 = 1245 \\
23 &= 15 = 1246 = 3456 \\
24 &= 1345 = 1236 = 56 \\
26 &= 1356 = 1234 = 45 \\
35 &= 12 = 1456 = 2346 \\
45 &= 1234 = 1356 = 26 \\
56 &= 1236 = 1345 = 24
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, η κύρια επίδραση 1 ταυτίζεται με την αλληλεπίδραση 235, την αλληλεπίδραση 346 και την αλληλεπίδραση 12456. Συνεπώς, μπορούμε να εκτιμήσουμε μόνο μία από αυτές, χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο σχεδιασμό. Γενικά, παρατηρούμε ότι στο σχεδιασμό D2 οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους, αλλά συγχέονται με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων.

Τέλος, ας κατασκευάσουμε και έναν τρίτο  $2^{6-2}$  κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, που στο εξής θα καλείται D3, χρησιμοποιώντας ως γεννήτορες τις αλληλεπιδράσεις 34 και 14 ως γεννήτορες για να φτιάξουμε τις στήλες 5 και 6 του σχεδιασμού. Συνεπώς θα έχουμε ότι  $5 = 34$  και  $6 = 14$ . Ο σχεδιασμός φαίνεται παρακάτω.

1	2	3	4	5 (=34)	6 (=14)
-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1

Από τους 2 γεννήτορες  $5 = 34$  και  $6 = 14$ , προκύπτει ότι  $55 = 345$  και  $66 = 146$ , συνεπώς, έχουμε τις 2 αρχικές ορίζουσες σχέσεις  $I = 345$  και  $I = 146$ . Επειδή όμως  $I = I \times I$ , έχουμε ότι  $I=345 \times 146$  ή τελικά  $I=1356$ . Έτσι, προκύπτει και μία τρίτη ορίζουσα σχέση. Το σύνολο λοιπόν των  $2^p-1 = 2^2-1 = 3$  ορίζουσών σχέσεων του σχεδιασμού είναι:

$$I = 345 = 146 = 1356$$

Η σχέση αυτή ουσιαστικά καθορίζει το κλάσμα, και χρησιμοποιείται για την μελέτη της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση  $I = 345 = 146 = 1356$  με όλες τις παραγοντικές επιδράσεις. Για τον σχεδιασμό D3 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} I &= 345 = 146 = 1356 \\ 1 &= 1345 = 46 = 356 \\ 2 &= 2345 = 1246 = 12356 \\ 3 &= 45 = 1346 = 156 \\ 4 &= 35 = 16 = 13456 \\ 5 &= 34 = 1456 = 136 \\ 6 &= 3456 = 14 = 135 \\ 13 &= 145 = 346 = 56 \\ 14 &= 135 = 6 = 3456 \\ 16 &= 13456 = 4 = 35 \\ 23 &= 245 = 12346 = 1256 \\ 24 &= 235 = 126 = 123456 \\ 26 &= 23456 = 124 = 1235 \\ 35 &= 4 = 13456 = 16 \\ 45 &= 3 = 156 = 1346 \\ 56 &= 346 = 145 = 13 \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, η κύρια επίδραση 1 ταυτίζεται με την αλληλεπίδραση 1345, την αλληλεπίδραση 46 και την αλληλεπίδραση 356. Συνεπώς, μπορούμε να εκτιμήσουμε μόνο μία από αυτές, χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο σχεδιασμό. Γενικά, παρατηρούμε ότι στο σχεδιασμό D3 οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους, αλλά συγχέονται με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Οι σχεδιασμοί D1, D2 και D3 έχουν σαφείς διαφορές. Για παράδειγμα, στον σχεδιασμό D2 οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται ούτε μεταξύ τους, ούτε με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, ενώ στους D1 και D3 οι κύριες επιδράσεις συγχέονται με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Για την επιλογή του καλύτερου σχεδιασμού χρησιμοποιούνται διάφορα κριτήρια, με πιο σημαντικά αυτά της διακριτικής ικανότητας (resolution) και της ελάχιστης απόκλισης (minimum aberration).

## 2.1 Το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας

Όπως φάνηκε και από το παράδειγμα των σχεδιασμών D1, D2 και D3, η επιλογή των  $p$  γεννητόρων του  $2^{k-p}$  κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού επηρεάζει τη δομή των ταυτόσημων επιδράσεων (aliased relationships). Το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας (resolution) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγησή τους.

Το κριτήριο διακριτικής ικανότητας, προτάθηκε από τους Box και Hunter (1961) και βασίζεται στην αρχή της ιεραρχίας των επιδράσεων. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, οι επιδράσεις χαμηλότερης τάξης είναι πιο πιθανό να είναι σημαντικές και συνεπώς πρέπει να μπορεί να διαχωριστούν από άλλες και να εκτιμώνται ανεξάρτητα. Είναι επομένως επιθυμητό να επιλέξουμε ένα σχεδιασμό ο οποίος δεν συγχέει ή συγχέει αλλά σε πολύ μικρό βαθμό τις επιδράσεις χαμηλής τάξης (δηλαδή πρώτα τις κύριες επιδράσεις, στη συνέχεια τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων κ.ο.κ).

Η διακριτική ικανότητα ενός σχεδιασμού είναι ένας αριθμός,  $R$  και υπολογίζεται ως εξής: Ένας σχεδιασμός είναι διακριτικής ικανότητας  $R$  αν καμία επίδραση που περιλαμβάνει  $i$  παράγοντες είναι δεν συγχέεται με επιδράσεις που περιλαμβάνουν λιγότερους από  $R - i$  παράγοντες. Έτσι, σε έναν σχεδιασμό με διακριτική ικανότητα III οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους αλλά συγχέονται με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Σε έναν σχεδιασμό με διακριτική ικανότητα IV, οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους, ούτε με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων συγχέονται μεταξύ τους. Σε σχεδιασμό με διακριτική ικανότητα V, οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται μεταξύ τους, ούτε με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων, αλλά και οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων δεν συγχέονται μεταξύ τους.

Η διακριτική ικανότητα ενός σχεδιασμού υπολογίζεται ευκολότερα αν παρατηρήσουμε τις ορίζουσες σχέσεις του. Συγκεκριμένα, η διακριτική ικανότητα ενός σχεδιασμού ταυτίζεται με το μήκος της μικρότερης αλληλεπίδρασης που εμφανίζεται σε ορίζουσα σχέση. Για παράδειγμα, ο D1 έχει ορίζουσες σχέσεις τις  $I = 125 = 1346 = 23456$  και συνεπώς έχει διακριτική ικανότητα  $R=3$ . Ο D2 έχει ορίζουσες σχέσεις τις  $I = 1235 = 1346 = 2456$  και συνεπώς έχει διακριτική ικανότητα  $R=4$ . Τέλος, ο D3 έχει ορίζουσες σχέσεις τις  $I = 345 = 146 = 1356$  και συνεπώς έχει διακριτική ικανότητα  $R=3$ . Βλέπουμε λοιπόν ότι ο D2 έχει την υψηλότερη διακριτική ικανότητα ανάμεσα στους τρεις σχεδιασμούς, ενώ οι D1 και D3 έχουν την ίδια. Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε ένα κριτήριο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αξιολογηθούν περαιτέρω κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί με κοινή διακριτική ικανότητα.

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα της διακριτικής ικανότητας ενός σχεδιασμού είναι η έννοια της προβολής. Όταν λέμε προβολή, εννοούμε την επιλογή λιγότερων στηλών από τις  $k$  στήλες του σχεδιασμού. Με αυτή τη λογική, αν έχουμε έναν  $2^{k-p}$  κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό με  $n=2^{k-p}$  γραμμές,  $k$  στήλες και διακριτική ικανότητα  $R$ , και επιλέξουμε οποιεσδήποτε  $R-1$  στήλες του, αυτές οι στήλες του θα σχηματίζουν επαναλήψεις του πλήρους  $2^{R-1}$  παραγοντικού σχεδιασμού.

Για παράδειγμα, αυτό είναι εύκολο να διαπιστωθεί στους σχεδιασμούς D1, D2 και D3. Στους D1 και D3 που έχουν διακριτική ικανότητα  $R=3$ , κάθε επιλογή  $R-1=2$  στηλών από τις συνολικά 6, δίνει 4 επαναλήψεις του πλήρους  $2^2$ , ενώ στον D2 που έχει διακριτική ικανότητα  $R=4$ , κάθε επιλογή  $R-1=3$  στηλών από τις συνολικά 6, δίνει 2 επαναλήψεις του πλήρους  $2^3$ .

## 2.2 Το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης

Το 1980 οι Fries και Hunter καθοδηγούνται από το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας σε μια πιο εξευγενισμένη εκδοχή αυτού, με εφαρμογή αποκλειστικά στους απλούς  $2^{k-p}$  κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς.



Σε έναν  $2^{k-p}$  απλό κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό  $D$ ,  $A_i(D)$  είναι ο αριθμός των ξεχωριστών «λέξεων» μήκους  $i$ , για  $1 \leq i \leq k$ . Επιπλέον, η παρακάτω ακολουθία αποκαλείται ως διάνυσμα του μήκους των λέξεων του σχεδιασμού  $D$ :

$$W(D) = (A_1(D), A_2(D), A_3(D), \dots, A_n(D))$$

Σύμφωνα με το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης για οποιουδήποτε δύο  $2^{k-p}$  απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς  $D_1$  και  $D_2$ , έστω ότι ο  $r$  είναι ο μικρότερος ακέραιος, τέτοιος ώστε  $A_r(D_1) \neq A_r(D_2)$ , τότε ο σχεδιασμός  $D_1$  λέγεται ότι έχει μικρότερη απόκλιση από τον σχεδιασμό  $D_2$ , εφόσον ισχύει ότι  $A_r(D_1) < A_r(D_2)$ . Ωστόσο στην περίπτωση, που κανένας άλλος σχεδιασμός δεν έχει μικρότερη απόκλιση από τον  $D_1$ , τότε θεωρείται ότι ο  $D_1$  έχει την ελάχιστη απόκλιση ως σχεδιασμός (Wu & Hamada, 2009, 219).

Για παράδειγμα, ο  $D1$  και ο  $D3$  που έχουν την διακριτική ικανότητα, θα αναδείξουμε τον βέλτιστο σχεδιασμό μέσω του κριτηρίου της ελάχιστης απόκλισης. Οι ορίζουσες σχέσεις για τους εν λόγω σχεδιασμούς, όπως είχαμε προαναφέρει, είναι:

- για τον  $D1$  οι σχέσεις  $I = ABE = ACDF = BCDEF$
- για τον  $D3$  οι σχέσεις  $I = CDE = ADF = ACEF$

Παρατηρείται, συγκεκριμένα, ότι ο σχεδιασμός  $D1$ , έχει μια λέξη μήκους 3, ενώ από την άλλη ο σχεδιασμός  $D3$  έχει δύο λέξεις μήκους 3, τις  $CDE$  και  $ADF$ . Εφόσον οι σχεδιασμοί είναι διακριτικής ικανότητας  $III$  είναι γνωστό, πως καμία κύρια επίδραση δεν συγγέεται με άλλη κύρια επίδραση αλλά μόνο με αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξεως, όπως φαίνεται από τις σχέσεις που ακολουθούν για τον σχεδιασμό  $D1$  τρεις κύριες επιδράσεις συγγέονται με αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξεως ενώ στον σχεδιασμό  $D3$  πέντε κύριες επιδράσεις συγγέονται με αλληλεπιδράσεις δεύτερης τάξεως.

#### **D1**

$$A = BE = CDF = ABCEDF$$

$$B = AE = ABCDF = CDEF$$

$$C = ABCE = ADF = BDEF$$

$$D = ABDE = ACF = BCEF$$

$$E = AB = ACDEF = BCDF$$

$$F = ABEF = ACD = BCDE$$

**D3**

$$A = ACDE = DF = CEF$$

$$B = BCDE = ABDF = ABCEF$$

$$C = DE = ACDF = AEF$$

$$D = CE = AF = ACDEF$$

$$E = CD = ADEF = ACF$$

$$F = CDEF = AD = ACE$$

Είναι προφανές, λοιπόν, ότι ο σχεδιασμός D1 είναι προτιμότερος από τον σχεδιασμό D3 με βάση την παραπάνω ανάλυση. Ο σχεδιασμός αυτός έχει λιγότερες λέξεις μήκους 3 σε σχέση με τον D3. Το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης χρησιμοποιεί ακριβώς αυτή τη διαδικασία. Θεωρεί ως καλύτερο σχεδιασμό αυτόν με τις λιγότερες λέξεις συγκεκριμένου μήκους.

Είναι φανερό ότι η ελάχιστη απόκλιση είναι η φυσική προέκταση της διακριτικής ικανότητας ενός σχεδιασμού διότι το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας δεν επαρκεί από μόνο του για την αξιολόγηση και την ιεράρχηση των σχεδιασμών για την ανάδειξη του βέλτιστου (Fries & Hunter, 1980).

Τέλος αξίζει να σημειωθεί, ότι το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης των Fries και Hunter, αποτελεί το πιο διαδεδομένο κριτήριο για την επιλογή των βέλτιστων απλών κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών με δύο επίπεδα (Wu & Hadamard, 2009).

### 2.3 Ορθογώνιοι Σχηματισμοί

Οι  $2^{k-p}$  κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί μπορεί να κατασκευαστούν για οποιοδήποτε πλήθος γραμμών  $n$  το οποίο είναι δύναμη του 2 (προφανώς όπως είδαμε στην εισαγωγή αυτού του Κεφαλαίου). Μπορούμε δηλαδή να έχουμε τέτοιους σχεδιασμούς με 8, 16, 32 κλπ. πειραματικές δοκιμές. Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν μια απλή δομή ταυτόσημων επιδράσεων, όπως προκύπτει από τις οριζουσες σχέσεις τους και παρουσιάστηκε αναλυτικά στα παραδείγματα. Η απλή αυτή δομή φαίνεται στο γεγονός ότι δύο παραγοντικές επιδράσεις

ή θα είναι πλήρως συγκεχυμένες ή εντελώς ασυσχέτιστες. Για το λόγο αυτό, οι  $2^{k-p}$  κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί καλούνται και απλοί (regular) σχεδιασμοί.

Στη βιβλιογραφία έχουν παρουσιαστεί κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί με δύο επίπεδα οι οποίοι έχουν πλήθος γραμμών  $n$  το οποίο είναι απλά πολλαπλάσιο του 4. Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν την εξής ιδιότητα: Σε οποιαδήποτε επιλογή δύο στηλών τους, εμφανίζεται ο πλήρης  $2^2$  παραγοντικός σχεδιασμός επαναλαμβανόμενος  $n/4$  φορές. Η ιδιότητα αυτή καλείται και ορθογωνιότητα, και για το λόγο αυτό, τέτοιοι σχεδιασμοί λέγονται Ορθογώνιοι σχηματισμοί (Orthogonal Arrays). Με βάση τη λογική που αναλύθηκε στο τέλος της παραγράφου 2.1 οι σχεδιασμοί αυτοί θα έχουν διακριτική ικανότητα 3 και συνεπώς οι κύριες επιδράσεις δεν συγχέονται με άλλες κύριες επιδράσεις. Πρέπει να τονιστεί όμως ότι αυτοί οι σχεδιασμοί δεν έχουν ορίζουσες σχέσεις και απλή δομή ταυτόσημων επιδράσεων αλλά αντίθετα, η σχέση μεταξύ των επιδράσεων είναι πιο πολύπλοκη. Για το λόγο αυτό, καλούνται σύνθετοι (non-regular) κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί. Σε αυτούς τους σχεδιασμούς, τα κριτήρια της διακριτικής ικανότητας και της ελάχιστης απόκλισης δεν μπορεί να υπολογιστούν όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο αυτό. Στο επόμενο Κεφάλαιο περιγράφονται οι γενικεύσεις των δύο αυτών κριτηρίων για χρήση σε σύνθετους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς. Είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι οι απλοί κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί ανήκουν επίσης στην κατηγορία των ορθογώνιων σχηματισμών και συνεπώς τα γενικευμένα κριτήρια μπορεί να χρησιμοποιηθούν και σε αυτούς.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, αναφέρουμε ότι ορθογώνιοι σχηματισμοί προκύπτουν επιλέγοντας στήλες από σχεδιασμούς Plackett-Burman και από σχεδιασμούς Hadamard. Υπάρχουν όμως και σχεδιασμοί που δεν προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο. Ο επόμενος πίνακας δίνει το πλήθος των ορθογώνιων σχηματισμών με 12, 16, 20 και 24 γραμμές και 3, 4 και 5 στήλες που έχουν δοθεί στη βιβλιογραφία και των οποίων η αξιολόγηση θα γίνει στο Κεφάλαιο 4.

$k \setminus n$	12	16	20	24
3	2	3	3	4
4	1	5	3	10
5	2	11	11	63



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Κριτήρια γενικευμένης διακριτικής ικανότητας και γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης

Ένα βασικό πρόβλημα των κριτηρίων της διακριτικής ικανότητας και της ελάχιστης απόκλισης που περιεγράφηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο είναι το ότι τα συγκεκριμένα κριτήρια μπορεί να χρησιμοποιηθούν μόνο σε απλούς (regular) κλασματικούς σχεδιασμούς. Δεδομένου ότι οι ορθογώνιοι σχηματισμοί είναι στην πλειοψηφία τους σύνθετοι (non-regular) σχεδιασμοί, χρειάστηκε να τροποποιηθούν τα κριτήρια αυτά, ώστε να μπορούν να αξιολογηθούν όλοι οι σχεδιασμοί, απλοί ή σύνθετοι. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η ορολογία που δόθηκε από τους Deng και Tang (1999) η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του κριτηρίου της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας και της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης, ως γενικευμένων κριτηρίων για την αξιολόγηση και απλών και σύνθετων σχεδιασμών.

Κάθε κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός (απλός ή σύνθετος) ο οποίος έχει  $n$  γραμμές και  $m$  στήλες, θεωρείται ως ένα σύνολο  $m$  στηλών  $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ . Οι Deng και Tang θεώρησαν τα  $J$ -χαρακτηριστικά του σχεδιασμού ως χρήσιμες ποσότητες για την περιγραφή της σύγκρισης των παραγοντικών επιδράσεων στο σχεδιασμό. Για  $1 \leq k \leq m$  και κάθε υποσύνολο,  $s = \{d_{j_1} \dots d_{j_k}\}$  από  $k$  στήλες του  $D$ , το  $J$ -χαρακτηριστικό των  $k$  αυτών στηλών του  $D$  ορίζεται ως:

$$J_k(s) = J_k(d_{j_1}, \dots, d_{j_k}) = \left| \sum_{i=1}^n d_{ij_1} \cdots d_{ij_k} \right| \quad (1)$$

Αν λοιπόν έχουμε έναν σχεδιασμό με  $m$  στήλες, θα πρέπει να υπολογίσουμε  $m$  τιμές  $J_1$ -χαρακτηριστικών,  $\binom{m}{2}$  τιμές  $J_2$ -χαρακτηριστικών,  $\binom{m}{3}$  τιμές  $J_3$ -χαρακτηριστικών, ... και  $\binom{m}{m} = 1$  τιμή  $J_m$ -χαρακτηριστικού.

Το επόμενο παράδειγμα χρησιμοποιεί έναν ορθογώνιο σχεδιασμό (σύνθετο) με 24 γραμμές και 4 στήλες και δείχνει τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων. Οι 4 στήλες συμβολίζονται με A, B, C και D.

Σχεδιασμός				s															
A	B	C	D	A	B	C	D	A,B	A,C	A,D	B,C	B,D	C,D	A,B,C	A,B,D	A,C,D	B,C,D	A,B,C,D	
1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
J-χαρακτηριστικά	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-24
	$J_1$				$J_2$								$J_3$				$J_4$		

Αν ο σχεδιασμός είναι ορθογώνιος, τότε πάντα θα προκύπτει ότι  $J_1(s) = J_2(s) = 0$ . Αυτό το γεγονός διευκολύνει τους υπολογισμούς, καθώς σε ορθογώνιους σχεδιασμούς χρειάζεται να υπολογιστούν οι τιμές για σύνολα s με τρεις και περισσότερες στήλες. Οι  $J_k(s)$  τιμές διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη των κριτηρίων της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας (generalized resolution) και της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης (generalized minimum aberration).

Γενικά, η τιμή  $J_k(s)$  ενός συγκεκριμένου συνόλου s που περιέχει k συγκεκριμένες στήλες, δίνει πληροφορία για το βαθμό της σύγχυσης των επιδράσεων που «δημιουργούνται» από τους παράγοντες που συμμετέχουν στο σύνολο s. Με αυτή τη λογική, μηδενικές τιμές των J-χαρακτηριστικών είναι ιδανικές, καθώς καταλαβαίνει κανείς ότι κάποιες συγκεκριμένες επιδράσεις θα είναι ασυσχέτιστες.

Οι Deng και Tang απέδειξαν ότι για κάθε  $m$  στήλες ενός ορθογώνιου σχεδιασμού η τιμή  $J_m(s)$  αποτελεί πολλαπλάσιο του 4 (Deng & Tang, 1990, 1079-1080). Αναλυτικότερα, έστω  $D$  ένας ορθογώνιος παραγοντικός σχεδιασμός με  $n = 4t$  εκτελέσεις,  $k$  στήλες και επίσης έστω  $f_{mj}$  η συχνότητα των συνδυασμών των  $m$  στηλών που δίνουν  $J_m(s) = 4(t + 1 - j)$  για  $j = 1, \dots, t+1$ . Εφόσον, ωστόσο, ισχύει ότι  $\sum_{j=1}^{t+1} f_{mj} = \binom{k}{m}$  και παράλληλα  $f_{1j} = f_{2j} = 0$  για ορθογώνιους σχεδιασμούς είναι προτιμότερο να αναλογιστεί κανείς την  $f_{mj}$  για  $j = 1, \dots, t$  και για  $m \geq 3$ .

### 3.1 Γενικευμένη διακριτική ικανότητα (generalized resolution)

Για ένα σύνθετο, λοιπόν, κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό  $D$ , έστω  $r$  ο οποιοσδήποτε μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε να ισχύει, ότι  $\max_{|s|=r} J_r(s) > 0$  για κάθε υποσύνολο  $r$  διακριτών στηλών του σχεδιασμού, η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του  $D$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο (για την σχετική ανάλυση βλ. Deng & Tang, 1999):

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} \frac{J_r(s)}{n}]. \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε ότι  $p_r(s) = \frac{J_r(s)}{n}$  και αντίστοιχα  $q_r(s) = 1 - p_r(s)$  για  $0 \leq p_r(s) \leq 1$ ,  $0 \leq q_r(s) \leq 1$ , όπου αξίζει να σημειωθεί πως τα  $q_r(s)$  αποτελούν ένα μέτρο του «βαθμού της συγχύσεως» (degree of confounding) μεταξύ των  $r_s$  στηλών υποδηλώνοντας για μικρούς αριθμούς την ύπαρξη μεγάλου βαθμού ταυτίσεων μεταξύ των αλληλεπιδράσεων.

Τότε, σύμφωνα με τα προλεγόμενα, ο τύπος (1) της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$R(D) = r + \delta$$

όπου

$$\delta = \min_{|s|=r} q_r(s) = 1 - \max_{|s|=r} p_r(s).$$

Παράλληλα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα  $R(D)$  λαμβάνει τιμές μεταξύ  $r$  και  $r+1$ , ενώ για ορθογώνιους σχηματισμούς ισχύει ότι  $R(D) \geq 3$  και ως τούτου προτιμότερος θεωρείται με βάση το εν λόγω κριτήριο εκείνος ο σχεδιασμός που έχει τη μέγιστη γενικευμένη διακριτική ικανότητα.

Αξίζει τέλος να σημειωθεί, πως το κριτήριο της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας σε περίπτωση εφαρμογής σε απλούς κλασματικούς σχεδιασμούς δίνει τα ίδια αποτελέσματα με αυτά του κριτηρίου της διακριτικής ικανότητας, καθότι αφενός στους απλούς κλασματικούς σχεδιασμούς τα  $J_r(s)$  είναι ίσα είτε με 0, δηλαδή είναι ορθογώνια, είτε σε περίπτωση πλήρους επάλληλης δομής των σχεδιασμών  $J_r(s) = J_r(d_{j_1}, \dots, d_{j_r}) = n$  είναι πλήρως ταυτόσημα είναι πλήρως ταυτόσημα και τότε  $r_s$  στήλες συγκροτούν μια λέξη μήκους  $s$ . Αφετέρου δε, σε κάθε περίπτωση για την οποία ισχύει ότι  $\max_{|s|=r} J_r(s) > 0$ , αυτή ισοδύναμη με την περίπτωση όπου  $\max_{|s|=r} J_r(s) = n$  και ως τούτων προκύπτει, ότι η εφαρμογή του κριτηρίου της γενικευμένης διακριτικής ικανότητας στους απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς δίνει  $R(D) = r$ , δηλαδή την  $R$  διακριτική ικανότητα εδραιώνοντας την ισοδυναμία των δύο κριτηρίων στην κατάταξη απλών και σύνθετων κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών με συστηματικό τρόπο.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, του ορθογώνιου σχεδιασμού μας με 24 γραμμές και 4 στήλες, αναφορικά με τη διακριτική του ικανότητα έχουμε ότι  $r=4$  (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τεσσάρων στηλών) ενώ έχουμε  $\max J_4(s) = 24$ . Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του ορθογώνιου σχεδιασμού μας είναι  $R(24,4) = 4 + (1 - 24/24) = 4$ .

### **3.2 Το διάνυσμα συχνότητων σύγχισης (Confounding Frequency Vector) και η Γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση (generalized resolution)**

Όπως προαναφέρθηκε, σύμφωνα, με τους Deng και Tang κάθε κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός (απλός ή σύνθετος) αποτελεί ένα σύνολο  $m$  στηλών  $D = \{d_1, \dots, d_m\}$  ή για να ειπωθεί διαφορετικά ένα  $n \times m$  πίνακα  $D = (d_{ij})$ , όπου για κάθε  $k$  υποσύνολο  $s = \{d_{j_1}, \dots, d_{j_k}\}$  του  $D$  με  $1 \leq k \leq m$  ορίζονται τα επονομαζόμενα  $J_k(s)$  χαρακτηριστικά ως:

$$J_k(s) = J_k(d_{j_1}, \dots, d_{j_k}) = \left| \sum_{i=1}^n d_{ij_1} \cdots d_{ij_k} \right|$$

Ο σχεδιασμός  $D_1$ , λοιπόν, είναι προτιμότερος από τον σχεδιασμό  $D_2$  εφόσον η συχνότητα των συνδυασμών των  $k$  διακριτών στηλών που λογίζονται στο  $\max_{|s|=k} J_k(s)$  είναι



χαμηλότερη για τον σχεδιασμό  $D_1$ . Σε περίπτωση που οι τιμές των  $\max_{|s|=k} J_k(s)$  είναι ίδιες τότε γίνεται σύγκριση των δευτερευόντως μεγαλύτερων  $J_k(s)$  και η εν λόγω διαδικασία προχωρά, κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου οι δύο σχεδιασμοί μπορούν να διαχωριστούν. Ωστόσο, ένας σύνθετος κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός φέρεται να έχει την ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση εφόσον κανένας άλλος δεν έχει μικρότερη ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση από τον συγκεκριμένο.

Η χρήση του κριτηρίου της γενικευμένης απόκλισης μπορεί να εφαρμοστεί και μέσω των λεγόμενων διανυσμάτων συχνότητας σύγχισης (confounding frequency vectors), που αποτελούν κατά τους Deng και Tang, φυσικές γενικεύσεις του διανύσματος του μήκους της λέξης του σχεδιασμού.

Πιο συγκεκριμένα, οι Deng και Tang απέδειξαν ότι για κάθε  $m$  στήλες ενός ορθογώνιου σχεδιασμού η τιμή  $J_m(s)$  αποτελεί πολλαπλάσιο του 4 (Deng & Tang, 1990, 1079-1080). Αναλυτικότερα, έστω  $D$  ένας ορθογώνιος παραγοντικός σχεδιασμός με  $n = 4t$  εκτελέσεις,  $k$  στήλες και επίσης έστω  $f_{mj}$  η συχνότητα των συνδυασμών των  $m$  στηλών που δίνουν  $J_m(s) = 4(t + 1 - j)$  για  $j = 1, \dots, t, t+1$ . Εφόσον, ωστόσο, ισχύει ότι  $\sum_{j=1}^{t+1} f_{mj} = \binom{k}{m}$  και παράλληλα  $f_{1j} = f_{2j} = 0$  για ορθογώνιους σχεδιασμούς είναι προτιμότερο να αναλογιστεί κανείς την  $f_{mj}$  για  $j = 1, \dots, t$  και για  $m \geq 3$ . Ως εκ τούτου το διάνυσμα συχνότητας σύγχισης του σχεδιασμού  $D$  δίνεται από τον τύπο:

$$CFV = [(f_{31}, \dots, f_{3t}); (f_{41}, \dots, f_{4t}); \dots; (f_{k1}, \dots, f_{kt})]$$

Το συγκεκριμένο, λοιπόν διάνυσμα παρέχει πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο συγχέονται οι επιδράσεις των παραγόντων με την ίδια τακτική, που το διάνυσμα του μήκους της λέξης του σχεδιασμού αντανακλά έναν απλό κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό. Πιο συγκεκριμένα, για έναν απλό κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό με  $f_{mj} = 0$  για  $j \geq 2$  το τμήμα του διανύσματος  $(f_{31}, f_{41}, \dots, f_{k1})$  αποτελεί το διάνυσμα του μήκους της λέξης του σχεδιασμού.

Έστω, ότι  $D_1$  και  $D_2$  σύνθετοι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί με  $f_p(D_1)$  και  $f_p(D_2)$  να αποτελούν τα  $p$ -οστά στοιχεία των διανυσμάτων συχνότητας της συγχύσεως των εν

λόγω σχεδιασμών  $D_1$  και  $D_2$  για  $p=1,\dots,kt$ . Τότε ο σχεδιασμός  $D_1$  έχει τη μικρότερη γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση από τον σχεδιασμό  $D_2$  εφόσον  $f_1(D_1) < f_1(D_2)$  για τον οποιονδήποτε μικρότερο ακέραιο  $l$  για τον οποίο ισχύει ότι  $f_l(D_1) \neq f_l(D_2)$ . Παράλληλα, ο  $D_1$  φέρεται να έχει την ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση, εφόσον κανένας άλλος σχεδιασμός δεν έχει μικρότερη ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση από τον συγκεκριμένο. Στο προηγούμενο παράδειγμα, του ορθογώνιου σχεδιασμού μας με 24 γραμμές και 4 στήλες, αναφορικά με το διάλυμα συχνοτήτων σύγκρισης έχουμε:

$$CFV = [(0,0,0,0,0,0,4)_1, (0,0,0,0,0,0,6)_2, (0,0,0,0,0,0,4)_3, (1,0,0,0,0,0,0)_4].$$

### 3.3 Υπολογισμός των γενικευμένων κριτηρίων σε απλούς (regular) σχεδιασμούς

Όπως αναφέρθηκε στο τέλος του Κεφαλαίου 2, τα γενικευμένα κριτήρια της διακριτικής ικανότητας και της ελάχιστης απόκλισης μπορεί να χρησιμοποιηθούν και για την αξιολόγηση απλών (regular) κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις τιμές των κριτηρίων στους  $2^{6-2}$  κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς  $D_1, D_2$  και  $D_3$  που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2.

Θα αρχίσουμε με τον σχεδιασμό  $D_1$ . Σε πρώτο επίπεδο πρέπει να υπολογιστούν τα  $J_r(s)$  χαρακτηριστικά ωστόσο για ορθογώνιους σχεδιασμούς ισχύει ότι  $J_1(s) = J_2(s) = 0$ . Σύμφωνα, λοιπόν με τον τύπο των  $J_r(s)$  χαρακτηριστικών δημιουργούμε τις στήλες των αλληλεπιδράσεων τρίτης, τέταρτης, πέμπτης και έκτης τάξεως από πολλαπλασιασμό των στηλών του σχεδιασμού, όπως φαίνεται και στους παρακάτω πίνακες, κατόπιν αθροίζουμε τις εν λόγω στήλες και κατά απόλυτο τιμή λαμβάνουμε ότι:

$$J_1(s) = \{0,0,0,0,6\}$$

$$J_2(s) = \{0,0,0,0,15\}$$

$$J_3(s) = \{1,0,0,0,19\}$$

$$J_4(s) = \{1,0,0,0,14\}$$

$$J_5(s) = \{1,0,0,0,5\}$$

$$J_6(s) = \{0,0,0,0,1\}$$

Σχεδιασμός						S																				
A	B	C	D	E(=AvB)	F(=AvCxD)	A	B	C	D	E	F	AB	AC	AD	AE	AF	BC	BD	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF	EF
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	
1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	
-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	
1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	
-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	
-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	
-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	
-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
J-χαρακτηριστικά	0						0						0						0							
	J <sub>1</sub>						J <sub>2</sub>						J <sub>3</sub>						J <sub>4</sub>							

Σχεδιασμός						S																		
A	B	C	D	E(=AvB)	F(=AvCxD)	ABC	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	ADE	ADF	AEF	BCD	BCE	BCF	BDE	BEF	CDE	CDF	CEF	DEF
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
J-χαρακτηριστικά	0						0						16						0					
	J <sub>1</sub>						J <sub>2</sub>						J <sub>3</sub>						J <sub>4</sub>					

Σχεδιασμός						S																								
A	B	C	D	E(=AvB)	F(=AvCxD)	ABCD	ABCE	ABCF	ABDE	ABDF	ABEF	ACDE	ACDF	ACEF	ADEF	BCDE	BCDF	BCEF	BDEF	CDEF	ABCDI	ABCDJ	ABCEJ	ABDEJ	ACDEFI	BCDEFI	ABCDJF			
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1			
-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1			
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
J-χαρακτηριστικά	0						0						0						16						0					
	J <sub>1</sub>						J <sub>2</sub>						J <sub>3</sub>						J <sub>4</sub>											

Στη συνέχεια, διαιρούμε τις τιμές των  $J_r(s)$  με τον αριθμό των εκτελέσεων, που είναι εν προκειμένω 16 και εφαρμόζουμε τις τιμές στον τύπο (1). Αναλυτικότερα, για  $r=3$  (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ισχύει ότι  $\max J_3(s) = 16$  και ως εκ τούτου:

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} \frac{J_r(s)}{n}] = 3 + [1 - 16/16] = 3$$

Η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού D1 είναι ίση με 3. Επίσης, ο υπολογισμός του κριτηρίου CFV, ο οποίος έγινε όπως και στην προηγούμενη ενότητα, δίνεται παρακάτω:

$$CFV = [(0,0,0,0,6)_1, (0,0,0,0,15)_2, (1,0,0,0,19)_3, (1,0,0,0,14)_4, (1,0,0,0,5)_5, (0,0,0,0,1)_6].$$

Στη συνέχεια, συνεχίζουμε με τον σχεδιασμό D2. Σε πρώτο επίπεδο πρέπει να υπολογιστούν τα  $J_r(s)$  χαρακτηριστικά ωστόσο για ορθογώνιους σχεδιασμούς ισχύει ότι  $J_1(s) = J_2(s) = 0$ . Σύμφωνα, λοιπόν με τον τύπο των  $J_r(s)$  χαρακτηριστικών δημιουργούμε τις στήλες των αλληλεπιδράσεων τρίτης, τέταρτης, πέμπτης και έκτης τάξεως από πολλαπλασιασμό των στηλών του σχεδιασμού, κατόπιν αθροίζουμε τις εν λόγω στήλες και κατά απόλυτο τιμή λαμβάνουμε ότι:

$$J_1(s) = \{0,0,0,0,6\}$$

$$J_2(s) = \{0,0,0,0,15\}$$

$$J_3(s) = \{0,0,0,0,20\}$$

$$J_4(s) = \{3,0,0,0,12\}$$

$$J_5(s) = \{0,0,0,0,6\}$$

$$J_6(s) = \{0,0,0,0,1\}$$

Στη συνέχεια, διαιρούμε τις τιμές των  $J_r(s)$  με τον αριθμό των εκτελέσεων, που είναι εν προκειμένω 16 και εφαρμόζουμε τις τιμές στον τύπο (1). Αναλυτικότερα, για  $r=4$  (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τεσσάρων στηλών) ισχύει ότι  $\max J_4(s) = 16$  και ως εκ τούτου:

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} \frac{J_r(s)}{n}] = 4 + [1 - 16/16] = 4$$

Η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού D2 είναι ίση με 4. Επίσης, ο υπολογισμός του κριτηρίου CFV, ο οποίος έγινε όπως και στην προηγούμενη ενότητα, δίνεται παρακάτω:

$$CFV = [(0,0,0,0,6)_1, (0,0,0,0,15)_2, (0,0,0,0,20)_3, (3,0,0,0,12)_4, (0,0,0,0,6)_5, (0,0,0,0,1)_6].$$

Τέλος, για τον σχεδιασμό D3: Σε πρώτο επίπεδο πρέπει να υπολογιστούν τα  $J_r(s)$  χαρακτηριστικά ωστόσο για ορθογώνιους σχεδιασμούς ισχύει ότι  $J_1(s) = J_2(s) = 0$ . Σύμφωνα, λοιπόν με τον τύπο των  $J_r(s)$  χαρακτηριστικών δημιουργούμε τις στήλες των αλληλεπιδράσεων τρίτης, τέταρτης, πέμπτης και έκτης τάξεως από πολλαπλασιασμό των στηλών του σχεδιασμού, κατόπιν αθροίζουμε τις εν λόγω στήλες και κατά απόλυτο τιμή λαμβάνουμε ότι:

$$J_1(s) = \{0,0,0,0,6\}$$

$$J_2(s) = \{0,0,0,0,15\}$$

$$J_3(s) = \{2,0,0,0,18\}$$

$$J_4(s) = \{1,0,0,0,14\}$$

$$J_5(s) = \{0,0,0,0,6\}$$

$$J_6(s) = \{0,0,0,0,1\}$$

Στη συνέχεια, διαιρούμε τις τιμές των  $J_r(s)$  με τον αριθμό των εκτελέσεων, που είναι εν προκειμένω 16 και εφαρμόζουμε τις τιμές στον τύπο (1). Αναλυτικότερα, για  $r=3$  (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τεσσάρων στηλών) ισχύει ότι  $\max J_3(s) = 16$  και ως εκ τούτου:

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} \frac{J_r(s)}{n}] = 3 + [1 - 16/16] = 3$$

Η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του σχεδιασμού D3 είναι ίση με 3. Επίσης, ο υπολογισμός του κριτηρίου CFV, ο οποίος έγινε όπως και στην προηγούμενη ενότητα, δίνεται παρακάτω:

$$CFV = [(0,0,0,0,6)_1, (0,0,0,0,15)_2, (2,0,0,0,18)_3, (1,0,0,0,14)_4, (0,0,0,0,6)_5, (0,0,0,0,1)_6].$$

Συγκεντρωτικά, από τον υπολογισμό των γενικευμένων κριτηρίων σε αυτούς τους απλούς σχεδιασμούς, συμπεραίνουμε ότι ο σχεδιασμός D2 είναι καλύτερος σε σχέση με τους D1 & D3, αφού στη δομή τριών στηλών εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Αξιολόγηση σχεδιασμών 12, 16, 20 και 24 εκτελέσεων με 3, 4 και 5 στήλες

Στο Κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε τα κριτήρια που παρουσιάστηκαν στο τρίτο Κεφάλαιο για την αξιολόγηση ορθογώνιων σχηματισμών με 12, 16, 20 και 24 εκτελέσεις οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη τριών, τεσσάρων και πέντε παραγόντων με δύο επίπεδα ο καθένας. Σε καθεμία περίπτωση υπάρχουν αρκετοί μη ισόμορφοι σχεδιασμοί και συνεπώς, η αξιολόγησή τους θα αναδείξει αποδοτικούς σχεδιασμούς για χρήση σε παραγοντικά πειράματα. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $x.y.z$  για να δηλώσουμε τον  $z$ -οστό σχεδιασμό με  $x$  εκτελέσεις και  $y$  στήλες που αξιολογούμε.

### 4.1 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 12 εκτελέσεις και 3, 4 και 5 στήλες

Για τη μελέτη τριών παραγόντων με 12 εκτελέσεις υπάρχουν στη βιβλιογραφία 2 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί. Αντίστοιχα, ο σχεδιασμός με 4 στήλες είναι μοναδικός, ενώ υπάρχουν και 2 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 5 στήλες. Ο υπολογισμός του κριτηρίου  $CFV$ , ο οποίος έγινε όπως και στο αναλυτικό παράδειγμα του Κεφαλαίου 3, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Σχεδιασμός	$CFV$
12.3.1	$[(0,0,0,3)_1, (0,0,0,3)_2, (1,0,0,0)_3]$
12.3.2	$[(0,0,0,3)_1, (0,0,0,3)_2, (0,0,1,0)_3]$
12.4.1	$[(0,0,0,4)_1, (0,0,0,6)_2, (0,0,4,0)_3, (0,0,1,0)_4]$
12.5.1	$[(0,0,0,5)_1, (0,0,0,10)_2, (0,0,10,0)_3, (0,0,5,0)_4, (0,1,0,0)_5]$
12.5.2	$[(0,0,0,5)_1, (0,0,0,10)_2, (0,0,10,0)_3, (0,0,5,0)_4, (0,0,0,1)_5]$

Ο σχεδιασμός 12.3.2 είναι καλύτερος σε σχέση με τον 12.3.1, αφού στη δομή τριών στηλών εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε με βάση τους υπολογισμούς και τη σχέση

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} J_r(s)/n]$$

ότι  $r=3$  και στους δύο σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 12.3.2 ότι  $\max J_3(s) = 4$  ενώ για τον 12.3.1 είναι  $\max J_3(s) = 12$ . Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 12.3.2 είναι  $R(12.3.2) = 3 + (1 - 4/12) = 3.667$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 12.3.1 είναι  $R(12.3.1) = 3 + (1 - 12/12) = 3$ .

Ο σχεδιασμός με 12 εκτελέσεις και 4 στήλες είναι μοναδικός και έχει διακριτική ικανότητα ίση με  $R(12.4.1) = 3 + (1 - 4/12) = 3.667$ , αφού και πάλι η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών, άρα  $r=3$  με  $\max J_3(s) = 4$ .

Τέλος, στις 5 στήλες, ο σχεδιασμός 12.5.2 είναι καλύτερος σε σχέση με τον 12.5.1, αφού παρ' ότι στη δομή τριών και τεσσάρων στηλών έχουμε ταύτιση στη δομή της σύγχυσης, στις πέντε στήλες εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  και στους δύο σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) με  $\max J_3(s) = 4$ . Άρα,  $R(12.5.2) = R(12.5.1) = 3 + (1 - 4/12) = 3.667$ .

## 4.2 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 16 εκτελέσεις και 3, 4 και 5 στήλες

Για τη μελέτη τριών παραγόντων με 16 εκτελέσεις υπάρχουν στη βιβλιογραφία 3 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί. Αντίστοιχα, υπάρχουν 5 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 4 στήλες, ενώ υπάρχουν και 11 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 5 στήλες. Ο υπολογισμός του κριτηρίου  $CFV$ , ο οποίος έγινε όπως και στο αναλυτικό παράδειγμα του Κεφαλαίου 3, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Σχεδιασμός	$CFV$
16.3.1	$[(0,0,0,0,3)_{1},(0,0,0,0,3)_{2},(1,0,0,0,0)_{3}]$
16.3.2	$[(0,0,0,0,3)_{1},(0,0,0,0,3)_{2},(0,0,1,0,0)_{3}]$
16.3.3	$[(0,0,0,0,3)_{1},(0,0,0,0,3)_{2},(0,0,0,0,1)_{3}]$
16.4.1	$[(0,0,0,0,4)_{1},(0,0,0,0,6)_{2},(1,0,0,0,3)_{3},(0,0,0,0,1)_{4}]$
16.4.2	$[(0,0,0,0,4)_{1},(0,0,0,0,6)_{2},(0,0,2,0,2)_{3},(0,0,0,0,1)_{4}]$
16.4.3	$[(0,0,0,0,4)_{1},(0,0,0,0,6)_{2},(0,0,1,0,3)_{3},(0,0,1,0,0)_{4}]$
16.4.4	$[(0,0,0,0,4)_{1},(0,0,0,0,6)_{2},(0,0,0,0,4)_{3},(1,0,0,0,0)_{4}]$
16.4.5	$[(0,0,0,0,4)_{1},(0,0,0,0,6)_{2},(0,0,0,0,4)_{3},(0,0,0,0,1)_{4}]$
16.5.1	$[(0,0,0,0,5)_{1},(0,0,0,0,10)_{2},(2,0,0,0,8)_{3},(1,0,0,0,4)_{4},(0,0,0,0,1)_{5}]$



16.5.2	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (1,0,2,0,7)_3, (0,0,2,0,3)_4, (0,0,0,0,1)_5]$
16.5.3	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,4,0,6)_3, (1,0,0,0,4)_4, (0,0,0,0,1)_5]$
16.5.4	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,4,0,6)_3, (0,0,2,0,3)_4, (0,0,0,0,1)_5]$
16.5.5	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,1,0,9)_3, (0,0,2,0,3)_4, (0,0,1,0,0)_5]$
16.5.6	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,2,0,8)_3, (0,0,2,0,3)_4, (0,0,0,0,1)_5]$
16.5.7	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,3,0,7)_3, (0,0,0,0,5)_4, (0,0,1,0,0)_5]$
16.5.8	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,4,0,6)_3, (0,0,0,0,5)_4, (0,0,0,0,1)_5]$
16.5.9	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (1,0,0,0,9)_3, (0,0,0,0,5)_4, (0,0,0,0,1)_5]$
16.5.10	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,0,0,10)_3, (0,0,0,0,5)_4, (1,0,0,0,0)_5]$
16.5.11	$[(0,0,0,0,5)_1, (0,0,0,0,10)_2, (0,0,0,0,10)_3, (1,0,0,0,4)_4, (0,0,0,0,1)_5]$

Ο σχεδιασμός 16.3.3 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 16.3.1 & 16.3.2, αφού στη δομή τριών στηλών εμφανίζει μικρότερη σύγκυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε με βάση τους υπολογισμούς και τη σχέση

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} J_r(s)/n]$$

ότι  $r=3$  και στους τρεις σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 16.3.3 ότι  $\max J_3(s) = 0$ , για τον 16.3.1 είναι  $\max J_3(s) = 16$  και για τον 16.3.2 είναι  $\max J_3(s) = 8$ . Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.3.3 είναι  $R(16.3.3) = 3 + (1 - 0/16) = 4$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.3.1 είναι  $R(16.3.1) = 3 + (1 - 16/16) = 3$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.3.2 είναι  $R(16.3.2) = 3 + (1 - 8/16) = 3,5$ .

Αντίστοιχα, στις 4 στήλες, ο σχεδιασμός 16.4.5 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 16.4.1-16.4.4, αφού παρ' ότι στη δομή τριών στηλών έχουμε ταύτιση με τον 16.4.4 σχεδιασμό στη δομή της σύγκυσης, στις τέσσερις στήλες ο σχεδιασμός 16.4.5 εμφανίζει μικρότερη σύγκυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  στους σχεδιασμούς 16.4.1-16.4.3 και  $r=4$  για τους σχεδιασμούς 16.4.4 & 16.4.5 (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 16.4.1 ότι  $\max J_3(s) = 16$ , για τους 16.4.2 & 16.4.3 είναι  $\max J_3(s) = 8$ , για τον 16.4.4 είναι  $\max J_4(s) = 16$  και για τον 16.4.5 είναι  $\max J_4(s) = 0$ .

Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.4.5 είναι  $R(16.4.5) = 4 + (1 - 0/16) = 5$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.4.1 είναι  $R(16.4.1) = 3 + (1 - 16/16) = 3$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.4.2 & 16.4.3 είναι  $R(16.4.2) = R(16.4.3) = 3 + (1 -$

$8/16) = 3,5$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.4.4 είναι  $R(16.4.4) = 4 + (1 - 16/16) = 4$ .

Τέλος, στις 5 στήλες, ο σχεδιασμός 16.5.10 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 16.5.1-16.5.11, αφού παρ' ότι στη δομή τριών στηλών έχουμε ταύτιση με τον 16.5.11 σχεδιασμό στη δομή της σύγκυσης, στις τέσσερις στήλες, ο σχεδιασμός 16.5.10 εμφανίζει μικρότερη σύγκυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  στους σχεδιασμούς 16.5.1-16.5.9,  $r=4$  για τον σχεδιασμό 16.5.11 και  $r=5$  για τον σχεδιασμό 16.5.10 (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 16.5.1, 16.5.2 & 16.5.9 ότι  $\max J_3(s) = 16$ , για τους 16.5.3-16.5.8 είναι  $\max J_3(s) = 8$ , για τον 16.5.11 είναι  $\max J_4(s) = 16$  και για τον 16.5.10 είναι  $\max J_5(s) = 16$ .

Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.5.10 είναι  $R(16.5.10) = 5 + (1 - 16/16) = 5$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.5.1, 16.5.2 & 16.5.9 είναι  $R(16.5.1) = R(16.5.2) = R(16.5.9) = 3 + (1 - 16/16) = 3$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα για τους 16.5.3-16.5.8 είναι  $R(16.5.3) = R(16.5.4) = R(16.5.5) = R(16.5.6) = R(16.5.7) = R(16.5.8) = 3 + (1 - 8/16) = 3,5$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 16.5.11 είναι  $R(16.5.11) = 4 + (1 - 16/16) = 4$ .

### 4.3 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 20 εκτελέσεις και 3, 4 και 5 στήλες

Για τη μελέτη τριών παραγόντων με 20 εκτελέσεις υπάρχουν στη βιβλιογραφία 3 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί. Αντίστοιχα, υπάρχουν 3 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 4 στήλες, ενώ υπάρχουν και 11 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 5 στήλες. Ο υπολογισμός του κριτηρίου  $CFV$ , ο οποίος έγινε όπως και στο αναλυτικό παράδειγμα του Κεφαλαίου 3, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Σχεδιασμός	$CFV$
20.3.1	$[(0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,3)_2, (1,0,0,0,0,0)_3]$
20.3.2	$[(0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,3)_2, (0,0,1,0,0,0)_3]$
20.3.3	$[(0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,3)_2, (0,0,0,0,1,0)_3]$
20.4.1	$[(0,0,0,0,0,4)_1, (0,0,0,0,0,6)_2, (0,0,1,0,3,0)_3, (0,0,0,0,1,0)_4]$
20.4.2	$[(0,0,0,0,0,4)_1, (0,0,0,0,0,6)_2, (0,0,0,0,4,0)_3, (0,0,0,0,1,0)_4]$

20.4.3	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,0,0) <sub>4</sub> ]
20.5.1	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,8,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,4,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
20.5.2	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,8,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,4,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
20.5.3	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,8,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,4,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
20.5.4	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,10,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,4,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
20.5.5	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,10,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,4,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
20.5.6	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,9,0) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,4,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
20.5.7	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,9,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
20.5.8	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,9,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
20.5.9	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,8,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
20.5.10	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,10,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
20.5.11	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,10,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]

Ο σχεδιασμός 20.3.3 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 20.3.1 & 20.3.2, αφού στη δομή τριών στηλών εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε με βάση τους υπολογισμούς και τη σχέση

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} J_r(s)/n]$$

ότι  $r=3$  και στους τρεις σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 20.3.3 ότι  $\max J_3(s) = 4$ , ενώ για τον 20.3.1 είναι  $\max J_3(s) = 20$  και για τον 20.3.2 είναι  $\max J_3(s) = 12$ . Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 20.3.3 είναι  $R(20.3.3) = 3 + (1 - 4/20) = 3,8$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 20.3.1 είναι  $R(20.3.1) = 3 + (1 - 20/20) = 3$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 20.3.2 είναι  $R(20.3.2) = 3 + (1 - 12/20) = 3,4$ .

Αντίστοιχα, στις 4 στήλες, ο σχεδιασμός 20.4.2 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 20.4.1 & 20.4.3, αφού παρ' ότι στη δομή τριών στηλών έχουμε ταύτιση με τον 20.4.3 σχεδιασμό στη δομή της σύγχυσης, στις τέσσερις στήλες ο σχεδιασμός 20.4.2 εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  για όλους τους σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 20.4.1 ότι  $\max J_3(s) = 12$ , και για τους 20.4.2 & 20.4.3 είναι  $\max J_3(s) = 4$ .

Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 20.4.2 & 20.4.3 είναι  $R(20.4.2) = R(20.4.3) = 3 + (1 - 4/20) = 3,8$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 20.4.1 είναι  $R(20.4.1) = 3 + (1 - 12/20) = 3,4$ .

Τέλος, στις 5 στήλες, ο σχεδιασμός 20.5.11 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 20.5.1-20.5.11, αφού παρ' ότι στη δομή τριών και τεσσάρων στηλών έχουμε ταύτιση με τον 20.5.10 σχεδιασμό στη δομή της σύγχυσης, στις πέντε στήλες ο σχεδιασμός 20.5.11 εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  για όλους τους σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τους 20.5.1-20.5.3 & 20.5.6-20.5.9 ότι  $\max J_3(s) = 12$  και για τους 20.5.4, 20.5.5, 20.5.10 & 20.5.11 είναι  $\max J_3(s) = 4$ .

Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 20.5.4, 20.5.5, 20.5.10 & 20.5.11 είναι  $R(20.5.4) = R(20.5.5) = R(20.5.10) = R(20.5.11) = 3 + (1 - 4/20) = 3,8$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα για τους 20.5.1-20.5.3 & 20.5.6-20.5.9 είναι  $R(20.5.1) = R(20.5.2) = R(20.5.3) = R(20.5.6) = R(20.5.7) = R(20.5.8) = R(20.5.9) = 3 + (1 - 12/20) = 3,4$ .

#### 4.4 Αξιολόγηση Ορθογώνιων σχεδιασμών με 24 εκτελέσεις και 3, 4 και 5 στήλες

Για τη μελέτη τριών παραγόντων με 20 εκτελέσεις υπάρχουν στη βιβλιογραφία 4 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί. Αντίστοιχα, υπάρχουν 10 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 4 στήλες, ενώ υπάρχουν και 63 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί με 5 στήλες. Ο υπολογισμός του κριτηρίου  $CFV$ , ο οποίος έγινε όπως και στο αναλυτικό παράδειγμα του Κεφαλαίου 3, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Σχεδιασμός	$CFV$
24.3.1	$[(0,0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,0,3)_2, (1,0,0,0,0,0,0)_3]$
24.3.2	$[(0,0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,0,3)_2, (0,0,1,0,0,0,0)_3]$
24.3.3	$[(0,0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,0,3)_2, (0,0,0,0,1,0,0)_3]$
24.3.4	$[(0,0,0,0,0,0,3)_1, (0,0,0,0,0,0,3)_2, (0,0,0,0,0,0,1)_3]$
24.4.1	$[(0,0,0,0,0,0,4)_1, (0,0,0,0,0,0,6)_2, (1,0,0,0,0,0,3)_3, (0,0,0,0,0,0,1)_4]$
24.4.2	$[(0,0,0,0,0,0,4)_1, (0,0,0,0,0,0,6)_2, (0,0,1,0,1,0,2)_3, (0,0,0,0,0,0,1)_4]$
24.4.3	$[(0,0,0,0,0,0,4)_1, (0,0,0,0,0,0,6)_2, (0,0,1,0,0,0,3)_3, (0,0,0,0,1,0,0)_4]$

24.4.4	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>4</sub> ]
24.4.5	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,3,0,1) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>4</sub> ]
24.4.6	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,2,0,2) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>4</sub> ]
24.4.7	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,1,0,3) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,0,0,0) <sub>4</sub> ]
24.4.8	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,0,0,4) <sub>3</sub> ,(1,0,0,0,0,0,0) <sub>4</sub> ]
24.4.9	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,1,0,3) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>4</sub> ]
24.4.10	[(0,0,0,0,0,4) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,6) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,0,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>4</sub> ]
24.5.1	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,10,0,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,1,0,0,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.2	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(2,0,0,0,0,0,8) <sub>3</sub> ,(1,0,0,0,0,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.3	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(1,0,1,0,1,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.4	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,2,0,6) <sub>3</sub> ,(1,0,0,0,0,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.5	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,4,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.6	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,2,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.7	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,2,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.8	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.9	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(1,0,0,0,0,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.10	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.11	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,3,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.12	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,4,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.13	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(1,0,0,0,3,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.14	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,7,0,3) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.15	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,5,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.16	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.17	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,4,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.18	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,7,0,3) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.19	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,5,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.20	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,10,0,0) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.21	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,8,0,2) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.22	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.23	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.24	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,8,0,2) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.25	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,3,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.26	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,5,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.27	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,1,0,0,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.28	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,2,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.29	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.30	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,3,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.31	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]

24.5.32	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,3,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.33	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,5,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.34	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.35	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.36	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,5,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.37	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.38	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,5,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.39	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,2,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.40	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,3,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.41	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.42	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,7,0,3) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.43	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,1,0,0,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.44	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.45	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,4,0,5) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.46	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,2,0,2,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.47	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.48	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,6,0,4) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.49	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,1,0,8) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.50	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,2,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.51	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,1,0,2,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.52	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(1,0,0,0,1,0,8) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.53	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,0,0,10) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,5,0,0) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.54	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,1,0,9) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.55	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,2,0,8) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,3,0,2) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.56	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,3,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.57	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.58	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,2,0,8) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,1,0,0,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.59	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,2,0,8) <sub>3</sub> ,(0,0,1,0,1,0,3) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.60	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,3,0,7) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,1,0,0) <sub>5</sub> ]
24.5.61	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,4,0,6) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.62	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,2,0,8) <sub>3</sub> ,(1,0,0,0,0,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]
24.5.63	[(0,0,0,0,0,5) <sub>1</sub> ,(0,0,0,0,0,10) <sub>2</sub> ,(0,0,0,0,2,0,8) <sub>3</sub> ,(0,0,0,0,1,0,4) <sub>4</sub> ,(0,0,0,0,0,0,1) <sub>5</sub> ]

Ο σχεδιασμός 24.3.4 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 20.3.1-20.3.3, αφού στη δομή τριών στηλών εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε με βάση τους υπολογισμούς και τη σχέση

$$R(D) = r + [1 - \max_{|s|=r} J_r(s)/n]$$

ότι  $r=3$  και στους τέσσερις σχεδιασμούς (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 24.3.4 ότι  $\max J_3(s) = 0$ , ενώ για τον 24.3.1 είναι  $\max J_3(s) = 24$ , για τον 24.3.2 είναι  $\max J_3(s) = 16$  και για τον 20.3.2 είναι  $\max J_3(s) = 8$ . Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.3.4 είναι  $R(24.3.4) = 3 + (1 - 0/24) = 4$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.3.1 είναι  $R(24.3.1) = 3 + (1 - 24/24) = 3$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.3.2 είναι  $R(24.3.2) = 3 + (1 - 16/24) = 3,334$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.3.3 είναι  $R(24.3.3) = 3 + (1 - 8/24) = 3,667$ .

Αντίστοιχα, στις 4 στήλες, ο σχεδιασμός 24.4.10 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 24.4.1-24.4.9, αφού παρ' ότι στη δομή τριών στηλών έχουμε ταύτιση με τον 24.4.8 σχεδιασμό στη δομή της σύγχυσης, στις τέσσερις στήλες ο σχεδιασμός 24.4.10 εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  για τους σχεδιασμούς 24.4.1-24.4.7 & 24.4.9 και  $r=4$  για τους σχεδιασμούς 24.4.8 & 24.4.10 (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τον 24.4.1 ότι  $\max J_3(s) = 24$ , για τους 24.4.2 & 24.4.3 είναι  $\max J_3(s) = 16$ , για τους 24.4.4-24.4.7 & 24.4.9 είναι  $\max J_3(s) = 8$ , για τον 24.4.8 είναι  $\max J_4(s) = 24$  και για τον 24.4.10 είναι  $\max J_4(s) = 8$ .

Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.4.10 είναι  $R(24.4.10) = 4 + (1 - 8/24) = 4,667$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.4.1 είναι  $R(24.4.1) = 3 + (1 - 24/24) = 3$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.4.2 & 24.4.3 είναι  $R(24.4.2) = R(24.4.3) = 3 + (1 - 16/24) = 3,334$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.4.4-24.4.7 & 24.4.9 είναι  $R(24.4.4) = R(24.4.5) = R(24.4.6) = R(24.4.7) = R(24.4.9) = 3 + (1 - 8/24) = 3,667$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.4.8 είναι  $R(24.4.8) = 4 + (1 - 24/24) = 4$ .

Τέλος, στις 5 στήλες, ο σχεδιασμός 24.5.53 είναι καλύτερος σε σχέση με τους 24.5.1-24.5.63, αφού εμφανίζει μικρότερη σύγχυση επιδράσεων. Αναφορικά με τη διακριτική τους ικανότητα έχουμε ότι  $r=3$  για όλους τους σχεδιασμούς, εκτός από τον σχεδιασμό 24.5.53 που έχει  $r=4$  (η πρώτη μη μηδενική τιμή των  $J$  χαρακτηριστικών είναι στην επιλογή τριών στηλών) ενώ έχουμε για τους 24.5.1, 24.5.8-24.5.10, 24.5.14-24.5.16, 24.5.18, 24.5.20-24.5.27, 24.5.29, 24.5.31-24.5.38, 24.5.41-24.5.44, 24.5.47, 24.5.48 & 24.5.54-24.5.63 ότι  $\max J_3(s) = 8$ , για τους 24.5.2, 24.5.3, 24.5.13 & 24.5.52 είναι  $\max J_3(s) = 24$ , για τους 24.5.4-

24.5.7, 24.5.11, 24.5.12, 24.5.17, 24.5.19, 24.5.28, 24.5.30, 24.5.39, 24.5.40, 24.5.45, 24.5.46 & 24.5.49-24.5.51 είναι  $\max J_3(s) = 16$  και για τον 24.5.53 ότι  $\max J_4(s) = 8$ .

Άρα η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.5.52 είναι  $R(24.5.52) = 4 + (1 - 8/24) = 4,667$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.5.1, 24.5.8-24.5.10, 24.5.14-24.5.16, 24.5.18, 24.5.20-24.5.27, 24.5.29, 24.5.31-24.5.38, 24.5.41-24.5.44, 24.5.47, 24.5.48 & 24.5.54-24.5.63 είναι  $R(24.5.1) = R(24.5.8) = R(24.5.9) = R(24.5.10) = R(24.5.14) = R(24.5.15) = R(24.5.16) = R(24.5.18) = R(24.5.20) = R(24.5.21) = R(24.5.22) = R(24.5.23) = R(24.5.24) = R(24.5.25) = R(24.5.26) = R(24.5.27) = R(24.5.29) = R(24.5.31) = R(24.5.32) = R(24.5.33) = R(24.5.34) = R(24.5.35) = R(24.5.36) = R(24.5.37) = R(24.5.38) = R(24.5.41) = R(24.5.42) = R(24.5.43) = R(24.5.44) = R(24.5.47) = R(24.5.48) = R(24.5.54) = R(24.5.55) = R(24.5.56) = R(24.5.57) = R(24.5.58) = R(24.5.59) = R(24.5.60) = R(24.5.61) = R(24.5.62) = R(24.5.63) = 3 + (1 - 8/24) = 3,667$ , η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.5.2, 24.5.3, 24.5.13 & 24.5.52 είναι  $R(24.5.2) = R(24.5.3) = R(24.5.13) = R(24.5.52) = 3 + (1 - 24/24) = 3$  και η γενικευμένη διακριτική ικανότητα του 24.5.4-24.5.7, 24.5.11, 24.5.12, 24.5.17, 24.5.19, 24.5.28, 24.5.30, 24.5.39, 24.5.40, 24.5.45, 24.5.46 & 24.5.49-24.5.51 είναι  $R(24.5.4) = R(24.5.5) = R(24.5.6) = R(24.5.7) = R(24.5.11) = R(24.5.12) = R(24.5.17) = R(24.5.19) = R(24.5.28) = R(24.5.30) = R(24.5.39) = R(24.5.40) = R(24.5.45) = R(24.5.46) = R(24.5.49) = R(24.5.50) = R(24.5.51) = 3 + (1 - 16/24) = 3,334$ .



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Ελληνική

Ευαγγελάρας, Χ. (2004). Ορθογώνιοι σχηματισμοί και προβολικές ιδιότητες, Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.

Ευαγγελάρας, Χ. (2012). Σημειώσεις ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική» για το μάθημα Πειραματικοί Σχεδιασμοί, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

## Ξένη

Anderson-Cook, C., Borror, C. and Montgomery, D. (2009). Response surface design evaluation and comparison. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(2), 629-641.

Box, G. (1999). Statistics as a Catalyst to Learning by Scientific Method Part II—A Discussion. *Journal of Quality Technology*, 31(1), 16-29.

Box, G. E. P. and Hunter, J. S. (1961). The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs. *Technometrics* 3, 311-351; 449-458.

Box, G. E. P. and Tyssedal, J. (1996). Projective properties of certain orthogonal arrays. *Biometrika* 84, 950-955.

Box, G. and Wilson, K. (1951). On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 13(1), 1-38.

Chen, H. and Hedayat, A. S. (1996).  $2^{n-m}$  fractional factorial designs with (weak) minimum aberration. *Ann. Statist.* 24, 2536-2548.

Chen, J. (1992). Some results on  $2^{n-k}$  fractional factorial designs and search for minimum aberration designs. *Ann. Statist.* 20, 2124-2141.

Cheng, C. S. (1995). Some projection properties of orthogonal arrays. *Ann. Statist.* **23**, 1223-1233.

Chen, J. and Wu, C. F. J. (1991). Some results on  $s^{n-k}$  fractional factorial designs with minimum aberration or optimal moments. *Ann. Statist.* **19**, 1028-1041.

Cheng, C. S., Steinberg, D. M. and Sun, D. X. (1999). Minimum aberration and model robustness for two-level fractional factorial designs. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **61**, 85-93.

Daniel, C. (1959). Use of Half – Normal Plot in Interpreting Factorial Two Level Experiments. *Technometrics*, Vol. 1, 311 – 342.

Deng, L. Y., Li, Y., and Tang, B. (2000), Catalogue of Small Run Nonregular Designs from Hadamard Matrices with Generalized Minimum Aberration, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 29, 1379–1395.

Franklin, M. F. (1984). Constructing tables of minimum aberration  $p^{n-m}$  designs. *Technometrics* **26**, 225-232.

Fries, A. and Hunter, W. G. (1980). Minimum aberration  $2^{k-p}$  designs. *Technometrics* **22**, 601-608.

Hall, M.J. (1965), Hadamard Matrix of Order 20, *Jet Propulsion Laboratory Technical Report*, **1**, 32–76.

Kackar, R. (1985). Off-Line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Method. *Journal of Quality Technology*, **17**(4), 176-188.

Kiefer, J. (1961). Optimum Designs in Regression Problems, II. *The Annals of Mathematical Statistics*, **32**(1), 298-325.

Kiefer, J. and Wolfowitz, J. (1959). Optimum Designs in Regression Problems. *The Annals of Mathematical Statistics*, **30**(2), 271-294.

Lin, D. K. J. (1995). Generating systematic supersaturated designs. *Technometrics* **37**, 213-225.

Lin, D. K. J. and Draper, N. R. (1992). Projection properties of Plackett and Burman designs. *Technometrics* **34**, 423-428.

Li, X., Sudarsanam, N. and Frey, D. (2006). Regularities in data from factorial experiments. *Complexity*, **11**(5), 32-45.

Plackett, R. L. and Burman, J. P. (1946). The design of optimum multi-factorial experiments. *Biometrika* **33**, 305-325.

Rechtschaffner, R. L. (1967). Saturated fractions of  $2^n$  and  $3^n$  factorial design. *Technometrics* **9**, 569-575.

Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971). Balanced optimal  $2^m$  fractional factorial designs of resolution V,  $m \leq 6$ . *Technometrics* **13**, 257-269.

Taguchi, G., and Y.Wu (1980). *Introduction to Off – Line Quality Control*. Central Japan Quality Control Association, Nagoya, Japan.

Tang, B., and Deng, L. Y. (1999), Minimum  $G_2$ -Aberration for Nonregular Fractional Factorial Designs, *Annals of Statistics*, **27**, 1914–1926.

Tang, B. and Wu, C. F. J. (1996). Characterization of minimum aberration  $2^{n-k}$  designs in terms of their complementary designs. *Ann. Statist.* **24**, 2549-2559.

Wang, J. C. and Wu, C. F. J. (1995). A hidden projection property of Plackett-Burman and related designs. *Statist. Sinica* **5**, 235-250.

Webb, S. R. (1964). Characterization of nonorthogonal incomplete factorial designs. Appendix B of ARL 65-116, Part I, Aerospace Research Laboratories, United States Air Force, Wright-Patterson Air Force Base.



