ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΒΙΟΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ Π. ΠΕΒΕΡΕΤΟΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

του Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΩΝ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΒΙΟΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ Π. ΠΕΒΕΡΕΤΟΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

του Πανεπιστημίου Πειραιώς

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2021

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

CONTRIBUTIONS IN THE CONSTRUCTION AND EVALUATION OF FACTORIAL DESIGNS FOR APPLICATIONS IN INDUSTRY AND BIOSCIENCES

CHRISTOS P. PEVERETOS

PhD Thesis

Submitted to the

Department of Statistics and Insurance Science

of the University of Pireus

PIRAEUS

FEBRUARY 2021

Ευχαριστίες

Στην οικογένειά μου

για τη στήριξη και την υπομονή τους

Περίληψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετάμε την κατασκευή αποδοτικών παραγοντικών σχεδιασμών, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ιατρικά, αγροτικά και βιομηχανικά πειράματα. Βασικά μας εργαλεία αποτέλεσαν τα *J* χαρακτηριστικά των σχεδιασμών με δύο επίπεδα, όπως ορίστηκαν από τους Deng and Tang (1999), καθώς και το κριτήριο της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης (Generalized Minimum Aberration – GMA). Παρουσιάζουμε νέα μεθοδολογία για την κατασκευή αποδοτικών n x k block σχεδιασμών δύο επιπέδων με $n \equiv 0\, mod\, 4$ εκτελέσεις και $k \leq 5$ παράγοντες, χρησιμοποιώντας δύο ή και τέσσερα blocks θεραπειών. Επίσης, γενικεύουμε τη μεθοδολογία των *J* χαρακτηριστικών σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα και κατασκευάζουμε σχεδιασμούς τριών επιπέδων με (γενικευμένη) ελάχιστη απόκλιση για οποιοδήποτε πλήθος εκτελέσεων το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 9 και για μέχρι και 5 παράγοντες.

Λέξεις κλειδιά: Ορθογώνιοι Σχηματισμοί, *J* χαρακτηριστικά, ομαδοποίηση (blocking), γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση, γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης, γραμμικό-τετραγωνικό σύστημα βωβών μεταβλητών.

Abstract

In the present doctoral thesis, we study the construction of efficient factorial designs, which can be used in medical, agricultural, and industrial experiments. Our main tools in this scientific subject, were the *J* characteristics of two – level designs, as defined by Deng and Tang (1999), as well as the Generalized Minimum Aberration (GMA) criterion. We present new methodology for the construction of efficient *n* x *k* block two level designs with $n \equiv 0 \, mod \, 4$ and $k \leq 5$, using two or even four blocks treatments. We also generalize the concept of *J* characteristics to be used in three level designs, and we construct three – level designs with (generalized) minimum aberration with $k \leq 5$ factors and for any number of runs which is a multiple of 9.

Keywords: Orthogonal Arrays, *J* characteristics, blocking, generalized minimum aberration, generalized wordlength pattern, linear-quadratic system contrasts.

Πίνακας Περιεχομένων

Ευρετήριο Πινάκων

Εισαγωγή

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, παρουσιάζονται μέθοδοι για την κατασκευή αποδοτικών παραγοντικών σχεδιασμών, οι οποίοι βρίσκουν άμεση εφαρμογή σε ιατρικά, αγροτικά και βιομηχανικά πειράματα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μεθοδολογία για την κατασκευή αποδοτικών n x k block σχεδιασμών δύο επιπέδων με $n \equiv 0 \ mod\ 4$ και $k \leq 5$, χρησιμοποιώντας δύο ή και τέσσερα blocks θεραπειών, όπως και κατασκευάζονται n x k σχεδιασμοί τριών επιπέδων με ελάχιστη απόκλιση, με $n \equiv 0 \ mod\ 9$ και $k \leq 5$.

Η διατριβή αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος, τα γραμμικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των δεδομένων για την εκτίμηση των παραγοντικών επιδράσεων και αναλύονται ορισμοί, παραδοχές και συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στο κείμενο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα J χαρακτηριστικά σχεδιασμών με δύο επίπεδα, όπως ορίστηκαν από τους Deng and Tang (1999), και χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των ιδιοτήτων των σχεδιασμών και συνεισφέρουν στη μεθοδολογία έρευσης αποδοτικών σχεδιασμών και σχεδιασμών με (γενικευμένη) ελάχιστη απόκλιση (Generalized Minimum Aberration – GMA). Παρουσιάζεται επίσης γενίκευση της μεθοδολογίας χρήσης των J χαρακτηριστικών σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στο κεφάλαιο 4 για την κατασκευή σχεδιασμών τριών επιπέδων με (γενικευμένη) ελάχιστη απόκλιση.

Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην παρουσίαση της μεθοδολογίας κατασκευής αποδοτικών n x k block σχεδιασμών δύο επιπέδων με $n \equiv 0 \ mod\ 4$ και $k \leq 5$, χρησιμοποιώντας δύο ή και τέσσερα blocks θεραπειών και στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, κατασκευάζονται ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων με γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση, με $m \leq 5$ στήλες για οποιοδήποτε πλήθος εκτελέσεων το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 9.

Από την έρευνα στην περιοχή αυτή προέκυψαν οι ακόλουθες εργασίες:

- H. Evangelaras and C. Peveretos, Efficient arrangements of two-level orthogonal arrays in two and four blocks, *Statistics*, **51** (2017), 1326-1341.
- H. Evangelaras and C. Peveretos, Construction of Generalized Minimum Aberration Three-Level Orthogonal Arrays with Three, Four and Five Columns, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **14** (2020), article 60.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στους Πειραματικούς Σχεδιασμούς

1.1 Θεμελιώδεις Αρχές και Έννοιες

Τα πειράματα και ο πειραματισμός, σε επιστημονικό αλλά και σε καθημερινό επίπεδο, αποτελούν αρκετά διαδεδομένες έννοιες και δραστηριότητες των ανθρώπων στη σημερινή τεχνολογική εποχή. Πείραμα συχνά ορίζεται κάθε μορφή ερευνητικής διεργασίας, που απώτερο σκοπό έχει τη κατανόηση και πιθανώς τη βελτίωση ενός συστήματος. Εξ ορισμού, ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών μπορεί να θεωρηθεί πείραμα, όπως καθημερινές δραστηριότητες (οικιακές, όπως για παράδειγμα η παρασκευή ενός τροφίμου), τεχνολογικές καινοτομίες (η βελτίωση ενός υλικού), αλλά και εφαρμογές σε τομείς υγείας (όπως η δημιουργία και η μελέτη ενός εμβολίου). Ανεξαρτήτα από το είδος του πειράματος και την εφαρμογή του, η διεκπεραίωση ενός πειράματος παρέχει ένα αποτέλεσμα προς ανάλυση, την επονομαζόμενη μεταβλητή απόκρισης, η οποία ενδέχεται να επηρεάζεται από πλήθος μεταβλητών, που ονομάζονται παράγοντες. Εξ ορισμού, τα πειράματα βασίζονται σε επαναλαμβανόμενες διαδικασίες και αποτελούνται από μια εκτέλεση ή σειρά εκτελέσεων – δοκιμών όπου γίνονται εσκεμμένες και προμελετημένες αλλαγές στις τιμές των παραγόντων με σκοπό τον επηρεασμό μιας διεργασίας ή ενός συστήματος, έτσι ώστε να παρατηρηθούν και να αναγνωριστούν οι πιθανές αιτίες που επιφέρουν αλλαγές στη μεταβλητή απόκρισης. Οι παράγοντες που ενδέχεται να επηρεάζουν τη μεταβλητή απόκρισης καθώς και τα εκάστοτε επίπεδά τους, μπορούν να είναι είτε ποιοτικοί (κυρίως καταστάσεις) είτε ποσοτικοί (λαμβάνουν αριθμητικές τιμές με τη συνήθη έννοια της απόστασης).

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος απαιτείται ένα σύνολο πειραματικών μονάδων και ένα επαρκές πειραματικό υλικό για την διεξαγωγή συμπερασμάτων. Σε αγροτικά πειράματα ως πειραματικές μονάδες συχνά συναντώνται αγροτεμάχια, φυτά ή καρποί. Αξίζει να αναφερθεί ότι για κάθε πειραματική δοκιμή αγροτικού ενδιαφέροντος, έχουν θεσπιστεί συγκεκριμένες κατευθυντήριες οδηγίες, που αφορούν ακόμα και το σχεδιασμό του πειράματος, από τον ευρωπαϊκό οργανισμό EPPO (European Plant Protection Organization). Βασική αρμοδιότητα του οργανισμού είναι ο έλεγχος και η προστασία της χλωρίδας καθώς και ο έλεγχος για τυχόν εξάπλωση επιδημιών. Αντιστοίχως, σε πειράματα βιομηχανικής παραγωγής, πειραματικές μονάδες συνήθως είναι οι μηχανές, τα προϊόντα ή ακόμα και τα υλικά που προκύπτουν κατά την βιομηχανική παραγωγή. Συνήθης σκοπός των πειραμάτων βιομηχανικής παραγωγής είναι η βελτιστοποίηση του παραγόμενου προϊόντος ή η ελαχιστοποίηση του χρόνου μιας βιομηχανικής γραμμής παραγωγής. Τέλος, μια αρκετά μεγάλη κατηγορία πειραμάτων εφαρμόζεται στην φαρμακευτική παραγωγή. Είναι πλέον ευρέως γνωστό, ότι πριν χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε φάρμακο στην κλινική πράξη, υπάρχει πληθώρα πειραμάτων και μελετών πάνω σε πειραματικές μονάδες, πιθανώς ακολουθώντας και τις δύο μεθόδους *in vitro* (πείραμα σε δοκιμαστικό σωλήνα) και *ex vivo* (πείραμα σε τμήμα ή ολόκληρο οργανισμό). Με βάση τα ερευνητικά δεδομένα που προκύπτουν από τις πειραματικές μονάδες, μέσα στις οποίες συγκαταλέγονται πειραματόζωα, καλλιέργειες κυττάρων, ιοί κλπ., ο ερευνητής μπορεί να συλλέξει πληροφορίες, που θα βελτιώσουν το τυχόν υπάρχον φάρμακο ή θα προκαλέσουν τη δημιουργία νέου φαρμάκου. Στις περιπτώσεις αυτές η αποτελεσματικότητα και η βελτιστοποίηση του κάθε φαρμάκου μπορεί να κρατήσει έως και 10 χρόνια και έρχεται σε άμεση συσχέτιση με το σωστό ερευνητικό πλάνο και την άμεση αναγνώριση των παραγόντων, που επηρεάζουν την απόδοση του φαρμάκου.

Ένα μεγάλο μέρος της μεθοδολογίας για το σχεδιασμό πειραμάτων που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, προτάθηκε από τον Ronald A. Fisher στα βιβλία «*The arrangement of field experiments*» το 1926 και «*The Design of experiments*» το 1935, τα οποία βασίστηκαν και στις έρευνες των Fisher και Mackenzie (1923) και των Fisher and Wishart (1930). Κύριο μέρος της έρευνας του Fisher αποτέλεσε η εφαρμογή στατιστικών μεθόδων σε αγροτικές εφαρμογές. Οι μέθοδοί του στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν στις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες και εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα σε προβλήματα αγροτικής φύσεως. Σε παραλληλισμό με το επιστημονικό έργο του Fisher και τα αντίστοιχα πεδία αγροτικής εφαρμογής υπήρξε και η εργασία του Neyman (1925 [1923b]), η οποία όμως κινήθηκε κυρίως στην περιοχή της δειγματοληψίας. Το συνολικό έργο των Fisher και Neyman για τα πειράματα αγροτικής εφαρμογής, αποτέλεσε αντικείμενο συζητήσεων και εφαρμογών στον ερευνητικό κόσμο, βλ. Yates (1964 και 1975), Cochrane (1976), Box and Fisher (1978), Rayner (1986), Rubin (1990), Fienberg and Tanur (1996) και Street (1990). Τα αποτελέσματά των ερευνών αυτών, αποτέλεσαν δομική αρχή εφαρμογής των σχεδιασμών και σε άλλα επιστημονικά πεδία, όπως για παράδειγμα την οικονομική επιστήμη (επιγραμματικά αναφέρεται η εργασία των Levitt and List (2009)) και την κοινωνική επιστήμη (εργασίες των Ferber and Hirsch (1982), Hausman and Wise (1985), Manski and Garfinkel (1992), Greenberg and Shroder (2004)).

1.2 Σχεδιασμοί Κρησαρίσματος

Κατά τη μελέτη ενός προβλήματος και τη φάση του σχεδιασμού των πειραμάτων, συνήθως αναδεικνύονται πολλοί παράγοντες που πιστεύεται ότι επηρεάζουν σημαντικά την προς διερεύνηση διαδικασία. Οι Box and Meyer (1986) παρατήρησαν ότι μόνο μερικοί εξ αυτών έχουν στατιστικά σημαντικές επιδράσεις στην απόκριση του πειράματος που μελετάται. Το φαινόμενο αυτό, το ονόμασαν «αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων» (factor sparsity). Η αρχή αυτή πλέον επικαλείται ευρέως στα αρχικά στάδια μελέτης μιας διεργασίας, ενώ οι σχεδιασμοί που χρησιμοποιούνται για το «κρησάρισμα» των σημαντικών παραγόντων καλούνται σχεδιασμοί κρησαρίσματος (screening designs). Απώτερος σκοπός λοιπόν των σχεδιασμών κρησαρίσματος, είναι ο εντοπισμός των στατιστικά σημαντικών παραγόντων οι οποίοι στη συνέχεια και σε δεύτερη φάση πειραματισμού μπορεί να μελετηθούν περαιτέρω. Τις περισσότερες φορές, οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται οικονομία στο κόστος πειραματισμού, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί ελέγχοντας το πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν.

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος κρίνονται απαραίτητοι στο αρχικό στάδιο μιας πειραματικής διαδικασίας και πιο συγκεκριμένα στο στάδιο του σχεδιασμού. Από την ανάλυση των δεδομένων που θα συλλεχθούν με τη χρήση τους, θα εντοπιστούν οι επιδράσεις και ίσως και οι αλληλεπιδράσεις των παραγόντων που κρίνονται στατιστικά σημαντικές για την ερμηνεία της μεταβλητής απόκρισης. Με στόχο την οικονομία σχετικά με το πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων, οι σχεδιασμοί που συνήθως επιλέγονται ως σχεδιασμοί κρησαρίσματος είναι αυτοί όπου οι παράγοντες μελετώνται σε μικρό πλήθος επιπέδων (συνήθως δύο ή και τρία επίπεδα). Κάθε στήλη του σχεδιασμού ανατίθεται και σε ένα παράγοντα, ενώ κάθε γραμμή του σχεδιασμού παρουσιάζει μία πειραματική εκτέλεση που προκύπτει από τον συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων που συμμετέχουν (και καλείται θεραπεία).

Το μοντέλο που συνήθως προσαρμόζεται στα δεδομένα είναι το γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης, στο οποίο μελετώνται μόνο οι κύριες επιδράσεις των παραγόντων. Όπου υπάρχει δυνατότητα, μπορεί να γίνει προσαρμογή γραμμικού μοντέλου δεύτερης τάξης στο οποίο, εκτός από τις κύριες επιδράσεις μελετώνται και αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Για τη δημιουργία του πίνακα μοντέλου X για τη μελέτη των παραγοντικών επιδράσεων που ενδιαφέρουν με βάση τον εκάστοτε σχεδιασμό, συνήθως γίνεται χρήση βωβών μεταβλητών

– αντιθέσεων, με πιο συχνά χρησιμοποιούμενες τις λεγόμενες trend contrasts ή, σε ελεύθερη μετάφραση, κλασσικές αντιθέσεις. Στα δύο επίπεδα, τα οποία καλούνται και με τους όρους «χαμηλό» και «υψηλό» επίπεδο του παράγοντα (το οποίο έχει μεν νόημα σε ποσοτικούς παράγοντες αλλά χρησιμοποιείται χωρίς βλάβη και σε ποιοτικούς), για την εκτίμηση της κύριας επίδρασης καθενός από τους m παράγοντες, δημιουργείται μία βωβή μεταβλητή x_i, $i = 1,2, \dots, m$, όπου $x_{ij} = -1$ αν ο παράγοντας i συμμετέχει στο χαμηλό του επίπεδο στην εκτέλεση j, ή $x_{ij} = 1$ αν ο παράγοντας συμμετέχει με το υψηλό του επίπεδο. Στα τρία επίπεδα, που συνήθως καλούνται «χαμηλό», «μεσαίο» και «υψηλό», δημιουργούνται για κάθε παράγοντα δύο βωβές μεταβλητές, που αντιστοιχούν στη γραμμική και στην τετραγωνική του επίδραση, x_{L_i} και x_{Q_i}, $i = 1,2, \dots, q$. Για τη γραμμική, θέτουμε $x_{L_{ij}} = -1$ αν ο παράγοντας i συμμετέχει στο χαμηλό του επίπεδο στην εκτέλεση j, $x_{L_{ij}} = 0$ αν ο παράγοντας i συμμετέχει στο μεσαίο του επίπεδο και $x_{L_{ij}} = 1$ αν ο παράγοντας συμμετέχει με το υψηλό του επίπεδο στην εκτέλεση j. Αντίστοιχα, για την τετραγωνική, θέτουμε $x_{Q_{ij}} = 1$ αν ο παράγοντας i συμμετέχει στο χαμηλό ή στο υψηλό του επίπεδο στην εκτέλεση j και $x_{Q_{ij}} = -2$ αν ο παράγοντας i συμμετέχει στο μεσαίο του επίπεδο στην εκτέλεση j. Παρόμοια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία πινάκων μοντέλου από σχεδιασμούς σε περισσότερα επίπεδα, αλλά η περιγραφή ξεφεύγει τους στόχους της παρούσας διατριβής.

Για παράδειγμα, αν μελετώνται m παράγοντες σε δύο επίπεδα, το μοντέλο πρώτης τάξης ή μοντέλο κύριων επιδράσεων που προσαρμόζεται είναι το

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \varepsilon$$

ενώ το μοντέλο δεύτερης τάξης που προσαρμόζεται είναι το

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \sum_{1=i<j=m} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

Τα σφάλματα του μοντέλου θεωρείται ότι ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ^2. Σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα, ακολουθείται η ίδια διαδικασία, μόνο που τα μοντέλα έχουν περισσότερους όρους, λόγω των δύο βωβών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για κάθε κύρια επίδραση παράγοντα.

Στην πράξη, μεγάλη δεξαμενή χρήσιμων σχεδιασμών κρησαρίσματος προσφέρει η κατηγορία των Ορθογώνιων Σχηματισμών (Orthogonal Arrays), λόγω της ποικιλίας τους αναφορικά με το πλήθος των πειραματικών δοκιμών καθώς και των ιδιοτήτων που προσφέρει η δομή τους.

1.3 Ορθογώνιοι Σχηματισμοί

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί (orthogonal arrays) αποτελούν μία μεγάλη κατηγορία σχεδιασμών που χρησιμοποιούνται σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών όπως η Συνδυαστική και η Στατιστική αλλά και σε τομείς της Πληροφορικής (Θεωρία κωδίκων, κρυπτογραφία). Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί εμφανίζονται στις εργασίες του Rao (1946, 1947), ενώ πρώτη παρουσίαση μεθοδολογίας για τη χρήση τους ως παραγοντικών σχεδιασμών στη Στατιστική, δίνεται από τους Plackett and Burman (1946). Η κατασκευή ορθογώνιων σχηματισμών αποτέλεσε αντικείμενο πολλών ερευνητών, βλέπε ενδεικτικά Bose and Bush (1952), Dey (1985), Tang (1993). Μια πλήρης περιγραφή της περιοχής, η οποία περιλαμβάνει και τα ερευνητικά αποτελέσματα των συγγραφέων στην περιοχή, δίνεται στο εξαιρετικό βιβλίο των Hedayat, Sloane and Stufken (1999), από το οποίο παρατίθεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.1 *Ένας ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n,m,s,t)$, είναι ένας $n \times m$ πίνακας με n γραμμές και m στήλες οι οποίες αποτελούνται από s διακριτά σύμβολα, τοποθετημένα με τέτοιο τρόπο σε κάθε στήλη ώστε, για κάθε επιλογή t στηλών του πίνακα, όλα τα s^t διακριτά διανύσματα – γραμμές να εμφανίζονται τον ίδιο αριθμό φορών.*

Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί μπορεί να θεωρηθούν λοιπόν ως κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί, όπου n είναι το πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων του σχεδιασμού, m είναι ο αριθμός των υπό μελέτη παραγόντων, s είναι ο αριθμός των επιπέδων κάθε παράγοντα και t είναι η ισχύς του σχηματισμού.

Η ισχύς t ενός ορθογώνιου σχηματισμού μπορεί να μας παρέχει πληροφορίες για τη συσχέτιση των εκτιμήσεων των παραγοντικών επιδράσεων, υπό τη μοντελοποίηση που περιγράφηκε νωρίτερα, καθώς σχετίζεται με τη διακριτική ικανότητα (Resolution) των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών. Συνοπτικά, ένας σχεδιασμός με ισχύ $t = 2$ προσφέρει ασυσχέτιστες εκτιμήσεις στο γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης, αλλά όχι σε αυτό της δεύτερης τάξης, ενώ ένας σχηματισμός με ισχύ $t = 4$, προσφέρει ασυσχέτιστες εκτιμήσεις και στο γραμμικό μοντέλο δεύτερης τάξης. Για τις περισσότερες περιπτώσεις κρησαρίσματος, οι ορθογώνιοι σχηματισμοί με ισχύ $t = 2$ είναι ικανοποιητική επιλογή, όπως φαίνεται στα Παραδείγματα 1.1 και 1.2 που ακολουθούν. Είναι επίσης αντιληπτό ότι, όταν χρησιμοποιούμε ορθογώνιους σχηματισμούς με υψηλή ισχύ, μπορούμε να εκτιμήσουμε ασυσχέτιστα τις παραμέτρους σε μοντέλα υψηλής τάξης. Όμως, τέτοιες επιλογές καταλήγουν συνήθως σε σχεδιασμούς με υπερβολικά μεγάλο πλήθος εκτελέσεων, το οποίο και ξεφεύγει της χρήσης των σχεδιασμών κρησαρίσματος.

Ο αριθμός των παραγόντων που μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση ορθογωνίων σχηματισμών σε ένα πείραμα, είναι συνάρτηση του αριθμού των εκτελέσεων και της ισχύος του σχηματισμού. Εάν ο αριθμός των παραγόντων του ορθογώνιου σχηματισμού είναι ο μεγαλύτερος δυνατός σε συνάρτηση με τον αριθμό των εκτελέσεών του και της ισχύος του, τότε ο ορθογώνιος σχηματισμός ονομάζεται κορεσμένος, ενώ στην περίπτωση που δεν ισχύει αυτή η συνθήκη, ονομάζεται μη κορεσμένος. Με βάση τις ανισότητες του Rao (1947), ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις ανάμεσα στο πλήθος των παράγοντων m ενός κορεσμένου ορθογώνιου σχεδιασμού, στο πλήθος των εκτελέσεων n, και στο πλήθος των επιπέδων των παραγόντων s:

- Όταν η ισχύς είναι $t = 2$, τότε ισχύει $m \leq (n-1)/(s-1)$
- Όταν η ισχύς είναι $t = 3$, τότε ισχύει $m \leq \left(\frac{n}{s} - 1\right)/(s-1) + 1$

Για παράδειγμα, μπορεί να κατασκευαστούν ορθογώνιοι σχηματισμοί δύο επιπέδων με ισχύ $t = 2$ οι οποίοι να μπορούν να μελετήσουν μέχρι και $n - 1$ παράγοντες. Αντίστοιχα όταν ο αριθμός των επιπέδων είναι $s = 3$, για την ίδια τιμή ισχύος $t = 2$, ο αριθμός παραγόντων που μπορεί να επιτευχθεί είναι το πολύ $(n-1)/2$. Αξίζει τέλος να αναφερθεί, ότι αν επιλεγούν k στήλες από έναν ορθογώνιο σχηματισμό $OA(n, m, s, t)$, με $k < m$, τότε δημιουργείται ένας νέος ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n, k, s, t')$, του οποίου μάλιστα η ισχύς t' μπορεί να είναι μεγαλύτερη της ισχύος t του αρχικού ορθογώνιου σχηματισμού. Στο συμπέρασμα αυτό οδηγήθηκε ο Hedayat (1990), ο οποίος παρουσίασε ότι από έναν ορθογώνιο σχηματισμό $OA(n, m, s, t)$ μπορεί να σχηματιστεί, με σωστή επιλογή $k < m$ στηλών, ένας ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n, k, s, t + 1)$.

Παράδειγμα 1.1

Ο σχεδιασμός του παρακάτω πίνακα με 12 γραμμές, 4 στήλες με 2 σύμβολα (0 και 1) σε κάθε στήλη είναι ένας OA(12,4,2,2).

Σ1	Σ2	Σ3	Σ4
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

Η ισχύς του σχεδιασμού είναι ίση με $t = 2$ αφού εύκολα παρατηρείται ότι σε οποιαδήποτε επιλογή δύο στηλών, όλα τα 2^2 διαφορετικά διανύσματα – γραμμές που παράγονται από δύο στήλες (δηλαδή τα $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$) εμφανίζονται τον ίδιο αριθμό φορών, από τρεις το καθένα. Η ισχύς δεν μπορεί να είναι ίση με 3, αφού όταν επιλέγουμε οποιεσδήποτε τρεις στήλες, δεν εμφανίζονται όλα τα 2^3 διαφορετικά διανύσματα – γραμμές που μπορεί να εμφανιστούν στις τρεις στήλες. Αναφορικά με το γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης που μπορεί να προσαρμοστεί με τη χρήση των κλασσικών βωβών μεταβλητών όταν χρησιμοποιηθεί ο συγκεκριμένος σαν σχεδιασμός κρησαρισμάτος, εύκολα προκύπτει ότι ο πίνακας πληροφορίας του γραμμικού μοντέλου αυτού είναι ο $X^T X = 12 I_5$ και συνεπώς οι πέντε παράμετροι μπορεί να εκτιμηθούν ασυσχέτιστα. Αναφορικά όμως με το μοντέλο δεύτερης τάξης, έχουμε ότι ο πίνακας πληροφορίας που προκύπτει είναι ο

$$\begin{bmatrix}
12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\
0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 12 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4 & 12 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 12 & 0 \\
0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12
\end{bmatrix}$$

και συνεπώς δεν εκτιμώνται όλες οι παράμετροι ασυσχέτιστα. □

Παράδειγμα 1.2

Ο σχεδιασμός του παρακάτω πίνακα με 18 γραμμές, 3 στήλες με 3 σύμβολα (0, 1 και 2) σε κάθε στήλη είναι ένας OA(18,3,2,2).

ΣΤ1	ΣΤ2	ΣΤ3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	2
0	2	1
0	2	2
1	0	0
1	0	2
1	1	1
1	1	2
1	2	0
1	2	1
2	0	1
2	0	2
2	1	0
2	1	1
2	2	0
2	2	2

Η ισχύς του σχεδιασμού είναι ίση με $t = 2$ αφού εύκολα παρατηρείται ότι σε οποιαδήποτε επιλογή δύο στηλών, όλα τα 3^2 διαφορετικά διανύσματα – γραμμές που παράγονται από δύο στήλες (δηλαδή τα $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)$) εμφανίζονται τον ίδιο αριθμό φορών, από δύο το καθένα. Η ισχύς δεν μπορεί να είναι ίση με 3, αφού όταν επιλέγουμε οποιεσδήποτε τρεις στήλες, δεν εμφανίζονται όλα τα 3^3 διαφορετικά διανύσματα – γραμμές που μπορεί να εμφανιστούν στις τρεις στήλες. Αναφορικά με το γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης που μπορεί να προσαρμοστεί με τη χρήση των κλασσικών βωβών μεταβλητών όταν χρησιμοποιηθεί ο συγκεκριμένος σαν σχεδιασμός κρησαρισμάτος, εύκολα προκύπτει ότι ο πίνακας πληροφορίας του γραμμικού μοντέλου αυτού είναι διαγώνιος και συνεπώς οι επτά παράμετροι μπορεί να εκτιμηθούν ασυσχέτιστα. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και με το μοντέλο δεύτερης τάξης. □

Συχνά, οι τρόποι κατασκευής ορθογώνιων σχηματισμών οδηγούν σε n x m πίνακες, οι οποίοι φαινομενικά είναι διαφορετικοί. Μία όμως περαιτέρω μελέτη τους, συχνά αναδεικνύει ότι έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες. Αυτό συμβαίνει διότι οι φαινομενικά διαφορετικοί ορθογώνιοι σχηματισμοί $OA(n, m, s, t)$ μπορεί να ομαδοποιηθούν σε κλάσεις ισοδυναμίας, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2 *Δύο ορθογώνιοι σχηματισμοί λέγονται ισόμορφοι, εάν ο ένας εξ αυτών μπορεί να προκύψει από τον άλλο με μετάθεση γραμμών ή/και στηλών ή/και επιπέδων στις στήλες.*

Αναφορικά με τη χρήση τους ως πειραματικών σχεδιασμών, είναι προφανές ότι ισόμορφοι σχεδιασμοί θα έχουν τις ίδιες ιδιότητες. Για το λόγο αυτό, και σε περίπτωση που είναι γνωστές όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας για δοσμένο n, m και s, μελετάται μόνο ένας εκπρόσωπος από κάθε κλάση. Στη βιβλιογραφία έχει δοθεί το πλήθος των μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών για συγκεκριμένες επιλογές n, m και s. Ο Πίνακας 1.1 παρουσιάζει το πλήθος όλων των μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών δύο επιπέδων για $n < 36$ και $m < 8$ (Evangelaras, Koukouvinos and Lappas (2007)).

n	m				
	3	**4**	**5**	**6**	**7**
12	2	1	2	2	1
16	3	5	11	27	55
20	3	3	11	75	474
24	4	10	63	1350	57389
28	4	7	127	17826	28
32	5	19	491	266632	N/A

Πίνακας 1.1: Πλήθος μη ισόμορφων *OA* δύο επιπέδων

Αν για παράδειγμα θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν ορθογώνιο σχηματισμό με $n = 24$ εκτελέσεις και $m = 5$ παράγοντες δύο επιπέδων για το σχεδιασμό κάποιου πειράματος, παρατηρούμε ότι στο Πίνακα 1.1 υπάρχουν 63 μη ισόμορφοι σχεδιασμοί, δηλαδή 63 διαφορετικές επιλογές. Αν και, όπως είδαμε, όλοι οι ορθογώνιοι σχηματισμοί με ισχύ $t = 2$ έχουν την ίδια συμπεριφορά αναφορικά με την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου πρώτης τάξης, κάτι τέτοιο μπορεί να μην συμβαίνει στην εκτίμηση των παραμέτρων σε μοντέλα μεγαλύτερης τάξης. Για το λόγο αυτό, έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία διάφορα κριτήρια για την αξιολόγηση των μη-ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών.

Αναφορικά με την αποδοτικότητα εκτίμησης παραμέτρων γραμμικών μοντέλων, χρησιμοποιείται συχνά το κριτήριο της D – αποδοτικότητας.

1.4 D – αποδοτικότητα

Η τιμή του κριτηρίου της D – αποδοτικότητας υπολογίζεται με βάση την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του γραμμικού μοντέλου που επιθυμούμε να εκτιμήσουμε με βάση το σχεδιασμό που χρησιμοποιείται. Αποτελεί ένα αρκετά διαδεδομένο κριτήριο, βάσει του οποίου οι διάφοροι σχεδιασμοί μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, αναφορικά με την απόδοσή τους σχετικά με την εκτίμηση των παραμέτρων δοθέντος μοντέλου. Γενικά, οι σχεδιασμοί που επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή του κριτηρίου αυτού για δοθέν μοντέλο, ονομάζονται και D – βέλτιστοι σχεδιασμοί για το μοντέλο αυτό.

Ορισμός 1.3 *Η D – αποδοτικότητα (D – efficiency) ενός σχεδιασμού αναφορικά με την εκτίμηση των παραμέτρων ενός γραμμικού μοντέλου της μορφής*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + \cdots + +\beta_{p-1} x_{i,p-1} + \varepsilon$$

με p παραμέτρους, πίνακα μοντέλου $X = [\mathbf{1}, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}]$ και κανονικοποιημένο πίνακα μοντέλου $W = [\mathbf{1}/||\mathbf{1}||, x_1/||x_1||, x_2/||x_2||, \dots, x_{p-1}/||x_{p-1}||]$ είναι

$$D_{eff} = |W^T W|^{1/p}.$$

Στην περίπτωση σχεδιασμών με δύο επίπεδα, εξαιτίας της χρήσης των –1 και +1 για τη δημιουργία των βωβών μεταβλητών, ο τύπος απλοποιείται σε

$$D_{eff} = \frac{1}{n}|X^T X|^{1/p}.$$

Είναι προφανές ότι κάτω από οποιοδήποτε γραμμικό μοντέλο, η μέγιστη τιμή της D – αποδοτικότητας είναι ίση με 1, και επιτυγχάνεται όταν ο πίνακας $X'X$ είναι διαγώνιος και συνεπώς οι παράμετροι εκτιμώνται ασυσχέτιστα. Το ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζει τη χρήση του κριτηρίου αυτού για την επιλογή σχεδιασμού.

Παράδειγμα 1.3

Οι ορθογώνιοι σχεδιασμοί D1 και D2 που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2, πρόκειται να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη τριών παραγόντων δύο επιπέδων με τη διεξαγωγή 16 εκτελέσεων.

D1			D2		
A	B	C	A	B	C
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Πίνακας 1.2 Δύο ορθογώνιοι σχηματισμοί D1 και D2

Ζητείται να εντοπιστεί ο σχεδιασμός που μπορεί να εκτιμήσει τις παραμέτρους του μοντέλου

$$y = \beta_0 + \beta_A x_A + \beta_B x_B + \beta_C x_C + \beta_{AB} x_{AB} + \beta_{AC} x_{AC} + \beta_{BC} x_{BC} + \beta_{ABC} x_{ABC}$$

με τη μεγαλύτερη D – αποδοτικότητα.

Δημιουργώντας τον πίνακα μοντέλου X και για τους δύο σχεδιασμούς με βάση το υπό εξέταση μοντέλο και τις βωβές μεταβλητές που προκύπτουν από τις κλασσικές αντιθέσεις (trend contrasts), προκύπτουν οι ακόλουθοι πίνακες πληροφορίας:

Για τον D1:

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Για τον D2:

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας που προκύπτει από το σχεδιασμό D1 είναι ίση με το 0, και συνεπώς η D – αποδοτικότητά του είναι ίση με το μηδέν, ενώ η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας που προκύπτει από το σχεδιασμό D2 είναι ίση με το 16^8 και η αποδοτικότητά του ίση με

$$D_{eff} = \frac{1}{16} 16^{8/8} = 1.$$

Το τελευταίο ήταν αναμενόμενο, καθώς ο πίνακας πληροφορίας είναι διαγώνιος. Συνεπώς, ο ορθογώνιος σχηματισμός D2 είναι η καλύτερη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων του συγκεκριμένου μοντέλου. □

Συνοψίζοντας, οι ορθογώνιοι σχεδιασμοί αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο στο σχεδιασμό πειραμάτων, λόγω κυρίως των τριών παρακάτω προτερημάτων τους:

- Οικονομία

  Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί επιτυγχάνουν να παρέχουν με λιγότερες εκτελέσεις το ίδιο αποτέλεσμα στην ανάλυση ενός πειράματος κρησαρίσματος. Για παράδειγμα, αν έχουμε να μελετήσουμε 7 παράγοντες σε τρία επίπεδα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν ορθογώνιο σχηματισμό $OA(18,7,3,2)$ για τη μελέτη των κύριων επιδράσεων (και ίσως και ορισμένων αλληλεπιδράσεων), εξοικονομώντας πόρους από 9 επιπλέον εκτελέσεις που απαιτεί ένας κλασματικός 3^{7-4} σχεδιασμός με 27 εκτελέσεις.

- Ευελιξία στην επιλογή των επιπέδων

  Υπάρχει πληθώρα ορθογώνιων σχηματισμών για διάφορες επιλογές επιπέδων παραγόντων, με τους ορθογώνιους σχηματισμούς δύο και τριών επιπέδων να είναι όμως οι πιο διαδεδομένοι.

- Αποδοτικότητα εκτίμησης

  Οι ορθογώνιοι σχηματισμοί (με ισχύ μεγαλύτερη ή ίση του δύο) εγγυώνται ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων σε γραμμικά μοντέλα πρώτης τάξεως είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Αντιστοίχως όταν αλληλεπιδράσεις παραγόντων κρίνονται σημαντικές προς μελέτη, το κριτήριο της D – αποδοτικότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επιλογή κατάλληλου σχεδιασμού.

Αν και προφανές, είναι χρήσιμο να σημειωθεί ότι οι πλήρεις s^m καθώς και οι κλασματικοί s^{m-p} παραγοντικοί σχεδιασμοί ανήκουν στην κατηγορία των ορθογώνιων σχηματισμών. Μάλιστα, οι πλήρεις s^m παραγοντικοί σχεδιασμοί, είναι ορθογώνιοι σχηματισμοί με τη μεγαλύτερη ισχύ, το οποίο είναι λογικό, αφού μπορούν να εκτιμήσουν όλες τις παραγοντικές επιδράσεις, ασυσχέτιστα τη μία από την άλλη. Είναι επίσης προφανές από όσα προηγήθηκαν, ότι χρήσιμοι ορθογώνιοι σχηματισμοί για την περιοχή των Πειραματικών Σχεδιασμών, είναι όσοι έχουν ισχύ $t \geq 2$.

Στη διατριβή αυτή θα παρουσιαστούν μέθοδοι κατασκευής αποδοτικών ορθογώνιων σχηματισμών με βάση συγκεκριμένα κριτήρια. Ο τρόπος προσέγγισης βασίζεται στη χρήση συγκεκριμένης αναπαράστασης των εκτελέσεων (γραμμών) του σχηματισμού, η οποία και ορίζει μονοσήμαντα τον εκάστοτε σχηματισμό. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται αναλυτικά αυτή η αναπαράσταση.

1.5 Τρόπος αναπαράστασης εκτελέσεων ορθογώνιων σχηματισμών

Οι κατασκευές των ορθογώνιων σχηματισμών που παρουσιάζονται σε αυτή τη διατριβή, διέπονται από συγκεκριμένες παραδοχές που συνεισφέρουν στη θεμελίωση ενός κοινού πλαισίου, το οποίο ακολουθείται και εφαρμόζεται σε όλο το κείμενο. Βάσει του συγκεκριμένου πλαισίου έχουν προκύψει τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης και μπορεί να επιτευχθεί και η επαναληψιμότητά τους. Η αναπαράσταση λοιπόν των γραμμών ενός ορθογώνιου σχηματισμού, η οποία οδηγεί μονοσήμαντα και στην κατασκευή του βασίζεται στις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1.1 *Ο πλήρης* s^m *παραγοντικός σχεδιασμός είναι ένας πίνακας με* s^m *(διαφορετικές μεταξύ τους) γραμμές και* m *στήλες με* s *επίπεδα που χωρίς βλάβη μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι τα* $\{0, 1, 2, \dots, s-1\}$*. Κάθε στήλη αντιστοιχείται και σε ένα παράγοντα, ενώ κάθε γραμμή παρουσιάζει τον συνδυασμό των επιπέδων των παραγόντων που πρέπει να "δοκιμαστεί" για να μετρηθεί η απόκριση. Κάθε μία γραμμή λοιπόν, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διάνυσμα* m *θέσεων, με στοιχεία* $\{0, 1, 2, \dots, s-1\}$*. Δοθέντος λοιπόν των ποσοτήτων* m *και* s*, κάθε γραμμή του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού μπορεί να αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας έναν φυσικό αριθμό* i*,* $0 \leq i \leq s^m - 1$*, που ουσιαστικά είναι η* s*-αδική αναπαράσταση του διανύσματος* m *θέσεων, στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Αντιστρόφως, για συγκεκριμένα* m *και* s*, η αναπαράσταση κάθε φυσικού αριθμού* i*,* $0 \leq i \leq s^m - 1$ *σαν ένα διάνυσμα* m *θέσεων στο* s*-αδικό σύστημα αρίθμησης θα δίνει τον πλήρη* s^m *παραγοντικό σχεδιασμό.*

Παράδειγμα 1.4

Ο πλήρης 2^4 παραγοντικός σχεδιασμός είναι ένας πίνακας με 16 γραμμές και 4 στήλες με στοιχεία 0 και 1, και παρουσιάζεται (στην ανάστροφη μορφή του) στον Πίνακα 1.3.

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Πίνακας 1.3: Ο πλήρης 2^4 παραγοντικός σχεδιασμός (ανάστροφος)

Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή (στήλη στην ανάστροφη μορφή που παρουσιάζεται) ορίζει ένα διάνυσμα τεσσάρων θέσεων, με στοιχεία 0 και 1. Αν θεωρήσουμε κάθε τέτοιο διάνυσμα ως έναν αριθμό του δυαδικού συστήματος αρίθμησης μπορούμε, βρίσκοντας τη μορφή του στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, να αναπαραστήσουμε κάθε γραμμή του πλήρους παραγοντικού με έναν φυσικό αριθμό. Προκύπτουν λοιπόν οι φυσικοί αριθμοί 0, 1, 2, …, 15 οι οποίοι, αν ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία, μπορεί να φτιάξουν τις 16 γραμμές του πλήρους 2^4 παραγοντικού σχεδιασμού. □

Για να μην είναι ασύμβατη η αντιστοίχιση αριθμού με διάνυσμα, στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\boldsymbol{i}$ για να δηλώνουμε το διάνυσμα-γραμμή που προκύπτει (δοθέντων των s και m) από το φυσικό αριθμό i, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, και ακολουθώντας αυτή τη σημειογραφία, για να δηλώσουμε το διάνυσμα-γραμμή 0100 του Πίνακα 1.3, θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\mathbf{4}$ (αφού ο φυσικός αριθμός που το «παρουσιάζει» για s = 2 και m = 4 είναι το 4), ενώ από τον αριθμό 4, με την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να παράξουμε το διάνυσμα 0100. □

Παράδειγμα 1.5

Ο πλήρης 3^3 παραγοντικός σχεδιασμός μπορεί να κατασκευαστεί και να παρουσιαστεί, με τη χρήση των φυσικών αριθμών i, $0 \leq i \leq 26$ και την αναπαράστασή τους σε διανύσματα μήκους $m = 3$ στο τριαδικό (αφού s = 3) σύστημα αρίθμησης. Αναλυτικότερα:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\boldsymbol{i}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
O 3^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Πίνακας 1.4: Αναπαραστάσεις του πλήρους 3^3 παραγοντικού σχεδιασμού (ανάστροφος πίνακας)

□

Παρατήρηση 1.2 *Κάθε σχεδιασμός D με n γραμμές και m στήλες s επιπέδων (είτε είναι ορθογώνιος σχηματισμός ή όχι) αποτελείται από κάποιες ή και από όλες τις γραμμές του πλήρους s^m παραγοντικού σχεδιασμού. Κάποιες γραμμές μπορεί να μην εμφανίζονται στον D, και κάποιες μπορεί να επαναλαμβάνονται περισσότερες από μία φορές.*

Παράδειγμα 1.6

Δίνεται ο σχεδιασμός *D*, με 6 γραμμές και 4 στήλες δύο επίπεδων.

0	0	1	1
0	0	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	1	0	1

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται στο σχεδιασμό τα διανύσματα – γραμμές 0000, 0011, 0101, και 1100 του πλήρους 2^4 και μάλιστα, οι 0011 και 1100 από δύο φορές. Ο σχεδιασμός αυτός λοιπόν θα μπορούσε να αναπαρασταθεί

- είτε χρησιμοποιώντας (για s = 2 και m = 4) τους φυσικούς αριθμούς 0, 3, 3, 5, 12, 12,
- είτε χρησιμοποιώντας (για s = 2 και m = 4) τα σύμβολα διανυσμάτων **0**, **3**, **3**, **5**, **12**, **12**,
- ή και την μορφή που δόθηκε αρχικά, σαν πίνακας 6 x 4,

με τελείως ισοδύναμα αποτελέσματα. Προφανώς, δεν αναπαριστώνται όσες γραμμές του πλήρους 2^4 δεν εμφανίζονται στο σχεδιασμό *D*. Για πληρότητα, μπορούμε να συμπεριλάβουμε όλη την πληροφορία εμφάνισης – μη εμφάνισης γραμμών του πλήρους σχεδιασμού, σε ένα διάνυσμα με στοιχεία φυσικούς αριθμούς. Το διάνυσμα αυτό, στην πρώτη θέση θα έχει τον αριθμό των φορών που το διάνυσμα **0** του πλήρους 2^4 εμφανίζεται στον *D*, στη δεύτερη θέση θα έχει τον αριθμό των φορών που το διάνυσμα **1** του πλήρους 2^4 εμφανίζεται στον *D*, κοκ, και στην τελευταία θέση, τη δέκατη έκτη, θα έχει τον αριθμό των φορών που το διάνυσμα **15** του πλήρους 2^4 εμφανίζεται στον *D*. Με άλλα λόγια και ακολουθώντας τη διαδικασία αναπαράστασης που περιγράφηκε, ο σχεδιασμός *D* με 6 γραμμές και 4 στήλες με δύο επίπεδα ορίζεται μονοσήμαντα με το διάνυσμα

$$(1, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0). \qquad \square$$

Γενικεύοντας, προκύπτει άμεσα ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.4 *Κάθε σχεδιασμός D με n γραμμές και m στήλες με s επίπεδα, αποτελείται από κάποιες (ή και όλες τις γραμμές) του πλήρους s^m σχεδιασμού, με πιθανές επαναλήψεις. Οι γραμμές του D μπορούν να αναπαρασταθούν με τη χρήση ενός διανύσματος*

$$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s^m-1})$$

με στοιχεία φυσικούς αριθμούς. Κάθε a_i, με $0 \leq i \leq s^m - 1$, δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται το διάνυσμα – γραμμή $\boldsymbol{i}$ του πλήρους s^m σχεδιασμού, στο σχεδιασμό D. Προφανώς, θα πρέπει οι φυσικοί αριθμοί a_i, με $0 \leq i \leq s^m - 1$ να αθροίζουν στο n, δηλαδή $a_0 + a_1 + \cdots + a_{s^m-1} = n$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s^m-1})$ που ουσιαστικά ορίζει μονοσήμαντα τον σχεδιασμό D, θα καλείται διάνυσμα πολλαπλοτήτων του D.

Προφανώς, αν γνωρίζουμε ή αν παράξουμε με κάποιο τρόπο το διάνυσμα πολλαπλοτήτων ενός σχεδιασμού, τότε μπορούμε να τον κατασκευάσουμε, όπως παρουσιάζεται και στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.7

Για να κατασκευαστούν δύο σχεδιασμοί με 12 γραμμές και 4 στήλες δύο επιπέδων, χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω διανύσματα $(a_0, a_1, \dots, a_{15})$ όπου

- $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ και $a_8 = a_9 = a_{14} = a_{15} = 2$ και όλα τα άλλα στοιχεία ίσα με το 0,
- $a_0 = 2,\ a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 1$ και όλα τα άλλα στοιχεία ίσα με το 0.

Οι δύο σχεδιασμοί κατασκευάζονται εύκολα, όπως φαίνεται παρακάτω (σε ανάστροφη μορφή). Προφανώς, όσες γραμμές έχουν πολλαπλότητα 0, δεν συμπεριλαμβάνονται στο σχεδιασμό.

2	**3**	**4**	**5**	**8**	**8**	**9**	**9**	**14**	**14**	**15**	**15**
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

0	**0**	**3**	**5**	**6**	**7**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0

Ο δεύτερος σχεδιασμός είναι ισοδύναμος με το σχεδιασμό του Παραδείγματος 1.1 (αρκεί μια μετάθεση των γραμμών για να προκύψει πλήρης ταύτιση). □

Είναι προφανές, ότι οποιαδήποτε επιλογή διανύσματος πολλαπλοτήτων δεν είναι απαραίτητο ότι θα καταλήγει και στην κατασκευή κάποιου χρήσιμου σχεδιασμού. Η προσπάθειά μας θα επικεντρωθεί σε μεθοδολογικές προτάσεις επιλογής διανύσματος πολλαπλοτήτων, η οποία θα οδηγεί στην κατασκευή σχεδιασμών με επιθυμητές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα οι ορθογώνιοι σχηματισμοί.

Οι μέθοδοι που παρουσιάζονται στα κεφάλαια 3 και 4 και που ουσιαστικά αποτελούν τα κύρια ευρήματα αυτής της διατριβής, βασίζονται στην κατασκευή επιθυμητών σχεδιασμών μέσω του προσδιορισμού κατάλληλου διανύσματος πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$ που όπως αναφέραμε, καθορίζει πλήρως το σχεδιασμό. Στο κεφάλαιο 2, θα παρουσιάσουμε ορισμένες τεχνικές και εργαλεία χρήσιμα για την υλοποίηση της μεθοδολογίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ελάχιστη απόκλιση, *J* χαρακτηριστικά και γενικεύσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε μία εκτενής τοποθέτηση του ερευνητικού ενδιαφέροντος της παρούσας μελέτης, στην περιοχή της κατασκευής αποδοτικών ορθογώνιων σχηματισμών προς χρήση σε πειράματα στη βιομηχανία, στις καλλιέργειες, στην Ιατρική κ.α. Λόγω αυτής της μεγάλης χρησιμότητας των παραγοντικών σχεδιασμών στις διάφορες εφαρμογές, έχει δοθεί μεγάλο ενδιαφέρον στη βιβλιογραφία στη δημιουργία και τη μελέτη κριτηρίων για την αξιολόγηση των διάφορων πειραματικών σχεδιασμών πριν από την επιλογή τους για εφαρμογή σε πειραματικές καταστάσεις. Διαδεδομένα και χρήσιμα κριτήρια αποτελούν το κριτήριο της διακριτικής ικανότητας (resolution) των Box, Hunter and Hunter (1978), το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης (minimum aberration) των Fries and Hunter (1980), το κριτήριο της δυνατότητας εκτίμησης (estimation capacity) των Chen and Mukerjee (1998), το κριτήριο της ομοιομορφίας (uniformity) των Fang and Mukerjee (2000), καθώς και οι γενικεύσεις τους, όπως παρουσιάστηκαν στη βιβλιογραφία.

Καθοριστικής σημασίας στην παρούσα μελέτη αποτελεί το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης, το οποίο και θα παρουσιαστεί αναλυτικά στα επόμενα, περιγράφοντας τα βασικά εργαλεία που χρειάζονται για τη μελέτη του και δίνοντας τις απαραίτητες για τη μεθοδολογία που θα αναπτυχθεί στο κεφάλαιο 4, γενικεύσεις.

2.1 Σχεδιασμοί δύο επιπέδων και τα *J* χαρακτηριστικά τους

Οι Deng and Tang (1999) όρισαν τα *J* χαρακτηριστικά των σχεδιασμών δύο επιπέδων, ως ποσότητες που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να μελετηθούν εκτενώς οι ιδιότητες αυτών των σχεδιασμών.

Ορισμός 2.1 *Έστω* $D = \{\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_m\}$ *ένας σχεδιασμός με m στήλες δύο επίπεδων,* +1 *και* –1. *Για κάθε υποσύνολο k στηλών του σχεδιασμού* $S = \{\boldsymbol{d}_{j1}, \dots, \boldsymbol{d}_{jk}\}$, $1 \leq k \leq m$, *ορίζεται η ποσότητα*

$$J_k(S) = J_k(\boldsymbol{d}_{j1}, \dots, \boldsymbol{d}_{jk}) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij1} \dots d_{ijk}$$

ως το J χαρακτηριστικό του υποσυνόλου S.

Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό έχει χρησιμοποιηθεί η κωδικοποίηση των κλασσικών αντιθέσεων για κάθε παράγοντα. Για χρήση των ποσοτήτων αυτών στη Στατιστική, το γινόμενο των συμβόλων των k στηλών που προκύπτει από κάθε υποσύνολο S ουσιαστικά αντιστοιχεί και σε κάποια αλληλεπίδραση k–τάξης και συνεπώς, η τιμή του $J_k(S)$ δείχνει τη σύγχιση (aliasing) μεταξύ της συγκεκριμένης k–τάξης αλληλεπίδρασης με τη μέση τιμή. Προφανώς, $-n \leq J_k(S) \leq n$, με τη μέγιστη τιμή $\pm n$ να επιτυγχάνεται όταν υπάρχει λέξη μήκους k (αναφερόμενοι στην ορολογία των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών) ανάμεσα στους παράγοντες του σχεδιασμού.

Αν έχουμε έναν σχεδιασμό με m στήλες δύο επιπέδων, θα χρειαστεί να κάνουμε

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m - 1$$

υπολογισμούς τιμών. Οι $\binom{m}{1}$ τιμές θα αφορούν τα μονόστηλα του D, οι $\binom{m}{2}$ τιμές θα αφορούν τις επιλογές $k = 2$ στηλών του D, κ.ο.κ. Μπορούμε να συνοψίσουμε αυτές τις τιμές σε ένα διάνυσμα 2^m θέσεων

$$\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \dots, \mathbf{J}^m]^T,$$

όπου κάθε $\mathbf{J}^k$, $1 \leq k \leq m$, θα περιέχει όλες τις $\binom{m}{k}$ τιμές που υπολογίστηκαν από τα υποσύνολα k στηλών. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στα επόμενα να υπολογίζονται οι ποσότητες χρησιμοποιώντας «λεξικογραφική» διάταξη για τον ορισμό όλων των υποσυνόλων S. Το διάνυσμα αυτό, όπως θα δουμε στην επόμενη παράγραφο, συνδέεται άμεσα με το διάνυσμα πολλαπλοτήτων του D, και ορίζει μονοσήμαντα τον D. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο υπολογισμού του $\mathbf{J}$.

Παράδειγμα 2.1

Θα υπολογίσουμε το διάνυσμα $\mathbf{J}$ για το σχεδιασμό του Παραδείγματος 1.1.

Σ1	Σ2	Σ3	Σ4
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

Αρχικά χρησιμοποιούμε αντί για 0 και 1 τα σύμβολα –1 και +1 (δημιουργία βωβών μεταβλητών) και, για βοήθεια, δημιουργούμε σε ένα πίνακα, όλα τα γινόμενα k στηλών που προκύπτουν, $1 \leq k \leq 4$, με «λεξικογραφική» διάταξη.

Σ1	Σ2	Σ3	Σ4		x1	x2	x3	x4	x1x2	x1x3	x1x4	x2x3	x2x4	x3x4	x1x2x3	x1x2x4	x1x3x4	x2x3x4	x1x2x3x4
0	0	0	0		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
0	0	0	0		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
0	0	1	1		-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
0	1	0	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
0	1	1	0		-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
0	1	1	1		-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	0	1	1		1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	0	1	0		1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	0	0	1		1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
1	1	1	0		1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	0	1		1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	0	0		1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
Σύνολο					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	-4	-4	-4	4
J					**J¹**				**J²**						**J³**				**J⁴**

Προκύπτει λοιπόν ότι το διάνυσμα $\mathbf{J}$ του σχεδιασμού είναι το

$$\mathbf{J}^{T} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3, \mathbf{J}^4] = [12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, -4, -4, -4, 4] \qquad \square$$

2.2 *J* χαρακτηριστικά και διάνυσμα πολλαπλοτήτων σχεδιασμού

Όπως ήδη αναφέρθηκε, το διάνυσμα $\mathbf{J}$ των *J* χαρακτηριστικών ενός σχεδιασμού *D* συνδέεται άμεσα με το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{\alpha}$ του *D*, και συνεπώς ορίζει και αυτό με τη σειρά του μονοσήμαντα τον *D*. Η σύνδεση αυτή αναφέρεται στον Tang (2001) και στους Stufken and Tang (2007). Επιπλέον, οι Stufken and Tang (2007) σημειώνουν ότι το διάνυσμα $\mathbf{J}$ είναι απλά ο μετασχηματισμός Hadamard του $\boldsymbol{\alpha}$. Για να περιγράψουμε συνοπτικά αυτή τη θεώρηση, ας γράψουμε τον πλήρη 2^m παραγοντικό σχεδιασμό με τον τρόπο που περιγράφηκε στην Παρατήρηση 1.1, ως ένα 2^m x m πίνακα της μορφής

$$[\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{2^m - 1}]^{\boldsymbol{T}}$$

και στη συνέχεια, να δημιουργήσουμε έναν 2^m x 2^m πίνακα *H*, ως εξής:

- Η πρώτη στήλη του *H* αποτελείται μόνο από μονάδες
- Οι επόμενες m στήλες είναι ο πλήρης 2^m σχεδιασμός που προκύπτει με τη χρήση των κλασσικών βωβών μεταβλητών (αντικαθιστούμε το 0 με –1 και το 1 με +1)
- Οι υπόλοιπες στήλες δημιουργούνται από τις αλληλεπιδράσεις των m στηλών του πλήρους σχεδιασμού κατά σειρά τάξης και με λεξικογραφική διάταξη σε κάθε τάξη.

Ο πίνακας H είναι ουσιαστικά ο πίνακας αλγεβρικών προσήμων του πλήρους 2^m παραγοντικού σχεδιασμού και είναι ουσιαστικά ένας πίνακας Hadamard, για τον οποίο ισχύει ότι

$$H^T H = HH^T = 2^m I_{2^m}.$$

Έστω τώρα ένας $n \times m$ σχεδιασμός D με διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{\alpha}$ και διάνυσμα J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$. Μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2^m} H\, \mathbf{J}.$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε (ή μπορούμε να ορίσουμε) το διάνυσμα $\mathbf{J}$ ενός σχεδιασμού D, τότε υπολογίζεται και το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$, δηλαδή ορίζουμε τον σχεδιασμό D.

Παράδειγμα 2.2

Θα χρησιμοποιήσουμε το διάνυσμα $\mathbf{J}^{\boldsymbol{T}}$= [12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, -4, -4, -4, 4] των J χαρακτηριστικών που προέκυψε από το Παράδειγμα 2.1 για να παράξουμε το διάνυσμα πολλαπλοτήτων του σχεδιασμού του Παραδείγματος 1.1, όπως δόθηκε στο Παράδειγμα 1.7. Έχουμε ότι ο πίνακας H που προκύπτει από τον πλήρη 2^4 παραγοντικό σχεδιασμό είναι ο

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

Από τη σχέση $\boldsymbol{a}^T = \frac{1}{2^4} H\, \mathbf{J}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{\alpha} = [2, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]$, όπως δηλαδή είχε δοθεί και στο Παράδειγμα 1.7. □

Η διαδικασία αυτή θα γενικευτεί στην παράγραφο 2.4 για χρήση σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα και στην παράγραφο 2.5 θα περιγραφεί ο τρόπος που τα J χαρακτηριστικά χρησιμοποιούνται για το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης, γεγονός που θα οδηγήσει στην κατασκευή σχεδιασμών τριών επιπέδων με (γενικευμένη) ελάχιστη απόκλιση, στο κεφάλαιο 4.

Στην επόμενη παράγραφο θα περιγραφεί ο τρόπος που τα J χαρακτηριστικά μπορεί να συνδεθούν με το κριτήριο της D–αποδοτικότητας που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 1. Η σύνδεση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3, όπου και θα κατασκευαστούν αποδοτικοί n x k block σχεδιασμοί δύο επιπέδων, χρησιμοποιώντας δύο ή και τέσσερα blocks θεραπειών.

2.3 J χαρακτηριστικά και πίνακες μοντέλου

Τα J χαρακτηριστικά ενός σχεδιασμού D με δύο επίπεδα εμφανίζονται σε συγκεκριμένα σημεία στον πίνακα πληροφορίας X^TX ενός υπό μελέτη γραμμικού μοντέλου (και ενδεχομένως να εμφανίζονται και σε παραπάνω από μία θέσεις), όπου χρησιμοποιούνται οι κλασσικές βωβές μεταβλητές για τη δημιουργία του πίνακα μοντέλου. Για να προκύψει άμεσα αυτό, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι για τη βωβή μεταβλητή – στήλη x_i του X ισχύει ότι x_i x $x_i = \mathbf{1}$ (αφού τα στοιχεία κάθε στήλης είναι +1 και –1) και επίσης ότι x_i x $\mathbf{1} = x_i$ (το «γινομένο» είναι στοιχείο με στοιχείο, όπως δηλαδή ορίζονται τα J χαρακτηριστικά). Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε έναν σχεδιασμό με n γραμμές και τέσσερις στήλες με δύο επίπεδα, και το γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + \varepsilon$$

Ο πίνακας πληροφορίας X^TX του μοντέλου αυτού θα είναι

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & \mathbf{1} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
\mathbf{1} & n & J_1(x_1) & J_1(x_2) & J_1(x_3) & J_1(x_4) \\
x_1 & J_1(x_1) & n & J_2(x_1,x_2) & J_2(x_1,x_3) & J_2(x_1,x_4) \\
x_2 & J_1(x_2) & J_2(x_1,x_2) & n & J_2(x_2,x_3) & J_2(x_2,x_4) \\
x_3 & J_1(x_3) & J_2(x_1,x_3) & J_2(x_2,x_3) & n & J_2(x_3,x_4) \\
x_4 & J_1(x_4) & J_2(x_1,x_4) & J_2(x_2,x_4) & J_2(x_3,x_4) & n \\
\hline
\end{array}$$

Αν με τον ίδιο σχεδιασμό θεωρήσουμε π.χ. το γραμμικό μοντέλο δεύτερης τάξης

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{34} x_3 x_4 + \varepsilon$$

Ο πίνακας πληροφορίας $X^T X$ του μοντέλου αυτού θα είναι

	1	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 x_2$	$x_3 x_4$
1	n	$J_1(x_1)$	$J_1(x_2)$	$J_1(x_3)$	$J_1(x_4)$	$J_2(x_1, x_2)$	$J_2(x_3, x_4)$
x_1	$J_1(x_1)$	n	$J_2(x_1, x_2)$	$J_2(x_1, x_3)$	$J_2(x_1, x_4)$	$J_1(x_2)$	$J_3(x_1,x_3,x_4)$
x_2	$J_1(x_2)$	$J_2(x_1, x_2)$	n	$J_2(x_2, x_3)$	$J_2(x_2, x_4)$	$J_1(x_1)$	$J_3(x_2,x_3,x_4)$
x_3	$J_1(x_3)$	$J_2(x_1, x_3)$	$J_2(x_2, x_3)$	n	$J_2(x_3, x_4)$	$J_3(x_1,x_2,x_3)$	$J_1(x_4)$
x_4	$J_1(x_4)$	$J_2(x_1, x_4)$	$J_2(x_2, x_4)$	$J_2(x_3, x_4)$	n	$J_3(x_1,x_2,x_4)$	$J_1(x_3)$
$x_1 x_2$	$J_2(x_1, x_2)$	$J_1(x_2)$	$J_1(x_1)$	$J_3(x_1,x_2,x_3)$	$J_3(x_1,x_2,x_4)$	n	$J_4(x_1, x_2,x_3,x_4)$
$x_3 x_4$	$J_2(x_3, x_4)$	$J_3(x_1,x_3,x_4)$	$J_3(x_2,x_3,x_4)$	$J_1(x_4)$	$J_1(x_3)$	$J_4(x_1, x_2,x_3,x_4)$	n

Προφανώς, η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας $X^T X$ είναι συνάρτηση των J χαρακτηριστικών του σχεδιασμού D που ορίζει τον πίνακα μοντέλου X. Το γεγονός αυτό, μαζί με τη σχέση που έχουν τα J χαρακτηριστικά με το διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{\alpha}$ θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

2.4 Σχεδιασμοί τριών επιπέδων και γενικευμένα *J* χαρακτηριστικά

Η διαδικασία που περιγράφηκε στις παραγράφους 2.1 και 2.2 μπορεί να γενικευτεί και να χρησιμοποιηθεί σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα. Όπως έχει ήδη παρουσιαστεί, σε παράγοντες με τρία επίπεδα και χρησιμοποιώντας τις κλασσικές βωβές μεταβλητές (trend contrasts), δημιουργούμε για τις επιδράσεις κάθε παράγοντα δύο βωβές μεταβλητές, μία για τη λεγόμενη γραμμική και μία για την τετραγωνική επίδραση. Η γραμμική επίδραση τίθεται ίση με $x_{L_{ij}} = -1, 0, 1$, ενώ η τετραγωνική επίδραση τίθεται ίση με $x_{Q_{ij}} = 1, -2, 1$ παρουσιάζοντας αντίστοιχα τη συμμετοχή του παράγοντα i στο χαμηλό, μεσαίο ή υψηλό του επίπεδο στην εκτέλεση j. Οι συντελεστές των βωβών μεταβλητών για μία αλληλεπίδραση i παραγόντων (η οποία θα αναπαρίσταται με τη χρήση συνολικά 2^i βωβών μεταβλητών, που καλούνται και συνιστώσες της αλληλεπίδρασης), μπορούν να υπολογιστούν από τα γινόμενα των βωβών μεταβλητών των κύριων επιδράσεων που συνθέτουν την εκάστοτε συνιστώσα. Μπορούμε να παρουσιάσουμε τους συντελεστές όλων των βωβών μεταβλητών του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού χρησιμοποιώντας έναν $3^m \times 3^m$ πίνακα $\boldsymbol{C}$, της μορφής

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{C}^1, \boldsymbol{C}^2, \dots, \boldsymbol{C}^m]$$

όπου:

$\boldsymbol{I}$ είναι ο $3^m \times 1$ πίνακας – στήλη με στοιχεία μονάδες,

$\boldsymbol{C}^1$ είναι ο $3^m \times 2m$ πίνακας που περιέχει τις βωβές μεταβλητές για τις q κύριες επιδράσεις (γραμμικές και τετραγωνικές),

$\boldsymbol{C}^2$ είναι ο $3^m \times 2m(m-1)$ πίνακας που περιέχει τις 4 βωβές μεταβλητές που αντιστοιχούν στις συνιστώσες των $m(m-1)/2$ αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων (αυτές οι 4 βωβές μεταβλητές λέγονται και ll (γραμμική x γραμμική), lq (γραμμική x τετραγωνική), ql (τετραγωνική x γραμμική) και qq (τετραγωνική x τετραγωνική) συνιστώσες της αλληλεπίδρασης),

και ούτω καθεξής,

$\boldsymbol{C}^m$ είναι ο $3^m \times 2^m$ πίνακας που περιέχει τις βωβές μεταβλητές που αντιστοιχούν στις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των m παραγόντων.

Για παράδειγμα, στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται ο τρόπος κατασκευής του πίνακα βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C}$ του πλήρους 3^2 παραγοντικού σχεδιασμού με δύο παράγοντες, τους A και B. Η πρώτη στήλη δίνει την κωδικοποίηση που χρησιμοποιούμε για τις γραμμές του σχεδιασμού, όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 1.5.

	3^2		$\boldsymbol{C}$								
$\boldsymbol{i}$	A	B	**I**	$\boldsymbol{C}^1$				$\boldsymbol{C}^2$			
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	0	1	1	-1	1	0	-2	0	2	0	-2
2	0	2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
3	1	0	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
5	1	2	1	0	-2	1	1	0	0	-2	-2
6	2	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
7	2	1	1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				A_l	A_q	B_l	B_q	$A_l \times B_l$	$A_l \times B_q$	$A_q \times B_l$	$A_q \times B_q$

Πίνακας 2.1: Πίνακας βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C}$ του πλήρους 3^2 παραγοντικού σχεδιασμού με δύο παράγοντες A και B

Σημειώνεται ότι οι στήλες του πίνακα $\boldsymbol{C}$ ενός 3^m πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού είναι ορθογώνιες ανά δύο, δηλαδή ο πίνακας $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$ είναι διαγώνιος. Για παράδειγμα, για τον πίνακα $\boldsymbol{C}$ του πλήρους 3^2 παραγοντικού σχεδιασμού έχουμε ότι ο $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$ είναι ο

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού μπορεί να κανονικοποιηθεί ώστε οι στήλες του να έχουν το ίδιο εσωτερικό γινόμενο. Αυτό μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζοντας τον $\boldsymbol{C}$ με έναν $3^m \times 3^m$ διαγώνιο πίνακα κανονικοποίησης $\boldsymbol{N}$, ο οποίος περιέχει στη διαγώνιό του τις τιμές που κανονικοποιούν τις στήλες του $\boldsymbol{C}$. Εύκολα προκύπτει ότι ο πολλαπλασιαστής κάθε στήλης του πίνακα $\boldsymbol{C}^j$, $j = 1, 2, \dots, m$ (και συνεπώς το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα $\boldsymbol{N}$) είναι η ποσότητα $\left(\sqrt{3/2}\right)^l \left(\sqrt{2}/2\right)^q$, όπου l και q είναι ο αριθμός των γραμμικών και τετραγωνικών βωβών μεταβλητών των κύριων επιδράσεων που χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουν συγκεκριμένη στήλη του πίνακα $\boldsymbol{C}^j$. Η κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα των βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C}$ του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού που προκύπτει είναι ο

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2, \dots, \boldsymbol{X}^m]$$

Για τον οποίο, εκ κατασκευής, ισχύει ότι $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N}$.

Για παράδειγμα, για την δημιουργία του κανονικοποιημένου πίνακα $\boldsymbol{X}$, για τον 3^2 πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό του οποίου ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.1, θα χρησιμοποιείται ο διαγώνιος πίνακας

$$\boldsymbol{N} = diag\left(1, \sqrt{3/2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{3/2}, \sqrt{2}/2, 3/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, 1/2\right).$$

Προκύπτει ο κανονικοποιημένος πίνακας $\boldsymbol{X}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T = 9\boldsymbol{I}_9$.

Κατ'επέκταση με τα όσα έχουν παρουσιαστεί στους σχεδιασμούς δύο επιπέδων, κάθε σχεδιασμός D, με n εκτελέσεις και m παραγόντες με τρία επίπεδα, είναι στην πραγματικότητα μία επιλογή n εκτελέσεων από τις 3^m διαφορετικές εκτελέσεις του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού. Κάποιες από τις 3^m εκτελέσεις μπορεί να μην χρησιμοποιούνται ή μπορεί και να επαναλαμβάνονται. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4, το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3^m-1}]^T$ που περιέχει μη αρνητικές ακέραιες τιμές, ορίζει μοναδικά το σχεδιασμό D.

Για τον σχεδιασμό D, με n εκτελέσεις και m παραγόντες με τρία επιπέδα, μπορεί να δημιουργηθεί ο $n \times 3^m$ πίνακας βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C}_D = [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{C}_D^1, \boldsymbol{C}_D^2, \dots, \boldsymbol{C}_D^m]$ και ο αντίστοιχος κανονικοποιημένος πίνακας $\boldsymbol{X}_D = [\boldsymbol{I}, \boldsymbol{X}_D^1, \boldsymbol{X}_D^2, \dots, \boldsymbol{X}_D^m]$ με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που περιγράφηκε παραπάνω. Προφανώς, στον πίνακα $\boldsymbol{C}_D$, μερικές από τις γραμμές του $\boldsymbol{C}$ μπορεί να είναι απούσες και μερικές να επαναλαμβάνονται, αφού ο πίνακας αυτός προκύπτει από το ποιες από τις 3^m εκτελέσεις του πλήρη παραγοντικού σχεδιασμού έχουν επιλεχθεί. Σε αντιστοιχία με την περίπτωση των σχεδιασμών με δύο επιπέδα, ορίζουμε το $3^m \times 1$ διάνυσμα $\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \dots, \mathbf{J}^m]^T$, το οποίο περιλαμβάνει ως στοιχεία το αντίστοιχο άθροισμα των στοιχείων των στηλών του πίνακα βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C}_D$ του σχεδιασμού D. Η γενίκευση λοιπόν των *J* χαρακτηριστικών είναι άμεση και για χρήση σε σχεδιασμούς με τρία επίπεδα. Σημειώνουμε ότι παρόμοια διαδικασία προτάθηκε και από τον Lekivetz (2011) για s επίπεδα. Όπως και στους σχεδιασμούς δύο επίπεδων, τα γενικεύμενα *J* χαρακτηριστικά εκφράζουν τη σύγχιση (aliasing) κάθε συνιστώσας επίδρασης με τη μέση τιμή ή τη σύγχιση των συνιστωσών των επιδράσεων μεταξύ τους. Επίσης, το διάνυσμα $\mathbf{J}$ των γενικευμένων *J* χαρακτηριστικών προκύπτει εύκολα από τη σχέση

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a}$$

όπου $\boldsymbol{C}^T$ είναι ο ανάστροφος πίνακας των βωβών μεταβλητών του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού και $\boldsymbol{a}$ το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων του *D*.

Παράδειγμα 2.3

Ο ακόλουθος Πίνακας 2.2 παρουσιάζει τον πίνακα $\boldsymbol{C}_D$ ενός σχεδιασμού *D* με 11 γραμμές και δύο στήλες, ο οποίος ορίζεται μονοσήμαντα από το διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]^T = [2, 0, 0, 2, 3, 0, 2, 0, 2]^T$).

	D		$\boldsymbol{C}_D$								
$\boldsymbol{i}$	A	B	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{C}_D^1$				$\boldsymbol{C}_D^2$			
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
3	1	0	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
3	1	0	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
6	2	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	2	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 2.2: Ο πίνακας βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C_D}$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{J}$ του *D*

Από τον πίνακα αυτό, εύκολα προκύπτει και το αντίστοιχο διάνυσμα $\mathbf{J}$

	D		$\boldsymbol{C}_D$								
$\boldsymbol{i}$	A	B	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{C}_D^1$				$\boldsymbol{C}_D^2$			
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
3	1	0	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
3	1	0	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
6	2	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	2	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				A_l	A_q	B_l	B_q	$A_l \times B_l$	$A_l \times B_q$	$A_q \times B_l$	$A_q \times B_q$
			n	$\mathbf{J}^1$				$\mathbf{J}^2$			
$\mathbf{J}^T$			11	2	-4	-4	2	2	2	2	14

Άρα, το διάνυσμα $\mathbf{J}$ των γενικευμένων J χαρακτηριστικών είναι το

$$\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2\ ]^T = [11, 2, -4, -4, 2, 2, 2, 2, 14\ ]^T.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε από τη σχέση $\mathbf{J} = \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a}$, αφού

$$\boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

□

Το ακόλουθο θεώρημα, παρουσιάζει τον τρόπο που από συγκεκριμένο διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σχεδιασμό που θα παράγει αυτό το διάνυσμα, γενικεύοντας το γνωστό αποτέλεσμα που υπάρχει στους σχεδιασμούς δύο επιπέδων.

Θεώρημα 2.1 *Έστω* $\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \dots, \mathbf{J}^m]^T$ *δοθέν* $3^m \times 1$ *διάνυσμα. Ο σχεδιασμός D που θα έχει το* $\mathbf{J}$ *ως διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών θα έχει διάνυσμα πολλαπλοτήτων* $\boldsymbol{a}$ *που προκύπτει από τη σχέση*

$$\boldsymbol{a} = 3^{-m} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \mathbf{J} \tag{2.1}$$

*όπου $\boldsymbol{C}$ ο $3^m \times 3^m$ πίνακας με τους συντελεστές όλων των βωβών μεταβλητών του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού και **N** ο διαγώνιος πίνακας κανονικοποίησης.*

Απόδειξη

Από τη σχέση

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a}$$

προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{N}^T \cdot \mathbf{J} = \boldsymbol{N}^T \cdot \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a}$$

και εφόσον $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^T$

$$\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{J} = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N})^T \cdot \boldsymbol{a}.$$

Πολλαπλάσιάζοντας τώρα με $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N}$ προκύπτει ότι

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N}) \cdot (\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{J}) = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N}) \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N})^T \cdot \boldsymbol{a}$$

ή, αφού $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N}$**,**

$$(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N}) \cdot (\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{J}) = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{a}.$$

Όμως, $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} = 3^m I_{3^m}$ επομένως

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \mathbf{J} = 3^m \boldsymbol{I}_{3^m} \cdot \boldsymbol{a}$$

και τελικά

$$\boldsymbol{a} = 3^{-m} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \mathbf{J}$$

□

Η σχέση του Θεωρήματος 2.1 θα χρησιμοποιηθεί στο κεφάλαιο 4 για την κατασκευή σχεδιασμών με γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση. Σημειώνεται ότι δεν οδηγούν όλα τα διανύσματα *J* στην κατασκευή κάποιου σχεδιασμού, όπως φαίνεται και στο Παράδειγμα 2.4.

Παράδειγμα 2.4

Ζητείται να κατασκευαστεί ένας σχεδιασμός *D* με *n* = 12 γραμμές, με δύο στήλες τριών επιπεδων και με διάνυσμα γενικευμένων *J* χαρακτηριστικών το $\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2\ ]^T = [12, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3\ ]^T$. Από τη σχέση (2.1) προκύπτει ότι το διάνυσμα πολλαπλοτήτων του *D* θα προκύψει από τον πίνακα $\boldsymbol{C}$ του πλήρους 3^2 παραγοντικού σχεδιασμού (δίνεται στον Πίνακα 2.1), τον διαγώνιο πίνακα

$$\boldsymbol{N} = diag\left(1, \sqrt{3/2}\,, \sqrt{2}/2\,, \sqrt{3/2}\,, \sqrt{2}/2\,, 3/2\,, \sqrt{3}/2\,, \sqrt{3}/2\,, 1/2\right)$$

και το διάνυσμα $\mathbf{J}$ που δίνεται. Προκύπτει το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\frac{15}{9}, \frac{15}{9}, \frac{6}{9}, \frac{15}{9}, \frac{15}{9}, \frac{6}{9}, \frac{6}{9}, \frac{6}{9}, \frac{24}{9}\right]^T$$

το οποίο προφανώς δεν είναι αποδεκτό διάνυσμα πολλαπλοτήτων, αφού τα στοιχεία του δεν είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Συνεπώς δεν μπορεί να κατασκευαστεί σχεδιασμός με διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών το δοθέν διάνυσμα. Αν όμως ζητούσαμε την κατασκευή σχεδιασμού με διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών το διάνυσμα $\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2\ ]^T = [12, 0, 0, 0, 0, 3, 3, -3, -3\ ]^T$, από τη σχέση (2.1) προκύπτει το διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{\alpha} = [2, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2]^T$.

Για επιβεβαίωση, δίνεται παρακάτω ο σχεδιασμός που προκύπτει από αυτό το διάνυσμα πολλαπλοτήτων με υπολογισμένα τα γενικευμένα J χαρακτηριστικά του από τον πίνακα $\boldsymbol{C}_D$.

	D		$\boldsymbol{C}_D$								
$\boldsymbol{i}$	A	B	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{C}_D^1$				$\boldsymbol{C}_D^2$			
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
0	0	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	0	1	1	-1	1	0	-2	0	2	0	-2
1	0	1	1	-1	1	0	-2	0	2	0	-2
3	1	0	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
4	1	1	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
5	1	2	1	0	-2	1	1	0	0	-2	-2
5	1	2	1	0	-2	1	1	0	0	-2	-2
6	2	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
7	2	1	1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				A_l	A_q	B_l	B_q	$A_l \times B_l$	$A_l \times B_q$	$A_q \times B_l$	$A_q \times B_q$
			n	$\mathbf{J}^1$				$\mathbf{J}^2$			
$\mathbf{J}^T$			12	0	0	0	0	3	3	-3	-3

□

2.5 Ελάχιστη απόκλιση

Τα J χαρακτηριστικά και τα γενικευμένα J χαρακτηριστικά ενός σχεδιασμού ποσοτικοποιούν, όπως είδαμε, τη σύγχιση (aliasing) κάθε συνιστώσας αλληλεπίδρασης με τη μέση τιμή ή τη σύγχιση των συνιστωσών των επιδράσεων που συνθέτουν την αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Οι τιμές αυτές λοιπόν μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να αναδείξουν σχεδιασμούς που έχουν μικρές ή και καθόλου συσχετίσεις μεταξύ των παραγοντικών επιδράσεων. Ένα διαδεδομένο κριτήριο που έχει θεσπιστεί για το σκοπό αυτό είναι το κριτήριο της ελάχιστης απόκλισης (minimum aberration). Η χρήση του κριτηρίου αυτού βασίζεται στην παρατήρηση των τιμών ενός διανύσματος που προκύπτει από το σχεδιασμό και λέγεται «γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης» (Generalized Wordlength Pattern) και συμβολίζεται με *GWP*.

Σε κάθε σχεδιασμό D λοιπόν, με n εκτελέσεις και m παράγοντες s επιπέδων, αντιστοιχίζεται το ακόλουθο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης του (GWP)

$$GWP(D) = \left\{A_1^g(D), \dots, A_m^g(D)\right\}.$$

Κάθε τιμή $A_i^g(D)$, $i = 1,2, \dots, m$ μετρά τη συνολική σύγχιση (aliasing) όλων των i αλληλεπιδράσεων με τη μέση τιμή και, ως επακόλουθο, ιδανική τιμή για κάθε ποσότητα $A_i(D)$ είναι η τιμή 0, η οποία και σημαίνει μηδενική σύγχιση των i αλληλεπιδράσεων με τη μέση τιμή.

Για τον υπολογισμό των τιμών του διανύσματος υπάρχουν δύο διαφορετικές τεχνικές (που καταλήγουν στο ίδιο διάνυσμα). Η πρώτη τεχνική βασίζεται στη χρήση θεωρίας κωδίκων και παρουσιάστηκε από τους Ma and Fang (2001). Οι υπολογισμοί βασίζονται στη χρήση της κατανομής αποστάσεων του σχεδιασμού και στα πολυώνυμα Krawtchouk (δείτε και MacWilliams and Sloane (1977), Roman (1992) και Van Lint (1999)).

Η δεύτερη τεχνική, η οποία και χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή, προτάθηκε από τους Xu and Wu το 2001 και βασίζεται στις βωβές μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για κάθε επίδραση. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιήθηκε σε σχεδιασμούς τριών επιπέδων από τους Xu, Cheng and Wu το 2004, οι οποίοι έδειξαν ότι τα στοιχεία του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης ενός σχεδιασμού D, μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τους συντελεστές των στηλών των αντίστοιχων κανονικοποιημένων πινάκων $\mathbf{X}_D^j$, με $j = 1, 2, \dots, m$ του D, όπως ορίστηκαν στην παράγραφο 2.4. Εάν ο πίνακας $\mathbf{X}_D^j$ περιέχει c στήλες, τότε το j στοιχείο του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης υπολογίζεται από τη σχέση

$$A_j^g(D) = n^{-2} \sum_{k=1}^{c} \left| \sum_{i=1}^{n} X_{D_{ik}}^j \right|^2 .$$

Προφανώς, όλα τα στοιχεία του διανύσματος *GWP* είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Έστω τώρα ότι υπάρχουν δύο σχεδιασμοί με *n* γραμμές και *m* στήλες, οι D_1 και D_2, και έστω j ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $A_j^g(D_1) \neq A_j^g(D_2)$ στο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης τους. Αν ισχύει $A_j^g(D_1) < A_j^g(D_2)$, τότε λέμε ότι ο σχεδιασμός D_1 έχει μικρότερη γενικευμένη απόκλιση από τον D_2 και θεωρείται προτιμότερος με βάση το κριτήριο της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης. Ένας σχεδιασμός D έχει γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση (Generalized Minimum Aberration) αν δεν υπάρχει σχεδιασμός αντίστοιχων διαστάσεων, που να έχει μικρότερη γενικευμένη απόκλιση από αυτόν.

Είναι προφανές ότι οι τιμές του $A_j^g(D)$ επηρεάζονται από το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης του $\mathbf{X}_D^j$ ή, αντιστοίχως, από το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του $\mathbf{C}_D^j$, τα οποία είναι στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{J}^j$ των γενικευμένων *J* χαρακτηριστικών. Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι ο έλεγχος των τιμών του διανύσματος $\mathbf{J}^j$, και πιο συγκεκριμένα η ελαχιστοποίηση των τιμών των γενικευμένων *J* χαρακτηριστικών που το αποτελούν, μπορεί να οδηγήσει σε ελάχιστη τιμή τις ποσότητες $A_j^g(D)$ και ως εκ τούτου τη δημιουργία σχηματισμών με ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση. Υπενθυμίζεται ότι η ποσότητα $A_j^g(D)$ έχει σαν ελάχιστη τιμή το μηδέν. Η ελάχιστη τιμή αυτή επιτυγχάνεται όταν όλα τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{J}^j$ είναι ίσα με το μηδέν, δηλαδή όταν κάθε αλληλεπίδραση j τάξης δεν συγχέεται με τη μέση τιμή ή διαφορετικά, έχει «ασυσχέτιστους γονείς».

Η κατασκευή σχεδιασμών με γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση και η χρήση των *J* χαρακτηριστικών έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας τα τελευταία χρόνια. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των Deng and Tang (1999), Tang (2001), Tang and Deng (2003), Stufken and Tang (2007), Bulutoglu and Ryan (2015) και Evangelaras (2015). Όλες αυτές οι εργασίες επικεντρώθηκαν στην μελέτη σχεδιασμών με δύο επίπεδα. Στο κεφάλαιο 4, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου, θα κατασκευαστούν σχεδιασμοί τριών επιπέδων με γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση.

Ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία σχεδιασμών για αυτό το πρόβλημα αποτελούν οι ορθογώνιοι σχηματισμοί που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 1.3 του πρώτου κεφαλαίου και ιδιαίτερα αυτοί με ισχύ $t \geq 2$. Για τους σχεδιασμούς αυτούς, είναι γνωστό ότι κάποιες από τις τιμές του *GWP* έχουν άμεση σχέση με την ισχύ του σχηματισμού. Συγκεκριμένα, το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης ενός ορθογώνιου σχηματισμου $OA(n, m, s, t)$ θα έχει $A_j^g(D) = 0$ για κάθε $i \leq t$. Γενικά, αν ένας σχεδιασμός έχει $A_1^g(D) = 0$ τότε είναι ισορροπημένος, δηλαδή σε κάθε στήλη τα επίπεδα εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα. Αν έχει και $A_2^g(D) = 0$, τότε είναι και ορθογώνιος δηλαδή, σε κάθε επιλογή δύο στηλών, όλοι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των επιπέδων θα εμφανίζονται με την ίδια συχνότητα, κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2.5

Θα υπολογίσουμε την τιμή του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης για τους παρακάτω δύο σχεδιασμούς D1 και D2, με 18 γραμμές και 3 στήλες με τρία επίπεδα.

	D1				D2		
	A	B	C		A	B	C
1	0	0	0	**1**	0	0	0
2	0	0	1	**2**	0	1	1
3	0	1	1	**3**	0	2	1
4	0	1	2	**4**	0	0	2
5	0	2	2	**5**	0	1	2
6	0	2	0	**6**	0	2	0
7	1	0	1	**7**	1	0	1
8	1	0	1	**8**	1	1	1
9	1	1	2	**9**	1	2	2
10	1	1	2	**10**	1	0	2
11	1	2	0	**11**	1	1	0
12	1	2	0	**12**	1	2	0
13	2	0	1	**13**	2	0	1
14	2	0	2	**14**	2	1	2
15	2	1	1	**15**	2	2	1
16	2	1	0	**16**	2	0	0
17	2	2	0	**17**	2	1	0
18	2	2	2	**18**	2	2	2

Ακολουθώντας την αντικατάσταση των βωβών μεταβλητών στην περίπτωση των τριών επιπέδων, δηλαδή εφαρμόζοντας μία γραμμική και μία τετραγωνική συνιστώσα για κάθε κύρια επίδραση (με τις τιμές που έχουν παρουσιαστεί), δημιουργούμε τον ακόλουθο πίνακα $\boldsymbol{C}_{D1}$ για το σχεδιασμό D1 (οι στήλες έχουν εισαχθεί με την εξής σειρά: I, A_l, A_q, B_l, B_q, C_l, C_q, A_lB_l, A_lB_q, A_qB_l, A_qB_q, A_lC_l, A_lC_q, A_qC_l, A_qC_q, B_lC_l, B_lC_q, B_qC_l, B_qC_q, $A_lB_lC_l$, $A_lB_lC_q$, $A_lB_qC_l$, $A_lB_qC_q$, $A_qB_lC_l$, $A_qB_lC_q$, $A_qB_qC_l$, $A_qB_qC_q$). Από το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης θα προκύψουν τα γενικευμένα *J* χαρακτηριστικά.

Για να υπολογίσουμε το *GWP* μέσω της σχέσης

$$A_j^g(D) = n^{-2} \sum_{k=1}^{c} \left| \sum_{i=1}^{n} X_{D_{ik}}^{j} \right|^2$$

θα πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά την ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} X_{D_{ik}}^{j}$. Η ποσότητα αυτή προκύπτει εύκολα αν πολλαπλασιάσουμε την κάθε τιμή γενικευμένου *J* χαρακτηριστικού, με την ποσότητα κανονικοποίησης $\left(\sqrt{3/2}\right)^l \left(\sqrt{2}/2\right)^q$ της στήλης που αφορά.

Έχουμε λοιπόν ότι ο πίνακας $\boldsymbol{C}_{D1}$ είναι ο

1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	0	-2	1	-1	-1	1	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	-2	0	2	0	2	0	-2
1	-1	1	0	-2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	0	0	4	0	0	0	-4	0	0	0	4
1	-1	1	0	-2	1	1	0	2	0	-2	-1	-1	1	1	0	0	-2	-2	0	0	2	2	0	0	-2	-2
1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	0	-2	-1	1	0	-2	0	0	2	-2	0	0	0	4	0	2	0	-2	0	0	0	0	0	-4	0	4
1	0	-2	-1	1	0	-2	0	0	2	-2	0	0	0	4	0	2	0	-2	0	0	0	0	0	-4	0	4
1	0	-2	0	-2	1	1	0	0	0	4	0	0	-2	-2	0	0	-2	-2	0	0	0	0	0	0	4	4
1	0	-2	0	-2	1	1	0	0	0	4	0	0	-2	-2	0	0	-2	-2	0	0	0	0	0	0	4	4
1	0	-2	1	1	-1	1	0	0	-2	-2	0	0	2	-2	-1	1	-1	1	0	0	0	0	2	-2	2	-2
1	0	-2	1	1	-1	1	0	0	-2	-2	0	0	2	-2	-1	1	-1	1	0	0	0	0	2	-2	2	-2
1	1	1	-1	1	0	-2	-1	1	-1	1	0	-2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2
1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	-2	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	4
1	1	1	0	-2	-1	1	0	-2	0	-2	-1	1	-1	1	0	0	2	-2	0	0	2	-2	0	0	2	-2
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

και το διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών είναι το $\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3\ ]^T$ με

$n = 18$

$\mathbf{J}^1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0\ ]^T$.

$\mathbf{J}^2 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 12, -6, 0\ ]^T$ και

$\mathbf{J}^3 = [-2, 0, 6, 0, 4, -6, 12, 18\ ]^T$.

Συνεπώς

$$GWP(D1) = \{A_1^g(D1), A_2^g(D1), A_3^g(D1)\} = \{0, 0.444, 0.555\}.$$

Παρόμοια, για το σχεδιασμό D2, έχουμε ότι διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών είναι το $\mathbf{J} = [n, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3\ ]^T$ με

$n = 18$

$\mathbf{J}^1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0\ ]^T$.

$\mathbf{J}^2 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\ ]^T$ και

$\mathbf{J}^3 = [3, 3, 3, -9, 3, -9, -9, -9\ ]^T$.

Προκύπτει

$$GWP(D2) = \{A_1^g(D2), A_2^g(D2), A_3^g(D2)\} = \{0, 0, 0.5\}. \qquad \square$$

Παρατηρώντας τα γενικευμενα διανύσματα μήκους λέξης των δύο σχεδιασμών του Παραδείγματος 2.5, προκύπτει ότι και στα δύο GWP έχουμε $A_1^g(D) = 0$ (αφού $\mathbf{J}^1 = 0$ και στους δύο σχεδιασμούς) και συνεπώς οι δύο σχεδιασμοί είναι ισορροπημενοι (γεγονός που προκύπτει και από την απλή παρατήρηση των επιπέδων σε κάθε στήλη). Στον πρώτο σχεδιασμό, έχουμε $A_2^g(D1) = 0.444$ και συνεπώς ο D1 δεν είναι ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ t = 2. Αντιθέτως, στο δεύτερο σχεδιασμό, έχουμε $A_2^g(D2) = 0$ και συνεπώς ο D2 είναι ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ t = 2 και συνεπώς οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων θα είναι ασυσχέτιστες στο μοντέλο πρώτης τάξης. Δεν έχει όμως ισχύ t = 3, αφού $A_3^g(D2) = 0.5 > 0$. Από τους δύο αυτούς «ανταγωνιστικούς» σχεδιασμούς, ο D2 έχει μικρότερη γενικευμένη απόκλιση, αφού $A_1^g(D1) = A_1^g(D2)$ και $A_2^g(D1) > A_2^g(D2)$. Δεν γνωρίζουμε όμως αν υπάρχει κάποιος άλλος σχεδιασμός με 18 γραμμές και 3 στήλες τριών επιπέδων που να έχει μικρότερη γενικευμένη απόκλιση από τον D2. Στο κεφάλαιο 4 θα παρουσιαστούν μέθοδοι κατασκευής σχεδιασμών με τρία επίπεδα και με ελάχιστη γενικευμένη απόκλιση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βέλτιστη διαμέριση των θεραπειών ορθογώνιων σχηματισμών δύο επιπέδων σε δύο και τέσσερις ομάδες (blocks)

Κατά την εκτέλεση ενός παραγοντικού πειράματος, συχνά είναι αρκετά δύσκολο να πραγματοποιηθούν όλες οι σχεδιασμένες εκτελέσεις του κάτω από τις ίδιες ομοιογενείς συνθήκες. Ένα πείραμα ενδέχεται να παρουσιάσει διαφορετικά αποτελέσματα αν οι συνθήκες που θεωρούνται αμετάβλητες – και συνεπώς δεν ελέγχονται ως παράγοντες – δεν παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια του πειραματισμού. Σε περιπτώσεις που κάτι τέτοιο είναι γνωστό ότι συμβαίνει, ή όταν υπάρχει ισχυρή υποψία ότι μπορεί να συμβεί, συχνά χρησιμοποιείται μια τεχνική «ομαδοποίησης» των εκτελέσεων του πειράματος ώστε, κάθε ομάδα εκτελέσεων, να πραγματοποιείται κάτω από όσο πιο ομογενείς συνθήκες γίνεται. Ο έλεγχος ύπαρξης διαφορών μεταξύ των ομάδων επιτυγχάνεται με τη μελέτη των επιδράσεων μιας «βοηθητικής» μεταβλητής που εισάγεται για το σκοπό αυτό, η οποία καλείται μεταβλητή ομαδοποίησης, ή μεταβλητή πλαισίου ή block μεταβλητή ή block παράγοντας. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως «blocking» και οι ομάδες πειραματικών εκτελέσεων, ως blocks. Για την ανάλυση των δεδομένων, θεωρείται ότι ο block παράγοντας δεν αλληλεπιδρά με τους παράγοντες που μελετώνται στο πείραμα (οι οποίοι στην παρούσα διατριβή καλούνται και παράγοντες θεραπείας, καθώς οι συνδυασμοί των επιπέδων τους καθορίζουν τις πειραματικές συνθήκες που εξετάζονται στο πείραμα).

Η βέλτιστη τοποθέτηση των εκτελέσεων ορθογώνιων σχηματισμών σε ομάδες (blocks) έχει μελετηθεί αρκετά στη διεθνή βιβλιογραφία. Ο Bisgaard (1994) όρισε συνθήκες, βασισμένες στη διακριτική ικανότητα σχεδιασμών δύο επιπέδων, με σκοπό την ελαχιστοποίηση της σύγχισης των επιδράσεων. Οι Sun, Wu and Chen (1997) παρουσίασαν μια μεθοδολογία για τη βέλτιστη ομαδοποίηση εκτελέσεων σε πλήρεις 2^m και σε 2^{m-p} απλούς (regular) κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς. Οι Chen and Wu (2002) πρότειναν βέλτιστα blocks εκτελέσεων για απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς δύο και τριών επιπέδων, ενώ οι Ai, Xu and Wu (2010) εξέτασαν συγχρόνως την εφαρμογή τεχνικών blocking και αναδίπλωσης (foldover), σε απλούς κλασματικούς σχεδιασμούς.

Εκτός των προαναφερθέντων άρθρων που έχουν ως επίκεντρο έρευνας τους απλούς κλασματικούς σχεδιασμούς, βέλτιστα blocks εκτελέσεων σε σύνθετους (non regular) σχεδιασμούς έχουν προταθεί από τους Cheng, Li and Ye (2004). Επιπροσθέτως, το ίδιο πρόβλημα μελετήθηκε και στις εργασίες των Cheng and Tang (2003), των Das, Dey and Midha (2003), των Ai and Zhang (2004) και του Butler (2006). Οι Schoen, Sartono and Goos (2013) μελέτησαν το πρόβλημα της εύρεσης βέλτιστων blocks εκτελέσεων και για μεικτούς σχεδιασμούς (δηλαδή σχεδιασμούς στους οποίους οι παράγοντες δεν έχουν τον ίδιο αριθμό επιπέδων) και παρουσίασαν νέα κριτήρια επιλογής. Ο Lin (2014), πρότεινε blocks εκτελέσεων ιδανικά για την μελέτη ποιοτικών και ποσοτικών παραγόντων (είτε με κοινό ή και με διαφορετικό πλήθος επιπέδων για τον καθένα), ενώ οι Sartono, Schoen and Goos (2015) χρησιμοποίησαν υπολογιστικές τεχνικές για την ομαδοποίηση των εκτελέσεων σχεδιασμών σε ορθογώνια blocks, δηλαδή με τέτοιο τρόπο ώστε η εκτίμηση της επίδρασης της block μεταβλητής να είναι ασυσχέτιστη με τις εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων των παραγόντων.

Οι περισσότερες εκ των μελετών στο αντικείμενο χρησιμοποιούν διάφορες εκδοχές του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης με σκοπό να αναγνωρίσουν βέλτιστους τρόπους ομαδοποίησης των εκτελέσεων. Στο παρόν κεφάλαιο, θα εκμεταλευτούμε τις ιδιότητες των ορθογώνιων σχηματισμών για να χωριστούν οι εκτελέσεις του σχεδιασμού σε ισομεγέθεις ομάδες. Στόχος είναι οι εκτιμήσεις του παράγοντα block να είναι ασυσχέτιστες με τις εκτιμήσεις όλων των κύριων επιδράσεων (στο μοντέλο πρώτης τάξης) και επιπλέον, οι παράμετροι ενός γραμμικού μοντέλου δεύτερης τάξης να εκτιμώνται με τη μέγιστη δυνατή D – αποδοτικότητα. Υπενθυμίζεται ότι ο block παράγοντας δεν αλληλεπιδρά με τους παράγοντες που μελετώνται στο πείραμα και συνεπώς, αυτές οι αλληλεπιδράσεις δεν συμπεριλαμβάνονται στο γραμμικό μοντέλο.

3.1 Διαμέριση εκτελέσεων ορθογώνιων σχηματισμών σε δύο ισομεγέθεις ομάδες

Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με ορθογώνιους σχηματισμούς δύο επιπέδων με ισχύ t τουλάχιστον 2, χρησιμοποιώντας την κλασσική κωδικοποίηση –1 και +1 για το χαμηλό και το υψηλό επίπεδο των παραγόντων που εξετάζονται, αντίστοιχα. Σε κάθε ορθογώνιο σχηματισμό $OA(n, m, 2, t)$, οι n εκτελέσεις του σχηματισμού μπορούν να χωριστούν σε δύο ισομεγέθη blocks μεγέθους $n/2$, με βάση τα δύο διακριτά σύμβολα οποιασδήποτε στήλης από τις m που υπάρχουν στο σχεδιασμό, δεδομένου ότι κάθε στήλη είναι ισορροπημένη. Επομένως, οποιαδήποτε στήλη του σχηματισμού μπορεί να παίξει το ρόλο του παράγοντα block σε ένα πείραμα, αφήνοντας τις υπόλοιπες $m-1$ στήλες ελεύθερες για τη χρησιμοποίησή τους σε παράγοντες (ή σε παράγοντες θεραπείας). Το γεγονός αυτό παρατηρήθηκε από τους Cheng, Li and Ye (2004) και από τους Schoen, Sartono and Goos (2013), οι οποίοι επισήμαναν ότι για τη μελέτη $k=m-1$ παραγόντων δύο επιπέδων σε δύο blocks μεγέθους $n/2$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε ορθογώνιος σχηματισμός $OA(n,m,2,t)$.

Με βάση τα όσα έχουν ειπωθεί και τη χρήση των βωβών μεταβλητών δύο επιπέδων, το ακόλουθο μοντέλο κύριων επιδράσεων

$$y=\beta_0+\beta_b x_b+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i+\varepsilon, \tag{3.1}$$

(όπου x_b είναι η βωβή μεταβλητή του παράγοντα block και x_i, με $i=1,2,\dots,k$ είναι οι βωβές μεταβλητές των κύριων επιδράσεων), μπορεί να εκτιμηθεί πλήρως, αφού ο αντίστοιχος πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ είναι διαγώνιος (η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας είναι ίση με n^{m+1}) και επομένως οι εκτιμήσεις των $m+1$ παραμέτρων υπολογίζονται με τη μέγιστη απόδοση. Τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.1) έρχονται σε άμεση αντιστοιχία με τα J χαρακτηριστικά των ορθογώνιων σχηματισμών δύο επιπέδων, όπως παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ακολουθώντας την περιγραφόμενη προσέγγιση και θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι τα επίπεδα της πρώτης στήλης d_1 του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιείται ορίζουν τις 2 ομάδες εκτελέσεων (παράγοντας block) και ότι οι υπόλοιπες στήλες $d_2,d_3,\dots,d_m$ χρησιμοποιούνται για τους παράγοντες, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.1) των κύριων επιδράσεων είναι ο

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} I & x_b & x_1 & \cdots & x_k \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ x_b \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{array} & \begin{pmatrix} n & J_1(d_1) & J_1(d_2) & \dots & J_1(d_m) \\ J_1(d_1) & n & J_2(d_1,d_2) & \dots & J_2(d_1,d_m) \\ J_1(d_2) & J_2(d_2,d_1) & n & \dots & J_2(d_2,d_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_1(d_m) & J_2(d_m,d_1) & J_2(d_m,d_2) & \dots & n \end{pmatrix} \end{array}$$

ο οποίος είναι ουσιαστικά ο διαγώνιος πίνακας $n\cdot I_{m+1}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μορφή του πίνακα πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ παραμένει ίδια, ανεξάρτητα από την επιλογή στήλης που θα παίξει το ρόλο της block μεταβλητής. Γίνεται αντιληπτό ότι αν το ερευνητικό ενδιαφέρον κινηθεί σε πιο σύνθετα μοντέλα, τα οποία θα περιλαμβάνουν για παράδειγμα και αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης των παραγόντων, τότε η δυσκολία εύρεσης της στήλης του σχεδιασμού που θα χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία των ομάδων εκτελέσεων αυξάνεται.

Συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι οι αλληλεπιδράσεις δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης είναι αμελητέες, το μοντέλο δεύτερης τάξης που είναι χρήσιμο να μελετηθεί για το πρόβλημα αυτό, είναι το

$$y = \beta_0 + \beta_b x_b + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2) μπορεί να επηρεαστεί από την επιλογή της στήλης που θα χρησιμοποιηθεί ως block μεταβλητή, και συνεπώς είναι χρήσιμη η ανάπτυξη μεθοδολογίας για τη βέλτιστη λύση. Σε κάθε περίπτωση, ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.2) μπορεί και πάλι να γραφεί με τη χρήση των J χαρακτηριστικών του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιείται. Τοποθετώντας τις $m = k + 1$ στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού ως $\{B, 1, 2, \dots, k\}$ (όπου B υποδηλώνει τη στήλη block και οι υπόλοιπες $m - 1$ στήλες που παρουσιάζονται με τους αριθμούς 1 έως k, δηλώνουν τους παράγοντες θεραπείας), και δεδομένου ότι $J_1(s) = J_2(s) = 0$, προκύπτει ότι ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.2) είναι ο

$$\begin{array}{c} \\ I \\ x_b \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ \vdots \\ x_{k-1}x_k \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} I & x_b & x_1 & \cdots & x_k & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_{k-1}x_k \end{array} \\
\begin{pmatrix}
n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & n & 0 & \cdots & 0 & J_3(B,1,2) & J_3(B,1,3) & \cdots & J_3(B,k-1,k) \\
0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & J_3(1,k-1,k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & n & J_3(1,2,k) & J_3(1,3,k) & \cdots & 0 \\
0 & J_3(B,1,2) & 0 & \cdots & J_3(1,2,k) & n & 0 & \cdots & J_4(1,2,k-1,k) \\
0 & J_3(B,1,3) & 0 & \cdots & J_3(1,3,k) & 0 & n & \cdots & J_4(1,3,k-1,k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & J_3(B,k-1,k) & J_3(1,k-1,k) & \cdots & 0 & J_4(1,2,k-1,k) & J_4(1,3,k-1,k) & \cdots & n
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Προφανώς, η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.2) βρίσκεται σε άμεση εξάρτηση από τις τιμές των J χαρακτηριστικών του σχηματισμού που χρησιμοποιείται, αφού αυτές οι τιμές εμφανίζονται σε συγκεκριμένες θέσεις του πίνακα. Επιπλέον, οι τιμές αυτές των J χαρακτηριστικών εξαρτώνται από την επιλογή της στήλης του σχηματισμού που θα παίξει το ρόλο της στήλης block αφού, όποια στήλη επιλεχθεί για το ρόλο αυτό, δε θα συμμετάσχει στη δημιουργία αλληλεπίδρασης δύο παραγόντων στο μοντέλο (3.2). Η μέγιστη τιμή της ορίζουσας επιτυγχάνεται όταν ο πίνακας πληροφορίας είναι διαγώνιος, δηλαδή όταν τα μη διαγώνια στοιχεία του, δηλαδή όλες οι τιμές των J χαρακτηριστικών που εμφανίζονται, είναι ίσες με το μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, οι παράμετροι του μοντέλου (3.2) εκτιμώνται με τη μέγιστη δυνατή D–αποδοτικότητα (μονάδα), γεγονός που συμβαίνει όταν ο ορθογώνιος σχηματισμός που χρησιμοποιείται έχει ισχύ $t \geq 4$.

Σε αντίθεση λοιπόν με τους ορθογώνιους σχηματισμούς με ισχύ $t \geq 4$, για τις περιπτώσεις με ισχύ $t = 2$ και $t = 3$, η μέγιστη δυνατή D–αποδοτικότητα δεν επιτυγχάνεται εξ ορισμού. Το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής της στήλης block, για αυτές τις περιπτώσεις, αποτελεί τμήμα της μελέτης του παρόντος κεφαλαίου. Μέσω της σωστής επιλογής της στήλης block, μπορεί να επιτευχθεί η μεγαλύτερη δυνατή αποδοτικότητα. Η μελέτη των J χαρακτηριστικών του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιείται, μπορεί να βοηθήσει στην σωστή επιλογή της στήλης block, καθώς αυτές οι τιμές εμφανίζονται στον πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2) και επηρεάζουν την τιμή της ορίζουσάς του. Οι Deng and Tang (1999) απέδειξαν ότι οι τιμές των $J_m(S)$ ενός ορθογώνιου σχηματισμού n εκτελέσεων με παράγοντες με δύο επίπεδα είναι πολλαπλάσια του 4. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι όταν οι εκτελέσεις n του ορθογώνιου σχηματισμού είναι πολλαπλάσιο του 8, τότε και οι τιμές των $J_m(S)$ είναι πολλαπλάσια του 8 ενώ, όταν οι εκτελέσεις n του ορθογώνιου σχηματισμού δεν είναι πολλαπλάσιες του 8, τότε οι τιμές των $J_m(S)$ είναι πολλαπλάσιες του 8 για $m = 4w + 1$ και για $m = 4w + 2$, ενώ δεν είναι πολλαπλάσιες του 8 για $m = 4w + 3$ και $m = 4w + 4$, με $w = 0, 1, 2, \ldots$. Τα χρήσιμα αυτά αποτελέσματα που καθορίζουν τις τιμές των J χαρακτηριστικών, αποτελούν βασικό εργαλείο της μεθοδολογίας που ακολουθεί.

Οι ακόλουθες προτάσεις παρουσιάζουν την σχέση ανάμεσα στην ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2) με τις τιμές των J χαρακτηριστικών ενός ορθογώνιου σχηματισμού, όταν οι στήλες είναι $m = 3$ και $m = 4$ αντιστοίχως.

Πρόταση 3.1 *Έστω ότι χρησιμοποιείται ένας ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με $m = 3$ στήλες και ισχύ $t \geq 2$, για τη μελέτη $k = 2$ παραγόντων θεραπείας σε δύο blocks εκτελέσεων μεγέθους $n/2$. Έστω ότι με B δηλώνεται η στήλη του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιείται σαν στήλη block και με ΄1΄, ΄2΄ δηλώνονται οι υπόλοιπες δύο στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιούνται για τους δύο παράγοντες θεραπείας. Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου* (3.2), *ισούται με*

$$|\boldsymbol{M}| = n^3\left(n^2 - J_3^2(B, 1, 2)\right).$$

Απόδειξη

Αφού ο ορθογώνιος σχηματισμός είναι ισχύος $t \geq 2$, για τους δύο παράγοντες θεραπείας ΄1΄, ΄2΄, είναι γνωστό ότι $J_1 = 0,\ J_2 = 0$. Ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου

$$y = \beta_0 + \beta_b x_b + \sum_{i=1}^{2} \beta_i x_i + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

είναι ο ακόλουθος

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} I & x_b & x_1 & x_2 & x_1x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ x_b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & J_3(B,1,2) \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & J_3(B,1,2) & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \end{array}$$

για τον οποίο προκύπτει μέσω πράξεων ότι έχει ορίζουσα ίση με

$$|\boldsymbol{M}| = n^3\left(n^2 - J_3^2(B,1,2)\right). \qquad \square$$

Πρόταση 3.2 *Έστω ότι χρησιμοποιείται ένας ορθογώνιος σχηματισμός* n *εκτελέσεων με* $m = 4$ *στήλες και ισχύ* $t \geq 2$, *για τη μελέτη* $k = 3$ *παραγόντων θεραπείας σε δύο* blocks *εκτελέσεων μεγέθους* $n/2$. *Έστω ότι με Β δηλώνεται η στήλη του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιείται σαν στήλη* block *και με ΄1΄, ΄2΄, ΄3΄ δηλώνονται οι υπόλοιπες τρεις στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιούνται για τους τρεις παράγοντες θεραπείας. Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2), ισούται με*

$$|\boldsymbol{M}| = n^2\left(n^2 - J_3^2(1,2,3)\right)^2\left(n^2 - \sum_{|S|=3} J_S^2\right),$$

Όπου το άθροισμα $\sum_{|S|=3} J_S^2$, *λαμβάνει υπόψιν όλες τις δυνατές* $\binom{m}{3}$ *τριάδες των στηλών του ορθογώνιου σχηματισμού που δημιουργούν όλα τα* J *χαρακτηριστικά τρίτης τάξης του σχεδιασμού.*

Απόδειξη

Ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.2) σε αυτή την περίπτωση είναι ο (εφόσον $J_1 = 0, J_2 = 0$)

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccc} I & x_b & x_1 & x_2 & x_3 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} I \\ x_b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_2x_3 \end{array} &
\begin{pmatrix}
n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & n & 0 & 0 & 0 & J_3(B,1,2) & J_3(B,1,3) & J_3(B,2,3) \\
0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(1,2,3) \\
0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & J_3(1,2,3) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & n & J_3(1,2,3) & 0 & 0 \\
0 & J_3(B,1,2) & 0 & 0 & J_3(1,2,3) & n & 0 & 0 \\
0 & J_3(B,1,3) & 0 & J_3(1,2,3) & 0 & 0 & n & 0 \\
0 & J_3(B,2,3) & J_3(1,2,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & n
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ισούται με

$$|M| = n \cdot [n \cdot |A| + b \cdot |B| - c \cdot |C| + d \cdot |D|)]$$

όπου

a = $J_3(1,2,3)$, b = $J_3(B,1,2)$, c = $J_3(B,1,3)$ και d = $J_3(B,2,3)$) και

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & n & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & n & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & n & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & n & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & n & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 & n & 0 \\ d & a & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a & n & 0 \\ c & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ d & a & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & n & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a & n & 0 \\ c & 0 & a & 0 & 0 & n \\ d & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ορίζουσες των πίνακων A, B, C και D είναι:

$|A| = -a^6 + 3a^4n^2 - 3a^2n^4 + n^6$,

$|B| = -a^4bn + 2a^2bn^3 - bn^5$,

$|C| = a^4cn - 2a^2cn^3 + cn^5$ και

$|D| = -a^4dn + 2a^2dn^3 - dn^5$ αντιστοίχως, και

με αντικατάσταση των τιμών στον παραπάνω τύπο της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας $\boldsymbol{M}$, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Για την καλύτερη κατανόηση και χρησιμότητα των παραπάνω προτάσεων, παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1

Αποφασίζουμε να μελετήσουμε τρεις παράγοντες δύο επιπέδων, σε ένα πείραμα με δύο ισομεγέθη blocks μεγέθους 10. Για τη μελέτη του πειράματος χρησιμοποιείται ένα μοντέλο της παρακάτω μορφής:

$$y = \beta_0 + \beta_b x_b + \sum_{i=1}^{3} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon,$$

δηλαδή ένα μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει, τις επιδράσεις της ομαδοποίησης (block), όλες τις κύριες επιδράσεις των τριών παραγόντων καθώς και όλες τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν $OA(20, 4, 2, 2)$ ορθογώνιο σχηματισμό, όπου ένας εκ των m = 4 παραγόντων θα αποτελέσει τον παράγοντα block. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν τρεις μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχηματισμοί OA(20, 4, 2, 2) (οι οποίοι και παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1, ως D_1, D_2 και D_3).

D_1				D_2				D_3			
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Πίνακας 3.1: Οι μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχηματισμοί OA(20,4,2,2)

Το πρόβλημα ανάγεται πλέον σε δύο σκέλη:

- Ποιος εκ των τριών μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών $OA(20, 4, 2, 2)$ αποτελεί την ιδανική επιλογή;
- Ποιος εκ των τεσσάρων παραγόντων του βέλτιστου ορθογώνιου σχηματισμού, αποτελεί τη ιδανική επιλογή για παράγοντας block;

Με βάση την Πρόταση 3.2 η μελέτη των J χαρακτηριστικών των τριών σχεδιασμών μπορεί να απαντήσει και στα δύο αυτά ερωτήματα, αφού βέλτιστη επιλογή και στις δύο περιπτώσεις, αποτελεί εκείνη η οποία θα δώσει τη μέγιστη δυνατή ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας και συνεπώς τη μέγιστη δυνατή D–αποδοτικότητα.

Ας δούμε για παράδειγμα, επιλέγοντας τον ορθογώνιο σχηματισμό D_1 και ως παράγοντα block την πρώτη στήλη, τον πίνακα πληροφορίας του μοντέλου

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_b + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{24} x_2 x_4 + \beta_{34} x_3 x_4 + \varepsilon,$$

που είναι ο

	μ	x_b	x_2	x_3	x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4
μ	20	0	0	0	0	0	0	0
x_b	0	20	0	0	0	12	4	4
x_2	0	0	20	0	0	0	0	4
x_3	0	0	0	20	0	0	4	0
x_4	0	0	0	0	20	4	0	0
x_2x_3	0	12	0	0	4	20	0	0
x_2x_4	0	4	0	4	0	0	20	0
x_3x_4	0	4	4	0	0	0	0	20

Πίνακας 3.2: Πίνακας πληροφορίας του μοντέλου (3.2) με χρήση του D1

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, η ορίζουσα του πίνακα $\boldsymbol{M}$

$$|\boldsymbol{M}| = n^2\left(n^2 - J_3^2(1,2,3)\right)^2 \left(n^2 - \sum_{|S|=3} J_S^2\right)$$

μεγιστοποιείται όταν ελαχιστοποιηθούν οι τιμές $J_3^2(1,2,3)$, η οποία αφορά την τριπλέτα των παραγόντων που μελετώνται καθώς και η τιμή $\sum_{|S|=3} J_S^2$ που αφορά όλα τα J χαρακτηριστικά τρίτης τάξης.

Υπολογίζοντας λοιπόν αυτές τις τιμές και για τους τρεις μη ισόμορφους ορθογώνιους σχηματισμούς $OA(20,4,2,2)$, προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές για τα J χαρακτηριστικά.

	J χαρακτηριστικά		
S	D_1	D_2	D_3
$\{A,B,C\}$	12	4	4
$\{A,B,D\}$	4	4	4
$\{A,C,D\}$	4	4	4
$\{B,C,D\}$	4	4	-4
$\sum_{\lvert S\rvert=3} J_S^2$	192	64	64

Πίνακας 3.3: J χαρακτηριστικά των τριών μη ισόμορφων OA(20,4,2,2)

Προφανώς, οι σχεδιασμοί D_2 και D_3 αποτελούν τις βέλτιστες επιλογές και μάλιστα για οποιαδήποτε επιλογή της στήλης block, αφού και οι δύο σχηματισμοί ελαχιστοποιούν τις ποσότητες $\sum_{|S|=3} J_S^2$ και $J_3(1,2,3)$ (το πρώτο άθροισμα είναι 64 και στις δύο περιπτώσεις, ενώ η τιμή της ποσότητας $|J_3(1,2,3)|$ είναι ίση με 4, για οποιαδήποτε επίλογή στήλης για το block). Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2) για οποιαδήποτε επιλογή από αυτούς τους δύο σχεδιασμούς, ισούται με $|\boldsymbol{M}| = 20^2(20^2 - 16)^2(20^2 - 64) = 19.818.086.400$, με αντίστοιχη αποδοτικότητα $D_{eff} = 0.969$.

Στην περίπτωση χρήσης του ορθογώνιου σχηματισμού D_1, για την εκτέλεση του πειράματος, τότε η επιλογή της τέταρτης στήλης για στήλη block δεν είναι η βέλτιστη ενέργεια, αφού η ποσότητα $J_3(1, 2, 3)$ είναι ίση με 12 και δεν είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να επιτευχθεί (όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.3). Ο πίνακας πληροφορίας με αυτήν την επιλογή έχει ορίζουσα ίση με $|\boldsymbol{M}| = 20^2(20^2 - 144)^2(20^2 - 192) = 5.452.595.200$ με D–αποδοτικότητα ίση με $D_{eff} = 0.824$. Αξίζει να αναφερθεί ότι αν επιλεγεί για στήλη block οποιαδήποτε εκ των άλλων τριών στηλών, τότε η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου που δημιουργείται ισούται με $|\boldsymbol{M}| = 12.268.339.200$, με απόδοση $D_{eff} = 0.912$.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα και των τριών μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών D_1, D_2 και D_3, είναι προφανές ότι καλύτερες επιλογές αποτελούν οι σχηματισμοί D_2 και D_3, για οποιαδήποτε επιλογή στήλης για block. Εάν, λόγω πειραματικών αναγκών κριθεί απαραίτητη η χρήση του σχηματισμού D_1, τότε σαν βέλτιστη επιλογή για παράγοντα block μπορεί να επιλεχθεί οποιοσδήποτε εκ των τριών πρώτων στηλών, αποκλείοντας την τέταρτη, η οποία δίνει τη μικρότερη D-αποδοτικότητα. □

Αντίστοιχη κλειστή μορφή για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2), όπως παρουσιάζεται στις Προτάσεις 3.1 και 3.2, δεν είναι εύκολο να βρεθεί όταν ο αριθμός των στηλών m του ορθογώνιου σχηματισμού είναι μεγαλύτερος του 4. Παρόλα αυτά, αν είναι γνωστή η πλήρης λίστα μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανά περίπτωση, η μελέτη των J χαρακτηριστικών μπορεί να βοηθήσει στην επιλογή σχεδιασμού και στήλης για το blocking αφού, όπως ήδη αναφέρθηκε, η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας εξαρτάται από τις τιμές αυτές. Το παρακάτω παράδειγμα επεξηγεί τον τρόπο εργασίας.

Παράδειγμα 3.2

Θέλουμε να εκτελέσουμε πείραμα για τη μελέτη τέσσαρων παραγόντων δύο επιπέδων χρησιμοποιώντας 20 εκτελέσεις, σε δύο blocks μεγέθους 10. Αποφασίστηκε να διερευνηθεί η χρήση ενός ορθογώνιου σχηματισμού $OA(20,5,2,2)$ για την εφαρμογή της μεθοδολογίας. Υπάρχουν 11 μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με 20 γραμμές και 5 στήλες (παρακάτω παρουσιάζονται ως $D_1, D_2, \dots, D_{11}$), των οποίων τα J χαρακτηριστικά παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.4. Το μοντέλο που θα μελετηθεί σε αυτή την περίπτωση, είναι της μορφής:

$$y = \beta_0 + \beta_b x_b + \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon,$$

και με βάση τα όσα έχουμε προαναφέρει, στον πίνακα πληροφορίας του θα εμφανίζονται τα J χαρακτηριστικά μέχρι και τέταρτης τάξης.

S	J χαρακτηριστικά										
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
$\{A, B, C\}$	-4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$\{A, B, D\}$	-4	4	4	4	4	4	4	4	4	-4	4
$\{A, B, E\}$	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	4
$\{A, C, D\}$	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-12	-4	4
$\{A, C, E\}$	-4	4	4	-4	-4	-4	-4	-4	4	-4	-4
$\{A, D, E\}$	-12	-12	-12	-4	-4	-4	-4	-4	-4	4	-4
$\{B, C, D\}$	-4	-4	-4	-4	-4	-12	-12	-12	-4	-4	-4
$\{B, C, E\}$	-12	-12	-12	-4	-4	4	-4	-4	-12	-4	4
$\{B, D, E\}$	-4	4	4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
$\{C, D, E\}$	-4	4	-4	4	-4	4	4	-4	-4	-4	-4
$\{A,B,C,D\}$	12	12	12	12	12	4	4	4	4	4	4
$\{A,B,C,E\}$	4	4	4	4	4	12	4	4	4	4	4
$\{A,B,D,E\}$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	-4
$\{A,C,D,E\}$	4	4	-4	4	-4	4	4	-4	-4	4	4
$\{B,C,D,E\}$	4	4	-4	4	-4	4	-4	4	4	-4	4
Βέλτιστη επιλογή για στήλη block	E (0.769)	C,D (0.766)	E (0.78)	C,D (0.926)	A,B,C,D (0.921)	B,C (0.872)	C,D (0.885)	C,D (0.882)	C (0.809)	B,C,D,E (0.921)	A,B,C,D,E (0.92)

Πίνακας 3.4: J χαρακτηριστικά των 11 μη ισόμορφων $OA(20,5,2,2)$ και οι βέλτιστες επιλογές στήλης block

Στην τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.4 παρουσιάζεται η βέλτιστη επιλογή της στήλης block από τον κάθε σχηματισμό, μαζί με τις αντίστοιχες τιμές της D-αποδοτικότητας, όπως προέκυψαν με την πλήρη μελέτη όλων των επιλογών που υπάρχουν. Η βέλτιστη λοιπόν επιλογή είναι η χρήση του σχηματισμού D_4 με στήλη block ή την τρίτη (C) ή την τέταρτη στήλη (D) του σχεδιασμού. Σημειώνεται ότι οι σχηματισμοί D_5, D_{10} και D_{11} αποτελούν ανταγωνιστικές επιλογές του σχηματισμού D_4, καθώς υπάρχουν επιλογές για στήλη block σε αυτούς που οδηγούν σε τιμές D – αποδοτικότητας αρκετά κοντά στη βέλτιστη που βρέθηκε. Σημειώνεται ότι ο σχηματισμός D_{11} έχει προταθεί και από τους Cheng, Li and Ye (2004) με μεθοδολογία που χρησιμοποιεί το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Ο σχηματισμός αυτός (μαζί με το σχηματισμό D_{10}), έχει τις μικρότερες (απόλυτες) τιμές για τα J χαρακτηριστικά. Ωστόσο, είναι προφανές ότι η δομή του μοντέλου θεωρείται καθοριστική για την τελική επιλογή σχεδιασμού και στήλης blocking. □

Παρότι είναι δύσκολο, όπως αναφέρθηκε, να βρεθεί κλειστή μορφή της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2) όταν ο αριθμός των στηλών είναι $m \geq 5$ για τη γενική περίπτωση χρήσης ορθογώνιων σχηματισμών με ισχύ $t \geq 2$, είναι δυνατό να διατυπωθεί ένα γενικό αποτέλεσμα όταν ο αριθμός των εκτελέσεων του σχεδιασμού είναι $n \equiv 0 \ mod\ 8$ και οι στήλες είναι 5, με τη χρήση ορθογώνιων σχηματισμών με ισχύ $t = 3$. Στην περίπτωση αυτή, οι τιμές των J χαρακτηριστικών τρίτης τάξης είναι ίσες με το μηδέν και οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι. Η ακόλουθη Πρόταση διατυπώνει το αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.3 *Έστω ότι χρησιμοποιείται ένας ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με $m = 5$ στήλες και ισχύ $t = 3$, για την διερεύνηση $k = 4$ παραγόντων θεραπείας σε δύο blocks εκτελέσεων μεγέθους $n/2$. Έστω ότι με B δηλώνεται η στήλη του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιείται σαν στήλη block και με ΄1΄, ΄2΄, ΄3΄,΄4΄ δηλώνονται οι υπόλοιπες τέσσερις στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιούνται για τους τέσσερις παράγοντες θεραπείας. Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας ενός μοντέλου της μορφής* (*3.2*) *ισούται με*

$$|\boldsymbol{M}| = n^6\left(n^2 - J_4^2(1,2,3,4)\right)^3.$$

Απόδειξη

Ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.2) σε αυτή την περίπτωση είναι ο (αφού ισχύει πλέον ότι $J_1 = 0, J_2 = 0$, αλλά και $J_3 = 0$):

$$\begin{array}{c} \\ I \\ x_b \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_1x_4 \\ x_2x_3 \\ x_2x_4 \\ x_3x_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} I & x_b & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 & x_2x_3 & x_2x_4 & x_3x_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4(1,2,3,4) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & J_4(1,2,3,4) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & J_4(1,2,3,4) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4(1,2,3,4) & n & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4(1,2,3,4) & 0 & 0 & n & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4(1,2,3,4) & 0 & 0 & 0 & 0 & n
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας ισούται με (για χάρη συντομίας συμβολίζουμε τον όρο $J_4(1,2,3,4)$ ως J_4)

$$|M| = n^6 \cdot [n \cdot |A| - J_4 \cdot |B|]$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & n & J_4 & 0 & 0 \\ 0 & J_4 & n & 0 & 0 \\ J_4 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix} \text{και } B = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & n & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & n & 0 \\ 0 & J_4 & 0 & 0 & n \\ J_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

με

$|A| = n^6 - 2n^4 J_4^2 + n^2 J_4^4$ και $|B| = J_4^6 - 2n^2 J_4^4 + n^4 J_4^2$ αντιστοίχως.

Με αντικατάσταση των τιμών στον παραπάνω τύπο της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας $\boldsymbol{M}$, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για την εφαρμογή της μεθόδου είναι απαιραίτητη η χρήση της πλήρους λίστας των μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών με n εκτελέσεις και με m στήλες. Ωστόσο, η λίστα αυτή δεν είναι ολοκληρωμένη για πλήθος περιπτώσεων, δείτε και Πίνακα 1.1. Πλήρη αποτελέσματα για σχεδιασμούς με $m = 3$ στήλες έχουν δοθεί από τους Seiden and Zemach (1966) και με $m = 4$ στήλες από τους Stufken and Tang (2007). Αξίζει να σημειωθεί ότι η ιστοσελίδα http://pietereendebak.nl/oapage/ παρουσιάζει την πλέον επικαιροποιημένη λίστα μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών με n εκτελέσεις και με m στήλες, όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία.

Στην επόμενη ενότητα, θα παρουσιάσουμε μεθοδολογία για την απ' ευθείας κατασκευή βέλτιστων block σχεδιασμών, αναφορικά με την *D*–αποδοτικότητα εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου (3.2), όταν οι παράγοντες θεραπείας είναι k =2, 3 και 4. Για τις περιπτώσεις αυτές, κατασκευάζονται βέλτιστοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με n εκτελέσεις και με $m \leq 5$ στήλες και προτείνεται η στήλη από την οποία θα προκύπτει η ομαδοποίηση των εκτελέσεων. Βασικό εργαλείο αποτελεί η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα J χαρακτηριστικά (τα οποία όπως είδαμε εμφανίζονται στον πίνακα πληροφορίας του μοντέλου και καθορίζουν την τιμή της ορίζουσάς του) και στο διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{\alpha}$ που ορίζει μονοσήμαντα έναν σχεδιασμό, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

3.1.1 Θεωρητικά αποτελέσματα για δύο ομάδες εκτελέσεων

Στην παρούσα ενότητα κατασκευάζονται απευθείας οι βέλτιστοι ορθογώνιοι σχηματισμοί με n εκτελέσεις και με $m = 3, 4, 5$ στήλες που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τη διαμέριση των n εκτελέσεων σε δύο ισομεγέθεις ομάδες, όταν οι παράγοντες θεραπείας είναι $k = 2, 3, 4$ αντιστοίχως. Η διαδικασία βασίζεται στις ακόλουθες συνθήκες, όπως παρουσιάστηκαν αναλυτικότερα σε προηγούμενα κεφάλαια:

- Ο ορθογώνιος σχηματισμός που θα κατασκευαστεί θα αποτελείται από συγκεκριμένες εκτελέσεις του πλήρους 2^m παραγοντικού σχεδιασμού (πιθανώς και επαναλαμβανόμενες).
- Οι 2^m συνδυασμοί παραγόντων του πλήρους 2^m παραγοντικού σχεδιασμού θεωρούνται σαν συλλογή από 2^m διανύσματα γραμμών μήκους m, τα οποία και τοποθετούνται με τέτοια διάταξη ώστε να σέβονται τη σειρά των αντίστοιχων διανυσμάτων – γραμμής $\boldsymbol{i}$ του πλήρη παραγοντικού σχεδιασμού (δηλαδή η πρώτη γραμμή θα περιέχει όλους τους παράγοντες τοποθετημένους στην χαμηλή τους στάθμη, η δεύτερη γραμμή θα έχει τον πρώτο παράγοντα στην υψηλή στάθμη και όλους τους υπόλοιπους στην χαμηλή στάθμη κ.ο.κ.).
- Το διάνυσμα των J χαρακτηριστικών του σχεδιασμού εκφράζεται συναρτήσει των πολλαπλοτήτων a_i ($i = 0,1, \ldots, 2^m - 1$) του σχεδιασμού.

Η μεθοδολογία βασίζεται στην κατάλληλη επιλογή του διανύσματος των J χαρακτηριστικών, το οποίο θα καταλήγει σε αποδεκτό διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{\alpha}$ και ταυτόχρονα θα μεγιστοποιεί την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2). Επειδή οι ορθογώνιοι σχηματισμοί που ζητείται να κατασκευαστούν πρέπει να έχουν ισχύ τουλάχιστον ίση με 2, συνεπάγεται ότι όλες οι τιμές των $J_1(S)$ και $J_2(S)$ θα είναι ίσες με μηδέν. Αντιστοίχως οι τιμές των $J_3(S)$ και $J_4(S)$ θα πρέπει να οριστούν ίσες με τιμές, οι οποίες να είναι πολλαπλάσιες του τέσσερα όταν $n \equiv 4 \ mod \ 8$, ή πολλαπλάσιες του οκτώ όταν $n \equiv 0 \ mod \ 8$. Κατασκευάζεται λοιπόν ένα σύστημα $l \leq 2^m$ γραμμικών εξισώσεων, του οποίου η επίλυση θα παράξει τις άγνωστες πολλαπλότητες a_i και οι οποίες θα οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου ορθογώνιου σχηματισμού ανά περίπτωση. Προφανώς, μπορεί από μία επιλογή διανύσματος J χαρακτηριστικών να προκύπτουν μη αποδεκτές τιμές για τις πολλαπλότητες a_i, τιμές δηλαδή που δεν μπορεί να οδηγήσουν σε κατασκευή κάποιου σχεδιασμού. Η επιλογή, λοιπόν, των κατάλληλων τιμών για τα J χαρακτηριστικά κρίνεται σημαντική για την επιτυχία της μεθόδου.

Δύο παράγοντες

Η περίπτωση των $k = 2$ παραγόντων θεραπείας είναι σχετικά απλή, δεδομένου ότι είναι ξεκάθαρο ότι η βέλτιστη επιλογή ορθογώνιου σχηματισμού (εάν αυτός υπάρχει) για τη διεξαγωγή ενός πειράματος σε δύο blocks μεγέθους $n/2$ θα έχει ισχύ $t = 3$. Ο ζητούμενος σχηματισμός υπάρχει, εάν το πλήθος n των εκτελέσεων του πειράματος είναι πολλαπλάσιο του 8 και αποτελείται από $n/8$ αντίγραφα του πλήρους 2^3 παραγοντικού σχηματισμού. Στην περίπτωση κατά την οποία ο αριθμός των εκτελέσεων είναι $n \equiv 4 \ mod \ 8$, η βέλτιστη επιλογή θα είναι ο σχηματισμός ο οποίος έχει τις ελάχιστες δυνατές τιμές για τα J_3 χαρακτηριστικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν εναλλακτικές για την επιλογή βέλτιστης στήλης για στήλη block, αφού στις $m = 3$ στήλες υπάρχει μόνο μία τιμή J χαρακτηριστικών η οποία λαμβάνεται υπόψη. Όταν $n \equiv 4 \ mod \ 8$, η ελάχιστη τιμή του $|J_3|$ είναι 4. Το ακόλουθο θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της βέλτιστης επιλογής για αυτή την περίπτωση.

Θεώρημα 3.1 *Έστω $n \equiv 4 \ mod \ 8$. Ο ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με τρεις στήλες και πολλαπλότητες*

$$a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = (n-4)/8$$
$$a_1 = a_2 = a_4 = a_7 = (n+4)/8$$

αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός μοντέλου της μορφής (3.2)*, για οποιαδήποτε επιλογή στήλης block.*

Απόδειξη

Θα γραφούν όλα τα J_k χαρακτηριστικά (με $k = 1, 2, 3$) του υπό κατασκευή σχηματισμού, ως γραμμικοί συνδυασμοί των πολλαπλοτήτων a_i, $i = 0, 1, 2, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum a_i = n$, και θέτοντας όλα τα $J_1(S)$, $J_2(S)$ ίσα με μηδέν και την τιμή του $J_3(S)$ ίσες με 4 (δηλάδη με την ελάχιστη δυνατή κατά απόλυτη τιμή), προκύπτει ένα σύστημα οκτώ γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τις 8 πολλαπλότητες. Πιο αναλυτικά, και ακολουθώντας τα όσα παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.2, μπορούμε να δημιουργήσουμε πρώτα τον ακόλουθο 2^3 x 2^3 πίνακα *H*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

στον οποίο,

- η πρώτη στήλη αποτελείται μόνο από μονάδες,
- οι επόμενες 3 στήλες είναι ο πλήρης 2^3 παραγοντικός σχεδιασμός που προκύπτει με τη χρήση των κλασσικών βωβών μεταβλητών, και
- οι υπόλοιπες στήλες δημιουργούνται από τις αλληλεπιδράσεις των 3 στηλών του πλήρους σχεδιασμού κατά σειρά τάξης και με λεξικογραφική διάταξη σε κάθε τάξη, οπότε και δημιουργούνται πρώτα οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων και τέλος η αλληλεπίδραση τριών παραγόντων.

Έπειτα, ακολουθώντας τη σχέση $\boldsymbol{a^T} = \frac{1}{2^3} H\, \mathbf{J}$ και γνωρίζοντας ότι $H^T H = H H^T = 2^3 I_{2^3}$, προκύπτει η σχέση:

$$H^T \boldsymbol{a^T} = \mathbf{J}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το διάνυσμα $\mathbf{J^T} = [n, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4]$ όπως αναφέρθηκε, δημιουργείται το ακόλουθο σύστημα με αγνώστους τις οκτώ ποσότητες a_i που ορίζουν το σχεδιασμό:

$$\begin{aligned}
+a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= n \\
-a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 0 \\
-a_0 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_6 + a_7 &= 0 \\
-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 &= 0 \\
+a_0 + a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + a_6 + a_7 &= 0 \\
+a_0 - a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 &= 0 \\
+a_0 - a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 &= 0 \\
-a_0 + a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 - a_6 + a_7 &= 4
\end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος επιτυγχάνεται εύκολα, ενώ χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.1, η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου

$$y = \beta_0 + \beta_b x_b + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

μεγιστοποιείται. □

Παράδειγμα 3.3

Ζητείται να κατασκευαστεί ορθογώνιος σχηματισμός με $n = 12$ εκτελέσεις και με $m = 3$ παράγοντες δύο επιπέδων, ένας εκ των οποίων θα είναι ο παράγοντας block για το χωρισμό των 12 εκτελέσεων σε δύο ομάδες των 6 εκτελέσεων. Ο σχηματισμός που θα προκύψει θα πρέπει να εκτιμά τις παραμέτρους του μοντέλου (3.2) με τη μέγιστη δυνατή D–αποδοτικότητα.

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 3.1, ο βέλτιστος ορθογώνιος σχηματισμός θα κατασκευάζεται με τη χρήση των παρακάτω πολλαπλοτήτων

$$a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = (n-4)/8 = (12-4)/8 = 1$$

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_7 = (n+4)/8 = (12+4)/8 = 2$$

Ο σχεδιασμός που προκύπτει δίνεται στον Πίνακα 3.5 (όπου παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα διανύσματα-γραμμή $\boldsymbol{i}$ που χρησιμοποιήθηκαν)

$\boldsymbol{i}$	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1
2	0	1	0
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1
7	1	1	1

Πίνακας 3.5: Βέλτιστη επιλογή OA(12,3,2,2), βάσει Θεωρήματος 3.1.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, οποιαδήποτε επιλογή στήλης για το ρόλο του παράγοντα block είναι βέλτιστη. Παρακάτω, παρουσιάζονται οι πίνακες πληροφορίας του μοντέλου (3.2) που δημιουργούνται για κάθε διαφορετική επιλογή του παράγοντα block.

	μ	x_1	x_2	x_3	x_2x_3
μ	12	0	0	0	0
x_1	0	12	0	0	0
x_2	0	0	12	0	0
x_3	0	0	0	12	0
x_2x_3	0	0	0	0	12

Πίνακας 3.6: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον A

	μ	x_1	x_2	x_3	x_1x_3
μ	12	0	0	0	0
x_1	0	12	0	0	0
x_2	0	0	12	0	0
x_3	0	0	0	12	0
x_1x_3	0	0	0	0	12

Πίνακας 3.7: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον B

	μ	x_1	x_2	x_3	x_1x_2
μ	12	0	0	0	0
x_1	0	12	0	0	0
x_2	0	0	12	0	0
x_3	0	0	0	12	0
x_1x_2	0	0	0	0	12

Πίνακας 3.8: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον C

Σε κάθε μία εκ των περιπτώσεων, παρατηρείται ότι προκύπτει ένας διαγώνιος πίνακας πληροφορίας και, ως εκ τούτου, η τιμή της D–αποδοτικότητας μεγιστοποιείται ανεξάρτητα από την επιλογή στήλης για το ρόλο του παράγοντα block. □

Τρεις παράγοντες

Ακολουθώντας παρόμοια τεχνική με αυτή της περίπτωσης των $k = 2$ παραγόντων θεραπείας, είναι εύκολη η επέκταση της μεθόδου για την κατασκευή ενός ορθογώνιου σχηματισμού με n εκτελέσεις και με $m = 4$ στήλες και η επιλογή κατάλληλης στήλης του για τη διαμέριση των n εκτελέσεων σε δύο blocks μεγέθους $n/2$. Το ακόλουθο Θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή σε αυτή την περίπτωση.

Θεώρημα 3.2 *α. Ο ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με τέσσερις στήλες και πολλαπλότητες*

$$a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{12} = a_{15} = 0$$
$$a_1 = a_2 = a_4 = a_7 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{14} = n/8$$

αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων μοντέλου (3.2) για οποιαδήποτε επιλογή στήλης block, όταν ο αριθμός των εκτελέσεων είναι ίσος με $n \equiv 0 \ mod\ 8$.

β. Ο ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με τέσσερις στήλες και πολλαπλότητες

$$a_0 = (n - 12)/8$$
$$a_1 = a_2 = a_4 = a_8 = 1$$
$$a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{12} = (n - 4)/8$$
$$a_7 = a_{11} = a_{13} = a_{14} = 0$$
$$a_{15} = (n + 4)/8$$

αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων μοντέλου (3.2) *για οποιαδήποτε επιλογή στήλης* block, *με αριθμό εκτελέσεων* $n \equiv 4 \bmod 8$, *όπου* $n > 4$.

Απόδειξη

α. Αξιοποιώντας ότι το άθροισμα των πολλαπλοτήτων ίσουται με n και θέτοντας όλα τα $J_1(S)$, $J_2(S)$ ίσα με μηδέν και όλες τις τιμές των $J_3(S)$ ίσες με 0 (δηλαδή με τις ελάχιστες δυνατές), προκύπτει ένα σύστημα δεκαπέντε γραμμικών εξισώσεων. Η λύση του παραμετρικού αυτού συστήματος, εξαρτάται από τις τιμές της παραμέτρου r_1 όπως φαίνεται ακολούθως:

$$a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{12} = a_{15} = r_1$$

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_7 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{14} = \frac{n}{8} - r_1$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει αν θέσουμε $r_1 = 0$ (όλες οι πολλαπλότητες θα πρέπει να είναι μη αρνητικές).

β. Εάν θέσουμε τις τιμές των $J_3(S)$ ίσες με την ελάχιστη τιμή τους 4, προκύπτει ξανά ένα σύστημα δεκαπέντε γραμμικών ανεξάρτητων εξισώσεων, η παραμετρική λύση του οποίου εξαρτάται από την παράμετρο r_1:

$$a_0 = \frac{n-4}{8} - r_1$$

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_8 = r_1$$

$$a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{12} = \frac{n+4}{8} - r_1$$

$$a_7 = a_{11} = a_{13} = a_{14} = r_1 - 1$$

$$a_{15} = \frac{n+12}{8} - r_1$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει, θέτοντας $r_1 = 1$ (και δεδομένου ότι $n > 4$, αφού οι πολλαπλότητες πρέπει να είναι μη αρνητικές). Με βάση την Πρόταση 3.2, η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (3.2) μεγιστοποιείται. □

Σημειώνεται πως, και για τις δύο περιπτώσεις, οποιαδήποτε άλλη μη αρνητική τιμή της παραμέτρου r_1 η οποία παράγει μη αρνητικές πολλαπλότητες a_i, μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου για την κατασκευή βέλτιστων επιλογών.

Τέσσερις παράγοντες

Το κατασκευαστικό πρόβλημα βέλτιστου σχηματισμού γίνεται πιο περίπλοκο όταν ο αριθμός των παραγόντων θεραπείας ξεπερνά το τρία. Ωστόσο, είναι εύκολο να κατασκευαστεί ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων, του οποίου οποιαδήποτε στήλη μπορεί να ανατεθεί ως παράγοντας block όταν η ισχύς του είναι μεγαλύτερη ή ίση του τρία ($t \geq 3$). Αντιθέτως, όταν για σχεδιαμούς με ισχύ $t = 2$, η προσέγγιση για το διαχωρισμό των n εκτελέσεων του σχηματισμού με $m = 5$ στήλες σε δύο blocks μεγέθους $n/2$, θα πρέπει ελαφρώς να τροποποιηθεί και να ενισχυθεί με στοχευμένη αναζήτηση μέσω υπολογιστή για αποδεκτές τιμές των J_3 και J_4 χαρακτηριστικών. Σε αυτή την περίπτωση, η πολυπλοκότητα του προβλήματος δεν επιτρέπει κατασκευή, στην οποία οποιαδήποτε στήλη του σχεδιασμού να μπορεί να είναι και η βέλτιστη επιλογή για τη στήλη block. Επομένως, στις κατασκευές ορθογώνιων σχηματισμών με ισχύ $t = 2$, θα θεωρείται ότι η πρώτη στήλη του υπό κατασκευή σχηματισμού θα χρησιμοποιηθεί ως στήλη block. Το ακόλουθο Θεώρημα παρουσιάζει τις βέλτιστες τοποθετήσεις για την περίπτωση που μελετάται.

Θεώρημα 3.3 *α. Ο ορθογώνιος σχηματισμός* n *εκτελέσεων,* $n \equiv 0 \; mod \; 16$*, με πέντε στήλες και πολλαπλότητες*

$$\begin{aligned} a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{12} = a_{15} = a_{17} = a_{18} = a_{20} = a_{23} = a_{24} = a_{27} \\ = a_{29} = a_{30} = n/16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_4 = a_7 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{14} = a_{16} = a_{19} = a_{21} = a_{22} = a_{25} = a_{26} \\ = a_{28} = a_{31} = 0 \end{aligned}$$

αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου (3.2)*, για οποιαδήποτε επιλογή στήλης block.*

β. Ο ορθογώνιος σχηματισμός n *εκτελέσεων,* $n \equiv 8 \; mod \; 16$*,* $n > 8$*, με πέντε στήλες και πολλαπλότητες*

$$a_0 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{15} = a_{20} = a_{24} = a_{29} = a_{30} = (n-8)/16$$

$$a_1 = a_2 = a_7 = a_{11} = a_{16} = a_{21} = a_{22} = a_{25} = a_{26} = a_{31} = 1$$

$$a_3 = a_{17} = a_{18} = a_{23} = a_{27} = (n-24)/16$$

$$a_4 = a_8 = a_{13} = a_{14} = a_{28} = 0$$

$$a_{12} = (n+8)/16$$

$$a_{19} = 2$$

αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου (3.2), για οποιαδήποτε επιλογή στήλης block.

γ. Ο ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων, $n \equiv 4 \; mod \; 16$, με $n > 4$, με πέντε στήλες και πολλαπλότητες

$a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = a_{10} = a_{12} = a_{16} = a_{19} = a_{22} = a_{25} = a_{26} = a_{31} = 0$

$a_2 = a_{27} = (n + 12)/16$

$a_1 = a_4 = a_7 = a_8 = a_{13} = a_{14} = a_{17} = a_{18} = a_{20} = a_{23} = a_{24} = a_{30} = (n - 4)/16$

$a_9 = a_{15} = a_{21} = a_{28} = 1$

$a_{11} = a_{29} = (n - 20)/16$

είναι η βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου (3.2), όταν ο παράγοντας block είναι η πρώτη στήλη.

δ. Ο ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων, $n \equiv 12 \; mod \; 16$, με πέντε στήλες και πολλαπλότητες

$a_0 = a_3 = a_5 = a_6 = a_{10} = a_{12} = a_{16} = a_{19} = a_{22} = a_{25} = a_{26} = a_{31} = 0$

$a_1 = a_2 = a_4 = a_{14} = a_{18} = a_{23} = a_{24} = a_{27} = (n + 4)/16$

$a_7 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{17} = a_{20} = a_{29} = a_{30} = (n - 12)/16$

$a_9 = a_{15} = a_{21} = a_{28} = 1$

αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου (3.2), όταν ο παράγοντας block είναι η πρώτη στήλη.

Απόδειξη

α. Όταν $n \equiv 0 \; mod \; 16$, υπάρχει ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ $t = 4$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sum a_i = n$ και θέτοντας όλες τις τιμές των $J_1(S), J_2(S), J_3(S)$ και $J_4(S)$ ίσες με τις ελάχιστες δυνατές τιμές τους (δηλαδή ίσες με μηδέν), προκύπτει ένα σύστημα από τριάντα μία γραμμικές ανεξάρτητες εξισώσεις. Η λύση αυτού του παραμετρικού συστήματος εξαρτάται από την παράμετρο r_1, η οποία αν τεθεί ίση με μηδέν, προκύπτουν οι πολλαπλότητες που παρουσιάστηκαν.

β. Όταν $n \equiv 8 \; mod \; 16$, υπάρχει ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ $t = 3$, εάν $n > 8$. Ακολουθείται η σχέση $\sum a_i = n$ των πολλαπλοτήτων και θέτονται όλες οι τιμές των $J_1(S)$, $J_2(S)$ και $J_3(S)$ ίσες με μηδέν (ως τις ελάχιστες δυνατές τιμές τους). Αντιστοίχως για τις πέντε τιμές των $J_4(S)$, θέτονται ίσες με 8 κατ' απόλυτη τιμή (ελάχιστη τιμή σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Deng and Tang (1999)). Αναφέρεται ότι με αυτή την τοποθέτηση εξασφαλίζεται ότι ο σχηματισμός που θα προκύψει θα είναι βέλτιστος για κάθε επιλογή στήλης block. Για τον έλεγχο του προσήμου των J_4 χαρακτηριστικών στις εξισώσεις χρησιμοποιείται η εξής αντικατάσταση: $J_4(B, 1, 2, 3) = 8y_1$, $J_4(B, 1, 2, 4) = 8y_2$, $J_4(B, 1, 3, 4) = 8y_3$, $J_4(B, 2, 3, 4) = 8y_4$ και $J_4(1, 2, 3, 4) = 8y_5$, και συνεπώς, $y_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτει ένα σύστημα από τριάντα μία γραμμικές και ανεξάρτητες εξισώσεις. Η επίλυση του εξαρτάται και πάλι από την παράμετρο r_1 καθώς και από τις τιμές των y_i. Οι τιμές των ζητούμενων πολλαπλοτήτων a_i προκύπτουν θέτοντας $r_1 = 0$, $y_1 = y_4 = y_5 = 1$ και $y_2 = y_3 = -1$.

γ. Όταν $n \equiv 4 \, mod \, 16$, δεν υπάρχει ορθογώνιος σχηματισμός, ισχύος $t = 3$, και ως εκ τούτου τοποθετούνται τιμές για τα $J_3(S)$ και $J_4(S)$ ίσες με συγκεκριμένες αποδεκτές τιμές, αλλά μη μηδενικές. Μέσω εξαντλητικής αναζήτησης όλων των δυνατών τιμών για τα J χαρακτηριστικά, προκύπτει ότι οι επιλογές

$\big(J_3(B, 1, 2), J_3(B, 1, 3), \ldots, J_3(2, 3, 4)\big) = (4, 4, 4, -4, -4, -4, 4, -4, 4, -4)$ και

$J_4(1,2,3,4) = -4$

μεγιστοποιούν την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του υπό μελέτη μοντέλου. Η επίλυση του συστήματος που προκύπτει από τις παραπάνω εξισώσεις, εξαρτάται από πέντε παραμέτρους $r_1, r_2, \ldots, r_5$ και θέτοντας τες ίσες με μηδέν, επιτυγχάνεται το αποτέλεσμα των πολλαπλοτήτων a_i της παρούσας περίπτωσης.

δ. Όταν ο αριθμός των εκτελέσεων του πειράματος είναι ίσος με $n \equiv 12 \, mod \, 16$, σε αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση, πραγματοποιείται εξαντλητικός υπολογιστικός έλεγχος όλων των δυνατών τιμών των J χαρακτηριστικών και προκύπτει ότι οι επιλογές

$\big(J_3(B, 1, 2), J_3(B, 1, 3), \ldots, J_3(2, 3, 4)\big) = (4, 4, 4, -4, 4, -4, 4, -4, -4, -4)$ και

$J_4(1,2,3,4) = -4$

μεγιστοποιούν την ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει, εξαρτάται και πάλι από πέντε παραμέτρους $r_1, r_2, \ldots, r_5$ και θέτοντας όλες αυτές ίσες με το μηδέν, επιτυγχάνεται το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Σημειώνεται και πάλι ότι για όλες τις περιπτώσεις, οποιαδήποτε άλλες μη αρνητικές τιμές των παραμέτρων r_i που παράγουν μη αρνητικές πολλαπλότητες a_i, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξίσου για την κατασκευή βέλτιστων επιλογών.

Παράδειγμα 3.4

Ζητείται να κατασκευαστεί ορθογώνιος σχηματισμός, ισχύος τουλάχιστον 2, με $n = 24$ εκτελέσεις και $m = 5$ στήλες δύο επιπέδων, εκ των οποίων η μία στήλη θα χρησιμοποιηθεί σαν παράγοντας block. Ο ορθογώνιος σχηματισμός που θα κατασκευαστεί θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου

$$y = \beta_0 + \beta_b x_b + \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon,$$

και ζητείται η βέλτιστη επιλογή ώστε να μεγιστοποιηθεί η τιμή του κριτήριου της D–αποδοτικότητας. Προφανώς, η κατασκευή ανάγεται στην περίπτωση της κατηγορίας 'β' του Θεωρήματος 3.3. Επομένως για την κατασκευή του ζητούμενου ορθογώνιου σχηματισμού, αρκεί να επιλεχθούν οι ακόλουθες πολλαπλότητες, για *n* = 24:

$a_0 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{15} = a_{20} = a_{24} = a_{29} = a_{30} = (n-8)/16 = 1$
$a_1 = a_2 = a_7 = a_{11} = a_{16} = a_{21} = a_{22} = a_{25} = a_{26} = a_{31} = 1$
$a_3 = a_{17} = a_{18} = a_{23} = a_{27} = (n-24)/16 = 0$
$a_4 = a_8 = a_{13} = a_{14} = a_{28} = 0$
$a_{12} = (n+8)/16 = 2$
$a_{19} = 2$

Οι παραπάνω τιμές των πολλαπλοτήτων κατασκευάζουν το σχηματισμό του Πίνακα 3.9 (όπου παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα διανύσματα-γραμμή $\boldsymbol{i}$ που χρησιμοποιήθηκαν)

$\boldsymbol{i}$	A	B	C	D	E
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
7	0	0	1	1	1
9	0	1	0	0	1
10	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	1
12	0	1	1	0	0
12	0	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
19	1	0	0	1	1
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Πίνακας 3.9: Βέλτιστη επιλογή *OA*(24,5,2,2), βάσει Θεωρήματος 3.3

Βάσει του Θεωρήματος, οποιαδήποτε επιλογή στήλης για τον παράγοντα block, αποτελεί και βέλτιστη επιλογή. Παρακάτω επιλέγοντας κάθε φορά διαφορετική στήλη για την ανάθεση του παράγοντα block, δημιουργούνται οι αντίστοιχοι πίνακες πληροφορίας του υπό μελέτη μοντέλου.

	μ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5
μ	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
x_2x_3	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	8
x_2x_4	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	8	0
x_2x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	24	8	0	0
x_3x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	8	24	0	0
x_3x_5	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	24	0
x_4x_5	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	24

Πίνακας 3.10: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον A

	μ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_3	x_1x_4	x_1x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5
μ	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
x_1x_3	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	-8
x_1x_4	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	-8	0
x_1x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	24	-8	0	0
x_3x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	24	0	0
x_3x_5	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	24	0
x_4x_5	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	0	24

Πίνακας 3.11: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον B

	μ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	x_1x_4	x_1x_5	x_2x_4	x_2x_5	x_4x_5
μ	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
x_1x_2	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	-8
x_1x_4	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	-8	0
x_1x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	24	-8	0	0
x_2x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	24	0	0
x_2x_5	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	24	0
x_4x_5	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	0	24

Πίνακας 3.12: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον C

	μ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5
μ	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
x_2x_3	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	8
x_2x_4	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	8	0
x_2x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	24	8	0	0
x_3x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	8	24	0	0
x_3x_5	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	24	0
x_4x_5	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	24

Πίνακας 3.13: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον D

	μ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5
μ	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_1	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0
x_2x_3	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	8
x_2x_4	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	8	0
x_2x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	24	8	0	0
x_3x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	8	24	0	0
x_3x_5	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	24	0
x_4x_5	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	24

Πίνακας 3.14: Πίνακας πληροφορίας με παράγοντα block τον E

Πραγματοποιώντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς για κάθε μία εκ των περιπτώσεων, προκύπτει ότι η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας, σε όλες τις περιπτώσεις, έχει την ίδια μέγιστη τιμή (ίση με 25.649.407.252.758.500), άρα το κριτήριο της D–αποδοτικότητας μεγιστοποιείται ανεξαρτήτου επιλογής παράγοντα για παράγοντα block με βάση τον ορθογώνιο σχηματισμό που κατασκευάστηκε. Συμπέρασμα που συνάδει με το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.3 για την αντίστοιχη περίπτωση. □

Πέντε ή περισσότεροι παράγοντες

Στην ενότητα αυτή, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, βρίσκουμε βέλτιστες διαμερίσεις των n εκτελέσεων ενός σχηματισμού σε δύο ισομεγέθη blocks, για τις περιπτώσεις που δεν καλύπτονται από τα γενικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Τα αποτελέσματα προκύπτουν με εφαρμογή της μεθοδολογίας στους γνωστούς μη ισόμορφους ορθογώνιους σχηματισμούς n εκτελέσεων και m στηλών. Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίνακα 3.15.

n	k	Blocks	Εκτελέσεις	D
20	5	A	31, 29, 27, 22, 16, 14, 8, 5, 3, 0	85.284
		B	28, 26, 21, 18, 17, 12, 11, 9, 7, 6	
24	5	A	28, 27, 24, 23, 22, 17, 15, 13, 10, 4, 2, 1	93.021
		B	31, 30, 25, 21, 18, 16, 12, 11, 8, 6, 5, 3	
	6	A	0, 3, 13, 21, 27, 30, 39, 41, 46, 50, 52, 56	79.070
		B	6, 10, 12, 16, 23, 25, 32, 37, 43, 51, 61, 62	
28	5	A	0, 3, 5, 9, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 23, 24, 30, 31	93.341
		B	3, 5, 6, 6, 8, 11, 12, 16, 18, 21, 25, 27, 29, 30	
	6	A	2, 4, 7, 9, 17, 27, 30, 33, 40, 47, 50, 53, 60, 62	87.661
		B	5, 10, 15, 18, 20, 24, 29, 32, 38, 43, 44, 51, 55, 57	
32	5	A	30, 29, 27, 24, 23, 20, 18, 17, 15, 12, 10, 9, 6, 5, 3, 0	100
		B	31, 28, 26, 25, 22, 21, 19, 16, 14, 13, 11, 8, 7, 4, 2, 1	
	6	A	9, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 23, 32, 35, 37, 38, 56, 59, 61, 62	100
		B	0, 3, 5, 6, 24, 27, 29, 30, 41, 42, 44, 47, 49, 50, 52, 55	
36	5	A	1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 25, 26, 26, 29, 31	95.928
		B	0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 15, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 28, 28	
40	5	A	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 28, 31, 31	96.182
		B	0, 0, 1, 6, 7, 10, 11, 13, 13, 14, 19, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 31	
	6	A	6, 8, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 33, 34, 36, 37, 42, 51, 56, 61, 62, 63	90.481
		B	0, 1, 2, 7, 12, 21, 26, 27, 29, 30, 39, 41, 43, 44, 46, 48, 50, 52, 55, 57	

Πίνακας 3.15: Βέλτιστες τοποθετήσεις σε δυο blocks μεγέθους $n/2$, για $20 \leq n \leq 40$

Τα δύο παραγόμενα blocks συμβολίζονται ως A και B, ενώ οι εκτελέσεις που εμπεριέχονται σε κάθε block παρουσιάζονται στη δεκαδική τους αναπαράσταση. Για την επαναφορά της κωδικοποίησής τους στην τυπική ±1 μορφή, παράγεται από κάθε αριθμό η δυαδική αναπαράσταση μήκους k και αντικαθιστώνται τα μηδενικά με -1. Για παράδειγμα, όταν $k = 5$, ο δεκαδικός αριθμός 14 αντιστοιχεί στο διάνυσμα–γραμμή (–1,+1,+1,+1,–1). Η τελευταία στήλη του Πίνακα 3.15 παρουσιάζει τις τιμές της D–αποδοτικότητας για το μοντέλο (3.2). Σημειώνεται ότι το μοντέλο αυτό έχει συνολικά $p = 2 + k + k(k-1)/2$ παραμέτρους να εκτιμηθούν, οπότε θα πρέπει και ο ορθογώνιος σχηματισμός που εξετάζεται να έχει τουλάχιστον p διακριτές εκτελέσεις.

3.2 Διαμέριση εκτελέσεων ορθογώνιων σχηματισμών σε 4 ισομεγέθεις ομάδες

Κατά αντιστοιχία των όσων έχουν περιγραφεί για τη διαδικασία της τοποθέτησης των n εκτελέσεων ενός σχηματισμού σε δύο ισομεγέθη blocks, όταν δίνεται ένας $OA(n, m, 2, t)$, είναι εφικτό να παραχθούν κατασκευαστικά αποτελέσματα και για την περίπτωση διαμέρισης των n εκτελέσεων σε τέσσερα blocks ίσου μεγέθους. Οι τέσσερις διαφορετικοί συνδυασμοί επιπέδων δύο οποιονδήποτε στηλών από τις m στήλες ενός ορθογώνιου σχηματισμού, μπορούν να δημιουργήσουν μία «βοηθητική» στήλη τεσσάρων επιπέδων, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το διαχωρισμό των n εκτελέσεων του σχηματισμού σε τέσσερα blocks μεγέθους $n/4$ το καθένα. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία, η στήλη αυτή που θα έχει τέσσερα επίπεδα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν παράγοντας block, για τη μελέτη $k = m - 3$ παραγόντων θεραπείας σε τέσσερα blocks μεγέθους $n/4$. Οι τρεις βαθμοί ελευθερίας του παράγοντα block (που έχει, όπως είδαμε τέσσερα επίπεδα), μπορούν να αναλυθούν με τη χρήση του ακόλουθου συστήματος βωβών μεταβλητών, (βλ. Wu and Hamada 2009, σελ. 328).

$$b_1 = (-1, -1, +1, +1),$$

$$b_2 = (-1, +1, -1, +1),$$

$$b_3 = (+1, -1, -1, +1).$$

με απώτερο σκοπό να διεξαχθούν συμπεράσματα χρησιμοποιώντας το ακόλουθο μοντέλο

$$y = \beta_0 + \beta_{b_1} x_{b_1} + \beta_{b_2} x_{b_2} + \beta_{b_3} x_{b_3} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \qquad (3.3)$$

και τις τεχνικές γραμμικής παλινδρόμησης. Δυστυχώς όμως, αυτή η τεχνική δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι η εκτίμηση της επίδρασης της τρίτης συνιστώσας (x_{b_3}) της παραπάνω σχέσης, θα είναι ασυσχέτιστη με τις εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων των k παραγόντων θεραπείας στο μοντέλο πρώτης τάξης.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί μέσω της εφαρμογής της μεθόδου αντικατάστασης (method of replacement) που οδηγεί στην κατασκευή μιας στήλης τεσσάρων επιπέδων, χρησιμοποιώντας τρεις κατάλληλες στήλες δύο επιπέδων του ορθογώνιου σχηματισμού, όπως παρουσιάστηκε από τους Wu and Hamada (2009, σελ. 322). Σε αυτή την περίπτωση, και εάν υπάρχει και βρεθεί αυτή η τριάδα στηλών, τότε η χρήση του συστήματος που περιγράφηκε παραπάνω, μπορεί να εγγυηθεί ότι οι εκτιμήσεις των επιδράσεων των block είναι ασυσχέτιστες με τις εκτιμήσεις των $k = m - 3$ κύριων επιδράσεων των παραγόντων θεραπείας στο μοντέλο πρώτης τάξης.

Για την εφαρμογή αυτής της τεχνικής, είναι απαραίτητο οι ορθογώνιοι σχηματισμοί δύο επιπέδων που θα χρησιμοποιηθούν να έχουν μία τριάδα στηλών η οποία δημιουργεί τιμή J χαρακτηριστικού ίση με n. Η συγκεκριμένη τριάδα στηλών, αν υπάρχει, χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του παράγοντα block τεσσάρων επιπέδων. Τέτοιοι ορθογώνιοι σχηματισμοί είναι γνωστό ότι υπάρχουν μόνο όταν το $n \equiv 0 \, mod \, 8$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο πίνακας πληροφορίας $\boldsymbol{M}$ του μοντέλου (3.3), γράφεται επίσης με τη χρήση των J χαρακτηριστικών του ορθογώνιου σχηματισμού. Τα σύμβολα 'B_1', 'B_2' και 'B_3' χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τις τρεις στήλες του σχηματισμού που χρησιμοποιούνται για να φτιαχτεί ο παράγοντας block, ενώ οι υπόλοιπες $m - 3$ στήλες χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των παράγοντων θεραπείας (συμβολίζονται με τους πρώτους k φυσικούς αριθμούς). Ακολουθώντας αυτό το συμβολισμό, οι $m = k + 3$ στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού αναπαρίστανται ως $\{B_1, B_2, B_3, 1, 2, \ldots, k\}$, σε ό,τι ακολουθεί. Δεδομένου ότι $J_1(s) = J_2(s) = 0$, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας πληροφορίας M για το μοντέλο (3.3).

$$
\begin{array}{c}
\\ I \\ x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ x_{b_3} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ \vdots \\ x_{k-1}x_k
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
I & x_{b_1} & x_{b_2} & x_{b_3} & x_1 & \cdots & x_k & x_1x_2 & \cdots & x_{k-1}x_k
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J_3(B_1,1,2) & \cdots & J_3(B_1,k-1,k) \\
0 & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 & J_3(B_2,1,2) & \cdots & J_3(B_2,k-1,k) \\
0 & 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 & J_3(B_3,1,2) & \cdots & J_3(B_3,k-1,k) \\
0 & 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & J_3(1,k-1,k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & J_3(1,2,k) & \cdots & 0 \\
0 & J_3(B_1,1,2) & J_3(B_2,1,2) & J_3(B_3,1,2) & 0 & \cdots & J_3(1,2,k) & n & \cdots & J_4(1,2,k-1,k) \\
0 & J_3(B_1,1,3) & J_3(B_2,1,3) & J_3(B_3,1,3) & 0 & \cdots & J_3(1,3,k) & 0 & \cdots & J_4(1,3,k-1,k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & J_3(B_1,k-1,k) & J_3(B_2,k-1,k) & J_3(B_3,k-1,k) & J_3(1,k-1,k) & \cdots & 0 & J_4(1,2,k-1,k) & \cdots & n
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Προφανώς, η τιμή της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας εξαρτάται από τις τιμές των J χαρακτηριστικών του ορθογώνιου σχηματισμού και οι τιμές των J χαρακτηριστικών εξαρτώνται απο την εκάστοτε επιλογή των τριών στηλών του ορθογώνιου σχηματισμού που έχουν επιλεχθεί για τη δημιουργία των block, βάσει της τεχνικής που παρουσιάστηκε παραπάνω. Τα ακόλουθα αποτελέσματα είναι ιδιαιτέρως χρήσιμα στην επιλογή της βέλτιστης επιλογής block όταν βρίσκονται υπο μελέτη $k = 2$ και $k = 3$ παράγοντες θεραπείας, χρησιμοποιώντας έναν ορθογώνιο σχηματισμό δύο επιπέδων, n εκτελέσεων.

Πρόταση 3.4 *Έστω ότι χρησιμοποιείται ένας ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με $m = 5$ στήλες και ισχύ $t = 2$, για την διερεύνηση $k = 2$ παραγόντων θεραπείας σε τέσσερα blocks εκτελέσεων μεγέθους $n/4$. Έστω ότι με B_1, B_2 και B_3 δηλώνονται οι τρεις στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που θα χρησιμοποιηθούν σαν στήλες block και με '1', '2'* *δηλώνονται οι υπόλοιπες δύο στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιούνται για τους δύο παράγοντες θεραπείας. Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου* (*3.3*), *ισούται με*

$$|\boldsymbol{M}| = n^5\left(n^2 - \sum_{|S|=3} J_S^2\right).$$

Απόδειξη

Ο πίνακας πληροφορίας του μοντέλου (3.3) είναι ο

$$\begin{array}{c} \\ I \\ x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ x_{b_3} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} I & x_{b_1} & x_{b_2} & x_{b_3} & x_1 & x_2 & x_1x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3(B_1,1,2) \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & J_3(B_2,1,2) \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & J_3(B_3,1,2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & J_3(B_1,1,2) & J_3(B_2,1,2) & J_3(B_3,1,2) & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \end{array}$$

Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας είναι $|\boldsymbol{M}| = n^5\left(n^2 - \sum_{|S|=3} J_S^2\right)$. □

Πρόταση 3.5 *Έστω ότι χρησιμοποιείται ένας ορθογώνιος σχηματισμός n εκτελέσεων με $m = 6$ στήλες και ισχύ $t = 2$, για την διερεύνηση $k = 3$ παραγόντων θεραπείας σε τέσσερα blocks εκτελέσεων μεγέθους $n/4$. Έστω ότι με B_1, B_2 και B_3 δηλώνονται οι τρεις στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που θα χρησιμοποιηθούν σαν στήλες block και με ΄1΄, ΄2΄, ΄3΄ δηλώνονται οι υπόλοιπες τρεις στήλες του ορθογώνιου σχηματισμού που χρησιμοποιούνται για τους τρεις παράγοντες θεραπείας. Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου* (*3.3*), *ισούται με*

$$|\boldsymbol{M}| = n^4\left[\left(n^2 - J_3^2(1,2,3)\right)^3 - \left(n^2 - J_3^2(1,2,3)\right)^2 SS_1 + \left(n^2 - J_3^2(1,2,3)\right) SS_2 - |\boldsymbol{C}|^2\right],$$

όπου $\boldsymbol{C}$ είναι ο ακόλουθος 3×3 πίνακας

$$\begin{pmatrix} J_3(B_1,1,2) & J_3(B_1,1,3) & J_3(B_1,2,3) \\ J_3(B_2,1,2) & J_3(B_2,1,3) & J_3(B_2,2,3) \\ J_3(B_3,1,2) & J_3(B_3,1,3) & J_3(B_3,2,3) \end{pmatrix}$$

ενώ SS_1 και SS_2 αποτελούν τα αθροίσματα των τετραγώνων για όλους τους 1×1 και 2×2 υποπίνακες του πίνακα $\boldsymbol{C}$, αντιστοίχως.

Απόδειξη

Μπορεί να δειχθεί ότι ο πίνακας πληροφορίας M του μοντέλου

$$y = \beta_0 + \beta_{b_1} x_{b_1} + \beta_{b_2} x_{b_2} + \beta_{b_3} x_{b_3} + \sum_{i=1}^{3} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \beta_{ij} x_i x_j,$$

είναι ο

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n\boldsymbol{I_3} & \boldsymbol{0_{3\times 3}} & \boldsymbol{C} \\ 0 & \boldsymbol{0_{3\times 3}} & n\boldsymbol{I_3} & \boldsymbol{D} \\ 0 & \boldsymbol{C^T} & \boldsymbol{D} & n\boldsymbol{I_3} \end{pmatrix}$$

όπου

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_3(1,2,3) \\ 0 & J_3(1,2,3) & 0 \\ J_3(1,2,3) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα πληροφορίας M μπορεί να εκφραστεί με βάση τον τύπο που δόθηκε, μετά από τις κατάλληλες πράξεις. □

Παράδειγμα 3.5

Σε ένα πείραμα θα μελετηθούν τρεις παράγοντες δύο επιπέδων. Το πείραμα θα εκτελεστεί σε τέσσερα blocks μεγέθους 4, χρησιμοποιώντας έναν $OA(16, 6, 2, 2)$. Υπάρχουν συνολικά 27 μη ισόμορφοι ορθογώνιοι σχηματισμοί $OA(16, 6, 2, 2)$, αλλά μόνο δέκα εξ αυτών περιέχουν τριάδες στηλών με τιμή J χαρακτηριστικού ίση με 16 (συμβολίζονται με D_1, D_2, …, D_{10} αντιστοίχως).

S	J χαρακτηριστικά					S	J χαρακτηριστικά				
	D_5	D_6	D_7	D_9	D_{10}		D_5	D_6	D_7	D_9	D_{10}
$\{A, B, C\}$	16	16	16	16	16	$\{A, B, D\}$	0	0	0	0	0
$\{A, B, E\}$	0	0	0	0	0	$\{A, B, F\}$	0	0	0	0	0
$\{A, C, D\}$	0	0	0	0	0	$\{A, C, E\}$	0	0	0	0	0
$\{A, C, F\}$	0	0	0	0	0	$\{A, D, E\}$	8	8	8	0	0
$\{A, D, F\}$	8	0	0	0	0	$\{A, E, F\}$	0	0	0	0	0
$\{B, C, D\}$	0	0	0	0	0	$\{B, C, E\}$	0	0	0	0	0
$\{B, C, F\}$	0	0	0	0	0	$\{B, D, E\}$	8	8	8	0	0
$\{B, D, F\}$	-8	0	0	0	0	$\{B, E, F\}$	0	0	0	0	0
$\{C, D, E\}$	0	0	0	0	0	$\{C, D, F\}$	0	0	0	0	0
$\{C, E, F\}$	0	0	0	0	0	$\{D, E, F\}$	0	8	0	8	0

Πίνακας 3.16: Τα J χαρακτηριστικά των πέντε επιλεγμένων μη ισόμορφων OA(16,6,2,2)

Ο Πίνακας 3.16, παρουσιάζει τα J χαρακτηριστικά των ορθογώνιων σχηματισμών D_5, D_6, D_7, D_9 και D_{10}, οι οποίοι αποτελούν και τους πιο ανταγωνιστικούς σχηματισμούς για το υπό μελέτη πείραμά μας. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι υπόλοιποι πέντε ορθογώνιοι σχηματισμοί εξαιρέθηκαν, λόγω του ότι δεν μπορούσαν να εκτιμήσουν τις παραμέτρους του μοντέλου (3.3). Οι τρεις πρώτες στήλες κάθε σχηματισμού που απεικονίζεται (οι οποίες συμβολίζονται ως $\{A, B, C\}$) δημιουργούν μία τριπλέτα η οποία έχει J χαρακτηριστικό ίσο με τον αριθμό των εκτελέσεων και επομένως, αυτές οι τρεις στήλες θα δημιουργήσουν τον αντίστοιχο παράγοντα block. Οι υπόλοιπες τρεις στήλες (οι οποίες συμβολίζονται ως $\{D, E, F\}$) θα χρησιμοποιηθούν για την τοποθέτηση των τριών παραγόντων θεραπείας. Οι αντίστοιχοι πίνακες $\boldsymbol{C}$, καθώς και οι τιμές των SS_1, SS_2 και $J_3(1,2,3)$ που είναι απαραίτητες με βάση τον τύπο υπολογισμού της ορίζουσας του πίνακα πληροφορίας $|\boldsymbol{M}|$ παρουσιάζονται παρακάτω.

	D_5	D_6	D_7	D_9	D_{10}
$\boldsymbol{C}$	$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
SS_1	$4 \cdot 8^2$	$2 \cdot 8^2$	$2 \cdot 8^2$	0	0
SS_2	$2 \cdot 64^2$	0	0	0	0
$J_3(1,2,3)$	0	8	0	8	0
$\lvert\boldsymbol{M}\rvert$	$5 \cdot 16^9$	$36 \cdot 16^8$	$8 \cdot 16^9$	$108 \cdot 16^8$	16^{10}

Γίνεται αντιληπτό, ότι η καλύτερη επιλογή είναι η χρήση του ορθογώνιου σχηματισμού D_{10} και για την δημιουργία του παράγοντα block καλύτερη επιλογή αποτελεί η χρήση των τριών πρώτων στηλών του. Σε αυτή την περίπτωση οι παράμετροι του μοντέλου (3.3), εκτιμώνται με τη μέγιστη δυνατή D–αποδοτικότητα (ίση με 1), αφού ο πίνακας πληροφορίας του μοντέλου είναι διαγώνιος. □

Τρεις έως πέντε παράγοντες

Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστούν βέλτιστες διαμερίσεις των n εκτελέσεων σε τέσσερα ισομεγέθη blocks μελετώντας μη ισόμορφους ορθογώνιους σχηματισμούς που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για το σκοπό αυτό. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.17, προκύπτουν εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε, σε όλους τους δυνατούς μη ισόμορφους ορθογώνιους σχηματισμούς με n εκτελέσεις και m στήλες.

n	k	Blocks	Εκτελέσεις								Απόδοση (%)
16	3	B_1	6	5	3	0					100
		B_2	6	5	3	0					
		B_3	7	4	2	1					
		B_4	7	4	2	1					
	4	B_1	10	9	7	4					90.572
		B_2	13	8	6	3					
		B_3	14	11	5	0					
		B_4	15	12	2	1					
24	3	B_1	7	6	5	3	0	0			96.528
		B_2	6	6	5	3	1	0			
		B_3	7	5	4	2	2	1			
		B_4	7	4	4	3	2	1			
	4	B_1	0	0	7	11	13	14			92.798
		B_2	1	2	5	10	12	15			
		B_3	3	4	6	8	9	15			
		B_4	3	5	6	9	10	12			
	5	B_1	1	2	14	23	24	29			86.678
		B_2	3	4	9	20	26	31			
		B_3	7	8	13	17	18	30			
		B_4	6	11	12	16	21	27			
32	3	B_1	7	6	5	4	3	2	1	0	100
		B_2	7	6	5	4	3	2	1	0	
		B_3	7	6	5	4	3	2	1	0	
		B_4	7	6	5	4	3	2	1	0	
	4	B_1	0	3	5	6	8	11	13	14	100
		B_2	1	2	4	7	9	10	12	15	
		B_3	1	2	4	7	9	10	12	15	
		B_4	0	3	5	6	8	11	13	14	
	5	B_1	2	1	15	12	22	21	27	24	100
		B_2	0	5	11	14	18	23	25	28	
		B_3	3	6	8	13	17	20	26	31	
		B_4	4	7	10	9	19	16	30	29	

Πίνακας 3.17: Βέλτιστες τοποθετήσεις σε τέσσερα blocks μεγέθους n/4, για $16 \leq n \leq 32$

Οι εκτελέσεις που παρουσίαζονται με ένα αριθμό σε κάθε ένα από τα τέσσερα blocks κάθε περίπτωσης, μπορεί να παρασταθούν και στην μορφή που περιέχει +1 και –1, χρησιμοποιώντας τη δυαδική αναπαράσταση μήκους k για κάθε δεκαδικό αριθμό και αντικαθιστώντας τα μηδενικά με –1. Η τελευταία στήλη του Πίνακα 3.17 παρουσιάζει την τιμή της D-αποδοτικότητας που βρέθηκε σε κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα, τα τέσσερα blocks που παρουσιάζονται για $n = 16$ και $k = 3$ προκύπτουν ως εξής:

Για τα blocks B_1 και B_2, προκύπτουν οι εξής δυαδικές αναπαραστάσεις

$6_{10} = 110_2 \quad 5_{10} = 101_2 \quad 3_{10} = 011_2$ και $0_{10} = 000_2$

Για τα blocks B_3 και B_4, προκύπτουν τα

$7_{10} = 111_2 \quad 4_{10} = 100_2 \quad 2_{10} = 010_2$ και $1_{10} = 001_2$

Με αντικατάσταση των μηδενικών με –1, προκύπτουν τα παρακάτω blocks, τα οποία και οδηγούν στο βέλτιστο σχεδιασμό.

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων με ελάχιστη απόκλιση

Ένα εκ των σημαντικότερων και πιο διαδεδομένων κριτηρίων για την ομαδοποίηση των πειραματικών σχεδιασμών με n γραμμές, m στήλες με s επίπεδα, είναι αυτό της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης, όπως παρουσιάστηκε από τους Ma and Fang (2001) και Xu and Wu (2001) και περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Οι βέλτιστοι σχεδιασμοί ως προς το κριτήριο της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης λέγονται Generalized Minimum Aberration (GMA) σχεδιασμοί. Όταν το πλήθος των γραμμών n είναι πολλαπλάσιο του s^2, τότε οι σχεδιασμοί αυτοί ανήκουν στην κατηγορία των Ορθογώνιων Σχηματισμών (OA) αφού, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 και στην παράγραφο 2.5, τα δύο πρώτα στοιχεία του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης θα είναι ίσα με το μηδέν.

Η στατιστική αξία των GMA ορθογώνιων σχηματισμών (με ισχύ $t \geq 2$) έχει μελετηθεί και παρουσιαστεί σε αρκετές εργασίες στη διεθνή βιβλιογραφία (ενδεικτικά Xu and Wu (2001), Xu, Cheng and Wu (2004), Sartono, Goos and Schoen (2012), μεταξύ άλλων). Παρόλα ταύτα, η άμεση κατασκευή GMA σχεδιασμών με n εκτελέσεις, m παράγοντες με s επιπέδα θεωρείται δύσκολη διαδικασία και ως εκ τούτου αρκετές τεχνικές και πιθανοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί στη σχετική βιβλιογραφία (επιγραμματικά παραθέτονται οι εργασίες των Fang, Zhang and Li (2007), Sun, Liu and Hao (2009), Bulutoglu and Ryan (2015)). Μια συνήθης τεχνική για την εύρεση των GMA σχεδιασμών είναι η εύρεση της πλήρους λίστας των μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών OA(n, m, s, t) και κατόπιν, η επιλογή του βέλτιστου εξ αυτών με βάση το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης. Η εύρεση GMA σχεδιασμών με βάση αυτή την τεχνική, δυστυχώς παρουσιάζει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, ειδικά σε περιπτώσεις που το πλήθος των γραμμών, των στηλών και των επιπέδων του πίνακα λαμβάνουν μεγάλες τιμές. Ως εκ τούτου, και επειδή δεν υπάρχει ακόμα στη βιβλιογραφία πλήρης λίστα μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών για διάφορους συνδυασμούς με n, m και s, η τεχνική αυτή δεν μπορεί να αναδείξει GMA σχεδιασμούς για αρκετές περιπτώσεις σχεδιασμών. Για παράδειγμα, για σχεδιασμούς τριών επιπέδων, πλήρης λίστα μη ισόμορφων ορθογώνιων σχηματισμών υπάρχει μόνο για τις περιπτώσεις που οι εκτελέσεις του πειράματος είναι n =9, 18 ή 27 (ακολουθώντας τα αποτελέσματα των Evangelaras, Koukouvinos and Lappas (2007, 2011), Schoen, Eendebak and Nguyen (2010)), ενώ αποτελέσματα για απαρίθμηση ορθογώνιων σχηματισμών με ισχύ 3 παρουσιάζονται και στις εργασίες Hedayat, Seiden and Stufken (1997), Sartono, Goos and Schoen (2012).

Ακριβώς αυτό το κενό στη βιβλιογραφία, της άμεσης κατασκευής ορθογώνιων σχηματισμών τριών επιπέδων που πληρούν το κριτήριο γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης, καλείται να καλύψει η παρούσα ενότητα. Ακολουθώντας την κατάλληλη μέθοδο, θα κατασκευαστούν όλοι οι GMA ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων με $n \equiv 0$ mod 9 γραμμές και με τρεις, τέσσερις και πέντε παράγοντες. Βασική προϋπόθεση της κατασκευής, είναι το γεγονός ότι οι GMA σχηματισμοί θα παράγουν GMA σχηματισμούς όταν προβάλλονται σε χαμηλότερες διαστάσεις (όταν δηλαδή από τις m στήλες του σχεδιασμού, επιλέγονται κάποιες για το σχηματισμό νέου σχεδιασμού), κάτι το οποίο είναι απολύτως λογικό αφού, αν κάτι τέτοιο δεν ισχύει τότε ο σχεδιασμός δεν θα ήταν GMA. Όλα τα αποτελέσματα του παρόντος Κεφαλαίου προέκυψαν με τη χρήση των κλασσικών βωβών μεταβλητών για s=3 επίπεδα (γραμμικό - τετραγωνικό σύστημα βωβών μεταβλητών). Η κατασκευαστική μέθοδος βασίζεται στο σωστό χειρισμό και στη σωστή επιλογή των τιμών του διανύσματος των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$ όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2 και στην παράγραφο 2.5.

Όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2, σε ένα σχεδιασμό D με n εκτελέσεις και m παράγοντες με τρία επίπεδα, το διάνυσμα πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$, το διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$ και ο πίνακας $\mathbf{C}$ των βωβών μεταβλητών του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού, συνδέονται με την ακόλουθη σχέση

$$\boldsymbol{a} = 3^{-m}\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{J}.$$

Σύμφωνα με αυτή τη σχέση, μπορεί να κατασκευαστεί σχεδιασμός με βάση ένα συγκεκριμένο διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$ αρκεί οι τιμές που χρησιμοποιούνται στο διάνυσμα αυτό να παράγουν μη αρνητικές ακέραιες τιμές στο διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ που, όπως έχουμε δει, ορίζει μονοσήμαντα το σχεδιασμό. Καταφέρνοντας να κατασκευάσουμε σχεδιασμούς με ελάχιστες τιμές γενικευμένων J χαρακτηριστικών (κατά απόλυτη τιμή), οδηγούμαστε στην ελαχιστοποίηση και συνεπώς στη βελτιστοποίηση των τιμών των ποσοτήτων $A_j^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης και ως εκ τούτου, κατασκευάζουμε GMA σχεδιασμούς. Η κατασκευή λοιπόν ενός GMA σχεδιασμού D, μέσω της εύρεσης των στοιχείων του διανύσματος των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$, μπορεί να επιτευχθεί με σωστή επιλογή των στοιχείων του διανύσματος γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$. Η μέθοδος επικεντρώνεται στην κατασκευή GMA ορθογώνιων σχηματισμών με ισχύ $t \geq 2$, οπότε και οι τιμές των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}^1$ και $\mathbf{J}^2$ θέτονται ίσες με μηδέν, αφού εξ ορισμού οι ορθογώνιοι σχηματισμοί ισχύος t έχουν $A_j^g(D) = 0$ όταν $j \leq t$.

4.1 GMA ορθογώνιοι σχηματισμοί με τρεις παράγοντες

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν όλες οι δυνατές τιμές των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\boldsymbol{J}^3$ καθώς και όλοι οι εν δυνάμει GMA σχεδιασμοί με m = 3 παράγοντες. Έστω D ορθογώνιος σχηματισμός τριών επιπέδων ισχύος $t \geq 2$, με n εκτελέσεις και m = 3 παράγοντες, τους X, Y, Z. Ο αντίστοιχος πίνακας βωβών μεταβλητών $\boldsymbol{C}_D$ του D θυμίζουμε ότι θα αποτελείται από:

- μία στήλη με μονάδες,
- τον πίνακα $\boldsymbol{C}_D^1$, ο οποίος απαρτίζεται από τρεις στήλες με τις γραμμικές και από τρεις με τις τετραγωνικές συνιστώσες των κύριων επιδράσεων,
- τον πίνακα $\boldsymbol{C}_D^2$, ο οποίος εμπεριέχει τις συνιστώσες των αλληλεπιδράσεων δύο παραγόντων, τις ll (γραμμική x γραμμική), lq (γραμμική x τετραγωνική), ql (τετραγωνική x γραμμική) και qq (τετραγωνική x τετραγωνική) για κάθε αλληλεπίδραση,

και

- τον πίνακα $\boldsymbol{C}_D^3$, οι στήλες του οποίου περιέχουν τις συνιστώσες των αλληλεπιδράσεων τριών παραγόντων δηλαδή τις lll (γραμμική x γραμμική x γραμμική), llq (γραμμική x γραμμική x τετραγωνική), lql (γραμμική x τετραγωνική x γραμμική), qll (τετραγωνική x γραμμική x γραμμική), lqq (γραμμική x τετραγωνική x τετραγωνική), qlq (τετραγωνική x γραμμική x τετραγωνική), qql (τετραγωνική x τετραγωνική x γραμμική) και qqq (τετραγωνική x τετραγωνική x τετραγωνική).

Πρόταση 4.1: *Έστω D να είναι ο $OA(n, 3, 3, t)$ με ισχύ $t \geq 2$. Τα γενικευμένα J χαρακτηριστικά τριών παραγόντων που αντιστοιχούν στις βωβές μεταβλητές llq, lql και qll είναι πολλαπλάσια του* 3, *ενώ των lqq, qlq, qql και qqq είναι πολλαπλάσια του* 9.

Απόδειξη

Έστω $a_i,\ i = 0, 1, \dots, 26$, ο αριθμός των φορών που το διάνυσμα – γραμμή $\boldsymbol{i}$ του πλήρους 3^m παραγοντικού σχεδιασμού παρουσιάζεται σαν εκτέλεση στον D και $\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, a_2\ \dots, a_{26}]^T$ είναι το αντίστοιχο διάνυσμα πολλαπλοτήτων, το οποίο χαρακτηρίζει μονοσήμαντα τον σχεδιασμό D. Από τη σχέση $\mathbf{J} = \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a}$ δημιουργείται ένα σύστημα 27 γραμμικών εξισώσεων, όπου οι άγνωστοι είναι οι ποσότητες των πολλαπλοτήτων a_i, $\mathbf{C} = [\mathbf{I}, \mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3]$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των βωβών μεταβλητών του 3^3 πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού και $\mathbf{J} = [\mathrm{n}, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3]^T$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων J χαρακτηριστικών του D. Δεδομένου ότι ο D θέλουμε να είναι $OA(n, 3, 3, \mathrm{t})$ με ισχύ $t \geq 2$, έχουμε ότι το n είναι πολλαπλάσιο του 9, δηλαδή $n = 9k$, καθώς και ότι $\mathbf{J}^1 = 0$ και $\mathbf{J}^2 = 0$.

Με βάση τη σχέση $\mathbf{J}^j = \left(\mathbf{C}^j\right)^T \cdot \boldsymbol{a}, j = 1, 2$, δημιουργούμε ένα σύστημα 19 γραμμικών εξισώσεων με 27 αγνώστους (μη αρνητικούς ακεραίους), τις πολλαπλότητες a_i. Η επίλυση του συστήματος αυτού εξαρτάται από 8 μη αρνητικές ακέραιες μεταβλητές. Πιο αναλυτικά:

Από την σχέση $n = 9k$, προκύπτει ότι το άθροισμα όλων των πολλαπλοτήτων (που εξ ορισμού είναι ίσο με το πλήθος των εκτελέσεων του σχεδιασμού) ισούται με

$$\sum_{i=0}^{26} a_i = 9k$$

Από τη σχέση $\mathbf{J}^1 = (\mathbf{C}^1)^T \cdot \boldsymbol{a}$ προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις (δεδομένου ότι θα πρέπει $\mathbf{J}^1 = 0$),

$$-a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$
$$-a_0 - a_1 - a_2 + a_6 + a_7 + a_8 - a_9 - a_{10} - a_{11} + a_{15} + a_{16} + a_{17} - a_{18} - a_{19} - a_{20} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$
$$-a_0 + a_2 - a_3 + a_5 - a_6 + a_8 - a_9 + a_{11} - a_{12} + a_{14} - a_{15} + a_{17} - a_{18} + a_{20} - a_{21} + a_{23} - a_{24} + a_{26} = 0$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 - 2(a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17}) + a_{18} +$$
$$+ a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$
$$a_0 + a_1 + a_2 - 2(a_3 + a_4 + a_5) + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} - 2(a_{12} + a_{13} + a_{14}) + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} +$$
$$a_{19} + a_{20} - 2(a_{21} + a_{22} + a_{23}) + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$
$$a_0 - 2a_1 + a_2 + a_3 - 2a_4 + a_5 + a_6 - 2a_7 + a_8 + a_9 - 2a_{10} + a_{11} + a_{12} - 2a_{13} + a_{14} + a_{15} - 2a_{16} + a_{17} + a_{18} -$$
$$2a_{19} + a_{20} + a_{21} - 2a_{22} + a_{23} + a_{24} - 2a_{25} + a_{26} = 0$$

Από τη σχέση $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{C}^2)^T \cdot \boldsymbol{a}$ προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις (όπου και πάλι θα πρέπει $\mathbf{J}^2 = 0$),

$$a_0 + a_1 + a_2 - a_6 - a_7 - a_8 - a_{18} - a_{19} - a_{20} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$
$$-a_0 - a_1 - a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 - a_6 - a_7 - a_8 + a_{18} + a_{19} + a_{20} - 2a_{21} - 2a_{22} - 2a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$
$$-a_0 - a_1 - a_2 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9 + 2a_{10} + 2a_{11} - 2a_{15} - 2a_{16} - 2a_{17} - a_{18} - a_{19} - a_{20} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$$

$a_0 + a_1 + a_2 - 2a_3 - 2a_4 - 2a_5 + a_6 + a_7 + a_8 - 2a_9 - 2a_{10} - 2a_{11} + 4a_{12} + 4a_{13} + 4a_{14} - 2a_{15} - 2a_{16} - 2a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} - 2a_{21} - 2a_{22} - 2a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} = 0$
$a_0 - a_2 + a_3 - a_5 + a_6 - a_8 - a_{18} + a_{20} - a_{21} + a_{23} - a_{24} + a_{26} = 0$
$-a_0 + 2a_1 - a_2 - a_3 + 2a_4 - a_5 - a_6 + 2a_7 - a_8 + a_{18} - 2a_{19} + a_{20} + a_{21} - 2a_{22} + a_{23} + a_{24} - 2a_{25} + a_{26} = 0$
$-a_0 + a_2 - a_3 + a_5 - a_6 + a_8 + 2a_9 - 2a_{11} + 2a_{12} - 2a_{14} + 2a_{15} - 2a_{17} - a_{18} + a_{20} - a_{21} + a_{23} - a_{24} + a_{26} = 0$
$a_0 - 2a_1 + a_2 + a_3 - 2a_4 + a_5 + a_6 - 2a_7 + a_8 - 2a_9 + 4a_{10} - 2a_{11} - 2a_{12} + 4a_{13} - 2a_{14} - 2a_{15} + 4a_{16} - 2a_{17} + a_{18} - 2a_{19} + a_{20} + a_{21} - 2a_{22} + a_{23} + a_{24} - 2a_{25} + a_{26} = 0$
$a_0 - a_2 - a_6 + a_8 + a_9 - a_{11} - a_{15} + a_{17} + a_{18} - a_{20} - a_{24} + a_{26} = 0$
$-a_0 + 2a_1 - a_2 + a_6 - 2a_7 + a_8 - a_9 + 2a_{10} - a_{11} + a_{15} - 2a_{16} + a_{17} - a_{18} + 2a_{19} - a_{20} + a_{24} - 2a_{25} + a_{26} = 0$
$-a_0 + a_2 + 2a_3 - 2a_5 - a_6 + a_8 - a_9 + a_{11} + 2a_{12} - 2a_{14} - a_{15} + a_{17} - a_{18} + a_{20} + 2a_{21} - 2a_{23} - a_{24} + a_{26} = 0$
$a_0 - 2a_1 + a_2 - 2a_3 + 4a_4 - 2a_5 + a_6 - 2a_7 + a_8 + a_9 - 2a_{10} + a_{11} - 2a_{12} + 4a_{13} - 2a_{14} + a_{15} - 2a_{16} + a_{17} + a_{18} - 2a_{19} + a_{20} - 2a_{21} + 4a_{22} - 2a_{23} + a_{24} - 2a_{25} + a_{26} = 0$

Η επίλυση αυτού συστήματος των 19 εξισώσεων, δίνει την ακόλουθη λύση για τις τιμές a_i των πολλαπλοτήτων η οποία εξαρτάται από 8 ελέυθερες παραμέτρους r_i, $i = 1,2,\dots,8$, που προφανώς πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

$a_0 = r_2$	$a_9 = r_4$	$a_{18} = k - r_4 - r_2$
$a_1 = r_7 + r_6 - r_2$	$a_{10} = k - r_6 - r_4$	$a_{19} = -r_7 + r_4 + r_2$
$a_2 = k - r_7 - r_6$	$a_{11} = r_6$	$a_{20} = r_7$
$a_3 = k - r_8 - r_2$	$a_{12} = r_8 - r_4 + r_3$	$a_{21} = r_4 - r_3 + r_2$
$a_4 = r_8 - r_7 - r_6 + r_5$	$a_{13} = k - r_8 + r_6 - r_5 + r_4 - r_3$	$a_{22} = r_7 - r_4 + r_3 - r_2$
$a_5 = r_7 + r_6 - r_5$	$a_{14} = -r_6 + r_5 + r_1$	$a_{23} = k - r_7 - r_1$
$a_6 = r_8$	$a_{15} = k - r_8 - r_3$	$a_{24} = r_3$
$a_7 = k - r_8 - r_5$	$a_{16} = -k + r_8 + r_5 + r_3 + r_1$	$a_{25} = k - r_3 - r_1$
$a_8 = r_5$	$a_{17} = k - r_5 - r_1$	$a_{26} = r_1$

Με την αντικατάσταση της λύσης του συστήματος στην εξίσωση $\mathbf{J}^3 = (\boldsymbol{C}^3)^T \cdot \boldsymbol{a}$, προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές για την τιμή των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}^3$:

$$J_{lll} = 2k + r_8 - 2r_7 - r_6 - r_5 - r_4 - r_3 - 2r_2 + r_1$$
$$J_{llq} = 3(-r_8 - 2r_7 - r_6 - r_5 + r_4 + r_3 + 2r_2 + r_1)$$
$$J_{lql} = 3(-2k + r_8 + 2r_7 + r_6 - r_5 + r_4 - r_3 + 2r_2 + r_1)$$
$$J_{qll} = 3(-r_8 + r_6 + r_5 - r_4 - r_3 + r_1)$$
$$J_{lqq} = 9(-r_8 + 2r_7 + r_6 - r_5 - r_4 + r_3 - 2r_2 + r_1)$$
$$J_{qlq} = 9(-2k + r_8 + r_6 + r_5 + r_4 + r_3 + r_1)$$
$$J_{qql} = 9(-r_8 - r_6 + r_5 + r_4 - r_3 + r_1)$$
$$J_{qqq} = 9(-2k + 3r_8 - 3r_6 + 3r_5 - 3r_4 + 3r_3 + 3r_1)$$

όπου r_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ είναι οι 8 ελέυθερες παράμετροι (μη αρνητικοί ακέραιοι). Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα. □

Η πρόταση 4.1 κρίνεται μείζονος σημασίας στην παρούσα μελέτη, αφού μπορεί να απλοποιήσει τη διαδικασία αναζήτησης των ελάχιστων απόλυτων τιμών για το διάνυσμα $\mathbf{J}$. Η εύρεση αυτών των ελάχιστων απόλυτων τιμών πρέπει να οδηγεί σε αποδεκτές τιμές για το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$, μέσω της σχέσης $\boldsymbol{a}$=$3^{-\mathrm{m}}\mathbf{C}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{J}$. Η διαδικασία εύρεσης όλων των δυνατών $\mathbf{J}$ διανυσμάτων έχει αρκετά μεγάλο υπολογιστικό κόστος και έγινε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στην περίπτωση των τριών παραγόντων τριών επιπέδων, για τον αριθμό των εκτελέσεων n μπορεί να ισχύει ότι $n \equiv 0\ (mod\ 27)$, $n \equiv 9\ (mod\ 27)$ ή $n \equiv 18\ (mod\ 27)$. Για κάθε μία εξ αυτών, η αναζήτηση ξεκινά ελέγχοντας πρώτα το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{J}$ και συνεχίζεται ελέγχοντας διαδοχικά διανύσματα με μεγαλύτερες τιμές σαν στοιχεία (κατά απόλυτη τιμή).

Πιο αναλυτικά, το πρώτο διάνυσμα που ελέγχεται είναι το $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (0,0,0,0,0,0,0,0)$. Κατόπιν, με βάση την πρόταση 4.1, ελέγχονται όλα τα διανύσματα των ακεραίων που έχουν τη μορφή $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (\nu_1, 3\nu_2, 3\nu_3, 3\nu_4, 9\nu_5, 9\nu_6, 9\nu_7, 9\nu_8)$ με $\nu_i = 0, \pm1, \pm2, \dots$ και $i = 1,2,3,\dots,8$. Όταν βρεθεί αποδεκτή λύση για το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$, τότε υπολογίζεται η τιμή της ποσότητας $A_3^g(D)$. Εύκολα μπορεί να δειχτεί ότι η σχέση αυτή μπορεί να μετασχηματιστεί σε:

$$A_3^g(D) = [27\nu_1^2 + 81(\nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2) + 243(\nu_5^2 + \nu_6^2 + \nu_7^2) + 81\nu_8^2]/(8n^2)$$

Το υπολογιστικό κόστος μπορεί να ελαττωθεί σε ικανοποιητικό επίπεδο με τη χρήση της παραπάνω σχέσης, αφού έχοντας βρει μία αποδεκτή τιμή για την ποσότητα $A_3^g(D)$, μπορούμε να ελέγξουμε τις τιμές των ν_i έτσι ώστε να μην παράγεται τιμή του $A_3^g(D)$ μεγαλύτερη από την ήδη παραχθείσα. Σημειώνεται ότι η ελάχιστη τιμή της ποσότητας $A_3^g(D)$ που μπορεί να παραχθεί, επιτυγχάνεται όταν οι τιμές ν_i είναι ελάχιστες κατά απόλυτη τιμή.

Οι τιμές του διανύσματος $\mathbf{J}^3$, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή ενός GMA σχεδιασμού, παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 4.1. Η τελευταία στήλη του πίνακα δίνει την ελάχιστη τιμή της ποσότητας $A_3^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης για όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να δημιουργηθούν. Οι περιπτώσεις αυτές ομαδοποιούνται σε σχέση με τον αριθμό των εκτελέσεων n και όλες τις δυνατές επιλογές του, αφού $n = 27x + 9z$, με $z = 0,1,2$. Όταν $z = 0$, όλα τα στοιχεία του $\mathbf{J}^3$ διανύσματος είναι μηδέν, ενώ όταν $z = 1$ ή $z = 2$, υπάρχουν

12 διαφορετικές επιλογές των στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{J}^3$, οι οποίες και οδηγούν στη δημιουργία GMA ορθογώνιων σχηματισμών τριών παραγόντων με τρία επίπεδα.

Σε αρκετές εκ των περιπτώσεων που παρουσιάστηκαν, παρατηρούνται επιλογές οι οποίες έχουν μεγάλο αριθμό μηδενικών στοιχείων. Οι GMA σχηματισμοί οι οποίοι κατασκευάζονται με γνώμονα αυτές τις τιμές, κρίνονται πιο χρήσιμοι σε ερευνητές που χρησιμοποιούν το γραμμικό-τετραγωνικό σύστημα βωβών μεταβλητών σε ποσοτικούς παράγοντες για τη μοντελοποίηση της απόκρισης, αφού μία μηδενική τιμή υποδηλώνει μηδενική σύγχιση (aliasing) των βωβών μεταβλητών που γεννούν την επίδραση.

$n = 27x + 9z$										
	Επιλογή	J_{lll}	J_{llq}	J_{lql}	J_{qll}	J_{lqq}	J_{qlq}	J_{qql}	J_{qqq}	$A_3^g(D)$
$z = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z = 1$	1	0	6	6	6	0	0	0	-18	$162/n^2$
	2	0	-6	-6	6	0	0	0	-18	
	3	0	-6	6	-6	0	0	0	-18	
	4	0	6	-6	-6	0	0	0	-18	
	5	-3	-3	-3	-3	9	9	9	9	
	6	-3	-3	3	3	-9	-9	9	9	
	7	-3	3	-3	3	-9	9	-9	9	
	8	-3	3	3	-3	9	-9	-9	9	
	9	3	-3	-3	-3	-9	-9	-9	9	
	10	3	-3	3	3	9	9	-9	9	
	11	3	3	-3	3	9	-9	9	9	
	12	3	3	3	-3	-9	9	9	9	
$z = 2$	1	0	-6	-6	-6	0	0	0	18	$162/n^2$
	2	0	-6	6	6	0	0	0	18	
	3	0	6	-6	6	0	0	0	18	
	4	0	6	6	-6	0	0	0	18	
	5	-3	-3	-3	3	9	-9	-9	-9	
	6	-3	-3	3	-3	-9	9	-9	-9	
	7	-3	3	-3	-3	-9	-9	9	-9	
	8	-3	3	3	3	9	9	9	-9	
	9	3	-3	-3	3	-9	9	9	-9	
	10	3	-3	3	-3	9	-9	9	-9	
	11	3	3	-3	-3	9	9	-9	-9	
	12	3	3	3	3	-9	-9	-9	-9	

Πίνακας 4.1: Τιμές για το διάνυσμα $\boldsymbol{J^3}$ που οδηγούν σε GMA *OA*(n,3,3,t)

Το ακόλουθο θεώρημα συγκεντρώνει τις τιμές του διανύσματος των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$ του GMA ορθογώνιου σχηματισμού τριών παραγόντων με τρία επίπεδα.

Θεώρημα 4.1: *Έστω $n = 27x + 9z$, όπου x είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και $z = 0, 1, 2$. Τότε:*

- *Αν $z = 0$, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τριών παραγόντων με τρία επίπεδα, με $n = 27x$ εκτελέσεις, αν χρησιμοποιηθούν x αντίγραφα του πλήρους F_3.*

- *Αν* $z = 1$*, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τριών παραγόντων με τρία επίπεδα, με* $n = 27x + 9$ *εκτελέσεις, θέτοντας* $a_0 = a_5 = a_7 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = a_{19} = a_{21} = a_{26} = x + 1$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* x.
- *Αν* $z = 2$*, μπορεί να κατασκευαστεί GMA ορθογώνιος σχηματισμός τριών παραγόντων με τρία επίπεδα, με* $n = 27x + 18$ *εκτελέσεις, θέτοντας* $a_0 = a_5 = a_7 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = a_{19} = a_{21} = a_{26} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.

Απόδειξη

Για κάθε μία εκ των τριών περιπτώσεων, για τη διευκόλυνση των αντίστοιχων πράξεων, επιλέγεται η πρώτη επιλογή του Πίνακα 4.1 για τη δημιουργία του διανύσματος των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}^3$. Τα αποτελέσματα προκύπτουν με βάση τη σχέση $\boldsymbol{a}$=$3^{-\mathrm{m}}\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{J}$, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των συντελεστών των βωβών μεταβλητών $\mathbf{C}$ του πλήρους 3^3 παραγοντικού σχεδιασμού, τον διαγώνιο 27×27 πίνακα $\mathbf{N}$ και το διάνυσμα των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J} = [n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{J}^3]$. Προφανώς οποιαδήποτε από τις 12 επιλογές του Πίνακα 4.1 είναι αποδεκτή για τον σχηματισμό του διανύσματος $\mathbf{J}^3$, αλλά οι τιμές του διανύσματος των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$ ενδεχομένως να βρεθούν διαφορετικές, με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός διαφορετικού GMA ορθογώνιου σχηματισμού. □

Παράδειγμα 4.1

Θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν GMA σχεδιασμό με 45 εκτελέσεις για τη μελέτη των επιδράσεων τριών παραγόντων, A, B και C με τρία επίπεδα. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ο ζητούμενος GMA σχεδιασμός ανήκει σε μία εκ των περιπτώσεων του Θεωρήματος 4.1, και πιο συγκεκριμένα στην τρίτη περίπτωση (αφού $n = 45$ προκύπτει όταν στη σχέση $n = 27x + 9z$, τοποθετήσουμε $x = 1$ και $z = 2$). Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα του θεωρήματος, ο ζητούμενος GMA σχεδιασμός θα δημιουργηθεί όταν για τις πολλαπλότητες του $\boldsymbol{a}$ διανύσματος θέσουμε:

$$a_0 = a_5 = a_7 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = a_{19} = a_{21} = a_{26} = x = 1$$

και όλες οι υπόλοιπες πολλαπλότητες του $\boldsymbol{a}$ διανύσματος είναι ίσες με $x + 1 = 2$.

Προκύπτει ότι ο ζητούμενος σχεδιασμός είναι ο ακόλουθος:

i	*A*	*B*	*C*	***i***	*A*	*B*	*C*	***i***	*A*	*B*	*C*	***i***	*A*	*B*	*C*	***i***	*A*	*B*	*C*
0	0	0	0	**5**	0	1	2	**10**	1	0	1	**16**	1	2	1	**22**	2	1	1
1	0	0	1	**6**	0	2	0	**11**	1	0	2	**17**	1	2	2	**22**	2	1	1
1	0	0	1	**6**	0	2	0	**12**	1	1	0	**17**	1	2	2	**23**	2	1	2
2	0	0	2	**7**	0	2	1	**12**	1	1	0	**18**	2	0	0	**23**	2	1	2
2	0	0	2	**8**	0	2	2	**13**	1	1	1	**18**	2	0	0	**24**	2	2	0
3	0	1	0	**8**	0	2	2	**14**	1	1	2	**19**	2	0	1	**24**	2	2	0
3	0	1	0	**9**	1	0	0	**14**	1	1	2	**20**	2	0	2	**25**	2	2	1
4	0	1	1	**9**	1	0	0	**15**	1	2	0	**20**	2	0	2	**25**	2	2	1
4	0	1	1	**10**	1	0	1	**16**	1	2	1	**21**	2	1	0	**26**	2	2	2

Πίνακας 4.2: GMA *OA*(45,3,3,2)

Ο σχεδιασμός που δημιουργήθηκε έχει στο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης $A_1^g(D) = 0$, $A_2^g(D) = 0$, αφού $\mathbf{J}^1 = 0$ και $\mathbf{J}^2 = 0$. Άρα ο σχεδιασμός είναι ισορροπημένος και επιπλεόν είναι και ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ t = 2 και συνεπώς οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων θα είναι ασυσχέτιστες στο μοντέλο πρώτης τάξης. Βάσει των όσων έχουν παρουσιαστεί, μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο διάνυσμα των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}^3$, ίσο με $[0,-6,-6,-6{,}0{,}0{,}0{,}18\,]^T$. Άρα το διάνυσμα των γενικευμένων J χαρακτηριστικών είναι το

$$\boldsymbol{J} = [n,\boldsymbol{J}^1,\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}^3\,]^T = [45{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0,-6,-6,-6{,}0{,}0{,}0{,}18]^T.$$

Υπολογίζοντας την τιμή του $A_3^g(D)$ με βάση όσα έχουν παρουσιαστεί, προκύπτει ότι

$$A_3^g(D) = [27\nu_1^2 + 81(\nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2) + 243(\nu_5^2 + \nu_6^2 + \nu_7^2) + 81\nu_8^2]/(8n^2) = 162/n^2$$

Άρα ο σχεδιασμός που κατασκευάστηκε είναι ένας GMA ορθογώνιος σχηματισμός τριών παραγόντων με 45 εκτελέσεις και με γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης το

$$GWP(D) = \{A_1^g(D), A_2^g(D), A_3^g(D)\} = \{0, 0, 0.08\}. \qquad \square$$

4.2 GMA ορθογώνιοι σχηματισμοί με τέσσερις παράγοντες

Έστω τώρα ένας ορθογώνιος σχηματισμός D τριών επιπέδων με ισχύ $t \geq 2$, n εκτελέσεις και τέσσερις παράγοντες X, Y, Z και W. Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία, όπως στην περίπτωση των τριών παραγόντων, θέτονται οι ελάχιστες κατά απόλυτες τιμές του διανύσματος των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$ στη σχέση $\boldsymbol{a}$=$3^{-\mathrm{m}}\mathbf{C}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{J}$. Η προσαρμογή των τιμών του διανύσματος $\mathbf{J}$ είναι προφανώς πιο περίπλοκη από την περίπτωση των τριών παραγόντων. Είναι επίσης εμφανές ότι και σε αυτή την περίπτωση $\mathbf{J}^1 = 0$ και $\mathbf{J}^2 = 0$, άρα και οι ποσότητες $A_1^g(D) = A_2^g(D) = 0$.

Θεμελιώδης λίθος της παρούσας μελέτης αποτελεί η αρχή, ότι οι GMA ορθογώνιοι σχηματισμοί τεσσάρων παραγόντων που θα δημιουργηθούν, θα προκύψουν από επέκταση GMA ορθογώνιων σχηματισμών τριών παραγόντων, δηλαδή οι τιμές για την ποσότητα του ελαχίστου διανύσματος μήκους λέξης $A_3^g(D)$ θα πρέπει να είναι οι ελάχιστες δυνατές. Τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{J}^3$ θα πρέπει να επιλεχθούν καταλλήλως από τις τιμές του Πίνακα 4.1 για κάθε μία εκ των τεσσάρων επιλογών τριών από τις τέσσερις στήλες του D ($\{X, Y, Z\}$, $\{X, Y, W\}$, $\{X, Z, W\}$ και $\{Y, Z, W\}$). Αντιστοίχως, οι δεκαέξι δυνατές τιμές του διανύσματος $\mathbf{J}^4$ ($J_{llll}, J_{lllq}, \dots, J_{qqqq}$) θα πρέπει να εμπεριέχουν τις ελάχιστες εφικτές τιμές (κατά απόλυτη τιμή), ενώ παράλληλα οι τιμές θα πρέπει να παρέχουν μη αρνητικούς ακεραίους στο διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$. Οι κατάλληλες τιμές για το διάνυσμα $\mathbf{J}^4$ επιτυγχάνονται μέσω εξαντλητικής απαρίθμησης με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, αντιστοίχως της περίπτωσης των τριών παραγόντων. Η ακόλουθη πρόταση βοηθάει στον περιορισμό των δυνατών επιλογών και ως εκ τούτου και στην ελάττωση του υπολογιστικού κόστους.

Πρόταση 4.2 *Έστω D ένας $OA(n, 4, 3, t)$ με ισχύ $t \geq 2$. Αν οι τέσσερις υποπίνακες τριών παραγόντων του D πληρούν το κριτήριο της γενικευμένης ελάχιστης απόκλισης, τότε τα γενικευμένα J χαρακτηριστικά τεσσάρων παραγόντων που αντιστοιχούν στις βωβές μεταβλητές $llqq$, $lqlq$, $lqql$, $qllq$, $qlql$ και $qqll$ είναι πολλαπλάσια του 3, ενώ για των $lqqq$, $qlqq$, $qqlq$, $qqql$ και $qqqq$ είναι πολλαπλάσια του 9.*

Απόδειξη

Το αποτέλεσμα επιτυγχάνεται με την ίδια αλγεβρική προσέγγιση που εφαρμόστηκε στην πρόταση 4.1. Έστω a_i, $i = 0, 1, \dots, 80$, ο αριθμός των φορών που το διάνυσμα-γραμμή $\boldsymbol{i}$ του πλήρους 3^4 παραγοντικού σχεδιασμού παρουσιάζεται σαν εκτέλεση στον ορθογώνιο σχηματισμό D και $\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, a_2 \ \dots, a_{80}]^T$ είναι το αντίστοιχο διάνυσμα πολλαπλοτήτων, το οποίο ορίζει μονοσήμαντα τον ορθογώνιο σχηματισμό D. Με βάση τη σχέση $\mathbf{J} = \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{a}$, δημιουργείται ένα σύστημα 81 γραμμικών εξισώσεων, όπου οι άγνωστοι είναι οι ποσότητες των πολλαπλοτήτων a_i, ενώ $\mathbf{C} = [\mathbf{I}, \mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3, \mathbf{C}^4]$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των βωβών μεταβλητών του 3^4 πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού και $\mathbf{J} = [\mathrm{n}, \mathbf{J}^1, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3, \mathbf{J}^4]^T$ είναι το διάνυσμα των γενικευμένων J χαρακτηριστικών του D. Δεδομένου ότι ο D είναι $OA(n, 4, 3, t)$ με ισχύ $t \geq 2$ και οι τέσσερις υποπίνακες τριών παραγόντων του D είναι GMA σχεδιασμοί, προκύπτει ότι $n = 9k$, $\mathbf{J}^1 = 0$ και $\mathbf{J}^2 = 0$. Ακολουθώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 για το διάνυσμα $\mathbf{J}^3$, γνωρίζουμε ότι όλες οι τιμές των γενικευμένων J χαρακτηριστικών τριών παραγόντων $J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}$ και J_{qll} είναι πολλαπλάσια του 3, ενώ αντίστοιχα όλες οι τιμές J_{qql}, J_{qlq}, J_{lqq} και J_{qqq} είναι πολλαπλάσια του 9. Με βάση λοιπόν τη συνάρτηση $\mathbf{J}^j = \left(\mathbf{C}^j\right)^T \cdot \boldsymbol{a},\ j = 1, 2, 3$, δημιουργούμε ένα σύστημα 65 γραμμικών εξισώσεων με 81 αγνώστους, τις πολλαπλότητες a_i (οι οποίες εξ ορισμού πρέπει να είναι μη αρνητικές και ακέραιες). Η επίλυση του παραμετρικού συστήματος που δημιουργείται εξαρτάται από 16 μη αρνητικές ακέραιες μεταβλητές. Με την αντικατάσταση της παραμετρικής λύσης $\boldsymbol{a}$ στην εξίσωση $\boldsymbol{J}^4 = (\boldsymbol{C}^4)^T \cdot \boldsymbol{a}$, προκύπτει η επιβεβαίωση της πρότασης 4.2. □

Το ακόλουθο Θεώρημα παρουσιάζει τις τιμές του διανύσματος των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$, βάσει των οποίων δύναται η κατασκευή ενός GMA ορθογώνιου σχηματισμού τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων όταν ο αριθμός των εκτελέσεων n είναι πολλαπλάσιο του 9.

Θεώρημα 4.2 *Έστω* $n = 81x + 9w$, *όπου* x *είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και* $w = 0, 1, 2, \dots, 8$. *Τότε:*

- *Αν* $w = 0$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x$ *εκτελέσεων, αν χρησιμοποιηθούν* x *αντίγραφα του πλήρους* F_4.
- *Αν* $w = 1$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 9$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_1 = a_{17} = a_{21} = a_{33} = a_{40} = a_{47} = a_{59} = a_{63} = a_{79} = x + 1$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* x.
- *Αν* $w = 2$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 18$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_4 = a_8 = a_{10} = a_{12} = a_{20} = a_{24} = a_{28} = a_{30} = a_{36} = a_{44} = a_{50} = a_{52} = a_{56} = a_{60} = a_{68} = a_{70} = a_{72} = a_{76} = x + 1$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* x.
- *Αν* $w = 3$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 27$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_1 = a_3 = a_8 = a_9 = a_{14} = a_{16} = a_{20} = a_{22} = a_{24} = a_{27} = a_{32} = a_{34} = a_{38} = a_{40} = a_{42} = a_{46} = a_{48} = a_{53} = a_{56} = a_{58} = a_{60} = a_{64} = a_{66} = a_{71} = a_{72} = a_{77} = a_{79} = x + 1$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* x.

- *Αν* $w = 4$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 36$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_0 = a_1 = a_3 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = a_{17} = a_{19} = a_{21} = a_{23} = a_{25} = a_{29} = a_{31} = a_{33} = a_{35} = a_{37} = a_{39} = a_{41} = a_{43} = a_{45} = a_{47} = a_{49} = a_{51} = a_{55} = a_{57} = a_{59} = a_{61} = a_{63} = a_{65} = a_{67} = a_{69} = a_{72} = a_{77} = a_{79} = a_{80} = x + 1$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* x.
- *Αν* $w = 5$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 45$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_0 = a_1 = a_3 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = a_{17} = a_{19} = a_{21} = a_{23} = a_{25} = a_{29} = a_{31} = a_{33} = a_{35} = a_{37} = a_{39} = a_{41} = a_{43} = a_{45} = a_{47} = a_{49} = a_{51} = a_{55} = a_{57} = a_{59} = a_{61} = a_{63} = a_{65} = a_{67} = a_{69} = a_{72} = a_{77} = a_{79} = a_{80} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.
- *Αν* $w = 6$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 54$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_1 = a_3 = a_8 = a_9 = a_{14} = a_{16} = a_{20} = a_{22} = a_{24} = a_{27} = a_{32} = a_{34} = a_{38} = a_{40} = a_{42} = a_{46} = a_{48} = a_{53} = a_{56} = a_{58} = a_{60} = a_{64} = a_{66} = a_{71} = a_{72} = a_{77} = a_{79} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.
- *Αν* $w = 7$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 63$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_4 = a_8 = a_{10} = a_{12} = a_{20} = a_{24} = a_{28} = a_{30} = a_{36} = a_{44} = a_{50} = a_{52} = a_{56} = a_{60} = a_{68} = a_{70} = a_{72} = a_{76} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.
- *Αν* $w = 8$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 81x + 72$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_1 = a_{17} = a_{21} = a_{33} = a_{40} = a_{47} = a_{59} = a_{63} = a_{79} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.

Απόδειξη

Τα αποτελέσματα για κάθε τιμή του $w = 0, 1, 2, \dots, 8$ προκύπτουν από τη σχέση $\boldsymbol{a}$=$3^{-\mathrm{m}}\mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{J}$, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των συντελεστών των βωβών μεταβλητών $\mathbf{C}$ του πλήρους 3^4, τον αντίστοιχο 81×81 διαγώνιο πίνακα $\mathbf{N}$ και το διάνυσμα $\mathbf{J} = [n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{J}^3, \mathbf{J}^4]$ των γενικευμένων J χαρακτηριστικών. Οι τιμές για το διάνυσμα $\mathbf{J}^4$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3 που ακολουθεί (άνω τμήμα του πίνακα), ενώ οι τιμές για το διάνυσμα $\mathbf{J}^3$ είναι αυτές που δόθηκαν στον Πίνακα 4.1.

$n = 81x + 9w$																
$\boldsymbol{w}$	J_{llll}	J_{lllq}	J_{llql}	J_{lqll}	J_{qlll}	J_{llqq}	J_{lqlq}	J_{lqql}	J_{qllq}	J_{qlql}	J_{qqll}	J_{lqqq}	J_{qlqq}	J_{qqlq}	J_{qqql}	J_{qqqq}
0,1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	0	0	0	0	54
3	6	0	0	0	0	-18	-18	-18	-18	-18	-18	0	0	0	0	54
4	4	0	0	0	0	12	0	0	0	0	12	0	0	0	0	-108
5	-4	0	0	0	0	-12	0	0	0	0	-12	0	0	0	0	108
6	-6	0	0	0	0	18	18	18	18	18	18	0	0	0	0	-54
7	-6	0	0	0	0	-6	-6	-6	-6	-6	-6	0	0	0	0	-54

Επιλογή βάσει του Πίνακα 4.1 του διανύσματος $\mathbf{J}^3$									
	$z = 0$			$z = 1$			$z = 2$		
Αλληλεπίδραση	$w = 0$	$w = 3$	$w = 6$	$w = 1$	$w = 4$	$w = 7$	$w = 2$	$w = 5$	$w = 8$
$\{X, Y, Z\}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{X, Y, W\}$	1	1	1	3	1	1	1	1	3
$\{X, Z, W\}$	1	1	1	3	2	1	1	4	4
$\{Y, Z, W\}$	1	1	1	2	2	1	1	4	3
$A_3^g(D)$	0			$648/n^2$			$648/n^2$		
$A_4^g(D)$	0	$1458/n^2$	$1458/n^2$	0	$972/n^2$	$486/n^2$	$486/n^2$	$972/n^2$	0

Πίνακας 4.3: Τιμές για τα διανύσματα $\boldsymbol{J^4}$ και $\boldsymbol{J^3}$ που οδηγούν σε GMA *OA*(n,4,3,t)

Οι βέλτιστες τιμές των διανυσμάτων των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}^3$ και $\mathbf{J}^4$, βρέθηκαν με εξαντλητική απαρίθμηση με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή (παρεμφερής διαδικασία όπως στην περίπτωση των τριών παραγόντων). Στον ίδιο Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται και οι ελάχιστες τιμές των $A_3^g(D)$ και $A_4^g(D)$ του γενικευμένου μοτίβου μήκους λέξης, όπως προκύπτουν με βάση τις προσαρμογές που προτείνονται στο διάνυσμα των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$. □

Αξίζει να αναφερθεί ότι, όπως και στην περίπτωση των τριών παραγόντων έτσι και εδώ, υπάρχουν αρκετές ακόμα επιλογές του διανύσματος των γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$ που οδηγούν σε κατασκευή GMA ορθογώνιων σχηματισμών. Αναφορικά παρατίθεται ότι με την εξαντλητική απαρίθμηση προέκυψαν

- 72 λύσεις για τις περιπτώσεις $w = 1$ και $w = 8$,
- 216 λύσεις για τις $w = 2$ και $w = 7$,
- 497664 λύσεις για $w = 3$ και $w = 6$ και
- 33696 λύσεις για $w = 4$ και $w = 5$.

Τα διανύσματα $\mathbf{J}^4$ που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3, έχουν επιλεχθεί λόγω της παρουσίας πολλών μηδενικών αφού, όταν εφαρμόζεται το γραμμικό – τετραγωνικό σύστημα βωβών μεταβλητών, οι αντίστοιχες βωβές μεταβλητές που «γεννούν» τις αντίστοιχες στήλες δεν συγχέονται μεταξύ τους. Αν επιλεχθεί διαφορετική επιτρεπτή τιμή για το διάνυσμα $\mathbf{J}$, τότε οι τιμές του διανύσματος των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$ θα δημιουργήσουν διαφορετικούς GMA ορθογώνιους σχηματισμούς από αυτούς που παρουσιάστηκαν.

Παράδειγμα 4.2

Θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν GMA σχεδιασμό με 45 εκτελέσεις για τη μελέτη των επιδράσεων τεσσάρων παραγόντων, X, Y, Z και W τριών επιπέδων. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ο ζητούμενος GMA σχεδιασμός ανήκει σε μία εκ των περιπτώσεων του Θεωρήματος 4.1, και πιο συγκεκριμένα στην έκτη περίπτωση (αφού $n = 45$, επιτυγχάνει όταν στη σχέση $n = 81x + 45$, τοποθετήσουμε $x = 0$). Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα του θεωρήματος, θα κατασκευάσουμε σχεδιασμό ακολουθώντας τις εξής τιμές για το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$:

$$a_0 = a_1 = a_3 = a_8 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = a_{17} = a_{19} = a_{21} = a_{23} = a_{25} = a_{29} = a_{31} = a_{33} = a_{35} = a_{37} = a_{39} = a_{41} = a_{43} = a_{45} = a_{47} = a_{49} = a_{51} = a_{55} = a_{57} = a_{59} = a_{61} = a_{63} = a_{65} = a_{67} = a_{69} = a_{72} = a_{77} = a_{79} = a_{80} = x = 0$$

και όλες οι υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ ίσες με $x + 1$, δηλαδή ίσες με 1. Ο σχεδιασμός που κατασκευάζεται με αυτές τις τιμές των πολλαπλοτήτων του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

i	*X*	*Y*	*Z*	*W*	***i***	*X*	*Y*	*Z*	*W*	***i***	*X*	*Y*	*Z*	*W*	***i***	*X*	*Y*	*Z*	*W*	***i***	*X*	*Y*	*Z*	*W*
2	0	0	0	2	**16**	0	1	2	1	**32**	1	0	1	2	**50**	1	2	1	2	**66**	2	1	1	0
4	0	0	1	1	**18**	0	2	0	0	**34**	1	0	2	1	**52**	1	2	2	1	**68**	2	1	1	2
5	0	0	1	2	**20**	0	2	0	2	**36**	1	1	0	0	**53**	1	2	2	2	**70**	2	1	2	1
6	0	0	2	0	**22**	0	2	1	1	**38**	1	1	0	2	**54**	2	0	0	0	**71**	2	1	2	2
7	0	0	2	1	**24**	0	2	2	0	**40**	1	1	1	1	**56**	2	0	0	2	**73**	2	2	0	1
9	0	1	0	0	**26**	0	2	2	2	**42**	1	1	2	0	**58**	2	0	1	1	**74**	2	2	0	2
10	0	1	0	1	**27**	1	0	0	0	**44**	1	1	2	2	**60**	2	0	2	0	**75**	2	2	1	0
12	0	1	1	0	**28**	1	0	0	1	**46**	1	2	0	1	**62**	2	0	2	2	**76**	2	2	1	1
14	0	1	1	2	**30**	1	0	1	0	**48**	1	2	1	0	**64**	2	1	0	1	**78**	2	2	2	0

Πίνακας 4.4: GMA *OA*(45,4,3,2)

Για το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης του σχεδιασμού, προκύπτει ότι έχουμε $A_1^g(D) = 0$ και $A_2^g(D) = 0$, αφού $\mathbf{J}^1 = 0$ και $\mathbf{J}^2 = 0$. Άρα ο σχεδιασμός που κατασκευάστηκε είναι ισορροπημένος και ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ $t = 2$ και συνεπώς οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων θα είναι ασυσχέτιστες στο μοντέλο πρώτης τάξης.

Για το διάνυσμα $\mathbf{J}^3$, έχουμε

- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (0, -6, -6, -6, 0, 0, 0, 18)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των παραγόντων $\{X, Y, Z\}$ και $\{X, Y, W\}$.
- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (0, 6, 6, -6, 0, 0, 0, 18)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των παραγόντων $\{X, Z, W\}$ και $\{Y, Z, W\}$.

Άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{J}^3$ είναι το

$$[0, -6, -6, -6{,}0{,}0{,}0{,}18{,}0, -6, -6, -6{,}0{,}0{,}0{,}18{,}0{,}6{,}6, -6{,}0{,}0{,}0{,}18{,}0{,}6{,}6, -6{,}0{,}0{,}0{,}18\ ]^T$$

τιμή που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 και 4.3 (όταν z=2) και άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τιμή της ποσότητας $A_3^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης θα είναι ίση με $A_3^g(D) = 4 \cdot (162/n^2) = 648/n^2 = 0.32$.

Ελέγχοντας τις τιμές των γενικευμένων J χαρακτηριστικών τεσσάρων παραγόντων που δημιουργούν οι βωβές μεταβλητές, προκύπτει ότι το διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών τεσσάρων παραγόντων είναι ίσο το

$\boldsymbol{J}^4 = [-4, 0, 0, 0, 0, -12, 0, 0, 0, 0, -12, 0, 0, 0, 0{,}108\ \ ]^T$

Μέσω της σχέσης $A_j^g(D) = n^{-2} \sum_{k=1}^{c} \left| \sum_{i=1}^{n} X_{D_{ik}}^{j} \right|^2$, υπολογίζουμε ότι $A_4^g(D) = 972/n^2$ =0.48, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τη βέλτιστη τιμή της ποσότητας του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης, σύμφωνα με τον Πίνακα 4.3.

Άρα επιβεβαιώνεται ότι ο σχεδιασμός που κατασκευάστηκε είναι ένας GMA ορθογώνιος σχηματισμός τεσσάρων παραγόντων, με γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης το

$$GWP = \left\{A_1^g(D), A_2^g(D), A_3^g(D), A_4^g(D)\right\} = \{0, 0, 0.32, 0.48\}. \qquad \square$$

4.3 GMA ορθογώνιοι σχηματισμοί με πέντε παράγοντες

Η πολυπλοκότητα της μεθόδου, καθώς και το υπολογιστικό κόστος, αυξάνεται καθώς μεγαλώνει ο αριθμός των παραγόντων. Για να γίνει αντιληπτό το μέγεθος της αύξησης αυτής, αναφέρουμε ότι στην περίπτωση των τριών παραγόντων τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 προέκυψαν με τον έλεγχο μόνο 8 στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{J}^3$ (με βάση και τους περιορισμούς της Πρότασης 4.1). Αντιστοίχως, για την περίπτωση των τεσσάρων παραγόντων χρειάστηκαν 12^4 έλεγχοι για την εύρεση των ιδανικών επιλογών του διανύσματος $\mathbf{J}^3$ (είναι και οι λύσεις που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 4.1 για τις περιπτώσεις $z = 1$ και $z = 2$), και για κάθε μία εξ αυτών χρειάστηκε επιπλέον έλεγχος των δεκαέξι στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{J}^4$ (με βάση και τους περιορισμούς της Πρότασης 4.2) για να βρεθεί η βέλτιστη λύση.

Στην περίπτωση των πέντε παραγόντων, ο έλεγχος των στοιχείων που πρέπει να γίνει για το τελικό διάνυσμα γενικευμένων J χαρακτηριστικών $\mathbf{J}$ αυξάνεται εκθετικά. Αν, για παράδειγμα, εξετάζεται η περίπτωση $n = 243x + 18$, θα χρειαστεί να πραγματοποιηθούν 216^5 έλεγχοι για την οριστικοποίηση των $\mathbf{J}^3$ και $\mathbf{J}^4$ διανυσμάτων (υπάρχουν 216 διαφορετικές λύσεις όταν $w = 2$ για την περίπτωση των τεσσάρων παραγόντων) και κατόπιν, για κάθε μία εξ αυτών, απαιτείται έλεγχος για την εύρεση των 32 βέλτιστων τιμών του διανύσματος $\mathbf{J}^5$. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση των πέντε παραγόντων έχουν παρατηρηθεί περιπτώσεις, κατά τις οποίες ο GMA σχεδιασμός πέντε παραγόντων που προέκυψε δεν πληροί τις απαιτούμενες προϋποθέσεις. Η μεθοδολογία, όπως αναφέραμε, αναζητάει σχεδιασμούς οι οποίοι έχουν τις βέλτιστες ελάχιστες τιμές και για τις ποσότητες $A_3^g(D)$ και $A_4^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης. Δεδομένου, ότι ένας σχεδιασμός πέντε παραγόντων θα περιέχει 10 υποπίνακες τριών παραγόντων και 5 υποπίνακες τεσσάρων παραγόντων και εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα των πινάκων 4.1 και 4.3, αναμένουμε ότι ο GMA σχεδιασμός πέντε παραγόντων θα έχει τις ακόλουθες τιμές στο γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης

$$\left(A_3^g(D), A_4^g(D)\right) = \begin{cases} (0,0)\,, \acute{o}\tau\alpha\nu\ n \equiv 0\ (mod\ 81) \\ \left(0, 5\cdot\frac{1458}{n^2}\right), \acute{o}\tau\alpha\nu\ n \equiv 27 \text{ ή } 54\ (mod\ 81) \\ \left(10\cdot\frac{162}{n^2}, 0\right), \acute{o}\tau\alpha\nu\ n \equiv 9 \text{ ή } 72\ (mod\ 81) \\ \left(10\cdot\frac{162}{n^2}, 5\cdot\frac{486}{n^2}\right), \acute{o}\tau\alpha\nu\ n \equiv 18 \text{ ή } 63\ (mod\ 81) \\ \left(10\cdot\frac{162}{n^2}, 5\cdot\frac{972}{n^2}\right), \acute{o}\tau\alpha\nu\ n \equiv 36 \text{ ή } 45\ (mod\ 81) \end{cases}$$

Εάν, για παράδειγμα, αναζητηθεί ένας GMA σχεδιασμός με 27 εκτελέσεις και 5 παράγοντες, το αναμενόμενο είναι ότι η ποσότητα $A_3^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης θα ισούται με μηδέν και ως εκ τούτου για την εφαρμογή της μεθόδου θα έπρεπε να τοποθετηθεί η τιμή $\mathbf{J}^3 = \mathbf{0}$. Δυστυχώς όμως ένας τέτοιος σχεδιασμός δεν υφίσταται, αφού με βάση την εργασία των Evangelaras, Koukouvinos and Lappas (2011), και οι τέσσερις μη-ισόμορφοι GMA ορθογώνιοι σχηματισμοί με 27 εκτελέσεις και 5 παράγοντες που υπάρχουν, έχουν $A_3^g(D) = 2$ για την αντίστοιχη ποσότητα του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης.

Παρόλες τις προαναφερθείσες δυσκολίες, η μεθοδολογία παρείχε βέλτιστη λύση για GMA ορθογώνιους σχηματισμούς τριών επιπέδων με πέντε παράγοντες, για τις περιπτώσεις που το πλήθος των εκτελέσεων είναι $n \equiv 0, 18, 36, 81, 162, 207, 225 \ (mod\ 243)$. Παρακάτω παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές που πρέπει να επιλεχθούν για το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$, με σκοπό την δημιουργία ενός GMA σχεδιασμού πέντε παραγόντων τριών επιπέδων.

Θεώρημα 4.3 *Έστω $n = 243x + 9y$, όπου x είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και $y = 0, 2, 4, 9, 18, 23, 25$. Τότε:*

- *Αν $y = 0$, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, $n = 243x$ εκτελέσεων, αν χρησιμοποιηθούν x αντίγραφα του πλήρους* 3^5.
- *Αν $y = 2$, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, $n = 243x + 18$ εκτελέσεων, θέτοντας $a_8 = a_{12} = a_{28} = a_{50} = a_{70} = a_{72} = a_{91} = a_{105} = a_{111} = a_{125} = a_{137} = a_{157} = a_{166} = a_{182} = a_{198} = a_{214} = a_{222} = a_{230} = x + 1$ και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ ίσες με x.*
- *Αν $y = 4$, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, $n = 243x + 36$ εκτελέσεων, θέτοντας $a_1 = a_{11} = a_{13} = a_{24} = a_{27} = a_{34} = a_{41} = a_{48} = a_{59} = a_{69} = a_{73} = a_{80} = a_{85} = a_{89} = a_{90} = a_{104} = a_{114} = a_{121} = a_{127} = a_{134} = a_{135} = a_{146} = a_{151} = a_{156} = a_{165} = a_{179} = a_{180} = a_{187} = a_{194} = a_{199} = a_{204} = a_{209} = a_{218} = a_{223} = a_{228} = a_{238} = x + 1$ και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ ίσες με x.*
- *Αν $y = 9$, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, $n = 243x + 81$ εκτελέσεων, θέτοντας $a_2 = a_4 = a_6 = a_{10} = a_{12} = a_{17} = a_{18} = a_{23} = a_{25} = a_{28} = a_{30} = a_{35} = a_{36} = a_{41} = a_{43} = a_{47} = a_{49} = a_{51} = a_{54} = a_{59} = a_{61} = a_{65} = a_{67} = a_{69} = a_{73} = a_{75} = a_{80} = a_{82} = a_{84} = a_{89} = a_{90} = a_{95} = a_{97} = a_{101} = a_{103} = a_{105} = a_{108} = a_{113} = a_{115} = a_{119} = a_{121} = a_{123} = a_{127} = a_{129} = a_{134} = a_{137} = a_{139} = a_{141} = a_{145} = a_{147} = a_{152} = a_{153} = a_{158} = a_{160} = a_{162} = a_{167} = a_{169} = a_{173} = a_{175} = a_{177} = a_{181} = a_{183} = a_{188} = a_{191} = a_{193} = a_{195} = a_{199} = a_{201} = a_{206} = a_{207} = a_{212} = a_{214} = a_{217} = a_{219} = a_{224} = a_{225} = a_{230} = a_{232} = a_{236} = a_{238} = a_{240} = x + 1$ και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ ίσες με x.*
- *Αν $y = 18$, μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, $n = 243x + 162$ εκτελέσεων, θέτοντας $a_2 = a_4 = a_6 = a_{10} = a_{12} = a_{17} = a_{18} = a_{23} = a_{25} = a_{28} = a_{30} = a_{35} = a_{36} = a_{41} = a_{43} = a_{47} =$*

$a_{49} = a_{51} = a_{54} = a_{59} = a_{61} = a_{65} = a_{67} = a_{69} = a_{73} = a_{75} = a_{80} = a_{82} = a_{84} = a_{89} = a_{90} = a_{95} = a_{97} = a_{101} = a_{103} = a_{105} = a_{108} = a_{113} = a_{115} = a_{119} = a_{121} = a_{123} = a_{127} = a_{129} = a_{134} = a_{137} = a_{139} = a_{141} = a_{145} = a_{147} = a_{152} = a_{153} = a_{158} = a_{160} = a_{162} = a_{167} = a_{169} = a_{173} = a_{175} = a_{177} = a_{181} = a_{183} = a_{188} = a_{191} = a_{193} = a_{195} = a_{199} = a_{201} = a_{206} = a_{207} = a_{212} = a_{214} = a_{217} = a_{219} = a_{224} = a_{225} = a_{230} = a_{232} = a_{236} = a_{238} = a_{240} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.

- *Αν* $y = 23$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 243x + 207$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_1 = a_{11} = a_{13} = a_{24} = a_{27} = a_{34} = a_{41} = a_{48} = a_{59} = a_{69} = a_{73} = a_{80} = a_{85} = a_{89} = a_{90} = a_{104} = a_{114} = a_{121} = a_{127} = a_{134} = a_{135} = a_{146} = a_{151} = a_{156} = a_{165} = a_{179} = a_{180} = a_{187} = a_{194} = a_{199} = a_{204} = a_{209} = a_{218} = a_{223} = a_{228} = a_{238} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.
- *Αν* $y = 25$, *μπορεί να κατασκευάστει GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων,* $n = 243x + 225$ *εκτελέσεων, θέτοντας* $a_8 = a_{12} = a_{28} = a_{50} = a_{70} = a_{72} = a_{91} = a_{105} = a_{111} = a_{125} = a_{137} = a_{157} = a_{166} = a_{182} = a_{198} = a_{214} = a_{222} = a_{230} = x$ *και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος* $\boldsymbol{a}$ *ίσες με* $x + 1$.

Η βέλτιστη τιμή της ποσότητας $A_5^g(D)$ σε αυτές τις περιπτώσεις ισούται με

$$A_5^g(D) = \begin{cases} 0, \text{όταν } n = 243x \\ 0, \text{όταν } n = 243x + 18 \text{ ή } n = 243x + 225 \\ 972/n^2, \text{όταν } n = 243x + 36 \text{ ή } n = 243x + 207 \\ 13122/n^2, \text{όταν } n = 243x + 81 \text{ ή } n = 243x + 162 \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.3

Επιθυμούμε να κατασκευάσουμε GMA σχεδιασμό 36 εκτελέσεων για τη μελέτη των επιδράσεων πέντε παραγόντων τριών επιπέδων. Για την κατασκευή του σχεδιασμού εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3, βάσει του οποίου για την κατασκευή του ζητούμενου GMA σχεδιασμού αρκεί να θέσουμε τις εξής τιμές για το διάνυσμα των πολλαπλοτήτων $\boldsymbol{a}$:

$a_1 = a_{11} = a_{13} = a_{24} = a_{27} = a_{34} = a_{41} = a_{48} = a_{59} = a_{69} = a_{73} = a_{80} = a_{85} = a_{89} = a_{90} = a_{104} = a_{114} = a_{121} = a_{127} = a_{134} = a_{135} = a_{146} = a_{151} = a_{156} = a_{165} = a_{179} = a_{180} = a_{187} = a_{194} = a_{199} = a_{204} = a_{209} = a_{218} = a_{223} = a_{228} = a_{238} = x + 1 = 1$

και όλες τις υπόλοιπες πολλαπλότητες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ ίσες με $x = 0$ (αφού η κατασκευή αυτού του σχεδιασμού, ανάγεται στην τρίτη περίπτωση του θεωρήματος όταν $x = 0$). Ο σχεδιασμός που κατασκευάζεται με αυτές τις τιμές των πολλαπλοτήτων του διανύσματος $\boldsymbol{a}$ παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα:

$\boldsymbol{i}$	X	Y	Z	W	V	$\boldsymbol{i}$	X	Y	Z	W	V
1	0	0	0	0	1	**127**	1	1	2	0	1
11	0	0	1	0	2	**134**	1	1	2	2	2
13	0	0	1	1	1	**135**	1	2	0	0	0
24	0	0	2	2	0	**146**	1	2	1	0	2
27	0	1	0	0	0	**151**	1	2	1	2	1
34	0	1	0	2	1	**156**	1	2	2	1	0
41	0	1	1	1	2	**165**	2	0	0	1	0
48	0	1	2	1	0	**179**	2	0	1	2	2
59	0	2	0	1	2	**180**	2	0	2	0	0
69	0	2	1	2	0	**187**	2	0	2	2	1
73	0	2	2	0	1	**194**	2	1	0	1	2
80	0	2	2	2	2	**199**	2	1	1	0	1
85	1	0	0	1	1	**204**	2	1	1	2	0
89	1	0	0	2	2	**209**	2	1	2	0	2
90	1	0	1	0	0	**218**	2	2	0	0	2
104	1	0	2	1	2	**223**	2	2	0	2	1
114	1	1	0	2	0	**228**	2	2	1	1	0
121	1	1	1	1	1	**238**	2	2	2	1	1

Πίνακας 4.5: GMA *OA*(36,5,3,2)

Εργαζόμενοι όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα του κεφαλαίου, το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης του σχεδιασμού, προκύπτει ότι έχει $A_1^g(D) = 0$ και $A_2^g(D) = 0$, αφού $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^2 = 0$. Άρα ο σχεδιασμός που κατασκευάστηκε είναι ισορροπημένος και ορθογώνιος σχηματισμός με ισχύ $t = 2$ και συνεπώς οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων θα είναι ασυσχέτιστες στο μοντέλο πρώτης τάξης.

Το διάνυσμα $\mathbf{J}^3$ των γενικευμένων J χαρακτηριστικών τριών παραγόντων, έχει τις ακόλουθες τιμές:

- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (-3,-3,-3,-3,9,9,9{,}9)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των παραγόντων $\{X, Y, Z\}$.
- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (-3,-3{,}3,3,-9,-9,9,9)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των παραγόντων $\{X, Y, W\}$ και $\{Y, W, V\}$.
- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (0,-6,-6,6,0,0,0,-18)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των παραγόντων $\{X, Y, V\}$ και $\{Y, Z, W\}$.
- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (-3,3,-3{,}3,-9,9,-9,9)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{X, Z, W\}$.
- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (0,-6,6,-6,0,0,0,-18)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπίδρασης των παραγόντων $\{X, Z, V\}$, $\{X, W, V\}$ και $\{Y, Z, V\}$.
- $\left(J_{lll}, J_{llq}, J_{lql}, J_{qll}, J_{lqq}, J_{qlq}, J_{qql}, J_{qqq}\right) = (0,6,6,6,0,0,0,-18)$, για τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{Z, W, V\}$.

Όλες οι τιμές των γενικευμένων J χαρακτηριστικών τριών παραγόντων ανήκουν στις βέλτιστες τιμές του Πίνακα 4.1 και ως εκ τούτου προκύπτει ότι η τιμή της ποσότητας $A_3^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης σε αυτή την περίπτωση θα είναι ίση με $A_3^g(D) = 10 \cdot (162/n^2) = 1.25$. Αντίστοιχα, για το διάνυσμα $\mathbf{J}^4$ έχουμε τις ακόλουθες τιμές:

- $(J_{llll}, J_{lllq}, J_{llql}, J_{lqll}, , J_{llqq}, J_{lqlq}, J_{lqql}, J_{qllq}, J_{qlql}, J_{qqll}, J_{lqqq}, J_{qlqq}, J_{qqlq}, J_{qqql}, J_{qqqq}) = (2, -12, 6, 0, -6, 12, -18, 0, 0, 6, 0, 18, 0, 18, 0, 54)$, σύμφωνα με τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{X, Y, Z, W\}$.
- $(J_{llll}, J_{lllq}, J_{llql}, J_{lqll}, J_{qlll}, J_{llqq}, J_{lqlq}, J_{lqql}, J_{qllq}, J_{qlql}, J_{qqll}, J_{lqqq}, J_{qlqq}, J_{qqlq}, J_{qqql}, J_{qqqq}) = (-2, 6, 0, 0, 0, 0, 0, -18, 0, 30, 6, -18, -18, -18, 0, 0)$, σύμφωνα με τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{X, Y, Z, V\}$.
- $(J_{llll}, J_{lllq}, J_{llql}, J_{lqll}, J_{qlll}, J_{llqq}, J_{lqlq}, J_{lqql}, J_{qllq}, J_{qlql}, J_{qqll}, J_{lqqq}, J_{qlqq}, J_{qqlq}, J_{qqql}, J_{qqqq}) = (-5, -3, 3, 9, 3, 9, -21, 9, 9, -9, -3, -9, 9, 27, 9, 27)$, σύμφωνα με τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{X, Y, W, V\}$.
- $(J_{llll}, J_{lllq}, J_{llql}, J_{lqll}, J_{qlll}, J_{llqq}, J_{lqlq}, J_{lqql}, J_{qllq}, J_{qlql}, J_{qqll}, J_{lqqq}, J_{qlqq}, J_{qqlq}, J_{qqql}, J_{qqqq}) = (2, -6, -6, -6, 0, 6, -18, -6, 0, 0, 0, 18, 36, -36, 0, 0)$, σύμφωνα με τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{X, Z, W, V\}$.
- $(J_{llll}, J_{lllq}, J_{llql}, J_{lqll}, J_{qlll}, J_{llqq}, J_{lqlq}, J_{lqql}, J_{qllq}, J_{qlql}, J_{qqll}, J_{lqqq}, J_{qlqq}, J_{qqlq}, J_{qqql}, J_{qqqq}) = (2, 12, 12, 6, 0, 6, 0, 0, -6, -18, 0, 18, 0, 18, -18, 0)$, σύμφωνα με τις συνιστώσες της αλληλεπιδράσης των παραγόντων $\{Y, Z, W, V\}$.

Μέσω της σχέσης για τον υπολογισμό της ποσότητας $A_4^g(D)$, προκύπτει ότι η τιμή της είναι ίση με $A_4^g(D) = 5 \cdot (972/n^2) = 2.4$, αποτέλεσμα που έρχεται σε αντιστοιχία με τα όσα έχουν παρουσιαστεί.

Αντίστοιχα σκεπτόμενοι για το διάνυσμα $\mathbf{J}^5$, θα πρέπει να ελεγθούν οι τιμές των γενικευμένων J χαρακτηριστικών πέντε παραγόντων (των $\{X, Y, Z, W, V\}$):

J_{lllll}	J_{llllq}	J_{lllql}	J_{llqll}	J_{lqlll}	J_{qllll}	J_{lllqq}	J_{llqlq}	J_{llqql}	J_{lqllq}	J_{lqlql}	J_{lqqll}	J_{qlllq}	J_{qllql}	J_{qlqll}	J_{qqlll}
-2	2	-2	-2	2	2	6	6	-6	6	-6	-6	6	-6	-6	18
J_{llqqq}	J_{lqlqq}	J_{lqqlq}	J_{lqqql}	J_{qllqq}	J_{qlqlq}	J_{qlqql}	J_{qqllq}	J_{qqlql}	J_{qqqll}	J_{lqqqq}	J_{qlqqq}	J_{qqlqq}	J_{qqqlq}	J_{qqqql}	J_{qqqqq}
6	-6	-6	6	-6	-6	6	6	-6	-6	18	18	18	18	-18	-54

Από τις ποσότητες αυτές προκύπτει η τιμή $A_5^g(D) = 972/n^2 = 0.48$.

Εν κατακλείδι ο σχεδιασμός που κατασκευάστηκε είναι ένας GMA ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων, με γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης το

$$GWP(D) = \{A_1^g(D), A_2^g(D), A_3^g(D), A_4^g(D), A_5^g(D)\} = \{0, 0, 1.25, 2.4, 0.48\}. \qquad \square$$

Κατασκευή ικανοποιητικών σχεδιασμών για διάφορα πλήθη εκτελέσεων

Με τη χρήση των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 4.3 και τις ιδιότητες των κατασκευασμένων GMA σχεδιασμών, είναι εφικτή η κατασκευή ορθογώνιων σχηματισμών πέντε παραγόντων, οι οποίοι έχουν ελάχιστες τιμές για τις ποσότητες $A_3^g(D)$ και $A_4^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης, για τις περιπτώσεις που οι εκτελέσεις είναι $n = 243x + 99$, $n = 243x + 117$, $n = 243x + 180$ και $n = 243x + 198$. Ωστόσο, οι σχεδιασμοί αυτοί δεν μπορούν να εγγυηθούν ότι η ποσότητα $A_5^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης θα είναι η ελάχιστη δυνατή. Αυτοί οι σχεδιασμοί θεωρούνται καλή επιλογή (με βάση το GMA κριτήριο), όταν το ενδιαφέρον του ερευνητή αφορά τις κύριες επιδράσεις και τις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Πόρισμα 4.1 *Ορθογώνιος σχηματισμός πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, με ελάχιστες τιμές για τις ποσότητες $A_3^g(D)$ και $A_4^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης, μπορεί να κατασκευαστεί για τις ακόλουθες περιπτώσεις:*

- *Όταν $n = 243x + 99$, με την ένωση ενός GMA σχεδιασμού $n = 243x + 18$ εκτελέσεων και ενός GMA σχεδιασμού 81 εκτελέσεων.*
- *Όταν $n = 243x + 117$, με την ένωση ενός GMA σχεδιασμού $n = 243x + 36$ εκτελέσεων και ενός GMA σχεδιασμού 81 εκτελέσεων.*
- *Όταν $n = 243x + 180$, με την ένωση ενός GMA σχεδιασμού $n = 243x + 18$ εκτελέσεων και ενός GMA σχεδιασμού 162 εκτελέσεων.*
- *Όταν $n = 243x + 198$, με την ένωση ενός GMA σχεδιασμού $n = 243x + 36$ εκτελέσεων και ενός GMA σχεδιασμού 162 εκτελέσεων.*

Είναι εμφανές, ότι οι τιμές των ποσοτήτων $A_3^g(D)$ και $A_4^g(D)$ του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης για τους σχεδιασμούς που κατασκευάζονται, θα είναι οι ελάχιστες δυνατές, αφού οι GMA σχεδιασμοί 81 και 162 εκτελέσεων με πέντε παράγοντες έχουν $(A_3^g(D), A_4^g(D)) = (0,0)$.

Παράδειγμα 4.4

Επιθυμούμε την κατασκευή σχεδιασμού 117 εκτελέσεων για τη μελέτη των επιδράσεων πέντε παραγόντων τριών επιπέδων, ο οποίος να έχει ελάχιστες τιμές για τις ποσότητες A_3^g και A_4^g του γενικευμένου διανύσματος μήκους λέξης. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 4.1, μπορεί να δημιουργηθεί ορθογώνιος σχηματισμός με την ένωση ενός GMA σχεδιασμού 36 εκτελέσεων και ενός GMA σχεδιασμού 81 εκτελέσεων. Ο ορθογώνιος σχηματισμός της ένωσης παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.6. Για τη δημιουργία των δύο GMA σχεδιασμών, ακολουθήσαμε την κατασκευαστική μέθοδο του Θεωρήματος 4.3.

X	Y	Z	W	V	$\boldsymbol{i}$
0	0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	2	**11**
0	0	1	1	1	**13**
0	0	2	2	0	**24**
0	1	0	0	0	**27**
0	1	0	2	1	**34**
0	1	1	1	2	**41**
0	1	2	1	0	**48**
0	2	0	1	2	**59**
0	2	1	2	0	**69**
0	2	2	0	1	**73**
0	2	2	2	2	**80**
1	0	0	1	1	**85**
1	0	0	2	2	**89**
1	0	1	0	0	**90**
1	0	2	1	2	**104**
1	1	0	2	0	**114**
1	1	1	1	1	**121**
1	1	2	0	1	**127**
1	1	2	2	2	**134**
1	2	0	0	0	**135**
1	2	1	0	2	**146**
1	2	1	2	1	**151**
1	2	2	1	0	**156**
2	0	0	1	0	**165**
2	0	1	2	2	**179**
2	0	2	0	0	**180**
2	0	2	2	1	**187**
2	1	0	1	2	**194**
2	1	1	0	1	**199**
2	1	1	2	0	**204**
2	1	2	0	2	**209**
2	2	0	0	2	**218**
2	2	0	2	1	**223**
2	2	1	1	0	**228**
2	2	2	1	1	**238**
0	0	0	0	2	**2**
0	0	0	1	1	**4**
0	0	0	2	0	**6**
0	0	1	0	1	**10**
0	0	1	1	0	**12**
0	0	1	2	2	**17**
0	0	2	0	0	**18**
0	0	2	1	2	**23**
0	0	2	2	1	**25**
0	1	0	0	1	**28**
0	1	0	1	0	**30**
0	1	0	2	2	**35**
0	1	1	0	0	**36**
0	1	1	1	2	**41**
0	1	1	2	1	**43**
0	1	2	0	2	**47**
0	1	2	1	1	**49**
0	1	2	2	0	**51**
0	2	0	0	0	**54**
0	2	0	1	2	**59**
0	2	0	2	1	**61**
0	2	1	0	2	**65**
0	2	1	1	1	**67**

X	Y	Z	W	V	$\boldsymbol{i}$
0	2	1	2	0	**69**
0	2	2	0	1	**73**
0	2	2	1	0	**75**
0	2	2	2	2	**80**
1	0	0	0	1	**82**
1	0	0	1	0	**84**
1	0	0	2	2	**89**
1	0	1	0	0	**90**
1	0	1	1	2	**95**
1	0	1	2	1	**97**
1	0	2	0	2	**101**
1	0	2	1	1	**103**
1	0	2	2	0	**105**
1	1	0	0	0	**108**
1	1	0	1	2	**113**
1	1	0	2	1	**115**
1	1	1	0	2	**119**
1	1	1	1	1	**121**
1	1	1	2	0	**123**
1	1	2	0	1	**127**
1	1	2	1	0	**129**
1	1	2	2	2	**134**
1	2	0	0	2	**137**
1	2	0	1	1	**139**
1	2	0	2	0	**141**
1	2	1	0	1	**145**
1	2	1	1	0	**147**
1	2	1	2	2	**152**
1	2	2	0	0	**153**
1	2	2	1	2	**158**
1	2	2	2	1	**160**
2	0	0	0	0	**162**
2	0	0	1	2	**167**
2	0	0	2	1	**169**
2	0	1	0	2	**173**
2	0	1	1	1	**175**
2	0	1	2	0	**177**
2	0	2	0	1	**181**
2	0	2	1	0	**183**
2	0	2	2	2	**188**
2	1	0	0	2	**191**
2	1	0	1	1	**193**
2	1	0	2	0	**195**
2	1	1	0	1	**199**
2	1	1	1	0	**201**
2	1	1	2	2	**206**
2	1	2	0	0	**207**
2	1	2	1	2	**212**
2	1	2	2	1	**214**
2	2	0	0	1	**217**
2	2	0	1	0	**219**
2	2	0	2	2	**224**
2	2	1	0	0	**225**
2	2	1	1	2	**230**
2	2	1	2	1	**232**
2	2	2	0	2	**236**
2	2	2	1	1	**238**
2	2	2	2	0	**240**

Πίνακας 4.6: Ορθογώνιος σχηματισμός με n=117 εκτελέσεις

Το γενικευμένο διάνυσμα μήκους λέξης του σχεδιασμού, προκύπτει ότι έχει $A_1^g(D) = 0$ και $A_2^g(D) = 0$, αφού $\mathbf{J}^1 = 0$ και $\mathbf{J}^2 = 0$ και τα διανύσματα $\mathbf{J}^3$ και $\mathbf{J}^4$, παρέχουν τις βέλτιστες δυνατές τιμές για τις ποσότητες A_3^g και A_4^g (πιο συγκεκριμένα προκύπτει ότι $A_3^g = 1.25$ και $A_4^g = 2.4$).

Για το διάνυσμα $\mathbf{J}^5$, προκύπτει ότι

J_{lllll}	J_{llllq}	J_{lllql}	J_{llqll}	J_{lqlll}	J_{qllll}	J_{lllqq}	J_{llqlq}	J_{llqql}	J_{lqllq}	J_{lqlql}	J_{lqqll}	J_{qlllq}	J_{qllql}	J_{qlqll}	J_{qqlll}
-2	16	-20	-20	-16	-16	6	6	-6	6	-6	-6	6	-6	-6	18
J_{llqqq}	J_{lqlqq}	J_{lqqlq}	J_{lqqql}	J_{qllqq}	J_{qlqlq}	J_{qlqql}	J_{qqllq}	J_{qqlql}	J_{qqqll}	J_{lqqqq}	J_{qlqqq}	J_{qqlqq}	J_{qqqlq}	J_{qqqql}	J_{qqqqq}
60	48	48	60	48	48	60	60	48	48	18	18	18	18	-18	-216

Τιμές οι οποίες παρέχουν $A_5^g(D) = 1.03$, τιμή που δεν μπορούμε να εγγυηθούμε με βάση την μεθοδολογία μας ότι είναι η ελάχιστη δυνατή. □

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μεθοδολογία για την κατασκευή ορθογώνιων σχηματισμών τριών επιπέδων με γενικευμένη ελάχιστη απόκλιση. Η μέθοδος που παρουσιάστηκε βασίζεται στη σωστή διαχείριση των γενικευμένων *J* χαρακτηριστικών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή GMA σχεδιασμών με έξι ή περισσότερες στήλες με τρία επίπεδα ή και να γενικευτεί, ώστε να κατασκευαστούν GMA σχεδιασμοί με περισσότερα από τρία επίπεδα ή ακόμα και με μεικτό πλήθος επιπέδων (μέσω προφανώς κατάλληλης χρήσης βωβών μεταβλητών). Βασική προϋπόθεση και σε αυτές τις επεκτάσεις, αποτελεί η απαίτηση οι GMA σχεδιασμοί που θα κατασκευαστούν να παράγουν GMA σχεδιασμούς όταν προβάλλονται σε χαμηλότερες διαστάσεις. Επιπλέον, για την μελέτη αυτών των περιπτώσεων, θα πρεπει να αναδειχθεί η νέα σχέση ανάμεσα στα γενικευμένα *J* χαρακτηριστικά και στο διάνυσμα των πολλαπλοτήτων ***a*** (αντίστοιχα με τη σχέση 2.1), ενώ θα πρέπει να βρεθούν και να μελετηθούν και οι τιμές που μπορεί να λάβει το διάνυσμα **J** των γενικευμένων *J* χαρακτηριστικών, ώστε να μειωθεί, αντίστοιχα με τα όσα παρουσιάστηκαν στο παρόν κεφάλαιο, το υπολογιστικό κόστος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ai, M. and Zhang, R. (2004). Theory of optimal blocking of nonregular factorial designs, *The Canadian Journal of Statistics*, **32**, 57-72.
- Ai, M., Xu, H. and Wu, C.F.J. (2010). Optimal blocking and foldover plans for regular two-level designs, *Statistica Sinica*, **20**, 183-207.
- Atkinson A.C, and Donev A.N. (1989). The construction of exact D-optimum experimental designs with application to blocking response surface designs, *Biometrika*, **76**, 515-526.
- Bisgaard, S. (1994). A note on the definition of resolution for blocked 2^{k-p} designs, *Technometrics*, **36**, 308-311.
- Bose, R.C., and Bush, K.A. (1952). Orthogonal Arrays of Strength Two and Three, *The Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 508-524.
- Box, G.E.P. and Hunter, J.S. (1961). The 2^{k-p} fractional factorial designs, *Technometrics*, **27**, 173-180.
- Box, G.E.P. and Meyer R.D. (1986). An analysis for unreplicated fractional factorials, *Technometrics,* **28**, 11-18.
- Box, G.E.P., Hunter, E.P. and Hunter, J.S. (1978). Statistics for experimenters, Wiley, New York.
- Box, J. E. and Fisher, R.A. (1978). The Life of a Scientist, *Wiley*, New York.
- Bulutoglu, D.A. and Ryan, K.J. (2015). Algorithms for finding generalized minimum aberration designs, *Journal of Complexity*, **31**, 577-589.
- Butler, N.A. (2006). Optimal blocking of two - level factorial designs, *Biometrika*, **93**, 289 - 302.
- Cheng, C.S. and Mukerjee, R. (1998). Regular fractional factorial designs with minimum aberration and maximum estimation capacity, *Ann. Statist.*, **26(6)**, 2289-2300.
- Cheng, C.S. (1995). Some projection properties of orthogonal arrays, *Ann. Statist.*, **23**, 1223-1233.
- Cheng, S.W. and Wu, C.F.J. (2002). Choice of Optimal Blocking Schemes in Two-Level and Three - Level Designs, *Technometrics*, **44**, 269-277.
- Cheng, S.W., Li, W. and Ye, K.Q. (2004). Blocked Nonregular Two-Level Factorial Deigns, *Technometrics*, **46**, 269-279.

- Cochran, W.G. (1976). Early development of techniques in comparative experimentation, *Owen, D.B. (Ed.), On the History of Statistics and Probability, Marcel Dekker Inc.*, New York, 126.
- Cook, R.D. and Nachtsheim, C.J. (1989). Computer-Aided Blocking of Factorial and Response-Surface Designs, *Technometrics*, **31**, 339-346.
- Das, A., Dey, A. and Midha C.K. (2003). On a property of orthogonal arrays and optimal blocking of fractional factorial plans, *Metrika*, **57**, 127-135.
- Deng, L.-Y. and Tang, B. (1999). Generalized resolution and minimum aberration criteria for Plackett-Burman and other nonregular factorial designs, *Statistica Sinica*, **9**, 1071-1082.
- Deng, L.-Y. and Tang, B. (2002). Design selection and classification for Hadamard matrices using generalized minimum aberration criteria, *Technometrics*, **44**, 173-184.
- Dey, A. and Mukerjee, R. (1999). *Fractional Factorial Plans*, John Wiley & Sons.
- Dey, A. (1985). Orthogonal Fractional Factorial Designs, New York Halsted.
- Egan, J. and Wanless, I.M. (2016). Enumeration of MOLS of small order, *Mathematics of Computation*, **85**, 799-824.
- Evangelaras, H., Koukouvinos, C. and Lappas, E. (2007). 18-run nonisomorphic three level orthogonal arrays, *Metrika*, **66**, 31-37.
- Evangelaras, H., Koukouvinos, C. and Lappas, E. (2011). 27-run nonisomorphic three level orthogonal arrays: Identification, evaluation and projection properties, *Utilitas Mathematica*, **84**, 75-88.
- Evangelaras, H. (2015). Construction of minimum generalized aberration two-level orthogonal arrays, *Electronic Journal of Statistics*, **9(2)**, 2689-2705.
- Fang, K.T. and Mukerjee, R. (2000). A connection between uniformity and aberration in regular fractions of two-level factorials, *Biometrika*, **87**, 193-198.
- Fang, K.T., Zhang, A. and Li, R. (2007). An effective algorithm for generation of factorial designs with generalized minimum aberration, *Journal of Complexity*, **23**, 740-751.
- Ferber, R. and Hirsch, W.Z. (1982). Social Experimentation and Economic Policy, *Cambridge University Press*, London.
- Fienberg, S.E. and Tanur, J.M. (1996). Reconsidering the fundamental contributions of Fisher and Neyman on experimentation and sampling, *International Statistical Review*, **64(3)**, 237–253.

- Fisher, R.A., and Mackenzie, W.A. (1923). Studies in crop variation. II. The manurial response of different potato varieties, *Journal of Agricultural Science*, **13**, 311-320.
- Fisher, R.A., and Wishart, J. (1930). The arrangement of field experiments and the statistical reduction of the results, *Imperial Bureau of Soil Science (London)*, Technical Communication Number **10**, 1-23.
- Fisher, R.A. (1926). The arrangement of field experiments, *Journal of the Ministry of Agriculture*, **33**, pp. 503-515.
- Fisher, R.A. (1971) [1935]. The Design of Experiments (9th ed.).
- Fries A. and Hunter, W.G. (1980). Minimum aberration 2^{k-p} designs, *Techometrics*, **22**, 601-608.
- Goos, P. and Jones, B. (2011). Optimal Design of Experiments: A Case Study Approach, Wiley.
- Goos, P. and Vandebroek, M. (2001). D-optimal response surface designs in the presence of random block effects, *Computational Statistics and Data Analysis*, **37**, 433-453.
- Greenberg, D. and Shroder, M. (2004). The Digest of Social Experiments, *The Urban Institute Press*, Washington.
- Hamada, M. and Wu, C.F.J. (1992). Analysis of designed experiments with complex aliasing, *J. Quality Technology*, **24**, 130-137.
- Hausman, J. and Wise, D. (1985). Social Experimentation, *University of Chicago Press for National Bureau of Economic Research*, Chicago, 1–55.
- Hedayat, A.S., Seiden, E., and Stufken, J. (1997). On the maximal number of factors and the enumeration of 3-symbol orthogonal arrays of strength 3 and index 2, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **58**, 43-63.
- Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A. and Stufken, J. (1999). *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*, Springer-Verlag.
- Hedayat, A.S. (1990). New properties of orthogonal arrays and their statistical applications, *Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments*, ed. S. Ghosh, Dekker, New York, 407-422.
- Kokkala, J.I. and Östergård, P.R.J. (2015). Classification of Graeco-Latin cubes, *Journal of Combinatorial Designs*, **23**, 509-521.
- Lekivetz, R. (2011). Optimal factorial designs with robust properties, Ph.D. thesis, Simon Fraser University.

- Levitt, S.D. and List, J.A. (2009). Field experiments in economics: The past, the present, and the future, *European Economic Review*, **53(1)**, 1–18.
- Lin, C.Y. (2014). Optimal Blocked Orthogonal Arrays, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **145**, 139-147.
- Mac Williams, F.J. and Sloane, N.J.A. (1977). The Theory of Error-Correcting Codes, *North Holland Pub. Co.*, Amsterdam.
- Manski, C.F. and Garfinkel, I. (1992). Evaluating Welfare and Training Programs, *Harvard University Press*, Cambridge, 1–22.
- Ma, C.X. and Fang, K.T. (2001). A note on generalized aberration in factorial designs, *Metrika*, **53**, 85-93.
- Plackett, R.L., and Burman, J.P. (1946). The Design of Optimum Multifactorial Experiments. *Biometrika*, **33(4)**, 305-325.
- Rao, C.R. (1946). Hypercubes of strength d leading to confounded designs in factorial experiments, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **38**, 67-78.
- Rao, C.R. (1947). Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays, *Journal of the Royal Statistical Society (Syppl.)*, **9(1)**, 128-139.
- Rayner, A.A. (1986). Some sidelights on experimental design, *Brook, R.J., Arnold, G.C., Hassard, T.H., Pringle, R.M. (Eds.), The Fascination of Statistics, Marcel Dekker, Inc.*, New York, 245–266.
- Roman, S. (1992). Coding and Information Theory. Springer, New York.
- Rubin, D.B. (1990). Comment: Neyman (1923) and causal inference in experiments and observational studies, *Statistical Science*, **5**, 472–480.
- Sartono, B., Goos, P. and Schoen, E.D. (2012). Classification of three-level strength-3 arrays. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 794-809.
- Sartono, B., Schoen, E.D. and Goos, P. (2015). Blocking Orthogonal Designs with Mixed Integer Linear Programming, *Technometrics*, **57**, 428-439.
- Schoen, E.D., Eendebak P.T. and Nguyen M.V.M. (2010). Complete Enumeration of Pure-Level and Mixed-Level Orthogonal Arrays, *Journal of Combinatorial Designs*, **18**, 123-140.
- Schoen, E.D, Sartono, B. and Goos, P. (2013). Optimal Blocking for General Resolution-3 Designs, *Journal of Quality Technology*, **45**, 166-187.
- Seiden, E. and Zemach, R. (1966). On orthogonal arrays, *Ann. Math. Statist.*, **37**, 1355-1370.

- Splawa-Neyman, J. (1925 [1923b]). Contributions of the theory of small samples drawn from a finite population, *Biometrika*, **17**, 472–479.
- Street, D.J. (1990). Fisher's contributions to agricultural statistics, *Biometrics*, **46 (4)**, 937–945.
- Stufken, J. and Tang, B. (2007). Complete enumeration of two-level orthogonal arrays of strength *d* and *d*+2 constraints, *The Annals of Statistics*, **35**, 793-814.
- Sun, D.X., Wu, C.F.J., and Chen, Y. (1997). Optimal blocking schemes for 2^n and 2^{n-p} designs, *Technometrics*, **39**, 298-307.
- Sun, F., Liu, M.Q. and Hao, W. (2009). An algorithmic approach to finding factorial designs with generalized minimum aberration, *Journal of Complexity*, **25**, 75-84.
- Tang, B. and Deng, L.-Y. (2003). Construction of generalized minimum aberration designs of 3, 4 and 5 factors, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **113**, 335-340.
- Tang, B. (1993). Orthogonal Array-Based Latin Hypercubes, *Journal of the American Statistical Association*, **88(424)**, 1392–1397.
- Tang, B. (2001). Theory of J-characteristics for fractional factorial designs and projection justification of minimum G_2-aberration, *Biometrika*, **88**, 401-407.
- Van Lint, J.H. (1999). Introduction to Coding Theory, 3rd ed. Springer, New York.
- Wu, C.F.J. and Hamada, M.S. (2009). Experiments: planning, analysis and optimization. 2nd ed. Hoboken (NJ): Wiley.
- Xu, H. and Wu, C.F.J. (2001). Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs, *Annals of Statistics*, **29**, 549-560.
- Xu, H., Wu, C.F.J. and Cheng, S.W. (2004). Optimal Projective Three-Level Designs for Factor Screening and Interaction Detection, *Technometrics* **46**, 280-292.
- Yates, F. (1964). Sir Ronald Fisher and the design of experiments, *Biometrics*, **20(2)**, 307–321.
- Yates, F. (1975). The early history of experimental design. *Srivastava, J.N. (Ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Model*, North-Holland, Amsterdam, 581–592.