ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ : ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΗΛΙΚΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΛΟΥΚΑΣ ΠΑΡΑΒΑΤΟΣ ΜΧΡΗ1917

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΘΡΩΠΕΛΟΣ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΝΘΡΩΠΕΛΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΣΙΡΙΤΑΚΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΒΟΛΙΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2021

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ανθρωπέλο Μιχαήλ για την ουσιαστική καθοδήγηση, και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την στήριξη, και υπομονή καθ’όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Τέλος ευχαριστώ θερμά για την στήριξή τους, του πολύτιμους φίλους μου Σταύρο, Αλέξανδρο, Ειρήνη και Ελένη.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο να παρουσιάσει την σημασία της ηλικίας στην λήψη επενδυτικών αποφάσεων, και τον τρόπο με τον οποίο οι επενδυτές βελτιστοποιούν τα χαρτοφυλάκιά τους. Αρχικά περιγράφεται η σημασία της ηλικίας μέσω της έρευνας βιβλιογραφίας, με την χρήση μαθηματικών μοντέλων. Στα μοντέλα, γίνεται η υπόθεση ότι ο επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε δύο περιουσιακά στοιχεία, μετοχές και ομόλογα. Η θεωρία υποστηρίζει ότι όταν οι επενδυτές μεγαλώνουν ηλικιακά αυξάνεται η αποστοφή τους στον κίνδυνο, και θα διαμορφώνουν τα χαρτοφυλάκιά τους με λιγότερες μετοχές, λόγω του υψηλού κινδύνου. Στην συνέχεια, γίνονται αναλύσεις ευαισθησίας για την σημασία του ανθρώπινου κεφαλαίου στην βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, καθώς και για τον εργασιακό χρόνο του επενδυτή. Στο τέλος πραγματοποιούνται προσομοιώσεις, και λύνονται ασκήσεις με σκοπό να υπολογιστεί η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή, για διαφορετικές κατανομές μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, ώστε να εξεταστεί η σημασία της συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών και του εισοδήματος εργασίας.

Λέξεις κλειδιά: ηλικία, αποστροφή κινδύνου, μετοχές, ομόλογα, ανθρώπινο κεφάλαιο, χρηματοοικονομικός πλούτος, εισόδημα εργασίας.

Summary

This thesis aims to present the importance of age in investment decisions, and how investors optimize their portfolios. First, the importance of age is described through bibliographic research, using mathematical models. In the models, it is assumed that the investor can invest in two assets, stocks and bonds. The theory suggests that as investors grow older, their risk aversion increases, and they will shape their portfolios with fewer stocks because of the higher risk. Then, sensitivity analyses are made for the significance of human capital in the optimal distribution of shares in the portfolio, as well as for the flexible labor supply of the investor. Finally, simulations are performed, and exercises are solved in order to calculate the expected utility of the investor, for different distributions of shares in the portfolio, in order to examine the importance of the correlation between the returns of the shares and the labor income.

Key words: age, risk aversion, stocks, bonds, human capital, financial wealth, labor income.

Πίνακας Περιεχομένων

1.Εισαγωγή

1.1. Ορισμός

Όπως αναφέρει ο Deaton (2005), η θεωρία του κύκλου της ζωής προήλθε από την δουλειά των Franco Modigliani και Richard Brumberg στις αρχές τις δεκαετίας του 1950. Η θεωρία πραγματεύεται πως οι επενδυτές έχοντας περιορισμένους πόρους, διαμορφώνουν την στρατηγική τους και λαμβάνουν αποφάσεις αναλόγως την ηλικία τους. Ο επενδυτής θέλει να διαχειριστεί τα περιουσιακά στοιχεία που έχει στην διάθεσή του, αναλαμβάνοντας ένα επίπεδο κινδύνου, με σκοπό να πετύχει ένα επιθυμητό ποσοστό απόδοσης. Στις αποφάσεις του, σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν οι θεσμικοί περιορισμοί που αντιμετωπίζει, οι φόροι, οι περιορισμοί ρευστότητας, οι υποχρεώσεις του, καθώς και ο χρονικός του ορίζοντας. Όλοι αυτοί οι περιορισμοί καθορίζουν το επίπεδο κινδύνου που είναι διατεθειμένος να αναλάβει.

Επίσης σύμφωνα με το άρθρο των Poterba και Samwick (2001), η προσδοκώμενη γήρανση του πληθυσμού στις ανεπτυγμένες χώρες, έχει κινήσει το ενδιαφέρον ακαδημαϊκών και χρηματοοικονομικών αναλυτών. Ο τρόπος με τον οποίο τα νοικοκυριά κατανέμουν τις συσσωρευμένες αποταμιεύσεις τους σε διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία, με διαφορετικά επίπεδα κινδύνου, όπως μετοχές, ομόλογα, έχει προκαλέσει λιγότερη συζήτηση, αν και το μελλοντικό επίπεδο της οικονομίας εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία αυτά επενδύονται, όσο και από την αξία τους.

Η συμπεριφορά των ατόμων σε διαφορετικές ηλικίες αναλύεται μέσω θεωρητικής βιβλιογραφίας, που πραγματεύεται την βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου των επενδυτών. Στο απλό μοντέλο επιλογής χαρτοφυλακίου ο μόνος παράγοντας που εξηγεί πως η ηλικία επηρεάζει τη δομή ενός χαρτοφυλακίου, είναι η διαφορά κινδύνου που είναι διατεθειμένος να αναλάβει ο κάθε επενδυτής. Οικονομολόγοι, βιολόγοι, καθώς και ψυχολόγοι έχουν διαμορφώσει θεωρίες για τους τρόπους με τους οποίους ο κύκλος της ζωής, δηλαδή η ηλικία των επενδυτών επηρεάζει τις επενδυτικές στρατηγικές που διαμορφώνουν τα άτομα, καθώς και τις τελικές τους αποφάσεις. Συνολικά αυτές οι θεωρίες, προτείνουν ότι η ανάληψη κινδύνου, είναι πιο συνήθης και έντονη για τους μικρότερους ηλικιακά επενδυτές, και θεωρούν ότι η γήρανση συνδέεται με την μείωση του ρίσκου στις επενδυτικές αποφάσεις.

Όπως αναφέρουν οι Gerrans, Clark-Murphy, και Speelman, (2006) για το παραπάνω συμπέρασμα υπάρχουν δύο βασικοί λόγοι για τους οποίους η ανοχή στον κίνδυνο μειώνεται όσο ο επενδυτής μεγαλώνει ηλικιακά. Πρώτον, το ανθρώπινο κεφάλαιο αποτελεί σημαντικό μέρος του συνολικού πλούτου ενός νεαρού επενδυτή, καθώς είναι ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο. Συνεπώς ο επενδυτής μειώνει το συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου του, λόγω του ανθρώπινου κεφαλαίου, άρα θα μεταβάλλει την επενδυτική του στρατηγική, ώστε να αυξήσει τα περιουσιακά στοιχεία που εμπεριέχουν κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιό του. Δεύτερον, οι συγγραφείς θεωρούν ότι η εργασιακή ευελιξία, δηλαδή η δυνατότητα των επενδυτών να μεταβάλλουν την προσφορά εργασίας τους, η οποία θεωρείται μεγαλύτερη όταν είναι νέοι, τους δίνει την δυνατότητα να αναλάβουν περισσότερο κίνδυνο. Αυτό συμβαίνει διότι το ανθρώπινο κεφάλαιο θεωρείται το μελλοντικό εισόδημα εργασίας του επενδυτή, και οι επενδυτές μπορούν να το αυξήσουν μέσω της εργασιακής τους ευελιξίας.

1.2. Η έννοια της αποστροφής κινδύνου

Τα νεοκλασικά οικονομικά διαπραγματεύονται την ανάλυση των συνθηκών που εξασφαλίζουν την άριστη κατανομή δεδομένων πόρων, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο, τα άτομα παίρνουν επενδυτικές αποφάσεις. Σύμφωνα με τους Aren και Hatice (2019) τα άτομα διαμορφώνουν επενδυτικές στρατηγικές, τις οποίες η οικονομική επιστήμη προσπαθεί να κατανοήσει μέσω της χρήσης μαθηματικών μοντέλων. Αυτά τα μοντέλα προσπαθούν να υπολογίσουν τον κίνδυνο που υπάρχει στις χρηματοπιστωτικές αγορές για τον επενδυτή στην διαδικασία λήψης αποφάσεων. Το κύριο χαρακτηριστικό των αγορών είναι ότι διέπονται από αβεβαιότητα, η οποία δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί μέσω των μαθηματικών μοντέλων.

Η θεωρητική βιβλιογραφία επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο ο κίνδυνος γίνεται αντιληπτός για τον επενδυτή, και ο λόγος για τον οποίο δημιουργείται η αποστροφή. Η εκτίμηση του κινδύνου στις αγορές, δηλαδή της μεταβλητότητας των αποδόσεων, διαφορετικών περιουσιακών στοιχείων, και η επιρροή που μπορεί να έχουν στις επενδυτικές αποφάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντική. Ο κίνδυνος αυτός δεν είναι αρκετός για να εξηγήσει πλήρως τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Για αυτό το λόγο υπάρχουν πολλά μοντέλα που βασίζονται στην ορθολογικότητα των ατόμων. Τα τελευταία χρόνια, προσωπικά χαρακτηριστικά και ψυχολογικές διαδικασίες, έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της αποστροφής κινδύνου στις επενδυτικές αποφάσεις. Με μία ανασκόπηση της βιβλιογραφίας παρατηρείται ότι υπάρχουν πολλές έρευνες που εξετάζουν την αποστροφή στον κίνδυνο. Το κοινό σημείο σε όλες αυτές τις έρευνες είναι η σημασία των διαφόρων ψυχολογικών παραγόντων και η συνεχής προσπάθεια των ατόμων να προβλέψουν αυτή την αποστροφή. Όμως, έχουν παρατηρηθεί πολλοί δημογραφικοί παράγοντες όπως το επίπεδο εκπαίδευσης, το φύλο, η ηλικία κ.τ.λ. που επηρεάζουν τις επενδυτικές στρατηγικές των ατόμων. Η δεδομένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθεί με την ηλικία και τον επηρεασμό στις επενδυτικές αποφάσεις. Θα συζητηθεί πώς τα άτομα πρέπει να προσαρμόζουν τα χαρτοφυλάκιά τους καθώς μεταβάλλεται η ηλικία τους από νέοι, στη μέση ηλικία μέχρι την συνταξιοδότηση, και το υπόλοιπο της ζωής τους.

1.3. Συνάρτηση Χρησιμότητας

Η χρησιμότητα αποτελεί μία έννοια στα οικονομικά, που παρέχει ένα τρόπο σύγκρισης της ικανοποίησης που λαμβάνει ένα άτομο, από διάφορα επίπεδα κατανάλωσης διαφορετικών αγαθών. Η ικανοποίηση που λαμβάνει ο καταναλωτής εξαρτάται από τις προτιμήσεις του. Έστω ότι υπάρχει ένα συνδυασμός αγαθών $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ όπου $\boldsymbol{x_i}$, είναι η ποσότητα του αγαθού $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n})$. Κάθε άτομο επιλέγει την ποσότητα $\boldsymbol{x_i}$, που θα καταναλώσει από κάθε διαθέσιμο αγαθό $\boldsymbol{i}$. Θεωρείται ότι ο καταναλωτής είναι ορθολογικός. Δηλαδή, σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο έχει κατανείμει έτσι το εισόδημά του, ώστε να αγοράζει αυτά τα αγαθά, και σε εκείνες τις ποσότητες, που να μεγιστοποιείται η χρησιμότητά του. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεν υπάρξει καμία μεταβολή για παράδειγμα στις προτιμήσεις του, στις τιμές των αγαθών ή στο εισόδημά του, δεν έχει κανένα λόγο να μεταβάλει τη συμπεριφορά του. Συνεπώς, αν οι προτιμήσεις του καταναλωτή είναι ορθολογικές, τότε μπορούν να διατυπωθούν ως μία αριθμητική αναπαράσταση των ατομικών προτιμήσεών του.

Όπως αναφέρει ο Varian (2015), για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται μία συνάρτηση, η οποία θα κατατάξει τους συνδυασμούς αγαθών κατά τον ίδιο τρόπο με τις προτιμήσεις, που ονομάζεται συνάρτηση χρησιμότητας. Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ένας τρόπος για να αντιστοιχεί ένας αριθμός σε κάθε δυνατό συνδυασμό κατανάλωσης, έτσι ώστε να δίνονται οι μεγαλύτεροι συνδυασμοί στους πλέον προτιμότερους αντί για τους λιγότερο προτιμότερους. Με άλλα λόγια, έστω $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ είναι ένας συνδυασμός αγαθών, ο οποίος είναι προτιμότερος από τον συνδυασμό $(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2})$ εάν και μόνο αν η χρησιμότητα του $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ είναι μεγαλύτερη από την χρησιμότητα του $(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2})$ δηλαδή $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) > \boldsymbol{U}(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2})$. Η κύρια δυνατότητα της συνάρτησης χρησιμότητας είναι ο τρόπος που κατατάσσει τους συνδυασμούς αγαθών.

Έστω ένας καταναλωτής Α, ο οποίος έχει πλούτο x. Η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή περιγράφεται ως $u(x)$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας έχει δύο βασικές ιδιότητες α) όταν αυξάνεται το x αυξάνεται και το $u(x)$ β) η συνάρτηση $u(x)$ είναι μία κοίλη συνάρτηση του x. Αν παρθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του x αντίστοιχα προκύπτει ότι $u'(x) > 0$ και $u''(x) < 0$. Η πρώτη παράγωγος είναι θετική, διότι θεωρείται ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο πλούτος, τόσο μεγαλύτερη ικανοποίηση λαμβάνει ο επενδυτής. Η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική διότι η $u'(x)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του πλούτου x (β). Η εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας ορίζεται ως:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\eta} - 1}{1-\eta}, \alpha\nu\ \eta \geq 0,\ \ \eta \neq 1 \\ ln(x) \qquad\qquad ,\alpha\nu\ \ \eta = 1 \end{cases} \qquad (1.3.1.)$$

Η εξίσωση ονομάζεται και εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας, και αποτελεί μία ειδική περίπτωση απόλυτης αποστροφής κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι, αν μειωθεί η απόλυτη αποστροφή κινδύνου, μειώνεται και το ποσό επένδυσης μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Το αντίθετο συμβαίνει όταν αυξάνεται η απόλυτη αποστροφή κινδύνου. Επιπλέον ο λόγος των δύο παραγώγων, δηλώνει τον συντελεστή αποστροφής κινδύνου του επενδυτή, και διατυπώνεται ως :

$$r(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx} lnu'(x) \qquad (1.3.2.)$$

Επειδή $u'(x) > 0$ και $u''(x) < 0$ ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου είναι μεγαλύτερος του μηδενός $r(x) > 0$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας είναι γνωστή CRRA (constant relative risk aversion), και δηλώνει ότι η αποστροφή κινδύνου του επενδυτή παραμένει σταθερή στο χρόνο. Η CRRA χρησιμότητα είναι ανεξάρτητη, από τις μεταβολές στο επίπεδο του πλούτου του επενδυτή.

Στην ανάλυση που θα πραγματοποιηθεί θα χρησιμοποιηθεί η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας. Συγκεκριμένα, εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο ο επενδυτής λαμβάνει αποφάσεις σε συνθήκες αβεβαιότητας. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται η αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας, για ένα σταθερό επίπεδο αποστροφής κινδύνου. Ουσιαστικά θα υπολογιστεί για διαφορετικά ποσοστά κατανομής περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή, η μέγιστη αναμενόμενη χρησιμότητα του πλούτου του. Ο επενδυτής θεωρείται πως είναι ορθολογικός στην λήψη αποφάσεων, και από τους πιθανούς συνδυασμούς που θα προκύψουν μέσω προσομοίωσης, θα επιλέξει εκείνον με την μεγαλύτερη αναμενόμενη χρησιμότητα.

1.4. Η κατανομή του χαρτοφυλακίου

Ο τρόπος με τον οποίο τα νοικοκυριά κατανέμουν τον πλούτο τους, αποτελεί σημαντικό αντικείμενο μελέτης της οικονομικής επιστήμης. Ιδιαίτερη προσοχή επικεντρώνεται στις μεταβολές που υπάρχουν στην κατανομή του πλούτου, κατά την διάρκεια της ζωής ενός ατόμου, όπως αναφέρει στο άρθρο του ο David McCarthy (2004). Σύμφωνα με την θεωρία χαρτοφυλακίου, ο επενδυτής ενδιαφέρεται για την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του, καθώς και τον κίνδυνο που αναλαμβάνει. Οι δύο βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την αποστροφή κινδύνου του επενδυτή, είναι ο πλούτος και ο χρονικός ορίζοντας. Η λογική λέει ότι οι μεγαλύτεροι ηλικιακά επενδυτές έχουν μικρότερους οικονομικούς ορίζοντες από τους μικρότερους ηλικιακά, συνεπώς η θεωρία συνοψίζει ότι η ηλικία επηρεάζει την επιλογή του χαρτοφυλακίου. Οι επενδυτικές ευκαιρίες που παρουσιάζονται είναι διαφορετικές χρονικά, οι μεγαλύτεροι ηλικιακά επενδυτές έχουν μεγαλύτερο οικονομικό πλούτο σε σχέση με τους νεότερους. Συνεπώς είναι δύσκολο να αποκλειστεί η σημασία του χρόνου και της ηλικίας, στην μελέτη της επιλογής χαρτοφυλακίου. Ένα πρόβλημα που δημιουργείται με την παλαιά βιβλιογραφία είναι οι υποθέσεις ότι ο επενδυτής:

α) Δεν έχει κόστη συναλλαγών.

β) Δεν έχει περιορισμούς στο χαρτοφυλάκιό του.

γ) Δεν λαμβάνει εισόδημα εργασίας.

Επιπλέον τα περισσότερα μοντέλα του παρελθόντος, θεωρούν ότι κάθε νοικοκυριό θα έχει στην κατοχή του ένα μετοχικό κεφάλαιο. Στην πράξη αυτό δεν ισχύει. Ακόμα δεν υπολογίζουν την συγκρότηση ενός νοικοκυριού παραδείγματος χάριν, πόσα είναι τα μέλη της οικογένειας. Συνεπώς πολλά μοντέλα αποτυγχάνουν να προβλέψουν τις μεταβολές στο ποσοστό μετοχικών κεφαλαίων καθώς οι επενδυτές μεγαλώνουν ηλικιακά, επειδή αυτές οι υποθέσεις δεν ισχύουν στον πραγματικό κόσμο.

Ελάχιστα από αυτά τα μοντέλα λαμβάνουν υπόψη τους αυτό το είδος ετερογένειας που δημιουργείται. Πολλά μοντέλα για να προσπαθήσουν να περιγράψουν τις προτιμήσεις του επενδυτή χρησιμοποιούν την CCRA (Constant Relative Risk Aversion) χρησιμότητα, δηλαδή υποθέτουν ότι η αποστροφή κινδύνου του επενδυτή παραμένει σταθερή στο χρόνο. Θεωρείται, ότι αποστροφή κινδύνου των επενδυτών, εξαρτάται από τις μεταβολές του εισοδήματος, και την συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ αυτού και των περιουσιακών στοιχείων που ενέχουν κίνδυνο. Σε πολλές αναλύσεις που έχουν πραγματοποιηθεί, παρατηρείται ότι η συσχέτιση αυτή είναι μικρή μεταξύ των δύο μεγεθών στις ανεπτυγμένες χώρες.

1.5. Ανθρώπινο Κεφάλαιο

Σε ένα οικονομικό μοντέλο, η συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου μπορεί να θεωρηθεί ως μία επενδυτική απόφαση, μέσω της οποίας ένα άτομο θυσιάζει ποσοστό του εισοδήματός του για μία περίοδο, με σκοπό την περαιτέρω εκπαίδευση και κατάρτισή του, ώστε να αυξήσει τα μελλοντικά του έσοδα. Το ανθρώπινο κεφάλαιο ορίζεται ως οι συσσωρευμένες επενδυτικές δραστηριότητες, όπως η εκπαίδευση, η υγεία, και η επαγγελματική κατάρτιση, η οποία βελτιώνει την παραγωγικότητα στην αγορά εργασίας. Ουσιαστικά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άυλο περιουσιακό στοιχείο, το οποίο δεν εμφανίζεται στον ισολογισμό μίας εταιρείας. Ο λόγος που χρίζεται ως κεφάλαιο δεν είναι άλλος από την επένδυση της εταιρείας στο άτομο παρέχοντάς του, τους πόρους, τις συνθήκες, και την περαιτέρω εξειδίκευση που χρειάζεται για να προσφέρει οφέλη στην εταιρεία. Η επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο μπορεί να δημιουργήσει οικονομικά, και μη οικονομικά οφέλη, τα οποία θα βελτιώσουν τη θέση αυτού που κάνει την επένδυση, καθώς και ολόκληρης της κοινωνίας. Η σημασία του έχει αναγνωριστεί από την οικονομική βιβλιογραφία. Η αρχική ιδέα για την έννοια του ανθρώπινου κεφαλαίου, εισήχθη από τον Adam Smith (1776), ο οποίος υποστήριξε ότι μέσω της εκπαίδευσης, και εξειδίκευσης του προσωπικού μίας επιχείρησης, εκείνη θα αυξήσει τα κέρδη της, και αυτό το γεγονός θα οδηγήσει σε συνολική αύξηση του πλούτου της κοινωνίας. Η οικονομική ζωή των ατόμων, καθώς και γενικότερα των οικονομιών, εξαρτάται από το πόσο αποτελεσματικά τα άτομα επενδύουν στους εαυτούς τους. Το ανθρώπινο κεφάλαιο θεωρείται σημαντικό περιουσιακό στοιχείο, διότι αυξάνει την παραγωγικότητα και τα κέρδη των επιχειρήσεων. Συνεπώς μία επιχείρηση θα επιθυμεί να επενδύσει σε ανθρώπινο κεφάλαιο.

Η σχέση μεταξύ των εργαζομένων και των επιχειρήσεων έχει αλλάξει δραματικά τις τελευταίες δεκαετίες. Το ανθρώπινο δυναμικό σε μία κοινωνία είναι ταυτόχρονα παραγωγοί και καταναλωτές. Στα οικονομικά ο ανθρώπινος παράγοντας αναφέρεται ως εργατικό δυναμικό, και θεωρείται εξαιρετικά σημαντικός για την οικονομική ανάπτυξη, και την δημιουργία νέων επενδύσεων. Όλα τα χαρακτηριστικά του ανθρώπινου δυναμικού θεωρούνται μία μορφή κεφαλαίου, που έχουν οικονομική αξία. Το ανθρώπινο κεφάλαιο δεν εμπορεύεται όπως οι υλικές μορφές κεφαλαίου (χρήματα, μηχανολογικός εξοπλισμός κ.τ.λ.), αλλά με την μορφή πληρωμών και μισθών. Η επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο, μπορεί να αυξήσει το εισόδημα των ατόμων. Το επιπλέον εισόδημα που πραγματοποιείται από την επένδυση σε ανθρώπινο κεφάλαιο συνεπάγεται με ένα βαθμό απόδοσης.

Το ανθρώπινο κεφάλαιο αναλύεται σε 3 βασικές κατηγορίες: α) το ατομικό κεφάλαιο, β) το κοινωνικό κεφάλαιο, γ) και το συναισθηματικό. Η δεδομένη διπλωματική εργασία θα ασχοληθεί με το πρώτο. Το ατομικό κεφάλαιο αναφέρεται στα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του ατόμου, όπως το υπάρχον γνωστικό του επίπεδο, και η δυνατότητα να αποκτάει νέες γνώσεις, όπως παραδείγματος χάριν η προσαρμογή του σε ένα νέο εργασιακό περιβάλλον. Συνεπώς, αφορά τις εξειδικευμένες γνώσεις, δεξιότητες και τεχνογνωσία που αποκτά ένα άτομο στην διάρκεια του χρόνου. Στο παρελθόν το ενδιαφέρον των επιχειρήσεων στράφηκε σε μεγάλο βαθμό στο ατομικό κεφάλαιο. Η γνώση αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό διαφοροποίησης για τις επιχειρήσεις, και μπορεί να τους δώσει ένα ανταγωνιστικό πλεονέκτημα. Σε πολλές εταιρείες τα αυξημένα περιουσιακά στοιχεία, συμπεριλαμβανομένου και του ατομικού ανθρώπινου κεφαλαίου, καθώς και η καλή εικόνα του ισολογισμού, αποτελούν σημαντικό παράγοντα επιτυχίας. Για αυτό το λόγο τα άτομα με υψηλό επίπεδο γνώσεων, (μεταπτυχιακό, διδακτορικό, πολυετή εργασιακή εμπειρία κ.α.), και εξειδίκευσης, αμείβονται καλύτερα από άτομα με μικρότερο ατομικό ανθρώπινο κεφάλαιο. Το ατομικό ανθρώπινο κεφάλαιο ενός ανέργου επηρεάζει την αναζήτηση εργασίας του, και τις ευκαιρίες απασχόλησης που θα του παρουσιαστούν στο μέλλον. Η σημασία του γίνεται όλο και πιο σημαντική τα τελευταία χρόνια. Τέλος το ατομικό ανθρώπινο κεφάλαιο αποτελεί την πιο αποτελεσματική στρατηγική για την επιτυχία των ατόμων. Η συνεχής βελτίωση των γνώσεων και των ικανοτήτων, οδηγούν τους ανθρώπους να αποκτούν μία πιο δημιουργική και συναισθηματικά ικανοποιητική ζωή.

1.6. Σκοπός και σημασία της έρευνας

Η εργασία του Markowitz (1959) έχει αναπτύξει την σημασία της κατανομής του χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Οι λόγοι για τους οποίους ο επενδυτής διαμορφώνει συγκεκριμένες στρατηγικές με σκοπό να βελτιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του, αποτελούν πρωταρχικό αντικείμενο μελέτης της θεωρίας χαρτοφυλακίου.

Οι παράγοντες από τους οποίους επηρεάζεται αυτή η κατανομή είναι ποικίλοι. Τις τελευταίες δεκαετίες πολλοί έχουν αναλυθεί και έχει αναγνωριστεί η ιδιαίτερη σημασία τους στην κατανομή του χαρτοφυλακίου, ενώ νέες μεταβλητές εισάγονται στα μαθηματικά μοντέλα με σκοπό να εξηγήσουν καλύτερα και πιο αναλυτικά, τον τρόπο με τον οποίο οι επενδυτές λαμβάνουν αποφάσεις.

Πολλές μελέτες έχουν επικεντρωθεί στην ηλικία του επενδυτή. Η ηλικία καθορίζει μεγάλο μέρος των αποφάσεων που λαμβάνει. Επιπλέον αξιοσημείωτη είναι σημασία της αποστροφής κινδύνου. Η βιβλιογραφία θεωρεί, πως όσο ο μεγαλώνει ηλικιακά ο επενδυτής μειώνεται η ανοχή που έχει στην ανάληψη κινδύνου, κατά την διάρκεια κατανομής των περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιό του.

Η δεδομένη διπλωματική εργασία θα μελετήσει, την θεωρητική και εμπειρική βιβλιογραφία που σχετίζεται με την βελτιστοποίηση των επενδυτικών επιλογών, όπου σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η ηλικία του επενδυτή. Θα τεκμηριωθεί μέσω μαθηματικής ανάλυσης, ο τρόπος με τον οποίο προκύπτουν τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται, για την βελτιστοποίηση των επενδυτικών στρατηγικών. Η ανάλυση θα γίνει με την χρήση μοντέλων όπου γίνεται η υπόθεση ότι ο επενδυτής διαθέτει στο χαρτοφυλάκιό του δύο περιουσιακά στοιχεία, ένα με κίνδυνο (μετοχές) και ένα χωρίς κίνδυνο (ομόλογα). Σημαντική μεταβλητή για την ανάλυση που ακολουθεί, είναι η χρονική στιγμή την οποία ο επενδυτής λαμβάνει τις αποφάσεις του, καθώς θα αναπτυχθούν πολλές περιπτώσεις με διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες. Συγκεκριμένα, εξετάζεται για πολύ μικρά βραχυχρόνια διαστήματα, καθώς και για μεγάλες χρονικές περιόδους. Ιδιαίτερα σημαντικό μέρος της ανάλυσης θα λαμβάνει υπόψη την σημασία του ανθρώπινου κεφαλαίου και την επιρροή που έχει στη διαμόρφωση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Επίσης, εξετάζεται η σημασία του εργασιακού χρόνου του επενδυτή, και πραγματοποιούνται αναλύσεις ευαισθησίας. Επιπλέον, οι αναμενόμενες αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων, και η μεταβλητότητα αυτών των αναμενόμενων αποδόσεων, καθώς και η συσχέτισή τους με το εισόδημα εργασίας μελετούνται διεξοδικά.

Κατόπιν, σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει την σημασία της κάθε μεταβλητής που επηρεάζει την βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Τα αποτελέσματα θα προκύψουν μέσω προσομοίωσης για την μεταβολή της τιμής των μεταβλητών. Συγκεκριμένα θα εξεταστεί πως το μέγεθος της συσχέτισης των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο, και του εισοδήματος εργασίας επηρεάζουν το ποσοστό κατανομής μετοχών στο χαρτοφυλάκιο. Μέσω της ανάλυσης, θα εμπεριστατωθεί αν η βιβλιογραφία ισχύει στην πράξη, όσον αφορά την ηλικία, καθώς και αν υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες αυτό δεν συμβαίνει. Τα αποτελέσματα μπορούν να δώσουν μία απάντηση, για τον τρόπο με τον οποίο οι οικονομικοί σύμβουλοι μπορούν να προτείνουν λύσεις στους πελάτες τους, αναλόγως το ηλικιακό τους προφίλ, ώστε να διαχειριστούν βέλτιστα τα χαρτοφυλάκιά τους.

2. Έρευνα βιβλιογραφίας

2.1. Επένδυση σε μετοχές για νεαρούς επενδυτές

Η πλειοψηφία των οικονομικών σχεδιαστών οι οποίοι διαχειρίζονται τα προσωπικά οικονομικά των πελατών τους, τους συμβουλεύουν όταν είναι νέοι να επενδύουν κυρίως σε μετοχές, και όσο μεγαλώνουν ηλικιακά σε ομόλογα. Στο άρθρο τους οι Jagannathan- Kocherlakota (1996), πιστεύουν ότι υπάρχουν 3 λόγοι για τους οποίους οι επενδυτές είναι χρήσιμο να υιοθετούν αυτήν τη συμπεριφορά. Πρώτον, όσο μεγαλύτερος είναι ο επενδυτικός ορίζοντας της επένδυσης σε μετοχές, μειώνεται το ρίσκο. Η λογική πίσω από αυτή την υπόθεση βρίσκεται στο ότι η ανάληψη ενός ρίσκου που μπορεί να αποφέρει χρηματικές απώλειες έχει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα αποπληρωμής. Δεύτερον, οι μετοχές πιθανόν να αποφέρουν μεγαλύτερα κέρδη από τα ομόλογα, διότι το υψηλότερο ρίσκο οδηγεί σε υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις, οι οποίες θα καλύψουν τις αυξημένες οικονομικές υποχρεώσεις των νεότερων επενδυτών, όπως παραδείγματος χάριν η ανατροφή των παιδιών. Τέλος, σε περίπτωση ζημίας από επένδυση σε μετοχές, ένας επενδυτής μπορεί να αντισταθμίσει τις απώλειες επειδή λαμβάνει εισόδημα εργασίας για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Ο επενδυτής μπορεί να προσαρμόσει κατάλληλα το εισόδημά του. Για παράδειγμα όταν ζημιωθεί μπορεί να μειώσει την κατανάλωσή του και να αποταμιεύσει μέρος του εισοδήματός του με σκοπό να κερδίσει πίσω τα χρήματα που έχασε. Προκύπτει το ερώτημα αν αυτοί οι λόγοι ισχύουν στην πράξη. Κάνοντας χρήση της εκθετικής συνάρτησης χρησιμότητας, και αναγνωρίζοντας ότι ο επενδυτικός ορίζοντας δεν επηρεάζει την αποστροφή κινδύνου του επενδυτή, έστω ότι ένα νοικοκυριό έχει πλούτο $\$W_0$. Η εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας ονομάζεται CRRA (constant relative risk aversion), και παραμένει σταθερή στο χρόνο. Στην δεδομένη διπλωματική εργασία θα αναφέρεται ως CRRA για λόγους ευκολίας. Η συνάρτηση χρησιμότητας θα είναι :

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.1.2}$$

Η μεταβλητή γ είναι η αποστροφή κινδύνου του νοικοκυριού. Οι συγγραφείς θεωρούν, ότι έστω ένας επενδυτής έχει στην διάθεση του δύο περιουσιακά στοιχεία, ένα με κίνδυνο που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, και ένα χωρίς κίνδυνο. Για λόγους ευκολίας στο υπόλοιπο της διπλωματικής εργασίας το περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο θα αναφέρεται ως μετοχή, ενώ εκείνο χωρίς κίνδυνο ως ομόλογο. Οι μετοχές και τα ομόλογα αντίστοιχα έχουν ετήσιες αποδόσεις r_T^s και r^b. Επίσης τα ποσά που επενδύει το νοικοκυριό σε μετοχές είναι S_t, και σε ομόλογα B_t. Λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης για την περίοδο t συνεπάγεται :

$$\max(S_t, B_t)_{t=0}^{T-1} \in \frac{\{(W_T)^{1-\gamma}\}}{1-\gamma} \qquad (2.1.3)$$

όπου

$$W_T = S_{T-1}(1+r_T^s) + B_{T-1}(1+r^b) \qquad (2.1.4)$$

Ο πλούτος που έχει το νοικοκυριό την χρονική στιγμή T προέρχεται από την επένδυση σε μετοχές, την χρονική στιγμή $T-1$ πολλαπλασιασμένο επί την απόδοση των μετοχών συν την επένδυση σε ομόλογα την χρονική στιγμή $T-1$ επί την απόδοση των ομολόγων.

$$S_t + B_t \leq (1+r_t^s)S_{t-1} + (1+r^b)B_{t-1} \qquad (2.1.5)$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι ο πλούτος W_T από την εξίσωση (2.1.4) είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το άθροισμα της επένδυσης σε μετοχές και ομόλογα. Αυτό συμβαίνει διότι ο πλούτος που έχει το νοικοκυριό στην διάθεσή του χρησιμοποιείται για να επενδυθεί σε μετοχές και ομόλογα. Συνεπώς, αν όλος ο πλούτος επενδυθεί σε μετοχές και ομόλογα τότε η εξίσωση (2.1.5) θα είναι ισότητα, όμως αν το νοικοκυριό αποταμιεύει το πλούτο του για άλλη χρήση τότε $W_\tau > S_T + B_T$. Υπό τον περιορισμό ότι $1 \leq t \leq T-1$ και προκύπτει ότι:

$$S_0 + B_0 \leq W_0 \qquad (2.1.6)$$

Γίνεται η υπόθεση ότι το ποσό που κατέχει το νοικοκυριό σε μετοχές είναι ανεξάρτητο από τον πλούτο, και ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών είναι ίδιες σε κάθε χρονική περίοδο, καθώς και ότι η αποστροφή κινδύνου παραμένει σταθερή στο χρόνο. Έστω ότι $s*$ είναι το ποσό επένδυσης σε μετοχές, που ικανοποιεί τις συνθήκες πρώτης τάξης. Αν το πρόβλημα μεγιστοποίησης της εξίσωσης (2.1.3) λυθεί αντίστροφα για τις χρονικές περιόδους $T-1, T-2, T-3$ κ.τ.λ. τότε αποδεικνύεται ότι το $s*$ θα ισούται με S_{T-1}, S_{T-2}, S_{T-3}, για κάθε χρονική περίοδο. Συνεπώς αν το νοικοκυριό παίρνει αποφάσεις σε τακτά χρονικά διαστήματα, η διάρκεια του χρονικού ορίζοντα δεν έχει σημασία. Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν και όταν τα νοικοκυριά αλλάζουν τα χαρτοφυλάκια τους σπάνια λόγω του ότι υπάρχουν κόστη συναλλαγών.

Η σημασία των στόχων είναι εξίσου σημαντική. Λόγω αυξημένων υποχρεώσεων, θεωρείται ότι οι επενδυτές θα επιλέξουν ομόλογα όσο μεγαλώνουν ηλικιακά. Η εξίσωση χρησιμότητας που περιγράφει την απόφαση αυτή είναι :

$$U(W_T) = \begin{cases} \dfrac{(W_T - \overline{W})^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}, \alpha\nu\ W_\tau \geq \overline{W} \\ -L \qquad\quad , \alpha\nu\ W_T < \overline{W} \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

όπου $\bar{W}$ είναι ο επιθυμητός πλούτος, και L η απώλεια χρημάτων. Στην περίπτωση που ισχύει $\frac{\bar{W}}{(1+r^b)^T} \geq W_0$ το νοικοκυριό μπορεί να φτάσει στον επιθυμητό του στόχο με την επένδυση μόνο σε ομόλογα, και να επενδύσει $s*$ σε μετοχές. Αν όμως $\bar{W}>W_0(1+r^b)^T$ ο στόχος είναι αδύνατον να επιτευχθεί, διότι ο επιθυμητός πλούτος του νοικοκυριού δεν ικανοποιείται από την επένδυση μόνο σε ομόλογα, και χρειάζεται να επενδύσει περισσότερο σε μετοχές στην διάρκεια του χρόνου. Η δεύτερη περίπτωση είναι απολύτως λογική, επειδή με την επένδυση σε μετοχές το νοικοκυριό θα έχει μεγαλύτερες αναμενόμενες αποδόσεις, και με αυτό τον τρόπο αυξάνεται ο πλούτος που επιθυμεί.

Για το εισόδημα εργασίας θεωρείται ότι y_t είναι ο μισθός που λαμβάνει ο επενδυτής την περίοδο t. Με την χρήση της εξίσωσης (2.1.3) λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης με τους ίδιους περιορισμούς προκύπτει ότι ο πλούτος, και το άθροισμα του συνόλου των μετοχών, και των ομολόγων που κατέχει τα νοικοκυριό αντίστοιχα θα είναι :

$$W_T = y_T + S_T(1+r_\tau^s) + B_{T-1}(1+r^b) \tag{2.1.8}$$

$$S_T + B_T \leq y_t + (1+r_t^s)S_{t-1} + (1+r^b)B_{t-1} \tag{2.1.9}$$

Πάλι σε αυτή τη περίπτωση το άθροισμα των περιουσιακών στοιχείων είναι μικρότερο ή ίσο του πλούτου και οι σχέσεις (2.1.8) και (2.1.9) ισχύουν για τον ίδιο λόγο που ισχύουν οι σχέσεις (2.1.4),(2.1.5). Ένα νοικοκυριό διαθέτει δύο είδη πλούτου, τον χρηματοοικονομικό που προέρχεται από τις επενδύσεις σε διαπραγματεύσιμα χρεόγραφα και τον εργασιακό σύμφωνα με το εισόδημα που λαμβάνει. Ο χρηματοοικονομικός, και ο εργασιακός πλούτος (με την υπόθεση ότι οι πληρωμές y_t είναι σταθερές στο χρόνο) περιγράφονται αντίστοιχα από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$F_t = y_t + (1+r_t^s) + (1+r^b)B_{t-1} \tag{2.1.10}$$

Όπου ο χρηματοοικονομικός πλούτος την χρονική στιγμή t, προέρχεται από την πληρωμή και τις αποδόσεις των μετοχών την ίδια χρονική στιγμή συν την απόδοση των ομολόγων επί το ποσό επένδυσης των ομολόγων την προηγούμενη περίοδο. Το ποσό επένδυσης σε ομόλογα λαμβάνεται υπόψη επειδή είναι επένδυση χωρίς κίνδυνο, ενώ το ποσό επένδυσης σε μετοχές προηγούμενης περιόδου μπορεί να έχει αποφέρει απώλειες, για αυτό δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξίσωση.

$$PVY_t = \left[{}^{y}/_{(1+r^b)}\right] + \left[\frac{y}{(1+r^b)^2}\right] + \cdots + \left[{}^{y}/_{(1+r^b)^{T-t}}\right] \tag{2.1.11}$$

Λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης με τις συνθήκες πρώτης τάξης καταλήγουμε ότι:

$$S_t = s^*(F_t + PVY_t) \tag{2.1.12}$$

Στη συνέχεια διαιρώντας και τα δύο μέλη με FW_T η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{S_t}{FW_t} = s^*\left[1 + \left(\frac{PVY_t}{FW_t}\right)\right] \tag{2.1.13}$$

Η εξίσωση εκφράζει τον πλούτο που κατέχει σε μετοχές ο επενδυτής. Όσο περνάει ο χρόνος υπάρχει συσσώρευση των περιουσιακών στοιχείων και ο χρηματοοικονομικός πλούτος αυξάνεται με συνέπεια το κλάσμα να μειώνεται. Επίσης, όσο ο επενδυτής πλησιάζει στην ηλικία συνταξιοδότησης η παρούσα αξία του εισοδήματος εργασίας του μειώνεται, διότι είναι μικρότερος ο αριθμός πληρωμών του επενδυτή, συνεπώς και το κλάσμα της εξίσωσης (2.1.13). Προκύπτει λοιπόν ότι αν το εισόδημα εργασίας είναι ασυσχέτιστο με τις αποδόσεις των μετοχών, που ισχύει για τα περισσότερα νοικοκυριά, τότε συμφέρει τον επενδυτή να ακολουθήσει την θεωρία και να επενδύει σε ομόλογα όσο μεγαλώνει. Το αντίθετο ισχύει αν υπάρχει θετική συσχέτιση του εισοδήματός τους με τις αποδόσεις των μετοχών.

2.2 Η σημασία του χρονικού ορίζοντα

Η ανάλυση του χρονικού ορίζοντα βασίζεται στο άθρο των Jaggia-Thosar (2010). Σύμφωνα με τους συγγραφείς, ένα σημαντικό ερώτημα που τίθεται είναι αν ο χρονικός ορίζοντας των επενδυτών, έχει σημασία στη λήψη επενδυτικών αποφάσεων. Οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν έναν τυχαίο περίπατο, και οι προτιμήσεις των επενδυτών περιγράφονται από την CRRA χρησιμότητα τότε ο επενδυτικός ορίζοντας δεν έχει σημασία στην λήψη αποφάσεων. Πολλοί επενδυτές και ακαδημαϊκοί διαφωνούν με αυτή την προσέγγιση, εξετάζοντας τα μειονεκτήματα του μοντέλου. Χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις για την εξαγωγή συμπερασμάτων, υπολογίζουν την πιθανότητα, ένας δείκτης μετοχών να έχει μεγαλύτερες αποδόσεις από ένα χαρτοφυλάκιο. Επίσης απορρίπτουν την μία ή και τις δύο υποθέσεις. Πολλές φορές δεν παίζει ρόλο μόνο η ηλικία στην κατανομή του χαρτοφυλακίου των επενδυτών. Σημαντικό αντικείμενο μελέτης πλέον είναι και οι ψυχολογικοί παράγοντες.

Όμως υπάρχει πληθώρα ερευνών που αναλύουν τη σχέση ηλικίας και αποστροφής κινδύνου. Σύμφωνα με την έρευνα των Vroom και Pahl (1971), όπου το δείγμα αφορούσε 1.484 εργαζόμενους από διαφορετικές εταιρείες, οι εργαζόμενοι καλέστηκαν να διαλέξουν μεταξύ μίας επένδυσης σε ομόλογα και μίας επένδυσης σε μετοχές, όπου η δεύτερη θα είχε καλύτερες αναμενόμενες αποδόσεις. Από το πείραμα, προκύπτει ότι οι νεότεροι επενδυτές, δείχνουν μεγαλύτερη ανοχή στο ρίσκο. Παραδείγματος χάριν ένας νεότερος επενδυτής θα είναι περισσότερο διατεθειμένος να πάρει ένα δάνειο σε σχέση με έναν μεγαλύτερο ηλικιακά επενδυτή, λόγω του χρονικού ορίζοντα που έχει, ώστε να το αποπληρώσει.

Όσον αφορά την χρησιμότητα, η σχέση μεταξύ του ρίσκου που είναι διατεθειμένος να αναλάβει ο επενδυτής και του επενδυτικού ορίζοντα, σύμφωνα με την CCRA χρησιμότητα δηλώνει ότι η κατανομή του χαρτοφυλακίου του επενδυτή δεν επηρεάζεται από τον πλούτο (W) που έχει στη κατοχή του. Η συνάρτηση χρησιμότητας, όπου απεικονίζονται οι προτιμήσεις του επενδυτή μαθηματικά σε αυτή την περίπτωση θα είναι :

$$\mathrm{U(W)} = \frac{\delta}{\delta - 1}(\mathrm{W})^{1-\frac{1}{\delta}} \tag{2.2.1}$$

διότι η γενική μορφή της CCRA χρησιμότητας είναι της μορφής $U(W) = \frac{W^{\gamma}}{\gamma}$ για $\gamma > 1$ και $\gamma \neq 0$. Αν $\gamma = 0$ τότε $U(W) = \log W$. Συνεπώς $1 - \frac{1}{\delta} = \gamma$ και $\frac{\delta}{\delta-1} = \frac{1}{\gamma}$ άρα $\delta > 0$ και $W > 0$. Η σχετική αποστροφή κινδύνου θα είναι:

$$R_R(W) = -W\frac{U''(W)}{U(W)} = \frac{1}{\delta} \tag{2.2.2}$$

Ο λόγος δηλώνει της 2ης και της 1ης παραγώγου χρησιμότητας δηλώνει την απόλυτη αποστροφή κινδύνου του επενδυτή. Η σχετική αποστροφή κινδύνου μετράει την στάση του επενδυτή, απέναντι στα κέρδη που είναι ανάλογα με τον πλούτο του. Η εξίσωση (2.2.2) δηλώνει ότι αν ο πλούτος του επενδυτή αυξανόταν κατά μία ποσότητα, η επιθυμία του επενδυτή να αναλάβει το ρίσκο θα αυξανόταν κατά τον ίδιο βαθμό.

Έστω ότι υπάρχουν δύο επενδυτές ο Χ και ο Ψ. Αν ο Ψ αποστρέφεται τον κίνδυνο περισσότερο από τον Χ αυτό αποτυπώνεται στην εξίσωση με χαμηλότερο δ. Θεωρείται ότι το δ μειώνεται καθώς ο χρονικός ορίζοντας μεγαλώνει. Συνεπώς το δ αποτελεί μία φθίνουσα συνάρτηση του επενδυτικού ορίζοντα. Ο Ψ είναι λιγότερο ριψοκίνδυνος διότι έχει μεγαλύτερο επενδυτικό ορίζοντα από τον Χ. Έστω τώρα ότι :

$$\delta = \delta_0 t^{0.10} \tag{2.2.3}$$

Οι επενδύσεις έχουν ως στόχο την βέλτιστη κατανομή του χαρτοφυλακίου του επενδυτή, με την μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητάς του. Αν η εξίσωση (2.2.3) αναστραφεί τότε περιγράφει την αποστροφή κινδύνου του επενδυτή. Αν ένα άτομο, επενδύσει το πλούτο του πλήρως σε δύο περιουσιακά στοιχεία την χρονική στιγμή t_0, τότε ο πλούτος του την χρονική στιγμή θα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$W_t = aW_0(1 + r_r)^t + (1 - a)W_0\left(1 + r_f\right)^t \quad (2.2.4)$$

Ο πλούτος την στιγμή t είναι η επένδυση πλούτου την στιγμή t_0 επί το ποσοστό επένδυσης σε μετοχές που συμβολίζεται με α, επί την απόδοσή τους. Με $(1-\alpha)$ συμβολίζεται το ποσοστό επί του πλούτου που επενδύεται σε ομόλογα διότι θεωρείται από την υπόθεση ότι ολόκληρος ο πλούτος είναι διαπραγματεύσιμος, επί την απόδοση των ομολόγων την χρονική στιγμή t. Η αναμενόμενη απόδοση r_r της μετοχής αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, ο πλούτος που είναι και αυτός τυχαίος στην διάρκεια του χρόνου, εξαρτάται από το επίπεδο συσχέτισης που έχει με την απόδοση της μετοχής.

Μέσω προσομοίωσης για 5000 παρατηρήσεις σε 20 έτη, διατυπώνονται τα αποτελέσματα όταν, ο επενδυτικός ορίζοντας είναι εξαρτημένος από την αποστροφή κινδύνου, και όταν είναι ανεξάρτητος. Η μεταβλητή t των εξισώσεων (2.2.3),(2.2.4) παίρνει τιμές από 1 έως 20, η απόδοση $r_f = 0.9$, και $W_0 = 1$. Έστω ότι η μεταβλητή $\delta_0 = \frac{1}{5}$, της εξίσωσης (2.2.3) εκφράζει τις διαφορές της αποστροφής κινδύνου των επενδυτών. Σε αυτή την περίπτωση όσο μεταβάλλεται το t, θα αλλάζει και η φθίνουσα συνάρτηση του επενδυτικού ορίζοντα δ. Άρα όταν $t = 1$ τότε η σχετική αποστροφή κινδύνου $\frac{1}{\delta} = 5$, όταν $t = 10$ τότε $\frac{1}{\delta} = 4$, για $t = 20$, $\frac{1}{\delta} = 3.71$ κ.τ.λ. Η έλλειψη ανεξαρτησίας δείχνει ότι η αύξηση του επενδυτικού ορίζοντα μειώνει την αποστροφή κινδύνου, δηλαδή οι νεαροί επενδυτές με μεγαλύτερο επενδυτικό ορίζοντα είναι διατεθειμένοι να έχουν περισσότερες μετοχές στο χαρτοφυλάκιό τους από μεγαλύτερους ηλικιακά επενδυτές. Τώρα, αν ο επενδυτικός ορίζοντας είναι ανεξάρτητος από την σχετική αποστροφή κινδύνου (παράμετρος δ), και ο χρονικός ορίζοντας αυξάνεται, τότε θα αυξάνεται το ποσοστό επένδυσης σε μετοχές. Αυτό συμβαίνει διότι σύμφωνα με την εξίσωση (2.2.4), η αύξηση του επενδυτικού ορίζοντα θα οδηγήσει σε αύξηση του πλούτου W. Μέσω της εξίσωσης (2.2.2) θα αυξηθεί και η επιθυμία του επενδυτή να αναλάβει περισσότερο ρίσκο. Σύμφωνα και με τις 2 περιπτώσεις ασχέτως με τον χρονικό ορίζοντα οι επενδυτές θα επενδύουν περισσότερο σε μετοχές όταν είναι νέοι. Η διαφορά έγκειται στο ποσοστό αυτής της επένδυσης. Η άποψη που κυριαρχεί είναι ότι για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί το ρίσκο του επενδυτή, αν στην συνάρτηση χρησιμότητας δεν περιλαμβάνονται ψυχολογικοί παράγοντες που επηρεάζουν τις αποφάσεις του. Αυτή η νέα οπτική αρχίζει να εφαρμόζεται τα τελευταία χρόνια. Υπάρχουν μεγάλες δυνατότητες για έρευνες που μπορούν να εξηγήσουν αυτές τις έννοιες καλύτερα και πιο ολοκληρωμένα.

2.3 Επιλογή χαρτοφυλακίου για μικρό χρονικό διάστημα

Ο πλούτος του επενδυτή αποτελείται από το άθροισμα του ανθρώπινου κεφαλαίου, και του χρηματοοικονομικού πλούτου. Τα διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία (μετοχές, ομόλογα κ.α.) συνθέτουν το χρηματοοικονομικό, ενώ τα μη διαπραγματεύσιμα περιουσιακά στοιχεία, όπως η εκπαίδευση, το εργατικό δυναμικό κ.τ.λ, αποτελούν το ανθρώπινο κεφάλαιο. Το ερώτημα που τίθεται είναι, ποιες είναι οι συνέπειες στην κατανομή χαρτοφυλακίου λαμβάνοντας υπόψη την σημασία του ανθρώπινου κεφαλαίου. Οι Campell-Viceira (2001) προσπάθησαν να μαθηματικοποιήσουν την βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Οι συγγραφείς θεωρούν ένα υπόδειγμα, όπου ένας επενδυτής έχει στην διάθεση του δύο περιουσιακά στοιχεία ένα με κίνδυνο, που χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα (μετοχές), και ένα χωρίς κίνδυνο (ομόλογα). Έστω ότι ο επενδυτής βρίσκεται στο χρόνο t, και στο χαρτοφυλάκιο του έχει ομόλογα με απόδοση $R_{f,t+1}$ για την περίοδο t μέχρι $t+1$, και μετοχές με αναμενόμενες αποδόσεις για την ίδια περίοδο R_{t+1}. Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι E_tR_{t+1}, και η διακύμανση σ_t^2 διότι επηρεάζονται πλήρως από τις αποδόσεις των μετοχών, εφόσον ο επενδυτής γνωρίζει χωρίς να υπάρχει αβεβαιότητα στην περίοδο t, ποια θα είναι η απόδοση των ομολόγων την επόμενη περίοδο. Οι δείκτες των μεταβλητών της αναμενόμενης απόδοσης, καθώς και της διακύμανσης δείχνουν τις γνώσεις που έχει επενδυτής την χρονική στιγμή t.

Έστω ότι όταν ο επενδυτής βάζει ένα μερίδιο του χαρτοφυλακίου του σε μετοχές ύψους α_t τότε η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του σήμερα για την στιγμή $t+1$ θα είναι:

$$R_{p,t+1} = \alpha R_{t+1} + (1-a)R_{f,t+1} \qquad (2.3.1)$$

Όπου η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι $E_tR_{p,t+1} = R_{f,t+1} + a_t\left(E_tR_{t+1} - R_{f,t+1}\right)$ και η διακύμανση $\sigma_{pt}^2 = a_t^2\sigma_t^2$. Ο επενδυτής θα επιθυμεί την μεγιστοποίηση της χρησιμότητας του πλούτου του, την περίοδο $t+1$. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης διατυπώνεται ως:

$$maxE_tU(W_{t+1}) \qquad (2.3.2)$$

Όπου W_{t+1} είναι ο πλούτος που αναμένει την χρονική στιγμή $t+1$, υπό τον περιορισμό :

$$W_{t+1} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)W_t \qquad (2.3.3)$$

Η μεταβλητή W_t δείχνει ότι ο πλούτος που θα έχει την χρονική στιγμή $t+1$, εξαρτάται από τον πλούτο που έχει συσσωρευμένο σήμερα W_t. Στην περίπτωση που γίνει η υπόθεση ότι το μοντέλο είναι λογαριθμικό, και η χρησιμότητά του επενδυτή περιγράφεται από την CRRA χρησιμότητα, τότε η λογαριθμική αναμενόμενη τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής X, και η εξίσωση (2.3.2) γράφονται ως εξής:

$$logE_tX_{t+1} = E_tlogX_{t+1} + \frac{1}{2}V_{ar_t}logX_{t+1} = E_tx_{t+1} + \frac{1}{2}\sigma_{x_t}^2 \qquad (2.3.4)$$

$$\frac{maxE_tW_{t+1}^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} \qquad (2.3.5)$$

Η μεταβλητή γ είναι η αποστροφή κινδύνου του επενδυτή, και συμβολίζεται με αυτό τον τρόπο για όλη την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Το κλάσμα $\frac{1}{(1-\gamma)}$, μπορεί να παραληφθεί διότι δεν επηρεάζει την λύση. Συνεπώς με χρήση των εξισώσεων (2.3.4),(2.3.5) προκύπτει το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$maxE_tW_{t+1}^{1-\gamma} = (1-\gamma)E_tw_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma_{wt}^2 \qquad (2.3.6)$$

Στην εξίσωση (2.3.6) η μεταβλητή σ_{wt}^2 είναι η διακύμανση του πλούτου την χρονική στιγμή t, η οποία ισούται με την διακύμανση του χαρτοφυλακίου σ_{pt}^2 την ίδια χρονική στιγμή. Μέσω του περιορισμού της εξίσωσης (2.3.3), και αφαιρώντας το $(1-\gamma)$ η εξίσωση (2.3.6) γράφεται ως:

$$maxE_tr_{p,t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{pt}^2 \qquad (2.3.7)$$

Επειδή η εξίσωση είναι λογαριθμική ο όρος που προκύπτει από την επιμεριστική ιδιότητα είναι ίσος με $maxE_tr_{p,t+1} + \frac{\sigma_{pt}^2}{2} = \log E_t\left(1 + R_{p,t+1}\right)$. Συνεπώς η εξίσωση (2.3.7) μπορεί να γραφεί ως :

$$maxlogE_t\left(1 + R_{p,t+1}\right) - \frac{1}{2}\gamma\sigma_{pt}^2 \qquad (2.3.8)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.1) η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ο συνδυασμός των αποδόσεων των μετοχών, και των ομολόγων. Για μικρά χρονικά διαστήματα όπως σε αυτή την περίπτωση το $[t, t+1]$, μπορεί να γίνει χρήση της προσέγγισης του Taylor, και χρήση των εξισώσεων (2.3.7),(2.3.8) η (2.3.1) μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = \alpha_t\left(r_{t+1} - r_{f,t+1}\right) + \frac{1}{2}\alpha_t(1 - a_t)\sigma_t^2 \qquad (2.3.9)$$

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου του επενδυτή της εξίσωσης (2.3.7) μέσω της εξίσωσης (2.3.9) γίνεται :

$$max\alpha_t(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \tfrac{1}{2}\alpha_t(1 - a_t)\sigma_t^2 + \tfrac{1}{2}(1 - \gamma)a_t^2\sigma_t^2 \qquad (2.3.10)$$

Συνεπώς λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης ως προς a_t, δηλαδή παραγωγίζοντας ως προς a_t και θέτοντας την εξίσωση ίση με το μηδέν, προκύπτει η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή, που περιγράφεται από την συνάρτηση:

$$a_t = \frac{E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2}}{\gamma\sigma_t^2} \qquad (2.3.11)$$

Έστω τώρα ότι ο επενδυτής που βρίσκεται στο χρόνο t, έχει a το οποίο δεν είναι δεσμευμένο ως προς τον χρόνο t, και παραμένει σταθερό στο χρόνο, δηλαδή παραμένει η ίδια ανεξαρτήτως των μεταβολών που μπορεί να έχουν άλλες μεταβλητές της εξίσωσης. Επίσης, έστω ότι γίνεται η υπόθεση πως η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου παραμένει και αυτή σταθερή στο χρόνο, και εκφράζεται ως η μέση απόδοση μ , όπου $\mu = E_t\left(r_{t+1} - r_{f,t+1}\right)$. Η μεταβλητή μ, θα παραμείνει σταθερή για όλες τις αναλύσεις που θα γίνουν στην συνέχεια. Οι λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών, και των ομολόγων θα είναι αντίστοιχα r_{t+1} και r_f. Στα ομόλογα ο επενδυτής γνωρίζει τις αποδόσεις τους για όλες τις μελλοντικές χρονικές περιόδους, και έχουν την ίδια απόδοση r_f. Ακόμα η διακύμανση των μετοχών r_{t+1} που δηλώνουν μεταβλητότητα που παρουσιάζει η βέλτιστη κατανομή μετοχών, είναι σταθερή στο χρόνο διότι το a είναι σταθερό, και συμβολίζεται με σ^2. Το ανθρώπινο κεφάλαιο συμβολίζεται με H_t, ενώ ο χρηματοοικονομικός πλούτος που έχει στην διάθεσή του ο επενδυτής την χρονική στιγμή t με F_t. Το ανθρώπινο κεφάλαιο είναι η παρούσα αξία όλων των μελλοντικών πληρωμών που θα λάβει ο επενδυτής σαν εισόδημα εργασίας.

Στο μοντέλο επιλογής χαρτοφυλακίου, όπου οι αποδόσεις των μετοχών, και των ομολόγων είναι λογαριθμικές, τότε σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.11) $\hat{\alpha} = \frac{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\gamma\sigma^2}$, $\hat{\alpha}$ είναι το ποσοστό επένδυσης σε μετοχές. Τέλος στο μοντέλο χρησιμοποιείται η CRRA χρησιμότητα. Στο μοντέλο ο επενδυτής δεν μπορεί να διαθέσει το 100% του πλούτου σε διαπραγματεύσιμα χρεόγραφα, διότι είναι υποχρεωμένος να διαθέτει ανθρώπινο κεφάλαιο. Η βέλτιστη κατανομή του χαρτοφυλακίου του επενδυτή, που δεν έχει αυτό τον περιορισμό είναι να πουλήσει όλα τα δικαιώματα που έχει σε ανθρώπινο κεφάλαιο για χρήματα ύψους

H_t. Σε αυτή την περίπτωση θα επένδυε $\hat{\alpha}(F_t + H_t)$ σε μετοχές, και τον εναπομείναντα πλούτο του $(1 - \hat{\alpha})(F_t + H_t)$ σε ομόλογα.

Εφόσον ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να έχει ανθρώπινο κεφάλαιο, που δεν είναι διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο, το ερώτημα που τίθεται είναι ποια θα είναι η βέλτιστη σταθερή κατανομή μετοχών a στο χαρτοφυλάκιό του. Το ανθρώπινο κεφάλαιο θεωρείται περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, και αποτελεί το μελλοντικό εισόδημα εργασίας του επενδυτή. Συνεπώς, για να βελτιστοποιήσει το χαρτοφυλάκιό του, ο επενδυτής θα μεταβάλλει το ποσοστό του πλούτου που διαθέτει σε ομόλογα, κατά $(1 - \hat{\alpha})(F_t + H_t) - H_t$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση μπορεί να είναι αρνητική, εφόσον το H_t μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από το W_t, αφού αφορά όλα τα μελλοντικά εισοδήματα εργασίας, και να οδηγήσει τον επενδυτή προς μεγαλύτερη επένδυση σε μετοχές. Εφόσον ο επενδυτής θα λάβει μελλοντικά εισόδημα εργασίας, δεν έχει λόγο να το επενδύσει στην αγορά ομολόγων. Η μεταβολή στην επένδυση σε ομόλογα ώστε να είναι βέλτιστη, θα μεταβάλλει και την βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Η βέλτιστη αντίδραση για το ποσοστό επένδυσης σε μετοχές, είναι η αρχική επένδυση που σκόπευε να κάνει $\hat{\alpha}(W_t + H_t)$ προς τον χρηματοοικονομικό πλούτο. Η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή περιγράφεται από την εξίσωση:

$$a = \frac{\hat{\alpha}(F_t + H_t)}{Ft} = \frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\gamma\sigma^2}\left(1 + \frac{H_t}{F_t}\right) \tag{2.3.12}$$

Ο όρος $\hat{\alpha}(F_t + H_t)$ δηλώνει το ποσοστό επένδυσης σε μετοχές. Ενδιαφέρον από αυτή την εξίσωση παρουσιάζει ο λόγος $\frac{H_t}{F_t}$. Όταν ο επενδυτής είναι νέος έχει περισσότερες αναμενόμενες μελλοντικές πληρωμές από όταν μεγαλώνει. Στην συνταξιοδότηση ο λόγος αυτός μηδενίζεται διότι $H_t = 0$, συνεπώς, όταν ο επενδυτής είναι νέος θα επενδύει περισσότερο σε μετοχές, εφόσον από την εξίσωση (2.3.12) φαίνεται ότι όσο αυξάνεται το H_t αυξάνεται και το a. Επίσης, όταν η αγορά μετοχών έχει καλές αποδόσεις αυξάνεται το F_t, με συνέπεια να μειώνεται η επένδυση σε μετοχές. Επιπλέον, εφόσον μετά την συνταξιοδότηση ο πλούτος του επενδυτή αποτελείται πλήρως από τον χρηματοοικονομικό, προκύπτει από την (2.3.12), ότι θα μειώνεται η επένδυση σε μετοχές καθώς μεγαλώνει ηλικιακά. Όμως η εξίσωση δεν λαμβάνει υπόψη δύο σημαντικούς παράγοντες. Πρώτον, την αβεβαιότητα που υπάρχει για τους μελλοντικούς μισθούς του επενδυτή. Δεύτερον, την προσφορά εργασίας που είναι διατεθειμένος να προσφέρει ο επενδυτής για να αυξήσει το ανθρώπινό του κεφάλαιο, παραδείγματος χάριν να εργάζεται περισσότερες ώρες με σκοπό μία προαγωγή.

2.4. Μοντέλο επιλογής χαρτοφυλακίου και η σημασία του εισοδήματος εργασίας

Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρέαζουν την κατανομή ενός χαρτοφυλακίου, όπως η ηλικία, το φύλο, ψυχολογικοί παράγοντες κ.τ.λ. Η ηλικία έχει αναλυθεί περισσότερο από τους υπόλοιπους παράγοντες στην εμπειρική βιβλιογραφία. Στην συνέχεια της ανάλυσής τους οι Campell-Viceira (2001) προσπαθούν να προσδιορίσουν την σημασία του εισοδήματος εργασίας στην κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Για να γίνει κατανοητή η σημασία της, έστω ότι ένα άτομο την χρονική στιγμή t, που γεννήθηκε το έτος b θα είναι α_t ετών, δηλαδή:

$$\alpha_t = t - b \qquad (2.4.1)$$

Αυτές οι 3 μεταβλητές από μόνες τους, είναι αδύνατον να εξηγήσουν ταυτόχρονα τον τρόπο που λαμβάνει αποφάσεις ένα άτομο, όταν διαμορφώνει το χαρτοφυλάκιό του. Οι επενδυτές διαμορφώνουν τα χαρτοφυλάκιά τους, από τις αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών. Το α_t είναι το ποσοστό των μετοχών που έχει ένας επενδυτής στο χαρτοφυλάκιό του, και περιγράφεται όπως αποδείχτηκε προηγουμένως από την εξίσωση:

$$\alpha_t = \frac{E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2}}{\gamma \sigma_t^2} \qquad (2.4.2)$$

Έστω ένας ενήλικος επενδυτής που έχει k προτιμήσεις την χρονική στιγμή t. Επίσης έστω C η κατανάλωσή του, T η χρονική περίοδος θανάτου του επενδυτή, γ η μεταβλητή που εκφράζει την αποστροφή κινδύνου. Τέλος p_t η πιθανότατα να ζει ο επενδυτής τη περίοδο $t+1$. Οι προτιμήσεις του επενδυτή στη διάρκεια του χρόνου περιγράφονται από παρακάτω εκθετική συνάρτηση :

$$\frac{C_{kt}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + E_t \sum_{i=1}^{T-t} \frac{\left(\prod_{j=0}^{i-1} p_{t+j}\right)\left(C_{k,t+i}^{1-\gamma}\right)}{1-\gamma} \qquad (2.4.3)$$

Σημασία στις προτιμήσεις του επενδυτή έχει το εισόδημα εργασίας του. Έστω Ω είναι η περίοδος την οποία εργάζεται και θεωρείται εξωγενής και ντετερμινιστική, για λόγους ευκολίας. Οι προτιμήσεις του εισοδήματος εργασίας του επενδυτή, ηλικίας i δίνονται από την συνάρτηση :

$$\log(Y_{it}) = f(t, Z_{kt}) + u_{kt} + \varepsilon_{kt} \qquad (2.4.4)$$

Το πρώτο μέλος εκφράζει λογαριθμικά τις προτιμήσεις του εισοδήματος Y του επενδυτή την στιγμή t. Η συνάρτηση $f(t, Z_{kt})$ που εκφράζεται σε μονάδες χρόνου και στα προσωπικά χαρακτηριστικά του επενδυτή, είναι ντετερμινιστική δηλαδή μοντελοποιεί το συστηματικό χαρακτήρα των δύο αυτών μεταβλητών, μέσω της συνάρτησης. Οι άλλες δυο μεταβλητές, του δεύτερου μέλους είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, καθώς και μεταξύ των νοικοκυριών, και κατανέμονται κανονικά. Η μεταβλητή ε_{kt} εκφράζει τις προσωρινές μεταβολές του εισοδήματος, όπως παραδείγματος χάριν τα έξοδα για αποκατάσταση μίας φθοράς στο σπίτι του επενδυτή, ενώ η μεταβλητή u_{kt} εκφράζει την καμπύλη του εισοδήματος στην διάρκεια ζωής του επενδυτή, και εκφράζεται από την συνάρτηση:

$$u_{kt} = u_{k,t-1+}\, u_{kt} \qquad (2.4.5)$$

Συνεπώς το u_{kt} είναι μία ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή που αντικατοπτρίζει τις μόνιμες μεταβολές που γίνονται στο εισόδημα, όπως παραδείγματος χάριν η αύξηση του Φ.Π.Α ή η σύναψη ενός τραπεζικού δανείου από τον επενδυτή. Η μεταβλητή u_{kt} ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο, και αποτελείται από δύο συνιστώσες, μία αθροιστική που αφορά προηγούμενες μεταβολές που επηρεάζουν ακόμα το εισόδημα του επενδυτή παραδείγματος χάριν δόσεις δανείου, και μία ανεξάρτητη, (π.χ. αύξηση πληθωρισμού) κάτι που διατυπώνεται από την εξίσωση:

$$u_{kt} = \xi_t + \omega_{kt} \qquad (2.4.6)$$

Έστω ότι ο επενδυτής έχει την δυνατότητα να επενδύσει σε δύο περιουσιακά στοιχεία, ένα με κίνδυνο (μετοχές) και ένα μηδενικού κινδύνου (ομόλογα Αμερικάνικου Δημοσίου). Επίσης, έστω R_f η απόδοση του ομολόγου, και R_{t+1} η απόδοση της μετοχής τότε η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$R_{t+1} - R_f = \mu + q_{t+1} \qquad (2.4.7)$$

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου που έχει ο επενδυτής στο χαρτοφυλάκιό του είναι η αναμενόμενη απόδοση των μετοχών, μειωμένη κατά την ομολογιακή απόδοση R_f. Ο επενδυτής γνωρίζει ότι θα λάβει σίγουρα R_f από το χαρτοφυλάκιό του, αλλά ελπίζει να αποκομίσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο R_{t+1} για να έχει μεγαλύτερο κέρδος. Να σημειωθεί ότι η αναμενόμενη απόδοση R_{t+1} της μετοχής αλλάζει στο χρόνο διότι έχει αβεβαιότητα, ενώ η χωρίς κίνδυνο επένδυση R_f δεν αλλάζει την στιγμή $t+1$. Οι μεταβλητές μ και q_{t+1} εκφράζουν αντίστοιχα τη μέση αναμενόμενη απόδοση και την καινοτομία της απόδοσης του χαρτοφυλακίου (innovation excess returns), που έχει ο επενδυτής την στιγμή $t+1$. Αυτή η απόδοση σχετίζεται με την αθροιστική συνιστώσα των μόνιμων μεταβολών του εισοδήματος ξ_t, και δηλώνει την συσχέτιση που έχει το εισόδημα με τις αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών, ενώ γράφεται ως ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{\xi\eta}$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ένα άτομο εργάζεται για περίοδο Ω. Έστω τώρα ότι αποταμιεύει θ εισόδημα εργασίας για όταν συνταξιοδοτηθεί, τότε το διαθέσιμο εισόδημα εργασίας του την στιγμή t για $t \leq \Omega$ θα είναι :

$$Y_{kt}^{d} = (1-\theta)Y_{kt} \tag{2.4.8}$$

Το αρνητικό πρόσημο του θ δηλώνει το ποσοστό του εισοδήματος Y_{it} δηλαδή $(-\theta Y_{kt})$ που μειώνεται κατά θ. Ο πλούτος του επενδυτή συμβολίζεται με W. Αναλόγως την χρονική περίοδο και την ρευστότητά του, ο επενδυτής έχει διαφορετικά είδη πλούτου. Ο πλούτος την περίοδο συνταξιοδότησης είναι W_{kS}^{R} ενώ την περίοδο που εργάζεται W_{kt}^{R} . Ο επενδυτής διαθέτει και ρευστοποιήσιμο πλούτο W_{kt}^{L} που είναι το άθροισμα των δύο περιουσιακών στοιχείων που έχει στο χαρτοφυλάκιό του (ομόλογα και μετοχές), τα οποία συμβολίζονται αντίστοιχα B_{kt}^{L} και S_{kt}^{L}. Γίνεται η υπόθεση ότι αυτά τα περιουσιακά στοιχεία είναι μεγαλύτερα του μηδενός κάθε χρονική στιγμή.

2.5 Προβλήματα μοντέλου

Στην ανάλυση του μοντέλου παρουσιάζονται μερικά μαθηματικά προβλήματα. Πρώτον, το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής των νοικοκυριών, δηλαδή η δυσκολία που αντιμετωπίζει ο επενδυτής να βελτιστοποιήσει τις προτιμήσεις του, καθώς μεταβάλλεται το εισόδημά του στο χρόνο. Ο επενδυτής έχει ρευστά διαθέσιμα την χρονική στιγμή t, που περιγράφονται από την εξίσωση:

$$X_{kt=}W_{kt}^{L} + (1-\theta)Y_{kt} \tag{2.5.1}$$

Δηλαδή με το άθροισμα των υποκείμενων τίτλων που έχει στο χαρτοφυλάκιό του, και μπορεί άμεσα να τα ρευστοποιήσει, συν το διαθέσιμο εισόδημα εργασίας που του απομένει καθώς αποταμιεύει θ. Την χρονική περίοδο $t+1$ όπως και για κάθε στιγμή $t \leq \Omega$ ο πλούτος μεταβάλλεται καθώς και τα ρευστά διαθέσιμα. Ο επενδυτής την περίοδο $[t, t+1]$ θα καταναλώσει C_{kt}, ενώ το ποσοστό ρευστοποιήσιμου πλούτου που έχει επενδυθεί σε μετοχές θα είναι α_{kt}^{L} , ενώ σε ομόλογα $(1-a_{kt}^{L})$. Συνεπώς ο πλούτος την περίοδο $t+1$ θα είναι το άθροισμα των αποδόσεων των δύο περιουσιακών στοιχείων επί τα ρευστά διαθέσιμα την περίοδο t πλην την κατανάλωση που είχε ο επενδυτής την προηγούμενη περίοδο. Αυτό διατυπώνεται από την εξίσωση:

$$W_{kt+1}^{L} = \left(\alpha_{it}^{L}R_{t+1} + (1-\alpha_{it}^{L})R_f\right)[\, W_{kt}^{L} + (1-\theta)Y_{kt} - C_{kt}\,] \tag{2.5.2}$$

Επίσης, στην συνταξιοδότηση ο επενδυτής διαθέτει ως μέρος του πλούτου του, το ποσό που αποταμίευε από το εισόδημα εργασίας του, και η απόδοσή του είναι χωρίς κίνδυνο. Αυτό φαίνεται από την εξίσωση:

$$W_{k,t+1}^{R} = R_f[W_{kt}^{R} + \theta Y_{kt}] \qquad (2.5.3)$$

Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι ο επενδυτής επιθυμεί την μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του στην εξίσωση (2.4.3). Οι περιορισμοί ότι τα περιουσιακά στοιχεία στο χαρτοφυλάκιό του είναι πάντοτε θετικά, σε συνδυασμό με εισόδημα εργασίας του που λαμβάνει όσο εργάζεται στην εξίσωση (2.4.4), και τον πλούτο που προέρχεται από το αποταμιευμένο εισόδημα τις εξίσωσης (2.5.3) στην συνταξιοδότηση, εξαρτώνται από πολλές μεταβλητές οι οποίες αλλάζουν στο χρόνο (όσο μεταβάλλεται η ηλικία του επενδυτή).

Η λύση του προβλήματος, προϋποθέτει την χρήση Gaussian quadrature διαδικασίας, για τον υπολογισμό των κατά προσέγγιση κατανομών εισοδήματος εργασίας, και της απόδοσης των μετοχών. Η διαδικασία πήρε το όνομα της από τον μαθηματικό Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1885). Για την κατανόηση της διαδικασίας, όπως αναφέρει ο Μπράτσος (2015), έστω ότι υπάρχει η προσεγγιστική τιμή ορισμένου ολοκληρώματος:

$$I(f) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx \qquad (2.5.4)$$

Όλοι οι κανόνες ολοκλήρωσης μπορούν να γραφούν για λόγους ευκολίας στην μορφή:

$$I(f) = \int_{a}^{b} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots + w_n f(x_n) \qquad (2.5.5)$$

όπου οι συντελεστές των τιμών $f(x_i)$ ονομάζονται βάρη $w_i,\ i = 1,2,\dots,n$, και δεν υπάρχει σχέση εξάρτησης με την $f(x)$. Η διαδικασία χρησιμοποιείται διότι είναι αδύνατος ο θεωρητικός υπολογισμός του τύπου της συνάρτησης λόγω πολυπλοκότητας, και ο τύπος είναι άγνωστος, ενώ μόνο οι τιμές του είναι γνωστές σε ορισμένα σημεία. Αποδεικνύεται μαθηματικά ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι δυνατόν να γραφεί στην μορφή :

$$f(x) = w(x)g(x) \qquad (2.5.6)$$

Η οποία είναι μία μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$, που ονομάζεται συνάρτηση βάρους, ενώ το $g(x)$ είναι ένα πολυώνυμο. Τότε η $I(f)$ μέσω των συναρτήσεων (2.5.5),(2.5.6) μπορεί να γραφτεί ως:

$$I(f) = \int_a^b w(x)g(x)dx \approx w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + \cdots + w_n g(x_n) \qquad (2.5.7)$$

Τα βάρη στην προκειμένη περίπτωση αποτελούν τις παρατηρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση, $w_i,\ i = 1,2,\dots,n$ εξαρτώνται από τα σημεία x_i και την συνάρτηση $w(x)$, αλλά όχι από την συνάρτηση $g(x)$. Έστω ότι το πολυώνυμο $g(x)$ είναι βαθμού m, δηλαδή $g(x) = \alpha_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ με $a \in \mathrm{R}$ για κάθε $i = 0,1,\dots,m$. Ο σκοπός της ανάλυσης είναι να βρεθούν τα βάρη w_i, ώστε το σφάλμα της προσέγγισης να είναι ελάχιστο. Με αντικατάσταση του πολυωνύμου $g(x)$ στην εξίσωση (2.5.7) προκύπτει ότι:

$$w_1 x_1^m + w_2 x_2^m + \cdots + w_n x_n^m = \int_a^b x^m w(x)dx \qquad (2.5.8)$$

Στην συνάρτηση (2.5.8) μέσω της συνάρτησης (2.5.5) είναι φανερό ότι δημιουργείται ένα σύστημα $m + 1$ εξισώσεων με n αγνώστους, δηλαδή τα σημεία x_i. Η λύση του συστήματος που δημιουργείται, απαιτεί ότι οι εξισώσεις $m + 1 \leq 2n \Rightarrow m \leq 2n - 1$. Για να έχει λύση το σύστημα, σε κάθε περίπτωση πρέπει $m = 2n - 1$.

Στην συνέχεια το πρόβλημα λύνεται με τη μέθοδο της αντίστροφης επαγωγής. Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία έστω ότι είναι επιθυμητό να αποδειχθεί μία πρόταση $P(\alpha)$ για την οποία συνεπάγεται ότι $P(\alpha) \Rightarrow P(\alpha + 1)$. Αυτή η πρόταση επαγωγής μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η μέθοδος της αντίστροφής επαγωγής, δηλαδή κινούμαστε αντίθετα δείχνοντας ότι $P(\alpha + 1) \Rightarrow P(\alpha)$, για να αποδειχθεί η ισχύς της πρότασης.

Σύμφωνα με στοιχεία του PSID (Panel Study of Income Dynamics), που προκύπτουν με την χρήση ερωτηματολογίων σε νοικοκυριά, οι Campell-Viceira (2001) προσπαθούν να υπολογίσουν τις εξισώσεις (2.4.4),(2.4.5) που αφορούν τα προσωπικά χαρακτηριστικά των νοικοκυριών. Ιδιαίτερη σημασία δίνουν στο εισόδημα εργασίας. Οι συγγραφείς αναλύουν, ένα μοντέλο με βάση την ηλικία, που λαμβάνει υπόψη την κατανάλωση, την επιλογή του χαρτοφυλακίου, και την αβεβαιότητα του εισοδήματος εργασίας. Ένα νοικοκυριό που διαθέτει εισόδημα εργασίας, έχει και ανθρώπινο κεφάλαιο. Δηλαδή το νοικοκυριό δεν βρίσκεται σε ηλικία συνταξιοδότησης. Στην έρευνα συλλέχθηκαν παρατηρήσεις μεταξύ νοικοκυριών που αφορούσαν άντρες ηλικίας 20-65 ετών. Ο σκοπός είναι να συλλέξουν τα κατάλληλα στοιχεία, ώστε να τρέξουν μία προσομοίωση που να αντικατοπτρίζει την επιλογή του χαρτοφυλακίου των επενδυτών κατά την διάρκεια της ζωής τους. Το δείγμα χωρίζεται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες, α) άτομα χωρίς δευτεροβάθμια εκπαίδευση β) άτομα που έχουν δευτεροβάθμια εκπαίδευση γ) άτομα που έχουν πτυχίο Πανεπιστημίου. Η κατηγοριοποίηση του δείγματος, έχει σκοπό να βγάλει ένα πόρισμα για την διαφοροποίηση που υπάρχει στα ηλικιακά προφίλ μεταξύ διαφορετικών βαθμίδων εκπαίδευσης. Ο υπολογισμός της διακύμανσης, των μεταβλητών u_{kt} και ε_{kt} γίνεται μέσω της σχέσης :

$$log(Y_{kt}^{*}) \equiv log(Y_{kt}) - \hat{f}(t, Z_{kt}) \quad (2.5.9)$$

Η παραπάνω σχέση προέρχεται από την εξίσωση (2.4.4) με το άθροισμα των δύο άγνωστων μεταβλητών, δηλώνει την μεταβολή του εισοδήματος εργασίας που περιγράφεται ως $log(Y_{kt}^{*})$. Επίσης η μεταβλητή $\hat{f}(t, Z_{kt})$ δηλώνει την εκτίμηση των προσωπικών χαρακτηριστικών του επενδυτή. Στο επόμενο βήμα μέσω των εξισώσεων (2.4.4),(2.5.9) για τον υπολογισμό των διακυμάνσεων προκύπτει ότι :

$$Var\left(log\left(Y_{k,t+d}^{*}\right) - log(Y_{kt}^{*})\right) = d * \sigma_{u}^{2} + 2 * \sigma_{\varepsilon}^{2} \quad (2.5.10)$$

Για τον υπολογισμό των διακυμάνσεων σ_u^2 και σ_ε^2 χρησιμοποιείται η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή γίνεται η προσπάθεια να μελετηθεί το φαινόμενο και να προσδιοριστεί η μορφή μίας άγνωστης μαθηματικής σχέσης, χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα, ελέγχοντας μία σειρά γνωστών σχέσεων. Οι διακυμάνσεις είναι αυτής της μορφής διότι τα u_{kt} και ε_{kt} κατανέμονται κανονικά. Με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζεται και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{\xi n}$, που περιγράφει την σχέση μεταξύ των μεταβολών του εισοδήματος, και της απόδοσης των μετοχών. Τρέχοντας την εξίσωση (2.5.9) αν παρθεί η μεταβολή του $log(Y_{kt}^{*})$ μέσω της εξίσωσης και αντικαταστήσουμε όπου $log(Y_{kt})$ την εξίσωση (2.4.4) προκύπτει ότι :

$$\Delta\, log(Y_{kt}^{*}) = \xi_t + \omega_{kt} + \varepsilon_{kt} - \varepsilon_{k,t-1} \quad (2.5.11)$$

Να σημειωθεί ότι οι προσωρινές μεταβολές ε_{kt} λαμβάνουν υπόψη και τις μεταβολές της προηγούμενης περιόδου $t-1$, διότι οι μεταβλητές είναι ντετερμινιστικές. Η μέση τιμή της μεταβολής του εισοδήματος εργασίας θα ισούται με την αθροιστική συνιστώσα των μόνιμων μεταβολών του, γιατί οι μεταβλητές $\omega_{kt}, \varepsilon_{kt}$, κατανέμονται κανονικά, και θα έχουν μέση τιμή ίση με το μηδέν.

$$\overline{\left(\Delta\, log\left(Y_{k,t}^{*}\right)\right)} = \xi_t \quad (2.5.12)$$

Μέσω των εξισώσεων (2.4.7),(2.5.12) και με την χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει ότι :

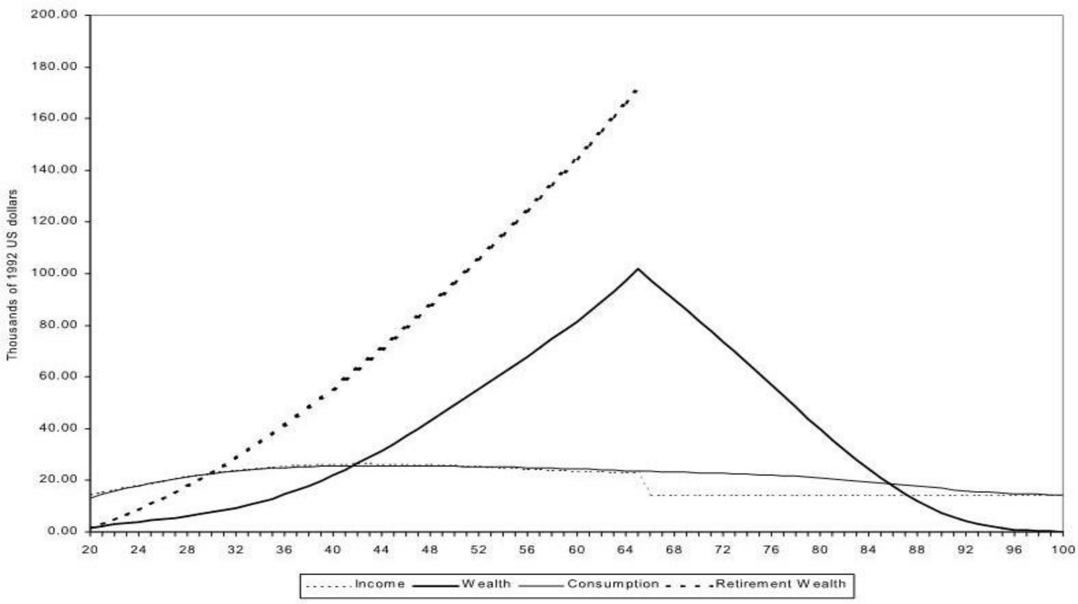
$$\overline{\left(\Delta\, log\left(Y_{k,t}^{*}\right)\right)} = \beta\left(R_{t+1} - \overline{R_f} - \mu\right) + \psi_t \quad (2.5.13)$$

Η μεταβλητή β δείχνει την ευαισθησία που έχει το μορφωτικό επίπεδο στις αποδόσεις των μετοχών. Συνεπώς η εξίσωση (2.5.13) δηλώνει ότι η μέση τιμή μεταβολής του εισοδήματος εξαρτάται από την πρόσοδο που έχει ο επενδυτής την στιγμή $t+1$, σύμφωνα με τις αποδόσεις των μετοχών, συν το λογαριθμικό εισόδημα εργασίας. Παρατηρείται ότι μέσω του πειράματος, η συσχέτιση του εισοδήματος εργασίας συσχετίζεται περισσότερο με την αγορά μετοχών, για νοικοκυριά με μεγαλύτερο επίπεδο εκπαίδευσης.

2.6 Συμπεράσματα για την ηλικία μέσω προσομοίωσης

Οι Campell-Viceira (2001) για να μελετήσουν την συμπεριφορά των μεταβλητών στο μοντέλο έκαναν συλλογή δεδομένων, διαφορετικών ατόμων μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μεταξύ 10.000 νοικοκυριών, με διαφορετικά εισοδήματα και διαφορετικές αποδόσεις περιουσιακών στοιχείων, και τα απεικόνισαν γραφικά σύμφωνα με την ηλικία. Σε ένα τέτοιο είδος ανάλυσης αποτιμώνται οι διασταυρούμενες σχέσεις μεταξύ των νοικοκυριών, και οι παρατηρήσεις παραμένουν ως έχουν, χωρίς να μεταβάλλονται. Στο διάγραμμα 1 απεικονίζεται το εισόδημα, ο πλούτος, η κατανάλωση, καθώς και ο πλούτος του επενδυτή στην ηλικία συνταξιοδότησης, ο οποίος έχει επενδυθεί σε ομόλογα και μετοχές. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο πλούτος αυξάνεται, σε νεαρή ηλικία μέχρι την ηλικία συνταξιοδότησης, και μετά μειώνεται μέχρι το τέλος της ζωής του επενδυτή. Η καμπύλη εισοδήματος είναι ανοδική μέχρι τα 65 έτη, και η κατανάλωση, όπως και ο πλούτος στην ηλικία συνταξιοδότησης μειώνονται σταδιακά, με το πέρασμα του χρόνου.

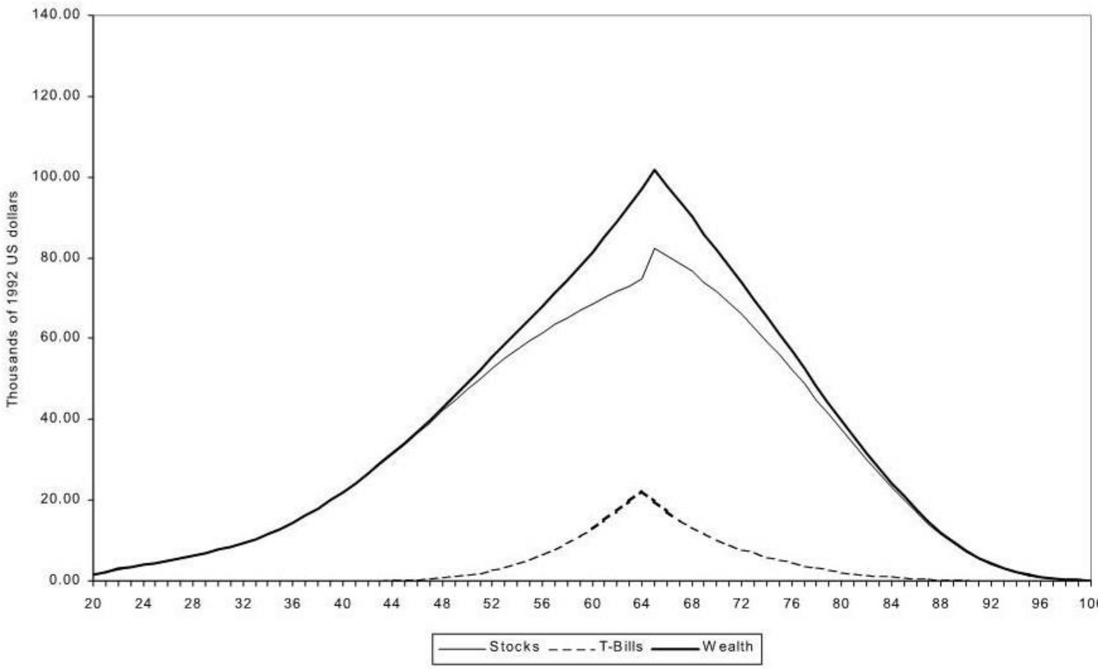
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1



Στο διάγραμμα 1, η έντονη γραμμή δηλώνει τον πλούτο του επενδυτή, και η διακεκομμένη ανερχόμενη γραμμή το εισόδημα εργασίας του. Επίσης η διακεκομμένη γραμμή που φθίνει αποτυπώνει τον πλούτο που θα έχει ο επενδυτής στην συνταξιοδότηση, ενώ η συνεχής γραμμή που φθίνει την κατανάλωση του επενδυτή. Ο άξονας x απεικονίζει την ηλικία, ενώ ο άξονας y δολάρια σε χιλιάδες.

Στο διάγραμμα 2 φαίνεται ο πλούτος, συγκριτικά με τις επενδύσεις σε μετοχές και ομόλογα του επενδυτή. Όπως και στο προηγούμενο διάγραμμα η επένδυση αφορά μετοχές και ομόλογα. Η επένδυση σε μετοχές αυξάνει τον κίνδυνο του επενδυτή. Από τη γραφική απεικόνιση προκύπτει ότι επενδυτής τα πρώτα 20 έτη της εργασιακής του ζωής, έχει χαρτοφυλάκιο που αποτελείται εξ' ολοκλήρου από μετοχές. Η επένδυση σε μετοχές, μεγιστοποιείται στην ηλικία των 65 ετών και μετά κινείται καθοδικά, δείχνοντας ότι ο επενδυτής αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο όσο μεγαλώνει ηλικιακά.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2



Στο διάγραμμα 2 η ανερχόμενη έντονη γραμμή, που στην συνέχεια φθίνει είναι πλούτος του επενδυτή. Η αχνή συνεχής γραμμή δηλώνει την επένδυση σε μετοχές, ενώ η διακεκομμένη την επένδυση σε ομόλογα.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ότι, μέσω της προσομοίωσης, υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ του εισοδήματος εργασίας, και των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών, ανεξαρτήτως του μορφωτικού επιπέδου του ατόμου. Το εισόδημα εργασίας έχει κίνδυνο, όμως μπορεί να θεωρηθεί ως ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο. Αυτό συμβαίνει διότι, αυτή η συσχέτιση, δεν είναι αρκετά ισχυρή για το μελλοντικό εισόδημα εργασίας ώστε να θεωρηθεί περισσότερο ως μετοχή, αντί για ομόλογο.

Όταν ο επενδυτής φτάνει στην ηλικία συνταξιοδότησης το ανθρώπινο κεφάλαιο μηδενίζεται, και ο πλούτος του αποτελείται πλήρως από το χρηματοοικονομικό. Συνεπώς, όταν ο επενδυτής είναι νέος επιθυμεί να αυξήσει τον χρηματοοικονομικό του πλούτο, που θα προστίθεται στο συνολικό, για όλη τη διάρκεια της ζωής του, μέσω της επένδυσης σε μετοχές. Στην έρευνα παρουσιάζεται ένα πρόβλημα ετερογένειας. Τα νοικοκυριά δεν διαφέρουν μεταξύ τους μόνο στο μορφωτικό επίπεδο παραδείγματος χάριν μπορεί να διαφέρουν στην ανοχή τους στο κίνδυνο, στον τομέα από τον οποίο προέρχεται το εισόδημα, καθώς και αν ο επενδυτής είναι αυτοαπασχολούμενος ή όχι.

Η αποστροφή κινδύνου διαφέρει σημαντικά μεταξύ των νοικοκυριών. Υπάρχουν νοικοκυριά που αποταμιεύουν μέρος του πλούτου τους προληπτικά, και άλλα τα οποία έχουν μεγαλύτερη ανοχή στο κίνδυνο, αλλά και στις δύο αυτές περιπτώσεις παρατηρείται μείωση της διάθεσης ανάληψης κινδύνου στη μέση ηλικία. Πέρα από τα προβλήματα της βέλτιστης επιλογής, και της ετερογένειας του μοντέλου, παρουσιάζονται μερικοί ακόμα περιορισμοί. Αρχικά, λαμβάνεται υπόψη η είσοδος, και η έξοδος των νοικοκυριών στην αγορά μετοχών, και όχι οι διακυμάνσεις που έχουν στην κατανομή του χαρτοφυλακίου τους. Δεν λαμβάνονται υπόψη οι μεταβολές των επιτοκίων στο χρόνο, και οι επιπτώσεις που έχουν στα χαρτοφυλάκια των επενδυτών, καθώς, και για τα ομόλογα, ο διαφορετικός χρονικός ορίζοντας του κάθε ομολόγου. Επιπλέον αγνοεί σημαντικά τα κόστη των νοικοκυριών, όπως η στέγαση, ή έξοδα εκπαίδευσης. Συμπερασματικά η ηλικία επηρεάζει την κατανομή του χαρτοφυλακίου του επενδυτή, με τους νέους επενδυτές να είναι πιο ριψοκίνδυνοι. Η κατανομή του χαρτοφυλακίου των νοικοκυριών δεν είναι βέλτιστη στο πραγματικό κόσμο. Υπάρχουν πολλά επίπεδα μελέτης που μπορούν να αναλυθούν, όπως η περίοδος γέννησης του επενδυτή, η σημασία της παιδικής ηλικίας, καθώς και ψυχολογικοί παράγοντες, με σκοπό οι οικονομικοί σύμβουλοι να αποκτήσουν μία καλύτερη εικόνα, και να βοηθήσουν στην βελτιστοποίηση των χαρτοφυλακίων των πελατών τους.

3. Ανάλυση υποδειγμάτων βελτιστοποίησης

Η ανάλυση των υποδειγμάτων βελτιστοποίησης βασίζεται στο βιβλίο των Campell-Viceira (2001). Οι εν λόγω συγγραφείς, μελετούν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις για την βέλτιστη κατανομή μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο. Υποθέτουν, διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες, και ότι οι αποδόσεις των μετοχών επηρεάζονται από διαφορετικούς παράγοντες. Θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο προκύπτουν αυτές οι εξισώσεις που χρησιμοποιούν οι συγγραφείς για την εξαγωγή συμπερασμάτων, και στη συνέχεια θα γίνουν αναλύσεις ευαισθησίας για τις μετοβολές των μεταβλητών των εξισώσεων, και τον τρόπο που επηρεάζουν την βελτιστοποίηση της κατανομής των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή.

3.1. Μία περίοδος χωρίς εργασιακή ευελιξία

3.1.1. Υπολογισμός βέλτιστης κατανομής μετοχών

Όπως προαναφέρθηκε υπάρχει αβεβαιότητα για τους μελλοντικούς μισθούς του επενδυτή, δηλαδή το ανθρώπινο κεφάλαιο του επενδυτή είναι στοχαστικό. Αρχικά θα αναλυθούν δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι ο επενδυτής να μην έχει εργασιακή ευελιξία, οι μισθοί να αποτελούν μία μη στοχαστική διαδικασία, δηλαδή να είναι σταθεροί στο χρόνο. Η δεύτερη περίπτωση είναι να μεταβάλλονται στο χρόνο. Για την πρώτη περίπτωση αναλύεται ο επενδυτής να έχει επενδυτικό ορίζοντα μίας περιόδου. Έστω ο επενδυτής την στιγμή t καταναλώνει ρευστοποιώντας το χρηματοοικονομικό του πλούτο F_{t+1}, διότι το ποσό του χρηματοοικονομικού πλούτου του εξαρτάται από τις αναμενόμενες αποδόσεις των διαπραγματεύσιμων χρεογράφων. Επίσης λαμβάνει εισόδημα εργασίας, που συμβολίζεται ως η τυχαία μεταβλητή Y_{t+1} την περίοδο $t+1$. Εφόσον ο επενδυτής καταναλώνει την περίοδο $t+1$, το ανθρώπινο κεφάλαιο H_t θα είναι ίσο με $E_t Y_{t+1}$, δηλαδή το αναμενόμενο εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου, επειδή σε αυτή την περίπτωση, γίνεται η υπόθεση, ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι μία περίοδος. Επίσης θεωρείται ότι το εισόδημα εργασίας κατανέμεται λογαριθμικά $y_{t+1} = N\left(y, \sigma_y^2\right)$. Στην θεωρία πιθανοτήτων, η λογαριθμική κατανομή είναι μία συνεχής κατανομή πιθανότητας, της οποίας ο λογάριθμος κατανέμεται κανονικά. Επιπλέον, η σταθερή απόδοση του ομολόγου συμβολίζεται με R_f όπου $r_f = log\left(1+R_f\right)$, και της μετοχής με R_{t+1}, ενώ η απροσδόκητη λογαριθμική απόδοση της μετοχής συμβολίζεται με u_{t+1} όπου $u_{t+1} \sim N(0, \sigma_u^2)$ δηλαδή κατανέμεται κανονικά. Η σχέση μεταξύ του εισοδήματος εργασίας, και της απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου περιγράφεται από την συνδιακύμανσή τους ως $C0V_t(y_{t+1}, r_{t+1}) = \sigma_{yu}$. Ο σκοπός του επενδυτή είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα της κατανάλωσης την περίοδο $t+1$ διαλέγοντας το κατάλληλο ποσό a_t.Το πρόβλημα μεγιστοποίησης διατυπώνεται ως:

$$\max_{\alpha_t} E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \tag{3.1.1}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$C_{t+1} = F_t\left(1 + R_{p,t+1}\right) + Y_{t+1} \tag{3.1.2}$$

$$R_{p,t+1} = a_t\left(R_{t+1} - R_f\right) + R_f \tag{3.1.3}$$

$R_{p,t+1}$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t+1$. Ο πλούτος του επενδυτή εκφράζεται ως η κατανάλωση που μπορεί να κάνει την στιγμή $t+1$, και εξαρτάται από την απόδοση του χρηματοοικονομικού πλούτου, συν το εισόδημα εργασίας, και ουσιαστικά αποτελεί τον πλούτο που θα έχει ο επενδυτής στην διάθεσή του. Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι η απόδοση από την επένδυση σε μετοχές, συν την απόδοση ομολόγων. Αν τα ποσοστά των δύο περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο είναι a , $(1-a)$ συνεπάγεται ότι $R_{p,t+1} = \alpha R_{t+1} + (1-a)R_{f,t+1}$ όπως στην εξίσωση (2.3.1), και με κοινό παράγοντα a προκύπτει η εξίσωση (3.1.3). Διαιρώντας κατά μέλη με το Y_{t+1} στην εξίσωση (3.1.2) σύμφωνα με την χρήση των πρώτων τάξεων του Taylor για το 2ο μέλος, η παρένθεση ταυτίζεται με r_p ενώ ο λόγος $\frac{F_t}{Y_{t+1}}$ με $f-y$, όπου αυτό λογαριθμικά, μέσω της διαδικασίας log-linearization προκύπτει το σημείο $r_{p,t+1} + f - y_{t+1}$.

Για να γίνει κατανοητή η διαδικασία, έστω η μεταβλητή X που είναι σταθερή και X_t η στοχαστική της τιμή, όπου $X_t > 0$. Τότε με την χρήση των πρώτων τάξεων του Taylor για την σταθερά X, προκύπτουν οι λογαριθμικές αποκλίσεις των μεταβλητών, όπου προσεγγιστικά συνεπάγεται:

$$x_t \equiv \log X_t - \log X \tag{3.1.4}$$

Αρχικά αν το X είναι μικρό τότε $\log(1+X) \simeq X$, συνεπώς $x_t \log(X_t) \equiv \log(X) = \log\left(\frac{X_t}{X}\right) = \log\,(1 + \%\mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}) \simeq \%\mu\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω συνεπάγεται:

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} - y_{t+1} = log\big(exp\{r_{p,t+1} + f - y_{t+1}\} + 1\big) \\
\approx \log\big(exp\{r_{p,t+1} + f - y_{t+1}\} + 1\big) + (\exp\{r_{p,t+1} + f \\
- y_{t+1}\})/(1 + \exp\{r_{p,t+1} + f - y_{t+1}\})(f_t + r_{p,t+1} \\
- y_{t+1}) \\
\approx j + \rho\big[f_t + r_{p,t+1} - y_{t+1}\big]
\end{aligned} \qquad (14)
$$

Η εξίσωση (14) εκφράζει τα χρήματα που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής από την επένδυση σε διαπραγματεύσιμα χρεόγραφα. Οι μεταβλητές j και ρ είναι οι σταθερές μεταβλητές, που προκύπτουν από την διαδικασία log-linearization, που εκφράζουν λογαριθμικές μεταβλητές. Η j είναι η σταθερά όταν το σημείο ισούται με το μηδέν, δηλαδή $j = log\big(exp\{r_{p,t+1} + f - y_{t+1}\} + 1\big) = log(exp\{0\} + 1) = log\ (1+1) \Rightarrow j = log\ (2).$ Αυτό συμβαίνει διότι όλες οι μεταβλητές της εξίσωσης είναι θετικές, ο χρηματοοικονομικός πλούτος και το εισόδημα εργασίας από την υπόθεση του μοντέλου και η απόδοση του χαρτοφυλακίου, συνεπώς και ο πλούτος του επενδυτή από την συνάρτηση χρησιμότητας. Έστω ότι το 2ο μέλος το συμβολίζεται με $f(x)$ για λόγους ευκολίας που σε αυτή την περίπτωση είναι $log\big(exp\{r_{p,t+1} + f - y_{t+1}\} + 1\big)$. Η οριακή χρησιμότητα του πλούτου της εξίσωσης (3.1.1) όταν πάει προς το άπειρο προσεγγίζει το μηδέν, ασχέτως το επίπεδο της αποστροφής κινδύνου γ, συνεπώς το ανάπτυγμα του Taylor έχει μη αρνητικές παραγώγους πρώτης τάξης, και είναι τύπος της μορφής Maclaurin. Συγκεκριμένα εφόσον $f(x) = log\big(exp\{r_{p,t+1} + f - y_{t+1}\} + 1\big)$ τότε επειδή $\lim_{v\to+\infty} R_v(x) = 0$, η $f(x)$ γίνεται της μορφής $f(x) \approx f(0) + R_v(x)$, επειδή είναι πρώτου βαθμού, όπου $R_v(x) = \frac{x^v}{v!} f^{(v)}(\theta \cdot x)$ με $0 < \theta < 1$, και το $R_v(x)$ είναι το υπόλοιπο Lagrange από την ανάπτυξη Taylor. Συγκεκριμένα το ρ είναι μία σταθερή μεταβλητή, που αποτελεί συνάρτηση του εισοδήματος εργασίας, και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου, με $0 < \rho < 1$. Το ρ εκφράζει την μεταβλητότητα που έχει ο πλούτος του επενδυτή, όταν αλλάζει ο χρηματοοικονομικός του πλούτος, και δίνεται από την εξίσωση:

$$
\rho = \frac{exp\{r_{p,} + f - y\}}{1 + exp\{r_p + f - y\}} < 1 \qquad (3.1.6)
$$

Επίσης, μέσω της εξίσωσης (3.1.3) και λαμβάνοντας υπόψη τις απρόσμενες διακυμάνσεις των μετοχών σε συνδυασμό με τα ποσοστά των δύο περιουσιακών στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο α , $(1 - a)$ προκύπτει ότι :

$$
r_{p,t+1} = a_t\big(r_{t+1} - r_f\big) + r_f + \frac{1}{2}\alpha_t(1 - a_t)\sigma_u^2 \qquad (3.1.7)
$$

Η εξίσωση (3.1.7) είναι παρόμοια με την εξίσωση (2.3.9), και με τον μετασχηματισμό της εξίσωσης (14) μεταφέροντας το y_{t+1} στο δεύτερο μέλος συνεπάγεται :

$$\begin{aligned} c_{t+1} &\approx j + \rho f_t + \rho r_{p,t+1} - \rho y_{t+1} + y_{t+1} \\ &\approx j + \rho\left(f_t + r_{p,t+1}\right) + (1-\rho) y_{t+1} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Η παράμετρος ρ δείχνει την ελαστικότητα του πλούτου που έχει στην διάθεσή του ο επενδυτής με το χρηματοοικονομικό πλούτο, ενώ η παράμετρος $(1-\rho)$ είναι η μεταβλητότητα του πλούτου όταν μεταβάλλεται το εισόδημα εργασίας του, με όλους τους υπόλοιπους παράγοντες σταθερούς. Η ελαστικότητα δείχνει το βαθμό ανταπόκρισης ή αντίδρασης του επενδυτή μέσω της κατανάλωσής του, στις μεταβολές του εισοδήματος, και του χρηματοοικονομικού του πλούτου, με όλους τους υπόλοιπους παράγοντες σταθερούς. Αν θεωρήσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις των δύο περιουσιακών στοιχείων, και την σύνδεσή τους με τον πλούτο, μέσω της σχέσης (3.1.1) παίρνοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης, αντικαθιστώντας με τις εξισώσεις (3.1.2) και (3.1.3), και λύνοντας ως προς α θέτοντας την εξίσωση ίση με το μηδέν προκύπτει ότι:

$$E_t\left[C_{t+1}^{1-\gamma}(1+R_{t+1})\right] = E_t\left[C_{t+1}^{1-\gamma}\left(1+R_f\right)\right] \tag{3.1.9}$$

Με την χρήση των συνθηκών πρώτης τάξης, για την εξίσωση (3.1.1) και των 2ων σειρών του Taylor για τις μεταβλητές c_{t+1} και r_{t+1}, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_t\left[r_{t+1} - r_f\right] + \frac{1}{2}\sigma_t^2 &= \gamma C_{ov_t}\left(c_{t+1}, r_{1,t+1}\right) \\ &= \gamma C_{ov_t}\left(k + \rho\left(f_t + r_{p,t+1}\right) + (1-\rho) y_{t+1}, r_{1,t+1}\right) \\ &= \gamma\left[\rho a_t \sigma_t^2 + (1-\rho) C_{ov_t}\left(y_{t+1}, r_{1,t+1}\right)\right] \\ &= \gamma\left[\rho\, a_t \sigma_t^2 + (1-\rho)\sigma_{yu}\right] \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

και λύνοντας την εξίσωση (3.1.10) ως προς a, μέσω των εξισώσεων (2.3.12),(3.1.7),(3.1.8) και συμπεραίνεται ότι : $E_t\left[r_{t+1} - r_f\right] + \frac{1}{2}\sigma_t^2 = \gamma\left[\rho\, a_t \sigma_t^2 + (1-\rho)\sigma_{yu}\right] \Rightarrow$

$$\alpha_t = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu + \frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma \sigma_u^2}\right) - \frac{1-\rho}{\rho}\left(\frac{\sigma_{yu}}{\sigma_u^2}\right) \tag{3.1.11}$$

Η διακύμανση των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών για την επόμενη περίοδο συμβολίζεται με σ_u^2. Επίσης σύμφωνα με τον τύπο του ρ της εξίσωσης (3.1.6) το $\frac{1}{\rho}$ θα είναι:

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \frac{1}{exp\{f + r_p - y\}} = 1 + \frac{exp\{y\}}{exp\{f + r_p\}} \equiv 1 + \frac{\overline{H}}{F} \qquad (3.1.12)$$

Η εξίσωση αυτή είναι προσεγγιστικά ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (2.3.12), διότι $\exp\{y\} = Y_{t+1}$, και το ανθρώπινο κεφάλαιο για μία περίοδο θα ισούται με το μελλοντικό εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου. Για μικρό χρονικό διάστημα $[t, t+1]$ όπως σε αυτή την περίπτωση $F_t exp\{r_p\} \approx F_t$ εφόσον ο χρονικός ορίζοντας είναι μία περίοδος.

Παρατηρείται ότι, η βέλτιστη κατανομή της μετοχής στο χαρτοφυλάκιο α_t αποτελείται από δύο όρους. Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.1.11) δείχνει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, όταν το εισόδημα εργασίας είναι ασυσχέτιστο με τις αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών. Ο δεύτερος όρος δείχνει την αντιστάθμιση κινδύνου μέσω της κατανάλωσης που μπορεί να κάνει ο επενδυτής σε απότομες μεταβολές. Παραδείγματος χάριν να μειώσει την κατανάλωσή του, αν το εισόδημά του μειωθεί. Βέβαια για να ισχύει η αντιστάθμιση πρέπει ο όρος σ_{yu} να είναι αρνητικός. Συνεπώς, όταν η ελαστικότητα του εισοδήματος εργασίας αυξάνεται, αυξάνονται και οι μετοχές στο χαρτοφυλάκιο. Στην περίπτωση που το εισόδημα εργασίας είναι ασυσχέτιστο με το περιουσιακό στοιχείο ($\sigma_{yu} = 0$), τότε ο 1^{ος} όρος χωρίς το $1/\rho$ είναι η εξίσωση (2.3.11), δηλαδή χωρίς το ανθρώπινο κεφάλαιο. Εφόσον $0 < \rho < 1$ και $a_t > a_{t11}$ της εξίσωσης (2.3.11) (φαίνεται από την εξίσωση (2.3.11)) αυτό σημαίνει ότι το βέλτιστο ποσό επένδυσης σε μετοχές του επενδυτή είναι μεγαλύτερο με την ύπαρξη ανθρώπινου κεφαλαίου, από την περίπτωση να έχει στο χαρτοφυλάκιό του μόνο διαπραγματεύσιμα χρεόγραφα. Το συμπέρασμα είναι ότι οι επενδυτές που το εισόδημα εργασίας τους, δεν συσχετίζεται με τις αποδόσεις των μετοχών πρέπει να έχουν πιο πολλές μετοχές στο χαρτοφυλάκιό τους, από τους επενδυτές που δεν έχουν καθόλου ανθρώπινο κεφάλαιο.

3.1.2. Ανάλυση ευαισθησίας ανθρώπινου κεφαλαίου

Θα μελετηθεί η ευαισθησία που έχει η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο με το ανθρώπινο κεφάλαιο. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση των εξισώσεων αναπτύχθηκε με την γλώσσα προγραμματισμού Matlab (Matrix Laboratory). Σε πρώτη φάση υπολογίστηκε η εξίσωση (2.3.11) με την χρήση των δεδομένων από την προσομοίωση των Campell-Viceira (2001). Αρχικά γίνεται η υπόθεση ότι ο συνολικός πλούτος του επενδυτή θεωρείται διαπραγματεύσιμος, και δεν υπάρχει ανθρώπινο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα η απόδοση του χαρτοφυλακίου μ ορίστηκε ίση με $\mu = 0.04$, ενώ η διακύμανση των αποδόσεων των μετοχών $\sigma_u = 0.01$. Επίσης οι συγγραφείς υποθέτουν ότι αποστροφή κινδύνου ενός επενδυτή που έχει μεγάλη ανοχή στο κίνδυνο είναι 2, ενώ ενός επενδυτή που αποστρέφεται πλήρως τον κίνδυνο είναι 10. Στην ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί μία ενδιάμεση περίπτωση, και γίνεται υπόθεση ότι η αποστροφή κινδύνου που περιγράφεται από την CRRA χρησιμότητα είναι $\gamma = 5$. Η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο ενός επενδυτή σε αυτή την περίπτωση σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.11) είναι $a_t = 0.9$. Σημαντική παρατήρηση για την εξίσωση (2.3.11) είναι ότι για την προσέγγιση της εξίσωσης αποκλείεται η πιθανότητα χρεοκοπίας του επενδυτή. Αν $a_t < 0$ τότε ο επενδυτής θα λάμβανε μία θέση πώλησης (short position) για τις μετοχές, ενώ αν $a_t > 1$ τότε ο επενδυτής θα λάμβανε μία θέση αγοράς (long position) για μετοχές, λαμβάνοντας χρηματοδότηση μέσω δανεισμού. Εφόσον $0 < a_t < 1$ ότι η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή την χρονική στιγμή t είναι να διαθέσει το 90% του συνολικού του πλούτου που είναι διαπραγματεύσιμος σε μετοχές.

Το ερώτημα που τίθεται είναι, ποια θα είναι η μεταβολή που θα υπάρχει λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ανθρώπινου κεφαλαίου. Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα, έστω η εξίσωση (2.3.12) όπου η κατανομή των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο δεν είναι δεσμευμένη ως προς τον χρόνο t, και ο πλούτος του επενδυτή δεν είναι 100% διαπραγματεύσιμος. Σε ανάπτυξη αυτού του υποδείγματος, υποθέτοντας ότι υπάρχει ένας μικρός χρονικός ορίζοντας, δεν υπάρχει εργασιακή ευελιξία, καθώς και ότι η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή επηρεάζεται την χρονική στιγμή t, προκύπτει η εξίσωση (3.1.11). Η μεταβλητή $1/\rho$ της εξίσωσης (3.1.12), εκφράζει προσεγγιστικά την σχέση $1 + H/W$ όπως αποδείχθηκε προηγουμένως στην συγκεκριμένη σχέση. Η μεταβλητή ρ παίρνει τιμές από $(0,1)$.

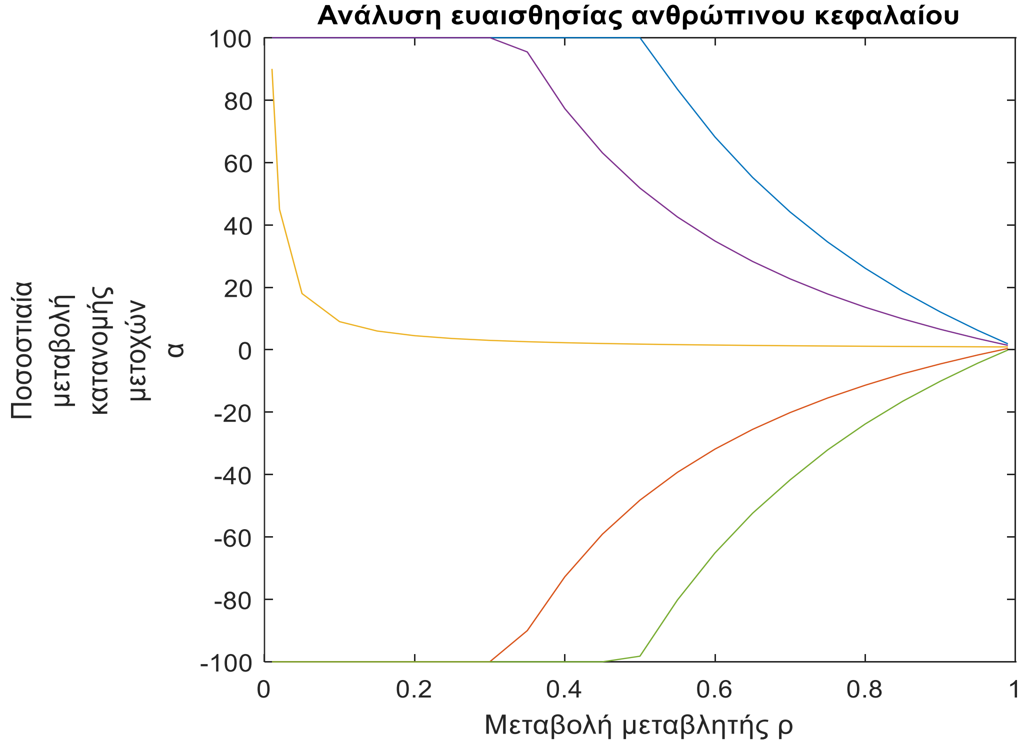
Για να γίνει κατανοητή η επίδραση του ανθρώπινου κεφαλαίου θα απεικονιστεί διαγραμματικά η μεταβολή του ρ στο διάστημα $(0,1)$, και την επιρροή που θα έχει στην βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο. Στο διάγραμμα 3 η κίτρινη γραμμή δηλώνει την μεταβολή του ανθρώπινου κεφαλαίου για συνδιακύμανση ίση με $\sigma_{yu} = 0$. Παρατηρείται ότι όσο η μεταβλητή ρ αυξάνεται, τόσο μειώνεται η κατανομή του χαρτοφυλακίου σε μετοχές για τον επενδυτή, και συγκεκριμένα όσο πλησιάζει το ρ ως προς την μονάδα, η μείωση του α είναι μικρότερη, συγκριτικά με όταν το ρ είναι πιο μικρό. Σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.12) η αύξηση του ρ, δηλώνει μείωση του ανθρώπινου κεφαλαίου. Εφόσον η συσχέτιση είναι μηδενική, και δεν υπάρχουν διακυμάνσεις στις αποδόσεις των μετοχών ($\sigma_u^2 = 0.01$) χαρτοφυλακίου του επενδυτή, ο επενδυτής είναι σίγουρος ότι δεν θα χάσει χρήματα. Συνεπώς στο 1^{ο} μέλος της εξίσωσης το ανθρώπινο κεφάλαιο που είναι μία επένδυση χωρίς κίνδυνο, ο επενδυτής δεν έχει λόγο να επενδύσει σε επιπλέον ομόλογα, καθώς και το επίπεδο αποστροφής κινδύνου παραμένει σταθερό, και θα μεταβάλλει την κατανομή του χαρτοφυλακίου του προς τις μετοχές. Συνεπώς, από το διάγραμμα προκύπτει ότι η μείωση του ανθρώπινου κεφαλαίου οδηγεί στην μείωση των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Αντίθετα η αύξησή του θα οδηγήσει σε αύξηση της επένδυσης σε μετοχές. Αξίζει να σημειωθεί, ότι για κάθε τιμή του ρ ο επενδυτής διατηρεί ένα ποσοστό μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Συνεπώς, όσον αφορά την ηλικία όσο ο επενδυτής πλησιάζει την ηλικία συνταξιοδότησης το ανθρώπινο κεφάλαιο τείνει προς το μηδέν, ενώ όταν ο επενδυτής είναι νέος είναι αρκετά μεγαλύτερο, συμπεραίνεται ότι οι νέοι επενδυτές θα επενδύουν πιο ριψοκίνδυνα συγκριτικά με τους μεγαλύτερους ηλικιακά επενδυτές.

Έως τώρα, δεν συμπεριλήφθηκε στην ανάλυση ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (3.1.11). Όμως προκύπτει το ερώτημα, τι θα γίνει αν ληφθεί υπόψη η σημασία της συσχέτισης του εισοδήματος εργασίας με τις αποδόσεις των μετοχών, και ποια θα είναι τότε η επιρροή στο ανθρώπινο κεφάλαιο. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα δοθεί μέσω της συνδιακύμανσης σ_{yu}. Θα γίνουν οι υποθέσεις ότι, η συνδιακύμανση είναι θετική και αρνητική. Για να επιτευχθεί αυτό απεικονίζεται διαγραμματικά η ευαισθησία που έχει η κατανομή των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο με την μεταβλητή ρ, για το διάστημα $\sigma_{yu} \in [-1,1]$. Ο λόγος για τον οποίο επιλέγουμε αυτό το διάστημα ενώ η συνδιακύμανση μπορεί να πάρει τιμές $-\infty < \sigma_{yu} < \infty$, είναι διότι θα δειχθεί ότι ο επενδυτής από μία τιμή και μετά διαθέτει το 100% του χρηματοοικονομικού πλούτου του σε μετοχές και ομόλογα αντίστοιχα. Έστω ότι χρησιμοποιούνται 4 τιμές για τη μεταβλητή σ_{yu}, όπου $\sigma_{yu} = -1$, $\sigma_{yu} = -0.5$, $\sigma_{yu} = 0.5$, $\sigma_{yu} = 1$. Στο διάγραμμα 3 φαίνεται η μεταβολή του ρ όπου η μπλε γραμμή είναι για $\sigma_{yu} = -1$, η μωβ γραμμή για $\sigma_{yu} = -0.5$, η πράσινη για $\sigma_{yu} = 1$, και η μωβ για $\sigma_{yu} = 0.5$.

Η θετική συσχέτιση του εισοδήματος εργασίας του επενδυτή με τις αποδόσεις των μετοχών, θα τον οδηγήσουν να μειώσει το ποσό επένδυσης σε μετοχές στο χαρτοφυλάκιό του. Αυτό συμβαίνει διότι αναλόγως τον τρόπο που μεταβάλλεται η τιμή της μετοχής, αλλάζει και η κατανομή στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Ο επενδυτής έρχεται αντιμέτωπος με κάποιους κινδύνους. Για παράδειγμα, ένας νέος επενδυτής που μόλις ξεκίνησε να εργάζεται ο πλούτος του αποτελείται σχεδόν εξ’ ολοκλήρου από ανθρώπινο κεφάλαιο, δηλαδή από το μελλοντικό εισόδημα εργασίας του. Συνεπώς, δεν διαθέτει μεγάλο χρηματοοικονομικού πλούτο, ενώ το ανθρώπινο κεφάλαιο αν και είναι υψηλό αναμένει να το λάβει στο μέλλον. Άρα την χρονική στιγμή t που διαμορφώνει το χαρτοφυλάκιό του, η αύξηση των τιμών των μετοχών θα τον οδηγήσουν να μειώσει το ποσό επένδυσης σε μετοχές. Επίσης σημαντικό ρόλο διαδραματίζει ο μη συστηματικός κίνδυνος, που μπορεί να τον αντιμετωπίσει μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου του. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι μεγάλος, δηλαδή η συνδιακύμανση $\sigma_{yu} = 0.5$, $\sigma_{yu} = 1$ αυξάνεται ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου του, και από το διάγραμμα 3 διαπιστώνεται ότι ο επενδυτής θα πουλήσει όλες τις μετοχές που έχει στο χαρτοφυλάκιό του, για $\rho < 0.3$ και $\rho < 0.5$ αντίστοιχα, και θα αγοράσει ομόλογα με σκοπό να μειώσει αυτό τον κίνδυνο. Όσο και να αυξηθεί το ρ σε κάθε περίπτωση ο επενδυτής μειώνει τις μετοχές του χαρτοφυλακίου του, απλά σε μικρότερο βαθμό.

Στην περίπτωση με αρνητική συσχέτιση ο επενδυτής αυξάνει το ποσό επένδυσης σε μετοχές, όσο αυξάνεται η συνδιακύμανσή του. Όταν η συνδιακύμανση ισούται με $\sigma_{yu} = -1$ και $\sigma_{yu} = -0.5$ για $\rho < 0.5$ και $\rho < 0.3$ αντίστοιχα, η βέλτιστη επιλογή για τον επενδυτή είναι το 100% του χρηματοοικονομικό πλούτου να αποτελείται από μετοχές. Δηλαδή τότε ο επενδυτής θα καταφύγει σε δανεισμό, με σκοπό να μπορέσει να αγοράσει περισσότερες μετοχές στο χαρτοφυλάκιό του. Ο επενδυτής μπορεί να έχει μία αρνητική αντίληψη για την πορεία του εισοδήματος εργασίας του, την οποία δεν μπορεί να ανατρέψει διότι δεν έχει εργασιακή ευελιξία. Πάλι αντιμετωπίζει έναν μη-συστηματικό κίνδυνο, και θα θέλει να αντισταθμίσει την θέση του σε αύξηση ή μείωση της τιμής. Όσο πιο μικρός είναι ο συντελεστής συσχέτισης, τόσο περισσότερο μειώνεται ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου του. Συνεπώς αν πιστεύει ότι το εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου θα μειωθεί, μπορεί να αντισταθμίσει αυτή την αρνητική μεταβολή, με την αύξηση των μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Με αυτό τον τρόπο θα μπορέσει να αυξήσει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του, και να κερδίσει πίσω τις ζημιές που θα έχει από την μείωση του εισοδήματος. Αντίστοιχα αν πιστεύει ότι το εισόδημα εργασίας του θα αυξηθεί και ότι η τιμή της μετοχής θα μειωθεί, επειδή έχει λιγότερο κίνδυνο το χαρτοφυλάκιό του μέσω της αρνητικής συσχέτισης, θα αγοράσει περισσότερες μετοχές, που έχουν μεγαλύτερες αναμενόμενες αποδόσεις από τα ομόλογα, ώστε να αντισταθμίσει την πτώση των τιμών των μετοχών.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3
Ανάλυση ευαισθησίας ανθρώπινου κεφαλαίου



$\sigma_{yu} = -1$, $\sigma_{yu} = -0.5$, $\sigma_{yu} = 0$, $\sigma_{yu} = 0.5$, $\sigma_{yu} = 1$.

3.2 Μία περίοδος με εργασιακή ευελιξία

3.2.1 Η επίδραση του ελεύθερου χρόνου στην κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο

Για την δεύτερη περίπτωση, θεωρείται ότι ο επενδυτής έχει εργασιακή ευελιξία. Η εξίσωση που περιγράφει την χρησιμότητα της κατανάλωσης και του ελεύθερου χρόνου του επενδυτή είναι η εξής:

$$U(C_{t+1}, N_{t+1})\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \varphi\frac{(1-N_{t+1})^{1-\lambda}}{1-\lambda} \quad (3.2.1)$$

Στην εξίσωση (3.2.1) N_{t+1} είναι ο χρόνος εργασίας του επενδυτή ενώ $(1-N_{t+1})$ είναι ο ελεύθερος του χρόνος την στιγμή $t+1$. Η μεταβλητή λ δηλώνει την αποστροφή του επενδυτή να μεταβάλλει το εισόδημα εργασίας του, ενώ το φ είναι μία μεταβλητή που παραμετροποιεί την χρησιμότητα μεταξύ κατανάλωσης και ελεύθερου χρόνου, και καθορίζει το μέσο εισόδημα εργασίας. Παίρνονται οι συνθήκες πρώτης τάξης σταθερής μορφής για την εξίσωση (3.2.1). Αν το εισόδημα εργασίας γραφτεί ως ZN, μέσω της εξίσωσης (3.1.2) η συνάρτηση μπορεί να διατυπωθεί ως :

$$\frac{(F_t(1+R_{t+1}) + Z_{t+1}N_{t+1})^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} + \varphi\frac{(1-N_{t+1})^{1-\lambda}}{1-\lambda} \quad (3.2.2)$$

Με την παραγώγιση της παραπάνω συνάρτησης, με σκοπό την εύρεση του βέλτιστου χρόνου εργασίας για κάθε περίοδο και μέσω της (3.1.2) συνεπάγεται ότι :

$$\begin{aligned} Z_{t+1}\,(F_t(1+R_{t+1}) + Z_{t+1}N_{t+1} - \varphi(1-N_{t+1})^{-\lambda} \\ = Z_{t+1}(C_{t+1})^{-\gamma} - \varphi(1-N_{t+1})^{-\lambda} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

και θέτοντας την ίση με τα μηδέν, προκύπτει η εξής συνάρτηση :

$$\varphi(1-N_{t+1})^{-\lambda} = Z_{t+1}C_{t+1}^{-\gamma} \quad (3.2.4)$$

Ο πρώτος όρος της συνάρτησης (3.2.4) δηλώνει την οριακή αντιχρησιμότητα της εργασίας, δηλαδή η μείωση της ικανοποίησης του επενδυτή λόγω υπερβολικής εργασίας. Για λόγους ευκολίας η συνάρτηση (3.2.4) μετατρέπεται σε λογαριθμική έτσι ώστε :

$$n_{t+1} = v(z_{t+1} - \gamma c_{t+1} - l) \quad (3.2.5)$$

Όπου v είναι η ελαστικότητα του εργατικού δυναμικού $v = \lambda N/(1-N)$, σχετικά με το πραγματικό μισθό, και l ο σταθερός όρος. Η διαδικασία λύσης του προβλήματος μεγιστοποίησης του επενδυτή είναι παρόμοια όπως με την περίπτωση ο επενδυτής να μην έχει εργασιακή ευελιξία. Στο τέλος της διαδικασίας με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως, προκύπτει η κατανομή του επενδυτή σε μετοχές, και διατυπώνεται από την εξίσωση :

$$\alpha_t = \frac{1}{\beta_w}\left(\frac{\mu + \frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma \sigma_u^2}\right) - \frac{\beta_h}{\beta_w}\left(\frac{\sigma_{hu}}{\sigma_u^2}\right) \qquad (3.2.6)$$

Η μεταβλητή σ_{hu} εκφράζει την συσχέτιση του εισοδήματος εργασίας με τις αποδόσεις των μετοχών. Η μεταβλητή h εκφράζεται ως $h_{t+1} = z_{t+1} + n_{t+1}$, όπου z_{t+1} είναι το εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου και n_{t+1} η εξίσωση (3.2.5). Η εξίσωση (3.2.6) είναι παρόμοια με την εξίσωση (3.1.11) απλά οι συντελεστές β_h, β_w είναι αντίστοιχοι με του συντελεστές $(1-\rho)$,ρ. Οι μεταβλητές β_h, β_w διατυπώνονται από τους εξής τύπους αντίστοιχα:

$$\beta_w = \frac{\rho}{1 + (1-\rho)\gamma v} \qquad (3.2.7)$$

$$\beta_h = \frac{(1-\rho)(1+v)}{1 + (1-\rho)\gamma v} \qquad (3.2.8)$$

Τα β_h,β_w είναι ίσα με το με τα $(1-\rho)$ και ρ μόνο όταν $v = 0$ δηλαδή όταν $\lambda N/(1-N) = 0$, και ο επενδυτής δεν ενδιαφέρεται για τον ελεύθερο του χρόνο. Όταν $v > 0$, δηλαδή ο επενδυτής έχει ελεύθερο χρόνο, τότε $\beta_w < \rho$ και $\beta_h > 0$. Με την σύγκριση των εξισώσεων (3.1.11) και (3.2.6) υπό αυτές τις συνθήκες φαίνεται ότι αν μισθοί είναι ασυσχέτιστοι ($\sigma_{hu} = 0$) με τις αποδόσεις των μετοχών, τότε αυξάνεται το ποσό του χαρτοφυλακίου που επενδύεται σε μετοχές, λόγω της ευελιξίας της προσφοράς εργασίας, εφόσον $\beta_w < \rho \Rightarrow \frac{1}{\beta_w} > \frac{1}{\rho}$.

Ουσιαστικά αυτό συμβαίνει διότι όταν η $\sigma_{hu} = 0$, η μη ύπαρξη συσχέτισης δίνει την δυνατότητα στον επενδυτή να διαμορφώνει ο ίδιος την προσφορά εργασίας του. Συνεπώς ο επενδυτής μπορεί να αυξήσει την προσφορά εργασίας παραδείγματος χάριν με το να εργάζεται περισσότερο, με σκοπό να αντισταθμίσει μία πιθανή πτώση των τιμών των μετοχών, από την οποία μπορεί να χάσει χρήματα. Με την αύξηση της επένδυσης σε μετοχές μπορεί να αυξήσει τις αναμενόμενες αποδόσεις του, και να είναι ασφαλής για κάθε περίπτωση.

Τέλος όταν $\sigma_{hu} \neq 0$ τότε οι επενδυτές προσπαθούν να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο μεταβολής τον μισθών, με $\sigma_{hu} > 0$ να μειώνουν τις μετοχές στο χαρτοφυλάκιό τους, και με $\sigma_{hu} < 0$ να τα αυξάνουν. Αν η συσχέτιση της αγοράς με το εισόδημα εργασίας του επενδυτή ήταν αρνητική ο επενδυτής θα αύξανε το ποσοστό μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Ο επενδυτής με εργασιακή ευελιξία προβληματίζεται από τις διακυμάνσεις του μισθού του, και απρόοπτες μεταβολές του θα έχουν σημαντικές επιδράσεις στο εισόδημα εργασίας του, και θα οδηγηθεί σε μεταβολή της ζήτησης για μετοχές. Αντιμετωπίζει έναν μη συστηματικό κίνδυνο. Αυτό το γεγονός συνεπάγεται μεταβολές στις επενδυτικές στρατηγικές του. Όπως στην περίπτωση χωρίς ευελιξία, αν αναμένει μία μείωση του εισοδήματος εργασίας του θα μεταβάλλει το χαρτοφυλάκιο αγοράζοντας μετοχές, για να καλύψει αυτή τη ζημιά μέσω των μεγαλύτερων αναμενόμενων αποδόσεων. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι προσαρμόζοντας την προσφορά εργασίας του ο επενδυτής, και λόγω της στοχαστικότητας του ανθρώπινου κεφαλαίου, θα μεταβάλει μεγαλύτερο μέρος του χρηματοοικονομικού του πλούτου προς τις μετοχές. Χωρίς εργασιακή ευελιξία ο επενδυτής γνωρίζει το εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου, ενώ σε αυτή την περίπτωση η μεγαλύτερη αβεβαιότητα θα οδηγήσει τον επενδυτή σε μεγαλύτερη αντιστάθμιση των μεταβολών του μισθού του.

Για παράδειγμα έστω ένας νεαρός επενδυτής 20 ετών ο οποίος μόλις ξεκίνησε την επαγγελματική του καριέρα. Θα διαθέτει μεγάλη εργασιακή ευελιξία, διότι το εισόδημα εργασίας του θα αλλάζει στη διάρκεια του χρόνου. Αντιθέτως, ένας συνταξιούχος που λαμβάνει σύνταξη (μηδενικό εισόδημα εργασίας), δεν διαθέτει την ευελιξία του νεαρού επενδυτή. Όταν ο επενδυτής διαθέτει εργασιακή ευελιξία φαίνεται ότι μπορεί ευκολότερα να προσαρμόζει το χαρτοφυλάκιό του. Έχει την δυνατότητα να προσαρμόζεται στις μεταβολές της αγοράς, και να ανακατανείμει αναλόγως την κατανάλωσή του, και τον ελεύθερό του χρόνο, για να μεγιστοποιεί την χρησιμότητά του, αναλόγως τις ανάγκες του. Η εργασιακή ευελιξία θα τον ωθήσει να επενδύσει μεγαλύτερο μέρος του χρηματοοικονομικού του πλούτου σε μετοχές.

3.2.2 Ανάλυση ευαισθησίας εργασιακού χρόνου στην κατανομή μετοχών

Για να γίνει κατανοητή η επιρροή της εργασιακής ευελιξίας στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή θα απεικονιστεί διαγραμματικά η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του, σε συνάρτηση με την ελαστικότητα του εισοδήματος ν για διαφορετικές τιμές του ρ. Η εξίσωση (3.2.6) μέσω των εξισώσεων (3.2.7),(3.2.8) θα μετασχηματιστεί ως:

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{\rho}{1+(1-\rho)\gamma\nu}}\left(\frac{\mu+\frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma\sigma_u^2}\right) - \frac{\frac{(1-\rho)(1+\nu)}{1+(1-\rho)\gamma\nu}}{\frac{\rho}{1+(1-\rho)\gamma\nu}}\left(\frac{\sigma_{hu}}{\sigma_u^2}\right) \Rightarrow \qquad (3.2.9)$$

$$\alpha_t = \frac{1+(1-\rho)\gamma v}{\rho}\left(\frac{\mu + \frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma \sigma_u^2}\right) - \frac{(1-\rho)(1+v)}{\rho}\left(\frac{\sigma_{hu}}{\sigma_u^2}\right)$$

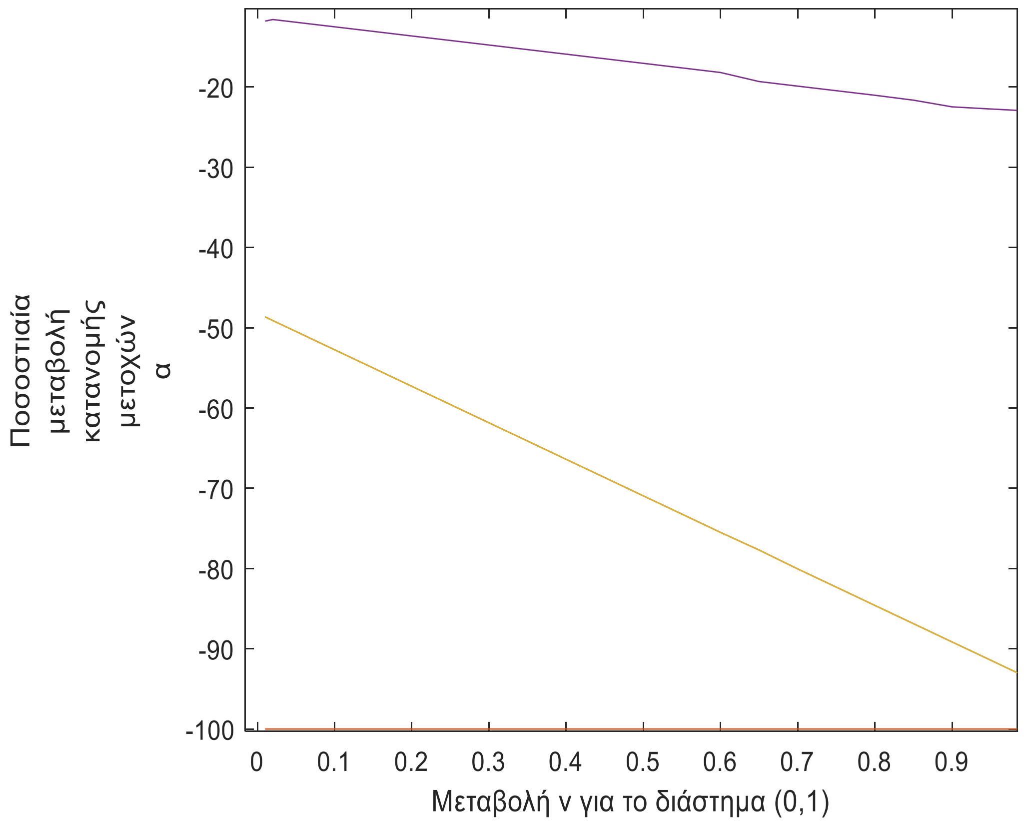
Έστω ότι οι μεταβλητές μ, γ, σ_u^2, παίρνουν τις ίδιες τιμές όπως στην ενότητα 3.1. Μελετάται η ευαισθησία του v για το διάστημα $(0,1)$. Η συνδιακύμανση θεωρείται σταθερή $\sigma_{hu} = 0.5$, και η σταθερά ρ παίρνει τιμές για $\rho = 0.2$, $\rho = 0.5$ και $\rho = 0.8$. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα 4. Η κόκκινη γραμμή δείχνει ότι ο επενδυτής πουλάει όλες τις μετοχές στο χαρτοφυλάκιό του για οποιαδήποτε τιμή του v, όταν το $\rho = 0.2$. Επίσης η κίτρινη γραμμή αποτυπώνει την περίπτωση όπου το $\rho = 0.5$, ενώ η μπλε γραμμή όταν το $\rho = 0.8$.

Εφόσον το ρ είναι μικρό ο επενδυτής διαθέτει μεγάλο ανθρώπινο κεφάλαιο, ενώ όσο αυξάνεται το ανθρώπινο κεφάλαιο του επενδυτή, μειώνεται το ρ όπως έχει αναλυθεί μέσω της εξίσωσης (3.1.12). Η αύξηση της εργασιακής ευελιξίας, με θετική συσχέτιση των αποδόσεων της αγοράς, και του εισοδήματος εργασίας του επενδυτή μειώνει την κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Αντιθέτως με την προηγούμενη περίπτωση της ενότητας 3.1. χωρίς εργασιακή ευελιξία ο επενδυτής αντιμετωπίζει αβεβαιότητα για το εισόδημα εργασίας του, λόγω της στοχαστικότητας του ανθρώπινου κεφαλαίου. Το ανθρώπινο κεφάλαιο του επενδυτή είναι το εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου, και αναμένεται να το λάβει στο μέλλον. Επειδή η συσχέτιση των μετοχών με το εισόδημα εργασίας είναι θετική, η αύξηση του εισοδήματος εργασίας οδηγεί σε αύξηση των τιμών των μετοχών, και η μείωσή του σε μείωση των τιμών των μετοχών. Η αύξηση των τιμών των μετοχών σημαίνει ότι ο επενδυτής έρχεται αντιμέτωπος με έναν μη συστηματικό κίνδυνο, επειδή αυξάνεται ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου του. Επίσης η μείωση των τιμών των μετοχών οδηγούν σε παράλληλη μείωση του εισοδήματος εργασίας του, συνεπώς επειδή το εισόδημα εργασίας θεωρείται περιουσιακό στοιχείο με μικρότερο κίνδυνο από τις μετοχές, και ο επενδυτής έχει σταθερή αποστροφή κινδύνου, θα θέλει να αγοράσει ομόλογα για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο από την μείωση του εισοδήματος εργασίας του.

Έστω ότι την χρονική στιγμή t, ο επενδυτής πρέπει να αποφασίσει σύμφωνα με αυτά που γνωρίζει την συγκεκριμένη χρονική στιγμή, πως θα κατανείμει τα περιουσιακά στοιχεία στο χαρτοφυλάκιό του. Όπως προηγουμένως σε περίπτωση αύξησης των τιμών των μετοχών, ο επενδυτής που βρίσκεται σε νεαρή ηλικία και έχει υψηλό ανθρώπινο κεφάλαιο $(\rho = 0.2)$, ο χρηματοοικονομικός του πλούτος είναι μικρός συγκριτικά με το ανθρώπινο κεφάλαιο. Άρα, θα αναγκαστεί το μικρό μέρος του χρηματοοικονομικού πλούτου που διαθέτει να το αποσύρει πλήρως από την επένδυση σε μετοχές και να αγοράσει ομόλογα. Αντίστοιχα για τις περιπτώσεις όπου το $\rho = 0.5$, και $\rho = 0.8$ το ανθρώπινο κεφάλαιο είναι μικρότερο. Ο επενδυτής θα μειώσει την επένδυσή του σε μετοχές, και θα αγοράσει ομόλογα αλλά σε μικρότερο βαθμό. Αυτή η διαφοροποίηση που κάνει στο χαρτοφυλάκιο έχει σκοπό να αντισταθμίσει τον μη συστηματικό κίνδυνο.

Σε αυτή την απόφαση σημαντικό ρόλο διαδραματίζει πως θα κατανείμει τον ελεύθερό του χρόνο. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα 4, καθώς το ν αυξάνεται, αυτό σημαίνει ότι αυξάνεται και ο χρόνος που εργάζεται ο επενδυτής, εφόσον $\nu = \lambda N/(1-N)$, όπου N είναι ο χρόνος εργασίας του. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να αντισταθμίσει μία αναμενόμενη μείωση του εισοδήματος εργασίας του, με το να εργάζεται περισσότερο, συνεπώς καθώς η αυξάνεται το ν μειώνεται η κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, λόγω της θετικής συσχέτισης. Επίσης σε περίπτωση αύξησης του εισοδήματος εργασίας, για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της αύξησης των τιμών των μετοχών, έχει πάλι την δυνατότητα να εργαστεί παραπάνω, και να πουλήσει μετοχές για να διατηρήσει τον κίνδυνο στο επίπεδο που επιθυμεί. Η επίδραση του ν, στην κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο είναι πιο αισθητή, όταν το ανθρώπινο κεφάλαιο είναι μικρό. Αυτό συμβαίνει διότι ο επενδυτής μπορεί να το αυξήσει σε μεγαλύτερο βαθμό μέσω της εργασιακής του ευελιξίας.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4
Ευαισθησία ελαστικότητας του εισοδήματος εργασίας
για μετοβολές του ρ με συνδιακύμανση ίση με $\sigma_h u$=0.5



$\rho = 0.2, \rho = 0.5, \rho = 0.8.$

3.3 Όριο διαβίωσης

Το όριο διαβίωσης αποτελεί την ελάχιστη κατανάλωση του εισοδήματος που πρέπει να έχει ο επενδυτής για να επιβιώσει. Συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί σαν αρνητικό εισόδημα εργασίας. Το όριο διαβίωσης που συμβολίζεται με X_{t+1}, με τον πλούτο του επενδυτή, περιγράφεται από την χρησιμότητα :

$$U(C_{t+1}, X_{t+1}) = \frac{(C_{t+1} - X_{t+1})^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.3.1}$$

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης της χρησιμότητας χωρίς εισόδημα εργασίας μέσω της εξίσωσης (3.1.2) είναι :

$$C_{t+1} = F_{t+1} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)F_t \tag{3.3.2}$$

Η εξίσωση (3.3.2) μπορεί να μετασχηματιστεί αν ο υπερβάλλων πλούτος, δηλαδή η κατανάλωση του επενδυτή που χρησιμοποιεί για να καλύψει περαιτέρω ανάγκες από τις ανάγκες διαβίωσης, μπορεί να γραφτεί ως η διαφορά του πλούτου από το όριο διαβίωσης και προκύπτει:

$$C_{t+1}^{*} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)F_t - X_{t+1} \tag{3.3.3}$$

Η εξίσωση (3.3.3) είναι παρόμοια με την εξίσωση (3.1.2) μόνο που πλέον αντί για το εισόδημα εργασίας υπάρχει το όριο διαβίωσης. Ο επενδυτής πρέπει κάθε χρονική στιγμή να έχει πλούτο τουλάχιστον X_{t+1} για να επιβιώσει. Αν γίνει η υπόθεση ότι το X_{t+1} είναι σταθερό, χρειάζεται ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, για να διασφαλίσει αυτό το πλούτο θα επενδύσει το οριακό ποσό διαβίωσης προεξοφλημένο σε ομόλογα $X_{t+1}/\left(1 + R_f\right)$, και θα επενδύσει το εναπομείναντα του πλούτο $F_t - X_{t+1}/\left(1 + R_f\right)$ σε μετοχές. Συνεπώς, μέσω της εξίσωσης (2.3.12) χωρίς να υπάρχει πλέον ανθρώπινο κεφάλαιο και θεωρώντας την βέλτιστη κατανομή μετοχών του χαρτοφυλακίου ως σταθερά συνεπάγεται :

$$\alpha = \hat{\alpha}\,\frac{\left(F_t - \dfrac{X_{t+1}}{1 + R_f}\right)}{F_t} = \frac{\mu + \dfrac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma\sigma_u^2}\left(1 - \frac{X_{t+1}}{\left(1 + R_f\right)F_t}\right) \tag{3.3.4}$$

Ο χρηματοοικονομικός πλούτος που διατίθεται σε μετοχές είναι μεγαλύτερος όταν υπάρχει όριο διαβίωσης, από όταν δεν υπάρχει. Αν η εξίσωση (3.3.3) γραφτεί λογαριθμικά τότε :

$$c_{t+1}^{*} = \eta\big(f_t + r_{p,t+1}\big) + (1-\eta)x_{t+1} \qquad (3.3.5)$$

Η σταθερά η>1 εκφράζει ότι και η μεταβλητή ρ, όμως αποτελεί συνάρτηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου, και του ορίου διαβίωσης, και η διαδικασία υπολογισμού είναι η ίδια. Ο τύπος της σταθεράς η είναι της μορφής:

$$\eta = \frac{exp\big(f + r_p - x\big)}{exp\big(f + r_p - x\big) - 1} = \frac{\big(1 + R_p\big)F}{\big(1 + R_p\big)F - X}, \qquad (3.3.6)$$

Επειδή, το όριο επιβίωσης x_{t+1} δεν μπορεί να είναι μηδενικό, η προσέγγιση αυτή οδηγεί με παρόμοιο τρόπο στην λύση:

$$\alpha_t = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\mu + \frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma\sigma_u^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\left(\frac{\sigma_{ru}}{\sigma_u^2}\right) \qquad (3.3.7)$$

Η μεταβλητή σ_{ru} είναι η συνδιακύμανση των αποδόσεων των μετοχών με το όριο διαβίωσης, δηλαδή το αρνητικό εισόδημα εργασίας. Άρα λόγω του περιορισμού του η (η>1), φαίνεται από την εξίσωση (3.3.7) σε περίπτωση θετικής συσχέτισης, μεταξύ του ορίου διαβίωσης και των αποδόσεων των μετοχών, η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, θα μειωθεί σε μικρότερο βαθμό συγκριτικά με τις δύο περιπτώσεις που μελετήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Το όριο διαβίωσης είναι μία μη διαπραγματεύσιμη υποχρέωση του επενδυτή. Αντιθέτως το εισόδημα εργασίας του είναι ένα μη διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο. Όταν υπάρχει θετική συσχέτιση με τις αποδόσεις των μετοχών ο επενδυτής μειώνει την κατανομή του σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο. Η μείωση αυτή είναι μικρότερη σχετικά με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, διότι το όριο διαβίωσης είναι μικρότερο από το εισόδημα εργασίας του επενδυτή. Ο επενδυτής δεν επιθυμεί να πάρει ρίσκο σε πιθανή άνοδο των τιμών των μετοχών, διότι είναι απαραίτητο να αποπληρώσει το όριο διαβίωσής του ώστε να επιβιώσει. Συνεπώς αντιμετωπίζει έναν κίνδυνο ρευστότητας, διότι έχει αβεβαιότητα αν θα μπορέσει να καλύψει την υποχρέωση διαβίωσής του. Ο επενδυτής θα μεταβάλλει την κατανομή του χαρτοφυλακίου του αγοράζοντας ομολόγα, για να μειώσει αυτή την έκθεσή του σε αυτό τον κίνδυνο.

Αν $\sigma_{ru} = 0$ τότε το ποσό επένδυσης μετοχών σε αυτή τη περίπτωση εφόσον $\eta > 1$, $\rho < 1$, συνεπώς ο λόγος $1/\eta$ είναι μικρότερος από τον λόγο $1/\rho$. Ο επενδυτής την χρονική στιγμή t γνωρίζει το επίπεδο διαβίωσης που είναι απαραίτητο να έχει την χρονική στιγμή $t+1$. Η μηδενική συσχέτιση του ορίου διαβίωσης με τις αποδόσεις των μετοχών, θα μειώσουν τον συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου του, και με σταθερή αποστροφή κινδύνου θα αυξήσει την κατανομή σε μετοχές.

Τέλος, η αρνητική συσχέτιση θα οδηγήσει τον επενδυτή να αυξήσει την βέλτιστη κατανομή του σε μετοχές, με σκοπό να αντισταθμίσει τον κίνδυνο αύξησης του ορίου διαβίωσής του. Εφόσον ο επενδυτής ανησυχεί ότι το όριο διαβίωσης μπορεί να αυξηθεί θα αντισταθμίσει αυτό τον κίνδυνο επενδύοντας σε μετοχές, λόγω τον μεγαλύτερων αναμενόμενων αποδόσεων, με σκοπό να καλύψει αυτή την απρόβλεπτη επιπλέον υποχρέωση που μπορεί να του δημιουργηθεί. Πάλι σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής έρχεται αντιμέτωπος με έναν κίνδυνο ρευστότητας.

Έστω δύο επενδυτές, με ίδια επίπεδα πλούτου και ίδιο όριο διαβίωσης, αλλά με διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες. Ο επενδυτής με μεγαλύτερο επενδυτικό ορίζοντα, θα έχει μεγαλύτερο μελλοντικό όριο διαβίωσης. Αυτό θα τον οδηγήσει να καταναλώσει λιγότερο στο παρόν, με σκοπό να μειώσει αυτή την παρούσα αξία του ορίου διαβίωσης και θα επενδύσει περισσότερο σε μετοχές. Συμπερασματικά ο νεότερος επενδυτής θα επενδύει περισσότερο σε μετοχές συγκριτικά με τον μεγαλύτερο ηλικιακά επενδυτή. Όμως, αυτό το συμπέρασμα δεν λαμβάνει υπόψη τις μεταβολές του ορίου διαβίωσης στην διάρκεια της ζωής, παραδείγματος χάριν λόγω μεταβολών του πληθωρισμού. Επίσης θεωρεί ότι το όριο διαβίωσης εξαρτάται μόνο από την κατανάλωση του επενδυτή, χωρίς να λαμβάνει υπόψη την συνολική κατανάλωση της κοινωνίας.

3.4 Άπειρος χρονικός ορίζοντας

Έστω τώρα ότι ο χρονικός ορίζοντας του επενδυτή είναι άπειρος. Επίσης έστω ότι π^r η πιθανότητα να συνταξιοδοτηθεί, $\pi^e = 1 - \pi^r$, η πιθανότητα να λαμβάνει εισόδημα εργασίας και π^d η πιθανότητα θανάτου. Θεωρείται ότι το εισόδημα εργασίας επηρεάζεται από μόνιμες μεταβολές και ότι η μεγέθυνση (ζ) του είναι σταθερή, τότε περιγράφεται ως :

$$Y_{t+1} = Y_t\, exp\{\zeta + \xi_{t+1}\}, \quad \xi_t + 1 \sim N\left(0, \sigma_\xi^2\right) \tag{3.4.1}$$

Το εισόδημα εργασίας επηρεάζεται από μόνιμες και προσωρινές μεταβολές. Στην προκειμένη περίπτωση, λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μόνιμες μεταβολές για λόγους ευκολίας, όπως η σύναψη ενός δανείου του επενδυτή με μία τράπεζα. Η συνδιακύμανση της λογαριθμικής απόδοσης της μετοχής με το εισόδημα εργασίας, είναι ίση με $\sigma_{\xi u}$. Ο επενδυτής έχει να λύσει το διαχρονικό πρόβλημα μεγιστοποίησης που περιγράφεται ως :

$$\max_{\{C_{t+i}, a_{t+i}\}_{i=0}^{\infty}} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{t+i}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.4.2}$$

Υπό τον περιορισμό ότι ο ρευστοποιήσιμος χρηματοοικονομικός πλούτος που έχει ο επενδυτής την χρονική στιγμή t, εξαρτάται από το χρηματοοικονομικό πλούτο που διέθετε από την προηγούμενη περίοδο, το εισόδημά του, και πλην την κατανάλωσή του εκείνη την περίοδο, περιγράφεται από την συνάρτηση :

$$F_{t+1} = (F_t + Y_t - C_t)\left(1 + R_{p,t+1}\right) \qquad (3.4.3)$$

Γίνεται χρήση των εξισώσεων του Euler για κάθε περιουσιακό στοιχείο i, της εξίσωσης (3.4.3) για άπειρο επενδυτικό ορίζοντα. Οι εξισώσεις του Euler αποτελούν μία διαχρονική συνθήκη πρώτης τάξης, δηλαδή μία διαφορική εξίσωση που χαρακτηρίζει την βέλτιστη επιλογή του επενδυτή, σύμφωνα με τα οριακά κόστη, και τα οριακά οφέλη του. Συνεπώς αποτελούν μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, που χαρακτηρίζουν την χρονική πορεία της μεταβλητής, προς το βέλτιστο μονοπάτι. Για την χρονική στιγμή που γίνεται η συνταξιοδότηση και για την περίοδο σύνταξης προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις :

$$1 = E_t\left[\pi^e \delta \left(\frac{C^e_{t+1}}{C^e t}\right)^{-\gamma} + (1-\pi^e)(1-\pi^d)\delta\left(\frac{C^r_{t+1}}{C^r t}\right)^{-\gamma}\right]\left(1 + R_{i,t+1}\right) \qquad (3.4.4)$$

$$1 = E_t(1-\pi^d)\delta\left(\frac{C^r_t + 1}{C^r_t}\right)^{-\gamma}(1 + R_{i,t+1}) \qquad (3.4.5)$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως προηγουμένως η βέλτιστη κατανομή μετοχής και η κατανάλωση για τους συνταξιούχους περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$a^r = \frac{\mu + \frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma b_1^r \sigma_u^2} \qquad (3.4.6)$$

$$c_t^r = b_0^r + b_1^r w_t \qquad (3.4.7)$$

Η εξίσωση (3.4.6) είναι παρόμοια με την εξίσωση (3.1.11), απλά λόγω του ότι δεν υπάρχει ανθρώπινο κεφάλαιο, υπάρχει μόνο ο 1[ος] όρος της εξίσωσης. Ο όρος b_1^r είναι η ελαστικότητα της κατανάλωσης, δηλαδή το $(1-\rho)$, και δείχνει δηλαδή αν μεταβληθεί 1% ο χρηματοοικονομικός πλούτος, ποια θα είναι η ποσοστιαία μεταβολή στην κατανάλωση. Στην προκειμένη περίπτωση είναι 1, διότι ο συνταξιούχος επενδυτής δεν έχει ανθρώπινο κεφάλαιο και φαίνεται ότι : $\frac{1}{\rho} \equiv 1 + \frac{\overline{H}}{F}$.

Έστω ότι ο επενδυτής, που εργάζεται και έχει ένα στόχο για την αναλογία πλούτου και εισοδήματος και δεν θέλει ούτε να το υπερβεί, ούτε να πέσει από αυτόν. Σε αυτή την περίπτωση, η προσεγγιστική κατανάλωση και επένδυση σε μετοχές περιγράφεται ως:

$$C_t^e = b_0^e + b_1^e f_t + (1 - b_1^e) y_t \tag{3.4.8}$$

$$\alpha^e = \frac{\mu + \frac{\sigma_u^2}{2}}{\gamma \overline{b_1} \sigma_u^2} - \frac{\pi^e (1 - b_1^e)}{\overline{b_1}} \left(\frac{\sigma_{\xi u}}{\sigma_u^2} \right) \tag{3.4.9}$$

$$\alpha \nu, \quad 0 < b_1^e < 1, \qquad \overline{b_1} = \pi^e b_1^e + (1 - \pi^e) b_1^r \tag{3.4.10}$$

Για την εξίσωση (3.4.8) είναι λογαριθμική, και παρόμοια με την εξίσωση (3.1.2) με b_1^e και $(1 - b_1^e)$ τις ελαστικότητες χρηματοοικονομικού πλούτου και εισοδήματος εργασίας αντίστοιχα, ενώ b_0^e αποτελεί μία σταθερά. Η εξίσωση (3.4.9) προκύπτει με παρόμοια ανάλυση όπως προηγουμένως. Η μεταβλητή $\sigma_{\xi u}$ είναι η συνδιακύμανση του εισοδήματος εργασίας με τις αποδόσεις των μετοχών. Η μεταβλητή ξ, δηλώνει τις μόνιμες μεταβολές του εισοδήματος και στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, υπολογίζονται μόνο αυτές χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι προσωρινές μεταβολές του εισοδήματος για λόγους ευκολίας. Το α^e είναι η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή για άπειρο χρονικό ορίζοντα και δεν εξαρτάται μόνο από το b_1^e αλλά εξαρτάται και από το $\overline{b_1}$ γιατί οι επιδράσεις του πλούτου του χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με τις αποφάσεις του επενδυτή τον χρόνο t, δεν είναι γνωστές μέχρι τον χρόνο $t + 1$. Το $\overline{b_1}$ εκφράζει ότι και το $1/\rho$. Ο επενδυτής σε αυτή την περίπτωση θεωρείται πως λαμβάνει εισόδημα εργασίας και έχει ανθρώπινο κεφάλαιο, το οποίο είναι όλα τα εισοδήματα εργασίας που αναμένει να λάβει. Το b_1^e εκφράζει ότι και το ρ, ενώ το $(1 - \pi^e)$ την πιθανότητα να μην λαμβάνει εισόδημα εργασίας και b_1^r το αντίστοιχο $1/\rho$, όταν ο επενδυτής θα έχει συνταξιοδοτηθεί, που σε αυτή την περίπτωση είναι 1, όπως προηγουμένως.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.4.9) δείχνει την σχέση μεταξύ μεταβολής του εισοδήματος και μετοχών. Αν το $\sigma_{\xi u} = 0$, τότε η εξίσωση είναι παρόμοια με την (3.4.6) με κύρια διαφορά ότι η μέσω της ανισότητας φαίνεται ότι η μεταβλητή $\overline{b_1} < b_1^r$ (3.4.10), συνεπώς το κλάσμα είναι μεγαλύτερο $\alpha^e > \alpha^r$. Άρα ο επενδυτής που εργάζεται και είναι μικρός ηλικιακά, θα έχει μεγαλύτερο μέρος του πλούτου του επενδυμένο σε μετοχές, συγκριτικά με τον μεγαλύτερο ηλικιακά επενδυτή. Η έλλειψη συσχέτισης $\sigma_{\xi u} = 0$ σημαίνει ότι ο επενδυτής θα αυξήσει την κατανομή του σε μετοχές, όμως λιγότερο από τις περιπτώσεις των ενοτήτων 3.1. και 3.2. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι ο κίνδυνος του εισοδήματος εργασίας, κάνει τον επενδυτή να συμπεριφέρεται σαν να έχει μία απεριόριστη επένδυση σε ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, με αξία χαμηλότερη από την αναμενόμενη παρούσα αξία του εισοδήματος εργασίας, προεξοφλημένη στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Όταν το $\sigma_{\xi u} \neq 0$ το εισόδημα εργασίας σχετίζεται με τις αποδόσεις των μετοχών, ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει την δυνατότητα του επενδυτή να αντισταθμίσει τον κίνδυνο μεταβολής του εισοδήματος.

Όταν $\sigma_{\xi u} < 0$ τότε επειδή $0 < 1 - b_1^e < 1$, όπου αποτελεί την ελαστικότητα του εισοδήματος, το κλάσμα θα είναι θετικό και θα αυξηθεί η ζήτηση για μετοχές. Σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής θα αυξήσει την κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του για να αντισταθμίσει πιθανές απώλειες από το εισόδημα εργασίας του μελλοντικά. Αντιμετωπίζει έναν μη συστηματικό κίνδυνο τον οποίο μειώνει μέσω της διαφοροποίησης.

Αν η συνδιακύμανση $\sigma_{\xi u} > 0$ τότε θα μειωθεί η ζήτηση για μετοχές διότι $\overline{b_1} < b_1^r$ που φαίνεται από τον περιορισμό της εξίσωσης (3.4.10). Η αύξηση του ανθρώπινου κεφαλαίου οδηγεί σε αύξηση της τιμής των μετοχών. Αντίστοιχα μία πτώση του ανθρώπινου κεφαλαίου, σημαίνει ότι μειώνονται οι τιμές των μετοχών. Αρχικά η αύξηση της τιμής της μετοχής κάνει τον επενδυτή να μειώσει τις μετοχές στο χαρτοφυλάκιό του, διότι θέλει να αντισταθμίσει αυτή την αύξηση, επειδή ο χρηματοοικονομικός του πλούτος είναι περιορισμένος. Επίσης η αύξηση της τιμής της μετοχής, όπως και η μείωση, δημιουργούν πάλι στον επενδυτή έναν μη συστηματικό κίνδυνο, τον οποίο αντισταθμίζει μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου.

Στην ανάλυση παρατηρείται ότι σε κάθε περίπτωση, όταν οι αποδόσεις των μετοχών είναι ασυσχέτιστες με το εισόδημα εργασίας, ο νεαρός επενδυτής θα διαθέτει μεγαλύτερο μέρος του χαρτοφυλακίου του σε μετοχές. Αν οι αποδόσεις των μετοχών συσχετίζονται αρνητικά με το εισόδημα εργασίας ισχύει το ίδιο, με την διαφορά ότι ο επενδυτής μπορεί να αντισταθμίζει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου του, προσαρμόζοντας την κατανάλωσή του στις απρόσμενες μεταβολές του εισοδήματος. Τέλος, αν η συσχέτιση είναι θετική, είναι βέλτιστο να μειώσει τα περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιό του.

Σε περίπτωση που υπάρχει οικονομική ανάπτυξη για μεγάλο χρονικό διάστημα, παραδείγματος χάριν συνεχής αύξηση του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος ή μεταβολή του πληθωρισμού ή του επιπέδου των επιτοκίων, αυτά τα γεγονότα μπορεί να μεταβάλλουν τα εισοδήματα των επενδυτών, αλλά και τις τιμές των μετοχών στο χρηματιστήριο. Σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής αντιμετωπίζει έναν συστηματικό κίνδυνο, δηλαδή έναν κίνδυνο αγοράς (market risk). Όμως, αυτός ο κίνδυνος δεν αντισταθμίζεται με την διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή και για αυτό το λόγο δεν θα γίνει περαιτέρω αναφορά.

4. Ασκήσεις προσομοίωσης

4.1. Προσομοίωση Monte Carlo

Στην ανάλυση έως τώρα αναφέρθηκε η σημασία της συσχέτισης μεταξύ των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών και του εισοδήματος εργασίας. Σε αυτή την ενότητα θα αναλυθεί το μέγεθος της μεταβολής των τιμών των μετοχών, και της τιμής του εισοδήματος, καθώς και ο τρόπος που επηρεάζει τις στρατηγικές του επενδυτή. Η προσομοίωση θα πραγματοποιηθεί μέσω της Matlab, και ο κώδικας παρατίθεται στο παράρτημα. Έστω ότι ο επενδυτής, μπορεί να επενδύσει σε δύο περιουσιακά στοιχεία μετοχές και ομόλογα. Θεωρείται, πως έχει στο χαρτοφυλάκιό του μία μετοχή την χρονική στιγμή t με τιμή $S_t = 1\$$, και γίνεται η υπόθεση ότι για την μετοχή δεν καταβάλλονται μερίσματα. Αρχικά θα μελετηθεί η μεταβολή της τιμής της μετοχής για το διάστημα $[t, t+1]$, μέσω της γεωμετρικής κίνησης brown (geometric Brownian motion). Ο τύπος που περιγράφει την γεωμετρική κίνηση brown για την μεταβολή της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή t είναι:

$$dS_{t+1} = \mu_s S_{t+1} dt + \sigma_s S_{t+1} dW_{st} \tag{4.1.1}$$

S_{t+1}→ Η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t+1$.

μ_s→ Το αναμενόμενο επίπεδο απόδοσης της τιμής της μετοχής (expected rate of return).

dt→ το χρονικό διάστημα, η αλλαγή στο χρόνο στο οποίο μελετάται η μεταβολή της τιμής της μετοχής (μία χρονική περίοδος).

σ_s→ Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής (volatility).

dW_t Η διαδικασία Weiner, η οποία αναλύεται σε $\varepsilon\sqrt{\Delta t}$, όπου η μεταβλητή $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Η εξίσωση (4.1.1) μπορεί μέσω του Λήμμα του Ito να μετασχηματιστεί ως:

$$S_{t+1} = S_t e^{\left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right)dt + \sigma W_{st}} \tag{4.1.2}$$

Έστω ότι το αναμενόμενο επίπεδο απόδοσης είναι $\mu_s = 0.06$, ο χρονικός ορίζοντας είναι μία χρονική περίοδος ενός μήνα, και η τυπική απόκλιση $\sigma = 0.1$. Για την ανάλυση θα γίνει η εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo για την εξίσωση (4.1.2.) τρέχοντας την εξίσωση 100.000 φορές, για να υπάρξει μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων.

Για να μελετηθεί η σημασία της συσχέτισης θα χρησιμοποιηθεί η γεωμετρική κίνηση brown για το εισόδημα εργασίας, η οποία θα είναι συσχετισμένη με την προηγούμενη κίνηση brown της μεταβολής της τιμής της μετοχής. Η γεωμετρική κίνηση Brown για το εισόδημα εργασίας του επενδυτή περιγράφεται ως:

$$dY_{t+1} = \mu_y Y_{t+1} dt + \sigma_y Y_{t+1} dW_{yt} \quad (4.1.3)$$

Οι μεταβλητές εκφράζουν τα ίδια μεγέθη απλά για την τιμή του εισοδήματος εργασίας, αντί για την τιμή της μετοχής. Ομοίως μέσω του Λήμμα του Ito η εξίσωση (4.1.3) μετασχηματίζεται ως:

$$dY_{t+1} = Y_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{dt} + \sigma_y W_{yt}} \quad (4.1.4)$$

Γίνεται η υπόθεση ότι η αναμενόμενη μεταβολή του εισοδήματος εργασίας $\mu_y = 0.01$, η μεταβλητότητα $\sigma_y = 0.1$, καθώς και το εισόδημα εργασίας του επενδυτή την χρονική στιγμή t είναι ίσο με $Y_t = 5$\$. Θεωρείται ότι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής $\mu_s > \mu_y$, διότι ο κίνδυνος των μετοχών είναι μεγαλύτερος από τον κίνδυνο του εισοδήματος εργασίας, συνεπώς οι μετοχές θα έχουν μεγαλύτερες αναμενόμενες αποδόσεις.

Για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo πρέπει να παραχθούν δύο μονοπάτια για κάθε επανάληψη της προσομοίωσης, για δύο κινήσεις Brown, οι οποίες είναι συσχετισμένες. Αυτό θα πραγματοποιηθεί με την μέθοδο που είναι γνωστή ως ανάλυση Cholesky. Για να γίνει κατανοητή η μέθοδος, έστω ότι δύο μεταβλητές που περιγράφονται από την κανονική κατανομή έχουν συσχέτιση μεταξύ τους g, οι οποίες έχουν πίνακα συνδιακυμάνσεων:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & g \\ g & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

Ο πίνακας αυτός αναλύεται σε $\Sigma = LL'$, όπου L περιγράφεται ως :

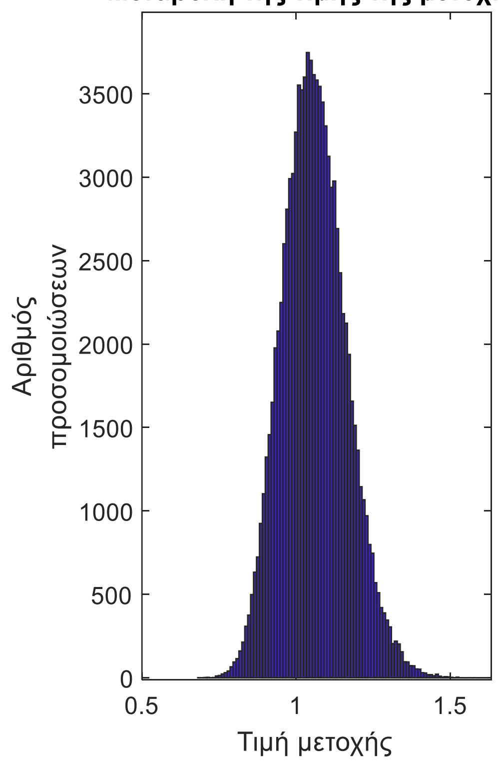
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g & \sqrt{1-g^2} \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

Συνεπώς για την παραγωγή πιθανών μονοπατιών για δύο συσχετισμένες γεωμετρικές κινήσεις Brown, πρέπει μέσω της διαδικασίας Weiner (W_{st}, W_{yt}), να παραχθούν από την κανονική κατανομή δύο ανεξάρτητες μεταβλητές Z_1, Z_2, ώστε να ισχύει:

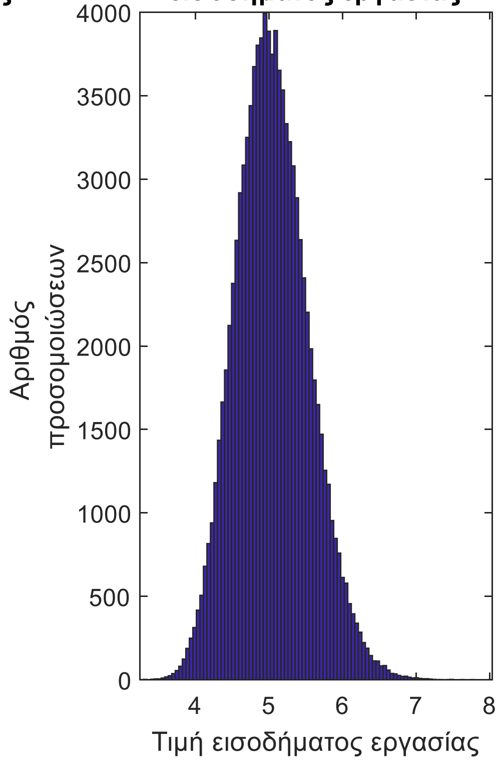
$$\varepsilon_1 = Z_1, \quad \varepsilon_2 = gZ_1 + \sqrt{1-g^2}Z_2 \quad (4.1.7)$$

Έστω ότι η συσχέτιση της τιμής της μετοχής είναι θετική, και ισούται με $g = 0.5$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν τα ιστογράμματα διάγραμμα 5, διάγραμμα 6 σύμφωνα με τα οποία φαίνεται η κατανομή της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή t, καθώς και η κατανομή της τιμής του εισοδήματος εργασίας την ίδια χρονική στιγμή.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5
Μεταβολή της τιμής της μετοχής



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6
Μεταβολή της τιμής του εισοδήματος εργασίας



Η θετική συσχέτιση των δύο μεταβλητών δηλώνει ότι καθώς αυξάνεται η τιμή της μετοχής, αυξάνεται και το εισόδημα εργασίας του επενδυτή, και αντίστροφα. Για την εκτέλεση της προσομοίωσης με την χρήση της γεωμετρικής κίνησης brown γίνεται η υπόθεση ότι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, καθώς και η διακύμανσή της είναι σταθερές όπως και στις εξισώσεις που μελετήθηκαν προηγουμένως στην ενότητα 3. Έστω για παράδειγμα η εξίσωση (3.1.11) που είναι η περίπτωση ενός χρονικού ορίζοντα, το ανθρώπινο κεφάλαιο δηλαδή το μελλοντικό εισόδημα εργασίας της επόμενης περιόδου θεωρείται ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, εφόσον ο επενδυτής δεν έχει εργασιακή ευελιξία. Έγινε η υπόθεση για την εξαγωγή των εξισώσεων στην προηγούμενη ενότητα ότι η μεταβλητή $1/\rho = 1 + H/W$, είναι σταθερή στο χρονικό διάστημα που γίνεται η ανάλυση. Όμως στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν ισχύει και μεταβάλλεται σε κάποιο βαθμό, αναλόγως την τιμή του εισοδήματος εργασίας του επενδυτή. Συνεπώς, όταν το εισόδημα εργασίας του επενδυτή αναμένεται να αυξηθεί, αυξάνεται σε κάποιο βαθμό και το ανθρώπινο κεφάλαιό του, που αποτελεί το μελλοντικό εισόδημα εργασίας, μειώνοντας το ρ. Επίσης, η μείωση του εισοδήματος εργασίας θα μειώσει το ανθρώπινο κεφάλαιο του επενδυτή, αυξάνοντας το ρ. Επιπλέον, η παράλληλη μείωση της τιμής της μετοχής, δίνει την δυνατότητα στον επενδυτή να αντισταθμίσει αυτή την μείωση από τις απώλειες του εισοδήματος εργασίας του, μέσω διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου του.

Σε περίπτωση που ο επενδυτής έχει εργασιακή ευελιξία, αυτή η μεταβολή του εισοδήματος εργασίας θα επηρεάσει τα β_w, β_h με τον ίδιο τρόπο, αλλά σε διαφορετικό βαθμό, όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (3.2.7),(3.2.8).

4.2. Εύρεση βέλτιστης κατανομής μετοχών

Έστω ότι ο επενδυτής έχει χρηματοοικονομικό πλούτο την χρονική στιγμή t ίσο με $F_t = 5\$$. Επίσης, γίνεται η υπόθεση ότι η απόδοση του ομολόγου που έχει ο επενδυτής στο χαρτοφυλάκιό του ισούται με $R_f = 0{,}01$. Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία της ενότητας 4.1. υπολογίστηκε η μεταβολή της τιμής της μετοχής, με την μεταβολή του εισοδήματος εργασίας, οι οποίες έχουν ένα θετικό επίπεδο συσχέτισης της τάξεως του $g = 0.5$. Ουσιαστικά, έχουν υπολογιστεί 100.000 διαφορετικά μονοπάτια που λαμβάνουν διαφορετικές τιμές για τις δύο μεταβλητές που εξετάζονται για την επόμενη περίοδο. Η απόδοση της μετοχής θα είναι $R_{t+1} = (S_{t+1} - S_t)/S_t$, και με αυτό τον τρόπο προκύπτουν 100.000 διαφορετικές αναμενόμενες αποδόσεις για την μετοχή.

Στην συνέχεια θα γίνει χρήση της εξίσωσης (3.1.3), για να υπολογιστεί η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου του επενδυτή $R_{p,t+1}$, όπου $R_{p,t+1} = a_t\left(R_{t+1} - R_f\right) + R_f$. Γίνεται η υπόθεση, πως ο επενδυτής έχει διαθέσει το 20% του χρηματοοικονομικού του πλούτου για να αγοράσει την μετοχή, δηλαδή $a_t = 0.2$. Με αντικατάσταση των υπόλοιπων όρων της εξίσωσης, προκύπτουν 100.000 διαφορετικές αναμενόμενες αποδόσεις για το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή $R_{p,t+1}$.

Ακόμα θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (3.1.2), μέσω της οποίας μπορεί να υπολογιστεί η κατανάλωση του επενδυτή την επόμενη περίοδο, δηλαδή ο πλούτος που θα έχει στην διάθεσή του την χρονική στιγμή $t+1$, $C_{t+1} = F_t\left(1 + R_{p,t+1}\right) + Y_{t+1}$. Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι γνωστές, εφόσον στην ενότητα 4.1. δημιουργήθηκαν 100.000 μονοπάτια για την τιμή του εισοδήματος εργασίας, και λύνοντας την εξίσωση δημιουργούνται 100.000 τιμές για το C_{t+1}. Σε αυτό το σημείο γίνεται η υπόθεση, ότι η αποστροφή κινδύνου του επενδυτή είναι ίση με $\gamma = 5$, όπως στις αναλύσεις ευαισθησίας των ενοτήτων 3.1. και 3.2. Μέσω της μεταβλητής C_{t+1}, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (3.1.1.), για να υπολογιστεί η αναμενόμενη χρησιμότητα του πλούτου που θα έχει ο επενδυτής την χρονική στιγμή $t+1$. Επειδή με την λύση της εξίσωσης προκύπτουν πολύ μικροί αριθμοί, πολλαπλασιάζονται τα αποτελέσματα με 1.000.000, για λόγους ευκολίας, ώστε οι αριθμοί να είναι πιο εύκολα συγκρίσιμοι. Συνεπώς λύνοντας την εξίσωση για 100.000 τιμές του C_{t+1}, και υπολογίζοντας τον μέσο, προκύπτει ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή για $a_t = 0.2$ ισούται με -23.9485 μονάδες χρησιμότητας. Το αρνητικό πρόσημο της χρησιμότητας προκύπτει διότι περιγράφεται από τον τύπο $E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]$, όπου $\gamma > 1$. Το πρόσημο δεν επηρεάζει την επιλογή του επενδυτή, για την αναμενόμενη χρησιμότητά του, διότι η CCRA χρησιμότητα είναι της μορφής Von Neumann–Morgenstern. Ουσιαστικά ο επενδυτής ενδιαφέρεται πόσο απέχει από το μηδέν, δηλαδή προτιμάει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη χρησιμότητα κατά απόλυτη τιμή.

Η ίδια διαδικασία αυτή ακολουθήθηκε για διαφορετικές τιμές του α_t. Συγκεκριμένα έγινε η υπόθεση ότι το α_t κατανέμεται διαφορετικά στο χαρτοφυλάκιο από 0% μέχρι 100% $0 \leq \alpha_t \leq 1$, για να υπολογιστεί η βέλτιστη κατανομή των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή, ώστε να μεγιστοποιείται η αναμενόμενη χρησιμότητά του. Σε κάθε επανάληψη για διαφορετική τιμή του α_t, επαναλαμβάνεται η διαδικασία της προσομοίωσης Monte Carlo από την αρχή, και προκύπτουν νέες 100.000 τιμές για την τιμή της μετοχής και του εισοδήματος εργασίας. Στην συνέχεια τα προβλήματα λύνονται όπως στην περίπτωση που περιγράφηκε παραπάνω. Τα αποτελέσματα για διαφορετικά α_t με συσχέτιση $g = 0.5$, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Υπολογισμός βέλτιστου α_t για συσχέτιση g=0.5

Ποσοστά κατανομής μετοχής στο χαρτοφυλάκιο α_t	**Αναμενόμενη χρησιμότητα επενδυτή**
$\alpha_t = 0$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9276$
$\alpha_t = 0.1$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9165$
$\alpha_t = 0.2$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9485$
$\alpha_t = 0.3$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9139$
$\alpha_t = 0.4$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9435$
$\alpha_t = 0.5$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9612$
$\alpha_t = 0.6$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9269$
$\alpha_t = 0.7$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9459$
$\alpha_t = 0.8$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9563$
$\alpha_t = 0.9$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9363$
$\alpha_t = 1$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.9311$

Όπως φαίνεται από τον πίνακα ο επενδυτής μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητά του για $\alpha_t = 0.5$. Συνεπώς είναι βέλτιστο να διαθέσει το 50% του χρηματοικονομικού του πλούτου για να αγοράσει μετοχές. Το ποσοστό κατανομής μετοχών στο χαρτοφυλάκιο αλλάζει σε μικρό βαθμό την αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι θα γινόταν σε διαφορετικά επίπεδα συσχέτισης. Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα, θα γίνει η υπόθεση ότι η συσχέτιση είναι πάρα πολύ μικρή της τάξεως του $g = 0.1$, καθώς και πολύ υψηλή $g = 0.8$. Ο πίνακας 2 περιγράφει την περίπτωση με συσχέτιση ύψους $g = 0.8$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Υπολογισμός βέλτιστου α_t για συσχέτιση g=0.8

Ποσοστά κατανομής μετοχής στο χαρτοφυλάκιο α_t	**Αναμενόμενη χρησιμότητα επενδυτή**
$\alpha_t = 0$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.2500$
$\alpha_t = 0.1$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.3216$
$\alpha_t = 0.2$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.3009$
$\alpha_t = 0.3$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.2351$
$\alpha_t = 0.4$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.2776$
$\alpha_t = 0.5$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.2368$
$\alpha_t = 0.6$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.3125$
$\alpha_t = 0.7$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.3096$
$\alpha_t = 0.8$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.3106$
$\alpha_t = 0.9$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.3009$
$\alpha_t = 1$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -24.2340$

Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρείται ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι μεγαλύτερη συγκριτικά με ένα μικρότερο επίπεδο συσχέτισης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι η υψηλότερη συσχέτιση θα μεταβάλει σε μεγαλύτερο βαθμό την τιμή της μετοχής από την συσχέτιση με $g = 0.5$. Αν η τιμή του εισοδήματος εργασίας ανέβει πολύ, συνεπώς και η τιμή της μετοχής, ο επενδυτής αντιμετωπίζει ένα κίνδυνο ότι δεν θα μπορέσει να αγοράσει τις μετοχές που επιθυμεί στο χαρτοφυλάκιό του. Επίσης, αν η τιμή της πέσει σε μεγάλο βαθμό, ο επενδυτής πάλι αντιμετωπίζει τον κίνδυνο να χάσει χρήματα. Συνεπώς, η υψηλότερη συσχέτιση αυξάνει τον κίνδυνο του επενδυτή. Συμπερασματικά, ο υψηλότερος κίνδυνος θα οδηγήσει σε υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις, και για αυτό το λόγο η αναμένομενη χρησιμότητά του είναι μεγαλύτερη για όλες τις περιπτώσεις συγκριτικά με τον πίνακα 1. Στον πίνακα 2 η βέλτιστη κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του είναι ίση με $\alpha_t = 0.1$, δηλαδή, να επενδύσει σε μετοχές το 10% του χρηματοοικονομικού του πλούτου. Παρακάτω, παρουσιάζεται η περίπτωση όπου η συσχέτιση του εισοδήματος εργασίας με τις αποδόσεις των μετοχών είναι μικρή $g = 0.1$, στον πίνακα 3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Υπολογισμός βέλτιστου α_t για συσχέτιση g=0.1

Ποσοστά κατανομής μετοχής στο χαρτοφυλάκιο α_t	**Αναμενόμενη χρησιμότητα επενδυτή**
$\alpha_t = 0$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4519$
$\alpha_t = 0.1$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4585$
$\alpha_t = 0.2$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4811$
$\alpha_t = 0.3$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4934$
$\alpha_t = 0.4$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4437$
$\alpha_t = 0.5$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4530$
$\alpha_t = 0.6$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.5140$
$\alpha_t = 0.7$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4105$
$\alpha_t = 0.8$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4770$
$\alpha_t = 0.9$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4733$
$\alpha_t = 1$	$E_t\left[\frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = -23.4632$

Στην τελευταία περίπτωση διαπιστώνεται ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή είναι μικρότερη συγκριτικά με τις προηγούμενες περιπτώσεις, λόγω της μικρότερης συσχέτισης. Από τον πίνακα 3 φαίνεται ότι ο επενδυτής μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητά του, με την επένδυση του 60% του χρηματοοικονομικού του πλούτου σε μετοχές, δηλαδή $\alpha_t = 0.6$.

Διαπιστώνεται μέσω της προσομοίωσης ότι, καθώς η συσχέτιση μεταξύ των δύο περιουσιακών στοιχείων (μετοχές,εισόδημα) μειώνεται, ο επενδυτής αυξάνει την κατανομή μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει τις αναλύσεις ευαισθησίας για την βέλτιστη κατανομή των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο στην ενότητα 3. Σε περίπτωση θετικής συσχέτισης, όσο μεγαλύτερη είναι η συσχέτιση τόσο λιγότερα περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο θα έχει ο επενδυτής στο χαρτοφυλάκιό του. Επίσης, η μεταβολή της κατανομής των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο επηρεάζει σε πολύ μικρό βαθμό την αναμενόμενη χρησιμότητα του επενδυτή. Αντιθέτως η συσχέτιση της τιμής της μετοχής, με την τιμή του εισοδήματος εργασίας είχε πάρα πολύ μεγαλύτερη επιρροή συγκριτικά με το ποσοστό κατανομής.

5. Συμπεράσματα

Ο τρόπος με τον οποίο οι επενδυτές λαμβάνουν αποφάσεις και οι στρατηγικές που ακολουθούν, είναι ένα ζήτημα το οποίο έχει απασχολήσει την οικονομική επιστήμη στην διάρκεια των χρόνων. Η βελτιστοποίηση των επενδυτικών επιλογών όσον αφορά την ηλικία του επενδυτή αποτελεί σημαντικό μέρος της βιβλιογραφίας. Τα μαθηματικά μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται, προσπαθούν να εξηγήσουν πως ο επενδυτής θα μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητά του, κατανέμοντας αποτελεσματικά τα περιουσιακά στοιχεία στο χαρτοφυλάκιό του. Η θεωρία υποστηρίζει πως οι επενδυτές σε νεαρή ηλικία, έχουν μεγαλύτερη ανοχή στον κίνδυνο, και είναι βέλτιστο για αυτούς να έχουν περισσότερες μετοχές στα χαρτοφυλάκιά τους, σε σχέση με τους επενδυτές που είναι μεγαλύτεροι ηλικιακά.

Η ανάλυση των υποδειγμάτων βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκε, αναλύει την ευαισθησία που έχει η βέλτιστη κατανομή των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο με το ανθρώπινο κεφαλαίο του επενδυτή. Μέσω της ανάλυσης συμπεραίνεται, ότι η αύξηση του ανθρώπινου κεφαλαίου συνεπάγεται την αύξηση των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο. Συνεπώς, οι νεαροί επενδυτές που μεγάλο μέρος του συνολικού τους πλούτου αποτελείται από ανθρώπινο κεφάλαιο, θα επενδύουν περισσότερο σε μετοχές, επιβεβαιώνοντας την θεωρητική βιβλιογραφία. Ιδιαίτερη σημασία στην κατανομή του χαρτοφυλακίου διαδραματίζει η δυνατότητα του επενδυτή να προσαρμόζει τον ελεύθερο χρόνο του, καθώς και το πόσο εργάζεται. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αύξηση του εργασιακού χρόνου θα οδηγήσει σε μείωση του ποσοστού επένδυσης σε μετοχές, διότι ο επενδυτής μπορεί να καλύψει πιθανές απώλειες, μέσω της εργασιακής του ευελιξίας.

Στην συνέχεια, γίνεται ανάλυση για διαφορετικές περιπτώσεις, με ξεχωριστούς χρονικούς ορίζοντες για την συσχέτιση μεταξύ του εισοδήματος εργασίας που λαμβάνει ο επενδυτής, και των μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Παρατηρείται σε όλες τις περιπτώσεις, όταν η συσχέτιση είναι μηδενική (ασυσχέτιστα), και όταν είναι αρνητική, τότε ο επενδυτής αγοράζει περισσότερες μετοχές. Αντιθέτως, όταν υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, οι επενδυτές είναι βέλτιστο να πουλήσουν μετοχές, με σκοπό να μειώσουν τον συνολικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου τους, μέσω της διαφοροποίησης.

Με την χρήση της μεθόδου Monte Carlo μελετήθηκε στην περίπτωση θετικής συσχέτισης, η μεταβολή της τιμής της μετοχής, και του εισοδήματος εργασίας του επενδυτή, μέσω δύο θετικά συσχετισμένων γεωμετρικών κινήσεων Brown. Τα αποτελέσματα δείχνουν, ότι όσο μικρότερη είναι συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, τόσο θα αυξάνει ο επενδυτής το ποσοστό μετοχών στο χαρτοφυλάκιό του. Ουσιαστικά, η συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών και του εισοδήματος εργασίας είναι καθοριστικός παράγοντας για την διαμόρφωση του χαρτοφυλακίου, και είναι απαραίτητο να λαμβάνεται υπόψη για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Οι αναλύσεις ευαισθησίας, καθώς και η προσομοίωση γίνονται με το κριτήριο της CRRA χρησιμότητας, θεωρώντας πως η αποστροφή κινδύνου είναι ανεξάρτητη από τον συνολικό πλούτο του επενδυτή. Αυτή η υπόθεση γίνεται για λόγους ευκολίας, αλλά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μία διαφορετική προσέγγιση όπου η αποστροφή κινδύνου του επενδυτή επηρεάζεται από το επίπεδο του πλούτου του. Επίσης, ιδιαίτερα σημαντική μεταβλητή στην ανάλυση αποτελεί το ανθρώπινο κεφάλαιο, που θεωρείται το μελλοντικό εισόδημα εργασίας που αναμένεται να λάβει ο επενδυτής. Όμως δεν είναι η μοναδική μεταβλητή που επηρεάζει τις επενδυτικές του στρατηγικές. Υπάρχει μεγάλη δυνατότητα με την χρήση μαθηματικών μοντέλων να προστεθούν μεταβλητές που αναλύουν ψυχολογικούς παράγοντες, για τον τρόπο που οι επενδυτές λαμβάνουν επενδυτικές αποφάσεις. Με αυτό τον τρόπο η ανάλυση, και η σημασία της ηλικίας στις επενδυτικές στρατηγικές θα είναι πιο αναλυτική και εμπεριστατωμένη.

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

Εγγλέζος Νικόλαος (2020), Χειρόγραφες σημειώσεις μαθήματος Παράγωγα Αξιόγραφα, Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Κουρογένης Νικόλαος (2019), Χειρόγραφες σημειώσεις μαθήματος Οικονομετρία, Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Μπράτσος Αθανάσιος (2015), Μαθήματα εφαρμοσμένων μαθηματικών, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών, ΤΕΙ Αθήνας, pp. 261-265.

Ξένη βιβλιογραφία

Ameriks, John. and Zeldes, P. Stephen. (2004), How do household portfolios vary with age?. Columbia University.

Ansari, Lubna. and Moid, Sana. (2013), Factors Affecting Investment Behaviour among Young Professionals, International Journal of Technical Research and Applications.

Aren, Selim. and Hamamci, Nayman. Hatice. (2019), Relationship between risk aversion, risky investment intention, investment choices Impact of personality traits and emotion, Kybernetes, Vol. 49 No. 11, pp. 2651-2682.

Bodie, Zni. (1995), On the Risk of the Stocks in the Long Run, Harvard Business School Working Paper No 95-013.

Bodie, Zni. Merton, C. Robert. Sammuelson F. Williamson. (1992), Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice In A Life-Cycle Model, Journal of Economic Dynamics and Control, 1992, vol. 16, issue 3-4, pp. 427-449.

Blundell, Richard. Dearden, Lorraine. Meghir, Costas. Sianesi, Barbara.(2005), Human Capital Investment: The Returns from Education and Training to the Individual, the Firm and the Economy. Fiscal Studies (1999) vol. 20, no. 1, pp. 1–23

Campell, Y. J. and Viceira, M. L. (2001), Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors, Oxford University Press.

Campbell, Y. John. And Cocco, F. Joao. Gomes, J. Francisco. Maenhout, J. Pascal. (2001) Investing Retirement Wealth A Life-Cycle Model, University of Chicago Press pp.439 – 482.

Chai, Jingjing. Maurer, Raimond. Mitchell, S. Olivia. Rogalla, Ralph. (2011), Lifecycle impacts of the financial and economic crisis on household optimal consumption, portfolio choice, and labor supply, University of Michigan, Michigan Retirement Research Center.

Charles, A. R. Kasilingam, R. (2013), Does the investor’s age influence their investment behaviour?

Deaton, Angus. (2005), Franco Modigliani and the Life Cycle Theory of Consumption, Research Program in Development Studies and Center for Health and Wellbeing, Princeton University.

Gerrans, Paul. Clark-Murphy, Marilyn. Speelman, Craig. (2006) Asset Allocation and Age Effects in Superannuation Investment Choice, Edith Cowan University.

Gomes, J. Francisco, Kotlikoff, J. Laurence, Viceira, M. Luis. (2008), Optimal Life-Cycle Investing with Flexible Labor Supply: A Welfare Analysis of Life-Cycle Funds, American Economic Review Vol. 98 No. 2.

Gratton, Lynda. and Ghoshal, Sumantra. (2003), Managing Personal Human Capital: New Ethos for the ‘Volunteer’ Employee, European Management Journal Volume 21, Issue 1, February 2003, Pages 1-10.

Jaggia, Sanjiv. Thosar, Satish. (2000), Risk Aversion and the Investment Horizon: A New Perspective on the Time Diversification Debate, Journal of Psychology and Financial Markets.

Jagannathan, Ravi. and Kocherlakota, R. J. (1996). Why Should Older People Invest Less in Stocks Than Younger People? Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, pp. 11-23.

Mata, Rui. Josef, K. Anika. Samanez-Larkin, R. Gregory**.** and Hertwig**,** Ralph. (2011), Age differences in risky choice: a meta-analysis, Department for Cognitive and Decision Sciences, University of Basel, Basel, Switzerland. Psychological Sciences, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee.

McCarthy, David. (2004). Household Portfolio Allocation: A Review of the Literature.

Merton, C. Robert. (1992) Continuous Time Finance, Oxford, U.K.: Basil Blackwell, 1990. (Rev. ed., 1992.) pp. (81-91).

Parker, A. Johnathan. (2008), Euler Equations. Northwestern University and NBER.

Pelletier, Denis. Tunc, Cengiz. (2013), Endogenous Life-Cycle Housing Investment and Portfolio Allocation, Working Papers 1345, Research and Monetary Policy Department, Central Bank of the Republic of Turkey.

Poterba, M. James. Samwick, A. Andrew (2001), Household Portfolio Allocation over the Life Cycle, University of Chicago Press, pp. 65 – 104.

Rabin, Matihew. (2000), Risk aversion and expected-utility theory: A calibration theorem, Department of Economics, Institute for Business and Economic Research, UC Berkeley.

Viceira, M. Luis (2001), Optimal Portfolio Choice for Long-Horizon Investors with Nontradable Labor Income, Journal of Finance, 56, 2 pp. 433-470.

Tsai, Hui-Ju. Wu, Yangru. (2011), Optimal Consumption and Portfolio Choice For Long-Horizon Investors with Nontradable Labor Income When Asset Returns are Predictable.

Vroom, V. and Pahl, B. (1971) Relationship between Age and Risk Taking among Managers. Journal of Applied Psychology, 55, pp. 399-405.

Yao, Rui. Sharpe, L. Deanna. Wang, Feifei. (2011), Decomposing the age effect on risk tolerance, Journal of Socio-Economics 40(6) pp. 879-887.

Κομμάτια σε τόμο

Αγγελίδης, Τιμόθεος. Αρτίκης, Παναγιώτης. Ελευθεριάδης, Ιορδάνης. Κόσμιδου, Κύριακή. Τσιριτάκης, Εμμανουήλ. Φλώρος, Χρήστος. (2017), Χρηματοοικονομική των Επιχειρήσεων pp.359-370.

Ρασσιάς, Μ. Θεμιστοκλής. (2004), Μαθηματική Ανάλυση 1, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο pp. 367-378.

Varian, H. HAL. (2015), Μικροοικονομική μία σύγχρονη προσέγγιση 3η έκδοση pp. 95-102.

Ηλεκτρονικοί ιστότοποι

https://www.uio.no/studier/emner/sv/oekonomi/ECON4310/h11/undervisningsmateriale/CRRAutility.pdf CRRA-utility, (2011).

http://faculty.econ.ucdavis.edu/faculty/kdsalyer/LECTURES/Ecn235a/Linearization/Loglinearization_notes.pdf Forfar, David. and Raymont, David. (2000), An introduction to log-linearizations.

https://openclass.teiwm.gr/modules/document/file.php/BA-K119/5.%CE%A0%CE%A1%CE%9F%CE%A5%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%9F%CE%93%CE%99%CE%A3%CE%9C%CE%9F%CE%99%20%CE%9A%CE%91%CE%99%20%CE%A0%CE%A1%CE%9F%CE%92%CE%9B%CE%95%CE%A8%CE%95%CE%99%CE%A3%20%CE%A0%CE%A9%CE%9B%CE%97%CE%A3%CE%95%CE%A9%CE%9D.pdf Κυριαζόπουλος, Γεώργιος. (2015), Ανάλυση χρηματοοικονομικών καταστάσεων, Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Μακεδονίας.

https://www.encyclopedia.com/social-sciences-and-law/economics-business-and-labor/economics-terms-and-concepts/human-capital Capital, Human, (2018).

https://unece.org/fileadmin/DAM/stats/publications/2016/ECECESSTAT20166_E.pdf Guide on Measuring Human Capital, UNITED NATIONS ECONOMIC COMMISSION FOR EUROPE, (2016), pp. 22-41.

http://repfiles.kallipos.gr/html_books/3403/main/node13.html Mihalis Kolountzakis,(2018).

https://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/RiskDefinitions.pdf Glossary of Terms utility Theory.

https://www.encyclopedia.com/science-and-technology/mathematics/mathematics/cholesky-decomposition Cholesky Decomposition, (2018).

https://dimitris.apeiro.gr/files/na/mc/MonteCarlo.pdf Καλαμαράς, Δημήτρης. (2001-02), Π.Μ.Σ. Μαθηματικού, pp. 2-5.

Παράρτημα

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Έστω η απλή γραμμική παλινδρόμηση, που είναι της μορφής:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_t \quad (1)$$

Στην παλινδρόμηση Y_t είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, β_0 είναι ο σταθερός όρος, β_1 η κλίση της ευθείας της παλινδρόμησης, και u_t ο διαταρακτικός όρος. Σύμφωνα με τον Κυριαζόπουλο (2015), η παλινδρόμηση χρησιμοποιείται για να προβλέψει την τιμή ενός συγκεκριμένου μεγέθους στο μέλλον. Χρησιμοποιείται για την εύρεση μία σχέσης μεταξύ διαφόρων μεταβλητών, με αποτέλεσμα να προκύπτει ένας συντελεστής, με την βοήθεια του οποίου γίνονται οι μελλοντικές προβλέψεις. Εφόσον μεταξύ X,Y υπάρχει η παραπάνω σχέση, λέμε ότι η σχέση είναι γραμμική και περιγράφεται ως $Y = \alpha + \beta X$, η οποία είναι ντετερμινιστική, δηλαδή για κάθε τιμής της X παίρνουμε περισσότερες από μία τιμές για την Y. Επειδή όμως οι τιμές του Y είναι προσεγγιστικές, στο μοντέλο θα υπάρχει και το σφάλμα της παλινδόμησης όπου το μοντέλο γίνεται της μορφής $Y = \alpha + \beta X + e$. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, βοηθάει στον υπολογισμό των συντελεστών α, β, με σκοπό την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων e_i. Έστω n οι παρατηρήσεις του μοντέλου. Με την παραγώγιση της σχέσης ως προς τα α και β προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (3)$$

Με τη λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων προκύπτουν οι εκτιμήτές β και α:

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad (4)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\text{n}} \frac{-\hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\text{n}} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} \qquad (5)$$

Η ευθεία που είναι της μορφής $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$, ονομάζεται ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, και μπορεί να υπολογιστεί το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης, που δίνεται από τον τύπο:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y - \hat{y})^2}{n-2}} \qquad (6)$$

Στην ανάλυση ενός μοντέλου επιθυμείται το S να είναι μικρό, διότι όσο μικρότερο είναι το S τόσο πιο ακριβής είναι η εκτίμηση.

Σειρές Taylor

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη n φορές μία στιγμή α, όπου α θεωρείται πραγματικός αριθμός. Ορίζεται ως n-βαθμού σειρά Taylor το πολυώνυμο:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \qquad (7)$$

Στην εξίσωση (7) το $f^{(i)}(a)$ δηλώνει την i-βαθμού παραγωγίσιμη του f στο α και $f^{(0)} = f$. Συνεπώς η πρώτη σειρά του πολυωνύμου θα είναι:

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (8)$$

Συνεπώς όταν το x είναι κοντά στο α, το $P(x)$ θα αποτελεί μία καλή προσέγγιση του $f(x)$, αν και όσο υψηλότερου βαθμού είναι η σειρά Taylor του πολυωνύμου, τόση καλύτερη θα είναι και η προσέγγιση.

Διαδικασία Weiner

Με τον όρο διαδικασία Weiner περιγράφεται η εξέλιξη στο χρόνο μία τυχαίας μεταβλητής z που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,1)$, δηλαδή έχει μέσο ίσο με το 0 και τυπική απόκλιση ίση με 1. Μία μεταβλητή για να ακολουθεί μία διαδικασία Weiner πρέπει να ισχύουν 2 υποθέσεις:

α) Η μεταβολή Δz σε οποιαδήποτε περίοδο Δ_t περιγράφεται από την σχέση $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$ δηλαδή η μεταβολή Δz ακολουθεί κανονική κατανομή.

β) Οι αξίες του Δz για δύο διαφορετικές χρονικές περιόδους Δ_t είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δηλαδή προβλέψεις για το μέλλον είναι αβέβαιες και πρέπει να εκφράζονται σε όρους κατανομών πιθανοτήτων. Συνεπώς η διαδικασία Weiner είναι ένα είδος στοχαστικής διαδικασίας Markov.

Γενικευμένη διαδικασία Weiner

Ο ρυθμός μεταβολής, δηλαδή παραδείγματος χάριν η αναμενόμενη απόδοση μίας μετοχής για κάθε χρονική στιγμή στο μέλλον είναι ίση με την τρέχουσα αξία, δηλαδή: $E(\Delta_z) = 0$. Επιπλέον η διακύμανση ισούται με 1, συνεπώς η μεταβολή της διακύμανσης του z σε ένα χρονικό διάστημα Δ_t ισούται με $Var(\Delta z) = \Delta_t$. Στη γενικευμένη διαδικασία Weiner ο ρυθμός μεταβολής, και η διακύμανση μπορούν να πάρουν την τιμή σταθερών μεταβλητών. Έστω αυτές οι μεταβλητές είναι a και b^2 αντίστοιχα τότε η τιμή της μετοχής S ακολουθεί μία γενικευμένη διαδικασία Weiner όταν:

$$dS = \alpha(S,t)dt + \ b(S,t)dz \qquad (9)$$

Η μεταβολή του $S, \Delta S$ για οποιαδήποτε χρονική περίοδο Δt δίνεται από τη σχέση $\Delta S = a\Delta_t + b\varepsilon\sqrt{\Delta_t}$ όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$. Συνεπώς η μεταβολή της αξίας της τιμής S για κάθε χρονική στιγμή κατανέμεται κανονικά με $\left(a\Delta_t, b\sqrt{\Delta_t}\right)$ όπου συνεπάγεται ότι:

α) $E(\Delta S) = \alpha\Delta_t$

β) $Var(\Delta S) = b^2\Delta_t$

Γεωμετρική κίνηση Brown (Geometric Brownian motion)

Όταν ένας επενδυτής κατανέμει περιουσιακά στοιχεία στο χαρτοφυλάκιο προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα του, μέσω της αναμενόμενης απόδοσης που επιθυμεί να λάβει. Όμως η απόδοση αυτή είναι ανεξάρτητη από την τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Η γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων του επενδυτή. Το κύριο χαρακτηριστικό της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι ότι περιλαμβάνει ένα αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης (drift term), και την μεταβλητότητα (volatility), του περιουσιακού στοιχείου. Το μοντέλο βασίζεται στην τυχαιότητα που μπορεί να πάρει η τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Ο τύπος που περιγράφει την γεωμετρική κίνηση Brown, για την τιμή μίας μετοχής S είναι ο εξής:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{10}$$

Η μεταβλητή dz είναι μία διαδικασία Weiner όπου $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ με $\varepsilon \sim N(0,1)$. Συνεπώς όταν γίνει προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown, κάθε φορά θα προκύψει ένα διαφορετικό μονοπάτι για την τιμή του περιουσιακού στοιχείου.

Διαδικασία Ito

Η διαδικασία Ito αποτελεί ένα είδος στοχαστικής διαδικασίας. Αποτελεί μία γενικευμένη διαδικασία Wiener όπου οι παράμετροι α και b είναι συναρτήσεις των μεταβλητών x, t. Αν η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει την τιμή μίας μετοχής S, τότε η διαδικασία περιγράφεται από την εξίσωση :

$$dS = a(S,t)dt \ + b(S,t)dz \tag{11}$$

Για ένα χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta_t]$ η τιμή S μεταβάλλεται στο χρόνο σε $S + \Delta S$ και είναι της μορφής $\Delta S = a(S,t)dt + b(S,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$, όπου το ε ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Το ποσοστό μεταβολής καθώς και της διασποράς της τιμής S θεωρείται ότι παραμένει σταθερό ίσο με $\alpha(S,t)$ και $b(S,t)^2$ αντίστοιχα για το διάστημα $[t, t + \Delta_t]$. Η διαδικασία Ito χρησιμοποιείται για την ανάλυση της συμπεριφοράς υποκείμενων τίτλων. Η εξίσωση $dS = a(S,t)dt \ + b(S,t)dz$ όπου dz αποτελεί μία Wiener διαδικασία, και a και b αποτελούν συναρτήσεις του S και του t. Η τιμή της μετοχής S έχει ρυθμό μεταβολής a και διακύμανση b^2.

Το Λήμμα του Ito (Ito's Lemma)

Εάν μία στοχαστική διαδικασία ακολουθείται από την μεταβλητή x, το Ito's Lemma αναλύει την διαδικασία που ακολουθείται από μία συνάρτηση $G(x,t)$ του x. Το λήμμα του Ito παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση παράγωγων χρεογράφων. Αυτό συμβαίνει διότι η τιμή ενός παραγώγου, αποτελεί μία συνάρτηση στοχαστικών μεταβλητών, της τιμής του χρεογράφου, και του χρόνου. Έστω ότι η αξία της μετοχής S ακολουθεί μία διαδικασία Ito τότε $dS = a(S,t)dt + b(S,t)dz$ όπου dz αποτελεί μία Wiener διαδικασία και α και b αποτελούν συναρτήσεις του S και του t. Η τιμή της μετοχής S έχει ρυθμό μεταβολής α και διακύμανση b^2.

Το Λήμμα του Ito δείχνει ότι η συνάρτηση $G(x,t)$ ακολουθεί την εξής διαδικασία :

$$dG = \left(\frac{dG}{dt} + \frac{dG}{dx}a + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}b^2\right)dt + \frac{dG}{dx}bdz \tag{12}$$

Όπου $a = \frac{dG}{dt} + \frac{dG}{dx}a + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}b^2$ και $b^2 = \left(\frac{dG}{\mathrm{dx}}b\right)^2$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Ito γίνεται η υπόθεση ότι $dG = \ln S$, όπου S η τιμή της μετοχής. Συνεπώς προκύπτει ότι $\frac{dG}{dt} = 0$, $\frac{dG}{dS} = \frac{1}{S}$, $\frac{d^2G}{dS^2} = -\frac{1}{S}$, και η εξίσωση (18) μετασχηματίζεται ως:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \tag{13}$$

Συνεπώς αν θεωρηθεί ένα χρονικό διάστημα $[0,t]$ για να βρεθεί η μεταβολή dG συνεπάγεται ότι :

$$\begin{aligned} G_t - G_0 &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{t}\varepsilon \Rightarrow lnS_t - lnS_0 \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{t}\varepsilon \Rightarrow lnS_t \\ &= lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{t}\varepsilon \Rightarrow S_t \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{t}\varepsilon} \end{aligned} \tag{14}$$

Μέθοδος Monte Carlo

Η μέθοδος Monte Carlo περιλαμβάνει κατά κύριο λόγο στοχαστικές διαδικασίες. Κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η χρήση τυχαίων αριθμών για την επίλυση προβλημάτων, μέσω προσομοίωσης. Οι μέθοδοι αυτοί αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο το οποίο εφαρμόζεται σε πολλούς επιστημονικούς τομείς. Στα οικονομικά χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων που διέπονται από αβεβαιότητα. Προκύπτει το ερώτημα, γιατί οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούνται σε τόσο μεγάλο βαθμό. Η απάντηση είναι ότι η χρησιμοποίηση των μεθόδων Monte Carlo έχουν ως στόχο τη μοντελοποίηση προβλημάτων, και βοηθούν στην ανάλυση περίπλοκων συστημάτων, που χωρίς την χρήση των αυτών των μεθόδων θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο να βγουν συμπεράσματα. Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που αφορούν μικρό αριθμό μεταβλητών είναι απλή συγκριτικά με παρόμοια προβλήματα που αφορούν εκατοντάδες ή χιλιάδες μεταβλητές. Η μέθοδος υπολογίζει διαφορετικά δειγματικά μονοπάτια. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός Monte Carlo πειράματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Κώδικας Matlab

```
The code that simulates two correlated assets

%% Correlated stock price
CurrentPrice = [50 100];        %Initial Prices of the stock and labor
incom
Corr = [1 0.5; 0.5 1];          %Correlation Matrix
T = 30;                         %Number of days to simulate = 30days
n = 100000;                     %Number of simulations
dt = 1/30;                      %Time step (1month = 30days)
m=[0.06 0.01];                  %Expected rate of return
sigma=[0.1 0.1];                %Volatility


%% Define storages
SimulStockPrice=zeros(T,n);      %Simulated Price of Stock
SimulPriceA(1,:)=CurrentPrice(1);
SimulLaborIncome=zeros(T,n);     %Simulated Price of Labor Income
SimulLaborIncome(1,:)=CurrentPrice(2);

%% Generating the paths of stock price and labor income by Geometric
Brownian Motion
UpperTriangle=chol(Corr);      %UpperTriangle Matrix by Cholesky
decomposition

for i=1:n
   Wiener=randn(T-1,2);
   CorrWiener=Wiener*UpperTriangle;
   for j=2:T
     SimulStockPrice(j,i)=SimulStockPrice(j-1,i)*exp((m(1)-
sigma(1)^2/2)*dt+sigma(1)*sqrt(dt)*CorrWiener(j-1,1));
     SimulLaborIncome(j,i)=SimulLaborIncome(j-1,i)*exp((m(2)-
sigma(2)^2/2)*dt+sigma(2)*sqrt(dt)*CorrWiener(j-1,2));
   end
end
```