ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
Π.Μ.Σ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία

«Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με Τεκμαρτό Τριωνυμικό Δέντρο»

Νασάι Μαρινέλα

Επιβλέπων Καθηγητής: Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Επιτροπή: Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Φεβρουάριος 2021

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική παρουσιάζει ένα μοντέλο πλέγματος, αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω της κατασκευής τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου. Βασικός σκοπός είναι να κατασκευαστεί ένα μοντέλο μέσω του οποίου θα ενσωματώνεται η πληροφορία της τεκμαρτής μεταβλητότητας και θα το καθιστά πιο ακριβές στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης.

Αρχικά, παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή για την ανάγκη εύρεσης ενός πιο αποδοτικού μοντέλου αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης, και αναλύεται το πρόβλημα που δημιουργείται με την χρήση της σταθερής μεταβλητότητας σε προϋπάρχοντα μοντέλα. Ακολουθεί η θεωρητική ανάλυση ξεκινώντας από το απλό διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης συνεχίζοντας με το απλό τριωνυμικό μοντέλο ως ένα διωνυμικό δυο βημάτων, και φτάνοντας στην κατασκευή ενός τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου για την αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

Με βάση την θεωρητική ανάλυση δημιουργούνται οι κατάλληλοι αλγόριθμοι για να γίνει η εμπειρική μελέτη στο μοντέλο. Για ένα δείγμα ιστορικών ημερών συλλέγονται τα διαθέσιμα δικαιώματα προαίρεσης, εκτιμάται η τεκμαρτή μεταβλητότητα και δημιουργείται το τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο. Αποτιμώντας τα δικαιώματα του δείγματος με τα παραπάνω μοντέλα, συμπεραίνουμε ότι το τελευταίο πρόκειται για ένα πιο ευέλικτο και αποτελεσματικό μοντέλο αποτίμησης των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Επίσης, μπορεί να επεκταθεί και στην αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου καθώς κατασκευάζεται σε διακριτό χρόνο.

Λέξεις Κλειδιά

Δικαιώματα Προαίρεσης, Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης, Σταθερή Μεταβλητότητα, Τεκμαρτή Μεταβλητότητα, Επιφάνεια Μεταβλητότητας, Μοντέλο Black-Scholes, Διωνυμικό Δέντρο, Τριωνυμικό Δέντρο, Τεκμαρτό Τριωνυμικό Δέντρο, Εμπειρική Μελέτη, Εκτίμηση Παραμέτρων.

ABSTRACT

This thesis presents an options valuation lattice model through the construction of an implied trinomial tree. The main purpose is to construct a model in which the information provided by implied volatility will be integrated making it more accurate for the valuation of options.

Firstly, we present a brief historical review towards the need to find a more efficient option pricing model, secondly we analyze the problems that arise by using constant volatility in pre-existing models. We proceed with the theoretical analysis of the models starting from the binomial valuation model, continuing with the trinomial tree model as a two step binomial, and reaching at the main topic, the construction of an implied trinomial tree for the valuation of European call and put options.

Based on the theoretical analysis, the appropriate algorithms are created in order to conduct the empirical study. For a sample of historical days, the available call and put options are collected, the implied volatility is estimated and finally the implied trinomial tree is constructed. After valuing the sample options via the above models, we conclude that the implied trinomial tree model is more flexible and effective for valuing European call and put options. Also, it can be extended to the valuation of American type options since it refers to discrete time.

Key Words

Options, Options Valuations Models, Constant Volatility, Implied Volatility, Volatility Surface, Black-Scholes Model, Binomial Tree, Trinomial Tree, Implied Trinomial Tree, Empirical Study, Parameter Estimation

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Δικαιώματα Προαίρεσης

Οι συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης (Options) αποτελούν μια από τις πιο γνωστές κατηγορίες παραγώγων. Είναι συμβόλαια που αφορούν μελλοντικές αγοροπωλησίες χρεογράφων, παρόμοια με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ). Η βασική διαφορά μεταξύ τους είναι ότι τα δικαιώματα προαίρεσης δίνουν στον κάτοχο τους το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να ζητήσει την εκπλήρωση της συμφωνίας. Συγκεκριμένα:

- Ο αγοραστής του δικαιώματος (holder), έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, έναντι καταβολής αρχικού ασφαλίστρου (Premium) να αγοράσει ή να πουλήσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο (Underlying Asset), σε μια συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης (Strike Price) έως μια καθορισμένη ημερομηνία λήξης (Expiration Date).
- Ο πωλητής του δικαιώματος (writer), λαμβάνει το αρχικό ασφάλιστρο (Premium), ενώ αποκτά την υποχρέωση να λάβει ή να παραδώσει την υποκείμενη αξία στον αγοραστή αν εκείνος επιλέξει να ασκήσει το δικαίωμα του.

<u>Συναλλαγές Δικαιωμάτων</u>

1. Σε ρυθμιζόμενες αγορές (Exchange-traded options) όπως είναι το χρηματιστήριο, όπου οι συμβάσεις που διαπραγματεύονται έχουν τυποποιημένη μορφή και διακανονίζονται μέσω ενός γραφείου εκκαθάρισης (clearing house) το οποίο είναι εγγυημένο από το Option Clearing Corporation (OCC).

2. Σε Εξωχρηματιστηριακές αγορές (Over-the-counter). Αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων. Οι όροι των συμβάσεων είναι απεριόριστοι και προσαρμοσμένοι στις ανάγκες του κάθε αντισυμβαλλόμενου. Συνήθως ο εκδότης των δικαιωμάτων είναι καλά κεφαλαιοποιημένο ίδρυμα.

<u>Βασικά Στοιχεία</u>

1. ***<u>Υποκείμενο Περιουσιακό Στοιχείο (Underlying Asset).</u>***

   Είναι ένας τίτλος βάσει του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα και ο κάτοχος του έχει το δικαίωμα να το αγοράσει η να το πουλήσει ανάλογα με το είδος δικαιώματος που κατέχει. Ο τίτλος μπορεί να είναι μετοχή, αγαθό ή ακόμα και χρηματιστηριακός δείκτης.

2. ***Μέγεθος Συμβολαίου (Contract Size).***

Αφορά το μέγεθος του συμβολαίου του δικαιώματος. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει τον αριθμό των μεριδίων του εκάστοτε περιουσιακού στοιχείου που καλύπτει το κάθε δικαίωμα. Παραδείγματος χάριν, στο χρηματιστήριο Αθηνών ένα συμβόλαιο δικαιωμάτων με υποκείμενο τίτλο μετοχές μιας εταιρίας αποτελείται από 100 μετοχές έκαστο.

3. ***Ημερομηνία Λήξης (Maturity / Expiration Date), T***

Αφορά το χρονικό διάστημα μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Μέσα σε αυτό το διάστημα μπορεί το δικαίωμα να εξασκηθεί, ύστερα λήγει.

4. ***Τιμή Εξάσκησης (Strike / Exercise Price), K***

Είναι η τιμή που έχει οριστεί από την αρχή στο κάθε συμβόλαιο, σύμφωνα με την οποία ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς/πώλησης, εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα, μπορεί να αγοράσει/πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο.

5. ***Ασφάλιστρο / Τιμή Δικαιώματος (Premium)***

Είναι η χρηματική αξία που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή για να πάρει στην κατοχή του το δικαίωμα. Το ποσό αυτό καταβάλλεται ανεξάρτητα από το αν θα εξασκηθεί το δικαίωμα. Χωρίς το ασφάλιστρο τα δικαιώματα προαίρεσης δίνουν ή κέρδος ή τίποτα, δεν υπάρχει ζημία γεγονός που τα καθιστά προϊόντα arbitrage. Επομένως, η καταβολή του ασφαλίστρου επιφέρει ισορροπία. Στην περίπτωση που ο κάτοχος του δικαιώματος επιλέξει να μην εξασκήσει το δικαίωμα τότε χάνει το ασφάλιστρο και είναι η μεγαλύτερη ζημία που μπορεί να έχει.
Το ποσό αυτό καθορίζεται από την προσφορά και την ζήτηση στην αγορά την οποία διαπραγματεύεται.

6. ***Το είδος του δικαιώματος.***

Τα είδη του δικαιώματος μπορεί να είναι δυο:

Δικαίωμα Αγοράς – Call Option	Δικαίωμα Πώλησης – Put Option
Είναι μια συμφωνία που δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο μέχρι την ημερομηνία λήξης με συγκεκριμένη τιμή.	Είναι μια συμφωνία που δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο μέχρι την ημερομηνία λήξης για συγκεκριμένη τιμή.

7. ***<u>Τύπος Δικαιώματος (Option Type).</u>***

Οι όροι εξάσκησης του δικαιώματος διαφέρουν ανάλογα με τον τύπο του δικαιώματος:

Αμερικανικά Δικαιώματα American Options	Δικαιώματα που μπορούν να εξασκηθούν σε όλη την διάρκεια μέχρι την λήξη του δικαιώματος.
Ευρωπαϊκά Δικαιώματα European Options	Δικαιώματα που μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην λήξη.
Εξωτικά Δικαιώματα Exotic Options	Δικαιώματα πιο σύνθετα, με περισσότερες παραλλαγές στον τρόπο πληρωμής και εξάσκησης τους.
Vanilla Options	Δικαιώματα που δεν είναι εξωτικά, δηλαδή, που η μορφή τους είναι πιο απλή.
Δικαιώματα Συναλλάγματος Currency Options	Δικαιώματα που δίνουν στον κάτοχο την ευχέρεια να αγοράσει/πουλήσει ένα συγκεκριμένο νόμισμα, σε συγκεκριμένη τιμή κατά τη διάρκεια συγκεκριμένης χρονικής περιόδου, για την κάλυψη έναντι του συναλλαγματικού κινδύνου.
Dual Currency Options	Δικαιώματα που δίνουν στον κάτοχο την ευχέρεια διακανονισμού σε ένα από τα δύο συμφωνηθέντα νομίσματα ανάλογα με την προτίμηση του αγοραστή σου συμβολαίου.
Bermudan Options	Δικαιώματα που μπορούν να εξασκηθούν μόνο σε συγκεκριμένες ημερομηνίες πριν ή κατά την λήξη τους.
Barrier Options	Δικαιώματα που μπορούν να εξασκηθούν μόνο αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου ξεπερνάει ένα συγκεκριμένο επίπεδο.
Basket Options	Είναι το συμβόλαιο που πληρώνει με βάση τη συνολική αξία ενός καλαθιού χρηματοοικονομικών στοιχείων (underlying basket).
Equity Basket Options	Δικαιώματα επί ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από περισσότερες από μια μετοχές ή χρηματιστηριακούς δείκτες.
Double Options	Δικαιώματα που δίνουν στον κάτοχο την ευχέρεια της αγοράς/πώλησης ενός τίτλου σε μια καθορισμένη τιμή. Η εξάσκηση του δικαιώματος πώλησης επιφέρει την λήξη του δικαιώματος αγοράς και η εξάσκηση του δικαιώματος αγοράς επιφέρει λήξη του δικαιώματος πώλησης.
Index Options	Δικαιώματα που έχουν σαν υποκείμενο τίτλο ένα χρηματιστηριακό δείκτη, επιτρέποντας στον επενδυτή να αγοράσει/πουλήσει το καλάθι που αντιπροσωπεύει ένας χρηματιστηριακός δείκτης σε συγκεκριμένη τιμή και ημέρα.

Ορολογία:

S_0: Τρέχουσα τιμή υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή t = 0(Spot Price)

K: Τιμή Εξάσκησης (Strike Price)

T: Ημερομηνία Λήξης του δικαιώματος (Maturity / Expiration Date)

r: Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (Risk-Free Rate)

D: Παρούσα αξία των μερισμάτων κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος (Dividend)

C: Αξία Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς (American call option premium)

P: Αξία Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης (American put option premium)

c: Αξία Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (European call option premium)

p: Αξία Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης (European put option premium)

Στην συνέχεια, θα αναλυθούν οι βασικές θέσεις των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης, καθώς και η επίδραση (θετική +, αρνητική -, άγνωστη ?) βασικών μεταβλητών των δικαιωμάτων στην τιμή των Αμερικανικών και Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή, μεταβάλλοντας κάθε φορά μια μεταβλητή ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές (ceteris paribus).

Βασικές Θέσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Θέση Αγοράς ~ Long Position

Long Call

Είναι η θέση αγοράς (long position) ενός δικαιώματος αγοράς (call option). Αφορά τον αγοραστή του δικαιώματος αγοράς, ο οποίος καταβάλει το αρχικό ασφάλιστρο c και έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, στη λήξη να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (K) αντί για την αγοραία τιμή (S_T).

Την t = 0:

Ο αγοραστής του δικαιώματος καταβάλει το αρχικό ασφάλιστρο (c).

Στην λήξη t = T:

- Αν $S_T > K$, το δικαίωμα αγοράς εξασκείται και ο κάτοχος αγοράζει τον υποκείμενο τίτλο πιο φθηνά, μπορεί να τον πουλήσει πιο ακριβά στην αγορά και να βγάλει κέρδος ίσο με $S_T - K$.
- Αν $S_T < K$, το δικαίωμα δεν εξασκείται, λήγει και δεν βγάζει κανένα κέρδος.

Payoff

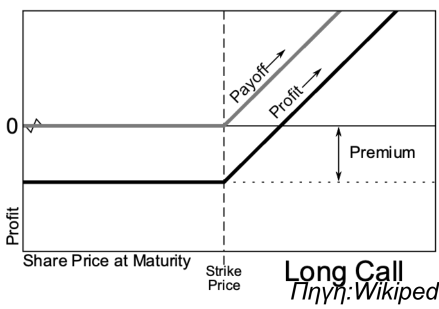
$$max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0 \quad , & S_T < K \end{cases}$$

Profit / Loss

$$(P/L)_T = -c + max\{S_T - K, 0\}$$

Σχήμα 1

Θέση αγορά σε δικαίωμα αγοράς



Πηγή:Wikipedia

Long Put

Είναι η θέση αγοράς (long position) ενός δικαιώματος πώλησης (put option). Αφορά τον αγοραστή του δικαιώματος πώλησης, ο οποίος καταβάλει το αρχικό ασφάλιστρο p και έχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, στη λήξη να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (K) αντί για την αγοραία τιμή (S_T).

Την t = 0:

Ο αγοραστής του δικαιώματος καταβάλει το αρχικό ασφάλιστρο (p).

Στην λήξη t = T:

- Αν $S_T < K$, το δικαίωμα πώλησης εξασκείται και ο κάτοχος πουλάει τον υποκείμενο τίτλο πιο ακριβά, μπορεί να τον αγοράσει πιο φθηνά στην αγορά και να βγάλει κέρδος ίσο με $K - S_T$.
- $S_T > K$, το δικαίωμα δεν εξασκείται, λήγει και δεν βγάζει κανένα κέρδος.

Payoff

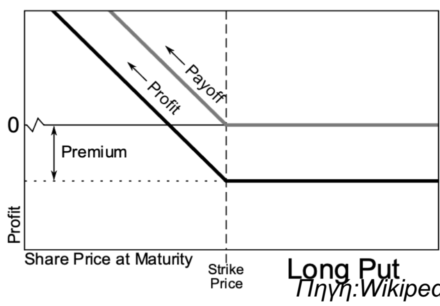
$$max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & S_T < K \\ 0 \quad , & S_T > K \end{cases}$$

Profit / Loss

$$(P/L)_T = -p + max\{K - S_T, 0\}$$

Σχήμα 2

Θέση αγορά σε δικαίωμα πώλησης



Πηγή:Wikipedia

Θέση Πώλησης ~ Short Position

Short Call

Είναι η θέση πώλησης (short position) ενός δικαιώματος αγοράς (call option). Αφορά τον πωλητή του δικαιώματος αγοράς, ο οποίος εισπράττει το αρχικό ασφάλιστρο c και έχει την υποχρέωση στη λήξη να καλύψει τις ανάγκες του δικαιώματος σε περίπτωση που ο κάτοχος το εξασκήσει ,δηλαδή, να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (K).

Την t = 0:

Ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει το αρχικό ασφάλιστρο (c).

Στην λήξη t = T:

- Αν $S_T > K$, το δικαίωμα αγοράς εξασκείται από τον κάτοχο του και ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να του πουλήσει για K, πιο φθηνά κάτι που στην αγορά είναι πιο ακριβό και έχει ζημία ίση με $S_T - K$.
- Αν $S_T < K$, το δικαίωμα δεν εξασκείται, λήγει και μένει μόνο το αρχικό ασφάλιστρο δεν βγάζει κανένα επιπλέον κέρδος.

Payoff

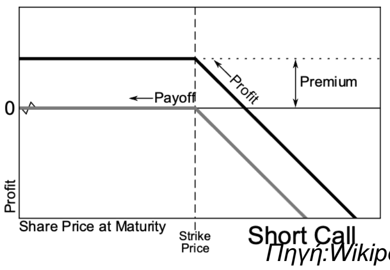
$$-max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & S_T > K \\ 0, & S_T < K \end{cases}$$

Profit / Loss

$$(P/L)_T = c - max\{S_T - K, 0\}$$

Σχήμα 3

Θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς



Πηγή:Wikipedia

Short Put

Είναι η θέση πώλησης (short position) ενός δικαιώματος πώλησης (put option). Αφορά τον πωλητή του δικαιώματος πώλησης, ο οποίος εισπράττει το αρχικό ασφάλιστρο p και έχει την υποχρέωση στη λήξη να καλύψει τις ανάγκες του δικαιώματος σε περίπτωση που ο κάτοχος το εξασκήσει ,δηλαδή, να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (K).

Την t = 0:

Ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει το αρχικό ασφάλιστρο (p).

Στην λήξη t = T:

- Αν $S_T < K$, το δικαίωμα πώλησης εξασκείται από τον κάτοχο του και ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να αγοράσει για K, πιο ακριβά κάτι που στην αγορά είναι πιο φθηνό (S_T) και έχει ζημία ίση με $K - S_T$.
- $S_T > K$, το δικαίωμα δεν εξασκείται, λήγει και μένει μόνο το αρχικό ασφάλιστρο δεν βγάζει κανένα επιπλέον κέρδος.

Payoff

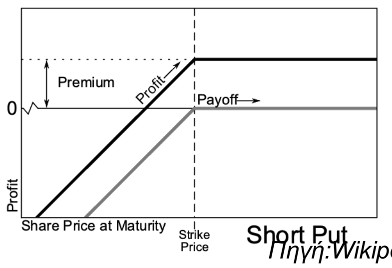
$$-max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & S_T < K \\ 0, & S_T > K \end{cases}$$

Profit / Loss

$$(P/L)_T = p - max\{K - S_T, 0\}$$

Σχήμα

Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης



Πηγή:Wikipedia

<u>Παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων.</u>

<table>
<tr><th>Μεταβλητή</th><th>Τιμή Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς
c</th><th>Τιμή Ευρωπαϊκού Δικαιώματος πώλησης
p</th><th>Τιμή Αμερικανικού Δικαιώματος Αγοράς
C</th><th>Τιμή Αμερικανικού Δικαιώματος Πώλησης
P</th></tr>
<tr><td>Τρέχουσα τιμή μετοχής
(S_0)</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td colspan="5">Η τιμή των δικαιωμάτων επηρεάζεται θετικά από την εσωτερικής αξίας (intrinsic value), $max\{S_T - K, 0\}$ στα δικαιώματα αγοράς και $max\{K - S_T, 0\}$ στα δικαιώματα πώλησης. Όσο αυξάνεται η S_0, αυξάνεται η εσωτερική αξία των δικαιωμάτων αγοράς και μειώνεται η εσωτερική αξία των δικαιωμάτων πώλησης και αντίστροφα.</td></tr>
<tr><td>Τιμή Εξάσκησης
(K)</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="5">Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω, όσο αυξάνεται η K, μειώνεται η εσωτερική αξία των δικαιωμάτων αγοράς και κατ' επέκταση η τιμή του δικαιώματος και αυξάνεται η εσωτερική αξία των δικαιωμάτων πώλησης.</td></tr>
<tr><td>Χρόνος έως τη λήξη
(T)</td><td>?</td><td>?</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="5">Στα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς και πώλησης λόγω της ευελιξίας στην εξάσκηση τους όσο αυξάνεται η λήξη T αυξάνεται και η αξία του δικαιώματος. Ενώ στα Ευρωπαϊκά λόγω του περιορισμού της αναγκαστικής εξάσκησης μόνο στην λήξη είναι αβέβαιη η αξία. Παρόλο που συνήθως συνεπάγεται αύξηση της αξίας στην περίπτωση κατανομής μερίσματος υφίσταται ισόποση μείωση της τιμής γεγονός που λειτουργεί εις βάρους του κατόχου.</td></tr>
<tr><td>Μεταβλητότητα μετοχής
(σ)</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="5">Μετρά την αβεβαιότητα για τις μελλοντικές κινήσεις της τιμής της μετοχής. Ένας κάτοχος δικαιώματος αγοράς όσο αυξάνεται η τιμή της μετοχής κερδίζει πολλά αλλιώς χάνει μέχρι το ασφάλιστρο. Ενώ ένας κάτοχος δικαιώματος πώλησης όσο μειώνεται η τιμή της μετοχής κερδίζει πολλά αλλιώς χάνει μέχρι το ασφάλιστρο. Επομένως αφού δεν υπάρχει ζημία στις μεγάλες μεταβολές της τιμής της μετοχής, η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται.</td></tr>
<tr><td>Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου
(r)</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td></tr>
<tr><td colspan="5">Με την αύξηση του επιτοκίου επωφελούνται τα δικαιώματα αγοράς καθώς το ποσό που διατίθεται να καταβληθεί για την αγορά της μετοχής μπορεί να επενδυθεί με υψηλό επιτόκιο έως την λήξη και ο κάτοχος να βγάλει κέρδος. Ενώ τα δικαιώματα πώλησης είναι λιγότερο ελκυστικά καθώς χωρίς την άμεση πώλησης της μετοχής ο κάτοχος χάνει το επιπλέον κέδρος που θα μπορούσε να επωμιστεί.</td></tr>
<tr><td>Π.Α Μερισμάτων
(D)</td><td>–</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="5">Η διανομή μερίσματος προκαλεί μείωση της τιμής της μετοχής επομένως βάσει της εσωτερικής αξίας που αναφέρθηκε νωρίτερα, μειώνεται η αξία των δικαιωμάτων αγοράς και αυξάνεται η αξία των δικαιωμάτων πώλησης.</td></tr>
</table>

1.2 Περιγραφή του Προβλήματος

Τα σύνθετα χρηματοοικονομικά μέσα όπως είναι τα παράγωγα και ειδικότερα τα δικαιώματα προαίρεσης, ξεκίνησαν να εμπορεύονται με ραγδαίους ρυθμούς τα τελευταία χρόνια και συνεχίζουν να κερδίζουν δημοτικότητα καθώς συνεχώς αυξάνεται ο όγκος και η ποικιλία των δικαιωμάτων που συναλλάσσονται παγκοσμίως. Η έρευνα σχετικά με την χρήση τους καθώς και τα μαθηματικά μοντέλα αποτίμησης τους, ξεκίνησε ύστερα από το μαθηματικό μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων των Black & Scholes (1973).

Η τιμή που θα αποδοθεί στο δικαίωμα πρέπει να ακολουθεί μια μεσαία πορεία όπου και οι δυο αντισυμβαλλόμενοι να συμφωνούν και να θεωρούν ότι το τελικό κέρδος είναι το αποδεκτό για αυτούς. Οι μέθοδοι αποτίμησης είναι μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούν ορισμένες μεταβλητές για τον υπολογισμό της θεωρητικής τιμής ενός δικαιώματος, δηλαδή είναι μια εκτίμηση του τι αξίζει το δικαίωμα χρησιμοποιώντας όλες τις γνωστές πληροφορίες. Η δυσκολία στην αποτίμηση ενός δικαιώματος εντοπίζεται στην δυσκολία αποτίμησης οποιουδήποτε περιουσιακού στοιχείου με αβέβαια έσοδα, έτσι ώστε να μπορέσει να υπολογιστεί η τιμή του στην λήξη, να προεξοφληθούν οι τελικές χρηματοροές και κατά συνέπεια να υπολογιστεί η παρούσα αξία του δικαιώματος αγοράς ή πώλησης ώστε να δοθεί το κατάλληλο αρχικό ασφάλιστρο.

Η αποτίμηση ενός δικαιώματος αποδείχθηκε ιδιαίτερα σημαντικό εργαλείο για επενδύσεις στις οποίες εμπλέκονται συναλλαγές δικαιωμάτων προαίρεσης και έχει γίνει πλέον μια από τις βασικές τεχνικές χρηματοδότησης. Ένα παράδειγμα, για την κατανόηση της σημασίας της σωστής τιμολόγησης είναι η κρίση του 2008-2009, η οποία αποδόθηκε στην λανθασμένη χρήση μοντέλων συναλλαγών, αν και κανένα από τα μοντέλα δεν είναι τέλειο, η επίγνωση των περιορισμών μπορεί να βοηθήσει στην λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων και στην αποφυγή δαπανηρών σφαλμάτων που μπορεί να οδηγήσουν σε τεράστιες απώλειες. Επομένως είναι λογικό να επιθυμούν και να αναζητούν μοντέλα αποτίμησης που προσεγγίζουν με τον βέλτιστο τρόπο τις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων καθώς γνωρίζοντας αυτήν την εκτίμηση θα μπορούσαν να προσαρμόσουν τις στρατηγικές και τα χαρτοφυλάκια τους για μια πιο κερδοφόρα επένδυση.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος, όπου κάθε μία έχει ορισμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα έναντι της άλλης. Αν και το μοντέλο των Black & Scholes (1973) εξακολουθεί να είναι από τα πιο διαδεδομένα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων, λόγω της υπόθεσης τους περί σταθερής μεταβλητότητας παρουσιάζεται ασυμφωνία μεταξύ των τιμών που υπολογίζονται με τον τύπο των Black & Scholes και των τιμών της αγοράς των δικαιωμάτων, καθώς η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να ισχύσει στην πραγματικότητα. Συνεπώς, για να προσαρμοστούν οι τιμές των δικαιωμάτων σύμφωνα με την αγορά, προτάθηκαν πολλές νέες προσεγγίσεις. Μια εκ των οποίων είναι η μέθοδος αποτίμησης δικαιωμάτων με χρήση τριωνυμικών τεκμαρτών δέντρων των Derman, Kani, Chriss (1996), η οποία είναι μια ανάλογη επέκταση των τεκμαρτών διωνυμικών δέντρων που πρότειναν οι Derman, Kani (1994) και Rubinstein (1994).

Βασίζεται κυρίως στο μοντέλο των τριωνυμικών δέντρων του Boyle (1986), μεταγενέστερο των διωνυμικών δέντρων που όμως επιτρέπει στην τιμή ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε μια χρονική περίοδο να ανέβει, να κατέβει ή να παραμείνει η ίδια με ορισμένες πιθανότητες. Καθώς επίσης και στο τεκμαρτό μοντέλο, στο οποίο δεν υπάρχει η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας και μπορεί να ταιριάζει το ¨χαμόγελο¨ της μεταβλητότητας (volatility smile) και να συγκλίνει στο ίδιο συνεχές όριο με τα διωνυμικά δέντρα. Επιπλέον δίνει την επιλογή για μια ελεύθερη επιλογή των υποκείμενων τιμών σε κάθε κόμβο ενός δέντρου, τον λεγόμενο χώρο καταστάσεων (state space). Αυτό επιτρέπει την προσαρμογή του volatility smile σε περιπτώσεις όπως, ασυνέπεια, παραβιάσεις του arbitrage ή άλλες τιμές της αγοράς που οδηγούν σε ασυνήθιστες κατανομές πιθανότητας στα διωνυμικά δέντρα.

1.3 Ιστορική Αναδρομή

Η ιστορία των δικαιωμάτων προαίρεσης ξεκινάει από την αρχαία Ελλάδα, με τον πρώτο αγοραστή ενός δικαιώματος να είναι ο μαθηματικός και φιλόσοφος Θαλής ο Μιλήσιος. Ύστερα παρατηρούνται διάφορα παραδείγματα εξωχρηματιστηριακών συναλλαγών με την μορφή δικαιώματος, καταφέρνοντας να φτάσουμε στο 1973 και στην ίδρυση του Chicago Board Option Exchange (CBOE) από το Chicago Board of Trade, το οποίο δημιούργησε τυποποιημένες μορφές συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης. Έκτοτε, η εμπορική δραστηριότητα και το ακαδημαϊκό ενδιαφέρων έχουν αυξηθεί. Παρατηρείται ραγδαία ανάπτυξη στα δικαιώματα προαίρεσης καθώς επίσης έντονη εξέλιξη έχει περάσει και η τιμολόγηση των δικαιωμάτων καταφέρνοντας να γίνει μια από τις βασικές τεχνικές στον χρηματοοικονομικό τομέα.

Επειδή οι τιμές των δικαιωμάτων εξαρτώνται από έναν αριθμό διαφορετικών μεταβλητών εκτός από την αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, είναι πολύπλοκο να υπολογιστεί με ακρίβεια η αξία τους. Υπάρχουν πολλά μοντέλα τιμολόγησης που χρησιμοποιούνται, το καθένα προσπαθεί να αποδώσει μια εξέλιξη του προγενέστερου μοντέλου και να πλησιάσει τις πραγματικές τιμές της αγοράς.

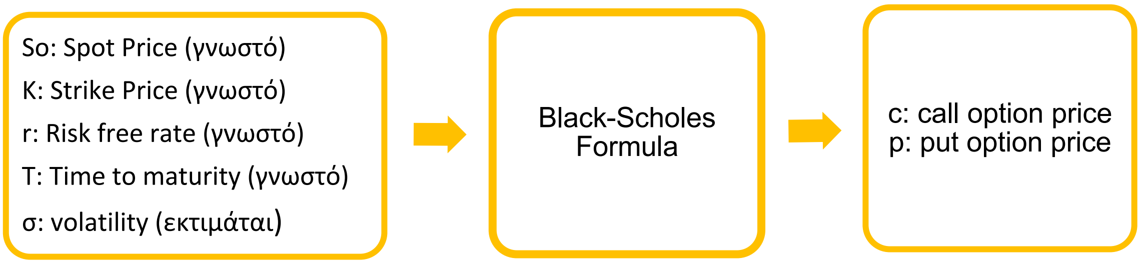
- **Black-Scholes (1973)**

  Το μοντέλο Black-Scholes είναι επίσης γνωστό και ως το μοντέλο Black-Scholes-Merton. Είναι ένα μαθηματικό μοντέλο για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, αναπτύχθηκε από τους, Fischer Black, Myron Scholes και Robert C. Merton.

  Παρουσιάστηκε το 1973 με τίτλο "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Journal of Political Economy. Το 1997 οι Scholes και Merton έλαβαν το βραβείο Νόμπελ των Οικονομικών Επιστημών. Παρόλα τα μοντέλα που ακολούθησαν συνεχίζει μέχρι και σήμερα να είναι το πιο διάσημο.

Τι είναι:

Είναι ένα συνεχές μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της θεωρητικής αξίας των δικαιωμάτων. Αφορά Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης χωρίς μέρισμα. Είναι απλό και έτοιμο μοντέλο, χρησιμοποιεί πέντε μεταβλητές εισόδου στο μοντέλο και προκύπτει η τιμή του δικαιώματος.



Βασικές Υποθέσεις:

Αναφέρεται σε δικαιώματα τα οποία μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην λήξη (Ευρωπαϊκά δικαιώματα).

1. Η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brownian με συνεχή μετατόπιση και μεταβλητότητα, καθώς, και οι λογαριθμικές αποδόσεις τους διανέμονται κανονικά (lognormal).

2. Δεν καταβάλλονται μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

3. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου είναι γνωστά και σταθερά.

4. Δεν υπάρχουν φόροι και κόστος συναλλαγών.

5. Η αγορά είναι αποτελεσματική .

6. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες Arbitrage.

Πρόβλημα:

Παρόλο που το μοντέλο παρέχει μία γρήγορα υπολογισμένη τιμή για τα δικαιώματα, η τιμή τους δεν παύει να είναι εξαρτημένη από τους υποκείμενους παράγοντες που θεωρούνται ότι είναι γνωστοί και σταθεροί σε όλη την διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

Δυστυχώς, στην πραγματικότητα:

> Οι παράγοντες που θεωρούνται σταθεροί στο μοντέλο ενδέχεται να αλλάξουν σε σύντομη χρονική διάρκεια και με υψηλή διακύμανση. Γεγονός που οδηγούν σε υψηλές διακυμάνσεις στις τιμές των δικαιωμάτων και κατ' επέκταση, σε ευκαιρίες arbitrage.

> Οι μεγάλες μεταβολές στις τιμές των υποκείμενων τίτλων παρατηρούνται συχνότερα και οδηγεί σε μεταβολές στις αποτιμήσεις των δικαιωμάτων. Μπορεί να επιφέρει καταστροφικά αποτελέσματα, γι΄αυτό θα πρέπει να γίνεται συχνή παρακολούθηση της μεταβλητότητας.

> Οι τιμές των υποκείμενων τίτλων δεν ακολουθούν πιστά την lognormal κατανομή όπως υποθέτει το μοντέλο. Οι πραγματικές κατανομές είναι ασύμμετρες (skewed) και οδηγούν σε υποτίμηση ή υπερτίμηση ενός δικαιώματος μέσω του μοντέλου Black-Scholes και οι επενδυτές μπορεί να οδηγηθούν σε απώλεια εάν ακολουθούν πιστά το μοντέλο και δεν παρακολουθούν τις αλλαγές στην μεταβλητότητα.

♦ **Cox, Ross and Rubinstein (1979)**

Η μέθοδος αποτίμησης δικαιωμάτων μέσω προσέγγισης διωνυμικού πλέγματος (binomial lattice approach) προτάθηκε αρχικά από τον Αμερικανό οικονομολόγο William F. Sharpe στην έκδοση Investments του 1978 και επισημοποιήθηκε το 1979 από τους John C. Cox, Stephen A. Ross και Mark E. Rubinstein (CRR) στο περιοδικό *Journal of Financial Economics* με τίτλο "Option pricing: A simplified approach".

Τι είναι:

Το βασικό μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein (1979), αποτελεί μια μέθοδο τιμολόγησης δικαιωμάτων διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών. Η ανάπτυξη του απαιτεί μόνο στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις, στηρίζεται στην υπόθεση πως δεν υπάρχει arbitrage και αποτελεί μια ειδική περίπτωση του μοντέλου Black-Scholes (1973) καθώς όσο ο αριθμός των βημάτων αυξάνεται το μοντέλο συγκλίνει στην φόρμουλα των Black-Scholes.

Το μοντέλο χρησιμοποιεί μια επαναληπτική διαδικασία μέσω γραφικής αναπαράστασης πιθανών εσωτερικών αξιών (intrinsic value) ενός δικαιώματος, επιτρέποντας τον καθορισμό κόμβων στο χρόνο κατά την περίοδο μεταξύ της ημερομηνίας αποτίμησης και της ημερομηνίας λήξης του δικαιώματος. Υπάρχουν δυο πιθανά αποτελέσματα για την τιμή του υποκείμενου τίτλου είτε να πάει προς τα πάνω είτε προς τα κάτω. Η αξία του δικαιώματος εξαρτάται από τις αντίστοιχες πιθανότητες ανόδου και καθόδου της τιμής του δικαιώματος.

Είναι ένα εύκολο και ευέλικτο μοντέλο και επιτρέπει στους επενδυτές να εκτιμήσουν πότε και εάν θα εξασκηθεί το δικαίωμα καθώς μια θετική αξία ευνοεί την εξάσκηση του δικαιώματος, ακόμα και πρόωρη στην περίπτωση των Αμερικανικών δικαιωμάτων.

Υποθέσεις:

- Μπορεί να πάρει μόνο δυο πιθανές τιμές το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, μια προς τα πάνω και μια προς τα κάτω.
- Το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο δεν πληρώνει μερίσματα κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος.
- Δεν υπάρχουν φόροι και έξοδα συναλλαγής.

Πρόβλημα:

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι πως το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μπορεί να λάβει μόνο μια από τις δυο πιθανές τιμές, γεγονός το οποίο δεν είναι ρεαλιστικό, αφού στην πραγματικότητα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε οποιοδήποτε εύρος, ακόμα και να παραμείνει σταθερή.

♦ Η μεθοδολογία των CRR επεκτάθηκε στην συνέχεια από διάφορους ερευνητές. Οι Richard J. Rendleman και Brit J. Bartter (1979) στο περιοδικό *Journal of Finance* με τίτλο "Two-State Option Pricing" εφάρμοσαν την μεθοδολογία στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης σε χρεόγραφα. Καθώς και οι Hull and White (1988) απέδωσαν ένα ελαφρώς τροποποιημένο μοντέλο διωνυμικού πλέγματος.

♦ **Boyle (1986)**

Ο Phelim Boyle το 1986 στο άρθρο του "Option Valuation Using a Three-Jump Process" που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *International Options Journals,* προχώρησε την μεθοδολογία των CCR ένα βήμα παραπέρα και πρότεινε ένα μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων τριών αλμάτων με τρείς πιθανότητες. Το λεγόμενο τριωνυμικό δέντρο.

Είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο βασισμένο στο διωνυμικό πλέγμα, όπου η τιμή του υποκείμενου τίτλου διαμορφώνεται ως ανασυνδυασμένο δέντρο όπου σε κάθε κόμβο η τιμή έχει τρείς πιθανές διαδρομές. Μπορεί να κινηθεί είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω είτε να παραμείνει αμετάβλητη σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, γεγονός που το καθιστά πιο σχετικό με πραγματικές καταστάσεις ζωής, καθώς, είναι πιθανό η αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου να μην αλλάξει για μια χρονική περίοδο.

Η αποτίμηση δικαιωμάτων με χρήση τριωνυμικού δέντρου θεωρείται ότι παράγει ακριβέστερα αποτελέσματα, και χρησιμοποιείται συνήθως όταν η υπολογιστική ταχύτητα ή οι πόροι δεν αποτελούν πρόβλημα.
Σε ένα μεταγενέστερο άρθρο του, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables" το 1988 έδειξε πως μπορεί να αναπτυχθεί ένα πλέγμα τριών διαστάσεων με πέντε άλματα για να εκτιμήσει τις επιλογές σε δύο υποκείμενες αξίες.

- **<u>Omberg (1988)</u>**

Ο Edward Omberg το 1988 στο άρθρο του “Efficient Discrete time Jump Process Models in Options Pricing” μελέτησε μια οικογένεια διεργασιών άλματος διακριτού χρόνου στην τιμολόγηση δικαιωμάτων. Εφαρμόστηκε η τεχνική του Gauss-Hermite στο οπισθοδρομικό πρόβλημα αναδρομικής ολοκλήρωσης ενός μοντέλου τιμολόγησης σύνθετων δικαιωμάτων και, ως αποτέλεσμα, ελήφθησαν διαδικασίες άλματος οποιασδήποτε παραγγελίας με γνωστές αριθμητικές ιδιότητες ακρίβειας για την αποτίμηση των επιλογών. Συγκεκριμένα, δημιούργησε μια «ακονισμένη» τριωνυμική διαδικασία που είναι σχεδόν πανομοιότυπη με την τριωνυμική διαδικασία του Boyle (1986).

- **<u>Dupire (1994)</u>**

Στο άρθρο του “Pricing with a Smile” ο Bruno Dupire έδειξε ότι μπορούμε από τις τιμές δικαιωμάτων της αγοράς να παράγουμε μια μοναδική διαδικασία διάχυσης (diffusion process) και να υποθέσουμε για τις τιμές στην αγορά των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων ότι η διαδικασία είναι αυτή η διαδρομή.

Στην πράξη, αυτό δείχνει πώς μπορεί να αναπτυχθεί μια σωστή τιμολόγηση για δικαιώματα Αμερικανικού τύπου ή που εξαρτώνται από την διαδρομή. Επιπλέον, αξιολογεί λεπτομερώς τον κίνδυνο αυτών των δικαιωμάτων και επιτρέπει να ενσωματωθούν σε μορφή τυποποιημένων Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων, το οποίο είναι ένα βασικό σημείο για πολλά χρηματοοικονομικά ιδρύματα και χρησιμοποιήθηκε ως βάση και για την μετέπειτα ανάπτυξη πιο αποτελεσματικών μεθόδων τιμολόγησης δικαιωμάτων.

- **<u>Derman and Kani (1994)</u>**

Οι Emanuel Derman και Iraj Kani αναλύουν το 1994 στο άρθρο τους “The Volatility Smile and Its Implied Tree” τις τεκμαρτές θεωρίες δέντρων. Επεκτείνουν την θεωρία των Black-Scholes (1973) ώστε να την καταστήσουν συνετή με την πραγματικότητα και το γεγονός ότι η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου δεν είναι σταθερή. Βασίζονται στην κατασκευή διωνυμικών δέντρων όπου η τοπική μεταβλητότητα διαφέρει από κόμβο σε κόμβο, καθιστώντας το δέντρο ευέλικτο, έτσι ώστε οι τιμές της αγοράς των δικαιωμάτων να ταιριάζουν.

Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουν πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το χαμόγελο της μεταβλητότητας (volatility smile) των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων όλων των λήξεων ώστε να εξάγουν συστηματικά ένα μοναδικό διωνυμικό δέντρο το οποίο θα λέγεται τεκμαρτό δέντρο και θα συγκλίνει περισσότερο στις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων.

Η μοναδικότητα των διωνυμικών αυτών δέντρων που προκύπτουν είναι συνήθως επιθυμητή. Μερικές φορές, ωστόσο, γίνεται μειονεκτική, επειδή η μοναδικότητα αφήνει ελάχιστο περιθώριο συμβιβασμού ή προσαρμογής.

- **Rubinstein (1994)**

Ο Mark Rubinstein στο άρθρο του με τίτλο “Implied Binomial Trees” που δημοσιεύτηκε το 1994 στο περιοδικό *Journal of Finance* αναπτύσσει μια νέα μέθοδο για την εξαγωγή των πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου από τις ταυτόχρονα παρατηρούμενες τιμές των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Έπειτα, με δεδομένα αυτές τις πιθανότητες, κατασκευάζεται ένα πλήρως καθορισμένο, ανασυνδυασμένο διωνυμικό δέντρο που με μία απλή αναδρομική διαδικασία επιλύεται ολόκληρο. Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει είναι ότι το τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο που προκύπτει βασίζεται σε ένα σύνολο τιμών της αγοράς των δικαιωμάτων που λήγουν σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία και δεν μπορεί να ταιριάζει με τις τιμές των δικαιωμάτων για πολλές λήξεις. Συνεπώς, δεν μπορεί ταυτόχρονα να καλύψει ένα πλήρες σύνολο δικαιωμάτων που διαπραγματεύονται σε μια δεδομένη αγορά.

Η αποτελεσματικότητα αυτών των συμπερασμάτων εξαρτάται από τέσσερις προϋποθέσεις:

1) Ένα ικανοποιητικό μοντέλο που συνδέει τις τιμές με τις επιθυμητές πληροφορίες.

2) Ένα μοντέλο που μπορεί να εφαρμοστεί έγκαιρα και με χαμηλό κόστος.

3) Σωστή μέτρηση των εξωγενών εισόδων που απαιτούνται από το μοντέλο.

4) Αποτελεσματικότητα των αγορών.

Στα τυπικά και τεκμαρτά διωνυμικά δέντρα, υπάρχει μόνο μια πιθανότητα διαδρομής για κάθε κόμβο. Με την γενίκευση βρίσκουμε κατανομές πιθανότητας διαδρομής για έναν δεδομένο τελικό κόμβο.

- **Derman, Kani, Chriss (1996)**

Το 1996 οι Emanuel Derman, Iraj Kani και Neil Chriss Goldman στο άρθρο τους “Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile” παρουσιάζουν τα τριωνυμικά δέντρα και μια επέκταση τους όπου προσπαθούν να ταιριάξουν την αστάθεια της μεταβλητότητας, τα λεγόμενα τεκμαρτά τριωνυμικά δέντρα. Είναι κατασκευασμένα όπως τα διωνυμικά δέντρα, δηλαδή, η τιμή του υποκείμενου τίτλου μπορεί να μετακινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω, όμως προστίθεται μία επιπλέον πιθανή μελλοντική τιμή, η σταθερή, δηλαδή, να μην αλλάξει η τιμή σε κάποιο χρονικό διάστημα, γεγονός που αντανακλά περισσότερο την πραγματική πορεία των τιμών. Τα δέντρα αυτά συγκλίνουν στο ίδιο αποτέλεσμα με τα αντίστοιχα διωνυμικά τους όμως το γεγονός ότι έχουν παραπάνω παραμέτρους τα ευνοεί, καθώς με χρήση αυτών των πρόσθετων παραμέτρων δίνεται η ελευθερία στην επιλογή της πιθανής πορείας της υποκείμενης τιμής του λεγόμενου «χώρου καταστάσεων» (state space). Αυτή η ελευθερία παρέχει μια ευελιξία που μερικές φορές ταιριάζει τα δέντρα με το χαμόγελο της μεταβλητότητας και κάνει το μοντέλο ακόμα πιο ακριβές.

♦ **Karel Komorád (2015)**

Στο άρθρο του "Implied Trinomial Trees and Their Implementation with XploRe" αναφέρεται στην μέθοδο τιμολόγησης δικαιωμάτων μέσω τεκμαρτών τριωνυμικών δέντρων, όπου χρησιμοποιεί έναν επαγωγικό αλγόριθμο που δημιουργεί μια πιθανή διαδικασία εξέλιξης των υποκείμενων τιμών από τα τρέχοντα δεδομένα της αγοράς. Κατ' επέκταση δείχνει την εφαρμογή τους στο λογισμικό XploRe, το οποίο προσφέρει χρήσιμα εργαλεία για την μοντελοποίηση των τεκμαρτών τριωνυμικών δέντρων.

1.4 Περιγραφή Διπλωματικής

Στο παρόν κεφάλαιο έγινε αναφορά στα δικαιώματα προαίρεσης, ξεκινώντας με μια εισαγωγή στην έννοια των δικαιωμάτων, στις βασικές θέσης αγοράς και πώλησης δικαιωμάτων, καθώς και εκτενής αναφορά στους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή τους με την μεταβλητότητα να αποτελεί τη βασικότερη πηγή αβεβαιότητας. Ένα πρόβλημα, το οποίο αναλύθηκε στο κεφάλαιο 1.2 με σκοπό να επισημανθεί το γεγονός ότι η χρήση της σταθερής μεταβλητότητας σε προηγμένα μοντέλα οδηγεί σε αποκλίσεις μεταξύ των τιμών που προκύπτουν από τα μοντέλα και των τιμών της αγοράς, και να δικαιολογηθεί η ανάγκη αναζήτησης πιο αξιόπιστων μοντέλων τα οποία θα μπορούν να ενσωματώσουν καλύτερα την τεκμαρτή μεταβλητότητα. Τέλος, έγινε μια ιστορική αναδρομή στην προέλευση των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και στους τρόπους αποτίμησης τους και σε πολύ βασικά μοντέλα όπως εκείνα των Black-Scholes (1973), των Cox, Ross, Rubinstein (1979), των Derman, Kani, Chriss (1996) του Boyle (1986) και άλλων.

Στο Κεφάλαιο 2, αρχικά θα αναλύσουμε το διωνυμικό δέντρο των Cox, Ross και Rubinstein (1979), ενός βήματος με δυο προσεγγίσεις, μέσω της αναπαραγωγής χαρτοφυλακίου και της αποτίμησης σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Ύστερα, θα επεκταθούμε σε διωνυμικό δέντρο δυο βημάτων, όπου θα γίνει λεπτομερής περιγραφή της κατασκευής του διωνυμικού δέντρου, με την τιμή του υποκείμενου τίτλου να μπορεί να μετακινείται ανοδικά ή καθοδικά, καθώς και στην αποτίμηση με χρήση του δέντρου αυτού. Επιπρόσθετα, θα πραγματοποιηθεί η κατασκευή του τριωνυμικού μοντέλου αποτίμησης ως ένα διωνυμικό δέντρο δύο βημάτων, όπου η τιμή του υποκείμενου τίτλου μετακινείται ανοδικά, καθοδικά, αλλά μπορεί να παραμένει και στην ίδια τιμή, γεγονός που το καθιστά πιο ευέλικτο και προσιτό στα πραγματικά δεδομένα της αγοράς. Τέλος, θα αναπαραχθεί και μία σύγκριση των δυο αυτών μοντέλων και του μοντέλου Black-Scholes.

Στο κεφάλαιο 3, θα εμβαθύνουμε στο βασικό θέμα της διπλωματικής, το τεκμαρτό τριωνυμικό μοντέλο σύμφωνα με το άρθρο των Pavel Čížek και Karel Komorád (2005). Συγκεκριμένα, θα γίνει αρχικά μια εισαγωγή ως προς την τεκμαρτή μεταβλητότητα και την ενσωμάτωση της στα τεκμαρτά δέντρα γενικά. Θα επικεντρωθούμε στις βασικές μεταβλητές και υποθέσεις που το πλαισιώνουν και με χρήση αυτών θα προχωρήσουμε στην επιλογή ενός κατάλληλου χώρου καταστάσεων για την κατασκευή του τεκμαρτού δέντρου.

Βασικό σκοπό αποτελεί να βρεθούν οι πιθανότητες μετάβασης οι οποίες θα φέρουν την πληροφορία της μεταβλητότητας της αγοράς, μέσω της χρήσης δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης που ήδη υπάρχουν διαθέσιμα στην αγορά. Στην συνέχεια, θα αναφέρουμε τυχούσες παγίδες και παραβιάσεις καθώς και τον τρόπο αντιμετώπισης τους.

Στο κεφάλαιο 4 θα συμπεριληφθεί η εμπειρική μελέτη πάνω σε δικαιώματα της αγοράς. Αφού πρώτα κατανοηθεί η μεθοδολογία αποτίμησης με το τεκμαρτό τριωνυμικό μοντέλο, θα κατασκευαστούν οι κατάλληλοι αλγόριθμοι που θα βοηθήσουν στην εμπειρική μελέτη. Στην συνέχεια, θα συλλέξουμε δεδομένα δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με την βοήθεια της Bloomberg μέσω των οποίων θα εκτιμήσουμε την τεκμαρτή μεταβλητότητα με την βοήθεια του αλγορίθμου Levenberg-Marquardt στην γλώσσα προγραμματισμού Matlab, και θα κατασκευάσουμε την επιφάνεια μεταβλητότητα με σκοπό να επιλεγεί σύμφωνα με αυτήν ποιος θα είναι ο κατάλληλος χώρος καταστάσεων για την σωστή τιμολόγηση με το τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο. Στην συνέχεια θα επιλεγεί μία ημέρα για να χρησιμοποιηθεί ως αριθμητικό παράδειγμα για την πλήρη κατανόηση της μεθοδολογίας τιμολόγησης με το μοντέλο αυτό. Τέλος θα αποτιμηθούν και οι υπόλοιπες μέρες του δείγματος (in sample) και βρίσκοντάς τα σφάλματα που προκύπτουν από το τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο και από το απλό τριωνυμικό δέντρο με τα δεδομένα της αγοράς, θα συγκρίνουμε τις δυο μεθόδους.

Στο κεφάλαιο 5, θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα ύστερα από την εμπειρική μελέτη που θα δηλώνει ποια μέθοδος είχε τα μικρότερα κατάλοιπα και σύγκλινε περισσότερο στην πραγματική τιμή του δικαιώματος. Θα ακολουθήσουν βιβλιογραφικές αναφορές καθώς και ένα παράρτημα με του κώδικές που χρησιμοποιήθηκαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΡΙΩΝΥΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2.1 Διωνυμικό Δέντρο

Η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω ενός διωνυμικού δέντρου είναι μια ισχυρή τεχνική τιμολόγησης. Αποτελεί ένα απλό μαθηματικό μοντέλο διακριτού χρόνου και δίνει την δυνατότητα αποτίμησης δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου σε αντίθεση με το μοντέλο των Black and Scholes(1973) το οποίο είναι μοντέλο συνεχούς χρόνου και αδυνατεί να αποτιμήσει δικαιώματα Αμερικανικού τύπου. Βασίζεται κυρίως στις υποθέσεις ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο και ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για άμεσο κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage).

Η δεύτερη υπόθεση συνεπάγεται ότι όλες οι επενδύσεις χωρίς κίνδυνο (risk-free investments) απολαμβάνουν το ποσοστό απόδοσης χωρίς κίνδυνο (risk-free rate of return) και δεν υπάρχουν επενδυτικές ευκαιρίες που απαιτούν μηδενικό ποσό επένδυσης αλλά να αποφέρουν θετικές αποδόσεις. Στην ενότητα αυτή θα αναλυθεί το διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross και Rubinstein (CRR) για την διευκόλυνση της κατανόησης του τριωνυμικού μοντέλου που έπεται στην συνέχεια.

Διωνυμικό δέντρο ενός βήματος

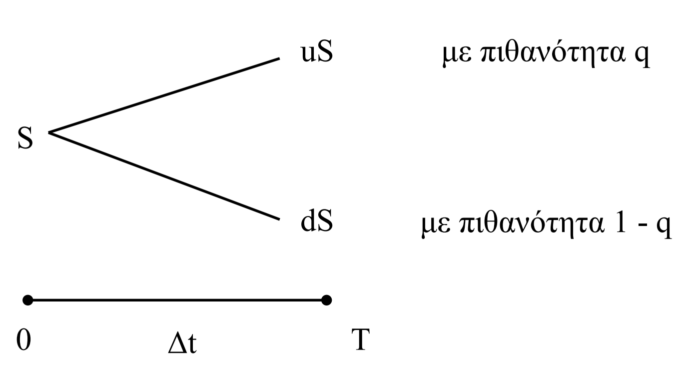
Έστω ότι έχουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option) με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή η οποία δεν δίνει μέρισμα. Αναλυτικά ισχύουν οι υποθέσεις:

- S είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής.
- K είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος.
- Η τιμή της μετοχής ακολουθεί μόνο δυο πιθανά μονοπάτια με το πέρασμα μίας χρονικής περιόδου.

  → Μπορεί είτε να κινηθεί προς τα πάνω με σταθερό ρυθμό αύξησης $u > 1$, επομένως, η νέα τιμή της μετοχής θα είναι uS με πιθανότητα q.

  → Είτε να κινηθεί προς τα κάτω με σταθερό ρυθμό μείωσης $d < 1$, επομένως η νέα τιμή της μετοχής θα είναι dS με πιθανότητα 1 – q.

Γραφική αναπαράσταση



- T είναι ο χρόνος έως την λήξη του δικαιώματος, είναι διακριτός και χωρίζεται σε διακριτές περιόδους που συμβολίζονται ως Δt.

- r > 0είναι το επιτόκιο το οποίο είναι σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδυτές μπορούν να δανείσουν και να δανειστούν όσο θέλουν σε αυτό το επιτόκιο. Ορίζεται ως $r = r_f + 1$ όπου r_f είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και λόγω της βασικής υπόθεσης ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage έπεται u > r > d.

- Για να επικεντρωθούμε στα βασικά ζητήματα, θα εξακολουθήσουμε να υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν φόροι, κόστη συναλλαγής και απαιτήσεις στους λογαριασμούς περιθωρίου (margin accounts).

Στη συνέχεια, για να δούμε την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος αγοράς, θεωρούμε την πιο απλή περίπτωση ότι απομένει μόνο μια χρονική περίοδος έως την λήξη του και συμβολίζουμε με c την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος. Στο πέρας της χρονικής περιόδου η τιμή μπορεί να έχει δυο πιθανά αποτελέσματα.

→ Είτε να πάρει την τιμή c_u εάν η τιμή της μετοχής μετακινηθεί προς τα πάνω στο uS, με πιθανότητα q.

→ Είτε να πάρει την τιμή c_d εάν η τιμή της μετοχής μετακινηθεί προς τα κάτω στο dS, με πιθανότητα 1 – q.

<u>Γραφική αναπαράσταση</u>

$$c_u = \max\,[uS - K, 0] \qquad \text{με πιθανότητα q}$$

c

$$c_d = \max\,[dS - K, 0] \qquad \text{με πιθανότητα 1 - q}$$

0 Δt T

<u>1η προσέγγιση: Χρησιμοποιώντας αναλογικό ανατοκισμό.</u>

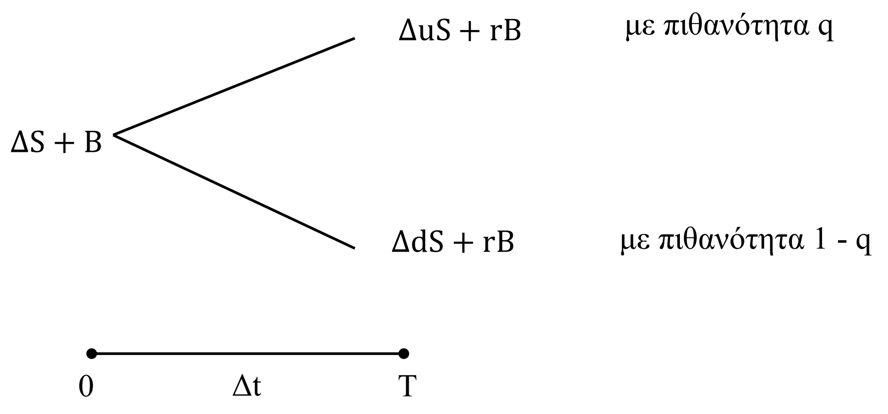
Μια προσέγγιση για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος αγοράς c, είναι μέσω της δημιουργίας ενός χαρτοφυλακίου το οποίο θα αποτελείται από:

- Δ μερίδια μια μετοχής
- Β ποσό χρημάτων σε ένα ομόλογο μηδενικού κινδύνου

με σκοπό η διαδικασία εύρεσης της αξίας του δικαιώματος να ταυτίζεται με την διαδικασία εύρεσης της αξίας του χαρτοφυλακίου που δημιουργήθηκε.

Η δημιουργία αυτή θα κοστίσει όσο: $$\left[\begin{array}{c}\text{τα μερίδια της μετοχής} \\ \text{πολλαπλασιασμένα με την} \\ \text{τρέχουσα τιμή της} \\ + \\ \text{το ποσό των χρημάτων}\end{array}\right] = \Delta S + B$$

Στην λήξη, η αξία του χαρτοφυλακίου θα αλλάξει, τα μερίδια της μετοχής θα πολλαπλασιάζονται πλέον με την νέα τιμή της μετοχής και το χρηματικό ποσό θα έχει κερδίσει και την απόδοση από το επιτόκιο για την χρονική περίοδο που πέρασε. Επομένως επειδή η τιμή της μετοχής έχει δυο πιθανές μελλοντικές τιμές, η αξία του χαρτοφυλακίου στην λήξη θα είναι



Εφόσον είναι στην ευχέρεια μας να επιλέξουμε τα Δ και Β όπως θέλουμε. Τα επιλέγουμε τέτοια ώστε οι αξίες στους τελικούς κόμβους του χαρτοφυλακίου να ταυτίζονται με τις αξίες στους τελικούς κόμβους της τιμής του δικαιώματος αγοράς.

Επομένως,

$$\Delta \mathrm{uS} + \mathrm{rB} = \mathrm{c_u} \tag{1}$$

$$\Delta \mathrm{dS} + \mathrm{rB} = \mathrm{c}_d \tag{2}$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε τα Δ και Β. Αρχικά αφαιρούμε κατά μέλος τις εξισώσεις και προκύπτει

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \qquad \Delta = \frac{\mathrm{c_u} - \mathrm{c_d}}{\mathrm{S(u-d)}} \tag{3}$$

Και έπειτα με αντικατάσταση της τιμής του Δ στην εξίσωση (1) έχουμε

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{uc_d} - \mathrm{dc_u}}{\mathrm{(u-d)r}} \tag{4}$$

Επιλέγοντας κατά αυτόν τον τρόπο τις μεταβλητές Δ και Β θα ονομάσουμε και το χαρτοφυλάκιο, χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης (hedging portfolio).

Με βάση την υπόθεση ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αφού οι αξίες του χαρτοφυλακίου στους τελικούς κόμβους είναι ίσες με τις αξίες του δικαιώματος στους τελικούς κόμβους, τότε, και η τρέχουσα αξία του δικαιώματος είναι ίση με την τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathrm{uS} + \mathrm{rB} = \mathrm{c_u} \\ \Delta \mathrm{dS} + \mathrm{rB} = \mathrm{c_d} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{c} = \Delta \mathrm{S} + \mathrm{B}} \tag{5}$$

Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να είναι κάτι διαφορετικό από την ισότητα διότι:

- Εάν $c > \Delta S + B$ τότε θα πουλούσαμε το δικαίωμα αγοράς και θα αγοράζαμε το χαρτοφυλάκιο για $\Delta S + B$ έχοντας μια αρχική εισροή χρημάτων $(c - (\Delta S + B) > 0)$. Το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκό, άρα δεν εξασκείται άμεσα. Επομένως, στην λήξη μπορούμε να καλύψουμε την αρνητική θέση στο δικαίωμα, αφού η αξία του χαρτοφυλακίου που αγοράσαμε θα είναι ίση με αυτή του δικαιώματος εκ κατασκευής με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ευκαιρία για arbitrage.

- Εάν $c < \Delta S + B$ τότε θα παίρναμε αρνητική θέση πώλησης στο χαρτοφυλάκιο για $\Delta S + B$ και θα αγοράζαμε το δικαίωμα για c έχοντας μια αρχική εισροή χρημάτων $((\Delta S + B) - c > 0)$. Στην λήξη μπορούμε να καλύψουμε την αρνητική μας θέση στο χαρτοφυλάκιο, αφού η αξία του δικαιώματος που αγοράσαμε θα είναι ίση με αυτή του χαρτοφυλακίου εκ κατασκευής με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ευκαιρία για arbitrage.

Στην συνέχεια με αντικατάσταση των Δ και Β που έχουμε βρει, στην τελευταία ισότητα προκύπτει

$$c = \Delta S + B \quad \xRightarrow{(3),(4)} \quad c = \frac{\left(\frac{r-d}{u-d}\right)c_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)c_d}{r} \tag{6}$$

Θέτοντας,

$$p \equiv \frac{r-d}{u-d} \quad \text{και} \quad 1-p \equiv \frac{u-r}{u-d}$$

Καταλήγουμε ότι η αξία του δικαιώματος αγοράς υπολογίζεται με τον τύπο

$$\boxed{c = [pc_u + (1-p)c_d]/r} \tag{7}$$

Παρατηρούμε ότι είναι μια φόρμουλα αποτίμησης της τιμής του δικαιώματος αγοράς c, εκφρασμένη από τους όρους S, u, d και r, εκ των οποίων η μόνη τυχαία μεταβλητή από την οποία εξαρτάται η τιμή του δικαιώματος είναι η τιμή της μετοχής. Παράλληλα, αντιλαμβανόμαστε ότι για την μεταβλητή p ισχύει πάντα ότι $0 < p < 1$ επομένως έχει ιδιότητες πιθανότητας και ονομάζεται ψευδοπιθανότητα.

Επίσης, λόγω του ότι ο τύπος που προέκυψε στο τέλος δεν εξαρτάται από την μεταβλητή q ή κανένα μέτρο κινδύνου, σημαίνει ότι η φόρμουλα αυτή εξαλείφει τις προτιμήσεις των επενδυτών επομένως, είτε οι επενδυτές αποφεύγουν τον κίνδυνο (risk-averse), είτε προτιμούν τον κίνδυνο (risk-preferring), είτε είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο (risk-neutral) θα καταλήξουν στο ίδιο αποτέλεσμα για τη τιμή του call, C. Ως εκ τούτου, η αξία του call option μπορεί να ερμηνευθεί ως η αναμενόμενη προεξόφληση της μελλοντικής αξίας σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου. Στην πραγματικότητα, το p είναι ίσο με το q εάν οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο.

2η προσέγγιση: Χρησιμοποιώντας συνεχή ανατοκισμό

Το βασικό επιχείρημα στην προσέγγιση ουδέτερου κινδύνου είναι ότι δεδομένου ότι η αποτίμηση των δικαιωμάτων βασίζεται στην συνθήκη του arbitrage, είναι ανεξάρτητη από τις προτιμήσεις του κινδύνου. Επομένως, θα πρέπει να είναι σε θέση να εκτιμήσει τα δικαιώματα προαίρεσης υποθέτοντας οποιοδήποτε σύνολο προτιμήσεων κινδύνου και να πάρει την ίδια απάντηση. Ως εκ τούτου το ευκολότερο μοντέλο είναι αυτό του ουδέτερου κινδύνου.

Δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει

- Την αγορά Δ μεριδίων μιας μετοχής
- Την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς (call options)

Η αξία του χαρτοφυλακίου στην αρχή δίνεται από τον τύπο $\Pi = \Delta S - c$ και το επιτόκιο r είναι πλέον το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Και ανάλογα με την μεταβολή της τιμής στην περίοδο Δt η αξία του χαρτοφυλακίου είναι

$$\Pi_u = \Delta uS - c_u \quad \text{με πιθανότητα } q$$

$$\Pi = \Delta S - c$$

$$\Pi_d = \Delta dS - c_d \quad \text{με πιθανότητα } 1 - q$$

$$0 \qquad \Delta t \qquad T$$

Επειδή το χαρτοφυλάκιο βρίσκεται στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου μπορούμε να εξισώσουμε τους δυο τελικούς κόμβους

$$\Pi_u = \Pi_d \Rightarrow \quad \Delta uS - c_u = \Delta dS - c_d \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{c_u - c_d}{S(u-d)}} \qquad (8)$$

Γνωρίζουμε ότι:

- Η αξία του χαρτοφυλακίου στην λήξη T είναι $\Pi_T = \Delta uS - c_u = \Delta dS - c_d$
- Η αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα είναι η μελλοντική αξία προεξοφλημένη με το risk-free επιτόκιο $\Pi = \Pi_T e^{-rT} = (\Delta uS - c_u)e^{-rT}$
- Έχουμε ήδη αναφέρει πως το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου είναι $\Pi = \Delta S - c$

Επομένως εξισώνοντας αυτές τις δυο συνθήκες, μπορούμε να λύσουμε ως προς την αξία του δικαιώματος αγοράς c.

$$\Delta S - c = (\Delta uS - c_u)e^{-rT}$$

$$\Rightarrow c = \Delta S - (\Delta uS - c_u)e^{-rT}$$

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} e^{-rT}\left[\underbrace{\frac{e^{rT} - d}{u - d}}_{p} c_u + \underbrace{\frac{u - e^{rT}}{u - d}}_{1-p} c_d\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow c = e^{-rT}[pc_u + (1-p)c_d]} \tag{9}$$

Όπου, $\quad p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d} \quad$ και $\quad 1 - p = \dfrac{u - e^{rT}}{u - d}$

Σε αυτό το περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, $p = q$. Επομένως, ερμηνεύουμε το p ως την πιθανότητα ανόδου της τιμής της μετοχής, και το $1 - p$ ως την πιθανότητα καθόδου της τιμής της μετοχής.

Η παρούσα αξία του δικαιώματος είναι ίση με τις προεξοφλημένες στο χωρίς κίνδυνο αναμενόμενες μελλοντικές απολαβές του.

$$c = e^{-rT}\hat{E}(c_T)$$

Ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης της μετοχής είναι ίσος με το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Καθώς, η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στην λήξη είναι,

$$\hat{E}(S_T) = Se^{rT}$$

Έχοντας βρει ως τώρα ένα μοντέλο για την εύρεση της τιμής του δικαιώματος αγοράς, αναζητούμε πλέον να ορίσουμε τις τιμές u και d για να επιτύχουμε τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής.

Στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, δεδομένου ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution), προκύπτουν οι ιδιότητες για μεταβολή χρονικού διαστήματος $[t, t + \Delta t]$

> $E(S_{t+\Delta t}/S_t) = e^{r\Delta t} \Rightarrow \quad \boxed{E(S_{t+\Delta t}) = Se^{r\Delta t}}$ (10)

> $Var(S_{t+\Delta t}/S_t) = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) \Rightarrow \quad \boxed{Var(S_{t+\Delta t}) = S^2e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right)}$ (11)

Αναλύοντας την εξίσωση (10) προκύπτει:

$$\begin{aligned} &E(S_{t+\Delta t}) = Se^{r\Delta t} \\ &\quad \Rightarrow puS + (1-p)dS = Se^{r\Delta t} \\ &\quad \overset{\div S}{\Rightarrow} pu + (1-p)d = e^{r\Delta t} \\ &\quad \Rightarrow \boxed{p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}} \end{aligned} \tag{12}$$

Από την (11) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(S_{t+\Delta t}) = E\left({S_{t+\Delta t}}^2\right) - E(S_{t+\Delta t})^2 = S^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right) \\
&\quad \Rightarrow pu^2 S^2 + (1-p)d^2 S^2 - S^2 e^{2r\Delta t} = S^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right) \\
&\quad \overset{\div S^2}{\Longrightarrow} pu^2 + (1-p)d^2 = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right) + e^{2r\Delta t} \\
&\quad \Rightarrow pu^2 + (1-p)d^2 = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1 + 1\right) \\
&\quad \Rightarrow pu^2 + d^2 - pd^2 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \\
&\quad \Rightarrow p(u^2 - d^2) + d^2 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \\
&\quad \overset{(12)}{\Longrightarrow} \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}(u-d)(u+d) + d^2 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \\
&\quad \Rightarrow e^{r\Delta t}(u+d) - 1 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \\
&\quad \overset{d=\frac{1}{u}}{\Longrightarrow} e^{r\Delta t}\left(u + \frac{1}{u}\right) - 1 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \\
&\quad \Rightarrow u^2 e^{r\Delta t} - u\left(1 + e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t}\right) + e^{r\Delta t} = 0
\end{aligned}
$$

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που προέκυψε είναι:

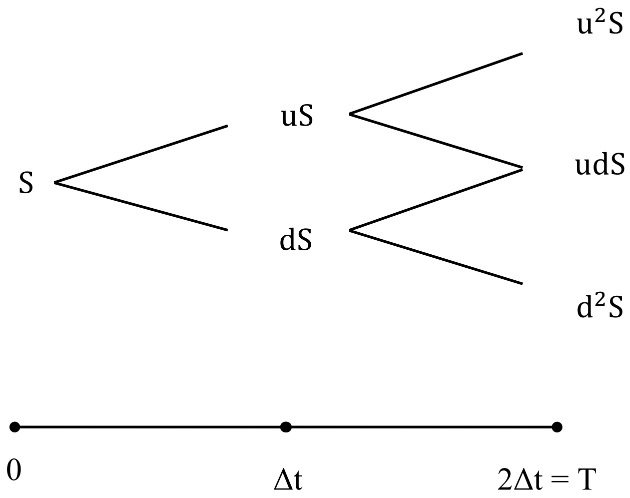
$$
u = \frac{\left(1 + e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t}\right) \pm \sqrt{\left(1 + e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t}\right)^2 - 4e^{2r\Delta t}}}{2e^{r\Delta t}}
$$

Η οποία απλοποιείται με χρήση του αναπτύγματος Taylor και φτάνει στην τελική της μορφή:

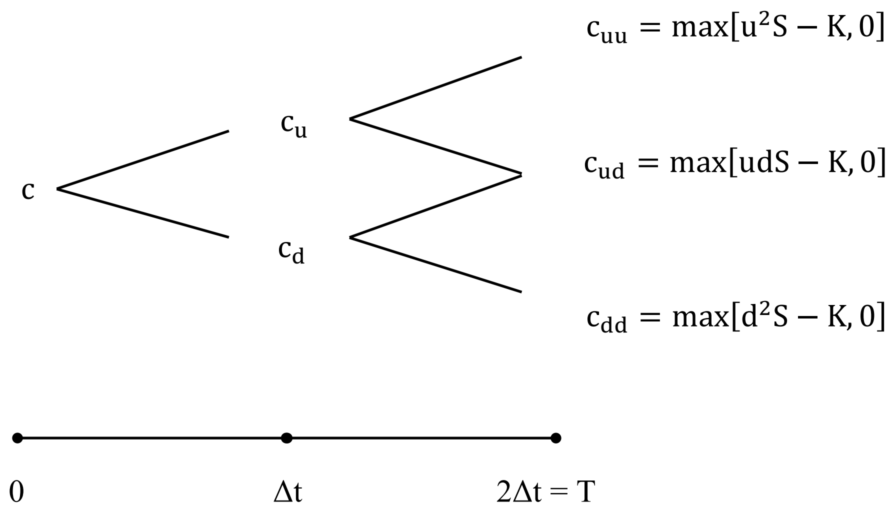
$$
u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}
$$

<u>Διωνυμικό δέντρο δυο βημάτων</u>

Τώρα θα αναλυθεί η δεύτερη απλή περίπτωση, ένα δικαίωμα αγοράς με υποκείμενο τίτλο μια μετοχή όπου απομένουν μόνο δυο περίοδοι έως την λήξη του. Σύμφωνα με την διωνυμική διαδικασία η τιμή της μετοχής μπορεί να πάρει τρείς πιθανές τιμές μετά από δυο περιόδους.



Αντίστοιχα, για την τιμή του δικαιώματος αγοράς έχουμε:



Όπου:

- c_{uu} η τιμή του δικαιώματος σε δυο περιόδους από την τρέχουσα χρονική στιγμή, εάν η τιμή της μετοχής κινηθεί προς τα πάνω σε κάθε περίοδο.

- $c_{ud} = c_{du}$ η τιμή του δικαιώματος σε δυο περιόδους από την τρέχουσα χρονική στιγμή, εάν η τιμή της μετοχής κινηθεί είτε πρώτα προς τα πάνω και ύστερα προς τα κάτω είτε πρώτα προς τα κάτω και ύστερα από πάνω.

- c_{dd} η τιμή του δικαιώματος σε δυο περιόδους από την τρέχουσα χρονική στιγμή, εάν η τιμή της μετοχής κινηθεί προς τα κάτω σε κάθε περίοδο.

Η διαδικασία για την εύρεση της τιμής του δικαιώματος είναι:

Βήμα 1ο : Ξεκινάμε από τους τελικούς κόμβους και βρίσκουμε μέσω της εσωτερικής αξίας τις τιμές c_{uu}, c_{ud} και c_{ud}.

Βήμα 2ο : Πηγαίνοντας αναδρομικά στους κόμβους όπως και στην διαδικασία στο διωνυμικό δέντρο ενός βήματος βρίσκουμε τις αξίες c_u και c_d.

Στην 1η προσέγγιση: $c_u = [pc_{uu} + (1-p)c_{ud}]/r$
$c_d = [pc_{ud} + (1-p)c_{dd}]/r$

Στην 2η προσέγγιση: $c_u = e^{-r\Delta t}[pc_{uu} + (1-p)c_{ud}]$
$c_d = e^{-r\Delta t}[pc_{ud} + (1-p)c_{dd}]$

Βήμα 3ο : Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία αναδρομικά και χρησιμοποιούμε τις παραπάνω τιμές και βρίσκουμε την τιμή του δικαιώματος c

Στην 1η προσέγγιση: $$c = [p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}]/r^2 \quad (13)$$

Στην 2η προσέγγιση: $$c = e^{-2r\Delta t}[p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{ud} + (1-p)^2 c_{dd}] \quad (14)$$

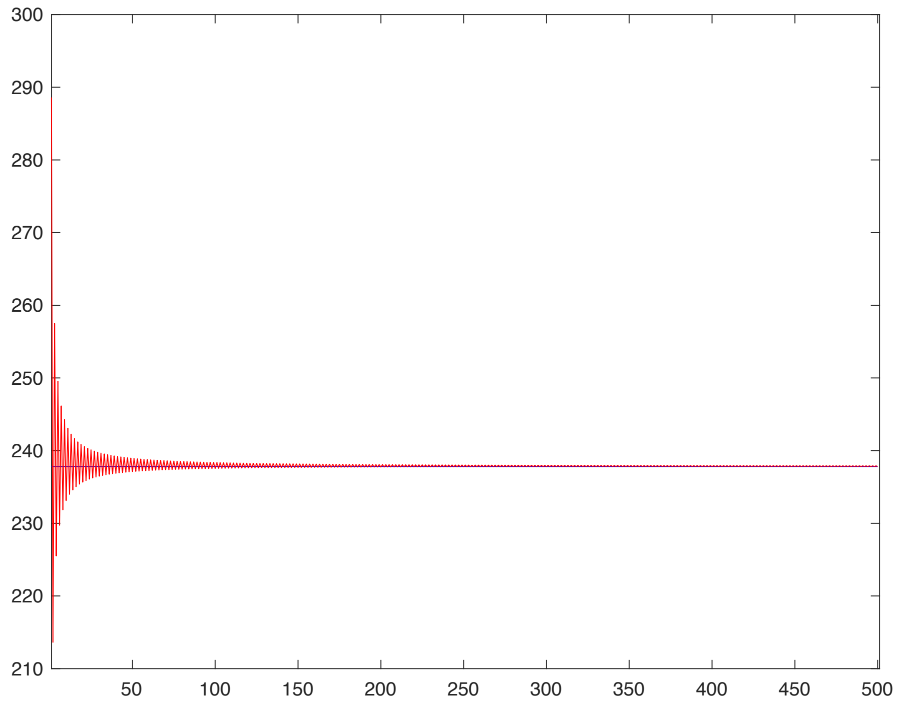
Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει μια αναδρομική διαδικασία για την εύρεση της αξίας ενός δικαιώματος αγοράς. Ξεκινώντας από την ημερομηνία λήξης εργαζόμαστε προς τα πίσω και μπορούμε να βρούμε τον γενικό τύπο αποτίμησης για κάθε n αριθμό περιόδων που απομένουν έως την λήξη:

$$c = \frac{\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\max\left[u^j d^{n-j}S - K, 0\right]\right]}{r^n}$$

Άλλες περιπτώσεις

Όταν $n \to \infty$ από στατιστικές μελέτες έχει αποδειχθεί ότι ο τύπος τιμολόγησης Black and Scholes (1973) προέρχεται απευθείας από το διωνυμικό μοντέλο. Αυτό βασίζεται στην ιδιότητα της διωνυμικής κατανομής (διακριτή) η οποία γίνεται κανονική κατανομή (συνεχής) όταν $n \to \infty$.

Παράδειγμα 1: όταν $n \to \infty$, Σύγκλιση διωνυμικού με Black-Scholes



Παρατηρείται πως όσο αυξάνονται τα χρονικά βλήματα τόσο συγκλίνουν και οι δύο μέθοδοι, ένα ικανοποιητικό πλήθος βημάτων είναι 150 βήματα καθώς δίνουν πολύ καλή σύγκλιση.

Όταν έχω δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, λόγω της ιδιότητας που έχει το δικαίωμα αυτού του τύπου, δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο όπως και στα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου χρησιμοποιώντας την ίδια φόρμουλα αποτίμησης ξεκινώντας από τους τελικούς κόμβου και δουλεύοντας αναδρομικά, με την ιδιαιτερότητα ότι σε κάθε κόμβο που πηγαίνουμε έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης εξάσκησης, εάν δηλαδή συμφέρει να εξασκήσουμε πρόωρα το δικαίωμα ή να το διακρατήσουμε μέχρι να βρεθεί καλύτερη ευκαιρία κέρδους.

Για να πάρουμε συνετά αυτή την απόφαση, συγκρίνουμε την αξία συνέχισης (risk-neutral value) η οποία μετριέται με την φόρμουλα που δείξαμε, με την άμεση πληρωμή της πρόωρης εξάσκησης (payoff from early exercise) η οποία υπολογίζεται μέσω της εσωτερικής αξίας.

Επομένως, αν

$$(\text{Άμεση πληρωμή}) > (\text{Αξία συνέχισης}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Η άμεση εξάσκηση} \\ \text{είναι βέλτιστη} \end{pmatrix}$$

Όταν αντί για δικαίωμα αγοράς (call option) έχουμε δικαίωμα πώλησης (put option), τότε λειτουργούμε με παρόμοιο τρόπο. Επίσης, η εσωτερική αξία σε αυτήν την περίπτωση υπολογίζεται ως $max[K - S_i, 0]$, όπου S_i είναι η αντίστοιχη τιμή της μετοχής στον i-οστό τελικό κόμβο.

2.2 Τριωνυμικό Δέντρο

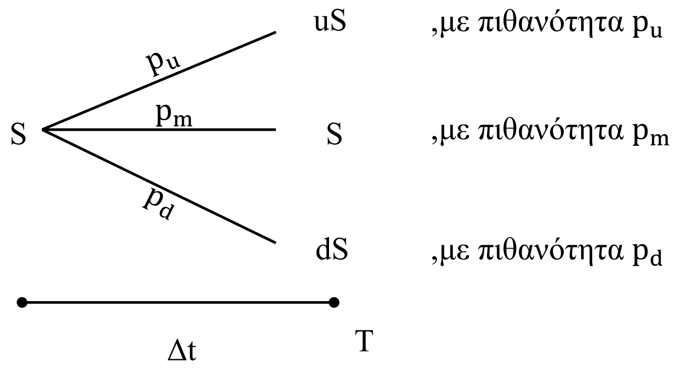
Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθεί το μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω τριωνυμικού δέντρου. Βασίζεται στο διωνυμικό δέντρο όπως αναλύθηκε νωρίτερα και συγκεκριμένα ένα βήμα του τριωνυμικού δέντρου αναπτύσσεται ως ένα διωνυμικό δέντρο δυο βημάτων. Πρόκειται για ένα ακριβέστερο μοντέλο καθώς ενσωματώνει και την πιθανότητα η τιμή της μετοχής να παραμείνει σταθερή στο πέρας μιας χρονικής περιόδου γεγονός που το καθιστά πιο ρεαλιστικό στα δεδομένα της αγοράς.

Βρισκόμαστε στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου όπου S η τρέχουσα τιμή του περιουσιακού στοιχείου, όπου ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή.
και ορίζουμε επιπλέον τις εξής μεταβλητές:

- r = το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk-free rate)
- $\mathrm{p_u}$ = πιθανότητα ανόδου της τιμής της μετοχής
- $\mathrm{p_d}$ = πιθανότητα καθόδου της τιμής της μετοχής
- $\mathrm{p_m}$= πιθανότητα η τιμή της μετοχής να παραμείνει σταθερή
- u = πολλαπλασιαστής της τιμής της μετοχής στην άνοδο
- d = πολλαπλασιαστής της τιμής της μετοχής στην κάθοδο
- m = πολλαπλασιαστής της τιμής της μετοχής στην παράλληλη μετατόπιση

Βήμα 1ο : Κατασκευή Δέντρου

Ένας τρόπος κατασκευής του τριωνυμικού δέντρου είναι ως ένα διωνυμικό δέντρο δύο βημάτων. Όπου Δt αυτήν την φορά θα είναι ένα χρονικό βήμα στο τριωνυμικό δέντρο το οποίο ισούται με δυο χρονικά βήματα στο διωνυμικό δέντρο και Δt/2 ένα διωνυμικό χρονικό βήμα. Αυτό μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε διωνυμικό δέντρο με σταθερή μεταβλητότητα.



Συγκεκριμένα προκύπτουν πέντε νέες άγνωστες μεταβλητές, u, d, p_u, p_m, p_d που μένει να βρεθούν. Ένας τρόπος είναι μέσω των τύπων που έχουν ήδη προκύψει από την ανάλυση του διωνυμικού δέντρου.

- $ud = 1 \;\Rightarrow\; ud = m^2 = 1$
  Διότι μια ανοδική κίνηση που ακολουθείται από μια καθοδική κίνηση είναι ίδια με δυο παράλληλες μετατοπίσεις.

- Δεδομένου ότι η πιθανότητα ανόδου στο διωνυμικό δέντρο είναι $p = \frac{e^{(r\Delta t/2)}-d}{u-d}$, η πιθανότητα ανόδου στο τριωνυμικό θα είναι $p_u = (p)^2$, αφού δυο ανοδικές πιθανότητες στο διωνυμικό αντιστοιχούν σε μια ανοδική πιθανότητα του τριωνυμικού. Αντίστοιχα, η πιθανότητα καθόδου στο διωνυμικό όπως έχουμε ήδη δείξει είναι $(1-p) = \frac{u-e^{(r\Delta t/2)}}{u-d}$ άρα στο τριωνυμικό θα είναι $p_d = (1-p)^2$.

  Επομένως

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - d}{u - d}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{u - e^{r\Delta t/2}}{u - d}\right)^2$$

Για όλες τις πιθανότητες ισχύει ότι το άθροισμα τους ισούται με την μονάδα,

$$p_u + p_m + p_d = 1 \tag{14}$$

Συνεπώς, με την αντικατάσταση των u, d, όπως αυτά δίνονται στο διωνυμικό δέντρο προκύπτουν οι πιθανότητες:

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 \tag{15}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

- Όσο αφορά τα άλματα στο τριωνυμικό έχουμε,

$$u = u_{trinomial} = (u_{binomial})^2 = \left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t/2}} = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$\overset{d=\frac{1}{u}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την εύρεση των πιθανοτήτων p_u, p_m, p_d, στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου προκύπτει από την βασική υπόθεση ότι η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal).

Επομένως, η μέση τιμή της διακριτής κατανομής είναι ίση με την μέση τιμή της λογαριθμοκανονικής.

$$E(S_{t+\Delta t}) = Se^{r\Delta t}, \quad \text{θέτουμε } M = e^{r\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(S_{t+\Delta t}) = SM}$$

$$\Rightarrow p_u dS + p_m S + p_d dS = SM$$

$$\overset{\div S}{\Rightarrow} p_u u + p_m + p_d d = M$$

$$\overset{d=\frac{1}{u}}{\Longrightarrow} p_u u + p_m + p_d \frac{1}{u} = M$$

$$\xRightarrow{(14)} p_u u + (1 - p_u - p_d) + p_d \frac{1}{u} = M$$

$$\Rightarrow p_u(u-1) + p_d\left(\frac{1}{u} - 1\right) = M - 1$$

$$\Rightarrow \; p_d = \frac{(M-1) - p_u(u-1)}{\left(\frac{1}{u} - 1\right)} \tag{17}$$

Ταυτόχρονα, η διακύμανση της διακριτής κατανομής ισούται με την διακύμανση της λογαριθμοκανονικής κατανομής.

$Var(S_{t+\Delta t}) = S^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right)$, θέτουμε $V = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right) \Rightarrow$ $\boxed{Var(S_{t+\Delta t}) = S^2 V}$

$$\Rightarrow E\left({S_{t+\Delta t}}^2\right) - E(S_{t+\Delta t})^2 = S^2 V$$

$$\Rightarrow p_u u^2 S^2 + p_m S^2 + p_d d^2 S^2 - S^2 M^2 = S^2 V$$

$$\xRightarrow{d=\frac{1}{u}} p_u u^2 S^2 + p_m S^2 + p_d \frac{1}{u^2} S^2 - S^2 M^2 = S^2 V$$

$$\xRightarrow{\div S^2} p_u u^2 + p_m + p_d \frac{1}{u^2} = V - M^2$$

$$\xRightarrow{(14)} p_u u^2 + (1 - p_u - p_d) + p_d \frac{1}{u^2} = V - M^2$$

$$\Rightarrow p_u(u^2 - 1) + p_d\left(\frac{1}{u^2} - 1\right) = V - M^2 - 1 \tag{18}$$

Ύστερα από την εξίσωση (18) μέσω της (17), προκύπτει

$$\Rightarrow p_u(u^2 - 1) + \left[\frac{(M-1) - p_u(u-1)}{\left(\frac{1}{u} - 1\right)}\right]\left(\frac{1}{u^2} - 1\right) = V - M^2 - 1$$

$$\Rightarrow p_u(u^2 - 1) + [(M-1) - p_u(u-1)]\left(\frac{1}{u} + 1\right) = V - M^2 - 1$$

$$\Rightarrow p_u(u^2 - 1) + (M-1)\left(\frac{1+u}{u}\right) - p_u(u-1)\left(\frac{1+u}{u}\right) = V - M^2 - 1$$

$$\Rightarrow p_u\left[(u^2 - 1) - \left(\frac{u^2 - 1}{u}\right)\right] = V - M^2 - 1 - (M-1)\left(\frac{1+u}{u}\right)$$

$$\overset{\times u}{\Rightarrow} p_u[(u^2-1)(u-1)] = u(V-M^2-1)-(M-1)(1+u)$$

$$\Rightarrow p_u[(u^2-1)(u-1)] = u(V-M^2-1)-Mu+u-(M-1)$$

$$\Rightarrow p_u[(u^2-1)(u-1)] = u(V-M^2-M)-(M-1)$$

$$\Rightarrow\ p_u = \frac{u(V-M^2-M)-(M-1)}{(u^2-1)(u-1)} \qquad (19)$$

Τέλος, επιστρέφουμε στην εξίσωση (17) και με την αντικατάσταση της εξίσωσης (19) έχουμε

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{u}-1\right)p_d = (M-1)-p_u(u-1)$$

$$\overset{(19)}{\Longrightarrow} \left(\frac{1-u}{u}\right)p_d = (M-1)-\left[\frac{u(V-M^2-M)-(M-1)}{(u^2-1)(u-1)}\right](u-1)$$

$$\overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \left(\frac{u-1}{u}\right)p_d = \frac{u(V-M^2-M)-(M-1)-(M-1)(u^2-1)}{(u^2-1)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u-1}{u}\right)p_d = \frac{u(V-M^2-M)-(M-1)u^2}{(u^2-1)}$$

$$\overset{\times\frac{u}{(u-1)}}{\Longrightarrow} p_d = \frac{u^2(V-M^2-M)-(M-1)u^3}{(u^2-1)(u-1)}$$

Συγκεντρωτικά έχουμε,

$$p_u = \frac{u(V-M^2-M)-(M-1)}{(u^2-1)(u-1)}$$

$$p_d = \frac{u^2(V-M^2-M)-(M-1)u^3}{(u^2-1)(u-1)}$$

$$p_m = 1-p_u-p_d$$

Παρατηρείται ότι, με την χρήση των παραμέτρων $u_{binomial}, d_{binomial}$ όπως ορίζονται στο μοντέλο CRR (1979) και ορίζοντας $m=1$, τότε οι πιθανότητες μετάβασης του τριωνυμικού μοντέλου που προκύπτουν δεν είναι ανάμεσα στο 0 και το 1, μάλιστα κάποιες είναι αρνητικές. Ως εκ τούτου ο Boyle πρότεινε την εφαρμογή μιας παραμέτρου $\lambda > 1$ με βάση την οποία έχουμε,

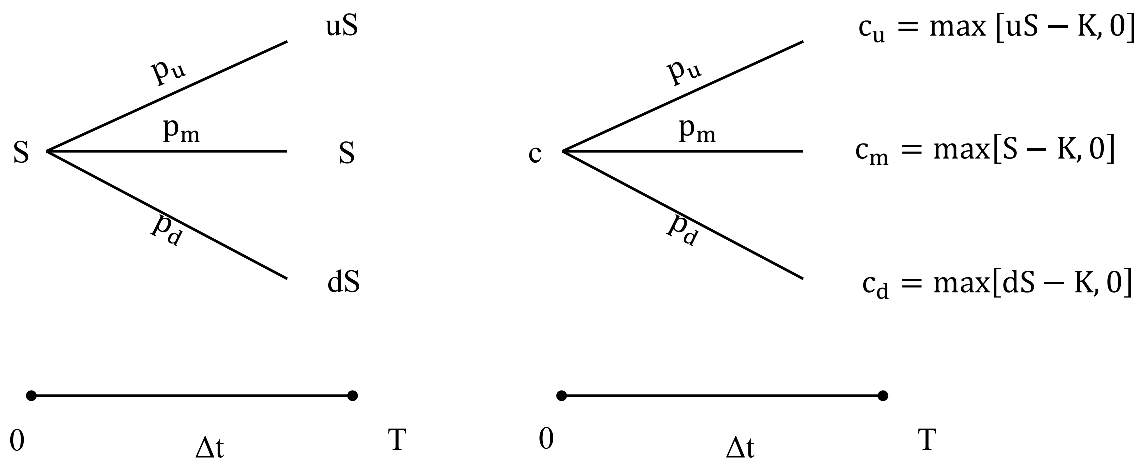
$$u_{binomial} = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d_{binomial} = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

παρόλο που η παράμετρος αυτή δίνει και αρνητικές πιθανότητες μετάβασης για μικρές τιμές του λ. Δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές για το λ, λαμβάνεται ένα εύρος τιμών του $u_{binomial}$ εντός του οποίου υπάρχει ένα διάστημα που παράγει αποδεκτές τιμές για όλες τις πιθανότητες ταυτόχρονα. Αναγνώρισε επίσης ότι τα καλύτερα αποτελέσματα ελήφθησαν όταν η παράμετρος λ ορίστηκε έτσι ώστε οι πιθανότητες μετάβασης να είναι περίπου ίσες.

Επίσης ο Boyle παρατήρησε πως για ένα εύρος τιμών η ακρίβεια της μεθόδου 3 αλμάτων (three-jump method) με 5 χρονικά διαστήματα ήταν συγκρίσιμη με εκείνη της μεθόδου CRR με 20 χρονικά διαστήματα.
Αργότερα ο Komorád (1990) βελτίωσε το μοντέλο για να διορθώσει το πιθανό πρόβλημα των αρνητικών πιθανοτήτων μετάβασης, όπου για κάθε $\lambda \geq 1$ δίνει ένα εφικτό σύνολο πιθανοτήτων

<u>Βήμα 2ο : Τιμολόγηση με το Τριωνυμικό Δέντρο</u>

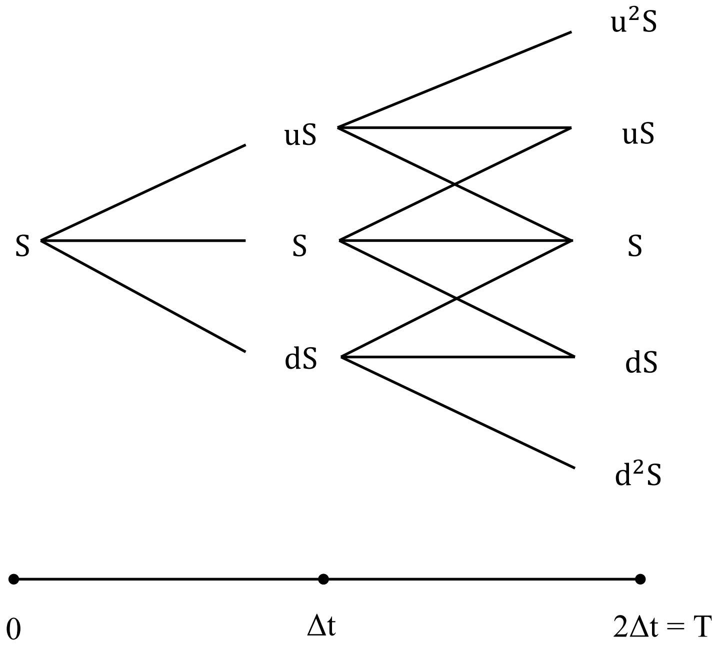
Όπως και στο διωνυμικό δέντρο ενός βήματος έχουμε αντίστοιχα και στο τριωνυμικό ενός βήματος:



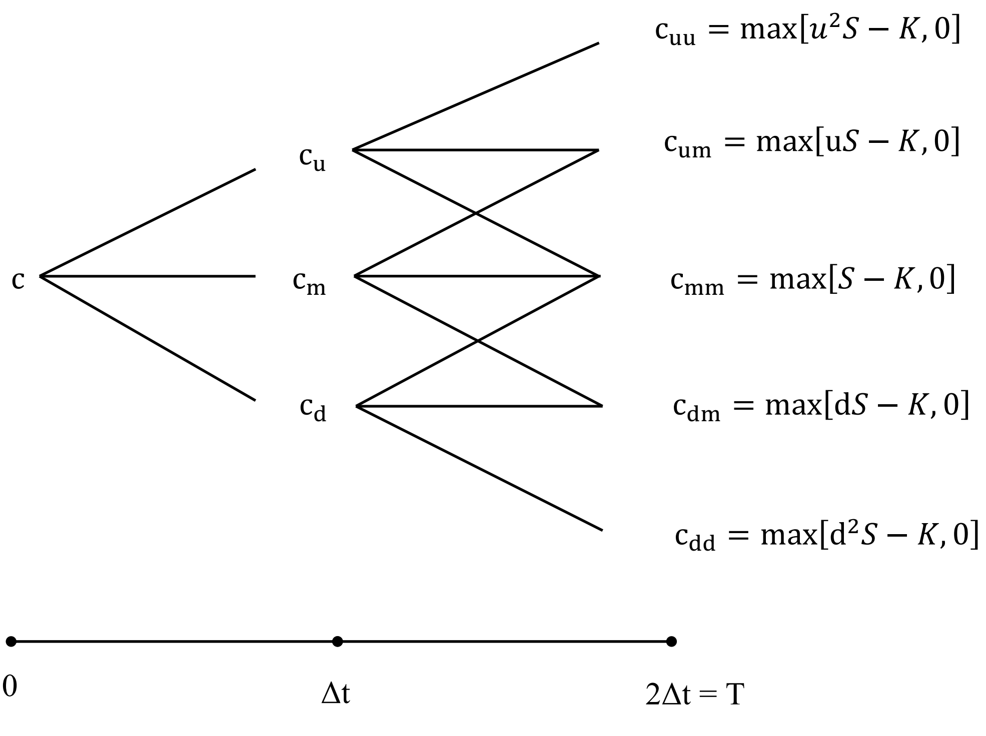
Επομένως, ξεκινάμε βρίσκοντας την εσωτερική αξία στους τελικούς κόμβους και με τον τύπο που αποδείξαμε και στο διωνυμικό μοντέλο έχουμε:

$$c = e^{-r\Delta t}(p_u c_u + p_m c_m + p_d c_d)$$

Αντίστοιχα εάν υποθέσουμε ότι έχουμε δυο χρονικά βήματα έως την λήξη η τιμή της μετοχή παίρνει τις εξής τιμές:



Ενώ η τιμή του δικαιώματος εξελίσσεται ως εξής:



Επομένως, έχοντας βρει την εσωτερική αξία στους τελικούς κόμβους, κατευθυνόμαστε αναδρομικά στους προηγούμενους κόμβους με την ίδια μεθοδολογία όπως στο διωνυμικό δέντρο έως ότου καταλήξουμε στην τρέχουσα αξία του δικαιώματος.

$$c_u = e^{-r\Delta t}(p_u c_{uu} + p_m c_{um} + p_d c_{mm})$$

$$c_m = e^{-r\Delta t}(p_u c_{um} + p_m c_{mm} + p_d c_{dm})$$

$$c_d = e^{-r\Delta t}(p_u c_{mm} + p_m c_{dm} + p_d c_{dd})$$

Τα αντικαθιστούμε στον τύπο της τιμής του δικαιώματος και έχουμε:

$$c = e^{-r\Delta t}(p_u c_u + p_m c_m + p_d c_d)$$

$$\Rightarrow c = e^{-r\Delta t}[p_u e^{-r\Delta t}(p_u c_{uu} + p_m c_{um} + p_d c_{mm}) + p_m e^{-r\Delta t}(p_u c_{um} + p_m c_{mm} + p_d c_{dm}) + p_d e^{-r\Delta t}(p_u c_{mm} + p_m c_{dm} + p_d c_{dd})]$$

$$\Rightarrow c = e^{-r\Delta t}[e^{-r\Delta t}(p_u{}^2 c_{uu} + p_u p_m c_{um} + p_u p_d c_{mm} + p_m p_u c_{um} + p_m{}^2 c_{mm} + p_m p_d c_{dm} + p_d p_u c_{mm} + p_d p_m c_{dm} + p_d{}^2 c_{dd})]$$

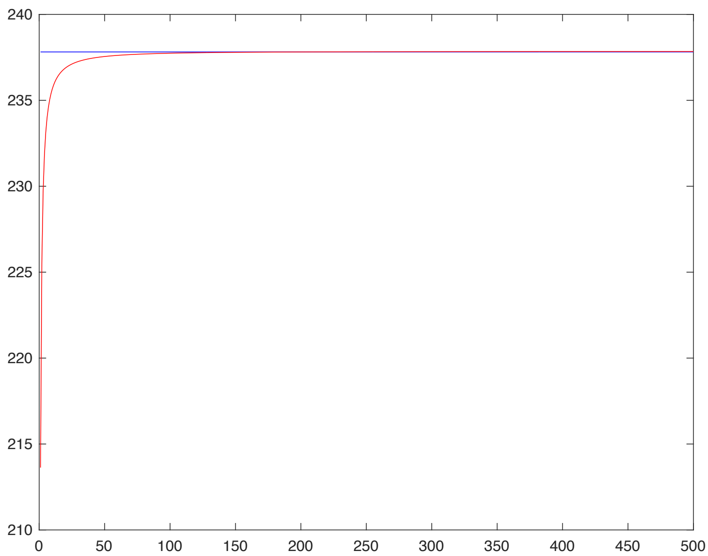
$$\Rightarrow c = e^{-2r\Delta t}[p_u{}^2 c_{uu} + 2p_u p_m c_{um} + (p_u p_d + p_m{}^2 + p_d p_u)c_{mm} + 2p_d p_m c_{dm} + p_d{}^2 c_{dd}]$$

$$\Rightarrow c = e^{-2r\Delta t}[p_u{}^2 c_{uu} + 2p_u p_m c_{um} + (p_m{}^2 + 2p_u p_d)c_{mm} + 2p_d p_m c_{dm} + p_d{}^2 c_{dd}]$$

Άλλες περιπτώσεις:

Όπως και στο διωνυμικό δέντρο έτσι και στο τριωνυμικό δέντρο όταν το $n \to \infty$ ο τυχαίος περίπατος μετατρέπεται στην Γεωμετρική κίνηση Brown, και το τριωνυμικό μοντέλο συγκλίνει στο Black and Scholes (1973).

Παράδειγμα 2: όταν $n \to \infty$, Σύγκλιση τριωνυμικού μοντέλου με Black-Scholes



Όταν αναφερόμαστε σε δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου αντί για δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου, χρησιμοποιούμε την ίδια φόρμουλα αποτίμησης ξεκινώντας από τους τελικούς κόμβου και δουλεύοντας αναδρομικά. Λόγω της επιλογής που έχουν για πρόωρη εξάσκηση πρέπει σε κάθε κόμβο που καταλήγουμε να ελέγχεται εάν η πρόωρη εξάσκηση είναι βέλτιστη ή είναι προτιμότερο η διακράτηση του δικαιώματος αγοράς.

Επομένως, η αξία του δικαιώματος θα είναι το μέγιστο ανάμεσα στην άμεση πληρωμή (option payoff) και στην αξία συνέχισης του δικαιώματος.

$$\mathrm{c} = \max[\text{option payoff}\,,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{r}\Delta\mathrm{t}}(\mathrm{p_u c_u} + \mathrm{p_m c_m} + \mathrm{p_d c_d})\,]$$

Όταν αντί για δικαίωμα αγοράς (call option) έχω δικαίωμα πώλησης (put option), τότε η εσωτερική αξία υπολογίζεται ως $\max[\mathrm{K} - \mathrm{S_i}, 0]$, όπου S_i είναι η αντίστοιχη τιμή της μετοχής στον i-οστό τελικό κόμβο.

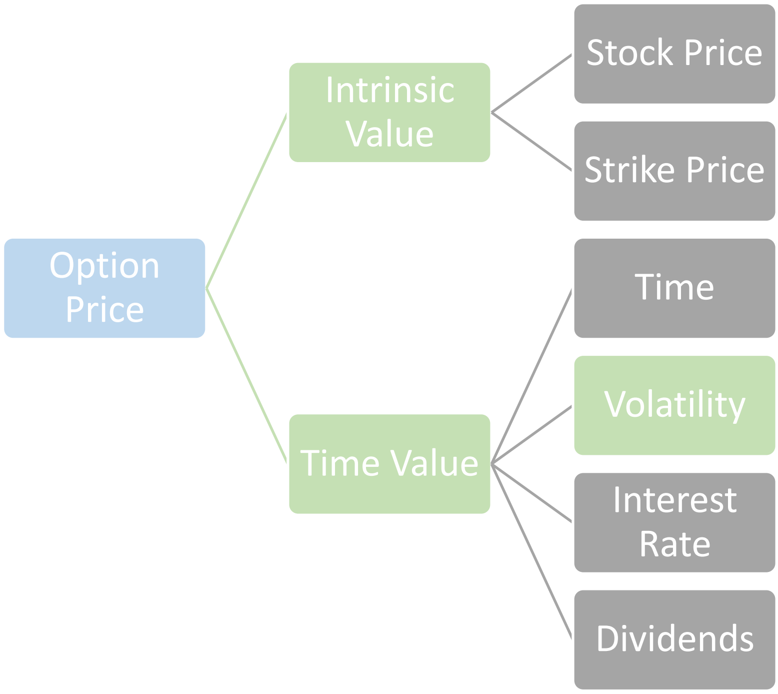
2.3 Σύγκριση Black-Scholes ~ Διωνυμικό Μοντέλο ~ Τριωνυμικό Μοντέλο

Black - Scholes	**Διωνυμικό Μοντέλο**	**Τριωνυμικό Μοντέλο**
Συνεχές μοντέλο	Διακριτό μοντέλο Όταν $n \to \infty$ συγκλίνει με το μοντέλο Black-Scholes γρηγορότερα λόγω της απλούστερης εφαρμογής.	Διακριτό μοντέλο Όταν $n \to \infty$ συγκλίνει με το μοντέλο Black-Scholes πιο αργά λόγω περισσότερων βημάτων.
Είναι μαθηματικά απλούστερο και γρήγορο στον υπολογισμό.	Χρονοβόρο στην κατασκευή του και πιο αργό στον υπολογισμό.	Πιο χρονοβόρο στην κατασκευή του και πιο αργό στον υπολογισμό.
Λιγότερο ακριβές.	Πιο ακριβές ειδικά για μεγάλες ημερομηνίες λήξεις ή μετοχές που καταβάλουν μερίσματα. Υστερεί όμως γιατί η τιμή της μετοχής παίρνει μόνο δυο τιμές, το οποίο δεν είναι ρεαλιστικό.	Ακριβέστερα αποτελέσματα γιατί ενσωματώνει την μηδενική μεταβολή της τιμής που το καθιστά πιο σχετικό με τις πραγματικές καταστάσεις της αγοράς. Ειδικά για τα εξωτικά δικαιώματα.
Αναφέρεται μόνο σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου.	Είναι χρήσιμο και για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικάνικου τύπου.	Είναι χρήσιμο και για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικάνικου τύπου.
Αποκλειστικά σταθερή μεταβλητότητα	Μπορεί να εξελιχθεί και σε ένα τεκμαρτό μοντέλο το οποίο δεν έχει σταθερή μεταβλητότητα.	Μπορεί να εξελιχθεί και σε ένα τεκμαρτό μοντέλο το οποίο δεν έχει σταθερή μεταβλητότητα.
Δεν επιτρέπει τον υπολογισμό πολλαπλών περιόδων μαζί.	Επιτρέπει τον υπολογισμό πολλών περιόδων μαζί.	Επιτρέπει τον υπολογισμό πολλών περιόδων μαζί.
Μη-ευέλικτο	Ευέλικτο	Ευέλικτο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΕΚΜΑΡΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΙΚΟ ΔΕΝΤΡΟ

3.1 Τεκμαρτή Μεταβλητότητα – Implied Volatility

Για την σωστή κατανόηση της έννοιας της αποτίμησης των δικαιωμάτων καθώς και την αναζήτηση ενός πιο αποτελεσματικού μοντέλου αποτίμησης είναι βασικό να εστιάσουμε στους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή ενός δικαιώματος.



Για την εύρεση της τιμής του δικαιώματος χρειάζεται ο υπολογισμός της εσωτερικής αξίας ο οποίος γίνεται μέσω της τιμής της μετοχής και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος τα οποία είναι γνωστά επομένως δεν αποτελούν πρόβλημα. Παράλληλα, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της αξίας διακράτησης του δικαιώματος. Εκεί εντοπίζεται η βασική αδυναμία στην σωστή τιμολόγηση των δικαιωμάτων. Ενώ ο χρόνος έως την λήξη, το επιτόκιο και τα μερίσματα είναι γνωστά και εύκολα υπολογίσιμα, η μεταβλητότητα δεν μπορεί να υπολογιστεί εύκολα και με ακρίβεια, γεγονός που καθιστά τις τιμές που υπολογίζονται από τα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων διαφορετικές από τις τιμές της αγοράς.

<u>Μεταβλητότητα (σ)</u>

Είναι ένα στατιστικό μέτρο της διασποράς των αποδόσεων των χρεογράφων. Μετριέται συχνά ως η διακύμανση ή η διασπορά των αποδόσεων. Στην αγορά χρεογράφων αντιπροσωπεύσει ένα επίπεδο κινδύνου σε μια συγκεκριμένη επένδυση. Χωρίζεται σε δυο κατηγορίες:

> **Ιστορική μεταβλητότητα (Historical volatility)**, είναι η μεταβλητότητα που εκτιμάται από ιστορικά δεδομένα της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

> **Τεκμαρτή μεταβλητότητα (Implied volatility)**, είναι μια εκτίμηση της μεταβλητότητας, συγκεκριμένα είναι μια μέτρηση που αποτυπώνει την άποψη της αγοράς για την πιθανότητα αλλαγών στην τιμή ενός δεδομένου περιουσιακού στοιχείου. Είναι ο μόνος παράγοντας που δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμος στην αγορά, υπονοείται από τις τιμές των δικαιωμάτων που υπάρχουν στην αγορά.

Στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης η μεταβλητότητα που χρησιμοποιείται είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Το Black – Scholes (1973) καθώς και το CRR (1979) υποθέτουν στα μοντέλα τους ότι είναι και παραμένει σταθερή σε βάθος χρόνου. Αυτό είναι ένα βασικό πρόβλημα των μοντέλων αυτών καθώς στην πραγματικότητα δεν είναι δυνατόν να παραμένει σταθερή και έτσι δημιουργεί αποκλίσεις στις τιμές που προκύπτουν από τα μοντέλα με τις πραγματικές αγοραίες τιμές. Μετά την κρίση του 87΄ δόθηκε βάση στην παρατήρηση της μεταβλητότητας και στην ποσοτικοποίηση της, εκεί προκύπτει και ένα άλλο πρόβλημα. Αφού η μεταβλητότητα αντιπροσωπεύει την μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος, παρατηρήθηκε ότι ποικίλει τόσο σε σχέση με την τιμή εξάσκησης (volatility skew structure) όσο και με τον χρόνο έως τη λήξη T (volatility term structure).

- Εάν αναλυθεί η μεταβλητότητα σε σχέση με την τιμή εξάσκησης (K), τότε παρατηρείται μια αρνητική σχέση της μεταβλητότητας και της τιμής εξάσκησης. Συγκεκριμένα, η τεκμαρτή μεταβλητότητα πέφτει όσο αυξάνεται η τιμή εξάσκησης, δημιουργώντας έτσι μια ασυμμετρία την οποία την ονομάζουμε volatility skew ή άλλες φορές volatility smirk. Επίσης, όταν ο υποκείμενος τίτλος είναι χρηματιστηριακός δείκτης παρατηρείται ένα σχήμα σε μορφή χαμόγελου όπου η τεκμαρτή μεταβλητότητα αυξάνεται σε μικρές και μεγάλες τιμές της τιμής εξάσκησης. Γι' αυτό και έχει μείνει πιο γνωστό ως το χαμόγελο της μεταβλητότητας (volatility smile).

- Παράλληλα, εάν μελετηθεί σε σχέση με τον χρόνο έως την λήξη του δικαιώματος (T), παρατηρείται πως η τεκμαρτή μεταβλητότητα αυξάνεται με την αύξηση του χρονικού ορίου T. Αυτό αναφέρεται ως volatility term structure.

Οι δυο αυτοί παράγοντες μαζί δημιουργούν την επιφάνεια της τεκμαρτής μεταβλητότητας (volatility surface). Οι τεκμαρτές θεωρίες δέντρων επεκτείνουν την θεωρία Black – Scholes (1973) για να την καταστήσουν συνεπή με το σχήμα του χαμογέλου. Επιτυγχάνουν αυτήν την συνέπεια εξάγοντας δεδομένα από το χαμόγελο της μεταβλητότητας το οποίο δημιουργείται από τιμές της αγοράς των τυποποιημένων δικαιωμάτων. Εφαρμόζεται διακριτά, έτσι ώστε τα τεκμαρτά δέντρα να προσαρμόζουν την τοπική μεταβλητότητα σε κάθε κόμβο, καθιστώντας το δέντρο πιο ευέλικτο και ταυτόχρονα να ταιριάζει με τα δικαιώματα της αγοράς.

3.2 Τεκμαρτά Δέντρα

Το μοντέλο αποτίμησης Black – Scholes (1973) βασίζεται στις παραδοχές ότι το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερή μεταβλητότητα σ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Όπου,

S_t : δηλώνει τη διαδικασία της τιμής του υποκείμενου τίτλου

μ : η αναμενόμενη απόδοση

W_t: αναφέρεται στην τυπική διαδικασία Wiener

Επομένως, η κατανομή που ακολουθεί η S_t είναι η λογαριθμοκανονική.

Ο πιο απλός τρόπος να επεκτείνουμε την θεωρία αυτής είναι αναβαθμίζοντας την εξίσωση σε

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(S,t) dW_t$$

όπου $\sigma(S,t)$ είναι η συνάρτηση της τοπικής μεταβλητότητας, που εξαρτάται και από τον χρόνο και από την τιμής εξάσκησης. Σύμφωνα με τους Derman και Kani (1994), με τις διαφορετικές τιμές της μεταβλητότητα στην πραγματικότητα, παρατηρείται πως δημιουργείται μια νέα μοναδική μη-λογαριθμοκανονική κατανομή η οποία είναι η συνέπεια της εκτέλεσης του τροποποιημένου τυχαίου περιπάτου. Στο άρθρο τους δείχνουν ότι είναι δυνατόν να προσδιοριστεί αριθμητικά η συνάρτηση $\sigma(S,t)$ απευθείας από τις τιμές της αγοράς των δικαιωμάτων που διαπραγματεύονται σε αγορά με ρευστότητα.

Ο βασικός σκοπός είναι να αναπτυχθεί ένα μοντέλο το οποίο:

- να έχει βασική υπόθεση την μη παραβίασης της συνθήκης του αρμπιτράζ (arbitrage-free) και να ταιριάζει στο χαμόγελο της μεταβλητότητάς και,
- να είναι ανεξάρτητο από τις προτιμήσεις των επενδυτών (preference-free), αποφεύγοντας έτσι επιπλέον μεταβλητές και να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση από εύκολα παρατηρήσιμα δεδομένα.

Έτσι στρεφόμαστε στην συστηματική εξαγωγή ενός μοναδικού δέντρου από το χαμόγελο της μεταβλητότητας που αντιστοιχεί στον τροποποιημένο περίπατο. Τα δέντρα αυτά ονομάζονται τεκμαρτά δέντρα, τα χρησιμοποιούμε για να αποτιμήσουμε παράγωγα προϊόντα και παράγουν τιμές που ταιριάζουν με της αγοραίες τιμές. Κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε με την βοήθεια των δέντρων αυτών τόσο την κατανομή όσο και την μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε μελλοντικούς χρόνους και επίπεδα της αγοράς.

Επιπλέον, καθώς οι τεκμαρτές θεωρίες υποθέτουν ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί μια διαδικασία της οποίας η στιγμιαία μεταβλητότητα ποικίλει μόνο ως πρός τον χρόνο και την τιμή εξάσκησης και δεδομένου ότι όλη η αβεβαιότητα στην τοπική μεταβλητότητα προέρχεται από την αβεβαιότητα στην τιμή του υποκείμενου τίτλου, τα δικαιώματα μπορούν να αντισταθμιστούν χρησιμοποιώντας τον τίτλο και έτσι όπως και στο Black – Scholes (1973) η αποτίμηση παραμένει ανεπηρέαστή από τις προτιμήσεις και συνεπώς ουδέτερη στον κίνδυνο.

Οι Derman και Kani (1994), επικεντρώθηκαν στην κατασκευή ενός τεκμαρτού διωνυμικού δέντρου (Implied Binomial Tree – IBT) χρησιμοποιώντας την μεταβλητότητα $\sigma(S, t)$, το οποίο είναι μια φυσική διακριτή αναπαράσταση μιας μη-λογαριθμοκανονικής διαδικασίας. Γενικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε πολυμερές δέντρο για την διακριτοποίηση της διαδικασίας αυτής.

Παρόλο που το IBT μοιάζει αρκετό και για την αποτίμηση των δικαιωμάτων, καθώς είναι αποτελεσματικό και πιο απλό στην χρήση αφού έχει μόνο έναν βαθμό ελευθερίας ως προς την αυθαίρετη επιλογή του κάτω κόμβου σε κάθε επίπεδο του δέντρου, παρατηρείται πως ορισμένα δέντρα υψηλότερης τάξης θα μπορούσαν να είναι πιο χρήσιμα και να αποδίδουν μια ευελιξία με αποτέλεσμα οι πιθανότητες μετάβασης και οι κατανομές πιθανοτήτων να ποικίλουν όσο το δυνατόν πιο ομαλά σε ένα δέντρο. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όταν οι τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς είναι ανακριβείς λόγω αναποτελεσματικότητας της αγοράς.

3.3 Κατασκευή Τεκμαρτού Τριωνυμικού Δέντρου

Για την σωστή κατασκευή του τεκμαρτού τριωνυμικό δέντρου είναι απαραίτητη η κατανόηση των βασικών μεταβλητών και υποθέσεων στις οποίες βασίζεται. Ο ορισμός ενός κατάλληλου χώρου καταστάσεων με σκοπό να βρεθούν οι σωστές πιθανότητες μετάβασης οι οποίες καθιστούν το μοντέλο ταιριαστό με το χαμόγελο της μεταβλητότητας.

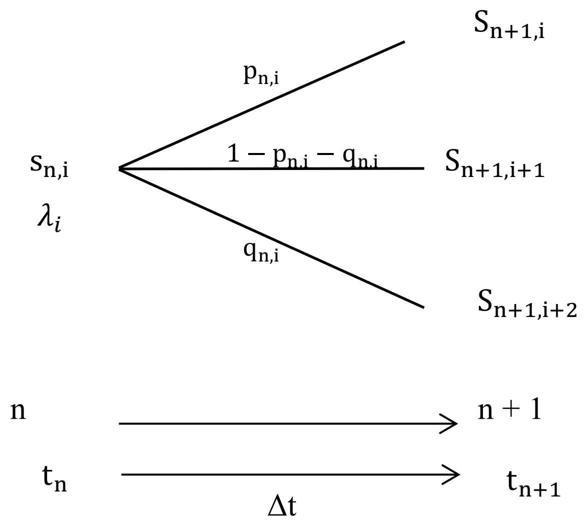
3.3.1 Βασικές μεταβλητές και υποθέσεις

Σύμφωνα με το άρθρο των Pavel Čížek και Karel Komorád (2005), γενικεύουμε τα τριωνυμικά δέντρα που έχουμε ήδη αναφέρει σε τεκμαρτά, ορίζοντας αρχικά την δομή τους, μέσω των δεδομένων που είναι ήδη γνωστά και εκείνων τα οποία αναζητάμε για να επιτύχουμε την σωστή κατασκευή τους. Όπου θα έχουμε ενσωματώσει την τεκμαρτή μεταβλητότητα της αγοράς και θα μπορούμε κατά συνέπεια να προβούμε σε ακριβέστερη αποτίμηση παραγώγων.

Αρχικά θεωρούμε:

- N το σύνολο όλων των επιπέδων (levels).
- $\mathrm{n} = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$ ορίζουμε το επίπεδο που αναφέρεται συνήθως στην αντίστοιχη χρονική στιγμή $\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{n}$.
- $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, 2\mathrm{n} - 1$ είναι ο δείκτης του κάθε κόμβου μέσα σε ένα επίπεδο, ξεκινώντας από τον πάνω-πάνω κόμβο.

***<u>Σχήμα 1</u>** <u>: Κόμβοι στο τριωνυμικό δέντρο ενός βήματος.</u>*



(Πηγή: Čížek & Komorád 2005)

όπου, $s_{n,i}$ η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο επίπεδο n την χρονική στιγμή t_n. Όπως ήδη γνωρίζουμε από την κατασκευή των απλών τριωνυμικών δέντρων η τιμή μπορεί να κινηθεί ως προς τρείς κατευθύνσεις στο επίπεδο n+1 την χρονική στιγμή t_{n+1}.

- στον πάνω κόμβο παίρνοντας την τιμή $S_{n+1,i}$ με πιθανότητα $p_{n,i}$
- στον κάτω κόμβο παίρνοντας την τιμή $S_{n+1,i+2}$ με πιθανότητα $q_{n,i}$
- στον μεσαίο κόμβο παίρνοντας την τιμή $S_{n+1,i+1}$ με πιθανότητα $1 - p_{n,i} - q_{n,i}$

Επίσης με τη μεταβλητή λ_i αναφερόμαστε στην τιμή Arrow-Debreu. Γενικά στα χρηματοοικονομικά ένα χρεόγραφο Arrow-Debreu είναι μια σύμβαση κατά την οποία εάν μια κατάσταση εμφανιστεί σε συγκεκριμένη στιγμή στο μέλλον πληρώνει μια μονάδα ενός ποσού, ενώ δεν πληρώνει τίποτα σε όλες τις υπόλοιπες άλλες καταστάσεις. Ως εκ τούτου, οποιοδήποτε συμβόλαιο παραγώγων του οποίου η αξία διακανονισμού είναι συνάρτηση ενός υποκείμενου τίτλου του οποίου η αξία είναι αβέβαιη κατά την ημερομηνία της σύμβασης, μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των τιμών Arrow-Debreu. Οι τιμές αυτές σχετίζονται σημαντικά με τα πολυμελή δέντρα και γίνονται χρήσιμες σε μεταγενέστερες παραλλαγές τους.

Στο τριωνυμικό αυτό μοντέλο το $\lambda_{n,i}$ είναι η γνωστή τιμή Arrow-Debreu στον κόμβο (n,i) του δέντρου και υπολογίζεται ως το άθροισμα των προεξοφλημένων πιθανοτήτων μετάβασης στον κόσμο μηδενικού κινδύνου όλων των διαδρομών που ξεκινούν από την ρίζα του δέντρου και καταλήγουν στον κόμβο (n,i). Ως αποτέλεσμα, η τιμή της ρίζας είναι ίση με ένα και οι τιμές Arrow-Debreu στους τελικούς κόμβους σχηματίζουν μια διακριτή προσέγγιση της πυκνότητας των τιμών αυτών. Οι τιμές αυτές προεξοφλούνται και ως εκ τούτου η πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου που αντιστοιχεί σε κάθε τελικό κόμβο θα πρέπει να υπολογίζεται ως το προϊόν της τιμής Arrow-Debreu και του παράγοντα κεφαλαιοποίησης e^{rT}.

Αναλυτικά,

$$\lambda_{1,1} = 1 \tag{20}$$

$$\lambda_{n+1,1} = e^{-r\Delta t}\lambda_{n,1}p_1 \tag{21}$$

$$\lambda_{n+1,2} = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,1}(1 - p_1 - q_1) + \lambda_{n,2}p_2\} \tag{22}$$

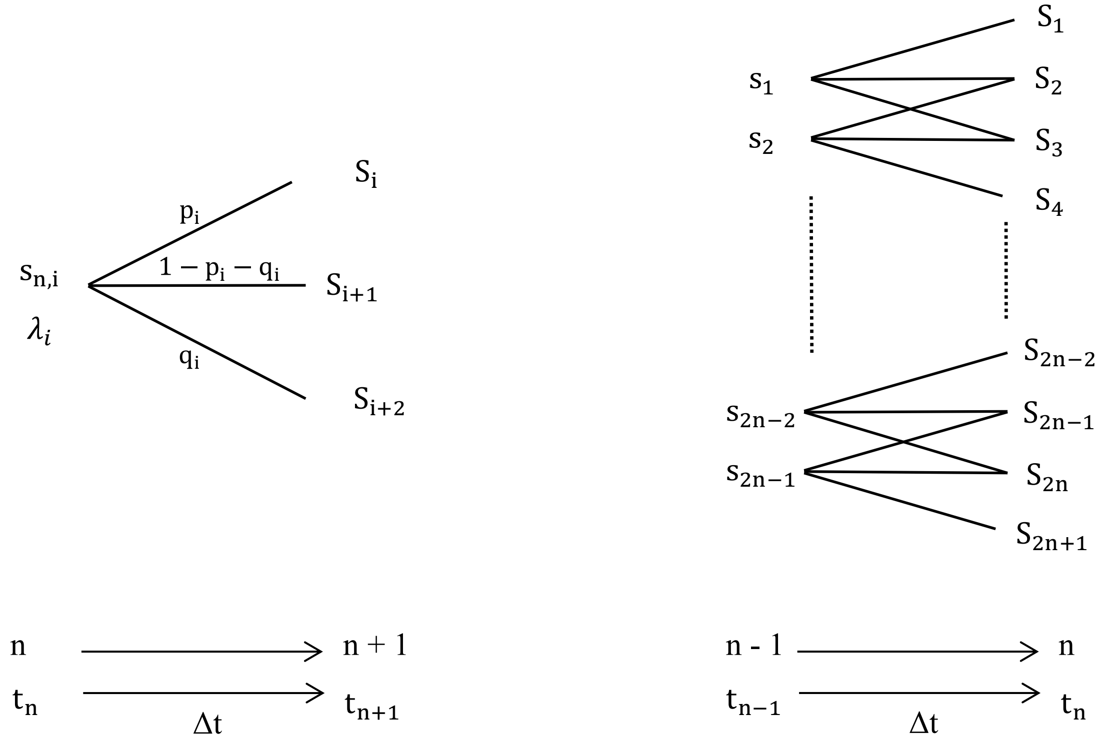
$$\lambda_{n+1,i+1} = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,i-1}q_{i-1} + \lambda_{n,i}(1 - p_i - q_i) + \lambda_{n,i+1}p_{i+1}\} \tag{23}$$

$$\lambda_{n+1,2n} = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,2n-1}(1 - p_{2n-1} - q_{2n-1}) + \lambda_{n,2n-2}q_{2n-2}\} \tag{24}$$

$$\lambda_{n+1,2n+1} = e^{-r\Delta t}\lambda_{n,2n-1}q_{2n-1} \tag{25}$$

Για ευκολία θα αναφερόμαστε σε αυτούς τους όρους ως $p_i, q_i, S_i, S_{i+1}, S_{i+2}$, εκτός και αν αναφερόμαστε σε κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο και πρέπει να αναφερθεί. Επομένως, σχηματικά έχουμε αριστερά έναν κόμβο με τους κλάδους του και δεξιά τους κόμβους σε δυο διαδοχικά επίπεδα

***Σχήμα 2**: Κόμβοι τριωνυμικού δέντρου. Αριστερά, μεμονωμένος κόμβος. Δεξιά, οι κόμβοι δυο μεταγενέστερων επιπέδων, των n-1 και n.*



(Πηγή: Čížek & Komorád 2005)

Ξεκινώντας από το $s_{n,i}$ στο επίπεδο n και πηγαίνοντας προς το επίπεδο n+1, υπάρχουν πέντε άγνωστες μεταβλητές. Οι δυο πιθανότητες μετάβασης p_i, q_i και οι τρείς τιμές στους νέους κόμβους S_i, S_{i+1}, S_{i+2}. Για να μπορέσουν να οριστούν σωστά και να ενσωματώσουν την πληροφορία του χαμόγελου της μεταβλητότητας, έτσι ώστε οι τιμές που θα δίνει το μοντέλο να συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων, πρέπει πρώτα να αναφέρουμε ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να ακολουθεί το δέντρο.

1) Το μοντέλο να είναι ουδέτερο στον κίνδυνο.

   Στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου πρέπει η αναμενόμενη αξία του υποκείμενου τίτλου στο τέλος της περιόδου να ισούται με την γνωστή τιμή forward $F_i = s_{n,i}e^{r\,\Delta t}$, όπου Δt το χρονικό βήμα από την στιγμή t_n στην χρονική στιγμή t_{n+1} και r είναι το συνεχές χωρίς κίνδυνο επιτόκιο. Γενικά το επιτόκιο αυτό εξαρτάται από τον χρόνο και μπορεί να ποικίλει από επίπεδο σε επίπεδο. Επομένως, καταλήγουμε στην συνθήκη,

$$E(s_{n+1,i}) = F_i$$

$$\Rightarrow\; p_i S_i + (1 - p_i - q_i)S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i = s_{n,i}e^{r\,\Delta t} \tag{26}$$

   Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί και μια κατάσταση

$$Var(s_{n+1,i}) = F_i^2 \sigma_i^2 \Delta t + O(\Delta t)$$

$$\Rightarrow p_i(S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i(S_{i+2} - F_i)^2 = F_i^2\sigma_i^2\Delta t + O(\Delta t) \tag{27}$$

   όπου σ_i είναι η τοπική μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου κατά τη διάρκεια του χρονικού βήματος και $O(\Delta t)$ δηλώνει όρους υψηλότερης τάξης από το Δt.

2) Το μοντέλο πρέπει να είναι arbitrage-free.

   Δεδομένου ότι οι εξισώσεις είναι δυο για πέντε άγνωστες παραμέτρους, συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει μοναδικό τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο. Επομένως, δίνεται η ευχέρεια ο μεσαίος κόμβος να οριστεί όπως κρίνεται καταλληλότερος με σκοπό να είναι μια επιλογή που αποφεύγει το αρμπιτράζ. Έτσι επιλέγεται ο μεσαίος κόμβος να είναι ίδιος με την τρέχουσα τιμή της μετοχής. Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι να οριστεί ο μεσαίος κόμβος και κατ' επέκταση και όλοι η μεθοδολογία για τα τριωνυμικά δέντρα. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλυθεί η προσέγγιση με βάση το άρθρο των Pavel Čížek και Karel Komorád (2005).

3) Οι πιθανότητες μετάβασης να ανήκουν στο διάστημα (0,1) και το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων να ισούται με την μονάδα.

4) Το μοντέλο να αναπαράγει σωστά το χαμόγελο της μεταβλητότητας.

   Ο επιπλέον βαθμός ελευθερίας που μας δίνει η χρήση του τριωνυμικού δέντρου αντί του διωνυμικού, δίνει και την δυνατότητα να γίνει πιο σωστή ενσωμάτωση του χαμόγελου της μεταβλητότητας, καθώς μας δίνει περισσότερες επιλογές για την τιμή του υποκείμενου τίτλου το οποίο αντιπροσωπεύει καλύτερα την πραγματική πορεία της τιμής.

3.3.2 Χώρος Καταστάσεων (State Space)

Η γενική ιδέα για την κατασκευή των τεκμαρτών τριωνυμικών δέντρων είναι να οριστούν πρώτα οι τιμές στους κόμβους και ύστερα με την βοήθεια των εξισώσεων (26) και (27) να βρούμε τις πιθανότητες μετάβασης και τις τοπικές μεταβλητότητες. Οι πρώτες θα πρέπει να ανήκουν στο διάστημα (0,1), γι' αυτό πρέπει εξαρχής να ορίσουμε έναν κατάλληλο χώρο καταστάσεων.

Παίρνοντας τα δεδομένα της αγοράς για όλα τα διαθέσιμα δικαιώματα, τις τιμές τους για διαφορετικές ληκτότητες και τιμές εξάσκησης μπορούμε να κατασκευάσουμε την επιφάνεια μεταβλητότητας και να εκτιμήσουμε μια αντιπροσωπευτική σταθερή τεκμαρτή μεταβλητότητα. Ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίον μεταβάλλεται η μεταβλητότητα σε σχέση με τον χρόνο και την τιμή εξάσκησης μπορούμε να ορίσουμε τον κατάλληλο χώρο καταστάσεων με δυο τρόπους.

1η Περίπτωση:

Όταν η τεκμαρτή μεταβλητότητα μεταβάλλεται αργά με την τιμή εξάσκησης και την λήξη του δικαιώματος, ένας χώρος καταστάσεων με ομοιόμορφο μέγεθος πλέγματος είναι επαρκής για την κατασκευή των ΙΤΤ. Επομένως, κατασκευάζουμε ένα απλό τριωνυμικό δέντρο σταθερής μεταβλητότητας, ίσης με την τεκμαρτή μεταβλητότητα που έχει εκτιμηθεί από τα δεδομένα την αγοράς, ως βάση για την κατασκευή του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου. Για το απλό τριωνυμικό δέντρο ισχύουν όλα όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2.2.

Οι τιμές στους νέους κόμβους θα δίνονται από τους τύπους:

$$S_i = s_{n,i} e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} \tag{28}$$

$$S_{i+1} = s_{n,i} \tag{29}$$

$$S_{i+2} = s_{n,i} e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \tag{30}$$

και οι πιθανότητες μετάβασης στο τριωνυμικό δέντρο δίνονται από τις εξισώσεις:

$$p_i = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 \tag{31}$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 \tag{32}$$

2η Περίπτωση:

Όταν η μεταβλητότητα ποικίλει σημαντικά σε σχέση με την τιμή εξάσκησης και την λήξη του δικαιώματος, η επιλογή του χώρου καταστάσεων πρέπει να είναι κατάλληλη έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει αυτές τις ιδιότητες. Υποθέτοντας ότι η μεταβλητότητα είναι διαχωρίσιμη στον χρόνο και στην τιμή, $\sigma(S,t) = \sigma(S)\sigma(t)$, τότε μπορεί να κατασκευαστεί ο κατάλληλος χώρος καταστάσεων με κατάλληλο skew structure και term structure σε τέσσερα στάδια:

Στάδιο 1ο:

Κατασκευή ενός κανονικού απλού τριωνυμικού πλέγματος με σταθερό χρονικό διάστημα Δt και σταθερό διάστημα τιμών ΔS με την υπόθεση ότι όλα τα επιτόκια και τα μερίσματα είναι μηδενικά.

Στάδιο 2ο:

Τροποποιούμε το Δt σε διαφορετικά χρονικά σημεία.
Θέτουμε τα αρχικά ισότιμα χρονικά σημεία $t_0 = 0, t_1 = 1, \dots, t_n = T$ και ψάχνουμε τους άγνωστους χρόνους κλιμάκωσης τους οποίους συμβολίζουμε με $\tilde{t}_0 = 0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n = T$ τέτοιους ώστε $\sigma(\tilde{t}_i)^2 \Delta\tilde{t}_i$ να είναι σταθερή για όλα τα $\tilde{t}_i$. Επομένως, τα βρίσκουμε λύνοντας τις μη γραμμικές εξισώσεις:

$$\tilde{t}_k \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sigma^2(\tilde{t}_i)} + \tilde{t}_k \frac{1}{\sigma^2(T)} = T \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma^2(\tilde{t}_i)}, \qquad k = 1, \dots, n-1$$

Στάδιο 3ο:

Τροποποιούμε το ΔS σε διαφορετικά επίπεδα.
Θέτουμε τις αρχικές γνωστές τιμές του υποκείμενου τίτλου ως $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}$ και ψάχνουμε τις αναδιαρθρωμένες τιμές τις οποίες ορίζουμε ως $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_{2n+1}$ λύνοντας την εξίσωση:

$$\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} = \exp\left\{\frac{c}{\sigma(S_k)} \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}\right\}, \qquad k = 2, \dots ,2n+1$$

Στάδιο 4ο:

Πολλαπλασιάζουμε όλες τις τιμές των κόμβων που έχουν μηδενικό ρυθμό την χρονική στιγμή t_i, με έναν αρκετά μεγάλο συντελεστή ανάπτυξης $e^{r\tilde{t}_i}$, έτσι ώστε να αυξηθούν οι τιμές των κόμβων και να αποφευχθούν παραβάσεις στις τιμές των προθεσμιακών τιμών (forward prices), όπως θα δούμε και στην συνέχεια του κεφαλαίου.

3.3.3 Πιθανότητες Μετάβασης

Αφού έχει οριστεί ο κατάλληλος και αποτελεσματικός χώρος καταστάσεων και έχει δημιουργηθεί το πλέγμα με τις τιμές του υποκείμενου τίτλου προχωράμε στην εύρεση των πιθανοτήτων μετάβασης *(n, i)* σε κάθε επίπεδο *n* του δέντρου.

Έχουμε τις τιμές $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{t}_{n+1})$ και $\mathrm{P}(\mathrm{K}, \mathrm{t}_{n+1})$, που δηλώνουν την τρέχουσα τιμή ενός τυπικού Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης αντίστοιχα με Κ τιμή εξάσκησης και t_{n+1} ο χρόνος λήξης του δικαιώματος. Αυτές οι τιμές μπορούν να ληφθούν από την επιφάνεια της μεταβλητότητας για διαφορετική τιμή εξάσκησης και λήξη.

Επίσης, οι τιμές των δικαιωμάτων δίνονται από το τριωνυμικό δέντρο ως οι προεξοφλημένες αναμενόμενες συναρτήσεις απόδοσης (payoff) στον κόμβο (n+1,j) με j=1,...,2n+1.

όπου:

Συνάρτηση απόδοσης για το δικαίωμα αγοράς : $max(S_j - K, 0) = (S_j - K)^+$

Συνάρτηση απόδοσης για το δικαίωμα πώλησης : $max(K - S_j, 0) = (K - S_j)^+$

Επομένως, οι τιμές των δικαιωμάτων δίνονται από τις αναμενόμενες αποδόσεις σε σχέση με τις πιθανότητες επίτευξης του κάθε κόμβου δηλαδή τις πιθανότητες μετάβασης.

$$\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{t}_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{p_j \lambda_{n,j} + (1 - p_{j-1} - q_{j-1})\lambda_{n,j-1} + q_{j-2}\lambda_{n,j-2}\}(S_j - K)^+ \qquad (33)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{K}, \mathrm{t}_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{p_j \lambda_{n,j} + (1 - p_{j-1} - q_{j-1})\lambda_{n,j-1} + q_{j-2}\lambda_{n,j-2}\}(K - S_j)^+ \qquad (34)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (23) για j έχουμε:

$$\lambda_{n+1,j} = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,j}p_j + \lambda_{n,j-1}(1 - p_{j-1} - q_{j-1}) + \lambda_{n,i-2}q_{i-2}\}$$

$$\xRightarrow{*(S_j - K)^+} \lambda_{n+1,j}(S_j - K)^+ = e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,j}p_j + \lambda_{n,j-1}(1 - p_{j-1} - q_{j-1}) + \lambda_{n,i-2}q_{i-2}\}(S_j - K)^+$$

$$\Rightarrow \sum \lambda_{n+1,j}(S_j - K)^+ = \sum e^{-r\Delta t}\{\lambda_{n,j}p_j + \lambda_{n,j-1}(1 - p_{j-1} - q_{j-1}) + \lambda_{n,i-2}q_{i-2}\}(S_j - K)^+$$

$$\Rightarrow \sum \lambda_{n+1,j}(S_j - K)^+ = e^{-r\Delta t}\sum \{\lambda_{n,j}p_j + \lambda_{n,j-1}(1 - p_{j-1} - q_{j-1}) + \lambda_{n,i-2}q_{i-2}\}(S_j - K)^+$$

Άρα η (33) γίνεται:

$$\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{t}_{n+1}) = \sum \lambda_{n+1,j}(S_j - K)^+$$

Ύστερα, ορίζοντας $K = S_{i+1}$ γίνεται αναδιάταξη μέσα στο άθροισμα και χρησιμοποιώντας και την εξίσωση (26) μπορούμε να εκφράσουμε τις πιθανότητες μετάβασης για όλους τους κόμβους κάτω από τον κεντρικό κόμβο ως εξής:

$$p_i = \frac{e^{r\Delta t}C(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{n+1,j}\left(F_j - S_{i+1}\right)}{\lambda_{n+1,i}(S_i - S_{i+1})}$$

Και με την βοήθεια της (26) βρίσκουμε το q_i

$p_i S_i + (1 - p_i - q_i)S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i$

$\Rightarrow\ p_i S_i + S_{i+1} - p_i S_{i+1} - q_i S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i$

$\Rightarrow\ p_i(S_i - S_{i+1}) + q_i(S_{i+2} - S_{i+1}) = F_i - S_{i+1}$

$\Rightarrow q_i(S_{i+2} - S_{i+1}) = F_i - S_{i+1} - p_i(S_i - S_{i+1})$

$\Rightarrow q_i = \dfrac{F_i - p_i(S_i - S_{i+1}) - S_{i+1}}{(S_{i+2} - S_{i+1})}$

Αντίστοιχα, με την χρήση της εξίσωσης (34) υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης για όλους τους κόμβους κάτω από τον κεντρικό συμπεριλαμβανομένου και του κεντρικού κόμβου την χρονική στιγμή t_n.

$$q_i = \frac{e^{r\Delta t}P(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^{2n-1} \lambda_{n+1,j}\left(S_{i+1} - F_j\right)}{\lambda_{n+1,i}(S_{i+1} - S_{i+2})}$$

Και με την βοήθεια της (26) βρίσκουμε το p_i

$p_i S_i + (1 - p_i - q_i)S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i$

$\Rightarrow\ p_i S_i + S_{i+1} - p_i S_{i+1} - q_i S_{i+1} + q_i S_{i+2} = F_i$

$\Rightarrow\ p_i(S_i - S_{i+1}) + q_i(S_{i+2} - S_{i+1}) = F_i - S_{i+1}$

$\Rightarrow p_i(S_i - S_{i+1}) = F_i - S_{i+1} - q_i(S_{i+2} - S_{i+1})$

$\Rightarrow p_i = \dfrac{F_i - q_i(S_{i+2} - S_{i+1}) - S_{i+1}}{(S_i - S_{i+1})}$

Επομένως, οι πιθανότητες μετάβασης υπολογίζονται ανάλογα με τον κόμβο στον οποίον βρισκόμαστε:

Στους **πάνω** κόμβους	Στους **μεσαίους** και **κάτω** κόμβους
$p_i = \dfrac{e^{r\Delta t}C(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{n+1,j}(F_j - S_{i+1})}{\lambda_{n+1,i}(S_i - S_{i+1})}$ (15) $q_i = \dfrac{F_i - p_i(S_i - S_{i+1}) - S_{i+1}}{(S_{i+2} - S_{i+1})}$ (16)	$q_i = \dfrac{e^{r\Delta t}P(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^{2n-1} \lambda_{n+1,j}(S_{i+1} - F_j)}{\lambda_{n+1,i}(S_{i+1} - S_{i+2})}$ (37) $p_i = \dfrac{F_i - q_i(S_{i+2} - S_{i+1}) - S_{i+1}}{(S_i - S_{i+1})}$ (38)
Σε κάθε περίπτωση οι μεσαίες πιθανότητες μετάβασης είναι ίσες με $1 - p_i - q_i$.	

Με χρήση της εξίσωσης (27) μπορούμε να προσεγγίσουμε τις τεκμαρτές τοπικές μεταβλητότητες εάν χρειαστεί ως εξής:

$$p_i(S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i(S_{i+2} - F_i)^2 = F_i^2\sigma_i^2\Delta t + O(\Delta t)$$

Το $O(\Delta t)$ είναι πολύ μικρός όρος, σχεδόν αμελητέος, άρα έχουμε

$$\Rightarrow p_i(S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i(S_{i+2} - F_i)^2 \approx F_i^2\sigma_i^2\Delta t$$

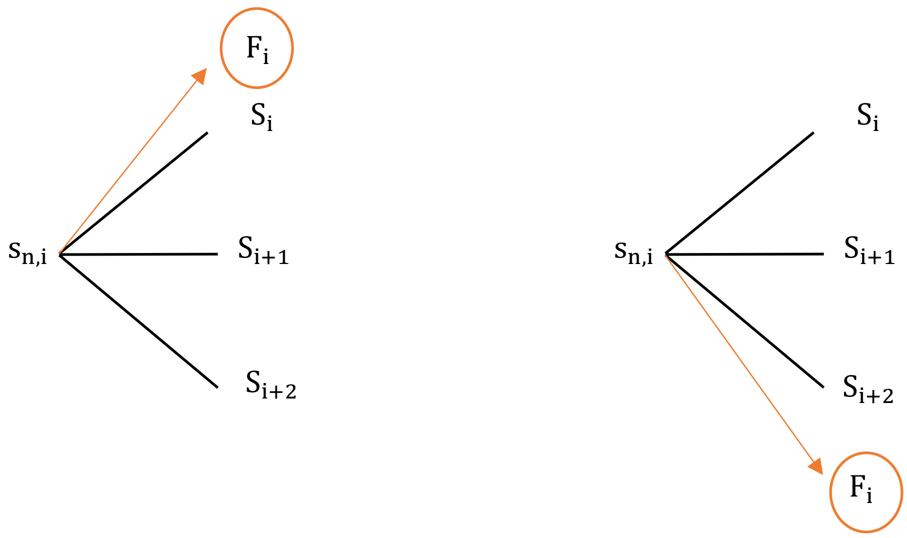
$$\Rightarrow \sigma_i^2 = \frac{p_i(S_i - F_i)^2 + (1 - p_i - q_i)(S_{i+1} - F_i)^2 + q_i(S_{i+2} - F_i)^2}{F_i^2\Delta t} \qquad (39)$$

3.4 Πιθανές Παγίδες

Όπως αναφέραμε στις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται για την σωστή κατασκευή του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου, οι πιθανότητες μετάβασης πρέπει να ανήκουν στο διάστημα (0,1) για να συμβαδίζουν με τις λογικές τιμές των δικαιωμάτων και να αποφευχθεί το αρμπιτράζ. Παρατηρείται στους τύπους (35) – (38) πως μπορούν να οδηγήσουν σε πιθανότητες αρνητικές ή μεγαλύτερες του ένα. Στην πραγματικότητα αντιμετωπίζουμε δυο πλευρές αυτού του προβλήματος:

1) Πρέπει να ελεγχθούν οι τιμές forward $F_{n,i}$ στον κόμβο (n,i) και καμία να μην βρίσκεται εκτός του εύρους των πιθανών τιμών στο επίπεδο (n+1) και κατά συνέπεια να δημιουργεί ευκαιρίες για αρμπιτράζ. Δηλαδή, πρέπει

$$F_{n,i} \in (S_{n+1,i+2}, S_{n+1,i})$$



Αυτό το πρόβλημα δεν είναι δύσκολο να ξεπεραστεί καθώς έχουμε την ευχέρεια να επιλέξουμε τον χώρο καταστάσεων όπως κρίνουμε κατάλληλα και έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους κόμβους που προκαλούν το πρόβλημα αυτό.

2) Συνήθως όταν υπάρχουν πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές δικαιωμάτων, συνεπάγονται και ακραίες τιμές της τοπικής μεταβλητότητας και κατ' επέκταση μπορούν να οδηγήσουν σε πιθανότητες οι οποίες να μην ανήκουν στο διάστημα (0,1). Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί το πρόβλημα να αντιμετωπιστεί αυτόματα εάν το $F_{n,i} \in (S_{n+1,i+2}, S_{n+1,i})$ και δεν παραβιάζεται η συνθήκη αυτή. Ειδάλλως, όπως πρότειναν και οι Derman, Kani και Chriss (1996) μπορούν οι προβληματικοί κόμβοι είτε να αφαιρεθούν και να γίνουν διωνυμικοί είτε να οριστούν οι πιθανότητες ως εξής:

$1^η$ περίπτωση: Για $F_{n,i} \in (S_{n+1,i+1}, S_{n+1,i})$	$2^η$ περίπτωση: Για $F_{n,i} \in (S_{n+1,i+2}, S_{n+1,i+1})$
$p_i = \frac{1}{2}\left[\frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} + \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}\right]$ $q_i = \frac{1}{2}\left[\frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}}\right]$ (40)	$p_i = \frac{1}{2}\left[\frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}\right]$ $q_i = \frac{1}{2}\left[\frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}} + \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}}\right]$ (41)
Σε κάθε περίπτωση οι μεσαίες πιθανότητες μετάβασης είναι ίσες με $1 - p_i - q_i$.	

Και στις δυο περιπτώσεις οι πιθανότητες θα είναι ανάμεσα στο διάστημα (0,1) διότι:

$1^η$ περίπτωση:

- $F_i - S_{i+1} > 0$
- $S_i - S_{i+1} > 0$
- $F_i - S_{i+1} < S_i - S_{i+1}$

$$0 < \frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} < 1$$

- $F_i - S_{i+2} > 0$
- $S_i - S_{i+2} > 0$
- $F_i - S_{i+2} < S_i - S_{i+2}$

$$0 < \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} < 1$$

και κατ' επέκταση η πρόσθεση τους κατά μέλη δίνει:

$$0 < \frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} + \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} < 2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\left[\frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} + \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}\right] < 1$$

$$\boxed{\Rightarrow 0 < p_i < 1}$$

Αντίστοιχα και για το $\mathrm{q_i}$ ισχύει:

- $\mathrm{S_i - F_i > 0}$
- $\mathrm{S_i - S_{i+2} > 0}$
- $\mathrm{S_i - F_i < S_i - S_{i+2}}$

$$0 < \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{S_i - F_i}}{\mathrm{S_i - S_{i+2}}}\right] < 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad 0 < \mathrm{q_i} < 1}$$

<u>2η περίπτωση:</u>

- $\mathrm{S_{i+1} - F_i > 0}$
- $\mathrm{S_{i+1} - S_{i+2} > 0}$
- $\mathrm{S_{i+1} - F_i < S_{i+1} - S_{i+2}}$

$$0 < \frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}} < 1$$

- $\mathrm{S_i - F_i > 0}$
- $\mathrm{S_i - S_{i+2} > 0}$
- $\mathrm{S_i - F_i < S_i - S_{i+2}}$

$$0 < \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} < 1$$

και κατ’ επέκταση η πρόσθεση τους κατά μέλη δίνει:

$$0 < \frac{\mathrm{S_{i+1} - F_i}}{\mathrm{S_{i+1} - S_{i+2}}} + \frac{\mathrm{S_i - F_i}}{\mathrm{S_i - S_{i+2}}} < 2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{S_{i+1} - F_i}}{\mathrm{S_{i+1} - S_{i+2}}} + \frac{\mathrm{S_i - F_i}}{\mathrm{S_i - S_{i+2}}}\right] < 1$$

$$\boxed{\Rightarrow 0 < \mathrm{q_i} < 1}$$

Αντίστοιχα και για το $\mathrm{p_i}$ ισχύει:

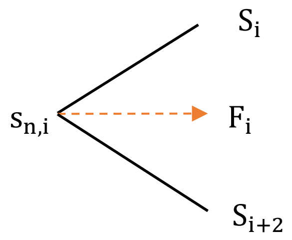
- $\mathrm{F_i - S_{i+2} > 0}$
- $\mathrm{S_i - S_{i+2} > 0}$
- $\mathrm{F_i - S_{i+2} < S_i - S_{i+2}}$

$$0 < \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{F_i - S_{i+2}}}{\mathrm{S_i - S_{i+2}}}\right] < 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad 0 < \mathrm{p_i} < 1}$$

Αναλυτικά, με δεδομένο ότι ο χώρος καταστάσεων θα είναι κατάλληλος για να μην παραβιάζεται η συνθήκη του αρμπιτράζ και έχει εξασφαλιστεί ότι $S_{i+2} < F_i < S_i$ και θέτοντας την μεσαία πιθανότητα ίση με μηδέν τότε μεταφερόμαστε στο διωνυμικό όπου:



Και ισχύουν:

$$p_i = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$$

$$\overset{*S}{\Rightarrow} p_i = \frac{Se^{r\delta t} - Sd}{Su - Sd}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} \qquad (42)$$

Αντίστοιχα αφού έχουμε διωνυμικό σε αυτήν την περίπτωση τότε ισχύει και

$$q_i = 1 - p_i$$

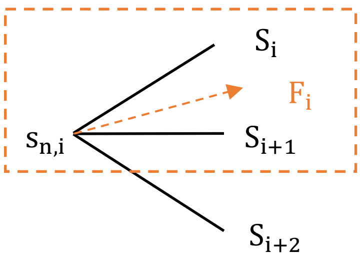
$$\Rightarrow q_i = 1 - \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_i - S_{i+2} - F_i + S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}$$

$$q_i = \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} \qquad (43)$$

Και ύστερα ελέγχουμε τις δυο υποπεριπτώσεις:

<u>Στην περίπτωση όπου $S_{i+1} < F_i < S_i$</u>, στο τριωνυμικό μοντέλο είναι σαν να απομονώνουμε το επάνω κομμάτι του.



Επομένως, από αυτό το διωνυμικό που αποκόψαμε έχουμε:

$$\Rightarrow p_i = \frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} \tag{44}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (42) και (44) έχουμε:

$$p_i + p_i = \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} + \frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}}$$

$$\Rightarrow 2p_i = \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} + \frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{1}{2}\left[\frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}} + \frac{F_i - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}}\right]$$

Επίσης στο διωνυμικό δέντρο που αποσπάσαμε ισχύει $q_i = 1 - p_i$ που δίνεται από τον τύπο (43), παράλληλα όμως το δέντρο αυτό που αποσπάσαμε ήταν απο ένα τριωνυμικό στο οποίο η ίδια πιθανότητα αυτή είναι ίση με $1 - p_i - q_i$. Άρα καταλήγουμε στην ισότητα:

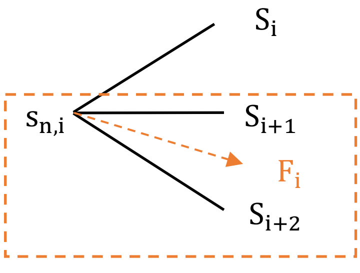
$$1 - p_i - q_i = q_i$$

$$\Rightarrow 2q_i = 1 - p_i$$

$$\Rightarrow 2q_i = \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}}$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{1}{2}\left[\frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}}\right]$$

<u>Στην περίπτωση όπου $S_{i+2} < F_i < S_{i+1}$</u>, στο τριωνυμικό μοντέλο είναι σαν να απομονώνουμε το επάνω κομμάτι του.



Επομένως, παρατηρούμε πως εάν απομονώσουμε το κάτω δέντρο έχουμε:

$$q_i = \frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}} \tag{45}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (43) και (45) έχουμε:

$$q_i + q_i = \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} + \frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}}$$

$$\Rightarrow 2q_i = \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}} + \frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}}$$

$$q_i = \frac{1}{2}\left[\frac{S_{i+1} - F_i}{S_{i+1} - S_{i+2}} + \frac{S_i - F_i}{S_i - S_{i+2}}\right]$$

Επίσης στο διωνυμικό δέντρο που αποσπάσαμε ισχύει $p_i = 1 - q_i$ που δίνεται από τον τύπο (42), παράλληλα όμως το δέντρο αυτό που αποσπάσαμε ήταν από ένα τριωνυμικό στο οποίο η ίδια πιθανότητα αυτή είναι ίση με $1 - p_i - q_i$. Άρα καταλήγουμε στην ισότητα:

$$1 - p_i - q_i = p_i$$

$$\Rightarrow 2p_i = \frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{1}{2}\left[\frac{F_i - S_{i+2}}{S_i - S_{i+2}}\right]$$

Τέλος, αφού ορίσουμε τις σωστές πιθανότητες μετάβασης βάσει της θεωρίας μπορούμε να προχωρήσουμε στην αποτίμηση των δικαιωμάτων με παρόμοιο τρόπο με το απλό τριωνυμικό δέντρο όπως αναφέρεται στην Ενότητα 2.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Στην ενότητα αυτή θα γίνει εμπειρική προσέγγιση στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης με το μοντέλο του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου των Pavel Čížek και Karel Komorád (2005), ενσωματώνοντας την πληροφορία του χαμόγελου της μεταβλητότητας όπως αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3, και θα ελεγχθεί ως προς την αποτελεσματικότητα του συγκριτικά με το απλό τριωνυμικό μοντέλο σταθερής μεταβλητότητας. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό θα προβούμε:

1. Στην κατανόηση της μεθοδολογίας και των δεδομένων της αγοράς που θα χρειαστούν για την εμπειρική μελέτη.

2. Στην συλλογή των κατάλληλων δεδομένων της αγοράς.

3. Στην εκτίμηση των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν.

4. Στην εφαρμογή των αλγορίθμων που κατασκευάστηκαν σύμφωνα με το μοντέλο αποτίμησης, για τον έλεγχο της αποδοτικότητας του μοντέλου αυτού πάνω σε πραγματικά δεδομένα της αγοράς.

4.1 Κατανόηση Μεθοδολογίας

Σύμφωνα με την ανάλυση του Κεφαλαίου 3, για την αποτίμηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης με την μέθοδο του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου θα χρειαστεί να κατανοήσουμε τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν, καθώς και τα δεδομένα που πρέπει να υπολογίσουμε σε κάθε βήμα για την κατασκευή του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου και ύστερα την αποτίμηση με το συγκεκριμένο μοντέλο. Αναλυτικά,

Με τα δεδομένα της αγοράς από τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης βρίσκουμε για κάθε συνδυασμό τιμής εξάσκησης και ληκτότητας, την τεκμαρτή μεταβλητότητα που του αντιστοιχεί μέσω του μοντέλου των Black and Scholes και κατ' επέκταση κατασκευάζεται η επιφάνεια μεταβλητότητας.

Σύμφωνα με τις πληροφορίες που εξάγουμε από την επιφάνεια μεταβλητότητας επιλέγουμε ποιος τρόπος είναι κατάλληλος για την κατασκευή του σωστού χώρου καταστάσεων. Με τα ίδια δεδομένα θα εκτιμηθεί και η τεκμαρτή μεταβλητότητα με βάση την οποία θα κατασκευαστεί και ένα αρχικό τριωνυμικό δέντρο στο οποίο θα βασιστεί και το τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο.

Με βάση το απλό τριωνυμικό δέντρο που κατασκευάστηκε, πηγαίνουμε σε κάθε κόμβο ξεχωριστά και βρίσκουμε:

- την τιμή Arrow-Debreu του κόμβου (λ_i)
- την Forward τιμή του κόμβου (F_i)
- την τιμή του δικαιώματος αγοράς ή πώληση από τα δεδομένα της αγοράς. Ανάλογα με το σημείο του δέντρου στο οποίο βρίσκεται ο κόμβος εάν είναι πάνω από την μέση ή στην μέση και κάτω θα χρειαστούμε $C(S_{i+1},t_{n+1})$ ή $P(S_{i+1},t_{n+1})$ αντίστοιχα, με τιμή εξάσκησης την τιμή του μεσαίου κόμβου S_{i+1} και λήξη την επόμενη χρονική στιγμή.
- και προσπαθούμε με τους τύπους (35)-(38) να βρούμε τις νέες διαμορφωμένες και διαφορετικές σε κάθε κόμβο πιθανότητες μετάβασης στις οποίες υπάρχει πλέον η πληροφορία της τεκμαρτής μεταβλητότητας και το καθιστά πιο ταιριαστό με τις πραγματικές τιμές της αγοράς.

Έχοντας βρει τις διαφορετικές πιθανότητες μετάβασης σε κάθε κόμβο του δέντρου, έχει κατασκευαστεί το τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο το οποίο ταιριάζει στο χαμόγελο της μεταβλητότητας.

Και κατ' επέκταση, μπορούμε με τις πληροφορίες αυτές να συνεχίσουμε με την αποτίμηση των δικαιωμάτων όπως ακριβώς γίνεται και στο απλό τριωνυμικό μοντέλο.

4.2 Δεδομένα Εμπειρικής Μελέτης

Για την εμπειρική μελέτη αντλήθηκαν δεδομένα από το Bloomberg και το Datastream, για όλα τα διαθέσιμα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης με υποκείμενο τίτλο τον χρηματιστηριακό δείκτη DAX της Γερμανίας για 7 ημέρες εντός του διαστήματος Σεπτεμβρίου με Οκτώβριο του 2020, και ύστερα επιλέχθηκε μια ημέρα, συγκεκριμένα η 17/09/2020 για το αριθμητικό παράδειγμα. Αναλυτικά τα δεδομένα είναι:

- Οι τιμές όλων των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης για διαφορετικές τιμές εξάσκησης και διαφορετικές ληκτότητες για τις ημέρες του δείγματος.
- Οι συγκεκριμένες τιμές εξάσκησης για τα παραπάνω δικαιώματα.
- Οι ληκτότητες για τα παραπάνω δικαιώματα.
- Η ημερήσια τιμή αγοράς του χρηματιστηριακού δείκτη DAX.
- Η ημερήσια απόδοση του 10-ετούς Αμερικανικού κρατικού ομολόγου.

4.3 Εκτίμηση Παραμέτρων

Ύστερα από την επιλογή του χώρου καταστάσεων, για την κατασκευή του δέντρου θα χρειαστεί η μεταβλητότητα σ με βάση την οποία θα κατασκευαστεί το ανοδικό άλμα u και το καθοδικό άλμα d στο τριωνυμικό δέντρο. Όμως η παράμετρος σ δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμη επομένως θα χρειαστεί να εκτιμηθεί. Για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός χρησιμοποιούμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt.

Είναι μια δημοφιλής μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση μη γραμμικών least square curve fitting problems, διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή καμπύλη από ένα σύνολο σημείων, ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων των σημείων από την καμπύλη, συγκεκριμένα των καταλοίπων. Δηλαδή υποθέτουμε:

- N στο πλήθος παρατηρήσεις $y_i, i = 1,2, \dots, N$.
- Μια συνάρτηση $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με n παραμέτρους $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- Για $N \geq n$, υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου $g(x) = \widehat{y_i}$ και κατ' επέκταση τα κατάλοιπα $r_i = \widehat{y_i} - y_i$.
- Συνολικά καταλήγουμε σε ένα διάστημα διάστασης N που περιέχει τα κατάλοιπα $R = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$
- Και επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση του προβλήματος $\min_x f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2}R(x)^T R(x)$

Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην υπόθεση πως έχουμε ένα μοντέλο και ένα σύνολο μεταβλητών που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Με την διαδικασία αυτή βρίσκει τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων που προήλθαν από το θεωρητικό μοντέλο με τις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς, έχουν όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή.

Η διαδικασία ελαχιστοποίησης των τετραγωνικών σφαλμάτων αποτυπώνεται μαθηματικά:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} \sum_{i=0}^{N} \left(f_i^{market}(K_i, T_i) - f_i^{model}(K_i, T_i) \right)^2$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι το σύνολο των παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Στην περίπτωση μας είναι το σ, και N είναι ο αριθμός των ημερών που πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις μέσα στο δείγμα.

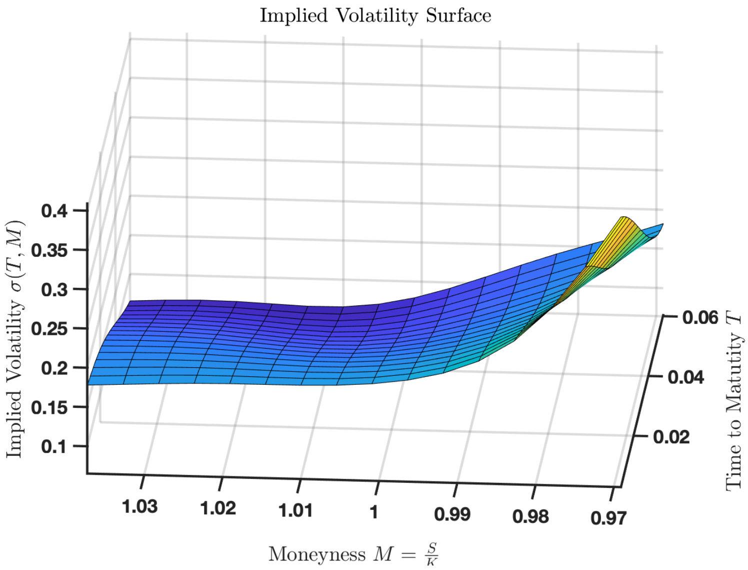
Στα δεδομένα της εργασία, χρησιμοποιούνται οι τιμές των δικαιωμάτων που βρίσκουμε από το απλό τριωνυμικό μοντέλο αποτίμησης, καθώς και οι πραγματικές τιμές της αγοράς που έχουμε στα δεδομένα μας. Στη συνέχεια, με χρήση του αλγόριθμου Levenberg-Marquardt στην γλώσσα προγραμματισμού MATLAB, πιο συγκεκριμένα με την εντολή lsqnonlin, βρίσκουμε για κάθε δικαίωμα τα τετραγωνικά σφάλματα και προσπαθούμε να εκτιμήσουμε ποιο είναι εκείνο το σ κατά το οποίο ελαχιστοποιούνται τα τετραγωνικά σφάλματα. Έτσι προκύπτει μία εκτίμηση της μεταβλητότητας από τα δεδομένα της αγοράς με βάση την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα απλό τριωνυμικό δέντρο ως έναρξη στην κατασκευή του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου.

Στην ημέρα που μελετήσαμε βρέθηκαν 4 διαφορετικές ληκτότητες (1 ημέρα, 1 εβδομάδα, 2 εβδομάδες και 3 εβδομάδες) και 20 διαφορετικές τιμές εξάσκησης με εύρος 5% πάνω από την τρέχουσα τιμή και 5% κάτω από την τρέχουσα τιμή του δείκτη, σύνολο 80 συνδυασμοί δικαιωμάτων αγοράς. Αυτά χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση μιας μοναδικής μεταβλητότητας και προκύπτει:

Εκτιμώμενο σ	0,1785

Με τα δικαιώματα αυτά κατασκευάζουμε μέσω της Matlab την επιφάνεια μεταβλητότητας.

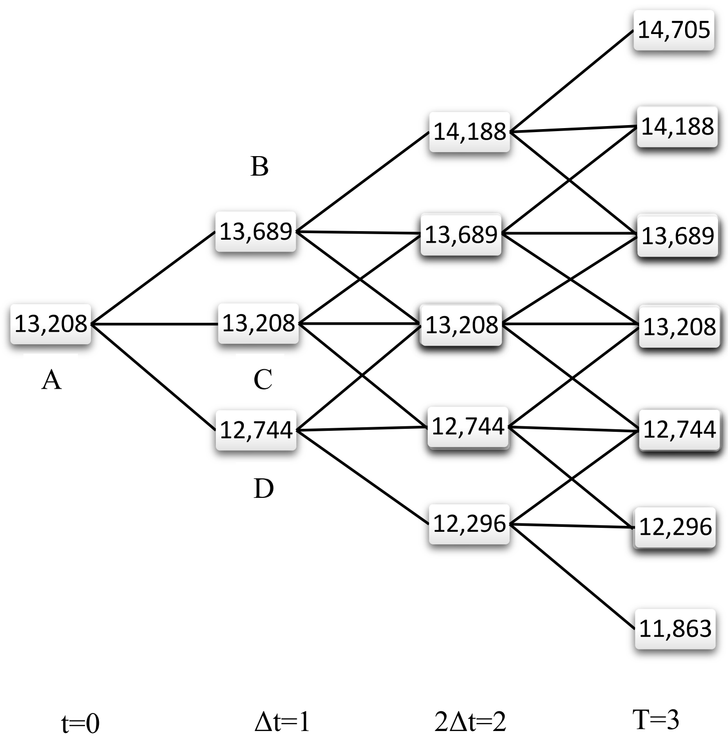
***<u>Σχήμα 3</u>**<u>: Επιφάνεια Τεκμαρτής Μεταβλητότητας</u>*



Παρατηρείται ότι δημιουργείται το γνωστό χαμόγελο της μεταβλητότης που έχει παρατηρηθεί στους δείκτες, όπου η μεταβλητότητα είναι χαμηλότερη όσο S=K και δείχνει να αυξάνεται όσο αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα η τιμή εξάσκησης K.

4.4 Αριθμητικό Παράδειγμα

Παρατηρείται πως η επιφάνεια μεταβλητότητας είναι σχετικά ομαλή και με μια ομαλή και σταδιακή μεταβολή της τεκμαρτής μεταβλητότης. Επομένως ένα απλό τριωνυμικό δέντρο ως βάση για την κατασκευή του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου είναι αρκετό. Το δέντρο αυτό κατασκευάζεται με την μεταβλητότητα σ=0.1785 που εκτιμήθηκε από τα δεδομένα της αγορά. Επίσης, έχουμε So=13,208 και r =0.679% το οποίο είναι ίσο με την λογαριθμική απόδοση του risk free rate. Ως πρώτο στάδιο κατασκευάζεται ένα απλό τριωνυμικό δέντρο όπως έχει αναφερθεί και στην Ενότητα 2.2 όπου το διάστημα Δt αναφέρεται σε εβδομάδες.



Στην συνέχεια αναζητούμε τις πιθανότητες μετάβασης με του τύπους (35)-(38). Ξεκινώντας από την ρίζα του δέντρου στο σημείο Α με So=13,208, επειδή ανήκει στους κεντρικούς κόμβους χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$q_A = \frac{e^{r\Delta t} P(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^{2n-1} \lambda_{n+1,j}(S_{i+1} - F_j)}{\lambda_{n+1,i}(S_{i+1} - S_{i+2})}$$

Για να βρεθεί η πιθανότητα καθόδου χρειάζονται οι εξής πληροφορίες:

- Οι τιμές Arrow-Debreu που αφορούν τον κόμβο Α, όπου εδώ είναι μόνο η τιμή $\lambda_{1,1} = 1$ η οποία ορίζεται ίση με ένα εξ' ορισμού λόγω της κορυφής του δέντρου.

- Η Forward τιμή του κόμβου Α, η οποία βρίσκεται μέσω του τύπου

$$F_A = s_A e^{r\,\Delta t} = 13209.92$$

- Και η τιμή του δικαιώματος πώλησης $P(S_{i+1}, t_{n+1}) = P(13208{,}1) = 126.52$, την οποία την βρίσκουμε από τα δεδομένα της αγοράς και αναφέρεται σε μεταβλητότητα 0.1810.
  Εάν η τιμή εξάσκησης και η λήκτότητα υπήρχε ήδη στα δεδομένα θα παίρναμε την τιμή από το δείγμα. Στην περίπτωση του K=13208 και T=1 εβδομάδα επειδή είναι διαφορετικά από τα ήδη υπάρχοντα, τότε αποτιμάται ξεχωριστά μέσω του απλού τριωνυμικού δέντρου. Συγκεκριμένα, γίνεται interpolation ταυτόχρονα για την τιμή εξάσκησης και για την λήκτότητα μέσω της εντολής interp2 στην Matlab για να εκτιμηθεί μια μεταβλητότητα σ για τον συγκεκριμένο συνδυασμό μεταβλητών. Έπειτα κατασκευάζεται ένα τριωνυμικό δέντρο με τα ίδια δεδομένα του αρχικού δέντρου αλλά με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα σ = 0.1810 ,και τέλος το δικαίωμα αποτιμάται με την μέθοδο του τριωνυμικού δέντρου.

Αφού έχουν βρεθεί όλες οι άγνωστες τιμές χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο και καταλήγουμε στην τιμή $q_A = 0{,}2725$, λύνουμε ύστερα τον τύπο (38)

$$p_A = \frac{F_i - q_i(S_{i+2} - S_{i+1}) - S_{i+1}}{(S_i - S_{i+1})}$$

και βρίσκουμε την πιθανότητα ανόδου $p_A = 0{,}2667$ και κατ' επέκταση την μεσαία πιθανότητα $p_{m(A)} = 0{,}4608$. Με την βοήθεια των πιθανοτήτων αυτών μπορούμε πλέον να ορίσουμε τα λ_i για την επόμενη χρονική στιγμή:

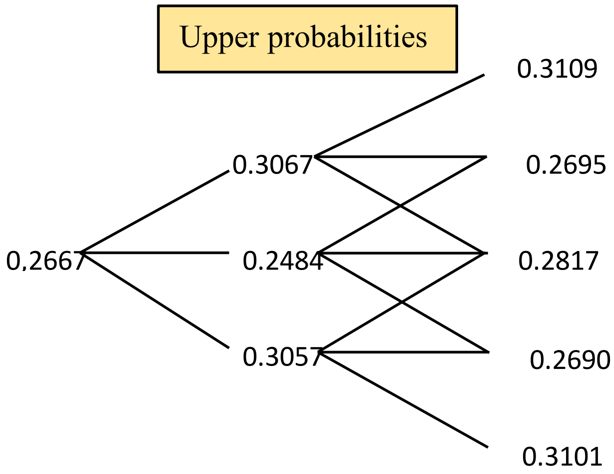
$$\lambda_B = e^{-r\Delta t}\lambda_A p_A$$

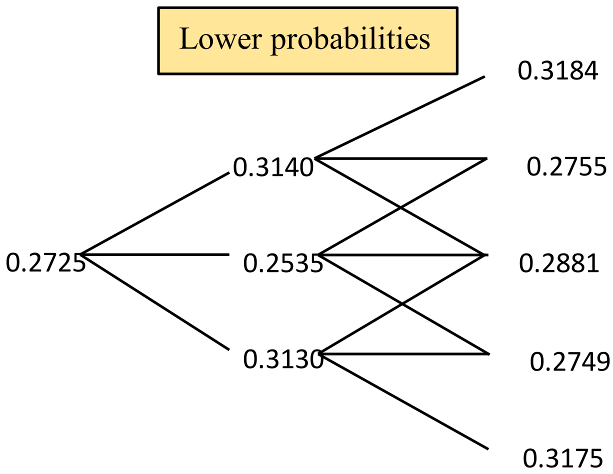
$$\lambda_C = e^{-r\Delta t}\lambda_A p_{m(A)}$$

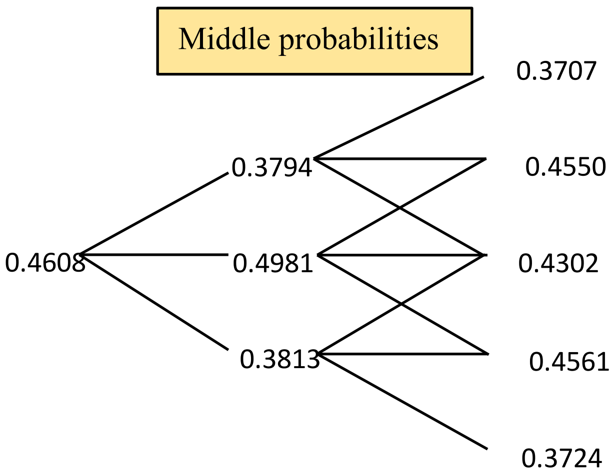
$$\lambda_D = e^{-r\Delta t}\lambda_A q_A$$

Αντίστοιχα με τα δεδομένα που βρίσκουμε για κάθε κόμβο προχωράμε να βρούμε και τις πιθανότητες μετάβασης και για τους υπόλοιπους κόμβους με τους αντίστοιχους τύπους σε κάθε κόμβο μέχρι να ολοκληρωθεί το δέντρο.

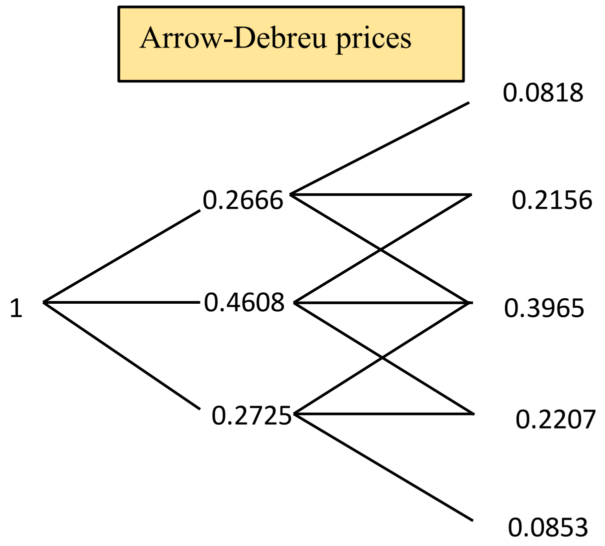
Συνολικά κάνοντας την διαδικασία αυτήν στην Matlab προκύπτουν οι εξής πιθανότητες μετάβασης.







Και αντίστοιχα έχουμε και τις τιμές Arrow-Debreu:



Έχοντας όλες αυτές τις πληροφορίες, μπορούμε να προχωρήσουμε στην αποτίμηση όπως γνωρίζουμε ήδη από το απλό τριωνυμικό δέντρο, με την ιδιαιτερότητα ότι αναδρομικά σε κάθε κόμβο θα υπολογίζεται η αξία με την χρήση των πιθανοτήτων μετάβασης που αφορούν τον εκάστοτε κόμβο, μέχρι να καταλήξουμε στον αρχικό κόμβο και την αξία του δικαιώματος. Αποτιμώντας το δικαίωμα με λήξη T=3 και τιμή εξάσκησης K=13200 η τιμή που προκύπτει είναι:

C(13200,3)	243.33

Εάν με την βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab υπολογίσουμε την τιμή του ίδιου δικαιώματος με το απλό τριωνυμικό δέντρο προκύπτει για N=3 η τιμή C(13200,3)=229.52 και για N=150 βήματα η τιμή C(13200,3)=237,63, ενώ η τιμή της αγοράς του δικαιώματος αυτού είναι ίση με 253. Καταλήγουμε, ότι το τεκμαρτό τριωνυμικό για N=3 δίνει τιμή πιο κοντά στην πραγματική όχι μόνο σε σχέση με το απλό τριωνυμικό για N=3 αλλά και για N=150 του οποίου η τιμή δεν περιέχει μεγάλο σφάλμα λόγω διακριτοποίησης του χρόνου.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποτιμήσουμε και ένα δικαίωμα πώλησης καθώς σύμφωνα με τους Derman και Kani (1994), λόγω του put-call parity, η μεταβλητότητα παραμένει ίδια στα δικαιώματα αγοράς και πώλησης με ίδια τιμή εξάσκησης και ίδιο χρόνο έως την λήξη. Επομένως θα έχουμε το ίδιο δέντρο με την μόνη διαφορά ότι η εσωτερική αξία υπολογίζεται ως $\max[K - S_i, 0]$.

4.5 Σύγκριση Μεθόδων

Συνολικά στο δείγμα των 7 ημερών εκτιμήθηκαν οι μεταβλητότητες της κάθε ημέρας και προέκυψαν τα αποτελέσματα:

Date	σ
17/9/20	0,1785
21/9/20	0,2605
30/9/20	0,2313
5/10/20	0,1964
15/10/20	0,2034
23/10/20	0,2550
26/10/20	0,2992
30/10/20	0,3309

Ύστερα αποτιμώντας τα δικαιώματα όλων των ημερών με λήξη 3 εβδομάδων με την μέθοδο του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου και αντίστοιχα με την μέθοδο του απλού τριωνυμικού δέντρου βρίσκουμε σχετικά σφάλματα της κάθε μεθόδου με τον τύπο

$$\text{σχετικό σφάλμα} = \frac{|C_{\text{market}} - C_{\text{model}}|}{|C_{\text{model}}|}$$

Και με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συγκρίνουμε ποιο μοντέλο προσεγγίζει περισσότερο την τιμή της αγοράς με N=3 χρονικά βήματα. Ως αποτελέσματα έχουμε τα παρακάτω δεδομένα.

Μέσος Όρος Σχετικών Σφαλμάτων

Date	Implied Trinomial Tree (N=3)	Standard Trinomial Tree (N=3)
17/9/20	0,023511525	0,104857424
21/9/20	0,078297154	0,078362664
30/9/20	0,095793115	0,095885728
5/10/20	0,047922241	0,048254462
15/10/20	0,078539919	0,078452851
23/10/20	0,082843264	0,08299433
26/10/20	0,095848372	0,095921535
30/10/20	0,078666904	0,078736982

Μέσος Όρος Τυπικών Σφαλμάτων	**0,072677812**	**0,082933247**
Μέγιστο	0,095848372	0,104857424
Ελάχιστο	0,023511525	0,048254462

Παρατηρείται, πως με την κατασκευή δέντρων μόνο τριών βημάτων η μέθοδος του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου έχει μικρότερα σχετικά σφάλματα συγκριτικά με την μέθοδο του απλού τριωνυμικού δέντρου. Συγκεκριμένα παρατηρείται πως για τις περισσότερες μέρες τα κατάλοιπα από το τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο είναι εμφανώς πιο μικρά από εκείνα του απλού τριωνυμικού.

Γεγονός που αναμενόταν καθώς η διαδικασία κατασκευής του τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου χρησιμοποίει ως δεδομένα πραγματικές τιμές της αγοράς και προσπαθεί να ενσωματώσει μέσω των πιθανοτήτων μετάβασης την πληροφορία της τεκμαρτής μεταβλητότητας και να καταστήσει το μοντέλο πιο ταιριαστό με το χαμόγελο της μεταβλητότητας που έχει παρατηρηθεί. Κατ' επέκταση πλησιάζει περισσότερο την πραγματική τιμή των δικαιωμάτων σε σχέση με το απλό τριωνυμικό μοντέλο.

Γνωρίζουμε επίσης, πως όσο αυξάνεται το χρονικό βήμα τόσο καλύτερη ακρίβεια έχει το μοντέλο αποτίμησης με το απλό τριωνυμικό δέντρο να προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική τιμή. Επομένως, αλλάζοντας το χρονικό βήμα του απλού μοντέλου από N=3 στα N=150 και διατηρώντας του τεκμαρτού στο N=3, προκύπτουν τα εξής σχετικά σφάλματα:

Μέσος Όρος Σχετικών Σφαλμάτων

Date	Implied Trinomial Tree (N=3)	Standard Trinomial Tree (N=150)
17/9/20	0,023511525	0,071631332
21/9/20	0,078297154	0,068053987
30/9/20	0,095793115	0,103008009
5/10/20	0,047922241	0,059055965
15/10/20	0,078539919	0,072541585
23/10/20	0,082843264	0,060760092
26/10/20	0,095848372	0,080069548
30/10/20	0,078666904	0,064466715

Μέσος Όρος Τυπικών Σφαλμάτων	**0,072677812**	**0,072448404**
Μέγιστο	0,095848372	0,103008009
Ελάχιστο	0,023511525	0,059055965

Παρατηρείται πως το τεκμαρτό τριωνυμικό μοντέλο με μόνο N=3 βήματα έχει πολλές φορές σχετικά σφάλματα πολύ κοντά σε εκείνα που παράγονται από το απλό τριωνυμικό με N=150 βήματα και ορισμένες φορές μικρότερα, με τον μέσο όρο των σφαλμάτων στο απλό μοντέλο για 150 βήματα να είναι 0,072448404 και τον μέσο όρο του τεκμαρτού με 3 βήματα μόνο να είναι 0,072677812. Γεγονός που δείχνει πως ένα τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο τριών βημάτων, ενσωματώνοντας την πληροφορία της τεκμαρτής μεταβλητότητας από τα δεδομένα της αγοράς, μπορεί να συναγωνιστεί ένα απλό τριωνυμικό δέντρο με πολλά περισσότερα χρονικά βήματα. Έτσι, δίνει την ελπίδα πως με την κατασκευή περισσότερων βημάτων του τεκμαρτού υπάρχει μια ακόμα καλύτερη και πιο ακριβής αποτίμηση των δικαιωμάτων αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Τα παράγωγα και ειδικότερα τα δικαιώματα προαίρεσης είναι από τα πιο δημοφιλή χρηματοοικονομικά μέσα. Η σωστή τιμολόγηση τους αποτελεί το βασικότερο εργαλείο και έχει γίνει πόλος έλξης πολλών ερευνών τα τελευταία χρόνια. Καθώς τα δικαιώματα προαίρεσης επηρεάζονται από πολλούς άλλους παράγοντες εκτός της τιμής του υποκείμενου τίτλου, βασική πηγή αβεβαιότητας αποτελεί η μεταβλητότητα η οποία έχει παρατηρηθεί πως δεν παραμένει σταθερή στο πέρας του χρόνου. Η διαπίστωση αυτή οδήγησε στην αναζήτηση και άλλων μεθόδων εκτός εκείνων που θεωρούσαν την μεταβλητότητα σταθερή όπως είναι το μοντέλο των Black – Scholes (1973).

Στην παρούσα διπλωματική αναλύθηκαν και άλλες μέθοδοι όπως το απλό τριωνυμικό μοντέλο αποτίμησης ως ένα διωνυμικό δέντρο δυο βημάτων, ενώ ως βασικό θέμα είναι η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο και η αποτελεσματικότητα του στην αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Αφού αναλύθηκε η μέθοδος κατασκευής ενός τεκμαρτού τριωνυμικού δέντρου και ο τρόπος αποτίμησης δικαιωμάτων με χρήση του μοντέλου αυτού, έγινε εμπειρική μελέτη πάνω στα διαθέσιμα δικαιώματα της αγοράς με υποκείμενο τίτλο τον χρηματιστηριακό δείκτη DAX. Αυτά τα δικαιώματα χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του τεκμαρτού δέντρου και ύστερα αποτιμήθηκαν με το απλό τριωνυμικό μοντέλο και με το τεκμαρτό τριωνυμικό μοντέλο, όπου στο τεκμαρτό προέκυψαν μικρότερα σφάλματα καθιστώντας το πιο αποτελεσματικό από το απλό τριωνυμικό. Επίσης, αποδείχθηκε πως για μόλις τρία βήματα του μοντέλου υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση στις πραγματικές τιμές των δικαιωμάτων αυτών και μπορεί να συναγωνιστεί αντιπροσωπευτικά και ένα απλό τριωνυμικό με πολλά περισσότερα χρονικά βήματα.

Το μοντέλο αυτό αποδείχθηκε ακριβές για τον υπολογισμό Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης, όμως λόγω της κατασκευής του, η οποία αποτελείται από ένα δέντρο κατασκευασμένο σε διακριτό χρόνο, είναι εξίσου εύκολο με τον ίδιο τρόπο να αποτιμήσουμε και Αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης, σταματώντας σε κάθε κόμβο του δέντρου και εξετάζοντας εάν η πρόωρη εξάσκηση είναι βέλτιστη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Άρθρα:

1. "Implied Trinomial Trees"by Pavel Čížek and Karel Komorád, February 2005. SFB 649 Discussion Paper 2005-007. Department of Econometrics and Operations Research, Universiteit van Tilburg, The Netherlands.

2. Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". Journal of Financial Economics 7: 229–263.

3. Derman, E. and Kani, I. (1994). "The Volatility Smile and Its Implied Tree." RISK 7(2): 139–145, 32–39.

4. Derman, E., Kani, I., and Chriss, N. (1996). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile". The Journal of Derivatives 3(4): 7–22

5. Dupire B. (1994). "Pricing with a smile", RISK 7(1): 18–20.

6. A ̈it-Sahalia, Y., Wang, Y., and Yared, F. (2001). "Do options markets correctly price the probabilities of movement of the underlying asset?" Journal of Econometrics 102, 67–110.

7. Black, F. and Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Lia-bilities". Journal of Political Economy 81: 637–654.

8. Fengler, M. R., Härdle, W., and Villa, C. (2003). "The dynamics of implied volatilities: a common principle components approach". Review of Derivatives Research 6: 179–202.

9. Franke, J., Härdle, W., and Hafner, C. M. (2004). "Statistics of Financial Mar-kets", Springer, Heidelberg, Germany.

10. Hull, J. and White, A. (1990). "Valuing derivative securities using the explicit finite difference method". The Journal of Finance and Quantitative Analysis 25: 87–100.

11. Jarrow, R. and Rudd A. (1983). "Option Pricing", Dow Jones-Irwin Publishing, Homewood, Illinois.

12. Komora ́d, K. (2002). " Implied Trinomial Trees and Their Implementation with XploRe". Computational Statistics (2003). Humboldt University, Institute for Statistics and Econometrics, Berlin, Germany.

13. Ross, S., Westerfield, R., and Jaffe, J. (2002). "Corporate Finance". Mc Graw-Hill.

14. Mark Rubinstein (2000). “On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Models”. The Journal of Derivatives, Winter 2000, 8 (2) 47-50

15. Zaboronski et al (2010). “Pricing Options Using Trinomial Trees”. University of Warwick

16. Emanuel Derman, Iraj Kani, and Neil Chriss (1996). “Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile”. Goldman Sachs, Quantitative Strategies Research Notes

17. Emanuel Derman and Iraj Kani (1994). “The Volatility Smile and Its Implied Tree”. Research Note, Goldman Sachs.

18. AA Dar, N Anuradha – “Comparison: binomial model and Black Scholes model”, Quantitative finance and Economics, 2018 - 108.163.191.246

19. Mark Rubinstein. “Implied Binomial Trees”, The journal of finance, July 1994- Willey Online Library.

20. MR Fengler, WK Hurdle, C Villa- “The dynamics of implied volatilities: A common principal components approach” 2003, Review of Derivatives Research-Springer.

21. PCO Zaboronski, K Zhang, Y Wang. “Pricing Options Using Trinomial Trees” 2008- University of Warwick.

Βιβλία:

1. Hull, J. (1989). “Options, Futures and Other Derivatives”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

2. J Franke, WK Härdle, CM Hafner, “Statistics of financial markets”– 2004 – Springer.

3. P Brandimarte (2013). “Numerical Methods in Finance and Economics: a MATLAB based introduction”.

4. Härdle, W., Kleinow, T., and Stahl, G. (2002). “Applied Quantitative Finance”. Springer-Verlag, Berlin.

Ακαδημαϊκές Σημειώσεις:

1. Παράγωγα Αξιόγραφα, Νικόλαος Εγγλέζος, Μάρτιος 2020, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

2. Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική, Νικόλαος Εγγλέζος, Οκτώβριος 2020, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Διαδίκτυο:

1. https://www.wikipedia.org

2. https://www.investopedia.com

3. https://www.mathworks.com

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Κώδικες MATLAB

Κώδικάς 1: Κατασκευή Τριωνυμικού Δέντρου

```
function [pricetree]=Sttree(So,T,sigma,N)
%κατασκευή  απλού  τριωνυμικού  δέντρου
dt=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));

pricetree=zeros(2*N+1,N+1);

for j=0:1:N
    for i=0:(2*j)
    pricetree(i+1,j+1)=So*(u^(j-i));
    end
end
end
```

Κώδικάς 2: Αποτίμηση δικαιωμάτων αγοράς με Τριωνυμικό Δέντρο

```
function [EurCallprice,lattice]=SttEurCall(So,K,r,q,T,sigma,N)
%  με τους κόμβους να είναι όπως στα συνηθισμένα δέντρα

%όπου So=τρέχουσα τιμή, K=τιμή εξάσκησης, r=το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, div=μερισματική απόδοση,
%T=ο χρόνος έως την λήξη του δικαιώματος, sigma =η μεταβλητότητα, N=το πλήθος των χρονικών
%βημάτων.
dt=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));
rd=r-q;

%υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης σε κάθε κόμβο

pu=((exp(rd*dt/2)-exp(-sigma*sqrt(dt/2)))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pd=((exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(rd*dt/2))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pm=1-pu-pd;

%φτιάχνουμε έναν μηδενικό πίνακα με γραμμές που αφορούν το πλήθος των ανοδικών κινήσεων
%i=0,...,2N και στήλες που αφορούν το πλήθος των χρονικών βημάτων j=0,...,N

lattice=zeros(2*N+1,N+1);
 %αρχικά γεμίζουμε το τελευταίο χρονικό βήμα με τα payoffs του δικαιώματος
for i=0:(2*N)
    lattice(i+1,N+1)=max(So*u^(N-i)-K,0);
end

%αναδρομικά συμπληρώνουμε όλον τον πίνακα.
for j=N-1:-1:0
    for i=0:(2*j)
        lattice(i+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(pu*lattice(i+1,j+2)+pm*lattice(i+2,j+2)+pd*lattice(i+3,j+2));
    end
```

```
end
%η τελευταία τιμή που έχει βρεθεί αναδρομικά είναι η τιμή του δικαιώματος σήμερα και έχει
%καταχωρηθεί στο (1,1) στοιχείο του πίνακα
EurCallprice=lattice(1,1);
end
```

Κώδικάς 3: Αποτίμηση δικαιωμάτων πώλησης με Τριωνυμικό Δέντρο

```
function [EurPutprice,lattice]=SttEurPut(So,K,r,q,T,sigma,N)
%  με τους κόμβους να είναι όπως στα συνηθισμένα δέντρα

%όπου So=τρέχουσα τιμή, K=τιμή εξάσκησης, r=το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, div=μερισματική απόδοση,
%T=ο χρόνος έως την λήξη του δικαιώματος, sigma =η μεταβλητότητα, N=το πλήθος των χρονικών
%βημάτων.

dt=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));
d=1/u;
rd=r-q;

%υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης σε κάθε κόμβο

pu=((exp(rd*dt/2)-exp(-sigma*sqrt(dt/2)))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pd=((exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(rd*dt/2))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pm=1-pu-pd;

  %φτιάχνουμε έναν μηδενικό πίνακα με γραμμές που αφορούν το πλήθος των ανοδικών κινήσεων
%i=0,...,2N και στήλες που αφορούν το πλήθος των χρονικών βημάτων j=0,...,N

lattice=zeros(2*N+1,N+1);
  %αρχικά γεμίζουμε το τελευταίο χρονικό βήμα με τα payoffs του δικαιώματος
for i=0:(2*N)
    lattice(i+1,N+1)=max(K-So*u^(N-i),0);
end
%αναδρομικά συμπληρώνουμε όλον τον πίνακα.
for j=N-1:-1:0
    for i=0:(2*j)
        lattice(i+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(pu*lattice(i+1,j+2)+pm*lattice(i+2,j+2)+pd*lattice(i+3,j+2));
    end
end
%η τελευταία τιμή που έχει βρεθεί αναδρομικά είναι η τιμή του δικαιώματος σήμερα και έχει
%καταχωρηθεί στο (1,1) στοιχείο του πίνακα

EurPutprice=lattice(1,1);
end
```

Κώδικας 4: Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς.

```
function [AmerCallprice]=SttAmerCall(So,K,r,div,T,sigma,N)
dt=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));
d=1/u;
rd=r-div;

%υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης σε κάθε κόμβο
```

```
pu=((exp(rd*dt/2)-exp(-sigma*sqrt(dt/2)))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pd=((exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(rd*dt/2))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pm=1-pu-pd;
 %φτιάχνουμε έναν μηδενικό πίνακα με γραμμές που αφορούν το πλήθος των ανοδικών κινήσεων
%i=0,...,2N και στήλες που αφορούν το πλήθος των χρονικών βημάτων j=0,...,N

lattice=zeros(2*N+1,N+1);
%αρχικά γεμίζουμε το τελευταίο χρονικό βήμα με τα payoffs του δικαιώματος
for i=0:(2*N)
    lattice(i+1,N+1)=max(So*(u^(i-N))-K,0);
end
 %αναδρομικά συμπληρώνουμε όλον τον πίνακα και ελέγχουμε εάν η πρόωρη εξάσκηση είναι βέλτιστη.
for j=N-1:-1:0
    for i=0:(2*j)
        latticeCallprice=exp(-
r*dt)*(pu*lattice(i+3,j+2)+pm*lattice(i+2,j+2)+pd*lattice(i+1,j+2));
        Payoff=max(So*(u^(i-j))-K,0);
        lattice(i+1,j+1)=max(latticeCallprice,Payoff);
    end
end

AmerCallprice=lattice(1,1);
end
```

Κώδικας 5: Αποτίμηση Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης

```
function [AmerPutprice]=SttAmerPut(So,K,r,div,T,sigma,N)
dt=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));
d=1/u;
rd=r-div;
%υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης σε κάθε κόμβο
pu=((exp(rd*dt/2)-exp(-sigma*sqrt(dt/2)))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pd=((exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(rd*dt/2))/(exp(sigma*sqrt(dt/2))-exp(-
sigma*sqrt(dt/2))))^2;
pm=1-pu-pd;

lattice=zeros(2*N+1,N+1);
 %υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης σε κάθε κόμβο
for i=0:(2*N)
    lattice(i+1,N+1)=max(K-So*(u^(i-N)),0);
end
 %αναδρομικά συμπληρώνουμε όλον τον πίνακα και ελέγχουμε εάν η πρόωρη εξάσκηση είναι βέλτιστη.
for j=N-1:-1:0
    for i=0:(2*j)
        latticePutprice=exp(-
r*dt)*(pu*lattice(i+3,j+2)+pm*lattice(i+2,j+2)+pd*lattice(i+1,j+2));
        Payoff=max(K-So*(u^(i-j)),0);
        lattice(i+1,j+1)=max(latticePutprice,Payoff);
    end
end

AmerPutprice=lattice(1,1);
end
```

Κώδικας 6: Υπολογισμός τεκμαρτών μεταβλητοτήτων

```
clear all
global So; %τρέχουσα τιμή του δείκτη
global strike; %τιμή εξάσκησης δικαιώματος
global ttm; %χρόνος έως την λήξη
global marketcall; %αγοραία τιμή δικαιώματος
global r; %επιτόκιο risk-free rate
global q; %μερισματική απόδοση
global N; %πλήθος χρονικών βημάτων

%ορίζουμε αρχικά μηδενικούς πίνακες που θα χρειαστούμε για την καταχώρηση των δεδομένων της
%αγοράς
So=zeros(1,80);
strike=zeros(1,80);
ttm=zeros(1,80);
marketcall=zeros(1,80);
r=zeros(1,80);
q=zeros(1,80);
N=zeros(1,80);

So=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B6:CC6');
strike=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B1:CC1');
ttm=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B2:CC2');
marketcall=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B3:CC3');
r=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B7:CC7');
q=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B8:CC8');
N=xlsread('Dax_Data.xlsx','data','B9:CC9');

impv_matrix=zeros(1,80);
 %επαναληπτικά βρίσκουμε τις τεκμαρτές μεταβλητότητες για κάθε συνδυασμό strikes και maturities.
for j=1:80

impv_matrix(j)=blsimpv(So(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),marketcall(i,j));
end

impliedvol=[impv_matrix];
%τα εξάγουμε σε ένα αρχείο excel
writematrix(impliedvol,'impliedvol.xlsx');
```

Κώδικας 7: Εκτίμηση παραμέτρων με τριωνυμικό μοντέλο.

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = SttCallcalibration(~)

global So; %τρέχουσα τιμή του δείκτη
global strike; %τιμή εξάσκησης δικαιώματος
global ttm; %χρόνος έως την λήξη
global marketcall; %αγοραία τιμή δικαιώματος
global r; %επιτόκιο risk-free rate
global q; %μερισματική απόδοση
global N; %πλήθος χρονικών βημάτων
global k; %βοηθητική παράμετρος
%ορίζουμε αρχικά μηδενικούς πίνακες που θα χρειαστούμε για την καταχώρηση των δεδομένων της
%αγοράς
So=zeros(1,80);
strike=zeros(1,80);
```

```
ttm=zeros(1,80);
marketcall=zeros(1,80);
r=zeros(1,80);
q=zeros(1,80);
N=zeros(1,80);
parameter=zeros(1,1); %implied volatility που θα εκτιμηθεί.
res=zeros(1,1); %κατάλοιπα ελαχιστοποίησης από τον αλγόρυθμο.
exit=zeros(1,1);

So=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B6:CC6');
strike=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B1:CC1');
ttm=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B2:CC2');
marketcall=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B3:CC3');
r=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B7:CC7');
q=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B8:CC8');
N=xlsread('Dax_Data.xlsx','data1','B9:CC9');

Stt_call_matrix=zeros(1,80);

i=1;
x0=[0.05];
lb=[0.001];
ub=[0.5];
k=i;
%επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt για την ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος
%τετραγωνικών σφαλμάτων με την άγνωστη παράμετρο
[x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@Sttcall,x0,lb,ub);

parameter(i)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;
%υπολογισμός των τιμών των δικαιωμάτων με το μοντέλο, με την αντικατάσταση του σ που έχει
εκτιμηθεί
for j=1:80

Stt_call_matrix(i,j)=SttEurCall(So(i,j),strike(i,j),r(i,j),q(i),ttm(i,j),x(
1),N(i,j));
end

callpricedata=Stt_call_matrix;
%εξαγωγή δεδομένων στο excel
writematrix(callpricedata,'callpricedata.xlsx');
writematrix(res,'residuals.xlsx');
writematrix(parameter,'parameter.xlsx');

end
```

Κώδικας 8: Βοηθητικός Αλγόριθμος για τον υπολογισμό των σφαλμάτων, ο οποίος καλείται από το SttCallcalibration.

```
function [SttEurCall_errors] = Sttcall(x)
global So; %τρέχουσα τιμή του δείκτη
global strike; %τιμή εξάσκησης δικαιώματος
global ttm; %χρόνος έως την λήξη
global marketcall; %αγοραία τιμή δικαιώματος
global r; %επιτόκιο risk-free rate
global q; %μερισματική απόδοση
global N; %πλήθος χρονικών βημάτων
global k; %βοηθητική παράμετρος
```

```
SttEurCall_errors=zeros(1,80);
%βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα στις τιμές της αγοράς και τις τιμές του τριωνυμικού μοντέλου δηλαδή
%τα κατάλοιπα.
for j=1:80
   SttEurCall_errors(j)=marketcall(k,j)-
SttEurCall(So(k,j),strike(k,j),r(k,j),q(k,j),ttm(k,j),x(1),N(k,j));
end
end
```

Κώδικας 9: Κώδικάς για την εύρεση τιμών δικαιωμάτων αγοράς, από τα δεδομένα της αγοράς με την βοήθεια του interpolation δυο ταυτόχρονων μεταβλητών, καλείται από την ImpliedTrinomialTreeCall.

```
function [mopt]=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps)
%εάν στο τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο βρισκόμαστε στους πάνω κόμβους θα επικαλεστούμε την
%συνάρτηση αυτή με σκοπό να βρούμε την τιμή του δικαιώματος που ανήκει σε εκείνο τον κόμβο με τιμή
%εξάσκησης τον μεσαίο κόμβο του πηγάζει από τον αρχικό κόμβο και λήξη την επόμενη χρονική στιγμή.

max1=xlsread('daxdata.xlsx','data1','A33'); %μέγιστη τιμή εξάσκησης δείγματος
max2=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','A35'); %μέγιστη ληκτότητα δείγματος
min1=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','A32'); %ελάχιστη τιμή εξάσκησης δείγματος
min2=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','A34'); %ελάχιστη ληκτότητα δείγματος

if (sk>=min1) && (sk<=max1) && (tm>=min2) && (tm<=max2)
     %εάν  ανήκουν στο διάστημα αυτό οι τιμές τότε κάνουμε interpolation να βρούμε την
%μεταβλητότητα του συνδυασμού αυτού και να βρούμε μετα την τιμή του δικαιώματος που του
%αντιστοιχεί.
    str=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','B26:U26');
    mat=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','B25:E25');
    volat=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','B27:U30');

    x=[str];
    y=[mat];
    [X,Y]=meshgrid(x,y);

    v=[volat];
    xq=[sk];
    yq=[tm];

    vq1=interp2(X,Y,v,xq,yq,'spline');


    mopt=SttEurCall(S,sk,rf,dv,tm,vq1,nsteps);
else
%εάν δεν ανήκουν στο διάστημα αυτό τότε εκτιμάμε την τιμή του δικαιώματος για τον συνδυασμό αυτό
%με την μεταβλητότητα που έχει εκτιμηθεί γενικά.
    mopt=SttEurCall(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);
end
end
```

Κώδικας 10: Κώδικάς για την εύρεση τιμών δικαιωμάτων πώλησης, από τα δεδομένα της αγοράς με την βοήθεια του interpolation δυο ταυτόχρονων μεταβλητών, καλείται από την ImpliedTrinomialTreeCall.

```
function [mopt]=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps)
%εάν στο τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο βρισκόμαστε στους μεσαίους και κάτω κόμβους θα
%επικαλεστούμε την συνάρτηση αυτή με σκοπό να βρούμε την τιμή του δικαιώματος που ανήκει σε
%εκείνο τον κόμβο με τιμή εξάσκησης τον μεσαίο κόμβο του πηγάζει από τον αρχικό κόμβο και λήξη την
%επόμενη χρονική στιγμή.

max1=xlsread('daxdata.xlsx','data1','A33'); %μέγιστη τιμή εξάσκησης δείγματος
max2=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','A35'); %μέγιστη ληκτότητα δείγματος
min1=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','A32'); %ελάχιστη τιμή εξάσκησης δείγματος
min2=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','A34'); %ελάχιστη ληκτότητα δείγματος

if (sk>=min1) && (sk<=max1) && (tm>=min2) && (tm<=max2)
    %εάν  ανήκουν στο διάστημα αυτό οι τιμές τότε κάνουμε interpolation να βρούμε την
%μεταβλητότητα του συνδυασμού αυτού και να βρούμε μετα την τιμή του δικαιώματος που του
%αντιστοιχεί.
    str=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','B26:U26');
    mat=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','B25:E25');
    volat=xlsread('daxdata.xlsx',' data1','B27:U30');

    x=[str];
    y=[mat];
    [X,Y]=meshgrid(x,y);

    v=[volat];
    xq=[sk];
    yq=[tm];

    vq1=interp2(X,Y,v,xq,yq,'spline');


    mopt=SttEurPut(S,sk,rf,dv,tm,vq1,nsteps);
else
%εάν δεν ανήκουν στο διάστημα αυτό τότε εκτιμάμε την τιμή του δικαιώματος για τον συνδυασμό αυτό
%με την μεταβλητότητα που έχει εκτιμηθεί γενικά.
    mopt=SttEurPut(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);
end
end
```

Κώδικας 11: Αλγόριθμος αποτίμησης δικαιωμάτων αγοράς με το τεκμαρτό τριωνυμικό μοντέλο.

```
function [EurCallprice]=ImpliedTrinomialTreeCall(So,K,r,q,T,sigma,N)

dt=T/N; %το χρονικό βήμα
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));%ποσοστό ανόδου
rd=r-q;
pricelattice=zeros(2*N+1,N+1);%πίνακας με τις τιμές του δείκτη και χτίζουμε το τριωνυμικό
%δέντρο
for j=0:1:N
    for i=0:(2*j)
    pricelattice(i+1,j+1)=So*(u^(j-i));
    end
end
```

```
z=exp(rd*dt);
forwardlattice=pricelattice*z;%τιμών forward
lamda=zeros(2*N+1,N+1); %τιμές Arrow-Debreu
upperprob=zeros(2*N+1,N+1); %πιθανότητες ανόδου
lowerprob=zeros(2*N+1,N+1); %πιθανότητες καθόδου
middleprob=zeros(2*N+1,N+1); %μεσαίες πιθανότητες
localvar=zeros(2*N+1,N+1);
localvol=zeros(2*N+1,N+1); %τοπική μεταβλητότητα

%πιθανότητες μετάβασής για την ρίζα του δέντρου
for j=0
    lamda(1,1)=1;
    for i=0:2*j
%βρίσκουμε τις τιμές των δικαιωμάτων από τα δεδομένα της αγοράς, καλώντας μια συνάρτηση.
        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);

lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);
%  ελέγχουμε εάν οι πιθανότητες που προκύπτουν από τους αρχικούς τύπους  εκπληρώνουν την
%συνθήκη να ανήκουν στο διάστημα (0,1), εάν δεν ανήκουν σε αυτό το διάστημα τότε εφαρμόζονται
%άλλοι τύποι για τον ορισμό των πιθανοτήτων που θα είναι καταλληλότερες για να αποφύγουμε τυχών
%παραβιάσεις.
minVal=0;
maxVal=1;

min1=pricelattice(i+2,j+2);
max1=pricelattice(i+1,j+2);

min2=pricelattice(i+3,j+2);
max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
            lowerprob(i+1,j+1);
            upperprob(i+1,j+1);
            middleprob(i+1,j+1);
        else
            if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
                upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
                lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
                middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1);
```

```
            elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2);
                upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricellattice(i+3,j+2)))/2;
                lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
                middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1);
            else
                disp('There was Forward valuation')
            end
        end


    end
end

for j=1 % προχωράμε στους επόμενους κόμβους του δέντρου, σε άλλα χρονικά βήματα ξεκινώντας
%από το πρώτο
    for i=0

        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);

upperprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)));
lowerprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
        middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
            lowerprob(i+1,j+1);
            upperprob(i+1,j+1);
            middleprob(i+1,j+1);
        else
        if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
            upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
```

```
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
           middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
           upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
           middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
           disp('There was Forward valuation')
        end
   end


end
    for i=1 %για τον πάνω πάνω κόμβο

        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i,j)*middleprob(i,j));

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);


        lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt-
lamda(i+2,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+2,j+1)))/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
        middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
           lowerprob(i+1,j+1);
           upperprob(i+1,j+1);
           middleprob(i+1,j+1);
```

```
        else
            if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
                middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

            elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
                middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

            else
              disp('There was Forward valuation')
            end
        end



 end
    for i=2:2*j

        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-1,j));

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);

lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
```

```
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

         elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

         else

              disp('There was Forward valuation')
          end
    end

  end
end


for j=2:N-1  %συνεχίζουμε με τα υπόλοιπα χρονικά βήματα

    for k=0
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k+1,j)*upperprob(k+1,j));
    end
    for k=1
        lamda(k+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(lamda(k,j)*middleprob(k,j)+lamda(k+1,j)*upperprob(k+1,j));
    end
    for k=2:N+1
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k-1,j)*lowerprob(k-
1,j)+lamda(k,j)*middleprob(k,j)+lamda(k+1,j)*upperprob(k+1,j));
    end
    for k=2*N-1
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k-1,j)*lowerprob(k-
1,j)+lamda(k,j)*middleprob(k,j));
    end
    for k=2*N
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k-1,j)*lowerprob(k-1,j));
    end

    for i=0  %για τον πάνω πάνω κόμβο

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
```

```
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);

upperprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)));
lowerprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);


        else
            disp('There was Forward valuation')
          end
    end


end
    for i=1:j-1  %για όλους τους κόμβους που είναι πάνω από τον μεσαίο
         totalsum=0;
         for k=1:i
            totalsum=totalsum+lamda(k,j+1)*(forwardlattice(k,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2));
         end
```

```
        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);

upperprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt-
totalsum)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2)));
lowerprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

         minVal=0;
         maxVal=1;

         min1=pricelattice(i+2,j+2);
         max1=pricelattice(i+1,j+2);

         min2=pricelattice(i+3,j+2);
         max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal)&&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
        if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
           upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
           disp('There was Forward valuation')
        end
   end


end
    for i=j:(2*j-1)%για τον μεσαίο κόμβο μέχρι τον προτελευταίο κόμβο σε κάθε βήμα
```

```
        totalsum=0;
        for k=(i+2):2*N
            totalsum=totalsum+lamda(k,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(k,j+1));
        end

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);


lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt-
totalsum)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
          disp('There was Forward valuation')
```

```
            end
      end


end
    for i=2*j %για τον τελευταίο κόμβο

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);


lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
           lowerprob(i+1,j+1);
           upperprob(i+1,j+1);
           middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
```

```
          disp('There was Forward valuation')
         end
     end


   end
end


for j=N
    for i=0
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));
    end
    for i=1
        lamda(i+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(lamda(i,j)*middleprob(i,j)+lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));
    end
    for i=2:N+1
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-
1,j)+lamda(i,j)*middleprob(i,j)+lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));
    end
    for i=2*N-1
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-
1,j)+lamda(i,j)*middleprob(i,j));
    end
    for i=2*N
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-1,j));
    end
end

 %βρίσκουμε τις τοπικές μεταβλητότητες για κάθε κόμβο
for j=0:N-1
    for i=0:(2*j)
localvar(i+1,j+1)=(upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))^2+middleprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))^2+lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))^2)/((forwardlattice(i+1,j+1))^2*dt);
localvol(i+1,j+1)=sqrt(localvar(i+1,j+1));
    end

end
%αποτιμάμε όπως ακριβώς και στο απλό τριωνυμικό δέντρο
lattice=zeros(2*N+1,N+1);

for i=0:(2*N)
    lattice(i+1,N+1)=max(So*u^(N-i)-K,0);
end

for j=N-1:-1:0
    for i=0:(2*j)
        lattice(i+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(upperprob(i+1,j+1)*lattice(i+1,j+2)+middleprob(i+1,j+1)*lattice(i+2,
j+2)+lowerprob(i+1,j+1)*lattice(i+3,j+2));
    end
end
EurCallprice=lattice(1,1);
 %εξάγουμε τα δεδομένα σε excel
writematrix(upperprob,'daxpi.xlsx');
writematrix(lowerprob,'daxqi.xlsx');
writematrix(middleprob,'daxpm.xlsx');
writematrix(lamda,'daxlamda.xlsx');
```

```
writematrix(localvol,'daxlocalvol.xlsx');
writematrix(forwardlattice,'daxforward.xlsx');
writematrix(lattice,'daxlattice.xlsx');

end
```

Κώδικας 12: Αλγόριθμος αποτίμησης δικαιωμάτων Πώλησης με το τεκμαρτό τριωνυμικό μοντέλο.

```
function [EurPutprice]=ImpliedTrinomialTreePut(So,K,r,q,T,sigma,N)

dt=T/N; %το χρονικό βήμα
u=exp(sigma*sqrt(2*dt));%ποσοστό ανόδου
rd=r-q;
pricelattice=zeros(2*N+1,N+1);%πίνακας με τις τιμές του δείκτη και χτίζουμε το τριωνυμικό
%δέντρο
for j=0:1:N
    for i=0:(2*j)
    pricelattice(i+1,j+1)=So*(u^(j-i));
    end
end


z=exp(rd*dt);
forwardlattice=pricelattice*z;%τιμών forward
lamda=zeros(2*N+1,N+1); %τιμές Arrow-Debreu
upperprob=zeros(2*N+1,N+1); %πιθανότητες ανόδου
lowerprob=zeros(2*N+1,N+1); %πιθανότητες καθόδου
middleprob=zeros(2*N+1,N+1); %μεσαίες πιθανότητες
localvar=zeros(2*N+1,N+1);
localvol=zeros(2*N+1,N+1); %τοπική μεταβλητότητα

%πιθανότητες μετάβασής για την ρίζα του δέντρου
for j=0
    lamda(1,1)=1;
    for i=0:2*j
%βρίσκουμε τις τιμές των δικαιωμάτων από τα δεδομένα της αγοράς, καλώντας μια συνάρτηση.
        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);



lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);
%  ελέγχουμε εάν οι πιθανότητες που προκύπτουν από τους αρχικούς τύπους  εκπληρώνουν την
%συνθήκη να ανήκουν στο διάστημα (0,1), εάν δεν ανήκουν σε αυτό το διάστημα τότε εφαρμόζονται
%άλλοι τύποι για τον ορισμό των πιθανοτήτων που θα είναι καταλληλότερες για να αποφύγουμε τυχών
%παραβιάσεις.
minVal=0;
```

```
maxVal=1;

min1=pricelattice(i+2,j+2);
max1=pricelattice(i+1,j+2);

min2=pricelattice(i+3,j+2);
max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
            lowerprob(i+1,j+1);
            upperprob(i+1,j+1);
            middleprob(i+1,j+1);
        else
            if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);
            elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2);
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricellattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);
            else
                disp('There was Forward valuation')
            end
        end


    end
end

for j=1 % προχωράμε στους επόμενους κόμβους του δέντρου, σε άλλα χρονικά βήματα ξεκινώντας
%από το πρώτο
    for i=0

        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);



upperprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)));
```

```
lowerprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
           lowerprob(i+1,j+1);
           upperprob(i+1,j+1);
           middleprob(i+1,j+1);
        else
        if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
           disp('There was Forward valuation')
        end
   end


end
    for i=1 %για τον πάνω πάνω κόμβο

        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i,j)*middleprob(i,j));

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);
```

```
lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt-lamda(i+2,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+2,j+1)))/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
           lowerprob(i+1,j+1);
           upperprob(i+1,j+1);
           middleprob(i+1,j+1);
        else
           if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

           elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

           else
             disp('There was Forward valuation')
           end
        end



 end
    for i=2:2*j

        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-1,j));

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
```

```
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);


lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
        middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

          elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

          else

              disp('There was Forward valuation')
          end
    end

  end
end


for j=2:N-1 %συνεχίζουμε με τα υπόλοιπα χρονικά βήματα
```

```
    for k=0
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k+1,j)*upperprob(k+1,j));
    end
    for k=1
        lamda(k+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(lamda(k,j)*middleprob(k,j)+lamda(k+1,j)*upperprob(k+1,j));
    end
    for k=2:N+1
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k-1,j)*lowerprob(k-
1,j)+lamda(k,j)*middleprob(k,j)+lamda(k+1,j)*upperprob(k+1,j));
    end
    for k=2*N-1
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k-1,j)*lowerprob(k-
1,j)+lamda(k,j)*middleprob(k,j));
    end
    for k=2*N
        lamda(k+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(k-1,j)*lowerprob(k-1,j));
    end

    for i=0 %για τον πάνω πάνω κόμβο

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);


upperprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)));
lowerprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
```

```
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
            disp('There was Forward valuation')
          end
    end


end
    for i=1:j-1 %για όλους τους κόμβους που είναι πάνω από τον μεσαίο
         totalsum=0;
         for k=1:i
            totalsum=totalsum+lamda(k,j+1)*(forwardlattice(k,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2));
         end

        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptC(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);


upperprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt-
totalsum)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2)));
lowerprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

         minVal=0;
         maxVal=1;

         min1=pricelattice(i+2,j+2);
         max1=pricelattice(i+1,j+2);

         min2=pricelattice(i+3,j+2);
         max2=pricelattice(i+2,j+2);

        if (upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal)&&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
```

```
        if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
           disp('There was Forward valuation')
        end
   end


end
    for i=j:(2*j-1)%για τον μεσαίο κόμβο μέχρι τον προτελευταίο κόμβο σε κάθε βήμα
        totalsum=0;
        for k=(i+2):2*N
            totalsum=totalsum+lamda(k,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(k,j+1));
        end
        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);



lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt-
totalsum)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);
```

```
        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
          lowerprob(i+1,j+1);
          upperprob(i+1,j+1);
          middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
          disp('There was Forward valuation')
         end
   end


end
    for i=2*j %για τον τελευταίο κόμβο
        sk=pricelattice(i+2,j+2);
        tm=j+2;
        sig=sigma;
        S=So;
        rf=r;
        dv=q;
        nsteps=150;
        mopt=moptP(S,sk,rf,dv,tm,sig,nsteps);



lowerprob(i+1,j+1)=(exp(r*dt)*mopt)/(lamda(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)));
upperprob(i+1,j+1)=(forwardlattice(i+1,j+1)-
lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-pricelattice(i+2,j+2))-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+2,j+2));
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        minVal=0;
        maxVal=1;

        min1=pricelattice(i+2,j+2);
        max1=pricelattice(i+1,j+2);

        min2=pricelattice(i+3,j+2);
        max2=pricelattice(i+2,j+2);
```

```
        if (lowerprob(i+1,j+1)>=minVal) && (lowerprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(upperprob(i+1,j+1)>=minVal) && (upperprob(i+1,j+1)<=maxVal) &&
(middleprob(i+1,j+1)>=minVal) && (middleprob(i+1,j+1)<=maxVal)
           lowerprob(i+1,j+1);
           upperprob(i+1,j+1);
           middleprob(i+1,j+1);
        else
          if (forwardlattice(i+1,j+1)>=min1) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max1)
upperprob(i+1,j+1)=(((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+2,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-
pricelattice(i+2,j+2)))+((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        elseif (forwardlattice(i+1,j+1)>=min2) &&
(forwardlattice(i+1,j+1)<=max2)
upperprob(i+1,j+1)=((forwardlattice(i+1,j+1)-
pricelattice(i+3,j+2))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2)))/2;
lowerprob(i+1,j+1)=(((pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+2,j+2)-
pricelattice(i+3,j+2)))+((pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))/(pricelattice(i+1,j+2)-pricelattice(i+3,j+2))))/2;
middleprob(i+1,j+1)=1-upperprob(i+1,j+1)-lowerprob(i+1,j+1);

        else
          disp('There was Forward valuation')
         end
    end


  end
end


for j=N
    for i=0
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));
    end
    for i=1
        lamda(i+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(lamda(i,j)*middleprob(i,j)+lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));
    end
    for i=2:N+1
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-
1,j)+lamda(i,j)*middleprob(i,j)+lamda(i+1,j)*upperprob(i+1,j));
    end
    for i=2*N-1
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-
1,j)+lamda(i,j)*middleprob(i,j));
    end
    for i=2*N
        lamda(i+1,j+1)=exp(-r*dt)*(lamda(i-1,j)*lowerprob(i-1,j));
    end
end

 %βρίσκουμε τις τοπικές μεταβλητότητες για κάθε κόμβο
for j=0:N-1
```

```
    for i=0:(2*j)
localvar(i+1,j+1)=(upperprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+1,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))^2+middleprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+2,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))^2+lowerprob(i+1,j+1)*(pricelattice(i+3,j+2)-
forwardlattice(i+1,j+1))^2)/((forwardlattice(i+1,j+1))^2*dt);
localvol(i+1,j+1)=sqrt(localvar(i+1,j+1));
    end

end
%αποτιμάμε όπως ακριβώς και στο απλό τριωνυμικό δέντρο
lattice=zeros(2*N+1,N+1);

for i=0:(2*N)
    lattice(i+1,N+1)=max(K-So*u^(N-i),0);
end

for j=N-1:-1:0
    for i=0:(2*j)
        lattice(i+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(upperprob(i+1,j+1)*lattice(i+1,j+2)+middleprob(i+1,j+1)*lattice(i+2,
j+2)+lowerprob(i+1,j+1)*lattice(i+3,j+2));
    end
end
EurPutprice=lattice(1,1);
 %εξάγουμε τα δεδομένα σε excel
writematrix(upperprob,'daxpi.xlsx');
writematrix(lowerprob,'daxqi.xlsx');
writematrix(middleprob,'daxpm.xlsx');
writematrix(lamda,'daxlamda.xlsx');
writematrix(localvol,'daxlocalvol.xlsx');
writematrix(forwardlattice,'daxforward.xlsx');
writematrix(lattice,'daxlattice.xlsx');

end
```

Κώδικας 13: Βοηθητικός Αλγόριθμος για τον υπολογισμό των σφαλμάτων ,με τεκμαρτό τριωνυμικό δέντρο .

```
function [IttEurCall_errors] = Ittcall(x)
global So; %τρέχουσα τιμή του δείκτη
global strike; %τιμή εξάσκησης δικαιώματος
global ttm; %χρόνος έως την λήξη
global marketcall; %αγοραία τιμή δικαιώματος
global r; %επιτόκιο risk-free rate
global q; %μερισματική απόδοση
global N; %πλήθος χρονικών βημάτων
global k; %βοηθητική παράμετρος


%για το παράδειγμα μας θα γίνει σε όλα δικαιώματα αναφέρονται στην ληκτότητα 3 εβδομάδων.
IttEurCall_errors=zeros(1,20);
%βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα στις τιμές της αγοράς και τις τιμές του τριωνυμικού μοντέλου δηλαδή
%τα κατάλοιπα.
for j=1:20
   IttEurCall_errors(j)=marketcall(k,j)- ImpliedTrinomialTreeCall
(So(k,j),strike(k,j),r(k,j),q(k,j),ttm(k,j),x(1),N(k,j));
end
end
```