ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ

Π.Μ.Σ «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

«Στοχαστική Μοντελοποίηση των Εταιρικών Στρατηγικών της Ρύπανσης του Περιβάλλοντος με Εφαρμογές στη Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης $C0_2$»

Ζαχαρόπουλος Κωνσταντίνος

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ .6η/11.06.2018 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Σεβρόγλου Βασίλειος (Επιβλέπων)

– Αγιακλόγλου Χρήστος

– Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Actuarial Science

M.SC. «ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT»

«On the Stochastic Modelling of Firm's Pollution Emission Strategies with an Application to CO_2 Option Pricing»

Zacharopoulos Konstantinos

PIRAEUS 2020

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπον καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κύριο Σεβρόγλου Βασίλειο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά, για την πολύτιμη καθοδήγηση και τις συμβουλές του.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον κύριο Αγιακλόγλου Χρήστο, Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πειραιά και τον κύριο Ψαρράκο Γεώργιο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά για την τιμή να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με στήριξε σε όλη αυτή τη διαδικασία.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τη λειτουργία αγοράς όσον αφορά την εταιρική ρύπανση του περιβάλλοντος και την σχέση του με την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης του διοξειδίου του άνθρακα, σε στοχαστικό περιβάλλον. Οι μηχανισμοί της αγοράς χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο σαν εργαλείο για την κατανομή σπάνιων αλλά μη κοστολογημένων δικαιωμάτων και πόρων ενώ παράδειγμα αποτελεί το Ευρωπαϊκό Σύστημα Εμπορίας Εκπομπών. Από πλευράς δυναμικής βελτιστοποίησης για τις εταιρείες που ανταγωνίζονται σε τέτοιου είδους περιβαλλοντολογικούς κανονισμούς παρουσιάζουμε την δυναμική της τιμολόγησης των αδειών ρύπανσης υπό συνθήκες μη συμμετρικής πληροφόρησης που επιτρέπει εσωτερικό, μικρής διάρκειας, δανεισμό και τραπεζικές εργασίες. Στην αγορά, υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός εταιρειών και το επίπεδο ρύπανσης κάθε εταιρείας ακολουθεί μια εξωγενή στοχαστική διαδικασία. Δείχνουμε ότι η μειωμένη τιμή άδειας είναι μια Martingale ακολουθία λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική διήθηση ενώ παρουσιάζεται το μοντέλο με μαθηματικό τρόπο. Τέλος, παραθέτουμε εφαρμογή σχετικά με έναν κλειστό τύπο τιμολόγησης για τα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα προαίρεσης.

Abstract

In this paper we will study, from a stochastic point of view, the functioning of the market regarding corporate pollution of the environment and its relation to the pricing of carbon stock options. Market mechanisms are increasingly used as a tool for allocating rare but uncharted rights and resources, for example the European Emissions Trading Scheme. In terms of dynamic optimization for companies competing in such environmental regulations, we present the dynamics of pricing of pollution permits under non-symmetrical information that allows short-term lending and banking. There is a specific number of companies on the market and the level of pollution of each company follows an exogenous stochastic process. We present that the reduced license fee is a Martingale sequence with respect to relative infiltration while presenting the model in a mathematical way. Finally, we will give an application regarding a closed type of pricing formula for European-style options.

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια λόγω της αυξημένης ρύπανσης οι κυβερνήσεις σχεδιάζουν με προσοχή πολιτικές καταπολέμησης που βασίζονται στην αγορά. Ενώ το κόστος της παραγωγικής διαδικασίας συνήθως ρυθμιζόταν από εξωτερικούς παράγοντες Pigou(1) στόχος των κυβερνήσεων ήταν η εσωτερίκευση του κόστους με την σωστή χρήση μέσων περιβαλλοντικής πολιτικής. Μία από τις πρώτες αναφορές σε τεχνικές που ασχολούνται με την καταπολέμηση της ρύπανσης, με βάση την αγορά, έγκειται στα έργα των Coase(2) και Dales(3). Στις δημοσιεύσεις τους παρουσιάζεται για πρώτη φορά το πρόβλημα μείωσης της ρύπανσης με οικονομικό υπόβαθρο ενώ παρουσίασαν μια αρχική μορφή των εμπορεύσιμων αδειών ρύπανσης. Βάση της δικής τους εργασίας ο Montgomery(4) παρουσίασε μια πιο αυστηρά θεωρητική αιτιολόγηση για το πως μια προσέγγιση βασισμένη στην αγορά οδηγεί στην αποτελεσματική κατανομή του κόστους μείωσης σε διάφορες πηγές ρύπανσης. Οι άδειες εκπομπών ρύπων εμφανίζονται στις εργασίες των Cronshaw και Kruse(5) καθώς και σε αυτή του Rubin(6), όπου αναλύεται πως σε μια αποδοτική αγορά, η ισορροπία της τιμής των αδειών εκπομπής ρύπων ισούται με το οριακό κόστος της φθηνότερης λύσης για τη μείωση της ρύπανσης. Αυτή η ιδέα καταρρίπτει την πεποίθηση ότι ένα υψηλό επίπεδο τιμών αδειών εκπομπής αερίων σημαίνει ότι εταιρείες με χαμηλότερο οριακό κόστος θα προσπαθήσουν να επωφεληθούν από τις διαφορές των τιμών.

Η πρώτη προσπάθεια ανάλυσης της τιμής των αδειών εκπομπής σε στοχαστικό συνεχές περιβάλλον με άπειρο χρονικό ορίζοντα έγινε από την Shennach(7). Παρουσίασε ένα μοντέλο όπου υπάρχει ένα επίπεδο παρεμπόδισης τέτοιο ώστε το τρέχον οριακό κόστος μείωσης ισούται με την τιμή της αγοράς που έχει η άδεια εκπομπής. Το 2008 ο Seifert(8) πρότεινε την ύπαρξη ενός ειδικού φορέα ο οποίος θα κρίνει με την χρήση ανάλογων μοντέλων αν η επιχείρηση πρέπει να ξοδέψει χρήματα προκειμένου να μειώσει το επίπεδο εκπομπών ρύπων. Το μοντέλο βασίζεται στην βέλτιστη απόφαση μείωσης των ρύπων μιας επηρεαζόμενης εταιρείας, το οποίο εξαρτάται από τις συνολικές αναμενόμενες εκπομπές ρύπων. Οι Fehr και

Hinz[9] διαχώρισαν σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα μέτρα μείωσης και επικεντρώθηκαν στον ενεργειακό τομέα λαμβάνοντας υπόψιν πως υπάρχουν n-πλήθος βοηθητικά προγράμματα που αποφασίζουν τα επίπεδα μείωσης τους βασιζόμενοι στη φθηνότερη δυνατή επιλογή βραχυχρόνιας μείωσης που ονομάζεται «αλλαγή καυσίμου».

Η βασική αρχή είναι μια αγορά αδειών που διαρκούν έναν καθορισμένο αριθμό περιόδων και διαχωρίζουν βραχυχρόνια και μακροχρόνια μέτρα μείωσης. Επίσης λίγες επιλογές είναι διαθέσιμες στις περισσότερες επιχειρήσεις και ακόμα λιγότερες επιλογές για βραχυπρόθεσμες πιθανότητες μείωσης. Έτσι, είναι δύσκολο να αλλάξει η διαδικασία επεξεργασίας ή παραγωγής, τουλάχιστον βραχυπρόθεσμα. Ο στόχος της εταιρείας είναι να επιλέξει τον βέλτιστο αριθμό αδειών για να αγοράσει ή να πουλήσει σε κάθε περίοδο μέχρι την λήξη αυτής.

Η εργασία μας διαρθρώνεται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στην σύμβαση του Kyoto που οδήγησε στην ανάγκη δημιουργίας ενός συστήματος εμπορίας αδειών. Στην συνέχεια αναλύουμε τα συστήματα εμπορίας αδειών ρύπων και πως αυτά λειτουργούν μέσα σε ένα οργανωμένο σύστημα αγοράς ενώ γίνεται αναφορά και στα σημαντικότερα συστήματα παγκοσμίως και σε κάποιες από τις ιδιαιτερότητες τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές μαθηματικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Στην συνέχεια αναφερόμαστε στις διαδικασίες Martingale και στο μοντέλο τιμολόγησης που απορρέει από τις εν λόγω διαδικασίες. Κάνουμε μια εισαγωγή στην κίνηση brown και στην εξίσωση black και scholes η οποία χρησιμοποιείται στην συνέχεια στα δικαιώματα προαίρεσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και των κινήσεων που μπορούν να γίνουν πάνω στα δικαιώματα. Παρουσιάζεται συνοπτικά ένα μοντέλο τιμολόγησης των δικαιωμάτων προκειμένου να διαπιστώσουμε ποια θεωρείται δίκαιη τιμολόγηση αυτών των προϊόντων.

Τέλος παρουσιάζουμε τον τρόπο τιμολόγησης των δικαιωμάτων άδειας εκπομπής ρύπων σε 2 καταστάσεις, ανάλογα με τον αριθμό των εταιρειών στην αγορά και με τον αριθμό των περιόδων. Έτσι καταλήγουμε στην βέλτιστη τιμολόγηση της αξίας των αδειών σε κάθε περίπτωση.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις Στρατηγικές Ρύπανσης του Περιβάλλοντος

1.1 Αρχικές Δράσεις

Οι πρώτες ενέργειες για την καταπολέμηση της κλιματικής αλλαγής έγιναν με την σύμβαση των Ηνωμένων Εθνών για την αλλαγή του κλίματος(10), η οποία επιτεύχθηκε τον Μάϊο του 1992 και τέθηκε σε ισχύ τον Μάρτιο του 1994. Η σύμβαση αυτή υποχρεώνει κάθε συμβαλλόμενο μέλος να δημιουργήσει εθνικά προγράμματα και μηχανισμούς ελέγχου προκειμένου να περιορισθούν οι εκπομπές αέριων ρύπων και να υποβάλλουν τακτικές αναφορές αναφορικά με τα αποτελέσματα τους. Σημαντικό στοιχείο αποτελεί ο διαχωρισμός των κρατών που συμπεριλαμβάνονται στο πλαίσιο σε βιομηχανικές και αναπτυσσόμενες χώρες καθώς θεωρείται πως οι βιομηχανικές χώρες είναι αυτές οι οποίες ευθύνονται για το μεγαλύτερο μέρος της ρύπανσης και διαθέτουν τα μέσα και τους πόρους να την περιορίσουν. Η σύμβαση αυτή ονομάσθηκε Kyoto protocol, λόγω της τοποθεσίας του συνεδρίου, και περιλάμβανε 186 χώρες από όλο τον κόσμο οι οποίες χωρίσθηκαν σε 2 κατηγορίες όπως προαναφέρθηκε, *Αναπτυσσόμενες* και *Βιομηχανικές*.

Οι υπόλοιπες 146 χώρες που δεν συμπεριλαμβάνονται στον πίνακα θεωρούνται αναπτυσσόμενες και είναι ευάλωτες στις αρνητικές επιπτώσεις της κλιματικής αλλαγής. Ιδιαίτερη προσοχή παρέχεται σε 48 χώρες οι οποίες θεωρούνται από τα Ηνωμένα Έθνη ως λιγότερο ανεπτυγμένες λόγω των περιορισμένων δυνατοτήτων τους να αντιδράσουν στις κλιματικές αλλαγές. Βάση της σύμβασης του Kyoto δημιουργήθηκαν συστήματα εμπορίας αέριων ρύπων σε χώρες που ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία της σύμβασης.

Αφού τέθηκε η σύμβαση του Κιότο σε ισχύ δημιουργήθηκε η πρώτη περίοδος δέσμευσης που διήρκησε από το 2008 μέχρι το 2012 κατά την οποία οι συμμετέχοντες αποφάσισαν και δεσμεύτηκαν να μειώσουν τις εκπομπές τους κατά τουλάχιστον 5% από τα επίπεδα εκπομπών του 1990 και πολλές χώρες δημιούργησαν συστήματα εμπορίας με μοναδικό σκοπό να συμβαδίσουν με την πρώτη περίοδο της σύμβασης. Στο 8ο συνέδριο των εθνών με θέμα την σύμβαση του Κιότο, που έλαβε χώρα στην Ντόχα του Κατάρ, οι συμμετέχοντες συμφώνησαν στην έναρξη της 2ης περιόδου, χωρίς να πρέπει να δεσμευτούν υποχρεωτικά την ίδια στιγμή, που ξεκίνησε το 2013 και εκτείνεται μέχρι το 2020.

Η πρώτη χώρα που δεσμεύτηκε ήταν τα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα στις 26 Απριλίου 2013 ενώ η τελευταία είναι η Δημοκρατία του Τόγκο (χώρα της δυτικής Αφρικής) στις 30 Οκτωβρίου 2018.

*Πίνακας 1: Βιομηχανικές χώρες της σύμβασης και τα όρια εκπομπής ρύπων σε % των αρχικών ρύπων της χώρας

Αυστραλία 108	Αυστρία 92	Βέλγιο 92	Βουλγαρία 92	Καναδάς 94	Κροατία 95	Τσεχία 92	Δανία 92
Εσθονία 92	Φιλανδία 92	Γαλλία 92	Γερμανία 92	Ελλάδα 92	Ουγγαρία 94	Ισλανδία 110	Ιρλανδία 92
Ιταλία 92	Ιαπωνία 94	Λετονία 92	Λίχτενσταϊν 92	Λιθουανία 92	Λουξεμβούργο 92	Μόναχο 92	Ολλανδία 92
Νέα Ζηλανδία 100	Νορβηγία 101	Πολωνία 94	Πορτογαλία 92	Ρουμανία 92	Ρωσία 100	Σλοβακία 92	Σλοβενία 92
Ισπανία 92	Σουηδία 92	Ελβετία 92	Ουκρανία 100	Ηνωμένο Βασίλειο 92	Η.Π.Α. 93		

Τα πιο γνωστά και αξιοσημείωτα συστήματα εμπορίας που θα αναφέρουμε σε κάποιον βαθμό είναι τα συστήματα του Ηνωμένου Βασιλείου, Νέας Νότιας Ουαλίας(Πολιτεία της Αυστραλίας), Νορβηγίας, Καναδά, Ελβετίας, Νέας Ζηλανδίας, ΗΠΑ, Τόκιο και αυτό που θα αποτελέσει το κύριο θέμα της συγκεκριμένης εργασίας, της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

1.2 Βασικά στοιχεία συστημάτων εμπορίας αδειών εκπομπής ρύπων

Σε ένα σύστημα εμπορίας αδειών συμμετέχουν εταιρείες που παράγουν ρυπογόνα αέρια κατά την διάρκεια της παραγωγικής τους διαδικασίας και υπόκεινται νομικά σε όρια μείωσης των εκπομπών τους. Κάθε εταιρεία μέλος του συστήματος είναι υποχρεωμένη να διαθέτει άδειες έτσι ώστε να μπορεί να εκπέμπει αέριους ρύπους μέσα στα νομικά πλαίσια σε μια προκαθορισμένη χρονική περίοδο. Οι εταιρείες έχουν την δυνατότητα να πωλούν και να αγοράζουν άδειες εκπομπής είτε μέσω δημοπρασιών είτε μεταξύ τους μέσω του συστήματος εμπορίας.

Τα συστήματα εμπορίας αδειών εκπομπών αέριων ρύπων έχουν ως κύριο στόχο την διευκόλυνση των εταιρειών στην επίτευξη των στόχων τους με το μικρότερο δυνατό κόστος ως προς την μείωση των εκπομπών τους μέσω της συνεργασίας των συμμετεχόντων.

Αποτελούν συστήματα συνδιαλλαγής αδειών εκπομπής μεταξύ εταιρειών που αποτελούν μέλη του συστήματος προκειμένου να επιτύχουν τους στόχους μείωσης που τους έχουν τεθεί. Τα συστήματα διαφέρουν ως προς τον στόχο, το εύρος κάλυψης καθώς και ως προς τα χαρακτηριστικά σχεδίασης. Τα χαρακτηριστικά των συστημάτων διαφέρουν διότι σχεδιάζονται σε διαφορετικό περιβάλλον και επιδιώκουν να καλύψουν διαφορετικές ανάγκες και στόχους. Παραδείγματος χάρη κάποιες χώρες εμπεριέχονται σε μεγαλύτερα πλάνα όπως η σύμβαση του Κιότο και σχεδιάζονται σύμφωνα με τις οδηγίες της σύμβασης. Κοινό χαρακτηριστικό των συστημάτων αποτελεί η ανάγκη για ταχεία μείωση εκπομπής ρύπων και η πρόθεση για διατήρηση οικονομικής δραστηριότητας και θέσεων εργασίας.

Οι κρατικοί φορείς φοβούμενοι την μεγάλη οικονομική επίδραση που μπορεί να προκληθεί από μια μείωση του επιπέδου εκπομπών ρύπων οδηγήθηκαν στη θέσπιση ανώτατων ορίων στα αρχικά στάδια του προγράμματος τα οποία τίθενται μετά από σχεδιασμό και μερικές φορές οδηγούν σε μείωση της τιμής των αδειών λόγω της υπερπροσφοράς τους.

Για αυτό τον λόγο στα αρχικά στάδια των προγραμμάτων οι στόχοι που τίθενται είναι μικροί, αλλά θεωρούνται από τους πιο σημαντικούς, διότι βάση αυτών συλλέγονται οι κατάλληλες πληροφορίες για την λειτουργία του προγράμματος όπως είναι η μέτρηση, εποπτεία και διαχείριση εκπομπών ρύπων και χρησιμοποιούνται για καλύτερη μελλοντική εφαρμογή του προγράμματος.

1.3 Όριο και Διανομή Αδειών Εκπομπής

Το σημαντικότερο στοιχείο σε ένα σύστημα εμπορίας είναι η φύση και το επίπεδο του ανώτατου ορίου αέριων ρύπων δηλαδή ο αριθμός αδειών που θα διατίθενται στις επιχειρήσεις.

Συνήθως το όριο είναι ένα καθορισμένο μέγεθος για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ή κάποιο ποσοστό μιας εθνικής οικονομικής μονάδας παραδείγματος χάρη του ακαθάριστου εγχώριου προϊόντος ή του επιπέδου παραγωγής της χώρας. Το καθορισμένο ποσοστό εγγυάται τον αριθμό αδειών που θα διατεθούν για χρήση ενώ στην άλλη περίπτωση ο αριθμός κυμαίνεται ανάλογα με τον συνυφασμένο δείκτη. Το όριο τίθεται έτσι ώστε να περιορίζει τις εκπομπές προκειμένου να υπάρχει ζήτηση για άδειες και να καθοριστεί μια τιμή αγοράς.

Επίσης πρέπει να υφίσταται κατάλληλο σύστημα διανομής αδειών για την εύκολη εξυπηρέτηση των ενδιαφερομένων. Οι άδειες διατίθενται με διάφορους τρόπους αλλά οι πιο διαδεδομένοι είναι η δημοπρασία, η δωρεάν διάθεση ή ένας συνδυασμός των δύο, ανάλογα με τους στόχους του συστήματος που έχει θεσπίσει ο εκάστοτε φορέας.

Τέλος τα περισσότερα συστήματα εμπορίας επιτρέπουν την εισαγωγή και εξαγωγή αδειών από άλλα παρόμοια συστήματα με την προϋπόθεση ότι διατηρείται η ισορροπία στα αντισυμβαλλόμενα μέρη.

Μέσα στα πλαίσια των συνολικών ορίων επιπέδου εκπομπών αέριων ρύπων αναδύονται διαφορετικές πολιτικές για την διαμοίραση των αδειών στους συμμετέχοντες από 100% δωρεάν διάθεση μέχρι και 100% δημοπρασία, αναλόγως τις βλέψεις του προγράμματος.

Επίσης υπάρχουν περιπτώσεις όπου η καλύτερη στρατηγική είναι να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές στρατηγικές μέσα στο ίδιο σύστημα εμπορίας.

Θεωρητικά η μέθοδος διαμοίρασης αδειών δεν έχει αντίκτυπο στο περιβάλλον διότι, είτε δωρεάν, είτε με κάποιο κόστος, ο αριθμός των αδειών παραμένει σταθερός. Αυτό που παίζει ρόλο είναι το ανώτατο όριο εκπομπών που τίθεται από τον ελεγκτικό φορέα.

Αναλόγως τους στόχους του προγράμματος η δωρεάν διάθεση αδειών έχει τα οφέλη της στο οικονομικό σύνολο. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την ομαλή μετάβαση μιας εταιρείας στην αγορά, που υπάρχει ήδη τιμολόγηση των αδειών για εκπομπή αέριων ρύπων, χωρίς να έχει καταστροφικό αντίκτυπο σε αυτήν. Ακόμα και στην περίπτωση που μια εταιρεία λάβει παραπάνω άδειες από αυτές που χρειάζεται για την κανονική λειτουργία της συνεχίζει να έχει κίνητρο να μειώσει τους ρύπους της καθώς μπορεί να πουλήσει στην αγορά τις άδειες εκπομπών που περισσεύουν.

Παρά τα οφέλη, η δωρεάν διάθεση μπορεί να αποφέρει και αρνητικά αποτελέσματα. Αν ο αριθμός των δωρεάν αδειών είναι μεγάλος συγκριτικά με τον συνολικό αριθμό αδειών τότε μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την ρευστότητα της αγοράς και να αυξήσει την διακύμανση της τιμής των αδειών. Ουσιαστικά αποτελεί μεταφορά πλούτου μεταξύ τομέων της οικονομίας.

Η διάθεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν εργαλείο για την διόρθωση της λειτουργίας της αγοράς αλλά υπάρχει πιθανότητα να αποφέρει αρνητικά αποτελέσματα αν δεν επιβληθεί σωστά.

Επίσης η δωρεάν διάθεση σε εταιρείες που έχουν εισέλθει πρόσφατα, είτε στο σύστημα είτε στην αγορά, μπορεί να τις παροτρύνει να επωφεληθούν από τις δωρεάν άδειες και να αυξήσουν την ένταση εκπομπής τους προκειμένου να μεγαλώσουν την παραγωγή τους για την περίοδο που δεν θα χρεώνονται για την απόκτηση αδειών φέρνοντας τα αντίθετα αποτελέσματα από τα επιθυμητά. Το πιο σημαντικό σημείο προσοχής είναι η κρατική επένδυση που υποστηρίζει την δωρεάν διάθεση αδειών.

Το κράτος επενδύει κάποια κεφάλαια προκειμένου να έχει την δυνατότητα να διαθέσει δωρεάν άδειες για την ομαλή μετάβαση των επιχειρήσεων σε αυτή τη νέα κατάσταση. Σε περίπτωση που, οι αποδέκτες αυτών των αδειών, τελικά δεν ανταπεξέλθουν σε όσα έχουν δεσμευτεί να πετύχουν το κράτος δεν έχει αποτελέσματα από μια επένδυση που θα μπορούσε να είχε αξιοποιηθεί σε συστήματα καθαρής τεχνολογίας.

Λόγω των αρνητικών επιδράσεων που μπορούν να επέλθουν μέσω της δωρεάν διάθεσης αυτή η τακτική εφαρμόζεται με μεγάλη προσοχή και σχεδιασμό και δεν προτιμάται σε σχέση με την δημοπρασία ως μέσο διαμοίρασης. Μέσω της δημοπρασίας ο κρατικός μηχανισμός δημιουργεί μια σταθερή ροή εσόδων η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί για να αντισταθμίσει τα αρνητικά αποτελέσματα, που θα έχουν οι εταιρείες από την τιμολόγηση των εκπομπών τους, όπως με την απαλλαγή τους από κάποιους φόρους. Επίσης με την σταθερή εισροή μπορούν να χρηματοδοτηθούν άλλα προγράμματα καταπολέμησης της κλιματικής αλλαγής ή να χρησιμοποιηθεί και σε άλλους τομείς της οικονομίας ή να επωφεληθεί το κράτος (όπως η μείωση του κρατικού χρέους).

Τέλος η ύπαρξη δημοπρασιών σε ένα σύστημα εμπορίας αδειών ενισχύει την ελαστικότητα και τον καλύτερο χειρισμό του ανώτατου ορίου εκπομπής ρύπων μέσω της ρύθμισης της τιμής των αδειών.

1.4 Συστήματα εμπορίας αδειών

Αναλύουμε τα κυριότερα συστήματα εμπορίας αδειών τα οποία έχουν ενδιαφέρον κυρίως για τον τρόπο λειτουργίας τους καθώς και για την δράση τους.

Ηνωμένο Βασίλειο(11)

Το βρετανικό σύστημα εμπορίας αδειών εκπομπής ρύπων σχηματίστηκε το 2002 και τερματίστηκε το 2006. Θεωρείται ο πρόδρομος του Ευρωπαϊκού συστήματος εμπορίας διότι τα στοιχεία που συλλέχθηκαν από τα χρόνια λειτουργίας του συνείσφεραν στην σύσταση του συστήματος εμπορίας σε όλη την ευρωπαϊκή επικράτεια.

Το σύστημα αποτελούταν από 32 άμεσους συμμετέχοντες δηλαδή από μέλη που λειτουργούσαν χωρίς την χρήση κάποιου μεσάζοντα. Τα μέλη συμμετείχαν είτε οικειοθελώς, με αντάλλαγμα πληρωμές κινήτρου, είτε ήταν εταιρείες που είχαν υποχρέωση βάσει της συμφωνίας για την αλλαγή του κλίματος (Climate change agreement, CCAs) και ήθελαν να διαχειριστούν το μέγεθος της εκπομπής τους μέσω εμπορίας. Τα CCAs ήταν νομικά δεσμευτικές συμφωνίες εκπομπής ή συμφωνητικά μείωσης ενέργειας με τα οποία οι εταιρείες κέρδιζαν 80% έκπτωση σε έναν φόρο εργοστασιακής χρήσης ενέργειας.

Οι εταιρείες χρησιμοποιούσαν το σύστημα προκειμένου να καλύψουν τις υπερβολικές εκπομπές ή για να πουλήσουν τις άδειες που τους περισσεύουν. Λόγω του ότι κάποια CCAs ήταν συνδεδεμένα με την διαδικασία παραγωγής και οι εκπομπές ρύπων επιτρέπονταν να αυξηθούν κατά την διάρκεια παραγωγής δημιουργήθηκαν περιορισμοί για να μην υπάρχει καθαρή ροή από την χρήση αδειών εκπομπής CCAs συνδεόμενα με το σύστημα εμπορίας.

Το σύστημα εμπορίας του Ηνωμένου Βασιλείου υπάρχει ακόμα αλλά οι εταιρείες χρησιμοποιούν αποκλειστικά το ευρωπαϊκό σύστημα για να εμπορευθούν άδειες.

Νότια Νέα Ουαλία (Αυστραλιανή Πολιτεία)(12)

Το σύστημα εμπορίας αναπτύχθηκε σε αυτή την πολιτεία προκειμένου να διαχειριστεί τις εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου από την παραγωγή και χρήση του ηλεκτρισμού με χρήση σχεδιασμένων ενεργειών για να μειώσουν τις εκπομπές ή να τις αντισταθμίσουν.

Καθορίζεται ένα ετήσιο σημείο αναφοράς που αφορά όλη την επικράτεια της πολιτείας το οποίο στην συνέχεια διαμοιράζεται σε αγοραστές και πωλητές ηλεκτρικής ενέργειας ανάλογα με το μέγεθος της ανάγκης που έχουν. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό οι συμμετέχοντες παρέχουν πιστοποιητικά που αποδεικνύουν την λειτουργία τους και την μείωση της χρήσης που κάνουν όπως είναι υποχρεωμένοι.

Νορβηγία(13)

Το σύστημα εμπορίας της Νορβηγίας ξεκίνησε την λειτουργία του το 2005 και αποτελεί μέλος του Ευρωπαϊκού συστήματος εμπορίας από το 2008 με κάποιες διαφορές στην δομή του.

Κατά τα αρχικά του στάδια κάλυπτε μόλις περίπου το 10% των συνολικών εθνικών εκπομπών αέριων ρύπων. Όπως και στην αρχή του ευρωπαϊκού συστήματος, η παροχή αδειών ήταν μεγαλύτερη από την ζήτηση τους αναγκάζοντας την τιμή των αδειών να φτάσει ακόμα και στο μηδέν. Όμως μετά την προσάρτηση του συστήματος σε αυτό της Ευρώπης το 2008 το εύρος κάλυψης του προγράμματος διευρύνθηκε και έφτασε το 40% των συνολικών εταιρειών που είχαν μεγάλες εκπομπές ρύπων στην Νορβηγία. Λόγω του ότι η Νορβηγία αποτελεί μέρος της Ευρωπαϊκής οικονομικής περιοχής έχει το δικαίωμα συμμετοχής στην ευρωπαϊκή αγορά με την εφαρμογή της οδηγίας του EU ETS στο Νορβηγικό δίκαιο με κάποιες διαπραγματεύσεις. Αυτές οι διαπραγματεύσεις περιέχουν πιο φιλόδοξους στόχους, ένα πολύ πιο χαμηλό επίπεδο δωρεάν αδειών εκπομπής και την συμπερίληψη επιπρόσθετων αδειών αν κριθεί αναγκαίο.

Κατά την περίοδο 2008-2012 μόνο το 30% των αδειών διατέθηκαν δωρεάν ενώ πραγματοποιείται μεγαλύτερος αριθμός δημοπρασιών σε σχέση με τις υπόλοιπες ευρωπαϊκές χώρες.

Ελβετία[14]

Το ελβετικό σύστημα εμπορίας λειτούργησε από το 2008 μέχρι και το 2012 προκειμένου να συνυπάρξει με την πρώτη περίοδο της σύμβασης του Κιότο. Εταιρείες στον τομέα της παραγωγής ενέργειας που δεσμεύονται νομικά να μειώσουν τις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα έχουν την δυνατότητα να απαλλαχθούν από τον φόρο που υπάρχει στο διοξείδιο του άνθρακα για καύσιμα θέρμανσης. Οι στόχοι κάθε εταιρείας διαπραγματεύονται ξεχωριστά αναλόγως των πληροφοριών και της τεχνικής ανάλυσης που έχει στην διάθεση του ο κρατικός οργανισμός.

Η διαπραγμάτευση συμβαίνει έτσι ώστε η εταιρεία να δύναται να μειώσει τις εκπομπές της στο όριο που της έχει τεθεί διότι εξωπραγματικά όρια οδηγούν είτε στη μη συμμόρφωση της εταιρείας είτε στο κλείσιμο της στην προσπάθεια της να επιτύχει τους στόχους της.

Όπως και στα υπόλοιπα συστήματα κάθε εταιρεία πρέπει να παρουσιάζει άδειες που να καλύπτουν τις εκπομπές ρύπων που έχει κατά το προηγούμενο έτος. Σε περίπτωση που οι άδειες δεν επαρκούν για να καλύψουν τους ρύπους η εταιρεία έχει την δυνατότητα να αγοράσει άδειες μέσω εμπορίας ή μέσω αγοράς πιστώσεων από αντισταθμιστικά έργα που όμως μπορούν να καλύψουν μέχρι το 8% των συνολικών της ρύπων. Τέλος σε περίπτωση μη συμμόρφωσης της η εταιρεία πέραν από πρόστιμο υποχρεούται να πληρώσει και τον φόρο από τον οποίο είχε απαλλαγεί κατά την δέσμευση της για μείωση εκπομπών.

Νέα Ζηλανδία[15]

Ιδρύθηκε το 2008 και βρίσκεται ακόμα σε λειτουργία καθώς αποτελεί ένα από τα πιο εκτενή συστήματα εμπορίας αδειών εκπομπής αερίων. Διαθέτει την μεγαλύτερη κάλυψη από όλα τα υπάρχοντα συστήματα καθώς περιλαμβάνει όλους τους οικονομικούς τομείς και όλα τα αέρια του θερμοκηπίου που περιέχονται στην σύμβαση του Κιότο.

Από το 2010 έχουν συμπεριληφθεί στο σύστημα οι εκπομπές αέριων ρύπων από τους τομείς ενέργειας, βιομηχανίας και μεταφοράς ενώ το 2013 εισήχθη ο τομέας της διαχείρισης αποβλήτων. Λόγω της εκτενής κάλυψης θεωρείται ένα από τα πιο ολοκληρωμένα συστήματα για την καταπολέμηση του φαινομένου του θερμοκηπίου.

Στο σύστημα δεν υπάρχει ανώτατο όριο ρύπων ή κάποιος στόχος μείωσης που πρέπει να επιτευχθεί αλλά είναι συνδεδεμένο με την αγορά που έχει σχηματιστεί από την σύμβαση του Κιότο. Δηλαδή οι εταιρείες έχουν την δυνατότητα να ρυπαίνουν αρκεί να διαθέτουν άδειες που καλύπτουν τις εκπομπές τους που τις προμηθεύονται από εταιρείες του εξωτερικού.

Το σύστημα χρησιμοποιεί έναν συνδυασμό από διαφορετικές εταιρείες που έχουν σχέση προμηθευτή-καταναλωτή, παραδείγματος χάριν παραγωγοί ενέργειας και επιχειρήσεις που χρησιμοποιούν την ενέργεια για την βασική τους λειτουργία.

Στα αρχικά στάδια του προγράμματος κάποιες άδειες παραχωρήθηκαν δωρεάν κυρίως στους τομείς της δασοκομίας και αλιείας καθώς και σε επιχειρήσεις με υψηλά επίπεδα εκπομπών αερίων προκειμένου να έχουν μια ομαλή μετάβαση στον νέο τρόπο λειτουργίας διότι η ξαφνικός περιορισμός των ρύπων θα τους ανάγκαζε να προβούν σε δραστικές λύσεις όπως μείωση προσωπικού για να εξασφαλίσουν την λειτουργία τους.

Το 2009 το σύστημα διαμορφώθηκε διαφορετικά προκειμένου να συμβαδίσει με το νεόδμητο Αυστραλιανό πρόγραμμα και έτσι σταμάτησε την δωρεάν διάθεση αδειών εκπομπής αλλά δημιούργησε μια μεταβατική περίοδο που διήρκησε μέχρι το 2012 και περιλάμβανε μειωμένες τιμές αδειών.

Σήμερα οι επιχειρήσεις μπορούν να κερδίσουν δωρεάν άδειες μέσω της δενδροφύτευσης. Αναλυτικότερα, αν μια εταιρεία φυτέψει τόσα δέντρα ώστε να απορροφούν το διοξείδιο που παράγει τότε κερδίζει τόσες άδειες όσες αντιστοιχούν στον απορροφώμενο όγκο ρύπων.

Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής(16)

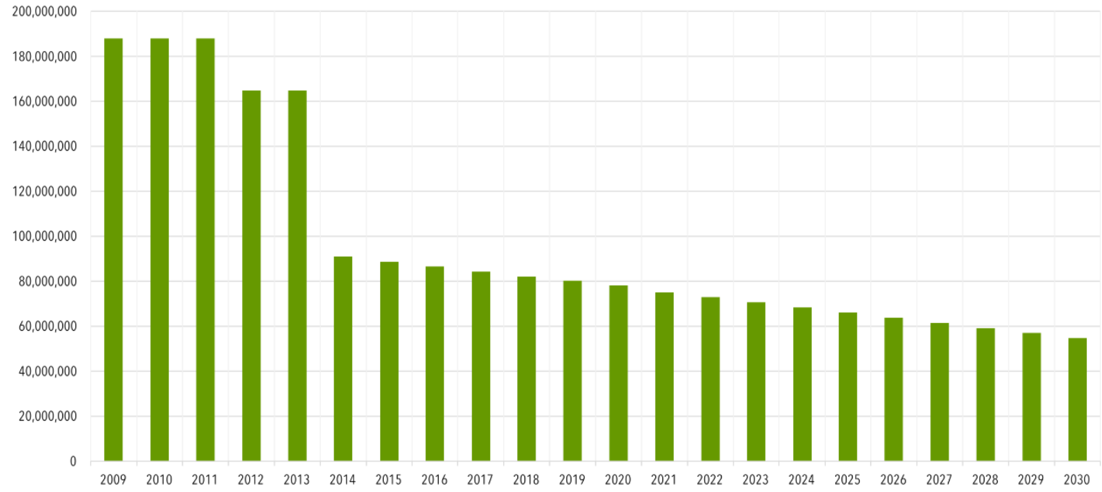
Με την συνεργασία ορισμένων πολιτειών των Η.Π.Α. (Connecticut, Delaware,Maine, Maryland, Massachusetts, New Hampshire, New York , Rhode Island και Vermont) δημιουργήθηκε το πρώτο σύστημα εμπορίας αδειών με ανώτατο όριο στην Αμερική, το Regional Greenhouse Gas Initiative (RGGI). Το συγκεκριμένο πρόγραμμα είχε ως στόχο τον περιορισμό των εκπομπών του διοξειδίου του άνθρακα στον τομέα της παραγωγής ενέργειας.

Το 2005 υπογράφηκε από τα μέλη ένα μνημόνιο κατανόησης (Memorandum of understanding), το οποίο αποτελεί συμφωνητικό χωρίς νομική ισχύ, βάσει του οποίου συστάθηκε το σύστημα εμπορίας με την πρώτη δημοπρασία αδειών να λαμβάνει χώρα το 2008.

Αρχικά κάθε πολιτεία είχε τον δικό της αριθμό αδειών που δημοπρατούσε και ήλεγχε το επίπεδο ρύπων ξεχωριστά όμως στην συνέχεια αναπτύχθηκε ένα κοινό σύστημα ελέγχου των ξεχωριστών επιπέδων κάθε πολιτείας.

Οι επιχειρήσεις έχουν την δυνατότητα να εμπορεύονται άδειες μεταξύ τους αλλά και με εταιρείες σε άλλες πολιτείες με προϋπόθεση να διατηρείται η ισορροπία στις δύο πολιτείες δηλαδή το συνολικό επίπεδο ρύπων να παραμένει σταθερό μετά την αγοραπωλησία των αδειών.

Το αρχικό όριο είχε τεθεί στους 188 εκατομμύρια τόνους ανά πολιτεία το οποίο στην συνέχεια μειώθηκε σε 165 εκατομμύρια τόνους διότι οι εταιρείες δεν μπορούσαν να ανταπεξέλθουν στο αρχικό όριο το οποίο οδήγησε στην αποχώρηση μιας πολιτείας από το σύστημα. Τα πλάνα του συστήματος είναι μέχρι το 2020 να μειώσει τις εκπομπές ρύπων από τους παραγωγούς ενέργειας κατά 45% σε σχέση με το 2005 και κατά 30% μέχρι το 2030 όπως παρουσιάζεται και στο επόμενο σχήμα .



Πίνακας 2: Τόνοι ρύπων ανά έτοςστην στις Η.Π.Α.

Τόκυο(17)

Η Μητροπολιτική κυβέρνηση του Τόκυο (Tokyo Metropolitan Government, TMG) στην προσπάθεια της να περιορίσει τους κινδύνους της κλιματικής αλλαγής σχημάτισε το δικό της πρόγραμμα εμπορίας αδειών προκειμένου να μειώσει γρήγορα και δραστικά τις εκπομπές αερίων διοξειδίου του άνθρακα στην περιοχή του Τόκιο. Το πρόγραμμα εμπορίας με ανώτατο όριο που δημιουργήθηκε υποχρεώνει τις εταιρείες με μεγάλα επίπεδα εκπομπής αερίων να περιορίσουν τις εκπομπές τους. Το αξιοσημείωτο στην περίπτωση του Τόκιο είναι ότι περίπου το 40% της ενεργειακής χρήσης γίνεται από γραφεία και εμπορικές εγκαταστάσεις δηλαδή σε κατοικήσιμες ζώνες.

Έτσι σχεδιάστηκε ένα σύστημα προκειμένου να περιορίσει τους ρύπους σε τέτοιες περιοχές και αποτελεί το πρώτο σύστημα εμπορίας σε κατοικήσιμη περιοχή, παγκοσμίως. Στο σύστημα εντάχθηκαν υποχρεωτικά όσες εταιρείες έχουν κατανάλωση ενέργειας μεγαλύτερη των 1500 kiloliters αδιύλιστου πετρελαίου τον χρόνο. Το αδιύλιστο πετρέλαιο χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς δηλαδή μια εταιρεία μπορεί να μην κάνει χρήση πετρελαίου αλλά η χρήση ενός άλλου καυσίμου εξισώνεται με το πετρέλαιο.

Αν κάποια εταιρεία, γραφείο ή εργοστάσιο, δεν συμμορφωθεί με τα επίπεδα μείωσης τότε υποχρεούται να μειώσει τις εκπομπές της κατά 1.3 φορές παραπάνω σε μια συγκεκριμένη περίοδο και αν πάλι δεν συμμορφωθεί κατονομάζεται δημόσια και υπόκειντai σε αυστηρές κυρώσεις.

Ευρωπαϊκής Ένωσης[18]

Το ευρωπαϊκό σύστημα εμπορίας αδειών συστάθηκε τον Ιανουάριο του 2005 το σύστημα εμπορίας δικαιωμάτων εκπομπών της Ευρωπαϊκής Ένωσης (European Union Emission Trading Scheme, EU ETS) με στόχο να λειτουργήσει ως αρχικό μέτρο συμμόρφωσης των μελών της σύμβασης.

Αποτελείται από τα 28 κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης καθώς και από τις Ισλανδία, Λίχτενσταϊν και Νορβηγία ενώ ελέγχει πάνω από 11.000 εγκαταστάσεις που κάνουν μεγάλη κατανάλωση ενέργειας και καλύπτουν περίπου το 45% των συνολικών ευρωπαϊκών εκπομπών αερίων. Το σύστημα εμπορίας δικαιωμάτων λειτουργεί υπό την αρχή του ορίου και της ανταλλαγής. Αυτό σημαίνει πως τίθεται ανώτατο όριο στις εκπομπές αερίων που παράγουν συνολικά οι εταιρικές εγκαταστάσεις των συμβαλλόμενων μελών. Στόχος του συστήματος είναι η σταδιακή μείωση του ορίου εκπομπών προκειμένου να μειωθούν οι συνολικές εκπομπές αέριων ρύπων.

Μία εταιρεία για να εκπέμπει αέριους ρύπους είναι υποχρεωμένη να κατέχει άδειες εκπομπής οι οποίες να καλύπτουν την συνολική ποσότητα που εκπέμπει η εταιρεία. Στην περίπτωση που η εταιρεία διαθέτει λιγότερες άδειες από τις απαιτούμενες τότε είτε αγοράζει άδειες, απευθείας από άλλη εταιρεία ή μέσω της αγοράς, για να καλύψει τις ανάγκες της είτε είναι υποχρεωμένη να πληρώσει πρόστιμο συμμόρφωσης το οποίο είναι προκαθορισμένο.

Το ευρωπαϊκό σύστημα καλύπτει μεσαίου και μεγάλου όγκου ρυπογόνες εταιρείες όπως εταιρείες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, χαρτιού, σίδερου, τσιμέντου και γενικά εταιρείες που έχουν θερμική βαθμολογία μεγαλύτερη από 20 megawatts (MWth).

Τα αέρια που συμπεριλαμβάνονται πλέον στο πλαίσιο είναι το διοξείδιο του άνθρακα (CO_2), το υποξείδιο του αζώτου (N_2O) και οι υπεροφθοράνθρακες (PFC_S). Για περιβαλλοντικούς λόγους σχεδιάσθηκε ένα ισοδύναμο μέτρο μονάδας με το CO_2 για να μετρηθούν οι πιθανές κλιματικές επιπτώσεις των διάφορων αερίων. Έτσι το CO_2 χρησιμοποιείται σαν δείκτης για τους στόχους που θέτονται και για αυτό τον λόγο ασχολούμαστε μόνο με το συγκεκριμένο αέριο του θερμοκηπίου. Το EU ETS βρίσκεται στην Τρίτη φάση του που ξεκίνησε το 2013 και ολοκληρώνεται το 2020. Ο βασικός στόχος αυτής της φάσης είναι μέχρι το 2020 να έχει επιτευχθεί μείωση των παραγόμενων ρύπων κατά 21% σε σχέση με το 2005.

Η πρώτη φάση είχε αναγνωριστικό ρόλο και διήρκησε μόλις τρία χρόνια (2005-2007) και ο κύριος στόχος του ήταν η θέσπιση βάσεων για ένα σύστημα εμπορίας και ελέγχου. Περιλάμβανε μόνο το CO_2, οι άδειες μοιράζονταν δωρεάν στις εταιρείες υπό κρατική εποπτεία και το πρόστιμο συμμόρφωσης ορίσθηκε στα 40€ ανά τόνο. Κατά την διάρκεια της πρώτης φάσης δημιουργήθηκε συγκεκριμένη τιμή του CO_2, οργανώθηκε ελεύθερη αγορά και τέθηκαν οι βάσεις για εποπτεία των εταιρειών.

Στην δεύτερη φάση (2008-2012) μειώθηκε το όριο των ρύπων κατά 6.5% σε σχέση με το 2005, το πρόστιμο αυξήθηκε στα 100€ ανά τόνο ενώ συμπεριλήφθηκε και το υποξείδιο του αζώτου στα αέρια. Επίσης οι εταιρείες είχαν πλέον το δικαίωμα να αγοράζουν διεθνή πίστωση ανάλογη των 1.4 δις τόνων CO_2.

Η βασική διαφορά της τρίτης φάσης με τις προηγούμενες είναι πως δεν υπάρχει κρατικό όριο εκπομπής ρύπων αλλά συνολικό όριο για όλους τους συμβαλλόμενους το οποίο σημαίνει πως εταιρείες από διαφορετικές χώρες μπορούν να προβούν σε εμπόριο αδειών.

Τέλος, στις αρχές του 2018 σχεδιάσθηκε η τέταρτη φάση της σύμβασης που θα ξεκινήσει το 2021 και θα ισχύσει μέχρι και το 2030. Βασικός στόχος είναι η ετήσια μείωση των αέριων ρύπων 2.2% και να τεθεί σε ισχύ ένα αποθεματικό σταθερότητα της αγοράς (Market Stability Reserve) το οποίο θα μειώσει το πλεόνασμα αδειών στην αγορά του CO_2 και θα βελτιώσει το πλαίσιο της σύμβασης στις μελλοντικές κρίσεις.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες-Βασικές Έννοιες

2.1 Βασικά Στοιχεία Πιθανοτήτων

Η θεωρία πιθανοτήτων βασίζεται στην ανάλυση επαναλαμβανόμενων πειραμάτων και γεγονότων που οδηγούν σε μη σίγουρα αποτελέσματα.

Πείραμα τύχης ονομάζεται ένα γεγονός για το οποίο δεν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του πριν αυτό συμβεί, ακόμα και αν αυτό έχει επαναληφθεί πολλές φορές όπως ένα πείραμα ρίψης κέρματος ή ζαριού. Τα πιθανά αποτελέσματα ενός γεγονότος ονομάζονται συμβάντα και παρίστανται ως ω_i (με $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ όπου n ένας πραγματικός μη αρνητικός πεπερασμένος αριθμός).

Το σύνολο των πιθανών συμβάντων ω_i ονομάζεται δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης και συμβολίζεται ως Ω, οπότε αν έχουμε ένα πείραμα τύχης με πιθανά αποτελέσματα $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος συμβολίζεται ως

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Παραδείγματος χάρη σε ένα πείραμα ρίψης κέρματος τα πιθανά αποτελέσματα είναι κορώνα(Κ) και γράμματα(Γ) οπότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος συμβολίζεται ως Ω={Κ,Γ}.

Ενδεχόμενο θεωρείται ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ονομάζεται απλό ενδεχόμενο στην περίπτωση που περιέχει μόνο ένα στοιχείο ενώ σύνθετο αν περιέχει πολλά στοιχεία του δειγματικού χώρου. Ο δειγματικός χώρος αποτελεί βέβαιο ενδεχόμενο διότι περιέχει όλα τα δυνατά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν κατά το πείραμα. Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Π συμβολίζεται ως Ν(Π).

Αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο που περιέχεται στο ενδεχόμενο τότε το ενδεχόμενο πραγματοποιείται.

Πράξεις με ενδεχόμενα

Έστω ότι έχουμε δύο ενδεχόμενα [ενδεχόμενο πρώτο (Π) και ενδεχόμενο δεύτερο (Δ)] από έναν δειγματικό χώρο τότε μπορούν να συμβούν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

Α. Αν τα ενδεχόμενα Π και Δ πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τότε έχουμε ως αποτέλεσμα την τομή τους που συμβολίζεται ως Π∩Δ.

Β. Αν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα τότε παίρνουμε την ένωση τους , ΠUΔ.

Γ. Όταν δεν πραγματοποιείται ένα ενδεχόμενο (έστω το Π) τότε πραγματοποιείται το αντίθετο του, το Π΄.

Δ. Αν πραγματοποιείται το Π και όχι το Δ τότε έχουμε το ενδεχόμενο Π-Δ και στην αντίθετη περίπτωση όπου πραγματοποιείται το Δ κι όχι το Π έχουμε Δ-Π.

Τέλος, μεταξύ δύο ενδεχομένων του ίδιου δειγματικού χώρου λέμε ότι υπάρχει ανεξαρτησία όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν και τα δύο ταυτόχρονα δηλαδή η τομή τους ισούται με το μηδέν, Π∩Δ=0 όπως τα ενδεχόμενα ενός πειράματος ρίψης κέρματος ή ζαριού.

Πιθανότητες

Λόγω του ότι είμαστε αβέβαιοι για το αν θα πραγματοποιηθεί το κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου, αντιστοιχούμε στο καθένα ένα μέτρο προσδοκίας με το οποίο περιμένουμε να πραγματοποιηθεί το οποίο ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου.

Ορισμός 2.1

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Π σε ένα πείραμα τύχης με αποτελέσματα ίσης πιθανότητας ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{P}(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}$$

$$= \frac{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi o\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon\ \Pi}{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \acute{o}\lambda\omega\nu\ \tau\omega\nu\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{\omega}\nu\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\nu}$$

Και έτσι έχουμε ότι

$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1, P(0) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0 \text{ οπότε } 0 \leq \mathrm{P}(\Pi) \leq 1$$

Στην περίπτωση που δεν έχουμε ενδεχόμενα με ίσες πιθανότητες πραγματοποίησης τότε κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ λαμβάνει έναν αριθμό πιθανότητας $P(\omega_i)$ όπου ισχύει ότι

$$0 \leq \Pi(\omega_i) \leq 1 \text{ και } P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$$

με $P(\omega_i)$ η πιθανότητα του ενδεχομένου i.

Όπως και με τα απλά ενδεχόμενα, στις πιθανότητες συμβαίνουν πράξεις λογισμού:

- Αν Π και Δ είναι ανεξάρτητα τότε η πιθανότητα να συμβεί το ένα ή το άλλο είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων τους

$$P(\Pi \cup \Delta) = P(\Pi) + P(\Delta)$$

- Το ίδιο ισχύει και για περισσότερα από δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα, δηλαδή

$$P(\Pi \cup \Delta \cup T) = P(\Pi) + P(\Delta) + P(T)$$

- Συμπληρωματικό ενδεχόμενο ονομάζεται το αντίθετο ενός ενδεχομένου του δειγματικού χώρου. Δηλαδή αν Π είναι το ενδεχόμενο τότε συμπληρωματικό του είναι το ενδεχόμενο να μην συμβεί το Π και συμβολίζεται ως Π΄.

$$P(\Pi') = 1 - P(\Pi)$$

- Η ένωση δύο ενδεχόμενων μη ανεξάρτητων είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων τους μείον την τομή τους όπου συμβαίνουν και τα δύο ενδεχόμενα

$$P(\Pi \cup \Delta) = P(\Pi) + P(\Delta) - P(\Pi \cap \Delta)$$

- Για δύο ενδεχόμενα Π και Δ ενός δειγματικού χώρου η πιθανότητα να συμβεί το ένα και όχι το άλλο ταυτόχρονα είναι ίση με την πιθανότητα του Π μείον την τομή των δύο.

$$P(\Pi - \Delta) = P(\Pi) - P(\Pi \cap \Delta)$$

- Αν το ενδεχόμενο Π ⊃ Δ τότε ισχύει ότι P(Π) > P(Δ).

Τέλος, η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός Π ενώ έχει ήδη πραγματοποιηθεί το γεγονός Δ με δεδομένο ότι P(Δ) > 0 ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του Π με δεδομένο το Δ, συμβολίζεται με P(Π|Δ) και γράφεται ως

$$P(\Pi|\Delta) = \frac{P(\Pi \cap \Delta)}{P(\Delta)}$$

Ενώ ισχύει και το ανάποδο στην περίπτωση που έχει συμβεί ήδη το Π, δηλαδή

$$P(\Delta|\Pi) = \frac{P(\Pi \cap \Delta)}{P(\Pi)}$$

σ-Άλγεβρες

Αποτελεί ένα γεγονός ή μια συλλογή γεγονότων με την έννοια ότι μέσα σε ένα σύνολο Ω μια σ-άλγεβρα *F* είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, χρησιμοποιείται για να περιγράψει δομές δεδομένων και έχει τις εξής ιδιότητες:

Α. $0 \in \mathrm{F}$

Β. $\mathrm{F} \in \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F}^{c} \equiv \Omega \setminus \mathrm{F} \in \mathrm{F}$

Γ. $\mathrm{A1,A2,\ldots} \in \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{A} := (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)\mathrm{c} \in \mathrm{F}$

Έτσι συνάγουμε ότι αν μια *F* είναι σ-άλγεβρα και $A_i \in F$ τότε

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c)\mathrm{c} \in F$$

Παράδειγμα

Έστω ένα σύνολο Ω = { 1,2,3,4,5,6 } τότε έχουμε ένα πιθανό υποσύνολο

$$\mathrm{F} = \{\Omega, 0, \{3,4,5\}, \{6\}\}$$

το οποίο αποτελεί μια σ-άλγεβρα.

Ένα πιθανό υποσύνολο

$$\mathrm{F} = \{\Omega, 0, \{3\}, \{4\}, \{5,6\}\}$$

το οποίο δεν είναι σ-άλγεβρα διότι περιέχει το {3} και το {4} όχι όμως το {3,4} οπότε δεν ικανοποιεί όλες τις συνθήκες.

Οι ιδιότητες της σ-άλγεβρας είναι δομημένες έτσι ώστε όταν συμβεί ένα ενδεχόμενο α και ένα ενδεχόμενο β, που είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου, να μπορεί να συμβεί το α και το β ταυτόχρονα.

Ορισμός 2.2 (Άλγεβρα Borel)

Η άλγεβρα Borel αποτελεί μια συγκεκριμένη σ-άλγεβρα όπου το σύνολο Ω ισούται με το **R**. Είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση C όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$ τα οποία θεωρούνται ως υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Επίσης τα σύνολα Borel μπορούν να γενικευθούν για Ω= $\mathbf{R}^d$ όπου ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbf{R}^d$ είναι υποσύνολο του της μορφής

$$(a,b) = \{x \in R^d \colon a_i < x_i < b_i, \mathrm{i=1,...,d}\}$$

Με

$$a = (a_i, \dots, a_d) \in R^d \text{ και } b = (b_1, \dots, b_d) \in R^d$$

Έτσι η σ-άλγεβρα Borel ,$B(R^d)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα παραλληλόγραμμα της μορφής (a,b).

Ορισμός 2.3 (Μετρήσιμος Χώρος)

Έστω μια σ-άλγεβρα F με υποσύνολα του συνόλου Ω, τότε μετρήσιμος χώρος ονομάζεται το ζεύγος (Ω, F).

Ορισμός 2.4 (Μέτρο Πιθανότητας)

Αν έχουμε ένα σύνολο Ω και μια σ-άλγεβρα F με υποσύνολα του Ω τότε το (Ω, F) ονομάζεται μετρή0σιμος χώρος.

Ορισμός 2.5 (Μέτρο Πιθανότητας)

Ως μέτρο πιθανότητας ορίζεται μια συνάρτηση σε έναν μετρήσιμο χώρο (Ω, F) όπου ισχύουν τα εξής :

- P(A) ≥ 0, ∀ A ∈ *F*
- P(0) = 0
- P(Ω) = 1
- Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F$ και τα A_i είναι ανά δύο ξένα τότε έχουμε

$$\mathrm{P}(\cup_i^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

Ορισμός 2.6 (Χώρος Πιθανότητας)

Έστω ένα σύνολο Ω, μια σ-άλγεβρα *F* με υποσύνολα του Ω και ένα μέτρο πιθανότητας P , τότε το (Ω, F, P) ονομάζεται χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 2.7 (Μετρήσιμα Σύνολα)

Τα υποσύνολα του Ω που ανήκουν στην σ-άλγεβρα *F* αποκαλούνται *F*-μετρήσιμα.

Παράδειγμα

Έστω ένα σύνολο Ω = {3,5,7,9} και έστω δύο σ-άλγεβρες όπου F_1 = {0, Ω, {5}, {3,7} και *F* = {0, Ω, {3}, {7}, {5,9}}. Το σύνολο {5}, που αποτελεί υποσύνολο του Ω, είναι F_1-μετρήσιμο αλλά όχι F_2-μετρήσιμο.

Ορισμός 2.8 (Μετρήσιμη Συνάρτηση)

Μια τυχαία μεταβλητή είναι F-μετρήσιμη συνάρτηση X: $\Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ όπου (Ω, F, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας

Martingales

Martingale είναι μια συγκεκριμένη κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών και αποτελείται από μια σειρά από τυχαίες μεταβλητές όπου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή η αναμενόμενη τιμή της επόμενης τυχαίας μεταβλητής στη σειρά ισούται με την παρούσα τιμή, δεδομένου ότι είναι γνωστές όλες οι προηγούμενες τιμές. Για να εξηγήσουμε καλύτερα τις martingales πρέπει να αναλύσουμε τον όρο της διήθησης (filtration).

Ορισμός 2.9

Διήθηση είναι μια οικογένεια από σ-άλγεβρες τέτοια ώστε

$$\mathrm{s} \leq \mathrm{t} \rightarrow \mathrm{F}_s \subset F_t$$

Η σ-άλγεβρα F_t λογίζεται ως οι διαθέσιμες πληροφορίες έως την στιγμή t, οπότε η διήθηση αποτελεί μια αυξανόμενη συσσώρευση πληροφοριών με την πάροδο του χρόνου. Η πιο συνηθισμένη έννοια είναι αυτή της φυσικής διήθησης όπου παράγεται από μια στοχαστική διαδικασία X_t.

Όσο περνάει ο χρόνος αυξάνεται η στοχαστική διαδικασία καθώς και οι διαθέσιμες πληροφορίες για αυτήν.

Ορισμός 2.10

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t όπου η X_t είναι F_t – μετρήσιμη για κάθε t τότε ονομάζεται προσαρμοσμένη στη διήθηση F_t.

Η F_t μπορεί να είναι η φυσική διήθηση που παράγεται από τις τροχιές της τυχαίας διαδικασίας ,$F_t * \sigma\, (X_u, u \leq t)$. Σε αυτή την περίπτωση η F_t αποτελεί την πληροφορία που λαμβάνουμε για την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας X_t από την αρχή έως την στιγμή t.

Ορισμός 2.11

Αν η X_t είναι martingale τότε ισχύει ότι

- $E(X_t) = E(X_0)$
- $E(X_t - X_s) = 0$

Έστω ένα πείραμα ρίψης νομίσματος όπου η πιθανότητα να έρθει κορώνα ισούται της πιθανότητας να έρθει γράμματα , δηλαδή αποτελεί δίκαιο παίγνιο, και έχουμε για πως για την n-ρίψη την τυχαία μεταβλητή

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{αν γράμματα} \\ -1, & \text{αν κορώνα} \end{cases}$$

Καθώς και την τυχαία μεταβλητή $S_n = \sum_{i=1}^{n} Xi$.

Αν ένας παίκτης έχει κέρδος μια νομισματική μονάδα για κάθε φορά που το αποτέλεσμα είναι γράμματα και χάνει μια για κάθε κορώνα τότε η τυχαία μεταβλητή S_n μας δίνει το συνολικό κέρδος του παίκτη την στιγμή n.

Αν έχουμε F_n την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές X_i με I = 1,2,…,n τότε η τυχαία μεταβλητή X_{n+1} είναι

$$\begin{aligned} E[S_{n+1}|F_n] &= E[S_n + X_{n+1}|F_n] = E[S_n|F_n] + E[X_{n+1}|F_n] \\ &= S_n + E[X_{n+1}] = S_n \end{aligned}$$

Λόγω του ότι θεωρήσαμε την S_n ως F_n-μετρήσιμη βλέπουμε ότι $E[S_m|F_n] = S_n$ για κάθε m > n. Εφόσον $E[|S_n|] < \infty$ τότε η S_n είναι μια martingale ως προς την F_n.

Εκτός από την διήθηση μια martingale ορίζεται και ως προς ένα μέτρο πιθανότητας. Η στοχαστική διαδικασία X_t μπορεί, για κάποια διήθηση, να είναι martingale ως προς ένα μέτρο πιθανότητας ενώ να μην είναι για ένα άλλο. Άρα κάθε στοχαστική διαδικασία μπορεί να μετατραπεί σε *martingale* με το ανάλογο μέτρο πιθανότητας.

2.2 Martingales σε Διακριτό Χρόνο

Γενικές ιδιότητες

Για να χτίσουμε ένα γενικό πλαίσιο θεωρούμε ότι υπάρχει μια βασική διαδικασία ξ_t στην οποία βασίζεται κάθε άλλη διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε. Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την διαδικασία αυτή ως μια γενική ερμηνεία της κατάστασης σε χρόνο t και ότι παίρνει αυθαίρετες τιμές όπως μια διανυσματική διαδικασία.

Συμβολίζουμε ξ^t το σύνολο των $\xi_0,\xi_1,...,\xi_t$ καθ'όλο τον χρόνο t, το οποίο μπορεί να οριστεί και ως η εξέλιξη της διαδικασίας για χρόνο t. Έτσι μια τυχαία μεταβλητή, με δεδομένο ότι το ξ^t είναι γνωστό, θεωρείται ως η αναμενόμενη αξία κατά τον χρόνο t.

Για όλες τις διαδικασίες X_t θεωρούμε ότι για κάθε t η τυχαία μεταβλητή X_t είναι πλήρως καθορισμένη από τις τιμές που λαμβάνει το ξ^t δηλαδή το X_t αποτελεί συνάρτηση του.

Έτσι έχουμε ότι,

$$X_t = E\{X_t|\xi_t\} \ (2.2.1)$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε ότι κάθε ξ_t λαμβάνει πραγματικές τιμές. Υποθέτουμε ότι

$$\mathrm{X}_0 = \xi_0,\ \mathrm{X}_1 = \xi_1\xi_2\ , \dots, \mathrm{X}_t = \xi_0 * \dots * \xi_t$$

Φαίνεται ξεκάθαρα ότι η διαδικασία X_t εξαρτάται από την ξ_t σε κάθε περίπτωση.

Οπότε μια διαδικασία X_t ονομάζεται Martingale λαμβάνοντας υπόψη τη βασική διαδικασία, που σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ορίσει την ξ_t, για κάθε t = 0,1,2,... Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}_{t+1}|\xi^{t}\} = \mathrm{X}_t \ (2.2.2)$$

Μπορούμε να δούμε την εξίσωση (2.2.2) από χρηματοοικονομικής σκοπιάς, θεωρώντας ως X_t το κεφάλαιο που διαθέτει ένας επενδυτής την στιγμή t. Βλέπουμε πως αν t είναι η παρούσα χρονική στιγμή τότε κατά μέσο όρο το κεφάλαιο του επενδυτή την στιγμή t+1 θα είναι αυτό που έχει ήδη την στιγμή t. Παραδείγματος χάρη, αν ένας επενδυτής είχε κερδίσει κάποιο ποσό σε κάποια προηγούμενη στιγμή ή έστω την στιγμή t τότε το αναμενόμενο μελλοντικό του κεφάλαιο καθορίζεται από το κεφάλαιο που έχει κερδίσει και όχι από το αρχικά επενδυμένο κεφάλαιο.

Θεωρούμε συνέχεια ότι η διαδικασία ξ_t είναι σταθερή θεωρώντας στη συνέχεια του κεφαλαίου θα έχουμε ως γνωστό ότι η X_t είναι martingale λαμβάνοντας υπόψη την ίδια διαδικασία και έτσι έχουμε ότι για κάθε t=0,1,.. ισχύει

$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}_{t+1}|\mathrm{X}^{t}\} = E\{E\{X_{t+1}|\xi_t\}|X^t\} = E\{X_t|X^t\} = \mathrm{X}_t \quad (2.2.3)$$

Όπου το $X^t = (X_0, \dots, X_t)$ αποτελεί την ιστορία της διαδικασίας μέχρι την στιγμή t. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό όπως και με την ξ_t και για ανάλογες διαδικασίες στη συνέχεια.

Ορίζουμε παράλληλα και την διαδικασία αύξησης της X_t. Έστω $Z_0 = 0$ και $Z_{T+1} = X_{T+1} - X_T$ είναι το κέρδος από το παίγνιο μετά από χρόνο t. Έτσι τα (2.2.1) και (2.2.2) γίνονται

$$\begin{aligned} E\{Z_{t+1}|\xi^t\} &= E\{X_{t+1} - X_t|\xi^t\} \\ &= E\{X_{t+1}|\xi^t\} - E\{X_t|\xi^t\} \\ &= X_t - X_t = 0 \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι όποια και αν είναι τα προγενέστερα αποτελέσματα της διαδικασίας το αναμενόμενο κέρδος του επόμενου βήματος βάση ιστορικού θα είναι ίσο με μηδέν.

Ένα τέτοιο παίγνιο ονομάζεται δίκαιο.

Τυχαίες μεταβλητές , Z_t για τις οποίες ισχύει ότι

$$E\{Z_{t+1}|\xi^t\} = 0 \text{ για κάθε } t=0,1,\dots \quad (2.2.4)$$

Ονομάζονται διαφορές Martingale λαμβάνοντας υπόψη την διαδικασία ξ_t.

Βάσει των προηγουμένων έχουμε ότι

$$E\{Z_{t+1}|X^t\} = E\{E\{Z_{t+1}|\xi^t\}X^t\} = E\{0|X^t\} = 0,$$

Όπου και πάλι το Z_t είναι διαφορά martingale λαμβάνοντας υπόψη την X^t. Εν συνεχεία αφού υπάρχει μια σχέση ένα προς ένα μεταξύ των Z και X τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{E}\{\mathrm{Z}_{t+1}|\mathrm{Z}_t\} = \mathrm{E}\{\mathrm{Z}_{t+1}|\mathrm{X}_t\} = 0$$

και έτσι βλέπουμε ότι η Z_t είναι διαφορά martingale δεδομένης της ίδιας της Z_t.

Τέλος από την (2.2.4) έχουμε

$$E[Z_t] = E\big\{E\{Z_t|\xi_{t-1}\}\big\} = E\{0\} = 0 \text{ για κάθε t=0,1,... } (2.2.5)$$

Και εφόσον $Z_t = X_{t+1} - X_t$,

$$X_t = X_0 + (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + (X_t - X_{t-1})$$

$$= X_0 + Z_1 + \cdots + Z_t \; (2.2.6)$$

Δηλαδή το συνολικό κεφάλαιο ισούται με το αρχικό κεφάλαιο πλέον το άθροισμα των κερδών όλων των προηγούμενων παιγνίων. Βάσει αυτού μια Martingale μπορεί να ερμηνευθεί ως το σύνολο των martingale differences συν την αρχική αξία, για το οποίο ισχύει και το αντίθετο.

Παράδειγμα

Έστω ότι $\mathrm{X}_0 = \xi_0 = 0$ και $\mathrm{X}_t = \xi_1 + \cdots + \xi_t$ για t>0 όπου το ξ_i αποτελεί ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή για κάθε i=1,2,… και $E[\xi_i] = 0$.

Λόγω του ότι η τ.μ. ξ_{t+1} είναι ανεξάρτητη των $\xi_1,\ldots,\xi_t$ ισχύει ότι

$$E\{\xi_{t+1}|\xi^t\} = E\{\xi_{t+1}\} = 0$$

Έτσι το κάθε ξ_t αποτελεί martingale difference και σαν συνέπεια το X_t είναι martingale.

Βάσει αυτού μια martingale μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της έννοιας ενός αθροίσματος ανεξάρτητων μεταβλητών με μηδενικά μέσα. Η βασική διαφορά είναι ότι στην (2.2.6) δεν χρειάζεται τα Z_t να είναι ανεξάρτητα αλλά να έχουμε μηδενική προϋπόθεση προσδοκιών $E\{Z_{t+1}|\xi^t\}$.

Θεωρώντας ότι $E[\xi_i] = m \neq 0$ έχουμε ότι η X_t δεν είναι martingale όμως η κάτωθι διαδικασία είναι

$$Y_t = X_t - mt \ (2.2.7)$$

Το οποίο φαίνεται λόγω του ότι έχουμε

$$Y_t - mt = \sum_{i=1}^{t}(\xi_i - m) \ \text{ και } E\{\xi_i - m\} = 0$$

Παραθέτω και μια πιο οικονομικογενή εφαρμογή που παρουσιάζει και την συνάφεια με το ζητούμενο του θέματος μας.

Παράδειγμα

Έστω ότι S_t είναι η τιμή μιας μετοχής σε 3 διαδοχικές στιγμές όπου t = 1,2,.. Τα πιθανά αποτελέσματα εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα υποθέτοντας ότι η αρχική τιμή είναι 10 νομισματικές μονάδες. Στο τέλος της πρώτης περιόδου μπορεί να είναι είτε 14 ν.μ. είτε 8 ν.μ.

Αν την στιγμή t=1 η αξία είναι 14 τότε στο τέλος της επόμενης περιόδου τα πιθανά αποτελέσματα είναι 15 ν.μ. ή 11ν.μ. Ενώ αν το S_1 έχει τιμή 8 τότε στο τέλος της δεύτερης περιόδου θα είναι 10 ν.μ. ή 5 ν.μ**.**

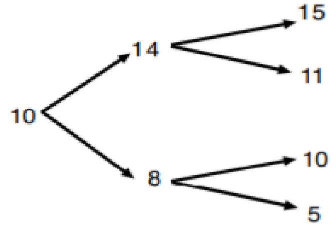


Figure 1. Νομισματικές μονάδες κάθε πιθανή στιγμή

Σε αυτή τη φάση το σημαντικό είναι να αναλύσουμε τα πιθανά αποτελέσματα με πιθανότητες και θα βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας του δέντρου το οποίο απεικονίζεται στο κάτωθι σχήμα, γνωρίζοντας ότι η S_t είναι martingale λαμβάνοντας υπόψη την ίδια.

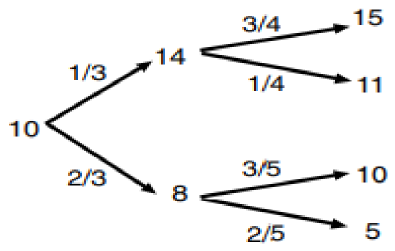


Figure 2 Νομισματικές μονάδες κάθε πιθανή στιγμή με πιθανότητες

Το μέτρο πιθανότητας ονομάζεται και μέτρο ουδέτερο προς τον κίνδυνο και χρησιμοποιείται ευρέως στην αγορά κεφαλαίων και μετοχών.

Για το μέτρο P που ψάχνουμε, θέτουμε $p = P(S_2 = 15|S_1 = 14)$ και

$p' = P(S_2 = 10|S_1 = 8)$ όπου είναι οι πιθανότητες που καταλήγουν σε 2 από τις 4 πιθανές καταστάσεις την στιγμή s=3.

Προκειμένου να έχουμε $E[S_2|S_1]$ χρειαζόμαστε $15p + 11(1-p) = 14$ και $10p' + 5(1-p') = 8$ το οποίο μας δίνει αντιστοίχως p=3/4 και p'=3/5 όπως έχουμε απεικονίσει και στο σχήμα 2.

Για $E[S_1|S_0] = S_0$ πρέπει να έχουμε $14p'' + 8(1-p'') = 10$ όπου

$p'' = P(S_1 = 14)$, το οποίο ισούται με 1/3. Οι πιθανότητες p, p', p'' απεικονίζουν πλήρως τα μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει το παράδειγμα μας. Για παράδειγμα το μονοπάτι 10 →14→15 έχει την πιθανότητα $\frac{1}{3} * \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ενώ για το μονοπάτι 10→14→11 είναι $\frac{2}{3} * \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

2.3 Μοντέλο Τιμολόγησης Martingale-Διαδικασία Τιμολόγησης

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα στατικό μοντέλο με δύο χρονικές στιγμές t=0 και t=1 μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως παρόντα και μελλοντικό χρόνο. Από σκοπιά μοντελοποίησης μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε μετοχή ή τιμή ως μια τυχαία μεταβλητή την οποία στη συνέχεια θα συμβολίζουμε ως X. Η τ.μ. $X = X(\Omega)$ είναι ορισμένη σε έναν χώρο Ω={ω} πιθανών αποτελεσμάτων όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω και στην προκείμενη στιγμή θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν ορισμένα πιθανά ενδεχόμενα $\omega_1,....,\omega_m$ καθώς και χρεόγραφα τα οποία συμβολίζονται ως $e(\omega_1),....,e(\omega_m)$ και έχουμε

$$e_k(\omega) = \begin{cases} 1 \ \alpha\nu \ \omega = \omega_\kappa \\ 0 \ \alpha\nu \ \omega \neq \omega_\kappa \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι το $e_\kappa(\omega)$ αποδίδει μία νομισματική μονάδα αν συμβεί η κατάσταση ω_κ αλλιώς δεν αποδίδει τίποτα. Για μια τ.μ. $X = X(\omega)$ θέτουμε ότι $x_1 = X(\omega_1), \ldots., x_m = X(\omega_m)$, τα οποία x_i μπορεί να συμπίπτουν. Αν $\omega = \omega_\kappa$ τότε όλα τα $e_i(\omega) = 0$ εκτός του $e_\kappa(\omega)$ το οποίο ισούται με 1 οπότε το X(ω) ισούται με x_k.

Βάσει αυτών καταλήγουμε στην εξίσωση

$$X(\omega) = x_1 e_1(\omega) + \cdots + x_m e_m(\omega) = \sum_{\iota=1}^{m} x_i e_i(\omega) \ (2.3.2)$$

Οπότε βλέπουμε ότι η κατάσταση των χρεογράφων

$e_1 = e_1(\omega), \ldots., e_m = e_m(\omega)$ έχει τον ρόλο βαρών και μπορεί να θεωρηθεί ότι ένας επενδυτής έχει x_i τεμάχια του χρεογράφου e_i.

Τώρα θα καθορίσουμε την έννοια της τιμής του X όπου θα θεωρούμε ως μια λειτουργία C(X). Αρχικά την στιγμή t=0 θεωρούμε ότι η τιμή είναι C(X) έτσι ώστε να έχουμε το πιθανό μελλοντικό κεφάλαιο X την στιγμή t=1.

Αν θεωρήσουμε ότι η C(X) είναι μια γραμμική λειτουργία με την έννοια ότι αν αγοράσουμε k_1 τεμάχια ενός χρεόγραφου X_1 και k_2 τεμάχια ενός χρεόγραφου X_2 τότε για την τυχαία μεταβλητή $X = k_1X_1 + k_2X_2$ θα πρέπει να πληρώσουμε

$$C(X) = k_1 C(X_1) + k_2 C(X_2)$$

οπότε έχουμε τον γενικό τύπο.

$$C(X) = \sum_{k=1}^{m} x_k C(e_k) \quad (2.3.3)$$

Όπου x_k είναι οι τιμές του Χ και ορίζουμε το $C(e_k) = \psi_k$ όπου είναι η τιμή του αξιόγραφου e_k.

Αν υποθέσουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή $X_0 \equiv 1$, όλα τα $x_k = 1$ τότε το αξιόγραφο(asset) έχει σίγουρη απόδοση 1. Έτσι έχουμε $C(X_0) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k$. Έχοντας υπόψη την (2.3.2) η αγορά του X_0 είναι ίση με την αγορά ενός τεμαχίου από κάθε επισφάλεια (state security) και αυτό ισούται με πληρωμές 1 νομισματικής μονάδας στο μέλλον. Η αξία του αξιογράφου X_0 είναι σίγουρα διάφορο της 1 ν.μ. αλλά είναι η παρούσα αξία μιας υποχρέωσης πληρωμής 1 ν.μ. στο μέλλον.

Υποθέτουμε ότι στην αγορά υπάρχει η δυνατότητα να επενδύσουμε 1 ν.μ. την στιγμή t=0 και να λάβεις 1+r ν.μ. την στιγμή t=1 χωρίς ρίσκο.

Αυτό μας ορίζει την ποσότητα r ως το ακίνδυνο επιτόκιο, δηλαδή επενδύοντας 1/1+r μας αποφέρει 1 ν.μ., το οποίο είναι και η παρούσα αξία μιας σίγουρης απολαβής 1 ν.μ. στο μέλλον. Επίσης το 1/1+r αποτελεί και τον συντελεστή έκπτωσης.

Έτσι

$$\psi_1 + \cdots + \psi_m = \frac{1}{1+r} \; (2.3.4)$$

Θέτωντας $\pi_k = (1+r)\psi_k$ η πάνω εξίσωση γράφεται ως

$$C(X) = \frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{m} x_k \pi_k \; (2.3.5)$$

Έτσι παρατηρούμε από την (2.3.4) ότι,

$$\pi_1 + \cdots + \pi_m = 1 \; (2.3.6)$$

και απομειώνουμε κατά π το μέτρο πιθανότητας το οποίο αποδίδει τις πιθανότητες π_k στο αποτέλεσμα ω_k.

Το άθροισμα $\sum_{k=1}^{m} x_k \pi_k$ στην εξίσωση (2.3.5) αποτελεί την αναμενόμενη τιμή του X λαμβάνοντας υπόψη το μέτρο πιθανότητας π**.**

Έστω ότι το $E_\pi\{\}$ συμβολίζει την διαδικασία προσδοκιών με δεδομένο το μέτρο πιθανότητας π. Έτσι μπορούμε να ξαναγράψουμε την συνάρτηση (2.3.5) ως

$$C(X) = \frac{1}{1+r} E_\pi\{X\} \quad (2.3.7)$$

Όπου θεωρούμε ότι το σύνολο πιθανών ενδεχόμενων Ω ήταν ορισμένο και υιοθετούμε την εξίσωση (2.3.7) ως έναν γενικό τύπο της διαδικασίας τιμολόγησης όπου το ***π*** αποτελεί ένα αυθαίρετο μέτρο πιθανότητας στον χώρο Ω. Έτσι στο μοντέλο τιμολόγησης που έχουμε παρουσιάσει, κάθε διαδικασία τιμολόγησης είναι ορισμένη από ένα μέτρο **π** και ένα ακίνδυνο επιτόκιο **r**.

2.4 Martingales σε Συνεχή χρόνο

Γενικές ιδιότητες

Οι ιδιότητες των martingales σε συνεχή χρόνο είναι αρκετά παρόμοιοι με αυτές του διακριτού χρόνου και για αυτό τον λόγο δεν θα τους αναλύσουμε σε μεγάλο βαθμό.

Αρχικά υποθέτουμε και σε αυτή την περίπτωση την ύπαρξη μιας βασικής διαδικασίας ξ_t από την οποία εξαρτώνται όλες οι άλλες διαδικασίες. Αυτό ισχύει για τις διαδικασίες X_t που ακολουθούν παρακάτω και για κάθε t.

Όπως και στον διακριτό χρόνο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό ξ^t για το σύνολο της τροχιάς $\{\xi_u; 0 \leq u \leq t\}$ και ο ανάλογος συμβολισμός χρησιμοποιείται για τις υπόλοιπες διαδικασίες.

Μια συνεχή διαδικασία X_t ονομάζεται martingale λαμβάνοντας υπόψη την βασική διαδικασία αν για κάθε t ισχύει

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_{\mathrm{t+s}}|\xi_{\mathrm{t}}] = \mathrm{X}_{\mathrm{t}} \quad (2.4.1)$$

Οι δυνατότητες είναι παρόμοιες με αυτές του διακριτού χρόνου οπότε και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να λάβουμε το παίγνιο της επένδυσης με X_t ως το κεφάλαιο, που επενδύεται από κάποιον, σε μια στιγμή t όπως και στην προηγούμενη ενότητα.

Όπως και στον διακριτό χρόνο μπορούμε να δείξουμε ότι μια ορισμένη martingale μπορεί να είναι μια martingale με λαμβάνοντας υπόψη την ίδια τη διαδικασία. Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το παράδειγμα της επένδυσης και βλέπουμε ότι το X_t είναι το συνολικό κεφάλαιο του παίκτη την στιγμή t.

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση (2.2.1) σημαίνει ότι αν t είναι η παρούσα στιγμή τότε το μέσο μελλοντικό κεφάλαιο X_{t+s} είναι ίσο με αυτό που έχει ήδη ο παίκτης την στιγμή t. Αυτά ισχύουν και στην διακριτή περίπτωση όπως είπαμε πιο πάνω.

Παράδειγμα

Έστω ότι ξ_t είναι μια διαδικασία με ανεξάρτητες αυξήσεις. Θεωρούμε ότι $m_t = E[\xi_t]$ και ότι $X_t = \xi_t - m_t$. Σε αυτή την περίπτωση X_t είναι martingale. Για παράδειγμα αν N_t είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο λ, τότε $X_t = N_t - \lambda t$ είναι μια martingale διαδικασία.

Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι η διαδικασία που καθορίζει την τιμή της μετοχής είναι S_t (2.2.5) και ότι υπάρχει στην αγορά ένα στοιχείο χωρίς κίνδυνο όπου το επιτόκιο αυξάνεται συνεχόμενα με ένα ακίνδυνο ποσοστό δ. Τότε από το χρονικό σημείο 0, η παρούσα αξία της μετοχής την στιγμή t θα είναι

$$\widetilde{S_t} = e^{-\delta t} S_t$$

Η S_t αποτελεί διαδικασία martingale μόνο στην περίπτωση που το δ ισούται με $\mu+\sigma^2/2$. Θα θεωρήσουμε ότι η S_t αποτελεί martingale διαδικασία, δηλαδή ότι το προηγούμενο ισχύει.

Αυτή η κατάσταση παραπέμπει σε ένα περιβάλλον με ουδέτερο ρίσκο διότι,

$$E\left\{\tilde{S}_{t+u} \middle| \widetilde{S^t}\right\} = \widetilde{S_t} \ (2.4.2)$$

Υποθέτουμε ότι το παρόν είναι η αρχική στιγμή, δηλαδή t=0 και διερευνούμε πιθανές μελλοντικές τιμές. Όταν συγκρίνουμε δύο πιθανές μελλοντικές τιμές σε δύο μελλοντικές χρονικές στιγμές, παραδείγματος χάρη, t και t+s, πρέπει να συγκρίνουμε τις παρούσες αξίες τους και όχι την τιμή τους στην μελλοντική χρονική στιγμή , δηλαδή το $\tilde{S}_t$ και $\tilde{S}_{t+u}$.

Η σχέση (2.4.2) σημαίνει πως σε ένα περιβάλλον με ουδέτερο κίνδυνο η παρούσα αξία θα ισούται κατά μέσο όρο με την αξία που έχει ήδη φτάσει.

2.5 Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown αποτελεί μια συνεχή μαρκοβιανή διαδικασία. Έστω B(t)=y ο χρόνος ενός υποκείμενου της κίνησης και υποθέτουμε ότι *x* είναι η θέση του υποκείμενου στον χρόνο t_0 δηλαδή για παράδειγμα $B(t_0)=x$. Έχουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας p(y,t|x) στο y του $B(t_0+t)$ δεδομένου ότι B(t)=x.

Επίσης υποθέτουμε ότι η p(y,t|x) δεν εξαρτάται από τον αρχικό χρόνο t_0.

Εφόσον η τελευταία αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τις ανάλογες ιδιότητες οι οποίες είναι :

- $\mathrm{p}(\mathrm{y},\mathrm{t}|\mathrm{x}) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p}(\mathrm{y},\mathrm{t}|\mathrm{x})\, dy = 1$

Ορισμός

Η κίνηση Brown με συντελεστή διάχυσης σ^2 είναι μια στοχαστική διαδικασία B(t), t ≥ 0 με τις εξής ιδιότητες

- Κάθε αύξηση B(s+t)-B(s) είναι κανονικά κατανεμημένα με μέσο 0 και διακύμανση $\sigma^2 t$, $\sigma^2 > 0$ σταθερά
- Κάθε ζευγάρι διαχωρισμένου χρονικού διαστήματος $(t_1, t_2]$, $(t_3, t_4]$, με $0 \leq \mathrm{t}_1 \leq \mathrm{t}_2 \leq \mathrm{t}_3 \leq \mathrm{t}_4$, ενώ οι αυξήσεις $B(t_4) - B(t_3)$ και $B(t_2) - B(t_1)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
- B(0) = 0 με B(t) συνεχή συναρτήσει του t.

Μία μετατόπιση B(s+t)-B(s) είναι ανεξάρτητη των παρελθοντικών καταστάσεων ή εναλλακτικά αν γνωρίζουμε το B(s)=x τότε καμία άλλη γνώση των τιμών του B(τ) για προηγούμενους χρόνους (τ < s) έχει καμία επίδραση στη γνώση μας για την μελλοντική κίνηση της B(s+t)-B(s).

Συνήθως θεωρούμε ότι η κίνηση brown δεν ξεκινάει από το 0 αλλά από ένα σημείο x. Για τις περιπτώσεις που όντως ξεκινάει από το σημείο, η μεταβλητή του B(t) είναι $\sigma^2 t$, και σ^2 αποτελεί την παράμετρο διακύμανσης. Η διαδικασία B΄(t)=B(t)/σ είναι μια κίνηση brown με παράμετρο διακύμανσης 1 και ονομάζεται τυπική *κίνηση Brown*.

Έτσι για την τυπική κίνηση Brown έχουμε

$$\Pr\{B(s+t) \leq y | B(s) = x\} = \Pr\{B(s+t) - B(s) \leq y - x\} = \Phi\left(\frac{y-t}{\sqrt{t}}\right)$$

2.6 Γεωμετρική κίνηση Brown

Μια στοχαστική διαδικασία $\{Z(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο απόκλισης α αν το $X(t) = \log Z(t)$ αποτελεί μια κίνηση Brown με συντελεστή απόκλισης $\mu = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$ και συντελεστή διακύμανσης σ^2. Ομοίως το Z(t) αποτελεί μια γεωμετρική κίνηση Brown με αρχή το Z(0) = z αν

$$Z(t) = ze^{X(t)} = ze^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)} \quad (2.6.1)$$

Όπου το B(t) είναι μια κίνηση Brown με αρχή το B(0) = 0.

Η χρήση της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι πιο συχνή από αυτή της κανονικής όσον αφορά τα οικονομικά και τα μοντέλα που περιλαμβάνουν περιουσιακά στοιχεία όπως μετοχές που διαπραγματεύονται σε τέλειες αγορές. Οι τιμές αυτών των περιουσιακών στοιχείων είναι θετικές και παρουσιάζουν τυχαίες διακυμάνσεις σε σχέση με μια μακροχρόνια καμπύλη ανάπτυξης, στοιχεία τα οποία κατέχονται από την γεωμετρική κίνηση και για αυτό τον λόγο χρησιμοποιείται εκτενώς από τον οικονομικό κόσμο.

Αν ισχύει ότι $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ με t_i και αποτελεί χρονικές στιγμές τότε έχουμε

$$\frac{Z(t_1)}{Z(t_0)}, \frac{Z(t_2)}{Z(t_1)}, \ldots, \frac{Z(t_n)}{Z(t_{n-1})}$$

που είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και φαίνεται ότι οι ποσοστιαίες αλλαγές μεταξύ μη διατεταγμένων χρονικών διαστημάτων είναι ανεξάρτητες.

Για τον ορισμό της μέσης τιμής ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή ξ που ακολουθεί μια κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Έτσι έχουμε

$$E[e^{\lambda\xi}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \text{ όπου το λ ορίζεται στο (-∞,∞).}$$

Η άνω εξίσωση συμπεραίνεται από την εξής διαδικασία

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)(u-\lambda)^2}\right)\mathrm{du}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)(u^2-2\lambda u+\lambda^2)}\mathrm{du}$$

$$= e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{du}$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{2}} E\left[e^{\lambda\xi}\right]$$

Για να εξάγουμε την μέση τιμή της γεωμετρικής κίνησης

$$Z(t) = ze^{X(t)} = z\mathrm{e}^{\left(\alpha-\left(\frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)t+\sigma B(t)},$$

χρησιμοποιούμε το ότι $\xi = B(t)|\sqrt{t}$ κανονικά κατανεμημένο με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 όπου

$$E[Z(t)|Z(0)] = zE[e^{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B(t)}] = \mathrm{z}e^{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}\mathrm{E}[e^{\sigma\sqrt{t\xi}}]$$

$$= \mathrm{z}\, e^{\left(a-(\sigma^2)\right)t} e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t} = \mathrm{z}e^{at}$$

Όπου $\xi = B(t)|\sqrt{t}$

Η ισότητα αυτή έχει επιπλοκές όσον αφορά την εφαρμογή του στα οικονομικά στην περίπτωση που το α είναι θετικό αλλά μικρό συγκριτικά με την διακύμανση σ^2.

Στην μία περίπτωση αν το α είναι θετικό αλλά μικρότερο από το μισό της διακύμανσης τότε η διαφορά τους είναι μικρότερη του μηδενός οπότε το

$$X(t) = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)$$

έχει αρνητική απόκλιση.

Ως απόρροια από την θεωρία των μεγάλων αριθμών βλέπουμε ότι

X(t) → −∞ όταν το t → ∞ υπό τις συνθήκες που προαναφέραμε και έτσι

Z(t) = $ze^{X(t)}$ → $e^{-\infty}$ = 0. Η γεωμετρική κίνηση Brown κλίνει ακόμα περισσότερο στο μηδέν ενώ παράλληλα η μέση τιμή αυξάνεται.

Η διακύμανση της γεωμετρικής κίνησης παράγεται με τον ίδιο τρόπο όπως η μέση τιμή, δηλαδή

$$\mathrm{E}[\mathrm{Z(t)2|Z(0) = z}] = z^2\ \mathrm{E}[e^{2\left(\alpha - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t + 2\sigma B(t)\right)}]$$
$$= \mathrm{z}^2 e^{2at(z^2 e^{2at} e^{\sigma^2 t} - 1)}$$

Λόγω της κοντινής σχέσης που παρουσιάστηκε στην σχέση πολλά αποτελέσματα της κίνησης Brown μπορούν να συνδεθούν με αποτελέσματα της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Ως παράδειγμα παίρνουμε την μέθοδο τιμολόγησης δικαιωμάτων των *Black and Scholes.*

Ένα δικαίωμα αγοράς είναι το δικαίωμα που δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχο του να αγοράσει τις προσυμφωνηθείσες μετοχές στην τιμή που αναγράφετε στο δικαίωμα σε οποιαδήποτε στιγμή αποφασίσει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος(Αμερικάνικου τύπου).

Έστω λοιπόν μια μετοχή η οποία είναι παρέχει ένα δικαίωμα αγοράς σ έναν αγοραστή στην τιμή των 6€ ανά μετοχή με τη δυνατότητα να αγοράσει τις μετοχές, σε κάποια στιγμή μέχρι τη λήξη του δικαιώματος , στην τιμή των 60€ ανά μετοχή (strike price). Αν η τελευταία τιμή κλεισίματος της μετοχής ήταν 59 € τότε το δικαίωμα έχει το προνόμιο 7€ (60+6-59=7) αν υποθέσουμε ότι η συμφωνία γίνεται σήμερα. Αν η τιμή της μετοχής αυξηθεί, ας πούμε στα 70€, από τώρα μέχρι τη λήξη του δικαιώματος τότε ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να αγοράσει στα 60€ και κατευθείαν να πουλήσει στην αγορά στη τιμή των 70€ κερδίζοντας 10€ ανά μετοχή μείον τα 6€ που έδωσε για να αγοράσει το δικαίωμα δηλαδή έχει καθαρό κέρδος 4€. Αν η τιμή της μετοχής πέσει τότε ο κάτοχος του δικαιώματος δεν έχει συμφέρον να εξασκήσει το δικαίωμα του και ο πωλητής του δικαιώματος έχει κέρδος 6 € ανά μετοχή.

Έτσι δημιουργείται η ερώτηση αν η τιμή των 6€ θεωρείται δίκαιη για την απόκτηση του δικαιώματος.

Παρότι οι περισσότεροι ερευνητές προσέγγιζαν το ζήτημα με τη χρήση της γεωμετρικής κίνησης Brown για να ερμηνεύσουν την κίνηση της τιμής της μετοχής, όλοι θεωρούσαν ότι το δικαίωμα θα πρέπει να αποφέρει μεγαλύτερη μέση απόδοση σε σχέση με την μετοχή που αφορά λόγω της απεριόριστης έκθεσης στον κίνδυνο που έχει ο πωλητής του δικαιώματος. Έτσι ο Black παρουσίασε μια θεωρία, όπου σε ένα ιδανικό περιβάλλον που δεν περιέχει κόστη συναλλαγής αλλά περιέχει τη δυνατότητα να δανείζονται ελεύθερα ποσά με το ίδιο σταθερό επιτόκιο έτσι ώστε ο κάτοχος ενός δικαιώματος να μπορεί να αγοράσει και να πωλήσει τη μετοχή προκειμένου να ταιριάζει με την χρηματοροή του δικαιώματός του. Έχοντας διαθέσιμες 2 επενδυτικές επιλογές με την ίδια απόδοση απαλείφονται όλοι οι κίνδυνοι και η αβεβαιότητα επιτρέποντας στον επενδυτή να αγοράζει τη μία επιλογή και να πουλάει την άλλη.

Βάσει αυτού εξάχθηκαν δύο συμπεράσματα. Πρώτον εφόσον πουλάς ένα δικαίωμα δεν ενέχει κάποιον κίνδυνο, η απόδοση του πρέπει να είναι αντίστοιχη με των υπόλοιπων επενδύσεων που δεν έχουν κίνδυνο αλλιώς θα δημιουργούνταν πολλές ευκαιρίες που δεν ενέχουν ρίσκο και αποδίδουν μεγάλα κέρδη. Δεύτερον, από την στιγμή που το δικαίωμα δεν ενέχει κίνδυνο, ο κάτοχος του δεν πρέπει να ασκήσει το δικαίωμα του νωρίς αλλά να το διατηρήσει μέχρι την λήξη του και να το εξασκήσει αν η τιμή της αγοράς περάσει την τιμή άσκησης.

Από τα δύο συμπεράσματα δημιουργήθηκε μια φόρμουλα που καθιέρωσε την αξία και την τιμή του δικαιώματος.

2.7Μαθηματική μοντελοποίηση Black and Scholes

Έστω ότι S(t) η τιμή μιας μετοχής την στιγμή t η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο απόκλισης α και διακύμανση σ^2. Επίσης θεωρούμε ότι $F(z,\tau)$ είναι η αξία ενός δικαιώματος όπου το z είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής, τ είναι ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος αυτού ενώ α είναι η τιμή άσκησης του.

Όταν ο υπολειπόμενος χρόνος είναι μηδέν η άσκηση του δικαιώματος αποφέρει κέρδος z-α αν ισχύει ότι z > α, δηλαδή η τιμή της αγοράς είναι μεγαλύτερη από αυτή της άσκησης) ενώ το δικαίωμα δεν ασκείται αν z ≤ α. Λόγω αυτού δημιουργείται η σχέση

$$F(z,0) = (z-a)^+ = \{z-a,0\}$$

Το οποίο βάση της ανάλυσης των Black and Scholes γίνεται

$$\mathrm{F(z,\tau) = e^{-rt}E[(Z(\tau)-a)^+|Z(0)=z]}\ (2.7.1)$$

όπου r είναι το ακίνδυνο επιτόκιο και το Z(t) είναι μια δεύτερη γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο απόκλισης r και διακύμανσης σ^2.

Βάση της φόρμουλας (2.7.1) βλέπουμε ότι η τιμή του δικαιώματος δεν εξαρτάται από την παράμετρο απόκλισης α της μετοχής.

Έτσι για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση έχουμε

$$\mathrm{Z(\tau) = z\ e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}\xi}}\ \text{όπου}\ \xi = \frac{B(\tau)}{\sqrt{\tau}}$$

Και παρατηρούμε ότι z $e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau\xi}}$ > α είναι το ίδιο με το

$$\xi > \mathrm{v_0} = \frac{\left(log\left(\frac{a}{z}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Έτσι

$$
\begin{aligned}
e^{rt}\mathrm{F}(z,\tau) &= \mathrm{E}[\mathrm{Z}(\tau) - \alpha)+ \mid \mathrm{Z}(0) = z] \\
&= \mathrm{E}[(ze^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}\,\xi} - \alpha)+] \\
&= \int_{\nu}^{\infty}\left[ze^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}\,\nu} - \alpha\right)]\varphi(\nu)d\nu \\
&= ze^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}\int_{\nu}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{\tau}\nu}\varphi(\nu)d\nu - \alpha\int_{\nu}^{\infty}\varphi(\nu)d\nu
\end{aligned}
$$

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα στη μορφή

$$
-\frac{1}{2}\nu^2 + \sigma\sqrt{\tau}\nu = -\frac{1}{2}\left[\left(\nu - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2 - \sigma^2\tau\right]
$$

βλέπουμε ότι

$$
e^{\sqrt{\tau}\nu}\varphi(\nu) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau}\varphi\left(\nu - \sigma\sqrt{\tau}\right)
$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
e^{rt}\mathrm{F}(z,\tau) &= ze^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}e^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau}\int_{\nu}^{\infty}\varphi\left(\nu - \sigma\sqrt{\tau}\right)d\nu - \alpha[1 - \Phi(\nu 0)] \\
&= ze^{r\tau}\left[1 - \Phi\left(\nu_0 - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right] - \alpha[1 - \Phi(\nu_0)]
\end{aligned}
$$

Επιπλέον έχουμε

$$
\nu_0 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\log\left(\frac{\alpha}{z}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
$$

Και ότι

$$
1\text{-}\Phi(\mathrm{x}) = \Phi(\text{-}\mathrm{x}) \text{ και } \log\left(\frac{a}{z}\right) = -\log\left(\frac{z}{a}\right)
$$

Αφού πολλαπλασιάσουμε με $e^{r\tau}$, έχουμε

$$
F(z,\tau) = z\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \alpha e^{-r\tau}\Phi\left(\left(\frac{\log\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \quad (2.7.2)
$$

Η εξίσωση (2.7.2) αποτελεί τον τύπο τιμολόγησης του Black and Scholes.

Στην εξίσωση περιέχονται πέντε παράγοντες οι οποίοι είναι η τιμή της αγοράς z, η τιμή εκτέλεσης α, ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος τ, το ακίνδυνο επιτόκιο r καθώς και η διακύμανση σ.

Οι τέσσερις πρώτοι παράγοντες είναι εύκολο να αξιολογηθούν και να προσαρτηστούν στην φόρμουλα ενώ ο πέμπτος μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα όσον αφορά τον υπολογισμό του.

Μπορεί να υπολογισθεί βάσει παλαιότερων αποτελεσμάτων αλλά υπάρχει πιθανότητα η μελλοντική διακύμανση να διαφέρει από αυτή των περασμένων ετών. Μία μέθοδος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι το να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο ανάποδα δηλαδή να αποδώσουμε μια διακύμανση για μία υπάρχουσα τιμή της αγοράς. Παραδείγματος χάρη, στη μετοχή που χρησιμοποιήσαμε πριν, το δικαίωμα μας λήγει σε 6 μήνες άρα τ = ½ οπότε με τρέχουσα αξία τα 59€, τιμή άσκησης, ακίνδυνο επιτόκιο r = 0.05 και μια διακύμανση σ=0.35 συνίσταται με τιμή δικαιώματος 6€. Μια διακύμανση που έχει εξαχθεί ονομάζεται τεκμαρτή μεταβλητότητα. Κάποιος που υποστηρίζει πως στο μέλλον θα υπάρχει μεγαλύτερη διακύμανση θεωρεί τα 6€ ως καλή επιλογή αν όμως θεωρεί πως θα έχει μικρότερη θα επιλέξει να πουλήσει το δικαίωμα της μετοχής.

Κεφάλαιο 3

Βέλτιστη Στοχαστική Μοντελοποίηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης CO_2

3.1 Δικαιώματα προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν συμβόλαια μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων όπου ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει τον τίτλο του συμβολαίου μέσα σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο και σε προκαθορισμένη τιμή. Στην περίπτωση που δεν τον συμφέρει έχει την δυνατότητα να αφήσει το συμβόλαιο ανεκτέλεστο. Ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος είτε να αγοράσει είτε να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο αν ο αγοραστής του δικαιώματος αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα του μέσα στο χρονικό περιθώριο που αναφέρετε στο συμβόλαιο. Για την σύναψη του συμβολαίου ο αγοραστής καταβάλλει ένα αντίτιμο στον πωλητή ανάλογο της αξίας που έχει το δικαίωμα προκειμένου να εξασφαλίσει την αγορά του δικαιώματος. Εκτός από ιδιωτικές συμφωνίες, εμπορία δικαιωμάτων διάγεται και στο χρηματιστήριο όπου οι αντισυμβαλλόμενοι μιας αγοραπωλησίας δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι σε τόσο δεσμευτική θέση όσο στις ιδιωτικές συμφωνίες. Αν ένας πωλητής δικαιώματος θέλει να βγει από την θέση του πωλητή μπορεί να αποδεσμευτεί πραγματοποιώντας την αντίθετη συναλλαγή, δηλαδή να αγοράσει τα αντίστοιχα δικαιώματα ενώ αν ένας αγοραστής θέλει να αποδεσμευτεί αρκεί να πουλήσει δικαιώματα. Η τιμή την οποία πληρώνει ένας αγοραστής για να ολοκληρωθεί μια συναλλαγή ονομάζεται τιμή δικαιώματος ή ασφάλιστρο.

Οι όροι που συμφωνούνται κατά την σύναψη ενός συμβολαίου αφορούν τον υποκείμενο τίτλο, δηλαδή τι έχει δικαίωμα να αγοράσει ή να πωλήσει ο αγοραστής κατά τη διάρκεια ισχύς του συμβολαίου, την ποσότητα για την οποία έχει δικαίωμα, την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος δηλαδή σε τι τιμή θα εκτελεστεί το δικαίωμα, την διάρκεια ισχύς του συμβολαίου και τέλος τον τύπο του συμβολαίου. Υπάρχουν διάφοροι τύποι συμβολαίων προαίρεσης με διαφορές ως προς τον τρόπο άσκησης των δικαιωμάτων με τα πιο γνωστά να είναι τα αμερικανικού και ευρωπαϊκού τύπου, όπου τα αμερικανικού μπορούν να εξασκηθούν ανά πάσα στιγμή κατά τη διάρκεια του συμβολαίου ενώ τα ευρωπαϊκά μόνο κατά την λήξη του συμβολαίου. Τα δικαιώματα χωρίζονται σε δύο είδη σύμφωνα με τι υποχρεούται να πράξει ο αγοραστής ενός δικαιώματος, τα δικαιώματα αγοράς(call option) και τα δικαιώματα πώλησης(put option).

3.2 Δικαιώματα αγοράς (Call-Option)

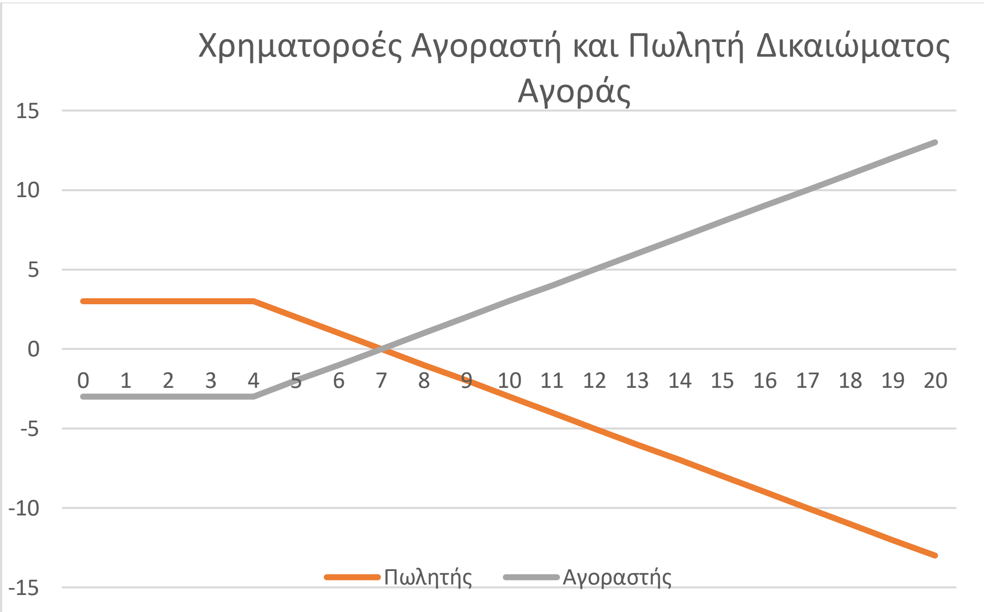
Με την σύναψη ενός συμβολαίου δικαιώματος αγοράς ο αγοραστής έχει την δυνατότητα να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή (έστω X) και ποσότητα που έχει συμφωνηθεί είτε αυτό αποτελεί αγαθό είτε κάποιον τίτλο. Ο αγοραστής κατά την σύναψη του συμβολαίου αναμένει μελλοντική πτώση τιμών, για αυτό τον λόγο και συνάπτει συμβόλαιο για μελλοντική αγορά, έτσι ώστε να έχει την δυνατότητα να αγοράσει το προϊόν στο μέλλον σε σημερινή τιμή η οποία υπολογίζει ότι θα είναι μικρότερη από την τιμή της αγοράς (έστω S) την ημέρα άσκησης του δικαιώματος του. Έτσι θα εξασκήσει το δικαίωμα του μόνο στην περίπτωση που αναμένει να βγάλει κέρδος από αυτή του την πράξη διότι αν έχει συμφωνήσει να αγοράσει το προϊόν σε μεγαλύτερη τιμή από αυτή που βρίσκεται η αγορά και ασκήσει το δικαίωμα του θα έχει ζημιά. Επίσης σε κάθε περίπτωση καταβάλλει την τιμή του δικαιώματος (έστω P) κατά την σύναψη του συμβολαίου οπότε πρέπει να υπολογίζεται και αυτό στο αν και σε ποιο σημείο θα ασκήσει το δικαίωμα του για να έχει κέρδος. Στην αντίθετη θέση βρίσκεται ο πωλητής του δικαιώματος ο οποίος αναμένει είτε πτώση τιμών είτε διατήρηση τους προκειμένου να μην συμφέρει τον αγοραστή να ασκήσει το δικαίωμα του και να καρπωθεί το ασφάλιστρο και να πουλήσει το προϊόν στις τρέχουσες τιμές της αγοράς παρότι θα να μικρότερες.

Όταν η τιμή του υποκείμενου προϊόντος είναι μεγαλύτερη από την τιμή του ασφαλίστρου ο αγοραστής έχει κάθε λόγο να ασκήσει το δικαίωμα του και να αποκομίσει κέρδος S-X και να έχει καθαρό κέρδος S-X-P. Στην περίπτωση που δεν ασκήσει το δικαίωμα του επιβαρύνεται με ζημιά S-X εκείνη τη στιγμή και S-X-P αν συμπεριλάβουμε και το ασφάλιστρο.

Εφόσον υπάρχουν μόνο αυτές οι δύο περιπτώσεις (άσκηση και μη άσκηση δικαιώματος) η τιμή ενός δικαιώματος (C_t) την στιγμή t ισούται με το μέγιστο των δύο περιπτώσεων δηλαδή

$$C_t = \begin{cases} S_t - X, & S_t > X \\ 0, & S_t \leq X \end{cases}$$

Όπως φαίνεται λόγω της αντίθετης θέσης των δύο μερών το κέρδος του ενός αποτελεί ζημιά του άλλου και παρουσιάζονται στο παρακάτω παράδειγμα. Έστω ότι η τιμή του ασφάλιστρου είναι 3 ενώ η τιμή άσκησης είναι 4 τότε πραγματοποιούνται οι παρακάτω κινήσεις όπως φαίνονται στο διάγραμμα.



Πίνακας 3:παρουσίαση κίνησης call option

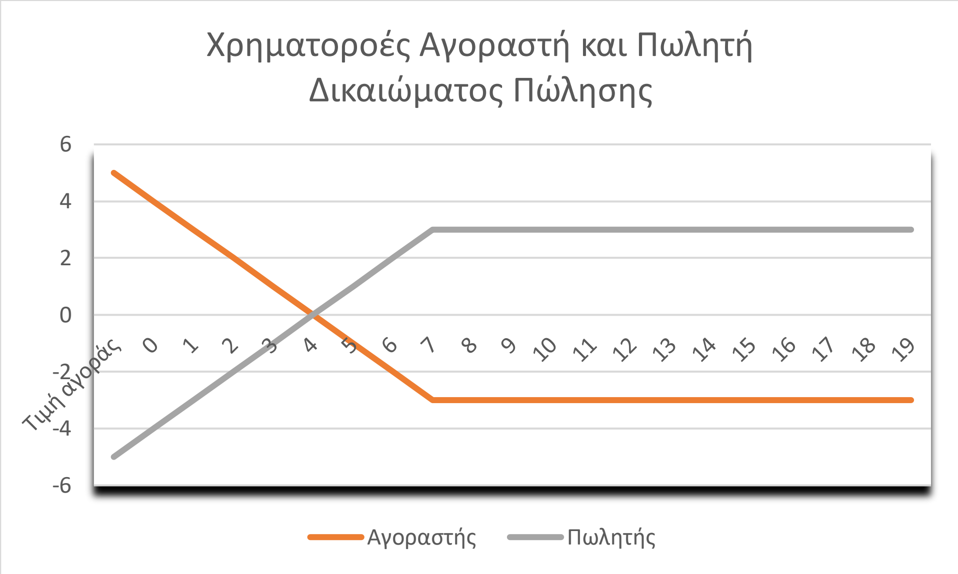
Όπως φαίνεται μετά την τιμή άσκησης του δικαιώματος τα έσοδα του πωλητή μειώνονται ενώ του αγοραστή αυξάνονται μέχρι που μηδενίζονται και τα δύο στην τιμή 7 όπου ισούται με το ασφάλιστρο και την τιμή άσκησης του δικαιώματος. Μετά από αυτό το σημείο ο αγοραστής έχει κέρδη και ο πωλητής ζημία.

3.3 Δικαιώματα Πώλησης (Put-Option)

Με την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης ένας αγοραστής έχει την δυνατότητα να πουλήσει το υποκείμενο του συμβολαίου στην τιμή (X) που έχει συμφωνηθεί και μέσα στο χρονικό περιθώριο του συμβολαίου. Ο αγοραστής προσδοκά μείωση τιμών έτσι ώστε να πουλήσει το προϊόν σε τιμή μεγαλύτερη από αυτή που υπάρχει στην αγορά (S) και να αποκομίσει την διαφορά. Αν κάνει λάθος για την κίνηση της τιμής δεν εξασκεί το δικαίωμα του και πουλάει το προϊόν του κανονικά στην αγορά σε μεγαλύτερη από την τιμή του συμβολαίου. Όπως και στην περίπτωση δικαιώματος αγοράς πρέπει να καταβληθεί ένα ασφάλιστρο (P) στον πωλητή για την αγορά του δικαιώματος. Από την μεριά του ο πωλητής του δικαιώματος πώλησης αναμένει αύξηση τιμών στην αγορά και πιστεύει πως ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του αλλά θα προτιμήσει να πουλήσει τα προϊόντα του στην αγορά για μεγαλύτερο κέρδος. Στην περίπτωση που είναι συμφέρον για τον αγοραστή να εξασκήσει το δικαίωμα του κερδίζει $X\text{-}S_t$ και αν συμπεριλάβουμε και το ασφάλιστρο που έχει καταβάλει κερδίζει $X\text{-}S_t\text{-}P$. Στην περίπτωση που δεν τον συμφέρει το μόνο που χάνει είναι το ασφάλιστρο του. Έτσι η αποτίμηση ενός δικαιώματος πώλησης (P_t) την στιγμή t παριστάνεται ως

$$P_t = \begin{cases} X - S_t, & | \quad X > S_t \\ 0, & | \quad X \leq S_t \end{cases}$$

Έστω ότι έχουμε ασφάλιστρο δικαιώματος 4 μονάδες και τιμή άσκησης 7 τότε δημιουργείται το επόμενο διάγραμμα για το τις κινήσεις του αγοραστή και πωλητή για το δικαίωμα πώλησης.



Πίνακας 4: Παρουσίαση κίνησης put option

Όπως φαίνεται όταν η τιμή της αγοράς περνάει την τιμή άσκησης το έσοδο των αντισυμβαλλόμενων δεν μεταβάλλεται άλλο.

3.4 Τιμολόγηση δικαιωμάτων παραγώγων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί μια εισαγωγή στην τιμολόγηση δικαιωμάτων παραγώγων παρουσιάζοντας την βασική ιδέα της τιμολόγησης και θα καταλήξουμε στην τιμολόγηση με χρήση στοχαστικών μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα της κίνησης Brown.

Διωνυμική Τιμολόγηση

Βασική αρχική υπόθεση αποτελεί η υπόθεση της διωνυμικής τιμολόγησης ενός παραγώγου. Θεωρούμε ότι η τιμή της μετοχής που διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο ακολουθεί μια πολλαπλασιαστική διωνυμική διαδικασία μέσα σε συγκεκριμένες χρονικές περιόδους.

Επίσης λόγω του ότι το παρόν αποτελεί μια βασική θεωρητική προσέγγιση Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν τυχόν έξοδα, όπως παραδείγματος χάρη φόροι, καθώς και ότι το επιτόκιο είναι σταθερό καθ’ όλη τη διάρκεια μιας περιόδου.

Η απόδοση της επένδυσης σε κάθε περίοδο μπορεί να έχει μόνο δύο αποτελέσματα. Το πρώτο είναι α με πιθανότητα πραγματοποίησης p και το δεύτερο β με πιθανότητα πραγματοποίησης 1-p. Αν θεωρήσουμε ότι η τρέχουσα τιμή της επένδυσης είναι S τότε το αποτέλεσμα που μπορούμε να προσδοκάμε στο τέλος της περιόδου είναι είτε αS είτε βS με αντίστοιχες πιθανότητες p και 1-p.

Για να παρουσιάσουμε την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το συμβόλαιο θα λήξει στην επόμενη περίοδο. Χρησιμοποιούμε αυτή την υπόθεση καθώς αποτελεί την πιο απλή περίπτωση και αποτελεί μια καλή αρχή έτσι ώστε να γίνει κατανοητός ο τον μηχανισμό λειτουργίας της τιμολόγησης.

Έστω λοιπόν ότι το C αποτελεί την τρέχουσα αξία του συμβολαίου ενώ C_α και C_β η αξία του συμβολαίου για κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις που προαναφέραμε. Εφόσον έχουμε μόνο μια περίοδο μέχρι τη λήξη του συμβολαίου γνωρίζουμε ότι η αξία του συμβολαίου θα είναι

$$C_a = \max[0, aS - K] \ \textit{είτε} \ C_\beta = \max[0, \beta S - K] \ (3.4.1)$$

με K να είναι το κόστος απόκτησης του δικαιώματος και τα οποία έχουν πιθανότητα p και 1-p αντίστοιχα.

Αν υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο μας απαρτίζεται από έναν αριθμό N μετοχών καθώς και από ένα ποσό X το οποίο αποτελεί επένδυση σε μετοχές χωρίς κίνδυνο (riskless bonds) τότε το συνολικό μας κόστος ανέρχεται σε

$$NaS + rX$$

ή

$$N\beta S + rX$$

με ανάλογες πιθανότητες p και 1-p αντίστοιχα όπως και σε κάθε περίπτωση.

Θεωρούμε ότι αυτές οι τιμές ισούται με την αξία του συμβολαίου στη λήξη του, δηλαδή με C_α και C_β αντίστοιχα.

Έτσι λύνοντας τις δύο εξισώσεις έχουμε ότι :

$$NaS + rX = Ca \rightarrow N = \frac{C_a - rX}{aS}$$

$$N\beta S + rX = C\beta \rightarrow N = \frac{C_\beta - rX}{\beta S}$$

Από τα οποία καταλήγουμε στο ότι

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}_\alpha - \mathrm{C}_\beta}{(\alpha-\beta)\mathrm{S}} \quad \text{και} \quad \mathrm{X} = \frac{\alpha\mathrm{C}_\beta - \beta\mathrm{C}_\alpha}{(\alpha-\beta)\mathrm{r}}$$

Θα ορίσουμε αυτό το χαρτοφυλάκιο ως το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου. Η τιμή του δικαιώματος δεν μπορεί να είναι διαφορετική από αυτή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης διότι στην περίπτωση που η τιμή του δικαιώματος είναι μικρότερη του χαρτοφυλακίου τότε ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να έχει κέρδος χωρίς κίνδυνο αγοράζοντας το δικαίωμα και πουλώντας παράλληλα το χαρτοφυλάκιο.

Στην περίπτωση που η τιμή του δικαιώματος είναι μεγαλύτερη από την τιμή του χαρτοφυλακίου τότε πάλι ίσως είχαμε ευκαιρία για ακίνδυνο κέρδος αγοράζοντας το χαρτοφυλάκιο και πουλώντας το δικαίωμα αλλά δεν είναι σίγουρο γιατί το άτομο που παίρνει το δικαίωμα έχει το προνόμιο να το εξασκήσει αμέσως (στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε αμερικανικού τύπου δικαίωμα).

Έτσι για να μην υπάρχει δυνατότητα ακίνδυνου κέρδους (για κανέναν συμβαλλόμενο) πρέπει να ισχύει ότι

$$\mathrm{C} = \mathrm{NS} + \mathrm{X} = \frac{C_\alpha - C_\beta}{(\alpha-\beta)} + \frac{\alpha C_\beta - \beta C_\alpha}{(\alpha-\beta)r} = \frac{\left[\frac{(r-\beta)}{(\alpha-\beta)}C_\alpha + \frac{\alpha-r}{(a-b)}C_\beta\right]}{r} \qquad (3.4.2)$$

στην περίπτωση που η αξία είναι μεγαλύτερη του S-K.

Εφόσον ισχύει ότι r > 1 τότε έχουμε ότι C > S-K και έτσι η εξίσωση (3.4.2) αποτελεί τον τύπο τιμολόγησης του δικαιώματος για μια περίοδο.

Για ευκολία θέτουμε το $\frac{(r-\beta)}{(\alpha-\beta)} = z$ και το $\frac{\alpha-r}{(a-b)} = c$ και τότε η (3.4.2) γίνεται

$$\mathrm{C} = (\mathrm{z}C_{\alpha}+\mathrm{c}C_{\beta})/\mathrm{r}$$

Για να δείξουμε λοιπόν ότι η (3.4.2) είναι ο τύπος τιμολόγησης έχουμε πως αν $\mathrm{a}S < K$ τότε ισχύει $S < K$ και $C = 0$ προκειμένου να ισχύει ότι $C > S - K$.

Επίσης στην περίπτωση που ισχύει $\beta S \geq K$ τότε $C = S - \left(\frac{K}{r}\right) > S - K$.

Η τελευταία περίπτωση είναι αν $\mathrm{a}S > K > \beta S$ όπου σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $C = z(\mathrm{aS} - K)/r$ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $\mathrm{S} - K$.

Όπως φαίνεται η αξία του δικαιώματος δεν επηρεάζεται από την στάση των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο. Καταλήγουμε στην ίδια φόρμουλα ανεξαρτήτως αν επιδιώκουν ή όχι να εκτεθούν σε περισσότερο κίνδυνο. Επίσης παρατηρούμε ότι η μόνη τυχαία μεταβλητή, από την οποία εξαρτάται ο τύπος τιμολόγησης, είναι η τιμή του δικαιώματος. Αυτό σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από άλλες μεταβλητές που μπορεί να υπάρχουν στην αγορά.

3.5 Τιμολόγηση Δικαιώματος με λήξη σε δύο περιόδους

Βάση της δυωνυμικής διαδικασίας που αναλύθηκε προηγουμένως προχωράμε στην ανάπτυξη της περίπτωσης όπου υπάρχει λήξη του δικαιώματος σε δύο περιόδους από την στιγμή που αποφασίζουμε να κάνουμε κάποια ενέργεια. Έτσι λοιπόν ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό η τιμή της μετοχής.

Η πρώτη είναι να συμβεί δύο φορές θετική έκβαση, δηλαδή στην πρώτη περίοδο η τιμή να διαμορφωθεί ως $S = aS$ και στην δεύτερη να συμβεί το ίδιο και να καταλήξουμε στο ότι$S = \mathrm{a}^2 S$.

Η δεύτερη είναι όταν έχουμε μια θετική κίνηση στην πρώτη περίοδο και μετά μια αρνητική στην επόμενη. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της μετοχής διαμορφώνεται ως$S = \alpha\beta S$.

Στην τρίτη περίπτωση η τιμή της μετοχής ακολουθεί δύο αρνητικές κινήσεις θέτοντας την τιμή στο $S = \beta^2 S$ όπως και ήταν αναμενόμενο.

Με την ίδια λογική που κινείται η τιμή της μετοχής, και λαμβάνοντας υπόψιν την τιμή της, υπολογίζεται και η τιμή του δικαιώματος, δηλαδή έχουμε πάλι τρεις περιπτώσεις.

Η τιμή του δικαιώματος, όπως δείξαμε και στην περίπτωση με μία περίοδο μέχρι την λήξη, θα είναι είτε ίση με την αξία του δικαιώματος στην λήξη του ή μηδενική, αναλόγως τι είναι μεγαλύτερο.

Έτσι έχουμε στην πρώτη περίπτωση

$$\mathrm{C\alpha} = \max[\ 0\ ,\ \mathrm{\alpha 2S} - \mathrm{K}\ ]$$

Όπου ακολουθεί την ίδια θετική πορεία όπως η τιμή της μετοχής.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$\mathrm{C\alpha\beta} = \max[\ 0,\ \mathrm{\alpha\beta S} - \mathrm{K}\ ]$$

Και στην τελευταία έχουμε

$$\mathrm{C\beta} = \max[\ 0,\ \mathrm{\beta 2S} - \mathrm{K}\ ]$$

Όπως φαίνεται οι περιπτώσεις της τιμής του δικαιώματος είναι αντίστοιχες των περιπτώσεων της τιμής της μετοχής και άμεσα συνδεδεμένες καθώς καθορίζουν την αξία του δικαιώματος . Οπότε η πρώτη περίπτωση της τιμής του δικαιώματος είναι παράγωγο της πρώτης περίπτωσης της τιμής της μετοχής και ούτω καθεξής.

Στο τέλος της πρώτης περιόδου όμως το δικαίωμα θα έχει ακόμα ένα χρόνο υπολειπόμενο και θα έχουμε την μορφή του δικαιώματος που λήξει σε μια περίοδο που αναλύσαμε ήδη. Έτσι γνωρίζουμε ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου το δικαίωμα διαμορφώνεται ως

$$C = \frac{zC_a + cC_\beta}{r}$$

Εφόσον μένει άλλη μια περίοδος με τα ίδια πιθανά αποτελέσματα όπως η πρώτη, δηλαδή S= αS και S=βS τότε το δικαίωμα καταλήγει να έχει δύο πιθανές τιμές λόγω του ότι η μετοχή έχει 3 πιθανές τιμές. Έτσι η αξία του δικαιώματος καταλήγει να είναι

$$C_\alpha = \frac{zC_{\alpha\alpha}+cC_{\beta\alpha}}{r} \; (3.4.3)$$

ή

$$C_\beta = \frac{zC_{\alpha\beta}+cC_{\beta\beta}}{r} (3.4.4)$$

Πάλι καλούμαστε να επιλέξουμε ένα χαρτοφυλάκιο με επενδύσεις NS σε μετοχές που αφορούν το δικαίωμα και X σε ομόλογα όπου η τιμή του στο τέλος της περιόδου θα εξισώνεται με το C_α ή το C_β ανάλογα.

Ουσιαστικά ο τρόπος που αποφασίζουμε τον αριθμό των μετοχών και ομολόγων δεν αλλάζει και χρησιμοποιούμε πάλι τους τύπους(3.4.2)

Όπως και στην περίπτωση της μιας περιόδου υπάρχει η κίνδυνος για κέρδος δίχως ρίσκο μέσω arbitrage αν η τρέχουσα τιμή του δικαιώματος διαφέρει του S-K. Αλλά στην περίπτωση των δύο περιόδων που εξετάζουμε υπάρχουν διαφορές. Το πρόβλημα μας είναι ότι όταν περάσει μια περίοδος μπορεί η αγοραία αξία να έχει μεγαλύτερη τιμή από αυτή του χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης που σχηματίσαμε. Αν κλείσουμε την θέση μας σε αυτή την κατάσταση, δηλαδή πουλώντας το χαρτοφυλάκιο και επαναγοράζοντας το δικαίωμα θα είχαμε ζημιά. Βέβαια το καλύτερο σε αυτή την περίπτωση είναι να διατηρήσουμε το χαρτοφυλάκιο για άλλη μια περίοδο όπου και θα έληγε το δικαίωμα. Στην περίπτωση που η αγοραία τιμή πέσει κάτω από αυτή του χαρτοφυλακίου τότε έχουμε την δυνατότητα να βγάλουμε κέρδος χωρίς κίνδυνο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι και στις δύο περιπτώσεις (μιας και δύο περιόδων) υπάρχει η δυνατότητα ακίνδυνου κέρδους αν η αγοραία τιμή του δικαιώματος διαφέρει από τα NS+X και S-K, όπου κανονικά το μεγαλύτερο εκ των δύο είναι η τιμή του δικαιώματος. Εφόσον N και X έχουν την ίδια λειτουργία σε κάθε περίοδο η αξία του δικαιώματος θα παραμένει σύμφωνα με τον τύπο

$$C = \frac{zC_{\alpha} + c\, C_{\beta}}{r}$$

Αν ο τύπος δίνει τιμή μεγαλύτερη του S-K.

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις(3.4.3) και (3.4.4) καταλήγουμε στο εξής

$$C = \frac{\left\{z\left[\frac{\left(zC_{\alpha\alpha}+cC_{\beta\alpha}\right)}{r}\right]+c\left[\frac{zC_{\alpha\beta}+cC_{\beta\beta}}{r}\right]\right\}}{r}$$

$$=\frac{z[zC_{\alpha\alpha}+cC_{\alpha\beta}]+c\,[zC_{\alpha\beta}+cC_{\beta\beta}]}{r^2}$$

$$=\frac{z^2C_{\alpha\alpha}+zcC_{\beta\alpha}+zcC_{\alpha\beta}+c^2C_{\beta\beta}}{r^2}$$

$$=\frac{z^2C_{\alpha\alpha}+2zcC_{\alpha\beta}+c^2C_{\beta\beta}}{r^2}$$

$$=\frac{z^2\max[0,\alpha^2S-K]+2zcmax[0,\alpha\beta S-K]+c^2\max[0,\beta^2S-K]}{r^2} \quad (3.4.5)$$

Όπου $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$.

Πάντα είναι μεγαλύτερο του S-K αν ισχύει r >1 οπότε έτσι υπολογίζεται η τιμή του δικαιώματος. Αφού παρουσιάσαμε την αξία του call με λήξη σε μια περίοδο και με λήξη σε δύο περιόδους βάση αυτών εξάγουμε την αξία του δικαιώματος αν έχουμε n περιόδους μέχρι τη λήξη του.

Έστω ότι u αποτελεί τον ελάχιστο αριθμό των ανόδων της τιμής της μετοχής προκειμένου στη λήξη των n περιόδων να εξισώνεται με την αξία του δικαιώματος (on the money). Έτσι το u πρέπει να είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\alpha^u\beta^{n-u}S>K$.

Αν έχουμε m < u τότε

$$\max[0, \alpha^m\beta^{n-m}\, S - K] = 0$$

Και για m ≥ u τότε

$$\max[0, \alpha^m\beta^{n-m}\; S - K] = \; \alpha^m\beta^{n-m}S - K$$

Οπότε

$$C = \frac{\left[\sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} z^m c^{n-m} \max[0, \alpha^m \beta^{n-m} S - K]\right]}{r^2}$$

3.6 Μοντελοποίηση

Πιο συγκεκριμένα για την εμπορία αδειών εκπομπών ρύπων ο Chesney παρουσίασε ένα βασικό θεώρημα στο οποίο θεωρούμε ότι η εταιρεία πραγματεύεται σε μια αποδοτική αγορά το οποίο σημαίνει πως οι τιμές των μετοχών παρέχουν όλες τις πληροφορίες και όλες οι μετοχές πραγματεύονται σε αξία αγοράς, το οποίο σημαίνει ότι δεν γίνεται να αγοράσεις ή να πουλήσεις μετοχές (στην περίπτωση μας δικαιώματα) που να είναι υποτιμημένα ή υπερεκτιμημένα. Επίσης η σταθερή δημιουργία alpha δεν είναι δυνατή. Ως alpha θεωρείται κάθε χρεόγραφο το οποίο αν προστεθεί σε ένα υπάρχον χαρτοφυλάκιο παράγει σταθερά μεγαλύτερο αποτέλεσμα.

Αρχικά αναφερόμαστε στην περίπτωση μιας εταιρείας με ευκαιρία εμπορίας μόνο την στιγμή t=0 ενώ στην συνέχεια αναφερόμαστε σε 2 εταιρείες που μπορούν να εμπορευτούν σε περισσότερες στιγμές.

- **Μία εταιρεία και μία περίοδος δράσης**

Σε ένα περιβάλλον εμπορίας αδειών, όπου υπάρχει μια αποδοτική αγορά, θεωρούμε ότι εμπορία είναι πιθανή μόνο στην περίπτωση που ένα περιβαλλοντολογικό πρόγραμμα έχει ορισμένο χρονικό ορίζοντα.

Έτσι υποθέτουμε ένα περιβάλλον όπου το πεδίο πιθανότητας είναι $\{\Omega, F, P\}$, με $F = F(0)$ η διήθηση όπου $F(0) = \sigma(Q_0)$. Έστω Q_0 το αρχικό επίπεδο μόλυνσης και X_0 η αρχική ποσότητα αδειών που μπορεί να αγοράσει είτε να πουλήσει μια εταιρεία την στιγμή 0 και με N την αρχική προικοδότηση αδειών. Συμβολίζουμε με δ_0 το συνολικό κόστος των αδειών μιας εταιρείας στην αρχική στιγμή όπου $\delta_0 = N + X_0$ και δίνει το δικαίωμα σε μια εταιρεία να εκπέμπει ρύπους έως εκείνο το βαθμό. Υποθέτουμε ότι η εταιρεία συνεχώς εκπέμπει αέρια σύμφωνα με μία εξωγενή στοχαστική διαδικασία κατά την περίοδο [0,T].

Η διαδικασία αναπτύσσεται σύμφωνα με μια γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \mu dt + \sigma dQ_t \ (3.6.1)$$

ή παρομοίως,

$$Q_t = Q_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

όπου μ και σ είναι ο στιγμιαίος σταθερός όρος μετατόπισης και η σταθερή διακύμανση της διαδικασίας ρύπανσης αντίστοιχα. Η υπόθεση της γεωμετρικής κίνησης Brown οδηγεί σε μια φυσική επεξήγηση των παραμέτρων της.

Η σχέση

$$Q_0 * \int_0^T e^{\mu t}\, dt$$

ορίζεται ως το εκτιμώμενο συνολικό επίπεδο ρύπανσης της περιόδου 0-T, καθώς η μετατόπιση και η διακύμανση είναι η τάση και η αβεβαιότητα συνδέεται με την με διαδικασία ρύπανσης. Επίσης, η EU ETS αφορά στην ρύθμιση του συνολικού όγκου της ρύπανσης λόγω ύπαρξης κατώτατου ορίου στην αγορά διοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα και όχι στην ροή. Πράγματι, ενδιαφερόμαστε για μια ποσότητα που μετράει τον συνολικό όγκο μόλυνσης. Οπότε η υπόθεση της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι ρεαλιστική και η ζητούμενη ποσότητα είναι

$$\int_0^t Q_s ds$$

Ένα αρνητικό μ υπονοεί ένα χαμηλότερο ποσοστό συνολικής ρύπανσης βάση προηγούμενων τεχνολογικών εξελίξεων, όπου το σ υπολογίζει την αβεβαιότητα που υπάρχει στον συνολικό όγκο ρύπανσης.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, προκειμένου μια εταιρεία να ρυπαίνει νόμιμα πρέπει να έχει στην κατοχή της τις απαιτούμενες άδειες μέχρι το τέλος της περιόδου Τ. Αν αποτύχει να το κάνει αυτό τότε έγκειται σε ένα πρόστιμο ύψους Ρ. Πιο συγκεκριμένα μέσα στο Ευρωπαϊκό σύστημα εμπορίας τα πρόστιμα εμπίπτουν μόνο κατά το τέλος κάθε περιόδου και αφού οι εταιρείες έχουν παρουσιάσει το πλήθος των αδειών που κατέχουν. Όμως η Ευρωπαϊκή κομητεία επιτρέπει τον μονοετή δανεισμό μιας περιόδου, δηλαδή οι εταιρείες έχουν την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν μελλοντικές άδειες για να καλύψουν ρύπους που έχουν εκπέμψει σε αυτή την περίοδο χωρίς να χρειαστεί να αγοράσουν άδειες. Με αυτό τον τρόπο οι εταιρείες μπορούν να αποφύγουν να πληρώσουν πρόστιμο την συγκεκριμένη περίοδο.

Το πρόστιμο υπολογίζεται ως Ρ επί τον αριθμό των τόνων που δεν έχουν καλυφθεί με τις άδειες εκπομπής. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν δυνατότητες εμπορίας το τελικό κόστος της εταιρείας την περίοδο [0,T] , στην κατάσταση όπου περιμένουν την αντίδραση της αγοράς, είναι

$$\max\left\{0, \left(\int_0^T Q_s ds - \delta_0\right)\right\} * P \ (3.6.2)$$

όπου το $\int_0^T Q_s ds$ αποτελεί το τελικό επίπεδο μόλυνσης της εταιρείας.

Όπως φαίνεται από την εξίσωση είναι εμφανές ότι οι άδειες εκπομπής αποτελούν συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης.

Με δεδομένο την αρχική προικοδότηση αδειών και την αναμενόμενη θέση των μελλοντικών αδειών κάθε εταιρεία προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος της για μια περίοδο την φορά. Το συνολικό κόστος είναι το άθροισμα των χρηματοροών την δεδομένη στιγμή και τα πιθανά πρόστιμα στο τέλος της περιόδου του προγράμματος. Έτσι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης ορίζεται ως εξής

$$min_{\{X_0\}}\left\{S_0 * \ X_0 + \ e^{-\eta T}E_P[(\int_0^T Q_s ds - \delta_0)^+ * \ P|F_0]\right\} \text{ (3.6.3)}$$

όπου οι εκτιμήσεις υπόκεινται υπό το ιστορικό μέτρο πιθανότητας P , ***η*** είναι το ποσοστό έκπτωσης και S_0 είναι η τιμή μιας άδειας την στιγμή 0.

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που παρουσιάζουμε είναι αυτό μιας επιχείρησης να έχει ακριβώς όσες άδειες χρειάζεται στο τέλος της περιόδου.

Στην συνέχεια προκειμένου να παρουσιάσουμε αναλυτικά την τιμή της άδειας χρησιμοποιούμε την εξής εξίσωση

$$H \equiv \{S_0 * \ X_0 + \ e^{-\eta T}E_P[(\int_0^T Q_s \, ds - N - X_0)^+ * P \,]\}$$

Όπου $\int_0^T Q_s \, ds = \frac{4}{\sigma^2} * \ Q_0 \int_0^{\frac{\sigma^2 T}{4}} e^{2(\hat{W}_u + zu)} du =: \frac{4}{\sigma^2} * \ Q_0 \, A^z_{\sigma^2 T/4}$,

$z = \frac{2\nu}{\sigma}$, $\nu = \frac{1}{\sigma} * \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ και $\hat{\mathrm{W}}\mathrm{u} := \frac{\sigma}{2} W_{\frac{4u}{\sigma^2}}$ που αποτελεί κίνηση Brown

Εν τέλει έχουμε $A^\nu_T = \int_O^T e^{2(W_s + \nu s)} ds.$

Υπολογίζοντας την πρώτη σχέση έχουμε ότι το X_0 ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$S_0 = e^{-\eta T} * T * \int_{\frac{\delta_0 \sigma^2}{4Q_0}}^{\infty} P[A^z_{\frac{\sigma^2 T}{4}} \in dx] \text{ (3.6.4)}$$

Παρατηρούμε ότι η άμεση τιμή (spot price) των αδειών εκπομπής είναι μια λειτουργία του επιπέδου της ποινής και της πιθανότητας μιας περίπτωσης έλλειψης αδειών.

Έστω ότι T είναι ένα σχετικά μικρό κομμάτι χρόνου (T=Δτ) και υπολογίζουμε την προσέγγιση του $\int_0^T Q_s \, ds$.

Αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε μια πιο αναλυτική μορφή της τιμής των αδειών.

$$S_0 = e^{-\eta T}[P * \Phi(d_{-})] \quad (3.6.5)$$

Όπου

$$\mathrm{d}\_ = \frac{[\ln\left(Q_0 * \frac{\Delta t}{\delta_0}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t]}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

και Φ(x) αποτελεί την τυπική αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \; du$$

Στην εξίσωση (3.6.5) η τιμή των αδειών δείχνει την πιθανότητα να χρειαστεί να αγορασθούν παραπάνω άδειες εκπομπή.

- **Δύο εταιρείες και πολλοί περίοδοι**

Μια αγορά εμπορεύσιμων αδειών αποτελεί διαφορετική περίπτωση από την απλουστευμένη μορφή που παρουσιάσαμε παραπάνω. Σε αυτή την περίπτωση πολλές εταιρείες λειτουργούν και εμπορεύονται άδειες στα πλαίσια της αγοράς . Έτσι οι πιθανές ενέργειες των υπόλοιπων εταιρειών πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν κατά τον σχεδιασμό στρατηγικής. Για τον υπολογισμό των αδειών που χρειάζονται από κάθε εταιρεία λαμβάνονται υπόψη τεχνικοί και λειτουργικοί παράγοντες οι οποίοι καθιστούν αβέβαιο το επίπεδο των εκπομπών καθώς και την ζήτηση πρώτων υλών και υπηρεσιών που με τη σειρά τους οδηγούν σε αβεβαιότητα αποτελεσμάτων. Λόγω αυτών και σε συνδυασμό με την ατελή πληροφόρηση σχετικά με τις άδειες εκπομπής μια επιχείρηση συχνά οδηγείται στο να έχει είτε περισσότερες είτε λιγότερες άδειες που αποτελούν μη επιθυμητά σενάρια.

Όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα στην περίπτωση που έχει παραπάνω εκπομπές από άδειες θα πρέπει να υποστεί πρόστιμο ενώ αν έχει παραπάνω άδειες έχει πληρώσει περισσότερα χρήματα από αυτά που θα έπρεπε.

Έτσι οι εταιρείες αναγκάζονται να συμμετέχουν στην αγορά εμπορίας αδειών προκειμένου να διαχειριστούν τις εκπομπές τους. Στην συνέχεια επεκτείνουμε το βασικό μοντέλο προσαρμόζοντας το στην περίπτωση που δύο εταιρείες εμπορεύονται σε μια κατάσταση με πολλές περιόδους και με ασσυμετρία πληροφόρησης όσον αφορά τις εκπομπές αερίων.

Έστω ότι (Ω, F, {F_t}, P) είναι ο χώρος πιθανότητας και $F=(F_t)_t \geq 0$ η διήθηση όπου

$$F_t = \{\cap_{i \in I} nF_t^i\},\ F_t^i = \{G_t^i \cup_{j \in n}, G_{t-1}^j\},\ G_t^i = \sigma(Q_s^i, s) \in [0, t]$$

όπου n=1,…, I.

Κάθε εταιρεία συνεχίζει να παράγει ρύπους σύμφωνα με μια εξωγενή διαδικασία :

$$\frac{dQ_{i,t}}{Q_{i,t}} = \mu_\iota dt + \sigma_i dW_{i,t}$$

όπου θεωρούμε ότι $dW_{i,t} * dW_{j,t} = 0$ για $\{i, j \in n, i \neq j\}$, το οποίο χρειάζεται για να μπορούμε να διαχειριστούμε ευκολότερα το μοντέλο. (Παρότι οι δύο εταιρείες που εξετάζουμε μπορεί να λειτουργούν στον ίδιο εμπορικό τομέα είναι πιθανό να επηρεάζονται από διαφορετικούς παράγοντες.)

Σε μοντέλα όπως το EU ETS η προσφορά των αδειών θεωρείται σταθερή και προκαθορισμένη και για I={1,2} ισούται με $N=N_1+N_2$. Οπότε το ποσό των αδειών για την i-οστή εταιρεία την στιγμή t είναι

$\delta_{1,t} + \delta_{2,t} \coloneqq N_i + \sum_{x=0}^{t} X_{i,s}$ για κάθε t=1,2,…, T-1 και i={1,2}, όπου

$$\sum_{s=0}^{t} X_{i,s}$$

το οποίο αποτελεί το άθροισμα των οριακών ποσοτήτων των αδειών εκπομπής μείον αυτών που πωλήθηκαν από την εταιρεία i χωρίς να περιλαμβάνονται οι αρχικές άδειες.

Δεδομένο ότι ο συνολικός αριθμός των αδειών είναι προκαθορισμένος, η συνθήκη ισορροπίας είναι η εξής

$\delta_{1,t} + \delta_{2,t} = N$ για κάθε t=0,1,…,T-1 (3.6.6)

Αυτό μας δείχνει ότι σε περίπτωση ισορροπίας οι διαθέσιμες άδειες θα είναι μηδέν.

Ορίζουμε την συνολική ρύπανση της i-οστής εταιρείας την στιγμή t ως

$$\int_0^t Q_{i,s} ds - \delta_{i,t-1}$$

Στο μοντέλο περιλαμβάνεται η ασσυμετρία της πληροφόρησης με την έννοια ότι οι επιχειρήσεις δεν έχουν άμεση πληροφόρηση για τις κινήσεις των υπόλοιπων εταιριών όσον αφορά το μέγεθος εκπομπής ρύπων.

Σε κάθε περίοδο t=[0,T-1] μια εταιρεία i γνωρίζει την δική της συνολική εκπομπή την εκφράσαμε από πάνω και την συνολική εκπομπή των άλλων εταιρειών την προηγούμενη περίοδο η οποία απεικονίζεται ως

$$\int_0^{t-1} Q_{j,s} ds - \delta_{j,t-1}.$$

Την στιγμή T αν καμία εταιρεία δεν έχει ανάγκη για άδειες εκπομπών τότε η αξία των υπολειπόμενων αδειών είναι μηδέν. Αν μία εταιρεία έχει έλλειμα αδειών τότε κάθε νέα άδεια που χρειάζεται έχει αξία ίση με αυτή του προστίμου P, λόγω του ότι οι εταιρείες υποχρεούνται να έχουν στην κατοχή τους αριθμό αδειών αντίστοιχο με αυτό της ποσότητας των ρύπων τους την στιγμή T. Αυτό σημαίνει πως κάθε εταιρεία που βρίσκεται σε αυτή την κατάσταση είναι αδιάφορη μεταξύ του να αγοράσει νέες άδειες ή απλά να υποστεί το πρόστιμο. Το οποίο δίνει αγοραστική δύναμη σε εταιρείες οι οποίες έχουν περισσότερες άδειες από όσες χρειάζονται. Αυτό διαμορφώνει την αγορά των αδειών την στιγμή T ως εξής :

$$S_T = \begin{cases} 0 \; αν \; για \; κάθε \; i \in n \; τότε \; \int_0^T Q_{i,s} ds \leq \delta_{i,T-1} \\ P \; αν \; \exists \; i \in n \; τότε \; \int_0^T Q_{i,s} ds > \delta_{\iota,T-1} \end{cases} \quad (3.6.7)$$

Σύμφωνα με αυτή τη δομή την στιγμή T, αν μια εταιρεία i θέλει να πουλήσει άδειες γιατί έχει απόθεμα τότε μια εταιρεία j που έχει έλλειμα θα θέλει να αγοράσει

$$\min\{\left(\delta_{i,T-1}-\int_0^T Q_{i,s}ds\right)^+,(\int_0^T Q_{j,s}ds-\delta_{j,T-1})^+\}:=\Gamma\ (3.6.8)$$

Και ισχύει το ίδιο αν η εταιρεία j πουλάει και η i αγοράζει, δηλαδή

$$\min\left\{\left(\int_0^T Q_{i,s}ds-\delta_{i,T-1}\right)^+,(\delta_{j,T-1}-\int_0^T Q_{j,s}ds)^+\right\}:=\Pi\ (3.6.9)$$

Αλλά στην περίπτωση που ισχύει ότι $(\int_0^T Q_{1,s}ds-\delta_{1,T-\Delta t})^+-\Pi>0$ τότε η εταιρεία πρέπει να πληρώσει ποσό P ανά μονάδα ρύπων που δεν καλύπτονται από τις άδειες της.

Συνδυάζοντας τις συναρτήσεις 8 και 9 μπορούμε να απλουστεύσουμε τα όρια για την ποσότητα που επιτρέπεται να ρυπαίνουν οι εταιρείες την στιγμή T στο κάτωθι

$$X_{i,T}=(\int_0^T Q_{i,s}ds-\delta_{i,T-1})^+-\Gamma, για\ κάθε\ i\in I$$

Σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε ότι λαμβάνεται υπόψη η πιθανή απώλεια κερδών που μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που η εταιρεία έχει αχρησιμοποίητες άδειες τις οποίες δεν έχει πουλήσει και πλέον δεν έχουν αξία στην αγορά καθώς είμαστε στην στιγμή T.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε ότι ο χρόνος είναι διακριτός.

Λαμβάνοντας υπόψη τον αρχικό διαμοιρασμό αδειών και των προσδοκιών του όγκου των αέριων ρύπων που πρόκειται να εκπέμψουν, η κάθε εταιρεία προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το συνολικό της κόστος σε κάθε στιγμή $t\in(0,T-\Delta t)$ όπου Δt είναι το μέτρο του χρόνου. Έτσι η συνάρτηση ελαχιστοποίησης για μια εταιρεία i την στιγμή T-Δt σχηματίζεται ως εξής

$$min_{\{X_{1,T-\Delta t}\}}\{S_{T-\Delta t}*\ X_{1,T-\Delta t}+e^{-\eta\Delta t}E_P\left[S_T*X_{1,T}\middle|F_{T-\Delta t}^1\right]\}$$

Από τον πρώτο όρο έχουμε

$$\tilde{S}_{T-\Delta t} = e^{-\eta\Delta t} * P * E_P\left[\mathbb{I}_{\int_0^T Q_{1,s}ds > \delta_{1,T-\Delta t}} \middle| F^1_{T-\Delta t}\right] + e^{-\eta\Delta t} * P *$$
$$E_P\left[\mathbb{I}_{\delta_{1,T-\Delta t} > \int_0^T Q_{1,s}ds} * 1_{\int_0^T Q_{2,s}ds > \delta_{2,T-\Delta t}} | F^1_{T-\Delta t}\right] \quad (3.6.10)$$

Εφόσον το $\int_0^T Q_{i,s}ds$ αποτελεί μονότονη μη φθίνουσα συνάρτηση του t τότε ακολουθεί

$$E_P\left[\mathbb{I}_{\int_0^T Q_{1,s}ds > \delta_{1,T-\Delta t}} \middle| F^1_{T-\Delta t}\right] = \begin{cases} 1 \\ \Phi(d_{1,T-\Delta t}) \end{cases}$$

Όπου

$$d_{1,T-\Delta t} = \frac{\ln\left(\dfrac{Q_{1,T-\Delta t} * \Delta t}{\delta_{1,T-2\Delta t} + X_{1,T-\Delta t} - \int_0^T Q_{1,s}ds}\right) + \left(\mu_1 - \dfrac{\sigma_1^2}{2}\right) * \Delta t}{\sigma_1 * \sqrt{\Delta t}}$$

Θέτουμε ότι

$$L := \mathbb{I}_{\delta_{1,T-\Delta t} > \int_0^T Q_{1,s}ds} * \mathbb{I}_{\int_0^T Q_{2,s}ds > \delta_{2,T-\Delta t}}$$

Σημείωση : Το $\mathbb{I}$ αποτελεί μια υποομάδα Α μιας ομάδας Χ όπου $\mathbb{I}_A : X \to \{0,1\}$ όπου έχουμε $\mathbb{I}_A(x) := \begin{cases} 1 \; \alpha\nu \; x \in A \\ 0 \; \alpha\nu \; x \; \in \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$E_P[L|F^1_{T-\Delta t}] \begin{cases} 0 \,, \alpha\nu \displaystyle\int_0^{T-\Delta t} Q_{1,s}ds \geq \delta_{1,T-\Delta t} \\ \Phi(-d_{1,T-\Delta t}), \alpha\nu \displaystyle\int_0^{T-\Delta t} Q_{1,s}ds < \delta_{1,T-\Delta t} \; \kappa\alpha\iota \displaystyle\int_0^{T-2\Delta t} Q_{2,s}ds \geq \delta_{2,T-\Delta t} \\ \Phi(-d_{1,T-\Delta t}) * \Phi(d^{lag}_{2,T-\Delta t}), \qquad \acute{o}\pi o\upsilon \; \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}. \end{cases}$$

Όπου

$$d_{2,T-\Delta t}^{lag} = \frac{ln\left(\frac{Q_{2,T-2\Delta t} * 2\Delta t}{\delta_{2,T-2\Delta t} + X_{2,T-\Delta t} - \int_0^{T-2\Delta t} Q_{2,s}ds}\right) + \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) * 2\Delta t}{\sigma_2 * \sqrt{2\Delta t}}$$

Βάσει αυτών μπορούμε να αναλύσουμε την αξία των αδειών εκπομπών για την εταιρεία 1 την στιγμή Τ-Δt.

$$\tilde{S}_{T-\Delta t} = e^{-\eta\Delta t} * P * [1 - P_{T-\Delta t}^1] \ (3.6.11)$$

Όπου έχουμε

$$P_{T-\Delta t}^1 = \begin{cases} 0, \alpha\nu \int_0^{T-\Delta t} Q_{1,s}ds \geq \delta_{1,T-\Delta t} \quad \acute{\eta} \quad \int_0^{T-2\Delta t} Q_{2,s}ds \geq \delta_{2,T-\Delta t} \\ \Phi\left(-d_{1,T-\Delta t}\right) * \Phi\left(-d_{2,T-\Delta t}^{lag}\right), \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Το $P_{T-\Delta t}^1$ συμβολίζει, από την πλευρά της εταιρείας 1, την πιθανότητα να μην υπάρξουν μελλοντικά ελλείματα για καμία από τις 2 εταιρείες.

Λύνοντας το ίδιο σύστημα για την εταιρεία 2 έχουμε

$$\tilde{S}_{T-\Delta t} = e^{-\eta\Delta t} * P * [1 - P_{T-\Delta t}^2] \ (3.6.12)$$

Όπου έχουμε

$$P_{T-\Delta t}^2 = \begin{cases} 0, \alpha\nu \int_0^{T-\Delta t} Q_{2,s}ds \geq \delta_{2,T-\Delta t} \quad \acute{\eta} \quad \int_0^{T-2\Delta t} Q_{1,s}ds \geq \delta_{1,T-\Delta t} \\ \Phi\left(-d_{2,T-\Delta t}\right) * \Phi\left(-d_{1,T-\Delta t}^{lag}\right), \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Όπου βλέπουμε ότι το $P_{T-\Delta t}^2$ συμβολίζει το ίδιο για την εταιρεία 2 ότι συμβόλιζε και για την εταιρεία 1. Για λόγους απλοποίησης χρησιμοποιούμε τον ίδιο συντελεστή έκπτωσης η και στις δύο περιπτώσεις.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία βελτιστοποίησης για κάθε k ∈ [1,2,…, T/Δt] έχουμε ότι

$$\tilde{S}_{T-k\Delta t}=\begin{cases} e^{-\eta k\Delta t}*P,\ \alpha\nu\ \int_0^{T-k\Delta t}Q_{i,s}ds\geq\delta_{i,T-k\Delta t}\ \text{ή}\ \int_0^{T-k\Delta t}Q_{j,s}ds\geq\delta_{j,T-\Delta t} \\ e^{-\eta k\Delta t}*P*\{1-E_P[\Phi(-d_{i,T-k\Delta t})*\Phi(-d_{j,T-k\Delta t}^{lag})|F_{T-k\Delta t}^{j}]\},\ \ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases} \quad (3.6.13)$$

Για κάθε τιμή του k που επαναλαμβάνεται η διαδικασία έχουμε πως όταν οι συνολικές εκπομπές δεν υπερβαίνουν το συνολικό ποσό των αδειών καθορίζουμε τις αποφάσεις εμπορίας της εταιρείας μέσω αριθμητικής αξιολόγησης της ποσότητας των αδειών που ικανοποιούν την κάτωθι εξίσωση

$$E_P[\Phi(-d_{i,T-\Delta t})*\Phi(-d_{j,T-\Delta t}^{lag})|F_{T-k\Delta t}^{i}]=$$
$$E_p[\Phi(-d_{j,T-\Delta t})*\Phi(-d_{i,T-\Delta t}^{lag})|F_{T-k\Delta t}^{j}] \qquad (3.6.14)$$

για καθορισμένες παραμέτρους {μ, σ, Q_0, N_0} οι οποίες καθορίζουν τις δύο διαδικασίες ρύπανσης.

Δεδομένου τις στρατηγικές ρύπανσης των εταιρειών η εξίσωση εκκαθάρισης της αγοράς (3.6.6) καθορίζει το σημείο ισορροπίας της τιμής των αδειών.

- **Πολλές εταιρείες με εμπορεία σε πολλές περιόδους**

Μία επέκταση του μοντέλου είναι στη μορφή όπου υπάρχουν πολλές εταιρείες στην αγορά οπότε και χωρίζουμε το n={1,…,I} σε δύο μέρη. Χωρίζεται στα $I^{-} = n - i$ και i, όπου θεωρούμε πως η εταιρεία i γνωρίζει την σωρευτική μόλυνση της εταιρείας I^{-} στην αρχή της περιόδου. Χρησιμοποιώντας σταθερούς δείκτες στοχαστικής μετατόπισης και διακύμανσης $\{\mu \in \mathbb{R}^{I-1}\, \kappa\alpha\iota\, \sigma \in \mathbb{R}^{+I-1}\}$ βασιζόμενοι στη τυπική τεχνική της θεωρίας πιθανοτήτων μπορούμε να υπολογίσουμε την διαδικασία σωρευμένης μόλυνσης ως εξής:

$$Q_{I^{-},t} = \sum_{j=1, j\neq i}^{I} Q_{j,t}$$

με μια νέα γεωμετρική κίνηση Brown (Brigo, 2004)[29].

Παρόμοια με την περίπτωση των δύο εταιρειών, η ισορροπία της τιμής των αδειών απορρέει από τη λύση ενός συστήματος των εξισώσεων I.

Διαμορφώνουμε την επέκταση του μοντέλου ως εξής:

Δεδομένου ότι έχουμε εξωγενώς ορισμένες διαδικασίες μόλυνσης $Q_{i,u}$, $u = 0, \dots, t$ με $t = 0, \dots, T - \Delta T$ και εταιρεία $i = 1, \dots, I$, όπου η εταιρεία I εκπέμπει ποσότητες $X_{i,t}$ $i = 1, \dots, I$ και $j = 1, \dots, I$, όπου $i \neq j$ και ικανοποιούν τις κάτωθι $I - 1$ εξισώσεις:

$$E_P\left[P_t^i \middle| F_t^i\right] = E_P\left[P_t^{I^-} \middle| F_t^j\right], \qquad n = I^{-} \cup i, \quad (3.6.15)$$

Όπου

$$P_t = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \int_0^t Q_{i,s} ds \geq \delta_{i,t} \text{ ή } \int_0^{t-\Delta t} Q_{I^-,s} ds \geq \delta_{I^-,t} \\ \Phi(-d_{i,t}) * \Phi(-d_{I^-,t}^{lag}), & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Και η προϋπόθεση για εκκαθάριση της αγοράς είναι $\sum_{i=0}^{I} \overline{X_{\iota,t}} = 0$ για κάθε $t = 0, \dots, T - \Delta t$.

Έτσι η διαδικασία της τιμής $\bar{S} = \{\bar{S}_t\}_{t=0}^{T}$ διαμορφώνεται ως

$$\bar{S}_t = e^{-\eta(T-t)} * P * \{1 - E_P[P_t^i | F_t^i]\} \ (3.6.16)$$

Όπου αποτελεί την ισορροπία της διαδικασίας τιμολόγησης των αδειών εκπομπής.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε στάδιο οι εμπορεύσιμες άδειες και η τιμή των αδειών είναι αποτέλεσμα των κινήσεων που κάνουν οι εταιρείες και το πως προσαρμόζονται ανάλογα την διαδικασία σωρευτικής μόλυνσης καθώς και στην πληροφόρηση για τα μελλοντικά επίπεδα εκπομπών.

3.7 Εφαρμογή

Θεωρούμε ότι έχουμε 2 εταιρείες, I=2. Βασιζόμενοι στην εξίσωση (3.6.14) και στην εξίσωση εκκαθάρισης (3.6.6), προσομοιώνουμε διάφορες εκδοχές της τιμής των αδειών εκπομπής.

Σε κάθε προσομοίωση επιλέγουμε $N_i = Q_{i,0} \int_0^T e^{\mu_i t}\, dt$.

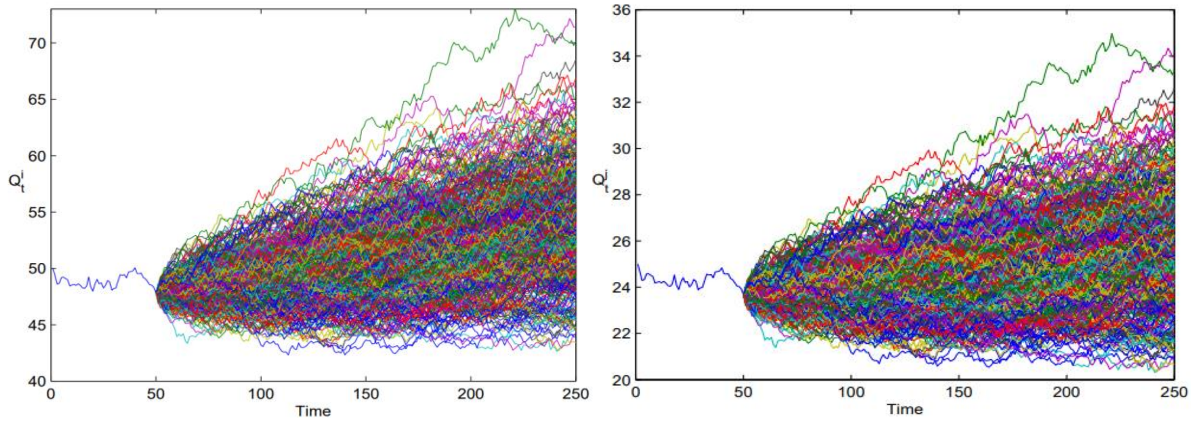
Επίσης η περίοδος είναι σταθερή ως T=250 για κάθε χρόνο, το μέσο κόστος του κεφαλαίου είναι σταθερό στο 10% και το πρόστιμο P=40.

Με στιγμή εκκίνησης το t=0, και με χρήση της εξίσωσης (3.6.1), προσομοιώνουμε ένα ζευγάρι ανεξάρτητων διαδικασιών μόλυνσης, ένα για κάθε εταιρεία i όπου i $\in I$. Μετά κάθε εταιρεία επιλέγει τον βέλτιστο αριθμό αδειών που θα αγοράσει ή θα πωλήσει. Λύνοντας την εξίσωση (3.6.14) μαζί με την εξίσωση (3.6.6) βρίσκουμε τις ποσότητες των αδειών και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.6.13) βρίσκουμε την ισορροπία της αξίας των αδειών S_0^1.

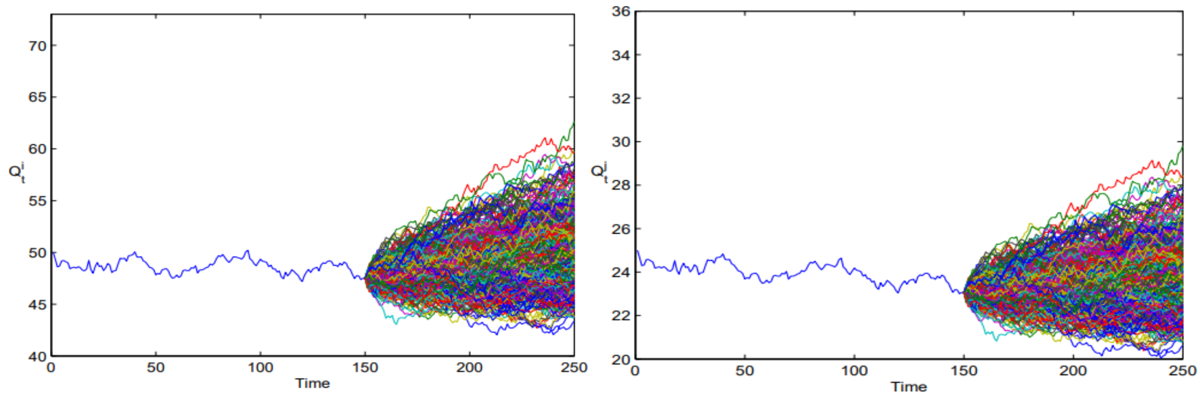
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται n φορές για να αξιολογήσουμε την αναμενόμενη τιμή αδειών ισορροπίας $\tilde{S}_0 \coloneqq \sum_{j=1}^{n} S_0^j / n$. Την στιγμή t=Δt, οι θέσεις των τιμών αδειών που καταλήγουμε $(\delta_{i,0}, i = 1,2)$ αξιολογούνται με την χρήση του $\tilde{S}_0$ και ένα σταθερό ζευγάρι σωρευμένων ποσοτήτων ρύπανσης, τα οποία επιλέγονται τυχαία μεταξύ των n ζευγαριών της προσομοίωσης.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία n-φορές υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή ισορροπίας των αδειών, $\tilde{S}_{\Delta_t}$.

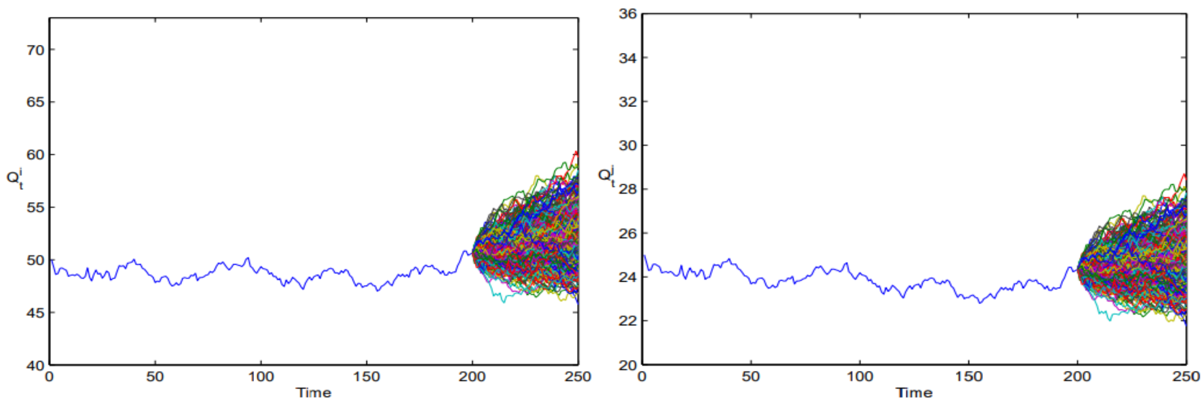
Επαναλαμβάνοντας κάθε βήμα της διαδικασίας μέχρι την στιγμή T-Δt λαμβάνουμε το ιστορικό της ισορροπίας της ποσότητας που χρειάζεται κάθε εταιρεία καθώς και της τιμής των αδειών όπως φαίνεται στα κάτωθι γραφήματα.



Γράφημα 3.6.1 Πιθανές μελλοντικές ποσότητες των 2 εταιρειών την στιγμή t=50



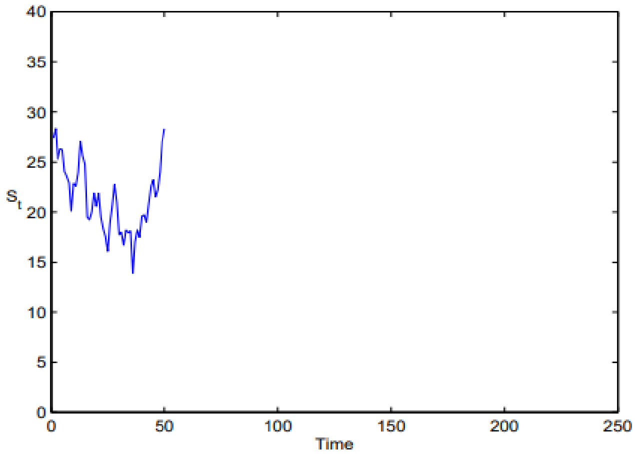
Γράφημα 3.6.2 Πιθανές μελλοντικές ποσότητες των 2 εταιρειών την στιγμή t=150



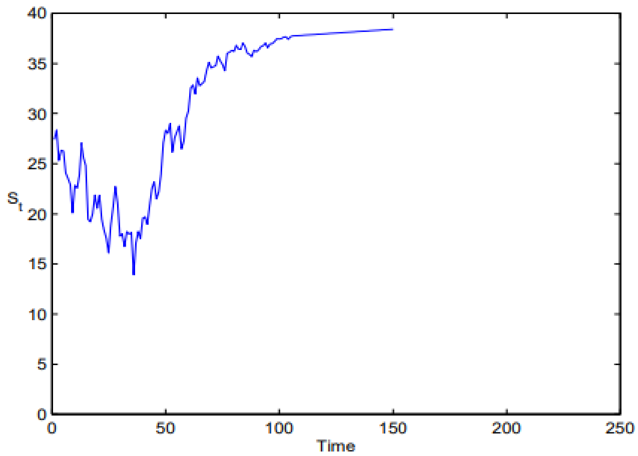
Γράφημα 3.6.3 Πιθανές μελλοντικές ποσότητες των 2 εταιρειών την στιγμή t=200

Τα σχήματα ανά ζεύγος παρουσιάζουν την μελλοντική πορεία των επιπέδων μόλυνσης ανά χρονική στιγμή.

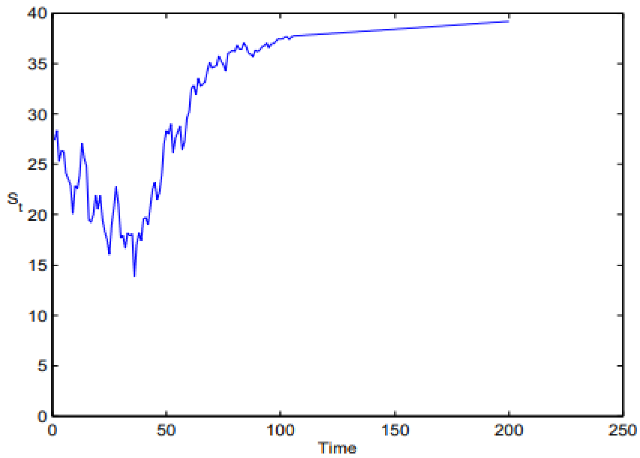
Τα πρώτα δύο σχήματα δείχνουν την πιθανή πορεία για τις 2 τυχαίες εταιρείες την στιγμή t=50, όπου τα σχήματα που βρίσκονται στα αριστερά αφορούν την εταιρεία i και τα δεξιά την εταιρεία j. Το δεύτερο ζεύγος την στιγμή t=150 και το τρίτο την στιγμή t=200.



Γράφημα 3.6.4 Τιμή των αδειών μέχρι την στιγμή t=50



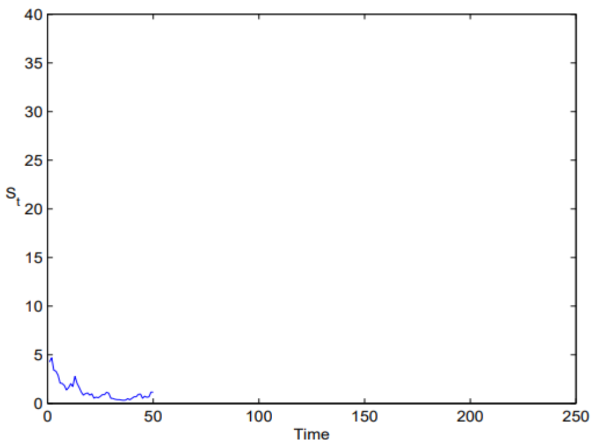
Γράφημα 3.6.5 Τιμή των αδειών μέχρι την στιγμή t=150



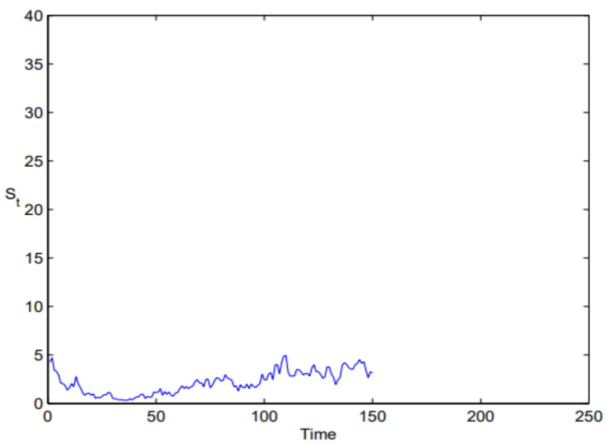
Γράφημα 3.6.6 Τιμή των αδειών μέχρι την στιγμή t=200

Εδώ παρουσιάζεται η κίνηση της τιμής με τις διαθέσιμες πληροφορίες στις αντίστοιχες στιγμές t=50,150,200. Όλα τα άνω σχήματα δείχνουν μια κατάσταση όπου οι διαδικασίες μόλυνσης και των δύο εταιρειών έχουν μια θετική ολίσθηση της τάξεως του 15% η εταιρεία i και 10% η εταιρεία j, και 10% διακύμανση αμφότερες. Παρότι η δεύτερη εταιρεία έχει ένα αρχικό απόθεμα αδειών περίπου ίσο με τα επίπεδα αναμενόμενης ρύπανσης της, $Q_{2,0} * \int_0^T e^{\mu_2 t} dt$, η πρώτη εταιρεία έχει αρχική ποσότητα αδειών λίγο λιγότερη από την αναμενόμενη ρύπανση της $Q_{1,0} * \int_0^T e^{\mu_1 t} dt$. Όπως παρατηρούμε στα διαγράμματα η διασπορά των αδειών περιορίζεται με την πάροδο του χρόνου καθώς υπάρχει μεγαλύτερη βεβαιότητα για μέλλον.

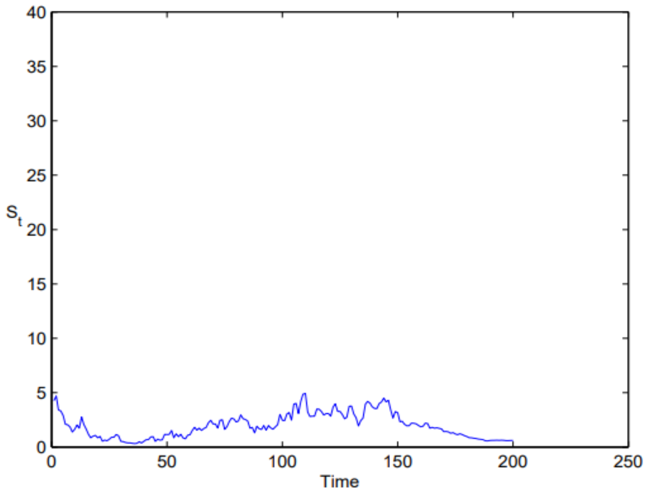
Τροποποιώντας τους συντελεστές ολίσθησης της ρύπανσης θεωρούμε αρνητικές τιμές για τις δύο εταιρείες , μ_1= -0,15 και μ_2= -0,001 αντίστοιχα, όπου παρατηρούμε μία αντίστροφη σχέση. Τα κάτωθι διαγράμματα δείχνουν ότι με συνδυασμό των αρχικών ποσοτήτων των αδειών [N_0=(52,25)] και μια αρνητική ολίσθηση οδηγούμαστε σε μια χαμηλή τιμή συγκριτικά με την προηγούμενη περίπτωση.



Γράφημα 3.6.7 Τιμή των αδειών μέχρι την στιγμή t=50

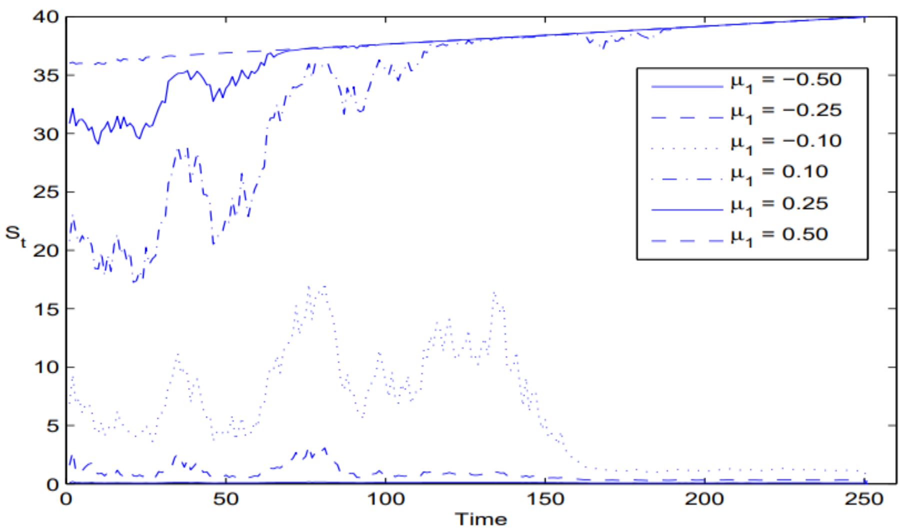


Γράφημα 3.6.8 Τιμή των αδειών μέχρι την στιγμή t=150



Γράφημα 3.6.9 Τιμή των αδειών μέχρι την στιγμή t=200

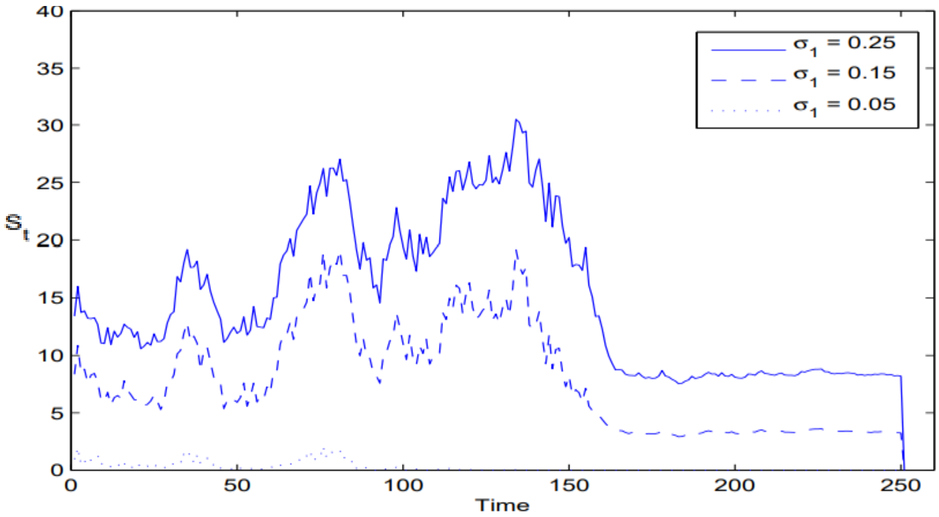
Τα κάτωθι σχήματα παρουσιάζουν μια σύντομη ανάλυση ευαισθησίας της τιμής ισορροπίας των αδειών λαμβάνοντας υπόψιν τις παραμέτρους των διαδικασιών μόλυνσης των εταιρειών. Ξεκινώντας από ένα ζεύγος επιλεγμένων παραμέτρων, όπου μ=(0.25,0.20), σ=(0.15,0.40), Q_0=(50,25) και N_0=(60,40), επιτρέπουμε στους συντελεστές ολίσθησης και διακύμανσης της πρώτης εταιρείας να αλλάζει, και στις δύο εικόνες, διατηρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές. Όπως αναμενόταν όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του μ_1, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να υπάρχει έλλειμμα μέχρι το τέλος της περιόδου. Αυτό υποδεικνύει μια τάση αύξησης στην τιμή των αδειών. Καθώς περνάει ο χρόνος και υπάρχει μεγαλύτερη βεβαιότητα στην αγορά, οι αρχικές άδειες είναι αρκετές σε πλήθος προκειμένου να οδηγήσουν σε μια μείωση τιμής(γράφημα 3.6.10).



Γράφημα 3.6.10 Τιμή των αδειών με διαφορετικές τιμές μ_1

Παρομοίως, όσο μεγαλύτερο είναι το σ1 τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα όσο αφορά το $\int_t^T Q_{1,s} ds - \delta_{1,T-\Delta t}$. Όπως καταλαβαίνουμε μια αύξηση της διακύμανσης δε σημαίνει απαραίτητα ότι θα αυξηθεί η τιμή των αδειών. Όταν δεν υπάρχει ξεκάθαρη έλλειψη αδειών, η αβεβαιότητα λόγω μεγαλύτερου συντελεστή διακύμανσης αποτυπώνεται σε μια αυξημένη τιμή αδειών. Έτσι η τιμή αδειών είναι ίση με το πρόστιμο.

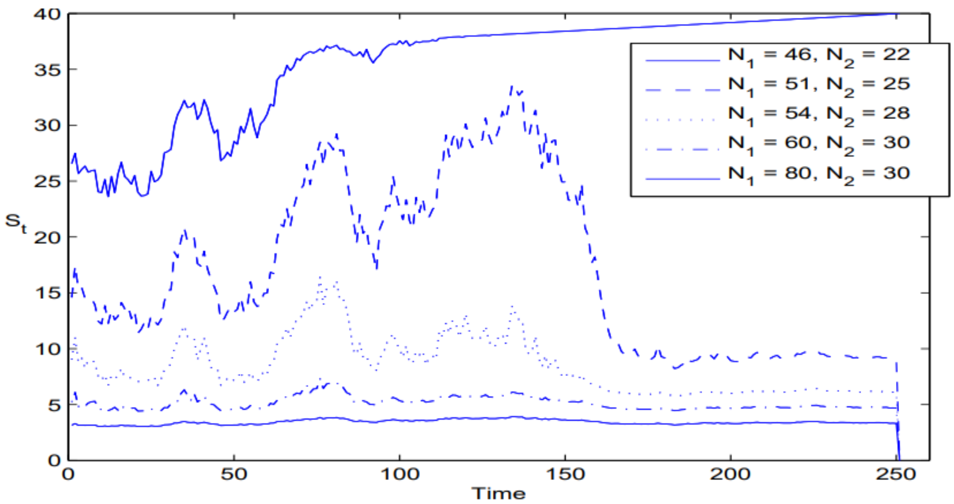
Στο παράδειγμα μας καθώς συλλέγονται περισσότερες πληροφορίες για την σωρευμένη ποσότητα της ρύπανσης η τρέχουσα αξία των αδειών επηρεάζεται από την συνολική αβεβαιότητα που επικρατεί.



Γράφημα 3.6.11 Τιμή των αδειών με διαφορετικές τιμές σ1

Αυτό στη συνέχεια οδηγεί σε μια μείωση της τιμής όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6.11. Τέλος, η επίπτωση των διαφορετικών ζευγών της αρχικής διαμοίρασης των αδειών είναι διακριτή στο σχήμα (3.6.12). Η άνω γραμμή αποτυπώνει μια περίπτωση όπου υπάρχει έλλειψη αδειών και η τιμή των αδειών φαίνεται να αυξάνεται συνεχώς. Μετά από διαπραγμάτευση των αδειών, το έλλειμμα αδειών αποτελεί γεγονός και έτσι η τιμή των αδειών ισούται πλέον με το μειωμένο πρόστιμο.

Η κάτω γραμμή παρουσιάζει την αντίθετη κατάσταση, όπου υπάρχει μεγάλο πλήθος διαθέσιμων αδειών στην αγορά οι οποίες είναι παραπάνω από αυτές που χρειάζονται και λόγω αυτού, η τιμή των αδειών διαμορφώνεται σε μια αξία λίγο μεγαλύτερη του μηδενός (γράφημα 3.6.12).



Γράφημα 3.6.12 Τιμή των αδειών με διαφορετικές τιμές N_0

3.8 Συμπεράσματα

Διερευνήσαμε τα μοντέλα εμπορίας αδειών εκπομπής αέριων ρύπων, τα γενικά μοντέλα τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς και την λειτουργία τους στην αγορά. Παρουσιάσαμε ένα μοντέλο τιμολόγησης των αδειών εκπομπής ρύπων σε διακριτό χρόνο σε ένα περιβάλλον με ασύμμετρη πληροφόρηση όπου επιτρέπεται ο τραπεζικός δανεισμός και οι εταιρείες ακολουθούν μια εξωγενή στοχαστική διαδικασία. Αρχικά εφαρμόσαμε το μοντέλο σε περιβάλλον με δύο εταιρείες και μετά με περισσότερες. Κάθε εταιρεία στην λήξη της περιόδου προσπαθεί να έχει αξιοποιήσει με τον βέλτιστο τρόπο τον όγκο των ρύπων της καθώς και τις διαθέσιμες άδειες ρύπανσης στην αγορά προκειμένου να ανταπεξέλθει επιτυχώς στο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Τέλος παρουσιάσαμε την κίνηση της τιμής ισορροπίας των αδειών σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και με διαφορετικούς συντελεστές όπου δείχνει την ευαισθησία της στην αβεβαιότητα που επικρατεί στην αγορά.

Βιβλιογραφία

[1] Pigou A., The economics of welfare Routledge, (1918)

[2] Coase R., The problem of social cost, Journal of Law and Economics, (1960)

[3] Dales J., Pollution Property and Prices. University of Toronto Press, Toronto, (1968)

[4] Montgomery W., Markets in licenses and efficient pollution control programs. Journal of Economic Theory, (1972)

[5] Cronshaw M.B., Kruse J.B., Regulated firms in pollution permit markets with banking. J. Regul. Econ. 9, (1996)

[6] Rubin J., A Model of Intertemporal Emission Trading, Banking, and Borrowing. J. Environ. Econ. Manag. 31, (1996)

[7] Schennach S.M., The Economics of Pollution Permit Banking in the Context of Title IV of the 1990 Clean Air Act Amendments. J. Environ. Econ. Manag. 40, (2000)

[8] Seifert J., Uhrig-Homburg M., Wagner, M., Dynamic behavior of CO2 spot prices, Journal of Environmental Economics and Managements, (2008)

[9] Fehr M., Hinz J., A quantitative approach to carbon price risk modeling. Institute of Operations Research, ETH Zurich, (2006)

[10] United Nations Framework Conference on Climate Change, UNFCCC, www.unfccc.int

[11] Government of United Kingdom, Participating in the EU Emissions Trading System (EU ETS), (2013), www.gov.uk/guidance/participating-in-the-eu-ets

[12] Independent Pricing and Regulatory Tribunal New South Wales, Greenhouse Gas Reduction Scheme, www.ipart.nsw.gov.au/Home/Industries/Energy/Energy-Savings-Scheme/Greenhouse-Gas-Reduction-Scheme

[13] Sæverud I.A., Wettestad J., Norway and Emissions Trading: From Global Front-Runner to EU Follower. Int Environ Agreements 6, (2006)

[14] International Carbon Action Partnership, www.icapcarbonaction.com

[15] New Zealand Government, Ministry of Environment, New Zealand Emissions Trading Scheme, https://www.mfe.govt.nz/ets

[16] United States Environmental Protection Agency, Emission Trading Resources, www.epa.gov/emissions-trading-resources

[17] Wakabayashi M., Kimura O., The impact of the Tokyo Metropolitan Emissions Trading Scheme on reducing greenhouse gas emissions: findings from a facility-based study, Climate Policy, 18:8, (2018)

[18] European Commission, Energy, Climate change, Environment, www.ec.europa.eu/clima/policies/ets_en

[19] Rotar V.I., Probability and Stochastic Modeling, CRC Press LLC, (2012)

[20] Ekström E., Tysk J., The Black–Scholes equation in stochastic volatility models, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 368, Issue 2, (2010)

[21] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M., Option pricing: A simplified approach Journal of Financial Economics, Volume 7, Issue 3, (1979)

[22] Bolshuizen F., van der Vaart A.W., van Zanteen H., Stochastic Processes for Finance-Risk Management Tools, (2006)

[23] Daskalakis G., Psychoyios D., Markellos R.N., Modelling CO2 emission allowance prices and derivatives: Evidence from the European trading scheme, Journal of Banking & Finance, Volume 33, Issue 7, (2009)

[24] Chesney M., Taschini L., The Endogenous Price Dynamics of Emission Allowances and an Application to CO2 Option Pricing, Applied Mathematical Finance, (2012)

[25] Perelló J., Sircar R., Masoliver J., Option pricing under stochastic volatility: the exponential Ornstein–Uhlenbeck model, IOP Publishing Ltd, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, (2008)

[26] Färe R., Grosskopf S., Pasurka C.A., Tradable permits and unrealized gains from trade, Energy Economics, Volume 40, (2013)

[27] Newell R.G., Pizer W.A., Raimi D., Carbon Markets 15 Years after Kyoto: Lessons Learned, New Challenges." Journal of Economic Perspectives, (2013)

[28] Taschini L., Environmental Economics and Modelling Marketable Permits. Asia-Pacific Financial Markets, (2009)

[29] Pottinton D., Option Valuation under Stochastic Volatility II: With Mathematica Code, Quantitative Finance, (2017)

[30] Brigo D., Tarenghi M., Credit Default Swap Calibration and Equity Swap Valuation Under Counterparty Risk with a Tractable Structural Model, (2004)

[31] Γιαννακόπουλος Α., «Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά», (2007)

[32] Μπούτσικας Μ., Σημειώσεις Παραδόσεων: «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, (2005-7)