



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ,
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ
ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

ΓΑΪΤΑΝΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς, Ιούνιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του τμήματος Ασφαλιστικής και Στατιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της ήταν:

- Κωνσταντίνος Πολίτης (Επιβλέπων)
- Γεώργιος Πιτσέλης
- Γεώργιος Ψαρράκος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Stochastic orders: theory and applications in the
collective risk model.

Konstantinos Gaitanis

MSc Dissertation,

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of
the Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science
in Actuarial Science and Risk Management,

Piraeus, Greece,

June 2020

This thesis was approved unanimously by the three member Commission of Inquiry appointed by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No. Meeting in accordance with the laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management

Committee members were:

- Konstantinos Politis (Supervisor)
- Georgios Pitselis
- Georgios Psarrakos

The approval of the thesis by the Department of Statistics and Insurance Science, University of Piraeus does not imply acceptance of opinions of the author.

Στις ανιψιές μου,
Ελευθερία και Κατερίνα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη για την πολύτιμη καθοδήγηση του σε όλη την διάρκεια διατριβής της Διπλωματικής Εργασίας. Οι ακαδημαϊκές γνώσεις, η εμπειρία του καθώς και η ανταπόκριση του, ήταν καθοριστικές στην εκπόνηση της Διπλωματικής Εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους τους ανθρώπους από την προσωπική μου ζωή για την στήριξη και την βοήθεια τους, καθ' όλη τη διάρκεια φοίτησης μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Γεώργιο Πιτσέλη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Γεώργιο Ψαρράκο για την συμμετοχή τους στην Τριμελή Επιτροπή.

Πειραιάς, Ιούνιος 2020,

Γαϊτανής Κωνσταντίνος

Περίληψη

Οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο σε αρκετούς κλάδους επιστημών όπως είναι η στατιστική, τα χρηματοοικονομικά, τα αναλογιστικά μαθηματικά, η επιδημιολογία και άλλες επιστήμες. Η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων αποτελεί υπόβαθρο για την προσέγγιση προβλημάτων στον αναλογισμό και τα ασφαλιστικά μαθηματικά. Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα είναι άμεσα ή έμμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του κινδύνου. Στην αναλογιστική βιβλιογραφία ο κίνδυνος είναι μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει την ενδεχόμενη οικονομική απώλεια. Ο κίνδυνος μπορεί να προέρχεται είτε από ένα φυσικό γεγονός (σεισμός, πυρκαγιά, ακραία καιρικά φαινόμενα κ.ο.κ), είτε από ανθρώπινο παράγοντα (αμέλεια, ατύχημα, ασθένεια κ.ο.κ), είτε από την άσκηση οικονομικής δραστηριότητας. Στον αναλογισμό, η έννοια του κινδύνου, είναι συνυφασμένη όχι με την φύση και την προέλευση του κινδύνου αλλά με την οικονομική συνέπεια αυτού. Επομένως, στον αναλογισμό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να μελετήσουμε το εύρος και το μέγεθος της οικονομικής απώλειας. Η διάταξη των οικονομικών απωλειών μπορεί να γίνει μεμονωμένα μεταξύ δύο διαφορετικών ενδεχόμενων απωλειών είτε ευρύτερα για ολόκληρα χαρτοφυλάκια. Η σύγκριση της επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων καταστάσεων καθώς και η επιλογή του καταλληλότερου μέτρου κινδύνου, μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας την θεωρία των στοχαστικών διατάξεων. Ο σκοπός συγγραφής της παρούσης διπλωματικής εργασίας έγκειται στην θεωρητική προσέγγιση και πρακτική εφαρμογή των στοχαστικών διατάξεων στην κατανόηση και επίλυση θεμάτων που αφορούν τον αναλογισμό και την διαχείριση κινδύνου, με ιδιαίτερη έμφαση στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου. Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται ανάλυση της βασικής θεωρίας των κυριότερων στοχαστικών διατάξεων. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται χρήσιμες εφαρμογές της θεωρίας των στοχαστικών διατάξεων που αναπτύχθηκε στο πρώτο κεφάλαιο με την χρήση ζημιοκατανομών. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται προσέγγιση θεωρίας και εφαρμογών που συνδέουν ατομικούς και συνολικούς κινδύνους με την διάταξη ανακοπής ζημίας. Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται προσέγγιση θεωρίας και εφαρμογών που συνδέουν ατομικούς και συνολικούς κινδύνους με την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Abstract

The theory of stochastic orders is a useful tool in several fields of science such as statistics, finance, actuarial mathematics, epidemiology and other sciences. The theory of stochastic orders is the basis for approaching problems in actuarial science and insurance mathematics. The risk may come from a natural event (earthquake, fire, extreme weather, etc.), or from a human factor (negligence, accident, illness, etc.), or from economic activity. In actuarial science, the concept of risk is intertwined not with the nature and origin of the risk but with its economic consequences. Therefore, in actuarial science it is very useful to study the extent and magnitude of financial losses. The provision for financial losses can be made individually between two different potential losses or more broadly for entire portfolios. Comparing the risk between random situations as well as selecting the most appropriate risk measure can be done by applying the stochastic theory. The purpose of writing this dissertation is to approach the theoretical and practical application of stochastic orders in understanding and resolving issues related to actuarial science and risk management, with particular emphasis on the collective risk model. In the first chapter, an analysis of the basic theory of the usual stochastic orders is made. The second chapter presents useful applications of the stochastic theory developed in the first chapter using some particular examples of loss distributions. The third chapter approaches theory and applications that link individual risks and the collective risk model to the stop loss stochastic order. The fourth chapter, in the same way as the third chapter, approaches theory and applications that link individual risks and the collective risk model to the mean residual time stochastic order.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	6
Περίληψη	7
Abstract	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ	13
1.1 Εισαγωγή	13
1.2 Μερική Διάταξη	14
1.3 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη	14
1.3.1 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη και Αξία σε Κίνδυνο (VaR- Value at Risk)	17
1.4 Διατάξεις Παχιάς Ουράς (Thicker tailed orders)	20
1.5 Διατάξεις Λόγου Πιθανοφάνειας(Likelihood Ratio Order)	20
1.6 Στοχαστικές Διατάξεις Ανακοπής Ζημίας (Stop Loss Orders)	22
1.7 Διατάξεις Βαθμίδας Κινδύνου (Hazard rate orders)	24
1.7.1 Εισαγωγή στην συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου- ορισμός διατάξεων βαθμίδας κινδύνου	24
1.8 Διατάξεις Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου ζωής (Mean Remaining Life Time Order)	29
1.9 Σχέσεις Μεταξύ των Στοχαστικών Διατάξεων	30
1.9.1 Εισαγωγή στις σχέσεις μεταξύ των στοχαστικών διατάξεων	30
1.9.2 Κάποιες επιπλέον ιδιότητες των στοχαστικών διατάξεων	31
1.9.3 Σχέσεις μεταξύ στοχαστικών διατάξεων	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΖΗΜΙΟΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	35
2.1 Εισαγωγή	35
2.2 Εφαρμογές Συνήθους Στοχαστικής Διάταξης	35
2.3 Εφαρμογές Διατάξεων Παχιάς Ουράς	39
2.4 Εφαρμογές Διατάξεων Λόγου Πιθανοφανειών	46
2.5 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας	60
2.6 Εφαρμογές Διατάξεων Βαθμίδας Κινδύνου	72
2.7 Εφαρμογές Διατάξεων Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής	79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΑΝΑΚΟΠΗΣ ΖΗΜΙΑΣ	85
3.1 Κατανομή των Συνολικών Αποζημιώσεων	86
3.2 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας Χρησιμοποιώντας την Κατανομή Γάμμα	88
3.3 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας Χρησιμοποιώντας την Εκθετική Κατανομή	108
3.4 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας Χρησιμοποιώντας Μείξεις Εκθετικών Κατανομών	119
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕΣΟΥ ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ	130

4.1 Εισαγωγή	130
4.2 Εφαρμογές Διατάξεων Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής Χρησιμοποιώντας την Κατανομή Γάμμα	131
4.3 Εφαρμογές Διατάξεων Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής Χρησιμοποιώντας την Εκθετική Κατανομή	146
4.4 Εφαρμογές Διατάξεων Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής Χρησιμοποιώντας Μείξεις Εκθετικών Κατανομών.	152
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	159
ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	159
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	159
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	160
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α –ΕΝΤΟΛΕΣ MATHEMATICA	160
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β- ΕΝΤΟΛΕΣ R	175

Κατάλογος Γραφικών Παραστάσεων

Γραφική Παράσταση 2.1.1 – Σύγκριση Συναρτήσεων δεξιάς ουράς των τυχαίων μεταβλητών $X, Y \sim U(0,2)$	37
Γραφική Παράσταση 2.2.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Weibull(3,2), Y \sim Weibull(3,4)$	39
Γραφική Παράσταση 2.3.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής Gamma(100,1)- εκθετικής(1100)	41
Γραφική Παράσταση 2.3.2- Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς Gamma(100,1)- εκθετικής(1100).....	41
Γραφική Παράσταση 2.4.1-Σύγκριση Συναρτήσεων δεξιάς ουράς Pareto(2,10000) εκθετικής(15000).....	43
Γραφική Παράσταση 2.4.2 Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής, Pareto(2,10000) εκθετικής(15000).....	44
Γραφική Παράσταση 2.5.2-Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς ουράς των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(100,10), Y \sim N(100,30)$	46
Γραφική Παράσταση 2.6.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(4,200), Y \sim Pa(3,250)$	49
Γραφική Παράσταση 2.6.2- Συνάρτηση λόγου πηλίκου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(4,200), Y \sim Pa(3,250)$	50
Γραφική Παράσταση 2.6.3 Πρώτη Παράγωγος Συνάρτησης λόγου πηλίκου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(4,200), Y \sim Pa(3,250)$	50
Γραφική Παράσταση 2.7.2 Σύγκριση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(10,4), Y \sim \Gamma(12,2)$	53
Γραφική Παράσταση 2.8.1-Συνάρτηση λόγου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(2,2), Y \sim N(3,2)$	55

Γραφική Παράσταση 2.8.2 Συνάρτηση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(2,2), Y \sim N(3,2)$	56
Γραφική Παράσταση 2.9.2 Συνάρτηση λόγου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Weibull(3,3), Y \sim \Gamma(4,3)$	59
Γραφική Παράσταση 2.9.3 Πρώτη Παράγωγος συνάρτησης λόγου πηλίκου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Weibull(3,3), Y \sim \Gamma(4,3)$	60
Γραφική Παράσταση 2.10.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(150,3), Y \sim Pa(90,4)$	63
Γραφική Παράσταση 2.11.1 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(6,3), Y \sim \Gamma(8,2)$	66
Γραφική Παράσταση 2.12.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Exp(3), Y \sim Exp(4)$	68
Γραφική Παράσταση 2.13.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Exp(15), Y \sim Mixed\ Exponential(\theta = 12, \mu = 20, m = 10)$	72
Γραφική Παράσταση 2.14.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Hazard Rate των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Burr(3,4), Y \sim Burr(3,5)$	74
Γραφική Παράσταση 2.16.1- Σύγκριση συναρτήσεων Hazard Rate, των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Weibull(c = 4), Y \sim Weibull(d = 5)$	79
Γραφική Παράσταση 2.17.1- Σύγκριση συνάρτησης μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μείξης εκθετικών-εκθετικής κατανομής δοθείσης ισότητας μέσω των τιμών	82
Γραφική Παράσταση 2.18.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(10,3), Y \sim \Gamma(10,3)$	84
Γραφική Παράσταση 3.1.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma(6,3), SY \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (0,15)	102
Γραφική Παράσταση 3.1.2 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma(6,3), SY \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (15,20)	103
Γραφική Παράσταση 3.1.3 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma(6,3), SY \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (20,23)	103
Γραφική Παράσταση 3.2.2 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma(6,3), SY \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (0,15)	107
Γραφική Παράσταση 3.2.3 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma(6,3), SY \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (15,20)	108
Γραφική Παράσταση 3.5.1 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Exp(4), Y \sim Mixed\ Exponential(\mu = 6, m = 3, \theta = 12)$	125
Γραφική Παράσταση 3.5.2 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim Exp(4), S_Y \sim Mixed\ Exponential(\mu = 6, m = 3, \theta = \frac{1}{2})$	128
Γραφική Παράσταση 4.1.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(6,3), Y \sim \Gamma(8,2)$	138

Γραφική Παράσταση 4.1.2 Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma 6,3, SY \sim \Gamma 8,2$ 142

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1 - Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής, Pareto(2,10000) εκθετικής(15000)	43
Πίνακας 2- Πίνακας Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma 6,3, Y \sim \Gamma 8,2$.	65
Πίνακας 3 –Ασφάλιστρα Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής $SX, XI \sim Erl\alpha, \lambda, \iota = 1,2, \dots, N, Xi$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.	97
Πίνακας 4-Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma 6,3, SY \sim \Gamma 8,2, n = 3$	102
Πίνακας 5 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma 6,3, SY \sim \Gamma 8,2, n = 3$	107
Πίνακας 6 Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma 6,3, Y \sim \Gamma 8,2$	137
Πίνακας 7- Πίνακας Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $SX \sim \Gamma 6,3, SY \sim \Gamma 8,2$.	141

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ

1.1 Εισαγωγή

Στον αναλογισμό, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, η σωστή επιλογή της τυχαίας κατάστασης που εμπεριέχει το λιγότερο ρίσκο. Η λήψη της σωστής απόφασης μπορεί να γίνει με την σύγκριση της επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων καταστάσεων. Η παραπάνω διαδικασία είναι σημαντική, προκειμένου να ορισθούν κατάλληλα ασφάλιστρα, να παρθεί η σωστή απόφαση για την χρησιμοποίηση ή την μη χρησιμοποίηση αντασφάλισης και το ποσό αυτής, και γενικότερα στην λήψη αποφάσεων που σχετίζονται με χαρτοφυλάκια κινδύνων.

Η σύγκριση επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων μεταβλητών μπορεί να γίνει με ποικίλους τρόπους. Ο πιο διαδεδομένος τρόπος σύγκρισης επικινδυνότητας τυχαίων μεταβλητών στα χρηματοοικονομικά πραγματοποιείται συγκρίνοντας μέσες τιμές και διακυμάνσεις μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών (mean-variance analysis). Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση, επιλέγεται η τυχαία μεταβλητή με την μικρότερη μέση τιμή ή στην περίπτωση ισότητας μέσων τιμών επιλέγεται η τυχαία μεταβλητή με την μικρότερη διακύμανση. Το παραπάνω μοντέλο λήψης αποφάσεων είναι γνωστό και ως CAPM (Capital Asset Pricing Model) και είναι ευρέως διαδεδομένο στην θεωρία χαρτοφυλακίου. Η επιλογή της καταλληλότερης μεταβλητής χαμηλής επικινδυνότητας γίνεται με την σύγκριση συναρτήσεων χρησιμότητας που επιλέγονται από τον λήπτη του ρίσκου. Το πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και στην περίπτωση που δεν έχουμε επαρκές δείγμα, αλλά στην πράξη δεν έχει ρεαλιστικά αποτελέσματα λόγω της υποκειμενικής προσέγγισης της συνάρτησης ωφελιμότητας (utility function).

Ένας άλλος τρόπος σύγκρισης διαφορετικών καταστάσεων επικινδυνότητας είναι με ταξινόμηση των αντίστοιχων ασφαλιστρών. Η μέθοδος αυτή δεν οδηγεί πάντοτε σε λογικά αποτελέσματα. Η βασική αιτία είναι ότι ο τρόπος υπολογισμού των εκάστοτε ασφαλιστρών διαφέρει από χαρτοφυλάκιο σε χαρτοφυλάκιο και εξαρτάται από την φύση και το μέγεθος του κινδύνου, που πρόκειται να αναληφθεί από τον ασφαλιστή. Έστω τυχαίες μεταβλητές X, Y για τις οποίες γνωρίζουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της Y είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη τιμή της X . Στην περίπτωση που η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X είναι μεγαλύτερη της τυχαίας μεταβλητής Y και τα αντίστοιχα ασφάλιστρα που έχουν υπολογισθεί εμπεριέχουν παραμέτρους διασποράς,

υπάρχει περίπτωση το ασφάλιστρο της X που θα προκύψει να είναι μεγαλύτερο του ασφάλιστρου της τυχαίας μεταβλητής Y !

Τις τελευταίες δεκαετίες, ιδιαίτερα χρήσιμη στον αναλογισμό είναι η σύγκριση της επικινδυνότητας μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων που βασίζεται στην θεωρία των στοχαστικών διατάξεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί η βασική θεωρία των στοχαστικών διατάξεων, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στα επόμενα κεφάλαια με πρακτικές εφαρμογές για την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων.

1.2 Μερική Διάταξη

Η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων αποτελεί ειδική περίπτωση της θεωρίας των μερικών διατάξεων. Προκειμένου να κατανοηθεί πλήρως η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων, θα γίνει εισαγωγή της έννοιας των μερικών διατάξεων.

Ορισμός 1.1 : Μία διμελής σχέση $<$ σε ένα αυθαίρετο σύνολο S είναι μερική διάταξη, αν και μόνο αν πληρούνται σωρευτικά οι κάτωθι προϋποθέσεις:

i) Αντανακλαστικότητα (reflexivity) : $x < x$ για κάθε $x \in S$

ii) Μεταβατικότητα (transitivity) : Αν $x < y$ και $y < z$ τότε $x < z$

iii) Αντισυμμετρία (antisymmetry): Αν $x < y$ και $y < x$ τότε $x = y$

Στην ειδική περίπτωση όπου το S είναι το σύνολο (ή ένα κατάλληλο υποσύνολο) όλων των συναρτήσεων κατανομής των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, κάθε μερική διάταξη εντός αυτού του συνόλου S ονομάζεται στοχαστική διάταξη (Goovaerts, et al, 1990).

1.3 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη

Η συνήθης στοχαστική διάταξη συγκρίνει την θέση των διαφορετικών τυχαίων μεταβλητών και όχι την μεταβλητότητα. Στα οικονομικά είναι γνωστή και ως διάταξη πρώτης στοχαστικής κυριαρχίας (First Stochastic dominance \leq_{FSD}). Στον αναλογισμό είναι γνωστή ως συνήθης ή απλή στοχαστική διάταξη \leq_{st} και χρησιμοποιείται για την σύγκριση της επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων μεταβλητών.

Η ερμηνεία της συνήθους στοχαστικής διάταξης έγκειται στην σύγκριση πιθανοτήτων που σχετίζονται με ενδεχόμενο εμφάνισης μεγάλων τιμών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων. Αν X, Y τυχαίες μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν τις απαιτήσεις ενός

χαρτοφυλακίου, δεδομένου ότι η τυχαία μεταβλητή X υπολείπεται της Y ως προς την στοχαστική διάταξη, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η X λαμβάνει μεγάλες τιμές με μικρότερη πιθανότητα από ότι η τυχαία μεταβλητή Y .

Βάσει της παραπάνω παραδοχής, προκύπτει ο ορισμός για την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Ορισμός 1.2: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζεται με $X \leq_{st} Y$, αν και μόνο αν ικανοποιούνται μία από τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις (Goonaerts, et al,1990):

$$\Pr (X>t) \leq \Pr (Y>t) \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$F_X(t) \geq F_Y(t) \text{ για κάθε } t>0$$

Θεώρημα 1.1: Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη και f αύξουσα συνάρτηση τότε (M.Denuit, et al, 2005): $f(X) \leq_{st} f(Y)$

Επομένως : $X \leq_{st} Y \Rightarrow f(X) \leq_{st} f(Y)$, f αύξουσα συνάρτηση

Θεώρημα 1.2: Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, και οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε (Denuit, et al, 2005):

$$i) \quad X \leq_{st} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

$$ii) \quad X \leq_{st} Y \Rightarrow E(X^n) \leq E(Y^n) \quad (X, Y \text{ μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές}).$$

Θεώρημα 1.3: Έστω X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{st} Y_i \forall i > 0$ τότε (Denuit, et al, 2005) :

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Θεώρημα 1.4: Έστω X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{st} Y_i \forall i$, τότε για κάθε αύξουσα συνάρτηση $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι (Denuit, et al, 2005):

$$\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq_{st} \Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

Θεώρημα 1.5: Έστω X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \leq_{st} Y_i \forall i$ και $X_i \rightarrow_d X$ $Y_i \rightarrow_d Y$, τότε ισχύει ότι (Denuit, et al, 2005):

$$X \leq_{st} Y$$

Θεώρημα 1.6: Αν $X \leq_{st} Y$ και $E(X) = E(Y)$ τότε X και Y έχουν την ίδια κατανομή (Denuit, et al, 2005).

Απόδειξη :

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από την σχέση :

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt \quad (1)$$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y δίνεται από την σχέση:

$$E(Y) = \int_0^{\infty} (1 - F_Y(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t) dt \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Leftrightarrow E(X)-E(Y)$$

$$= \left(\int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt \right) - \left(\int_0^{\infty} (1 - F_Y(t)) dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t) dt \right) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t) - F_Y(t) dt = 0$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό, διότι $X \leq_{st} Y$ και $F_X(t) \geq F_Y(t)$. Επειδή $E(X)=E(Y)$, το ολοκλήρωμα ισούται με 0 και επομένως θα πρέπει $F_X(t) = F_Y(t)$.

Θεώρημα 1.7 : Αν η τυχαία μεταβλητή X δοθείσης τυχαίας μεταβλητής $\Theta(X/\Theta)$ είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y δοθείσης τυχαίας μεταβλητής $\Theta(Y/\Theta)$, ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, τότε και η τυχαία μεταβλητή X θα είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη (Denuit, et al, 2006). Επομένως έχουμε:

$$X/\Theta = \theta \leq_{st} Y/\Theta = \theta, \quad \forall \theta \Rightarrow X \leq_{st} Y$$

Θεώρημα 1.8 : Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, αν και μόνο αν υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές \tilde{X} και \tilde{Y} τέτοιες ώστε $\tilde{X} =_d X$ και $\tilde{Y} =_d Y$ και $\Pr(\tilde{X} \leq \tilde{Y})=1$ (Denuit, et al, 2005).

1.3.1 Συνήθης Στοχαστική Διάταξη και Αξία σε Κίνδυνο (VaR-Value at Risk)

Η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk-VaR) αποτελεί ένα στατιστικό μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του κινδύνου αγοράς ενός χαρτοφυλακίου (επενδυτικό χαρτοφυλάκιο, ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, αποταμειωτικό χαρτοφυλάκιο κ.α), για το οποίο δεν υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά στοιχεία τιμών. Η αξία σε κίνδυνο εκφράζει την ελάχιστη κεφαλαιακή απαίτηση που είναι αναγκαία, για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, και με ένα μεγάλο βαθμό βεβαιότητας για την βιωσιμότητα, ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων ή γενικότερα ενός χρηματοπιστωτικού οργανισμού (τράπεζες, ασφαλιστικές εταιρείες κ.α).

Επομένως, προκειμένου να είναι πλήρης μια εκτίμηση κινδύνου που βασίζεται στην αξία σε κίνδυνο, θα πρέπει να αποτελείται από τρεις σημαντικές παραμέτρους:

- i) Χρονικό Διάστημα
- ii) Διάστημα Εμπιστοσύνης
- iii) Παράγοντες Κινδύνου

Το χρονικό διάστημα εξαρτάται από την σύσταση του χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα μία τράπεζα που διαχειρίζεται συναλλαγματικό κίνδυνο (συναλλαγματικός είναι ο κίνδυνος που προέρχεται από τις οικονομικές απώλειες που μπορούν να προκύψουν από τις ισοτιμίες των νομισμάτων), θα πρέπει να υπολογίζει την αξία σε κίνδυνο με χρονικό διάστημα μιας ημέρας.

Σε ένα άλλο παράδειγμα, ένας επενδυτής που έχει επενδύσει μετοχές σε έναν μεγάλο χρηματοπιστωτικό οργανισμό (με λιγότερο συχνές και μικρές μεταβολές αξιών), μπορεί να υπολογίσει το VaR με μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα (εβδομάδες, μήνες, κλπ).

Το διάστημα εμπιστοσύνης εκφράζει την πιθανότητα επάρκειας της κεφαλαιακής απαίτησης. Προκειμένου η εκτίμηση να είναι αξιόπιστη, συνήθως χρησιμοποιούνται διαστήματα εμπιστοσύνης με ποσοστά βεβαιότητας άνω του 95%.

Οι παράγοντες κινδύνου αφορούν τα αίτια εκείνα που μπορούν να επιφέρουν οικονομικές απώλειες σε ένα χαρτοφυλάκιο. Οι κίνδυνοι αυτοί έχουν ιδιαίτερη

ποικιλομορφία και η διαχείριση τους αποτελεί βασικό αντικείμενο στον τομέα της διαχείρισης κινδύνων.

Οι κίνδυνοι που μπορούν να επηρεάσουν την κεφαλαιακή επάρκεια ενός χαρτοφυλακίου ή ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού (παραδειγματικά και όχι περιοριστικά), μπορεί να σχετίζονται με:

- i) Πιστωτικός Κίνδυνος: Είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με το ενδεχόμενο ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός να μην μπορεί να ανταπεξέλθει στις συμβατικές του υποχρεώσεις.
- ii) Λειτουργικός Κίνδυνος: Είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με λάθη ή παραλείψεις στις δομές και τις διαδικασίες ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού (π.χ λάθος ενός εργαζομένου, αδυναμία ή λάθη ηλεκτρονικών συστημάτων κλπ).
- iii) Λοιποί Κίνδυνοι (Κακή Διαχείριση –πολιτικές εξελίξεις – απρόσμενες οικονομικές αλλαγές κ.α): Ο κίνδυνος που σχετίζεται με λάθη στην διοίκηση ενός χρηματοπιστωτικού οργανισμού μπορεί να οδηγήσει σε επιλογές που θα επιφέρουν οικονομικές απώλειες. Οι πολιτικές εξελίξεις καθώς και απρόσμενες οικονομικές αλλαγές συχνά μπορούν να επηρεάσουν την κεφαλαιακή επάρκεια ενός χρηματοοικονομικού οργανισμού.

Φυσικά αυτά είναι μερικά μόνο παραδείγματα καθώς λόγω της ποικιλομορφίας και της ιδιαιτερότητας των πολλών και διαφορετικών κινδύνων που μπορεί να αντιμετωπίσει ένα χαρτοφυλάκιο ή ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός δεν περιορίζονται μόνο στα παραπάνω.

Η σύγκριση επικινδυνότητας μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών που αφορούν χαρτοφυλάκια κινδύνων μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας θεωρήματα που συνδέουν την θεωρία των στοχαστικών διατάξεων και την έννοια της αξίας σε κίνδυνο.

Ορισμός 1.3: Έστω κίνδυνος X και ένα επίπεδο πιθανότητας $p \in [0,1]$, τότε η αξία σε κίνδυνο $VaR[X; p]$ είναι το $100p$ ποσοστημόριο της κατανομής του κινδύνου της X , δηλαδή:

$$VaR[X; p] = F_X^{-1}(p)$$

Θεώρημα 1.9: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, αν και μόνο αν $VaR[X; p] \leq VaR[Y; p]$ για κάθε $p \in [0,1]$.

Θεώρημα 1.10: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, αν και μόνο αν (Denuit, et al, 2005) :

$$VaR[X; F_Y(t)] \leq t, \text{ για κάθε } t$$

Απόδειξη:

Διαδοχικά προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$VaR[X; F_Y(t)] \leq VaR[Y; F_Y(t)] = F_Y^{-1}(F_Y(t))$$

$$VaR[X; F_Y(t)] \leq t \text{ για κάθε } t \Leftrightarrow$$

$$F_Y^{-1}(F_Y(t)) \leq t \text{ για κάθε } t \text{ (1.10.1)} \Leftrightarrow$$

$$F_Y(t) \leq F_X(t) \text{ για κάθε } t \Leftrightarrow$$

$$VaR[X; p] \leq VaR[Y; p] \text{ για κάθε } p \in [0,1].$$

Θεώρημα 1.11: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, αν και μόνο αν (Denuit, et al, 2005):

$$F_X(VaR[Y; p]) \geq p \text{ για κάθε } p \in [0,1].$$

Απόδειξη:

Αν ισχύει $X \leq_{st} Y$, αποδείχτηκε παραπάνω με διαδοχικές ισοδυναμίες η σχέση (1.10.1).

Επομένως:

$$F_Y^{-1}(F_Y(t)) \leq t \text{ για κάθε } t$$

Διαδοχικά προκύπτουν τα εξής:

$$F_Y(t) \leq F_X(t) \text{ για κάθε } t \Leftrightarrow$$

$$F_X(VaR[Y; p]) \geq p \text{ για κάθε } p \in [0,1]$$

Επομένως το ζητούμενο αποδείχτηκε.

1.4 Διατάξεις Παχιάς Ουράς (Thicker tailed orders)

Η σύγκριση επικινδυνότητας μεταξύ τυχαίων καταστάσεων, μπορεί να γίνει ακόμα πιο δύσκολη για τον λήπτη της απόφασης, στην περίπτωση εκείνη που οι τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνονται έχουν την ίδια μέση τιμή! Στην περίπτωση αυτή, στα χρηματοοικονομικά και την στατιστική επιλέγεται η τυχαία μεταβλητή που έχει την μικρότερη διασπορά .

Σε αυτή την ενότητα, θα δοθεί μια διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιώντας την θεωρία των στοχαστικών διατάξεων και συγκεκριμένα θα μελετηθούν οι διατάξεις παχιάς ουράς (Thicker Tailed Orders), συμβολίζονται με \leq_{tt} . Οι διατάξεις παχιάς ουράς, είναι ένα είδος διάταξης που βασίζεται στην ισότητα μέσω των τιμών μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 1.5 : Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη ή ίση από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη παχιάς ουράς και θα συμβολίζεται με $X \leq_{tt} Y$, αν και μόνο αν ικανοποιούνται σωρευτικά οι παρακάτω σχέσεις:

- i) $E(X) = E(Y)$
- ii) Υπάρχει αριθμός h_0 , τέτοιος ώστε να ικανοποιούνται τα κάτωθι:
$$\begin{cases} \Pr(X < h_0) \leq \Pr(Y < h_0), & x < h_0 \\ \Pr(X < h_0) \geq \Pr(Y < h_0), & x \geq h_0 \end{cases}$$

1.5 Διατάξεις Λόγου Πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio Order)

Οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην θεωρία των στοχαστικών διατάξεων καθώς πρόκειται για την πιο ισχυρή μορφή στοχαστικής διάταξης. Εφόσον είναι γνωστή η στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφάνειας μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y , εξάγονται συμπεράσματα και για την στοχαστική διάταξη άλλων μορφών διατάξεων. Αναλυτική περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των διατάξεων θα παρουσιασθεί σε επόμενη ενότητα (βλ. Ενότητα 1.9). Κριτήριο μελέτης των στοχαστικών διατάξεων λόγου πιθανοφάνειας αποτελεί η ποσοτική σύγκριση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y , καθώς αυξάνεται ο χρόνος t . Για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός χρησιμοποιείται η μονοτονία

του πηλίκου λόγω πιθανοφανειών, προκειμένου να συμπεράνουμε αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μίας μεταβλητής αυξάνεται ή μειώνεται συγκριτικά με την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της άλλης. Βάσει των παραπάνω, θα παρουσιασθεί η βασική θεωρία των διατάξεων λόγου πιθανοφάνειας.

Ορισμός 1.6 : Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και θα συμβολίζεται με $X \leq_{LR} Y$ αν και μόνο αν:

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα ως προς } t$$

όπου $f_X(t)$, $f_Y(t)$ οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα.

Ένας άλλος ορισμός που μπορεί να δοθεί είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 1.7: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και θα συμβολίζεται με $X \leq_{LR} Y$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η κάτωθι σχέση (Denuit, et al, 2005):

$$X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_X(u)f_Y(v) \geq f_X(v) f_Y(u) \quad \forall u \leq v$$

Οι ορισμοί 1.6 και 1.7 είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 1.12: Έστω X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και $X_i \leq_{LR} Y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ τότε (Denuit, et al, 2005):

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{LR} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Θεώρημα 1.13: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη λόγου πιθανοφάνειας αν και μόνο αν η συνάρτηση (Denuit, et al, 2005):

$$p \rightarrow F_Y(\text{VaR}[X; p]) \text{ είναι κυρτή.}$$

Απόδειξη :

Προκειμένου η $p \rightarrow F_Y(\text{VaR}[X; p])$ να είναι κυρτή, θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της να είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του $t \Leftrightarrow$

$$\frac{f_Y(\text{VaR}[X; p])}{f_X(\text{VaR}[X; p])} \text{ να είναι γνησίως αύξουσα } \Leftrightarrow \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ να είναι γνησίως αύξουσα}$$

Η τελευταία ισοδυναμία αντιστοιχεί στον Ορισμό 1.4, άρα $X \leq_{LR} Y$ και το θεώρημα αποδείχτηκε.

1.6 Στοχαστικές Διατάξεις Ανακοπής Ζημίας (Stop Loss Orders)

Οι στοχαστικές διατάξεις ανακοπής ζημίας (SL) χρησιμεύουν στην σύγκριση απαιτήσεων, που προέρχονται από χαρτοφυλάκιο κινδύνων, στο οποίο η πρωτασφαλίστρια εταιρεία εφαρμόζει αντασφάλιση. Η αντασφάλιση εφαρμόζεται στο σύνολο των απαιτήσεων ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων και όχι αποκλειστικά σε ένα μόνο κίνδυνο. Προκειμένου να κατανοηθεί πλήρως η σημασία της παραπάνω στοχαστικής διάταξης, θα γίνει εισαγωγή της έννοιας, Αντασφάλιση Stop Loss.

Αντασφάλιση Stop Loss : Η πρωτασφαλίστρια εταιρεία έχει την ευθύνη εκπλήρωσης όλων των απαιτήσεων μέχρι του ορίου ίδιας κράτησης ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων (όπως αυτό συμφωνείται μεταξύ της πρωτασφαλίστριας και της αντασφαλιστικής). Θεωρητικά, η αντασφάλιση Stop Loss έχει εφαρμογή σε όλους τους κλάδους ασφάλισης, πρακτικά όμως χρησιμοποιείται σε κλάδους, που τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μεγάλη αστάθεια, λόγω της μεγάλης συχνότητας εμφάνισης των απαιτήσεων και όχι τόσο λόγω του μεγέθους τους, χαρακτηριστικό παράδειγμα ο κλάδος ασφάλισης χαλαζίου.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με αναλογική αντασφάλιση, οπότε ο ρόλος της είναι η προστασία της καθαρής κράτησης της εταιρείας. Όπως και αν χρησιμοποιηθεί δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να αποτελεί μέσον διασφάλισης κερδών για την πρωτασφαλίστρια εταιρεία. Στην πράξη ο αντασφαλιστής απαιτεί την τοποθέτηση του ορίου ίδιας κράτησης στο ύψος εκείνο στο οποίο έχει ήδη ζημιολόγο αποτέλεσμα πριν χρησιμοποιήσει την κάλυψη που του παρέχει η αντασφαλιστική συμφωνία. Με αυτό τον τρόπο διασφαλίζεται η δίκαιη σύναψη αντασφαλιστικής σύμβασης μεταξύ πρωτασφαλίστριας και αντασφαλιστικής (Πιτσέλης, 2018).

Ορισμός 1.8: Το ασφάλιστρο stop loss συμβολίζεται με $\Pi_X(t)$ και ισούται με την μέση τιμή των συνολικών απαιτήσεων που ξεπερνούν το όριο ίδιας κράτησης t . Επομένως έχουμε:

$$\Pi_X(t) = E[(X - t)_+]$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $(X - t)_+$ ισούται με:

$$\max\{X - t, 0\} = \begin{cases} X - t, & x > t \\ 0, & x \leq t \end{cases}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν εύκολα ότι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^\infty \bar{F}_X(v) dv$$

Μια άλλη ισοδύναμη σχέση είναι:

$$\Pi_X(t) = E[(X - t)_+] = \int_t^\infty (x - t) f_X(x) dx$$

Ορισμός 1.9: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας και θα συμβολίζεται με $X \leq_{sl} Y$, αν και μόνο αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow \Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R} \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$i) X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow \int_t^\infty \bar{F}_X(v) dv \leq \int_t^\infty \bar{F}_Y(v) dv \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$ii) X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow \int_t^\infty (x - t) f_X(x) dx \leq \int_t^\infty (x - t) f_Y(x) dx \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα 1.14: Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας και Z ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή από τις X, Y , η ανισοτική σχέση θα παραμείνει η ίδια, προσθέτοντας σε κάθε μέλος την τυχαία μεταβλητή Z . Επομένως:

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow X + Z \leq_{sl} Y + Z$$

Θεώρημα 1.15 : Αν η τυχαία μεταβλητή X δοθείσης τυχαίας μεταβλητής $\Theta(X/\Theta)$ είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y δοθείσης τυχαίας μεταβλητής $\Theta(Y/\Theta)$, ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας, τότε και η τυχαία μεταβλητή X θα είναι

μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας. Επομένως:

$$X/\Theta \leq_{sl} Y/\Theta \quad \forall \theta \Leftrightarrow X \leq_{sl} Y$$

Θεώρημα 1.16: Έστω X_1, X_2, \dots, X_n και Y_1, Y_2, \dots, Y_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_i \leq_{sl} Y_i \quad \forall i$, τότε για κάθε αύξουσα και κυρτή συνάρτηση $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι (Denuit, et al, 2006):

$$\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq_{sl} \Psi(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

Θεώρημα 1.17: Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας και f αύξουσα συνάρτηση τότε: $f(X) \leq_{sl} f(Y)$

Επομένως : $X \leq_{sl} Y \Rightarrow f(X) \leq_{sl} f(Y)$, f αύξουσα συνάρτηση.

1.7 Διατάξεις Βαθμίδας Κινδύνου (Hazard rate orders)

1.7.1 Εισαγωγή στην συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου- ορισμός διατάξεων βαθμίδας κινδύνου

Η συνάρτηση αξιοπιστίας (επιβίωσης) μια τυχαίας μεταβλητής εξετάζει την πιθανότητα να προκύψουν απώλειες ζωής οργανισμών, καταστροφές τεχνικών μονάδων, μηχανημάτων κλπ, πέρα από μια συγκεκριμένη τιμή. Για την παρακολούθηση της διάρκειας ζωής μιας μονάδας την χρονική στιγμή t , δεδομένου ότι έχει επιζήσει μέχρι την χρονική στιγμή t , χρησιμοποιείται η συνάρτηση ρυθμού κινδύνου ή βαθμίδας κινδύνου. Στην αναλογιστική βιβλιογραφία συμβολίζεται με $r(x)$ ή $h(x)$.

Η μελέτη και η σύγκριση των διατάξεων βαθμίδας κινδύνου, έχει πολλαπλά οφέλη στον αναλογισμό, μερικά εκ των οποίων είναι:

1. Είναι πιο εύκολο να μελετηθεί ο «άμεσος κίνδυνος» αποβίωσης την χρονική στιγμή $t+dh$, με dh μικρή χρονική διάρκεια, που συνδέεται με ένα άτομο το οποίο είναι γνωστό ότι έχει επιζήσει την χρονική στιγμή t .
2. Η σύγκριση μεταβλητών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή γίνεται εύκολα.

3. Στην κατασκευή πινάκων θνησιμότητας, καθώς μπορούν να περιγράψουν πολλαπλά γεγονότα για το ίδιο άτομο (π.χ θάνατος, ανικανότητα, ανικανότητα προς εργασία κλπ) (Horst Rinne, 2014).

Ορισμός 1.11: Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα $f(x)$, τότε υπάρχει συνάρτηση $r(x)$ τέτοια ώστε:

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad \bar{F}(x) > 0$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται βαθμίδα κινδύνου (Hazard rate) και συμβολίζεται με $r(x)$.

Θεώρημα 1.19: Μία τυχαία συνάρτηση $r_X(t)$ είναι hazard rate αν ικανοποιούνται οι κάτωθι προϋποθέσεις :

1. $r_X(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$
2. $\int_0^\infty r_X(t) dt = \infty$

Απόδειξη :

1. $f_X(t) \geq 0$ και $\bar{F}_X(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, άρα:

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2. \int_0^\infty r_X(t) dt &= - \int_0^\infty d[\ln(\bar{F}_X(t))] = \ln(\bar{F}_X(0)) - \ln(\bar{F}_X(\infty)) \\ &= \ln(1) - \ln(0) = \infty \end{aligned}$$

Η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε αρκετές επιστήμες, μερικά παραδείγματα των οποίων είναι:

1. Στην μηχανική, γνωστή με την ονομασία **failure rate**.
2. Στην κατασκευή στατιστικών πινάκων θνησιμότητας και τις επιστήμες υγείας, γνωστή με την ονομασία **age-specific death rate**.
3. Στην οικονομική επιστήμη, γνωστή με την ονομασία **Mills ratio**.
4. Στην θεωρία ακραίων τιμών, γνωστή με την ονομασία **rate function** ή **intensity function**.
5. Στα συμβάντα ζωής ή αναλογιστικά ασφαλειών ζωής, γνωστή με την ονομασία **force of mortality** ή **force of decrement**.

Βάσει της τελευταίας παρατήρησης, είναι σημαντικό να διευκρινιστεί ότι οι διατάξεις βαθμίδας κινδύνου και οι διατάξεις θνησιμότητας αποτελούν ταυτόσημες έννοιες και ισοδύναμους ορισμούς.

Ορισμός 1.12: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα συνάρτηση του } t$$

Ορισμός 1.13: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow (X/X > t) \leq_{st} (Y/Y > t)$$

Ορισμός 1.14: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow r_X(t) \geq r_Y(t) \quad \forall t \geq 0$$

Απόδειξη :

$$\text{Το πηλίκο } \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα συνάρτηση του } t \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}\right) = \ln\bar{F}_Y(t) - \ln\bar{F}_X(t) \text{ γνησίως αύξουσα συνάρτηση του } t \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\ln\bar{F}_Y(t) - \ln\bar{F}_X(t)) = r_X(t) - r_Y(t) > 0 \Leftrightarrow$$

$$r_X(t) \geq r_Y(t)$$

Οι ορισμοί 1.12 ,1.13 και 1.14 είναι ισοδύναμοι.

Θεώρημα 1.20: Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου και f αύξουσα συνάρτηση τότε: $f(X) \leq_{hr} f(Y)$ (Shaked and Stanthicumar, 2007).

Επομένως : $X \leq_{hr} Y \Rightarrow f(X) \leq_{hr} f(Y)$, f αύξουσα συνάρτηση.

Θεώρημα 1.21: Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την στοχαστική διάταξη θνησιμότητας δηλαδή $X \leq_{hr} Y$, το πηλίκο των συναρτήσεων επιβίωσης των τυχαίων μεταβλητών X, Y , είναι φθίνουσα συνάρτηση του t . (Goovaerts, et al, 1990).

Επομένως:

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow \frac{1 - F_X(t)}{1 - F_Y(t)} = \frac{\bar{F}_X(t)}{\bar{F}_Y(t)} \text{ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του } t.$$

Απόδειξη :

$$\frac{1 - F_X(t)}{1 - F_Y(t)} = \frac{\bar{F}_X(t)}{\bar{F}_Y(t)} = \exp\left(-\int_0^t r_X(s) - r_Y(s) ds\right)$$

Έστω οι συναρτήσεις :

$$g(t) = \frac{1 - F_X(t)}{1 - F_Y(t)} = \frac{\bar{F}_X(t)}{\bar{F}_Y(t)}, t > 0$$

$$h(t) = \exp\left(-\int_0^t r_X(s) - r_Y(s) ds\right), t > 0,$$

Προκειμένου η g να είναι γνησίως φθίνουσα, θα πρέπει και η h να είναι γνησίως φθίνουσα. Η h είναι γνησίως φθίνουσα αν η παράσταση $r_X(s) - r_Y(s)$ είναι μη αρνητική για κάθε s , επομένως έχουμε :

$$r_X(s) - r_Y(s) \geq 0 \Leftrightarrow r_X(s) \geq r_Y(s) \Leftrightarrow X \leq_{hr} Y$$

1.7.2 Χρήσιμα μοντέλα διατάξεων βαθμίδας κινδύνου (Hazard rate models)

Βάσει των ορισμών και των θεωρημάτων που διατυπώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, θα παρουσιασθούν μοντέλα διατάξεων βαθμίδας κινδύνου που είναι ευρέως γνωστά στον αναλογισμό και βοηθούν συχνά στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων που αφορούν διατάξεις βαθμίδας κινδύνου.

Σταθερό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου(constant hazard rate model): Το σταθερό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου, προκύπτει αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που έχει ορισθεί ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Συγκεκριμένα αν $r(x) = \lambda$ για κάθε $x \geq 0$, $\lambda > 0$, προκύπτει ότι :

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = e^{-\int_0^x \lambda du} = \lambda e^{-\lambda x}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda du} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι:

$$\bar{F}(x) = e^{-\int_0^x \lambda du} = e^{-\lambda x}$$

Γραμμικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου (Linear hazard rate model): Το γραμμικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου προκύπτει αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που έχει ορισθεί ακολουθεί τον τύπο:

$$f(x) = (a + bx) e^{(-ax - \frac{bx^2}{2})}$$

Συγκεκριμένα αν $r(x) = a + bx$ για κάθε $x \geq 0, a \geq 0, b > 0$, προκύπτει ότι:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = (a + bx) e^{(-ax - \frac{bx^2}{2})}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - e^{(-ax - \frac{bx^2}{2})}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι:

$$\bar{F}(x) = e^{(-ax - \frac{bx^2}{2})}$$

Μοντέλο δύναμης διαβάθμισης κινδύνου (Power hazard rate model): Το δυναμικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου προκύπτει αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που έχει ορισθεί ακολουθεί τον ακόλουθο τύπο :

$$f(x) = e^{-x^c} cx^{c-1} \quad \text{για κάθε } x \geq 0, c > 0$$

Συγκεκριμένα αν $r(x) = cx^{c-1}$ για κάθε $x \geq 0, c > 0$ προκύπτει ότι:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = e^{-x^c} cx^{c-1}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - e^{-x^c}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι:

$$\bar{F}(x) = e^{-x^c}$$

Εκθετικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου (Exponential hazard rate model): Το εκθετικό μοντέλο διαβάθμισης κινδύνου προκύπτει αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που έχει ορισθεί ακολουθεί τον ακόλουθο τύπο :

$$f(x) = e^x e^{-e^x+1}$$

Συγκεκριμένα αν $r(x) = e^x$ για κάθε $x \geq 0$, προκύπτει ότι:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x) = e^x e^{-e^x+1}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - e^{-e^x}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι:

$$\bar{F}(x) = e^{-e^x}$$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής παραπάνω είναι η Gompertz (Horst Rinne, 2014).

1.8 Διατάξεις Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής (Mean Remaining Life Time Order)

Η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων έχει ιδιαίτερη χρησιμότητα και στις ασφαλίσσεις ζωής. Ένα σημαντικό ζήτημα που απασχολεί συχνά έναν αναλογιστή, είναι η μελέτη και η σύγκριση τυχαίων καταστάσεων που αντιπροσωπεύουν την εναπομένουσα ζωή ή την μέση εναπομένουσα ζωή ενός ατόμου που είναι ηλικίας x ετών. Βάσει της παραπάνω διαδικασίας μπορούν να καθοριστούν τα κατάλληλα ασφάλιστρα, η επιθυμητή διάρκεια ασφάλισης καθώς και να αποφασιστεί η χρήση ή μη αντασφάλισης.

Σε αυτή την ενότητα , θα μελετηθούν οι διατάξεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Είναι σημαντικό ότι οι παραπάνω διατάξεις, μπορούν να εφαρμοστούν και σε γενικές ασφαλίσσεις(non life) και όχι μόνο σε ασφαλίσσεις προσώπων. Με την χρήση στοχαστικών διατάξεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, μπορεί να υπολογισθεί ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος λειτουργίας ενός ασφαλισμένου αντικειμένου (π.χ σκάφος, μηχανήμα κλπ).

Βάσει των παραπάνω, θα δοθούν οι ακόλουθοι ορισμοί, για την κατανόηση των εννοιών που αφορούν τις διατάξεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Ορισμός 1.15: Η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής ενός ατόμου μετά την ηλικία x , δεδομένου ότι έχει επιζήσει μέχρι την ηλικία x , συμβολίζεται με T_x .

Ορισμός 1.16: Η αναμενόμενη τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής συμβολίζεται με e_x και ισούται με την μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής (Goovaerts, et al, 1990). Επομένως:

$$e_x(t) = E(T_x) = \frac{\int_x^{\infty} [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(x)}$$

Ορισμός 1.17 : Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής και θα συμβολίζεται με $X \leq_{mrl} Y$, αν και μόνο αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$X \leq_{mrl} Y \Leftrightarrow e_X(t) \leq e_Y(t) \text{ για όλα τα } t \geq 0,$$

όπου $e_X(t)$, $e_Y(t)$, ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος ζωής στην ηλικία t .

1.9 Σχέσεις Μεταξύ των Στοχαστικών Διατάξεων

1.9.1 Εισαγωγή στις σχέσεις μεταξύ των στοχαστικών διατάξεων

Στον αναλογισμό, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η σύνδεση διαφορετικών εννοιών, προκειμένου να επιτευχθεί η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων μέσω διαφορετικών καταστάσεων. Στην αναλογιστική βιβλιογραφία, χρησιμοποιούνται ως χρήσιμο εργαλείο, σχέσεις μεταξύ ασφαλιστρών, ραντών, τυχαίων καταστάσεων και γενικότερα παρατηρείται μία «τάση» σύνδεσης διαφορετικών καταστάσεων προκειμένου να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Προκειμένου να κατανοηθεί το παραπάνω, δίνονται μερικά παραδείγματα σύνδεσης εννοιών, που είναι ευρέως γνωστές στην αναλογιστική επιστήμη:

1. Ασφαλίσεις ζωής: Στις ασφαλίσεις ζωής, παρατηρούνται σχέσεις ισότητας μεταξύ ασφαλιστρών, αποθεμάτων κλπ. Για παράδειγμα το ασφάλιστρο μιας ισόβιας ασφάλισης θανάτου ισούται με το άθροισμα των ασφαλιστρών μιας πρόσκαιρης ασφάλισης θανάτου και μιας μέλλουσας ασφάλισης θανάτου.

2. Χρηματοοικονομικά μαθηματικά: Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά παρατηρούνται σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ ραντών, αρχικών-τελικών αξιών κλπ.
3. Θεωρία Κινδύνου: Στην θεωρία κινδύνου παρατηρούνται αναδρομικές σχέσεις υπολογισμού ασφαλιστρών, σχέσεις εξάρτησης αναλυτικών αποτελεσμάτων υπολογισμού σύνθετων κατανομών κλπ.
4. Θεωρία Χρεοκοπίας: Στην θεωρία χρεοκοπίας παρατηρούνται σημαντικές σχέσεις μεταξύ της συνάρτησης χρεοκοπίας, αποθεματικών, μετασχηματισμών Laplace κλπ.

Βάσει της παραπάνω παραδοχής, είναι σημαντικό να μελετηθούν αντίστοιχες σχέσεις και στις στοχαστικές διατάξεις. Η παρουσίαση αυτών των σχέσεων θα βοηθήσει στην πλήρη κατανόηση των εννοιών που διατυπώθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, αξιοποιώντας χρήσιμα συμπεράσματα για την σχέση μεταξύ των διαφόρων μορφών στοχαστικών διατάξεων.

1.9.2 Κάποιες επιπλέον ιδιότητες των στοχαστικών διατάξεων

Σε αυτή την υπό ενότητα, θα παρουσιαστούν χρήσιμα θεωρήματα που συνδέουν στοχαστικές διατάξεις με ασφάλιστρα Stop Loss και αντασφάλιση (βλ. ορισμούς Ενότητας 1.6).

Θεώρημα 1.22 : Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, $X \leq_{mrl} Y$ τότε το πηλίκο

$$\frac{\Pi_X(t)}{\Pi_Y(t)}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του t . (Goovaerts, et al, 1990).

Απόδειξη:

$$\frac{\Pi_X(t)}{\Pi_Y(t)} = \frac{E(X)}{E(Y)} \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{1}{e_X(s)} - \frac{1}{e_Y(s)}\right) ds\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Pi_X(t)}{\Pi_Y(t)} = \frac{E(X)}{E(Y)} \exp\left(-\int_0^t \frac{e_Y(s) - e_X(s)}{e_X(s) e_Y(s)} ds\right)$$

Έστω συναρτήσεις $g(t)$ και $h(t)$ τέτοιες ώστε:

$$g(t) = \frac{\Pi_X(t)}{\Pi_Y(t)}$$

$$h(t) = \frac{E(X)}{E(Y)} \exp\left(-\int_0^t \frac{e_Y(s) - e_X(s)}{e_X(s) e_Y(s)} ds\right)$$

Προκειμένου η g να είναι γνησίως φθίνουσα, θα πρέπει και η h να είναι γνησίως φθίνουσα. Η h είναι γνησίως φθίνουσα αν η κάτωθι παράσταση είναι μη αρνητική για κάθε s ,

$$\frac{e_Y(s) - e_X(s)}{e_X(s) e_Y(s)} \geq 0, \forall s$$

Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με:

$$e_Y(s) - e_X(s) \geq 0 \Leftrightarrow e_Y(s) \geq e_X(s) \Leftrightarrow X \leq_{\text{mrl}} Y.$$

Θεώρημα 1.23: Η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη η ίση από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, αν και μόνο αν η συνάρτηση:

$$g(t) = \Pi_Y(t) - \Pi_X(t) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση για κάθε } t.$$

Επομένως:

$$X \leq_{\text{st}} Y \Leftrightarrow g(t) = \Pi_Y(t) - \Pi_X(t) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση για κάθε } t.$$

Θεώρημα 1.24: Το ασφάλιστρο Stop Loss και η αναμενόμενη τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής συνδέονται μεταξύ τους με τις παρακάτω σχέσεις (Goovaerts, et al, 1990):

$$\Pi_X(s) = E[X] \exp\left(-\int_0^s \frac{1}{e_X(t)} dt\right)$$

$$e_X = E(T_X) = \frac{\int_x^\infty [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(x)} = -\frac{\Pi_X(x)}{\Pi'_X(x)}$$

1.9.3 Σχέσεις μεταξύ στοχαστικών διατάξεων

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν θεωρήματα που συνδέουν την διάταξη μιας μορφής στοχαστικής διάταξης με μία άλλη μορφή στοχαστικής διάταξης. Στα αναλογιστικά μαθηματικά και γενικότερα στα μαθηματικά, είναι συχνά χρήσιμο μια γνωστή σχέση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών, να οδηγήσει σε περισσότερα συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας αληθείς συνεπαγωγές. Για παράδειγμα, στον μαθηματικό λογισμό, αν είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, αυτομάτως εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι και συνεχής. Ομοίως αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι και 1-1. Ανάλογες χρήσιμες

σχέσεις υπάρχουν και στην θεωρία των στοχαστικών διατάξεων και θα αποτελέσουν το αντικείμενο μελέτης της παρούσας ενότητας. Το σύγγραμμα που έχει χρησιμοποιηθεί για την παρουσίαση των θεωρημάτων της παρούσας ενότητας, είναι :

- Effective Actuarial Methods των M.J Govaerts, R.Kaas, A.E van Heerwarden, T. Bauwelinckx, 1990.

Βάσει των παραπάνω, παρατίθενται τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 1.25: Η διάταξη λόγου πιθανοφανειών είναι ισχυρότερη από την διάταξη βαθμίδας κινδύνου. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών, τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Επομένως:

$$X \leq_{LR} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y$$

Θεώρημα 1.26 : Η διάταξη βαθμίδας κινδύνου είναι ισχυρότερη από την στοχαστική διάταξη υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Επομένως:

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{mrl} Y$$

Θεώρημα 1.27 : Η διάταξη βαθμίδας κινδύνου είναι ισχυρότερη από την συνήθη στοχαστική διάταξη. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την διάταξη θνησιμότητας, τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την στοχαστική διάταξη. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Επομένως:

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$$

Θεώρημα 1.28: Η συνήθης στοχαστική διάταξη είναι ισχυρότερη από την διάταξη ανακοπής ζημίας. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, τότε η τυχαία μεταβλητή X θα είναι σίγουρα μικρότερη από την τυχαία μεταβλητή Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Επομένως:

$$X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{sl} Y$$

Συνοπτικά από τα θεωρήματα **1.25**, **1.27**, **1.28** προκύπτουν τα εξής :

$$X \leq_{LR} Y \Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{sl} Y.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΖΗΜΙΟΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναπτυχθούν παραδείγματα για την κατανόηση της θεωρίας των στοχαστικών διατάξεων που διατυπώθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

Στον αναλογισμό είναι ιδιαίτερα σημαντική η μελέτη των αποζημιώσεων για κάθε χαρτοφυλάκιο κινδύνου, προκειμένου ο αναλογιστής να μπορεί να εκτιμήσει την βιωσιμότητα και την κερδοφορία του χαρτοφυλακίου μελλοντικά. Η βιωσιμότητα ενός χαρτοφυλακίου έγκειται στην παραδοχή ότι τα συνολικά έσοδα του χαρτοφυλακίου (ασφάλιστρα, επενδύσεις) θα πρέπει να υπερβαίνουν τα αντίστοιχα έξοδα του χαρτοφυλακίου (αποζημιώσεις, λειτουργικά έξοδα, φόρους κλπ). Εξίσου σημαντική για τον αναλογιστή, είναι η σύγκριση της κατανομής των αποζημιώσεων, προκειμένου να επιλεγεί το «βέλτιστο» χαρτοφυλάκιο. Το «βέλτιστο» χαρτοφυλάκιο θεωρείται εκείνο με την μεγαλύτερη βιωσιμότητα, με ταυτόχρονη δυνατότητα αύξησης της κερδοφορίας για τον ασφαλιστή ή γενικότερα για ένα χρηματοπιστωτικό οργανισμό. Η κατανομή των αποζημιώσεων αποτελεί αντικείμενο μελέτης για τον αναλογιστή και απαιτεί ιδιαίτερη γνώση πιθανοτήτων (κατανομών απώλειας, θεωρίας ακραίων τιμών). Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται εφαρμογές που σχετίζονται με την σύγκριση τυχαίων μεταβλητών, συγκρίνοντας την στοχαστική διάταξη των κατανομών που ακολουθούν.

2.2 Εφαρμογές Συνήθους Στοχαστικής Διάταξης

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται πρακτικές εφαρμογές της θεωρίας συνήθους στοχαστικής διάταξης, που αναλύθηκε στην Ενότητα 1.3. Με την σύγκριση τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, επιτυγχάνεται η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την θέση των τυχαίων μεταβλητών, και αποτελεί μια σημαντική ένδειξη για την λήψη απόφασης χαμηλότερου ρίσκου. Επίσης συγκρίνοντας την διάταξη των τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, προκύπτουν συμπεράσματα για την διάταξη ανακοπής ζημίας (βλ. Θεώρημα 1.28).

Εφαρμογή 2.1: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{8}, & 1 < t \leq 2 \\ \frac{5}{8}, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,2)$, $Y \sim U(0,2)$. Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y , είναι :

$$f_Y(t) = \frac{1}{2}, 0 \leq t \leq 2$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι :

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8}t, & 1 < t \leq 2 \\ \frac{5}{8}t - \frac{7}{8}, t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι

$$F_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \end{cases}$$

- Για $0 < t \leq 1$: $F_X(t) \leq F_Y(t)$
- Για $1 < t \leq 2$: $F_X(t) \leq F_Y(t)$
- Για $2 < t \leq 3$: $F_X(t) \leq F_Y(t)$

Άρα : $F_X(t) \leq F_Y(t)$ για κάθε $t \in [0,3] \Leftrightarrow X \geq_{st} Y$

Το παραπάνω συμπέρασμα για την συνήθη στοχαστική διάταξη των τυχαίων μεταβλητών X, Y προκύπτει και στην περίπτωση του ισοδύναμου ορισμού. Για τον σκοπό αυτό, θα γίνει σύγκριση των συναρτήσεων δεξιάς ουράς των δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y .

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της Y , είναι :

$$\bar{F}_Y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

Η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής X είναι :

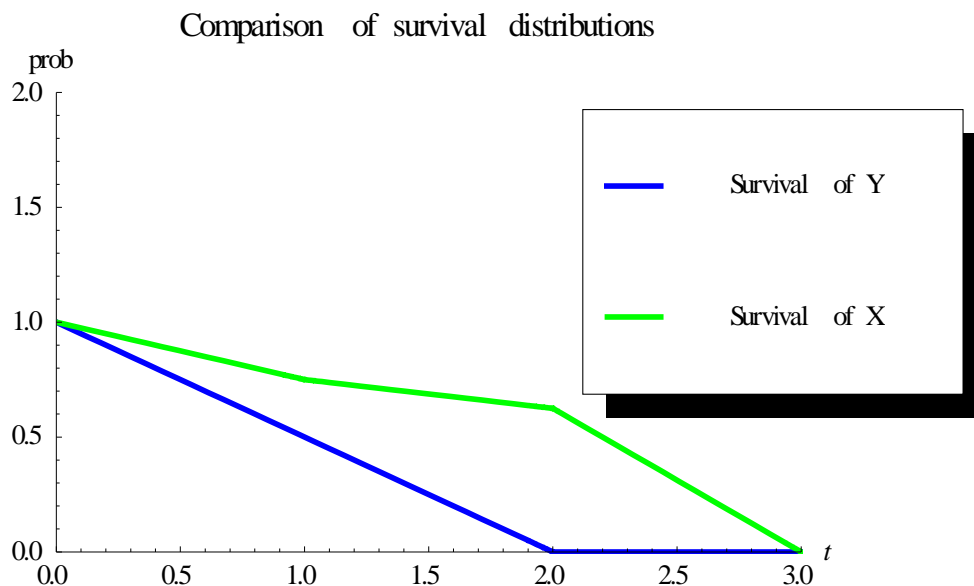
$$\bar{F}_X(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{7}{8} - \frac{1}{8}t, & 1 < t \leq 2 \\ \frac{15}{8} - \frac{5}{8}t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

- Για $0 < t \leq 1$: $\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t)$
- Για $1 < t \leq 2$: $\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t)$
- Για $2 < t \leq 3$: $\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t)$

Άρα $\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_Y(t)$ για κάθε $t \in [0,3] \Leftrightarrow X \geq_{st} Y$

Γραφική παράσταση – Συμπέρασμα:

Με την κάτωθι γραφική παράσταση συγκρίνονται οι συναρτήσεις επιβίωσης των δύο τυχαίων μεταβλητών, που αναλύθηκαν αλγεβρικά παραπάνω. Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της X είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της Y. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η Y λαμβάνει μεγάλες τιμές με μικρότερη πιθανότητα από ότι η τυχαία μεταβλητή X.



Γραφική Παράσταση 2.1.1 – Σύγκριση Συναρτήσεων δεξιάς ουράς των τυχαίων μεταβλητών $X, Y \sim U(0,2)$.

Εφαρμογή 2.2 : Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Weibull με παράμετρους (k, l) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Weibull με παράμετρους (m, n) . Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη, αν γνωρίζουμε ότι $k = m \geq 1, l \leq n$. Εφαρμογή για $k = m = 3, l = 2, n = 4$.

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_X(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{l}\right)^k}, \quad t \geq 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$F_Y(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^m}, \quad t \geq 0$$

Για $t \geq 0$ διαδοχικά προκύπτουν τα εξής :

$$\begin{aligned} l \leq n &\Leftrightarrow \frac{1}{l} \geq \frac{1}{n} \xLeftrightarrow{k=m \geq 1} \left(\frac{1}{l}\right)^k \geq \left(\frac{1}{n}\right)^m \Leftrightarrow \\ &-\left(\frac{t}{l}\right)^k \leq -\left(\frac{t}{n}\right)^m \xLeftrightarrow{\text{εξομολογία αύξουσα}} e^{-\left(\frac{t}{l}\right)^k} \leq e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^m} \Leftrightarrow \\ &1 - e^{-\left(\frac{t}{l}\right)^k} \geq 1 - e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^m} \Leftrightarrow F_X(t) \geq F_Y(t) \Leftrightarrow X \leq_{st} Y \end{aligned}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα για την συνήθη στοχαστική διάταξη των τυχαίων μεταβλητών X, Y προκύπτει και στην περίπτωση του ισοδύναμου ορισμού. Για τον σκοπό αυτό, θα γίνει σύγκριση των συναρτήσεων επιβίωσης των δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y .

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της X , είναι :

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\left(\frac{t}{l}\right)^k}, \quad t \geq 0$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της Y , είναι :

$$\bar{F}_Y(t) = e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^m}, \quad t \geq 0$$

Για $t \geq 0$ έχουμε :

$$l \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{l} \geq \frac{1}{n} \xLeftrightarrow{k=m \geq 1} \left(\frac{1}{l}\right)^k \geq \left(\frac{1}{n}\right)^m \Leftrightarrow$$

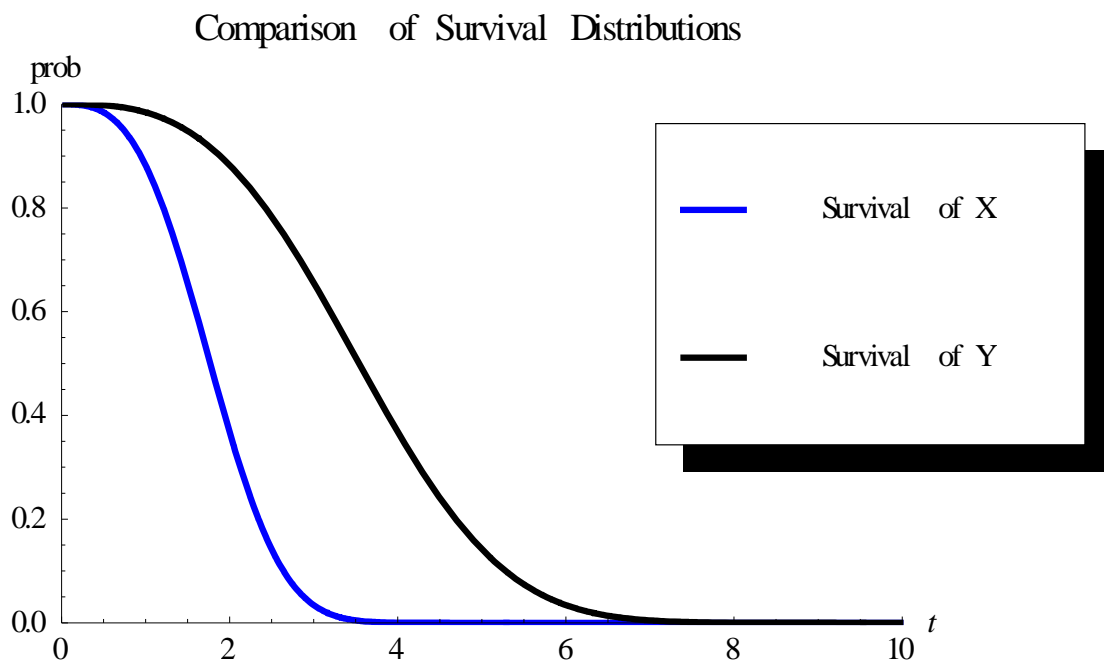
$$-\left(\frac{t}{l}\right)^k \leq -\left(\frac{t}{n}\right)^k \xleftrightarrow{\text{e}^{\text{x}}\gamma\text{νη}\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \text{ \acute{a}}\xi\omicron\upsilon\sigma\sigma\alpha} e^{-\left(\frac{t}{l}\right)^k} \leq e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^k} \Leftrightarrow$$

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) \Leftrightarrow X \leq_{\text{st}} Y$$

Συμπέρασμα: Η τυχαία μεταβλητή X υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y , ως προς την συνήθη στοχαστική διάταξη.

Εφαρμογή για $k = m = 3, l = 2, n = 4$

Προφανώς, επειδή $l \leq n$, ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων δεξιάς ουράς για $k = m = 3, l = 2, n = 4$. Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της Y είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της X . Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η X λαμβάνει μεγάλες τιμές με μικρότερη πιθανότητα από ότι η τυχαία μεταβλητή Y .



Γραφική Παράσταση 2.2.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \text{Weibull}(3,2), Y \sim \text{Weibull}(3,4)$.

2.3 Εφαρμογές Διατάξεων Παχιάς Ουράς

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιασθούν εφαρμογές των διατάξεων παχιάς ουράς. Οι διατάξεις παχιάς ουράς παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς προϋποθέτουν οι τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνονται να έχουν την ίδια μέση τιμή. Επίσης, απαραίτητη προϋπόθεση βάσει του Ορισμού 1.5 που δόθηκε στην Ενότητα 1.4 για τις διατάξεις

παχιάς ουράς, είναι να υπάρχει αριθμός h_0 , για τον οποίο η διάταξη των πιθανοτήτων που ορίζονται παρακάτω, να αντιστρέφεται εκατέρωθεν του h_0 .

Βάσει των παραπάνω παρουσιάζονται οι παρακάτω εφαρμογές. Λόγω της ιδιαιτερότητας του αριθμού h_0 , για την πλήρη κατανόηση των εννοιών, οι εφαρμογές είναι αριθμητικές με χρήση κατάλληλων γραφικών παραστάσεων.

Εφαρμογή 2.3: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παράμετρος $\alpha=100$ και $\beta=1$ και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{100}$. Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την στοχαστική διάταξη παχιάς ουράς.

Παρατηρείται ότι $E(X) = E(Y)=100$

Θα αποδειχθεί ότι για $h_0 \cong 103.409349$ ισχύει :

$$\begin{cases} \Pr(X < h_0) \leq \Pr(Y < h_0), & x < h_0 \\ \Pr(X < h_0) \geq \Pr(Y < h_0), & x \geq h_0 \end{cases}$$

Επομένως $X \leq_{tt} Y$

Η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Γάμμα, είναι:

$$F(x) = \frac{\Gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$

όπου

$$\Gamma(\alpha, \beta x) = \int_0^{\beta x} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Επομένως για $\alpha = 100, \beta = 1$, η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_X(x) = \frac{\gamma(100, x)}{\Gamma(100)}, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής είναι:

$$F_Y(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Επομένως για $\lambda = 100$, η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_Y(x) = 1 - e^{-100x}, \quad x \geq 0$$

Το σημείο h_0 βρέθηκε με την βοήθεια του Mathematica από την επίλυση της εξίσωσης:

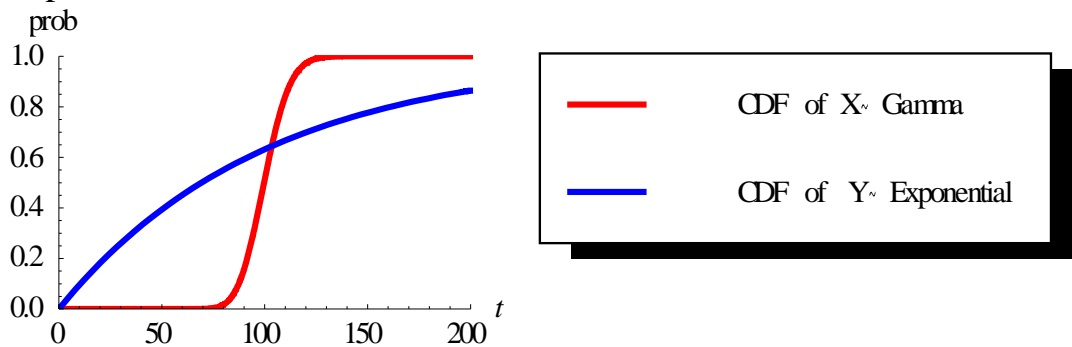
$$F_X(x) = F_Y(x), x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma(100, x)}{\Gamma(100)} = 1 - e^{-\frac{x}{100}} \Leftrightarrow$$

$$x \cong 103.409349$$

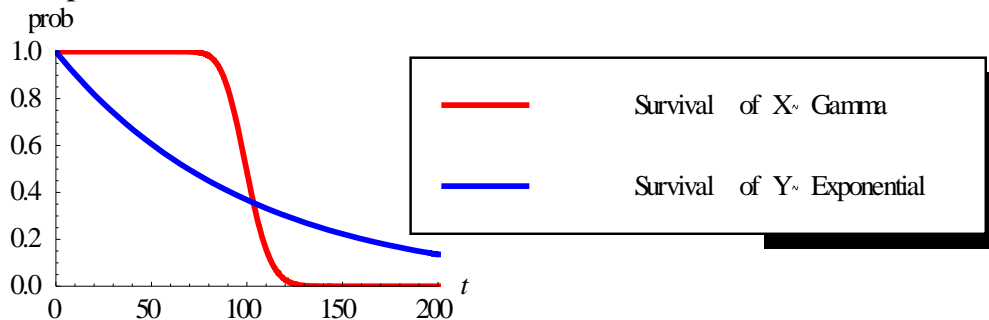
Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την γραφική παράσταση των συναρτήσεων κατανομής και των συναρτήσεων δεξιάς ουράς των δύο τυχαίων μεταβλητών.

Comparison of Cumulative Functions



Γραφική Παράσταση 2.3.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής Gamma(100,1)- εκθετικής($\frac{1}{100}$)

Comparison of Survival Functions



Γραφική Παράσταση 2.3.2- Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς Ουράς Gamma(100,1)- εκθετικής($\frac{1}{100}$).

Εφαρμογή 2.4: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{5000}$ και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους ($\theta = 10000$, $\alpha = 3$). Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την στοχαστική διάταξη παχιάς ουράς.

Οι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν την ίδια μέση τιμή.

Επομένως: $E(X) = E(Y) = 5000$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Επομένως η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Επομένως για $\lambda = \frac{1}{5000}$, η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}x}, \quad x \geq 0$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(x) = \frac{a \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \theta > 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$F_Y(x) = \int_0^x \frac{a \theta^\alpha}{(t + \theta)^{\alpha+1}} dt = 1 - \left(\frac{\theta}{x + \theta}\right)^\alpha.$$

Θα αποδειχθεί ότι για $h_0 = 11440,3$, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \Pr(X < h_0) \leq \Pr(Y < h_0), & x < h_0 \\ \Pr(X < h_0) \geq \Pr(Y < h_0), & x \geq h_0 \end{cases}$$

Επομένως: $X \leq_{tt} Y$

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται για κάθε τιμή η αντίστοιχη πιθανότητα της συνάρτησης κατανομής. Παρατηρείται ότι στο σημείο $h_0 = 11440,3$ υπάρχει ισότητα και αποδεικνύεται ότι εκατέρωθεν του σημείου h_0 , υπάρχει εναλλαγή της διάταξης των συναρτήσεων κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

Τιμή	Συνάρτησης Κατανομής $F_X(x)$	Συνάρτησης Κατανομής $F_Y(x)$
5000	0.632	0.703
8000	0.798	0.828
10000	0.864	0.875
11440,3	0.89853	0.89853
15000	0.950	0.936
20000	0.981	0.962

Πίνακας 1 - Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής, Pareto(2,10000) εκθετικής($\frac{1}{5000}$)

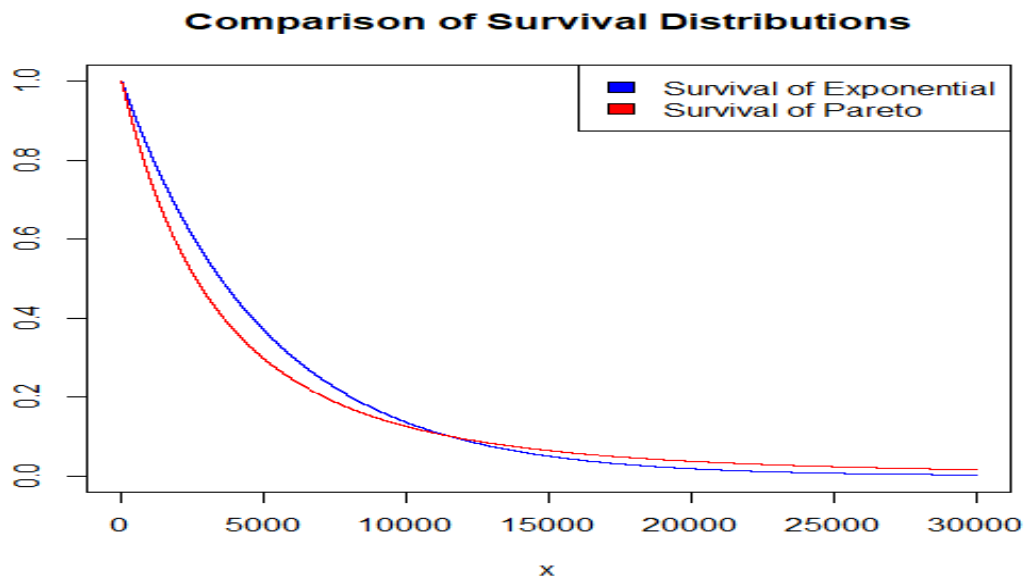
Το σημείο h_0 βρέθηκε με την βοήθεια του Mathematica από την επίλυση της εξίσωσης:

$$F_X(x) = F_Y(x), \quad x > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \left(\frac{10000}{x + 10000} \right)^3 = 1 - e^{-\frac{x}{5000}} \Leftrightarrow$$

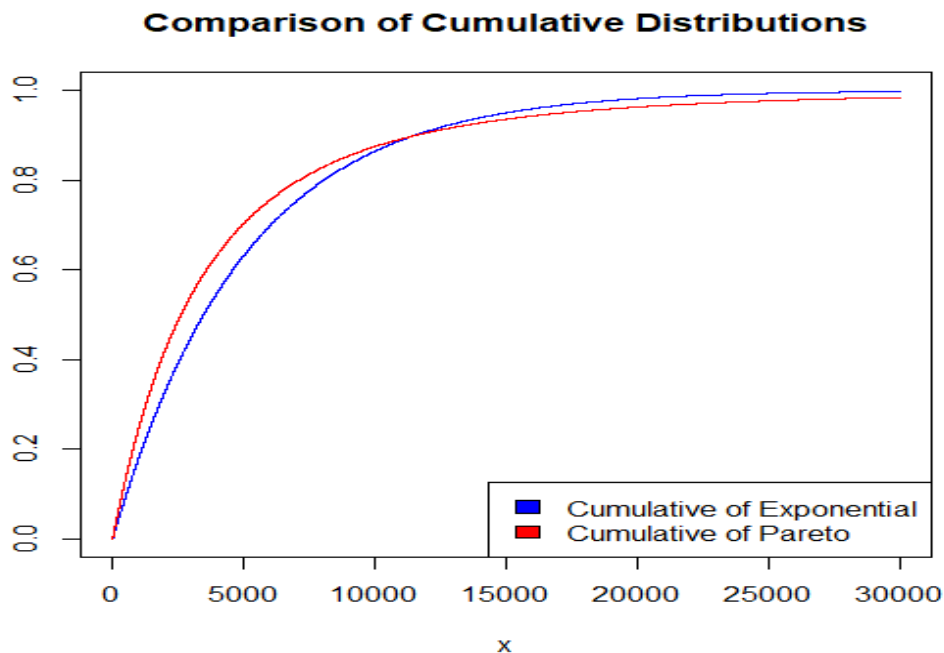
$$x = 11440,3$$

Γραφικές Παραστάσεις: Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την γραφική παράσταση των συναρτήσεων κατανομής και των συναρτήσεων επιβίωσης των δύο τυχαίων μεταβλητών.



Γραφική Παράσταση 2.4.1-Σύγκριση Συναρτήσεων δεξιάς ουράς Pareto(2,10000)

εκθετικής($\frac{1}{5000}$)



Γραφική Παράσταση 2.4.2 Σύγκριση Συναρτήσεων Κατανομής, Pareto(2,10000)

εκθετικής($\frac{1}{5000}$)

Στο σημείο h_0 οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων κατανομής και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων δεξιάς ουράς τέμνονται.

Εφαρμογή 2.5: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $(100,10)$ και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $(100,30)$. Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την στοχαστική διάταξη παχιάς ουράς.

Παρατηρείται ότι $E(X) = E(Y) = 100$

Θα αποδειχθεί ότι για $h_0 = 100$, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \Pr(X < h_0) \leq \Pr(Y < h_0), & x < h_0 \\ \Pr(X < h_0) \geq \Pr(Y < h_0), & x \geq h_0 \end{cases}$$

Επομένως: $X \leq_{tt} Y$

Το σημείο h_0 βρέθηκε με την βοήθεια του Mathematica από την επίλυση της εξίσωσης:

$$F(x) = G(x), x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\pi}10(\text{Erf}[\frac{100}{10\sqrt{2}}] - \text{Erf}[\frac{100-x}{10\sqrt{2}}])}{2\sqrt{\pi}10^2} = \frac{\sqrt{\pi}30(\text{Erf}[\frac{100}{30\sqrt{2}}] - \text{Erf}[\frac{100-x}{30\sqrt{2}}])}{2\sqrt{\pi}30^2} \Leftrightarrow$$

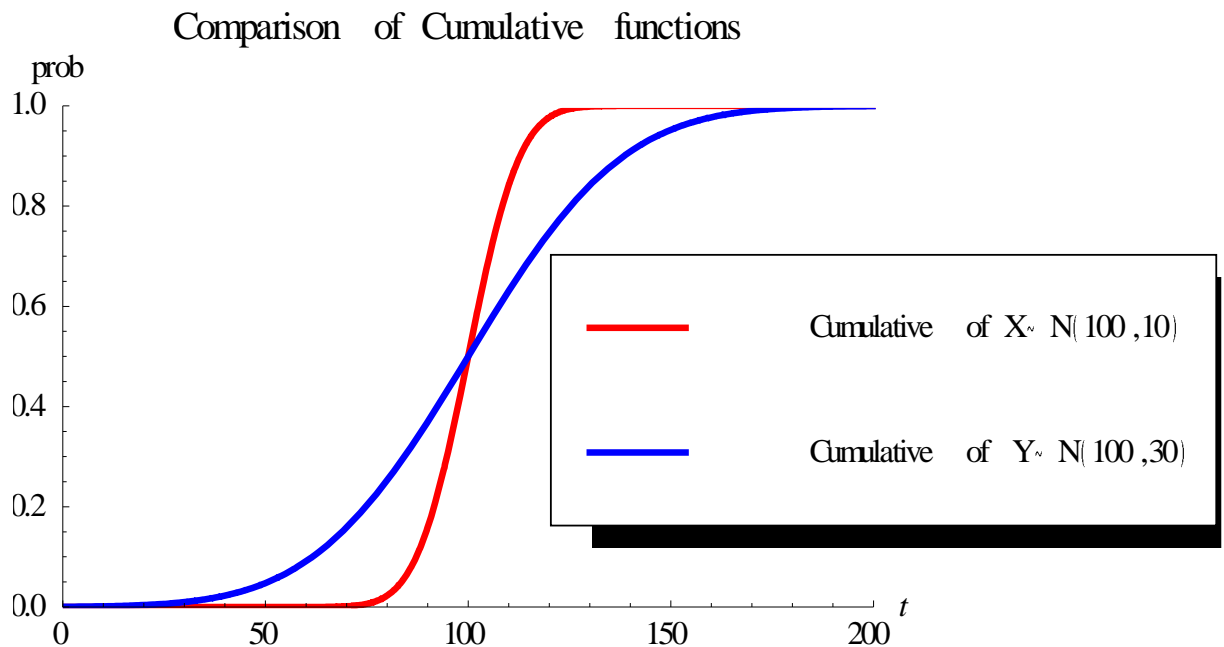
$$x = 100$$

Η συνάρτηση $\text{Erf}(x)$ που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω ορίζεται ως εξής :

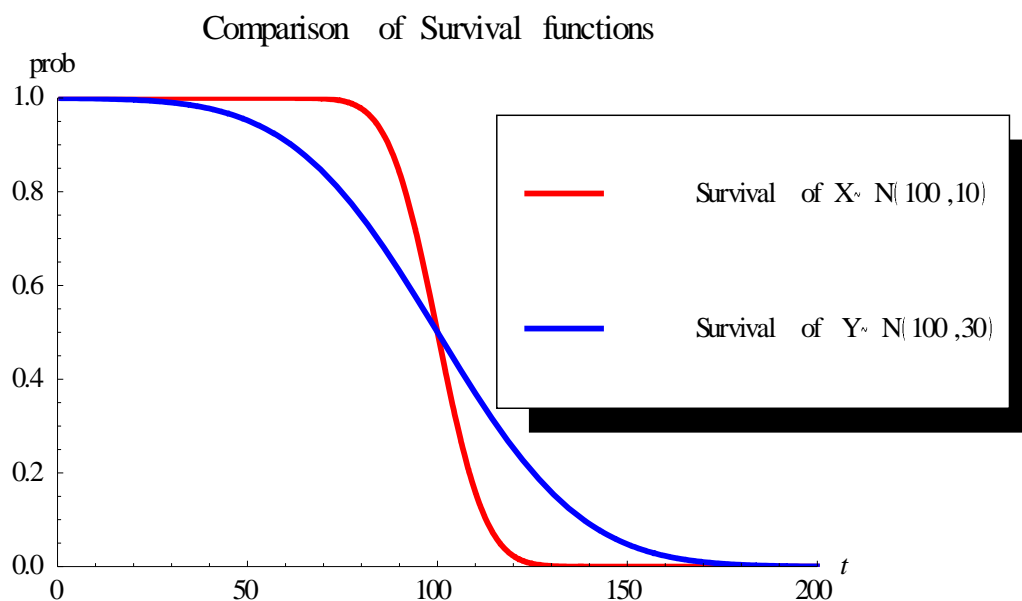
$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Γραφικές Παραστάσεις: Στις κάτωθι γραφικές παραστάσεις 2.5.1 και 2.5.2 των συναρτήσεων κατανομής και των συναρτήσεων δεξιάς ουράς των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα, παρατηρείται η αλλαγή της διάταξης εκατέρωθεν του h_0 . Το σημείο h_0 όπως φαίνεται και στις γραφικές παραστάσεις ταυτίζεται με την κοινή μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

Συμπέρασμα: Η σύγκριση δύο κανονικών κατανομών με ίδια μέση τιμή ως προς την διάταξη παχιάς ουράς εξαρτάται από την διακύμανση των κανονικών κατανομών που συγκρίνονται. Η τυχαία μεταβλητή με την μικρότερη διακύμανση υπολείπεται ως προς την διάταξη παχιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής με την μεγαλύτερη διακύμανση, δοθείσης της ισότητας των αντίστοιχων μέσων τιμών τους.



Γραφική Παράσταση 2.5.1- Σύγκριση Συναρτήσεων κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(100, 10), Y \sim N(100, 30)$



Γραφική Παράσταση 2.5.2-Σύγκριση Συναρτήσεων Δεξιάς ουράς των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(100,10), Y \sim N(100,30)$

2.4 Εφαρμογές Διατάξεων Λόγου Πιθανοφανειών

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιασθούν εφαρμογές των διατάξεων λόγου πιθανοφάνειας. Οι διατάξεις λόγου πιθανοφάνειας αποτελούν την ισχυρότερη από τις στοχαστικές διατάξεις που αναλύονται και η μελέτη τους μπορεί να οδηγήσει στην εξαγωγή συμπερασμάτων και για την διάταξη άλλων μορφών στοχαστικών διατάξεων (βλ. Ενότητα 1.9.3). Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι ο λήπτης της απόφασης, μπορεί να μελετήσει την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας και στην περίπτωση που θέλει να εξάγει συμπέρασμα για μία άλλη μορφή στοχαστικής διάταξης σύμφωνα με τα θεωρήματα που διατυπώθηκαν στην Ενότητα 1.9.3.

Εφαρμογή 2.6 : Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παράμετρος (a,b) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους (c,d) . Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών. Εφαρμογή για $a = 4, b = 200, c = 3, d = 250$.

Στην γενική περίπτωση : Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παράμετρος (a, b) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους (c, d) .

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι:

$$f_X(t) = \frac{ab^a}{(t+b)^{a+1}}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{cd^c}{(t+d)^{c+1}}, \quad t > 0$$

Προκειμένου η τυχαία μεταβλητή X να υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y , θα πρέπει:

$$\frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα ως προς } t$$

Για να μελετηθεί η μονοτονία, ορίζεται η συνάρτηση $h(t)$ που εκφράζει το πηλίκο των πιθανοφανειών για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y , αντίστοιχα.

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = \frac{cd^c(t+b)^{a+1}}{ab^a(t+d)^{c+1}}$$

Για να είναι η h γνησίως αύξουσα θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της h να είναι θετική

$$h'(t) = \frac{b^{-a}cd^c(b+t)^a(d+t)^{-2-c}(-b(1+c) + d + ad + at - ct)}{a}, \quad t > 0$$

Εύρεση πρόσημου συνάρτησης $h'(t)$.

Έστω συναρτήσεις $g(t), r(t)$ τέτοιες ώστε $h'(t) = g(t)r(t)$ με $g(t), r(t)$ ορισμένες ως εξής:

$$g(t) = \frac{b^{-a}cd^c(b+t)^a(d+t)^{-2-c}}{a}, \quad t > 0$$

$$r(t) = -b(1+c) + d + ad + at - ct, \quad t > 0$$

Η $g(t)$ είναι θετική εφόσον a, b, c, d είναι θετικοί αριθμοί. Θα πραγματοποιηθεί ανάλυση των παραμέτρων της $r(t)$, προκειμένου να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για το πρόσημο της συνάρτησης.

$$r(t) = -b(1+c) + d + ad + at - ct \Leftrightarrow$$

$$r(t) = -b - bc + d(a + 1) + (a - c)t$$

Προκειμένου η $r(t)$ να είναι σίγουρα θετική, θα πρέπει να αποτελείται από άθροισμα θετικών αριθμών. Επομένως μια ικανή συνθήκη είναι:

$$\begin{cases} -b - bc + d(a + 1) > 0 \Rightarrow d(a + 1) > b + bc \\ (a - c)t > 0 \Rightarrow a > c \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση $h'(t) = g(t)r(t) > 0$, η γνησίως αύξουσα συνάρτηση και επομένως $X \leq_{LR} Y$.

Επομένως μελετώντας το πρόσημο της παραπάνω συνάρτησης $r(t)$ που ορίστηκε παραπάνω, μπορεί να γίνει εξαγωγή συμπερασμάτων για την μονοτονία της συνάρτησης ηλικίου πιθανοφανειών $h(t)$.

Εφαρμογή για $a = 4, b = 200, c = 3, d = 250$

Σύμφωνα με όσα αποδείχθηκαν παραπάνω για την συνάρτηση $r(t)$, για τις παραπάνω τιμές τις εφαρμογής, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} d(a + 1) = 1250 > b + bc = 800 \\ a = 4 > c = 3 \Rightarrow (a - c)t > 0 \end{cases}$$

Επομένως το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η συνάρτηση του ηλικίου λόγου πιθανοφανειών είναι γνησίως αύξουσα και $X \leq_{LR} Y$. Το συμπέρασμα αυτό, θα αποδειχθεί αναλυτικά παρακάτω.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{4 \cdot 200^4}{(t + 200)^5}, \quad t > 0.$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{3 \cdot 250^3}{(t + 250)^4}, \quad t > 0.$$

Η συνάρτηση $h(t)$ του ηλικίου λόγου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι:

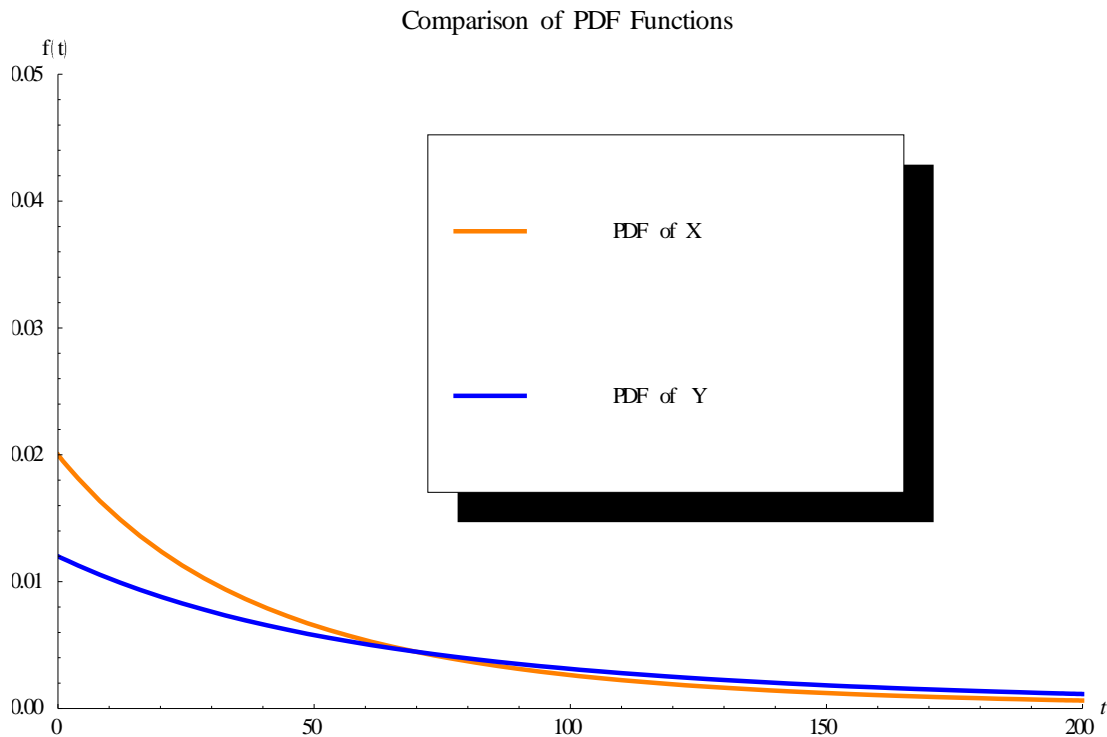
$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = \frac{(t+200)^5 \cdot 3 \cdot 250^3}{4 \cdot 200^4 (t+250)^4} = \frac{15(200+t)^5}{2048(250+t)^4}$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $h(t)$, είναι:

$$h'(t) = \frac{15(200+t)^4(450+t)}{2048(250+t)^5} > 0$$

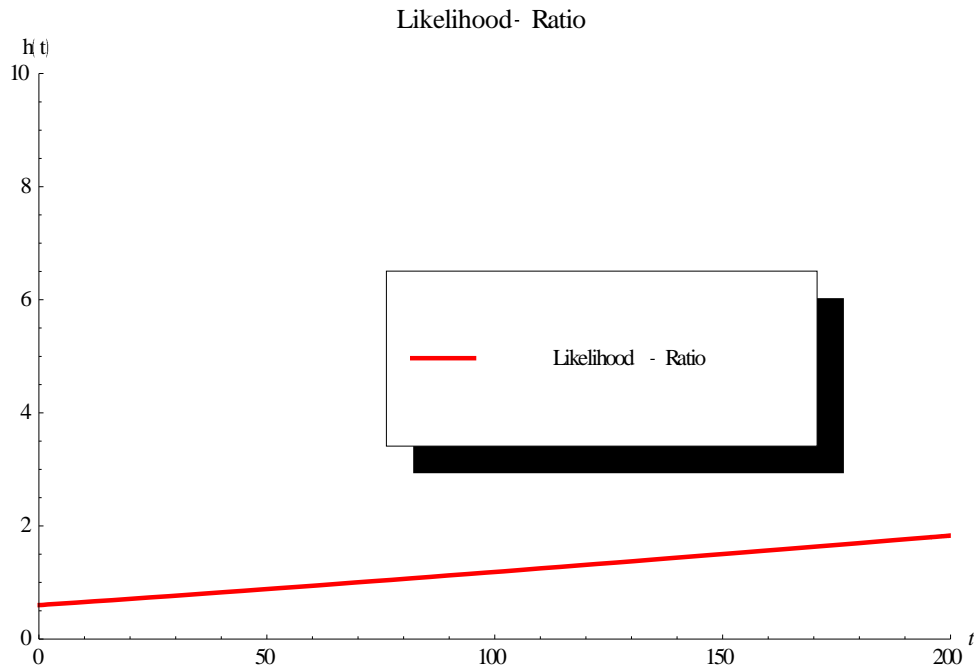
Η πρώτη παράγωγος της h είναι θετική. Επομένως η συνάρτηση h που έχει ορισθεί είναι γνησίως αύξουσα και $X \leq_{LR} Y$.

Γραφικές Παραστάσεις: Παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

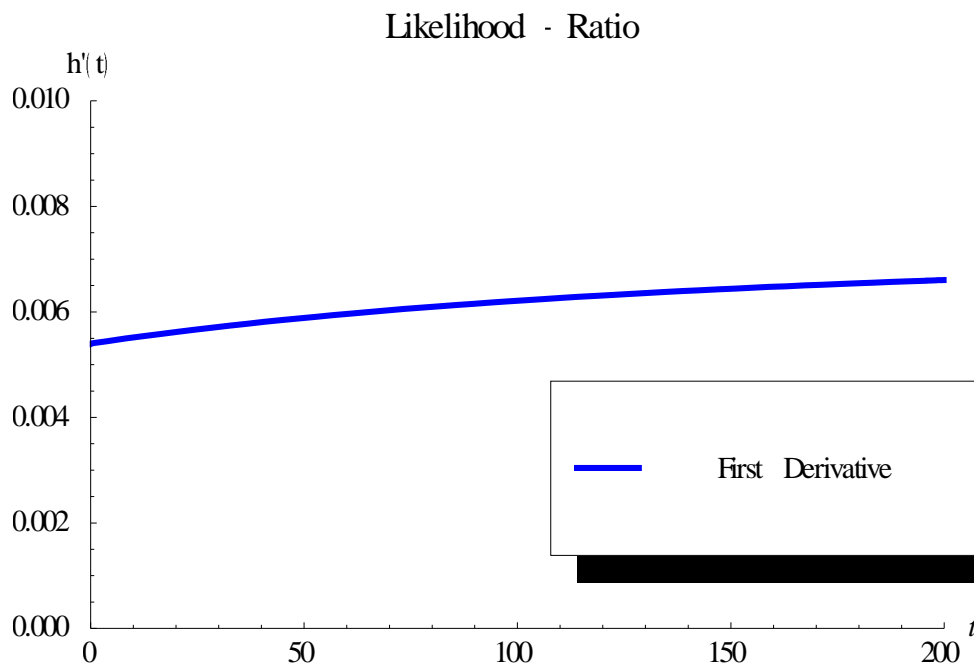


Γραφική Παράσταση 2.6.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(4,200), Y \sim Pa(3,250)$

Για τις παραπάνω τιμές, θα παρουσιασθεί η γραφική παράσταση της $h(t)$, από την οποία επιβεβαιώνεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση καθώς και η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου από την οποία εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι θετική.



Γραφική Παράσταση 2.6.2- Συνάρτηση λόγου ηλικίου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(4,200), Y \sim Pa(3,250)$.



Γραφική Παράσταση 2.6.3 Πρώτη Παράγωγος Συνάρτησης λόγου ηλικίου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(4,200), Y \sim Pa(3,250)$

Εφαρμογή 2.7: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παράμετρος (a,b) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με

παραμέτρους (c,d). Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{b^a t^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{d^c t^{c-1} e^{-dt}}{\Gamma(c)}, \quad t > 0$$

Προκειμένου να ισχύει ότι $X \leq_{LR} Y$ θα πρέπει η κάτωθι συνάρτηση $h(t)$ να είναι γνησίως αύξουσα ως προς t:

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα ως προς } t$$

Με αντικατάσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα προκύπτουν τα εξής:

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = \frac{b^{-a} d^c e^{bt-dt} t^{-a+c} \Gamma(a)}{\Gamma(c)} \quad t > 0$$

Για να είναι η h γνησίως αύξουσα θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της h να είναι θετική

$$h'(t) = \frac{b^{-a} d^c e^{(b-d)t} t^{-1-a+c} ((c-a) + (b-d)t) \Gamma(a)}{\Gamma(c)}$$

Προκειμένου να ισχύει $h'(t) > 0$, θα πρέπει $(c-a) + (b-d)t > 0$

Για να είναι σίγουρα θετική η παραπάνω παράσταση θα πρέπει να αποτελείται από άθροισμα θετικών αριθμών

$$\text{Επομένως } \begin{cases} c - a > 0 \Rightarrow c > a \\ b - d > 0 \Rightarrow b > d \end{cases}$$

Εφαρμογή για $a=10, b=4, c=12, d=2$:

Προφανώς, επειδή $c > a, b > d$, ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{8192e^{-4t}t^9}{2835}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{16e^{-2t}t^{11}}{155925}, \quad t > 0$$

Η συνάρτηση $h(t)$ του ηλικίου λόγου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι:

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = \frac{e^{2t}t^2}{28160}, \quad t > 0$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $h(t)$ είναι:

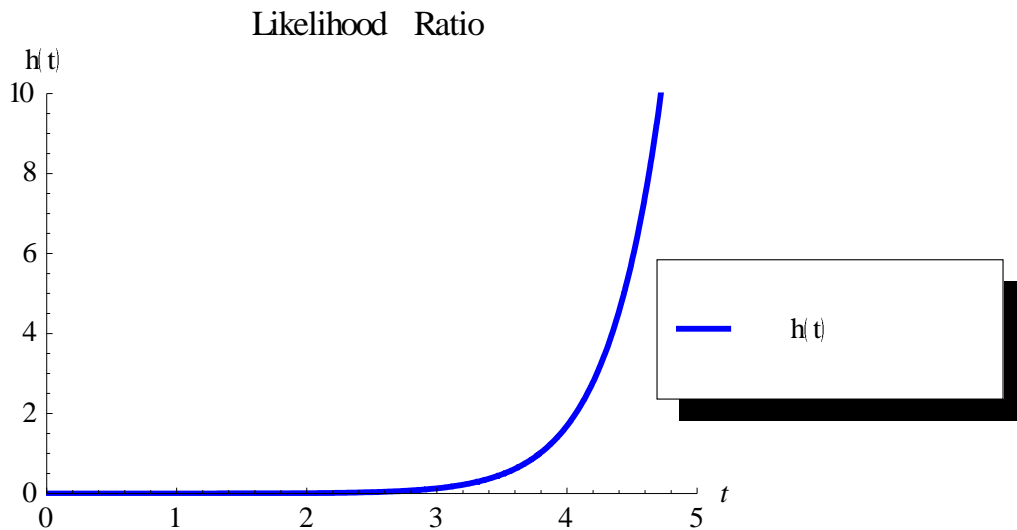
$$h'(t) = \frac{e^{2t}t(1+t)}{14080}, \quad t > 0$$

Η $h(t)$ είναι γνησίως αύξουσα διότι $h'(t) > 0 \forall t > 0$, επομένως $X \leq_{LR} Y$

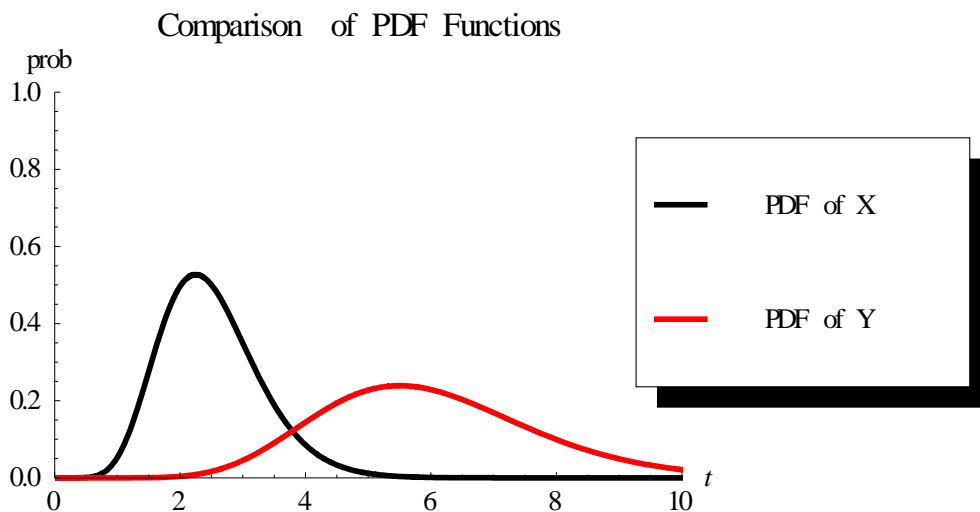
Συμπέρασμα: Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Γάμμα}(10,4)$ υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής $Y \sim \text{Γάμμα}(12,2)$, ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφάνειας, Η παραπάνω διάταξη αποδείχθηκε ότι ισχύει γενικά, στην περίπτωση που ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των a, b, c, d :

$$c > a \ \& \ b > d$$

Γραφικές Παραστάσεις: Για τις παραπάνω τιμές, θα παρουσιασθεί η γραφική παράσταση της $h(t)$, για την οποία επιβεβαιώνεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Επίσης παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y .



Γραφική Παράσταση 2.7.1-Συνάρτηση Πηλίκου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(10,4)$, $Y \sim \Gamma(12,2)$.



Γραφική Παράσταση 2.7.2 Σύγκριση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(10,4)$, $Y \sim \Gamma(12,2)$.

Εφαρμογή 2.8: : Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παράμετρος (μ, σ) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους (m, σ) . Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών. Εφαρμογή για $m=3, \mu=2, \sigma=2$.

Οι δύο τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια διασπορά σ και διαφορετική μέση τιμή.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad t > 0$$

Προκειμένου να ισχύει ότι $X \leq_{LR} Y$ θα πρέπει η κάτωθι συνάρτηση $h(t)$ να είναι γνησίως αύξουσα ως προς t :

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα ως προς } t$$

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} + \frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Για να είναι η h γνησίως αύξουσα θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της h να είναι θετική.

$$h'(t) = \frac{e^{-\frac{(m-\mu)(m-2t+\mu)}{2\sigma^2}} (m-\mu)}{\sigma^2}$$

Προκειμένου να ισχύει $h'(t) > 0$ θα πρέπει $m-\mu > 0 \Rightarrow m > \mu$

Εφαρμογή για $m = 3, \mu = 2, \sigma = 2$:

Προφανώς για $m = 3 > \mu = 2$ ισχύουν οι σχέσεις που αποδείχτηκαν αλγεβρικά παραπάνω.

Με αντικατάσταση των τιμών της εφαρμογής προκύπτουν τα εξής:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{e^{-\frac{1}{8}(-2+t)^2}}{2\sqrt{2\pi}}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{e^{-\frac{1}{8}(-3+t)^2}}{2\sqrt{2\pi}}$$

Η συνάρτηση του λόγου πηλίκου πιθανοφανειών είναι:

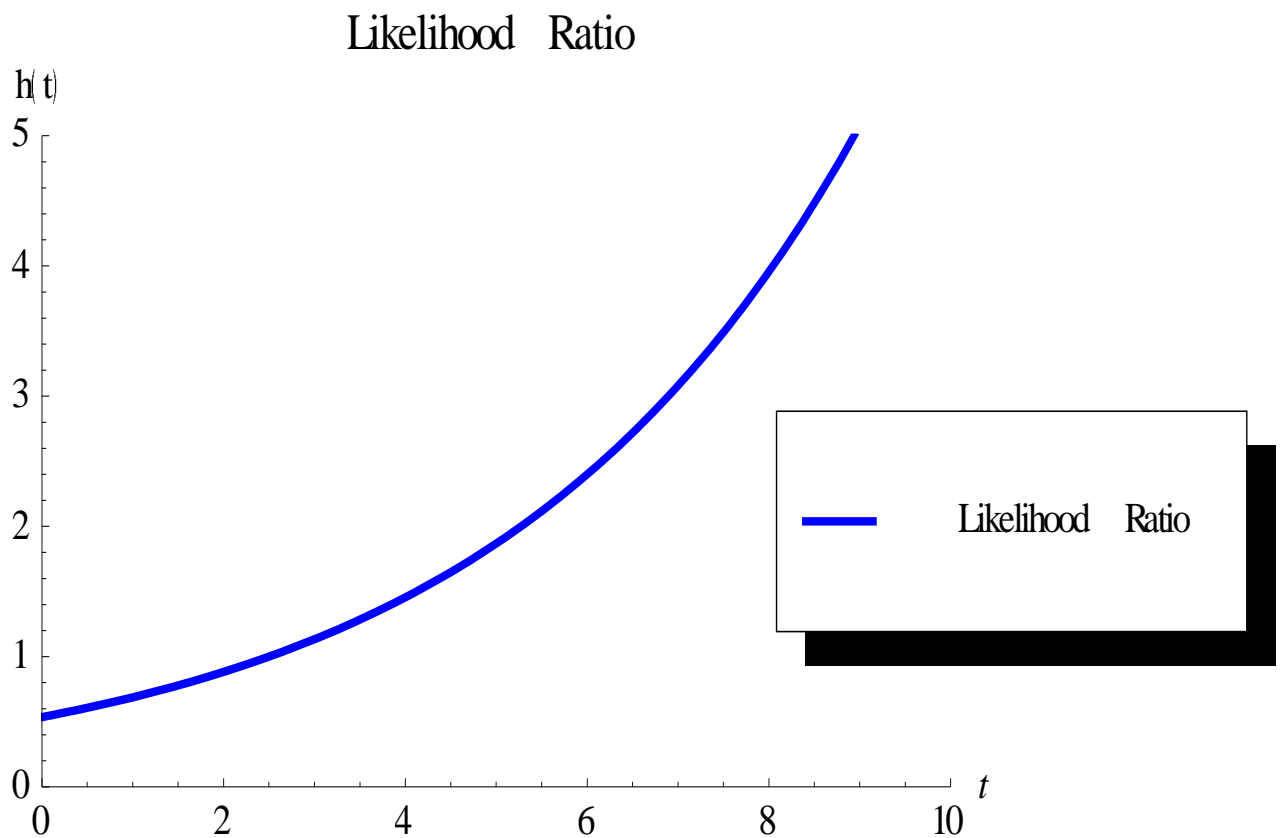
$$h(t) = e^{-\frac{1}{8}(-3+t)^2 + \frac{1}{8}(-2+t)^2}$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $h(t)$ είναι:

$$h'(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{5-t}{4}}, \quad t > 0$$

Η $h(t)$ είναι γνησίως αύξουσα διότι $h'(t) > 0 \forall t > 0$, επομένως $X \leq_{LR} Y$

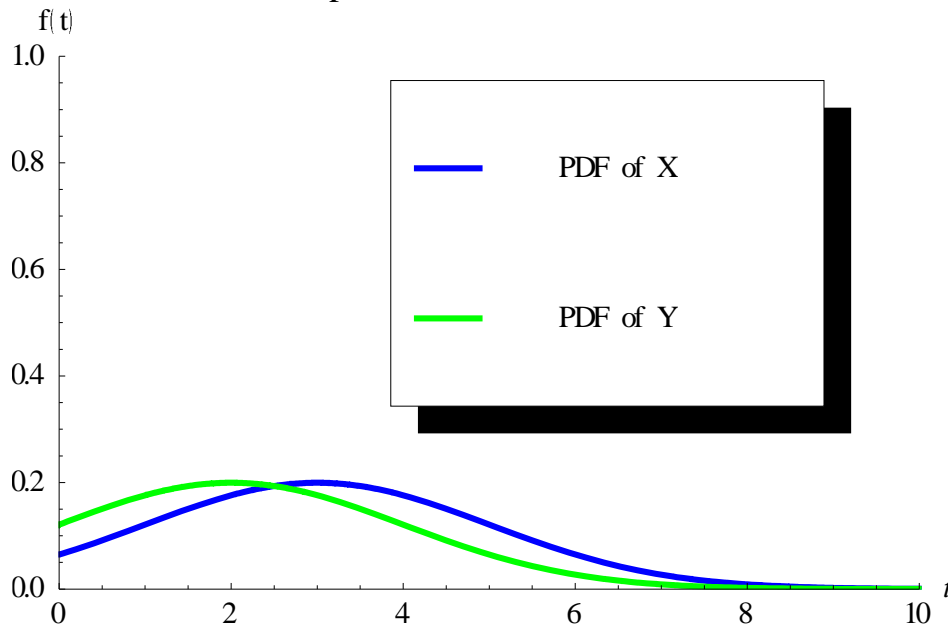
Γραφικές Παραστάσεις: Για τις παραπάνω τιμές, θα παρουσιασθεί η γραφική παράσταση της $h(t)$, από την οποία επιβεβαιώνεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.



Γραφική Παράσταση 2.8.1-Συνάρτηση λόγου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(2,2), Y \sim N(3,2)$

Επίσης παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

Comparison of PDF Functions



Γραφική Παράσταση 2.8.2 Συνάρτηση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim N(2,2)$, $Y \sim N(3,2)$

Εφαρμογή 2.9: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους (θ, γ) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παράμετρος (α, β) . Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών, $\alpha, \beta, \gamma, \theta > 0$.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = e^{-\tau^\gamma t} t^{-1+\gamma} \gamma \theta, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{e^{-\beta t} t^{-1+\alpha} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, \quad t > 0$$

Προκειμένου να ισχύει ότι $X \leq_{LR} Y$ θα πρέπει η κάτωθι συνάρτηση $h(t)$ να είναι γνησίως αύξουσα ως προς t :

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \text{ γνησίως αύξουσα ως προς } t$$

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = \frac{e^{-t\beta+t^\gamma\theta}t^{\alpha-\gamma\beta\alpha}}{\gamma\theta\Gamma(\alpha)}$$

Για να είναι η h γνησίως αύξουσα θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της h να είναι θετική

$$h'(t) = \frac{e^{-t\beta+t^\gamma\theta}t^{-1+\alpha-\gamma\beta\alpha}(\alpha - \gamma + t^\gamma\gamma\theta)}{\gamma\theta\Gamma(\alpha)}$$

Έστω συναρτήσεις $c(t)$, $d(t)$ τέτοιες ώστε $h'(t) = c(t)d(t)$ και

$$c(t) = \frac{e^{-t\beta+t^\gamma\theta}t^{-1+\alpha-\gamma\beta\alpha}}{\gamma\theta\Gamma(\alpha)}, \quad t > 0$$

$$d(t) = \alpha - \gamma + t^\gamma\gamma\theta, \quad t > 0$$

Η $c(t)$ είναι θετική.

Αν $\alpha \geq \gamma$ τότε $d(t) > 0$

Επομένως: $h'(t) = c(t)d(t) > 0 \forall t > 0$ και $X \leq_{LR} Y$ διότι:

1^η περίπτωση : Αν $\alpha > \gamma$ τότε $d(t) > 0$, ως άθροισμα θετικών αριθμών

2^η περίπτωση : Αν $\alpha = \gamma$ τότε $d(t) = t^\gamma\gamma\theta > 0$

Εφαρμογή για $\beta = \theta = 3$, $\alpha = 4$, $\gamma = 3$

Σε αυτή την περίπτωση, η εφαρμογή έχει ως εξής :

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = 9e^{-3t^3}t^2, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{e^{-3t}t^3 3^4}{\Gamma(4)} = \frac{27}{2}e^{-3t}t^3, \quad t > 0$$

Η συνάρτηση ηλικίου πιθανοφανειών ορίζεται ως εξής:

$$h(t) = \frac{f_Y(t)}{f_X(t)} = \frac{3}{2}e^{-3t+3t^3}t, \quad t > 0$$

Για να είναι η h γνησίως αύξουσα θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της h να είναι θετική.

$$h'(t) = \frac{3}{2} e^{3t(-1+t^2)} (1 + (-3t + 9t^3)) > 0$$

Η πρώτη παράγωγος είναι θετική διότι:

Έστω συναρτήσεις $\varphi(t), \psi(t)$ τέτοιες ώστε:

$$\varphi(t) = 1 + (-3t + 9t^3), \quad t > 0$$

$$\psi(t) = \frac{3}{2} e^{3t(-1+t^2)}, \quad t > 0$$

Η $\psi(t)$ είναι θετική, διότι η συνάρτηση $e^{g(t)}$ είναι θετική για κάθε συνάρτηση $g(t)$.

Θα αποδειχτεί ότι:

$$\varphi(t) = 1 + (-3t + 9t^3) > 0 \quad \forall t > 0$$

Η πρώτη παράγωγος της $\varphi(t)$ είναι:

$$\varphi'(t) = 3(-1 + 9t^2), \quad t > 0$$

Λύνουμε την $\varphi'(t) = 0$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

$$t_1 = \frac{1}{3} \text{ δεκτή, } t_2 = -\frac{1}{3} \text{ απορρίπτεται διότι } t > 0$$

- $0 < t < t_1 = \frac{1}{3}$: Η $\varphi(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Επομένως το πεδίο τιμών της $\varphi(t)$ είναι το $[\varphi(\frac{1}{3}), \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)] = [0, 1]$ σε αυτό το διάστημα.

- $t_1 = \frac{1}{3} < t$: Η $\varphi(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα άρα

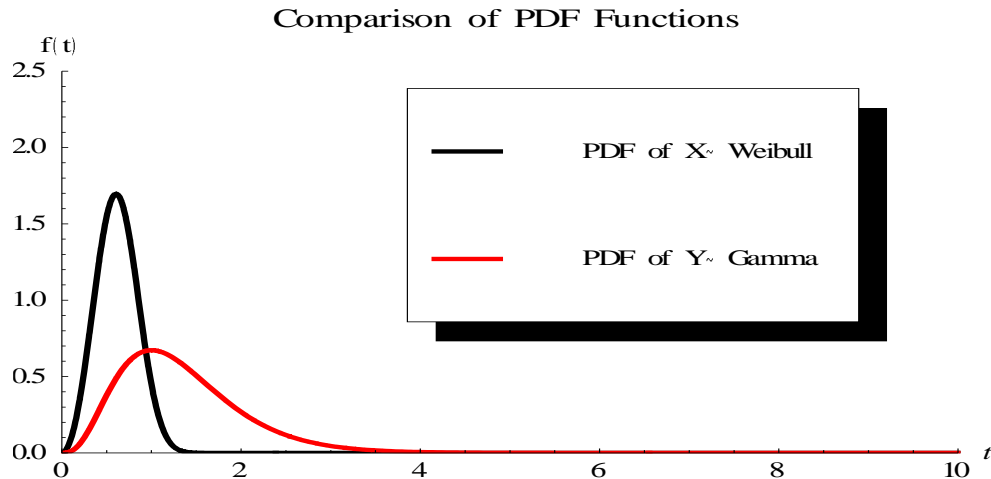
$$\varphi(t) > \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 9\left(\frac{1}{3}\right)^3 > 0 \quad \forall t > \frac{1}{3}$$

Επομένως $\varphi(t) > 0$ και αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άρα η συνάρτηση $h(t)$ είναι γνησίως αύξουσα και $X \leq_{LR} Y$

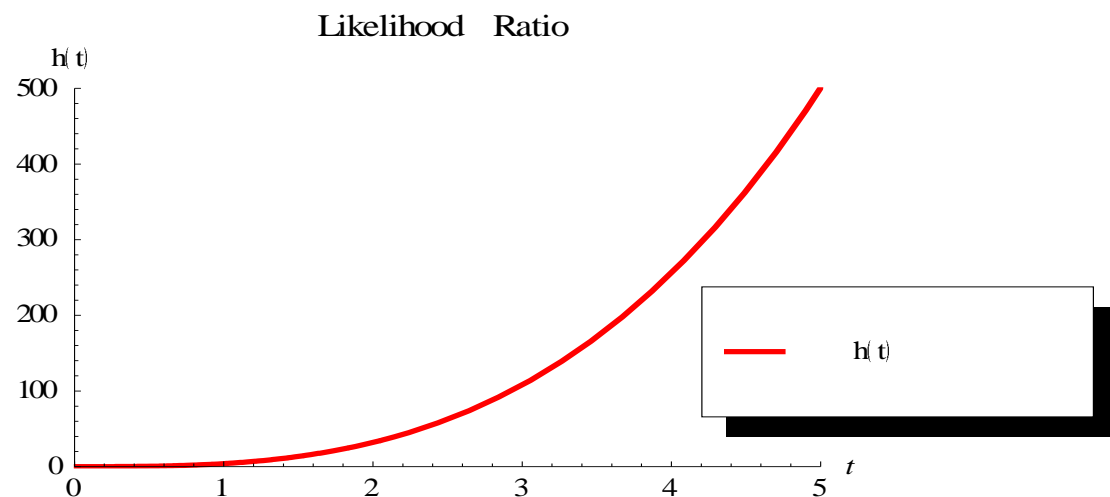
Συμπέρασμα: Η κατανομή Weibull υπολείπεται της κατανομής Γάμμα ως προς την διάταξη λόγου πιθανοφανειών, αν $a \geq \gamma$ και $\beta = \theta$.

Γραφικές Παραστάσεις: Στην Γραφική Παράσταση 2.9.1 απεικονίζονται από κοινού οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y .



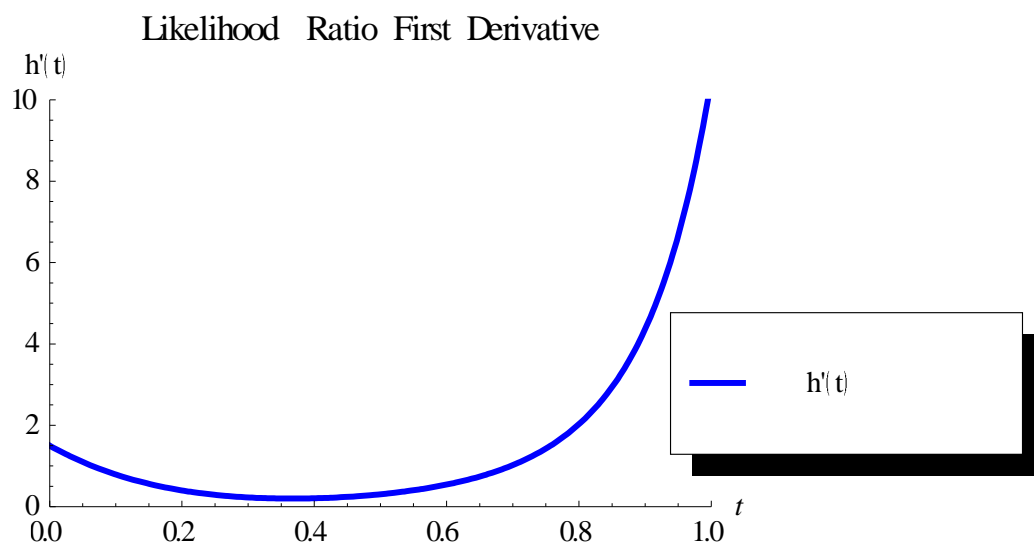
Γραφική Παράσταση 2.9.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \text{Weibull}(3,3), Y \sim \Gamma(4,3)$.

Στην Γραφική Παράσταση 2.9.2 παρατηρείται ότι το ηλικίο πιθανοφανειών της τυχαίας μεταβλητής Y προς την τυχαία μεταβλητή X αυξάνεται με ταυτόχρονη αύξηση του t .



Γραφική Παράσταση 2.9.2 Συνάρτηση λόγου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \text{Weibull}(3,3), Y \sim \Gamma(4,3)$.

Τέλος, στην Γραφική Παράσταση 2.9.3, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης ηλικίου πιθανοφανειών είναι θετική στο διάστημα $[0,1]$. Για διάστημα μεγαλύτερο του 1, η παράγωγος αυξάνεται εκθετικά και γρήγορα, για αυτό τον λόγο περιορίστηκε η γραφική παράσταση στο $[0,1]$.



Γραφική Παράσταση 2.9.3 Πρώτη Παράγωγος συνάρτησης λόγου ηλικίου πιθανοφανειών των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Weibull(3,3)$, $Y \sim \Gamma(4,3)$.

2.5 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας

Οι στοχαστικές διατάξεις ανακοπής ζημίας παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον στην αντασφάλιση. Η σύγκριση των τυχαίων μεταβλητών μέσω των στοχαστικών διατάξεων ανακοπής ζημίας, μπορεί να βοηθήσει την πρωτασφαλίστρια εταιρεία να ορίσει το κατάλληλο ασφάλιστρο Stop Loss, το κατάλληλο όριο ιδίας κράτησης και να εξαλείψει τον κίνδυνο εκπλήρωσης μεγάλων πληρωτέων συνολικών απαιτήσεων που θα εμφανιστούν στο χαρτοφυλάκιο. Με αυτό τον τρόπο, η πρωτασφαλίστρια εταιρεία αναλαμβάνει να πληρώνει ένα προκαθορισμένο ασφάλιστρο και η αντασφαλίστρια εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να αποζημιώσει τις συνολικές απαιτήσεις που υπερβαίνουν το όριο ιδίας κράτησης που έχει συμφωνηθεί (βλ. Ενότητα 1.5). Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιασθούν σημαντικές εφαρμογές στοχαστικών διατάξεων ανακοπής ζημίας.

Εφαρμογή 2.10: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παράμετρος (θ_1, a) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους (θ_2, b) . Να γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας. Εφαρμογή για $\theta_1 = 150, a = 3, \theta_2 = 90, b = 4$

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = \left(\frac{\theta_1}{t + \theta_1}\right)^a, t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{F}_Y(t) = \left(\frac{\theta_2}{t + \theta_2}\right)^b, t > 0$$

Από τον ορισμό 1.6, προκειμένου να ισχύει ότι $X \leq_{sl} Y$ θα πρέπει $\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t)$

Επομένως :

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_X(x) dx = \int_t^{\infty} \left(\frac{\theta_1}{x + \theta_1}\right)^a dx = \frac{\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^{-a} (t + \theta_1)^{1-a}}{a - 1}, \quad a > 1, t > 0.$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} \left(\frac{\theta_2}{x + \theta_2}\right)^b dx = \frac{\left(\frac{1}{\theta_2}\right)^{-b} (t + \theta_2)^{1-b}}{b - 1}, \quad b > 1, t > 0.$$

Έστω $g(t) = \Pi_Y(t) - \Pi_X(t)$

$$g(t) = \frac{\left(\frac{1}{\theta_2}\right)^{-b} (t + \theta_2)^{1-b}}{-1 + b} - \frac{\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^{-a} (t + \theta_1)^{1-a}}{-1 + a}$$

Προκειμένου η $g(t)$ να είναι θετική θα πρέπει η παράγωγος της να είναι θετική για κάθε $t > 0$

$$g'(t) = \frac{(1 - b)\left(\frac{1}{\theta_2}\right)^{-b} (t + \theta_2)^{-b}}{-1 + b} - \frac{(1 - a)\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^{-a} (t + \theta_1)^{-a}}{-1 + a}$$

Η πρώτη παράγωγος απλοποιείται ως εξής:

$$g'(t) = \left(\frac{1}{\theta_1}\right)^{-a}(t + \theta_1)^{-a} - \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^{-b}(t + \theta_2)^{-b}$$

Αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις (ικανή συνθήκη), τότε $\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t)$:

$$\begin{cases} a, b, > 1 \\ a \geq b \\ \frac{\theta_1(\theta_2 - 1)}{\theta_2(\theta_1 - 1)} \leq \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow g'(t) > 0 \Rightarrow \Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t)$$

Εφαρμογή για $\theta_1 = 150, a = 3, \theta_2 = 90, b = 4$:

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = \left(\frac{150}{t + 150}\right)^3, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{F}_Y(t) = \left(\frac{90}{t + 90}\right)^4, \quad t > 0$$

Επομένως :

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^\infty \bar{F}_X(x) dx = \int_t^\infty \left(\frac{\theta_1}{x + \theta_1}\right)^a dx = \frac{1687500}{(150 + t)^2}, \quad a > 1, \quad t > 0$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^\infty \bar{F}_Y(x) dx = \int_t^\infty \left(\frac{\theta_2}{x + \theta_2}\right)^b dx = \frac{21870000}{(90 + t)^3}, \quad b > 1, \quad t > 0$$

Θα αποδειχθεί ότι: $\Pi_X(t) \geq \Pi_Y(t)$

Έστω συνάρτηση $h(t)$ τέτοια ώστε:

$$h(t) = \Pi_X(t) - \Pi_Y(t) = \frac{1687500}{(150 + t)^2} - \frac{21870000}{(90 + t)^3}, \quad t > 0$$

$$h'(t) = 135000 \left(\frac{486}{(90 + t)^4} - \frac{25}{(150 + t)^3} \right), \quad t > 0$$

$$h'(t) = 135000 \left(\frac{486(150 + t)^3 - 25(90 + t)^4}{(90 + t)^4(150 + t)^3} \right) < 0, \quad t > 0$$

Άρα η $h(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής για κάθε $t > 0$.

Επομένως το πεδίο τιμών της $h(t)$ είναι το $[\lim_{t \rightarrow \infty} h(t), \lim_{t \rightarrow 0} h(t)] = [0, 45]$, διότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 45$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι:

$$h(t) \geq 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

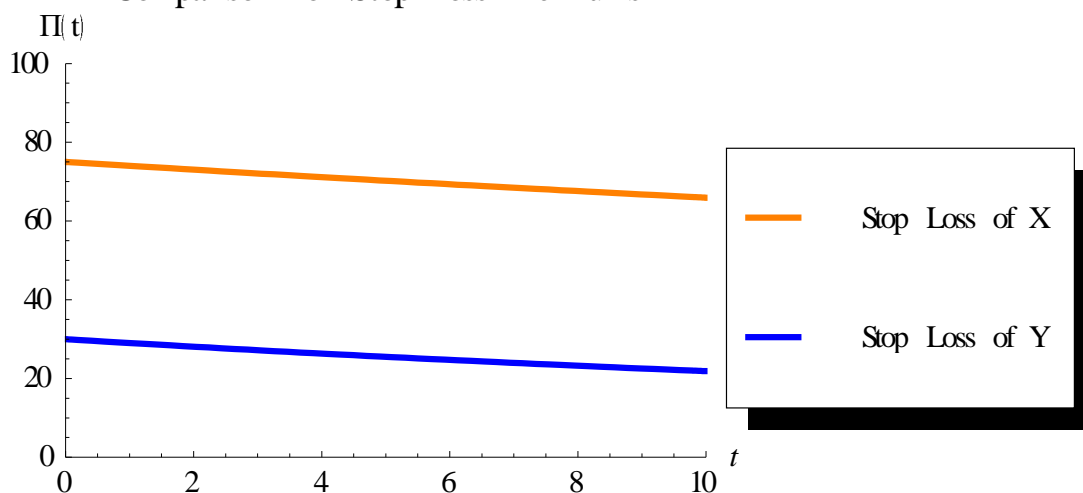
$$\Pi_X(t) - \Pi_Y(t) \geq 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Pi_X(t) \geq \Pi_Y(t) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$X \geq_{sl} Y$$

Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την ενδεικτική γραφική παράσταση των ασφαλιστρών Stop Loss στο διάστημα $(0, 10]$. Η γραφική παράσταση της X είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της Y , επομένως το ασφαλιστρο Stop Loss της X έχει αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή από το αντίστοιχο ασφαλιστρο Stop Loss της Y .

Comparison of Stop Loss Premiums



Γραφική Παράσταση 2.10.1- Σύγκριση Ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(150, 3), Y \sim Pa(90, 4)$.

Εφαρμογή 2.11: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (a, b) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (c, d) . Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{b^a t^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)}, \quad t > 0$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_X(t) &= E[(X - t)_+] = \int_t^\infty (x - t) f_X(x) dx \\ &= \int_t^\infty (x - t) \frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} dx \\ &= \frac{a - bt + \frac{b^a t^a (bt)^{-a} ((-a + bt)\Gamma[a] - bt\Gamma[a, bt] + \Gamma[1 + a, bt])}{\Gamma[a]}}{b} \end{aligned}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{d^c t^{c-1} e^{-dt}}{\Gamma(c)}, \quad t > 0$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_Y(t) &= E[(Y - t)_+] = \int_t^\infty (x - t) f_Y(x) dx \\ &= \int_t^\infty (x - t) \frac{d^c x^{c-1} e^{-dx}}{\Gamma(c)} dx \\ &= \frac{c - dt + \frac{d^c t^c (dt)^{-c} ((-c + dt)\Gamma[c] - dt\Gamma[c, dt] + \Gamma[1 + c, dt])}{\Gamma[c]}}{d} \end{aligned}$$

Εφαρμογή για $a = 6, b = 3, c = 8, d = 2$

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = \frac{243}{40} e^{-3t} t^5, \quad t > 0$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X, μετά από πράξεις στο Mathematica είναι:

$$\Pi_X(t) = \frac{1}{40} e^{-3t} (80 + 200t + 240t^2 + 180t^3 + 90t^4 + 27t^5)$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{16}{315} e^{-2t} t^7, \quad t > 0$$

Αντίστοιχα το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y με την βοήθεια του Mathematica είναι:

$$\Pi_Y(t) = \frac{1}{315} e^{-2t} (1260 + t(2205 + 2t(945 + t(525 + t(210 + t(63 + 2t(7 + t)))))))$$

Θα γίνει σύγκριση των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X,Y, που βρέθηκαν παραπάνω.

Στον παρακάτω πίνακα για τις διάφορες τιμές του t, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X,Y. Συγκρίνοντας τα ασφάλιστρα Stop Loss για κάθε τιμή του t, προκύπτει ότι το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X, υπολείπεται του ασφαλιστρου Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y.

Τιμή	Ασφάλιστρο τ.μ X	Ασφάλιστρο τ.μ Y
0,5	1.50037	3.5
1,2	0.84051	2.80055
2	0.321	2.016
10	$\frac{95152}{e^{30}}$	$\frac{17212462}{63e^{20}}$
100	$\frac{6979560502}{e^{300}}$	$\frac{85860613824352}{63e^{200}}$
1000	$\frac{677254506005002}{e^{3000}}$	$\frac{805625284210378441252}{63e^{2000}}$

Πίνακας 2- Πίνακας Ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(6,3), Y \sim \Gamma(8,2)$.

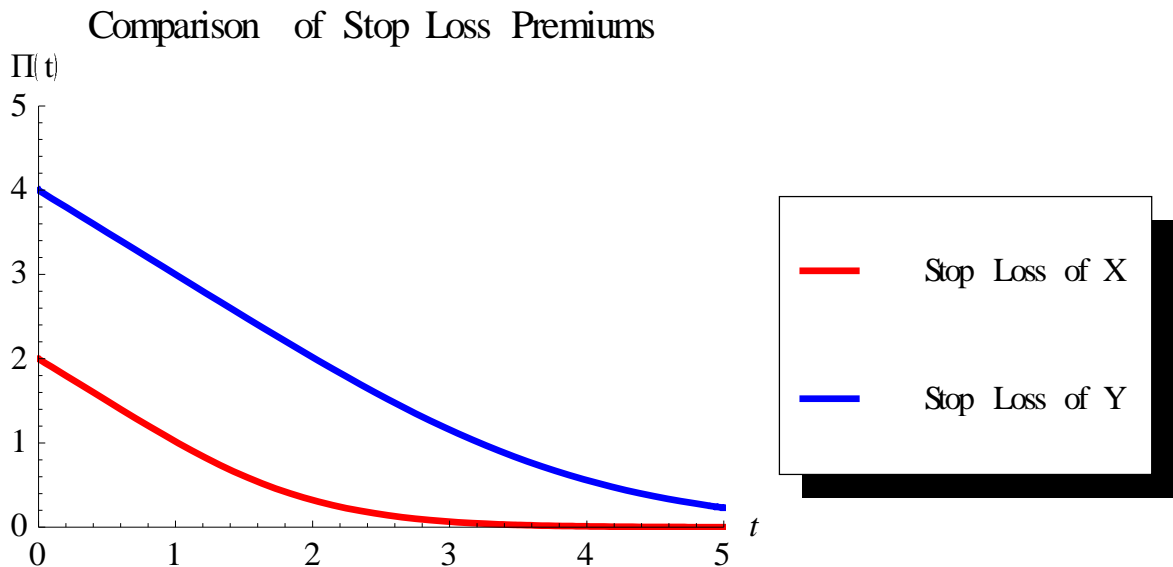
Η διάταξη των ασφαλιστρών Stop Loss, μετά τους ελέγχους στο Mathematica είναι:

$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \forall t > 0$$

Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή X υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.

$$X \leq_{sl} Y$$

Γραφική Παράσταση: Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την ενδεικτική γραφική παράσταση των ασφαλιστρών Stop Loss στο διάστημα $(0,5]$. Η γραφική παράσταση της Y είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της X , επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της Y έχει αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή από το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της X .



Γραφική Παράσταση 2.11.1 Σύγκριση Ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(6,3)$, $Y \sim \Gamma(8,2)$.

Εφαρμογή 2.12 : Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας, αν γνωρίζουμε ότι $\lambda \leq \mu$.

Εφαρμογή για $\lambda = 3$, $\mu = 4$.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{F}_Y(t) = e^{-\mu t}, t \geq 0, \mu > 0$$

Από τον ορισμό 1.6, προκειμένου να ισχύει ότι $X \leq_{sl} Y$ θα πρέπει $\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t)$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^\infty \bar{F}_X(x) dx = \int_t^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-t\lambda}}{\lambda}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^\infty \bar{F}_Y(x) dx = \int_t^\infty e^{-\mu x} dx = \frac{e^{-t\mu}}{\mu}$$

Θα γίνει σύγκριση των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \leq \mu \Leftrightarrow -\lambda \geq -\mu \xrightarrow{\text{η συνάρτηση } e^x \text{ είναι γν. αύξουσα}} e^{-t\lambda} \geq e^{-t\mu} \\ \lambda \leq \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\mu} \\ \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} \frac{e^{-t\lambda}}{\lambda} \geq \frac{e^{-t\mu}}{\mu} \end{array} \right.$$

Επομένως για την διάταξη των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

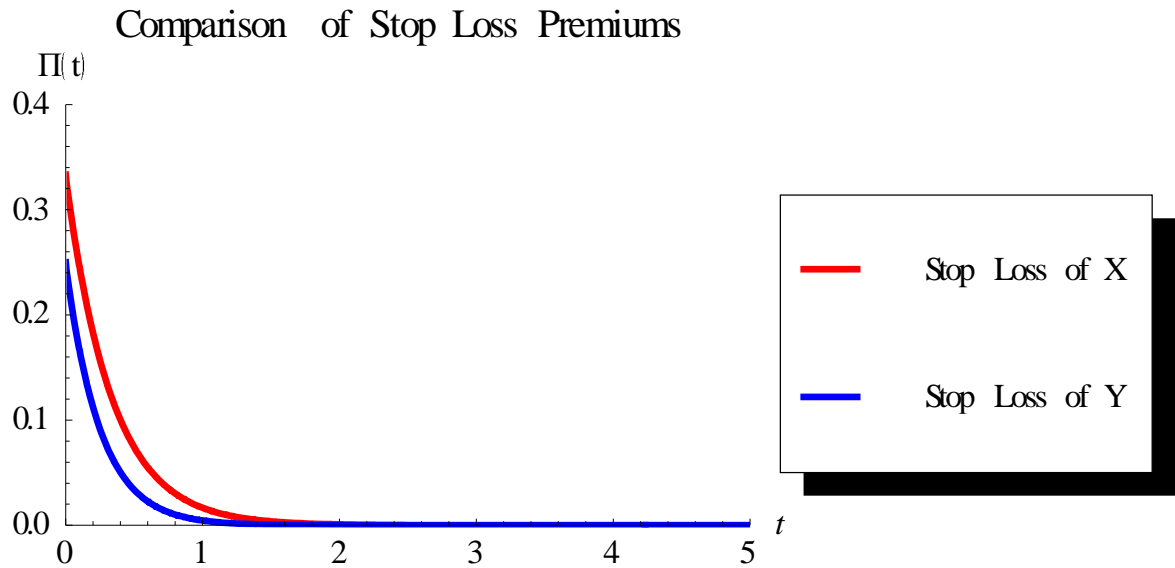
$$\Pi_X(t) \geq \Pi_Y(t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty) \Leftrightarrow X \geq_{sl} Y$$

Συμπέρασμα: Δοθέντων δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους λ και μ αντίστοιχα, και $\lambda \leq \mu$, η τυχαία μεταβλητή με την μεγαλύτερη παράμετρο, δηλαδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα η τυχαία μεταβλητή Y, υπολείπεται ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας της τυχαίας μεταβλητής με την μικρότερη παράμετρο.

Εφαρμογή για $\lambda = 3, \mu = 4$

Για τις παραπάνω τιμές ισχύουν οι σχέσεις που αποδείχθηκαν παραπάνω. Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την ενδεικτική γραφική παράσταση των ασφαλιστρών Stop Loss στο διάστημα (0,5]. Η γραφική παράσταση της X είναι πιο πάνω από την

γραφική παράσταση της Y , επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της X έχει αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή από το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της Y .



Γραφική Παράσταση 2.12.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \text{Exp}(3), Y \sim \text{Exp}(4)$

Εφαρμογή 2.13 : Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(x) = \theta \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} + (1 - \theta) \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}$$

Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας, αν γνωρίζουμε ότι:

$$\lambda = \theta\mu + (1 - \theta)m, \quad \lambda, \mu, m \geq 1.$$

$$m \leq \lambda \leq \mu$$

Εφαρμογή για:

$$\lambda = 15, \quad \mu = 20, \quad m = 10, \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad p = 0.4, \quad q = 0.6$$

Οι τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνονται στην παρούσα εφαρμογή έχουν ίδια μέση τιμή.

$$E(X) = \lambda = E(Y) = \theta\mu + (1 - \theta)m = 15$$

Για την τυχαία μεταβλητή X:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} (x - t)f_X(x)dx = \int_t^{\infty} (x - t)\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}dx = \lambda e^{-\frac{1}{\lambda}t}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} (x - t)\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι:

$$\Pi_X(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \lambda$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_Y(x) = \theta \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} + (1 - \theta) \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} (x - t)f_Y(x)dx$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} (x - t)\theta \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} + (1 - \theta) \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}dx$$

Με την βοήθεια του Mathematica, προκύπτει το ασφάλιστρο Stop Loss:

$$\Pi_Y(t) = -e^{-\frac{t}{m}}m(-1 + \theta) + e^{-\frac{t}{\mu}}\theta\mu$$

Έστω συνάρτηση $h(t)$, τέτοια ώστε:

$$h(t) = \Pi_Y(t) - \Pi_X(t), \quad t \geq 0$$

Με αντικατάσταση των ασφαλιστρών ανακοπής ζημίας που έχουν υπολογισθεί παραπάνω, προκύπτει:

$$h(t) = -e^{-\frac{t}{m}m}(-1 + \theta) + e^{-\frac{t}{\mu}\theta\mu} - e^{-\frac{t}{\lambda}\lambda}, \quad t \geq 0$$

Για $t = 0$: $h(0) = m(-1 + \theta) + \theta\mu - \lambda$ (2.14.1).

Όμως από υπόθεση ισχύει ότι:

$$\lambda = \theta\mu + (1 - \theta)m \quad (2.14.2).$$

Η σχέση (2.14.1) γίνεται λόγω της (2.14.2):

$$h(0) = -m(-1 + \theta) + \theta\mu - \theta\mu - (1 - \theta)m \quad (2.14.3).$$

Όμως παρατηρείται ότι:

$$-m(-1 + \theta) = m(1 - \theta) \quad (2.14.4).$$

Η σχέση (2.14.3) γίνεται λόγω της (2.14.4):

$$h(0) = m(1 - \theta) + \theta\mu - \theta\mu - m(1 - \theta) = 0 \quad (2.14.5).$$

Για $t > 0$: Με την βοήθεια του Mathematica, προκύπτει ότι:

$$h(t) \geq 0 \forall t > 0 \quad (2.14.6).$$

Από τις σχέσεις (2.14.5) και (2.14.6) προκύπτει:

$$h(t) \geq 0 \forall t \geq 0$$

Η $h(t)$ έχει ορισθεί ως η διαφορά ασφαλιστρών ανακοπής ζημίας των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα.

$$h(t) = \Pi_Y(t) - \Pi_X(t) \geq 0, \quad t \geq 0$$

Τελικά προκύπτει ότι:

$$\Pi_Y(t) \geq \Pi_X(t) \forall t \geq 0$$

Επομένως για την στοχαστική διάταξη ανακοπής ασφαλιστρου των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

$$X \leq_{SL} Y$$

Εφαρμογή για:

$$\lambda = 15, \mu = 20, m = 10, \theta = \frac{1}{2}$$

Για την τυχαία μεταβλητή X :

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = 15e^{-t/15}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = 5e^{-t/10}(1 + 2e^{t/20})$$

Έχει αποδειχθεί παραπάνω η ανισοτική σχέση μεταξύ των ασφαλιστρών ανακοπής ζημίας των τυχαίων μεταβλητών X, Y , δοθείσης ισότητας μέσω των τιμών. Αποδεικνύεται και με την βοήθεια του Mathematica, η παρακάτω ανισοτική σχέση για τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

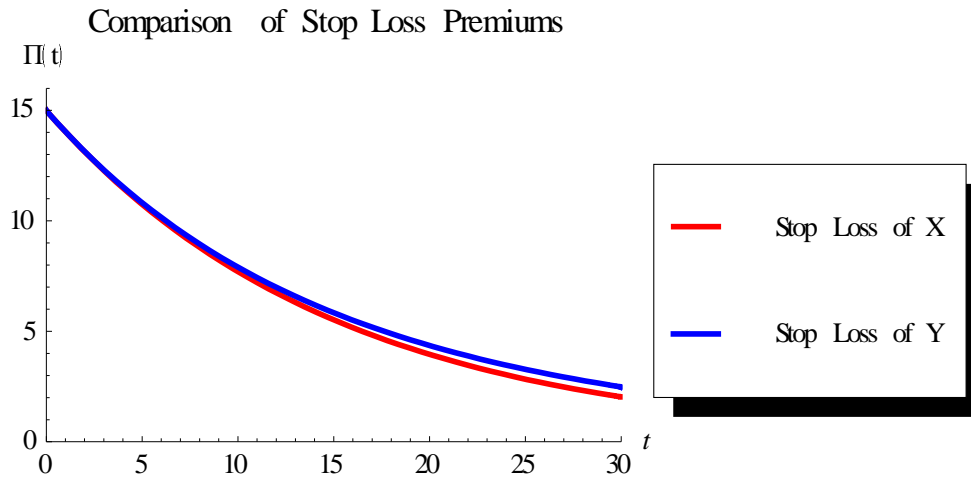
$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty)$$

Επομένως για την στοχαστική διάταξη ανακοπής ασφαλιστρου των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

$$X \leq_{SL} Y$$

Συμπέρασμα: Η εκθετική κατανομή υπολείπεται της μείζης εκθετικών κατανομών ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας, δοθείσης ισότητας των αντίστοιχων μέσω των τιμών τους.

Γραφική παράσταση ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y : Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την ενδεικτική γραφική παράσταση των ασφαλιστρών Stop Loss στο διάστημα $[0, 30]$. Η γραφική παράσταση της Y είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της X , επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της Y έχει αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή από το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της X .



Γραφική Παράσταση 2.13.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \text{Exp}(15)$, $Y \sim \text{Mixed Exponential} (\theta = \frac{1}{2}, \mu = 20, m = 10)$.

2.6 Εφαρμογές Διατάξεων Βαθμίδας Κινδύνου

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιασθούν εφαρμογές διατάξεων βαθμίδας κινδύνου. Η σύγκριση της διάταξης βαθμίδας κινδύνου, μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y , εξασφαλίζει την εξαγωγή συμπερασμάτων για την διάταξη υπολειπόμενου χρόνου ζωής και για την συνήθη στοχαστική διάταξη, όπως διατυπώθηκε στα Θεωρήματα 1.26 και 1.27 αντίστοιχα της Ενότητας 1.9.3. Η σύγκριση των τυχαίων μεταβλητών X, Y ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, μπορεί να γίνει με την σύγκριση των συναρτήσεων βαθμίδας κινδύνου των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα. Η αλγεβρική σχέση που θα προκύψει από την σύγκριση των συναρτήσεων διάταξης βαθμίδας κινδύνου είναι αντιστρόφως ανάλογη της διάταξης βαθμίδας κινδύνου (βλ. Ορισμό 1.14). Για την σύγκριση των τυχαίων μεταβλητών ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι ισοδύναμοι Ορισμοί 1.12 και 1.13, χωρίς να προϋποθέτουν τον ορισμό των αντίστοιχων συναρτήσεων βαθμίδας κινδύνου. Στην παρούσα ενότητα, για τις ανάγκες των εφαρμογών, έχει χρησιμοποιηθεί ο Ορισμός 1.14.

Εφαρμογή 2.14: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Burr με παραμέτρους (c, k) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Burr με παραμέτρους (c, l) . Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την διάταξη θνησιμότητας, αν είναι γνωστό ότι $k \leq l$. Εφαρμογή για $c = 3, k = 4, l = 5$

Για την τυχαία μεταβλητή X:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(t) = ck \frac{t^{c-1}}{(1+t^c)^{k+1}}, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad k > 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_X(t) = 1 - (1+t^c)^{-k}, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad k > 0$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = (1+t^c)^{-k}, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad k > 0$$

Για την συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής X διαδοχικά προκύπτουν τα εξής:

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = \frac{ck \frac{t^{c-1}}{(1+t^c)^{k+1}}}{(1+t^c)^{-k}} \Leftrightarrow$$

$$r_X(t) = \frac{ckt^{c-1}}{(1+t^c)^{k+1-k}} \Leftrightarrow$$

$$r_X(t) = \frac{ckt^{c-1}}{1+t^c}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$f_Y(t) = cl \frac{t^{c-1}}{(1+t^c)^{l+1}}, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad l > 0$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$F_Y(t) = 1 - (1+t^c)^{-l}, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad l > 0$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{F}_Y(t) = (1+t^c)^{-l}, \quad t > 0, \quad c > 0, \quad l > 0$$

Για την συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής Y διαδοχικά προκύπτουν τα εξής:

$$r_Y(t) = \frac{f_Y(t)}{\bar{F}_Y(t)} = \frac{cl \frac{t^{c-1}}{(1+t^c)^{l+1}}}{(1+t^c)^{-l}} \Leftrightarrow$$

$$r_Y(t) = \frac{clt^{c-1}}{(1+t^c)^{l+1-l}} \Leftrightarrow$$

$$r_Y(t) = \frac{clt^{c-1}}{1+t^c}$$

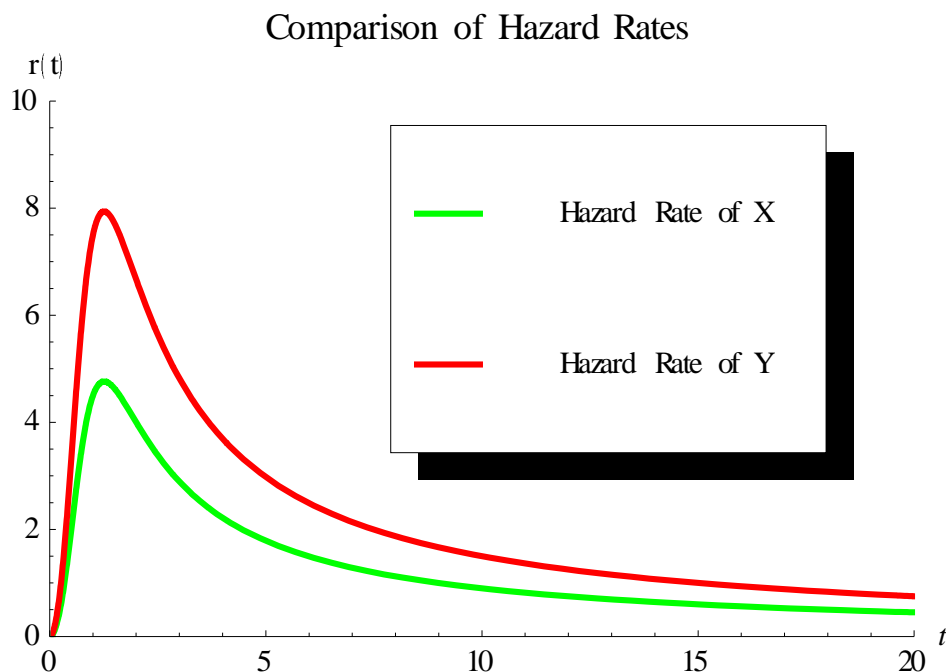
Από υπόθεση $k \leq l$, επομένως για την διάταξη των συναρτήσεων βαθμίδας κινδύνου ισχύει ότι :

$$r_X(t) \leq r_Y(t) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$X \geq_{hr} Y$$

Εφαρμογή για $c = 3, k = 4, l = 5$:

Προφανώς για $k = 4 \leq l = 5$ ισχύουν οι σχέσεις που αποδείχθηκαν παραπάνω. Θα παρουσιασθεί η γραφική παράσταση των τυχαίων μεταβλητών X, Y για τις παραπάνω τιμές.



Γραφική Παράσταση 2.14.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Hazard Rate των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Burr(3,4), Y \sim Burr(3,5)$

Γραφική Παράσταση – Συμπέρασμα:

Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της X είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση της Y . Το παραπάνω είναι λογικό επακόλουθο της αλγεβρικής απόδειξης, διότι $r_X(t) \leq r_Y(t) \forall t > 0$. Το συμπέρασμα που προκύπτει και από την γραφική παράσταση είναι ότι η τυχαία μεταβλητή Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής X , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου.

Εφαρμογή 2.15: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_X(t) = (a + bt)e^{\left(-at - \frac{bt^2}{2}\right)}, t \geq 0, \quad a \geq 0, \quad b > 0,$$

και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή με με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_Y(t) = (c + dt)e^{\left(-ct - \frac{dt^2}{2}\right)}, t \geq 0, \quad c \geq 0, \quad d > 0$$

Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, αν είναι γνωστό ότι $a \leq c$ και $b \leq d$. Εφαρμογή για $a = 3, c = 4, b = 2, d = 3$.

Για την τυχαία μεταβλητή X :

Για την συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής X , διαδοχικά προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned} r_X(t) &= \frac{f_X(t)}{F_X(t)} \Leftrightarrow \\ r_X(t) &= \frac{(a + bt)e^{\left(-at - \frac{bt^2}{2}\right)}}{e^{\left(-at - \frac{bt^2}{2}\right)}} \Leftrightarrow \\ r_X(t) &= a + bt \end{aligned}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

Ομοίως για την συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής Y , διαδοχικά προκύπτουν τα εξής:

$$r_Y(t) = \frac{f_Y(t)}{F_Y(t)} \Leftrightarrow$$

$$r_Y(t) = \frac{(c + dt)e^{(-ct - \frac{dt^2}{2})}}{e^{(-ct - \frac{dt^2}{2})}} \Leftrightarrow$$

$$r_Y(t) = c + dt$$

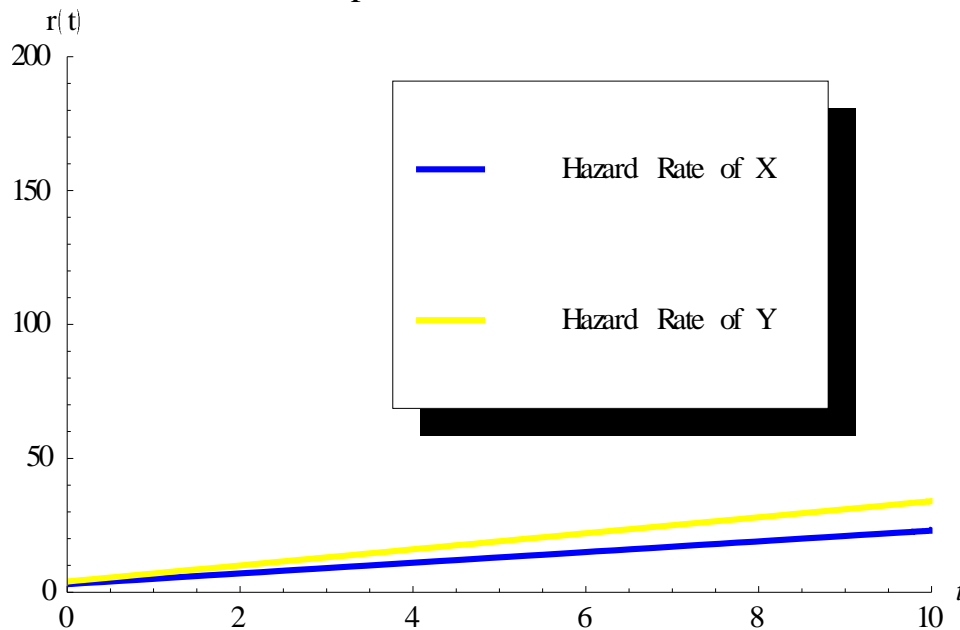
$$r_X(t) \leq r_Y(t) \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$X \geq_{hr} Y$$

Εφαρμογή για $a = 3, c = 4, b = 2, d = 3$:

Προφανώς για $a = 3 < c = 4$ και $b = 2 < d = 3$ ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις που αποδείχτηκαν παραπάνω. Θα παρουσιασθεί η γραφική παράσταση των τυχαίων μεταβλητών X, Y για τις παραπάνω τιμές.

Comparison of Hazard Rates



Γραφική Παράσταση 2.15.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Hazard Rate των τυχαίων μεταβλητών X, Y

Γραφική Παράσταση – Συμπέρασμα:

Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της X είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση της Y . Το παραπάνω είναι λογικό επακόλουθο της αλγεβρικής απόδειξης, διότι $r_X(t) \leq r_Y(t) \forall t > 0$. Το συμπέρασμα που προκύπτει και από την γραφική

παράσταση είναι ότι η τυχαία μεταβλητή Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής X , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου.

Εφαρμογή 2.16: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_X(t) = e^{-x^c} c x^{c-1}, \quad x \geq 0, \quad c > 0$$

και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί κατανομή Weibull με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_Y(t) = e^{-x^d} d x^{d-1}, \quad x \geq 0, \quad d > 0$$

Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου, αν είναι γνωστό ότι $c \leq d$. Εφαρμογή για $c = 4, d = 5$.

Για την τυχαία μεταβλητή X :

Η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$r_X(t) = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)}$$

Όπου $f_X(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και $\bar{F}_X(t)$ η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X . Οι παραπάνω συναρτήσεις βάσει των δεδομένων της εφαρμογής είναι:

$$f_X(t) = e^{-t^c} c t^{c-1}, \quad t \geq 0, \quad c > 0$$

$$\bar{F}_X(t) = e^{-t^c}, \quad t \geq 0, \quad c > 0$$

Συνεπώς η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$r_X(t) = \frac{e^{-t^c} c t^{c-1}}{e^{-t^c}} \Leftrightarrow$$

$$r_X(t) = c t^{c-1}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

Η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$r_Y(t) = \frac{f_Y(t)}{\bar{F}_Y(t)}$$

Όπου $f_Y(t)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y και $\bar{F}_Y(t)$ η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής Y . Οι παραπάνω συναρτήσεις βάσει των δεδομένων της εφαρμογής είναι:

$$f_X(t) = e^{-t^d} dt^{d-1}, \quad t \geq 0, \quad d > 0$$

$$\bar{F}_X(t) = e^{-t^d}, \quad t \geq 0, \quad d > 0$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση βαθμίδας κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής Y είναι

$$r_Y(t) = \frac{e^{-t^d} dt^{d-1}}{e^{-t^d}} \Leftrightarrow$$

$$r_Y(t) = dt^{d-1}$$

Συγκρίνοντας την διάταξη των συναρτήσεων βαθμίδας κινδύνου των τυχαίων μεταβλητών X, Y , προκύπτει το συμπέρασμα για την διάταξη βαθμίδας κινδύνου.

$$r_X(t) \leq r_Y(t) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$X \geq_{hr} Y$$

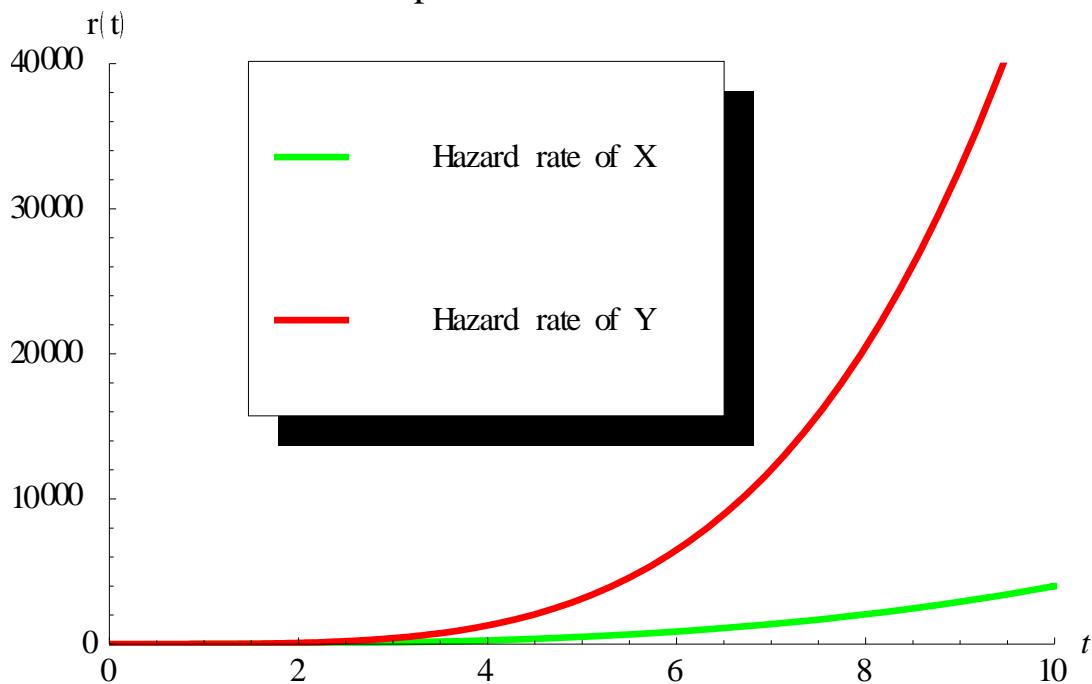
Εφαρμογή για $c = 4, d = 5$.

Προφανώς για $c = 4, d = 5$ ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις που αποδείχτηκαν παραπάνω. Θα παρουσιασθεί η γραφική παράσταση των τυχαίων μεταβλητών X, Y για τις παραπάνω τιμές.

Γραφική Παράσταση – Συμπέρασμα:

Παρατηρείται ότι η γραφική παράσταση της X είναι πιο κάτω από την γραφική παράσταση της Y . Το παραπάνω είναι λογικό επακόλουθο της αλγεβρικής απόδειξης, διότι $r_X(t) \leq r_Y(t) \quad \forall t > 0$. Το συμπέρασμα που προκύπτει και από την γραφική παράσταση είναι ότι η τυχαία μεταβλητή Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής X , ως προς την διάταξη βαθμίδας κινδύνου.

Comparison of Hazard Rates



Γραφική Παράσταση 2.16.1- Σύγκριση συναρτήσεων Hazard Rate, των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Weibull(c = 4), Y \sim Weibull(d = 5)$.

2.7 Εφαρμογές Διατάξεων Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιασθούν εφαρμογές διατάξεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Όπως διατυπώθηκε και στην Ενότητα 1.8, οι διατάξεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, εφαρμόζονται κυρίως σε ασφαλίσσεις προσώπων αλλά μπορούν να εφαρμοσθούν και στις γενικές ασφαλίσσεις. Προκειμένου να γίνει σύγκριση των τυχαίων μεταβλητών ως προς την παραπάνω διάταξη, θα πρέπει να συγκριθούν οι αντίστοιχοι αναμενόμενοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής (βλ Ορισμό 1.17). Η διάταξη που προκύπτει από την αλγεβρική σύγκριση των αναμενόμενων υπολειπόμενων χρόνων ζωής είναι ανάλογη της στοχαστικής διάταξης μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Εφαρμογή 2.17: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(t) = \theta \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} + (1 - \theta) \frac{1}{m} e^{-\frac{t}{m}}$$

Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών ως προς την διάταξη υπολειπόμενου χρόνου ζωής, αν είναι γνωστό ότι $\lambda = \theta\mu + (1 - \theta)m$, $\lambda, \mu, m \geq 1$. Εφαρμογή για

$$\lambda = 15, \mu = 20, m = 10, \theta = \frac{1}{2}.$$

Οι τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνονται στην παρούσα εφαρμογή έχουν ίδια μέση τιμή.

$$E(X) = \lambda = E(Y) = \theta\mu + (1 - \theta)m = 15$$

Για την τυχαία μεταβλητή X :

$$e_X = E(T_X) = \frac{\int_t^\infty [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = \frac{\int_t^\infty e^{-\frac{1}{\lambda}y} dy}{e^{-\frac{1}{\lambda}t}} = \lambda$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

$$e_Y = E(T_Y) = \frac{\int_t^\infty [1 - F_Y(y)] dy}{1 - F_Y(t)} = \frac{-e^{-\frac{t}{m}m}(-1 + \theta) + e^{-\frac{t}{\mu}\theta}\mu}{-e^{-\frac{t}{m}m}(-1 + \theta) + e^{-\frac{t}{\mu}\theta}}$$

Με την βοήθεια του Mathematica, η ποσότητα απλοποιείται ως εξής:

$$e_Y = \mu - \frac{e^{t/\mu}(-1 + \theta)(-m + \mu)}{e^{t/\mu}(-1 + \theta) - e^{\frac{t}{m}\theta}}$$

Έστω συνάρτηση $h(t)$ τέτοια ώστε:

$$h(t) = \frac{e^{t/\mu}(-1 + \theta)(-m + \mu)}{e^{t/\mu}(-1 + \theta) - e^{\frac{t}{m}\theta}}, \quad t \geq 0$$

Με την βοήθεια του Mathematica, η πρώτη παράγωγος της $h(t)$ είναι:

$$h'(t) = -\frac{e^{t/\mu}(1 - \theta)\left(-\frac{e^{\frac{t}{m}\theta}}{m} + \frac{e^{t/\mu}(1 - \theta)}{\mu}\right)(-m + \mu)}{\left(e^{t/\mu}(1 - \theta) - e^{\frac{t}{m}\theta}\right)^2} + \frac{e^{t/\mu}(1 - \theta)(-m + \mu)}{\left(e^{t/\mu}(1 - \theta) - e^{\frac{t}{m}\theta}\right)\mu}$$

Με αντικατάσταση των τιμών και απλοποίηση των παραστάσεων στο Mathematica προκύπτουν τα κάτωθι:

$$h(t) = \frac{10}{1 + e^{t/20}}$$

και η αντίστοιχη παράγωγος $h'(t)$:

$$h'(t) = -\frac{e^{t/20}}{2(1 + e^{t/20})^2} < 0$$

Επομένως η συνάρτηση $h(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Το πεδίο τιμών της $h(t)$ είναι το $[\lim_{t \rightarrow \infty} h(t), h(0)]$.

Θα γίνει υπολογισμός των ποσοτήτων $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t), h(0)$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{1 + e^{t/20}} = 0$$

$$h(0) = 5$$

Συνεπώς το πεδίο τιμών της $h(t)$ είναι το $[0,5]$.

Ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της Y όπως αποδείχτηκε παραπάνω είναι:

$$e_Y = \mu - h(t)$$

Όπου $h(t)$ είναι η παράσταση που αναλύθηκε παραπάνω με συνάρτηση:

$$h(t) = \frac{e^{t/\mu}(-1 + \theta)(-m + \mu)}{e^{t/\mu}(-1 + \theta) - e^{\frac{t}{m}\theta}}$$

Από το πεδίο τιμών προκύπτει ότι:

$$0 \leq h(t) \leq 5 \quad \forall t \geq 0$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\mu - 5 \leq \mu - h(t) \leq \mu - 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.17.1)$$

Όμως:

$$\mu - 5 = \lambda = e_X \quad (2.17.2)$$

και

$$\mu - h(t) = e_Y \quad (2.17.3)$$

Επομένως η σχέση (2.17.1) γίνεται λόγω των σχέσεων (2.17.2) και (2.17.3):

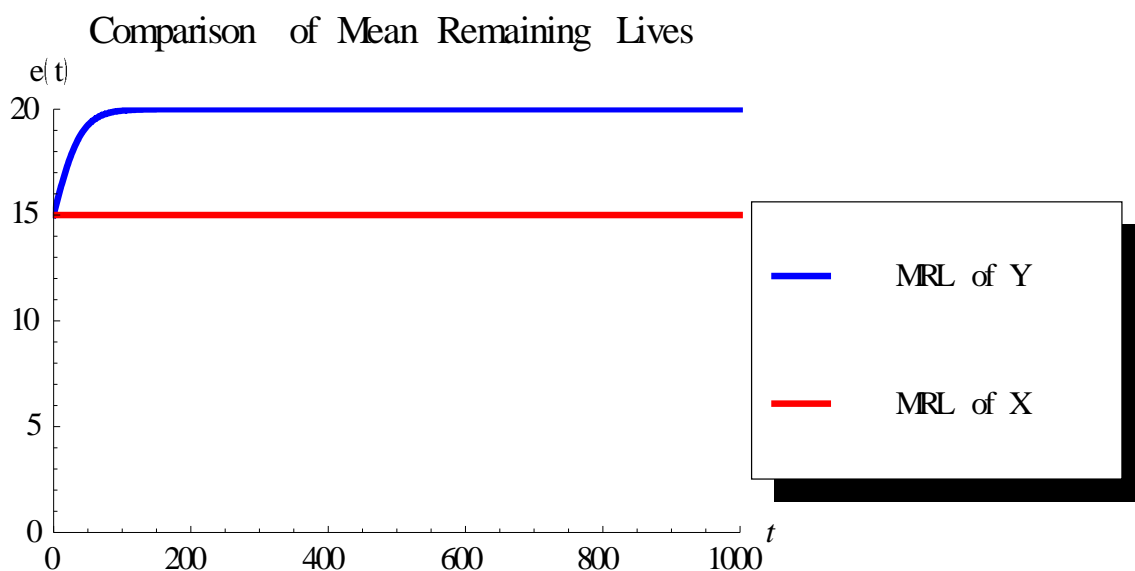
$$e_X(t) \leq e_Y(t) \leq \mu \quad \forall t \geq 0 \quad (2.17.4)$$

Λόγω της σχέσης (2.17.4) και του ορισμού (1.17) προκύπτει το κάτωθι συμπέρασμα:

$$X \leq_{\text{mrl}} Y$$

Γραφική Παράσταση των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής X, Y :

Προφανώς ισχύει η σχέση που αποδείχτηκε παραπάνω. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων υπολειπόμενου χρόνου ζωής των δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y . Η γραφική παράσταση της Y είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της X , επομένως αποδεικνύεται και από την γραφική παράσταση ότι η τυχαία μεταβλητή X υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y ως προς την διάταξη υπολειπόμενου χρόνου ζωής.



Γραφική Παράσταση 2.17.1- Σύγκριση συνάρτησης μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μείξης εκθετικών-εκθετικής κατανομής δοθείσης ισότητας μέσων τιμών.

Συμπέρασμα: Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η μείξη εκθετικών κατανομών (τυχαία μεταβλητή Y) παρουσιάζει μεγαλύτερο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής από την εκθετική κατανομή (τυχαία μεταβλητή X) δεδομένου της ισότητας των αντίστοιχων μέσων τιμών τους.

Εφαρμογή 2.18: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παράμετρος (θ_1, b) και η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Gamma με

παραμέτρους (θ_1, b) . Θα γίνει σύγκριση των δύο μεταβλητών ως προς την διάταξη υπολειπόμενου χρόνου ζωής, αν είναι γνωστό ότι $\theta_1 > 1$.

Εφαρμογή για $\theta_1 = 10, b = 3$

Για την τυχαία μεταβλητή X:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = \left(\frac{\theta_1}{t + \theta_1}\right)^b \quad t > 0$$

Η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της X είναι:

$$e_X(t) = E(T_X) = \frac{\int_t^\infty [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = \frac{\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^{-b} (t + \theta_1)^{1-b}}{\frac{b-1}{\left(\frac{\theta_1}{t + \theta_1}\right)^b}} = \frac{t + \theta_1}{b-1}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Ο υπολογισμός της συνάρτησης μέσου υπολειπόμενου χρόνου της τυχαίας μεταβλητής Y, μπορεί να γίνει μέσω του Θεωρήματος 1.24.

Συνεπώς για την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου της τυχαίας μεταβλητής Y ισχύει:

$$e_Y(t) = E(T_Y) = -\frac{\Pi_Y(t)}{\Pi'_Y(t)}$$

Όπου $\Pi_Y(t)$, το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας της τυχαίας μεταβλητής Y.

Το ασφάλιστρο $\Pi_Y(t)$ ισούται με:

$$\begin{aligned} \Pi_Y(t) &= \int_t^\infty (x-t)f_Y(x)dx \\ &= \frac{-bt + \theta_1 + \frac{b^{\theta_1} t^{\theta_1} (bt)^{-\theta_1} ((bt - \theta_1)\Gamma[\theta_1] - bt\Gamma[\theta_1, bt] + \Gamma[1 + \theta_1, bt])}{\Gamma[\theta_1]}}{b} \end{aligned}$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει τελικά ότι η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

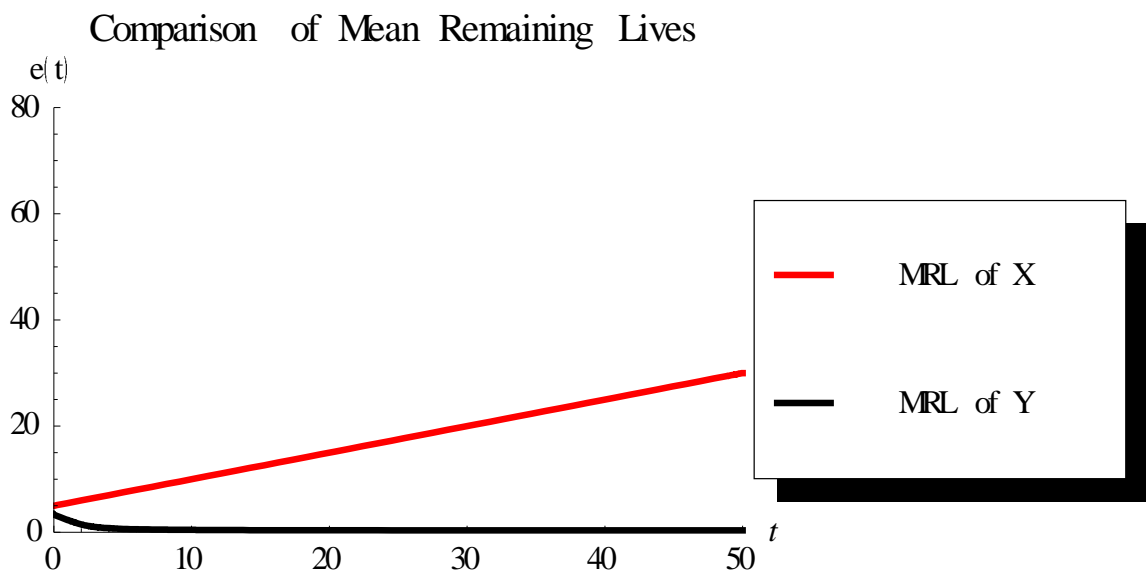
$$e_Y(t) = \frac{-bt + \theta_1 + \frac{e^{-bt}}{b^{-\theta_1}t^{-\theta_1}\Gamma[\theta_1] + (bt)^{-\theta_1}(-\Gamma[\theta_1] + \Gamma[\theta_1, bt])}}{b}$$

Αποδεικνύεται με την βοήθεια του Mathematica ότι:

$$e_X(t) \geq e_Y(t) \forall t > 0 \Leftrightarrow X \geq_{\text{mrl}} Y$$

Εφαρμογή για $\theta_1 = 10, b = 3$:

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να αποδειχτεί αλγεβρικά διότι $e_X(0) \geq e_Y(0)$, η συνάρτηση υπολειπόμενου χρόνου της X είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση υπολειπόμενου χρόνου της Y είναι γνησίως φθίνουσα. Το συμπέρασμα αυτό αποδεικνύεται πιο εύκολα από την γραφική παράσταση των συναρτήσεων υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών X, Y , διότι η γραφική παράσταση της X είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της Y .



Γραφική Παράσταση 2.18.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim Pa(10,3), Y \sim \Gamma(10,3)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΑΝΑΚΟΠΗΣ ΖΗΜΙΑΣ

Οι στοχαστικές διατάξεις ανακοπής ζημίας (SL) χρησιμεύουν στην σύγκριση απαιτήσεων, που προέρχονται από χαρτοφυλάκιο κινδύνων, στο οποίο η πρωτασφαλιστρια εταιρεία εφαρμόζει αντασφάλιση. Η αντασφάλιση εφαρμόζεται στο σύνολο των απαιτήσεων ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων και όχι αποκλειστικά σε ένα μόνο κίνδυνο. Βάσει της παραπάνω παραδοχής που αναλύθηκε σε θεωρητικό επίπεδο στην Ενότητα 1.6, είναι σημαντικός ο προσδιορισμός της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων που εμφανίζονται σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων, προκειμένου να μπορεί ο αναλογιστής να προβεί σε ανάλυση στοχαστικών διατάξεων ανακοπής ζημίας.

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη ασφαλιστρών Stop Loss, τόσο για ατομικούς κινδύνους όσο και για συνολικές απαιτήσεις που εμφανίζονται σε χαρτοφυλάκια κινδύνων, προκειμένου να γίνει εξαγωγή συμπερασμάτων για τη διάταξη ανακοπής ζημίας. Επίσης θα γίνει προσπάθεια εξαγωγής συμπερασμάτων σε πρακτικά προβλήματα που αφορούν ατομικούς κινδύνους αλλά και χαρτοφυλάκια συνολικών απαιτήσεων. Ένα σημαντικό ερώτημα που προκύπτει συγκρίνοντας την διάταξη δύο ατομικών κινδύνων είναι το εξής: Έστω X_1, Y_1 ατομικοί κίνδυνοι προέρχονται από χαρτοφυλάκια κινδύνων X, Y αντίστοιχα. Μπορεί ο αναλογιστής να εξάγει συμπέρασμα για την διάταξη ανακοπής ζημίας των συνολικών απαιτήσεων των χαρτοφυλακίων X, Y αν γνωρίζει ότι αποτελούνται από ατομικούς κινδύνους που ακολουθούν ανεξάρτητες και ισόνομες κατανομές με τους ατομικούς κινδύνους X_1, Y_1 αντίστοιχα;

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθούν για την μοντελοποίηση του ύψους των αποζημιώσεων κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Η εκθετική οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει μεταξύ άλλων την κατανομή Gamma, μείξεις εκθετικών, Beta, κανονική κ.α. Οι κατανομές αυτές χρησιμοποιούνται συχνά για την μοντελοποίηση του ύψους των ζημιών και έχουν πρακτική εφαρμογή στον αναλογισμό και την διαχείριση κινδύνων.

Σημαντικό για την μοντελοποίηση των συνολικών απαιτήσεων που εμφανίζονται σε ένα χαρτοφυλάκιο, είναι ο ορισμός της κατανομής που ακολουθεί το πλήθος των απαιτήσεων ενός χαρτοφυλακίου. Στις επόμενες ενότητες θα αναλυθούν τεχνικές υπολογισμού της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων. Προκειμένου να ορισθεί

η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων, θα πρέπει να είναι γνωστή η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων καθώς και η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων. Η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος των απαιτήσεων συμβολίζεται με N , η κατανομή που αντιπροσωπεύει το ύψος των απαιτήσεων συμβολίζεται με X και η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων συμβολίζεται με S . Η συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων συμβολίζεται με $G(x)$.

3.1 Κατανομή των Συνολικών Αποζημιώσεων

Η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος (ύψος) των συνολικών ζημιών για ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που περιγράφεται από το μοντέλο συλλογικού κινδύνου, δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής:

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

Προκειμένου να μελετηθεί η τυχαία μεταβλητή S , θα πρέπει να γίνει καθορισμός της κατανομής που ακολουθεί. Για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών ζημιών στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου, χρειάζεται να μελετηθεί η κατανομή του αθροίσματος ενός πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Σε αρκετές περιπτώσεις, είναι ευκολότερο να μελετήσουμε την κατανομή της S , μέσω γεννητριών συναρτήσεων.

Το σημαντικότερο ρόλο για τον υπολογισμό της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής S , διαδραματίζει η τυχαία μεταβλητή N , η οποία αντιπροσωπεύει το πλήθος των αποζημιώσεων που εμφανίζεται σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων. Πράγματι, δοθείσης της τιμής N (δηλαδή αν έχουμε παρατηρήσει ή αν γνωρίζουμε), π.χ αν είναι $N = n$, τότε είναι γνωστό και το πλήθος των όρων της τυχαίας μεταβλητής S είναι πεπερασμένο και όχι τυχαίο. Στην παρούσα ενότητα, θα αναπτυχθούν τύποι υπολογισμού για την συνάρτηση κατανομής, την συνάρτηση επιβίωσης και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S .

Θεώρημα 3.1: Βασική μέθοδος: Η συγκεκριμένη μέθοδος δεν προϋποθέτει κάποια υπόθεση για την κατανομή των N και X , γι' αυτό τον λόγο ονομάζεται βασική μέθοδος. Ο υπολογισμός της S γίνεται μέσω των συνελίξεων της τυχαίας μεταβλητής X (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018).

Για $x \geq 0$ ισχύει ότι :

α)

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$$

β)

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \bar{F}^{*n}(x)$$

γ) Αν η X είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, με ακέραιες τιμές τότε για $x = 0$, είναι :

$$g(0) = \begin{cases} p_0, & \text{αν } f(0) = 0 \\ p_N(f(0)), & \text{αν } f(0) \neq 0 \end{cases}$$

όπου

$$P_N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n$$

η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής N , και για $x = 1, 2, \dots$ είναι :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)$$

ενώ αν η X είναι θετική ακέραια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή αν $X \in \{1, 2, \dots\}$, τότε είναι:

$$g(0) = p_0$$

και

$$g(x) = \sum_{n=1}^x p_n f^{*n}(x)$$

δ) Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και $P_r(N = 0) = p_0 = 0$, τότε :

$$g(x) = \sum_{n=1}^x p_n f^{*n}(x)$$

ε) Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και $P_r(N = 0) = p_0 > 0$, τότε :

$$g(x) = \begin{cases} p_0, & x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), & x > 0 \end{cases}$$

Θεώρημα 3.2: Ισχύει ότι :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E(X^2)$$

Ένα ακόμα σημαντικό βοήθημα για τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων της τυχαίας μεταβλητής S αποτελούν οι γεννήτριες συναρτήσεις της, όπως π.χ., η ροπογεννήτρια συνάρτηση, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης κατανομής και ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δεξιάς ουράς. Μέσω αυτών των συναρτήσεων μπορεί να γίνει ο υπολογισμός μέτρων θέσης και μεταβλητότητας, καθώς και η εύρεση αναδρομικών και ασυμπτωτικών τύπων για την κατανομή, γενικότερα, τυχαίων αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών.

Οι γεννήτριες συναρτήσεις της τυχαίας μεταβλητής S υπολογίζονται μέσω των γεννητριών συναρτήσεων των τυχαίων μεταβλητών X και N (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018).

Θεώρημα 3.3: Για τις γεννήτριες συναρτήσεις της τυχαίας μεταβλητής S , ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018) :

- i) $M_S(t) = M_N \ln[M_X(t)]$
- ii) $M_S(t) = P_N[M_X(t)]$
- iii) $P_S(t) = P_N[P_X(t)]$
- iv) $\hat{g}(s) = P_N[\hat{f}(s)]$

3.2 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας Χρησιμοποιώντας την Κατανομή Γάμμα

Μία από τις πλέον ευρέως, χρησιμοποιούμενες σε πρακτικά προβλήματα, κατανομές για την μοντελοποίηση του μεγέθους ατομικής ζημιάς ή και απαίτησης X , είναι τόσο η Γάμμα όσο και η εκθετική κατανομή που είναι ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής. Θα δοθεί ένας γενικός τύπος υπολογισμού της κατανομής των συνολικών

ζημιών ή και απαιτήσεων S , θεωρώντας ότι το μέγεθος ατομικής ζημιάς X ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή και για οποιαδήποτε κατανομή της τ.μ N του πλήθους των ζημιών ή και απαιτήσεων S .

Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της είναι αντίστοιχα:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F(x) = \Gamma(an; \lambda x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\lambda x} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad x \geq 0$$

Για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου :

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύουν τα παρακάτω (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018):

Πρόταση 3.1: Έστω ότι η $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$.

i) Αν $a \notin Z^+$, τότε είναι :

$$\bar{G}(x) = 1 - p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Gamma(an, \lambda x), \quad x \geq 0$$

$$g(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^{an}}{\Gamma(an)} x^{an-1}, \quad x > 0$$

ii) Αν $a \in Z$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim Erl(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, και προκύπτουν τα εξής:

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^{an}}{(an-1)!} x^{an-1}, \quad x > 0$$

Απόδειξη:

i) Επειδή η τυχαία μεταβλητή $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της είναι αντίστοιχα:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F(x) = \Gamma(an; \lambda x) = \frac{1}{\Gamma(an)} \int_0^{\lambda x} t^{an-1} e^{-t} dt, \quad x \geq 0$$

Επίσης, επειδή για κάθε $n \geq 1$, οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την τυχαία μεταβλητή $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, έπεται ότι η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \Gamma(an; \lambda)$, και επομένως για κάθε $n \geq 1$ είναι:

$$f^{*n}(x) = f_{X_1+X_2+\dots+X_n}(x) = \frac{\lambda^{an}}{\Gamma(an)} x^{an-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F^{*n}(x) = F_{X_1+X_2+\dots+X_n}(x) = \Gamma(an; \lambda x) =$$

$$\frac{1}{\Gamma(an)} \int_0^{\lambda x} t^{an-1} e^{-t} dt, \quad x \geq 0$$

Τότε, για $x > 0$ είναι :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^{an}}{\Gamma(an)} x^{an-1} e^{-\lambda x} =$$

$$e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^{an}}{(an-1)!} x^{an-1}, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι:

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \bar{F}^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [1 - F^{*n}(x)] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n [1 - \Gamma(an; \lambda x)] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Gamma(an; \lambda x) =$$

$$1 - p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Gamma(an; \lambda x)$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει διότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0$$

ii) Αν $a \in \mathbb{Z}$, τότε για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$, ο αριθμός an είναι θετικός ακέραιος οπότε είναι:

$$\Gamma(an) = (an - 1)!,$$

$$\Gamma(an; \lambda x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$$

Με απλή αντικατάσταση στις σχέσεις που αποδείχθηκαν στο (i), προκύπτουν οι δύο ζητούμενες σχέσεις.

Στην συνέχεια, θα γίνει υπολογισμός των ασφαλιστρών Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής $S_X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n \geq 1$ αν οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_i \sim \Gamma(a, \lambda)$, $a \in \mathbb{Z}$.

1^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, p = 1 - q, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Αν $a \in \mathbb{Z}$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Erl}(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S είναι (βλ. Πρόταση 3.1):

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

Όμως:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Επομένως η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p q^n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \quad (3.2.1)$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p q^n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} = \frac{e^{x\lambda} q \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Επομένως με αντικατάσταση στην σχέση (3.2.1) προκύπτει:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = \frac{q \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

όπου $\Gamma[an, x\lambda], \Gamma[an]$ είναι αντίστοιχα ίσα με:

$$\Gamma[an] = \int_0^{\infty} t^{an-1} e^{-t} dt \quad \text{και} \quad \Gamma[an, x\lambda] = \int_{x\lambda}^{\infty} t^{an-1} e^{-t} dt$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = \left(1 - \bar{G}_{S_x}(x)\right)' = -\bar{G}'_{S_x}(x)$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = \frac{e^{-x\lambda} q \lambda (x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι :

$$\begin{aligned} \Pi_{S_x}(t) &= \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_x}(x) dx = \\ &= \frac{q(-t \Gamma[an] + t^{1-an} \lambda^{-an} (t\lambda)^{an} (\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1+an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]} \end{aligned}$$

2^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = p q^{n-1}, p = 1 - q, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Αν $\alpha \in Z$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim Erl(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S είναι (βλ. **Πρόταση 3.1**):

$$\bar{G}_{S_x}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

Όμως:

$$p_n = p q^{n-1}, \quad p = 1 - q, \quad n = 1, 2, 3$$

Επομένως η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \quad (3.2.2)$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ο υπολογισμός του παραπάνω διπλού αθροίσματος:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} p q^{n-1} = \frac{e^{x\lambda} \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Επομένως με αντικατάσταση στην σχέση (3.2.2) προκύπτει:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{\Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

όπου $\Gamma[an, x\lambda], \Gamma[an]$ ισούται με:

$$\Gamma[an] = \int_0^{\infty} t^{an-1} e^{-t} dt \quad \text{και} \quad \Gamma[an, x\lambda] = \int_{x\lambda}^{\infty} t^{an-1} e^{-t} dt$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \left(1 - \bar{G}_{S_X}(x)\right)' = -\bar{G}'_{S_X}(x)$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \frac{e^{-x\lambda} \lambda (x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι :

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_X}(x) dx = \frac{t^{-an} \lambda^{-1-an} (t\lambda(t\lambda)^{an} (\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + t^{an} \lambda^{an} (-t\lambda \Gamma[an] + \Gamma[1+an, t\lambda]))}{\Gamma[an]}$$

Η γεωμετρική κατανομή της 2^{ης} περίπτωσης προτιμάται της γεωμετρικής κατανομής της 1^{ης} περίπτωσης, αν είναι γνωστό ότι το χαρτοφυλάκιο θα έχει τουλάχιστον μία απαίτηση αποζημίωσης.

3^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n$$

Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Erl}(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S είναι (βλ. **Πρόταση 3.1**):

$$\bar{G}_{S_x}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{\alpha n - 1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

Όμως:

$$p_n = \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n$$

Επομένως η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n \sum_{j=0}^{\alpha n - 1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \quad (3.2.3)$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ο υπολογισμός του παραπάνω διπλού αθροίσματος:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\alpha n - 1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n =$$

$$= \frac{e^{x\lambda} (-1 + (1-q)^r) \Gamma[\alpha n, x\lambda]}{\Gamma[\alpha n]}$$

Επομένως με αντικατάσταση στην σχέση (3.2.3) προκύπτει:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = - \frac{(-1 + (1-q)^r) \Gamma[\alpha n, x\lambda]}{\Gamma[\alpha n]}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = \frac{(1 - (1-q)^r) \Gamma[\alpha n, x\lambda]}{\Gamma[\alpha n]}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \left(1 - \bar{G}_{S_X}(x)\right)' = -\bar{G}'_{S_X}(x)$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = -\frac{e^{-x\lambda}(-1 + (1 - q)^r)\lambda(x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$g_{S_X}(x) = \frac{e^{-x\lambda}(1 - (1 - q)^r)\lambda(x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι :

$$\begin{aligned} \Pi_{S_X}(t) &= \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_X}(x) dx = \\ &= \frac{(1 - (1 - q)^r)(-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]} \end{aligned}$$

4^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r}{n} p^n q^{r-n}$$

Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Erl}(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S είναι (βλ. Πρόταση 3.1):

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

Όμως:

$$p_n = \binom{r}{n} p^n q^{r-n}$$

Επομένως η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} p^n q^{r-n} \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \quad (3.2.4)$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ο υπολογισμός του παραπάνω διπλού αθροίσματος:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \binom{r}{n} p^n q^{r-n} = \frac{e^{x\lambda} (-1 + (\frac{1}{q})^r) q^r \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Επομένως με αντικατάσταση στην σχέση (3.2.4) προκύπτει:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = \frac{(-1 + (\frac{1}{q})^r) q^r \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = (1 - \bar{G}_{S_x}(x))' = -\bar{G}'_{S_x}(x)$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = \frac{e^{-x\lambda} (-1 + (\frac{1}{q})^r) q^r \lambda (x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι :

$$\Pi_{S_x}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_x}(x) dx = \frac{(-1 + (\frac{1}{q})^r) q^r (-\Gamma[an] + t^{1-an} \lambda^{-an} (t\lambda)^{an} (\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου, στην περίπτωση που η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους (α, λ) . Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, θα παρουσιασθεί ο παρακάτω αναλυτικός πίνακας αποτελεσμάτων που περιλαμβάνει το ασφάλιστρο Stop Loss για κάθε μία περίπτωση που αναλύθηκε παραπάνω. Επομένως η μία στήλη αντιπροσωπεύει την κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων και η δεύτερη στήλη αντιπροσωπεύει το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει. Ο συγκεκριμένος πίνακας, βοηθάει στην άμεση εξαγωγή του

αντίστοιχου ασφαλιστρου Stop Loss, προκειμένου να μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα σε πρακτικές εφαρμογές του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνου.

Τυχαία μεταβλητή συνολικών αποζημιώσεων, $S_X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$. $X_i \sim Erl(a, \lambda), i = 1, 2, \dots, N$ X_i ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.	
Κατανομή πλήθους αποζημιώσεων (p_n)	Ασφάλιστρο Stop Loss ($\Pi_{S_X}(t)$)
pq^n	$\frac{q(-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]}$
pq^{n-1}	$\frac{t^{-an}\lambda^{-1-an}(t\lambda(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + t^{an}\lambda^{an}(-t\lambda\Gamma[an] + \Gamma[1 + an, t\lambda]))}{\Gamma[an]}$
$\binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n$	$\frac{(1 - (1 - q)^r)(-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]}$
$\binom{r}{n} p^n q^{r-n}$	$\frac{(-1 + (\frac{1}{q})^r)q^r(-\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]}$

Πίνακας 3 –Ασφάλιστρα Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής $S_X, X_i \sim Erl(a, \lambda), i = 1, 2, \dots, N, X_i$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Σε συνέχεια της μελέτης των ασφαλιστρων Stop Loss της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων για την περίπτωση που η κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους (a, λ) , είναι σημαντικό να παρουσιασθούν αναλυτικές εφαρμογές των παραπάνω στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου. Στόχος των εφαρμογών, είναι να εξετασθεί αν η στοχαστική διάταξη του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνου, επηρεάζεται από την στοχαστική διάταξη των αντίστοιχων ατομικών κινδύνων.

Εφαρμογή 3.1 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους (a, b) , δηλαδή $X_i \sim \Gamma(a, b), a, b > 0, a \in Z$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ οι οποίες ακολουθούν κατανομή Erlang με παραμέτρους (c, d) , δηλαδή $Y_i \sim \Gamma(c, d), c, d > 0, c \in Z$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των

αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X,Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- i) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας
- ii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X,Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, n = 0,1,2,3 \dots$$

Εφαρμογή για $a = 6, b = 3, c = 8, d = 2, p = 0,6, q = 0,4, n = 3$.

Το πρώτο ερώτημα της εφαρμογής 3.1, έχει απαντηθεί στην εφαρμογή 2.12. Σκοπός της Εφαρμογής 3.1 είναι να μελετηθεί αν η διάταξη των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X,Y ακολουθεί την διάταξη των ατομικών κινδύνων.

Παρακάτω παρατίθενται η γενική ανάλυση που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 2.12 για τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X,Y.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X είναι:

$$f_X(t) = \frac{b^a t^{a-1} e^{-bt}}{(a-1)!}, \quad t > 0$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της X είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_X(t) &= E[(X-t)_+] = \int_t^\infty (x-t)f_X(x)dx \\ &= \int_t^\infty (x-t) \frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} dx \\ &= \frac{a-bt + \frac{b^a t^a (bt)^{-a} ((-a+bt)\Gamma[a] - bt\Gamma[a, bt] + \Gamma[1+a, bt])}{\Gamma[a]}}{b} \end{aligned}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι:

$$f_Y(t) = \frac{d^c t^{c-1} e^{-dt}}{\Gamma(c)}, \quad t > 0$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της Y είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_Y(t) &= E[(Y - t)_+] = \int_t^\infty (x - t) f_X(x) dx \\ &= \int_t^\infty (x - t) \frac{d^c x^{c-1} e^{-dx}}{\Gamma(c)} dx \\ &= \frac{c - dt + \frac{d^c t^c (dt)^{-c} ((-c + dt)\Gamma[c] - dt\Gamma[c, dt] + \Gamma[1 + c, dt])}{\Gamma[c]}}{d} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Mathematica στην Εφαρμογή 2.12 αποδείχθηκε ότι:

$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \forall t > 0 \Leftrightarrow$$

$$X \leq_{sl} Y$$

ii) Προκειμένου να απαντηθεί το δεύτερο ερώτημα της εφαρμογής, θα πρέπει να βρεθεί η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S , των συνολικών αποζημιώσεων.

Έστω ότι η $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$.

Αν $a \in \mathbb{Z}$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim Erl(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S είναι (βλ. **Πρόταση 3.1**):

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

Αποδείχθηκε στην 1^η περίπτωση του παρόντος κεφαλαίου, ότι όταν η κατανομή του πλήθους των συνολικών αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X ισούται με:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{q\Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \frac{e^{-x\lambda}q\lambda(x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_{S_X}(t) &= \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_X}(x) dx = \\ &= \frac{q(-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1+an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]} \end{aligned}$$

Για την τυχαία μεταβλητή X :

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{0.4\Gamma[18,3x]}{\Gamma[18]}$$

Με την βοήθεια του Mathematica, η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = 1.12459 \times 10^{-15} \Gamma[18,3x]$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X , με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο ισούται με:

$$g_{S_X}(x) = 4.35689 \times 10^{-7} e^{-3x} x^{17}$$

Τελικά, το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει, με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι :

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_X}(x) dx =$$

$$e^{-3t}(2.40 + t(6.8 + t(9.6 + t(9 + t(6.3 + t(3.51 + t(1.62 + t(0.6364 + t(0.2169 + t(0.0650 + t(0.017 + t(0.004 + t(0.0008 + t(0.00013 + t(0.00002 + t(0.0000 + (5.48642 \times 10^{-7} + 4.84096 \times 10^{-8}t))))))))))))))))))$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{G}_{S_Y}(x) = \frac{0.4\Gamma[24,2x]}{\Gamma[24]}$$

Με την βοήθεια του Mathematica, και στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να γραφεί ισοδύναμα και ως εξής:

$$\bar{G}_{S_Y}(x) = 1,54726 \times 10^{-23}\Gamma[24,2x]$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι:

$$g_{S_Y}(x) = 2,59588 \times 10^{-16}e^{-2x}x^{23}$$

Το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y , είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_Y}(x) dx =$$

$$e^{-2t}(4.8 + t(9.2 + t(8.79 + t(5.6 + t(2.666 + t(1.01333 + t(0.319 + t(0.0864 + t(0.02031 + t(0.0042 + t(0.0007 + t(0.00013 + t(0.000027 + t(0.000002 + t(3.7587 \times 10^{-7} + t(4.51048 \times 10^{-8} + t(5.01134 \times 10^{-9} + t(5.1590 \times 10^{-10} + t(4.9133 \times 10^{-11} + t(4.3099 \times 10^{-12} + t(3.44798 \times 10^{-13} + t(2.46284 \times 10^{-14} + (1.4926 \times 10^{-15} + 6.4897 \times 10^{-17}t))))))))))))))))))$$

Επειδή τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y δεν είναι εύκολα συγκρίσιμα λόγω της πολυπλοκότητας τους, ακολουθεί ενδεικτικός πίνακα σύγκρισης των ασφαλιστρών Stop Loss για διάφορες τιμές του t.

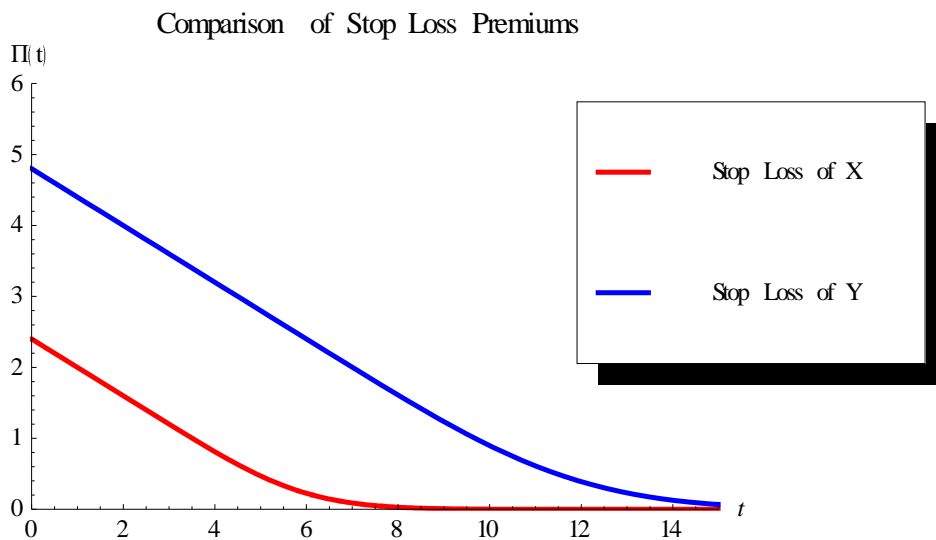
Τιμή	Ασφάλιστρο τ.μ X	Ασφάλιστρο τ.μ Y
5	0.46901	2.40024
10	0.001957619418038766	0.89752
15	3.33365×10^{-7}	0.06688
23	1.27651×10^{-14}	0.00005
50	3.36128×10^{-44}	4.800413×10^{-21}
100	2.7988×10^{-104}	1.1442×10^{-57}

Πίνακας 4-Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών

$$S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2), n = 3$$

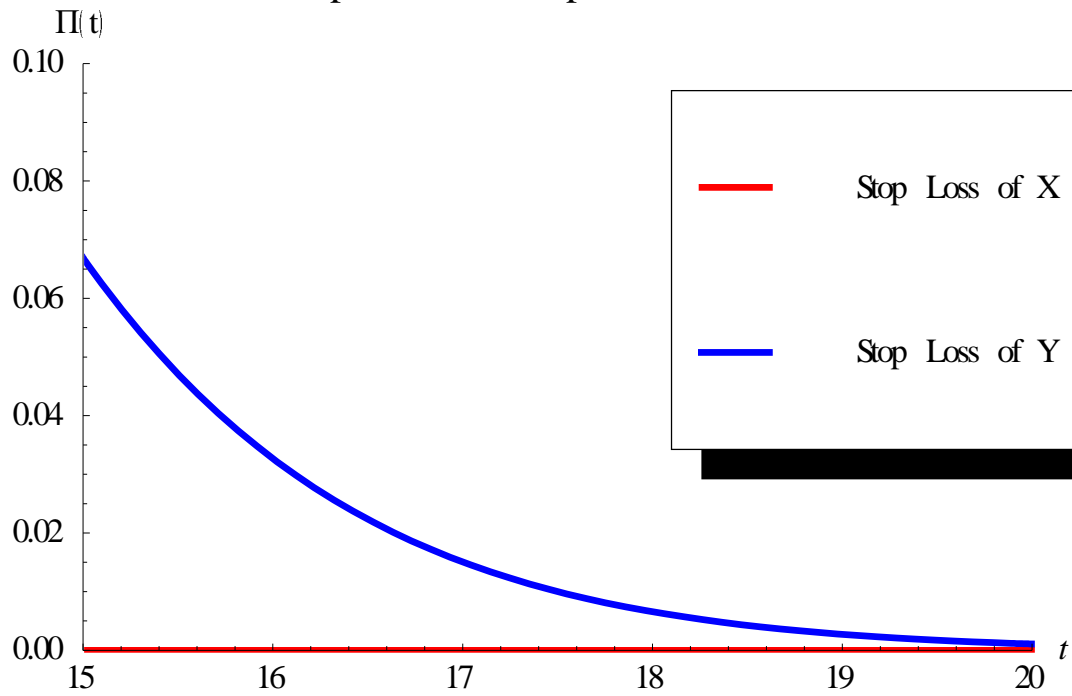
Συμπέρασμα: Με την βοήθεια του παραπάνω πίνακα, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X , υπολείπεται του ασφαλίστρου Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y για κάθε $t > 0$. Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή S_X , υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας

Γραφική Παραστάσεις: Ενδεικτικά παρατίθενται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις στο διάστημα $[0,23]$. Από τις γραφικές παραστάσεις διακρίνεται η ανισοτική σχέση μεταξύ των ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .



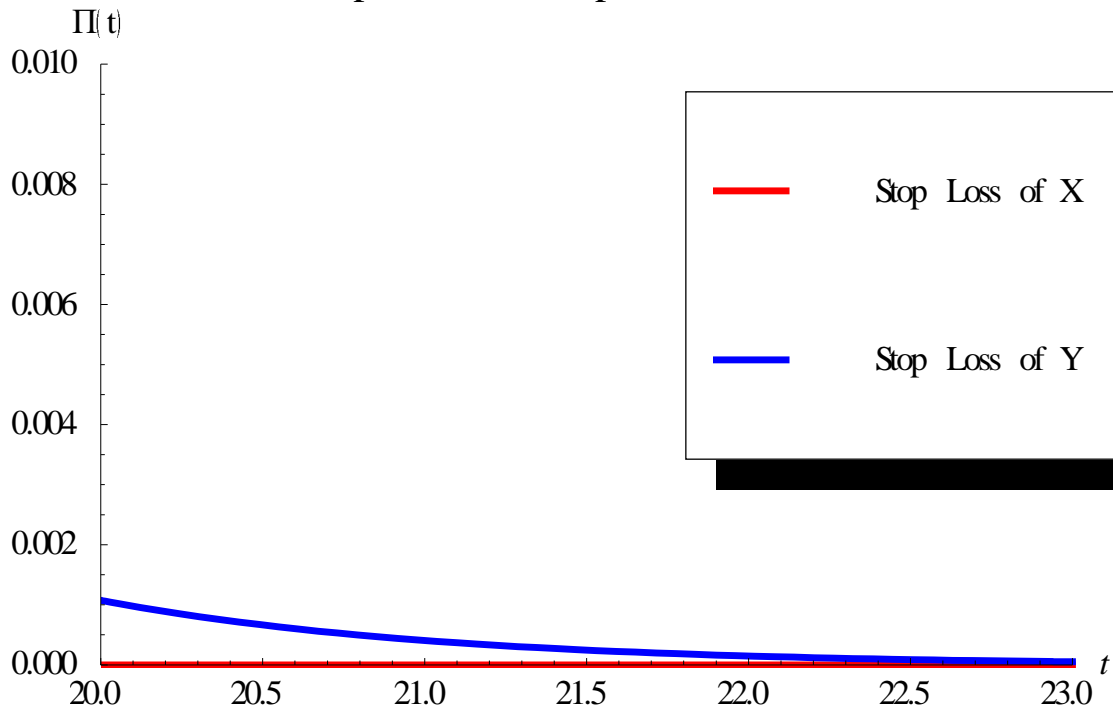
Γραφική Παράσταση 3.1.1- Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα $(0,15)$

Comparison of Stop Loss Premiums



Γραφική Παράσταση 3.1.2 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (15,20)

Comparison of Stop Loss Premiums



Γραφική Παράσταση 3.1.3 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα (20,23).

Εφαρμογή 3.2 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους (a, λ) , δηλαδή $X_i \sim Erl(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ , δηλαδή $Y_i \sim Erl(a, \lambda)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- iii) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας
- iv) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n, p = 1 - q, n = 1, 2, 3, \dots$$

Εφαρμογή για $a = 6, b = 3, c = 8, d = 2, p = 0.4, q = 0.6, n = 3, r = 5$.

Το πρώτο ερώτημα της Εφαρμογής 3.2, έχει απαντηθεί στην Εφαρμογή 2.12. Σκοπός της Εφαρμογής 3.2 είναι να μελετηθεί αν η διάταξη των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ακολουθεί την διάταξη των ατομικών κινδύνων.

Με την βοήθεια του Mathematica στην Εφαρμογή 2.12 αποδείχθηκε ότι για τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημίας των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα, ισχύει η παρακάτω ανισοτική σχέση:

$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \forall t > 0.$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή X υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας

$$X \leq_{sl} Y$$

ii) Προκειμένου να απαντηθεί το δεύτερο ερώτημα της εφαρμογής, θα πρέπει να βρεθεί η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S , των συνολικών αποζημιώσεων.

Αν $a \in \mathbb{Z}$, τότε η τυχαία μεταβλητή $X \sim Erl(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$, επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S είναι (βλ. **Πρόταση 3.1**):

$$\bar{G}_{S_x}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{an-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

Αποδείχθηκε στην 3^η περίπτωση του παρόντος κεφαλαίου, ότι όταν η κατανομή του πλήθους των συνολικών αποζημιώσεων ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n, n = 1,2,3, \dots$$

τότε η συνάρτηση δεξιάς ουράς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας ισούνται με:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = \frac{(1 - (1 - q)^r) \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = (1 - \bar{G}_{S_x}(x))' = -\bar{G}'_{S_x}(x)$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = \frac{e^{-x\lambda} (1 - (1 - q)^r) \lambda (x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι :

$$\Pi_{S_x}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_x}(x) dx =$$

Για την τυχαία μεταβλητή X :

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής X , με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι είναι:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = 2.78267 \times 10^{-15} \Gamma[18,3x]$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = 0.000001 e^{-3x} x^{17}$$

Τελικά, το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι :

$$\Pi_{S_x}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_x}(x) dx =$$

$$e^{-3t}(5.93856 + t(16.8259 + t(23.7542 + t(22.2696 + t(15.5887 + t(8.68514 + t(4.008528 + t(1.57477 + t(0.53685 + t(0.1610 + t(0.04294 + t(0.01024 + t(0.00219 + t(0.00042 + t(0.00007 + t(0.000011 + (0.00001 + 1.197846 \times 10^{-7}t)t))))))))))))))$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής Y, με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι:

$$\bar{G}_{S_Y}(x) = 3.82856 \times 10^{-23} \Gamma[24, 2x]$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y , είναι:

$$g_{S_Y}(x) = 6.42326 \times 10^{-16} e^{-2x} x^{23}$$

Το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y που προκύπτει είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_Y}(x) dx =$$

$$e^{-2t}(11.8771 + t(22.76445 + t(21.774795 + t(13.856639999999999 + t(6.5984 + t(2.50739 + t(0.79180 + t(0.21366 + t(0.05027 + t(0.01047 + t(0.0019 + t(0.00033 + t(0.00005 + t(0.000007 + t(9.30061 \times 10^{-7} + t(1.11607 \times 10^{-7} + t(1.24008 \times 10^{-8} + t(1.27655 \times 10^{-9} + t(1.21576 \times 10^{-10} + t(1.06646 \times 10^{-11} + t(8.531696 \times 10^{-13} + t(6.09406 \times 10^{-14} + (3.69337 \times 10^{-15} + 1.60581 \times 10^{-16}t)t))))))))))))))$$

Επειδή τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y δεν είναι εύκολα συγκρίσιμα λόγω της πολυπλοκότητας τους, ακολουθεί ενδεικτικός πίνακα σύγκρισης των ασφαλιστρών Stop Loss για διάφορες τιμές του t.

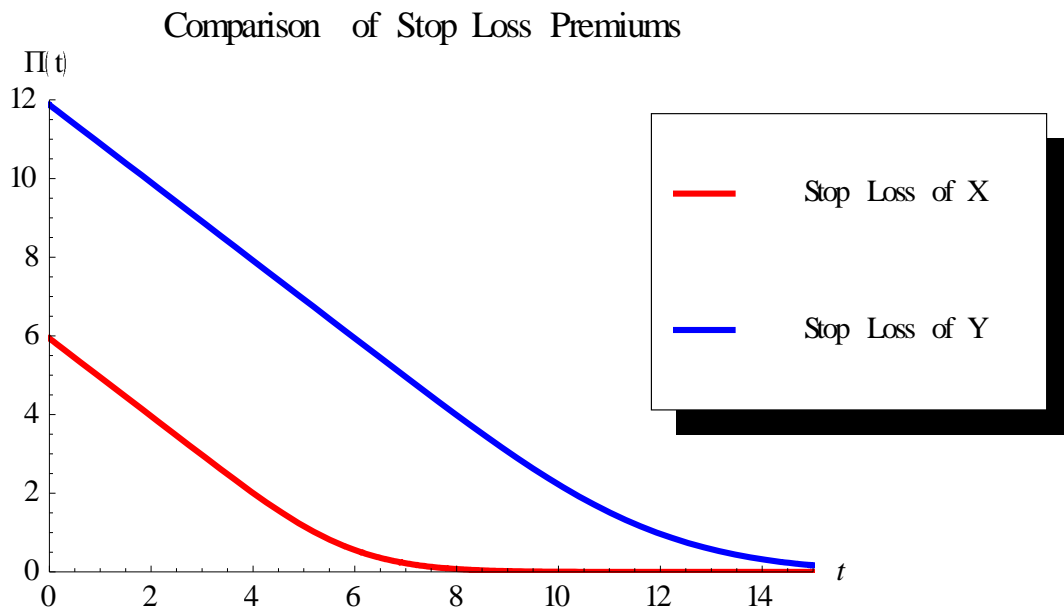
Τιμή	Ασφάλιστρο τ.μ X	Ασφάλιστρο τ.μ Y
5	1.16053	6.92835
10	0.00485	2.220827
15	8.2487×10^{-7}	0.1655
23	$3.1586079 \times 10^{-14}$	0.00012
50	8.31715×10^{-44}	1.18781×10^{-20}
100	$6.925525 \times 10^{-104}$	2.831211×10^{-57}

Πίνακας 5 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών

$$S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2), n = 3,$$

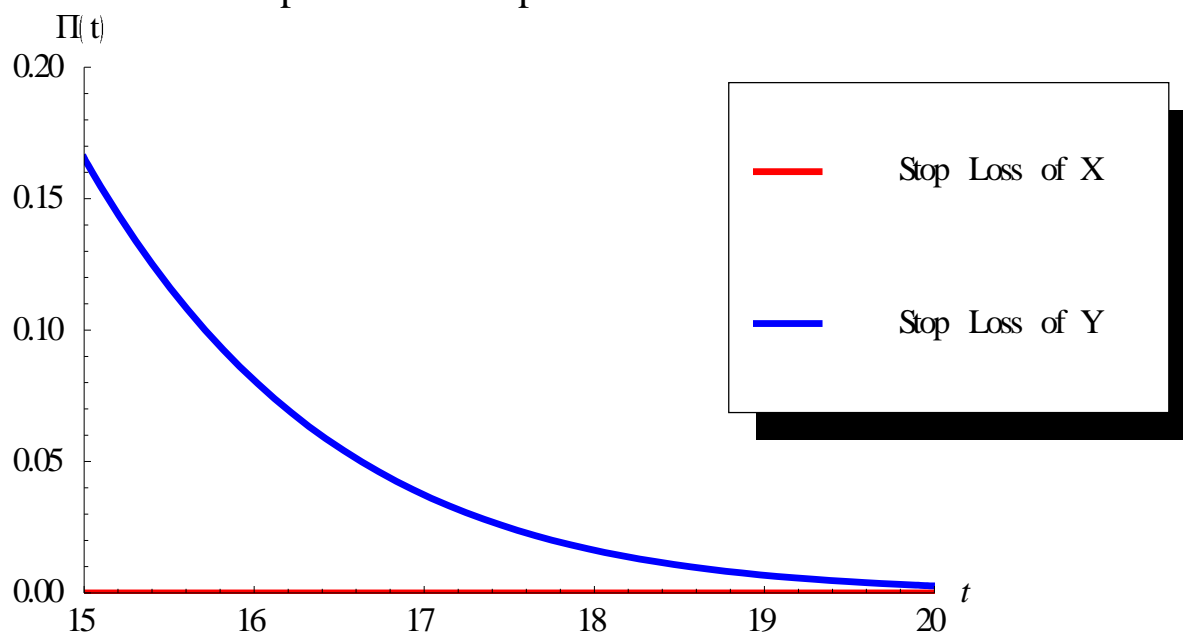
Συμπέρασμα: Με την βοήθεια του παραπάνω πίνακα, εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X , υπολείπεται του ασφαλίστρου Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y για κάθε $t > 0$. Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή S_X , υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.

Γραφική Παραστάσεις: Ενδεικτικά παρατίθενται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις στο διάστημα $[0,20]$. Από τις γραφικές παραστάσεις διακρίνεται η ανισοτική σχέση μεταξύ των ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .



Γραφική Παράσταση 3.2.1 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2), n = 3$, στο διάστημα $(0,15)$

Comparison of Stop Loss Premiums



Γραφική Παράσταση 3.2.2 Σύγκριση Ασφαλίσεων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3)$, $S_Y \sim \Gamma(8,2)$, $n = 3$, στο διάστημα (15,20)

Συμπέρασμα: Η στοχαστική διάταξη στην περίπτωση του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνου για τις τυχαίες μεταβλητές S_X, S_Y , ακολούθησε την στοχαστική διάταξη των αντίστοιχων τυχαίων μεταβλητών X, Y που αντιπροσωπεύουν τους αντίστοιχους ατομικούς κινδύνους.

3.3 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας Χρησιμοποιώντας την Εκθετική Κατανομή

Η εκθετική κατανομή εμφανίζεται συνήθως σε περιπτώσεις όπου γίνεται μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να περιγράψει το ύψος των απαιτήσεων που εμφανίζεται σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων και έχει ποικίλες εφαρμογές στον αναλογισμό και την διαχείριση κινδύνων. Αποτελεί ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής για $\alpha = 1$, $\lambda > 0$ και ανήκει στην ευρύτερη οικογένεια των εκθετικών κατανομών

Για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου:

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύουν τα παρακάτω (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018):

Πρόταση 3.2: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Αν $\{p_n\}$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N , τότε ισχύουν τα εξής:

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x > 0$$

Απόδειξη:

Επειδή η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$ είναι ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $\alpha = 1$, $\lambda > 0$, τότε οι δύο ζητούμενες σχέσεις προκύπτουν από την Πρόταση 3.1 ii) για $\alpha = 1$.

Θα υπολογισθούν τα ασφάλιστρα Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X των συνολικών αποζημιώσεων, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην Ενότητα 3.2

1^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, p = 1 - q, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, τότε για την συνάρτηση δεξιάς ουράς και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύουν τα κάτωθι (βλ. Πρόταση 3.2):

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του πλήθους των συνολικών απαιτήσεων είναι:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Με αντικατάσταση της συνάρτησης πιθανότητας, η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad (3.3.1)$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} = e^{qx\lambda} (1-q)q\lambda$$

Επομένως με αντικατάσταση στην σχέση (3.3.1) προκύπτει:

$$g_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} e^{qx\lambda} (1-q)q\lambda$$

Λόγω της σχέσης $p = 1 - q$, τελικά η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$g_{S_X}(x) = e^{-p\lambda x} p q \lambda$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \int_x^{\infty} g_{S_X}(t) dt = \int_x^{\infty} e^{-p\lambda t} p q \lambda dt$$

Τελικά η συνάρτηση δεξιάς ουράς που προκύπτει είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-px\lambda} q, \quad x \geq 0$$

Επομένως με την βοήθεια του Mathematica, βρέθηκε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X .

Για την εύρεση των παραπάνω συναρτήσεων, παρατίθεται και η αλγεβρική απόδειξη (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018):

$N \sim G_0(p)$ και η τυχαία μεταβλητή $X \sim Exp(\lambda)$. Τότε για $x \geq 0$ είναι :

$$\bar{G}_X(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p q^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$$

Για να υπολογιστεί το παραπάνω διπλό άθροισμα θα γίνει αλλαγή των μεταβλητών άθροισης (μέσω του θεωρήματος του Fubini). Επειδή για

$$\begin{cases} 0 < n < \infty \\ 0 < j < n - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq j < \infty \\ j + 1 \leq n < \infty \end{cases}$$

η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$\begin{aligned} \bar{G}_X(x) &= p e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} q^n \frac{(\lambda x)^j}{j!} = \\ &= p e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \sum_{n=j+1}^{\infty} q^n \end{aligned}$$

Για να υπολογιστεί το εσωτερικό άθροισμα, έστω $n - j - 1 = m$, οπότε είναι:

$n = m + j + 1$ και για $j + 1 \leq n < \infty$ είναι $0 \leq m < \infty$. Επομένως :

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} q^n = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m+j+1} = q^{j+1} \sum_{m=0}^{\infty} q^m = q^{j+1} \frac{1}{1-q} = q^{j+1} \frac{1}{p}$$

Οπότε είναι :

$$\bar{G}_X(x) = p e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p} q^{j+1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} = q e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^j}{j!} =$$

$$q e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} = q e^{-(1-q)\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Επίσης για $x \geq 0$ είναι :

$$g_X(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p q^n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} = p q \lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Θέτοντας $n - 1 = m$, προκύπτει:

$$g_X(x) = p q \lambda e^{-\lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^m}{m!} = p q \lambda e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} = p q \lambda e^{-p\lambda x}$$

Επειδή $p_0 = P_r(N = 0) \neq 0$, η τ.μ S είναι μικτού τύπου με μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν την $P_r(S = 0) = P_r(N = 0) = p$, και είναι συνεχής στο $(0, \infty)$. Τότε είναι :

$$g_X(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ p q \lambda e^{-p\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να γίνει ευκολότερα με την χρήση μετασχηματισμών Laplace (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018):

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\hat{f}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= \frac{q(1 - \hat{f}(s))}{s(1 - q\hat{f}(s))} = \frac{q\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\right)}{s\left(1 - q\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)} = \frac{qs}{s[\lambda + s - q\lambda]} \\ &= \frac{q}{\lambda + s - q\lambda} = \frac{q}{s + \lambda(1 - q)}\end{aligned}$$

Τελικά, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\hat{G}(s) = \frac{q}{p\lambda + s}$$

Επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X θα βρεθεί από την λύση της εξίσωσης:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \bar{G}_X(x) dx = q \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-p\lambda x} dx$$

Από την λύση της εξίσωσης προκύπτει ότι

$$\bar{G}_X(x) = qe^{-p\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Επειδή η τυχαία μεταβλητή S έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν με $P_r(S = 0) = P_r(N = 0) = p$ και είναι συνεχής στο $(0, \infty)$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S , είναι :

$$g_X(x) = \begin{cases} P_r(S = 0), & x = 0 \\ -\bar{G}'(x), & x > 0 \end{cases}$$

Συνεπώς το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\Pi_{S_x}(t) = \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_x}(x) dx = \frac{e^{-pt\lambda} q}{p\lambda}$$

2^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^{n-1}, p = 1 - q, n = 1, 2, 3, \dots$$

Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, τότε για την συνάρτηση δεξιάς ουράς και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύουν τα κάτωθι (βλ. Πρόταση 3.2):

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής του πλήθους των συνολικών απαιτήσεων είναι:

$$p_n = pq^{n-1}, \quad p = 1 - q, \quad n = 1, 2, 3$$

Με αντικατάσταση της συνάρτησης πιθανότητας, η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad (3.3.2)$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} = e^{qx\lambda} (1-q)\lambda$$

Επομένως με αντικατάσταση στην σχέση (3.3.2) προκύπτει:

$$g_{S_X}(x) = e^{-\lambda x} e^{qx\lambda} (1-q)\lambda$$

Λόγω της σχέσης $p = 1 - q$, τελικά η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$g_{S_X}(x) = e^{-p\lambda x} p\lambda$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \int_x^{\infty} g_{S_X}(t) dt = \int_x^{\infty} e^{-p\lambda t} p\lambda dt$$

Τελικά η συνάρτηση δεξιάς ουράς που προκύπτει είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = e^{-p\lambda x}$$

Επομένως με την βοήθεια του Mathematica, βρέθηκε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X .

Για την εύρεση των παραπάνω συναρτήσεων, παρατίθεται και η αλγεβρική απόδειξη (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018):

Η τυχαία μεταβλητή X παριστά το ύψος ατομικής απαίτησης του χαρτοφυλακίου X , τότε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και η τυχαία μεταβλητή $S_X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, N \geq 1$. Επειδή η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής έπεται ότι και η τυχαία μεταβλητή S είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή στο $(0, \infty)$. Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X θα ισούται με :

$$g_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x > 0$$

Επειδή $f^{*n}(x)$ είναι η n -οστή συνέλιξη της f και η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ έπεται ότι $f^{*n}(x) \sim \text{Erl}(n, \lambda)$

Επομένως:

$$f^{*n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Για $x > 0$:

$$g_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} = p \lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$p \lambda x e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^n}{n!} = p \lambda x e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} = p \lambda e^{-(1-q)\lambda x} = p \lambda e^{-p\lambda x}.$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή S_X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $p\lambda$.

Επομένως για την συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X ισχύει ότι:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = \int_x^{\infty} g_{S_x}(t) dt = \int_x^{\infty} e^{-p\lambda x} p\lambda dt$$

Τελικά η συνάρτηση δεξιάς ουράς που προκύπτει είναι:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = e^{-px\lambda}, \quad x > 0$$

Εφαρμογή 3.3 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ , δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- v) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.
- vi) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^{n-1}, \quad p = 1 - q$$

Το πρώτο ερώτημα έχει ήδη απαντηθεί μέσω της Εφαρμογής 2.13. Στην Εφαρμογή 2.13 είχαν αποδειχθεί τα παρακάτω:

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

$$\bar{F}_Y(t) = e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Επομένως :

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Θα γίνει σύγκριση των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \leq \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\mu} \\ \lambda \leq \mu \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} e^{-\lambda t} \geq e^{-\mu t} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός κατά μέλη θετικών αριθμών}} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \geq \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}$$

Επομένως : $\Pi_X(t) \geq \Pi_Y(t)$

Για την τυχαία μεταβλητή X :

Για την τυχαία μεταβλητή $S_X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, N \geq 1$ αποδείχθηκε στην δεύτερη περίπτωση του παρόντος κεφαλαίου ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$g_{S_X}(x) = p\lambda e^{-p\lambda x}$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή S_X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $p\lambda$.

Επομένως για την συνάρτηση δεξιάς ουράς και το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X προκύπτει ότι:

$$\bar{G}_X(t) = e^{-p\lambda t}, \quad t > 0$$

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-p\lambda x} dx = \frac{1}{p\lambda} e^{-p\lambda t}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

Ομοίως για την τυχαία μεταβλητή $S_Y = Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N, N \geq 1$, αποδείχθηκε στην δεύτερη περίπτωση του παρόντος κεφαλαίου ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$g_{S_Y}(x) = p\mu e^{-p\mu x}, \quad x > 0$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή S_Y ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $p\mu$

Όπως προέκυψε και από την δεύτερη περίπτωση του παρόντος κεφαλαίου, για την συνάρτηση δεξιάς ουράς και το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y προκύπτει ότι:

$$\bar{G}_Y(t) = e^{-p\mu t}, \quad t > 0$$

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-p\mu x} dx = \frac{1}{p\mu} e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Θα γίνει σύγκριση των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .

$$\left\{ \begin{array}{l} p\lambda \leq p\mu \Leftrightarrow \frac{1}{p\lambda} \geq \frac{1}{p\mu} \\ p\lambda \leq p\mu \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} e^{-p\lambda t} \geq e^{-p\mu t} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} \frac{1}{p\lambda} e^{-p\lambda t} \geq \frac{1}{p\mu} e^{-p\mu t}$$

Επομένως: $\Pi_{S_X}(t) \geq \Pi_{S_Y}(t)$

Συμπέρασμα: Η στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y , δεν διαφοροποιείται στην περίπτωση του συλλογικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.

Εφαρμογή 3.4 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ , δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- i) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.
- ii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, N = 1, 2, 3, \dots$$

- i) Το πρώτο ερώτημα έχει ήδη απαντηθεί μέσω της Εφαρμογής 2.13 και της Εφαρμογής 3.3.

Για την τυχαία μεταβλητή X ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύει:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_Y(t) = e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Επομένως:

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Θα γίνει σύγκριση των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \leq \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\mu} \\ \lambda \leq \mu \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} e^{-\lambda t} \geq e^{-\mu t} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός κατά μέλη θετικών αριθμών}} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \geq \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}$$

Επομένως : $\Pi_X(t) \geq \Pi_Y(t) \forall t > 0$

ii) Για την τυχαία μεταβλητή X:

Για την τυχαία μεταβλητή $S_X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, N \geq 1$ αποδείχθηκε στην δεύτερη περίπτωση του παρόντος κεφαλαίου ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = qe^{-p\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Επίσης αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = pq\lambda e^{-p\lambda x}$$

Τέλος, αποδείχθηκε ότι το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\Pi_{S_X}(t) = \frac{q}{p\lambda} e^{-p\lambda t}, \quad t > 0$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Ομοίως για την τυχαία κατανομή Y προκύπτουν ότι :

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\bar{G}_Y(x) = qe^{-p\mu x}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$g_Y(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ pq\mu e^{-p\mu x}, & x > 0 \end{cases}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} qe^{-p\mu x} dx = \frac{q}{p\mu} e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Θα γίνει σύγκριση των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p\lambda}{q} \leq \frac{p\mu}{q} \Leftrightarrow \frac{q}{p\lambda} \geq \frac{q}{p\mu} \\ p\lambda \leq p\mu \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} e^{-p\lambda t} \geq e^{-p\mu t} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{πολλαπλασιασμός κατά μέλη}} \frac{q}{p\lambda} e^{-p\lambda t} \geq \frac{q}{p\mu} e^{-p\mu t}$$

Επομένως : $\Pi_{S_X}(t) \geq \Pi_{S_Y}(t)$

Συμπέρασμα: Η στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y , δεν διαφοροποιείται στην περίπτωση του συλλογικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου.

3.4 Εφαρμογές Διατάξεων Ανακοπής Ζημίας Χρησιμοποιώντας Μείξεις Εκθετικών Κατανομών

Μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$a_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + a_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + \dots + a_k \beta_k e^{-\beta_k x} = \sum_{i=1}^k a_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \quad a_1, a_2, \dots, a_k > 0$$

και ταυτόχρονη αναγκαία συνθήκη:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

λέγεται μείξη k εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. (Πολίτης, 2018).

Στον αναλογισμό, σε αρκετές εφαρμογές, προτιμώνται οι μείξεις εκθετικών κατανομών συγκριτικά με τις απλές εκθετικές κατανομές, καθώς βοηθούν πιο αποτελεσματικά στην επίλυση προβλημάτων. Οι μείξεις εκθετικών κατανομών συχνά δίνουν στον αναλογιστή την ευελιξία να προσεγγίσει σε μεγάλο βαθμό και πιο ικανοποιητικά το αντικείμενο μελέτης σε σχέση με άλλες κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια. Μερικές από τις εφαρμογές των μίξεων εκθετικών κατανομών έγκειται

στις ζημιοκατανομές, στην θεωρία χρεοκοπίας, στην θεωρία κινδύνων, στα συμβάντα ζωής κ.α.

Για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου :

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύουν τα παρακάτω :

Πρόταση 3.3: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \theta \alpha e^{-\alpha x} + (1 - \theta) \beta e^{-\beta x}, x > 0, \beta > \alpha, \theta > 0$$

και η τυχαία μεταβλητή $N \sim G_0(p), 0 < p < 1$. Τότε είναι :

$$\bar{G}(x) = a_1 e^{-x\rho_1} + a_2 e^{-x\rho_2}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ a_1 \rho_1 e^{-x\rho_1} + a_2 \rho_2 e^{-x\rho_2}, & x > 0 \end{cases}$$

όπου,

$$\alpha_1 = q \frac{(1 - \theta)\alpha + \theta\beta - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$\alpha_2 = q \frac{\rho_2 - (1 - \theta)\alpha - \theta\beta}{\rho_2 - \rho_1}$$

και $-\rho_1, -\rho_2$ είναι οι διακριτές πραγματικές ρίζες της εξίσωσης:

$$s^2 + [(1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta]s + p\alpha\beta = 0 \text{ (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018).}$$

Απόδειξη: Επειδή ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\hat{f}(s) = \theta \frac{\alpha}{\alpha + s} + (1 - \theta) \frac{\beta}{\beta + s},$$

$$1 - \hat{f}(s) = 1 - \theta \frac{\alpha}{\alpha + s} - (1 - \theta) \frac{\beta}{\beta + s} =$$

$$\frac{(a + s)(\beta + s) - \theta\alpha(\beta + s) - (1 - \theta)\beta(a + s)}{(a + s)(\beta + s)} =$$

$$\frac{s^2 + [(1 + \theta)\alpha + \theta\beta]s}{(a + s)(\beta + s)} \quad (3.4.1)$$

και

$$1 - q\hat{f}(s) = 1 - \frac{q\theta\alpha}{\alpha + s} - \frac{q(1 - \theta)\beta}{\beta + s}.$$

Μετά από πράξεις, προκύπτει ότι το δεξιό μέλος ισούται με:

$$\frac{s^2 + [(1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta]s + p\alpha\beta}{(\alpha + s)(\beta + s)}. \quad (3.4.2)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace όπως ορίσθηκε παραπάνω ισούται με:

$$\hat{G}(s) = \frac{q(1 - \hat{f}(s))}{s(1 - q\hat{f}(s))}$$

Αντικαθιστώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τις σχέσεις (3.4.1) και (3.4.2) προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$\hat{G}(s) = \frac{q \frac{s^2 + [(1 + \theta)\alpha + \theta\beta]s}{(\alpha + s)(\beta + s)}}{s \left[\frac{s^2 + [(1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta]s + p\alpha\beta}{(\alpha + s)(\beta + s)} \right]}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{G}(s)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων και ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική μερικών κλασμάτων για να αναλύσουμε το δεξιό μέλος της. Επειδή ο παρονομαστής του δεξιού μέλους είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, η διακρίνουσα του είναι:

$$\Delta = [(1 - q\theta)\alpha + q\theta\beta + p\beta]^2 - 4p\alpha\beta =$$

$$[(1 - q\theta)\alpha]^2 + (q\theta\beta)^2 + p\beta^2 + 2[(1 - q\theta)\alpha](q\theta\beta) + 2[(1 - q\theta)\alpha](p\beta) + 2(q\theta\beta)(p\beta) - 4p\alpha\beta =$$

$$[(1 - q\theta)\alpha]^2 + (q\theta\beta)^2 + p\beta^2 + 2[(1 - q\theta)\alpha](q\theta\beta) + 2[(1 - q\theta)\alpha](p\beta) - 2(q\theta\beta)(p\beta) + 4[(1 - q\theta)\alpha](p\beta) + 4q\theta\beta(p\beta) - 4p\alpha\beta =$$

$$[(1 - q\theta)\alpha + q\theta\beta - p\beta]^2 + 4p\beta[(1 - q\theta)\alpha + q\theta\beta - \alpha].$$

Επειδή

$$(1 - q\theta)\alpha + q\theta\beta - \alpha = q\theta(\beta - \alpha) > 0, (\beta > \alpha)$$

έπεται ότι $\Delta > 0$.

Επομένως η κάτωθι εξίσωση έχει δύο διακριτές ρίζες:

$$s^2 + [(1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta] + p\alpha\beta = 0$$

Το άθροισμα των ριζών είναι:

$$((1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta) = -(q\theta(\beta - \alpha) + p\beta) < 0$$

και το γινόμενο των ριζών είναι $p\alpha\beta > 0$, επομένως έπεται ότι και οι δύο ρίζες είναι αρνητικές.

Έστω $-\rho_1, -\rho_2$ είναι οι 2 διακριτές πραγματικές ρίζες (με $\rho_1 \neq \rho_2, \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$).

Τότε είναι :

$$s^2 + [(1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta]s + p\alpha\beta = (s + \rho_1)(s + \rho_2)$$

Εφαρμόζοντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων έχουμε:

$$\frac{s + (1 - \theta)\alpha + \theta\beta}{s^2 + [(1 - q\theta)\alpha + (p + q\theta)\beta]s + p\alpha\beta} = \frac{s + (1 - \theta)\alpha + \theta\beta}{(s + \rho_1)(s + \rho_2)} = \frac{A_1}{s + \rho_1} + \frac{A_2}{s + \rho_2} = \frac{(A_1 + A_2)s + A_1\rho_2 + A_2\rho_1}{(s + \rho_1)(s + \rho_2)}$$

Οπότε οι συντελεστές A_1, A_2 είναι οι λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1\rho_2 + A_2\rho_1 = (1 - \theta) + \theta\beta \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι:

$$A_1 = \frac{(1 - \theta)\alpha + \theta\beta - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}, A_2 = \frac{\rho_2 - (1 - \theta)\alpha - \theta\beta}{\rho_2 - \rho_1}$$
$$\hat{G}(s) = qA_1 \frac{1}{s + \rho_1} + qA_2 \frac{1}{s + \rho_2}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται ως:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \bar{G}(x) dx = qA_1 \int_0^\infty e^{-sx} e^{-x\rho_1} dx + qA_2 \int_0^\infty e^{-sx} e^{-x\rho_2} dx$$

Έτσι από την τελευταία σχέση έπεται ότι :

$$\bar{G}(x) = qA_1 e^{-\rho_1 x} + qA_2 e^{-\rho_2 x}$$

η οποία είναι η ζητούμενη σχέση.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι :

$$g(x) = \begin{cases} P_r(S = 0), & x = 0 \\ -\bar{G}'(x), & x > 0 \end{cases}$$

Οπότε παραγωγίζοντας την $\bar{G}(x)$ προκύπτει η κάτωθι ζητούμενη σχέση:

$$g(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ qA_1\rho_1 e^{-\rho_1} + qA_2\rho_2 e^{-\rho_2} \end{cases}$$

Εφαρμογή 3.5 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ οι οποίες ακολουθούν ακολουθεί την μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(x) = \theta \mu e^{-x\mu} + (1 - \theta) m e^{-xm}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- i) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας.
- ii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας

Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών, αν είναι γνωστό ότι:

$$\frac{1}{\lambda} = \theta \frac{1}{\mu} + (1 - \theta) \frac{1}{m}, \quad \lambda, \mu, m \geq 1.$$

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, n = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

Εφαρμογή για: $\lambda = 4, \mu = 3, m = 6, \theta = \frac{1}{2}, p = 0.4, q = 0.6$

i) Οι τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνονται στην παρούσα εφαρμογή έχουν ίδια μέση τιμή.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = E(Y) = \theta \frac{1}{\mu} + (1 - \theta) \frac{1}{m} = \frac{1}{4}$$

Για την τυχαία μεταβλητή X:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\overline{F}_X(x) = e^{-\lambda x}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} \overline{F}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-t\lambda}}{\lambda}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$f_Y(x) = \theta \mu e^{-x\mu} + (1 - \theta) m e^{-xm}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} (x - t) f_Y(x) dx$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} (x - t) \theta \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} + (1 - \theta) \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}} dx =$$

Με την βοήθεια του Mathematica, προκύπτει το ασφάλιστρο Stop Loss:

$$\Pi_Y(t) = \frac{e^{-t(m+\mu)}(e^{mt}m\theta - e^{t\mu}(-1 + \theta)\mu)}{m\mu}$$

Για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων που αναφέρθηκαν παραπάνω, ισχύει ότι:

Για την τυχαία μεταβλητή X:

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \frac{e^{-4t}}{4}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \frac{1}{12}e^{-6t}(1 + 2e^{3t})$$

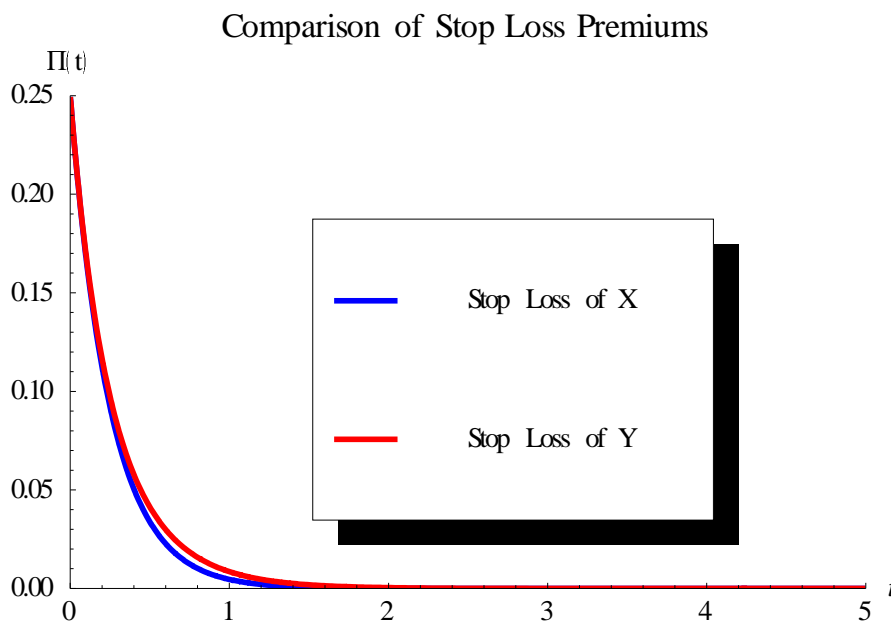
Είναι εύκολο να αποδειχθεί η παρακάτω ανισοτική σχέση, που ισχύει για τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

$$\Pi_X(t) \leq \Pi_Y(t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty)$$

Επομένως για την στοχαστική διάταξη ανακοπής ασφαλίστρου των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

$$X \leq_{SL} Y$$

Γραφική παράσταση: Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει και από την ενδεικτική γραφική παράσταση των ασφαλίστρων Stop Loss στο διάστημα $[0, 5]$. Η γραφική παράσταση της Y είναι πιο πάνω από την γραφική παράσταση της X , επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της Y έχει αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή από το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της X .



Γραφική Παράσταση 3.5.1 Σύγκριση Ασφαλίστρων Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών

$$X \sim \text{Exp}(4), Y \sim \text{Mixed Exponential}(\mu = 6, m = 3, \theta = \frac{1}{2}).$$

Συμπέρασμα: Η εκθετική κατανομή υπολείπεται της μείξης εκθετικών κατανομών ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας, δοθείσης ισότητας των αντίστοιχων μέσων τιμών τους.

ii) Για την τυχαία μεταβλητή X

Ορίζεται S_X το μοντέλο συλλογικού κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής X :

$$S_X = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

Έχει αποδειχθεί στην Εφαρμογή 3.2 ότι αν το πλήθος των απαιτήσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

και η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , τότε ισχύουν τα κάτωθι:

$$\bar{G}_X(x) = qe^{-p\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Και το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι:

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^\infty \bar{G}_X(x) dx = \int_t^\infty qe^{-p\lambda x} dx = \frac{q}{p\lambda} e^{-p\lambda t}$$

Με αντικατάσταση των τιμών της εφαρμογής το ασφάλιστρο Stop Loss που προκύπτει είναι:

$$\Pi_{S_X}(t) = \frac{0.6}{1.6} e^{-(1.6)t}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

Ορίζεται S_Y το μοντέλο συλλογικού κινδύνου της τυχαίας μεταβλητής Y :

$$S_Y = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Προκειμένου να βρεθεί η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων S_Y , θα γίνει χρήση της θεωρίας που αναπτύχθηκε στην Πρόταση 3.3.

Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(x) = \theta \mu e^{-\mu x} + (1 - \theta) m e^{-m x}, x > 0, m > \mu, \theta > 0.$$

και η τυχαία μεταβλητή $N \sim G_0(p)$, $0 < p < 1$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3 η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\bar{G}(x) = a_1 e^{-x\rho_1} + a_2 e^{-x\rho_2}, \quad x \geq 0$$

Αντίστοιχα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y , είναι:

$$g(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ a_1 \rho_1 e^{-x\rho_1} + a_2 \rho_2 e^{-x\rho_2}, & x > 0 \end{cases}$$

όπου,

$$\alpha_1 = q \frac{(1 - \theta)\mu + \theta m - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$\alpha_2 = q \frac{\rho_2 - (1 - \theta)\mu - \theta m}{\rho_2 - \rho_1}$$

και $-\rho_1, -\rho_2$ είναι οι διακριτές πραγματικές ρίζες της εξίσωσης:

$$s^2 + [(1 - q\theta)\mu + (p + q\theta)m]s + p\mu m = 0$$

Με αντικατάσταση των τιμών της εφαρμογής προκύπτει η εξής δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$s^2 + 6,3s + 7,2 = 0$$

Η λύση της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι οι ρίζες ρ_1, ρ_2 :

$$\rho_1 = -4.8$$

$$\rho_2 = -1.5$$

Με αντικατάσταση των τιμών, τα α_1, α_2 που προκύπτουν είναι:

$$\alpha_1 = 0.054545$$

$$\alpha_2 = 0.5454$$

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_Y με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι:

$$\bar{G}_Y(x) = 0.05454e^{-4.8x} + 0.54545e^{-1.5x}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y με στρογγυλοποίηση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_X(x) dx = 0.01136e^{-4.8t} + 0.36363e^{-1.5t}$$

Με την βοήθεια του Mathematica, προκύπτει ότι η διάταξη των ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y είναι:

$$\Pi_{S_X}(t) \leq \Pi_{S_Y}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

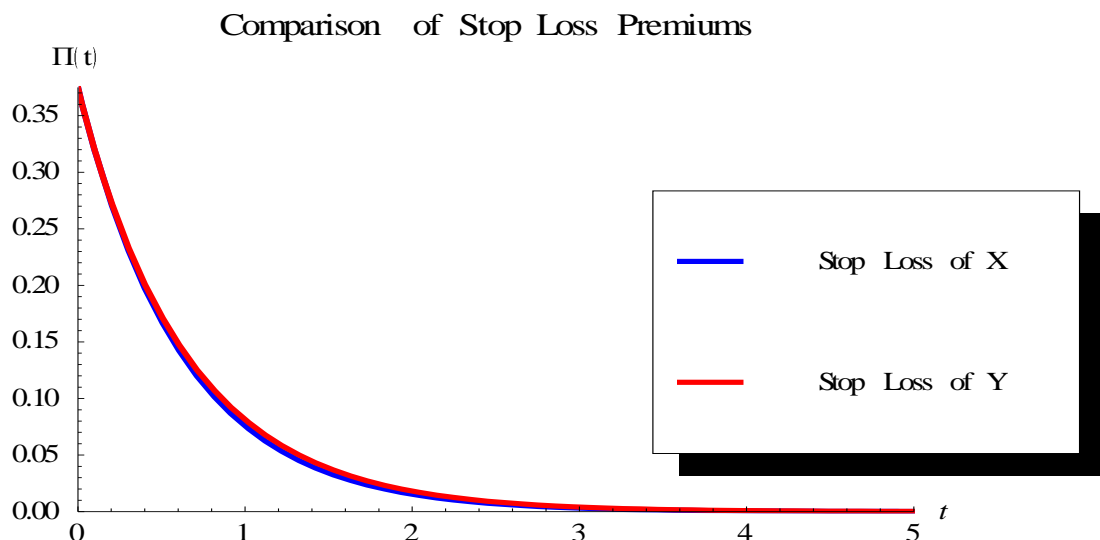
Επομένως για την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y ισχύει ότι:

$$S_X \leq_{SL} S_Y$$

Γραφική Παράσταση: Ενδεικτικά η γραφική παράσταση στο διάστημα $[0,5]$. Η κόκκινη γραμμή που αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή S_Y , απεικονίζει το άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών με παραμέτρους:

$$\mu = 3, m = 6, \theta = \frac{1}{2}$$

και είναι πιο πάνω από την μπλε γραμμή που απεικονίζει το άθροισμα ανεξάρτητων εκθετικών κατανομών με παράμετρο $\lambda = 4$.



Γραφική Παράσταση 3.5.2 Σύγκριση Ασφαλιστρών Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \text{Exp}(4), S_Y \sim \text{Mixed Exponential}(\mu = 6, m = 3, \theta = \frac{1}{2})$

Συμπέρασμα: Η τυχαία μεταβλητή S_X , υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_Y ως προς την στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας. Συνεπώς διατηρείται η στοχαστική διάταξη για το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕΣΟΥ ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΖΩΗΣ

4.1 Εισαγωγή

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιασθούν εφαρμογές διατάξεων υπολειπόμενου χρόνου ζωής στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου. Το κεφάλαιο αυτό, αποτελεί συνέχεια του προηγούμενου κεφαλαίου, στο οποίο αναπτύχθηκαν εφαρμογές διατάξεων ανακοπής ζημίας. Για να επιτευχθεί αυτό το αποτέλεσμα, προσδιορίστηκε η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων και παρουσιάστηκαν τρόποι υπολογισμού της. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα χρησιμοποιηθούν οι κατανομές των συνολικών αποζημιώσεων που αποδείχθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο, προκειμένου να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για τις διατάξεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Οι διατάξεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι ιδιαίτερα σημαντικές στον αναλογισμό και χρησιμοποιούνται ευρέως στον κλάδο ασφαλίσεων ζωής αλλά και σε γενικές ασφαλίσεις. Ο λόγος χρησιμότητάς τους, έγκειται στην ανάγκη προσδιορισμού του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Γνωρίζοντας την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μιας τυχαίας μεταβλητής, δίνεται η δυνατότητα στον αναλογιστή να υπολογίσει το σωστό ασφάλιστρο αλλά και να πάρει αποφάσεις σχετικά με την εκτίμηση κινδύνου, την χρήση αντασφάλισης και γενικότερα να εκτιμήσει την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής.

Η σύγκριση των συναρτήσεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής δύο τυχαίων μεταβλητών, βοηθάει στην εξαγωγή συμπερασμάτων για την στοχαστική διάταξη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Επίσης, θα γίνει σύγκριση ατομικών κινδύνων που προέρχονται από διαφορετικά χαρτοφυλάκια καθώς και των συνολικών απαιτήσεων των αντίστοιχων χαρτοφυλακίων τους, ακριβώς με την ίδια λογική που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθούν εκ νέου κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών, λόγω της χρησιμότητάς τους. Οι κατανομές που θα χρησιμοποιηθούν είναι η κατανομή Γαμμα, η εκθετική κατανομή καθώς και μείξεις εκθετικών κατανομών. Στόχος του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι να εξετασθεί αν σχετίζεται η στοχαστική διάταξη των ατομικών κινδύνων με την στοχαστική διάταξη των συνολικών απαιτήσεων, ως προς την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

4.2 Εφαρμογές Διατάξεων Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής Χρησιμοποιώντας την Κατανομή Γάμμα

Στην Ενότητα 3.2 παρουσιάσθηκαν αναλυτικές εφαρμογές στοχαστικών διατάξεων ανακοπής ζημίας, χρησιμοποιώντας την κατανομή Γάμμα. Στην παρούσα ενότητα με την ίδια λογική και χρησιμοποιώντας δεδομένα που αποδείχθηκαν στην Ενότητα 3.2, θα παρατεθούν αντίστοιχες εφαρμογές διατάξεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, χρησιμοποιώντας την κατανομή Γάμμα. Η κατανομή Γάμμα, όπως έχει ειπωθεί και σε προηγούμενες ενότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στον αναλογισμό και αποτελεί γενίκευση της εκθετικής κατανομής.

Για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου :

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0,1,2,\dots\}$ ισχύουν τα παρακάτω (βλ Πρόταση 3.1):

1^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, p = 1 - q, n = 0,1,2,3, \dots$$

Στην Ενότητα 3.2 αποδείχθηκε ότι σε αυτήν την περίπτωση η κατανομή της δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{q\Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Επίσης, το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss αποδείχθηκε ότι είναι:

$$\Pi_{S_X} = \frac{q(-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]}$$

Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι:

$$e_{S_X}(t) = E(T_X) = \frac{\int_t^\infty \bar{G}_{S_X}(y)dy}{\bar{G}_{S_X}(t)}$$

Όμως η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μπορεί να απλοποιηθεί διότι:

$$\int_t^{\infty} \bar{G}_{S_X}(y) dy = \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_X} dy = \Pi_{S_X} \quad (4.2.1)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.2.1) προκύπτουν για το ασφάλιστρο Stop Loss ισοδύναμα τα εξής:

$$e_{S_X}(t) = \frac{\Pi_{S_X}}{\bar{G}_{S_X}(t)} \quad (4.2.2)$$

$$e_{S_X}(t) = -\frac{\Pi_{S_X}'}{\Pi_{S_X}} \quad (4.2.3)$$

Γνωρίζοντας την συνάρτηση δεξιάς ουράς και το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X και αξιοποιώντας την σχέση 4.2.2, προκύπτει η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής:

Επομένως η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1+an, t\lambda]}{\lambda}}{\Gamma[an, t\lambda]}$$

2^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = pq^{n-1}, p = 1 - q, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Στην δεύτερη περίπτωση της Ενότητας 3.2 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{\Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \frac{e^{-x\lambda}\lambda(x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_X}(x) dx =$$

$$\frac{t^{-an}\lambda^{-1-an}(t\lambda(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + t^{an}\lambda^{an}(-t\lambda\Gamma[an] + \Gamma[1+an, t\lambda]))}{\Gamma[an]}$$

Με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην 1^η περίπτωση της παρούσας ενότητας, θα υπολογισθεί η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, χρησιμοποιώντας την σχέση (4.2.2) είναι:

$$e_{S_x}(t) = \frac{\Pi_{S_x}(t)}{\bar{G}_{S_x}(t)}$$

Επομένως η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι:

$$e_{S_x}(t) = \frac{t^{-an}\lambda^{-1-an}(t\lambda(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + t^{an}\lambda^{an}(-t\lambda\Gamma[an] + \Gamma[1 + an, t\lambda]))}{\Gamma[an, t\lambda]},$$

Όπως αναφέρθηκε και στο Τρίτο Κεφάλαιο, η γεωμετρική κατανομή της 2^{ης} περίπτωσης προτιμάται της γεωμετρικής κατανομής της 1^{ης} περίπτωσης, αν είναι γνωστό ότι το χαρτοφυλάκιο θα έχει τουλάχιστον μία απαίτηση αποζημίωσης.

3^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n$$

Αντίστοιχα, στην τρίτη περίπτωση της Ενότητας 3.2 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_x}(x) = \frac{(1 - (1 - q)^r)\Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_x}(x) = -\frac{e^{-x\lambda}(-1 + (1 - q)^r)\lambda(x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\Pi_{S_x}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_x}(x) dx =$$

$$\frac{(1 - (1 - q)^r)(-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]}$$

Με την ίδια λογική που προσεγγίστηκε η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.2.2) προκύπτει ότι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{\Pi_{S_X}}{\bar{G}_{S_X}(t)}$$

Επομένως η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1+an, t\lambda]}{\lambda}}{\Gamma[an, t\lambda]}$$

4^η περίπτωση: Έστω ότι η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r}{k} p^n q^{r-n}, \quad p = 1 - q, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Στην τέταρτη περίπτωση της Ενότητας 3.2 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{(-1 + (\frac{1}{q})^r)q^r \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \frac{e^{-x\lambda}(-1 + (\frac{1}{q})^r)q^r \lambda (x\lambda)^{-1+an}}{\Gamma[an]}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_{S_X}(t) &= \int_t^{\infty} (x-t) g_{S_X}(x) dx = \\ &= \frac{(-1 + (\frac{1}{q})^r)q^r (-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1+an, t\lambda]}{\lambda})}{\Gamma[an]} \end{aligned}$$

Με την ίδια λογική που προσεγγίστηκε η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.2.2) προκύπτει ότι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{\Pi_{S_X}(t)}{\bar{G}_{S_X}(t)}$$

Επομένως η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda}}{\Gamma[an, t\lambda]}$$

Παρακάτω, παρατίθεται συγκεντρωτικά πίνακας με τα αποτελέσματα που αποδείχθηκαν παραπάνω. Στην αριστερή στήλη βρίσκεται η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων και στην δεξιά στήλη η αντίστοιχη συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Τυχαία μεταβλητή συνολικών αποζημιώσεων, $S_X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. $X_i \sim Erl(a, \lambda), i = 1, 2, \dots, n$ X_i ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.	
Κατανομή πλήθους αποζημιώσεων (p_n)	Συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ($e_{S_X}(t)$)
pq^n	$\frac{-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda}}{\Gamma[an, t\lambda]}$
pq^{n-1}	$\frac{t^{-an}\lambda^{-1-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + t^{an}\lambda^{an}(-t\lambda\Gamma[an] + \Gamma[1 + an, t\lambda])}{\Gamma[an, t\lambda]}$
$\binom{r+n-1}{r-1} p^r q^n$	$\frac{-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda}}{\Gamma[an, t\lambda]}$
$\binom{r}{n} p^n q^{r-n}$	$\frac{-t\Gamma[an] + t^{1-an}\lambda^{-an}(t\lambda)^{an}(\Gamma[an] - \Gamma[an, t\lambda]) + \frac{\Gamma[1 + an, t\lambda]}{\lambda}}{\Gamma[an, t\lambda]}$

Πίνακας 5 – Συνάρτηση Μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής $S_X, X_i \sim Erl(a, \lambda), i = 1, 2, \dots, N, X_i$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές
Η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνου για την κατανομή Erlang με παραμέτρους (a, λ) , δεν διαφοροποιείται στις περιπτώσεις 1,2,4. Είναι διαφορετική μόνο στην περίπτωση που η κατανομή του πλήθους των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^{n-1}, p = 1 - q, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Αφού ολοκληρώθηκε η θεωρητική προσέγγιση με την εύρεση των αντίστοιχων μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής, θα παρουσιασθούν εφαρμογές διατάξεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για την κατανομή Erlang, στην περίπτωση του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνων. Η προσέγγιση των εφαρμογών θα γίνει με ανάλογο τρόπο όπως προσεγγίστηκαν οι εφαρμογές του τρίτου κεφαλαίου. Επίσης θα χρησιμοποιηθούν σχέσεις που συνδέουν τα ασφάλιστρα Stop Loss με τις συναρτήσεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Εφαρμογή 4.1 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους (a, b) , δηλαδή $X_i \sim \Gamma(a, b)$, $a, b > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ οι οποίες ακολουθούν κατανομή Erlang με παραμέτρους (c, d) , δηλαδή $Y_i \sim \Gamma(c, d)$, $c, d > 0$, $c \in \mathbb{Z}$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση:

- i) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.
- ii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Εφαρμογή για $a = 6, b = 3, c = 8, d = 2, p = 0,6, q = 0,4$

Τα δεδομένα της εφαρμογής χρησιμοποιήθηκαν και στις Εφαρμογές 2.12 και 3.1, στις οποίες εξετάστηκε η στοχαστική διάταξη ανακοπής ζημίας. Στόχος της παρούσας εφαρμογής είναι η πραγματοποίηση αντίστοιχης μελέτης και για την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Στην Εφαρμογή 2.12, τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημίας $\Pi_X(t), \Pi_Y(t)$ των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα είναι:

$$\Pi_X(t) = \frac{1}{40} e^{-3t} (80 + 200t + 240t^2 + 180t^3 + 90t^4 + 27t^5)$$

$$\Pi_Y(t) = \frac{1}{315} e^{-2t} (1260 + t(2205 + 2t(945 + t(525 + t(210 + t(63 + 2t(7 + t)))))))$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.14, μπορούν να υπολογισθούν οι αντίστοιχοι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής, εφόσον είναι γνωστά τα ασφάλιστρα ανακοπής ζημίας.

Επομένως για την τυχαία μεταβλητή X:

$$e_X(t) = E(T_X) = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)} = \frac{80 + t(200 + 3t(80 + 3t(20 + t(10 + 3t))))}{40 + 3t(40 + 3t(20 + t(20 + 3t(5 + 3t))))}$$

Αντίστοιχα ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για την τυχαία μεταβλητή Y είναι:

$$e_Y(t) = E(T_Y) = -\frac{\Pi_Y(t)}{\Pi'_Y(t)} = \frac{1260 + t(2205 + 2t(945 + t(525 + t(210 + t(63 + 2t(7 + t))))))}{315 + 2t(315 + t(315 + t(210 + t(105 + 2t(21 + t(7 + 2t))))))}$$

Οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι των τυχαίων μεταβλητών X, Y δεν είναι εύκολα συγκρίσιμοι λόγω της πολυπλοκότητας τους. Ακολουθεί ενδεικτικός πίνακας σύγκρισης των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής X, Y για διάφορες τιμές του t.

Τιμή	Μέσος υπολειπόμενος χρόνος τ.μ X	Μέσος υπολειπόμενος χρόνος τ.μ Y
0	2	4
1	1,110054	3,003441
4	0,5054069	1,232659
10	0,3944435	0,7232758
20	0,3625039	0,5990911
100	0,3389445	0,5179431
1000	0,3338894	0,5017544

Πίνακας 6 Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(6,3)$, $Y \sim \Gamma(8,2)$.

Παρατηρείται ότι για τιμές μεγαλύτερες του 100, οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής των τυχαίων μεταβλητών X, Y σταθεροποιούνται κοντά στις τιμές 0,33 και 0,50 αντίστοιχα.

Συνεπώς προκύπτει ότι για την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

$$e_X(t) \leq e_Y(t) \quad \forall t \geq 0$$

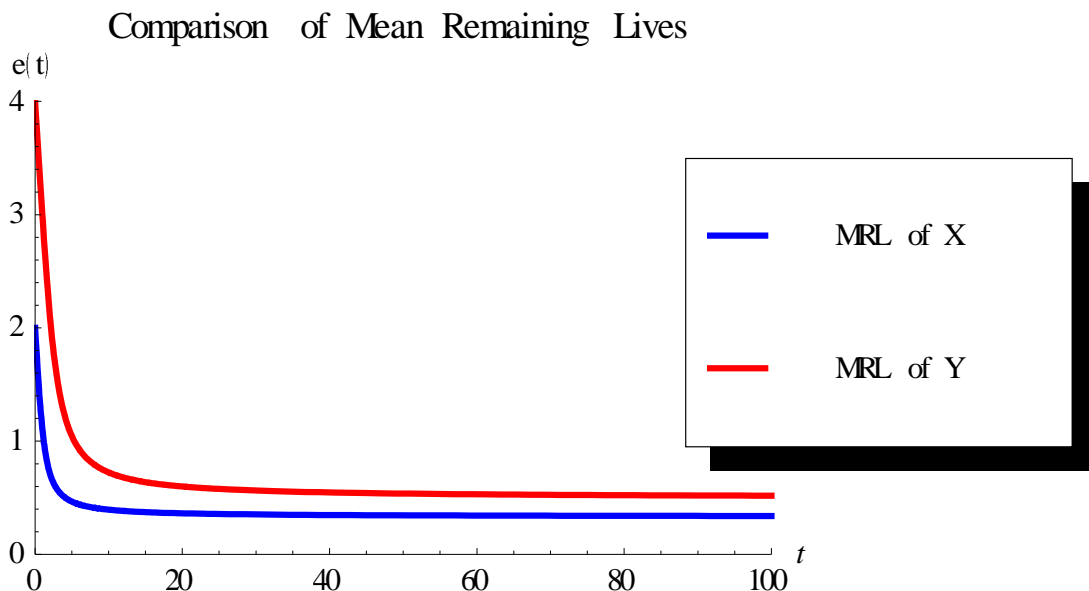
Επομένως:

$$X \leq_{\text{mrl}} Y$$

Συμπέρασμα: Η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους $(6,3)$, υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y που ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους $(8,2)$ ως προς την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Το συμπέρασμα προκύπτει και με την βοήθεια ενδεικτικής γραφικής παράστασης.

Γραφική Παράσταση: Η ενδεικτική γραφική παράσταση των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής στο διάστημα $(0,100]$ επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα. Στο διάστημα $(0,100]$, παρατηρείται ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος της τυχαίας μεταβλητής X υπολείπεται του μέσου υπολειπόμενου χρόνου της τυχαίας μεταβλητής Y .



Γραφική Παράσταση 4.1.1- Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $X \sim \Gamma(6,3), Y \sim \Gamma(8,2)$.

Το ερώτημα που προκύπτει άμεσα είναι αν διατηρείται η παραπάνω στοχαστική διάταξη στην περίπτωση του συλλογικού πρότυπου της θεωρίας κινδύνου.

ii) Για την τυχαία μεταβλητή X:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{0.4\Gamma[18,3x]}{\Gamma[18]}$$

Στην Εφαρμογή 3.1, με την βοήθεια του Mathematica, αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X ισούται με:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = 1.124582901738208 \times 10^{-15}\Gamma[18,3x]$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X αποδείχθηκε ότι ισούται με:

$$\begin{aligned} \Pi_{S_X}(t) = e^{-3t} & (2.40 + t(6.8 + t(9.6 + t(9 + t(6.3 + t(3.51 + t(1.62 + t(0.6364 \\ & + t(0.2169 + t(0.0650 + t(0.017 + t(0.004 + t(0.0008 \\ & + t(0.00013 + t(0.00002 + t(0.0000 + (5.48642 \times 10^{-7} \\ & + 4.840960641249507 \times 10^{-8}t))))))))))))) \end{aligned}$$

Επομένως για την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X , ισχύει ότι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{\Pi_{S_X}}{\bar{G}_{S_X}(t)}$$

Με αντικατάσταση του ασφαλιστρού Stop Loss και την συνάρτησης δεξιάς ουράς προκύπτει η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X :

$$\begin{aligned} e_{S_X}(t) = \frac{1}{\Gamma[18,3t]} e^{-3t} & (2.13412 \times 10^{15} + t(6.0466861 \times 10^{15} + t(8.5364 \times 10^{15} \\ & + t(8.00296 \times 10^{15} + t(5.60207 \times 10^{15} + t(3.12115 \times 10^{15} \\ & + t(1.44053 \times 10^{15} + t(5.65924 \times 10^{14} + t(1.9292 \times 10^{14} \\ & + t(5.78786 \times 10^{13} + t(1.5434 \times 10^{13} + t(3.68318 \times 10^{12} \\ & + t(7.89253 \times 10^{11} + t(1.51779 \times 10^{11} + t(2.60193 \times 10^{10} \\ & + t(3.90290 \times 10^9 + t(4.87862 \times 10^8 + 4.30467 \\ & \times 10^7 t))))))))))))) \end{aligned}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{G}_{S_Y}(x) = \frac{0.4\Gamma[24,2x]}{\Gamma[24]}$$

Με την βοήθεια του Mathematica η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\bar{G}_{S_Y}(x) = 1.54726 \times 10^{-23} \Gamma[24,2x]$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$g_{S_Y}(x) = 2.59588 \times 10^{-16} e^{-2x} x^{23}$$

Το αντίστοιχο ασφάλιστρο της τυχαίας μεταβλητής S_Y Stop Loss που προκύπτει είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_X}(x) dx =$$

$$e^{-2t}(4.8 + t(9.2 + t(8.79 + t(5.6 + t(2.666 + t(1.01333 + t(0.319 + t(0.0864 + t(0.02031 + t(0.0042 + t(0.0007 + t(0.00013 + t(0.000027 + t(0.000002 + t(3.7587 \times 10^{-7} + t(4.51048 \times 10^{-8} + t(5.01134 \times 10^{-9} + t(5.1590 \times 10^{-10} + t(4.9133 \times 10^{-11} + t(4.3099 \times 10^{-12} + t(3.44798 \times 10^{-13} + t(2.46284 \times 10^{-14} + (1.4926 \times 10^{-15} + 6.4897 \times 10^{-17}t)t))))))))))))))))))))))))))$$

Τελικά για την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y , ισχύει ότι:

$$e_{S_Y}(t) = \frac{\Pi_{S_Y}}{\bar{G}_{S_Y}(t)}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y .

$$e_{S_Y} = \frac{1}{\Gamma[24,2t]} e^{-2t} (3.10224 \times 10^{23} + t(5.9459 \times 10^{23} + t(5.68744 \times 10^{23} + t(3.61928 \times 10^{23} + t(1.72346 \times 10^{23} + t(6.54917 \times 10^{22} + t(2.06816 \times 10^{22} + t(5.58075 \times 10^{21} + t(1.31311 \times 10^{21} + t(2.73566 \times 10^{20} + t(5.10657 \times 10^{19} + t(8.62148 \times 10^{18} + t(1.32638 \times 10^{18} + t(1.87053 \times 10^{17} + t(2.42927 \times 10^{16} + t(2.91512 \times 10^{15} + t(3.23902 \times 10^{14} + t(3.33429 \times 10^{13} + t(3.17551 \times 10^{12} + t(2.78554 \times 10^{11} + t(2.22843 \times 10^{10} + t(1.5917389 \times 10^9 + t(9.64689 \times 10^7 + 4194303.99t))))))))))))))))))$$

Προκειμένου να συγκριθούν οι συναρτήσεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y , θα κατασκευαστεί ο παρακάτω πίνακας με ενδεικτικές τιμές των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής.

Τιμή	Μέσος υπολειπόμενος χρόνος τ.μ S_X	Μέσος υπολειπόμενος χρόνος τ.μ S_Y
5	1.565762	7.00087
23	0.43718	0.93368
100	0.35320	0.56415
1000	0.33523	0.505810
10000	0.333522	0.50057

Πίνακας 7- Πίνακας Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2)$.

Από τον πίνακα προκύπτει ότι ο η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X υπολείπεται της συνάρτησης μέσου υπολειπόμενου χρόνου της συνάρτησης S_Y . Επομένως ισχύει ότι:

$$e_{S_X}(t) \leq e_{S_Y}(t) \forall t \geq 0$$

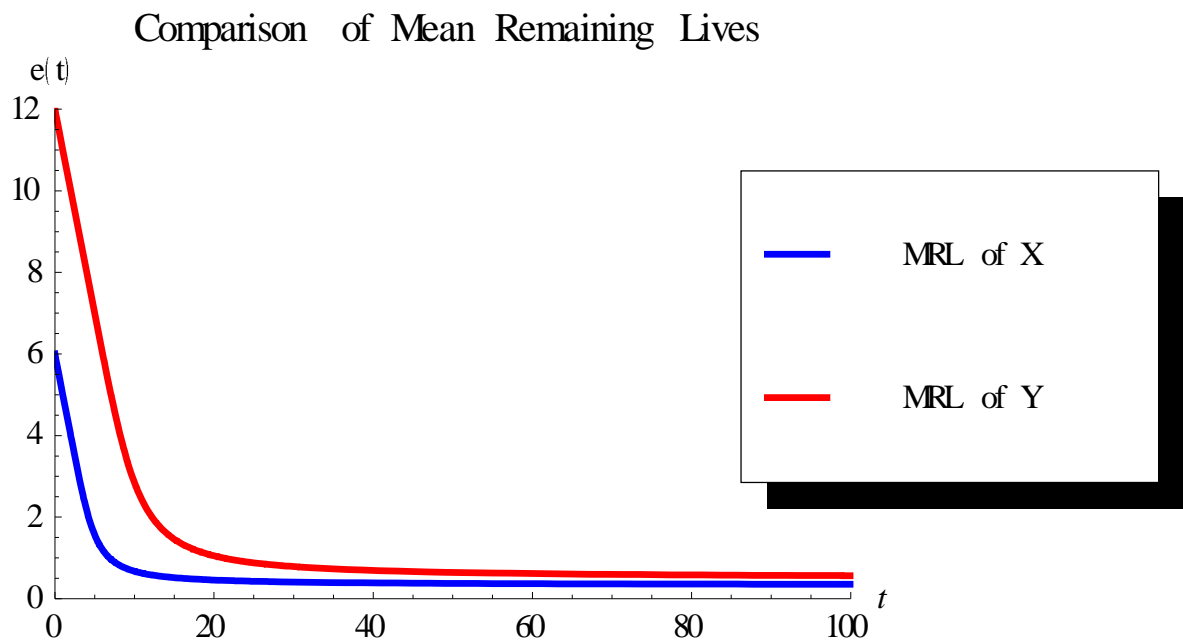
Τελικά για την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

$$S_X \leq_{\text{mrl}} S_Y$$

Συμπέρασμα: Με την βοήθεια του παραπάνω πίνακα, εξάγεται το συμπέρασμα η τυχαία μεταβλητή S_X , υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_Y ως προς την διάταξη

μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Επομένως η στοχαστική διάταξη διατηρείται στην περίπτωση του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνων.

Γραφική Παράσταση: Από την γραφική παράσταση στο διάστημα $[0,100]$, διακρίνεται η ανισοτική σχέση μεταξύ των συναρτήσεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y . Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα τιμών για τιμές μεγαλύτερες του 100, παρατηρείται ότι οι τιμές των συναρτήσεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y , διαφοροποιούνται ελάχιστα.



Γραφική Παράσταση 4.1.2 Σύγκριση Συναρτήσεων Μέσου Υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών $S_X \sim \Gamma(6,3), S_Y \sim \Gamma(8,2)$.

Εφαρμογή 4.2 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Erlang με παραμέτρους (a, b) , δηλαδή $X_i \sim \Gamma(a, b)$, $a, b > 0$, $a \in \mathbb{Z}$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ οι οποίες ακολουθούν κατανομή Erlang με παραμέτρους (c, d) , δηλαδή $Y_i \sim \Gamma(c, d)$, $c, d > 0$, $c \in \mathbb{Z}$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση:

i) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = \binom{r}{k} p^n q^{r-n}, p = 1 - q, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Εφαρμογή για $a = 6, b = 3, c = 8, d = 2, p = 0.4, q = 0.6, n = 3$

Για την τυχαία μεταβλητή S_X :

Στην τέταρτη περίπτωση της Ενότητας 3.2 αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = \frac{(-1 + (\frac{1}{q})^r) q^r \Gamma[an, x\lambda]}{\Gamma[an]}$$

Με αντικατάσταση των τιμών της εφαρμογής προκύπτει ότι η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = 2.592838338247613 \times 10^{-15} \Gamma[18, 3x]$$

Επομένως το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X ισούται με:

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_{S_X}(x) dx$$

Με την βοήθεια του Mathematica προκύπτει ότι το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\begin{aligned} \Pi_{S_X}(t) = e^{-3t} & (5.53344 + t(15.6780 + t(22.1337 + t(20.7504000000000006 \\ & + t(14.5252 + t(8.09265 + t(3.73507 + t(1.46734 + t(0.50023 \\ & + t(0.15006 + t(0.04001 + t(0.00954 + t(0.00204 + t(0.000393 \\ & + t(0.00006 + t(0.000017 + (0.0000012 + 1.11613 \\ & \times 10^{-7}t)t)))))))))))))) \end{aligned}$$

Επομένως για την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X , ισχύει ότι:

$$e_{S_X}(t) = \frac{\Pi_{S_X}}{\bar{G}_{S_X}(t)}$$

Με αντικατάσταση του ασφαλιστρού Stop Loss και την συνάρτησης δεξιάς ουράς προκύπτει η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X :

$$e_{S_X}(t) = \frac{1}{\Gamma[18,3t]} e^{-3t} (2.13412 \times 10^{15} + t(6.04668 \times 10^{15} + t(8.53649 \times 10^{15} + t(8.00296 \times 10^{15} + t(5.60207 \times 10^{15} + t(3.12115 \times 10^{15} + t(1.44053 \times 10^{15} + t(5.65924 \times 10^{14} + t(1.92928 \times 10^{14} + t(5.78786 \times 10^{13} + t(1.54342 \times 10^{13} + t(3.683183 \times 10^{12} + t(7.89253 \times 10^{11} + t(1.51779 \times 10^{11} + t(2.60193 \times 10^{10} + t(3.90290 \times 10^9 + t(4.87862 \times 10^8 + 4.30467 \times 10^7 t))))))))))))))$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y :

Αντίστοιχα η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\bar{G}_{S_Y}(x) = 3.567381 \times 10^{-23} \Gamma[24,2x]$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$g_{S_Y}(x) = 5.98507 \times 10^{-16} e^{-2x} x^{23}$$

Το αντίστοιχο ασφάλιστρο της τυχαίας μεταβλητής S_Y Stop Loss που προκύπτει είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} (x - t) g_{S_X}(x) dx = e^{-2t} (11.8771 + t(22.76445 + t(21.774795 + t(13.856639999999999 + t(6.5984 + t(2.50739 + t(0.79180 + t(0.21366 + t(0.05027 + t(0.01047 + t(0.0019 + t(0.00033 + t(0.00005 + t(0.000007 + t(9.30061 \times 10^{-7} + t(1.11607 \times 10^{-7} + t(1.24008 \times 10^{-8} + t(1.27655 \times 10^{-9} + t(1.21576 \times 10^{-10} + t(1.06646 \times 10^{-11} + t(8.531696 \times 10^{-13} + t(6.09406 \times 10^{-14} + (3.69337 \times 10^{-15} + 1.60581 \times 10^{-16} t))))))))))))))))))$$

Τελικά για την συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y , ισχύει ότι:

$$e_{S_Y}(t) = \frac{\Pi_{S_Y}}{\bar{G}_{S_Y}(t)}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y .

$$e_{S_Y} = \frac{1}{\Gamma[24,2t]} e^{-2t} (3.10224 \times 10^{23} + t(5.94596 \times 10^{23} + t(5.68744 \times 10^{23} + t(3.61928 \times 10^{23} + t(1.723461 \times 10^{23} + t(6.54917 \times 10^{22} + t(2.06816 \times 10^{22} + t(5.58075 \times 10^{21} + t(1.31311 \times 10^{21} + t(2.73566 \times 10^{20} + t(5.10657 \times 10^{19} + t(8.62148 \times 10^{18} + t(1.32638 \times 10^{18} + t(1.87053 \times 10^{17} + t(2.42927 \times 10^{16} + t(2.91512 \times 10^{15} + t(3.2390 \times 10^{14} + t(3.33429 \times 10^{13} + t(3.17551 \times 10^{12} + t(2.78554 \times 10^{11} + t(2.22843 \times 10^{10} + t(1.59173 \times 10^9 + t(9.64689 \times 10^7 + 4194303.99t))))))))))))))))))$$

Παρατηρείται ότι οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y είναι ίδιοι με τους αντίστοιχους μέσους υπολειπόμενους χρόνους ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y της Εφαρμογής 3.1. Πρόκειται για ένα λογικό επακόλουθο καθώς όπως αποδείχθηκε θεωρητικά στην παρούσα Ενότητα, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου είναι ίδια στην περίπτωση που η κατανομή του πλήθους αποζημιώσεων ακολουθεί διωνυμική, αρνητική διωνυμική ή γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q,$$

Επομένως ισχύει και σε αυτή την περίπτωση ότι:

$$e_{S_X}(t) \leq e_{S_Y}(t) \quad \forall t \geq 0$$

Τελικά για την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y ισχύει ότι:

$$S_X \leq_{\text{mrl}} S_Y$$

Συμπέρασμα: Η τυχαία μεταβλητή S_X , υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_Y ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Επομένως η στοχαστική διάταξη διατηρείται στην περίπτωση του συλλογικού προτύπου της θεωρίας κινδύνων.

4.3 Εφαρμογές Διατάξεων Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής Χρησιμοποιώντας την Εκθετική Κατανομή

Η εκθετική κατανομή εμφανίζεται συνήθως σε περιπτώσεις όπου γίνεται μελέτη του χρόνου αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να περιγράψει το ύψος των απαιτήσεων που εμφανίζεται σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων και έχει ποικίλες εφαρμογές στον αναλογισμό και την διαχείριση κινδύνων. Αποτελεί ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής για $\alpha = 1$, $\lambda > 0$ και ανήκει στην ευρύτερη οικογένεια των εκθετικών κατανομών

Για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου :

$$S = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύουν τα παρακάτω (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018):

Πρόταση 3.2: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε είναι :

$$\bar{G}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x > 0$$

Απόδειξη:

Επειδή η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$ είναι ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους $\alpha = 1$, $\lambda > 0$, τότε οι δύο ζητούμενες σχέσεις προκύπτουν από την Πρόταση 3.1 ii) για $\alpha = 1$.

Εφαρμογή 4.3 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ , δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$. Οι τυχαίες μεταβλητές

X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- vii) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας
- viii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη ανακοπής ζημίας

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^{n-1}, \quad p = 1 - q$$

Όπως αποδείχθηκε στην Εφαρμογή 3.3 για την τυχαία μεταβλητή X ισχύουν τα παρακάτω:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{F}_X(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Το αντίστοιχο ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Επομένως ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος της τυχαίας μεταβλητής X , μπορεί να υπολογισθεί μέσω της παρακάτω σχέσης που παρουσιάστηκε στο Θεώρημα 1.24.

$$e_X(t) = E(T_X) = \frac{\int_t^{\infty} [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)}$$

Συνεπώς η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$e_X(t) = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)} = -\frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}}{-e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda}$$

Με τον ίδιο τρόπο για την τυχαία μεταβλητή Y ισχύουν τα παρακάτω:

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

Η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$e_Y(t) = E(T_Y) = \frac{\int_t^{\infty} [1 - F_Y(y)] dy}{1 - F_Y(t)} = -\frac{\Pi_Y(t)}{\Pi'_Y(t)}$$

Θα γίνει σύγκριση των μέσων υπολειπόμενων χρόνων των τυχαίων μεταβλητών X, Y .

$$\lambda \leq \mu \iff \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\mu} \iff e_X(t) \geq e_Y(t)$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής X ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής:

$$X \geq_{\text{mrl}} Y$$

ii) Για την τυχαία μεταβλητή S_X :

Η τυχαία μεταβλητή X παριστά το ύψος ατομικής απαίτησης του χαρτοφυλακίου X , τότε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ και η τυχαία μεταβλητή $S_X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, N \geq 1$. Επειδή η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής έπεται ότι και η τυχαία μεταβλητή S είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή στο $(0, \infty)$. Όπως αποδείχθηκε αναλυτικά και στην Εφαρμογή 3.3 για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και την συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X , ισχύουν τα παρακάτω:

$$g_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad t > 0$$

Για $x > 0$:

$$g_X(x) = p\lambda e^{-p\lambda x}$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή S_X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $p\lambda$.

Επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{G}_X(t) = e^{-p\lambda t}, \quad t > 0$$

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-p\lambda x} dx = \frac{1}{p\lambda} e^{-p\lambda t}, \quad t > 0$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.24 η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας το ασφάλιστρο Stop Loss, μέσω της παρακάτω σχέσης

$$e_{S_X}(t) = E(T_X) = \frac{\int_t^{\infty} [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X , είναι:

$$e_{S_X}(t) = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)} = -\frac{\frac{e^{-pt\lambda}}{p\lambda}}{-e^{-pt\lambda}} = \frac{1}{p\lambda}$$

Για την τυχαία μεταβλητή S_Y :

Η τυχαία μεταβλητή Y παριστά το ύψος ατομικής απαίτησης του χαρτοφυλακίου Y , τότε $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ και η τυχαία μεταβλητή $S_Y = Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N, N \geq 1$. Επειδή η τυχαία μεταβλητή Y είναι συνεχής έπεται ότι και η τυχαία μεταβλητή S είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή στο $(0, \infty)$. Όπως αποδείχθηκε αναλυτικά και στην Εφαρμογή 3.3 για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και την συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_Y , ισχύουν τα παρακάτω:

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y θα ισούται με :

$$g_Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x > 0$$

Για $x > 0$:

$$g_Y(x) = p\mu e^{-p\mu x}$$

Επομένως η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\bar{G}_Y(t) = e^{-p\mu t}, \quad t > 0$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y , είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_X(x) dx = \int_t^{\infty} e^{-p\mu x} dx = \frac{1}{p\mu} e^{-p\mu t}, \quad t > 0$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.24 η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας το ασφάλιστρο Stop Loss, μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$e_{S_Y}(t) = E(T_Y) = \frac{\int_x^{\infty} [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(x)} = -\frac{\Pi_Y(x)}{\Pi'_Y(x)}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y , είναι:

$$e_{S_Y}(t) = -\frac{\Pi_{S_Y}(t)}{\Pi'_{S_Y}(t)} = -\frac{\frac{e^{-pt\mu}}{p\mu}}{-e^{-pt\mu}} = \frac{1}{p\mu}$$

Θα γίνει σύγκριση των συναρτήσεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .

$$\lambda \leq \mu \iff \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\mu} \iff \frac{1}{\lambda p} \geq \frac{1}{\mu p} \iff e_{S_X}(t) \geq e_{S_Y}(t)$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή S_Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_X ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής:

$$S_X \geq_{\text{mrl}} S_Y$$

Εφαρμογή 4.4 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ , δηλαδή $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- i) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.
- ii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, N = 1, 2, 3, \dots$$

i) Όπως αποδείχθηκε στο πρώτο ερώτημα της Εφαρμογή 4.3, για τις συναρτήσεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών X, Y ισχύει ότι:

$$e_X(t) \geq e_Y(t) \iff X \geq_{\text{mrl}} Y$$

ii) Για την τυχαία μεταβλητή S_X :

Όπως αποδείχτηκε στην Εφαρμογή 3.4, όταν η τυχαία μεταβλητή $N \sim G_0(p)$ και η τυχαία μεταβλητή $X \sim Exp(\lambda)$, ισχύουν τα κάτωθι για την τυχαία μεταβλητή $S_X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N, N \geq 1$:

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\bar{G}_{S_X}(x) = qe^{-p\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Αντιστοίχως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$g_{S_X}(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ pq\lambda e^{-p\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Επομένως, μπορεί να υπολογισθεί εύκολα το ασφάλιστρο Stop Loss:

$$\Pi_{S_X}(t) = \int_t^\infty \bar{G}_{S_X}(x) dx = \int_t^\infty qe^{-p\lambda x} dx = \frac{q}{p\lambda} e^{-p\lambda t}, \quad t > 0$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.24 η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας το ασφάλιστρο Stop Loss, μέσω της παρακάτω σχέσης

$$e_{S_X}(t) = E(T_{S_X}) = \frac{\int_t^\infty [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = -\frac{\Pi_{S_X}(t)}{\Pi'_{S_X}(t)}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X , είναι:

$$e_{S_X}(t) = -\frac{\Pi_{S_X}(t)}{\Pi'_{S_X}(t)} = -\frac{\frac{e^{-p\lambda t} q}{p\lambda}}{-e^{-p\lambda t} q} = \frac{1}{p\lambda}$$

Για την τυχαία μεταβλητή Y:

Ομοίως για την τυχαία κατανομή Y προκύπτουν ότι :

Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\bar{G}_Y(x) = qe^{-p\mu x}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$g_Y(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ pq\mu e^{-p\mu x}, & x > 0 \end{cases}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = \int_t^{\infty} \bar{G}_Y(x) dx = \int_t^{\infty} q e^{-p\mu x} dx = \frac{q}{p\mu} e^{-p\mu t}, \quad t > 0$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y , είναι:

$$e_{S_Y}(t) = -\frac{\Pi_{S_Y}(t)}{\Pi'_{S_Y}(t)} = -\frac{\frac{e^{-p\mu t} q}{p\mu}}{-e^{-p\mu t} q} = \frac{1}{p\mu}$$

Θα γίνει σύγκριση των συναρτήσεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .

$$\lambda \leq \mu \stackrel{\lambda, \mu > 0}{\iff} \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\mu} \iff \frac{1}{\lambda p} \geq \frac{1}{\mu p} \iff e_{S_X}(t) \geq e_{S_Y}(t)$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή S_Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_X ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής:

$$S_X \geq_{\text{mrl}} S_Y$$

4.4 Εφαρμογές Διατάξεων Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής Χρησιμοποιώντας Μείξεις Εκθετικών Κατανομών

Οι στοχαστικές διατάξεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής παρουσιάζουν σημαντικές εφαρμογές και ιδιαίτερο ενδιαφέρον και στην περίπτωση που η κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων ακολουθεί μείξεις εκθετικών κατανομών. Η παρούσα ενότητα αποτελεί συνέχεια της Ενότητας 3.4, στην οποία παρουσιάστηκαν εφαρμογές διατάξεων ανακοπής ζημίας, χρησιμοποιώντας μείξεις εκθετικών κατανομών. Στην ενότητα αυτή, θα γίνει προσέγγιση των διατάξεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για ατομικούς κινδύνους που ακολουθούν μείξεις εκθετικών κατανομών. Ο ορισμός της κατανομής που ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών αναλύθηκε στην Ενότητα 3.4 και είναι ο κάτωθι:

Μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$a_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + a_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + \dots + a_k \beta_k e^{-\beta_k x} = \sum_{i=1}^k a_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \quad a_1, a_2, \dots, a_k > 0$$

και ταυτόχρονη αναγκαία συνθήκη:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

λέγεται μείξη k εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ και αντίστοιχα βάρη $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. (Πολίτης, 2018).

Επίσης θα μελετηθεί το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου στην περίπτωση των συνολικών αποζημιώσεων. Η τυχαία μεταβλητή S_X των συνολικών αποζημιώσεων είναι η εξής:

$$S_X = \begin{cases} 0, & N = 0 \\ X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

$N \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$X_1, X_2, \dots \sim f_X(x) = \theta \alpha e^{-\alpha x} + (1 - \theta) \beta e^{-\beta x}, x > 0, \beta > \alpha, \theta > 0$$

X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

Αρχικά, θα υπολογισθεί ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής για την περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος της τυχαίας μεταβλητής X , μπορεί να υπολογισθεί μέσω της παρακάτω σχέσης που παρουσιάστηκε στο Θεώρημα 1.24.

$$e_X(t) = E(T_X) = \frac{\int_t^\infty [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)}$$

Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ οι οποίες ακολουθούν ακολουθεί την μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(x) = \theta m e^{-x\mu} + (1 - \theta) m e^{-xm}$$

Μέσω της Εφαρμογής 3.5, έχει υπολογισθεί το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας στην περίπτωση που το μέγεθος ατομικού κινδύνου ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών.

Το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας της τυχαίας μεταβλητής Y , σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\Pi_Y(t) = \frac{e^{-t(m+\mu)}(e^{mt}m\theta - e^{t\mu}(-1 + \theta)\mu)}{m\mu}$$

Συνεπώς η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\begin{aligned} e_Y(t) &= -\frac{\Pi_Y(t)}{\Pi'_Y(t)} \\ &= -\frac{e^{-t(m+\mu)}(e^{mt}m\theta - e^{t\mu}(-1 + \theta)\mu)}{m\mu\left(\frac{e^{-t(m+\mu)}(-m - \mu)(e^{mt}m\theta - e^{t\mu}(-1 + \theta)\mu)}{m\mu} + \frac{e^{-t(m+\mu)}(e^{mt}m^2\theta - e^{t\mu}(-1 + \theta)\mu^2)}{m\mu}\right)} \end{aligned}$$

Με την βοήθεια του Mathematica, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής απλοποιείται ως εξής:

$$e_Y(t) = -\frac{\Pi_Y(t)}{\Pi'_Y(t)} = \frac{1}{m - \frac{e^{mt}m\theta(m - \mu)}{e^{mt}m\theta - e^{t\mu}(-1 + \theta)\mu}}$$

Σε συνέχεια της Εφαρμογής 3.5, θα γίνει προσπάθεια εξαγωγής αντίστοιχων συμπερασμάτων και για την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Συνεπώς στην εφαρμογή που θα ακολουθήσει, θα χρησιμοποιηθούν τα ίδια δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην Εφαρμογή 3.5. Στόχος της εφαρμογής και σε αυτή την περίπτωση είναι να μελετηθεί αν διατηρείται η στοχαστική διάταξη που ισχύει για τους ατομικούς κινδύνους X_i, Y_i και στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου.

Εφαρμογή 4.5 : Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, οι οποίες ακολουθούν ακολουθεί την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

και ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ οι οποίες ακολουθούν ακολουθεί την μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(x) = \theta \mu e^{-x\mu} + (1 - \theta) m e^{-xm}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X_i, Y_i εκφράζουν το ύψος των αποζημιώσεων που εμφανίζονται στα χαρτοφυλάκια X, Y αντίστοιχα. Θα γίνει σύγκριση :

- i) Των ατομικών κινδύνων X_i, Y_i ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

ii) Των συνολικών αποζημιώσεων των χαρτοφυλακίων X, Y ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Θα γίνει σύγκριση των δύο τυχαίων μεταβλητών, αν είναι γνωστό ότι:

$$\frac{1}{\lambda} = \theta \frac{1}{\mu} + (1 - \theta) \frac{1}{m}, \lambda, \mu, m \geq 1.$$

Για τα δεδομένα της εφαρμογής, έστω ότι το πλήθος των αποζημιώσεων ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = pq^n, \quad p = 1 - q, n = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

Εφαρμογή για :

$$\lambda = 4, \quad \mu = 3, \quad m = 6, \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad p = 0.4, \quad q = 0.6$$

i) Οι τυχαίες μεταβλητές που συγκρίνονται στην παρούσα εφαρμογή έχουν ίδια μέση τιμή.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

$$E(Y) = \theta \frac{1}{m} + (1 - \theta) \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}$$

Στην Εφαρμογή 2.17 αποδείχθηκε ότι η μείξη εκθετικών κατανομών (τυχαία μεταβλητή Y) παρουσιάζει μεγαλύτερο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής από την εκθετική κατανομή (τυχαία μεταβλητή X) δεδομένου της ισότητας των αντίστοιχων μέσων τιμών τους.

Για τα δεδομένα της παρούσας εφαρμογής, υπολογίσθηκαν στην Εφαρμογή 3.5 τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών X, Y αντίστοιχα:

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\Pi_X(t) = \frac{e^{-4t}}{4}$$

Το ασφάλιστρο Stop Loss της τυχαίας μεταβλητής Y είναι:

$$\Pi_Y(t) = \frac{1}{12} e^{-6t} (1 + 2e^{3t})$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος των τυχαίων μεταβλητών X, Y , μπορεί να υπολογισθεί μέσω της παρακάτω σχέσης που παρουσιάστηκε στο Θεώρημα 1.24.

$$e_X(t) = E(T_X) = \frac{\int_t^{\infty} [1 - F_X(y)] dy}{1 - F_X(t)} = -\frac{\Pi_X(t)}{\Pi'_X(t)} = -\frac{\frac{e^{-4t}}{4}}{-e^{-4t}} = \frac{1}{4}$$

$$e_Y(t) = -\frac{\Pi_Y(t)}{\Pi'_Y(t)} = \frac{1}{3 + \frac{3}{1 + 2e^{3t}}}$$

Για $t = 0$, ισχύει ότι:

$$e_X(0) = e_Y(0) = \frac{1}{4}$$

Έστω συνάρτηση $g(t)$, τέτοια ώστε:

$$g(t) = e_Y(t) = \frac{1}{3 + \frac{3}{1 + 2e^{3t}}}, \quad t \geq 0$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $g(t)$, είναι:

$$g'(t) = \frac{1}{4 + 4\text{Cosh}[3t]}$$

όπου

$$\text{Cosh}[3t] = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}$$

Η πρώτη παράγωγος μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$g'(t) = \frac{1}{4 + 2(e^{3t} + e^{-3t})} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση $g(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Επομένως ισχύουν τα κάτωθι:

$$t \geq 0 \xrightarrow{\text{g γνησίως αύξουσα}} (t) \geq g(0) = \frac{1}{4} = e_X(t)$$

Όμως $g(t) = e_Y(t)$, συνεπώς προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

$$e_X(t) \leq e_Y(t) \quad \forall t \geq 0$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή X υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής Y ως προς την στοχαστική διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

$$X \leq_{\text{mrl}} Y$$

ii) Στην εφαρμογή 3.5 υπολογίσθηκαν τα ασφάλιστρα Stop Loss των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y . Οι συναρτήσεις μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής θα υπολογισθούν με την βοήθεια του θεωρήματος 1.24.

Το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$\Pi_{S_X}(t) = \frac{0.6}{1.6} e^{-(1.6)t}$$

Η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_X είναι:

$$e_{S_X}(t) = E(T_{S_X}) = -\frac{\Pi_{S_X}(t)}{\Pi'_{S_X}(t)} = -\frac{0.375e^{-1.6t}}{-0.6e^{-1.6t}} = 0.625$$

Το ασφάλιστρο ανακοπής ζημίας της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\Pi_{S_Y}(t) = 0.01136e^{-4.8t} + 0.36363e^{-1.5t}$$

Η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$\begin{aligned} e_{S_Y}(t) &= E(T_{S_Y}) = -\frac{\Pi_{S_Y}(t)}{\Pi'_{S_Y}(t)} \\ &= -\frac{0.01136e^{-4.8t} + 0.36363e^{-1.5t}}{-0.054545e^{-4.8t} - 0.545454e^{-1.5t}} \end{aligned}$$

Με την βοήθεια του Mathematica και στρογγυλοποίηση στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο, η συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της τυχαίας μεταβλητής S_Y είναι:

$$e_{S_Y}(t) = 0.66666 + \frac{1}{-2.18181 - 21.81818e^{3.3t}}$$

Θα γίνει σύγκριση των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής των συναρτήσεων μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής των τυχαίων μεταβλητών S_X, S_Y .

Έστω συνάρτηση $h(t)$, τέτοια ώστε:

$$h(t) = e_{S_Y}(t) = 0.66666 + \frac{1}{-2.18181 - 21.81818e^{3.3t}}, \quad t \geq 0$$

Για $t = 0$:

$$h(0) = 0.62502$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $h(t)$ είναι:

$$h'(t) = \frac{72.00006e^{3.3t}}{(2.19192 + 21.8182e^{3.3t})^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση $h(t)$ είναι γνησίως αύξουσα.

$$t \geq 0 \xleftrightarrow{\text{η γνησίως αύξουσα}} h(t) \geq h(0) = 0.62502 > e_X(t) = 0.625$$

Επομένως: $h(t) > e_{S_X}(t)$

Όμως για την συνάρτηση $h(t)$ ισχύει ότι:

$$h(t) = e_{S_Y}(t)$$

Τελικά προκύπτει ότι:

$$e_{S_X}(t) < e_{S_Y}(t) \forall t \geq 0$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή S_Y υπολείπεται της τυχαίας μεταβλητής S_X ως προς την διάταξη μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής:

$$S_X \leq_{\text{mrl}} S_Y$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- M. Denuit, M. Goovaerts, J. Dhaene, R. Kaas (2005), Actuarial Theory for Dependent Risks, Measures, Orders and Models, John Wiley & Sons, Ltd.
- M.J.Goovaerts, R.Kaas, AE van Heerwaarden, T. Bauwelinckx (1990), Effective Actuarial Methods, Elsevier Science Publishers BV, Amsterdam.
- M. Shaked, J.G Shanthikumar (2007), Stochastic Orders (Second edition), Springer New York.
- R.Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M.Denuit (2008), Modern Actuarial Theory Using R, (Second edition), Springer New York.
- R.Horst (2014), The hazard rate, Theory and Inference, Department of Economics and Management Science, Chair of Econometrics and Statistics, Justus-Leibig University, Giessen, Germany.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γ. Πιτσέλης, (2018), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Ζημιοκατανομές και Θεωρία Ακραίων Τιμών, ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου».
- Ε. Χατζηκωνσταντινίδης, (2018), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Θεωρία Κινδύνου Ι, ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου».
- Κ. Πολίτης, (2018), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Θεωρία Κινδύνου ΙΙ, ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου»

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α –ΕΝΤΟΛΕΣ MATHEMATICA

Εφαρμογή 2.1:

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
FY[x_] := 1 - (1/2) x /; 0 ≤ x ≤ 2
```

```
FY[x_] := 0 /; x > 2
```

```
FX[x_] := 1 - (1/4) x /; 0 ≤ x ≤ 1
```

```
FX[x_] := (7/8) - ((1/8) x) /; 1 < x ≤ 2
```

```
FX[x_] := (15/8) - ((5/8) x) /; 2 < x ≤ 3
```

```
Plot[{FY[x], FX[x]}, {x, 0, 3}, PlotRange → {{0, 3}, {0, 2}}, AxesLabel →  
{t, "prob"}, PlotStyle →  
{{Blue, Thickness[Large]}, {Green, Thickness[Large]}}, PlotLegend →  
{"Survival of Y", "Survival of X"}, LegendPosition → {0.2, -0.2}, PlotLabel →  
"Comparison of survival distributions"]
```

Εφαρμογή 2.2:

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
F1[x_] := Exp[-((x/2)^3)]
```

```
F2[x_] := Exp[-((x/4)^3)]
```

```
Plot[{F1[x], F2[x]}, {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 10}, {0, 1}}, AxesLabel  
→ {t, "prob"}, PlotStyle → {{Blue, Thickness[Large]}, {Black, Thicknes  
s[Large]}}, PlotLegend → {"Survival of X", "Survival of  
Y"}, LegendPosition → {0.2, -0.2}, PlotLabel → "Comparison of  
Survival Distributions"]
```

Εφαρμογή 2.3:

```
F1[t_] := CDF[GammaDistribution[100, 1], t]
```

```
f2[t_] := (1/100) Exp[-(1/100)t]
```

```
f2[t]
```

```
F2[x_] := FullSimplify[Integrate[f2[t], {t, 0, x}]]
```

```
F2[x]
```

```
NSolve[F1[x] - F2[x] == 0, x]
```

```
F2[103.409349]
```

```
0.644451
```

F1[103.409349]

0.644452

```
Plot[{F1[x],F2[x]},{x,0,200},PlotRange→{{0,200},{0,1}},AxesLabel→{t,"prob"},PlotStyle→ {
{Thick,Red},{Thick,Blue}},PlotLegend→{"CDF of X~Gamma","CDF of
Y~Exponential"},LegendPosition→{1.5,-0.3},PlotLabel→"Comparison of Cumulative
Functions"]
```

```
Plot[{1-F1[x],1-F2[x]},{x,0,200},PlotRange→{{0,200},{0,1}},AxesLabel→{t,"prob"},PlotStyle→ {
{Thick,Red},{Thick,Blue}},PlotLegend→{"Survival of X~Gamma","Survival of
Y~Exponential"},LegendPosition→{1.5,-0.3},PlotLabel→"Comparison of Survival Functions"]
```

Με την ίδια συλλογιστική σκέψη που χρησιμοποιήθηκε στην Εφαρμογή 2.3, δημιουργήθηκε ο κώδικας της Εφαρμογής 2.4.

Εφαρμογή 2.6:

```
Needs["PlotLegends"]
```

```
f3[t_]:= a b^a / (t+b)^(a+1)
```

```
f4[t_]:= c d^c / (t+d)^(c+1)
```

```
g[t]:=f4[t]/f3[t]
```

```
r[t]=FullSimplify[D[g[t],t]]
```

```
f5[t_]:= 4 200^4 / (t+200)^(4+1)
```

```
f6[t_]:= 3 250^3 / (t+250)^(3+1)
```

```
h[t_]:= f6[t]/f5[t]
```

```
h[t]
```

```
h1[t_]:=FullSimplify[ D[h[t],t]]
```

```
h1[t]
```

```
Plot[{f5[t],f6[t]},{t,0,200},PlotRange→{{0,200},{0,0.05}},AxesLabel→{t,"f(t)"},PlotStyle→ {
{Thick,Orange},{Thick,Blue}},PlotLegend→{"PDF of X","PDF of Y"},LegendPosition→{-0.3,-
0.2},PlotLabel→"Comparison of PDF Functions"]
```

```
Plot[{h[t]},{t,0,200},PlotRange→{{0,200},{0,10}},AxesLabel→{t,"h(t)"},PlotStyle→ { {Thick
,Red}},PlotLegend→{"Likelihood-Ratio"},LegendPosition→{-0.3,-0.2},PlotLabel→"Likelihood-
Ratio"]
```

```
Plot[{h1[t]},{t,0,200},PlotRange→{{0,200},{0,0.01}},AxesLabel→{t,"h'(t)"},PlotStyle→ { {Thick
,Blue}},PlotLegend→{"First Derivative"},LegendPosition→{-0.0,-0.4},PlotLabel→"Likelihood-
Ratio"]
```

Με ανάλογο τρόπο, δημιουργήθηκαν και οι κώδικες των Εφαρμογών 2.7,2.8.2.9

Εφαρμογή 2.10:

```
F1[x_]:= (θ1/(x+θ1))^a
```

```
F2[x_]:= (θ2/(x+θ2))^b
```

```
SL1[t_]:= Integrate[F1[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL2[t_]:= Integrate[F2[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL1[t]
```

```
SL2[t]
```

```
g[t_]:= SL2[t]-SL1[t]
```

```
g[t]
```

```
g2[t_]:= D[g[t],t]
```

```
g2[t]
```

```
g1[t_]:= FullSimplify[D[g[t],t]]
```

```
g1[t]
```

```
F3[x_]:= (150/(x+150))^3
```

```
F4[x_]:= (90/(x+90))^4
```

```
SL3[t_]:= Integrate[F3[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL4[t_]:= Integrate[F4[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL3[t]
```

```
SL4[t]
```

```
h[t_]:= SL3[t]-SL4[t]
```

```
h[t]
```

```
h1[t_]:= FullSimplify[D[h[t],t]]
```

```
h1[t]
```

```
Plot[{SL3[t],SL4[t]},{t,0,10},PlotRange→{{0,10},{0,100}},AxesLabel→{t,"Π(t)"},PlotStyle→{{Orange,Thickness[Large]},{Blue,Thickness[Large]}},PlotLegend→{"Stop Loss of X","Stop Loss of Y"},LegendPosition→{0.65,-0.4},PlotLabel→"Comparison of Stop Loss Premiums" ]
```

Με τον ίδιο τρόπο δημιουργήθηκε ο κώδικας της Εφαρμογής 2.12

Εφαρμογή 2.11:

```
f1[x_]:= b^a x^(a-1)Exp[-b x]/Gamma[a]
```

```
f1[x]
```

```
f2[x_]:= d^c x^(c-1)Exp[-d x]/Gamma[c]
```

```

f2[x]
SL1[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f1[x],{x,t,Infinity}]]
SL2[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f2[x],{x,t,Infinity}]]
SL1[t]
SL2[t]
f3[x_]:= 3^6 x^(6-1)Exp[-3 x]/Gamma[6]
SL3[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f3[x],{x,t,Infinity}]]
SL3[t]
f4[x_]:= 2^8 x^(8-1)Exp[-2x]/Gamma[8]
f3[x]
f4[x]
SL4[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f4[x],{x,t,Infinity}]]
SL4[t]
SL3[0.5]
SL4[0.5]
SL3[1.2]
SL4[1.2]
SL3[2]
SL4[2]
SL3[10]
SL4[10]
SL3[100]
SL4[100]
SL3[1000]
SL4[1000]
Plot[{SL3[t],SL4[t]},{t,0,5},PlotRange->{{0,5},{0,5}},AxesLabel->{t,"Π(t)"},PlotStyle->{{Red,Thick-
ness[Large]},{Blue,Thickness[Large]}}, PlotLegend->{"Stop Loss of X ","Stop Loss of
Y"},LegendPosition->{0.65,-0.4},PlotLabel->"Comparison of Stop Loss Premiums" ]

```

Με παρόμοιο τρόπο δημιουργήθηκε ο κώδικας της Εφαρμογής 2.13

Εφαρμογή 2.14:

```
f1 [t_] := 9 t^2 / (1+t^3)
```

```
f2[t_]:= 15 t^2/ (1+t^3)
```

```
Plot[{f1[t], f2[t]}, {t, 0, 20}, PlotRange -> {{0, 20}, {0, 10}}, AxesLabel -> {t, "r(t)"}, PlotStyle  
-> {{Green, Thickness[Large]}, {Red, Thickness[Large]}}, PlotLegend  
-> {"Hazard Rate of X", "Hazard Rate of Y"}, LegendPosition  
-> {-0.3, -0.2}, PlotLabel -> "Comparison of Hazard Rates"]
```

Ανάλογοι είναι οι κώδικες των Εφαρμογών 2.15, 2.16.

Εφαρμογή 2.17:

```
F1[y_]:=Exp[-(y/λ)]
```

```
e1[t_]:= Integrate[F1[y],{y,t,Infinity}]/ F1[t]
```

```
e1[t]
```

```
f2[y_]:= θ (1/μ) Exp[-(1/μ)y]+ (1-θ) (1/m)Exp[-(y/m)]
```

```
f2[y]
```

```
F2[t]:= Integrate[f2[y],{y,t,Infinity}]
```

```
F2[t]
```

```
F2[y_]:= -Exp[-(y/m)](-1+θ)+ θ Exp[-(y/μ)]
```

```
F2[y]
```

```
e2[t_]:= Integrate[F2[y],{y,t,Infinity}]/ F2[t]
```

```
e2[t]
```

```
e2[t_]:= FullSimplify[Integrate[F2[y],{y,t,Infinity}]/ F2[t]]
```

```
e2[t]
```

```
h[t_]:= FullSimplify[Exp[(t/20)](-1+(1/2))(-10+20)/((Exp[(t/20)] (-1+(1/2))-(Exp[(t/10)] (1/2)))]
```

```
h[t]
```

```
dh[t_]:= D[h[t],t]
```

```
dh[t]
```

```
h[0]
```

```
Limit[h[x],x->Infinity]
```

```
h1[t_]:= 20-(10/ (1+ Exp[t/20]))
```

```
Plot[{h1[t],15},{t,0,1000},PlotRange->{{0,1000},{0,20}},AxesLabel->{t,"e(t)"},PlotStyle->{{Blue,  
Thickness[Large]}, {Red,Thickness[Large]}},PlotLegend->{"MRL of Y ", "MRL of  
X"},LegendPosition->{0.6,-0.4},PlotLabel->"Comparison of Mean Remaining Lives" ]
```

Εφαρμογή 2.18:

```
f1[x_]:= b^θ1 x^(θ1-1)Exp[-b x]/ Gamma[θ1]
```

```
f1[x]
```

```

SL1[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f1[x],{x,t,Infinity}]]
SL1[t]
EX1[t_]:=FullSimplify[-SL1[t]/D[SL1[t],t]]
EX1[t]
ConditionalExpression[(-b t+θ1+e-b t/(b-θ1 t-θ1 Gamma[θ1]+(b t)-θ1 (-
Gamma[θ1]+Gamma[θ1,b t])))/b,(t>0 | t∉Reals)&&Re[b]>0]
F2[x_]:= (θ1/ (x+θ1))^b
F2[x]
EX2[t_]:= FullSimplify[Integrate[F2[x],{x,t,Infinity}]/ F2[t]]
EX2[t]
f1[x_]:= 3^10 x^(10-1)Exp[-3 x]/ Gamma[10]
f1[x]
SL1[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f1[x],{x,t,Infinity}]]
SL1[t]
EX1[t_]:=FullSimplify[-SL1[t]/D[SL1[t],t]]
EX1[t]
EX1[t_]:= (44800+9t(13440+t(17920+t(15680+9t(1120+t(560+t(224+3t(24+t(6+t)))))))) /
(3(4480+3t(4480+3t(2240+t(2240+3t(560+3t(112+t(56+3t(8+t(3+t))))))))))
EX1[t]
EX2[t_]:= (t+10)/ 2
EX2[t]
Plot[{EX1[t],EX2[t]},{t,0,50},PlotRange→{{0,50},{0,80}},AxesLabel→{t,"e(t)"},PlotStyle→{{Red,Thick
ness[Large]},{Black,Thickness[Large]}}, PlotLegend→{"MRL of X ","MRL of
Y"},LegendPosition→{0.6,-0.4},PlotLabel→"Comparison of Mean Remaining Lives" ]

```

Εντολές 3^ο Κεφαλαίου:

Ενότητα 3.2

1^η περίπτωση:

$$p=1-q$$

$$G1[x_]:=FullSimplify[Exp[-λ x] *Sum [p q^(n)(λ^j x^j)/j!,{n,1,Infinity},{j,0,(an-1)}]]$$

$$G1[x]$$

$$g1[x_]:= -D[G1[x],x]$$

$$g1[x]$$

$$SL1[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g1[x],{x,t,Infinity}]]$$

$$SL1[t]$$

2η περίπτωση

$$p=1-q$$

$$G2[x_]:=FullSimplify[Exp[-λ x] *Sum [p q^(n-1)(λ^j x^j)/j!,{n,1,Infinity},{j,0,(an-1)}]]$$

$$G2[x]$$

$$g2[x_]:= -D[G2[x],x]$$

$$g2[x]$$

$$SL2[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g2[x],{x,t,Infinity}]]$$

$$SL2[t]$$

3η περίπτωση

$$G3[x_]:=FullSimplify[Exp[-λ x] *Sum [(p^r) q^(n)(r+n-1)!(λ^j x^j)/ (j!(r-1)n!),{n,1,Infinity},{j,0,(an-1)}]]$$

$$G3[x]$$

$$g3[x_]:= -D[G3[x],x]$$

$$g3[x]$$

$$SL3[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g3[x],{x,t,Infinity}]]$$

$$SL3[t]$$

4^η περίπτωση:

$$p=1-q$$

$$G4[x_]:=FullSimplify[Exp[-λ x] *Sum [r!(p^n) q^(r-n)(λ^j x^j)/(j!n! (r-n)!),{n,1,Infinity},{j,0,(an-1)}]]$$

$$G4[x]$$

```

g4[x_]:= -D[G4[x],x]
g4[x]
FullSimplify[Integrate[(x-t)g4[x],{x,t, Infinity}]]

```

Εφαρμογή 3.1:

```
G5[x_]:= 0.4 Gamma[18,3 x]/ Gamma[18]
```

```
G5[x]
```

```
g5[x_]:= -D[G5[x],x]
```

```
g5[x]
```

```
SL5[t_]:= FullSimplify[Integrate[G5[x],{x,t,Infinity}]]
```

```
SL5[t]
```

```
SL5[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x - t)g5[x], {x, t, Infinity}]]
```

```
SL5[t]
```

```
G6[x_]:= 0.4 Gamma[24,2 x]/ Gamma[24]
```

```
G6[x]
```

```
g6[x_]:= -D[G6[x],x]
```

```
g6[x]
```

```
SL6[t_]:= FullSimplify[Integrate[G6[x],{x,t,Infinity}]]
```

```
SL6[t]
```

```
SL6[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x - t)g6[x], {x, t, Infinity}]]
```

```
SL6[t]
```

```
Plot[{SL5[t],SL6[t]},{t,0,15},PlotRange->{{0,15},{0,6}},AxesLabel->{t,"Π(t)"},PlotStyle->
{{Thick,Red},{Thick,Blue}},PlotLegend->{"Stop Loss of X","Stop Loss of
Y"},LegendPosition->{0.3,-0.2},PlotLabel->"Comparison of Stop Loss Premiums"]
```

```
Plot[{SL5[t],SL6[t]},{t,15,20},PlotRange->{{15,20},{0,0.1}},AxesLabel->{t,"Π(t)"},PlotStyle->
{{Thick,Red},{Thick,Blue}},PlotLegend->{"Stop Loss of X","Stop Loss of
Y"},LegendPosition->{0.1,-0.2},PlotLabel->"Comparison of Stop Loss Premiums"]
```

```
Plot[{SL5[t],SL6[t]},{t,23,30},PlotRange->{{23,23},{0,0.01}},AxesLabel->{t,"Π(t)"},PlotStyle->
{{Thick,Red},{Thick,Blue}},PlotLegend->{"Stop Loss of X","Stop Loss of
Y"},LegendPosition->{0.1,-0.2},PlotLabel->"Comparison of Stop Loss Premiums"]
```

```
SL5[5]
```

```
SL6[6]
```

```
SL5[10]
```

```
SL6[10]
```


SL5[15]

SL6[15]

SL5[23]

SL6[23]

SL5[50]

SL6[50]

SL5[100]

SL6[100]

SL5[100]

SL5[1000]

SL6[1000]

Με τον ίδιο τρόπο δημιουργήθηκε ο κώδικας της Εφαρμογής 3.2.

Ενότητα 3.3

$p=1-q$

$g1[x_]:= FullSimplify[Exp[-\lambda x] *Sum [p q^{(n)} \lambda^n x^{(n-1)}/(n-1)!,\{n,1,Infinity\}]$

$g1[x]$

$G1[x_]:= FullSimplify[Integrate[g1[t],\{t,x,Infinity\}]$

$G1[x]$

$SL1[t_]:= Integrate[(x-t)g1[x],\{x,t,Infinity\}]$

$SL1[t]$

$p=1-q$

$g2[x_]:= FullSimplify[Exp[-\lambda x] *Sum [p q^{(n-1)} \lambda^n x^{(n-1)}/(n-1)!,\{n,1,Infinity\}]$

$g2[x]$

$G2[x_]:= FullSimplify[Integrate[g2[t],\{t,x,Infinity\}]$

$G2[x]$

$SL2[t_]:= Integrate[(x-t)g2[x],\{x,t,Infinity\}]$

$SL2[t]$

Εφαρμογή 3.3:

$F1[t_]:= Exp[-\lambda t]$

$F2[t_]:= Exp[-\mu t]$

$SL1[t_]:= Integrate[F1[x],\{x,t,Infinity\}]$

SL1[t]

SL2[t_]:= Integrate[F2[x],{x,t,Infinity}]

SL2[t]

g2[x_]:= FullSimplify[Exp[-λ x] *Sum [p q^(n-1) λ^n x^(n-1)/(n-1)!,{n,1,Infinity}]]

g2[x]

G2[x_]:= FullSimplify[Integrate[g2[t],{t,x,Infinity}]]

G2[x]

SL3[t_]:= Integrate[G2[x],{x,t,Infinity}]

SL3[t]

G3[x_]:= Exp[(-1+q)x μ]

G3[x]

SL4[t_]:= Integrate[G3[x],{x,t,Infinity}]

SL4[t]

Η συλλογιστική πορεία του κώδικα της Εφαρμογής 3.3, είναι ίδια με την συλλογιστική πορεία του κώδικα που χρησιμοποιήθηκε στην Εφαρμογή 3.4

Εφαρμογή 3.5:

F1[x_]:= Exp[-λ x]

F1[x]

SL1[t_]:= Integrate[F1[x],{x,t,Infinity}]

SL1[t]

f2[x_]:= θ μ Exp[-x μ]+(1-θ) m Exp[-x m]

f2[x]

SL2[t_]:= Integrate[(x-t)f2[x],{x,t,Infinity}]

SL2[t]

f3[x_]:= (1/2) 3 Exp[-x 3]+(1-(1/2)) 6 Exp[-x 6]

f3[x]

SL3[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f3[x],{x,t,Infinity}]]

SL3[t]

F2[x_]:= Exp[-4x]

F2[x]

```
SL4[t_]:= Integrate[F2[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL4[t]
```

```
Plot[{SL4[t],SL3[t]},{t,0,5},PlotRange->{{0,5},{0,0.25}},AxesLabel->{t,"Π(t)"},PlotStyle->{{Blue,Thickness[Large]},{Red,Thickness[Large]}},PlotLegend->{"Stop Loss of X ","Stop Loss of Y"},LegendPosition->{-0.4,-0.4},PlotLabel->"Comparison of Stop Loss Premiums" ]
```

```
SL5[t_]:= 0.6/ (0.4*4)Exp[-1.6t]
```

```
SL5[t]
```

```
NSolve[s^2+((1- (0.6*0.5))3+(0.4+(0.6*0.5))6)s+ 0.4 6 3==0,s]
```

```
{{s->-4.8},{s->-1.5}}
```

```
NSolve[s^2+6.3s+7.2==0,s]
```

```
{{s->-4.8},{s->-1.5}}
```

```
a1:= 0.6((1-(1/2))3+((1/2)6)-4.8)/ (1.5-4.8)
```

```
a1
```

```
a2:= 0.6(1.5-((1/2)3)-((1/2)6))/(1.5-4.8)
```

```
a2
```

```
G1[x_]:= a1 Exp[-x 4.8]+a2 Exp[-1.5x]
```

```
G1[x]
```

```
SL6[t_]:= Integrate[G1[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL6[t]
```

```
Plot[{SL5[t],SL6[t]},{t,0,5},PlotRange->{{0,5},{0,0.25}},AxesLabel->{t,"Π(t)"},PlotStyle->{{Blue,Thickness[Large]},{Red,Thickness[Large]}},PlotLegend->{"Stop Loss of X ","Stop Loss of Y"},LegendPosition->{0.2,-0.4},PlotLabel->"Comparison of Stop Loss Premiums" ]
```

Εντολές 4ου κεφαλαίου

$G1[x_]:=FullSimplify[Exp[-\lambda x] * Sum [p q^{(n)}(\lambda^j x^j)/j!,\{n,1,Infinity\},\{j,0,(an-1)\}]]$

$G1[x]$

$g1[x_]:= -D[G1[x],x]$

$g1[x]$

$SL1[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g1[x],\{x,t,Infinity\}]]$

$SL1[t]$

$EX1[t_]:= FullSimplify[SL1[t]/G1[t]]$

$EX1[t]$

$G2[x_]:=FullSimplify[Exp[-\lambda x] * Sum [p q^{(n-1)}(\lambda^j x^j)/j!,\{n,1,Infinity\},\{j,0,(an-1)\}]]$

$G2[x]$

$g2[x_]:= -D[G2[x],x]$

$g2[x]$

$SL2[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g2[x],\{x,t,Infinity\}]]$

$SL2[t]$

$EX2[t_]:= FullSimplify[SL2[t]/G2[t]]$

$EX2[t]$

$G3[x_]:=FullSimplify[Exp[-\lambda x] * Sum [(p^r) q^{(n)}(r+n-1)!(\lambda^j x^j)/ (j!(r-1)!n!),\{n,1,Infinity\},\{j,0,(an-1)\}]]$

$G3[x]$

$g3[x_]:= -D[G3[x],x]$

$g3[x]$

$SL3[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g3[x],\{x,t,Infinity\}]]$

$SL3[t]$

$EX3[t_]:= FullSimplify[SL3[t]/G3[t]]$

$EX3[t]$

$p=1-q$

$G4[x_]:=FullSimplify[Exp[-\lambda x] * Sum [r!(p^n) q^{(r-n)}(\lambda^j x^j)/(j!n! (r-n)!),\{n,1,Infinity\},\{j,0,(an-1)\}]]$

$G4[x]$

$g4[x_]:= -D[G4[x],x]$

g4[x]
SL4[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)g4[x],{x,t, Infinity}]]

SL4[t]
EX4[t_]:= FullSimplify[SL4[t]/G4[t]]

EX4[t]

Εφαρμογή 4.1:

f1[x_]:= 3^6 x^(6-1)Exp[-3 x]/Gamma[6]
SL1[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f1[x],{x,t,Infinity}]]

SL1[t]

f2[x_]:= 2^8 x^(8-1)Exp[-2x]/Gamma[8]

f1[x]

f2[x]

SL2[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f2[x],{x,t,Infinity}]]

SL2[t]

EX1[t_]:= FullSimplify[-SL1[t]/D[SL1[t],t]]

EX1[t]

EX2[t_]:= FullSimplify[-SL2[t]/D[SL2[t],t]]

EX2[t]

EX1[x_]:= (80+x(200+3x(80+3x(20+x(10+3x)))))/ (40+3x(40+3x(20+x(20+3x(5+3x)))))

EX1[x]

EX2[x_]:= (1260+x(2205+2x(945+x(525+x(210+x(63+2x(7+x)))))))/
(315+2x(315+x(315+x(210+x(105+2x(21+x(7+2x)))))))

EX2[x]

Plot[{EX1[x],EX2[x]},{x,0,100},PlotRange→{{0,100},{0,4}},AxesLabel→{t,"e(t)"},PlotStyle→{{Blue,Thickness[Large]},{Red,Thickness[Large]}},PlotLegend→{"MRL of X ", "MRL of Y"},LegendPosition→{0.4,-0.3},PlotLabel→"Comparison of Mean Remaining Lives"]

G5[x_]:= 0.4 Gamma[18,3 x]/ Gamma[18]

G5[x]

g5[x_]:= -D[G5[x],x]

g5[x]

SL5[t_]:= FullSimplify[Integrate[G5[x],{x,t,Infinity}]]

SL5[t]

```
G6[x_]:= 0.4 Gamma[24,2 x]/ Gamma[24]
```

```
G6[x]
```

```
g6[x_]:= -D[G6[x],x]
```

```
g6[x]
```

```
SL6[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t) g6[x],{x,t,Infinity}]]
```

```
SL6[t]
```

```
EX1[t_]:= FullSimplify[SL5[t]/G5[t]]
```

```
EX1[t]
```

```
EX2[t_]:=FullSimplify[SL6[t]/G6[t]]
```

```
EX2[t]
```

```
Plot[{EX1[t],EX2[t]},{t,0,100},PlotRange→{{0,100},{0,12}},AxesLabel→{t,"e(t)"},PlotStyle→{{Blue,Thickness[Large]},{Red,Thickness[Large]}}, PlotLegend→{"MRL of X ","MRL of Y"},LegendPosition→{0.4,-0.3},PlotLabel→"Comparison of Mean Remaining Lives" ]
```

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην Εφαρμογή 4.2, είναι ανάλογος του κώδικα της Εφαρμογής 4.1.

Εφαρμογή 4.3:

```
F1[x_]:= Exp[-λ x]
```

```
SL1[t_]:= Integrate[F1[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL1[t]
```

```
EX1[t_]:= FullSimplify[-SL1[t]/D[SL1[t],t]]
```

```
EX1[t]
```

```
F2[x_]:= Exp[-μ x]
```

```
SL2[t_]:= Integrate[F2[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL2[t]
```

```
EX2[t_]:= FullSimplify[-SL2[t]/D[SL2[t],t]]
```

```
EX2[t]
```

```
G1[x_]:= Exp[-p λ x]
```

```
SL3[t_]:= Integrate[G1[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL3[t]
```

```
EX3[t_]:= FullSimplify[-SL3[t]/D[SL3[t],t]]
```

```
EX3[t]
```

```
G2[x_]:= Exp[-p μ x]
```

```
SL4[t_]:= Integrate[G2[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL4[t]
```

Με τον ίδιο τρόπο, δημιουργήθηκε ο κώδικας της Εφαρμογής 4.4.

Ενότητα 4.5

```
f1[x_]:= θ μ Exp[-x μ]+(1-θ) m Exp[-x m]
```

```
f1[x]
```

```
SL1[t_]:= Integrate[(x-t)f1[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL1[t]
```

```
EX1[t_]:= -(SL1[t]/(D[SL1[t],t]))
```

```
EX1[t]
```

```
EX1[t_]:= FullSimplify[-(SL1[t]/(D[SL1[t],t]))]
```

```
EX1[t]
```

Εφαρμογή 4.5:

```
f3[x_]:= (1/2) 3 Exp[-x 3]+(1-(1/2)) 6 Exp[-x 6]
```

```
f3[x]
```

```
SL3[t_]:= FullSimplify[Integrate[(x-t)f3[x],{x,t,Infinity}]]
```

```
SL3[t]
```

```
F2[x_]:= Exp[-4x]
```

```
F2[x]
```

```
SL4[t_]:= Integrate[F2[x],{x,t,Infinity}]
```

```
SL4[t]
```

```
EX1[t_]:= FullSimplify[-(SL4[t]/(D[SL4[t],t]))]
```

```
EX1[t]
```

```
EX2[t_]:= FullSimplify[-(SL3[t]/(D[SL3[t],t]))]
```

```
EX2[t]
```

```
EXpar[t_]:= FullSimplify[D[EX2[t],t]]
```

```
EXpar[t]
```

```
SL5[t_]:= 0.6/ (0.4*4)Exp[-1.6t]
```

```
SL5[t]
```

```
NSolve[s^2+((1- (0.6*0.5))3+(0.4+(0.6*0.5))6)s+ 0.4 6 3=0,s]
```

```

NSolve[s^2+6.3s+7.2==0,s]
a1:= 0.6((1-(1/2))^3+((1/2)^6)-4.8)/(1.5-4.8)
a1
a2:= 0.6(1.5-((1/2)^3)-((1/2)^6))/(1.5-4.8)
a2
G1[x_]:= a1 Exp[-x 4.8]+a2 Exp[-1.5x]
G1[x]
SL6[t_]:= Integrate[G1[x],{x,t,Infinity}]
SL6[t]
EX5[t_]:= FullSimplify[-SL5[t]/D[SL5[t],t]]
EX5[t]
EX6[t_]:= FullSimplify[-(SL6[t]/(D[SL6[t],t]))]
EX6[t]
EX6par[t_]:= FullSimplify[D[EX6[t],t]]
EX6par[t]

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β- ΕΝΤΟΛΕΣ R

Εφαρμογή 2.4:

```

x<-seq(0.001,30000,1)
y<-exp(-(1/5000)*x)
z<-(10000/(x+10000))^3
plot(x,y,
ylab="",
ylim=c(0,1),
xlim=c(0,30000),
type="l",
col="blue")
lines(x,z, col="red")
legend("topright",
c("Survival of Exponential","Survival of Pareto"),
main="Comparison of Survival Distributions",

```



```
fill=c("blue","red")
))
x<-seq(0.001,30000,1)
y<-1-exp(-(1/5000)*x)
z<-1-(10000/(x+10000))^3
plot(x,y,
main="Comparison of Cumulative Distributions",
ylab="",
ylim=c(0,1),
xlim=c(0,30000),
type="l",
col="blue")
lines(x,z, col="red")
legend("bottomright",
c("Cumulative of Exponential","Cumulative of Pareto"),
fill=c("blue","red"))
```