ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μ.Π.Σ. ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

Ευσταθής Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης Αυτόματης Ανάκλησης με τη Χρήση Αλγορίθμου Monte Carlo

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Πιερρουτσάκου Δημήτρη – ΜΧΡΗ 1824

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Τριμελής Επιτροπή

Καθηγητής Πιττής Νικήτας

Αναπληρωτής Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2020

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αποτίμηση μιας ιδιαίτερης κατηγορίας δικαιωμάτων προαίρεσης, αυτής των λεγόμενων δικαιωμάτων προαίρεσης αυτόματης ανάκλησης, τα οποία ενδέχεται να τερματιστούν πριν την ημερομηνία λήξης τους εξαιτίας μιας συνθήκης φράγματος που έχει οριστεί εξαρχής πάνω στους υποκείμενους τίτλους τους. Μέσω τυπικών αλγορίθμων Monte Carlo είναι εφικτή η αποτίμηση αυτών των δικαιωμάτων, η οποία όμως είναι ασταθής. Αυτό συμβαίνει για δύο λόγους. Πρώτον, η διακύμανση των τυπικών εκτιμητών Monte Carlo είναι ιδιαίτερα υψηλή με αποτέλεσμα οι τιμές που προκύπτουν να μην είναι ιδιαίτερα αξιόπιστες. Δεύτερον, οι εν λόγω εκτιμητές δεν συμπεριφέρονται ευσταθώς σε σχέση με την αριθμητική διαφοροποίηση. Ως εκ τούτου, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ευσταθώς του συντελεστές ευαισθησίας του δικαιώματος.

Στην περίπτωση του μονομετάβλητου δικαιώματος αυτόματης ανάκλησης, το βασικό μας εργαλείο είναι η One-Step Survival στρατηγική των Glasserman και Staum (2001), για τον εκτιμητή της οποίας δείχνουμε αριθμητικά και γραφικά ότι οδηγεί σε ευσταθή αποτίμηση. Στην περίπτωση του διμετάβλητου δικαιώματος αυτόματης ανάκλησης, ανάλογα αποτελέσματα και συμπεράσματα προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη One-Step Survival GHK στρατηγική των Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013).

Λέξεις Κλειδιά

Προσομοίωση Monte Carlo, Δικαιώματα Προαίρεσης Αυτόματης Ανάκλησης, One-Step Survival Στρατηγική, GHK Importance Sampling Τεχνική, Τεχνική Διαχωρισμού Ολοκληρώματος, Συντελεστές Ευαισθησίας, Ευσταθής Αποτίμηση, Ευσταθής Διαφοροποίηση, Ελάττωση Διακύμανσης, Πιθανότητα Επιβίωσης, Περικομμένη Κανονική Κατανομή.

Abstract

The aim of the present diploma thesis is the pricing of a special kind of options, the so-called autocallables, which may be terminated prior to their maturity due to a pre-existed barrier condition on their underlying assets. Through standard Monte Carlo algorithms pricing of such options is possible, but turns out to be also unstable. This happens for two reasons. Firstly, the variance of standard Monte Carlo estimators is especially high, resulting to unreliable prices. Secondly, these estimators do not behave in a stable manner with respect to numerical differentiation. Hence, we may not have a stable calculation for the Greek letters of these options, as well.

For the univariate case, our main tool is the One-Step Survival strategy of Glasserman and Staum (2001), showing numerically and graphically that their estimator leads to stable pricing. For the bivariate case, we end up to similar results and conclusions by using the generalized One-Step Survival GHK strategy of Alm, B. Harrach, D. Harrach and Keller (2013).

Key Words

Monte Carlo Simulation, Autocallables, One-Step Survival Strategy, GHK Importance Sampling Technique, Integral Splitting Technique, Greek Letters, Stable Pricing, Stable Differentiation, Variance Reduction, Survival Probability, Truncated Normal Distribution.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε τις βασικές πληροφορίες για τα δικαιώματα προαίρεσης. Ύστερα, θα επεκταθούμε στα εξωτικά δικαιώματα εστιάζοντας σε μία κατηγορία τους, αυτήν των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα. Στην συγκεκριμένη κατηγορία ανήκουν τα δικαιώματα αυτόματης ανάκλησης, αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τα οποία και θα παρουσιαστούν αναλυτικά στην ενότητα 1.4. Ακολούθως, θα παραθέσουμε μια ιστορική αναδρομή για τις αποτιμήσεις διαφόρων ειδών δικαιωμάτων προαίρεσης, εστιάζοντας σε αυτές που πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo. Κλείνοντας, θα επιχειρήσουμε να δώσουμε μια περιεκτική περιγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εστιάζοντας στα σημαντικότερα σημεία της.

1.1 Δικαιώματα Προαίρεσης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε έννοιες και ορισμούς που αφορούν τα οικονομικά παράγωγα. Με τον όρο *παράγωγοι τίτλοι* (derivative securities) εννοούμε τίτλους των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από τις τιμές κάποιων εκ των βασικών τίτλων της αγοράς. Οι βασικοί αυτοί τίτλοι καλούνται *υποκείμενοι ή πρωταρχικοί* (primary securities). Ως υποκείμενοι τίτλοι κατά κανόνα θεωρούνται οι χρηματοπιστωτικοί τίτλοι. Σε αυτούς ανήκουν οι μετοχές, τα ομόλογα, τα επιτόκια, οι χρηματιστηριακοί δείκτες και οι συναλλαγματικές ισοτιμίες. Επίσης, ως υποκείμενους τίτλους μπορούμε να θεωρήσουμε και τα εμπορεύματα κάθε είδους, όπως ενεργειακά προϊόντα (ενδεικτικά αναφέρουμε το πετρέλαιο, τη βενζίνη και το φυσικό αέριο), πολύτιμα μέταλλα (πχ χρυσός), ακίνητα και λοιπά βιομηχανικά/αγροτικά/κτηνοτροφικά προϊόντα.

Η απλούστερη και συνηθέστερη κατηγορία παραγώγων είναι τα *δικαιώματα προαίρεσης* (options). Αυτά διακρίνονται σε *δικαιώματα αγοράς* (call options) και *δικαιώματα πώλησης* (put options). Ένα δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο του δικαιώματος κάποια στιγμή στο μέλλον, σε προκαθορισμένη τιμή. Αντιστοίχως, ένα δικαίωμα πώλησης δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο κάποια στιγμή στο μέλλον, σε προκαθορισμένη τιμή. Να σημειωθεί ότι η τιμή αυτή καλείται *τιμή εξάσκησης του δικαιώματος* (strike price).

Επιπλέον, για την αγορά ενός δικαιώματος προαίρεσης ένας επενδυτής πληρώνει μια τιμή (γνωστή ως premium), η οποία συγκριτικά με αυτήν του υποκείμενου τίτλου είναι χαμηλή. Η εύρεση αυτής της τιμής αποτελεί ένα ενδιαφέρον και ποικίλης δυσκολίας πρόβλημα (ανάλογα με την πολυπλοκότητα του δικαιώματος στο οποίο αναφέρεται), το οποίο εν γένει αντιμετωπίζεται με τη μεθοδολογία (ή με μεθοδολογίες που βασίζονται σε αυτήν) που πρώτοι εισήγαγαν οι Black και Scholes (1973).

Ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι η *ημερομηνία λήξης* του (maturity date). Αυτή αναφέρεται στο χρόνο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι *Ευρωπαϊκού Τύπου* (European option), αν ο κάτοχός του μπορεί να το εξασκήσει μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του. Αντίθετα, ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι *Αμερικανικού Τύπου* (American option), αν ο κάτοχός του δύναται να το εξασκήσει οποιαδήποτε στιγμή πριν αυτό εκπνεύσει.

Η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς εκφράζει την αισιοδοξία του επενδυτή πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα ανέβει στο μέλλον και προσπαθεί να εξασφαλίσει μια ευνοϊκή τιμή αγοράς σήμερα *(long call)*. Αντίθετα, η πώληση ενός δικαιώματος αγοράς εκφράζει την απαισιόδοξη θέση του επενδυτή ότι η τιμή του υποκείμενου θα μειωθεί στο μέλλον και για αυτό προσπαθεί να το πουλήσει ακριβότερα σήμερα *(short call)*.

Κατ' αντιστοιχία, η αγορά ενός δικαιώματος πώλησης εκφράζει την απαισιοδοξία του επενδυτή για την τιμή του υποκείμενου τίτλου και προσπαθεί να διασφαλίσει σήμερα μια ικανοποιητική τιμή πώλησης, διότι θεωρεί πως η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα μειωθεί στο μέλλον *(long put)*. Τέλος, η πώληση ενός δικαιώματος πώλησης εκφράζει την αισιοδοξία του κατόχου του ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα αυξηθεί *(short put)*. Οι παραπάνω επενδυτικές προσεγγίσεις είναι γνωστές ως οι τέσσερις βασικές θέσεις που μπορεί να ακολουθήσει ένας επενδυτής.

Τα απλά δικαιώματα προαίρεσης (γνωστά διεθνώς με την ονομασία *plain vanilla options*) δεν είναι ιδιαιτέρως πολύπλοκα στη δομή τους, δεν περιέχουν ειδικά χαρακτηριστικά ή όρους και διαπραγματεύονται στα χρηματιστήρια. Οι συναλλαγές τους γίνονται με τη βοήθεια επίσημα διαπιστευμένων προσώπων *(market makers)* χρηματιστηριακών εταιρειών ή γραφείων που εξασφαλίζουν και εγγυώνται την εκτέλεση των εντολών αγοράς και πώλησης στις προκαθορισμένες τιμές και ημερομηνίες. Τέλος, η τιμολόγηση των vanilla options δεν είναι μια ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία και γίνεται με αρκετούς τρόπους, εκ των οποίων δημοφιλέστερος και αποτελεσματικότερος είναι αυτός μέσω του *μοντέλου των Black-Scholes* (1973) και της ομώνυμης μερικής διαφορικής εξίσωσης (βλέπε ενότητα 2.8).

1.2 Εξωτικά Δικαιώματα

Τα *εξωτικά δικαιώματα* (exotic options) είναι μια κατηγορία παραγώγων με συνθετότερες αποδόσεις σε σχέση με τα απλά δικαιώματα προαίρεσης που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Δεν διαπραγματεύονται στα χρηματιστήρια (όπως συμβαίνει με τα απλά δικαιώματα), αλλά σε επίσημες εξωχρηματιστηριακές αγορές *(over the counter trading)*.

Οι εξωχρηματιστηριακές συναλλαγές γίνονται άμεσα μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, χωρίς την επίβλεψη ενός χρηματιστηρίου. Μία συναλλαγή που πραγματοποιείται μέσω χρηματιστηρίου έχει το πλεονέκτημα της διαφάνειας, της διατήρησης της τιμής, ενώ υπάρχει η δυνατότητα για επιπλέον ρευστότητα σε περίπτωση που χρειαστεί από τους επενδυτές. Από την άλλη πλευρά, οι συναλλαγές που πραγματοποιούνται εκτός χρηματιστηρίου δεν υπακούν σε νόρμες, παρέχουν όμως τη δυνατότητα διαπραγμάτευσης παντός είδους χρηματοπιστωτικών - και μη - προϊόντων. Κατά κανόνα, τα προϊόντα που ανταλλάσσονται μέσω χρηματιστηρίου πρέπει να υπακούν σε συγκεκριμένους κανόνες (οι οποίοι και καθορίζονται από το ίδιο το χρηματιστήριο) που αφορούν την ποιότητα, την ποσότητα και την κατηγορία τους, πράγμα απαραίτητο για την ύπαρξη διαφάνειας στις συναλλαγές. Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, τέτοιοι περιορισμοί δεν υφίστανται στις εξωχρηματιστηριακές συναλλαγές, παρέχοντας, ενδεχομένως, τη δυνατότητα στους επενδυτές για εύρεση καλύτερων αποδόσεων στην αγορά. Το ρίσκο όμως που πηγάζει από την μη ύπαρξη ενός χρηματιστηρίου ως εγγυητή και επιβλέποντα των συναλλαγών, δεν είναι κάτι που πρέπει να παίρνεται αψήφιστα από τους επενδυτές.

Όπως συμβαίνει και με τα απλά δικαιώματα προαίρεσης, τα εξωτικά δικαιώματα εγγράφονται σε χρηματοοικονομικά συμβόλαια και ανάλογα έχουμε την ημερομηνία εγγραφής, την ημερομηνία εξάσκησης/λήξης και την τιμή εξάσκησης. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε εξωτικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου. Τέλος, υπάρχουν πολλές κατηγορίες εξωτικών δικαιωμάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα δικαιώματα *forward-start*, τα *lookback*, τα *basket*, τα *Asian* και τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα *(barrier options)*. Η τελευταία αυτή κατηγορία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στην επόμενη ενότητα, καθώς αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Μια πλήρης απαρίθμηση και μελέτη των διαφόρων κατηγοριών των εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης έχει πραγματοποιηθεί από τον Zhang (1998).

1.3 Δικαιώματα που Υπόκεινται σε Φράγμα

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό των autocallable options, θα παρουσιάσουμε πληροφορίες που αφορούν τα barrier options, κατηγορία στην οποία αυτά ανήκουν.

Τα *δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα ή barrier options* αποτελούν μία από τις δημοφιλέστερες κατηγορίες των εξωτικών δικαιωμάτων. Πρόκειται για ένα δικαίωμα προαίρεσης του οποίου η ύπαρξη εξαρτάται αποκλειστικά από το αν και πότε η τιμή του υποκείμενού του τίτλου ξεπέρασε ένα προκαθορισμένο επίπεδο *(barrier level/condition)*. Επιπλέον, δεν εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή του υποκείμενου τίτλου, αλλά και από την πορεία που αυτή ακολούθησε μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Αν και υπάρχει μια πληθώρα τέτοιων δικαιωμάτων, εν γένει μπορούμε να τα ταξινομήσουμε σε δύο κατηγορίες:

- *Knock-Out*: Τα συγκεκριμένα barrier options, σε περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει τουλάχιστον ίση με το επίπεδο του φράγματος, παύουν να ισχύουν και δεν επιστρέφουν κάποιο χρηματικό ποσό στον κάτοχό τους.
- *Knock-In*: Εδώ συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο, δηλαδή η τιμή του υποκείμενου τίτλου πρέπει να γίνει τουλάχιστον ίση με το επίπεδο του φράγματος, ώστε να ενεργοποιηθεί το δικαίωμα και ο κάτοχός του να καρπωθεί χρήματα.

Ως πλεονεκτήματά τους μπορούμε να θεωρήσουμε το γεγονός ότι είναι πιο φτηνά στην κτήση τους συγκριτικά με τα απλά δικαιώματα προαίρεσης και το ότι διαπραγματεύονται στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Να σημειώσουμε ότι ένα barrier option είναι πάντα φτηνότερο από το αντίστοιχο δικαίωμα χωρίς το φράγμα, διότι υπάρχει το ενδεχόμενο να λήξει χωρίς να αποφέρει κάποιο ποσό στον κάτοχό του, κάτι το οποίο φυσικά δε συμβαίνει στην περίπτωση του κανονικού δικαιώματος.

Εντούτοις, υπάρχει πρόβλημα στην αποτίμησή τους εξαιτίας της αυξημένης πολυπλοκότητάς τους και της έλλειψης δεδομένων/στοιχείων. Να κάνουνε δύο σχόλια εδώ. Πρώτον, ο προσδιορισμός του μονοπατιού της τιμής του υποκείμενου τίτλου, το οποίο είναι καθοριστικής σημασίας για την αποτίμηση του δικαιώματος, παρουσιάζει αυξημένη υπολογιστική πολυπλοκότητα και τεχνικές δυσκολίες. Δεύτερον, υπάρχει ελλιπής πληροφόρηση για συναλλαγές με barrier options, επειδή τέτοια δικαιώματα είναι συμφωνίες που γίνονται απευθείας μεταξύ των αντισυμβαλλομένων και όχι μέσω χρηματιστηρίων.

Κλείνοντας, να πούμε ότι η τιμολόγηση των barrier options πραγματοποιείται κυρίως μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo, εξαιτίας της πολύπλοκης αυτής φύσης τους.

1.4 Δικαιώματα Αυτόματης Ανάκλησης

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα ασχοληθούμε με την αποτίμηση των λεγόμενων *δικαιωμάτων προαίρεσης αυτόματης ανάκλησης ή autocallable options*. Για λόγους συντομίας, στα πλαίσια όλης της εργασίας θα αναφέρονται με τον όρο *autocallables*. Τα δικαιώματα αυτά ανήκουν στην κατηγορία των barrier options και πλέον αποτελούν ένα αξιοσημείωτο κομμάτι της αγοράς των παραγώγων, ειδικά στην Ευρώπη. Ενδεικτικά, αξίζει να αναφέρουμε ότι το 2008 το 30% της γερμανικής αγοράς παραγώγων αποτελούνταν από autocallables. Οι Alm και Wegner (2008) έχουν εκπονήσει μια κατατοπιστική μελέτη επί του θέματος.

Στην πιο συνήθη του μορφή, ένα autocallable μπορεί να έχει ως υποκείμενο τίτλο του μία μετοχή, ένα καλάθι μετοχών ή ακόμα κι έναν χρηματιστηριακό δείκτη, ενώ <u>δεν έχει καθορισμένη ημερομηνία λήξης</u>. Ως ημερομηνία λήξης ενός autocallable γίνεται να θεωρήσουμε τη μέγιστη διάρκεια που αυτό είναι δυνατόν να επιβιώσει. Η μέση διάρκεια ενός τέτοιου δικαιώματος είναι περίπου τα τρία έτη. Τα περισσότερα autocallable options έχουν έναν υποκείμενο τίτλο και είναι γνωστά με τον τίτλο *univariate*, ενώ υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις με τουλάχιστον δύο υποκείμενους τίτλους, γνωστά ως *multivariate*.

Το χαρακτηριστικό της *ανάκλησης* παίζει σημαντικό ρόλο και αξίζει να σταθούμε. Τα *κανονικά ανακαλέσιμα ομόλογα* (normal callable bonds) επιτρέπουν στον εκδότη τους να τα ανακαλέσει. Δηλαδή, ο εκδότης έχει το δικαίωμα να εξαγοράσει το ομόλογο (πριν την ημερομηνία λήξης του) από τον κάτοχο στον οποίο το είχε πουλήσει νωρίτερα. Μετά την ανάκληση του ομολόγου από τον εκδότη, ο (πρώην) κάτοχός του θα λάβει ένα χρηματικό ποσό, γνωστό ως *τιμή ανάκλησης*.

Όπως λοιπόν συμβαίνει και στην περίπτωση των ανακαλέσιμων ομολόγων, ένα autocallable μπορεί να τερματιστεί πριν από την ημερομηνία λήξης του. Η διαφορά, όμως, έγκειται στο ότι το autocallable ανακαλείται αυτόματα εφ' όσον ικανοποιηθεί μια συνθήκη φράγματος *(barrier condition)* σε μία από τις προκαθορισμένες ημέρες παρατήρησης *(observation dates)*, ενώ ένα ανακαλέσιμο ομόλογο μπορεί να ανακληθεί μόνο από τον εκδότη του.

Οι ημέρες παρατήρησης στη ζωή του προϊόντος καθορίζονται εξαρχής στο συμβόλαιο και συνήθως είναι σε ετήσια ή εξαμηνιαία βάση.

Πιο συγκεκριμένα, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

Σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, παρατηρείται αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου γίνει τουλάχιστον ίση με το φράγμα. Εάν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, ο κάτοχος του autocallable λαμβάνει μία προκαθορισμένη σταθερή χρηματοροή (γνωστή ως *early payoff* ή *rebate)* και η διαδικασία ολοκληρώνεται. Διαφορετικά, αυτός ο έλεγχος συνεχίζεται και στις επόμενες χρονικές στιγμές μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Στην περίπτωση που το autocallable <u>επιβιώσει</u> μέχρι την ημερομηνία λήξης του, αυτό εν τέλει ενεργοποιείται, με τον κάτοχό του να λαμβάνει ένα ποσό το οποίο καθορίζεται από την τιμή που έχει ο υποκείμενος τίτλος εκείνη τη στιγμή στην αγορά. Το ποσό αυτό είναι γνωστό ως *πληρωμή αποκατάστασης* (redemption payment).

Κατά τον Zhang (1998), τα autocallables μπορεί να θεωρηθούν ως μια ειδική κατηγορία των knock-out barrier options, έχοντας ως πρόσθετο χαρακτηριστικό τη δυνατότητα επιστροφής ενός προκαθορισμένου χρηματικού ποσού στον κάτοχό τους σε περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου ξεπεράσει αυτήν του φράγματος. Για αυτόν ακριβώς το λόγο είναι ακριβότερα στην κτήση τους συγκριτικά με τα τυπικά knock-out barrier options. Παρ' όλα αυτά, οι Bouzoubaa και Osseiran (2010) τα αντιμετωπίζουν ως μια ξεχωριστή κατηγορία εξωτικών δικαιωμάτων.

Όσον αφορά την αποτίμηση των autocallables, αυτή γίνεται κάτω από τη συνήθη υπόθεση ότι η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης περιγράφεται από την προεξοφλημένη αναμενόμενη πληρωμή, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική κίνηση Brown (βλέπε ενότητα 2.5) ως στοχαστική διαδικασία για την περιγραφή των τιμών των υποκείμενων τίτλων του. Επιπλέον, από τη στιγμή που τα autocallables ανήκουν στα barrier options, όντας μια κατηγορία δικαιωμάτων προαίρεσης που εμπεριέχει, όπως είδαμε, μια πληθώρα πιθανών πληρωμών, η προσομοίωση Monte Carlo (βλέπε ενότητα 3.1) είναι η κατάλληλη μέθοδος για την αποτελεσματική αποτίμησή τους.

<u>*ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ – ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ*</u>

Τα autocallables είναι ιδιαίτερα δημοφιλή στον κόσμο των παραγώγων. Αυτό συμβαίνει διότι σε πολλές περιπτώσεις προσφέρουν υψηλές αποδόσεις/κουπόνια, κάτι που είναι αρκετά ελκυστικό για τους επενδυτές. Το παρόν συμπέρασμα ενισχύεται από το γεγονός ότι, στην αγορά των μετοχών, των ομολόγων και των λοιπών χρηματοπιστωτικών – και μη – προϊόντων, οι μεγάλες αποδόσεις είναι δυσεύρετες.

Επίσης, από τη στιγμή που ανήκουν στα barrier options, ισχύουν όσα θετικά αναφέραμε στην ενότητα 1.3, δηλαδή το σχετικά χαμηλό κόστος κτήσης και η δυνατότητα διαπραγμάτευσής τους στην εξωχρηματιστηριακή αγορά.

Ένας ακόμη λόγος που εξηγεί την απήχησή τους είναι το γεγονός ότι έχουν μικρότερη διάρκεια ζωής από αλλά παρόμοια προϊόντα. Έτσι, οι επενδυτές δεσμεύουν τα χρήματά τους για μικρότερο χρονικό διάστημα, μία προοπτική που είναι ιδιαίτερα ελκυστική όπως γίνεται αντιληπτό, από τη στιγμή δε που τα περισσότερα προϊόντα τέτοιου τύπου δεσμεύουν τα χρήματα των επενδυτών πέντε με δέκα χρόνια συνήθως. Αλλά και οι εκδότες ενδέχεται να επωφεληθούν από τη μικρή διάρκεια, καθώς, σε περίπτωση που το autocallable λήξει σχετικά γρήγορα, έχουν τη δυνατότητα να εκδώσουν ένα νέο προϊόν και να το πουλήσουν στον ίδιο επενδυτή.

Παρ' όλα αυτά υπάρχουν και κάποια μειονεκτήματα που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη. Από την πλευρά των επενδυτών, μία άνοδος των επιτοκίων κατά τη διάρκεια της επένδυσης ίσως επιφέρει οικονομικές απώλειες, ενώ πάντα υπάρχει ο κίνδυνος ρευστότητας σε περίπτωση που θέλουν να πουλήσουν πριν την ημερομηνία λήξης. Από την πλευρά του εκδότη, η ακαθόριστη διάρκεια του autocallable (θυμίζουμε ότι αυτό μπορεί να τερματιστεί/ μην επιβιώσει οποιαδήποτε από τις προκαθορισμένες ημερομηνίες παρατήρησης) αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα, διότι ανά πάσα στιγμή πρέπει να έχει χρήματα για να δώσει στους κατόχους του.

Τέλος, η αποτίμησή τους παρουσιάζει αυξημένη τεχνική πολυπλοκότητα σε σύγκριση με τα τυπικά barrier options, ενώ και τα ιστορικά δεδομένα που τα αφορούν είναι από ελλιπή έως ανύπαρκτα λόγω της μη διαπραγμάτευσής τους στα χρηματιστήρια.

1.5 Ιστορική Αναδρομή

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι πολύ σημαντικά στη θεωρία των οικονομικών, καθώς αρκετά στοιχεία του παθητικού των επιχειρήσεων μπορούν να εκφραστούν σε όρους δικαιωμάτων προαίρεσης ή ακόμα και συνδυασμών αυτών. Η *προσομοίωση Monte Carlo* αποτελεί έναν αρκετά δημοφιλή και πρακτικό τρόπο αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης, και στα πλαίσια της παρούσας ενότητας θα δούμε το πώς αυτή, με τις όποιες παραλλαγές της, εφαρμόστηκε από διάφορους οικονομολόγους και επιστήμονες (κυρίως μαθηματικούς) κατά το πέρασμα των ετών.

Καταρχάς, η μέθοδος Monte Carlo εισήχθη για πρώτη φορά στον κόσμο των οικονομικών από τον David Hertz (1964), μέσω ενός άρθρου του που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Harvard Business Review. Στο εν λόγω άρθρο, ο Hertz εξήγησε πώς είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μια τέτοια μέθοδος στα χρηματοοικονομικά των εταιρειών. Μια γενικότερη μελέτη για τις μεθόδους Monte Carlo και την όποια εφαρμογή τους είχε ήδη πραγματοποιηθεί από τους Hammersley και Handscomb (1964).

Όμως η χρησιμοποίηση της προσομοίωσης Monte Carlo για αποτιμήσεις δικαιωμάτων θα αργούσε μερικά χρόνια ακόμα. Πιο συγκεκριμένα, η εφαρμογή της προσομοίωσης Monte Carlo στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης ξεκίνησε από μια διατριβή που εκπόνησε ο Phelim Boyle (1977). O Boyle ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την εν λόγω προσομοίωση για την αποτίμηση δικαιωμάτων αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου πάνω σε μερισματικές μετοχές, θέλοντας να επεκτείνει την ήδη προϋπάρχουσα λύση για τις μη-μερισματικές μετοχές, η οποία και είχε δημοσιευτεί από τους Black και Scholes (1973).

Έκτοτε, η συγκεκριμένη προσομοίωση έχει αποδειχθεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, ειδικότερα σε περιπτώσεις όπου άλλες γνωστές μέθοδοι είτε δεν είναι διαθέσιμες είτε η εφαρμογή τους είναι πρακτικά αδύνατη. Για παράδειγμα, η προσομοίωση Monte Carlo είναι χρήσιμη για να εκτιμήσουμε τιμές χρεογράφων όταν δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση για την κατανομή αυτών των τιμών, όταν υπάρχουν πολλαπλές μεταβλητές, και όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου εξαρτάται από κάποιο μονοπάτι. Γενικότερα, η εν λόγω προσομοίωση έχει χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των τιμών απρόοπτων απαιτήσεων και υποθηκευμένων χρεογράφων, καθώς επίσης και για τον προσδιορισμό της αξίας των swaps.

Αν και, όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η μέθοδος αυτή είχε μια πληθώρα εφαρμογών στον χρηματοοικονομικό κόσμο, ο Boyle (1977) είχε τονίσει πως η τυπική προσέγγιση Monte Carlo καλό θα ήταν να επεκταθεί, χρησιμοποιώντας κατάλληλες τεχνικές, ώστε να ελαττωθεί αποτελεσματικά η διασπορά. Ο Paul Glasserman (1993) ήταν ένας από αυτούς που κατάφεραν να αναπτύξουν κάποιες νέες τεχνικές αποτίμησης ορισμένων εξωτικών δικαιωμάτων, κάνοντας χρήση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των αντίστοιχων αποπληρωμών τους. Επίσης, οι Boyle, Broadie και Glasserman (1997) κατάφεραν, μέσω παραλλαγών της μεθόδου Monte Carlo, την ακριβή τιμολόγηση διαφόρων securities. Παρόμοιες μελέτες έχουμε και από τους Duffie (1996) και Fishman (1996). Τέλος, ειδικότερα για τις αποτιμήσεις διαφόρων δικαιωμάτων προαίρεσης που υπόκεινται σε φράγμα, έχουμε ανάλογες μελέτες από τους Merton (1973), Reiner και Rubinstein (1991), Ikeda και Kunitomo (1992) και Sidenius (1998).

Αξίζει να σταθούμε στους Glasserman και Staum (2001), οι οποίοι ανέπτυξαν την *one-step survival θεωρία*, μέσω της οποίας αποτίμησαν αποτελεσματικά τα knock-out barrier options. Η συγκεκριμένη θεωρία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3, καθώς πάνω σε αυτήν θα στηριχθεί η αποτίμηση των autocallables, και συγκεκριμένα αυτών με έναν υποκείμενο τίτλο.

Για τα οποία autocallables, παρόλη την απήχησή τους στον οικονομικό κόσμο και την ευρεία πλέον χρήση τους, δεν υπάρχουν αρκετές ακαδημαϊκές μελέτες. Οι Bouzoubaa και Osseiran (2010) επιχείρησαν μια ανάλυση σε δικαιώματα τέτοιας δομής, περιγράφοντας μια ποικιλία πιθανών αποπληρωμών καθώς επίσης και τους κινδύνους στους οποίους αυτά υπόκεινται.

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στους Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013), οι οποίοι κατάφεραν να επεκτείνουν την προαναφερθείσα one-step survival θεωρία των Glasserman και Staum (2001) και να την εφαρμόσουν σε περιπτώσεις που το autocallable έχει περισσότερους από έναν υποκείμενους τίτλους. Αυτό το έπραξαν εφαρμόζοντας τις μελέτες των Geweke (1991), Hajivassiliou (1990) και Keane (1990) (πρόκειται για την τεχνική GHK Importance Sampling Simulator, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3) σε αποτιμήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης που πραγματοποιούνται μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo.

Κλείνοντας την ενότητα, να μιλήσουμε για μια σχετικά πρόσφατη μελέτη που αφορά τον τομέα των autocallables. Πρόκειται για το επιστημονικό άρθρο του Tristan Guillaume (2015). Εκεί, παρουσίασε μια νέα μέθοδο που καθιστά δυνατή την αποτίμηση autocallable options με διακριτές ημέρες παρατήρησης, κάτι το οποίο δεν είχε επιχειρήσει ποτέ κανείς στο παρελθόν. Το μοντέλο του βασίστηκε στο γνωστό μοντέλο των Black-Scholes (1973), καθώς επίσης και σε αυτό του Merton (1976).

1.6 Περιγραφή Διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό την παρουσίαση μιας πολύ ιδιαίτερης κατηγορίας δικαιωμάτων προαίρεσης, αυτής των λεγόμενων autocallables. Λόγω της πολύπλοκης κατασκευής τους, των παραμέτρων και των περιπτώσεων που πρέπει να ληφθούν υπόψη εξαρχής, η τιμολόγησή τους παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Προτού όμως φτάσουμε σε αυτήν, είναι χρήσιμο να δοθούν ορισμένες εισαγωγικές έννοιες που τα αφορούν.

Έτσι, λοιπόν, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε τα απλά και τα εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης, εστιάζοντας σε μια κατηγορία των δευτέρων, τα δικαιώματα που υπόκεινται σε φράγμα (barrier options). Τα autocallables είναι ουσιαστικά barrier options, και στην ενότητα 1.4 υπάρχει αναλυτική παρουσίασή τους. Στη συνέχεια, αφού πρώτα κάνουμε μια ιστορική αναδρομή που αφορά κυρίως την προσομοίωση Monte Carlo και την εφαρμογή της στα χρηματοοικονομικά, στο Κεφάλαιο 2 παραθέτουμε κάποιες μαθηματικές έννοιες, όπως τη γεωμετρική κίνηση Brown, το λήμμα του Ito και το μοντέλο Black-Scholes, που χρειάζονται για την κατανόηση των μεθόδων του Κεφαλαίου 3. Εκεί, αναλύονται οι τρόποι αποτίμησης ενός autocallable με έναν και με δύο υποκείμενους τίτλους. Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 4 αποτιμούμε αριθμητικά και τις δύο περιπτώσεις, παρουσιάζοντας και τα ανάλογα γραφήματα, ενώ στο Κεφάλαιο 5 σχολιάζουμε τα αποτελέσματά μας. Τέλος, στο Παράρτημα της εργασίας υπάρχουν όλοι οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν στα παραδείγματα του Κεφαλαίου 4.

Γενικά μιλώντας, σε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιούνται πολύπλοκες στοχαστικές διαδικασίες για τη μοντελοποίηση των τιμών των υποκείμενων τίτλων του δικαιώματος, η αποτίμηση μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo είναι η ενδεδειγμένη οδός. Η αποτίμηση μέσω προσομοίωσης ταιριάζει καλύτερα σε πολυδιάστατα προβλήματα, καθώς επίσης και σε περιπτώσεις που χρειαζόμαστε ολόκληρο το μονοπάτι των τιμών των υποκείμενων τίτλων και όχι απλά αυτών στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Τα autocallables είναι εφικτό να αποτιμηθούν μέσω τυπικών αλγορίθμων Monte Carlo, όμως, όπως θα δείξουμε αριθμητικά και γραφικά στο Κεφάλαιο 4, μόνο για έναν εξαιρετικά αυξημένο αριθμό μονοπατιών Monte Carlo. Αυτό συμβαίνει διότι οι συνήθεις εκτιμητές Monte Carlo έχουν μεγάλη διακύμανση, συνεπώς η εύρεση αξιόπιστων τιμών δεν είναι δυνατή αν δεν αυξηθεί επαρκώς το δείγμα των τυχαίων αριθμών.

Ένα άλλο πρόβλημα που προκύπτει, είναι η μη ευσταθής αποτίμησή τους. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι το παραμικρό λάθος στην τιμή του υποκείμενου τίτλου ενδεχομένως να επιφέρει μεγάλες και αυθαίρετες αυξομειώσεις στην εκτίμηση της τιμής του δικαιώματος. Και αυτό οφείλεται στη μεγάλη διακύμανση των τυπικών εκτιμητών και θα το διαπιστώσουμε γραφικά στο Κεφάλαιο 4 με τους συντελεστές ευαισθησίας του δικαιώματος, Delta και Vega.

Στην περίπτωση που το autocallable έχει έναν υποκείμενο τίτλο, και τα δύο αυτά προβλήματα επιλύονται χρησιμοποιώντας για τις αποτιμήσεις μας τον *One-Step Survival Monte Carlo εκτιμητή* των Glasserman και Staum (2001). Στην ενότητα 3.2 θα παρουσιάσουμε το θεωρητικό του υπόβαθρο, ενώ στην 4.1 θα δείξουμε γραφικά την αριθμητική του ευστάθεια. Ο εν λόγω εκτιμητής έχει σημαντικά μικρότερη διακύμανση, συνεπώς δίνει αξιόπιστες τιμές ακόμα και όταν χρησιμοποιούμε σχετικά λίγα μονοπάτια Monte Carlo.

Στην περίπτωση που το autocallable έχει δύο υποκείμενους τίτλους, θα το αποτιμήσουμε με τον *One-Step Survival GHK-Monte Carlo εκτιμητή* των Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013), ο οποίος προέκυψε στην προσπάθειά τους να γενικεύσουν τη θεωρία των Glasserman και Staum (2001) στις δύο και πλέον διαστάσεις. Ωστόσο, όπως θα δούμε στην ενότητα 3.3, δεν θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια απλή γενίκευση της one-step survival στρατηγικής, καθώς αυτή ήταν η πρώτη φορά που εφαρμόστηκαν ιδέες της *GHK Importance Sampling* θεωρίας σε Monte Carlo αποτιμήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης. Ομοίως με την περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, αυτός ο εκτιμητής έχει ελαττωμένη διασπορά συγκριτικά με τους τυπικούς Monte Carlo εκτιμητές, δίνοντάς μας τιμές με ικανοποιητική ακρίβεια ακόμα και για μικρού μεγέθους μονοπάτια. Επιπλέον, επιτρέπει την ευσταθή αποτίμηση του autocallable μέσω πεπερασμένων διαφορών. Οι αριθμητικές εφαρμογές και τα γραφήματα για τη διμετάβλητη περίπτωση παρατίθενται στην ενότητα 4.2.

<u>Κεφάλαιο 2</u>: Πιθανοθεωρητικό Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε ορισμένες μαθηματικές έννοιες στις οποίες θα γίνεται αναφορά καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, θα δώσουμε τον ορισμό και τις κατηγορίες των στοχαστικών διαδικασιών, θα παρουσιάσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες Markov, Wiener και Ito, την γεωμετρική κίνηση Brown, το λήμμα του Ito, ενώ θα δούμε συνοπτικά το μοντέλο των Black-Scholes. Προτείνεται το βιβλίο του Hull (2008) για την αναλυτικότερη περιγραφή των εννοιών του παρόντος κεφαλαίου.

2.1 Περί Στοχαστικών Διαδικασιών

Πρόκειται για μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών των οποίων οι τιμές αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου κατά απρόβλεπτο τρόπο. Ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές αλλά και με το πότε αλλάζουν αυτές οι τιμές, οι στοχαστικές διαδικασίες κατηγοριοποιούνται σε:

- <u>*Διακριτού Χρόνου*</u>: Οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αλλάξουν μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές.
- <u>*Συνεχούς Χρόνου*</u>: Οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αλλάξουν οποιαδήποτε χρονική στιγμή.
- <u>*Διακριτών Μεταβλητών*</u>: Οι μεταβλητές στοχαστικών διαδικασιών τέτοιου τύπου παίρνουν συγκεκριμένες διακριτές τιμές.
- <u>*Συνεχών Μεταβλητών*</u>: Οι μεταβλητές στοχαστικών διαδικασιών τέτοιου τύπου παίρνουν τιμές εντός ενός διαστήματος.

Μπορούμε να κάνουμε χρήση των παραπάνω τύπων των στοχαστικών διαδικασιών ώστε να μοντελοποιήσουμε τιμές μετοχών. Στην πράξη, οι τιμές των μετοχών περιορίζονται σε διακριτές τιμές, ενώ οι αλλαγές τους παρατηρούνται μόνο το χρηματιστήριο είναι ανοικτό. Δηλαδή, πρόκειται για στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών. Εντούτοις, έχει αποδειχθεί ότι οι στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου και συνεχών μεταβλητών είναι το πιο χρήσιμο μοντέλο για τον προσδιορισμό των τιμών των μετοχών και των παράγωγων προϊόντων τους.

2.2 Στοχαστική Διαδικασία Markov

Εδώ έχουμε να κάνουμε με έναν ιδιαίτερο τύπο στοχαστικής διαδικασίας, όπου μόνο η παρούσα αξία σχετίζεται με την πρόβλεψη του μέλλοντος. Με άλλα λόγια, η παρούσα αξία/τιμή μιας μετοχής ενσωματώνει όλη την ιστορική πληροφόρηση σχετικά με τις παρελθούσες τιμές της. Συνεπώς, η γνώση του παρελθόντος μιας διαδικασίας Markov δεν προσφέρει καμία επιπλέον πληροφορία στους επενδυτές και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μελλοντικές προβλέψεις. Οι τελευταίες είναι αβέβαιες και εκφράζονται μόνο μέσω κατανομών πιθανοτήτων.

Έστω, λοιπόν, ότι οι μεταβλητές των μετοχών ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία Markov. Από τη στιγμή που οι μετοχές ακολουθούν μια τέτοια διαδικασία, η πρόβλεψή μας σχετικά με τις μελλοντικές αλλαγές στις τιμές τους δεν (πρέπει να) επηρεάζεται από τις ιστορικές τιμές τους.

Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ενότητα, να πούμε ότι οι στοχαστικές διαδικασίες Markov είναι διαδικασίες συνεχούς χρόνου.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφέρουμε δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες των διαδικασιών Markov:

- Έστω μια μεταβλητή που ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία Markov. Υποθέτουμε ότι η αλλαγή στην τιμή αυτής της μεταβλητής κατά τη διάρκεια ενός έτους ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N{\sim}(0,1)$. Τότε αποδεικνύεται ότι η αλλαγή αυτή κατά τη διάρκεια ενός τυχαίου χρονικού διαστήματος ΔT ακολουθεί τη $N(0,\sqrt{\Delta T})$.
- Στις στοχαστικές διαδικασίες Markov, οι αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών που παρατηρούνται σε διαδοχικές χρονικές περιόδους είναι ανεξάρτητες.

Σημείωση: Καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας εργασίας, με $N(\mu,\sigma)$ θα συμβολίζουμε την κανονική κατανομή, με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ.

2.3 Στοχαστική Διαδικασία Wiener

Έστω μία τυχαία μεταβλητή z, η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή $z \sim N(0,1)$.

Η *διαδικασία Wiener* περιγράφει την εξέλιξη της τυχαίας μεταβλητής z μέσα στο χρόνο. Πρόκειται για μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και συνεχούς μεταβλητής.

Γενικά, μία τυχαία μεταβλητή (εδώ η z) ακολουθεί μία διαδικασία Wiener, εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Η μεταβολή Δz, κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου Δt, ισούται με $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.1)$
- Οι τιμές του Δz, για δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές χρονικές περιόδους Δt είναι ανεξάρτητες (ιδιότητα Markov).

όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Συνεπώς, από τη σχέση (2.1), προκύπτει ότι $\Delta z \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $\Delta z \sim N(0, \sqrt{T})$, όπου Δz είναι η μεταβολή του z στα πλαίσια μιας μεγάλης χρονικής περιόδου T.

Μία διαδικασία Wiener έχει *ρυθμό τάσης* (drift rate) ίσο με 0 και *ρυθμό διακύμανσης* (variance rate) ίσο με 1.

Σημείωση: Ως ρυθμό τάσης ορίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της αναμενόμενης τιμής του Δz και ως ρυθμό διασποράς τον ρυθμό μεταβολής της διακύμανσής του.

Δηλαδή, $\frac{E[\Delta z]}{\Delta t}$ και $\frac{Var(\Delta z)}{\Delta t}$ αντιστοίχως.

Έστω τώρα μία τυχαία μεταβλητή x. Θα λέμε ότι η x ακολουθεί μία *γενικευμένη διαδικασία Wiener*, με ρυθμό τάσης ίσο με a και ρυθμό διασποράς ίσο με b^2, εάν ισχύει

$$dx = a dt + b dz \qquad (2.2)$$

όπου a, b σταθερές.

Η μεταβολή της x, Δx, κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt, δίνεται από τη σχέση

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.1) παίρνουμε

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.3}$$

όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Επομένως, ισχύει ότι $\Delta x \sim N(a\Delta t, b\sqrt{\Delta t})$.

Να σημειώσουμε ότι η σχέση (2.3) ισχύει ∀ Δt μικρό, αλλά μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει και για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $\Delta t > 0$.

2.4 Στοχαστική Διαδικασία Ito

Μία *διαδικασία Ito* είναι ουσιαστικά μία γενικευμένη διαδικασία Wiener, στην οποία όμως ο ρυθμός τάσης a και ο ρυθμός διασποράς b^2 είναι συναρτήσεις της μεταβλητής x και του χρόνου t. Και αυτή πρόκειται για μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και μεταβλητής.

Δηλαδή η μεταβλητή x ακολουθεί τη διαδικασία

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{2.4}$$

Ομοίως, η μεταβολή της x, Δx, κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής μεταβολής Δt, δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\Delta z$$

και αντικαθιστώντας την (2.1) έχουμε

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.5}$$

όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Επομένως, ισχύει ότι $\Delta x \sim N(a(x,t)\Delta t, b(x,t)\sqrt{\Delta t})$.

<u>Σημείωση</u>: Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να τονίσουμε πως, σε αντίθεση με τη γενικευμένη διαδικασία Wiener, η σχέση (2.5) ισχύει μόνο για μικρά Δt.

2.5 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Έστω S η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t. Να σημειωθεί ότι με S συμβολίζουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου μας, ο οποίος μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό προϊόν και όχι απαραίτητα μόνο μετοχές. Τότε αποδεικνύεται ότι η S ακολουθεί μία διαδικασία Ito, με ρυθμό τάσης μs και ρυθμό διασποράς $\sigma^2 S^2$.

Δηλαδή ισχύει:

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dz$$

ή

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ή

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{2.6}$$

Το μοντέλο (2.6) είναι γνωστό στα μαθηματικά ως *γεωμετρική κίνηση Brown* (Geometric Brownian Motion) και χρησιμοποιείται στα χρηματοοικονομικά για την εκτίμηση των αλλαγών στις τιμές των μετοχών.

Επίσης, στη σχέση (2.6), η παράμετρος μ είναι ο αναμενόμενος ρυθμός μεταβολής της τιμής της μετοχής (expected rate of return), ενώ η παράμετρος σ εκφράζει την επικινδυνότητά της (volatility). Και οι δύο αυτές παράμετροι ορίζονται ως σταθερές.

Έστω πάλι S η τιμή της μετοχής σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Τότε, αν συμβολίσουμε με ΔS τη μεταβολή της S μέσα στο επόμενο μικρό χρονικό διάστημα Δt, η σχέση (2.6) μετατρέπεται σε:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta z$$

και λόγω της (2.1) έχουμε

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.7}$$

όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Συνεπώς, ισχύει ότι $\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t})$.

Η σχέση (2.7) αποτελεί τη διακριτή μορφή της γεωμετρικής κίνησης Brown και ισχύει μόνο για μικρά Δt.

2.6 Το Λήμμα του Ito

Έστω μία τυχαία μεταβλητή x, η οποία ακολουθεί μία διαδικασία Ito, δηλαδή, όπως είδαμε στην ενότητα 2.2, ισχύει ότι

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

όπου dz είναι μία διαδικασία Wiener.

Έστω επίσης μία συνάρτηση G, συναρτήσει του x και του χρόνου t (δηλαδή είναι $G = G(x,t)$), η οποία είναι μία φορά παραγωγίσιμη ως προς t και δύο φορές ως προς x.

Τότε, από το *λήμμα του Ito*, γνωρίζουμε ότι η G ακολουθεί την παρακάτω διαδικασία:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \tag{2.8}$$

όπου dz είναι η ίδια διαδικασία Wiener όπως ορίστηκε για την x.

Συνεπώς, η συνάρτηση G ακολουθεί και αυτή μία διαδικασία Ito με:

- Ρυθμό Τάσης: $\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$
- Ρυθμό Διακύμανσης: $\left(\frac{\partial G}{\partial x}b\right)^2$

Επιπλέον, όπως είδαμε στην ενότητα 2.5, έχουμε ορίσει το ακόλουθο μοντέλο για τις μεταβολές της τιμής μιας μετοχής:

$dS = \mu S dt + \sigma S dz$

όπου μ και σ σταθερές.

Ομοίως, το λήμμα του Ito μάς δίνει τη διαδικασία που ακολουθεί μία συνάρτηση $G = G(S, t)$, η οποία εξαρτάται από την τιμή της μετοχής S και το χρόνο t:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \qquad (2.9)$$

όπου η συνάρτηση G είναι μία φορά παραγωγίσιμη ως προς t και δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς S.

2.7 Η Λογαριθμοκανονική Κατανομή

Έστω $G = lnS$. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito που είδαμε προηγουμένως, μπορούμε να βρούμε τη διαδικασία που ακολουθεί η συνάρτηση G.

Πράγματι, κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, προκύπτει ότι:

$$dG = d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \qquad (2.10)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα μ, σ είναι σταθερές, προκύπτει ότι η συνάρτηση G ακολουθεί μία γενικευμένη διαδικασία Wiener (όπως είδαμε στην ενότητα 2.3), με σταθερό ρυθμό τάσης ίσο με $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και σταθερό ρυθμό διακύμανσης ίσο με σ^2.

Η σχέση (2.10) διακριτοποιείται για μεγάλα χρονικά διαστήματα, έστω στο $[0, T]$, δηλαδή:

$$\Delta G = \Delta(\ln S) = \ln(S_T) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \Delta z$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.1) έχουμε

$$\Delta(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T} \qquad (2.11)$$

όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$, S_0 είναι η τιμή της μετοχής σήμερα και S_T είναι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή T.

Επομένως,

$$\Delta(\ln S) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

ή

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

δηλαδή δείξαμε ότι ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής τη χρονική στιγμή T κατανέμεται κανονικά, άρα συμπεραίνουμε ότι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή T, S_T, κατανέμεται *λογαριθμοκανονικά.*

Προτείνεται το βιβλίο των Aitchison και Brown (1963) για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών της λογαριθμοκανονικής κατανομής.

2.8 Μοντέλο Black-Scholes

Πρόκειται για το απλούστερο υπόδειγμα αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης σε συνεχή χρόνο, εντούτοις είναι κομβικής σημασίας για την οικονομική επιστήμη. Το γεγονός ότι η πλειοψηφία των επενδυτών χρησιμοποιεί ακόμα το συγκεκριμένο υπόδειγμα για τις διάφορες αποτιμήσεις, επιβεβαιώνει τον εν λόγω ισχυρισμό.

Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι πολλά μοντέλα έχουν ως βάση το υπόδειγμα Black-Scholes (1973), τα οποία έχουν δημιουργηθεί στην προσπάθεια για μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα. Πάντα όμως το μοντέλο αυτό αποτελεί σημείο αναφοράς σε οποιαδήποτε μελέτη.

Κάποιες από τις υποθέσεις του μοντέλου είναι οι εξής:

- Η τιμή της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown.
- Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage στην αγορά.
- Το *επιτόκιο μηδενικού κινδύνου* (the risk-free interest rate) είναι σταθερό και ίδιο για όλες τις λήξεις.
- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών.
- Ο υποκείμενος τίτλος δεν αποδίδει μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του παραγώγου.
- Η διαπραγμάτευση των τίτλων είναι συνεχής.

Έστω S η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t. Όπως είδαμε στην ενότητα 2.5, η S ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή ισχύει

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Η άνω σχέση μπορεί να πάρει την ακόλουθη διακριτή μορφή

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

Έστω επίσης $f = f(S, t)$ η τιμή ενός παραγώγου που εξαρτάται από την S.

Τότε, η *διακριτή μορφή* του λήμματος Ito μάς δίνει τη διαδικασία που ακολουθεί η f:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \qquad (2.12)$$

όπου η συνάρτηση f είναι μία φορά παραγωγίσιμη ως προς t και δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς S.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του *ακίνδυνου χαρτοφυλακίου* (riskless portfolio), αποδεικνύεται ότι η f ικανοποιεί την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (2.13)$$

όπου r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Η εξίσωση (2.13) είναι γνωστή ως *διαφορική εξίσωση των Black και Scholes* και δύναται να μας δώσει λύσεις για οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο. Έχει άπειρες λύσεις, έτσι, ανάλογα την περίπτωση, κάνουμε χρήση των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών για την εύρεσή τους.

Κεφάλαιο 3: Το Πρόβλημα της Αποτίμησης των Δικαιωμάτων Αυτόματης Ανάκλησης

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την προσομοίωση Monte Carlo. Με αυτήν ως εφόδιο, και κάνοντας χρήση της one-step survival τεχνικής των Glasserman και Staum (2001), θα προχωρήσουμε στην αποτίμηση ενός autocallable με έναν υποκείμενο τίτλο. Ύστερα, εφαρμόζοντας τη θεωρία των Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013), θα δείξουμε πώς είναι εφικτή η αντίστοιχη αποτίμησή του με δύο υποκείμενους τίτλους.

3.1 Προσομοίωση Monte Carlo

Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (call option), το οποίο έχει ημερομηνία λήξης T, τιμή εξάσκησης K και η τιμή του υποκείμενού του τίτλου συμβολίζεται με S.

Τότε το κέρδος (payoff) από την αγορά ενός τέτοιου τύπου δικαιώματος (long call) είναι

$$f_{call} \equiv Payoff_T = max\{S_T - K, 0\}$$

όπου με S_T παριστάνουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη.

Αντιστοίχως, για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (put option), το κέρδος από την αγορά του (long put) είναι

$$f_{put} \equiv Payoff_T = max\{K - S_T, 0\}$$

Οι συναρτήσεις f_{call} και f_{put} ονομάζονται *συναρτήσεις χρηματοροών* των δικαιωμάτων στη λήξη.

Γενικά, ο υπολογισμός της αξίας ενός παραγώγου τη στιγμή της συμφωνίας (δηλαδή η παρούσα αξία του) γίνεται ως εξής:

- Υποθέτουμε ότι $\mu = r$, δηλαδή ότι βρισκόμαστε στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου.
- Υπολογίζουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη και ύστερα υπολογίζουμε το αναμενόμενο κέρδος από το παράγωγο στη λήξη.
- Προεξοφλούμε το αναμενόμενο αυτό κέρδος με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Εντέλει, υπολογίζουμε το

$$f_0 = e^{-rT}\hat{E}[f_T] \tag{3.1}$$

και η μέθοδος Monte Carlo μάς βοηθά στην εύρεση της αναμενόμενης αυτής τιμής που υπάρχει στην άνω σχέση.

Η *προσομοίωση Monte Carlo* είναι μια αριθμητική μέθοδος ιδιαιτέρως χρήσιμη για τον υπολογισμό των τιμών δικαιωμάτων που εξαρτώνται από το μονοπάτι των τιμών του υποκείμενού τους τίτλου, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση των autocallables. Εν γένει, με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε αριθμητικά μέσες τιμές.

Από τον *ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών*, γνωρίζουμε ότι, για n αριθμό ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$), ο δειγματικός τους μέσος τείνει στην πραγματική μέση του πληθυσμού, όταν το n τείνει στο άπειρο.

Δηλαδή ισχύει,

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n \to +\infty} E[X]$$

Θα κατασκευάσουμε, λοιπόν, έναν αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής του πληθυσμού X:

- Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $X_1, X_2, \dots, X_n$ από την (γνωστή) κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή X.
- Υπολογίζουμε την $E[X] \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Όσο μεγαλώνει το μέγεθος του δείγματός μας, τόσο καλύτερη ακρίβεια έχουμε στα αποτελέσματά μας (λόγω μικρότερης διακύμανσης).

Για την εύρεση του κατάλληλου μεγέθους n του δείγματος, ώστε να έχουμε ικανοποιητική ακρίβεια, χρησιμοποιούμε κατάλληλα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Παρακάτω, θα δούμε πώς με τη μέθοδο Monte Carlo είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

Παράδειγμα Αποτίμησης Ε.Δ.Α. με Χρήση της Προσομοίωσης Monte Carlo

Καταρχάς, στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, η τιμή ενός call option δίνεται από τη σχέση

$$c = e^{-rT}\hat{E}[\max\{S_T - K, 0\}] \tag{3.2}$$

λόγω της (3.1).

Έστω ότι ο υποκείμενος τίτλος μας είναι μια μετοχή, δηλαδή με S_T συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής στη λήξη.

Στη σχέση (3.2), η τυχαία μεταβλητή είναι η S_T, συνεπώς κατασκευάζουμε ένα τυχαίο δείγμα με τις τελικές τιμές της μετοχής, $S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, \dots, S_T^{(n)}$, από την κατανομή που ακολουθεί η S_T.

Όμως, από την ενότητα 2.7 και τη σχέση (2.11) προκύπτει μια σχέση για την τιμή της μετοχής στη λήξη συναρτήσει της τιμής της σήμερα:

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}} \tag{3.3}$$

όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Έτσι, η (3.2) γίνεται (και αφού θυμίσουμε ότι $\mu = r$ στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου):

$$c = e^{-rT}\hat{E}\left[max\left\{S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}} - K, 0\right\}\right] \tag{3.4}$$

με το ε να είναι η μοναδική τυχαία μεταβλητή.

Και κατά τα πρότυπα του αλγορίθμου που αναλύθηκε προηγουμένως, έχουμε:

- Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ από την κατανομή $N(0,1)$.
- Υπολογίζουμε την τιμή $c = e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} max\left\{S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon_i\sqrt{T}} - K, 0\right\}$

βρίσκοντας τελικά την ζητούμενη τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

3.2 Monte Carlo Μέθοδοι Αποτίμησης Δικαιωμάτων Αυτόματης Ανάκλησης με έναν Υποκείμενο Τίτλο

Έστω η τυχαία μεταβλητή S_t, με $t = 1, 2, \dots, m$, η οποία περιγράφει την εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου τίτλου (μετοχή). Δηλαδή, με $S_1, S_2, \dots, S_m$ παριστάνουμε τις εκτιμήσεις των τιμών της μετοχής τις προκαθορισμένες ημέρες παρατήρησης $t_1, t_2, \dots, t_m$ αντίστοιχα.

Επίσης, θεωρούμε το μοντέλο Black-Scholes για τις κινήσεις της τιμής της μετοχής, συνεπώς η μεταβλητή S_t ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

όπου $\mu = r$ (κόσμος ουδέτερου κινδύνου), r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, σ η επικινδυνότητα (volatility) και W_t μια τυπική κίνηση Brown.

Δουλεύοντας όπως στην ενότητα 2.7 (βλέπε και σχέση (3.3)), καταλήγουμε σε μία έκφραση υπολογισμού της τιμής της μετοχής συναρτήσει της τιμής της την προηγούμενη ημέρα παρατήρησης:

$$S_{j+1} = S_j exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_j\right) \tag{3.5}$$

όπου $Z_j \sim N(0,1)$ και $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Η τιμή της μετοχής σήμερα (την t_0) είναι γνωστή και ίση με S_0, άρα μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της σε όλες τις ημέρες παρατήρησης.

Η *προεξοφλημένη αποπληρωμή* ενός δικαιώματος αυτόματης ανάκλησης με έναν υποκείμενο τίτλο (μετοχή) είναι ίση με:

$$Q(S_1, S_2, \dots, S_m) = \begin{cases} e^{-r(t_j - t_0)} Q_j \ , \ \ \alpha\nu \ \ S_i/S_{ref} < B \leq S_j/S_{ref} \ \ \forall i < j \\ e^{-r(t_m - t_0)} q\left(S_m/S_{ref}\right) , \ \ \alpha\nu \ \ S_j/S_{ref} < B \ \ \forall j = 1,2, \dots, m \end{cases} \tag{3.6}$$

όπου το Q_j δηλώνει την *σταθερή αποπληρωμή* που δίνεται στον κάτοχο του δικαιώματος, σε περίπτωση που η *απόδοση* S_j/S_{ref} της μετοχής, τη χρονική στιγμή t_j, γίνει για πρώτη φορά τουλάχιστον ίση με την τιμή του φράγματος B.

Η απόδοση της μετοχής μετράται έχοντας ως τιμή αναφοράς, μια τιμή S_{ref} της μετοχής, η οποία συνήθως είναι η τιμή που αυτή έχει την ημερομηνία έκδοσης του autocallable.

Εάν η απόδοση S_j/S_{ref} παραμείνει κάτω από την τιμή του φράγματος B για *όλες* τις ημέρες παρατήρησης, τότε ο κάτοχος του δικαιώματος λαμβάνει την *πληρωμή αποκατάστασης* q, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από την τελική απόδοση της μετοχής S_m/S_{ref}.

Η αξία ενός τέτοιου autocallable σήμερα (την t_0) δίνεται από την *αναμενόμενη προεξοφλημένη αποπληρωμή* του που είναι ίση με

$$PV_{t_0} = E[Q(S_1, S_2, \dots, S_m)] \tag{3.7}$$

και ο υπολογισμός της είναι εφικτός μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo.

Ο *τυπικός εκτιμητής* Monte Carlo για την PV_{t_0} υπολογίζεται προσομοιώνοντας μια ακολουθία πιθανών τιμών $s_{1,n}, s_{2,n}, \dots, s_{m,n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, των τυχαίων μεταβλητών $S_1, S_2, \dots, S_m$ αντίστοιχα. Γνωρίζοντας, λοιπόν, την τιμή s_0 της μετοχής σήμερα, μέσω της σχέσης (3.5) υπολογίζουμε διαδοχικά τις υπόλοιπες.

Έτσι, καταφέρνουμε να προσεγγίσουμε την PV_{t_0} από την μέση τιμή των αποπληρωμών:

$$PV_{t_0} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Q\left(s_{1,n}, s_{2,n}, \dots, s_{m,n}\right) \tag{3.8}$$

Στην περίπτωση που για κάποιο j προκύψει ότι $s_j/S_{ref} \geq B$, τότε προφανώς δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε το s_{j+1}, αφού η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Ως εκ τούτου, ο υπολογισμός κάθε δείγματος προσομοίωσης $s_1, s_2, \dots, s_m$ (μέσω της σχέσης (3.5)) χρειάζεται το πολύ m z_j από την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Z_j. Δηλαδή, $z_j \sim N(0,1)$.

Αυτά τα δείγματα παράγονται θέτοντας $z_j = \Phi^{-1}(u_j)$, όπου τα u_j εκλέγονται από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$, ενώ με Φ συμβολίζουμε την αθροιστική κατανομή $N(0,1)$.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε χρήση της *one-step survival τεχνικής* των Glasserman και Staum (2001), στην προσπάθειά μας να βελτιώσουμε τον προαναφερθέντα εκτιμητή Monte Carlo. Χρησιμοποιώντας την εν λόγω τεχνική, δοκιμάζουμε μόνο τα μονοπάτια εκείνα στα οποία η τιμή της μετοχής παραμένει κάτω από το φράγμα B για όλες τις ημέρες παρατήρησης t_j, δηλαδή μονοπάτια τα οποία δεν οδηγούν σε πρόωρη αποπληρωμή.

Πρακτικά αυτό γίνεται παράγοντας δείγματα θέτοντας $z_j' = \Phi^{-1}(p_j u_j)$, αντί για τα αρχικά z_j. Ο αριθμητικός υπολογισμός της αντίστροφης (αθροιστικής) κανονικής κατανομής γίνεται σύμφωνα με τους G. Marsaglia, J. Marsaglia και Zaman (1994).

Με p_j συμβολίζουμε την πιθανότητα η τιμή της μετοχής να παραμείνει <u>κάτω</u> από το φράγμα B στο επόμενο βήμα.

Δηλαδή,

$$p_j = P\left(S_{j+1}/S_{ref} < B | S_j = s_j\right) \tag{3.9}$$

Αντικαθιστώντας την S_{j+1} με την έκφρασή της από τη σχέση (3.5), προκύπτει:

$$p_j = P\left(\frac{S_j exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_j\right)}{S_{ref}} < B | S_j = s_j\right)$$

$$= P\left(\frac{s_j exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_j\right)}{S_{ref}} < B\right)$$

$$= P\left(exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_j\right) < \frac{BS_{ref}}{s_j}\right)$$

$$= P\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_j < \ln\left(\frac{BS_{ref}}{s_j}\right)\right)$$

$$= P\left(Z_j < \frac{\ln\left(BS_{ref}/s_j\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)}{\sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln\left(BS_{ref}/s_j\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)}{\sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}}\right)$$

Επομένως,

$$p_j = \Phi\left(\frac{\ln\left(BS_{ref}/s_j\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)}{\sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}}\right) \tag{3.10}$$

και τα $p_j u_j$ εκλέγονται από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, p_j)$.

Ως συνέπεια των παραπάνω, η δειγματοληψία των μεταβλητών Z_j δεν γίνεται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, αλλά από μία “περικομμένη” εκδοχή της, για την οποία μάλιστα ισχύει

$$Z_j < \frac{\ln\left(BS_{ref}/s_j\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right)}{\sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}} \tag{3.11}$$

Εντούτοις, αυτή η τροποποίηση θα επιφέρει <u>μεροληψία</u> στα αποτελέσματά μας. Για αυτόν το λόγο διορθώνουμε την όλη διαδικασία, συμπεριλαμβάνοντας και τις περιπτώσεις όπου η τιμή της μετοχής γίνεται <u>τουλάχιστον ίση</u> με το φράγμα B, οι οποίες και θα συνέβαιναν με πιθανότητα $1 - p_j$.

Τελικά, αντικαθιστούμε τον τυπικό εκτιμητή Monte Carlo (3.8) με τον εκτιμητή

$$PV'_{t_0} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Q'\left(s_{1,n}, s_{2,n}, \dots, s_{m,n}\right) \tag{3.12}$$

ο οποίος καλείται *one-step survival εκτιμητής* Monte Carlo.

Αυτή τη φορά, η παραγωγή των δειγμάτων προσομοίωσης $s_{1,n}, s_{2,n}, \dots, s_{m,n}$ γίνεται με την one-step survival τεχνική που παραθέσαμε προηγουμένως.

Ενώ η *προεξοφλημένη αποπληρωμή του autocallable* είναι ίση με:

$$Q'(s_1, s_2, \dots, s_m) =$$

$$(1 - p_0)e^{-r(t_1 - t_0)}Q_1 + p_0\left[(1 - p_1)e^{-r(t_2 - t_0)}Q_2 + p_1\left[(1 - p_2)e^{-r(t_3 - t_0)}Q_3 + \dots +\right.\right.$$

$$\left.\left.p_{m-2}\left[(1 - p_{m-1})e^{-r(t_m - t_0)}Q_m + p_{m-1}e^{-r(t_m - t_0)}q\left(\frac{s_m}{S_{ref}}\right)\right]\dots\right]\right]$$

Ισοδύναμα έχουμε,

$$Q'(s_1, s_2, \dots, s_m) = L_m e^{-r(t_m - t_0)} q\left(\frac{s_m}{S_{ref}}\right) + \sum_{j=0}^{m-1} L_j (1 - p_j) e^{-r(t_{j+1} - t_0)} Q_{j+1} \quad (3.13)$$

όπου $L_j = \prod_{i=0}^{j-1} p_i$, με $L_0 = 1$ και $L_1 = p_0$.

Οι Glasserman και Staum (2001) απέδειξαν ότι ο εκτιμητής (3.12) είναι <u>αμερόληπτος</u> και ότι έχει σημαντικά <u>μικρότερη διασπορά</u> σε σχέση με τον τυπικό εκτιμητή Monte Carlo (3.8). Από την άλλη πλευρά, είναι πιο αργός στους υπολογισμούς του εξαιτίας της αυξημένης πολυπλοκότητάς του.

Πριν ολοκληρώσουμε την παρούσα ενότητα, θα παραθέσουμε την ερμηνεία που δώσανε οι Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013) για την one-step survival στρατηγική. Το συγκεκριμένο μαθηματικό υπόβαθρο κρίνεται απαραίτητο για την κατανόηση του προβλήματος της αποτίμησης δικαιωμάτων αυτόματης ανάκλησης με δύο ή περισσότερους υποκείμενους τίτλους.

<u>Τεχνική Διαχωρισμού Ολοκληρώματος (Integral Splitting Technique)</u>

Αρχικά, ερμήνευσαν την one-step survival στρατηγική ως μια τεχνική διαχωρισμού ολοκληρώματος.

Πιο συγκεκριμένα, έδειξαν ότι η παρούσα αξία του δικαιώματος σήμερα είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου, η οποία έχει την εξής μαθηματική έκφραση:

$$PV_{t_0}(s_0) = e^{-r(t_1 - t_0)} E\left[PV_{t_1}(s_1)\right] = e^{-r(t_1 - t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) PV_{t_1}(s_1(z)) dz \quad (3.14)$$

όπου:

- με φ συμβολίζουμε την τυποποιημένη κανονική κατανομή.
- $s_1(z) = s_0 exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + \sigma\sqrt{t_1 - t_0}z\right)$, κατά τα πρότυπα της σχέσης (3.5).
- $PV_{t_1}(s_1) = Q_1$, αν $s_1/S_{ref} \geq B$, διαφορετικά η PV_{t_1} δίνεται από μια σχέση ανάλογη της (3.14).

Λαμβάνοντας υπόψη ότι με p_0 συμβολίζουμε την πιθανότητα το δικαίωμα να επιβιώσει σήμερα, ενώ με $1-p_0$ αυτήν κατά την οποία το δικαιώματα δεν επιβιώνει (παίρνοντας την πρόωρη αποπληρωμή Q_1), η σχέση (3.14) συνεπάγεται:

$$PV_{t_0}(s_0) = (1-p_0)e^{-r(t_1-t_0)}Q_1 + e^{-r(t_1-t_0)}\int_{\frac{s_1(z)}{S_{ref}}<B} \varphi(z)PV_{t_1}(s_1(z))dz \qquad (3.15)$$

όπου $p_0 = \int_{\frac{s_1(z)}{S_{ref}}<B} \varphi(z)dz$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης όπως αυτή ορίστηκε στη σχέση (3.10).

Επειδή το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.15) είναι περιορισμένο στην περιοχή επιβίωσης του δικαιώματος και άρα η φ δεν είναι πλέον συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει να κάνουμε την παρακάτω μετατροπή:

$$PV_{t_0}(s_0) = (1-p_0)e^{-r(t_1-t_0)}Q_1 + p_0 e^{-r(t_1-t_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(z)}{p_0}\mathbf{1}_{\frac{s_1(z)}{S_{ref}}<B} PV_{t_1}(s_1(z))dz \quad (3.16)$$

όπου τώρα η $\frac{\varphi(z)}{p_0}\mathbf{1}_{\frac{s_1(z)}{S_{ref}}<B}$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Να σημειώσουμε ότι με $\mathbf{1}_{\frac{s_1(z)}{S_{ref}}<B}$ συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση, η οποία ισούται με τη μονάδα όταν ικανοποιείται η συνθήκη της, διαφορετικά είναι μηδενική.

Δουλεύοντας ακριβώς με τον ίδιο τρόπο και για τις υπόλοιπες ημερομηνίες παρατήρησης έως τη λήξη του δικαιώματος, προκύπτει ο εκτιμητής (3.12).

3.3 Monte Carlo Μέθοδοι Αποτίμησης Δικαιωμάτων Αυτόματης Ανάκλησης με δύο Υποκείμενους Τίτλους

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε δύο τρόπους αποτίμησης των autocallables με έναν υποκείμενο τίτλο, αυτόν δουλεύοντας με την τυπική μέθοδο Monte Carlo και αυτόν χρησιμοποιώντας την one-step survival θεωρία των Glasserman και Staum (2001). Στην παρούσα ενότητα, λοιπόν, πρόκειται να παρουσιάσουμε τη γενικευμένη εκδοχή των προαναφερθέντων τρόπων, θεωρώντας αυτή τη φορά ένα autocallable με δύο υποκείμενους τίτλους.

Έστω το διάνυσμα τιμών $\left(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}\right)$, $t = 1, 2, \dots, m$, το οποίο περιγράφει την εξέλιξη των τιμών των δύο υποκείμενων τίτλων (εν προκειμένω δύο μετοχών) μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Όπως και στην περίπτωση του δικαιώματος με έναν υποκείμενο τίτλο, θεωρούμε το μοντέλο Black-Scholes για την περιγραφή των κινήσεων των τιμών αυτών στο πέρασμα του χρόνου.

Δηλαδή το διάνυσμα $\left(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}\right)$ ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$\frac{dS_t^{(1)}}{S_t^{(1)}} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^{(1)}$$

$$\frac{dS_t^{(2)}}{S_t^{(2)}} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}$$

όπου:

- $\mu_1, \mu_2 \in R$. Θυμίζουμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = r$, όταν βρισκόμαστε στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου.
- $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ είναι οι επικινδυνότητες (volatilities) των δύο μετοχών αντιστοίχως.
- $\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)$ είναι μια δυσδιάστατη κίνηση Brown, η οποία έχει μηδενικό ρυθμό τάσης (drift rate) και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα (βλέπε σχέση (3.5)), οι εκφράσεις για τις τιμές των δύο μετοχών είναι οι ακόλουθες:

$$S_{j+1}^{(1)} = S_j^{(1)} exp\left(\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma_1\sqrt{t_{j+1} - t_j}Z_j^{(1)}\right) \tag{3.17}$$

$$S_{j+1}^{(2)} = S_j^{(2)} exp\left(\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) + \sigma_2\sqrt{t_{j+1} - t_j}Z_j^{(2)}\right) \tag{3.18}$$

όπου $Z_j^{(1)} \sim N(0,1)$, $Z_j^{(2)} \sim N(0,1)$ και $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Σημειώνεται ότι το διάνυσμα $\left(Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}\right)$ έχει και αυτό πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Ομοίως με την περίπτωση του autocallable με μία μετοχή ως υποκείμενο τίτλο του (βλέπε σχέση (3.6)), η *προεξοφλημένη αποπληρωμή* ενός autocallable με δύο μετοχές ισούται με:

$$Q\left(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, \dots, S_m^{(1)}, S_m^{(2)}\right) = \begin{cases} e^{-r(t_j - t_0)} Q_j \text{ , } \alpha\nu \; M_i < B \leq M_j \;\; \forall i < j \\ e^{-r(t_m - t_0)} q\left(\frac{S_m^{(1)}}{S_{ref}^{(1)}}, \frac{S_m^{(2)}}{S_{ref}^{(2)}}\right) \text{ , } \alpha\nu \; M_j < B \;\; \forall j = 1,2, \dots, m \end{cases} \tag{3.19}$$

όπου με $M_j = max\left\{S_j^{(1)}/S_{ref}^{(1)}, S_j^{(2)}/S_{ref}^{(2)}\right\}$ συμβολίζουμε τη μεγαλύτερη απόδοση εκ των δύο μετοχών τη χρονική στιγμή t_j.

Επίσης, το Q_j δηλώνει τη *σταθερή αποπληρωμή* που λαμβάνει ο κάτοχος του δικαιώματος στην περίπτωση που η απόδοση μίας μετοχής γίνει για πρώτη φορά τουλάχιστον ίση με την τιμή του φράγματος.

Επιπλέον, εάν η απόδοση M_j παραμείνει κάτω από το φράγμα B για όλες τις προκαθορισμένες ημέρες παρατήρησης, τότε ο κάτοχος του δικαιώματος λαμβάνει την *πληρωμή αποκατάστασης* (redemption payoff) q, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από τις τελικές αποδόσεις των δύο μετοχών.

Η *αξία*, λοιπόν, ενός τέτοιου autocallable σήμερα δίνεται από την αναμενόμενη προεξοφλημένη αποπληρωμή του

$$PV_{t_0} = E\left[Q\left(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, \dots, S_m^{(1)}, S_m^{(2)}\right)\right] \tag{3.20}$$

ο υπολογισμός της οποίας, όπως έχουμε ήδη δει, είναι εφικτός μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo.

Ως εκ τούτου, γνωρίζοντας τις τιμές των δύο μετοχών σήμερα, $\left(s_0^{(1)}, s_0^{(2)}\right)$, μπορούμε να παράξουμε δείγματα προσομοίωσης $\left(s_{j,n}^{(1)}, s_{j,n}^{(2)}\right)$, για $j = 1,2, \dots, m$ και $n = 1,2, \dots, N$, των τυχαίων μεταβλητών $\left(S_j^{(1)}, S_j^{(2)}\right)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.17) και (3.18).

Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνουμε να προσεγγίσουμε την PV_{t_0} από τη μέση τιμή των αποπληρωμών

$$PV_{t_0} \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Q\left(s_{1,n}^{(1)}, s_{1,n}^{(2)}, s_{2,n}^{(1)}, s_{2,n}^{(2)}, \dots, s_{m,n}^{(1)}, s_{m,n}^{(2)}\right) \tag{3.21}$$

Η one-step survival στρατηγική των Glasserman και Staum (2001) μπορεί να γενικευτεί και να εφαρμοστεί στην περίπτωση των autocallables με δύο ή και περισσότερους υποκείμενους τίτλους, στην προσπάθεια εύρεσης ενός ευσταθούς τρόπου αποτίμησης τέτοιων δικαιωμάτων.

Έτσι, δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη ενότητα όπου είδαμε το αντίστοιχο μονοδιάστατο πρόβλημα, καταλήγουμε στα εξής:

- Οι αποδόσεις των δύο μετοχών στο επόμενο χρονικό βήμα πρέπει να ικανοποιούν τις *συνθήκες επιβίωσης* (survival conditions) $S_{j+1}^{(k)}/S_{ref}^{(k)} < B$, για $k = 1, 2$.
- Η δειγματοληψία των τυχαίων μεταβλητών $\left(Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}\right)$ γίνεται από την περικομμένη πολυμετάβλητη κανονική κατανομή για την οποία ισχύει $Z_j^{(k)} < C_j^{(k)} = \frac{\ln\left(BS_{ref}^{(k)}/s_j^{(k)}\right) - \left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)(t_{j+1} - t_j)}{\sigma_k\sqrt{t_{j+1} - t_j}}$, $j = 0,1,\dots,m-1$ και $k = 1, 2$
- Σταθμίζουμε τις αποπληρωμές σύμφωνα με την πιθανότητα (επιβίωσης) $P\left(max\left\{\frac{S_{j+1}^{(1)}}{S_{ref}^{(1)}}, \frac{S_{j+1}^{(2)}}{S_{ref}^{(2)}}\right\} < B \mid \left(S_j^{(1)}, S_j^{(2)}\right) = \left(s_j^{(1)}, s_j^{(2)}\right)\right) = \Phi_\rho\left(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}\right)$,
  όπου με Φ_ρ συμβολίζουμε τη διμετάβλητη αθροιστική κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης ρ.

Σημείωση: Χάριν συντομίας, με k συμβολίζουμε τα στοιχεία της k-μετοχής.

Εντούτοις, οι Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013) ισχυρίστηκαν ότι υπάρχουν δύο προβλήματα σε αυτήν τη γενίκευση της θεωρίας των Glasserman και Staum (2001). Το πρώτο είναι πως δεν υπάρχει σαφής τρόπος παραγωγής δειγμάτων προσομοίωσης από την περικομμένη πολυμετάβλητη κανονική κατανομή που να οδηγεί σε ευσταθή αποτίμηση του δικαιώματος, το οποίο είναι και το ζητούμενο. Το δεύτερο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι ότι αυτή η προσέγγιση απαιτεί τον υπολογισμό μιας διμετάβλητης αθροιστικής κανονικής κατανομής για κάθε ημέρα παρατήρησης αλλά και για κάθε δείγμα προσομοίωσης Monte Carlo, κάτι το οποίο υπολογιστικά είναι αρκετά χρονοβόρο. Προς επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων, έκαναν χρήση της τεχνικής *GHK Importance Sampling Simulator*, η οποία και πήρε το όνομά της από τη συνισταμένη προσπάθεια των Geweke (1991), Hajivassiliou (1990) και Keane (1990).

Η θεωρία GHK Importance Sampling μάς επιτρέπει να προσομοιώσουμε διαδοχικά τις δύο διαστάσεις του προβλήματος. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί κάνοντας χρήση της *τεχνικής διαχωρισμού ολοκληρώματος* που είδαμε στο τέλος της ενότητας 3.2.

Ως εκ τούτου, η αντίστοιχη σχέση της (3.14) για ένα δικαίωμα με δύο υποκείμενους τίτλους είναι:

$$PV_{t_0}\left(s_0^{(1)}, s_0^{(2)}\right) = e^{-r(t_1-t_0)} \int_{R^2} \varphi_\rho\left(z^{(1)}, z^{(2)}\right) PV_{t_1}\left(s_1^{(1)}\left(z^{(1)}\right), s_1^{(2)}\left(z^{(2)}\right)\right) d\left(z^{(1)}, z^{(2)}\right) \quad (3.22)$$

όπου:

- $s_1^{(k)}\left(z^{(k)}\right) = s_0^{(k)} exp\left(\left(\mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + \sigma_k \sqrt{t_1 - t_0} z^{(k)}\right)$, για $k = 1, 2$.
- φ_ρ είναι η διμετάβλητη κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης ρ.
- $PV_{t_1} = Q_1$, αν $M\left(s_1^{(1)}, s_1^{(2)}\right) \geq B$, διαφορετικά η PV_{t_1} δίνεται από μια σχέση ανάλογη της (3.22).

Θέτοντας $z^{(1)} = y^{(1)}$ και $z^{(2)} = \rho y^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} y^{(2)}$, η (3.22) συνεπάγεται:

$$PV_{t_0}\left(s_0^{(1)}, s_0^{(2)}\right) = e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(y^{(1)}\right) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(y^{(2)}\right) PV_{t_1}\left(s_1^{(1)}, s_1^{(2)}\right) dy^{(2)}\right] dy^{(1)} \quad (3.23)$$

όπου τώρα $s_1^{(k)} = s_1^{(k)}\left(y^{(1)}, y^{(2)}\right)$, για $k = 1, 2$.

Κάνοντας την προαναφερθείσα μετατροπή από τις <u>συσχετισμένες</u> μεταβλητές $z^{(1)}, z^{(2)}$ στις <u>ασυσχέτιστες</u> $y^{(1)}, y^{(2)}$, οι Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013) κατάφεραν να ξεπεράσουν το πρώτο πρόβλημα της γενίκευσης της θεωρίας των Glasserman και Staum (2001) στις δύο διαστάσεις, αφού πλέον δεν ήταν απαραίτητη η χρήση τυχαίων αριθμών από τη διμετάβλητη κανονική κατανομή $\varphi_\rho\left(z^{(1)}, z^{(2)}\right)$.

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς κατάφεραν να επιλύσουν και το δεύτερο πρόβλημα, την αποφυγή δηλαδή του υπολογισμού της διμετάβλητης αθροιστικής κανονικής κατανομής $\Phi_\rho\left(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}\right)$.

Η γνωστή συνθήκη επιβίωσης για την <u>πρώτη</u> ημερομηνία παρατήρησης (δηλαδή για $j = 1$) είναι

$M_1\left(s_1^{(1)}, s_1^{(2)}\right) = max\left\{\frac{s_1^{(1)}}{S_{ref}^{(1)}}, \frac{s_1^{(2)}}{S_{ref}^{(2)}}\right\} < B$ και ισοδυναμεί με

$$z^{(1)} < C_1^{(1)}, \qquad z^{(2)} < C_1^{(2)}$$

ή

$$y^{(1)} < C_1^{(1)}, \qquad y^{(2)} < \frac{C_1^{(2)} - \rho y^{(1)}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

και *διαχωρίζοντας* τα μονοδιάστατα ολοκληρώματα στη σχέση (3.23), αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$PV_{t_0} = e^{-r(t_1-t_0)} \int_{-\infty}^{C_1^{(1)}} \frac{\varphi\left(y^{(1)}\right)}{p_0^{(1)}} \left[\left(1 - p_0^{(1)} p_0^{(2)}\right) Q_1 + p_0^{(1)} p_0^{(2)} \int_{-\infty}^{\frac{C_1^{(2)} - \rho y^{(1)}}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{\varphi\left(y^{(2)}\right)}{p_0^{(2)}} PV_{t_1} dy^{(2)}\right] dy^{(1)}$$

όπου $p_0^{(1)} = \Phi\left(C_1^{(1)}\right)$ και $p_0^{(2)} = \Phi\left(\left(C_1^{(2)} - \rho y^{(1)}\right)/\sqrt{1-\rho^2}\right)$ είναι οι <u>πιθανότητες επιβίωσης</u> του δικαιώματος σήμερα, οι οποίες εξαρτώνται από τις τιμές των δύο μετοχών την πρώτη ημερομηνία παρατήρησης.

Αυτή η μετατροπή περιλαμβάνει δύο μονοδιάστατες κανονικές κατανομές, οι οποίες και παίζουν το ρόλο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας στα αντίστοιχα ολοκληρώματα.

Πρόκειται για τις

$$\frac{\varphi\left(y^{(1)}\right)}{p_0^{(1)}} \mathbf{1}_{y^{(1)} < C_1^{(1)}}, \qquad \frac{\varphi\left(y^{(2)}\right)}{p_0^{(2)}} \mathbf{1}_{y^{(2)} < \left(C_1^{(2)} - \rho y^{(1)}\right)/\sqrt{1-\rho^2}}$$

Βρίσκοντας διαδοχικά τις ανάλογες εκφράσεις για την PV_{t_1} και τις υπόλοιπες ημερομηνίες παρατήρησης, είναι εφικτός ο υπολογισμός της τιμής ενός autocallable που εξαρτάται από δύο υποκείμενους τίτλους.

Η συγκεκριμένη μέθοδος γενικεύεται και δύναται να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις που το autocallable αποτελείται από περισσότερους από δύο υποκείμενους τίτλους, παρουσιάζοντας όμως αυξημένη τεχνική πολυπλοκότητα. Γι' αυτόν το λόγο στις εφαρμογές του επόμενου κεφαλαίου θα περιοριστούμε σε παραδείγματα με δύο υποκείμενους τίτλους.

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε σε αυτήν την ενότητα είναι γνωστή ως *πολυμετάβλητη one-step survival strategy* και ανήκει στους Alm, B. Harrach, D. Harrach και Keller (2013). Αυτό που την ξεχώρισε και δεν χαρακτηρίστηκε ως μια απλή γενίκευση της one-step survival strategy των Glasserman και Staum (2001) είναι η διαδοχική προσομοίωση των τιμών των υποκείμενων τίτλων, εν αντιθέσει με την ταυτόχρονη προσομοίωση από την περικομμένη διμετάβλητη κανονική κατανομή που συνέβαινε σε προγενέστερες γενικευμένες εκδοχές. Επίσης, αυτή η προσέγγιση έχει το μεγάλο πλεονέκτημα πως χρησιμοποιεί τυχαίους αριθμούς από μονοδιάστατες περικομμένες κανονικές κατανομές, κάτι που συνεπάγεται ευκολότερους υπολογισμούς. Τέλος, όπως θα δείξουμε με αριθμητικά παραδείγματα στο Κεφάλαιο 4, η εν λόγω μέθοδος επιτρέπει την ευσταθή αποτίμηση (που είναι και το ζητούμενο) των autocallables με τουλάχιστον δύο υποκείμενους τίτλους.

Σημείωση: Παρουσιάσαμε την περίπτωση κατά την οποία η πρόωρη αποπληρωμή εξαρτάται από τη μέγιστη απόδοση των δύο υποκείμενων τίτλων. Υπάρχει και η αντίστοιχη όπου εξαρτάται από την ελάχιστη απόδοση των τίτλων, η οποία όμως είναι αισθητά πολυπλοκότερη και ξεφεύγει από τα πλαίσια μελέτης της παρούσας εργασίας. Εντούτοις, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο επιστημονικό άρθρο T. Alm, B. Harrach, D. Harrach and M. Keller: *A Monte Carlo Pricing Algorithm for Autocallables that Allows for Stable Differentiation*, The Journal of Computational Finance 17, 53-62, 2013, όπου και υπάρχει η πλήρης παρουσίασή της στις συγκεκριμένες σελίδες.

Κεφάλαιο 4: Αριθμητική Αποτίμηση των Δικαιωμάτων Αυτόματης Ανάκλησης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα αποτίμησης των autocallables. Εδώ χρησιμοποιούμε τους αλγορίθμους που παρατίθενται στο Παράρτημα, οι οποίοι και κατασκευάστηκαν μέσω των όσων αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου αποτιμούμε την απλούστερη μορφή ενός autocallable, δηλαδή αυτό με έναν υποκείμενο τίτλο, ενώ στη δεύτερη αποτιμούμε ένα autocallable που αποτελείται από δύο υποκείμενους τίτλους. Προς ευκολία και συνέπεια με την υπόλοιπη εργασία, ως υποκείμενους τίτλους θεωρούμε αποκλειστικά μετοχές. Ακολούθως, δείχνουμε γραφικά την ευστάθεια των one-step survival εκτιμητών και στις δύο περιπτώσεις μέσω των συντελεστών ευαισθησίας των autocallables, Delta και Vega. Επιπλέον, δείχνουμε αριθμητικά την ελαττωμένη διακύμανση των καινούργιων εκτιμητών. Τέλος, να αναφέρουμε ότι όλες οι εφαρμογές πραγματοποιήθηκαν στο περιβάλλον του προγράμματος Matlab.

4.1 Αριθμητική Monte Carlo Αποτίμηση Δικαιωμάτων Αυτόματης Ανάκλησης με έναν Υποκείμενο Τίτλο

Καταρχήν, είναι σημαντικό να υπενθυμίσουμε πως τα autocallables δεν διαπραγματεύονται στα χρηματιστήρια αλλά στην over the counter αγορά. Αυτό έχει ως συνέπεια την μη ύπαρξη ιστορικών στοιχείων που να τα αφορούν. Ως εκ τούτου, δεν μπορούμε να τα εκτιμήσουμε με βάση τις παρελθούσες τιμές, καθώς κάθε τέτοιο δικαίωμα είναι μοναδικό. Για αυτόν το λόγο "κατασκευάζουμε" τα autocallables δίνοντας τιμές (που ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα) στις μεταβλητές του. Στόχος μας είναι η ευσταθής αποτίμησή τους, εφαρμόζοντας στην πράξη τα όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 3.2.

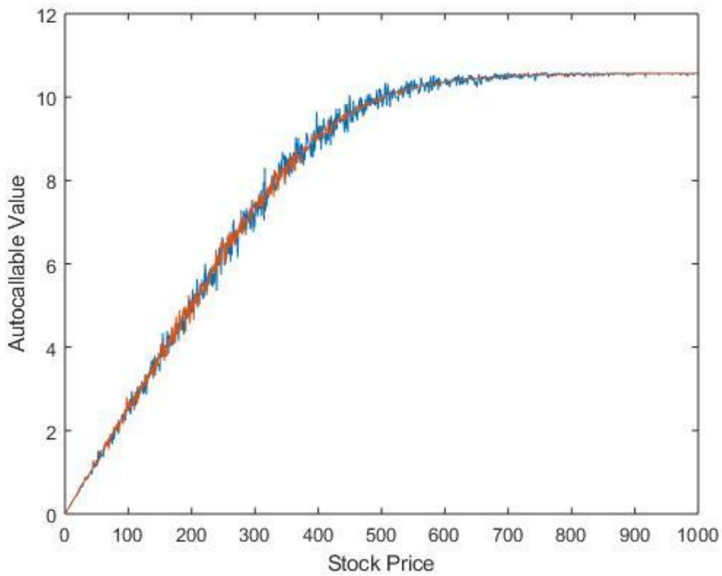
Θεωρούμε, λοιπόν, ένα autocallable με δύο προκαθορισμένες ημερομηνίες παρατήρησης $(t_1 = 1, t_2 = 2)$. Ως ημερομηνία παρατήρησης θεωρούμε το τέλος κάθε έτους, δηλαδή μάς ενδιαφέρει η τιμή της μετοχής στο τέλος του πρώτου και του δεύτερου χρόνου ζωής του δικαιώματος.

Γίνεται ο έλεγχος που έχουμε περιγράψει στο Κεφάλαιο 3 και τότε, αν αυτό ανακληθεί σε μία από τις προαναφερθείσες ημερομηνίες, ο κάτοχός του λαμβάνει τις πρόωρες αποπληρωμές $Q_1 = \$11, Q_2 = \$12$ αντίστοιχα.

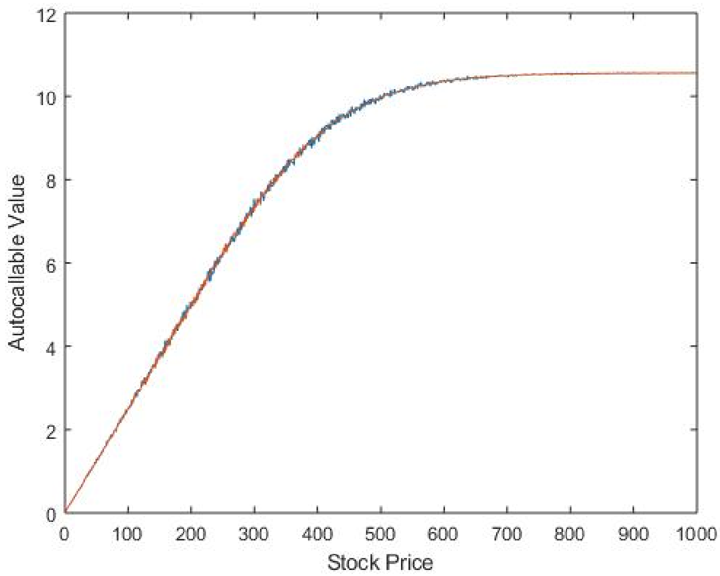
Η τιμή της μετοχής σήμερα (δηλαδή την $t_0 = 0$) είναι $s_0 = \$350$, η τιμή αναφοράς είναι $S_{ref} = \$400$, ενώ η πληρωμή αποκατάστασης (redemption payoff), η οποία και δίνεται στον κάτοχο του δικαιώματος αν αυτό επιβιώσει, είναι $q = 10s_2/S_{ref}$, όπου s_2 είναι η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (την $t_2 = 2$).

Τέλος, η τιμή του φράγματος είναι $B = 1$, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free interest rate) $r = 4\%$ και η επικινδυνότητα (volatility) της μετοχής $\sigma = 30\%$.

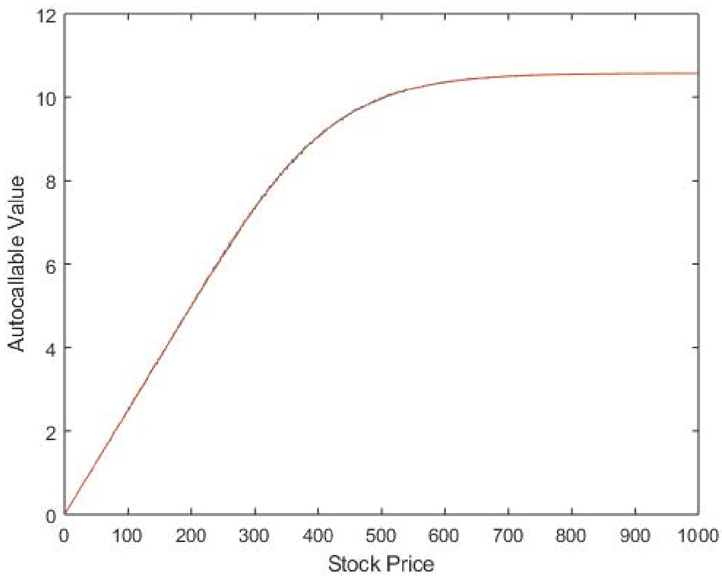
Παρακάτω βλέπουμε γραφικά την εκτιμώμενη αξία του autocallable συναρτήσει της τιμής της μετοχής.



Σχήμα 4.1. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και με τον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή) ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής, χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



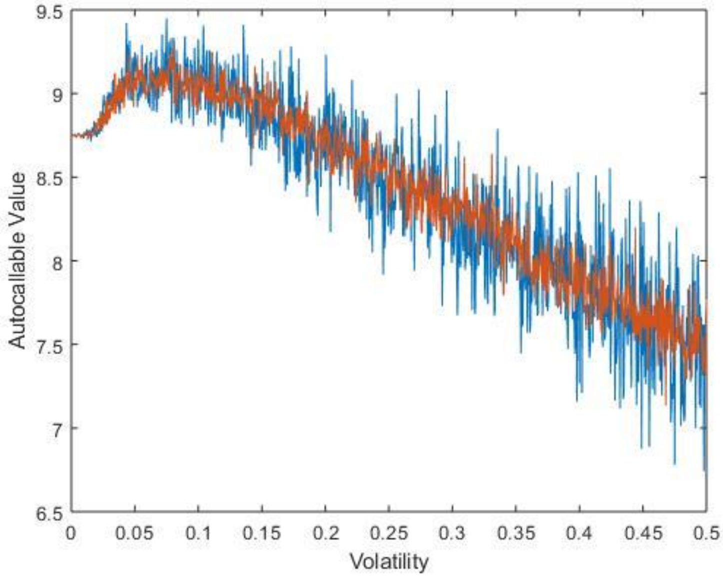
Σχήμα 4.2. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και με τον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή) ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής, χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.



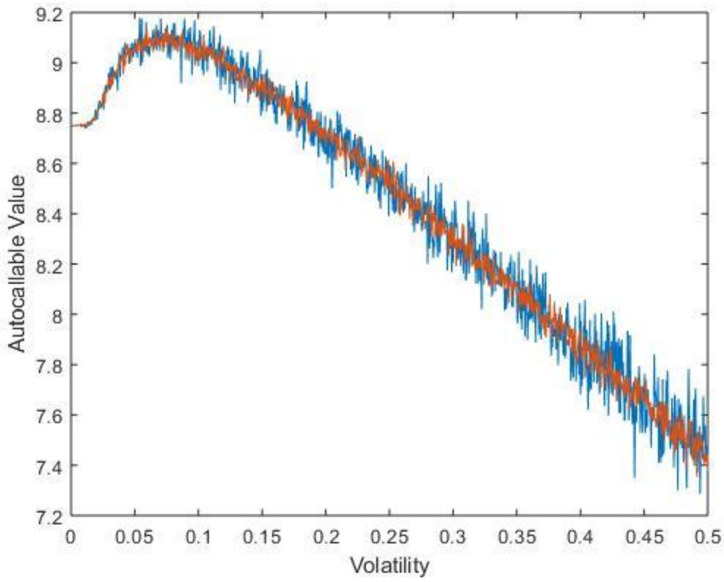
Σχήμα 4.3. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και με τον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή) ως συνάρτηση της τιμής της μετοχής, χρησιμοποιώντας N=10000 δείγματα.

Στα Σχήματα 4.1, 4.2 και 4.3 παρατηρούμε ότι η αξία του δικαιώματος αυξάνεται όσο μεγαλώνει η αρχική τιμή της μετοχής, αλλά με φθίνοντα ρυθμό. Επιπλέον, είναι φανερή η ακρίβεια του one-step survival εκτιμητή ήδη από τα N=1000 τυχαία δείγματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

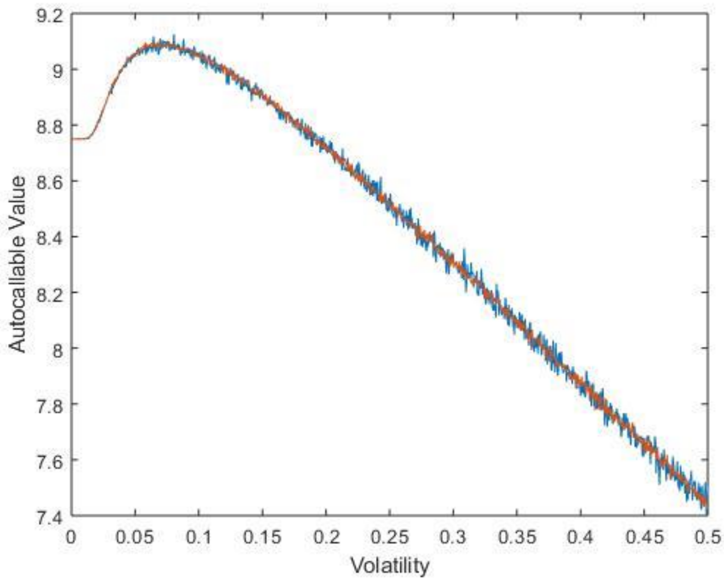
Παρακάτω βλέπουμε γραφικά την εκτιμώμενη αξία του autocallable συναρτήσει της επικινδυνότητας της μετοχής.



Σχήμα 4.4. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και με τον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή) ως συνάρτηση του volatility της μετοχής, χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



Σχήμα 4.5. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και με τον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή) ως συνάρτηση του volatility της μετοχής, χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.



Σχήμα 4.6. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και με τον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή) ως συνάρτηση του volatility της μετοχής, χρησιμοποιώντας N=10000 δείγματα.

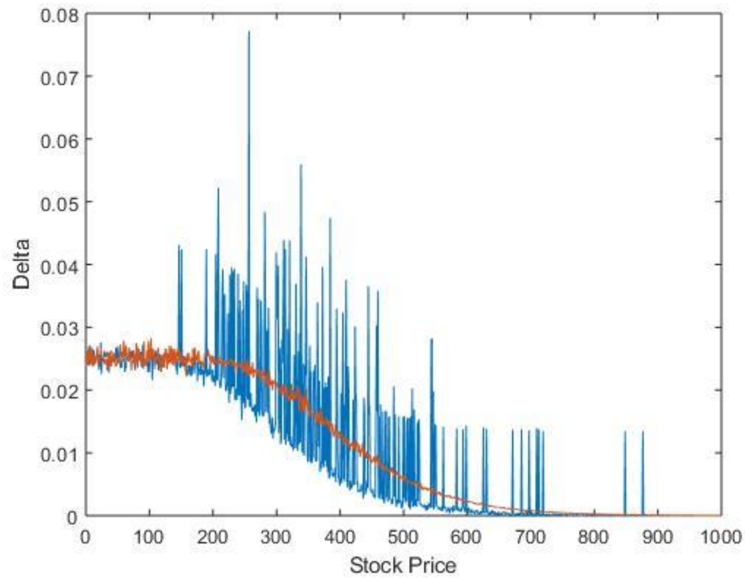
Από τα Σχήματα 4.4, 4.5 και 4.6 προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η επικινδυνότητα της μετοχής η τιμή του δικαιώματος μειώνεται, πράγμα απολύτως λογικό ώστε να γίνεται ελκυστικότερο στους υποψήφιους επενδυτές. Και εδώ γίνεται φανερή η μεγαλύτερη ακρίβεια της μεθόδου one-step survival.

Στο σημείο αυτό θα δείξουμε γραφικά (και με τους δύο εκτιμητές) τη συμπεριφορά των συντελεστών ευαισθησίας Delta και Vega του autocallable, χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές.

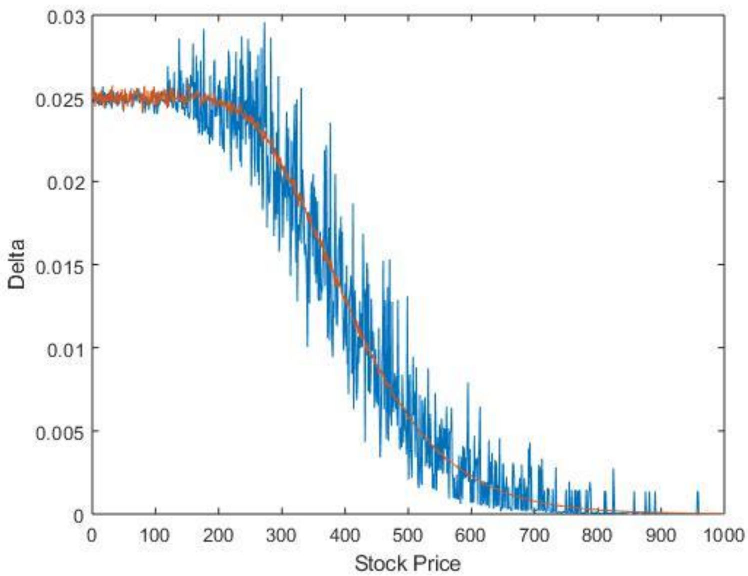
Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε:

$$\frac{PV_{t_0}(s_0 + \delta s) - PV_{t_0}(s_0)}{\delta s}\ , \delta s = \$1$$

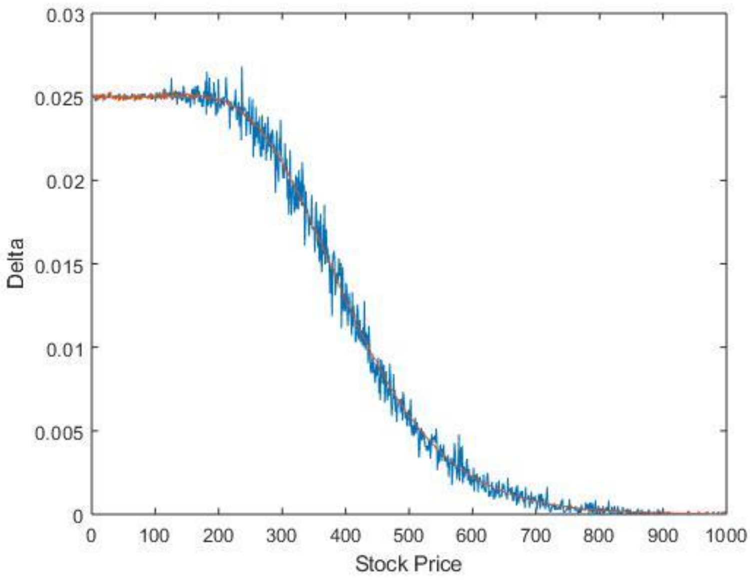
$$\frac{PV_{t_0}(\sigma + \delta \sigma) - PV_{t_0}(\sigma)}{\delta \sigma}\ , \delta \sigma = 0.0005$$



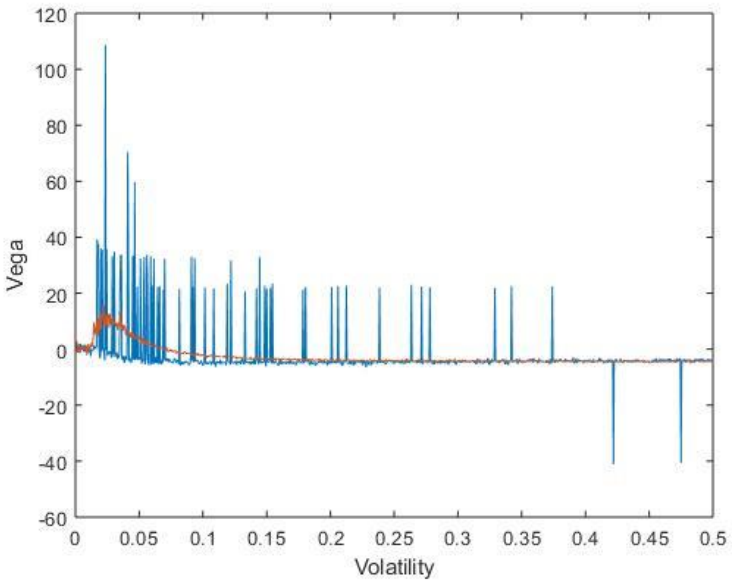
Σχήμα 4.7. Το Delta του autocallable υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και στον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή), χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



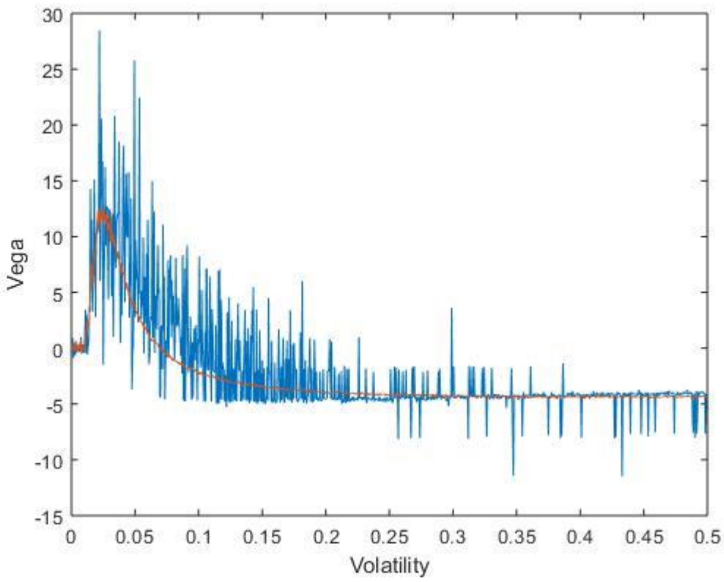
Σχήμα 4.8. Το Delta του autocallable υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και στον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή), χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.



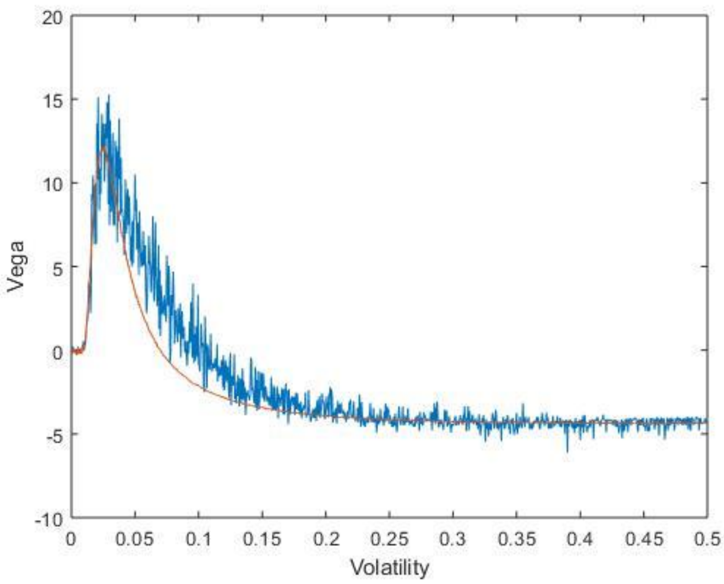
Σχήμα 4.9. Το Delta του autocallable υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και στον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή), χρησιμοποιώντας N=10000 δείγματα.



Σχήμα 4.10. Το Vega του autocallable υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και στον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή), χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



Σχήμα 4.11. Το Vega του autocallable υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και στον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή), χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.



Σχήμα 4.12. Το Vega του autocallable υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo (μπλε γραμμή) και στον One-Step Survival εκτιμητή (πορτοκαλί γραμμή), χρησιμοποιώντας N=10000 δείγματα.

Τα Σχήματα 4.7 έως 4.12 των συντελεστών ευαισθησίας του autocallable δείχνουν εμφανώς την αστάθεια του απλού εκτιμητή Monte Carlo και την ευστάθεια του One-Step Survival εκτιμητή. Μάλιστα, όπως βλέπουμε στα Σχήματα 4.9 και 4.12, δεν επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια για τον απλό εκτιμητή Monte Carlo ούτε και με 10000 τυχαίες παρατηρήσεις, ενώ παίρνουμε την ίδια ή ίσως και καλύτερη ακρίβεια με τον One-Step Survival με μόλις 100 (Σχήματα 4.7 και 4.10).

Το Σχήμα 4.7 αποδεικνύει τον ισχυρισμό του Boyle (1977), ο οποίος ήδη από τότε είχε τονίσει την ανάγκη εύρεσης νέων τεχνικών επέκτασης της κλασσικής Monte Carlo προσέγγισης, ώστε να καθίσταται εφικτή η αποτίμηση πολυπλοκότερων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Όπως βλέπουμε στο συγκεκριμένο γράφημα, η αποτίμηση ενός autocallable μέσω της απλής μεθόδου Monte Carlo είναι ασταθής, αφού ακόμα και η απειροελάχιστη αλλαγή στην τιμή της μετοχής προκαλεί μεγάλες αλλαγές στην τιμή του δικαιώματος. Κάτι το οποίο δε συμβαίνει με τον One-Step Survival εκτιμητή των Glasserman και Staum (2001) που παρέχει την απαιτούμενη ακρίβεια ακόμα και με μικρό τυχαίο δείγμα. Το μόνο μειονέκτημα της δεύτερης μεθόδου είναι ότι, εξαιτίας της πολυπλοκότερης φύσης της, είναι λίγο πιο αργή στους υπολογισμούς όταν χρησιμοποιούμε μεγάλο αριθμό τυχαίων παρατηρήσεων.

Ποσοτική Μελέτη της Διακύμανσης των Δύο Εκτιμητών

		Τυπικός Εκτιμητής Monte Carlo	One-Step Survival Εκτιμητής
N=100	Μέση Τιμή	8.3230	8.3313
	Διακύμανση	6.5117	1.5104
N=1000	Μέση Τιμή	8.2499	8.3120
	Διακύμανση	6.2916	1.4204
N=10000	Μέση Τιμή	8.3214	8.3129
	Διακύμανση	6.4232	1.3769
N=100000	Μέση Τιμή	8.3066	8.3103
	Διακύμανση	6.4521	1.3773
N=1000000	Μέση Τιμή	8.3082	8.3051
	Διακύμανση	6.4338	1.3717

Πίνακας 4.1

Ο Πίνακας 4.1 δείχνει τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις των εκτιμητών (3.8) και (3.12), για τις τιμές των παραμέτρων που ειπώθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου, καθώς επίσης και για ποικίλα Monte Carlo δείγματα. Είναι προφανής η υπεροχή της μεθόδου one-step survival, αφού ο εκτιμητής της έχει πολύ μικρότερη διακύμανση (σχεδόν υποτετραπλάσια) από τον αντίστοιχο της απλής μεθόδου Monte Carlo, και άρα οι τιμές του, ακόμα και για λίγα Monte Carlo μονοπάτια, μπορούν να χαρακτηριστούν αξιόπιστες. Επομένως, ο εκτιμητής One-Step Survival κρίνεται ως ένας αποτελεσματικός τρόπος αποτίμησης των autocallables με έναν υποκείμενο τίτλο.

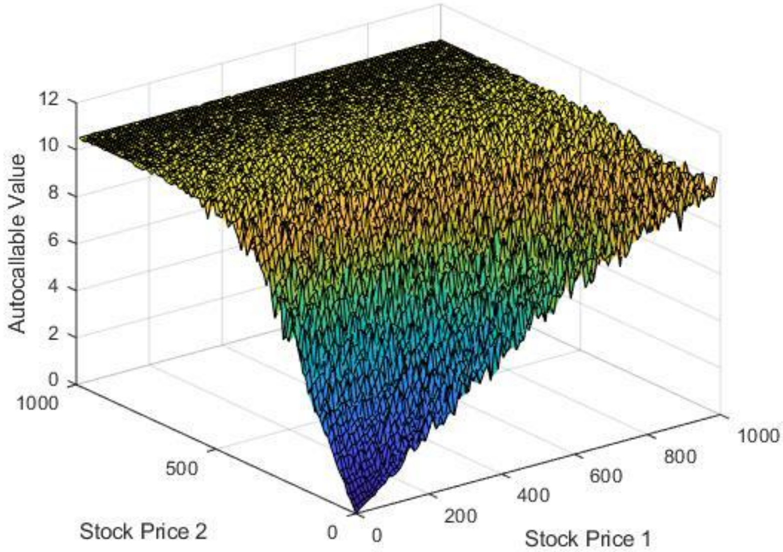
4.2 Αριθμητική Monte Carlo Αποτίμηση Δικαιωμάτων Αυτόματης Ανάκλησης με δύο Υποκείμενους Τίτλους

Τρέχουσα Χρονική Στιγμή	$t_0 = 0$
Τρέχουσες Τιμές των Μετοχών	$s_0^{(1)} = \$350, s_0^{(2)} = \$700$
Τιμές Αναφοράς των Μετοχών	$S_{ref}^{(1)} = \$400, S_{ref}^{(2)} = \$800$
Επίπεδο Φράγματος	$B = 1$
Πλήθος των Ημερομηνιών Παρατήρησης	$m = 5$
Ημερομηνίες Παρατήρησης	$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5$
Πρόωρες Αποπληρωμές	$Q_1 = \$11, Q_2 = \$12, Q_3 = \$13,$ $Q_4 = \$14, Q_5 = \$15$
Πληρωμή Αποκατάστασης	$q = 10\, max\left\{s_5^{(1)}/S_{ref}^{(1)}, s_5^{(2)}/S_{ref}^{(2)}\right\}$
Επιτόκιο Μηδενικού Κινδύνου	$r = 4\%$
Επικινδυνότητες	$\sigma_1 = 30\%, \sigma_2 = 40\%$
Συντελεστής Συσχέτισης	$\rho = 0.5$

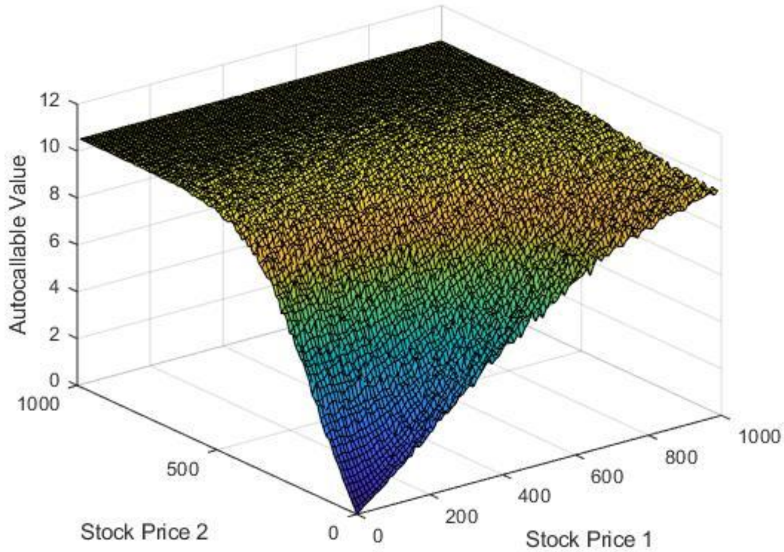
Πίνακας 4.2

Στον Πίνακα 4.2 απεικονίζονται οι τιμές των παραμέτρων για ένα autocallable που έχει δύο μετοχές ως υποκείμενούς του τίτλους. Έχοντας σαν εφόδιο τα όσα ειπώθηκαν στην ενότητα 3.3, θα δούμε πώς καθίσταται δυνατή η ευσταθής αποτίμηση ενός τέτοιου δικαιώματος.

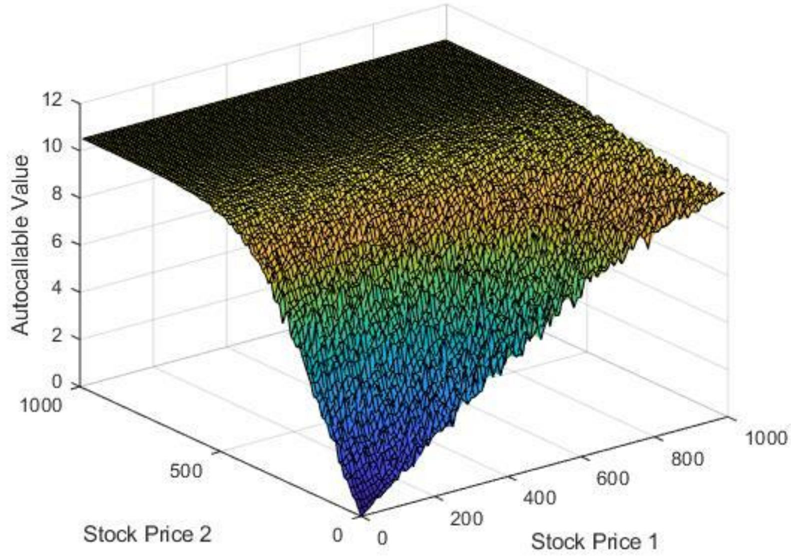
Παρακάτω βλέπουμε γραφικά την εκτιμώμενη αξία του autocallable συναρτήσει των τιμών των δύο μετοχών:



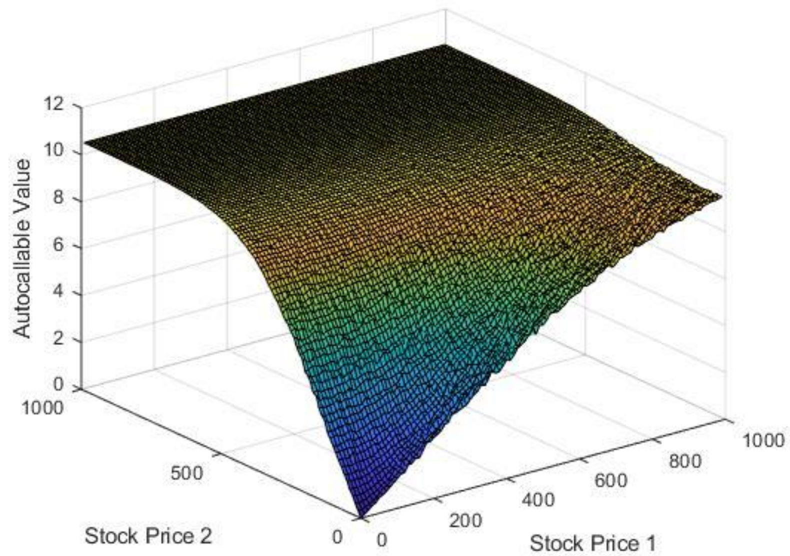
Σχήμα 4.13. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo ως συνάρτηση των τιμών των δύο μετοχών, χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



Σχήμα 4.14. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον απλό εκτιμητή Monte Carlo ως συνάρτηση των τιμών των δύο μετοχών, χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.

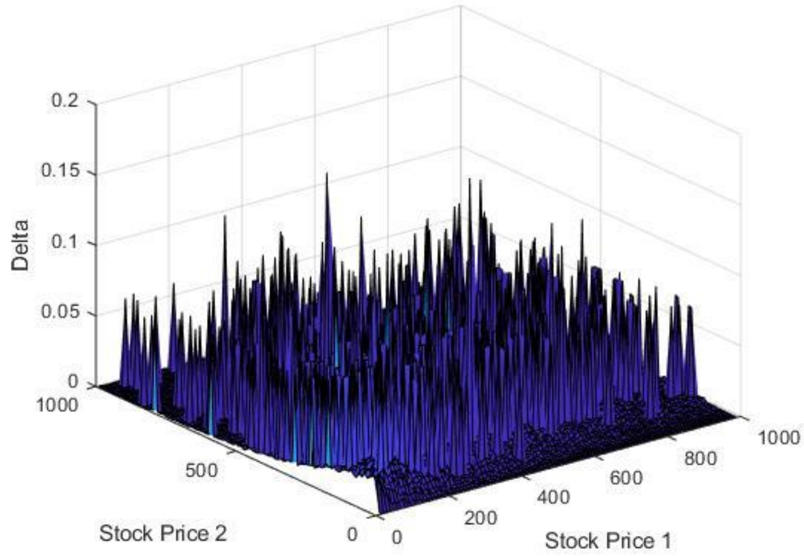


Σχήμα 4.15. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον One-Step Survival GHK εκτιμητή ως συνάρτηση των τιμών των δύο μετοχών, χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.

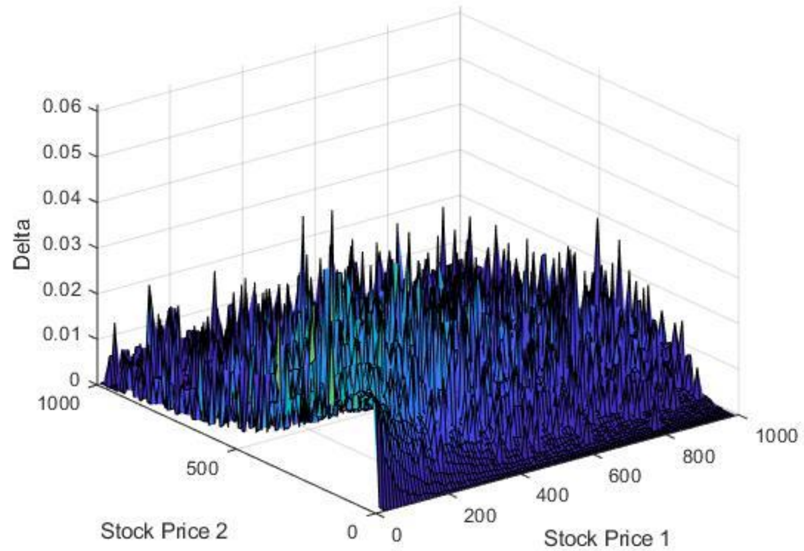


Σχήμα 4.16. Η αξία του autocallable υπολογισμένη με τον One-Step Survival GHK εκτιμητή ως συνάρτηση των τιμών των δύο μετοχών, χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.

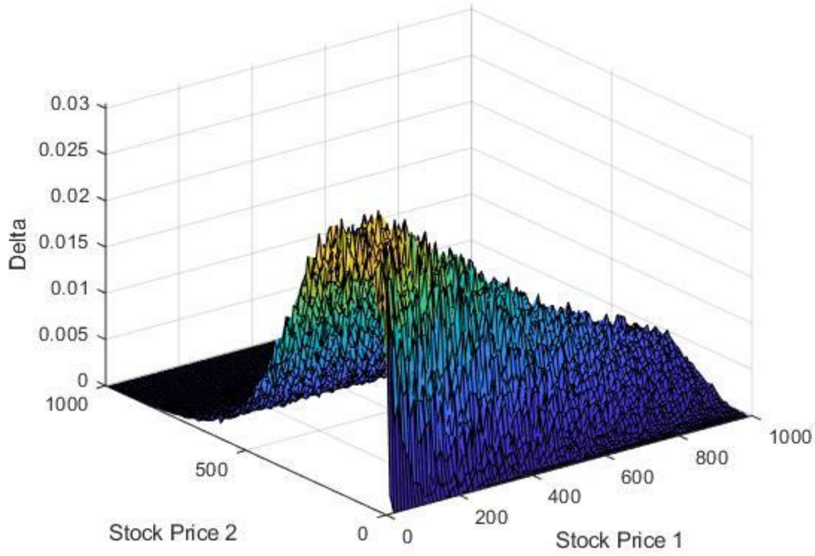
Παρατηρώντας τα σχήματα 4.13 έως 4.16, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο εκτιμητής One-Step Survival GHK είναι αισθητά ακριβέστερος του απλού Monte Carlo εκτιμητή. Εντούτοις, η γραφική απεικόνιση του συντελεστή ευαισθησίας Delta που ακολουθεί, είναι αυτή που θα μας πείσει για την υπεροχή του.



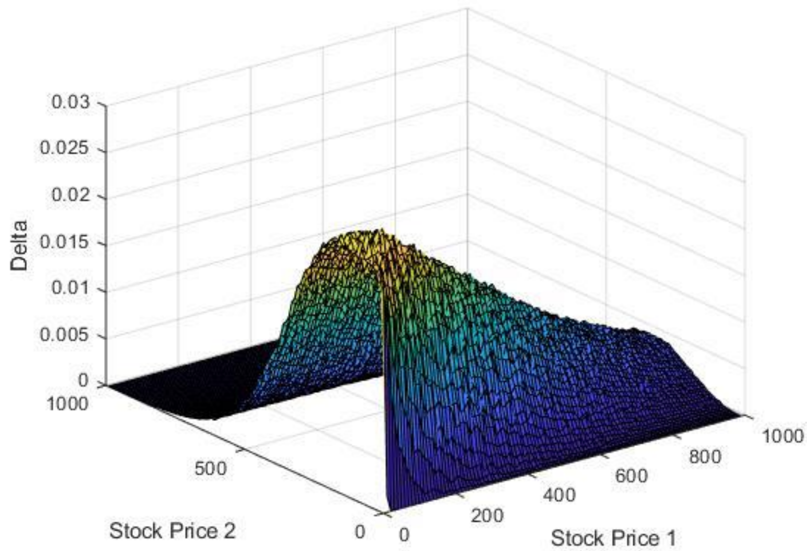
Σχήμα 4.17. Το Delta του autocallable σε σχέση με την τιμή της πρώτης μετοχής, υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo, χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



Σχήμα 4.18. Το Delta του autocallable σε σχέση με την τιμή της πρώτης μετοχής, υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον απλό εκτιμητή Monte Carlo, χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.



Σχήμα 4.19. Το Delta του autocallable σε σχέση με την τιμή της πρώτης μετοχής, υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον One-Step Survival GHK εκτιμητή, χρησιμοποιώντας N=100 δείγματα.



Σχήμα 4.20. Το Delta του autocallable σε σχέση με την τιμή της πρώτης μετοχής, υπολογισμένο εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές στον One-Step Survival GHK εκτιμητή, χρησιμοποιώντας N=1000 δείγματα.

Στα Σχήματα 4.17 και 4.18 είναι εμφανής η ασtάθεια του τυπικού εκτιμητή Monte Carlo, αφού δεν υπάρχει μια ομοιόμορφη συμπεριφορά του Delta για τους διαφόρους συνδυασμούς των τιμών των δύο μετοχών. Αυτό σημαίνει ότι τα παραμικρά λάθη στις τιμές των μετοχών προκαλούν αυθαίρετες μεταβολές στην τιμή του autocallable.

Από την άλλη πλευρά, στα Σχήματα 4.19 και 4.20 παρατηρείται η ευστάθεια του One-Step Survival GHK εκτιμητή, συνεπώς μέσω αυτού επιτυγχάνεται η ζητούμενη ευσταθής αποτίμηση των autocallables με δύο υποκείμενους τίτλους.

Ποσοτική Μελέτη της Διακύμανσης των Δύο Εκτιμητών

		Τυπικός Εκτιμητής Monte Carlo	One-Step Survival GHK Εκτιμητής
N=100	Μέση Τιμή	9.6498	9.4948
	Διακύμανση	9.5296	1.7562
N=1000	Μέση Τιμή	9.8519	9.5042
	Διακύμανση	8.8292	1.7064
N=10000	Μέση Τιμή	9.7441	9.5120
	Διακύμανση	9.3795	1.6843
N=100000	Μέση Τιμή	9.7727	9.5037
	Διακύμανση	9.2897	1.6726
N=1000000	Μέση Τιμή	9.7712	9.5016
	Διακύμανση	9.2592	1.6687

Πίνακας 4.3

Στον Πίνακα 4.3 απεικονίζονται οι μέσες τιμές και οι διακυμάνσεις των δύο εκτιμητών, για τις τιμές των παραμέτρων του Πίνακα 4.2, καθώς επίσης και για ποικίλα Monte Carlo δείγματα. Είναι προφανής η υπεροχή της γενικευμένης μεθόδου one-step survival, αφού ο εκτιμητής της έχει πολύ μικρότερη διακύμανση (σχεδόν υποπενταπλάσια) από τον αντίστοιχο της απλής μεθόδου Monte Carlo, και άρα οι τιμές του μπορεί να θεωρηθούν αξιόπιστες. Επομένως, ο εκτιμητής One-Step Survival GHK κρίνεται ως ένας αποτελεσματικός τρόπος αποτίμησης των autocallables με δύο υποκείμενους τίτλους.

Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετήσαμε τους τρόπους αποτίμησης των autocallable δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω προσομοιώσεων Monte Carlo. Πιο συγκεκριμένα, χωρίσαμε τη μελέτη μας σε δύο κομμάτια, για να δείξουμε τις διαφορετικές προσεγγίσεις στους τρόπους αποτίμησης των autocallables με έναν και δύο υποκείμενους τίτλους.

Για την πρώτη περίπτωση, εφαρμόσαμε τη one-step survival θεωρία των Glasserman και Staum (2001), βλέποντας αριθμητικά και γραφικά την ευστάθεια του αντίστοιχου εκτιμητή. Επιπλέον, δείξαμε ότι ο εν λόγω εκτιμητής έχει σημαντικά μικρότερη διακύμανση από αυτόν της απλής μεθόδου Monte Carlo, κάτι που οδηγεί στην αποτελεσματική αποτίμηση του δικαιώματος. Επίσης, μέσω των συντελεστών ευαισθησίας Delta και Vega, δείξαμε ότι οι τιμές που προκύπτουν για την αξία του autocallable μπορεί να διαφοροποιηθούν ευσταθώς εφαρμόζοντας πεπερασμένες διαφορές. Πρακτικά αυτό είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό του ρίσκου μιας επένδυσης σε τέτοια δικαιώματα, από τη στιγμή δε που οι τιμές είναι αρκετά ακριβείς και ως εκ τούτου καθίσταται δυνατή, για παράδειγμα, η κατάλληλη αντιστάθμιση κινδύνου.

Για τη δεύτερη και πολυπλοκότερη περίπτωση, εφαρμόσαμε τη γενικευμένη one-step survival θεωρία των Alm, B. Harrach, D. Harrach και M. Keller (2013), καταλήγοντας σε παρόμοια συμπεράσματα με την περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος.

Επομένως, και οι δύο one-step survival εκτιμητές οδηγούν στην ευσταθή και αποτελεσματική αποτίμηση των autocallables. Στο μόνο που μειονεκτούν έναντι των τυπικών προσεγγίσεων Monte Carlo, είναι ο σχετικά αυξημένος χρόνος εξαγωγής των αποτελεσμάτων τους (κάτι όμως που γίνεται αισθητό μόνο στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται πολύ μεγάλα μονοπάτια Monte Carlo) λόγω της αυξημένης τεχνικής πολυπλοκότητάς τους.

Κλείνοντας, να πούμε πως η one-step survival θεωρία γενικεύεται περαιτέρω, ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή της και σε περιπτώσεις που ένα autocallable αποτελείται από τρεις και πλέον υποκείμενους τίτλους ή ακόμα και σε περιπτώσεις με συνθετότερες συνθήκες φράγματος.

Παράρτημα: Κώδικες Matlab

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε τους κώδικες στη Matlab (τα m-files, όπως καλούνται) και τις αντίστοιχες εκτελέσεις τους στο Command Window, μέσω των οποίων έγιναν οι εφαρμογές που υπάρχουν στο Κεφάλαιο 4.

Κώδικας του τυπικού εκτιμητή Monte Carlo

```
function[price,varprice,CI]=StandardMC(S0,SREF,B,Q,r,T,sigma,NRepl,m)
DiscPayoff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice=S0;
for j=1:m
    nuT=(r-0.5*sigma^2)*(T(j+1)-T(j));
    siT=sigma*sqrt(T(j+1)-T(j));
    StockPrice=StockPrice*exp(nuT+siT*randn);
    if StockPrice/SREF>=B
        DiscPayoff(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        break;
    else
        DiscPayoff(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice/SREF);
    end
end
end
[price,varprice,CI]=normfit(DiscPayoff);
end
```

Κώδικας του One-Step Survival εκτιμητή

```
function[price,varprice,CI]=OSSEstimator(S0,SREF,B,Q,r,T,sigma,NRepl,
m)
P=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
StockPrice=S0;
P(n)=0;
L=1;
    for j=1:m
        nuT=(r-0.5*sigma^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT=sigma*sqrt(T(j+1)-T(j));
        z=(log(B*SREF/StockPrice)-nuT)/siT;
        p=normcdf(z);
        P(n)=P(n)+(1-p)*L*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L=p*L;
        StockPrice=StockPrice*exp(nuT+siT*norminv(p*rand));
    end
    P(n)=P(n)+L*exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice/SREF);
end
[price,varprice,CI]=normfit(P);
end
```

Εκτελέσεις στο Command Window

```
>> x=0.5:1:1000;
>> K=zeros(1000,1);
>> L=zeros(1000,1);
>> for i=1:1000
K(i)=StandardMC(x(i),400,1,[11,12],0.04,[0,1,2],0.3,100,2);
L(i)=OSSEstimator(x(i),400,1,[11,12],0.04,[0,1,2],0.3,100,2);
end
>> plot(x,K)
>> hold on
>> plot(x,L)
>> xlabel('Stock Price')
>> ylabel('Autocallable Value')
```

```
>> x=0.0005:0.0005:0.5;
>> K=zeros(1000,1);
>> L=zeros(1000,1);
>> for i=1:1000
K(i)=StandardMC(350,400,1,[11,12],0.04,[0,1,2],x(i),100,2);
L(i)=OSSEstimator(350,400,1,[11,12],0.04,[0,1,2],x(i),100,2);
end
>> plot(x,K)
>> hold on
>> plot(x,L)
>> xlabel('Volatility')
>> ylabel('Autocallable Value')
```

Κώδικας για το Delta του τυπικού εκτιμητή Monte Carlo

```
function[Delta]=SMCDelta(S0,SREF,dS,B,Q,r,T,sigma,NRepl,m)
DiscPayoff1=zeros(NRepl,1);
DiscPayoff2=zeros(NRepl,1);
SampleDiff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice1=S0;
    StockPrice2=(S0+dS);
for j=1:m
    Veps=randn;
    nuT=(r-0.5*sigma^2)*(T(j+1)-T(j));
    siT=sigma*sqrt(T(j+1)-T(j));
    StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT+siT*Veps);
    StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT+siT*Veps);
    if (StockPrice1/SREF>=B)&&(StockPrice2/SREF>=B)
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dS;
        break;
    elseif (StockPrice1/SREF>=B)&&(StockPrice2/SREF<B)
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice2/SREF);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dS;
        break;
    elseif (StockPrice1/SREF<B)&&(StockPrice2/SREF>=B)
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice1/SREF);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dS;
        break;
    else
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice1/SREF);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice2/SREF);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dS;
    end
end
end
Delta=mean(SampleDiff);
end
```

Κώδικας για το Delta του One-Step Survival εκτιμητή

```
function[Delta]=OSSDelta(S0,SREF,dS,B,Q,r,T,sigma,NRepl,m)
P1=zeros(NRepl,1);
P2=zeros(NRepl,1);
SampleDiff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
StockPrice1=S0;
StockPrice2=(S0+dS);
P1(n)=0;
P2(n)=0;
L1=1;
L2=1;
    for j=1:m
        Veps=rand;
        nuT=(r-0.5*sigma^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT=sigma*sqrt(T(j+1)-T(j));
        z1=(log(B*SREF/StockPrice1)-nuT)/siT;
        p1=normcdf(z1);
        P1(n)=P1(n)+(1-p1)*L1*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L1=p1*L1;
        StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT+siT*norminv(p1*Veps));
        z2=(log(B*SREF/StockPrice2)-nuT)/siT;
        p2=normcdf(z2);
        P2(n)=P2(n)+(1-p2)*L2*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L2=p2*L2;
        StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT+siT*norminv(p2*Veps));
    end
    P1(n)=P1(n)+L1*exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice1/SREF);
    P2(n)=P2(n)+L2*exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice2/SREF);
    SampleDiff(n)=abs(P2(n)-P1(n))/dS;
end
Delta=mean(SampleDiff);
end
```

Εκτελέσεις στο Command Window

```
>> x=0.5:1:1000;

>> K=zeros(1000,1);

>> L=zeros(1000,1);

>> for i=1:1000

K(i)=SMCDelta(x(i),400,1,1,[11,12],0.04,[0,1,2],0.3,100,2);

L(i)=OSSDelta(x(i),400,1,1,[11,12],0.04,[0,1,2],0.3,100,2);

end

>> plot(x,K)

>> hold on

>> plot(x,L)

>> xlabel('Stock Price')

>> ylabel('Delta')
```

Κώδικας για το Vega του τυπικού εκτιμητή Monte Carlo

```
function[Vega]=SMCVega(S0,SREF,B,Q,r,T,sigma,dsigma,NRepl,m)
DiscPayoff1=zeros(NRepl,1);
DiscPayoff2=zeros(NRepl,1);
SampleDiff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice1=S0;
    StockPrice2=S0;
    sigma1=sigma;
    sigma2=(sigma+dsigma);
for j=1:m
    Veps=randn;
    nuT1=(r-0.5*sigma1^2)*(T(j+1)-T(j));
    siT1=sigma1*sqrt(T(j+1)-T(j));
    nuT2=(r-0.5*sigma2^2)*(T(j+1)-T(j));
    siT2=sigma2*sqrt(T(j+1)-T(j));
    StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT1+siT1*Veps);
    StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT2+siT2*Veps);
    if (StockPrice1/SREF>=B)&&(StockPrice2/SREF>=B)
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dsigma;
        break;
    elseif (StockPrice1/SREF>=B)&&(StockPrice2/SREF<B)
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice2/SREF);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dsigma;
        break;
    elseif (StockPrice1/SREF<B)&&(StockPrice2/SREF>=B)
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice1/SREF);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dsigma;
        break;
    else
        DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice1/SREF);
        DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice2/SREF);
        SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dsigma;
    end
end
end
Vega=mean(SampleDiff);
end
```

Κώδικας για το Vega του One-Step Survival εκτιμητή

```
function[Vega]=OSSVega(S0,SREF,B,Q,r,T,sigma,dsigma,NRepl,m)
P1=zeros(NRepl,1);
P2=zeros(NRepl,1);
SampleDiff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
StockPrice1=S0;
StockPrice2=S0;
sigma1=sigma;
sigma2=(sigma+dsigma);
P1(n)=0;
P2(n)=0;
L1=1;
L2=1;
    for j=1:m
        Veps=rand;
        nuT1=(r-0.5*sigma1^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT1=sigma1*sqrt(T(j+1)-T(j));
        z1=(log(B*SREF/StockPrice1)-nuT1)/siT1;
        p1=normcdf(z1);
        P1(n)=P1(n)+(1-p1)*L1*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L1=p1*L1;
        StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT1+siT1*norminv(p1*Veps));
        nuT2=(r-0.5*sigma2^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT2=sigma2*sqrt(T(j+1)-T(j));
        z2=(log(B*SREF/StockPrice2)-nuT2)/siT2;
        p2=normcdf(z2);
        P2(n)=P2(n)+(1-p2)*L2*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L2=p2*L2;
        StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT2+siT2*norminv(p2*Veps));
    end
    P1(n)=P1(n)+L1*exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice1/SREF);
    P2(n)=P2(n)+L2*exp(-r*(T(m+1)-T(1)))*10*(StockPrice2/SREF);
    SampleDiff(n)=(P2(n)-P1(n))/dsigma;
end
Vega=mean(SampleDiff);
end
```

Εκτελέσεις στο Command Window

```
>> x=0.0005:0.0005:0.5;

>> K=zeros(1000,1);

>> L=zeros(1000,1);

>> for i=1:1000

K(i)=SMCVega(350,400,1,[11,12],0.04,[0,1,2],x(i),0.0005,100,2);

L(i)=OSSVega(350,400,1,[11,12],0.04,[0,1,2],x(i),0.0005,100,2);

end

>> plot(x,K)

>> hold on

>> plot(x,L)

>> xlabel('Volatility')

>> ylabel('Vega')
```

Κώδικας του τυπικού εκτιμητή Monte Carlo (για δύο μετοχές)

```
function[price,varprice,CI]=StandardMCEstimator(S01,S02,SREF1,SREF2,B
,Q,r,T,sigma1,sigma2,cor,NRepl,m)
DiscPayoff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice1=S01;
    StockPrice2=S02;
    for j=1:m
        nuT1=(r-0.5*sigma1^2)*(T(j+1)-T(j));
        nuT2=(r-0.5*sigma2^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT1=sigma1*sqrt(T(j+1)-T(j));
        siT2=sigma2*sqrt(T(j+1)-T(j));
        Veps=randn;
        z1=Veps;
        z2=cor*Veps+sqrt(1-cor^2)*randn;
        StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT1+siT1*z1);
        StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT2+siT2*z2);
        if max(StockPrice1/SREF1,StockPrice2/SREF2)>=B
            DiscPayoff(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(j)))*Q(j);
            break;
        else
            DiscPayoff(n)=exp(-r*(T(m+1)-
T(1)))*10*max(StockPrice1/SREF1,StockPrice2/SREF2);
        end
    end
end
price=normfit(DiscPayoff);
end
```

Κώδικας του One-Step Survival GHK εκτιμητή

```
function[price,varprice,CI]=GHKEstimator(S01,S02,SREF1,SREF2,B,Q,r,T,
sigma1,sigma2,cor,NRepl,m)
P=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice1=S01;
    StockPrice2=S02;
    P(n)=0;
    L=1;
    for j=1:m
        nuT1=(r-0.5*sigma1^2)*(T(j+1)-T(j));
        nuT2=(r-0.5*sigma2^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT1=sigma1*sqrt(T(j+1)-T(j));
        siT2=sigma2*sqrt(T(j+1)-T(j));
        C1=(log(B*SREF1/StockPrice1)-nuT1)/siT1;
        C2=(log(B*SREF2/StockPrice2)-nuT2)/siT2;
        p1=normcdf(C1);
        y1=norminv(p1*rand);
        p2=normcdf((C2-cor*y1)/sqrt(1-cor^2));
        y2=norminv(p2*rand);
        P(n)=P(n)+(1-p1*p2)*L*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L=p1*p2*L;
        z1=y1;
        z2=cor*y1+sqrt(1-cor^2)*y2;
        StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT1+siT1*z1);
        StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT2+siT2*z2);
    end
    P(n)=P(n)+L*exp(-r*(T(m+1)-
T(1)))*10*max(StockPrice1/SREF1,StockPrice2/SREF2);
end
price=normfit(P);
end
```

Εκτελέσεις στο Command Window

```
>> x=0.5:10:1000;

>> y=0.5:10:1000;

>> K=zeros(100,100);

>> for i=1:100

for j=1:100

K(i,j)=GHKEstimator(x(i),y(j),400,800,1,[11,12,13,14,15],0.04,[0,1,2,3,4,5],0.3,0.4,0.5,100,5);

end

end

>> surf(x,y,K)

>> xlabel('Stock Price 1')

>> ylabel('Stock Price 2')

>> zlabel('Autocallable Value')
```

Κώδικας για το Delta του τυπικού εκτιμητή Monte Carlo (για δύο μετοχές)

```
function[Delta]=SMC3DDelta(S01,S02,SREF1,SREF2,dS1,B,Q,r,T,sigma1,sig
ma2,cor,NRepl,m)
DiscPayoff1=zeros(NRepl,1);
DiscPayoff2=zeros(NRepl,1);
SampleDiff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice1=S01;
    StockPrice1A=(S01+dS1);
    StockPrice2=S02;
for j=1:m
        nuT1=(r-0.5*sigma1^2)*(T(j+1)-T(j));
        nuT2=(r-0.5*sigma2^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT1=sigma1*sqrt(T(j+1)-T(j));
        siT2=sigma2*sqrt(T(j+1)-T(j));
        Veps=randn;
        z1=Veps;
        z2=cor*Veps+sqrt(1-cor^2)*randn;
        StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT1+siT1*z1);
        StockPrice1A=StockPrice1A*exp(nuT1+siT1*z1);
        StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT2+siT2*z2);
        if max(StockPrice1/SREF1,StockPrice2/SREF2)>=B
            DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(j)))*Q(j);
        else
            DiscPayoff1(n)=exp(-r*(T(m+1)-
T(1)))*10*max(StockPrice1/SREF1,StockPrice2/SREF2);
        end
        if max(StockPrice1A/SREF1,StockPrice2/SREF2)>=B
            DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(j+1)-T(j)))*Q(j);
        else
            DiscPayoff2(n)=exp(-r*(T(m+1)-
T(1)))*10*max(StockPrice1A/SREF1,StockPrice2/SREF2);
        end
SampleDiff(n)=(DiscPayoff2(n)-DiscPayoff1(n))/dS1;
end
end
[Delta]=mean(SampleDiff);
end
```

Κώδικας για το Delta του One-Step Survival GHK εκτιμητή

```
function[Delta]=GHKDelta(S01,S02,SREF1,SREF2,dS1,B,Q,r,T,sigma1,sigma
2,cor,NRepl,m)
P1=zeros(NRepl,1);
P2=zeros(NRepl,1);
SampleDiff=zeros(NRepl,1);
for n=1:NRepl
    StockPrice1=S01;
    StockPrice1A=(S01+dS1);
    StockPrice2=S02;
    P1(n)=0;
    P2(n)=0;
    L1=1;
    L2=1;
    for j=1:m
        Veps=rand;
        nuT1=(r-0.5*sigma1^2)*(T(j+1)-T(j));
        nuT2=(r-0.5*sigma2^2)*(T(j+1)-T(j));
        siT1=sigma1*sqrt(T(j+1)-T(j));
        siT2=sigma2*sqrt(T(j+1)-T(j));
        C1=(log(B*SREF1/StockPrice1)-nuT1)/siT1;
        p1=normcdf(C1);
        y1=norminv(p1*Veps);
        C1A=(log(B*SREF1/StockPrice1A)-nuT1)/siT1;
        p1A=normcdf(C1A);
        y1A=norminv(p1A*Veps);
        C2=(log(B*SREF2/StockPrice2)-nuT2)/siT2;
        p2=normcdf((C2-cor*y1)/sqrt(1-cor^2));
        y2=norminv(p2*rand);
        P1(n)=P1(n)+(1-p1*p2)*L1*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        P2(n)=P2(n)+(1-p1A*p2)*L2*exp(-r*(T(j+1)-T(1)))*Q(j);
        L1=p1*p2*L1;
        L2=p1A*p2*L2;
        z1=y1;
        z1A=y1A;
        z2=cor*y1+sqrt(1-cor^2)*y2;
        StockPrice1=StockPrice1*exp(nuT1+siT1*z1);
        StockPrice1A=StockPrice1A*exp(nuT1+siT1*z1A);
        StockPrice2=StockPrice2*exp(nuT2+siT2*z2);
    end
    P1(n)=P1(n)+L1*exp(-r*(T(m+1)-
T(1)))*10*max(StockPrice1/SREF1,StockPrice2/SREF2);
    P2(n)=P2(n)+L2*exp(-r*(T(m+1)-
T(1)))*10*max(StockPrice1A/SREF1,StockPrice2/SREF2);
    SampleDiff(n)=abs(P2(n)-P1(n))/dS1;
end
Delta=mean(SampleDiff);
end
```

Εκτελέσεις στο Command Window

```
>> x=0.5:10:1000;

>> y=0.5:10:1000;

>> K=zeros(100,100);

>> for i=1:100

for j=1:100

K(i,j)=GHKDelta(x(i),y(j),400,800,1,1,[11,12,13,14,15],0.04,[0,1,2,3,4,5],0.3,0.4,0.5,100,5);

end

end

>> surf(x,y,K)

>> xlabel('Stock Price 1')

>> ylabel('Stock Price 2')

>> zlabel('Delta')
```

Βιβλιογραφία

Επιστημονικά Άρθρα

Alm, T. and A. Wegner. Strukturierte Produkte im Vermogensmanagement, in *Vertrauenskrise Wealth Manager, was nun?*, Gabler 2008.

Alm, T., B. Harrach, D. Harrach and M. Keller. A Monte Carlo Pricing Algorithm for Autocallables that Allows for Stable Differentiation, *Journal of Computational Finance* **17**, 43-70, 2013.

Black, F. and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **81**, 637-654, 1973.

Boyle, P. Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics* **4**, 323-338, 1977.

Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman. Monte Carlo Methods for Security Pricing, *Journal Econom. Dynam. Control* **21**, 1267-1321, 1997.

Geweke, J. Efficient Simulation from the Multivariate Normal and Student t-Distributions Subject to Linear Constraints, *Computing Science and Statistics: Proceedings of the 23rd Symposium on the Interface*, 571-578, 1991.

Glasserman, P. Filtered Monte Carlo, *Math. Oper. Res.* **18**, 610-634, 1993.

Glasserman, P. and J. Staum. Conditioning on One-Step Survival for Barrier Option Simulations, *Operations Research* **49**, 923-937, 2001.

Guillaume, T. Analytical Valuation of Autocallable Notes, *International Journal of Financial Engineering*, 2015.

Hajivassiliou, V. and D. McFadden. The Method of Simulated Scores with Applications to Models of External Dept Crises, *Cowles Foundation Discussion Paper No. 967*, 1990.

Hertz, D. Risk Analysis in Capital Investment, *Harvard Business Review*, 1964.

Keane, M. A Computational Efficient Practical Simulation Estimator for Panel Data, with Applications to Estimating Temporal Dependence in Employment and Wages, *University of Minnesota*, mimeo, 1990.

Kunitomo, N. and M. Ikeda. Pricing Options with Curved Boundaries, *Math. Finance* **2**, 275-298, 1992.

Marsaglia, G., A. Zaman and J. Marsaglia. Rapid Evaluation of the Inverse of the Normal Distribution Function, *Statist. Probab. Lett.* **19**, 259-266, 1994.

Merton, R. Theory of Rational Option Pricing, *Bell J. Econom. Management Sci.* **4**, 141-183, 1973.

Merton, R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics* **3**, 125-144, 1976.

Rubinstein, M. and E. Reiner. Breaking Down the Barriers, *Risk* **4**, 28-35, 1991.

Sidenius, J. Double Barrier Options: Valuation by Path Counting, *Journal Comput. Finance* **1**, 63-79, 1998.

Ακαδημαϊκά Συγγράμματα

Aitchison, J. and J. Brown. *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, 1963.

Bouzoubaa, M., and A. Osseiran. *Exotic Options and Hybrids*, Wiley Finance, John Wiley & Sons, 2010.

Brandimarte, P. *Numerical Methods in Finance and Economics*, Wiley, 2006.

Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd edition, Princeton University Press, 1996.

Fishman, G. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, 1996.

Hammersley, J. and D. Handscomb. *Monte Carlo Methods*, Methuen, 1964.

Hull, J. *Options, Futures and other Derivatives*, 7th edition, Prentice Hall, 2008.

Zhang, P. *Exotic Options: A Guide to Second Generation Options*, World Scientific, 1998.