ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ: ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ : ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία:

Αποτίμηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων Προαίρεσης υπό Στοχαστικά Επιτόκια

Ονοματεπώνυμο Φοιτητή: Ροβυθάκη Κωνσταντίνα (ΜΧΡΗ 1826)

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Επιτροπή: Καθηγητής Πιττής Νικήτας

Αναπλ. Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Φεβρουάριος 2020

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας χρηματοδοτήθηκε από το ΙΚΥ στο πλαίσιο του «προγράμματος χορήγησης υποτροφιών για μεταπτυχιακές σπουδές πρώτου κύκλου (Master) στην Ελλάδα με ένταξη στην αγορά εργασίας, στο πλαίσιο συνεργασίας του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ) και της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος (ΕΤΕ), ακαδημαϊκού έτους 2018-2019».

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική πραγματεύεται την αποτίμηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης σε τρέχουσες συνθήκες της αγοράς υπό αρνητικά και σχεδόν μηδενικά επιτόκια.

Αρχικά, παρατίθεται η απαραίτητη ιστορική αναδρομή και οι ορισμοί των απλών δικαιωμάτων προαίρεσης, το οικονομικό υπόβαθρο που υπάγεται ο εξεταζόμενος τίτλος και οι προβληματισμοί που εγείρονται ως προς την απόκλιση από την δίκαιη τιμολόγηση. Έπειτα, παρουσιάζοντας τις υποθέσεις που στηρίζεται το μοντέλο Black-Scholes (1973) αιτιολογείται η ιδέα κατάργησης σταθερού επιτοκίου και παρουσιάζονται οι γενικεύσεις του, υιοθετώντας κανονική στοχαστική διαδικασία βραχυπρόθεσμου επιτοκίου (ενός παράγοντα) κατά Vasicek (1977), που περιλαμβάνει και την υποπερίπτωση Merton (1973). Επιπροσθέτως, εξετάζεται η ευστάθεια των μοντέλων αυτών μέσω της αντιπαραβολής τους σε παρελθόντα χρόνο υπό θετικά επιτόκια, εισάγοντας και το μοντέλο Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985) στην ανάλυση. Η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων πραγματοποιείται στο Matlab εντός και εκτός δείγματος παρατήρησης σε ημερήσιο σύνολο 24 δικαιωμάτων αγοράς διαφορετικών ληκτοτήτων και τιμών εξάσκησης, με εμπειρική μελέτη στη γερμανική μετοχή Deutsche Telekom.

Βάσει των ανωτέρω απαντάται το ερώτημα για το αν η στοχαστικότητα του επιτοκίου προσδίδει ακρίβεια προσέγγισης της αγοραίας τιμής συγκριτικά με το απλό μοντέλο. Το συμπέρασμα εξάγεται εξετάζοντας τον παράγοντα χρόνου μέχρι τη λήξη ξεχωριστά, με τα ευρήματα να συμβάλλουν στη σύνθεση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας.

Λέξεις Κλειδιά

Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Προαίρεσης, Αποτίμηση Δικαιωμάτων Μετοχών, Εμπειρική Μελέτη, Μοντέλο Black-Scholes, Χρονική Διάρθρωση Επιτοκίων, Στοχαστικό Επιτόκιο, Μοντέλο Vasicek, Μοντέλο CIR, Αλγόριθμος Levenberg-Marquardt, Προβλεπτική Ικανότητα.

ABSTRACT

This paper refers to the pricing of the plain vanilla European type options in current market conditions under negative and approximately zero interest rates.

To begin with, the benchmark historical incidents related to the notion of options along with main definitions are presented. In addition, the economic background that the underlying asset lies in is explained, as it arises doubts regarding possible deviations from the fair pricing. Next, provided the theoretical framework of the Black-Scholes (1973) model applying constant interest rate until the expiry of the option, the generalization under one factor gaussian stochastic process of short interest rate adopting the Vasicek (1977) term structure, which incorporates the Merton (1973) one as well, is derived. Furthermore, each model's robustness is examined by contrasting them in past time under positive rates, where the Cox-Ingersoll-Ross (CIR)(1985) model is introduced for extra analysis. The estimation of the models' parameters is realized through Matlab by calibration in sample and out of sample, using 24 call options in total which consist of different maturities and strikes on the German stock Deutsche Telekom.

Based on the above, it is concluded whether the stochasticity of the interest rate improves the accuracy of the actual market price approximation in comparison to the constant model, counting the time-to-maturity factor separately, with the findings contributing to the existent bibliography.

Key Words

European Plain Vanilla Option, Valuation of Stock Options, Empirical Study, Black-Scholes Model, Time Structure of Interest Rates, Stochastic Interest Rate, Vasicek Model, CIR Model, Levenberg-Marquardt Algorithm, Forecasting Ability.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα βασικά χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης που συνιστούν σημαντικό μέρος των παραγώγων χρηματοοοικονομικών προϊόντων, καθώς και η ιστορική τους αναδρομή . Επίσης, θα ενσωματωθούν ιστορικά διαγράμματα που αποτυπώνουν την αβεβαιότητα ως προς το ύψος των επιτοκίων για δεδομένες χρονικές περιόδους, δικαιολογώντας την ανάγκη εισαγωγής στοχαστικών επιτοκίων ως προς την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Έπειτα, παρατίθεται ονομαστική αναφορά των πιο γνωστών μελετών σχετικά με τη μοντελοποίηση της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων, καθώς και οι σημαντικότερες διαφορές μεταξύ τους. Τέλος, θα παρουσιαστεί ενδεικτικά μέρος προηγούμενων εμπειρικών μελετών με αντικείμενο την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο μετοχές ή δείκτες μετοχών μαζί με τα ευρήματά τους.

1.1 Δικαιώματα προαίρεσης (Options)

1.1.1 Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά δικαιωμάτων προαίρεσης

Τα παράγωγα προϊόντα ορίζονται ως χρηματοοικονομικά εργαλεία των οποίων η αξία εξαρτάται ή ορίζεται εξ' ολοκλήρου από την τιμή των υποκείμενων τίτλων που αυτά συνίστανται. Τα υποκείμενα μέσα δύναται να είναι εμπορεύματα ή αγαθά, όπως βαμβάκι, σιτηρά ή πετρέλαιο καθώς και επενδυτικά προϊόντα, όπως μετοχές, ομόλογα, ισοτιμίες συναλλάγματος, δείκτες μετοχών. Ωστόσο, τα παράγωγα μπορούν να εξαρτώνται σχεδόν από οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο το οποίο υπόκειται σε κινδύνους επηρεάζοντας κατά συνέπεια την μεταβλητότητά τους, έχοντας αντίκτυπο στην εμπορευσιμότητά τους.

Τα παράγωγα χρησιμοποιούνται είτε για αντιστάθμιση κινδύνου, είτε για κερδοσκοπία ή κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage). Η αγορά των παραγώγων δέχτηκε έντονη κριτική για τη συμβολή τους στο ξέσπασμα της παγκόσμιας χρηματοπιστωτικής κρίσης που ξεκίνησε το 2007 κυρίως λόγω της μεγάλης έκθεσής από επενδυτικές τράπεζες και διαχειριστές χαρτοφυλακίων σε τέτοια προϊόντα μέσω της μεθόδου τιτλοποίησης. Τα πολύπλοκα αυτά προϊόντα αποτελούνταν από ομόλογα με υποκείμενο τίτλο στεγαστικά δάνεια τα οποία έχασαν την αξία τους όταν έγινε αντιληπτή από την αγορά η «φούσκα» των τιμών ακινήτων στις Η.Π.Α (MBS/CMOs)[1].

Σήμερα η αγορά παραγώγων αποτελεί την πιο ρευστή αγορά παγκοσμίως ενδοχρηματιστηριακά με έντονη παρουσία και στην OTC[2] αγορά, μέσω πληθώρας μορφών, όπως **συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Forwards/Futures)**, **ανταλλαγές επιτοκίων και πιστωτικού κινδύνου (Interest Rate Swaps, Credit Default Swaps), δικαιώματα προαίρεσης αγοράς και πώλησης (Call Options, Put Options).** Μέσω των προϊόντων αυτών επιτυγχάνεται η μεταβίβαση χρηματικών ροών ή υποκείμενων τίτλων μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, *τον αγοραστή που παίρνει θέση long position* και τον *πωλητή που παίρνει θέση short position.*

Αντικείμενο του ενδιαφέροντος μας για την εργασία θα αποτελέσουν τα δικαιώματα προαίρεσης. Βασικά χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης που ορίζονται στο συμβόλαιο ρητά, αποτελούν τα κάτωθι:

1. Το υποκείμενο αγαθό/τίτλος *(Underlying Asset)* επί του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα, το οποίο αφορά οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό και μη προϊόν.

2. Η τιμή (*Price*) του υποκείμενου τίτλου, είναι εκείνη που ορίζει την εξάσκηση ή μη του δικαιώματος , καθώς και το ύψος των χρηματοροών.

3. Η τιμή άσκησης (*Strike Price*) που προσυμφωνείται από τα αντισυμβαλλόμενα μέρη και παραμένει αμετάβλητη μέχρι την εκπνοή του προϊόντος.

4. Το μέγεθος του συμβολαίου *(Contract Price)*, δηλαδή οι απαιτούμενες μονάδες από τον υποκείμενο τίτλο που αντιστοιχούν σε ένα συμβόλαιο δικαιώματος.

5. Η διάρκεια *(Time to Maturity)* ισχύος του δικαιώματος. Με την πάροδο αυτού, αν δεν έχει εξασκηθεί το δικαίωμα παύει να ισχύει.

6. Το ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος (*Premium)* το οποίο καταβάλλεται από τον αγοραστή του δικαιώματος **(holder)** στον πωλητή **(writer)** σαν αντάλλαγμα χρήσης δικαιώματος συναλλαγής επί του τίτλου.

Επιπροσθέτως, τα δικαιώματα προαίρεσης διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες βάσει δυνατότητας εξάσκησης:

- *Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου:* Στην κατηγορία αυτή, ο κάτοχος του δικαιώματος (ο αγοραστής) μπορεί να εξασκήσει το **δικαίωμα αγοράς (long call)** ή **πώλησης (long put)** του υποκείμενου τίτλου στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης Κ μόνο στην προβλεπόμενη ημερομηνία λήξης του συμβολαίου Τ.
- *Δικαίωμα Αμερικανικού τύπου* : Στην κατηγορία αυτή, ο κάτοχος μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα του οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

Τα δικαιώματα προαίρεσης που χαρακτηρίζονται μονοσήμαντα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά χωρίς να περιέχουν ειδικά χαρακτηριστικά, όρους ή προϋποθέσεις καλούνται «plain vanilla options» και αφορούν την πιο διαδεδομένη μορφή δικαιωμάτων, με το λόγο να έγκειται στην απλότητα της τιμολόγησής τους. Επιγραμματικά, υπάρχουν τέσσερις θέσεις που μπορεί να έχει κάποιος σε δικαίωμα προαίρεσης:

Δικαίωμα Αγοράς
Call Option

- **Θέση long** : Θέση αγοραστή σε *δικαίωμα* αγοράς επί του υποκείμενου τίτλου έναντι καταβολής ασφαλίστρου κινδύνου στον πωλητή για τη σύναψη του συμβολαίου δικαιώματος.
- **Θέση short**: Θέση πωλητή σε δικαίωμα αγοράς συνάδει με την *υποχρέωση* προς παράδοση του υποκείμενου τίτλου εφόσον εξασκηθεί το δικαίωμα από τον αγοραστή, εισπράττοντας την προαναφερθείσα αμοιβή ως ασφάλιστρο.

Δικαίωμα Πώλησης
Put Option

- **Θέση long** : Θέση αγοραστή σε *δικαίωμα* πώλησης επί του υποκείμενου τίτλου έναντι καταβολής ασφαλίστρου κινδύνου στον πωλητή για τη σύναψη του δικαιώματος.
- **Θέση short**: Θέση πωλητή σε δικαίωμα πώλησης συνάδει με την *υποχρέωση* προς αγορά του υποκείμενου τίτλου εφόσον εξασκηθεί το δικαίωμα από τον αγοραστή, εισπράττοντας την προαναφερθείσα αμοιβή ως ασφάλιστρο.

Γενικότερα, με την αγορά δικαιώματος προαίρεσης (είτε αγοράς είτε πώλησης) η ζημιά είναι περιορισμένη, εν αντιθέσει με τη θέση πώλησης όπου η ζημιά είναι θεωρητικά απεριόριστη. Οι αγοραστές δικαιωμάτων αγοράς και οι πωλητές δικαιωμάτων πώλησης προσδοκούν αύξηση τιμών, ενώ οι πωλητές δικαιωμάτων αγοράς και οι αγοραστές δικαιωμάτων πώλησης προσβλέπουν σε πτώση των τιμών .

Οι συναρτήσεις κέρδους/ζημίας κατά τη χρονική στιγμή λήξης για τις τέσσερις θέσεις στα δικαιώματα, ακολουθούν συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

Θέση	Συνάρτηση Κέρδους/Ζημίας
Long Call:	$f(T)=\begin{cases}(S_T-K)-C, & S_T>K\\ -C, & S_T\leq K\end{cases}=\max(S_T-K)_+-C$
Short Call:	$f(T)=\begin{cases}C-(S_T-K), & S_T>K\\ C, & S_T\leq K\end{cases}=C-\max(S_T-K)_+$
Long Put:	$f(T)=\begin{cases}(K-S_T)-C, & K>S_T\\ -C, & K\leq S_T\end{cases}=\max(K-S_T)_+-C$
Short Put:	$f(T)=\begin{cases}C-(K-S_T), & K>S_T\\ C, & K\leq S_T\end{cases}=C-\max(K-S_T)_+$
Όπου C το ασφάλιστρο κινδύνου, S_T η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά το χρόνο T λήξης του δικαιώματος και K η τιμή εξάσκησης.	

Τέλος, ακολουθεί πίνακας με την επίδραση των έξι παραγόντων (αυξάνοντας το επίπεδο του ενός κάθε φορά κρατώντας τους υπόλοιπους σταθερούς) που επηρεάζουν την τιμή των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο μετοχές, ανά κατηγορία:

Αύξηση Παράγοντα	Τιμή Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς	Τιμή Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης	Ερμηνεία
Τρέχουσα τιμή μετοχής	*Αύξηση*	*Μείωση*	Η αύξηση S επιφέρει ακριβότερα δικαιώματα αγοράς προαίρεσης και φθηνότερα πώλησης (βλέπε συνάρτηση κέρδους-ζημιάς παραπάνω).
Τιμή άσκησης	*Μείωση*	*Αύξηση*	Η αύξηση K επιφέρει φθηνότερα δικαιώματα αγοράς προαίρεσης και ακριβότερα πώλησης (βλέπε συνάρτηση κέρδους-ζημιάς παραπάνω).
Χρόνος μέχρι τη λήξη	*Αβέβαιο*	*Αβέβαιο*	Συνήθως αύξηση του T συνεπάγεται αύξηση της αξίας των call και put options. Ωστόσο, στην περίπτωση διανομής μεγάλου μερίσματος, υφίσταται ισόποση μείωση της τιμής την οποία επωμίζεται ο κάτοχος δεδομένου ότι δεν μπορεί να εξασκηθεί νωρίτερα.
Μεταβλητότητα μετοχής	*Αύξηση*	*Αύξηση*	Αποτελεί μέτρο αβεβαιότητας για την απόδοση της μελλοντικής τιμής Αυξάνεται η πιθανότητα ακραίων τιμών που προκαλεί θετική μεταβολή της αξίας δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

Ακίνδυνο επιτόκιο	*Αύξηση*	*Μείωση*	Η αύξηση του επιτοκίου επιφέρει αύξηση του αναμενόμενου ρυθμού ανάπτυξης της μετοχής, επίδραση η οποία έχει δειχθεί ότι πάντα υπερτερεί της μείωσης της παρούσας αξίας των μελλοντικών χρηματοροών.
Ποσό μελλοντικών μερισμάτων	*Μείωση*	*Αύξηση*	Η διανομή μερίσματος μειώνει την τιμή της μετοχής. Επομένως τα δικαιώματα αγοράς είναι αρνητικά συσχετισμένα, ενώ τα δικαιώματα πώλησης θετικά συσχετισμένα στον παράγοντα αυτό.

1.1.2 Ιστορική αναδρομή δικαιωμάτων προαίρεσης

Αν και τα δικαιώματα προαίρεσης υπήρξαν για πολλούς αιώνες μία διαδεδομένη μορφή εμπορικών συναλλαγών, παρέμεναν σχετικά άγνωστα ως χρηματοοικονομικά προϊόντα μέχρι την εισαγωγή τους στο χρηματιστήριο το 1973. Περιληπτικά, ακολουθεί η ιστορική τους αναδρομή:

❖ 4^{ος} αιώνας π.Χ: Τα πρώτα δικαιώματα προαίρεσης θεωρείται ότι εμφανίστηκαν στην Αρχαία Ελλάδα από τον 4ο αιώνα π.Χ, όπου σύμφωνα με ένα βιβλίο του Αριστοτέλη ο αρχαίος φιλόσοφος Θαλής ο Μιλήσιος, κερδοσκόπησε στη σοδειά ελιάς. Έχοντας προβλέψει ότι η σοδειά θα ήταν καλή το επόμενο φθινόπωρο, κατάφερε από το χειμώνα να κατοχυρώσει τη μίσθωση των ελαιοτριβείων της Χίου και της Μιλήτου, έχοντας την αποκλειστική τους χρήση. Επομένως, το χειμώνα τα υπεκμίσθωνε εκείνος με τη σειρά του στην τιμή που επιθυμούσε .

Σε παραλληλισμό ο Θαλής αγόρασε ένα δικαίωμα προαίρεσης καταβάλλοντας το ασφάλιστρο κινδύνου ώστε να εξασφαλίσει το δικαίωμά του να χρησιμοποιήσει το ελαιοτριβείο την περίοδο της συγκομιδής ελαιοτριβείων .Σε περίπτωση που η πρόβλεψη του επιβεβαιωνόταν θα πουλούσε το δικαίωμα αυτό, «κλειδώνοντας» τη διαφορά των τιμών, ενώ σε αντίθετη περίπτωση δε θα εξασκούσε το δικαίωμα του αυτό και θα περιόριζε τη ζημία του στην εγγύηση.

❖ 17^{ος} -18^{ος} αιώνας: Σχετική αναφορά στα προϊόντα αυτά συναντάμε κατά το 17^{ο} αιώνα , όπου η αναγέννηση γραμμάτων και τεχνών στην Ευρώπη επέφερε την ανάγκη διασφάλισης των τιμών κάθε λογής εμπορευμάτων μέσω παραγώγων κυρίως στις Κάτω Χώρες, που αποτελούσαν το κέντρο του ευρωπαϊκού εμπορίου. Πιο συγκεκριμένα, στο χρηματιστήριο της Ολλανδίας, παρατηρήθηκε το φαινόμενο της «τουλιπομανίας» (Tulip Bulb Mania).

Τότε οι τουλίπες ήταν εξαιρετικά δημοφιλείς στην περιοχή ενώ η δημοτικότητά τους εξαπλώθηκε στην Ευρώπη και σε ολόκληρο τον κόσμο, γεγονός που οδήγησε σε αύξηση της ζήτησης των βολβών τουλίπας. Μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή, δικαιώματα αγοράς και πώλησης χρησιμοποιούνταν ήδη σε πολλές διαφορετικές αγορές κυρίως για σκοπούς αντιστάθμισης κινδύνου. Οι καλλιεργητές τουλίπας έπαιρναν θέση αγοραστή στα δικαιώματα πώλησης για να προστατεύσουν τα κέρδη τους σε περίπτωση που η τιμή των βολβών τουλίπας έπεφτε, ενώ οι χονδρέμποροι τουλίπας έμπαιναν στην θέση αγοραστή στα δικαιώματα αγοράς για να προστατευτούν από τον κίνδυνο της αύξησης της τιμής των βολβών τουλίπας.

Κατά το 1630, η κερδοσκοπία σε αυτή την αγορά οδήγησε σε έξαρση της ζήτησης για βολβούς τουλίπας, δημιουργώντας ένα φαύλο κύκλο που οδήγησε στην εμφάνιση της «φούσκας»: το επίπεδο των τιμών δεν ήταν βιώσιμο, προκαλώντας δραματική μείωση των αγοραστών. Αναπόφευκτα, η ολλανδική οικονομία εισήλθε σε ύφεση ως απόρροια της απομείωσης της περιουσίας των νοικοκυριών που είχαν μεγάλη έκθεση σε τέτοια προϊόντα, ενώ επιπροσθέτως λόγω του ότι η αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης ήταν ανεπίσημη, δεν υπήρχε εφικτός τρόπος εξαναγκασμού των επενδυτών προς εκπλήρωση των υποχρεώσεων τους.

Δεδομένων των ανωτέρω, η κακή φήμη των δικαιωμάτων προαίρεσης εξαπλώθηκε παγκοσμίως. Ωστόσο, τα δικαιώματα προαίρεσης εξακολουθούσαν να είναι ελκυστικά για μεγάλο αριθμό επενδυτών, κυρίως λόγω του γεγονότος ότι προσφέρουν μεγάλη μόχλευση[3] . Επομένως, ενώ η διαπραγμάτευση τους συνεχίστηκε, η φήμη τους είχε κλονιστεί ανεπανόρθωτα, καθιστώντας τα παράνομα πολλές φορές στην ιστορική τους αναδρομή ανά τον κόσμο (Ιαπωνία, Ευρώπη και σε κάποιες πολιτείες της Αμερικής), με την πιο αξιοσημείωτη απαγόρευση να αποτελεί εκείνη που έλαβε χώρα στο Λονδίνο στις αρχές του 18ου αιώνα, όπου η απαγόρευση διήρκησε πάνω από 100 χρόνια.

❖ 19ος αιώνας: Μία εξέλιξη άξια αναφοράς στην ιστορία των δικαιωμάτων προαίρεσης, εισάχθηκε από τον Αμερικάνο χρηματοοικονομικό σύμβουλο **Russell Sage**. Τον 19ο αιώνα, ο Sage ξεκίνησε το σχεδιασμό δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης έτσι ώστε να διαπραγματεύονται στην OTC αγορά των Η.Π.Α, χωρίς ακόμη να υπάρχει επίσημη αγορά συναλλάγματος. Ακόμη, ο Sage πιστεύεται ότι είναι το πρώτο άτομο που καθόρισε μια τιμολογιακή σχέση μεταξύ της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης, της τιμής του υποκείμενου τίτλου και των επιτοκίων (*Michael Knoll, 2004*). Χρησιμοποίησε την αρχή της ισότητας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (put-call parity) για το σχεδιασμό συνθετικών δανείων που περιέχουν αγορά μετοχής και δικαιώματος πώλησης από έναν πελάτη.

Αν και ο Sage εν τέλει σταμάτησε τη διενέργεια συναλλαγών λόγω σημαντικών απωλειών που υπέστη, αποτέλεσε αναμφισβήτητη επιρροή στη συνέχεια της εξέλιξης των δικαιωμάτων, καθώς στα τέλη του 19ου αιώνα χρηματιστές ξεκίνησαν να χρησιμοποιούν διαφημίσεις ως μέσω προσέγγισης νέων επενδυτών, ενώ για την ενίσχυση του σκοπού αυτού δημιουργήθηκε το «Put and Call Brokers and Dealers Association». Ωστόσο, η έλλειψη ρυθμιστικών κανονισμών και επαρκούς προτύπου τιμολόγησης ενίσχυε την ήδη υπάρχουσα ανησυχία στην αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης, καθιστώντας τη μη ρευστή.

- <u>20ος αιώνας:</u> Το έτος **1900** ο Γάλλος μαθηματικός **Louis Bachelier**,θεωρείται ότι ήταν ο πρώτος που εισήγαγε ότι οι διακυμάνσεις στις τιμές μετοχών μπορούν να μοντελοποιηθούν από μια στοχαστική διαδικασία γνωστή αργότερα ως «κίνηση Brown». Στο μοντέλο αυτό, για την αποτίμηση δικαιωμάτων μετοχών οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, επιτρέποντας τις τιμές μετοχών να είναι αρνητικές.

Ωστόσο, ο **Sprenkle (1961)** ήταν ο πρώτος που υιοθέτησε την προσέγγιση του Bachelier θεωρώντας λογαριθμοκανονική κατανομή και αποστροφή κινδύνου από τους επενδυτές, με το μοντέλο του ωστόσο να μην κερδίζει την απαιτούμενη προσοχή λόγω της δυσκολίας εκτίμησης παραμέτρων. Αργότερα ο **Boness (1964)** βελτίωσε περαιτέρω τη φόρμουλα, λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική αξία του χρήματος, προεξοφλώντας με τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης της μετοχής ενώ ο **Samuelson (1965)** επέτρεψε το δικαίωμα προαίρεσης να έχει διαφορετικό ρυθμό απόδοσης από τη μετοχή. Σε μια άλλη δημοσίευση, οι **Samuelson και Merton (1969)** συνέλαβαν την ιδέα ότι η τιμή του δικαιώματος θα έπρεπε να αποτελεί συνάρτηση της τιμής της μετοχής ενώ το επιτόκιο προεξόφλησης θα αποφασιζόταν με την στρατηγική αντιστάθμισης συνδυασμού μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1960 έγινε προσπάθεια για την επιβολή κανονιστικού πλαισίου από την «Securities and Exchange Commission (SEC)», όμως λόγω της πολυπλοκότητας και της αδυναμίας δίκαιης τιμολόγησης καθίσταντο δύσκολο για τους επενδυτές να εκλάβουν τα δικαιώματα προαίρεσης ως βιώσιμο εμπορεύσιμο μέσο. Συνέπεια αυτού, το έτος 1968 το «Chicago Board of Trade» παρατήρησε μια αξιοσημείωτη μείωση στις συναλλαγές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ) των αγαθών, που επίτασσε την ανάγκη δημιουργίας επίσημης αγοράς συναλλαγών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Η αγορά των δικαιωμάτων αγοράς σηματοδοτήθηκε το 1973 από τη θέσπιση του χρηματιστηρίου *«Chicago Board Options Exchange» (CBOE)* στο Σικάγο και του *«Options Clearing Corporation»* που διασφάλιζε την εκκαθάριση των συναλλαγών εξαλείφοντας τον κίνδυνο αντισυμβαλλομένου, με τη διαπραγμάτευση συμβολαίων επί 16 μετοχών. **Το ίδιο έτος δύο ακαδημαϊκοί, ο Fisher Black και Myron Scholes, επινόησαν ένα μαθηματικό μοντέλο συνεχούς χρόνου και συνεχών τιμών, το οποίο θα μπορούσε να υπολογίσει την δίκαιη τιμή ενός δικαιώματος χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες μεταβλητές κάτω από ορισμένες υποθέσεις**. Το γεγονός αυτό αποτέλεσε ορόσημο στην ιστορία των δικαιωμάτων, καθώς είχε θεμελιώδες θετικό αντίκτυπο στην πεποίθηση των επενδυτών ως προς την διαπραγμάτευση των προϊόντων αυτών. **Το μοντέλο παραμένει το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μέχρι σήμερα, θα αναλυθεί εκτενώς σε παρακάτω κεφάλαιο και θα εφαρμοστεί στην παρούσα διπλωματική.**

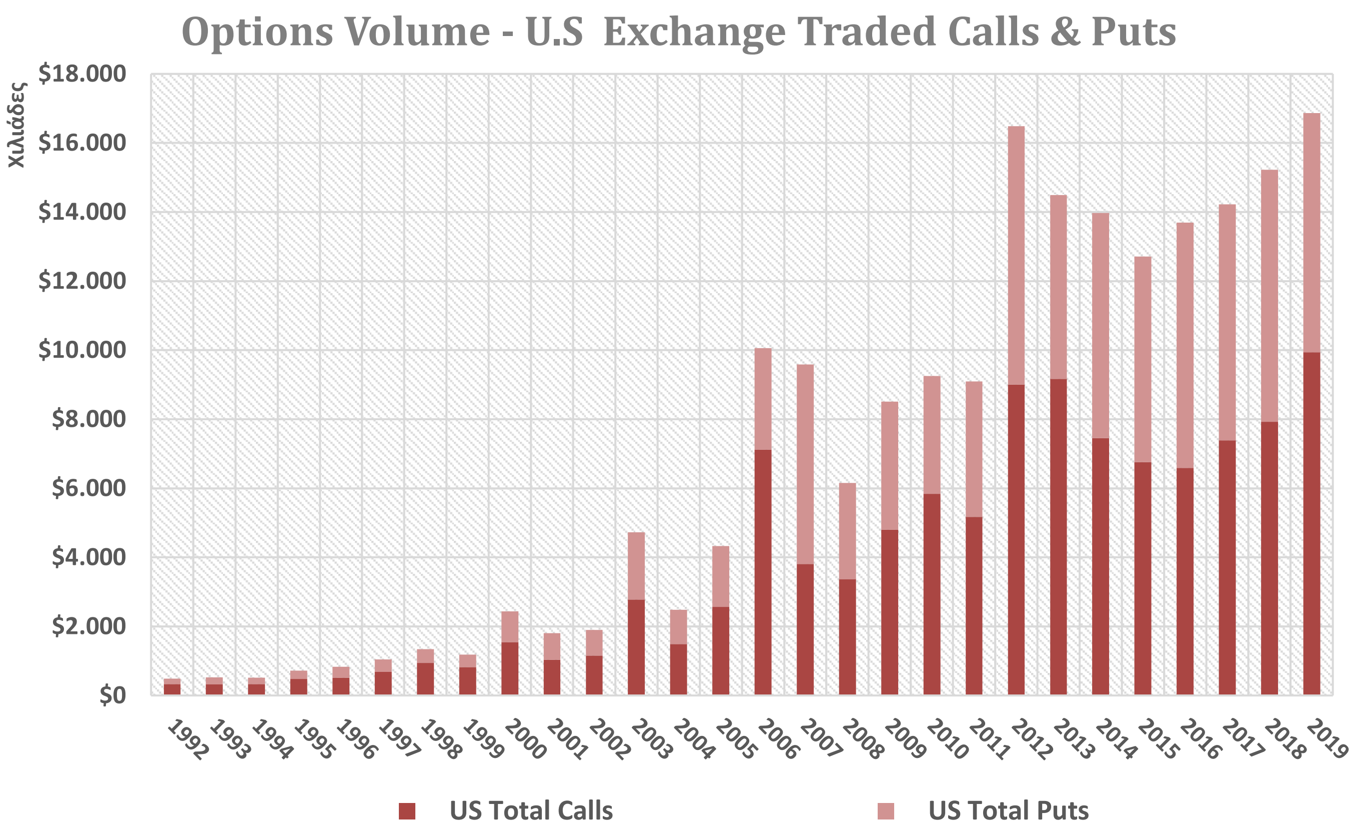
Μέχρι το 1974 ο μέσος ημερήσιος όγκος συναλλαγών συμβολαίων του CBOE ξεπερνούσε τις 20.000, ενώ τα δικαιώματα πώλησης άρχισαν να διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια το 1977. Το έτος **1979**, παρουσιάστηκε από τους **Cox, Ross και Rubinstein** μια προσέγγιση διακριτού μοντέλου τιμολόγησης δικαιωμάτων διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών μέσω διωνυμικών δέντρων (binomial lattice) η οποία παρουσιάζει διαφορετικά πιθανά μονοπάτια για τη τιμή της υποκείμενης μετοχής μέχρι τη λήξη του δικαιώματος. Η υπόθεση που στηρίζεται είναι ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί τυχαίο περίπατο, ενώ σε κάθε βήμα η τιμή της επόμενης περιόδου παίρνει μόνο δύο συγκεκριμένες τιμές που προκύπτουν από δεδομένες πιθανότητες ανόδου και καθόδου. Στη διωνυμική προσέγγιση, όταν ο αριθμός των βημάτων αυξάνεται (Δt μικραίνει), το μοντέλο συμπίπτει με τη φόρμουλα Black-Scholes.

Εν συνεχεία, η αγορά αναπτύχθηκε με ταχείς ρυθμούς, με τα περισσότερα από τα χρηματιστήρια παραγώγων να ιδρύονται τις δεκαετίες του ’80 και του ’90. Όσον αφορά την Ελλάδα, το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών ξεκίνησε να διαπραγματεύεται συμβόλαια παραγώγων τον Αύγουστο του 1999. Στο τέλος του 20^{ου} αιώνα με τη ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι διαδικτυακές συναλλαγές άρχισαν να γίνονται δημοφιλείς σε ερασιτέχνες και επαγγελματίες επενδυτές παγκοσμίως.

- 21^{ος} αιώνας-Σήμερα:Τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν γνωρίσει ολοένα και πολυπλοκότερες βελτιώσεις, επεκτείνοντας την παρουσία τους σε προϊόντα όπως δικαιώματα στον καιρό (weather options) και στις εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα (emissions options), τα cash-settled δικαιώματα προαίρεσης[4] ενώ διατίθεται μεγάλη γκάμα «εξωτικών» παραγώγων»[5].

Η αγορά δε φαίνεται να παρουσιάζει ενδείξεις κορεσμού. Ενδεικτικά, *κατά το 2018, το «Options Clearing Corporation», που αποτελεί τον μεγαλύτερο οίκο εκκαθάρισης συμβολαίων επί μετοχών,* *εκκαθάρισε συνολικά 5,137 δις συμβόλαια διαπραγματευόμενα στο χρηματιστήριο στις Η.Π.Α , ποσοστό αυξημένο κατά 26,2% σε σχέση με το προηγούμενο έτος, αριθμός που αποτελεί ρεκόρ.*

Έπεται το διάγραμμα με την εμπορευσιμότητα (volume)[6] όλων των διαπραγματεύσιμων δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης στο σύνολο των χρηματιστηρίων παραγώγων της Αμερικής την τελευταία ημέρα διαπραγμάτευσης κάθε έτους, από το 1992 μέχρι το 2019. Τα στοιχεία αντλήθηκαν από την πλατφόρμα Bloomberg.



Όσον αφορά το χρηματιστήριο παραγώγων της Ευρώπης (Eurex), σύμφωνα με επίσημα στατιστικά στοιχεία που έχουν δημοσιευτεί για την κλειόμενη χρήση 2018, διαπραγματεύτηκαν σε σύνολο 698 εκατομμύρια συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης συνολικού όγκου συναλλαγών 26 τρις ευρώ εκ των οποίων:

- Ποσοστό 54,57% προκύπτει από δικαιώματα σε δείκτες μετοχών.
- Το 42,29% συνίσταται από δικαιώματα σε σταθερούς τίτλους εισοδήματος (ομόλογα και παράγωγα αυτών).

- Το υπόλοιπο 3,14% αφορά εκείνα με υποκείμενο τίτλο μεμονωμένες μετοχές (2,98%), διαπραγματεύσιμα αμοιβαία κεφάλαια- ETFs (0,01%) και δικαιώματα σε αγορές χρήματος που αφορούν προθεσμιακά συμβόλαια τρίμηνου EURIBOR (0,14%).

1.2 Περιγραφή Προβλήματος

1.2.1 Η ανάγκη εισαγωγής στοχαστικού επιτοκίου στα δικαιώματα προαίρεσης

Το επίπεδο επιτοκίου επηρεάζεται από πληθώρα παραγόντων συμπεριλαμβανομένης και της ληκτότητας, ενώ η σχέση μεταξύ των δύο για έναν υπό εξέταση τίτλο καλείται «χρονική διάρθρωση των επιτοκίων». Η αξία των συμβολαίων με σταθερή απόδοση στις διαφορετικές λήξεις (όπως αποτελούν τα δικαιώματα προαίρεσης) είναι αλληλένδετη με το μεταβλητό περιβάλλον επιτοκίων που διέπει την οικονομία αναφοράς του υποκείμενου τίτλου.

Ο Fisher Black (1995), ένας από τους μαθηματικούς που καθιέρωσαν το μοντέλο τιμολόγησης παραγώγων υπό σταθερό επιτόκιο Black-Scholes (*εφεξής θα αναφέρεται ως BS*) (1973), είχε αναφέρει σε δημοσίευσή του ότι «το ονομαστικό βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δε θα μπορούσε να είναι αρνητικό». <u>Ωστόσο, πολλές κεντρικές τράπεζες χωρών[7] διατηρούν πολλά χρόνια πλέον πολιτική αρνητικών επιτοκίων κατάθεσης, εγείροντας πλέον την ερώτηση «πόσο πιο χαμηλά μπορούν να γίνουν τα επιτόκια ώστε τα μετρητά να γίνουν πιο ελκυστική επιλογή»;</u>

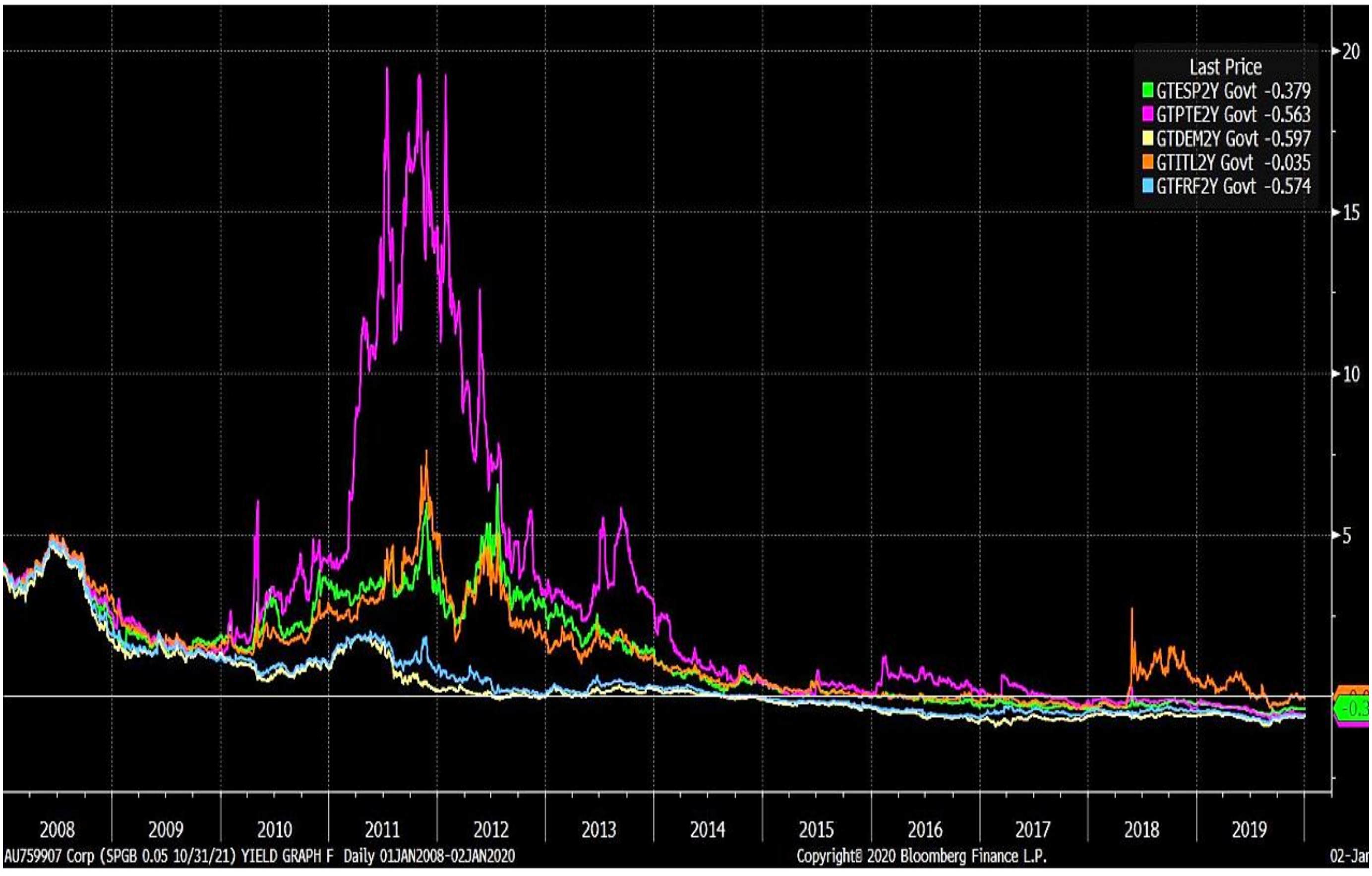
Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται αξιοσημείωτη μεταβολή των ονομαστικών επιτοκίων ειδικά στην Ευρώπη και στην Αμερική, με ιστορικά χαμηλά επίπεδα και αρνητικά επιτόκια ακόμη και σε μακροπρόθεσμες ληκτότητες. Ο κύριος λόγος για την εισαγωγή του αρνητικού επιτοκίου στις αγορές προέρχεται από την χρηματοπιστωτική κρίση των Η.Π.Α που εμφανίστηκε τον Αύγουστο του 2008 με την κατάρρευση κολοσσών του χρηματοπιστωτικού συστήματος με αποκορύφωμα τη «Lehman Brothers», προκαλώντας έλλειψη ρευστότητας λόγω άρνησης δανεισμού από την έξαρση του πιστωτικού κινδύνου. Το γεγονός αυτό μεταξύ άλλων οδήγησε κλιμακωτά σε αποπληθωριστικό οικονομικό περιβάλλον αναγκάζοντας τις κεντρικές τράπεζες χωρών να εφαρμόσουν στοχευμένη αντισυμβατική νομισματική πολιτική. Οι αναιμικές και αρνητικές αποδόσεις στις αγορές τροφοδοτούνται από την αύξηση ζήτησης χρεογράφων ως εναλλακτική της «ζημιογόνας» κατάθεσης, δημιουργώντας ένα φαύλο κύκλο. Πλέον το περιβάλλον αρνητικών βραχυπρόθεσμων επιτοκίων μαστίζει χώρες όπως η Ιαπωνία, η Ελβετία και κυρίως χώρες της

Ευρωζώνης την τελευταία δεκαετία, προκαλώντας αναμφισβήτητα οικονομικές επιπτώσεις καθώς και τεχνικές δυσκολίες ως προς την εφαρμογή μοντέλων που στηρίζονται ρητά σε θετικά επιτόκια.

Το γεγονός αυτό ενθαρρύνει κυβερνήσεις και εταιρίες να εξασφαλίζουν τα ευνοϊκά χαμηλά ή και αρνητικά επιτόκια για το δανεισμό τους σε μακροπρόθεσμο διάστημα, προεξοφλώντας χαμηλή αποζημίωση ρίσκου λόγω πληθωρισμού και μεγαλύτερη παρούσα αξία χρήματος απ' ότι μελλοντική. Παράδειγμα αποτελεί η κυβέρνηση της Αυστρίας, η οποία έχει ήδη προχωρήσει σε έκδοση χρέους με λήξη 100 (!) χρόνια, όπου η απόδοση κυμαίνεται στο 1,115%. *Το παράδοξο των αρνητικών επιτοκίων ενώ δε συνάδει με την οικονομική θεωρία, εφόσον έχει εναρμονιστεί στις αγορές απαιτεί την αναζήτηση μοντέλων εύρεσης δίκαιης τιμής δικαιωμάτων προαίρεσης υπό αυτή τη συνθήκη.*

Ενδεικτικά παρατίθενται τρία από τα πιο αντιπροσωπευτικά διαγράμματα που αποτυπώνουν τη μεταβλητότητα των επιτοκίων. Τα δεδομένα αντλήθηκαν από την πλατφόρμα Bloomberg, ενώ η ημερομηνία τελευταίας παρατήρησης και αποτύπωσης των τιμών αποτελεί η 31/12/2019.

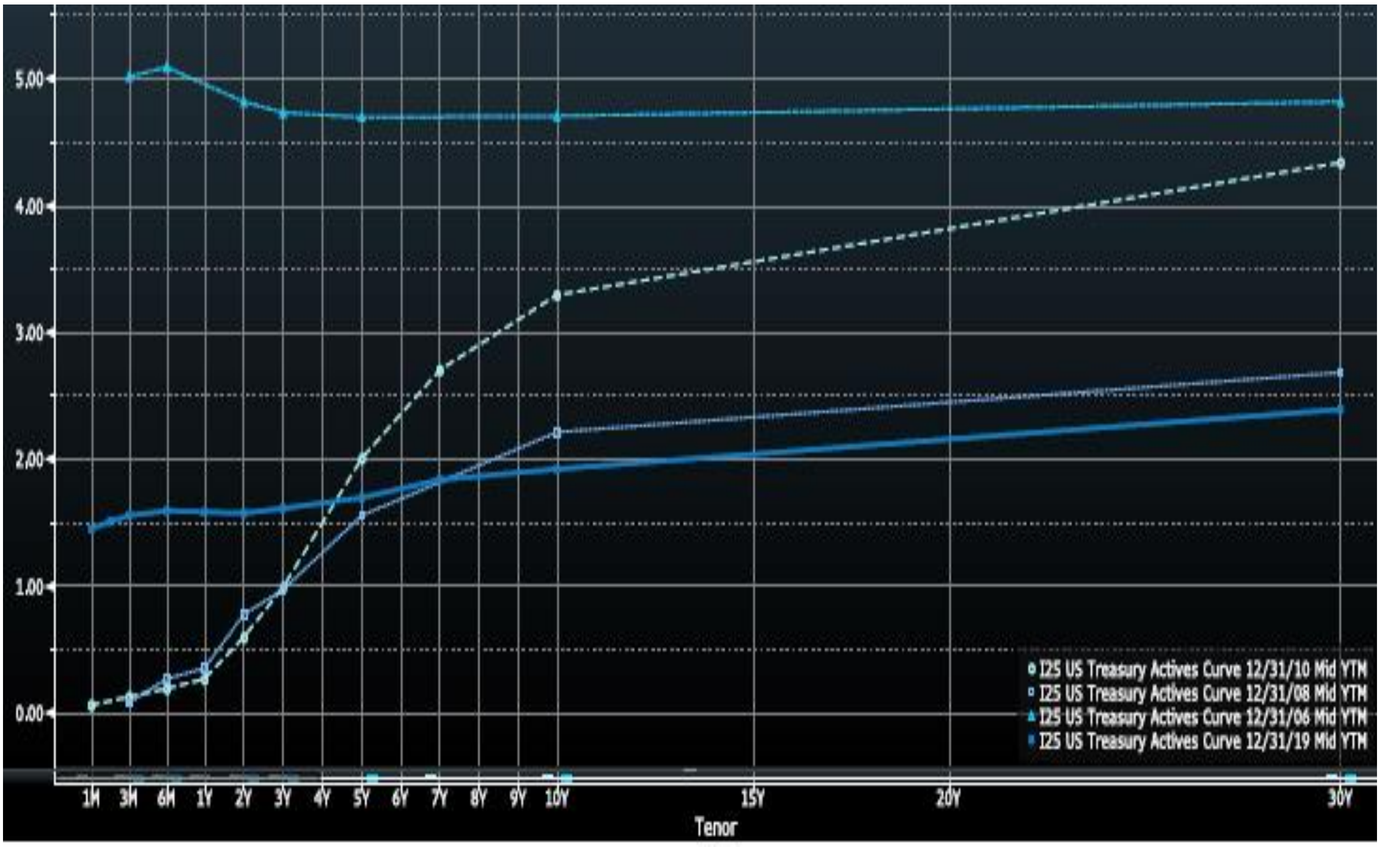
1. *<u>Η ιστορική ημερήσια απόδοση των κυβερνητικών εκδόσεων[8] με διετή χρόνο λήξης για τις κύριες συνιστώσες της Ευρωζώνης σε βάθος δεκαετίας (Γερμανία, Ισπανία, Πορτογαλία, Ιταλία και Γαλλία)</u> .*



Η **Γερμανία** αναπαρίσταται με *κίτρινο*, η **Ισπανία** με *πράσινο, η* **Πορτογαλία** με *μωβ* ,η **Ιταλία** με *πορτοκαλί* και η ***Γαλλία*** με *μπλε* από την 1/1/2008 μέχρι την ημερομηνία παρατήρησης. Με οριζόντια άσπρη γραμμή ορίζεται το μηδενικό κατώφλι αποδόσεων.

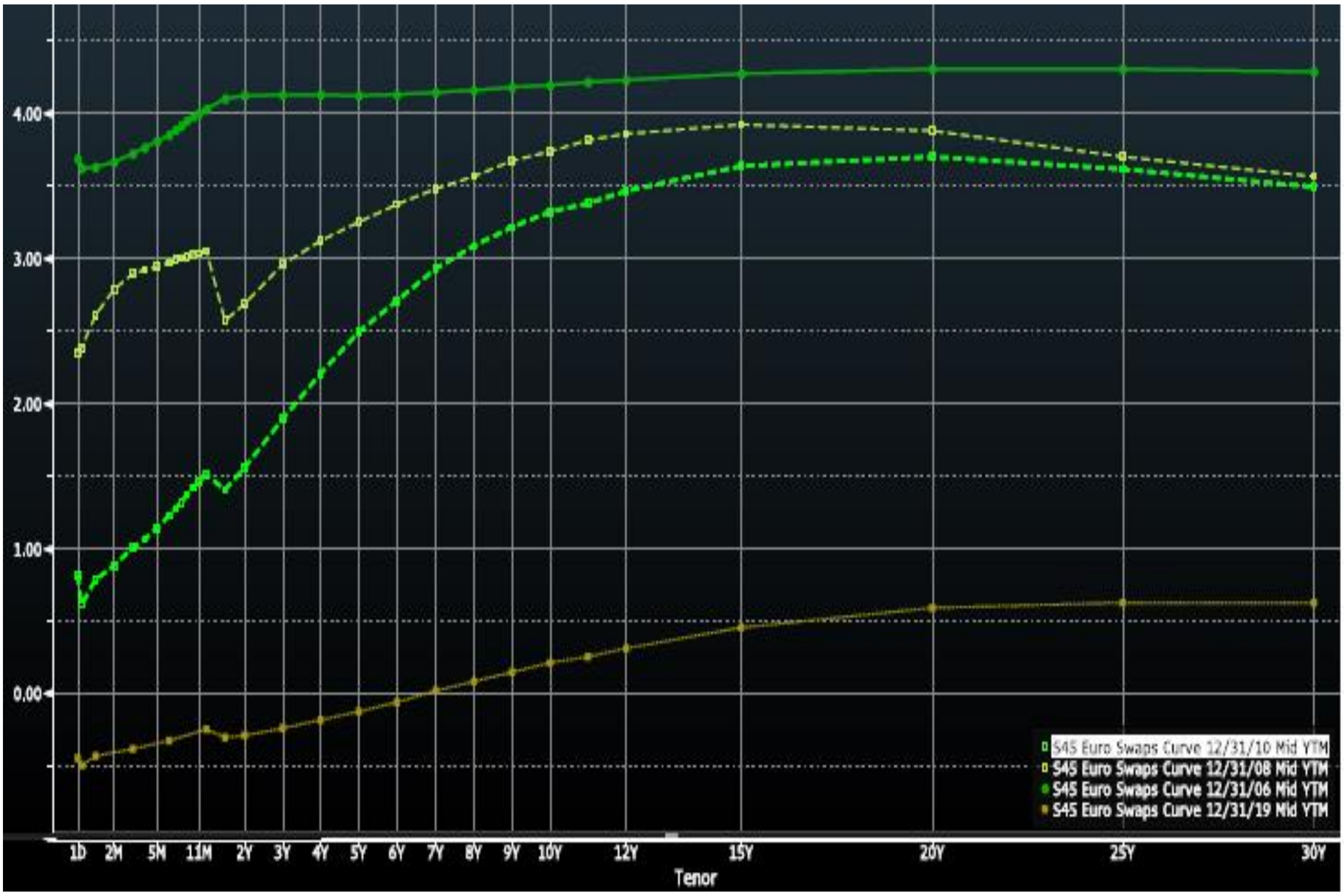
Από το παραπάνω, παρατηρείται ότι η Γερμανία αποτελεί την πρώτη χώρα που η αγορά εισήγαγε σε αρνητικά επιτόκια το 2012, με την Ιταλία, την Ισπανία την Γαλλία και την Πορτογαλία να εισέρχονται το 2015. Έκτοτε κατά κανόνα συγκλίνουν όλες οι εξεταζόμενες κοντά στο μηδέν (με αποκλίσεις στην Ιταλία και την Πορτογαλία), παραμένοντας σε αρνητικό πρόσημο αποδόσεων κατά την ημερομηνία παρατήρησης.

2. *<u>Η καμπύλη αποδόσεων για τις κυβερνητικές εκδόσεις χρέους στις Η.Π.Α μέχρι τη 30 ετία σε αντιπαραβολή με τις αντίστοιχες καμπύλες κατά το τέλος τριών ετών που συνέβησαν γεγονότα παγκόσμιου χρηματοοικονομικού ενδιαφέροντος, ήτοι την 31/12/06 (προ κρίσης), 31/12/08 (χρηματοπιστωτική κρίση/χρεοκοπία Lehman Brothers) και 31/12/10 (οικονομική κρίση Ευρωζώνης/Ελληνική κρίση χρέους) .</u>*



Από το διάγραμμα εξάγεται το συμπέρασμα ότι η πιο πρόσφατη καμπύλη αποδόσεων (μπλε συμπαγής γραμμή) έχει ως αντίσταση το 2,39%, παρουσιάζοντας flattening[9] σχεδόν σε όλες τις διάρκειες, με πιο εμφανές το μακρινό μέρος. Συγκριτικά, υπάρχει σχεδόν 3% μείωση από τα επίπεδα του 2006 για τις μακροπρόθεσμες διάρκειες (λήξης έτους και άνω), αγγίζοντας σχεδόν το 0% για τα έτη 2008 και 2010 στις βραχυπρόθεσμες εκδόσεις, ενώ για τις εκδόσεις 7 ετίας και έπειτα, η τιμή παρατήρησης είναι η χαμηλότερη σε σύγκριση με τα επίπεδα των ετών 2006,2008 και 2010.

3. *Η καμπύλη διάρθρωσης επιτοκίων Euro Swaps[10] η οποία αποτελεί υποκείμενο τίτλο των επιτοκιακών παραγώγων στο νόμισμα του ευρώ για τις ίδιες ημερομηνίες προς σύγκριση με την οικονομία των Η.Π.Α.*



Η συμπαγής καφέ γραμμή αφορά την ημερομηνία παρατήρησης, απ' όπου αντλούμε ότι τα Euribor επιτόκια παραμένουν σε αρνητικά επίπεδα για διάρκεια ανταλλαγών χρηματοροών μέχρι τα 6 έτη, παραμένοντας κοντά στο μηδενικό σημείο με φράγμα το 0,628% σε πέρας τριακονταετίας. Οπτικά παρατηρείται μεγάλη διαφορά στα επίπεδα των καμπυλών ανάμεσα στα έτη, με το έτος 2019 να διέπεται κατά κανόνα με τα μικρότερα επιτόκια καθ' όλες τις λήξεις, ενώ πιο συγκεκριμένα τα μέσα ποσοστά αλλαγής σε όλη την καμπύλη ανέρχονται σε -4,1%, -3,25% και -2,37% σε σύγκριση με τα έτη 2006, 2008 και 2010 αντίστοιχα.

Τα λογαριθμικά μοντέλα τιμολόγησης (στα οποία ανήκει και το BS) αδυνατούν να εφαρμοστούν όταν η μελλοντική τιμή του υποκείμενου τίτλου ή η τιμή άσκησης είναι αρνητικά, όπως συμβαίνει με τα επιτοκιακά παράγωγα[11]. Επομένως, τα επόμενα χρόνια πληθώρα μοντέλων προχώρησαν σε προσαρμογή του BS με περαιτέρω βελτιώσεις, όπως των **Black (1976), Dupire, Derman και Kani (local volatility model) (1994), SABR (2002), Free Boundary SABR (2015)**, παρέχοντας τη δυνατότητα μετασχηματισμού για μετατόπιση της καμπύλης επιτοκίων σε θετικό εύρος όπως τα **Shifted Black (2012), Shifted SABR (2014)**. Στον αντίποδα, τα μοντέλα που στηρίζονται στην κανονική κατανομή, όπως **Bachelier (1900)** και **Normal SABR (2002)** εκμεταλλευόμενα την ιδιότητα των αρνητικών τιμών, καθίστανται εφαρμόσιμα.

Όσον αφορά τα δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών που θα εξετάσουμε, δεν συντρέχει λόγος μη εφαρμογής του μοντέλου BS, εφόσον ούτε η τρέχουσα τιμή ούτε η τιμή άσκησης δύνανται να πάρουν αρνητικές τιμές. Ωστόσο, παρατηρώντας τα διαγράμματα, είναι αδιαμφισβήτητο ότι η καμπύλη επιτοκίων έχει υποστεί μεγάλες διακυμάνσεις, εισάγοντας τον κόσμο χαμηλών (συγκλίνουν στο μηδέν) και αρνητικών επιτοκίων στις αγορές, καθιστώντας επιτακτική την ανάγκη διερεύνησης επίπτωσης της κατάργησης σταθερού βραχυπρόθεσμου ακίνδυνου επιτοκίου μέχρι τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης. **Επομένως, η τυχαιότητα της μεταβολής των επιτοκίων στην πάροδο του χρόνου επιτάσσει την επέκταση του βασικού μοντέλου BS, αντικαθιστώντας το σταθερό όρο του επιτοκίου με μαθηματική φόρμουλα κατάλληλου στοχαστικού μοντέλου περιγραφής.** Στην πραγματικότητα, υπό στοχαστικό παράγοντα εμμέσως δημιουργείται άλλο ένα δικαίωμα προαίρεσης επάνω στο επίπεδο του επιτοκίου (*Ho, Stapleton και Subrahmanyam ,1997*).

1.2.2 Ιστορική αναδρομή μοντέλων χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων

Η σχετική βιβλιογραφία αναφορικά με τη μοντελοποίηση του στοχαστικού παράγοντα στη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων είναι απέραντη. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται κάποιες από τις μελέτες οι οποίες έχουν υλοποιηθεί και έχουν χαρακτηριστεί ως εξέχουσας σημασίας στο συγκεκριμένο θέμα, συνεισφέροντας στην ολοένα και πληρέστερη κάλυψη με μετέπειτα προσαρμογή τους στις εκάστοτε συνθήκες. **Γενικότερα, υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στα μοντέλα χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων** :

1. <u>*Μοντέλα Ισορροπίας («Equilibrium models»)*</u>*:* Στηρίζονται στην υπόθεση ότι η σημερινή διάρθρωση επιτοκίων είναι μια εξωγενής παράμετρος. Αντιπροσωπεύουν την ισορροπία μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, ενώ συνήθως απαιτούν συναρτήσεις πιθανοτήτων για μελλοντικά αποτελέσματα καθώς και μια αντιπροσώπευση των προτιμήσεων των επενδυτών, εκφρασμένες με συναρτήσεις χρησιμότητας (ωφέλειας). *Παραδείγματα μοντέλων σε αυτή την κατηγορία αφορούν τα εξής που θα δούμε παρακάτω: Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan-Schwartz (1979), CIR (1985) και Longstaff-Schwartz (1992).* Γενικότερα, θεωρούνται πιο ακαδημαϊκά από τη φύση τους σε σχέση με τη δεύτερη κατηγορία.
2. <u>*Μοντέλα μη βέβαιου κέρδους («Arbitrage-free ή no-arbitrage models»)*</u>*:* Βασίζονται στην υπόθεση ότι η τωρινή χρονική διάρθρωση επιτοκίων αποτελεί ενδογενή παράμετρο. Αντιπροσωπεύουν το σημείο στο οποίο δεν δύναται να δημιουργηθούν κέρδη χωρίς ανάληψη κινδύνου, σχηματίζοντας δύο διαφορετικά χαρτοφυλάκια όπου στη λήξη έχουν την ίδια αξία και ύστερα ανάγοντάς τα στο σήμερα. Εδώ οι πιθανοτικές κατανομές για τις μελλοντικές τιμές μετοχών και το προφίλ κινδύνου δε χρειάζονται, ενώ απαιτούν πλήρεις αγορές. Σε περίπτωση που υπάρχουν κίνδυνοι που δεν μπορούν να αντισταθμιστούν, γίνεται ποσοτικοποίηση του κινδύνου της αγοράς, εισάγοντας κι άλλες μορφές στοχαστικότητας όπως στοχαστική μεταβλητότητα. *Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων αποτελούν τα μοντέλα Ho-Lee (1986) , Black-Karasinski (1991) και Heath-Jarrow-Morton (HJM) (1992).*

Παρακάτω ακολουθεί λίστα των πιο γνωστών στοχαστικών μοντέλων βραχυπρόθεσμων επιτοκίων με τα βασικά χαρακτηριστικά τους προς σύγκριση:

- Ο **Merton (1973)** περιέγραψε την κίνηση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μέσω γραμμικής σχέσης μεταξύ της τρέχουσας τιμής και μιας διαστάσεως κίνηση Brown υπό το μέτρο ουδέτερου κινδύνου, διαμορφώνοντας τη βάση για την ανάπτυξη πολλών μοντέλων που ακολούθησαν. Αποτελεί το πιο απλό μοντέλο επιτρέποντας την αναλυτική λύση, ωστόσο δεν φαίνεται να περιγράφει τις τιμές της αγοράς όσο άλλα μοντέλα. Επίσης, διέπεται από την κανονική ιδιότητα μη αποκλείοντας την εμφάνιση αρνητικών τιμών.

- Ο **Vasicek (1977)** εξελίσσοντας το μοντέλο του Merton, παραθέτει μια γενική μορφή της χρονικής διάρθρωσης των επιτοκίων, όπου το τρέχον επίπεδο επιτοκίων (spot) αποτελεί λύση στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (diffusion process)[12] με δύο άγνωστες παραμέτρους. Υποθέτοντας αποτελεσματική αγορά, κατασκευάζει μια μερική εξίσωση για την τιμολόγηση ομολόγων με τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής και της τάσης επιστροφής του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου προς μια κεντρική τιμή-στόχο (average reversion), ενώ οι αλλαγές σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα είναι συσχετισμένες. Το μοντέλο είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο για τις αποτιμήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης, κυρίως εκείνων που είναι βασισμένα σε ομόλογα (*Jamshidian (1989), Chen (1992)*) . Η γκαουσιανή (gaussian) ιδιότητα (να παίρνει με θετική πιθανότητα αρνητικά επίπεδα επιτοκίων) θεωρούνταν παραδοσιακά μεγάλο μειονέκτημα που διορθώθηκε με μετέπειτα μοντέλα, καθώς δεν πιστεύονταν ποτέ ότι τα επιτόκια θα γίνονταν αρνητικά (*Brigo & Mercurio, 2001*).
- Ο **Dothan (1978)** παρουσιάζει μια φόρμουλα τιμολόγησης για ακίνδυνα ομόλογα υπό την εξάρτηση της θεωρίας προσδοκιών με εφαρμογή σε έντοκα γραμμάτια δημοσίου Η.Π.Α όταν το επιτόκιο ακολουθεί μια γεωμετρική διαδικασία Wiener χωρίς μέσο. Το μοντέλο υποθέτει ότι η μεταβλητότητα είναι εξαρτημένη από το χρόνο και σχετίζεται αναλογικά με το επίπεδο του επιτοκίου.
- Οι **Elliot-Baier (1979)** εξέτασαν στο άρθρο τους εμπειρικά με καθαρά οικονομετρικές μεθόδους στο άρθρο τους έξι διαφορετικά μοντέλα επιτοκίου (Modigliani-Sutch (MS), Modigliani-Shiller (MSH), Feldstein-Eckstein (FE), Feldstein-Chamberlain (FC), Sargent, Echols-Elliott (EE)) αναλύοντας κατά πόσο μπορούν τα συγκεκριμένα να εξηγήσουν και να προβλέψουν επίπεδα επιτοκίων. Συμπεραίνεται ότι τέσσερα από τα έξι μοντέλα μπορούν και εξηγούν τις τρέχουσες τιμές των επιτοκίων με μηνιαία δεδομένα Η.Π.Α ετών 1967-1974, ενώ κανένα μοντέλο δεν καταφέρνει να προβλέψει με ακρίβεια τις τιμές των μελλοντικών επιτοκίων.
- Το ίδιο έτος, οι **Brennan-Schwartz (1979)** εφάρμοσαν μοντέλο χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων ακολουθώντας μια συνεχή προσέγγιση των αποδόσεων «consol bonds»[13] μέσω μιας κανονικής διαδικασίας Wiener (όπως τα μοντέλα Merton και Vasicek). Στόχος της έρευνας ήταν η τιμολόγηση ομολόγων του καναδέζικου δημοσίου των περιόδων 1964-1976 με σκοπό το χαρακτηρισμό τους ως υπερεκτιμημένα ή υποεκτιμημένα. Η εμπειρική μελέτη οδήγησε το μοντέλο σε ικανοποιητικά αποτελέσματα για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

- Οι **Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985)** στη μελέτη τους που αποτελεί σημείο αναφοράς για το είδος, ανέπτυξαν ένα διαχρονικό μοντέλο τιμολόγησης προϊόντων ώστε να μελετήσουν τη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων. Συμπεραίνεται ότι το μοντέλο αυτό είναι κατάλληλο για λεπτομερείς προβλέψεις σχετικά με το πώς μεταβάλλεται η διάρθρωση των επιτοκίων σε μια ενδεχόμενη αλλαγή μιας συγκεκριμένης μεταβλητής, ενώ εξαλείφει την ύπαρξη αρνητικών επιτοκίων. Ωστόσο, τα επίπεδα επιτοκίων στο στοχαστικό μοντέλο CIR δε μπορούν να προκύψουν απευθείας από άλλες μεταβλητές (όπως το Vasicek) αλλά βασίζονται σε υπολογισμούς μέσης τιμής και διακύμανσης, καθιστώντας δύσκολη την εύρεση κλειστής λύσης.
- Οι **Ho-Lee (1986)** ανέπτυξαν το πρώτο διωνυμικό πλέγμα διακριτών περιόδων για την διάρθρωση των επιτοκίων, λαμβάνοντας την αρχική διάρθρωση από τιμές ομολόγων, εξελίσσοντας σε προβλεπτική ικανότητα για τα επιτόκια. Η εφαρμογή του συναντάται σε τιμολόγηση ομολόγων, swaptions και άλλα επιτοκιακά παράγωγα, ενώ λόγω της συμμετρικής κατανομής που επιτρέπει αρνητικές τιμές καθώς και της μη ενσωμάτωσης της ιδιότητας επαναφοράς προς το μέσο, γνώρισε βελτίωση από τους **Black–Derman–Toy (1990)** (λογαριθμικό μοντέλο με την ιδιότητα) καθώς και από τους **Kalotay–Williams–Fabozzi (1993)** (λογαριθμική μορφή Ho-Lee και ειδική περίπτωση του μοντέλου Black–Derman–Toy).
- Οι **Hull-White (1990)** πρότειναν μια επέκταση του μοντέλου Vasicek (Extended Vasicek Model) ενός παράγοντα, ώστε να είναι συμβατό με την τρέχουσα χρονική διάρθρωση επιτοκίων εισάγοντας την εξάρτηση παραμέτρων από το χρόνο. Αποτέλεσαν τους πρώτους που εισήγαγαν φόρμουλα τιμολόγησης για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα υπό στοχαστικά επιτόκια με εφαρμογή σε ομόλογα. Η συνεισφορά τους αποτέλεσε την απαρχή για την πληθώρα διαφορετικών προσεγγίσεων υπολογισμού τιμών δικαιωμάτων προαίρεσης υπό την αβεβαιότητα των επιτοκίων.
- Οι **Black-Karasinski (1991)** εισήγαγαν το λογαριθμικό μαθηματικό μοντέλο για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια όταν οι κινήσεις τους οφείλονται σε ένα παράγοντα τυχαιότητας, ενώ διορθώνει το μοντέλο Hull-White (1990) ως προς την περίπτωση αρνητικών επιτοκίων. Εφαρμόζεται για την τιμολόγηση ομολόγων μηδενικού κουπονιού με τη γενική μορφή να χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση επιτοκιακών παραγώγων όπως Caps, Floors, Ευρωπαϊκά Swaptions, μη παρέχοντας ωστόσο αναλυτική λύση.
- Οι **Longstaff-Schwartz (1992)** με στόχο την μελέτη επάνω στην διάρθρωση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου ανέπτυξαν ένα μοντέλο δύο παραγόντων. Το μοντέλο εφαρμόστηκε για την τιμολόγηση ομολόγων και δικαιωμάτων επί των ομολόγων και βασίστηκε στο μοντέλο CIR (1985). Οι παράγοντες που χρησιμοποιήθηκαν είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο και η

μεταβλητότητα του. Το 2001 οι ίδιοι ανέπτυξαν μια πρακτική μέθοδο Monte Carlo για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικάνικου τύπου .

- Το πλαίσιο **Heath-Jarrow-Morton (HJM) (1992)** χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση μελλοντικών επιπέδων επιτοκίων (forward) που ενσωματώνονται στην τρέχουσα διάρθρωση ώστε να αποφανθούν οι κατάλληλες τιμές για τίτλους των οποίων η αξία είναι υποκείμενη σε μεταβολές του επιτοκίου (όπως ομόλογα ή swaps). Γενικότερα, ένα μοντέλο HJM είναι οποιοδήποτε το οποίο οδηγείται από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων Brown, ενώ χρησιμοποιείται σήμερα ευρέως από αναλυτές τιμολόγησης παραγώγων. Το μεγαλύτερο πρόβλημα με τέτοιου είδους μοντέλα είναι ότι συχνά δεν έχουν την ιδιότητα Markov και τείνουν να έχουν άπειρες διαστάσεις, κάνοντας τον υπολογισμό τους μη εφικτό, ενώ αντίθετα το μεγάλο τους πλεονέκτημα αποτελεί ο αναλυτικός υπολογισμός ολόκληρης της καμπύλης επιτοκίων.

Τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα στοχαστικά μοντέλα μιας μεταβλητής αποτελούν τα μοντέλα Vasicek (1977) και CIR (1985) **τα οποία θα αξιοποιηθούν στην παρούσα διπλωματική καθώς διατίθενται κλειστής μορφής τύποι τιμολόγησης σε δικαιώματα προαίρεσης μετοχών.**

1.2.3 Ανασκόπηση εμπειρικών μελετών

Όσον αφορά τις εμπειρικές μελέτες τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο μεμονωμένες μετοχές ή δείκτες μετοχών υπό στοχαστικά επιτόκια, ποικίλλουν. Ακολουθεί συνοπτικός πίνακας με τα ονόματα συγγραφής, τις χρονολογίες, τη μεθοδολογία και τα συμπεράσματα :

Όνομα-Χρονολογία	Πεδίο έρευνας-Σκοπός	Αριθμητικά Ευρήματα-Συμπέρασμα
Rabinovitch (1989)	Εξέταση του ρόλου της συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου και των αλλαγών του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου που επηρεάζει τις τιμές. Καθιέρωση κλειστής φόρμουλας τιμολόγησης υπό στοχαστικά επιτόκια με προσέγγιση Merton (1973).	Με εφαρμογή σε ευρωπαϊκά δικαιώματα μετοχών και ομολόγων (αγοράς μόνο) βρέθηκαν υψηλότερες τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης (χαμηλότερες) από εκείνες του μοντέλου BS για συντελεστές συσχέτισης χαμηλότερους (υψηλότερους) από μια θετική κριτική τιμή.

Bailey-Stulz (1989)	Εισαγωγή μοντέλου τιμολόγησης δύο παραγόντων (στοχαστικά επιτόκια και μεταβλητότητα), σε καθεστώς αντιπροσωπευτικού επενδυτή με σταθερή σχετική ανοχή κινδύνου. Υποθέτοντας μοντέλο CIR (1985) για τη στοχαστικότητα επιτοκίου, συγκρίνονται τα σφάλματα του απλού μοντέλου BS σε σχέση με τα υπόλοιπα τρία (ανά παράγοντα σταθερό και με δύο πηγές τυχαιότητας) σε δικαιώματα αγοράς δείκτη μετοχών.	Συμπεραίνεται ότι οι μεροληψίες που προκύπτουν είναι συναρτήσει της συσχέτισης δείκτη και επιτοκίων, ενώ διαφέρουν ανάλογα με το πόσο «in the money»[14] είναι το δικαίωμα . Ωστόσο, αναφέρεται ότι οι αποκλίσεις μπορούν να έχουν εναλλακτικές εξηγήσεις, προτρέποντας για εμπειρική εφαρμογή σε δικαιώματα επί συναλλαγματικών ισοτιμιών.
Kaushik-Ng (1993)	Εισάγουν στοχαστική και συστηματική μεταβλητότητα μετοχών (υψηλά συσχετισμένη με την μεταβλητότητα της απόδοσης του συνόλου της αγοράς) καθώς και επιτόκιο.	Με εφαρμογή σε δικαιώματα αγοράς μετοχών και παρέχοντας κλειστής μορφή λύση, προσεγγίζεται η μεροληψία με σημείο αναφοράς το BS, δείχνοντας ότι το μέγεθος αυτής διαφέρει ανάμεσα στις μετοχές με συστηματικό κίνδυνο. Επίσης έδειξαν ότι η επίδραση της σύγκλισης προς το μέσο για τη μεταβλητότητα στις τιμές των δικαιωμάτων εξαρτάται από το αν εκείνη σχετίζεται με το επίπεδο των επιτοκίων.
Rindell (1995)	Ελέγχει το μοντέλο που είχε προταθεί από τους Amin and Jarrow (1992), το οποίο παρέχει κλειστής μορφής φόρμουλα τιμολόγησης υπό τον τύπο Merton, βασισμένο στο πλαίσιο των Heath, Jarrow και Morton (1992).	Ως ιστορικά στοιχεία, αξιοποιούνται μόνο δικαιώματα αγοράς δείκτη μετοχών από τη Σουηδική αγορά με λήξη μέχρι δύο έτη, δείχνοντας ότι το μοντέλο Amin και Jarrow (1992) ξεπερνά σε ακρίβεια το απλό BS μοντέλο.
Bakshi-Cao Chen (1997)	Παρουσίασαν μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης υπό στοχαστικό επιτόκιο και μεταβλητότητα, υποθέτοντας ωστόσο ότι οι αλλαγές του επιπέδου των επιτοκίων είναι ασυσχέτιστες από την μεταβολή της απόδοσης του υποκείμενου τίτλου. Επίσης, έδωσαν έμφαση στη δυναμική αντιστάθμιση κινδύνου με τη στρατηγική ουδετερότητας ως προς το Δέλτα.	Με εμπειρική μελέτη και ανάλυση παλινδρόμησης στα κατάλοιπα με δεδομένα ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης S&P 500, κατέληξαν ότι εισάγοντας ως παραμέτρους την στοχαστική μεταβλητότητα και τα τυχαία άλματα, έχει καλύτερη πρακτική εφαρμογή από το μοντέλο BS, ωστόσο το αποτέλεσμα διαφέρει ανάλογα με το χρόνο προς τη λήξη.
Kim (2002)	Σύγκριση μεταξύ μοντέλων τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών υπό στοχαστικά επιτόκια, βάσει της διαδικασίας Ito βραχυπρόθεσμου επιτοκίου (μη κανονικό μοντέλο) από τους Kim και Kunitomo (1999) με το απλό μοντέλο BS.	Χρησιμοποιώντας δεδομένα από δικαιώματα αγοράς στον δείκτη μετοχών Nikkei 225 της Ιαπωνίας κατέληξε ότι ενσωματώνοντας τον παράγοντα στοχαστικού επιτοκίου στην φόρμουλα τιμολόγησης δεν βελτιώνει την απόδοση του μοντέλου BS.

Liao- Huang (2005)	Παρείχαν κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών υπό BS με στοχαστικό τόσο το επιτόκιο όσο και τον πιστωτικό κίνδυνο (την πιθανότητα πτώχευσης εκδότη πριν την λήξη του δικαιώματος προαίρεσης) υπό μοντέλο Klein και Inglis (1999), λαμβάνοντας υπόψη και το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ μετοχής και ακίνδυνου επιτοκίου.	Τα αριθμητικά αποτελέσματα σε ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς έδειξαν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας του εκδότη οδηγεί σε μείωση της αξίας των δικαιωμάτων, με υπερεκτίμηση εκείνων που η περίπτωση χρεοκοπίας επέρχεται μόνο στη λήξη.
Bernard-Courtois-Quittard-Pinon (2008)	Βασισμένοι στις κλειστές μορφές τιμολόγησης από Rubinstein και Reiner (1991) και υπό το στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων Vasicek (1977) , εξετάζεται η ειδική περίπτωση των δικαιωμάτων που υπόκεινται σε φράγμα (barrier options).	Παρατίθεται κλειστός τύπος τιμολόγησης για συγκεκριμένου είδους εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης με εφαρμογή μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo σε υποκείμενο τίτλο δείκτη μετοχών.
Abudy - Izhakian (2011)	Στην εργασία τους, παρέχουν κλειστής μορφή λύση υπό τα κανονικά στοχαστικά επιτόκια Merton (1973) και Vasicek (1977) αξιοποιώντας πιο πρόσφατες στατιστικά σημαντικές μεθοδολογίες όπως το μέτρο Huang και Wu (2004).	Στο άρθρο παρέχεται εμπειρική προσέγγιση, εξετάζοντας δικαιώματα αγοράς και πώλησης βασισμένα στο δείκτη S&P 500 των Η.Π.Α. Το συμπέρασμα είναι ότι οδηγούμαστε σε βελτίωση των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων υπό στοχαστικά επιτόκια σε σχέση με το BS.
Winarti-Noviyanti-Setyanto (2017)	Παρέθεσαν επέκταση του μοντέλου BS υπό στοχαστικό μοντέλο CIR (1985).	Πραγματοποιήθηκε αναγωγή σε θεωρητική αριθμητική εφαρμογή των Ασιατικών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, παίρνοντας ημερήσια δεδομένα για ένα εξάμηνο από μεμονωμένη μετοχή.

1.3 Περιγραφή Διπλωματικής

Στο παρόν κεφάλαιο εξοικειωθήκαμε με την έννοια των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς επίσης έγινε εκτενής αναφορά στην ιστορική τους πορεία, η οποία χρονολογείται από τον 4ο αιώνα π.Χ. Έπειτα, επισημάναμε τη συνεισφορά της εφαρμογής του μοντέλου Black-Scholes τον 20^{ο} αιώνα ως προς τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης υπό υπόθεση σταθερού επιτοκίου. Στη συνέχεια, αφού εισαγάγαμε την έννοια του στοχαστικού επιτοκίου, επισημαίναμε την ανάγκη ενσωμάτωσης του παράγοντα αυτού στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, ώστε να είναι προσαρμοσμένη στα σημερινά δεδομένα. Τέλος, προχωρήσαμε σε ιστορική αναδρομή των πιο διαδεδομένων μοντέλων περιγραφής χρονικής διάρθρωσης επιτοκίου καθώς και προηγούμενων εμπειρικών μελετών τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης υπό τη συνθήκη στοχαστικότητας, επικεντρώνοντας την αναφορά μας σε εκείνα με υποκείμενο τίτλο μετοχή.

Στο 2ο κεφάλαιο θα εισάγουμε βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών μαθηματικών που αποτελούν εργαλεία για τη μετέπειτα κατανόηση των υπό εφαρμογή μοντέλων. Συγκεκριμένα, θα αναλυθούν οι στοχαστικές διαδικασίες, η κίνηση Brown και το λήμμα του Ito, καταλήγοντας στην εξίσωση Black–Scholes–Merton για την τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών με γνωστό επιτόκιο και ρυθμό μερισματικής απόδοσης.

Στο 3ο κεφάλαιο θα εξηγηθεί η στοχαστική διαδικασία βραχυπρόθεσμου επιτοκίου η οποία θα εισαχθεί στο μοντέλο τιμολόγησης BS, καταλήγοντας στις γενικεύσεις κλειστού τύπου από τους Abudy και Izhakian (2011) για τον υπολογισμό δίκαιης τιμής δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης υπό την προσέγγιση Vasicek (1977) (που ενσωματώνει την υποπερίπτωση Merton (1973)) καθώς και στην κλειστή μορφή για την παρούσα αξία δικαιώματος αγοράς από τον Kim (2002) υπό χρονική διάρθρωση επιτοκίων κατά Cox-Ingersoll-Ross (1985).

Στο 4ο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η περιγραφή των εμπειρικών δεδομένων καθώς και η μεθοδολογία για την εφαρμογή των κλειστών εξισώσεων αποτίμησης υπό σταθερό και στοχαστικό επιτόκιο εφόσον προσδιοριστούν και εκτιμηθούν οι άγνωστες παράμετροι μέσω εκτέλεσης επαναληπτικού αλγορίθμου Levenberg-Marquardt στο υπολογιστικό πακέτο Matlab. Ο υποκείμενος τίτλος αφορά τη γερμανική μετοχή «Deutsche Telekom», η οποία ανήκει στο γερμανικό δείκτη DAX, με την εμπειρική μελέτη να καλύπτει δύο χρονικές περιόδους με διάκριση ως προς το πρόσημο επιτοκίων. Στα δύο δείγματα αυτά θα πραγματοποιηθεί εκτίμηση τόσο εντός δείγματος παρατήρησης («in sample») όσο και εκτός δείγματος παρατήρησης (προβλεπτική ικανότητα, «out of sample») στο σύνολο καθώς και με διάκριση χρόνου μέχρι τη λήξη.

Στο 5ο κεφάλαιο βάσει ημερησίων αθροισμάτων τετραγωνικών σφαλμάτων από τις αγοραίες τιμές, θα παρατεθεί σύγκριση της προσαρμογής των μοντέλων στα δεδομένα καθώς και στην προβλεπτική τους ικανότητα, χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό μέσο όρο των εκτιμώμενων παραμέτρων. Βάσει των ανωτέρω θα εξαχθεί συμπέρασμα για το αν η επέκταση του απλού BS με εισαγωγή του στοχαστικού παράγοντα στο επιτόκιο βελτιώνει την ακρίβεια ως προς την προσέγγιση των τιμών της αγοράς (στο σύνολο και ανά περίπτωση ληκτότητας) στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς. Αναπόσπαστο κομμάτι για την ερμηνεία αποτελούν τα παραρτήματα που έπονται, τα οποία συνίστανται από τους συνταχθέντες κώδικες της Matlab και αφορούν τα εξαχθέντα αποτελέσματα με διαγραμματική απεικόνιση και σε μορφή πινάκων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

Πριν προχωρήσουμε στην επιλογή του στοχαστικού μοντέλου επιτοκίων που θα ενσωματωθεί στο μοντέλο BS για τον υπολογισμό τιμής δικαιωμάτων προαίρεσης, είναι απαραίτητο να αναλυθούν οι βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών μαθηματικών, κατανοώντας το περιβάλλον στο οποίο υπάγεται ο υποκείμενος τίτλος. Το παρόν κεφάλαιο καταλήγει στη εύρεση κατανομής που ακολουθεί η τιμή της μετοχής καθώς και μετέπειτα στην κλειστή εξίσωση τιμολόγησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης μετοχών κάτω από την υπόθεση γνωστού ρυθμού μερισματικής απόδοσης και επιτοκίου.

2.1 Εισαγωγή στις βασικές έννοιες χρηματοοικονομικών μαθηματικών

2.1.1 Διαδικασίες Markov,Wiener και κίνηση Brown

Οποιαδήποτε μεταβλητή της οποίας η αξία αλλάζει ανα το χρόνο με τυχαίο τρόπο ονομάζεται στοχαστική διαδικασία (stochastic process). Οι στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν ένα ερευνητικό πεδίο ιδιαίτερης σημασίας για την ανάπτυξη μοντέλων τιμολόγησης χρηματοοικονομικών παραγώγων δεδομένου πως η μοντελοποίηση των τιμών των υποκείμενων τίτλων πραγματοποιείται σε περιβάλλον που διέπεται από αβεβαιότητα.

Ορίζουμε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανοτήτων με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή t , τον χρόνο $\{X(t), t \epsilon T\}$. Το σύνολο T των τιμών της παραμέτρου αποτελεί το σύνολο δεικτών (index set) της στοχαστικής διαδικασίας, με βάση το οποίο οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε:

- **Διαδικασίες διακριτού χρόνου** (discrete time) όταν το σύνολο T είναι αριθμήσιμο (η τιμή της μεταβλητής μπορεί να αλλάξει σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές), οι οποίες με τη σειρά τους διακρίνονται με βάσει το σύνολο δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X(t) σε **διακριτής ή συνεχούς μεταβλητής**.
- **Διαδικασίες συνεχούς χρόνου** (continuous time) όταν το σύνολο T είναι διάστημα του R (η τιμή της μεταβλητής μπορεί να αλλάξει οποιαδήποτε στιγμή) , οι οποίες με τη σειρά τους

διακρίνονται με βάσει το σύνολο δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X(t) σε **διακριτής ή συνεχούς μεταβλητής.**

Έστω $\{S(t), t \geq 0\}$ μία στοχαστική διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου. Η S(t) είναι μία τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή στο χρόνο t και η S(t,ω) είναι μία απεικόνιση από ένα χώρο πιθανότητας (Ω,A,P) στο R που ορίζεται από την σχέση: $S(t,\omega)=\{H$ $τιμή\ ενός\ περιουσιακού\ στοιχείου\ στο\ χρόνο\ t\ όταν\ πραγματοποιηθεί\ το\ στοιχειώδες\ ενδεχόμενο$ $\omega \in \Omega\}$. Σε αυτή την περίπτωση η $\{S(t), t \geq 0\}$ καλείται στοχαστική διαδικασία τιμών.

Ενώ στην πραγματικότητα οι τιμές περιουσιακών στοιχείων παίρνουν μόνο διακριτές τιμές σε διακριτό χρόνο διαπραγμάτευσης, για την μελέτη εξέλιξης των τιμών τους γίνεται χρήση συνεχών μοντέλων συνεχών τιμών που αν και παρουσιάζουν απόκλιση από την υπόθεση, είναι εύχρηστα και πρακτικά, οδηγώντας σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Η **διαδικασία Markov** αποτελεί είδος στοχαστικής συνεχούς χρόνου και μεταβλητής όπου μόνο η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής είναι σχετική για την πρόβλεψη του μέλλοντος, καθώς η ιστορικότητα έχει ήδη ενσωματωθεί στο παρόν. Η ιδιότητα Markov υπονοεί ότι η κατανομή της τιμής σε μια συγκεκριμένη μελλοντική τιμή είναι ανεξάρτητη από την ιστορικότητα, επομένως συνάδει με την αποτελεσματικότητα αγοράς ασθενούς τύπου (weak form market efficiency).
Οι τιμές των μετοχών συνήθως από υπόθεση ακολουθούν διαδικασία Markov, δηλαδή τα ιστορικά στοιχεία τιμών μετοχών δε δύνανται να χρησιμοποιηθούν από τους επενδυτές για να προβλέψουν μελλοντικές αποδόσεις και να επιτύχουν κέρδη (έλλειψη μνήμης). Οι μελλοντικές προβλέψεις είναι αβέβαιες επομένως εκφράζονται σε όρους συναρτήσεων κατανομών πιθανοτήτων, ενώ η διακύμανση των μεταβλητών που ακολουθούν διαδικασία Markov είναι ανάλογη του χρόνου.

Η **διαδικασία Wiener** αποτελεί συγκεκριμένου τύπου στοχαστική διαδικασία με την ιδιότητα Markov, η οποία έχει:

- Μηδενική μεταβολή μέσης τιμής, δηλαδή $E(\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t})=0$.
- Ρυθμό διακύμανσης ίσο με τη μονάδα, δηλαδή $Var(\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t})=1$.

Είναι ευρέως γνωστή από τον τομέα της φυσικής για την περιγραφή της κίνησης σωματιδίου που είναι υποκείμενο σε μεγάλο αριθμό από μικρές μοριακές αλλαγές, γνωστή και ως κίνηση Brown. Η κίνηση πήρε το όνομά της από τον Άγγλο βοτανολόγο R.Brown, ο οποίος περιέγραψε πρώτος την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα υγρό ή αέριο ενώ ο Αμερικανός μαθηματικός R.Wiener μελέτησε σε βάθος την διαδικασία αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητες της.

Συγκεκριμένα, μια μεταβλητή z λέγεται ότι ακολουθεί διαδικασία Wiener αν έχει τις δύο κάτωθι ιδιότητες:

i. Η μεταβολή Δz κατά μικρό χρονικό διάστημα Δt ισοδυναμεί με $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, όπου $\varepsilon \sim N(0,1)$.

ii. Οι τιμές του Δz σε δύο διαφορετικές μικρές μεταβολές του χρόνου Δt είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, υπονοώντας την ιδιότητα Markov. Επομένως, συνεπάγεται ότι $\Delta z \sim N(0,\Delta t)$.

Γενικεύοντας για μεγάλο χρονικό διάστημα T που συνιστάται από N περιόδους μικρών χρονικών μεταβολών Δt (T=N*Δt) , έχουμε $z(T)-z(0)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sqrt{\Delta_t}$, ενώ ο όρος $\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varepsilon_i} \sim \boldsymbol{N(0,N)}$, ως άθροισμα των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ε_i i=1,2…….,N.
Συνεχίζοντας, προκύπτει άμεσα ότι $\boldsymbol{z(T)-z(0)} \sim \boldsymbol{N(0,\underbrace{N*\Delta_t}_{T})}$,δηλαδή η μεταβολή του z ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση $\sqrt{T}$.

Η βασική διαδικασία Wiener που έχει αναπτυχθεί έως τώρα έχει ρυθμό τάσης *(drift rate)* μηδέν και ρυθμό διακύμανσης *(variance rate*) ίσο με τη μονάδα. Αυτό ερμηνεύεται ως εξής: η αναμενόμενη αξία της z σε κάποια τυχαία μελλοντική στιγμή θα ισούται με την τρέχουσα, ενώ η διακύμανση της αλλαγής στο z θα ισούται με το χρονικό διάστημα μήκους T. Μια τέτοια διαδικασία καλείται αλλιώς και τυποποιημένη κίνηση Brown (Standard Brownian Motion)[15].

Ως **γενικευμένη διαδικασία Wiener** για μία μεταβλητή x, με αναμενόμενο ρυθμό τάσης a και ρυθμό διακύμανσης b^2 ανά μονάδα χρόνου, ορίζεται η εξίσωση (για Δt→0)

$$dx = \overset{\text{ντετερμεντιστικός όρος}}{adt} + \overset{\text{τυχαίος όρος}}{bdz}$$

, όπου *dz μία διαδικασία Wiener και a, b είναι οποιεσδήποτε σταθερές.*

Η μεταβολή της μεταβλητής x εκφράζεται ως $\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$,ενώ με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε πριν, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι διακριτοποιώντας στο [0,T] προκύπτει $\Delta x \sim N(a\mathrm{T}, b^2\mathrm{T})$. Συνεπώς, η μεταβολή της μεταβλητής x είναι κανονικά κατανεμημένη με $E(x(T)-x(0)) = a\mathrm{T}$, $Var(x(T)-x(0)) = b^2\mathrm{T}$ και $\sigma(x(T)-x(0)) = b\sqrt{\mathrm{T}}$.

Το μοντέλο για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής αποτελεί παράδειγμα της γενικευμένης διαδικασίας Wiener, όπου σε συνεχή χρόνο αναπαρίσταται από τη σχέση:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad \textbf{(1)}$$

όπου S η τιμή της μετοχής, μ ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης της μετοχής και σ η μεταβλητότητα (volatility) της μετοχής. Η μερική διαφορική εξίσωση αυτή είναι ευρέως γνωστή κι ως «γεωμετρική κίνηση Brown» (Geometric Brownian Motion).

2.1.2 Διαδικασίες Ito και Εφαρμογή Λήμματος Ito: Λογαριθμική Ιδιότητα

Όταν σε μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, οι παράμετροι α και b είναι συναρτήσεις της τιμής της μεταβλητής (υποκείμενου τίτλου) x και του χρόνου t, καλείται διαδικασία Ito και παίρνει την εξής μορφή: $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$. Χαρακτηριστικό της διαδικασίας Ito αποτελεί το γεγονός ότι τόσο ο ρυθμός τάσης όσο κι ο ρυθμός διακύμανσης αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Θεωρώντας μικρό χρονικό διάστημα [t,t+Δt], η μεταβλητή παρουσιάζει αλλαγή της τάξεως Δx σύμφωνα με την εξίσωση $\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$.

Σημειώνεται ότι η διαδικασία αυτή είναι Markov, καθώς η αλλαγή του x στο χρόνο t εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα αξία, κι όχι από ιστορική τιμή .Επίσης, η σχέση εσωκλείει μία μικρή προσέγγιση καθώς για το μικρό χρονικό διάστημα που θεωρούμε εικάζεται ότι ο ρυθμός τάσης και ο ρυθμός διακύμανσης παραμένουν σταθεροί, ενώ στην πραγματικότητα αλλάζουν συνεχώς.

Ο μαθηματικός **K. Ito (1951)** κατοχύρωσε ένα σημαντικό πόρισμα για μεταβλητές που είναι συναρτήσει του χρόνου, γεγονός που κατέστη εξαιρετικά χρήσιμο για τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης των οποίων η αξία εξαρτάται από τον υποκείμενο τίτλο καθώς και το χρόνο μέχρι τη λήξη .Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το λήμμα του Ito, εάν η τιμή μιας μεταβλητής χ ακολουθεί μια διαδικασία Ito και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση G(x,t) ακολουθεί την διαδικασία $dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$.

Επομένως, η G ακολουθεί διαδικασία Ito με ρυθμό τάσης $(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)$ και ρυθμό διακύμανσης $(\frac{\partial G}{\partial x}b)^2$.

Εφαρμόζοντας το λήμμα αυτό για την κίνηση της μετοχής που είδαμε προηγουμένως (χ=S,a=μS, b=σS), προκύπτει ότι $dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$.

Ορίζοντας G=lnS, έχουμε: $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι:

$$dG = (\frac{1}{\cancel{S}}\mu \cancel{S} + 0 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{\cancel{S}^2}\sigma^2 \cancel{S}^2)dt + \frac{1}{\cancel{S}}\sigma \cancel{S} dz = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz \ .$$

Εφόσον και το μ και το σ είναι σταθερά αυτή η εξίσωση μας υποδεικνύει πως η συνάρτηση *G=lnS ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener με ρυθμό τάσης* $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ *και ρυθμό διακύμανσης ίσο με* σ^2. Λόγω των ιδιοτήτων της, η αλλαγή στο λογάριθμο της μετοχής (που δεν αποδίδει μέρισμα) για το χρονικό διάστημα [0,T] θα ακολουθεί κανονική κατανομή και πιο συγκεκριμένα

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T), \sigma^2 T) \Leftrightarrow \ln S_T \sim N(\ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T) \ .$$

Καταλήγοντας, εφόσον ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής στο χρόνο T κατανέμεται κανονικά , η τιμή ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή[16] *με μέση τιμή* $E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$ *και διακύμανση* $Var(S_T) = S_0^{\ 2} e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$.

2.2 Το μαθηματικό μοντέλο Black-Scholes-Merton

2.2.1 Υποθέσεις μοντέλου Black-Scholes-Merton

Η αρχική σύλληψη της μερικής διαφορικής εξίσωσης έγινε από τους οικονομολόγους Myron Scholes και Fischer Black ενώ η μετέπειτα συμβολή από τον Robert Merton χρησιμοποιώντας στοχαστικό λογισμό, βοήθησε στο σχηματισμό της τελικής φόρμουλας γνωστή ως Black-Scholes-Merton. Το μοντέλο αποτελεί τεράστια επιρροή στον τρόπο κατά τον οποίο οι επενδυτές τιμολογούν και αντισταθμίζουν τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, καθιστώντας το κύριο σημείο αναφοράς. Το 1997 η σημασία του μοντέλου επικυρώθηκε με την απονομή βραβείου Nobel στους Merton και Scholes, ενώ ο Black είχε ήδη απεβιώσει το 1995.

Ενώ ήδη προηγούμενοι αναλυτές βασισμένοι σε παρόμοιες υποθέσεις είχαν καταφέρει να υπολογίσουν το αναμενόμενο κέρδος/ζημία για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης, αντιμετώπισαν δυσκολία στο να προσδιορίσουν το σωστό συντελεστή προεξόφλησης. Η βασική ιδέα των Black και Scholes στηρίζεται στο γεγονός ότι χρησιμοποίησαν το κεφαλαιακό υπόδειγμα αγοράς (Capital Asset Pricing Model) να αποφανθούν τη σχέση μεταξύ της απαιτούμενης απόδοσης αγοράς επάνω στο δικαίωμα και της απαιτούμενης απόδοσης μετοχής.

Η προσέγγιση του Merton διέφερε από των Black και Scholes και αφορούσε τη σύσταση ακίνδυνου χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από ένα δικαίωμα προαίρεσης και τον υποκείμενο τίτλο (μετοχή), στηρίζοντας ότι η απόδοση σε μικρό συνεχές χρονικό διάστημα θα πρέπει να ισούται με την απόδοση ακίνδυνου τίτλου. Η προσέγγιση του Merton είναι πιο γενικευμένη και δε βασίζεται στις υποθέσεις CAPM, λαμβάνοντας υπόψη το μέρισμα του αποδιδόμενου τίτλου και κατά συνέπεια τον πιστωτικό κίνδυνο του εκδότη, τιμολογώντας χρέος.

Το υπόδειγμα χρησιμοποιείται ως ορόσημο σε εμπειρικές μελέτες στις αποτιμήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης με πληθώρα παραλλαγών στις περιπτώσεις αρνητικών τιμών, μη σταθερών επιτοκίων και στοχαστικής μεταβλητότητας. Οι υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται το μοντέλο, έχουν ως κάτωθι:

1) Η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη Γεωμετρική κίνηση Brown, με σταθερές παραμέτρους ανά μονάδα χρόνου μ = $\frac{1}{\Delta t}E\left[\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}\right]$ και σ²= $\frac{1}{\Delta t}Var\left[\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}\right]$.

2) Δεν αποδίδονται μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του παραγώγου.

3) Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

4) Επιτρέπεται το short selling[17] των μετοχών με πλήρη χρήση των εσόδων.

5) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών ούτε φόροι. Τα χρεόγραφα μπορούν να υποδιαιρεθούν.

6) Η διαπραγμάτευση των τίτλων λαμβάνει χώρα σε συνεχές χρόνο.

7) Το ακίνδυνο επιτόκιο r είναι δεδομένο και το ίδιο για όλες τις λήξεις.

Όπως δείξαμε ήδη παραπάνω, ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής σε μελλοντικό χρόνο T ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\ln S_0 + (\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T$ και διακύμανση $\sigma^2 T$,όπου:

- *S_0:* Η τρέχουσα τιμή της μετοχής,
- *μ:* Η αναμενόμενη ετήσια απόδοση μετοχής και
- *σ:* Η μεταβλητότητα (volatility) της μετοχής ανά έτος.

Αν θεωρήσουμε ότι η τιμή της μετοχής προκύπτει από συνεχή ανατοκισμό ενός ποσοστού x στο διάστημα [0,T], δηλαδή $S_T = S_0 e^{xT} \Longrightarrow x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}$, προκύπτει ότι $x \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), \frac{\sigma^2}{T})$. Επομένως, ο ανατοκιζόμενος σε συνεχή χρόνο ρυθμός απόδοσης ανά έτος της μετοχής, κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ και τυπική απόκλιση $\frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{T}}}$. Προκύπτουν δύο παρατηρήσεις από το συμπέρασμα αυτό:

✓ Ο όρος μ δεν πρέπει να συγχέεται με τον όρο x: η αναμενόμενη απόδοση μ αφορά εκείνη που απαιτείται από τους επενδυτές και είναι θετικά συσχετισμένη τόσο με τον κίνδυνο της μετοχής όσο και με το ύψος των επιτοκίων. Ως απόδειξη του ισχυρισμού, γνωρίζοντας ότι $E(S_T) = S_0 e^{\mu \mathrm{T}} \Leftrightarrow \ln[E(S_T)] = \mu\mathrm{T} + \ln S_0$ καθώς και ότι δε μπορούμε να ορίσουμε $\ln[E(S_T)] = E[\ln(S_T)]$ ώστε $E[\ln\frac{S_T}{S_0}] = \mu\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{E}(x) = \mu$ (ο λογάριθμος δεν είναι γραμμική συνάρτηση), προκύπτει το ζητούμενο.

✓ Η μεταβλητότητα (volatility) σ της μετοχής αποτελεί μέτρο της αβεβαιότητας περί μελλοντικών αποδόσεων, η οποία εκφράζεται ως η τυπική απόκλιση της απόδοσης σε ένα χρόνο, όταν εκείνη υπολογίζεται με συνεχή ανατοκισμό. Εμπειρικά, για την εκτίμηση του μέτρου σε δεδομένα χρονικά διαστήματα, ορίζοντας:

n: αριθμός παρατηρήσεων,

S_i: Η τιμή της μετοχής στο τέλος του i διαστήματος (μέρα, εβδομάδα, μήνας),

i=1, 2 ,….n ,

τ: χρονικό διάστημα σε έτη και

$$u_i = \ln\frac{S_{i+1}}{S_i} ,$$

υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση του πηλίκου u_i, i=1,2…..,n δηλαδή:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2} .$$

Έπειτα, εφόσον η τυπική απόκλιση του λογαρίθμου της μετοχής ισούται με $\sigma\sqrt{\tau}$, προκύπτει ότι $\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$,όπου τ στην ιστορική εκτίμηση ορίζεται σε διαπραγματεύσιμο διάστημα (trading days). Επομένως, η μεταβλητότητα ανα έτος δίνεται από το εξής γινόμενο:

Μεταβλητότητα ανά ημέρα* $\sqrt{\text{Α}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \text{ διαπραγματεύσιμων ημερών ανα έτος}}$.

2.2.2 Διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton

Θεωρούμε τιμή παραγώγου f σε δεδομένη στιγμή t, που είναι συναρτήσει της τιμής υποκείμενου τίτλου S με εναπομείναντα χρόνο μέχρι τη λήξη T-t. Σύμφωνα με την πρώτη υπόθεση του μοντέλου και με εφαρμογή Λήμματος του Ito στην εξίσωση (1), οδηγούμαστε στο εξής:

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \ .$$

Διακριτοποιώντας στο μικρό χρονικό διάστημα [t,t+Δt] η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z, \quad \Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \ . \tag{2}$$

Η ιδέα περιλαμβάνει τη σύσταση χαρτοφυλακίου με θέση αγοράς (long) $\frac{\partial f}{\partial S}$ μετοχών και θέση πώλησης (short) σε ένα συμβόλαιο παραγώγου προϊόντος, με στόχο την εξάλειψη του τυχαίου όρου που προκύπτει από τη διαδικασία Wiener. Συμβολίζοντας με Π την αξία του χαρτοφυλακίου μας στο χρόνο 0 , ισχύει ότι:

$$\Pi = \frac{\partial f}{\partial S} S - f \ . \tag{3}$$

Επομένως, η αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου στο μικρό χρονικό διάστημα Δt συμβολίζεται ως:

$$\Delta\Pi = \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S - \Delta f \ . \tag{4}$$

Με διαδοχική αντικατάσταση των εξισώσεων (1) και (2) στην (4) παίρνουμε:

$$\Delta\Pi = \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S\Delta t + \sigma S \Delta z) - (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S \Delta t + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z) \Rightarrow$$

$$\Delta\Pi = -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t \quad . \qquad \textbf{(5)}$$

Το χαρτοφυλάκιο αυτό στο οποίο πλέον δεν εμπλέκεται τυχαιότητα, θα πρέπει να αποδίδει ακίνδυνο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο, καθώς σε κάθε άλλη περίπτωση θα υπήρχαν δυνατότητες για arbitrage (δανεισμός και αγορά χαρτοφυλακίου ή πώληση χαρτοφυλακίου με αγορά ακίνδυνου χρεογράφου). Επομένως η μεταβολή του χαρτοφυλακίου ως προς το μικρό χρονικό διάστημα [t,t+Δt] συμβολίζεται :

$$\frac{\frac{\Delta\Pi}{\Pi}}{\Delta t} = r \Leftrightarrow \Delta\Pi = \Pi r \Delta t \, . \qquad \textbf{(6)}$$

Με απλή αντικατάσταση των εξισώσεων (3) και (5) στην (6) παίρνουμε:

$$-(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2) = r(\frac{\partial f}{\partial S}S - f) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \, . \qquad \textbf{(7)}$$

Η εξίσωση (7) είναι μια γραμμική, δευτέρου βαθμού παραβολική εξίσωση γνωστή ως Black–Scholes–Merton μερική διαφορική εξίσωση (Partial Differential Equation) και έχει άπειρες λύσεις, ανάλογα με τις οριακές συνθήκες (boundary conditions) που θα τεθούν, αντιστοιχίζοντας όλα τα διαφορετικά παράγωγα που μπορούν να οριστούν με υποκείμενο τίτλο οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό στοιχείο S. Η εξίσωση δεν περιλαμβάνει μεταβλητές που επηρεάζονται από τις προτιμήσεις των επενδυτών, επομένως γίνεται η υπόθεση ότι όλοι επενδυτές είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο χωρίς να επηρεάζεται το αποτέλεσμα. Στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, η αναμενόμενη απόδοση των επενδυτικών τίτλων ισούται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r (risk -free rate) .

Συμπεραίνοντας, θεωρώντας ένα παράγωγο που παρέχει πληρωμή σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, η αποτίμησή του προκύπτει από τα εξής βήματα:

- Θέτουμε όπου μ=r ,γεγονός που οδηγεί στο $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$.
- Υπολογίζουμε την αναμενόμενη πληρωμή από τη σύναψη παραγώγου (στη λήξη αν αφορά Ευρωπαϊκό δικαίωμα).
- Προεξοφλούμε στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

2.2.3 Τιμολόγηση δικαιωμάτων μετοχών υπό Black-Scholes

Οι Black και Scholes απέδειξαν ότι για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα υπάρχει μόνο μία εξίσωση που να ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (7) υποκείμενη στην οριακή συνθήκη τις δικαιώματος αγοράς (με αξία στη λήξη $\max(S_T - K)_+$) και πώλησης (με αξία στη λήξη $\max(K - S_T)_+$). Οι κλειστές μορφές που προκύπτουν για τις αποτιμήσεις δικαιωμάτων προαίρεσης που θα εξελίξουμε περαιτέρω παρακάτω, είναι οι εξής:

<u>Call option premium</u>: $$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(\mathrm{T}-t)} N(d_2)\ . \tag{8}$$

<u>Put option premium:</u> $$p = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)\ . \tag{9}$$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα, η οποία είναι γνωστή ως put-call parity:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t\ . \tag{10}$$

Όπου:

- *K* η τιμή άσκησης του δικαιώματος,
- *S* η τιμή του υποκείμενου τίτλου,
- $N(\bullet)$ η αθροιστική συνάρτηση κανονικής τυποποιημένης κατανομής ,
- *r* το (γνωστό) συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου,
- *σ* η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου,
- *T-t* ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος και
- $d_1 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}}$, $d_2 = \dfrac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}$.

Το $N(d_2)$ είναι ταυτόσημο με την πιθανότητα εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης υπό το περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου (In the money option), ενώ το $N(d_1)$ εκφράζει την ποσότητα μετοχών που πρέπει να διακραττόνται προκειμένου να αντισταθμιστεί η θέση στο παράγωγο (Greek Letter «Delta»[18]).

Σημειώνεται ότι η μεταβλητότητα σ όπως έχουμε ήδη αναφέρει μπορεί είτε να εκτιμηθεί από ιστορικά δεδομένα (*Historical Volatility*) ή να παρατηρηθεί απ' ευθείας από την αγορά με βάση τα ασφάλιστρα των δικαιωμάτων που διαπραγματεύονται (λύνοντας αντίστροφα την παραπάνω εξίσωση), γνωστή με τον όρο «*Implied Volatility*». Οι τεκμαρτές μεταβλητότητες αποτελούν «πρόβλεψη» για το μέλλον εν αντιθέσει με τις ιστορικές που προσομοιώνουν το παρελθόν, ενώ διαπραγματεύονται κι ως προϊόν όντας λιγότερο μεταβλητές από την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Τα δικαιώματα προαίρεσης σε μετοχές που διαπραγματεύονται στα χρηματιστήρια ενέχουν διακανονισμό με μετρητά, με τον κάτοχο του δικαιώματος να λαμβάνει 100 φορές το ποσό διαφοράς της μετοχής που παρακολουθεί το δικαίωμα και της τιμής άσκησης. *Στην παρούσα παράγραφο θα εισάγουμε την τιμολόγηση με συνεχή ντετερμεντιστικό ρυθμό μερισματικής απόδοσης σε μεμονωμένη μετοχή που ανήκει σε δείκτη.*

Σημειώνεται ότι η διανομή μερίσματος προκαλεί μείωση της τιμής της μετοχής την επόμενη μέρα, ενώ λαμβάνοντας υπόψη τον παράγοντα αυτό, μπορεί να δειχθεί με την αποτίμηση σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου ότι η διαδικασία που ακολουθείται από την τιμή της μετοχής είναι πλέον $dS = (r-q)Sdt + \sigma Sdz$. *Επομένως, μειώνεται ο ρυθμός ανάπτυξης της μετοχής κατά το ποσοστό q, που συμβολίζει τον γνωστό μέσο ετησιοποιημένο ρυθμό μερίσματος (dividend yield).* ***Κατά την αποτίμηση ευρωπαϊκού δικαιώματος με λήξη T, προεξοφλώντας σε παρόντα χρόνο την (γνωστή) μερισματική απόδοση μειώνοντας την τρέχουσα τιμή της μετοχής που διανείμει μέρισμα σε*** $S_t e^{-q(T-t)}$***, αποκτάται συμπεριφορά μετοχής που δε διανείμει μέρισμα, επομένως έγκειται στις βασικές υποθέσεις του μοντέλου.***

Αντικαθιστώντας στις φόρμουλες τιμολόγησης (8) και (9), προκύπτει ότι η δίκαιη τιμή δικαιώματος αγοράς σε υποκείμενο τίτλο που αποδίδει μέρισμα είναι:

$$c = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(\mathrm{T}-t)} N(d_2) \, , \qquad \textbf{(11)}$$

με την αντίστοιχη η δίκαιη τιμή δικαιώματος πώλησης να αποδίδεται από τον τύπο:

$$p = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1) \, . \qquad \textbf{(12)}$$

Τέλος, βάσει εξίσωσης (10) η ισότητα γίνεται :

$$c + K e^{-r(T-t)} = p + S_t e^{-q(T-t)} \, ,$$

όπου:

❖ $$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2} - q)(T-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}} \, , \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2} - q)(T-t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-t} \, .$$

Στην περίπτωση που στην αγορά είναι διαθέσιμα μόνο δικαιώματα αγοράς αμερικανικού τύπου (American Style options), για τίτλους που δεν αποδίδουν μέρισμα έχει αποδειχθεί ότι δεν είναι ποτέ βέλτιστο να εξασκηθούν πριν τη λήξη, επομένως ανάγονται σε ευρωπαϊκού τύπου. Ο ισχυρισμός μπορεί εύκολα να δειχθεί, θεωρώντας τις εξής δύο επενδυτικές στρατηγικές :

<u>Χαρτοφυλάκιο 1</u>: Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και μετρητά αξίας Ke^{-rT} .
<u>Χαρτοφυλάκιο 2</u>: Ένα μερίδιο μετοχής.

Στο χρόνο λήξης T, για το χαρτοφυλάκιο 1, ισχύουν τα εξής:

- Αν $S_T > K$, το δικαίωμα εξασκείται και το χαρτοφυλάκιο 1 αξίζει S_T .
- Αν $S_T < K$, το δικαίωμα λήγει και το χαρτοφυλάκιο 1 αξίζει K .

Επομένως, στη λήξη , η αξία του χαρτοφυλακίου 1 είναι $\max(S_T, K)$,ενώ του χαρτοφυλακίου 2 αντίστοιχα S_T . Εφόσον το χαρτοφυλάκιο 1 αξίζει τουλάχιστον όσο το χαρτοφυλάκιο 2 στη λήξη ενώ ως ευρωπαϊκό δικαίωμα δεν μπορεί να εξασκηθεί πριν τη λήξη, θα πρέπει με αναγωγή στο σήμερα επίσης να ισχύει: $c + Ke^{-rT} \geq S_0 \Leftrightarrow c \geq S_0 - Ke^{-rT}$ και με διόρθωση ώστε πάντα η αξία να είναι θετική, προκύπτει ότι το κάτω φράγμα για ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς είναι $c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$.

Για το αμερικάνικο δικαίωμα προαίρεσης αγοράς, που ενσωματώνει εκτός από την εσωτερική αξία (intristic value) και τη χρονική αξία (time value), ισχύει πάντα $C \geq c = S_0 - Ke^{-rT}$, με την άμεση εξάσκηση να αποδίδει $C = S_0 - K$. Επειδή η εσωτερική αξία είναι μικρότερη του κάτω ορίου του δικαιώματος <u>(μόνο σε περίπτωση θετικών επιτοκίων)</u>, πάντα ο κάτοχος θα προτιμάει να το πουλήσει από το να το εξασκήσει, επομένως αποδεικνύεται ότι σε τέτοιους τίτλους δεν είναι βέλτιστη η εξάσκηση και η τιμή ισοδυναμεί με εκείνη του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

Όσον αφορά τα δικαιώματα πώλησης, ισχύει ότι εκείνα μπορούν να εξασκηθούν ανά πάσα στιγμή αν $K \gg S$ (deep ITM) (αναλόγως το επίπεδο των επιτοκίων), με το εύρος της τιμής να δίνεται συναρτήσει του αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς ως εξής: $S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$.
Σημειώνεται ότι μόνο στην περίπτωση που το επίπεδο των επιτοκίων είναι μηδενικό (r=0) η αξία των αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης εξισώνεται με εκείνη του ευρωπαϊκού τύπου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕΤΟΧΩΝ ΥΠΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε την διαδικασία που ακολουθούν τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια προς αξιοποίηση καθώς και παρουσιάζουμε την τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με υποκείμενο τίτλο μετοχές υπό την κατάργηση της υπόθεσης (7) του BS. Ειδικότερα, δείχνουμε τη γενίκευση που επιφέρει η κατάργηση της υπόθεσης περί σταθερού βραχυπρόθεσμου ακίνδυνου επιτοκίου στην τιμολόγηση, περιλαμβάνοντας σε αυτή κανονικό στοχαστικό μοντέλο χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων υπό Vasicek (1977) καθώς και τη βελτίωσή του ως προς την γκαουσιανή ιδιότητα, μοντέλο CIR (1985).

3.1 Γενικευμένη μορφή βραχυπρόθεσμων στοχαστικών επιτοκίων

Στην εισαγωγή παραθέσαμε μια ονομαστική αναφορά στα μοντέλα ενός τυχαίου παράγοντα (βραχυπρόθεσμο επιτόκιο) που περιγράφουν την πλήρη χρονική διάρθρωση των επιτοκίων, αποτελώντας αντικείμενο εμπειρικών μελετών. Η πλειοψηφία των μοντέλων που έχουν χρησιμοποιηθεί από τη βιβλιογραφία μπορούν να αναπαρασταθούν από την παρακάτω εξίσωση:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma} dZ \qquad \textbf{(13)}$$

όπου,

- ✓ *κ* (μη αρνητική παράμετρος) η ταχύτητα της επιστροφής-επαναφοράς προς το μέσο (speed of reversion),
- ✓ *θ* το επίπεδο γύρω από το οποίο θα περιστρέφονται όλα τα μελλοντικά μονοπάτια του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα (long term mean level),
- ✓ r_t το τρέχον επιτόκιο ,
- ✓ *Z* τυποποιημένη κίνηση Brown ,
- ✓ *σ* η μεταβλητότητα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου και
- ✓ *γ* το επίπεδο στο οποίο η μεταβλητότητα αυξάνει ανάλογα με το επίπεδο του επιτοκίου.

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου (diffusion) ενώ θέτοντας στην (13) όπου **α=κθ και β=-κ** σταθερές παράμετροι συναντάται στην εναλλακτική μορφή:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma} dZ \ ,$$

με τις παρακάτω υποπεριπτώσεις να συνιστούν στο μεγαλύτερό τους μέρος ειδικές περιπτώσεις διαδικασιών «Ornstein–Uhlenbeck»[19]:

- **α=0, γ=1:** $dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t dZ$ παρατηρείται η **γεωμετρική κίνηση Brown**.
- **γ=0 :** $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma dZ$ προκύπτει το μοντέλο **Vasicek**.

Ειδική περίπτωση θέτοντας και **β=0**: $dr_t = \alpha dt + \sigma dZ$ αποτελεί το μοντέλο **Merton**.

- **γ=1/2**: $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dZ$ αφορά το μοντέλο **CIR** (*square root diffusion*).
- **α=0, β=0, γ=1**: $dr_t = \sigma r_t dZ$ το μοντέλο **Dothan** και
- **γ=1**: $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dZ$ είναι ο τύπος **Brennan-Swartz**.

Ανάμεσα στα μοντέλα, εκείνα με την ιδιότητα της κανονικής κατανομής (Gaussian term structure models) όπως οι προσεγγίσεις Merton και Vasicek, έχουν δεχθεί έντονη κριτική λόγω της ιδιότητας ότι μπορούν να πάρουν θετική πιθανότητα για αρνητικές τιμές επιτοκίων σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Ωστόσο, η απλότητα τους συνδυαζόμενη με το γεγονός ότι ο χρόνος μέχρι τη λήξη είναι βραχυπρόθεσμος, τα καθιστούν εξαιρετικά δημοφιλή σε εμπειρικές μελέτες. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τη διάκριση που κάναμε παραπάνω, υπάρχει η πεποίθηση ότι τα μοντέλα γενικής ισορροπίας δεν αναπαράγουν ακριβώς την αρχική καμπύλη αποδόσεων, επομένως για την τιμολόγηση πολύπλοκων επιτοκιακών παραγώγων προτιμώνται εκείνα που ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία (no arbitrage). Επίσης, μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί ως προς τα μοντέλα που θεσπίζονται στην υπόθεση ότι η μεταβλητότητα ως προς τις αλλαγές του επιτοκίου παραμένει σταθερή, ανεξαρτήτως επιπέδου του r (γ=0) με οικονομετρική προσέγγιση για την εύρεση στατιστικής σημαντικότητας και κατά συνέπεια τον ορισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης που η παράμετρος κυμαίνεται.

Για τους σκοπούς σύνταξης της διπλωματικής θα θεωρηθεί κανονική μορφή στοχαστικών μοντέλων ενός παράγοντα και πιο συγκεκριμένα θα υιοθετηθεί το μοντέλο Vasicek (1977) και στα δύο δείγματα (αρνητικό πρόσημο επιτοκίων (2019) και θετικό πρόσημο (2014)), ενώ μόνο στο δεύτερο δείγμα που είναι εφικτό, επιπροσθέτως θα γίνει εφαρμογή του μοντέλου CIR (1985) .

Η επιλογή μας έγκειται στο ότι η εμπειρική μας μελέτη περιλαμβάνει δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο γερμανική μετοχή (Deutsche Telekom), χώρα που διέπεται από αρνητικές αποδόσεις σε ασφαλείς τίτλους καλύπτοντας μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Τα μοντέλα αυτά ανήκουν στα μοντέλα διάρθρωσης επιτοκίων ισορροπίας, όπου κατά τις εξεταζόμενες περιόδους δεν υφίσταται λόγος μη υιοθέτησης τους λόγω απουσίας συνθηκών που να αποτρέπουν την εφαρμογή τους (όπως οικονομικές κρίσεις ή υψηλός πληθωρισμός). Τέλος, διατίθενται κλειστοί τύποι τιμολόγησης προς εφαρμογή τους με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων.

3.2 Κλειστής μορφής τύποι τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης

3.2.1 Μοντέλο χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων Vasicek

Υποθέτοντας κανονική διαδικασία στοχαστικού μοντέλου ενός παράγοντα βραχυπρόθεσμου επιτοκίου r , αντικαθιστώντας στην (13) όπου **α=κθ και β=κ,** προκύπτει ότι :

$$dr = (a - \beta r)dt + \xi dH \,, \tag{14}$$

όπου ο όρος dH αφορά τυποποιημένη διαδικασία Wiener υπό μέτρο ουδέτερου κινδύνου[20]*, ξ η τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου , α και β σταθερές παράμετροι.*
Ακόμη, υποθέτουμε ότι τα μεγέθη z (διαδικασία Wiener του υποκείμενου τίτλου μετοχής από εξίσωση (1)) και H είναι συσχετισμένα με συντελεστή συσχέτισης ρ, δηλαδή dzdH = ρdt.

Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι οι συντελεστές α, β και ξ είναι ανεξάρτητοι του χρόνου, ενώ στην περίπτωση που είναι μηδενικοί τόσο το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο όσο και ο συντελεστής προεξόφλησης παραμένουν σταθεροί. Στην περίπτωση που τουλάχιστον ένας συντελεστής είναι μη μηδενικός, τότε ανάγεται ο στοχαστικός παράγοντας , και πιο συγκεκριμένα:

- Αν $\alpha \neq 0, \xi \neq 0$ και $\beta = 0$, τότε προκύπτουν τα μοντέλα Merton (1973) και η διωνυμική προσέγγιση Ho και Lee (1986) (με ντετερμεντιστικό ρυθμό τάσης).

- Αν $\alpha \neq 0, \xi \neq 0$ και $\beta \neq 0$, τότε προκύπτει το μοντέλο του Vasicek (1977) με τη χρήσιμη ιδιότητα επιστροφής βραχυπρόθεσμου επιτοκίου προς το μέσο.

Προχωράμε στους εξής ορισμούς:

- Ο συντελεστής προεξόφλησης ορίζεται από $Y(t,T) = \dfrac{1}{R(t,T)}$, όπου

$$R(t,T) = e^{\int_t^T r(u)du} = e^{A(t,T)+B(t,T)H(\tau)}, \ \forall t \in [0,T]$$ υπό τον περιορισμό $R(t,t) = 1$.

Ο συντελεστής ισοδυναμεί με (1+επίπεδο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου) συνεχώς ανατοκιζόμενο , δηλώνοντας την αξία μίας χρηματικής μονάδας επανεπενδυόμενη σε συνεχή χρόνο.

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito στην εξίσωση R(t,T) ,παίρνουμε:

$$dR(t) = R(t)\left(A(t,T) + \frac{1}{2}B^2(t,T) \right)dt + R(t)B(t,T)dH(t) \ . \quad \textbf{(15)}$$

Στη συνέχεια, διαφοροποιώντας, εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito και αντικαθιστώντας την εξίσωση (15) στο συντελεστή προεξόφλησης, προκύπτει $dY = -Y(A_t - \frac{1}{2}B^2)dt - YBdH$, επομένως: $Y(t,T) = \exp(-A - BH(\tau))$.Τέλος, παίρνοντας αναμενόμενη τιμή στην παραπάνω εξίσωση, οδηγούμαστε στον όρο :

$$\Lambda(t,T) = \mathrm{E}\left[Y(t,T)\right] = \exp(-A(t,T) + \frac{1}{2}B^2(t,T)\tau). \quad \textbf{(16)}$$

- Ο παράγοντας πλεονάζουσας απόδοσης $X(t,T)$ εξαρτώμενος από τυχαίο μονοπάτι κατά διάστημα διακράτησης T-t συμβολίζεται ως $\mathrm{X}(t,T) = \frac{S(T)}{S(t)R(t,T)}$ υπό τον περιορισμό $\mathrm{X}(t,t) = 1$. Ο συντελεστής αυτός αφορά την αναλογία της τιμής του υποκείμενου τίτλου που αποδίδεται στο ρίσκο, με το φυσικό λογάριθμο να αποδίδει την (εξαρτώμενη από τυχαίο μονοπάτι) υπερβάλλουσα απόδοση του τίτλου.

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito στο X(t,T) ,αντικαθιστώντας την εξίσωση (1) και την (15) και παραλείποντας τους δείκτες χρόνου, προκύπτει ότι :

$$dX = \frac{1}{R}dS - \frac{S}{R^2}dR - \frac{1}{R^2}dSdR + \frac{S}{R^3}dRdR \Rightarrow dX = X(\mu - \mathrm{A}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\mathrm{B}^2 - \rho\sigma\mathrm{B})dt + X(\sigma - \mathrm{B})dW \ .$$

Εφόσον Z και H αφορούν διαδικασίες Wiener κανονικά κατανεμημένες, η W αποτελεί επίσης διαδικασία Wiener με διακύμανση $v^2=\sigma^2+B^2-2\rho\sigma B$. Επομένως, οδηγούμαστε ότι:

$$d\mathrm{X}(t) = \mathrm{X}(t)\left(\underbrace{\mu - \mathrm{A}_t + \frac{1}{2}\nu^2}_{\eta} \right)dt + X(t)dW(t)\underbrace{(\sqrt{\sigma^2 + \mathrm{B}^2{}_t - 2\rho\sigma\mathrm{B}_t})}_{\nu} \ , \quad \textbf{(17)}$$

*δηλαδή η X ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με μέσο **η** και ρυθμό διακύμανσης **v²**.*

Επίσης, παρατηρείται ότι η διαδικασία S αποτελεί ειδική περίπτωση της διαδικασίας X (t,T) όταν A(t,T)=0 =και B(t,T)=0 , ενώ η διαδικασία Y(t,T) αποτελεί επίσης ειδική περίπτωση της διαδικασίας X (t,T) όταν μ=0 και σ=0 .

- Ορίζουμε ως συντελεστή κανονικοποίησης την αναμενόμενη απόδοση του προηγούμενου παράγοντα, δηλαδή $F(t,T) = E\left[X(t,T)\right]$, με το λογάριθμο $\ln\left[F(t,T)\right]$ να αφορά το πριμ κινδύνου διακράτησης υποκείμενου σε κίνδυνο τίτλο για το χρόνο τ=T-t. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (17), την οριακή συνθήκη $\mathrm{X}(t,t) = 1$ και παίρνοντας αναμενόμενη τιμή, οδηγούμαστε ότι:

$$F(t,T) = \exp(\mu\tau - \mathrm{A}(t,T) + \frac{1}{2}(\overbrace{\sigma^2 + \mathrm{B}^2(t,T) - 2\rho\sigma\mathrm{B}(t,T)}^{\nu^2})\tau)\ .$$

Βάσει των παραπάνω ορισμών από τους Abudy και Izhakian (2011), οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης προέρχονται αποκλειστικά και μόνο από το μη αναμενόμενο υπερβάλλον ποσό απόδοσης του υποκείμενου τίτλου, με τις τιμές των call (put) options να λαμβάνουν υπόψη τις θετικές (αρνητικές) αποκλίσεις από ένα δεδομένο κατώφλι.

Επομένως, η τιμή ενός call option μπορεί να αναπαρασταθεί από $C(t,T) = E\left[Y(t,T)\left(\frac{S_T}{F(t,T)} - K\right)\right]^+$, με αντίστοιχα την τιμή ενός put option να συμβολίζεται ως $P(t,T) = E\left[Y(t,T)\left(K - \frac{S_T}{F(t,T)}\right)\right]^+$.

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το S_t με εφαρμογή για παράδειγμα στο call option, παίρνουμε ότι η τιμή δικαιώματος δίνεται από την εξίσωση:

$$C(t,T) = S_t E\left[Y(t,T)\left(\frac{S_T}{S_t F(t,T)} - \frac{K}{S_t}\right)\right]^+ , \qquad \mathbf{(18)}$$

δηλαδή τη spot τιμή υποκείμενου τίτλου πολλαπλασιασμένη με την αναμενόμενη τιμή του ποσού

$$\underbrace{\frac{X(t,T)}{F(t,T)}}_{1+\mu\eta\ \text{αναμενόμενη απόδοση}} - \underbrace{\frac{Y(t,T)K}{S_t}}_{\kappa\alpha\tau\acute{\omega}\varphi\lambda\iota} .$$

Το γεγονός ότι η υπερβάλλουσα απόδοση διέπεται από το συντελεστή προεξόφλησης που περιέχει στοχαστικό όρο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου αποτελεί τον κύριο λόγο που

στην πλειοψηφία των περιπτώσεων το μοντέλο BS υποτιμά την τιμή του δικαιώματος σε σχέση με τη γενίκευσή του.

Αντικαθιστώντας $Y(t,T)=\dfrac{1}{R(t,T)}$ στην εξίσωση (18), ο τύπος γίνεται $C(t,T)=E\left[S_t\,\dfrac{X(t,T)}{F(t,T)}-K\,\dfrac{1}{R(t,T)}\right]^+$. Για λόγους απλότητας θέτουμε t=0 και παραλείπουμε τους δείκτες που υποδεικνύουν το χρόνο.

Με την μεθοδολογία που ακολουθήθηκε από τους Abudy και Izhakian (2011), συμπεραίνεται ότι στο χρόνο t η κλειστή εξίσωση υπολογισμού τιμής ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης μετοχής (ενσωματώνοντας το γνωστό ρυθμό απόδοσης μερίσματος q για αναγωγή σε τίτλο που δε διανείμει μέρισμα), με τιμή εξάσκησης K και χρόνο λήξης T έχει ως εξής:

- *<u>Για το δικαίωμα αγοράς (call option premium):</u>*

$$c(t,T)=S_te^{-q\tau}N\left(\frac{\ln\dfrac{S_te^{-q\tau}}{K}+A(t,T)-\dfrac{1}{2}\nu^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+\nu\sqrt{\tau}\right)$$

$$-Ke^{-A(t,T)+\frac{1}{2}B^2(t,T)\tau}N\left(\frac{\ln\dfrac{S_te^{-q\tau}}{K}+A(t,T)-\dfrac{1}{2}\nu^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}-B(t,T)\sqrt{\tau}\right). \qquad \textbf{(19)}$$

- *<u>Για το δικαίωμα πώλησης (put option premium):</u>*

$$p(t,T)=Ke^{-A(t,T)+\frac{1}{2}B^2(t,T)\tau}N\left(-\frac{\ln\dfrac{S_te^{-q\tau}}{K}+A(t,T)-\dfrac{1}{2}\nu^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+B(t,T)\sqrt{\tau}\right)$$

$$-S_te^{-q\tau}N\left(-\frac{\ln\dfrac{S_te^{-q\tau}}{K}+A(t,T)-\dfrac{1}{2}\nu^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}-\nu\sqrt{\tau}\right). \qquad \textbf{(20)}$$

Όπου :

- $N(\bullet)$ η τυποποιημένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής,
- *τ=T-t* ο χρόνος μέχρι τη λήξη,
- $v^2 = \sigma^2 + \mathrm{B}^2(t,T) - 2\rho\sigma B(t,T)$,
- Αν β=0, τότε $A(t,T) = r(t)\tau + \frac{1}{2}\alpha\tau^2$ και $\mathrm{B(t,T)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\xi\tau^{\frac{3}{2}}$ (*Μοντέλο Merton (1973)*).
- Αν $\beta \neq 0$, τότε $A(t,T) = \frac{\alpha}{\beta}\tau + (r(t) - \frac{\alpha}{\beta})\lambda(t,T)$ και $\mathrm{B(t,T)}=\frac{\xi}{\beta}\sqrt{\tau - \lambda(t,T) - \frac{\beta}{2}\lambda^2(t,T)}$,

όπου $\lambda(t,T) = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta\tau})$ (*Μοντέλο Vasicek (1977)*).

Οι εξισώσεις (19) και (20) αποτελούν γενικεύσεις του μοντέλου BS με υποκείμενο τίτλο μετοχές όπου το ασφάλιστρο ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς c (t,T) και πώλησης p(t,T) , είναι συνάρτηση -εκτός του χρόνου μέχρι τη λήξη, της τιμής και της μεταβλητότητας της τιμής της μετοχής όπως το απλό μοντέλο-των παραμέτρων περιγραφής τους στοχαστικού επιτοκίου α, β και ξ καθώς και της συσχέτισης ρ μεταξύ μεταβολής τιμής υποκείμενου τίτλου και επιτοκίων.

Συμπεριλαμβάνοντας την τυχαιότητα διαισθητικά θα πρέπει να έχει παρόμοιο αντίκτυπο με την αύξηση μεταβλητότητας της μετοχής, οδηγώντας σε αύξηση της τιμής των δικαιωμάτων. Είναι προφανές ότι υπό σταθερό όρο, α=β=ξ=0 και dr(t)=0. Επομένως, $A(t,T) = r(t)(\mathrm{T} - t) = r\tau$ και $\mathrm{B(t,T)=0}$. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (19) και (20), προκύπτει η απλή φόρμουλα τιμολόγησης BS.

Οι Abudy και Izhakian (2011) στη δημοσίευση τους έδειξαν ότι η ισότητα put-call parity εξακολουθεί να ισχύει κάτω από καθεστώς γκαουσιανών στοχαστικών επιτοκίων, παίρνοντας τη μορφή:

$$c(t) + KY(t,T) = p(t) + S_t e^{-qt} \quad . \tag{21}$$

Επαναδιατυπώνοντας την (21) ως $K\Lambda(t,T) = p(t,T) + S_t e^{-q\tau} - c(t,T) = Ke^{-A+\frac{1}{2}B^2\tau}$ με τους ως άνω συμβολισμούς, αποδεικνύεται η ισχύς της ισότητας. Επομένως η επίτευξη arbitrage δεν είναι πιθανή, με τον τυχαίο παράγοντα να επηρεάζει προς την ίδια θετική κατεύθυνση τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, διατηρώντας την ιδιότητα.

3.2.2 Μοντέλο χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων Cox–Ingersoll–Ross (CIR)

Συνεχίζουμε να θεωρούμε οικονομία κατά Black Scholes με κατάργηση της υπόθεσης περί σταθερού επιτοκίου και αντικαθιστούμε στην εξίσωση (13) όπου γ=0.5, δηλαδή εικάζουμε ότι η μεταβλητότητα του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου είναι συνάρτηση του εαυτού του και πιο συγκεκριμένα ότι αυξάνει αναλογικά με την τετραγωνική ρίζα του τρέχοντος επιτοκίου. Τότε προκύπτει το λογαριθμικό μοντέλο ισορροπίας CIR (1985) με την ιδιότητα επιστροφής προς το μέσο («mean reverting square-root process») , όπου η μεταβολή του επιτοκίου εκφράζεται ως:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \delta\sqrt{r_t}\,dW_t \;,$$

όπου κ και θ θετικές σταθερές με την ερμηνεία που δόθηκαν στην εξίσωση (13), δ η τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου σε αναλογία με το ξ της εξίσωσης (14) και ο όρος dW αφορά τυποποιημένη διαδικασία Wiener.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι τα μεγέθη z (διαδικασία Wiener του υποκείμενου τίτλου μετοχής από εξίσωση (1)) και W είναι συσχετισμένα με συντελεστή συσχέτισης ρ, δηλαδή dzdW = ρdt, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο.

Η μορφή της παραπάνω εξίσωσης σε κόσμο «ουδέτερου κινδύνου» περιγράφεται ως:

$$dr_t = (\kappa(\theta - r_t) - \delta\lambda r_t dt) + \delta\sqrt{r_t}\,dW = \kappa^*(\theta^* - r_t)dt + \delta\sqrt{r_t}\,dW_t \;, \quad \textbf{(22)}$$

όπου κ=κ+δλ και θ*=(θκ)/(κ+δλ) για μια παράμετρο λ σταθερή που υποδεικνύει την αγοραία τιμή κινδύνου, εκφράζοντας ως* $\lambda(t) = \lambda^* \sqrt{r(t)}$.

Ο παράγοντας τάσης κ(θ − r(t)) στο παρόν μοντέλο είναι ίδιος όπως το Vasicek . Η επιθυμητή ιδιότητα επιστροφής στο μέσο διατηρείται, ενώ διορθώνεται η ιδιότητα του Vasicek προς θετική πιθανότητα άντλησης αρνητικών επιπέδων επιτοκίων. Ωστόσο, όταν τα επίπεδα πλησιάζουν το μηδέν, η μεταβλητότητα ως προς το επίπεδο του επιτοκίου γίνεται όρος αμελητέος, γι' αυτό και διαφοροποιείται ευκρινώς σε υψηλά επίπεδα επιτοκίου. Η κατανομή πλέον της διαδικασίας CIR δεν είναι ούτε κανονική ούτε λογαριθμική, αλλά παράγει μια μη κεντρική χ^2 κατανομή.

Ο Kim (2002) παρουσιάζει την αξία ενός δικαιώματος αγοράς με υποκείμενο τίτλο μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα ως:

$$\begin{aligned} c = & \left[S_0 \Phi(d_1) - K \exp(-\int_0^T r_t * dt) \Phi(d_2) \right] \\ & + \delta \mathrm{C}_0 \left[S_0 \varphi(d_1) - K \exp(-\int_0^T r_t * dt)(\varphi(d_2) - \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\Phi(d_2)) \right] \\ & + \delta \mathrm{C}_1 \left[d_2 S_0 \varphi(d_1) - d_1 K \exp(-\int_0^T r_t * dt) \varphi(d_2) \right]. \end{aligned} \quad \textbf{(23)}$$

Όπου:

- *Φ(●)* η αθροιστική συνάρτηση τυποποιημένης κανονικής κατανομής,
- *φ(●)* η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ως άνω κατανομής,
- r_t * ντετερμενιστικός όρος βραχυπρόθεσμου επιτοκίου που ισοδυναμεί με: $r_t * = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})$,
- $\exp(-\int_0^T r_t * dt) = \exp(-\frac{r_0 - \theta}{\kappa}(1 - e^{-\kappa T}) - \theta T)$,
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}\left[\log\frac{S_0}{K} + \frac{r_0 - \theta}{\kappa}(1 - e^{-\kappa T}) + \theta T + \frac{\sigma^2}{2} T \right]$ και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$,
- $C_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\frac{\lambda(r_0 - \theta)}{\kappa}\left(\frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} - T e^{-\kappa T} \right) + \frac{\lambda\theta T}{\kappa}\left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} \right) \right]$,
- $C_1 = -\frac{\rho}{\sigma T} C_{11}$,
- $C_{11} = \frac{2\sqrt{\theta}((1 + 2e^{\kappa T})\sqrt{r_0} - 3e^{\kappa \mathrm{T}/2}\sqrt{r_0 - \theta(1 - e^{\kappa T})}) + (\theta(1 + 2e^{\kappa T}) - r_0)\psi}{2e^{\kappa T}\kappa^2\sqrt{\theta}}$,
- $\psi = \log\left[\frac{\theta(2e^{\kappa T} - 1) + r_0 + 2e^{\kappa T/2}\sqrt{\theta^2(e^{\kappa T} - 1) + \theta r_0}}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{\theta})^2} \right]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

4.1 Υποκείμενος Τίτλος-Μεθοδολογία

Η εμπειρική μελέτη όπως έχουμε ήδη αναφέρει θα εστιαστεί στην ικανότητα του απλού BS σε αντιπαράθεση με την επέκτασή του υπό κανονική στοχαστική διαδικασία βραχυπρόθεσμου επιτοκίου κατά Vasicek (*εφεξής BS-VS*) και υποπερίπτωσης του Merton (*εφεξής BS-Merton*) να αποτιμήσουν ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης. Ο υποκείμενος τίτλος των δικαιωμάτων προαίρεσης αφορά τη μετοχή Deutsche Telekom, έχοντας τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

✓ Ο τίτλος έχει ως χώρα ρίσκου τη Γερμανία, η οποία αποτελεί την πιο αντιπροσωπευτική χώρα της Ευρωζώνης με διαχρονικά μεγάλη και σταθερή οικονομία. Η χώρα όπως έχουμε δει εισήλθε πρώτη σε αρνητικά επιτόκια στην Ευρώπη από τις δυνάμεις τις αγοράς και τα διατηρεί έκτοτε μέχρι τις μακροχρόνιες ληκτότητες χρέους της χωρίς έντονες διακυμάνσεις.

✓ Η εταιρία αποτελεί την μοναδική του κλάδου τηλεπικοινωνιών στον δείκτη συνολικής απόδοσης (total return) Deutsche Boerse AG (DAX), ο οποίος συνίσταται από 30 επιλεγμένες υψηλή αποτίμησης Γερμανικές εταιρίες (blue chips), μετέχοντας σε αυτόν με συντελεστή στάθμισης 4,8% .Κατέχει ηγετική παρουσία σε Ευρώπη και Αμερική με 170 εκατομμύρια πελάτες διεθνώς, ενώ η κεφαλαιοποίησή της ανέρχεται σε 74,5 δισεκατομμύρια ευρώ σε σύνολο 4,76 δις μετοχών (68,11% διαπραγματεύσιμες στην αγορά).

✓ Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου και διαπραγματεύονται στα δύο μεγαλύτερα οργανωμένα χρηματιστήρια παραγώγων της Ευρώπης (Eurex Germany και Euronxt Derivatives Amsterdam), με τον υποκείμενο τίτλο να έχει μεγάλη εμπορευσιμότητα και μικρή μεταβλητότητα σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Ενδεικτικά, κατά το διάστημα άντλησης των δεδομένων, η μέση τιμή ορίζεται σε 15,146 (η ελάχιστη τιμή ανέρχεται σε 14,452 και η μέγιστη τιμή ανέρχεται σε 16,254), με τη μέση εμπορευσιμότητα ανά ημέρα να αγγίζει τις 9.238.431 μετοχές.

Ακολουθεί σχετικό διάγραμμα της τιμής και του όγκου συναλλαγών της μετοχής για το χρονικό διάστημα 31/10/18-31/10/19, σε σύγκριση με την απόδοση του δείκτη DAX κατά το ίδιο διάστημα:

Σημειώνεται ότι κατά τον μήνα Σεπτέμβριο, υπήρξε μεγάλη δραστηριότητα στην αγορά των options που οδηγούνταν κυρίως από τη ζήτηση για προστασία από την πτώση της μετοχής (downside protection), ξεπερνώντας σχεδόν 5 φορές το μέσο όρο 20 ημερών αγγίζοντας μέχρι και περίπου 2 εκατομμύρια ανοικτών θέσεων (open interest) (10/9/19). Το έντονο άλμα στην εμπορευσιμότητα των δικαιωμάτων προαίρεσης στις αγορές προκάλεσε διαταραχή στις τιμές της αγοράς με απομάκρυνση από την θεωρητικά δίκαιη τιμή.

Τα εμπειρικά δεδομένα μας συνίστανται από τις μέσες τιμές κλεισίματος των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς (mid=(bid+ask)/2) κάθε διαπραγματεύσιμης ημέρας για έξι διαφορετικές τιμές εξάσκησης (δύο τιμές ανα moneyness) και τέσσερις διαφορετικές ληκτότητες, για τις κάτωθι περιόδους:

- Εξάμηνο 1/4/2019-31/10/2019 (*αρνητικό πρόσημο επιτοκίων*-***εφεξής Δείγμα 1***).
- Μήνας 1/10/14-31/10/14 (*θετικό πρόσημο επιτοκίων*-**εφεξής Δείγμα 2**).

Το δεύτερο δείγμα επιλέγεται τέτοιο ώστε οι συνθήκες να είναι παρόμοιες ως προς το μήνα παρατήρησης (τυχόν εποχικότητα και τάση ως προς την εμπορευσιμότητα) χωρίς η οικονομία να παρουσιάζει σημεία καμπής, με πανομοιότυπες τιμές δικαιωμάτων και ρυθμούς μερισματικής απόδοσης. Η διαφορά μεταξύ των δειγμάτων έγκειται κατά κύριο λόγο στο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο (θετικό πρόσημο) ώστε να προσμετρηθεί όσο το δυνατόν πληρέστερα η συνεισφορά αυτού ως προς την σύγκριση των μοντέλων. *Σε αυτό το δείγμα επιπροσθέτως θα εφαρμοστεί η κλειστής μορφής λύση υπό το μοντέλο περιγραφής διάρθρωσης επιτοκίων CIR (1985) (εφεξής BS-CIR).*

Για τα δύο δείγματα τα δικαιώματα επιλέχθηκαν έτσι ώστε για κάθε ημέρα οι ληκτότητες (time to maturity) να είναι ίδιες και να προσεγγίζουν όσο το δυνατόν τη 1 εβδομάδα, τον 1 μήνα , τους 6 μήνες και τους 12 μήνες, ενώ οι τιμές εξάσκησης (strike) στην μετοχή επιλέγονται:

- ❖ Στην τρέχουσα τιμή spot (At the money Options) και πολύ κοντά σε αυτή (Near the money Options),
- ❖ Σε επίπεδα +1 (2x0.5 βήμα) πάνω της τρέχουσας τιμής (In the Money δικαιώματα πώλησης και Out of The Money δικαιώματα αγοράς) και
- ❖ Σε επίπεδα -1 (2x0.5 βήμα) κάτω από την τρέχουσα τιμή (Out of The Money δικαιώματα πώλησης και In the Money δικαιώματα αγοράς).

Ο συνδυασμός *των κριτηρίων αποδίδει 24 συνολικά ημερήσια δεδομένα που αφορούν call options (149 παρατηρήσεις το 2019 και 22 παρατηρήσεις το 2014) αντλώντας δύο δικαιώματα ATM,ITM και OTM ανά ληκτότητα.* Από τις 149 παρατηρήσεις, οι 137 από αυτές (1/4/19-15/10/19) αξιοποιούνται για την εκτίμηση παραμέτρων (in-sample) για το πρώτο δείγμα, ενώ αντίστοιχα οι 10 πρώτες ημέρες (1/10/14-15/10/14) αξιοποιούνται για το σκοπό αυτό στο δεύτερο δείγμα.

Σημειώνεται ότι για την διεξαγωγή της εμπειρικής μελέτης, όλες οι τιμές που λαμβάνονται ως γνωστές αντλήθηκαν από το Bloomberg.

Τα βήματα που ακολουθήθηκαν διαδοχικά έχουν ως εξής:

1. Με δεδομένες τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου, ακίνδυνου επιτοκίου και μερισματικής απόδοσης, εκτιμώνται οι τεκμαρτές μεταβλητότητες στον τύπο BS (implied volatility-σ) τέτοιες ώστε να ελαχιστοποιούν τα αθροίσματα τετραγωνικών σφαλμάτων μεταξύ τιμών αγοράς και θεωρητικών τιμών του μοντέλου για το σύνολο των δικαιωμάτων in sample. *Σημειώνεται ότι η πλατφόρμα Bloomberg χρησιμοποιεί για τα δικαιώματα προαίρεσης που θα ασχοληθούμε ως σταθερό επιτόκιο την καμπύλη Euroswap, ενώ στην παρούσα διπλωματική για όλες τις ληκτότητες χρησιμοποιήθηκε ως ορόσημο βραχυπρόθεσμου επιτοκίου για κάθε ημέρα η τιμή κλεισίματος του 6μηνιαίου Euribor (Euro Interbank Offered Rate)***.** Γνωρίζοντας όλους τους αγνώστους πλέον, εφαρμόζονται στο υπολογιστικό πρόγραμμα Matlab οι κλειστές μορφές BS (εξίσωση 11) για την εύρεση των τιμών των δικαιωμάτων στα δύο δείγματα.

2. Στη συνέχεια, με τον ίδιο τρόπο εκτιμώνται σε ημερήσια βάση οι πέντε άγνωστες παράμετροι του στοχαστικού μοντέλου επιτοκίων BS-VS καθώς και η υποπερίπτωση BS-Merton που ενέχει τέσσερις άγνωστες παραμέτρους, δίνοντας τις τιμές εκείνες που παρέχουν το καλύτερο ταίριασμα βάσει των παρατηρηθέντων διαθέσιμων τιμών της αγοράς. Επιπροσθέτως, μόνο για το Δείγμα 2 που είναι εφικτό, εκτιμώνται με παρόμοιο τρόπο, οι έξι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου BS-CIR. Έπειτα, πραγματοποιείται αποτίμηση των δικαιωμάτων με αντικατάσταση των εκτιμημένων παραμέτρων στους κλειστούς τύπους και πιο συγκεκριμένα η εξίσωση (19) από Abudy και Izhakian (2011) και στα δύο δείγματα καθώς και η εξίσωση (23) από Kim (2002) στο δεύτερο δείγμα μόνο.

3. Εφόσον έχει γίνει ήδη εκτίμηση ημερήσιων παραμέτρων εντός δείγματος παρατήρησης, υπολογίζεται ο αριθμητικός μέσος των παραμέτρων και χρησιμοποιώντας αυτή την τιμή έπεται *έλεγχος προβλεπτικής ικανότητας(εκτός δείγματος παρατήρησης) των μοντέλων σε σχέση με τις τιμές αγοράς για τις υπόλοιπες 12 ημέρες και στα δύο δείγματα (16/10-31/10).*

4. Επιπροσθέτως, εκτός από το σύνολο των δικαιωμάτων γίνεται επανάληψη των βημάτων 1-3 στην υποπερίπτωση υπολειπόμενου χρόνου μέχρι τη λήξη (12 ημερήσια δεδομένα), όπου ο **βραχυπρόθεσμος** αποτελείται από τα δικαιώματα ληκτότητας **1 εβδομάδας και ενός μήνα** και ο **μακροπρόθεσμος** από εκείνα που λήγουν σε **6 μήνες και ένα χρόνο**. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται αντιπαραβολή και σύγκριση του αποτελέσματος.

Εφόσον έχουν εκτελεστεί τα παραπάνω βήματα, αποφαινόμαστε κατά πόσο εφαρμόζεται το απλό BS στην αγορά καθώς και αν η εισαγωγή της στοχαστικότητας βελτιώνει το μοντέλο αποτίμησης στην περίπτωση των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς σε περιβάλλον αρνητικών επιτοκίων με ταυτόχρονη σύγκριση των αποτελεσμάτων στα δικαιώματα σε καθεστώς θετικών επιτοκίων (κοντά στο μηδέν και στα δύο δείγματα), τόσο στο σύνολο όσο κι ανά υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη.

4.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Η διαδικασία εκτίμησης που χρησιμοποιήσαμε υποθέτει πως έχοντας ένα μοντέλο και ένα σετ παραμέτρων γι' αυτό, βρίσκουμε τιμές των παραμέτρων τέτοιες ώστε τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων που εξάγονται από το μοντέλο με τις τιμές της αγοράς να έχουν την μικρότερη δυνατή τιμή. Μαθηματικά εκφράζεται ως:

$$\Sigma\varepsilon\tau\ \pi\alpha\rho\alpha\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\omega\nu\ \mu o\nu\tau\acute{\varepsilon}\lambda o\upsilon\ \hat{\theta} = \arg\min \sum_{i=1}^{N} (f_i^{market}(T_i, K_i) - f_i^{\mathrm{mod}el}(T_i, K_i))^2$$

όπου το N αναπαριστά το πλήθος δικαιωμάτων για κάθε ημέρα. Στη μελέτη μας είναι N=24 για τα δικαιώματα προαίρεσης σε κάθε δείγμα ημερησίως (12 ανά λήξη).

Εφόσον έχουμε αντλήσει τις τιμές που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά, χρησιμοποιώντας τον επαναληπτικό αλγόριθμο **Levenberg-Marquardt (1944 & 1963)** με εφαρμογή στο υπολογιστικό πακέτο Matlab και την εντολή lsqnonlin θα βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στα μοντέλα και εφόσον είναι αποδεκτά βάσει ημερησίου αθροίσματος τετραγωνικών σφαλμάτων, θα προχωρήσουμε στην προβλεπτική ικανότητα. Η μέθοδος Levenberg-Marquardt (1944 & 1963) είναι από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές για να παράγουμε λύσεις σε μη-γραμμικά least square curve fitting προβλήματα και αφορά αριθμητικό αλγόριθμο ελαχιστοποίησης με επαναληπτικές διαδικασίες . *Προαπαιτούμενο για την έναρξη της διαδικασίας αποτελεί να οριστεί μια εικασία για την αρχική τιμή , ένα ελάχιστο φράγμα και ένα μέγιστο φράγμα.*

Περιληπτικά, η περιγραφή του αλγορίθμου έχει ως κάτωθι:

Έστω ότι έχουμε N παρατηρήσεις *με* i=1,2,…..,N και μία εξίσωση $g : R^n \to R$ με n : παραμέτρους $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ και $N \geq n$. Στην εν λόγω περίπτωση, οι y_i είναι οι τιμές των δικαιωμάτων όπως τις συλλέξαμε από την αγορά. Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου μας $g(x) = \hat{y}_i$ και βρίσκουμε τα κατάλοιπα $r_i(x) = \hat{y}_i - y_i$. Συνεπώς βρίσκουμε το $R = (r_1, \ldots\ldots, r_N)^T$ το οποίο είναι διάνυσμα διάστασης N των καταλοίπων.
Τότε πρέπει να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_x f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2} R(x)^T R(x).$$

Οι Levenberg K. (1944) και Marquardt D. (1963) πρότειναν μία λύση του προβλήματος προσαρμογής της καμπύλης χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που συνδυάζει την μέθοδο Steepest descent με την μέθοδο των Gauss-Newton (επέκταση της μεθόδου Laplace για την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος). Ο Levenberg (1944) προτείνει να υπολογίσουμε την κατεύθυνση d_k ως τη λύση στην παρακάτω τροποποιημένη εξίσωση των Gauss-Newton:

$$(R'(x^k)^T R'(x^k)+\lambda_k I)d_k = -R'(x^k)^T R(x^k)\ ,$$

όπου I είναι μοναδιαία μήτρα και λ_k >0 είναι μία παράμετρος απόσβεσης. Ο πίνακας στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένος, έτσι ώστε η λύση d_k να εξασφαλίζει πως είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για την συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης. Για μικρές τιμές του λ_k η μέθοδος συμπεριφέρεται σαν την επανάληψη των Gauss-Newton και δείχνει έναν ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών x_k που είναι κοντά στο x^*. Για επαναλήψεις μακριά από την βέλτιστη, η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση μπορεί να αποδοθεί ως $d_k \approx -\frac{1}{\lambda_k}(R'(x^k)^T R(x^k))$.

Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης λ_k επηρεάζει το d_k καθώς επίσης και την διάρκεια κάθε βήματος της μεθόδου Levenberg-Marquardt, έχοντας μεγάλο αντίκτυπο στην σταθερότητα της μεθόδου. Μία συνήθης επιλογή περιλαμβάνει να σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη του μοντέλου μας για τις τιμές των παραμέτρων.

Επομένως, βρίσκοντας τις αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης και χρησιμοποιώντας σε αυτές την μέθοδο Levenberg-Marquardt μέσω Matlab, βρίσκουμε τις ημερήσιες τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα ανά περίπτωση:

➢ *Σταθερό επιτόκιο:*

✓ *Απλό μοντέλο BS : Μία άγνωστη παράμετρος (σ).*

➢ *Στοχαστικό επιτόκιο:*

✓ *BS-Merton : Τέσσερις άγνωστες παράμετροι (α, ξ,ρ,σ) (γκαουσιανό χωρίς επαναφορά προς το μέσο).*

✓ *BS-VS : Πέντε άγνωστες παραμέτροι (α,β,ξ,ρ,σ) (γκαουσιανό με ιδιότητα επαναφοράς προς το μέσο).*

✓ *BS-CIR : Έξι άγνωστες παραμέτροι (κ,θ,λ,δ,ρ,σ) (μη γκαουσιανό με ιδιότητα επαναφοράς προς το μέσο).*

Τα περιγραφικά μέτρα των εκτιμώμενων παραμέτρων ανά περίπτωση αναγράφονται στους πίνακες 1,4,7,10,13 και 16 του παραρτήματος 1*.*

4.2.1 Εκτίμηση παραμέτρων υπό σταθερό επιτόκιο

Θεωρώντας σταθερή ημερήσια τιμή βραχυπρόθεσμου επιτοκίου για όλα τα δικαιώματα και δεδομένο ρυθμό μερισματικής απόδοσης, βάσει των παρατηρηθέντων τιμών της αγοράς γίνεται εφαρμογή των κλειστών εξισώσεων απλού BS με μόνη άγνωστη παράμετρο την τεκμαρτή μεταβλητότητα σ, αποφεύγοντας να χρησιμοποιήσουμε εκτίμηση ιστορικής μεταβλητότητας για τα δεδομένα μας. Ως αρχική τιμή ορίσαμε τη μέση ιστορική implied volatility των ημερήσιων δεδομένων κατά το διάστημα παρατήρησης και στα δύο δείγματα, που καλύπτει τις τρεις περιπτώσεις:

1. Τιμή strike =100%: at the money calls και puts,

2. Τιμή strike= 105%:out of the money calls/in the money puts και

3. Τιμή strike=95%: in the money calls/out of the money puts.

Με αυτόν τον τρόπο, καλύψαμε το εύρος +/- 5% από τα επίπεδα τρέχουσας τιμής στο οποίο ανήκουν οι παρατηρήσεις μας, με το ελάχιστο τον τιμών αυτών να αποτελεί το κάτω φράγμα στον κώδικα και το μέγιστο των τιμών αυτών να αποτελεί αντίστοιχα το άνω φράγμα.

• <u>Σε περιβάλλον αρνητικών επιτοκίων (2019)</u>:

Η μέση τεκμαρτή μεταβλητότητα στο σύνολο των δικαιωμάτων αγγίζει το 21,03%, ποσοστό ίδιο και για τα δικαιώματα μακροπρόθεσμης λήξης, το οποίο διαφοροποιείται σε 20,75% στα δικαιώματα βραχυπρόθεσμης λήξης . Το ελάχιστο όριο που έχει τεθεί στον κώδικα για την περίοδο αυτή δεν συναντάται (11,5%), ενώ το μέγιστο (26,32%) καθώς και το ελάχιστο παρατηρηθέν (15,1%) συναντάται στην περίπτωση των κοντινών λήξεων, γεγονός αναμενόμενο μιας που τα εξεταζόμενα δικαιώματα (μιας βδομάδας και ενός μηνός) είναι τα πιο ευάλωτα στις διακυμάνσεις των τιμών.

Το μοντέλο BS με τη μία μόνο άγνωστη παράμετρο της τεκμαρτής μεταβλητότητας, κάνει πολύ καλή προσαρμογή στα δεδομένα εντός δείγματος παρατήρησης εκφρασμένο σε όρους αθροίσματος τετραγωνικών σφαλμάτων, με το εύρος να κυμαίνεται στο διάστημα [0,012-0,889]. Τα ελάχιστα μέσα κατάλοιπα εντός δείγματος παρατήρησης συναντώνται όταν εξετάζονται μόνο τα δικαιώματα αγοράς βραχυπρόθεσμης λήξης (0,11) ενώ η μέγιστη μέση τιμή αγγίζει το 0,38 όταν εξετάζεται το σύνολο δικαιωμάτων αγοράς του Δείγματος 1. ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εντός δείγματος στους πίνακες 2,5,8 και στα διαγράμματα 5,7,9 του παραρτήματος 1.***

Εκτός δείγματος παρατήρησης και σε διάστημα 12 ημερών, το μοντέλο παρουσιάζει καλή απόδοση, ωστόσο τα σφάλματα προκύπτουν πιο διευρυμένα, με τη χειρότερη προβλεπτική ικανότητα στην περίπτωση μακροπρόθεσμων ληκτοτήτων. Τα σφάλματα ανήκουν στο διάστημα [0,056-1,676]. ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εκτός δείγματος στους πίνακες 3,6,9 και στα διαγράμματα 6,8,10 του παραρτήματος 1.***

- Σε περιβάλλον θετικών επιτοκίων (2014):

Η μέση τεκμαρτή μεταβλητότητα στο σύνολο των δικαιωμάτων είναι υψηλότερη του Δείγματος 1 αγγίζοντας το 24,74%, το οποίο διαφοροποιείται σε 24,7% για τα μακροπρόθεσμα και 25,87% για τα βραχυπρόθεσμα. Το ελάχιστο (11,5%) και το μέγιστο όριο (50%) δεν προκύπτει σε καμία περίπτωση, ενώ τα κατάλοιπα προσαρμογής του μοντέλου είναι εξαιρετικά μικρά, ανήκοντας στο διάστημα [0,002 -0,3]. Οι περιπτώσεις στις οποίες παρατηρούνται τα ελάχιστα και τα μέγιστα ανα περίπτωση ταυτίζονται με το πρώτο δείγμα. ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εντός δείγματος στους πίνακες 11,14, 17 και στα διαγράμματα 11,13,15 του παραρτήματος 1.***

Η βελτίωση της προσαρμογής του μοντέλου υφίσταται και εκτός δείγματος παρατήρησης, καθώς το εύρος των τετραγωνικών σφαλμάτων είναι πλέον σε αυτό το δείγμα [0,002-0,564] , με το απλό μοντέλο BS να καταφέρνει εξίσου ισχυρή προσαρμογή και εκτός δείγματος στα δικαιώματα βραχείας λήξεως και σχεδόν υποτετραπλασιασμό σφαλμάτων στη μακροπρόθεσμη ληκτότητα. Επομένως αναμφισβήτητα το απλό BS έχει καλύτερη εφαρμογή στο δεύτερο δείγμα που διαφέρει ως προς το πρόσημο επιτοκίου. ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εκτός δείγματος στους πίνακες 12,15,18 και στα διαγράμματα 12,14,16 του παραρτήματος 1.***

4.2.2 Εκτίμηση παραμέτρων υπό στοχαστικό επιτόκιο

Η τεκμαρτή μεταβλητότητα σ θεωρείται ως άγνωστη παράμετρος ξανά στο στοχαστικό μοντέλο, παίρνοντας ελαφρώς διαφορετικές τιμές από το απλό BS τόσο στο σύνολο όσο και ανα υποπερίπτωση , θέτοντας τα ίδια όρια ανα δείγμα ως ανωτέρω. Ακόμη, ο συντελεστής συσχέτισης ***ρ*** μεταξύ των στοχαστικών διαδικασιών wiener της μεταβολής της τιμής της μετοχής και του επιτοκίου τίθεται υπό εκτίμηση, με τα προφανή όρια να ανήκουν στο [-1,1]. Επιπροσθέτως, ορίζουμε τυπική απόκλιση ημερήσιου βραχυπρόθεσμου επιτοκίου μη μηδενική (***ξ για τα Merton και Vasicek και δ για το CIR***), ώστε να ανάγεται στοχαστικός όρος και να διαφοροποιείται από το απλό BS, με το ρεαλιστικό άνω φράγμα της τάξης 2%, που συνάδει με τις δυνάμεις της αγοράς. Η διαφοροποίηση έγκειται στις υπόλοιπες άγνωστες παραμέτρους :

- ***β*:** Ορίζουμε την παράμετρο γνωστή (σταθερά μηδενική) καθ' όλες τις ημέρες ώστε να προκύπτει το μοντέλο Merton, ενώ επιτρέπουμε μόνο θετικές τιμές για τη γενική μορφή Vasicek, με μέγιστη τιμή το 10 και στα δύο δείγματα, υπονοώντας ότι η ταχύτητα επιστροφής προς ένα μέσο επιτόκιο δεν μπορεί να ξεπερνά τον αριθμό αυτό.
- ***α*:** Ορίζουμε τα όρια της παραμέτρου έτσι ώστε να προσαρμόζονται τα μοντέλα και να είναι ρεαλιστικά ανάλογα με το περιβάλλον επιτοκίων που επικρατεί ανα περίπτωση. Επιτρέπουμε το κάτω φράγμα να πάρει αρνητικές τιμές (θεωρητικά μείον άπειρο) στο 2019 , ώστε να λειτουργεί μειωτικά στον πρώτο όρο της εξίσωσης (14), ενώ επιτρέπουμε μόνο μη αρνητικές και μη μηδενικές τιμές στο 2014 για να προκύπτει η ιδιότητα επιστροφής προς το μέσο. Ως άνω φράγμα της παραμέτρου επιτρέπουμε 70 μονάδες βάσης πάνω από το μέσο επιτόκιο της εξεταζόμενης περιόδου διαμορφώνοντας σε 0,4% και 1% αντίστοιχα για τα δείγματα πολλαπλασιασμένο με το μέγιστο της παραμέτρου β.
- ***κ****: Η ζητούμενη παράμετρος είναι θετική και προκύπτει συναρτήσει των μη μηδενικών και θετικών παραμέτρων κ, δ και λ, ενώ θέλουμε να είναι κοντά με την παράμετρο β του μοντέλου Vasicek για να είναι συγκρίσιμα. Φράσσοντας την παράμετρο λ έως το 10, καταφέρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

- ***θ*:*** Η ζητούμενη παράμετρος αφορά το εκτιμώμενο μέσο επίπεδο επιτοκίου σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα , θεωρείται θετική για το δεύτερο δείγμα και προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα. Δοθέντος ότι το μέσο 6μηναίο επιτόκιο του Οκτωβρίου 2014 ήταν 0,18%, θεωρήσαμε ρεαλιστική την υπόθεση ότι το άνω φράγμα δε δύναται να ξεπεράσει το 1% .

Το διάστημα που κινήθηκαν οι παράμετροι με την εκτέλεση, έχουν ως κάτωθι ανα περίπτωση:

• Σε περιβάλλον αρνητικών επιτοκίων (2019):

Η μέση παράμετρος α στο μοντέλο Vasicek πήρε μικρές θετικές τιμές στο σύνολο δικαιωμάτων και στα μακροπρόθεσμα, ενώ προσγειώθηκε σε αρνητικά επίπεδα στα βραχυπρόθεσμα, προεξοφλώντας ότι το επίπεδο επιτοκίων θα παραμείνει με αρνητικό πρόσημο μέχρι τη λήξη. Η υποπερίπτωση Merton που εξετάζεται ξεχωριστά διαφοροποιείται ως προς αυτή την παράμετρο στο σύνολο και στις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη με ακρίβεια πρώτου δεκαδικού ψηφίου. Το εύρος της παραμέτρου α προκύπτει [-1,7145-0,04] για την υποπερίπτωση Merton και [-1,7306-0,04] για το Vasicek.

Το στοχαστικό μοντέλο εξάγει χαμηλότερες τιμές για την μέση τεκμαρτή μεταβλητότητα των δικαιωμάτων σε σύγκριση με το σταθερό επιτόκιο (-4% έως -6%), με τη μέση συσχέτιση τίτλου/επιτοκίου να είναι θετική σε όλες τις περιπτώσεις, παίρνοντας τη χαμηλότερη τιμή στις βραχυπρόθεσμες λήξεις (0,315 για Merton και 0,323 για Vasicek). Επιπροσθέτως, στις βραχείες λήξεις η τυπική απόκλιση του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου παίρνει τη χαμηλότερη τιμή, ενώ σε καμία περίπτωση η μέση παράμετρος αυτή δεν παίρνει την ακραία τιμή.

Η μέση παράμετρος β στο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων παίρνει αρκετά μεγάλες τιμές και έχει μεγάλη τυπική απόκλιση ανήκοντας στο [3,21-8,467], με τη μεγαλύτερη μέση τιμή να παρατηρείται εξετάζοντας τα βραχυπρόθεσμα. *Ωστόσο, τα κατάλοιπα προσαρμογής εντός δείγματος μεταξύ Vasicek και Merton δε διαφοροποιούνται ευκρινώς καθώς ταυτίζονται σχεδόν πλήρως διαγραμματικά με ακρίβεια 2ου δεκαδικού.* Τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα εκτίμησης εντός δείγματος για το BS-VS ανήκουν στο [0,109-0,351] και για το BS-Merton στο [0,109-0,353], κάνοντας πολύ καλή προσαρμογή εντός δείγματος. ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εντός δείγματος στους πίνακες 2,5,8 και στα διαγράμματα 5,7,9 του παραρτήματος 1.***

Εν αντιθέσει, η υπεροχή του Vasicek έναντι του Merton είναι ξεκάθαρη όλες τις ημέρες ως προς την προβλεπτική ικανότητα στο σύνολο και στις μακροπρόθεσμες ληκτότητες, καθιστώντας το μοντέλο αυτό το πιο ευσταθές με τις εκτιμηθείσες παραμέτρους. ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εκτός δείγματος στους πίνακες 3,6,9 και στα διαγράμματα 6,8,10 του παραρτήματος 1.***

• Σε περιβάλλον θετικών επιτοκίων (2014):

Το ποσοστό μείωσης της τεκμαρτής μεταβλητότητας από τα τρία πλέον στοχαστικά μοντέλα παραμένει στο ίδιο διάστημα, με τη μέση συσχέτιση τίτλου/επιτοκίου να εξάγεται με βεβαιότητα τέλεια θετική για τα μοντέλα Merton και Vasicek (σύνολο και μακροπρόθεσμα) και περί του 0,8 στις βραχείες λήξεις, παίρνοντας χαμηλότερη τιμή όταν υιοθετείται το μοντέλο CIR (0,4 προσεγγιστικά στο σύνολο και στα μακροπρόθεσμα και 0,75 στις κοντινές λήξεις). Η παράμετρος της τυπικής απόκλισης του επιτοκίου είναι πιο υψηλή σε όλες τις περιπτώσεις των μοντέλων συγκριτικά με το πρώτο δείγμα.

Η μέση παράμετρος α διαφοροποιείται μεταξύ Merton και Vasicek (με ακρίβεια 1^{ου} δεκαδικού) σε όλες τις περιπτώσεις όπως στο πρώτο δείγμα, παραμένοντας θετική σε αυτό το εμπειρικό παρελθοντικό διάστημα, ενώ η μέση παράμετρος β είναι εξαιρετικά μικρή στα βραχυπρόθεσμα (0,078), δικαιολογώντας την ταύτιση με το Merton και το BS σε αυτή την περίπτωση. Το μοντέλο CIR που εισάχθηκε επιπλέον υπονοεί εκτιμώμενο μέσο επιτόκιο γύρω από το οποίο περιστρέφονται τα τρέχοντα (long run value) της τάξης του θ*=0,97% με ταχύτητα επιστροφής κ*=6,13 για το σύνολο των δικαιωμάτων, το οποίο διαμορφώνεται σε θ*=0,9% με κ*= 7,12 για τα βραχείας λήξης και θ*=0,92% με κ*=8,47 φορές για τα μακρόληκτα. *Σημειώνεται ότι εντός και εκτός δείγματος παρατήρησης, εκτός από το BS και το BS-Merton που είναι τα χείριστα ως προς την προσαρμογή (στο σύνολο και τα μακροπρόθεσμα), η εικόνα δεν είναι ξεκάθαρη ως προς τα άλλα δύο μοντέλα τα οποία είναι εξαιρετικά κοντά με ακόμα μικρότερα κατάλοιπα.* ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εντός δείγματος στους πίνακες 11,14,17 και στα διαγράμματα 11,13,15 του παραρτήματος 1.***

Η αδυναμία του μοντέλου Merton ως προς την προβλεπτική ικανότητα είναι ακόμη πιο εμφανής το 2014 κατέχοντας τα μεγαλύτερα μέσα τετραγωνικά σφάλματα έναντι των υπολοίπων στο σύνολο (0,222) γεγονός που απορρέει από τα μακροπρόθεσμα (0,211). ***Αναλυτικά τα κατάλοιπα προσαρμογής εκτός δείγματος στους πίνακες 12,15,18 και στα διαγράμματα 12,14,16 του παραρτήματος 1.***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική θεωρήσαμε επίκαιρες συνθήκες της αγοράς λαμβάνοντας υπόψη τα εξαιρετικά χαμηλά βραχυπρόθεσμα επιτόκια με αρνητικό πρόσημο, θέλοντας να εξετάσουμε το αντίκτυπο στην τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης και εν συνεχεία να διευρευνήσουμε αν η ακρίβεια προσεγγίζεται περαιτέρω με την εισαγωγή στοχαστικού όρου στα επιτόκια. Μέσω κλειστών τύπων τιμολόγησης υιοθετήσαμε τρία μοντέλα, το απλό Black-Scholes (BS) (1973) και τη γενίκευση υπό κανονική στοχαστική διαδικασία επιτοκίου Vasicek (BS-VS) (1977) (περιλαμβάνοντας την υποπερίπτωση Merton (BS-Merton) (1973)), ώστε να γίνει απρόσκοπτα η εφαρμογή των αρνητικών επιτοκίων. Ακόμη, λάβαμε και ενδεικτικό δείγμα σε παρελθόντα χρόνο με επίσης σχεδόν μηδενικά αλλά θετικά επιτόκια, ώστε να εισαχθεί και η γενίκευση κατά διάρθρωση επιτοκίων Cox-Ingersoll-Ross (BS-CIR) (1985) στην ανάλυση, η οποία παρέχει διόρθωση της θετικής πιθανότητας προς αρνητικές τιμές του γκαουσιανού μοντέλου, με σκοπό να λάβει χώρα έλεγχος ευστάθειας μέσω αντιπαραβολής του αποτελέσματος.

Τα ευρήματα που προέκυψαν με εμπειρική μελέτη σε δικαιώματα αγοράς επί της γερμανικής μετοχής Deutsche Telekom που ανήκει στο δείκτη DAX κατά τα διαστήματα 1/4/19-31/10/19 (Δείγμα 1) και 1/10/14-31/10/14 (Δείγμα 2), ερμηνεύοντας με τη σύμπραξη των πινάκων και των διαγραμμάτων, έχουν ως κάτωθι:

Εντός δείγματος παρατήρησης (in sample):

❖ Το BS υπό σταθερό επιτόκιο κάνει καλύτερη προσαρμογή στο δείγμα υπό θετικά επιτόκια σε σύγκριση με τα αρνητικά σε όρους αθροίσματος των ημερησίων τετραγωνικών σφαλμάτων και καθίσταται ως η χείριστη επιλογή στο σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς καθώς και στην υποπερίπτωση μακροπρόθεσμης ληκτότητας και στα δύο δείγματα.

❖ Υπό καθεστώς σχεδόν μηδενικών επιτοκίων (ανεξαρτήτως προσήμου) παρατηρείται ότι η γενίκευση κατά χρονική διάρθρωση επιτοκίων Vasicek καταφέρνει να βελτιώσει το απλό μοντέλο BS ακόμη και στην πιο απλή μορφή του, ήτοι την υποπερίπτωση Merton, εκτός όταν εξετάζονται ξεχωριστά τα δικαιώματα λήξης 1 εβδομάδας και 1 μήνα. Αυτά τα δικαιώματα βραχείας ληκτότητας έχουν τα μικρότερα κατάλοιπα και στα δύο δείγματα (σχεδόν μηδενικά), γεγονός αναμενόμενο καθώς η τιμή εκείνων που θα λήξουν άμεσα δεν έγκεινται σε περιβάλλον αβεβαιότητας τόσο όσο των μακροπρόθεσμων που βάλλονται από τις δυνάμεις της αγοράς με στοχαστικό τρόπο μέχρι τη λήξη. *Επομένως, ανεξαρτήτως τιμών παραμέτρων, το γκαουσιανό στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου καταρρέει στις βραχυπρόθεσμες ληκτότητες και ταυτίζεται με το BS, άρα μπορεί να θεωρηθεί ότι υπό σχεδόν μηδενικά επιτόκια δεν ανάγεται στοχαστικός όρος για αυτή την περίπτωση δικαιωμάτων και στα δύο δείγματα. Ωστόσο, το μοντέλο CIR που εφαρμόζεται ρητά σε θετικά επιτόκια διορθώνει ήπια την αστάθεια του κανονικού μοντέλου στη βραχεία λήξη.*

❖ Εξετάζοντας το σύνολο των δικαιωμάτων καθώς και τις μακροπρόθεσμες λήξεις ξεχωριστά, το μοντέλο BS-VS αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή σε όρους μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων από την υποπερίπτωση του και το απλό BS για το 2019, εξάγοντας ωστόσο μικρότερα μέσα κατάλοιπα μόνο στις μακροπρόθεσμες λήξεις το 2014. Η φόρμουλα τιμολόγησης BS-CIR διορθώνει ακόμη περισσότερο τα ήδη ελάχιστα μέσα κατάλοιπα στο Δείγμα 2 για το σύνολο των δικαιωμάτων, γεγονός που απορρέει από τις βραχείες ληκτότητες, ωστόσο η υπερίσχυση δεν ισχύει αυστηρά καθ’ όλο το διάστημα.

<u>Εκτός δείγματος παρατήρησης (out of sample):</u>

❖ Στο έτος 2019 το απλό BS χαρακτηρίζεται ως εκείνο με την χειρότερη προβλεπτική ικανότητα σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ η διαφοροποίηση με τα θετικά επιτόκια έγκειται στο ότι καθίσταται 3η καλύτερη επιλογή με το BS-Merton να παρέχει πλέον τη χειρότερη πρόβλεψη στο σύνολο των δικαιωμάτων, που αποδίδεται στα δικαιώματα μακροπρόθεσμης ληκτότητας. *Η διαφορά αυτή θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως ότι στα μη βραχείας λήξης δικαιώματα είναι προτιμότερο να γίνει παραδοχή σταθερού επιτοκίου μέχρι τη λήξη από το να εισαχθεί επιπλέον αβεβαιότητα μέσω στοχαστικού μοντέλου τέτοιου χωρίς την ιδιότητα επιστροφής προς ένα μέσο επίπεδο επιτοκίων.*

❖ Το BS-VS διαφοροποιείται από την υποπερίπτωσή του BS-Merton στην προβλεπτική ικανότητα εμφανώς εν αντιθέσει με την εντός δείγματος απόδοση, με το πρώτο να αποτελεί τη βέλτιστη επιλογή προσέγγισης αυστηρά στο σύνολο δικαιωμάτων καθώς και στα δικαιώματα λήξης 6 μηνών και ενός έτους για τα αρνητικά επιτόκια. Το BS-VS διατηρεί την καταλληλόλητα του για τις ίδιες περιπτώσεις και στο δεύτερο δείγμα επικυρώνοντας την επίδοση, με το BS-CIR να διατηρεί τη βελτίωση των σφαλμάτων στα δικαιώματα βραχυπρόθεσμης λήξης. *Ωστόσο, σημειώνεται ότι μεταξύ BS-VS και BS-CIR δεν υπάρχει αυστηρή σχέση κυριαρχίας καθ’όλες τις 12 ημέρες της προβλεπτικής ικανότητας όντας εξαιρετικά κοντά μεταξύ τους, εικόνα όμοια με την επίδοση εντός δείγματος.*

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, καταλήγουμε ότι σε τρέχουσες οικονομικές συνθήκες αρνητικών επιτοκίων το απλό μοντέλο BS δεν είναι τόσο αξιόπιστο στα απλά ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης αγοράς σε σχέση με τις «κανονικές» συνθήκες θέσπισής του (Δείγμα 2). ***Πιο συγκεκριμένα, συνεκτιμώντας τις αποδόσεις εντός και εκτός δείγματος και αξιοποιώντας το ενδεικτικό δεύτερο δείγμα ελέγχου προκύπτει ότι η εισαγωγή κατάλληλου στοχαστικού μοντέλου επιτοκίων με την ιδιότητα επιστροφής προς ένα μέσο επίπεδο (BS-VS, BS-CIR) προσδίδει αδιαμφισβήτητα βελτίωση του απλού μοντέλου BS ρητώς στα δικαιώματα προαίρεσης μακροπρόθεσμης λήξης. Ωστόσο, βάσει των εμπειρικών μας δεδομένων, δεν έχουμε σαφή εικόνα υπερίσχυσης ώστε να μπορούμε να αναδείξουμε με βεβαιότητα ποιο μοντέλο από τα δύο είναι πιο ευσταθές.***

Αποδίδουμε την ισοδυναμία των μοντέλων στο γεγονός ότι επειδή το επιτόκιο είναι πολύ κοντά στο μηδενικό κατώφλι, ο όρος $\delta\sqrt{r_t}$ της εξίσωσης (22) που περιλαμβάνει τη μεταβλητότητα του επιτοκίου γίνεται αμελητέος, ελαχιστοποιώντας την επίδραση του τυχαίου διαταρακτικού παράγοντα. Έτσι ουσιαστικά η βελτίωση CIR δεν καταφέρνει να μοντελοποιήσει με περισσότερη ακρίβεια την μεταβολή και προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό το Vasicek.

Κλείνοντας, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι για τη διεκπεραίωση της παρούσας εμπειρικής μελέτης, οι παρατηρηθείσες αγοραίες τιμές αφορούν τις μέσες τιμές κλεισίματος για απλά ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, ενώ ενσωματώθηκε στην τρέχουσα τιμή της μετοχής σταθερή και γνωστή ημερήσια μερισματική απόδοση αντί για στοχαστική. Αυτοί οι παράγοντες συνδέονται άρρηκτα με το εξαχθέν αποτέλεσμα, όπως κι επίσης το γεγονός ότι τα εξαμηνιαία Euribor επιτόκια και στις δύο χρονικές περιόδους αλλάζουν μόνο ως προς το πρόσημο, όντας πολύ κοντά μεταξύ τους. Ενδιαφέρον γεγονός θα αποτελούσε η επέκταση της μελέτης με υιοθέτηση βραχυπρόθεσμου μοντέλου επιτοκίων δύο και παραπάνω παραγόντων (αντί για έναν) που συνδυαστικά θα άνηκε στην κατηγορία χρονικής διάρθρωσης επιτοκίων μη επίτευξης κέρδους («no arbitrage») αντί για γενικής ισορροπίας (όπως το Vasicek και το CIR) για να αποφευχθεί η παθογένεια, με εμπειρική μελέτη σε πιο σύνθετα δικαιώματα.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

[1] *Collaterized Mortgage Obligation (CMO):* Τιτλοποίηση στεγαστικών δανείων που αποτελεί υποκατηγορία των τιτλοποιήσεων οποιουδήποτε είδους χρέους (Collaterized Credit Obligation-CDO). Αφορά ενυπόθηκο στοιχείο ενεργητικού των τραπεζών (Mortgage-Backed Security-MBS) που περιλαμβάνει σειρές ομογενών δανείων κατηγοριοποιημένες ανάλογα με την πιθανότητα αποπληρωμής και την λήξη. Σκοπός των CMOs είναι η διοχέτευση πληρωμών από τις ταμειακές ροές δανειστών (των οποίων τα δάνεια έχουν ως εγγύηση τις υποθήκες) ανάλογα με τη διαβάθμισή τους στους επενδυτές που κατέχουν τα παράγωγα αυτά. Τα στεγαστικά δάνεια μειωμένης πιστοληπτικής ικανότητας κατέρρευσαν με το «σκάσιμο» της φούσκας των τιμών ακινήτων, ενώ η διόγκωσή της έκθεσης των πολύπλοκων παραγώγων αυτών έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην διάχυση της χρηματοπιστωτικής κρίσης το διάστημα 2007-2008.

[2] *Over the counter market*: Εξωχρηματιστηριακή συναλλαγή με διαμεσολάβηση broker όπου καθορίζονται τα εξειδικευμένα χαρακτηριστικά του προϊόντος (δεν είναι τυποποιημένα).

[3] *Leverage*: χρησιμοποίηση δανειακών (ξένων) κεφαλαίων ως πηγή χρηματοδότησης για επίτευξη κέρδους επενδύσεων. Η πρακτική μέσω μόχλευσης πολλαπλασιάζει τα κέρδη αν η αγορά κινηθεί υπέρ μας αλλά και τις ζημιές αν η αγορά κινηθεί εναντίον μας.

[4] *Cash-Settled :* Η εκκαθάριση του συμβολαίου πραγματοποιείται με χρηματικό διακανονισμό και όχι φυσική παράδοση του υποκείμενου τίτλου. Συναντάται για παράδειγμα σε δικαιώματα επί δεικτών μετοχών, όπως S&P 500, NASDAQ, DAX, Euro Stoxx 50.

[5] *Εξωτικά παράγωγα:* Αποτελούν υβριδικά εξειδικευμένα προϊόντα που αποκλίνουν από τα plain vanilla options και διαπραγματεύονται κυρίως στην OTC αγορά. Παραδείγματα αποτελούν τα δικαιώματα σε υπάρχοντα δικαιώματα (call on call/put, put on call/put), τα knock in-knock out barrier options (υπόκεινται σε κάποιο φράγμα), digital options (πληρώνουν συγκεκριμένο ποσό αν και μόνο αν συμβεί κάποιο γεγονός/κίνηση τιμής) , Asian options (αντί για την τρέχουσα τιμή, λαμβάνεται υπόψη το μέσο όρο κάποιων ημερών για να καθοριστεί αν ακυρώνεται το δικαίωμα σε σχέση με την τιμή εξάσκησης).

[6] *Εμπορευσιμότητα (volume)*: Ο αριθμός συμβολαίων που «άλλαξαν χέρια» σε μία συγκεκριμένη περίοδο. Μαζί με το open interest που δείχνει τις «ανοικτές θέσεις», δηλαδή τα ενεργά συμβόλαια, περιγράφουν τη ρευστότητα των προϊόντων αυτών.

[7] *Κεντρικές τράπεζες με αρνητικό επιτόκιο κατάθεσης*: Riksbank (2009), Danmarks Nationalbank (DNB) (2012), Swiss National Bank (SNB) (2014), European Central Bank (ECB) (2014), Bank of Japan (BoJ) (2016). Η πρώτη τράπεζα που τα εισήγαγε (Σουηδική) ήταν και η πρώτη που τα καθαίρεσε (12/2019).

[8] *Κρατικά ομόλογα:* Θεωρούνται κατά κανόνα τα πιο ασφαλή χρεόγραφα, των οποίων τα επιτόκια λαμβάνονται ως ορόσημο για εκτιμήσεις πιστωτικών κινδύνων και πιθανότητες υφέσεων. Η 10ετής έκδοση κατά κανόνα χρησιμοποιείται από εμπειρικές μελέτες ως «risk free rate». Ειδικότερα, για την Ευρωζώνη ασφαλής έκδοση θεωρείται της Γερμανίας, με το spread αποδόσεων για τις υπόλοιπες χώρες να υπολογίζεται πάνω σε αυτή.

[9] Το *flattening* αποτελεί μείωση της διαφοράς αποδόσεων μεταξύ βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων διαρκειών, δηλαδή οι επενδυτές δεν αναμένουν μεγαλύτερη αποζημίωση με την πάροδο του χρόνου ως είθισται σε κανονικό καθεστώς όπου η μελλοντική αξία χρήματος είναι μεγαλύτερη της παρούσας.

[10] *Euro Swap Curve:* Απεικόνιση ανά λήξη (tenor) των κυμαινόμενων επιτοκίων Euribor που συναλλάσσονται ως αντικείμενο ενός προϊόντος ανταλλαγής επιτοκίου (interest rate swap), έναντι σταθερού.

[11] *Επιτοκιακά Παράγωγα*: Caps και Floors (call option και put option σε κυμαινόμενο επίπεδο επιτοκίου αντίστοιχα), swaps με αντικείμενο επιτόκια (σταθερό έναντι κυμαινόμενου και αντίστροφα) και συνδυασμός αυτών (forward starting swaps, swaptions).

[12] *Diffusion process:* Αποτελεί μια διαδικασία Markov συνεχούς χρόνου με συνεχείς διαδρομές τιμών, όπως η κίνηση Brown.

[13] *Consol Bonds:* Ομόλογα που παρέχουν σταθερή πληρωμή στο διηνεκές (perpetual).

[14] Για τα δικαιώματα αγοράς, ο όρος «*in the money*» εκφράζει ότι το δικαίωμα έχει αξία ($S_T>K$), με «*out of the money*» να συμβολίζει μηδενική αξία του συμβολαίου ($S_T<K$). Για τα δικαιώματα πώλησης ισχύουν τα αντίθετα. Ο όρος «*at the money*» αναφέρεται όταν ισχύει $S_T=K$.

[15] Μια στοχαστική διαδικασία $\{z(t),t\geq 0\}$ καλείται *κίνηση Brown* με συντελεστή διάχυσης σ^2 αν: α) $z(0)=0$, β)Έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και γ) Για κάθε $t\geq 0$, $z(t)\sim N(0, \sigma^2 t)$. Θέτοντας $\sigma^2=1$, προκύπτει η διαδικασία Wiener.

[16] *Λογαριθμοκανονική κατανομή*: Στη θεωρία των πιθανοτήτων αν $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ τότε η $Y=\ln(X)$ ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή. Παρομοίως, αν $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ τότε $X=\exp(Y)$ ακολουθεί κανονική κατανομή. Μία τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή παίρνει μόνο θετικές τιμές.

[17] *Short Selling*: «Δανεισμός» μετοχής, πώληση μεριδίου μετοχής που δεν κατέχουμε και επιστροφή της με επαναγορά της μετέπειτα.

[18] *Δέλτα:* Ορίζεται ως $\Delta=\frac{\partial f}{\partial S}$ και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της τιμής του δικαιώματος αναφορικά με την τιμή της μετοχής, δηλαδή την κλίση της ευθείας. Το μοντέλο Black-Scholes τιμολογεί δικαιώματα παίρνοντας μηδενική θέση στο Δέλτα (Delta neutral position) ως τεχνική αντιστάθμισης κινδύνου, αφού $\Delta\Pi=\Delta*\Delta S-\Delta f=0$. Θέση long (short) σε μετοχές αντισταθμίζεται με θέση short (long) σε call option , ενώ αντίθετα θέση short (long) σε μετοχές αντισταθμίζεται με θέση short (long) σε put option. Τα Greek Letters που αφορούν συντελεστές ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές συμπληρώνουν το Gamma (πρώτη παράγωγος του Δέλτα), το Vega, το Theta και το Rho, εκφράζοντας το ρυθμό μεταβολής ως προς τη μεταβλητότητα σ, το χρόνο και το επιτόκιο αντίστοιχα.

[19] *Διαδικασία «Ornstein–Uhlenbeck»*: Μορφή διαδικασίας Wiener με την κανονική και Μαρκοβιανή ιδιότητα (Gauss-Markov process) με ιδιότητα τάσης επιστροφής προς το μέσο (mean reverting). Η υπόθεση αντεστραμμένου μέσου είναι η θεωρία που υποστηρίζει ότι οι τιμές και οι αποδόσεις των υποκείμενων τίτλων τελικά επιστρέφουν στον μακροπρόθεσμο μέσο του συνόλου των δεδομένων. Ο μέσος αυτός μπορεί να είναι το μέσο όρο ιστορικών παρατηρήσεων των τιμών ή των αποδόσεων.

[20] *Μέτρο ουδέτερου κινδύνου:* Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά αφορά το μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε σε μια πλήρη αγορά, η τιμή του παραγώγου να ισούται με την αναμενόμενη προεξοφλημένη τιμή κάτω από αυτό το μέτρο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα:

1) Abudy, M. and Izhakian, Y. (2011), 'Pricing stock options with stochastic interest rate', International Journal of Portfolio Analysis and Management (IJPAM), Vol. 1, No. 3.

2) Amin, Kaushik I. and Ng, Victor K. (1993), 'Option Valuation With Systematic Stochastic Volatility', The Journal of Finance, Vol. 48, No. 3.

3) Bachelier L. (1900), 'Théorie de la Spéculation', Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Serie 3, Volume 17, pp. 21-86.

4) Bakshi, G., Cao, C.and Chen, Z. (1997), 'Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models' ,The Journal of Finance ,Vol. 52, No. 5,pp. 2003-2049.

5) Bernard, C., Olivier Le Courtois and Quittard-Pinon, F. (2008), 'Pricing Derivatives with Barriers in a Stochastic Interest Rate Environment', Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 32, No. 9, pp. 2903-2938.

6) Black, F. (1995), 'Interest Rates as Options ', Journal of Finance, Vol. 50,Issue 5, pp. 1371-76.

7) Black, F. and Scholes, M. (1973), 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-654.

8) Brennan, Michael J. and Schwartz, Eduardo S.(1979),'A Continuous Time Approach To The Pricing Of Bonds', Journal of Banking and Finance, Vol. 3, pp. 133-155.

9) Chan, K. C., Karolyi, G. Andrew, Longstaff, Francis A. and Sanders, Anthony B. (1992), 'An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate', The Journal of Finance, Vol 47, N 3.

10) Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). 'An intertemporal general equilibrium model of asset prices',Econometrica, Vol. 53, No. 2 , pp. 363-384.

11) Elliott, J. Walter and Baier, R. Jerome (1979), 'Econometric Models and Current Interest Rates: How Well Do They Predict Future Rates?', The Journal of Finance, Vol. 34, No. 4, pp. 975-986.

12) Goldstein, R. and Zapatero, F. (1996), 'General Equilibrium With Constant Relative Risk Aversion And Vasicek Interest Rates', Mathematical Finance, Vol. 6, No. 3, pp. 331-340.

13) Kim, Yong-Jin (2002), 'Option Pricing under Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation ',Asia-Pacific Financial Markets, Vol. 9,No. 1, pp. 23–44.

14) Knoll, M. (2004), 'The Ancient Roots of Modern Financial Innovation: The Early History of Regulatory Arbitrage', University of Pennsylvania Law School, Paper 49.

15) Liao, Szu-Lang Liao and Huang, Hsing-Hua (2005), 'Pricing Black-Scholes Options with Correlated Interest Rate Risk and Credit Risk: An Extension', Quantitative Finance, Vol. 5, No. 5, pp. 443-457.

16) Merton, R.C.(1973), 'Theory of Rational Option Pricing', Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, pp. 637-654.

17) Niizeki, Mikiyo Kii (1998), 'A Comparison Of Short-term Interest Rate Models: Empirical Tests Of Interest Rate Volatility', Applied Financial Economics, Vol. 8, pp. 505-512.

18) Rabinovitch, R. (1989), 'Pricing Stock and Bond Options when the Default-Free Rate is Stochastic', Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 24, No. 4,pp. 447-457.

19) Rindell, K. (1995),' Pricing of index options when interest rates are stochastic: An empirical test', Journal of Banking & Finance ,Vol. 19,pp.785-802.

20) S. Zeytun, A. Gupta (2007), 'A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate', Berichte des Fraunhofer ITWM, Nr. 124 .

21) Vasicek, O. (1977), 'An Equilibrium Characterization Of The Term Structure', Journal of Financial Economics, Vol. 5 , pp. 177-188.

22) Winarti, Yuyun G., Noviyanti, L. and Setyanto, Gatot R.(2017), 'The European Style Arithmetic Asian Option Pricing With Stochastic Interest Rate Based On Black Scholes Model', AIP Conference Proceedings 1827, 020001.

Βιβλία:

1) Haug, E. G. (2007), The Complete Guide to Option Pricing Formulas, 2nd Edition (2007), McGraw-Hill, New York.

2) Hull John C. (2009),'Options, Futures, and other Derivatives 9th Edition'.

Ακαδημαϊκές σημειώσεις-Εργασίες:

Ελληνικές

1) Σημειώσεις μαθήματος «Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική», Νικόλαος Εγγλέζος, Χειμερινό Εξάμηνο 2019, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

2) Σημειώσεις μαθήματος «Παράγωγα Αξιόγραφα», Νικόλαος Εγγλέζος, Εαρινό Εξάμηνο 2019, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Ξένες

1) Interest Rate Models I: Short Rate Models, Lecture 7, Adriana Breccia, Spring Term 2012, School of Economics, Mathematics and Statistics, Birkbeck College.

2) Διπλωματική Εργασία του Bruce Tjon Tsoe Jin με τίτλο “Pricing Derivatives in Periods of Low or Negative Interest Rates” (Erasmus University Rotterdam-August 2019).

Ιστοσελίδες:

1) https://www.theocc.com/about/newsroom/releases/2019/january-2-occ-clears-record-setting-volume-for-the-year.jsp.

2) https://www.eurexchange.com/exchange-en/market-data/historical-data.

3) http://www.optionstrading.org/history/ .

4) https://en.wikipedia.org/wiki/Cox%E2%80%93Ingersoll%E2%80%93Ross_model.

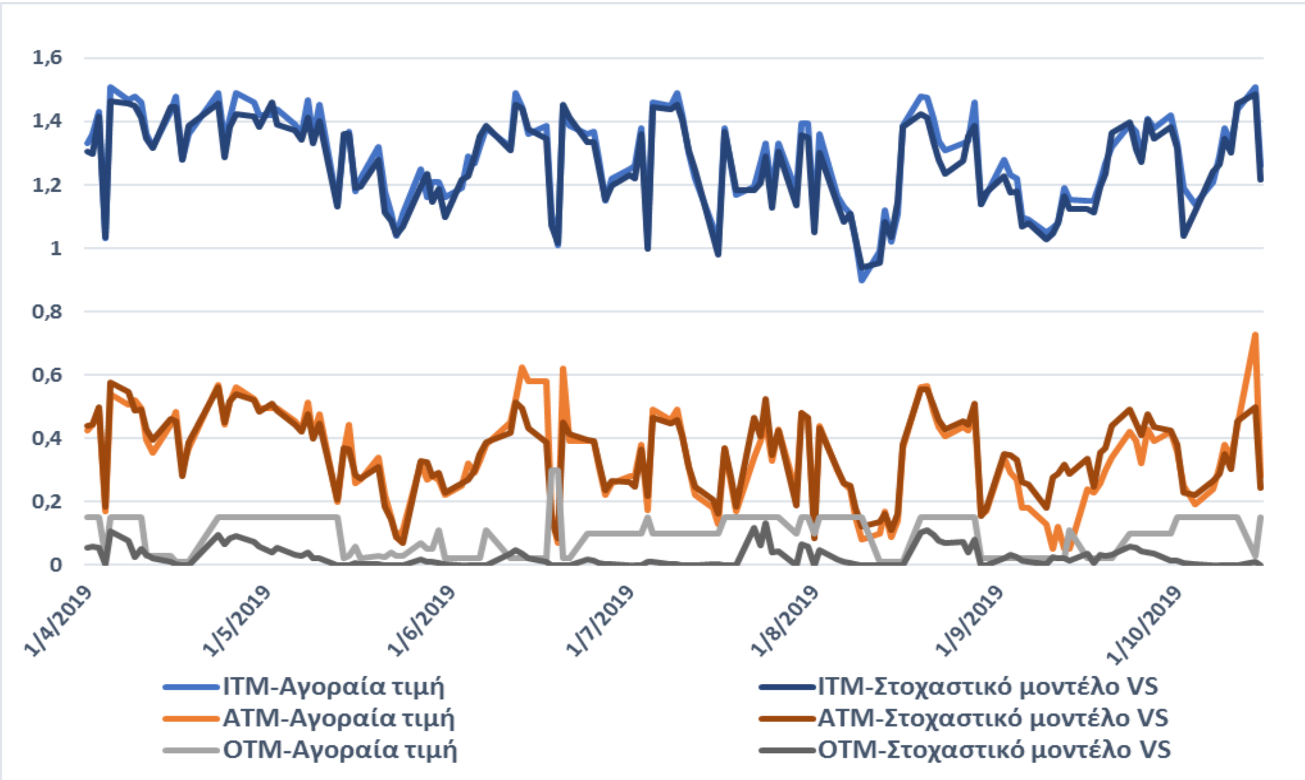
5) https://www.investopedia.com/terms/c/cmo.asp.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.

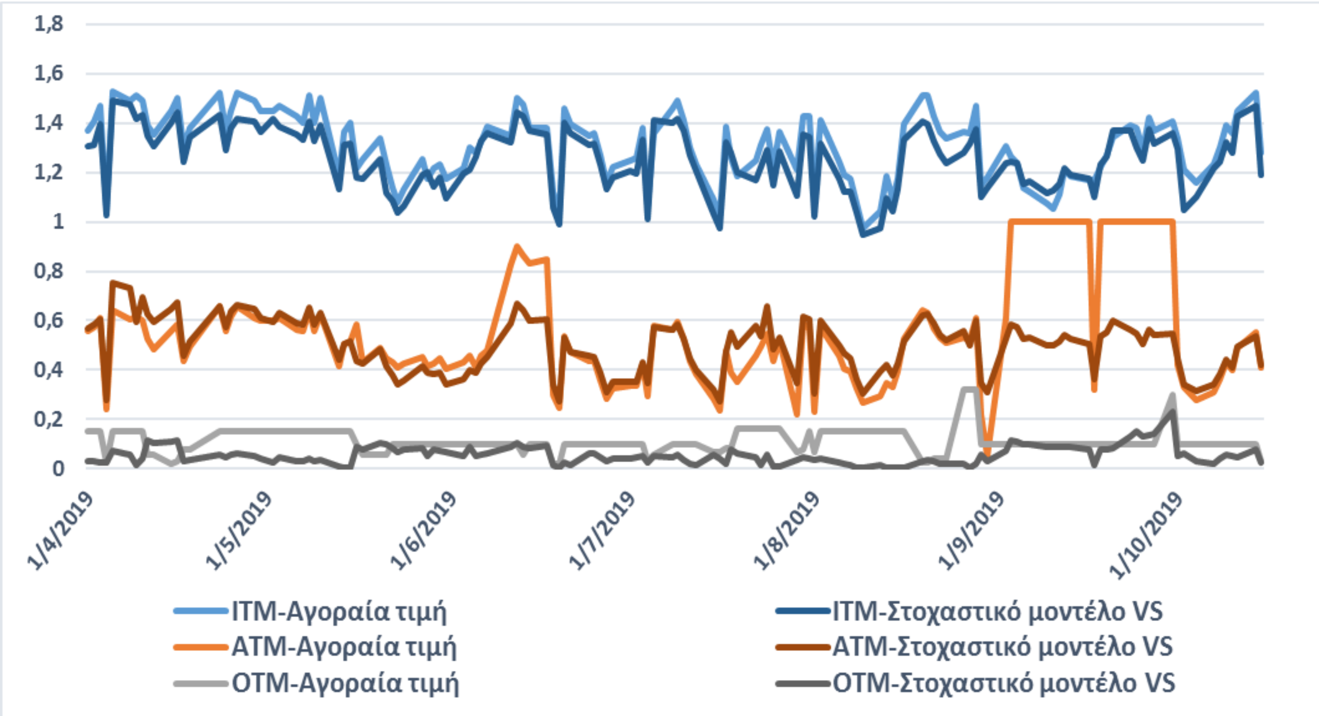
α) Γραφήματα

Διαγράμματα 1-4: *Τιμές (αγοραίες και επέκτασης στοχαστικού μοντέλου επιτοκίων Vasicek (BS-VS)) ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς της μετοχής Deutsche Telekom ανά moneyness και ανά χρόνο μέχρι τη λήξη στο Δείγμα 1 (2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) .*

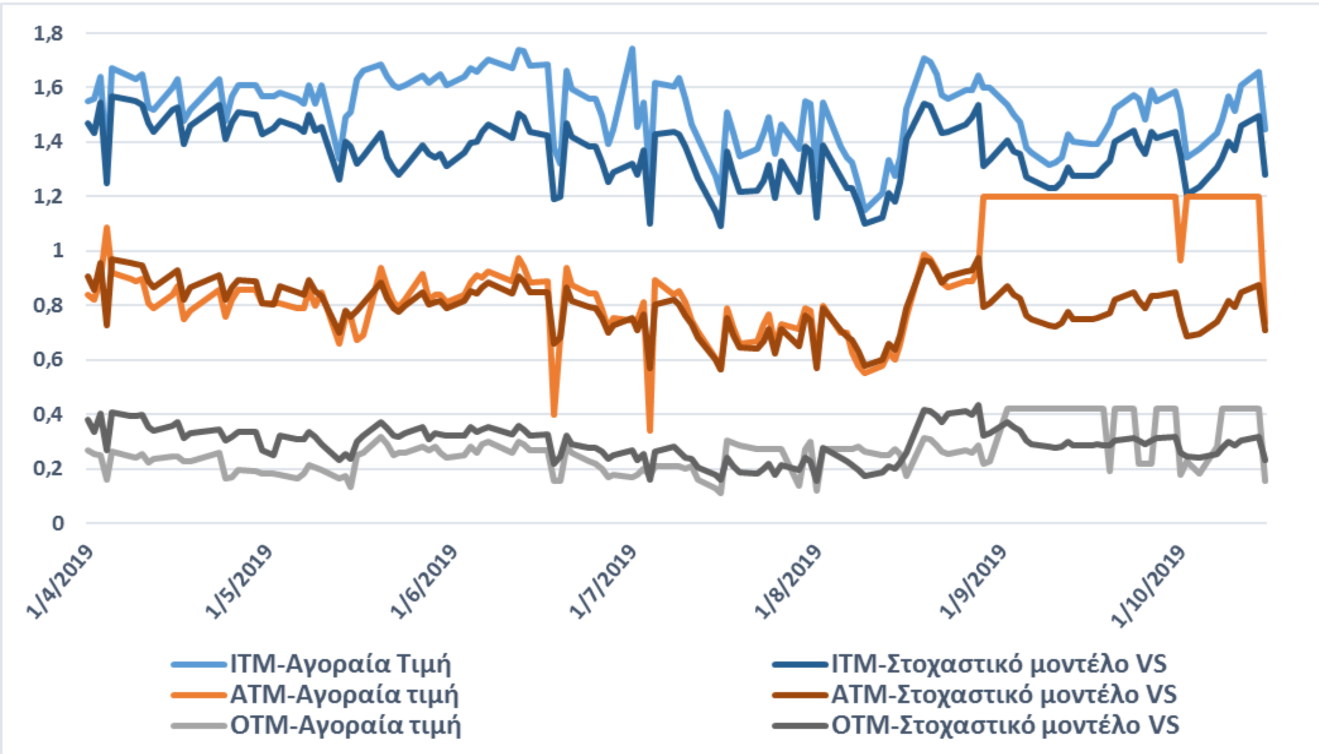
• **Διάγραμμα 1:** *Τιμές call options λήξης 1 εβδομάδας ανά moneyness .*



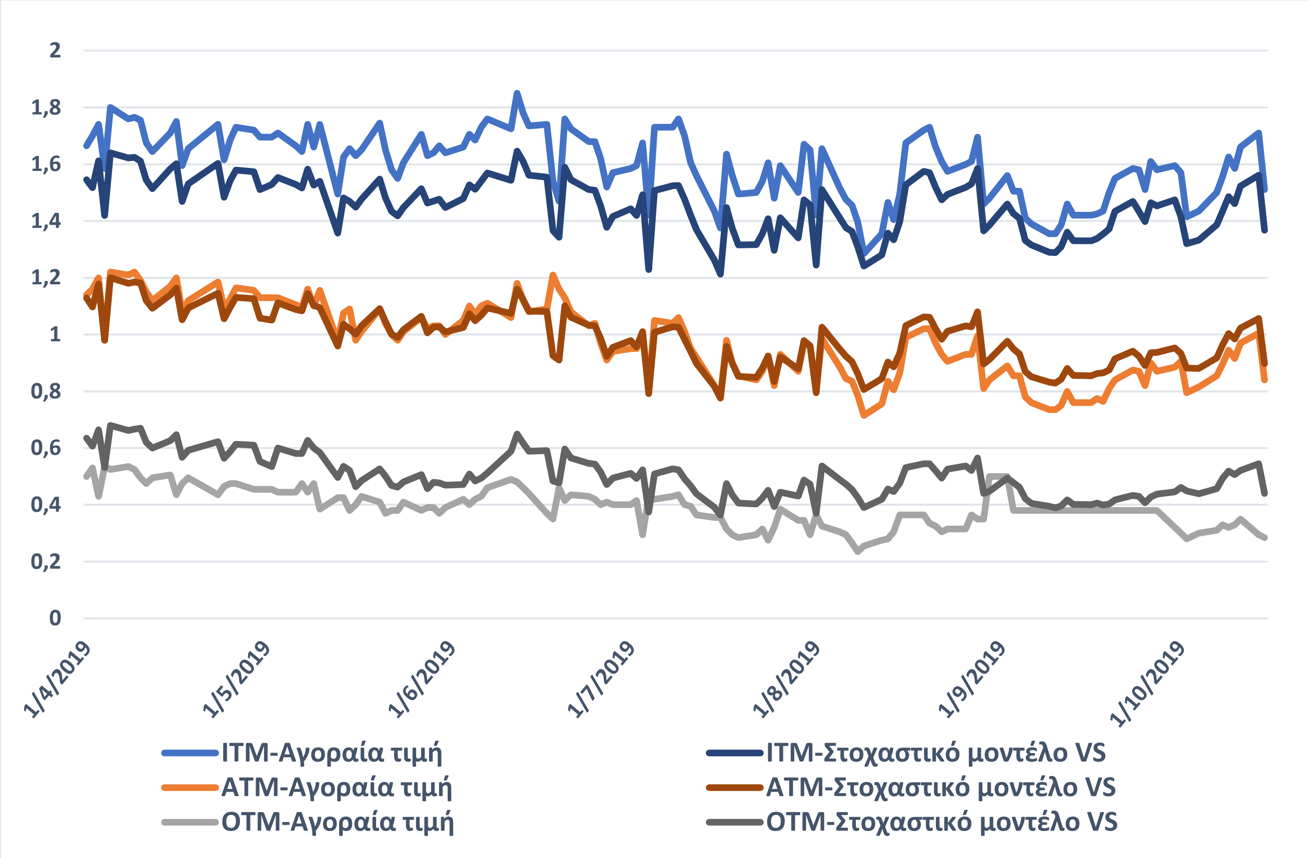
• **<u>Διάγραμμα 2:</u>** *Τιμές call options λήξης 1 μήνα ανά moneyness .*



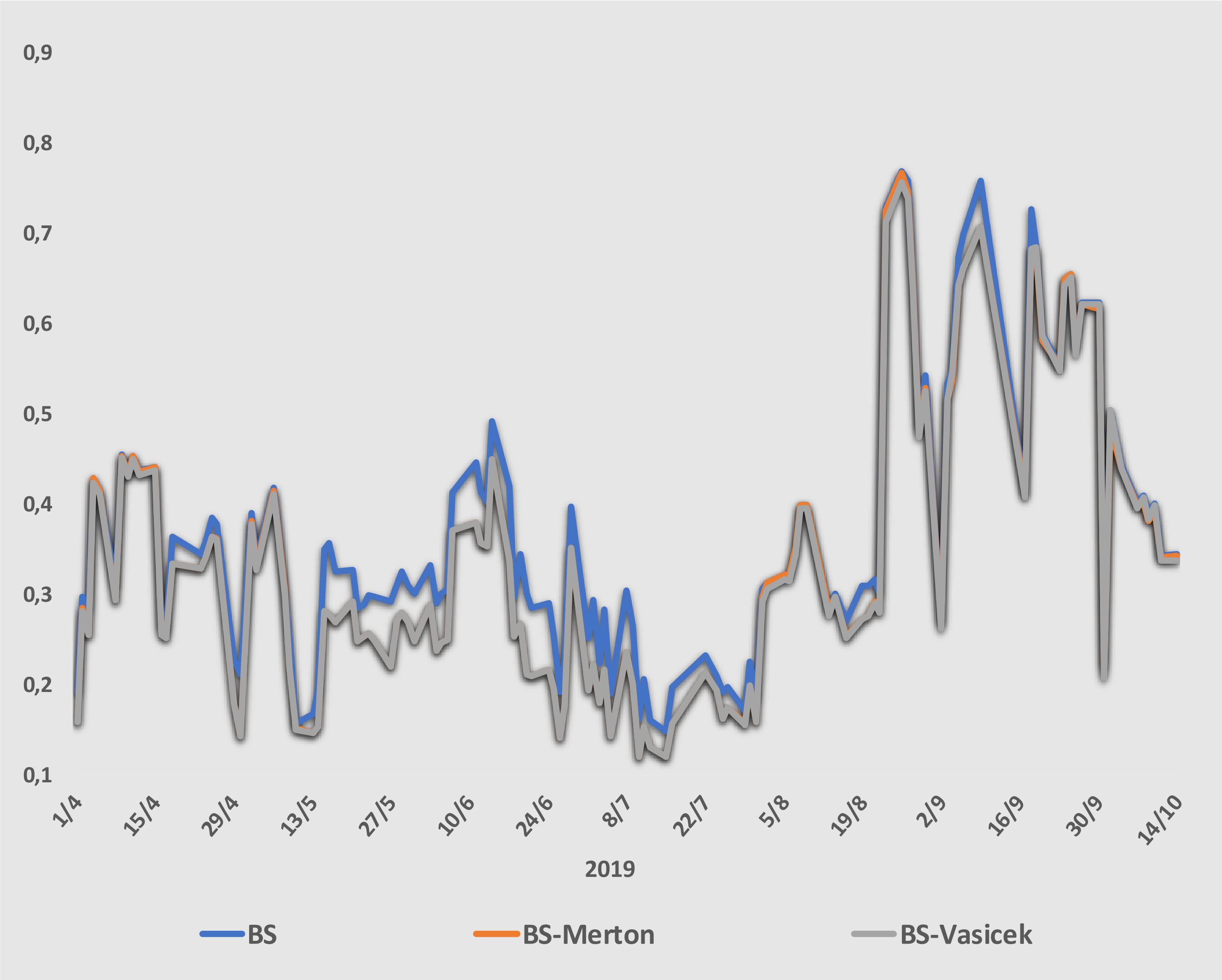
• **<u>Διάγραμμα 3:</u>** *Τιμές call options λήξης 6 μηνών ανά moneyness .*



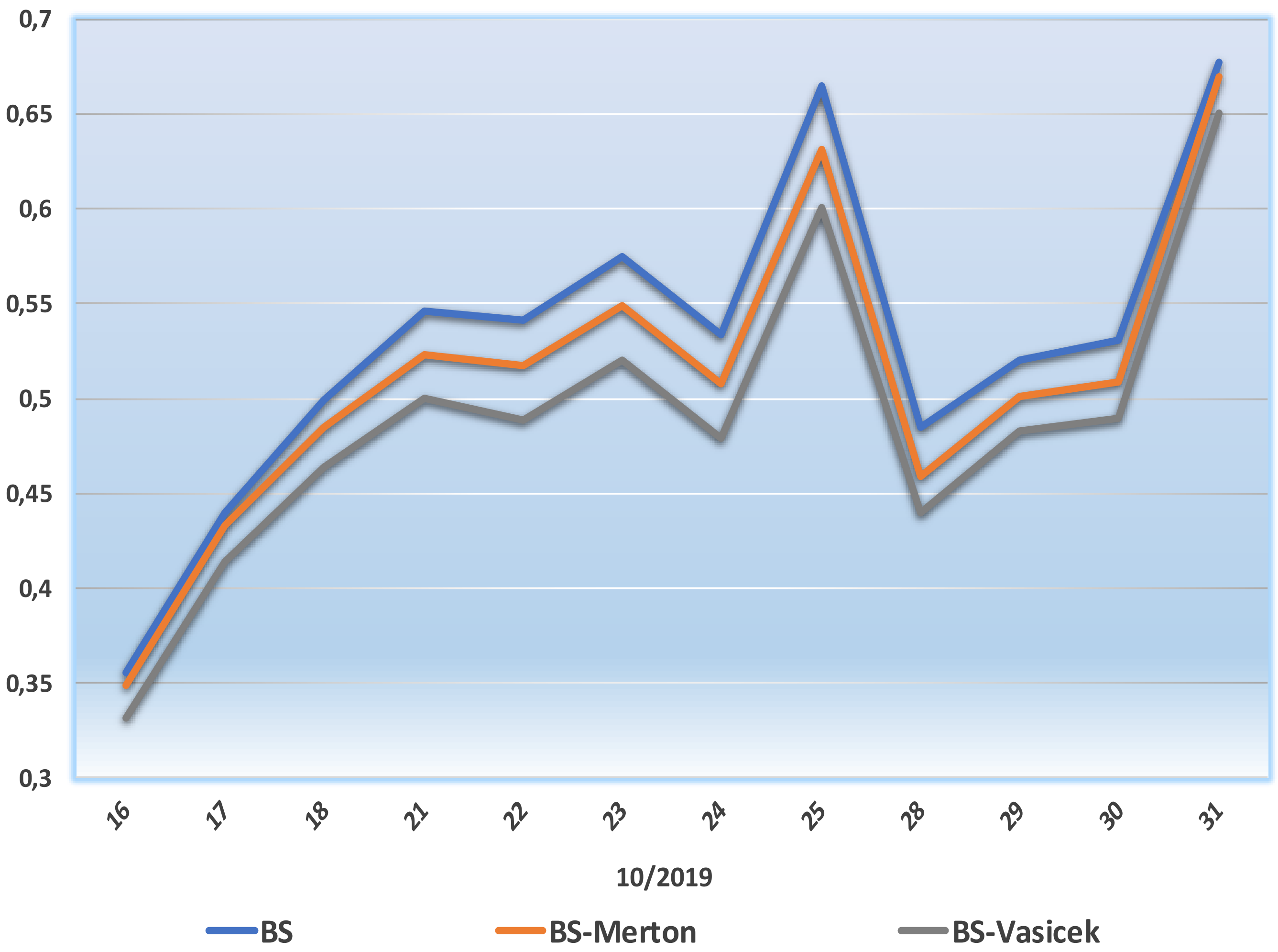
•**<u>Διάγραμμα 4:</u>** *Τιμές call options λήξης 1 έτους ανά moneyness .*



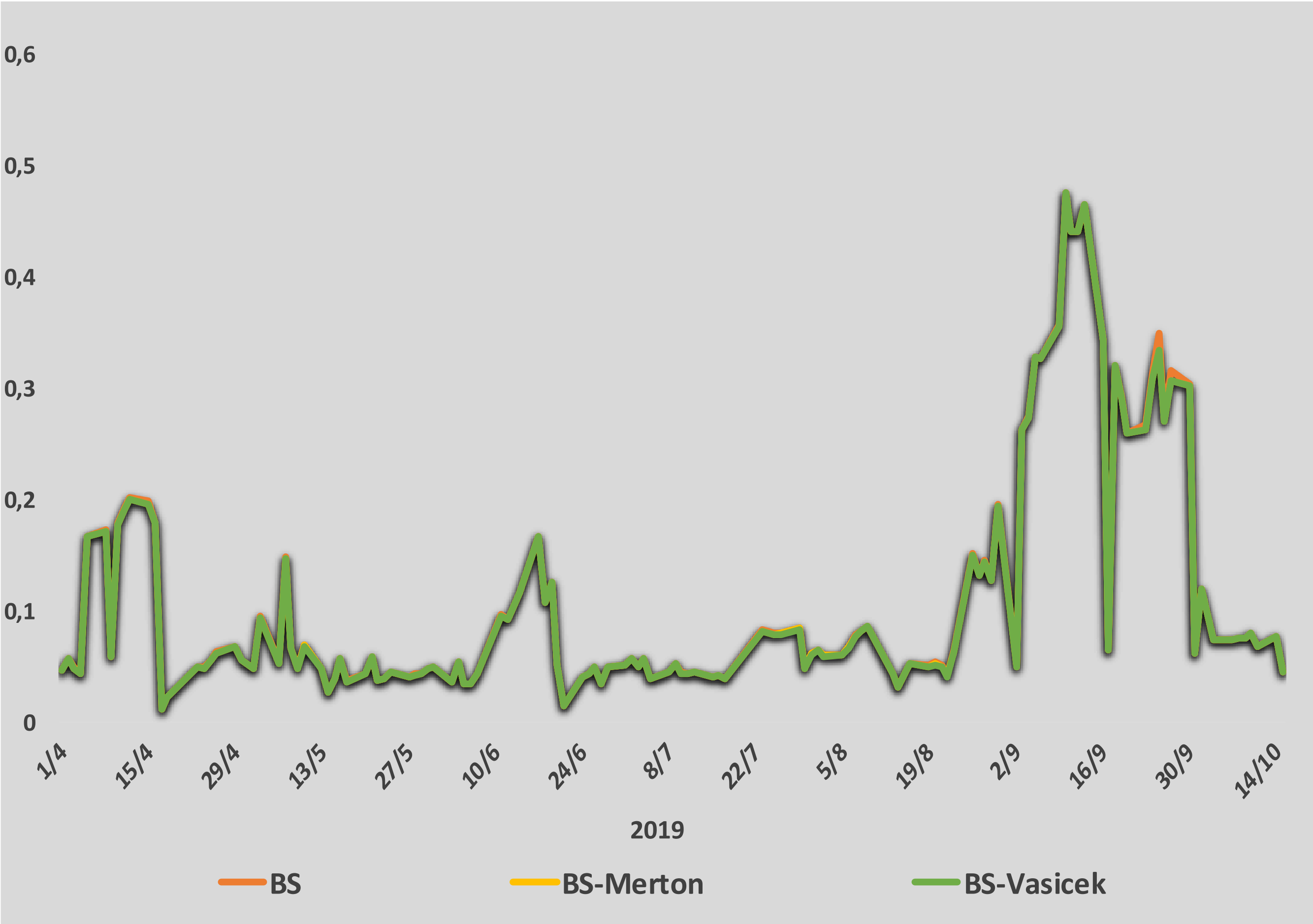
Διάγραμμα 5: *Κατάλοιπα προσαρμογής* ***εντός δείγματος*** *παρατήρησης υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 1*** *(2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο* ***σύνολο*** *24 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom.*



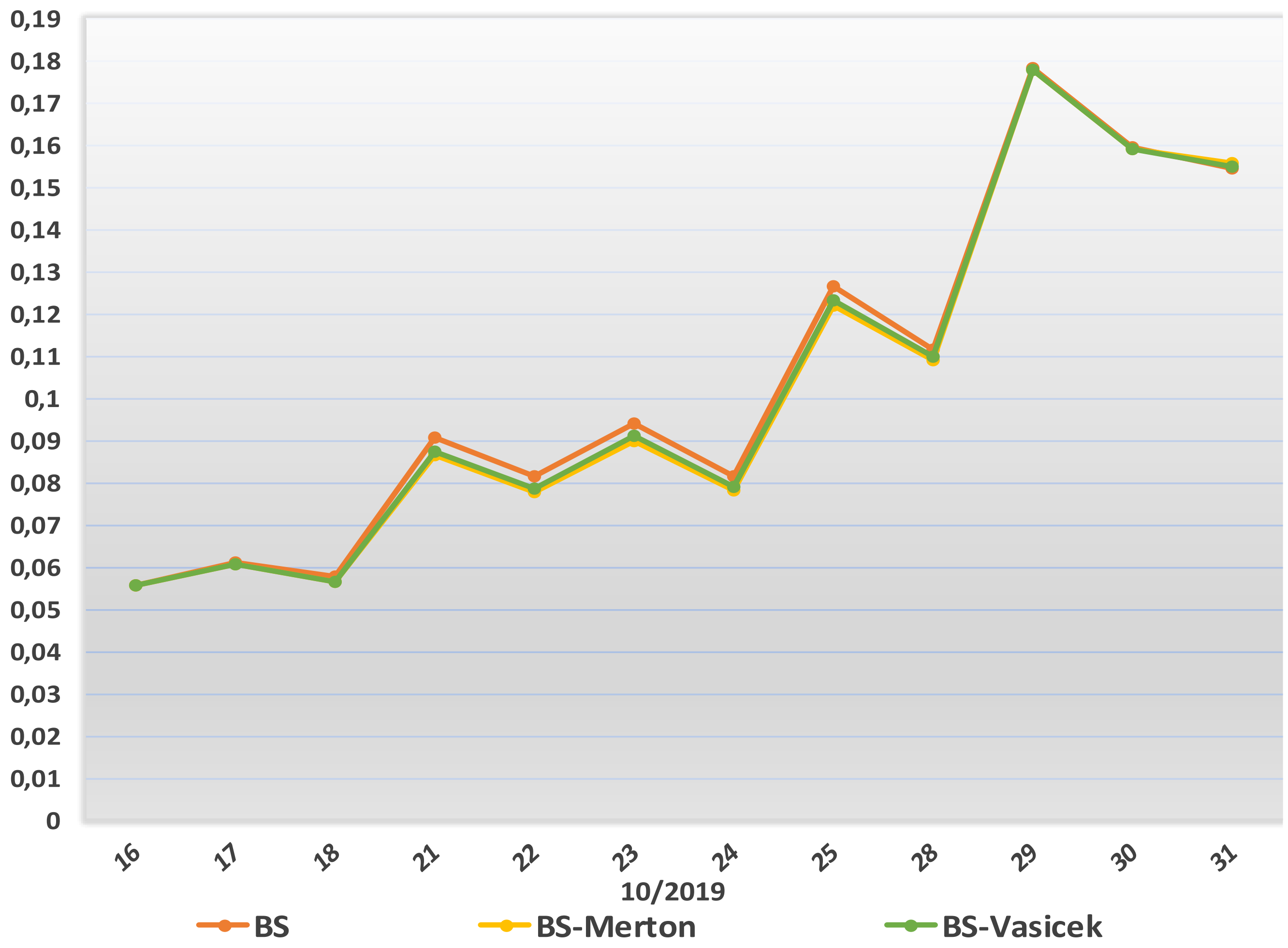
<u>Διάγραμμα 6:</u> *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών* ***εκτός δείγματος*** *παρατήρησης με μέσες εκτιμημένες παραμέτρους υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 1*** *(2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο* ***σύνολο*** *24 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom.*



<u>**Διάγραμμα 7**</u>: *Κατάλοιπα προσαρμογής* ***εντός δείγματος*** *παρατήρησης υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 1*** *(2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***βραχυπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (1 εβδομάδα και 1 μήνας) .*

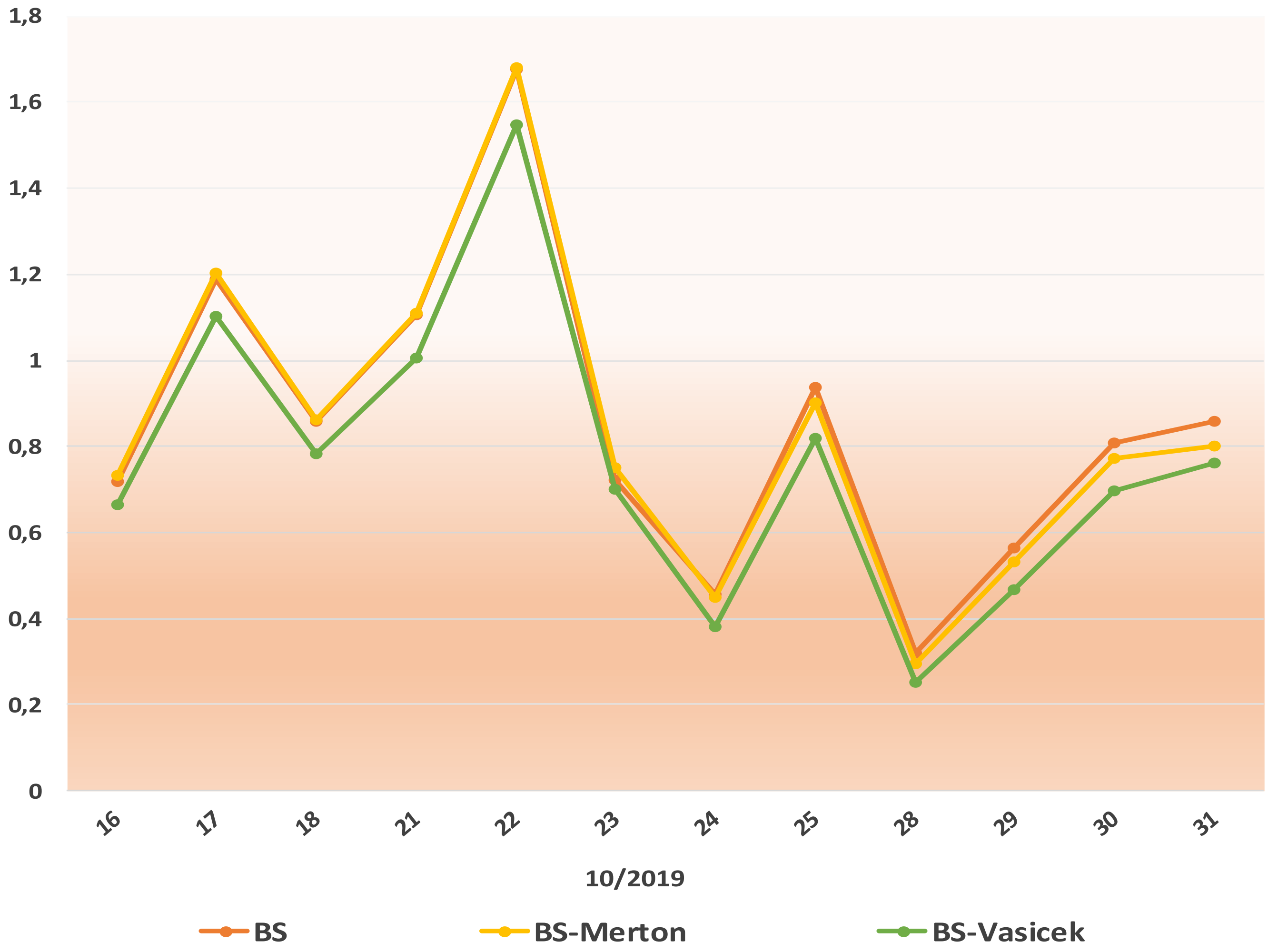


<u>Διάγραμμα 8:</u> *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών* ***εκτός δείγματος*** *παρατήρησης με μέσες εκτιμημένες παραμέτρους υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 1*** *(2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***βραχυπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (1 εβδομάδα και 1 μήνας) .*

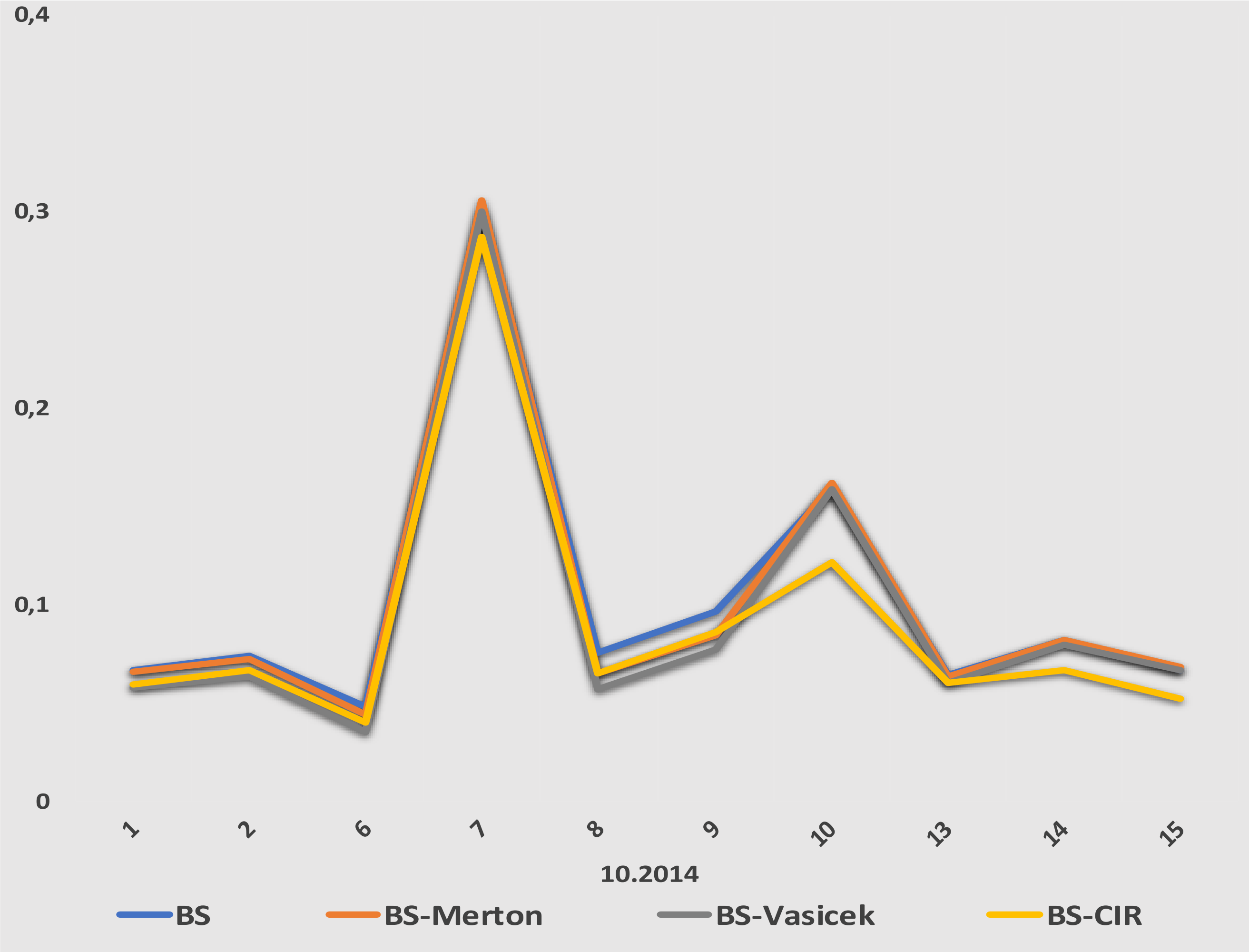


<u>**Διάγραμμα 9**</u>: *Κατάλοιπα προσαρμογής* ***εντός δείγματος*** *παρατήρησης υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 1*** *(2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***μακροπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (6 μήνες και 1 χρόνος).*

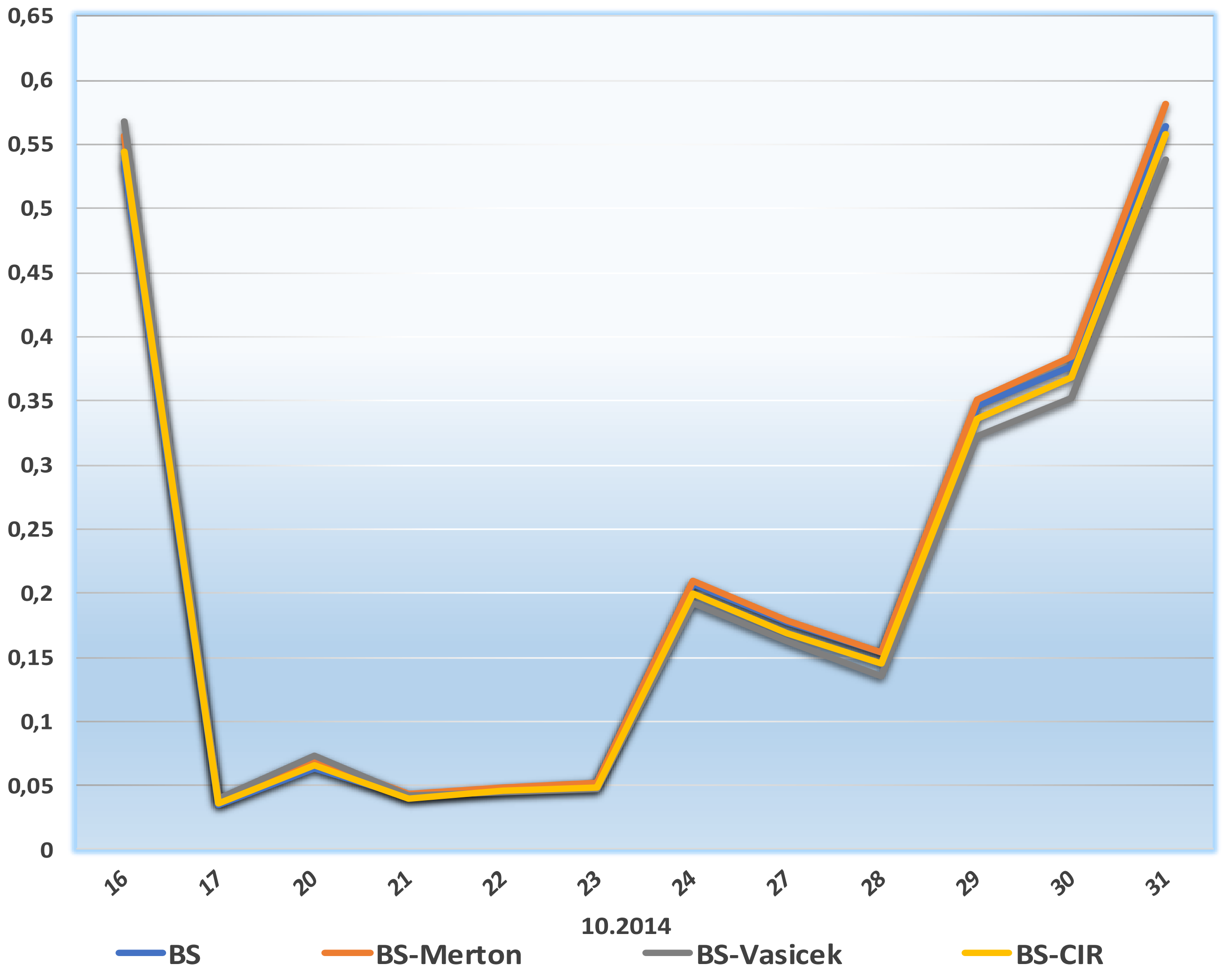
<u>Διάγραμμα 10:</u> *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών **εκτός δείγματος** παρατήρησης με μέσες εκτιμημένες παραμέτρους υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο **Δείγμα 1** (2019-αρνητικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom **μακροπρόθεσμων** ληκτοτήτων (6 μήνες και 1 χρόνος).*



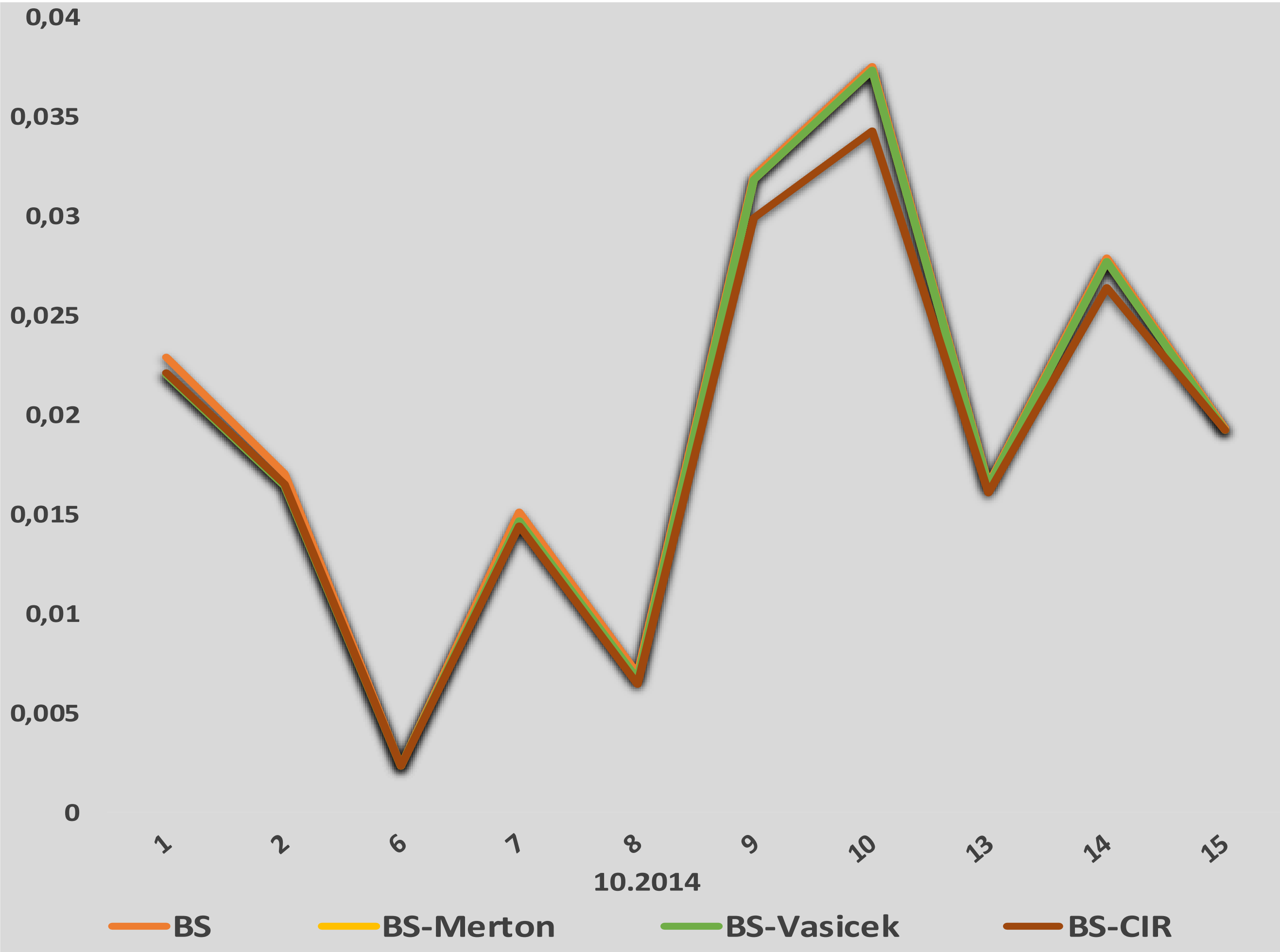
<u>Διάγραμμα 11</u>: *Κατάλοιπα προσαρμογής* ***εντός δείγματος*** *παρατήρησης υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-CIR, BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 2*** *(2014-θετικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο* ***σύνολο*** *24 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom.*



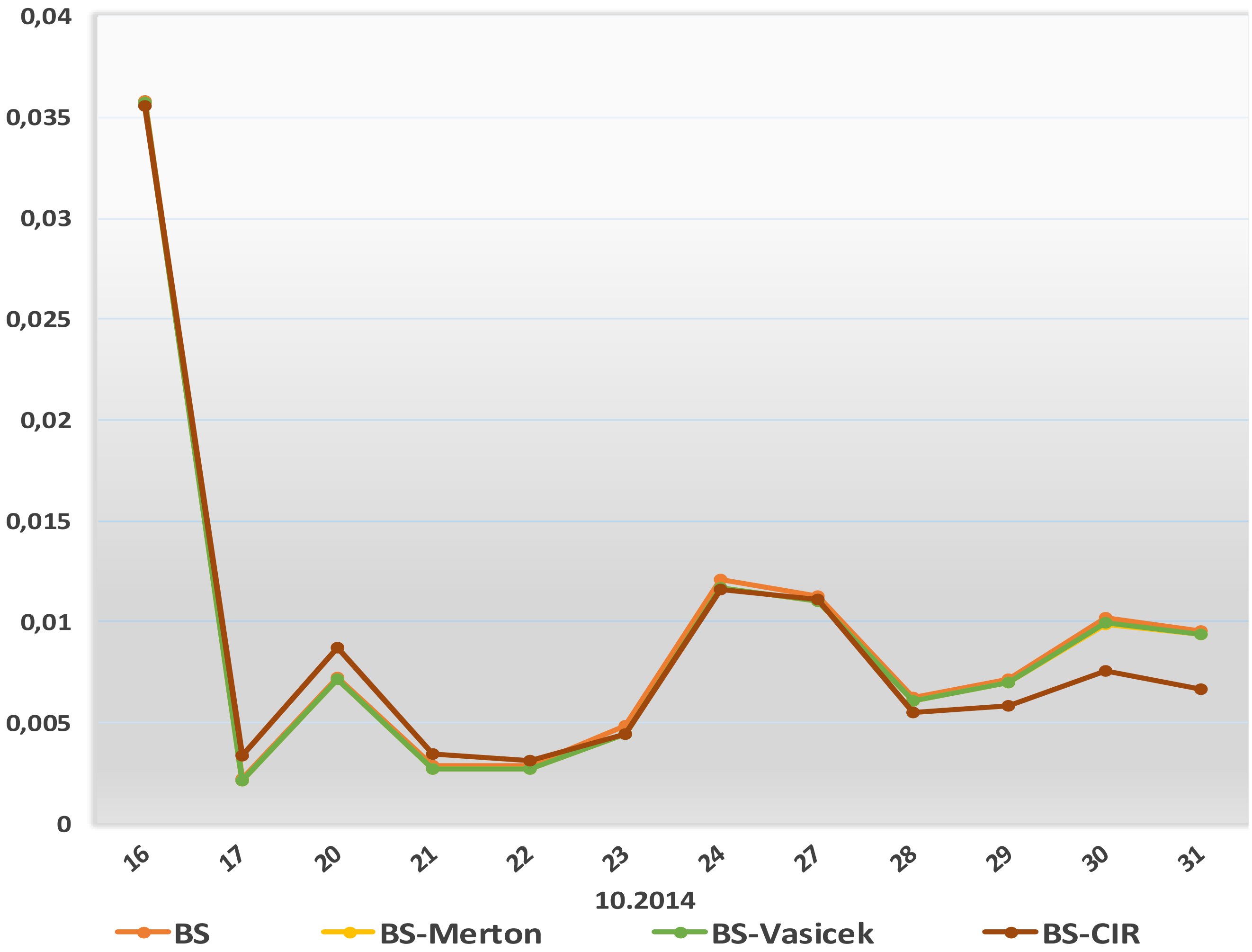
<u>**Διάγραμμα 12:**</u> *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών **εκτός δείγματος** παρατήρησης με μέσες εκτιμημένες παραμέτρους υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-CIR, BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο **Δείγμα 2** (2014-θετικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο **σύνολο** 24 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom.*



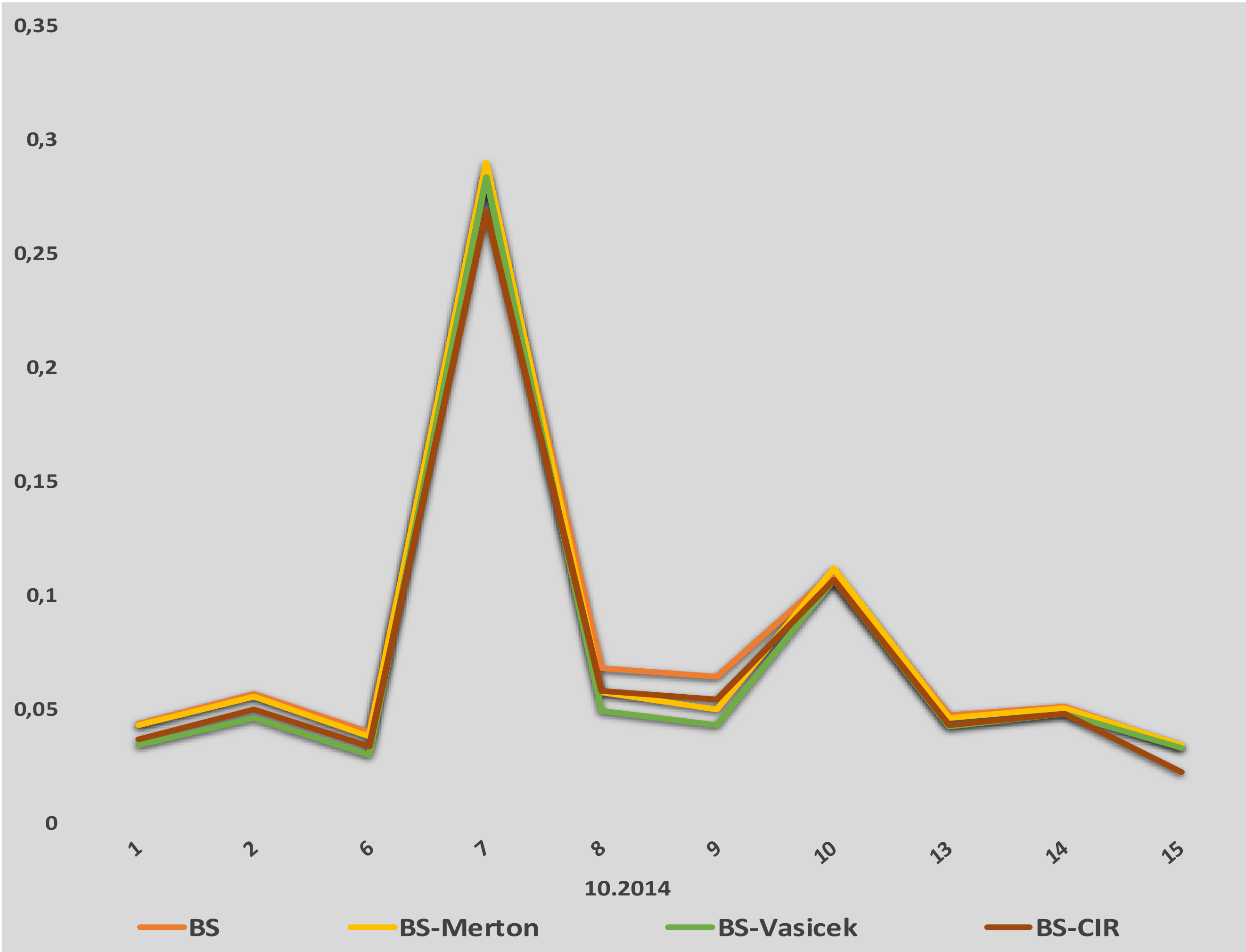
<u>**Διάγραμμα 13**</u>: *Κατάλοιπα προσαρμογής* ***εντός δείγματος*** *παρατήρησης υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-CIR, BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 2*** *(2014-θετικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***βραχυπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (1 εβδομάδα και 1 μήνας) .*



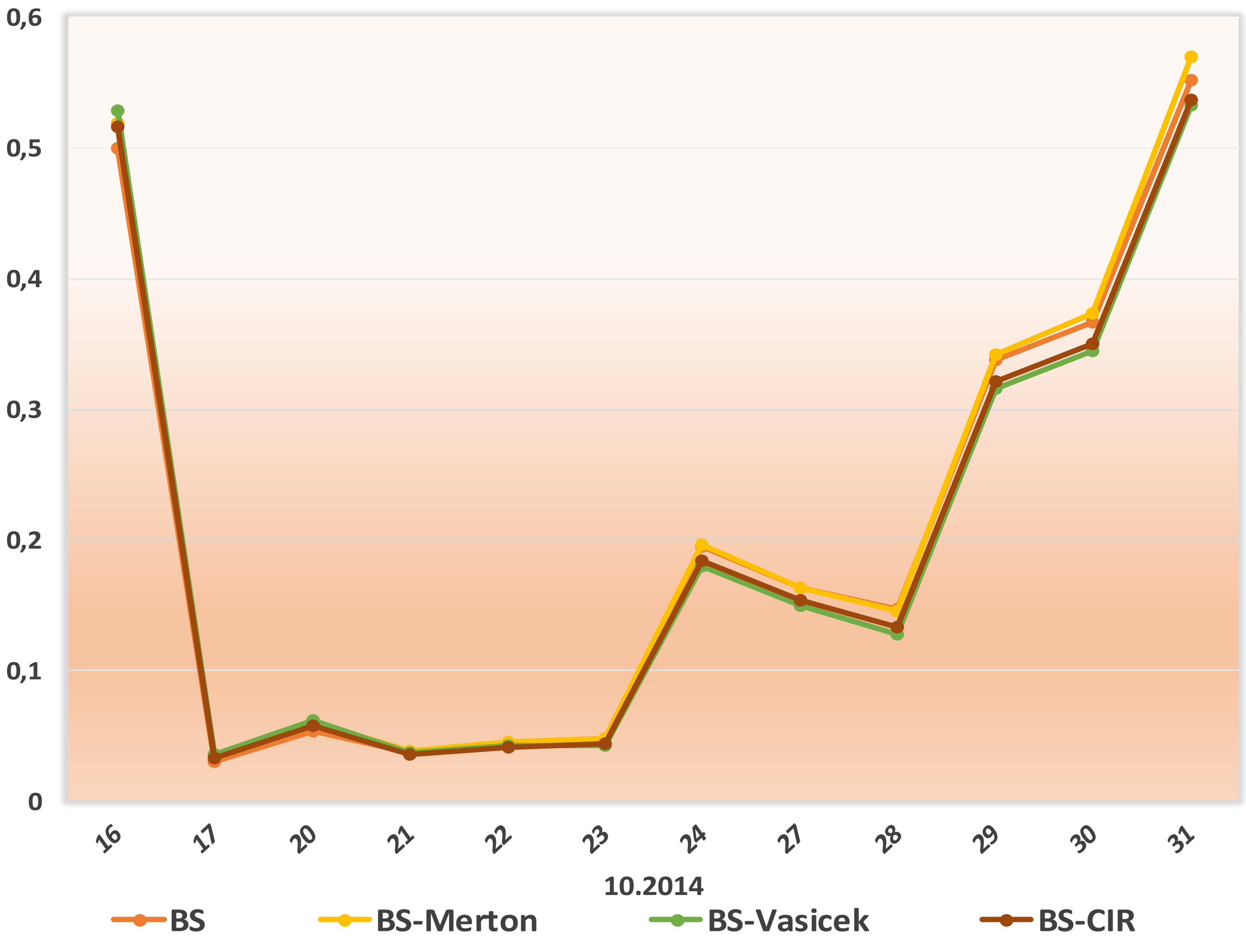
<u>Διάγραμμα 14:</u> *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών* ***εκτός δείγματος*** *παρατήρησης με μέσες εκτιμημένες παραμέτρους υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-CIR, BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 2*** *(2014-θετικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***βραχυπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (1 εβδομάδα και 1 μήνας).*



<u>**Διάγραμμα 15**</u>: *Κατάλοιπα προσαρμογής* ***εντός δείγματος*** *παρατήρησης υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-CIR, BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 2*** *(2014-θετικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***μακροπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (6 μήνες και 1 χρόνος).*



Διάγραμμα 16: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών* ***εκτός δείγματος*** *παρατήρησης με μέσες εκτιμημένες παραμέτρους υπό σταθερό επιτόκιο (BS) και γενίκευσης στοχαστικού επιτοκίου (BS-CIR, BS-VS και υποπερίπτωσης BS-Merton) στο* ***Δείγμα 2*** *(2014-θετικά, σχεδόν μηδενικά επιτόκια) σε ημερήσιο σύνολο 12 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μετοχής Deutsche Telekom* ***μακροπρόθεσμων*** *ληκτοτήτων (6 μήνες και 1 χρόνος).*



b) Πίνακες

Πίνακας 1: *Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton και BS-VS στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς (2019).*

	Γνωστό επιτόκιο	**Στοχαστικό επιτόκιο**								
Μοντέλο	**BS**	**BS-Merton**				**BS-Vasicek**				
Παράμετρος	*σ*	*α*	*ξ*	*ρ*	*σ*	*α*	*β*	*ξ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	0,2103	0,0119	0,0127	0,6846	0,2033	0,0257	3,2104	0,0108	0,6911	0,2013
Διάμεσος	0,2098	0,04	0,02	1	0,2035	0,04	0,4348	0,0117	1	0,1999
Τυπική Απόκλιση	0,0111	0,0464	0,0086	0,6947	0,0198	0,0447	4,0539	0,0085	0,6792	0,0189
Ελάχιστο	0,1845	-0,1545	0,001	-1	0,1670	-0,1548	0,01	0,001	-1	0,1670
Μέγιστο	0,2358	0,04	0,02	1	0,2505	0,0400	10	0,02	1	0,2505

Πίνακας 2: *Αποτελέσματα καταλοίπων προσαρμογής in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton και BS-VS στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς (2019).*

Μοντέλο Least Squares	Γνωστό επιτόκιο	Στοχαστικό επιτόκιο	
	BS	*BS-Merton*	*BS-Vasicek*
Μέσος	0,3804	0,3525	0,3512
Διάμεσος	0,3242	0,2936	0,2914
Τυπική Απόκλιση	0,1714	0,1776	0,1773
Ελάχιστο	0,1478	0,1190	0,1190
Μέγιστο	0,8888	0,8433	0,8434

Πίνακας 3: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών προβλεπτικής ικανότητας out-of-sample με μέσες εκτιμώμενες παραμέτρους (16/10/19-31/10/19) για τα μοντέλα BS, BS-Merton,BS-VS στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς.*

Μοντέλο Least Squares	Γνωστό επιτόκιο	Στοχαστικό επιτόκιο	
	BS	*BS-Merton*	*BS-Vasicek*
Μέσος	0,5308	0,5112	0,4886
Διάμεσος	0,5324	0,5080	0,4861
Τυπική Απόκλιση	0,0876	0,0837	0,0817
Ελάχιστο	0,3551	0,3490	0,3316
Μέγιστο	0,6779	0,6694	0,6508

Πίνακας 4: *Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton και BS-VS στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς βραχυπρόθεσμης ληκτότητας (2019).*

	Γνωστό επιτόκιο	***Στοχαστικό επιτόκιο***								
Μοντέλο	***BS***	***BS-Merton***				***BS-Vasicek***				
Παράμετρος	*σ*	*α*	*ξ*	*ρ*	*σ*	*α*	*β*	*ξ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	0,2075	-0,0595	0,0098	0,3154	0,2083	-0,0678	8,4670	0,0097	0,3228	0,2081
Διάμεσος	0,2025	0,04	0,001	1	0,2010	0,0400	10	0,0013	0,9999	0,2007
Τυπική Απόκλιση	0,0308	0,3106	0,0094	0,9328	0,0327	0,3394	3,4353	0,0094	0,9330	0,0328
Ελάχιστο	0,1510	-1,7145	0,001	-1	0,1484	-1,7306	0,01	0,001	-1	0,1482
Μέγιστο	0,2632	0,04	0,02	1	0,2632	0,0400	10	0,02	1	0,2632

Πίνακας 5: *Αποτελέσματα καταλοίπων προσαρμογής in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton και BS-VS στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς βραχυπρόθεσμης ληκτότητας (2019).*

Μοντέλο Least Squares	**Γνωστό επιτόκιο**	**Στοχαστικό επιτόκιο**	
	BS	***BS-Merton***	***BS-Vasicek***
Μέσος	0,1098	0,1091	0,1090
Διάμεσος	0,0609	0,0606	0,0606
Τυπική Απόκλιση	0,1054	0,1048	0,1048
Ελάχιστο	0,0116	0,0114	0,0114
Μέγιστο	0,4758	0,4756	0,4756

Πίνακας 6: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών προβλεπτικής ικανότητας out-of-sample με μέσες εκτιμώμενες παραμέτρους (16/10/19-31/10/19) για τα μοντέλα BS, BS-Merton,BS-VS στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς βραχυπρόθεσμης ληκτότητας .*

Μοντέλο Least Squares	**Γνωστό επιτόκιο**	**Στοχαστικό επιτόκιο**	
	BS	***BS-Merton***	***BS-Vasicek***
Μέσος	0,1045	0,1026	0,1030
Διάμεσος	0,0924	0,0883	0,0894
Τυπική Απόκλιση	0,0420	0,0425	0,0424
Ελάχιστο	0,0558	0,0558	0,0556
Μέγιστο	0,1784	0,1783	0,1781

Πίνακας 7: *Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton και BS-VS στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μακροπρόθεσμης ληκτότητας (2019).*

	Γνωστό επιτόκιο	***Στοχαστικό επιτόκιο***								
Μοντέλο	***BS***	***BS-Merton***				***BS-Vasicek***				
Παράμετρος	*σ*	*α*	*ξ*	*ρ*	*σ*	*α*	*β*	*ξ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	0,2103	0,0207	0,0130	0,6376	0,2001	0,04	3,5480	0,0111	0,6366	0,1971
Διάμεσος	0,2094	0,04	0,02	1	0,2008	0,04	1,9854	0,0127	1	0,1981
Τυπική Απόκλιση	0,0113	0,0311	0,0084	0,7410	0,0177	0	4,0707	0,0085	0,7415	0,0149
Ελάχιστο	0,1849	-0,0678	0,001	-1	0,1627	0,04	0,01	0,001	-1	0,1627
Μέγιστο	0,2332	0,04	0,02	1	0,2365	0,04	10	0,02	1	0,2263

Πίνακας 8: *Αποτελέσματα καταλοίπων προσαρμογής in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton και BS-VS στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μακροπρόθεσμης ληκτότητας (2019).*

Μοντέλο Least Squares	**Γνωστό επιτόκιο**	**Στοχαστικό επιτόκιο**	
	BS	***BS-Merton***	***BS-Vasicek***
Μέσος	0,2555	0,2324	0,2310
Διάμεσος	0,2521	0,2299	0,2284
Τυπική Απόκλιση	0,0893	0,0968	0,0962
Ελάχιστο	0,1023	0,0738	0,0739
Μέγιστο	0,6458	0,6434	0,6375

Πίνακας 9: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών προβλεπτικής ικανότητας out-of-sample με μέσες εκτιμώμενες παραμέτρους (16/10/19-31/10/19) για τα μοντέλα BS, BS-Merton,BS-VS στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μακροπρόθεσμης ληκτότητας .*

Μοντέλο Least Squares	**Γνωστό επιτόκιο**	**Στοχαστικό επιτόκιο**	
	BS	***BS-Merton***	***BS-Vasicek***
Μέσος	0,8507	0,8445	0,7651
Διάμεσος	0,8085	0,7725	0,6995
Τυπική Απόκλιση	0,3772	0,3853	0,3612
Ελάχιστο	0,3201	0,2952	0,2533
Μέγιστο	1,6761	1,6804	1,5472

Πίνακας 10: *Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton, BS-VS και BS-CIR στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς (2014).*

	Γνωστό επιτόκιο	*Στοχαστικό επιτόκιο*								
Μοντέλο	***BS***	***BS-Merton***				***BS-Vasicek***				
Παράμετρος	*σ*	*α*	*ξ*	*ρ*	*σ*	*α*	*β*	*ξ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	0,2474	0,0185	0,0148	1	0,2401	0,0820	6,2698	0,0150	1	0,2368
Διάμεσος	0,2474	0,0123	0,02	1	0,2379	0,1	5,5629	0,02	1	0,2323
Τυπική Απόκλιση	0,0123	0,0114	0,0084	0	0,0152	0,0379	3,0361	0,0083	0	0,0185
Ελάχιστο	0,2267	0,01	0,001	1	0,2155	0,01	2,68	0,001	1	0,2102
Μέγιστο	0,2637	0,0387	0,02	1	0,2599	0,1	10	0,02	1	0,2614

	BS-CIR					
Παράμετρος	*κ*	*ϑ*	*λ*	*δ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	5,9331	0,0100	10,0000	0,0200	0,4003	0,2406
Διάμεσος	9,4653	0,0100	10,0000	0,0200	0,5007	0,2403
Τυπική Απόκλιση	5,0308	0,0000	0,0000	0,0000	0,6990	0,0122
Ελάχιστο	0,1000	0,0100	10,0000	0,0200	-1,0000	0,2203
Μέγιστο	10,0000	0,0100	10,0000	0,0200	1,0000	0,2544

Πίνακας 11: *Αποτελέσματα καταλοίπων προσαρμογής in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton, BS-VS και BS-CIR στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς (2014).*

Μοντέλο Least Squares	Γνωστό επιτόκιο	Στοχαστικό επιτόκιο		
	BS	*BS-Merton*	*BS-Vasicek*	*BS-CIR*
Μέσος	0,1031	0,1010	0,0953	0,0902
Διάμεσος	0,0743	0,0702	0,0649	0,0654
Τυπική Απόκλιση	0,0756	0,0785	0,0790	0,0725
Ελάχιστο	0,0477	0,0436	0,0346	0,0395
Μέγιστο	0,3002	0,3055	0,3000	0,2868

Πίνακας 12: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών προβλεπτικής ικανότητας out-of-sample με μέσες εκτιμώμενες παραμέτρους (16/10/14-31/10/14) για τα μοντέλα BS, BS-Merton,BS-VS και BS-CIR στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς.*

Μοντέλο Least Squares	Γνωστό επιτόκιο	Στοχαστικό επιτόκιο		
	BS	*BS-Merton*	*BS-Vasicek*	*BS-CIR*
Μέσος	0,2165	0,2224	0,2098	0,2132
Διάμεσος	0,1654	0,1659	0,1490	0,1573
Τυπική Απόκλιση	0,1941	0,1996	0,1923	0,1938
Ελάχιστο	0,0341	0,0396	0,0399	0,0360
Μέγιστο	0,5640	0,5822	0,5684	0,5582

Πίνακας 13: *Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton, BS-VS και BS-CIR στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς βραχυπρόθεσμης ληκτότητας (2014).*

	Γνωστό επιτόκιο	***Στοχαστικό επιτόκιο***								
Μοντέλο	***BS***	***BS-Merton***				***BS-Vasicek***				
Παράμετρος	*σ*	*α*	*ξ*	*ρ*	*σ*	*α*	*β*	*ξ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	0,2587	0,1	0,0067	0,8006	0,2572	0,0999	0,0784	0,0038	0,7919	0,2573
Διάμεσος	0,2466	0,1	0,001	1	0,2453	0,1	0,01	0,001	1	0,2453
Τυπική Απόκλιση	0,0429	0	0,0091	0,6304	0,0432	0,0003	0,2045	0,0059	0,4568	0,0431
Ελάχιστο	0,1856	0,1	0,001	-0,994	0,1838	0,0991	0,01	0,001	-0,3257	0,1842
Μέγιστο	0,3259	0,1	0,02	1	0,3248	0,1	0,6596	0,0198	1	0,3248
		BS-CIR								
Παράμετρος		*κ*	*ϑ*	*λ*	*δ*	*ρ*	*σ*			
Μέσος		6,9347	0,0092	9,6506	0,0195	0,7459	0,2471			
Διάμεσος		6,3868	0,0100	10,0000	0,0200	1,0000	0,2321			
Τυπική Απόκλιση		2,8621	0,0026	1,1029	0,0016	0,5691	0,0376			
Ελάχιστο		3,3018	0,0019	6,5118	0,0149	-0,8095	0,1861			
Μέγιστο		10,0000	0,0100	10,0000	0,0200	1,0000	0,3158			

Πίνακας 14: *Αποτελέσματα καταλοίπων προσαρμογής in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton, BS-VS και BS-CIR στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς βραχυπρόθεσμης ληκτότητας (2014).*

Μοντέλο Least Squares	**Γνωστό επιτόκιο**	**Στοχαστικό επιτόκιο**		
	BS	***BS-Merton***	***BS-Vasicek***	***BS-CIR***
Μέσος	0,0198	0,0195	0,0195	0,0188
Διάμεσος	0,0182	0,0178	0,0178	0,0178
Τυπική Απόκλιση	0,0108	0,0108	0,0108	0,0100
Ελάχιστο	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023
Μέγιστο	0,0375	0,0373	0,0373	0,0343

Πίνακας 15: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών προβλεπτικής ικανότητας out-of-sample με μέσες εκτιμώμενες παραμέτρους (16/10/14-31/10/14) για τα μοντέλα BS, BS-Merton,BS-VS και BS-CIR στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς βραχυπρόθεσμης ληκτότητας .*

Μοντέλο Least Squares	**Γνωστό επιτόκιο**	**Στοχαστικό επιτόκιο**		
	BS	***BS-Merton***	***BS-Vasicek***	***BS-CIR***
Μέσος	0,0094	0,0092	0,0092	0,0089
Διάμεσος	0,0072	0,0071	0,0071	0,0063
Τυπική Απόκλιση	0,0090	0,0090	0,0090	0,0089
Ελάχιστο	0,0022	0,0021	0,0021	0,0031
Μέγιστο	0,0358	0,0358	0,0357	0,0356

Πίνακας 16: *Αποτελέσματα εκτίμησης παραμέτρων in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton, BS-VS και BS-CIR στο σύνολο δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς μακροπρόθεσμης ληκτότητας (2014).*

	Γνωστό επιτόκιο	**Στοχαστικό επιτόκιο**								
Μοντέλο	**BS**	**BS-Merton**				**BS-Vasicek**				
Παράμετρος	*σ*	*α*	*ξ*	*ρ*	*σ*	*α*	*β*	*ξ*	*ρ*	*σ*
Μέσος	0,2470	0,0184	0,02	1	0,2396	0,0910	5,8361	0,0198	1	0,2349
Διάμεσος	0,2473	0,0139	0,02	1	0,2371	0,1000	5,0285	0,02	1	0,2311
Τυπική Απόκλιση	0,0116	0,0115	0	0	0,0141	0,0285	2,7666	0,0004	0	0,0168
Ελάχιστο	0,2278	0,01	0,02	1	0,2199	0,0100	2,4074	0,0187	1	0,2125
Μέγιστο	0,2619	0,0421	0,02	1	0,2581	0,1000	10,0000	0,02	1	0,2590

		BS-CIR					
Παράμετρος		*κ*	*ϑ*	*λ*	*δ*	*ρ*	*σ*
Μέσος		8,2779	0,0094	9,3703	0,0199	0,4121	0,2395
Διάμεσος		10,0000	0,0100	10,0000	0,0200	1,0000	0,2402
Τυπική Απόκλιση		3,6307	0,0020	1,9913	0,0003	0,9426	0,0111
Ελάχιστο		1,3256	0,0037	3,7029	0,0191	-1,0000	0,2212
Μέγιστο		10,0000	0,0100	10,0000	0,0200	1,0000	0,2551

Πίνακας 17: *Αποτελέσματα καταλοίπων προσαρμογής in-sample για τα μοντέλα BS, BS-Merton, BS-VS και BS-CIR στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μακροπρόθεσμης ληκτότητας (2014).*

Μοντέλο Least Squares	Γνωστό επιτόκιο	Στοχαστικό επιτόκιο		
	BS	*BS-Merton*	*BS-Vasicek*	*BS-CIR*
Μέσος	0,0797	0,0774	0,0715	0,0720
Διάμεσος	0,0537	0,0502	0,0445	0,0488
Τυπική Απόκλιση	0,0749	0,0777	0,0777	0,0726
Ελάχιστο	0,0337	0,0340	0,0300	0,0219
Μέγιστο	0,2840	0,2897	0,2837	0,2683

Πίνακας 18: *Αθροίσματα τετραγώνων διαφορών προβλεπτικής ικανότητας out-of-sample με μέσες εκτιμώμενες παραμέτρους (16/10/14-31/10/14) για τα μοντέλα BS, BS-Merton,BS-VS και BS-CIR στα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς μακροπρόθεσμης ληκτότητας.*

Μοντέλο Least Squares	Γνωστό επιτόκιο	Στοχαστικό επιτόκιο		
	BS	*BS-Merton*	*BS-Vasicek*	*BS-CIR*
Μέσος	0,2062	0,2113	0,1997	0,2006
Διάμεσος	0,1550	0,1545	0,1384	0,1432
Τυπική Απόκλιση	0,1880	0,1935	0,1869	0,1865
Ελάχιστο	0,0308	0,0352	0,0352	0,0327
Μέγιστο	0,5528	0,5701	0,5329	0,5368

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ.

Κώδικες Matlab

Κώδικας 1: *Εκτίμηση παραμέτρου σ εντός δείγματος παρατήρησης στο Black-Scholes μοντέλο σταθερού παράγοντα επιτοκίου, στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό αρνητικό πρόσημο (2019).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]=BSCalibrationc(~)
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια
βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά
ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(200);
strike=zeros(200,24); % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και
χρόνου μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες
παρατηρηθείσες τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε
αντίστοιχα 12 ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές
ληκτότητες: 1 εβδομάδα & ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες:
6 μήνες & ένας χρόνος).
ttm=zeros(200,24);
marketcall=zeros(200,24);
r=zeros(200);
q=zeros(200);
parameterc=zeros(200,1); % Implied Volatility ανα ημέρα.
resc=zeros(200,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/1/19-31/10/19 (212 ημερήσιες παρατηρήσεις).Αλλάζει
το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGYdata.xls','S0','A1:A212');
strike=xlsread('DTEGYdata.xls','K','A1:X212');
ttm=xlsread('DTEGYdata.xls','ttm','A1:X212');
marketcall=xlsread('DTEGYdata.xls','callprice','A1:X212');
```

```
r=xlsread('DTEGYdata.xls','r6meur','A1:A212');
q=xlsread('DTEGYdata.xls','q','A1:A212');
BS_call_matrix=zeros(200,24); %Τιμές call με εφαρμογή BS βάσει εκτιμώμενου σ.
for i=64:200 % Από 1/4/19 μέχρι 15/10/19-in sample.
    x0=[0.1622]; % Μέση ιστορική τιμή ,βάσει εμπειρικής εκτίμησης.
    lb=[0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστης παραμέτρου.
    ub=[0.2632];% Άνω φράγμα άγνωστης παραμέτρου.
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@BSC,x0,lb,ub);
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος τετραγώνων με μια άγνωστη παράμετρο. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες ,καλείται η @BSCttm.
    parameterc(i)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24  % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
        BS_call_matrix(i,j)=BSformulac(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1));
% Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό σταθερό επιτόκιο με αντικατάσταση εκτιμώμενου ημερήσιου σ.
    end
    pricedatacall=[BS_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultscall.xls',pricedatacall,'resultsBSc','A1:X200');
xlswrite('resultscall.xls',resc,'resc','A1:A200');
xlswrite('resultscall.xls',parameterc,'parameterc','A1:A200');
end
```

***Κώδικας 2**: Εκτίμηση παραμέτρου σ εντός δείγματος παρατήρησης στο Black-Scholes μοντέλο σταθερού παράγοντα επιτοκίου, στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό θετικό πρόσημο (2014).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]=BSCalibrationc2014(~)
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια
βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά
ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24); % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και χρόνου
μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες παρατηρηθείσες
τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε αντίστοιχα 12
ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες: 1 εβδομάδα
& ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες: 6 μήνες & ένας
χρόνος).
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
parameterc=zeros(22,1); % Implied Volatility ανα ημέρα.
resc=zeros(22,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/10/14-31/10/14 (22 ημερήσιες παρατηρήσεις).
Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
BS_call_matrix=zeros(22,24); %Τιμές call με εφαρμογή BS βάσει εκτιμώμενου σ.
for i=1:10  % Από 1/10/14 μέχρι 15/10/14-in sample.
    x0=[0.2]; % Μέση ιστορική τιμή ,βάσει εμπειρικής εκτίμησης
    lb=[0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστης παραμέτρου
```

```
    ub=[0.5];% Άνω φράγμα άγνωστης παραμέτρου
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@BSC,x0,lb,ub);
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος 
τετραγώνων με μια άγνωστη παράμετρο. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες 
,καλείται η @BSCttm.
    parameterc(i)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24  % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
        BS_call_matrix(i,j)=BSformulac(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1));
    % Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό σταθερό επιτόκιο με αντικατάσταση 
εκτιμώμενου ημερήσιου σ.
    end
    pricedatacall=[BS_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedatacall,'resultsBSc2014','A1:X10');
xlswrite('resultsc2014.xls',resc,'resc2014','A1:A10');
xlswrite('resultsc2014.xls',parameterc,'parameterc2014','A1:A10');
end
```

***<u>Κώδικας 3</u>**: Υπολογισμός ημερήσιων σφαλμάτων στο απλό Black-Scholes μοντέλο για την εύρεση βέλτιστης λύσης στον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς.*

```
function [BS_errorsc]=BSC(x)
% Καλείται από την BSCalibrationc και την BSCalibrationc2014.
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global q;
global k;
BS_errorsc=zeros(1,24);
for j=1:24
 BS_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
BSformulac(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),q(k),x(1));
```

```
% Υπολογισμός σφάλματος θεωρητικής και αγοραίας τιμής για τον αλγόριθμο με μία
άγνωστη παράμετρο.
end
```

Κώδικας 4: *Υπολογισμός ημερήσιων σφαλμάτων στο απλό Black-Scholes μοντέλο για την εύρεση βέλτιστης λύσης στον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στην υποπερίπτωση των ληκτοτήτων των δικαιωμάτων αγοράς .*

```
function [BS_errorsc]=BSCttm(x)
% Καλείται 2 φορές ανά δείγμα (βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα δικαιώματα).
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global q;
global k;
BS_errorsc=zeros(1,12);
for j=1:12
 BS_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
BSformulac(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),q(k),x(1));
% Υπολογισμός σφάλματος θεωρητικής και αγοραίας τιμής για τον αλγόριθμο με μία
άγνωστη παράμετρο.
end
```

Κώδικας 5: *Κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης δικαιωμάτων αγοράς υπό γνωστό επιτόκιο με ενσωματωμένη γνωστή μερισματική απόδοση στο σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς και των υποπεριπτώσεων χρόνου μέχρι τη λήξη στα Δείγματα 1 και 2.*

```
function [Pricec] = BSformulac(S0,K,r,T,q,sigma)
% Καλείται από τις BSC, BSCttm, BSCalibrationc ,BSCalibrationc2014 και στις
υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη (τύπος BS-εξίσωση 11).
d1=(log(S0/K)+T*(r-q+0.5*(sigma^2)))/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
N1=normcdf(d1);
N2=normcdf(d2);
Pricec=S0*exp(-q*T)*N1-K*exp(-r*T)*N2;
end
```

<u>Κώδικας 6</u>: *Εκτίμηση παραμέτρων α,ξ,ρ,σ εντός δείγματος παρατήρησης στο γενικευμένο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου BS-Vasicek (υποπερίπτωση Merton), στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό αρνητικό πρόσημο (2019).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]= MertonCalibrationc(~)
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια
βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά
ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(200);
strike=zeros(200,24); % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και
χρόνου μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες
παρατηρηθείσες τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε
αντίστοιχα 12 ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές
ληκτότητες: 1 εβδομάδα & ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες:
6 μήνες & ένας χρόνος).
ttm=zeros(200,24);
marketcall=zeros(200,24);
r=zeros(200);
q=zeros(200);
parameterc=zeros(200,5); % Παράμετροι α,(β=0),ξ,ρ,σ ανα ημέρα.
resc=zeros(200,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/1/19-31/10/19 (212 ημερήσιες παρατηρήσεις).
Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGYdata.xls','S0','A1:A212');
strike=xlsread('DTEGYdata.xls','K','A1:X212');
ttm=xlsread('DTEGYdata.xls','ttm','A1:X212');
marketcall=xlsread('DTEGYdata.xls','callprice','A1:X212');
r=xlsread('DTEGYdata.xls','r6meur','A1:A212');
q=xlsread('DTEGYdata.xls','q','A1:A212');
SI_call_matrix=zeros(200,24);
%Τιμές call με εφαρμογή BS-Merton βάσει εκτιμώμενων α,ξ,ρ,σ.
for i=64:200 % Από 1/4/19 μέχρι 15/10/19-in sample.
```

```
    x0=[0,0,0.001,0,0.1622];
% Τυχαίες τιμές που ανήκουν στο εύρος προς έναρξη αλγορίθμου για α=κθ, β=0 σταθερά στην υποπερίπτωση,ξ,ρ,σ.
    lb=[-Inf,0,0.001,-1,0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    ub=[0.04,0,0.02,1,0.2632];  % Άνω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@SIC,x0,lb,ub);
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος τετραγώνων με τέσσερις άγνωστες παραμέτρους. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες ,καλείται η @SICttm.
    parameterc(i,:)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
SI_call_matrix(i,j)=Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5));
% Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό στοχαστικό επιτόκιο με αντικατάσταση εκτιμώμενων ημερησίων παραμέτρων α,ξ,ρ,σ.
    end
    pricedatacall=[SI_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultscall.xls',pricedatacall,'resultsMertonc','A1:X200');
xlswrite('resultscall.xls',resc,'resc','B1:B200');
xlswrite('resultscall.xls',parameterc,'parameterc','B1:F200');
end
```

<u>Κώδικας 7</u>: *Εκτίμηση παραμέτρων α,ξ,ρ,σ εντός δείγματος παρατήρησης στο γενικευμένο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου BS-Vasicek (υποπερίπτωση Merton), στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό θετικό πρόσημο (2014).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]=MertonCalibrationc2014(~)
clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
```

```
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια
βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά
ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);   % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και
χρόνου μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες
παρατηρηθείσες τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε
αντίστοιχα 12 ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές
ληκτότητες: 1 εβδομάδα & ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες:
6 μήνες & ένας χρόνος).
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
parameterc=zeros(22,5); % Παράμετροι α,(β=0),ξ,ρ,σ ανα ημέρα.
resc=zeros(22,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
exit=zeros(22,1);
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/10/14-31/10/14 (22 ημερήσιες παρατηρήσεις).
Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
SI_call_matrix=zeros(22,24);
%Τιμές call με εφαρμογή BS-Merton βάσει εκτιμώμενων α,ξ,ρ,σ.
for i=1:10 % Από 1/10/14 μέχρι 15/10/14-in sample.
    x0=[0,0,0.001,0,0.2];
% Τυχαίες τιμές που ανήκουν στο εύρος προς έναρξη αλγορίθμου για α=κθ, β=0 σταθερά
στην υποπερίπτωση,ξ,ρ,σ.
    lb=[0.01,0,0.001,-1,0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    ub=[0.1,0,0.02,1,0.5]; % Άνω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@SIC,x0,lb,ub);
```

```
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος τετραγώνων με τέσσερις άγνωστες παραμέτρους. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες ,καλείται η @SICttm.
    parameterc(i,:)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
SI_call_matrix(i,j)=Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5));
% Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό στοχαστικό επιτόκιο με αντικατάσταση εκτιμώμενων ημερησίων παραμέτρων α,ξ,ρ,σ.
    end
    pricedatacall=[SI_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedatacall,'resultsMertonc2014','A1:X10');
xlswrite('resultsc2014.xls',resc,'resc2014','B1:B10');
xlswrite('resultsc2014.xls',parameterc,'parameterc2014','B1:F10');
end
```

<u>Κώδικας 8</u>: *Εκτίμηση παραμέτρων α,β,ξ,ρ,σ εντός δείγματος παρατήρησης στο γενικευμένο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου BS-Vasicek, στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό αρνητικό πρόσημο (2019).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]= VasicekCalibrationc(~)
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(200);
```

```
strike=zeros(200,24); % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και χρόνου μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες παρατηρηθείσες τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε αντίστοιχα 12 ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες: 1 εβδομάδα & ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες: 6 μήνες & ένας χρόνος).
ttm=zeros(200,24);
marketcall=zeros(200,24);
r=zeros(200);
q=zeros(200);
parameterc=zeros(200,5); % Παράμετροι α,β,ξ,ρ,σ ανα ημέρα.
resc=zeros(200,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/1/19-31/10/19 (212 ημερήσιες παρατηρήσεις). Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGYdata.xls','S0','A1:A212');
strike=xlsread('DTEGYdata.xls','K','A1:X212');
ttm=xlsread('DTEGYdata.xls','ttm','A1:X212');
marketcall=xlsread('DTEGYdata.xls','callprice','A1:X212');
r=xlsread('DTEGYdata.xls','r6meur','A1:A212');
q=xlsread('DTEGYdata.xls','q','A1:A212');
SI_call_matrix=zeros(200,24);
%Τιμές call με εφαρμογή BS-VS βάσει εκτιμώμενων α,β,ξ,ρ,σ.
for i=64:200 % Από 1/4/19 μέχρι 15/10/19-in sample.
    x0=[0,0,0.001,0,0.1622];
% Τυχαίες τιμές που ανήκουν στο εύρος προς έναρξη αλγορίθμου για α=κθ, β=κ, ξ,ρ,σ.
    lb=[-Inf,0.01,0.001,-1,0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    ub=[0.04,10,0.02,1,0.2632]; % Άνω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@SIC,x0,lb,ub);
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος τετραγώνων με πέντε άγνωστες παραμέτρους. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες ,καλείται η @SICttm.
    parameterc(i,:)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
SI_call_matrix(i,j)=Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5));
```

```
% Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό στοχαστικό επιτόκιο με αντικατάσταση
εκτιμώμενων ημερησίων παραμέτρων α,β,ξ,ρ,σ.
    end
    pricedatacall=[SI_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultscall.xls',pricedatacall,'resultsVasicekc','A1:X200');
xlswrite('resultscall.xls',resc,'resc','C1:C200');
xlswrite('resultscall.xls',parameterc,'parameterc','G1:K200');
end
```

<u>Κώδικας 9</u>: *Εκτίμηση παραμέτρων α,β,ξ,ρ,σ εντός δείγματος παρατήρησης στο γενικευμένο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου BS-Vasicek, στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό θετικό πρόσημο (2014).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]= VasicekCalibrationc2014 (~)
clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια
βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά
ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);  % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και
χρόνου μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες
παρατηρηθείσες τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε
αντίστοιχα 12 ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές
ληκτότητες: 1 εβδομάδα & ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες:
6 μήνες & ένας χρόνος).
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
```

```
parameterc=zeros(22,5); % Παράμετροι α,β,ξ,ρ,σ ανα ημέρα.
resc=zeros(22,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
exit=zeros(22,1);
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/10/14-31/10/14 (22 ημερήσιες παρατηρήσεις).
Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
SI_call_matrix=zeros(22,24);
%Τιμές call με εφαρμογή BS-VS βάσει εκτιμώμενων α,β,ξ,ρ,σ.
for i=1:10 % Από 1/10/14 μέχρι 15/10/14-in sample.
    x0=[0,0,0.001,0,0.2];
% Τυχαίες τιμές που ανήκουν στο εύρος προς έναρξη αλγορίθμου για α=κθ, β=κ, ξ,ρ,σ.
    lb=[0.01,0.01,0.001,-1,0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    ub=[0.1,10,0.02,1,0.5]; % Άνω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@SIC,x0,lb,ub);
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος
τετραγώνων με πέντε άγνωστες παραμέτρους. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες
,καλείται η @SICttm.
    parameterc(i,:)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
SI_call_matrix(i,j)=Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1),x(2),x(3),x
(4),x(5));
% Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό στοχαστικό επιτόκιο με αντικατάσταση
εκτιμώμενων ημερησίων παραμέτρων α,β,ξ,ρ,σ.
    end
    pricedatacall=[SI_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedatacall,'resultsVc2014','A1:X10');
xlswrite('resultsc2014.xls',resc,'resc2014','C1:C10');
xlswrite('resultsc2014.xls',parameterc,'parameterc2014','G1:K10');
end
```

<u>Κώδικας 10</u>: *Υπολογισμός ημερήσιων σφαλμάτων στο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων BS-VS και της υποπερίπτωσής του BS-Merton για την εύρεση βέλτιστης λύσης στον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς.*

```
function [SI_errorsc]=SIC(x)
% Καλείται από τις MertonCalibrationc, MertonCalibrationc2014, VasicekCalibrationc
και VasicekCalibrationc2014.
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global q;
global k;
SI_errorsc=zeros(1,24);
for j=1:24
 SI_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
Vasicekc(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),q(k),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5));
% Υπολογισμός σφάλματος θεωρητικής και αγοραίας τιμής για τον αλγόριθμο με πέντε
άγνωστες παραμέτρους.
End
```

<u>Κώδικας 11</u>: *Υπολογισμός ημερήσιων σφαλμάτων στο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων BS-VS και της υποπερίπτωσής του BS-Merton για την εύρεση βέλτιστης λύσης στον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στην υποπερίπτωση των ληκτοτήτων των δικαιωμάτων αγοράς .*

```
function [SI_errorsc]=SICttm(x)
% Καλείται 2 φορές ανά δείγμα (βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα δικαιώματα).
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global q;
global k;
SI_errorsc=zeros(1,12);
for j=1:12
```

```
    SI_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
Vasicekc(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),q(k),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5));
% Υπολογισμός σφάλματος θεωρητικής και αγοραίας τιμής για τον αλγόριθμο με πέντε
άγνωστες παραμέτρους.
end
```

<u>Κώδικας 12</u>: *Κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης δικαιωμάτων αγοράς υπό στοχαστικό επιτόκιο (γενικευμένο BS-VS) με ενσωματωμένη γνωστή μερισματική απόδοση στο σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς και των υποπεριπτώσεων χρόνου μέχρι τη λήξη στα Δείγματα 1 και 2.*

```
function [call_price_Vasicek]=Vasicekc(S,K,r,t,q,alpha,beta,ksi,rho,sigma)
% Καλείται από τις SIC,SICttm, MertonCalibrationc, MertonCalibrationc2014,
VasicekCalibrationc, VasicekCalibrationc2014 και στις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι
τη λήξη (εξίσωση 19-Abudy & Izhakian (2011)).
if beta==0 %Υποπερίπτωση Merton .
    alphaT=r*t+0.5*(alpha*t^2);
    betaT=(ksi*t^(3/2))/(sqrt(3));
else %Vasicek
        lamdaT=(1/beta)*(1-exp(-beta*t));
        alphaT=(alpha/beta)*t+(r-(alpha/beta))*lamdaT;
        betaT=(ksi/beta)*sqrt(abs(t-lamdaT-0.5*beta*(lamdaT^2)));
end
    v=sqrt(sigma^2+betaT^2-2*rho*sigma*betaT);
    y=(log(S*exp(-q*t)/K)+alphaT-0.5*(v^2*t))/(sigma*sqrt(t));
    call_price_Vasicek=S*exp(-q*t)*normcdf(y+v*sqrt(t))-
                     K*exp(-alphaT+0.5*t*(betaT^2))*normcdf(y-betaT*sqrt(t));
end
```

Κώδικας 13: *Εκτίμηση παραμέτρων κ,θ,λ,δ,ρ,σ εντός δείγματος παρατήρησης στο γενικευμένο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίου BS-CIR , στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό θετικό πρόσημο (2014).*

```
function [x,resnorm,residual,exitflag]=CIRCalibrationc2014(~)

clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή μετοχής.
global strike; % Τιμή εξάσκησης δικαιώματος.
global ttm; % Χρόνος μέχρι τη λήξη.
global marketcall; % Αγοραία τιμή call option.
global r; % Βραχυπρόθεσμο ημερήσιο επιτόκιο 6m Euribor.
global q; % Ρυθμός μερισματικής απόδοσης (γνωστός ετησιοποιημένος σε ημερήσια βάση).
global k; % Βοηθητική μεταβλητή.
% Ορίζονται πίνακες μηδενικών. Ίδια τιμή spot,μερισματική απόδοση και επιτόκιο ανά ημέρα για όλα τα δικαιώματα.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);  % Συνδυασμός τιμών εξάσκησης (2 strike ανα moneyness) και χρόνου μέχρι τη λήξη (4 διαφορετικές ληκτότητες)που δίνουν 24 ημερήσιες παρατηρηθείσες τιμές call option. Στην υποπερίπτωση χρόνου μέχρι τη λήξη έχουμε αντίστοιχα 12 ημερήσιες παρατηρήσεις για τα βραχυπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες: 1 εβδομάδα & ένας μήνας) και τα μακροπρόθεσμα (2 διαφορετικές ληκτότητες: 6 μήνες & ένας χρόνος).
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
parameterc=zeros(22,6); % Παράμετροι κ,θ,λ,δ,ρ,σ ανα ημέρα.
resc=zeros(22,1); % Κατάλοιπα ελαχιστοποίησης  από τον αλγόριθμο.
exit=zeros(22,1);
% Συνολικά διαθέσιμα δεδομένα 1/1/14-31/10/14 (22 ημερήσιες παρατηρήσεις). Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
```

```
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
CIR_call_matrix=zeros(22,24);
%Τιμές call με εφαρμογή BS-CIR βάσει εκτιμώμενων κ,θ,λ,δ,ρ,σ.
for i=1:10 % Από 1/10/14 μέχρι 15/10/14-in sample.
    x0=[0,0,0,0.001,0,0.2];
% Τυχαίες τιμές που ανήκουν στο εύρος προς έναρξη αλγορίθμου για κ,θ,λ,δ,ρ,σ.
    lb=[0.1,0.001,0.001,0.001,-1,0.115]; % Κάτω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    ub=[10,0.01,10,0.02,1,0.5]; % Άνω φράγμα άγνωστων παραμέτρων.
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@CIRc,x0,lb,ub);
% Επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt-ελαχιστοποίηση ημερήσιου αθροίσματος
τετραγώνων με έξι άγνωστες παραμέτρους. Όταν εξετάζονται ξεχωριστά οι ληκτότητες
,καλείται η @CIRcttm.
    parameterc(i,:)=x;
    resc(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
CIR_call_matrix(i,j)=CIRclosed(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),x(1),x(2),x(3)
,x(4),x(5),x(6));
% Υπολογισμός τιμών δικαιωμάτων υπό στοχαστικό επιτόκιο με αντικατάσταση εκτιμώμενων
ημερησίων παραμέτρων κ,θ,λ,δ,ρ,σ.
    end
    pricedatacall=[CIR_call_matrix];
end
% Εξαγωγή αποτελεσμάτων εκτιμημένων τιμών, καταλοίπων και ημερησίων παραμέτρων.
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedatacall,'resultsCIRc2014','A1:X10');
xlswrite('resultsc2014.xls',resc,'resc2014','D1:D10');
xlswrite('resultsc2014.xls',parameterc,'parameterc2014','L1:Q10');
end
```

***Κώδικας 14**: Υπολογισμός ημερησίου αθροίσματος τετραγωνικών σφαλμάτων στο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων BS-CIR για την εύρεση βέλτιστης λύσης στον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς.*

```
function [CIR_errorsc]=CIRc(x)
% Καλείται από την CIRCalibrationc2014.
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global q;
global k;
CIR_errorsc=zeros(1,24);
for j=1:24
    CIR_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
CIRclosed(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),q(k),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6));
% Υπολογισμός σφάλματος θεωρητικής και αγοραίας τιμής για τον αλγόριθμο με έξι
άγνωστες παραμέτρους.
end
```

***Κώδικας 15**: Υπολογισμός ημερησίου αθροίσματος τετραγωνικών σφαλμάτων στο στοχαστικό μοντέλο επιτοκίων BS-CIR για την εύρεση βέλτιστης λύσης στον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt στην υποπερίπτωση των ληκτοτήτων των δικαιωμάτων αγοράς .*

```
function [CIR_errorsc]=CIRcttm(x)
% Καλείται 2 φορές στο δεύτερο δείγμα (βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα δικαιώματα).
global S0;
global strike;
global ttm;
global marketcall;
global r;
global q;
global k;
CIR_errorsc=zeros(1,12);
for j=1:12
    CIR_errorsc(j)=marketcall(k,j)-
CIRclosed(S0(k),strike(k,j),r(k),ttm(k,j),q(k),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6));
```

```
% Υπολογισμός σφάλματος θεωρητικής και αγοραίας τιμής για τον αλγόριθμο με έξι
άγνωστες παραμέτρους.
end
```

Κώδικας 16: *Κλειστή φόρμουλα τιμολόγησης δικαιωμάτων αγοράς μετοχών υπό στοχαστικό επιτόκιο BS-CIR με ενσωματωμένη γνωστή μερισματική απόδοση στο σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς και των υποπεριπτώσεων χρόνου μέχρι τη λήξη στο Δείγμα 2.*

```
function [call_price_CIR]=CIRclosed(S,K,r,t,q,kappa,theta,lamda,delta,rho,sigma)
% Καλείται από τις CIRc, CIRcttm, CIRCalibrationc2014, και στις υποπεριπτώσεις
χρόνου μέχρι τη λήξη (εξίσωση 23 -Kim(2002)).
df=exp(-(r-theta)/kappa*(1-exp(-kappa*t))-theta*t); % Προεξοφλητικός παράγοντας.
d1=1/(sigma*sqrt(t))*(log(S*exp(-q*t)/K)+(r-theta)/kappa*
            (1-exp(-kappa*t))+theta*t+0.5*(sigma^2)*t); %Τροποποιημένο d1 BS υπό
CIR.
d2=d1-sigma*sqrt(t);
C0=1/(sigma*sqrt(t))*(lamda*(r-theta)/kappa*((1-exp(-kappa*t))/kappa-t*exp(-
kappa*t))
+(lamda*theta*t)/kappa*(1-(1-exp(-kappa*t))/kappa)); %Όρος C0.
psi=log((theta*(2*exp(kappa*t)-1)+r+2*exp(0.5*(kappa*t))
*sqrt(abs(theta^2*(exp(kappa*t)-1)+theta*r)))/((sqrt(r)+sqrt(theta))^2));
%Βοηθητικό όρισμα ψ για τον υπολογισμό του C11.
C11=2*sqrt(theta)*(1+2*exp(kappa*t)*sqrt(r)-3*exp((kappa*t)/2)*sqrt(abs(r-
theta*(1-exp(-kappa*t))))+psi*(theta*(1+2*exp(kappa*t)-r)))/
(2*exp(kappa*t)*(kappa^2)*sqrt(theta));
%Βοηθητικό όρισμα C11 για τον υπολογισμό του C1.
C1=-rho/(sigma*t)*C11;
call_price_CIR=S*exp(-q*t)*normcdf(d1)-K*df*normcdf(d2)+
delta*C0*(S*exp(-q*t)*normpdf(d1)-K*df*(normpdf(d2)-sigma*sqrt(t)*normcdf(d2)))+
delta*C1*(d2*S*exp(-q*t)*normpdf(d1)-d1*K*df*normpdf(d2));
end
```

***Κώδικες 17-18**: Προβλεπτική ικανότητα απλού BS με μέσο όρο εκτιμώμενων παραμέτρων in sample στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό αρνητικό πρόσημο (δείγμα 1-2019) και υπό θετικό (Δείγμα 2-2014) .*

```
function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastBLSc(~)
clear all
sigma=0.2103; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος.
Η τιμή της παραμέτρου διαφοροποιείται σε 0.2075 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων
ληκτοτήτων, ενώ παραμένει στο 0.2103 για τα μακροπρόθεσμα.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2019 με αρνητικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο
προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGYOctober.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGYOctober.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGYOctober.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGYOctober.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGYOctober.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGYOctober.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
matrix=zeros(22,24);
matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/19-31/10/19.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
       matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
BSformulac(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),sigma));
        matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
BSformulac(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),sigma))^2);
    end
    pricedata=[matrix];  % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης τιμής.
    pricedata_squares=[matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
end
for i=1:22
```

```
    res(i)=(sum(matrix_squares(i,:)));    % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά 
ημέρα.
end
xlswrite('resultscall.xls',pricedata,'forecastpd','A1:X22');
xlswrite('resultscall.xls',pricedata_squares,'forecastpds','A1:X22');
xlswrite('resultscall.xls',res,'forecastres','A1:A22');


function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastBLSc2014(~)
clear all
sigmac=0.2474; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος. 
Η τιμή της παραμέτρου διαφοροποιείται σε 0.2587 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων 
ληκτοτήτων και σε 0.2470 για τα μακροπρόθεσμα.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2014 με θετικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο προέλευσης 
για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
call_matrix=zeros(22,24);
call_matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/14-31/10/14.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
        call_matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
BSformulac(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),sigmac));
        call_matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
BSformulac(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),sigmac))^2);
    end
    pricedata=[call_matrix]; % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης 
τιμής.
```

```
    pricedata_squares=[call_matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
end
for i=11:22
    res(i)=(sum(call_matrix_squares(i,:))); % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά
ημέρα.
end
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata,'forecastpd2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata_squares,'forecastpds2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',res,'forecastres2014','A1:A22');
```

<u>Κώδικες 19-20</u>: *Προβλεπτική ικανότητα στοχαστικού BS-Merton με μέσο όρο εκτιμώμενων παραμέτρων in sample στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό αρνητικό πρόσημο (Δείγμα 1-2019) και υπό θετικό (Δείγμα 2-2014) .*

```
function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastMertonc(~)
clear all
alphac=0.0119; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος α στοχαστικού μοντέλου.
Η τιμή της παραμέτρου διαφοροποιείται σε -0.0595 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων
ληκτοτήτων και σε 0.0207 για τα μακροπρόθεσμα.
betac=0; % Υποπερίπτωση Merton.
ksic=0.0127; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τυπική απόκλιση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου.
Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0098 και 0.0130.
rhoc=0.6846; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια συσχέτιση επιτοκίου και μετοχής. Με τη
διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.3154 και 0.6376.
sigmac=0.2033; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος.
Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.2083 και 0.2001.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2019 με αρνητικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο
προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGYOctober.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGYOctober.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGYOctober.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGYOctober.xls','callprice','A1:X22');
```

```
r=xlsread('DTEGYOctober.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGYOctober.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
call_matrix=zeros(22,24);
call_matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/19-
31/10/19.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
        call_matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac));
        call_matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac))^2);
    pricedata=[call_matrix]; % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης
τιμής.
    pricedata_squares=[call_matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
     end
end
for i=11:22
    res(i)=(sum(call_matrix_squares(i,:))); % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά
ημέρα.
end
xlswrite('resultscall.xls',pricedata,'forecastpdMerton','A1:X22');
xlswrite('resultscall.xls',pricedata_squares,'forecastpdsMerton','A1:X22');
xlswrite('resultscall.xls',res,'forecastres','B1:B22');


function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastMerton2014(~)
clear all
alphac=0.0185; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος α στοχαστικού μοντέλου. Η τιμή
της παραμέτρου διαφοροποιείται σε 0.1 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων ληκτοτήτων
και σε 0.0184 για τα μακροπρόθεσμα.
betac=0; % Υποπερίπτωση Merton.
ksic=0.0148; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τυπική απόκλιση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου.
Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0067 και 0.02.
rhoc=1; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια συσχέτιση επιτοκίου και μετοχής. Με τη διάκριση
των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.8006 ενώ παραμένει 1 στα μακρινά.
sigmac=0.2401; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος.
Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.2572 και 0.2396.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
```

```
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2014 με θετικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο προέλευσης
για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
call_matrix=zeros(22,24);
call_matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/14-
31/10/14.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
        call_matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac));
        call_matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac))^2);
    end
    pricedata=[call_matrix]; % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης
τιμής.
    pricedata_squares=[call_matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
end
for i=11:22
    res(i)=(sum(call_matrix_squares(i,:))); % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά
ημέρα.
end
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata,'forecastpdMerton2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata_squares,'forecastpdsMerton2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',res,'forecastres2014','B1:B22');
```

***Κώδικες 21-22**: Προβλεπτική ικανότητα στοχαστικού BS-Vasicek με μέσο όρο εκτιμώμενων παραμέτρων in sample στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό αρνητικό πρόσημο (Δείγμα 1-2019) και υπό θετικό (Δείγμα 2-2014) .*

```
function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastVasicek(~)
clear all
alphac=0.0257; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος α στοχαστικού μοντέλου. Η τιμή της παραμέτρου διαφοροποιείται σε -0.0678 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων ληκτοτήτων και σε 0.04 για τα μακροπρόθεσμα.
betac=3.2104; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος β στοχαστικού μοντέλου. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 8.4670 και 3.5480.
ksic=0.0108; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τυπική απόκλιση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0097 και 0.0111.
rhoc=0.6911; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια συσχέτιση επιτοκίου και μετοχής. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.3228 και 0.6366.
sigmac=0.2013; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.2081 και 0.1971.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2019 με αρνητικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGYOctober.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGYOctober.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGYOctober.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGYOctober.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGYOctober.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGYOctober.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
call_matrix=zeros(22,24);
call_matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/19-31/10/19.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
```

```
        call_matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac));
        call_matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac))^2);
    end
    pricedata=[call_matrix]; % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης
τιμής.
    pricedata_squares=[call_matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
end
for i=11:22
    res(i)=(sum(call_matrix_squares(i,:))); % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά
ημέρα.
end
xlswrite('resultscall.xls',pricedata,'forecastpdV','A1:X22');
xlswrite('resultscall.xls',pricedata_squares,'forecastpdsV','A1:X22');
xlswrite('resultscall.xls',res,'forecastres','C1:C22');


function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastVasicekc2014(~)
clear all
alphac=0.082; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος α στοχαστικού μοντέλου. Η τιμή
της παραμέτρου διαφοροποιείται σε 0.1 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων ληκτοτήτων
και σε 0.0910 για τα μακροπρόθεσμα.
betac=6.2698; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος β στοχαστικού μοντέλου. Με τη
διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0784 και 5.8361.
ksic=0.015; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τυπική απόκλιση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Με
τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0038 και 0.0198.
rhoc=1; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια συσχέτιση επιτοκίου και μετοχής. Με τη διάκριση
των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.7919 ενώ παραμένει 1 στα μακρινά .
sigmac=0.2368; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος.
Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.2573 και 0.2349.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
```

```
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2014 με θετικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο προέλευσης
για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
call_matrix=zeros(22,24);
call_matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/14-
31/10/14.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
        call_matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac));
        call_matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
Vasicekc(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),alphac,betac,ksic,rhoc,sigmac))^2);
    end
    pricedata=[call_matrix]; % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης
τιμής.
    pricedata_squares=[call_matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
end
for i=11:22
    res(i)=(sum(call_matrix_squares(i,:))); % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά
ημέρα.
end
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata,'forecastpdV2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata_squares,'forecastpdsV2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',res,'forecastres2014','C1:C22');
```

<u>Κώδικας 23</u>: *Προβλεπτική ικανότητα στοχαστικού BS-CIR με μέσο όρο εκτιμώμενων παραμέτρων in sample στο σύνολο δικαιωμάτων αγοράς υπό θετικό πρόσημο (Δείγμα 2-2014).*

```
function [pricedata,pricedata_squares,res]=forecastCIR2014(~)
clear all
kappa=5.9331; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος κ στοχαστικού μοντέλου. Η τιμή της παραμέτρου διαφοροποιείται σε 6.9347 στην εξέταση μόνο των βραχυπρόθεσμων ληκτοτήτων και σε 8.2779 για τα μακροπρόθεσμα.
theta=0.01; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος θ στοχαστικού μοντέλου. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0092 και 0.0094.
lamda=10; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια παράμετρος λ στοχαστικού μοντέλου. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 9.6506 και 9.3703.
delta=0.02; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τυπική απόκλιση βραχυπρόθεσμου επιτοκίου. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.0195 και 0.0199.
rho=0.4003; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια συσχέτιση επιτοκίου και μετοχής. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.7459 και 0.4121.
sigma=0.2406; % Εκτιμώμενη μέση ημερήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα εντός δείγματος. Με τη διάκριση των ληκτοτήτων, η τιμή διαμορφώνεται σε 0.2471 και 0.2395.
%Ορίζονται πίνακες μηδενικών.
S0=zeros(22);
strike=zeros(22,24);
ttm=zeros(22,24);
marketcall=zeros(22,24);
r=zeros(22);
q=zeros(22);
% 22 ημέρες Οκτωβρίου 2014 με θετικό πρόσημο επιτοκίων. Αλλάζει το αρχείο προέλευσης για τις υποπεριπτώσεις χρόνου μέχρι τη λήξη.
S0=xlsread('DTEGY2014.xls','S0','A1:A22');
strike=xlsread('DTEGY2014.xls','K','A1:X22');
ttm=xlsread('DTEGY2014.xls','ttm','A1:X22');
marketcall=xlsread('DTEGY2014.xls','callprice','A1:X22');
r=xlsread('DTEGY2014.xls','r6meur','A1:A22');
q=xlsread('DTEGY2014.xls','q','A1:A22');
res=zeros(22,1);
call_matrix=zeros(22,24);
call_matrix_squares=zeros(22,24);
for i=11:22 % Προβλεπτική ικανότητα δώδεκα ημερών out of sample: 16/10/14-31/10/14.
    for j=1:24 % j=1:12 στις υποπεριπτώσεις ληκτοτήτων.
```

```
        call_matrix(i,j)=abs(marketcall(i,j)-
CIRclosed(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),kappa,theta,lamda,delta,rho,sigma))
;
        call_matrix_squares(i,j)=(abs(marketcall(i,j)-
CIRclosed(S0(i),strike(i,j),r(i),ttm(i,j),q(i),kappa,theta,lamda,delta,rho,sigma))
^2);
    end
    pricedata=[call_matrix]; % Απόλυτο σφάλμα αγοραίας τιμής και προβλεπόμενης
τιμής.
    pricedata_squares=[call_matrix_squares]; % Τετραγωνικό σφάλμα διαφορών.
end
for i=11:22
    res(i)=(sum(call_matrix_squares(i,:))); % Άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων ανά
ημέρα.
end
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata,'forecastCIR2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',pricedata_squares,'forecastpdsCIR2014','A1:X22');
xlswrite('resultsc2014.xls',res,'forecastres2014','D1:D22');
```