ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Executive MBA

<u>Διπλωματική Εργασία</u>

Εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στη Μοντελοποίηση Οικονομικών Φαινομένων

Καββουσανός Εμμανουήλ

Πειραιάς, 2019

Παράρτημα Β: Βεβαίωση Εκπόνησης Διπλωματικής Εργασίας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΘΝΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ

ΒΕΒΑΙΩΣΗ ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

(περιλαμβάνεται ως ξεχωριστή (δεύτερη) σελίδα στο σώμα της διπλωματικής εργασίας)

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η διπλωματική εργασία για τη λήψη του μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών, του Πανεπιστημίου Πειραιώς, στη Διοίκηση Επιχειρήσεων για Στελέχη : E-MBA» με τίτλο «Εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στη Μοντελοποίηση Οικονομικών Φαινομένων» έχει συγγραφεί από εμένα αποκλειστικά και στο σύνολό της. Δεν έχει υποβληθεί ούτε έχει εγκριθεί στο πλαίσιο κάποιου άλλου μεταπτυχιακού προγράμματος ή προπτυχιακού τίτλου σπουδών, στην Ελλάδα ή στο εξωτερικό, ούτε είναι εργασία ή τμήμα εργασίας ακαδημαϊκού ή επαγγελματικού χαρακτήρα.

Δηλώνω επίσης υπεύθυνα ότι οι πηγές στις οποίες ανέτρεξα για την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας, αναφέρονται στο σύνολό τους, κάνοντας πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο. Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση του πτυχίου μου».

Υπογραφή Μεταπτυχιακού Φοιτητή/ τριας

Ονοματεπώνυμο: Καββουσανός Εμμανουήλ

Ημερομηνία: 23/10/2019

Αφιερώνεται στους συμφοιτητές και φίλους μου:
Βακιρλή Ιωάννη
Καλαϊτζάκη Ζαχαρία
Λυμπερόπουλο Παναγιώτη
Φύσαρη Γεώργιο

Εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στη Μοντελοποίηση Οικονομικών Φαινομένων

Καββουσανός Εμμανουήλ

Σημαντικοί Όροι: Θεωρία Παιγνίων, Ισορροπία Nash, στρατηγικά παίγνια, ακολουθιακά παίγνια, κυριαρχία στρατηγικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μοντελοποίηση αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την μελέτη ενός οικονομικού φαινομένου και βοηθάει στην κατανόηση του, στη δυνατότητα πρόβλεψης της εξέλιξης και της κατάληξής του και επίσης, στη λήψη των βέλτιστων στρατηγικών αποφάσεων. Η Θεωρία Παιγνίων, ως επιστήμη κυρίως των μαθηματικών με εφαρμογή όμως σε όλες τις επιστήμες, αφορά στην ανάπτυξη μοντέλων για τη μελέτη καταστάσεων όπου δύο ή περισσότεροι εμπλεκόμενοι λαμβάνουν αποφάσεις οι οποίες επηρεάζονται και επηρεάζουν τις αποφάσεις και τις απολαβές των υπολοίπων εμπλεκομένων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι α) η παρουσίαση της Θεωρίας Παιγνίων σε εισαγωγικό επίπεδο και ο προσδιορισμός των διαφόρων τύπων Παιγνίων, β) η αναλυτικότερη μελέτη των Παιγνίων με τέλεια πληροφόρηση μέσα από πρακτικά παραδείγματα και γ) η ανάδειξη του πώς μπορεί η Θεωρία Παιγνίων να αξιοποιηθεί για την μοντελοποίηση οικονομικών φαινομένων, όπως είναι τα ολιγοπώλια και ο εμπορικός πόλεμος μεταξύ δύο χωρών.

Συμπερασματικά, η Θεωρία Παιγνίων είναι μία επιστήμη χρήσιμη στην μοντελοποίηση οικονομικών φαινομένων, που συνεισφέρει στην κατανόηση και τη συστηματική μελέτη τους, δίνοντας τη δυνατότητα προβλέψεων και βέλτιστης επιλογής στρατηγικών ενεργειών.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω των επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας κ. Μιχαήλ Σφακιανάκη για την καθοδήγηση και την υποστήριξή του, τον Διευθυντή του ΠΜΣ Executive MBA κ. Γεωργακέλλο Δημήτριο, τους καθηγητές του προγράμματος και τους συμφοιτητές μου.

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σελίδα

ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

1.1 Εισαγωγή

Η Θεωρία Παιγνίων αναφέρεται στην μελέτη μαθηματικών μοντέλων που σχετίζονται με στρατηγικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ λογικών παικτών. Αν και αρχικά μελετήθηκε ως θεωρία των Οικονομικών επιστημών, τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους όπως η κοινωνιολογία, η πολιτική, η βιολογία και η πληροφορική.

Η μαθηματική Θεωρία Παιγνίων αποτελεί σύλληψη των John von Neumann και Oskar Morgenstern (1944). Αρχικά η Θεωρία περιελάμβανε αρκετές παραδοχές και περιορισμούς με αποτέλεσμα να μπορεί να εφαρμοστεί κάτω από ειδικές και εξαιρετικά περιοριστικές συνθήκες. Από τότε φυσικά, τα δεδομένα έχουν αλλάξει δραματικά καθώς το πλαίσιο της Θεωρίας Παιγνίων έχει διευρυνθεί και η Θεωρία έχει μελετηθεί σε βάθος και με πιο γενικούς όρους, αν και κάποιοι περιορισμοί όπως η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων επίλυσης των μοντέλων παραμένουν. Από τα τέλη της δεκαετίας του 1970 μπορεί να ειπωθεί με βεβαιότητα ότι η Θεωρία Παιγνίων αποτελεί το πιο σημαντικό και χρήσιμο εργαλείο των αναλυτών, όποτε αυτοί αντιμετωπίζουν καταστάσεις στις οποίες οι στρατηγικές αποφάσεις εκάστου παίκτη εξαρτώνται (και επηρεάζουν αντίστοιχα) από τις στρατηγικές αποφάσεις των άλλων παικτών. Είναι αυτονόητο ότι τα παίγνια που εξετάζονται από τη Θεωρία Παιγνίων έχουν τουλάχιστον 2 συμμετέχοντες οι οποίοι έχουν να επιλέξουν μεταξύ δύο τουλάχιστον στρατηγικών αποφάσεων.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Παρά το γεγονός ότι η Θεωρία Παιγνίων μελετάται συστηματικά από το 1944, υπάρχουν ιστορικά στοιχεία που αποδεικνύουν την μελέτη σχετικών καταστάσεων από την αρχαιότητα. Για παράδειγμα, στο Λάχη και στο Συμπόσιο του Πλάτωνα, ο Σωκράτης (σχετικά με τη μάχη της Δήλου) αναφέρει: Ας θεωρήσουμε έναν στρατιώτη ευρισκόμενο στην πρώτη γραμμή άμυνας, περιμένοντας να απωθήσει την εχθρική επίθεση. Αν υποθέσει ότι η απώθηση της εχθρικής επίθεσης θα πετύχει, η δική του συνεισφορά είναι ελάχιστη, τόσο που δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα αλλά ωστόσο διατρέχει τον κίνδυνο να σκοτωθεί ή να τραυματιστεί. Από την άλλη, αν υποθέσει ότι ο εχθρός θα υπερνικήσει την άμυνά, οι πιθανότητες τραυματισμού ή θανάτου του είναι ακόμα μεγαλύτερες, ενώ η συνεισφορά του δεν είναι ικανή να ανατρέψει την ήττα. Έτσι, σε κάθε περίπτωση η καλύτερη στρατηγική για τον ίδιο, είναι να εγκαταλείψει τη θέση του.

Πολύ πριν η Θεωρία Παιγνίων γίνει το πιο χρήσιμο εργαλείο των αναλυτών, χρησιμοποιήθηκε από στρατιωτικούς ηγέτες για την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής. Ο Ισπανός κατακτητής Cortez, όταν έφτασε στο Μεξικό με μια μικρή ομάδα στρατιωτών απέναντι στους πολυάριθμους Αζτέκους, θέλοντας να βγάλει από το μυαλό των στρατιωτών του την επιλογή της οπισθοχώρησης, έκαψε όλα τα πλοία του. Παράλληλα, με αυτή την κίνηση έστειλε ένα μήνυμα μεγάλης αποφασιστικότητας και αυτοπεποίθησης στους εχθρούς του. Πλέον οι Ισπανοί δεν είχαν καλύτερη επιλογή από το να πολεμήσουν όσο το δυνατόν πιο σθεναρά. Οι Αζτέκοι βλέποντας τον Cortez να καίει τα πλοία του, θεώρησαν ότι είναι απόλυτα σίγουρος για την νίκη του και υπέθεσαν ότι θα είχε πολύ ισχυρές δυνάμεις. Έτσι, αποφάσισαν να οπισθοχωρήσουν στην ενδοχώρα χωρίς καν να δώσουν μάχη!

Το 1838 ο μαθηματικός Antoine Augustin Cournot δημοσίευσε το περίφημο Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth στο οποίο αναφέρθηκε στην ειδική περίπτωση του δυοπωλίου και πρότεινε μια λύση που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως πρώιμη εκδοχή της Ισορροπίας Nash. Το 1913 ο Zermelo δημοσιεύσει τη θεωρία του (Zermelo's Theorem) με την οποία υποστηρίζει ότι το σκάκι είναι πεπερασμένο παίγνιο και ότι έχει ένα βέλτιστο προφίλ στρατηγικών το οποίο μπορούν οι παίκτες να παίζουν ντετερμινιστικά.

Ως κλάδος των οικονομικών καθιερώθηκε το 1944 από τους John von Neumann και Oskar Morgenstern, συγγραφέων του βιβλίου Theory of Games and Economic Behaviour στο οποίο ασχολήθηκαν με παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games). Με δύο δημοσιεύσεις του το 1950 και το 1951 ο Αμερικανός μαθηματικός John Nash αποδεικνύει την ύπαρξη ισορροπίας στα μη συνεργατικά παίγνια, η οποία είναι γνωστή ως ισορροπία Nash και για την οποία βραβεύτηκε με Νόμπελ στα οικονομικά το 1994. Έκτοτε, επιστήμονες από ποικίλους κλάδους (μαθηματικά, οικονομία, φυσική, βιολογία, πληροφορική κ.α.) έχουν αναπτύξει πλούσια δραστηριότητα στην περαιτέρω μελέτη της Θεωρίας Παιγνίων και την αναζήτηση εφαρμογών της στους διάφορους τομείς των επιστημών.

1.3 Στρατηγικά Παίγνια

Ένα στρατηγικό παίγνιο είναι ένα μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει ένα πεπερασμένο σύνολο **παικτών** (τουλάχιστον 2), καθένας από τους οποίους μπορεί να αλληλοεπιδράσει με το μοντέλο βάσει ενός συνόλου **στρατηγικών** (τουλάχιστον 2) επηρεάζοντας όλους τους υπόλοιπους παίκτες, έχοντας προτιμήσεις βάσει δεδομένων **απολαβών** ως προς τα προφίλ των στρατηγικών. Ως προφίλ στρατηγικών νοείται κάθε συνδυασμός των δυνατών στρατηγικών που έχουν στη διάθεσή τους οι παίκτες.

Συνεπώς ένα στρατηγικό παίγνιο αποτελείται από:

α. Παίκτες

β. Ενέργειες ή Στρατηγικές

γ. Απολαβές

Οι προτιμήσεις των παικτών αναπαρίστανται από την αναμενόμενη τιμή απολαβής (payoff). Ο πυρήνας της έννοιας του στρατηγικού παιγνίου είναι ότι οι αποφάσεις και οι ενέργειες κάθε παίκτη δεν γίνονται ανεξάρτητα, αλλά επηρεάζονται και επηρεάζουν όλους τους άλλους παίκτες. Κάθε παίκτης είναι λογικός, το οποίο σημαίνει ότι προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τη δική του απολαβή.

Τα στρατηγικά παίγνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μοντελοποίηση μεγάλου εύρους διαφορετικών περιστάσεων. Για παράδειγμα, παίκτες μπορεί να είναι δύο επιχειρήσεις με στρατηγικές την Ηγεσία Κόστους ή την Διαφοροποίηση και προτιμήσεις τα μεγαλύτερα κέρδη ή το μεγαλύτερο μερίδιο αγοράς. Εναλλακτικά, παίκτες μπορεί να είναι δύο υποψήφιοι δήμαρχοι με στρατηγικές τις προεκλογικές καμπάνιες τους και απολαβές το ποσοστό των εκλογών. Είναι προφανές ότι μια τεράστια γκάμα πραγματικών καταστάσεων που συναντάμε στην καθημερινότητα μας μπορούν να μοντελοποιηθούν και να μελετηθούν ως στρατηγικά παίγνια.

Το πιο κλασικό παράδειγμα στρατηγικού παιγνίου είναι “Το δίλημμα του φυλακισμένου” το οποίο θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Σε αυτό το παίγνιο έχουμε δύο κρατούμενους (παίκτες) οι οποίοι έχουν συλληφθεί ως βασικοί ύποπτοι για ένα έγκλημα και κρατούνται σε δύο χωριστά κελιά, χωρίς να μπορούν να επικοινωνήσουν. Αν και οι δύο κρατούμενοι ομολογήσουν την ενοχή τους θα τιμωρηθούν με ένα χρόνο φυλάκιση (απολαβή -1). Αν κανένας από τους δύο δεν ομολογήσει, θα τιμωρηθούν και οι δύο με 2 χρόνια φυλάκιση (payoff -2) και αν μόνο ο ένας κρατούμενος ομολογήσει τότε αυτός θα αφεθεί ελεύθερος (απολαβή 0) ενώ ο αυτός που δεν “συνεργάστηκε” θα τιμωρηθεί με τρία χρόνια φυλάκιση (απολαβή -3) Οι πιθανές στρατηγικές καθώς και οι αντίστοιχες απολαβές των παικτών παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1: *Πίνακας Απολαβών παικτών του παιγνίου “Το Δίλημμα του Φυλακισμένου”*

		κρατούμενος B	
		ομολογεί	δεν ομολογεί
κρατούμενος A	ομολογεί	(-1,-1)	(0,-3)
	δεν ομολογεί	(-3,0)	(-2,-2)

Παίκτης
Στρατηγική
Προφίλ
Απολαβή

Στο συγκεκριμένο παίγνιο έχουμε

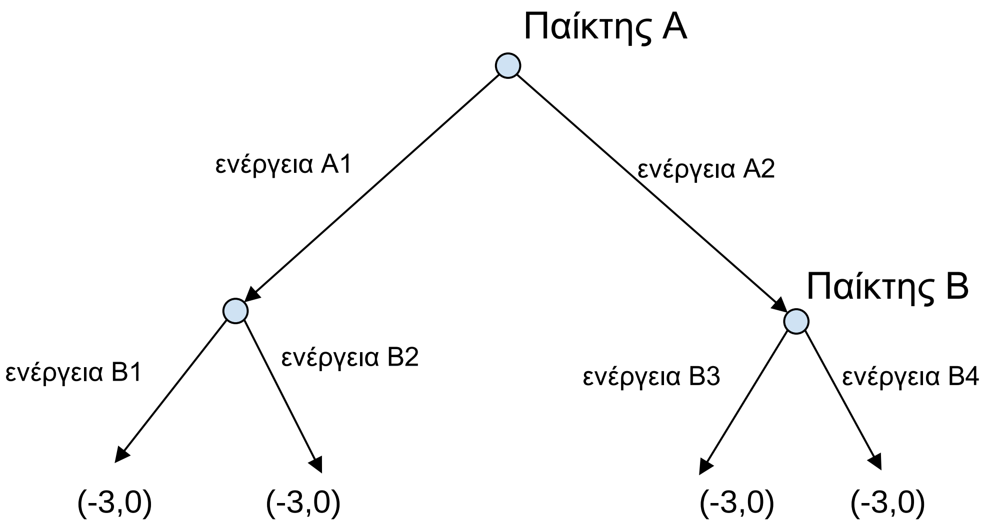
α. **Παίκτες** (2): Κρατούμενος A, Κρατούμενος B

β. **Στρατηγική** (2): { *ομολογεί, δεν ομολογεί* }

γ. **Απολαβές**: (-1,-1), (0,-3), (-2,-1), (-3,0) για τα προφίλ (*ομολογεί, ομολογεί*), (*ομολογεί, δεν ομολογεί*), (*δεν ομολογεί, δεν ομολογεί*), (*δεν ομολογεί, ομολογεί*) κατά αντιστοιχία.

Η απόλυτη τιμή των απολαβών είναι αυθαίρετη και σημασία έχει απλά η μεταξύ τους σχέση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρούμε ότι μεγαλύτερη απολαβή για κάθε παίκτη είναι η μικρότερη ποινή που του επιβάλλεται. Έτσι, η χειρότερη περίπτωση για κάθε παίκτη είναι να τιμωρηθεί με 3 χρόνια φυλάκιση που αναπαρίσταται ως αρνητική απολαβή (-3), ενώ η καλύτερη περίπτωση είναι να αφεθεί ελεύθερος που αναπαρίσταται ως μεγαλύτερη απολαβή (0 > -3).

Όταν ένα παίγνιο παρουσιάζεται με την παραπάνω μορφή, δηλαδή με τη χρήση ενός Πίνακα Απολαβών, λέμε ότι παρουσιάζεται με στρατηγική ή κανονική μορφή. Όταν χρησιμοποιείται Δέντρο Αποφάσεων, όπως αυτό του Διαγράμματος 1, τότε λέμε ότι το παίγνιο παρουσιάζεται σε εκτεταμένη μορφή. Τα ταυτόχρονα παίγνια στα οποία ο χρόνος δεν παίζει κάποιο ρόλο στο μοντέλο παρουσιάζονται σε στρατηγική μορφή, ενώ τα ακολουθιακά παίγνια παρουσιάζονται σε εκτεταμένη μορφή, για να μπορεί να αποδοθεί η σημασία του χρόνου στις διαδοχικές στρατηγικές αποφάσεις.



Διάγραμμα 1: *Δέντρο Αποφάσεων εκτεταμένης μορφής παιγνίου*

2. Τύποι Παιγνίων

2.1 Παίγνια Μηδενικού - Μη Μηδενικού Αθροίσματος (zero-sum games)

Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games) το κέρδος ενός παίκτη συνεπάγεται την ισόποση ζημιά για τον άλλο παίκτη. Η συνολική ωφέλεια του συστήματος δεν δύναται να αυξηθεί ή να μειωθεί. Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μπορούν να συμμετέχουν δύο ή περισσότεροι παίκτες.

Ένα παράδειγμα αυτού του είδους παιγνίου είναι το πόκερ, όπου τα χρήματα που παίρνει ο κερδισμένος είναι ακριβώς τα χρήματα που χάνουν οι άλλοι παίκτες. Στις χρηματιστηριακές αγορές, τα options και τα futures είναι περιπτώσεις παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν έξοδα συναλλαγών.

Στην πραγματικότητα, δεν συναντάμε συχνά καταστάσεις μηδενικού αθροίσματος καθώς η συνολική απόδοση του συστήματος είναι πολυπαραγοντική και δύναται να αλλάζει. Αυτές οι περιπτώσεις αναφέρονται ως παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος. Σε αυτά τα παίγνια η αύξηση του κέρδους ενός παίκτη δεν συνεπάγεται την (ισόποση) ζημιά των άλλων παικτών. Ένα κλασικό παράδειγμα παιγνίου μη μηδενικού αθροίσματος είναι το δίλημμα του φυλακισμένου το οποίο θα δούμε στη συνέχεια.

2.2 Συνεργατικά - Μη Συνεργατικά Παίγνια (cooperative - non cooperative games)

Ένα παίγνιο λέγεται συνεργατικό εάν οι παίκτες μπορούν να επικοινωνούν και να συμφωνούν σε συγκεκριμένες στρατηγικές με σκοπό τη μεγιστοποίηση των απολαβών τους ως σύνολο. Προφανώς, τα μέρη τα οποία έρχονται σε συνεννόηση θα πρέπει να τηρούν τις δεσμεύσεις τους, ασχέτως αν θα τους συνέφερε να μην το κάνουν. Σκοπός είναι η μεγιστοποίηση της ωφέλειας των παικτών που έρχονται σε συνεννόηση, η οποία θα ήταν συνολικά μικρότερη αν δρούσαν ανεξάρτητα. Συναντάμε συχνά τέτοιες καταστάσεις εκεί που υπάρχει ολιγοπώλιο, όταν οι εταιρίες σχηματίζουν καρτέλ για να κρατήσουν ψηλά τις τιμές και να σταματήσουν τον ανταγωνισμό.

Στα μη συνεργατικά παίγνια οι παίκτες δεν μπορούν να κάνουν δεσμευτικές συμφωνίες μεταξύ τους. Η συνεννόηση δεν είναι δυνατή οπότε κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το προσωπικό του όφελος χωρίς να γνωρίζει ποια στρατηγική θα επιλέξουν οι άλλοι παίκτες.

2.3 Συμμετρικά - Ασύμμετρα Παίγνια (symmetric - non symmetric games)

Στα συμμετρικά παίγνια οι απολαβές των παικτών για την επιλογή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής εξαρτώνται μόνο από τη στρατηγική που θα επιλέξουν οι άλλοι παίκτες και όχι από τον παίκτη που την επιλέγει. Αν δηλαδή σε έναν πίνακα απολαβών μπορούμε να αντιστρέψουμε τους παίκτες χωρίς να αλλάξουμε τις τιμές των προφίλ, τότε το παίγνιο είναι συμμετρικό. Για παράδειγμα το παίγνιο “Το Δίλημμα του Φυλακισμένου” είναι ένα συμμετρικό παίγνιο (πίνακας 1.1). Εάν κάποιος από τους δύο κρατούμενους επιλέξει να μιλήσει ενώ ο άλλος επιλέξει να σωπάσει, οι απολαβή είναι η ίδια ανεξάρτητα από το ποιόν παίκτη θα τοποθετήσουμε σε κάθε ρόλο.

Στα μη συνεργατικά παίγνια οι απολαβές για κάθε παίκτη διαφοροποιούνται ακόμα και αν επιλέγονται αντίστοιχα προφίλ στρατηγικών. Επίσης ένα στρατηγικό παίγνιο είναι ασύμμετρο οταν οι παίκτες έχουν διαφορετικές διαθέσιμες στρατηγικές.

2.4 Συνδυαστικά Παίγνια

(combinatorial games)

Στα συνδυαστικά παίγνια θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο παίκτες οι οποίοι είναι τέλεια πληροφορημένοι και δεν παίζουν ταυτόχρονα αλλά ο ένας μετά τον άλλο. Στα συνδυαστικά παίγνια η δυσκολία εύρεσης της βέλτιστης στρατηγικής είναι εκθετικά ανάλογη με το πλήθος όλων των πιθανών επιλογών. Επίσης, σε αυτής της μορφής τα παίγνια η τύχη δεν παίζει κανένα ρόλο, δηλαδή δεν επηρεάζει τις στρατηγικές και το αποτέλεσμα, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στο σκάκι ή στη τρίλιζα. Προφανώς δεν χρησιμοποιούνται ζάρια, χαρτιά ή άλλοι μηχανισμοί τυχαιότητας. Τα συνδυαστικά παίγνια είναι πεπερασμένα, δηλαδή πάντα φτάνουν σε ένα τέλος. Δύο παίκτες παίζοντας πολλές φορές τρίλιζα ανακαλύπτουν εκ πείρας τη βέλτιστη στρατηγική, δηλαδή αυτή με την οποία δεν μπορούν να χάσουν, και την ακολουθούν ντετερμινιστικά, οπότε δεν κερδίζει ποτέ κανένας. Στο σκάκι δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα η βέλτιστη στρατηγική λόγω πολυπλοκότητας, αλλά σίγουρα υπάρχει.

2.5 Ταυτόχρονα - ακολουθιακά

(simultaneous - sequential games)

Ένα παίγνιο λέγεται ακολουθιακό όταν οι παίκτες επιλέγουν στρατηγική εναλλακτικά, δηλαδή ο ένας μετά τον άλλο. Το σκάκι και η τρίλιζα είναι ακολουθιακά παίγνια όπως αναφέρθηκε νωρίτερα.

Στα ταυτόχρονα παίγνια οι παίκτες κάνουν τις κινήσεις τους ταυτόχρονα ή κάθε παίκτης δεν γνωρίζει τη στρατηγική του άλλου, οπότε ο χρόνος δεν έχει κάποια σημασία. Το παίγνιο “Το Δίλημμα του Φυλακισμένου” είναι ταυτόχρονο παίγνιο.

2.6 Τέλειας, Πλήρους και Ατελούς Πληροφόρησης

(perfect - imperfect information games)

Μια σημαντική κατηγορία των ακολουθιακών παιγνίων είναι τα παίγνια *τέλειας πληροφόρησης (perfect information games)*. Ένα παίγνιο θεωρείται ότι είναι τέλειας πληροφόρησης όταν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις κινήσεις που έχουν κάνει οι υπόλοιποι παίκτες. Για αυτό μόνο τα ακολουθιακά παίγνια μπορεί να είναι τέλειας πληροφόρησης αφού στα ταυτόχρονα παίγνια οι παίκτες δεν γνωρίζουν τις επιλογές των αντιπάλων τους. Ένα παράδειγμα παιγνίου τέλειας πληροφόρησης είναι το σκάκι, καθώς οι παίκτες γνωρίζουν όλες τις υπάρχουσες πληροφορίες και δεν υπάρχει κάτι κρυφό. Η τέλεια πληροφόρηση πολλές φορές συγχέεται με την πλήρη πληροφόρηση η οποία ωστόσο είναι διαφορετική. Στα παίγνια *πλήρους πληροφόρησης (complete information games)* οι παίκτες γνωρίζουν όλες τις διαθέσιμες στρατηγικές και τις σχετικές απολαβές, αλλά δεν γνωρίζουν τις στρατηγικές που έχουν επιλεχθεί από τους άλλους παίκτες.

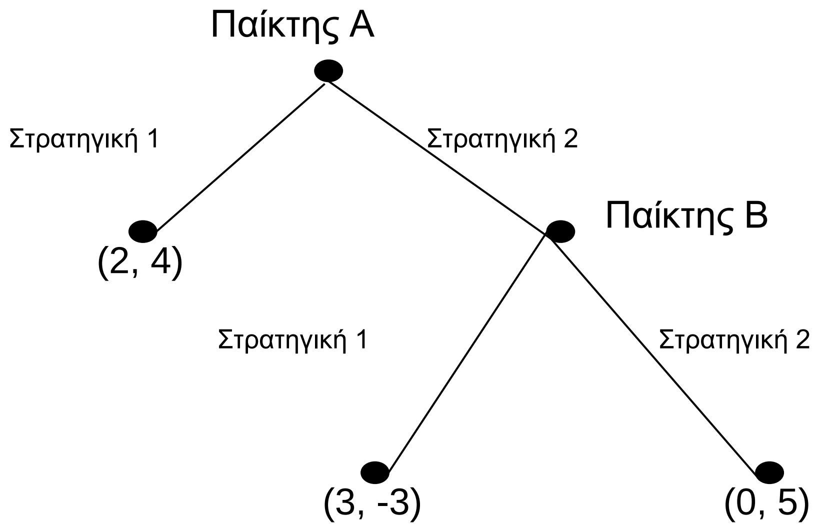
Στα ταυτόχρονα παίγνια οι παίκτες δεν γνωρίζουν τη στρατηγική που θα επιλέξουν οι άλλοι παίκτες, για αυτό και τα ονομάζουμε παίγνια ατελούς πληροφόρησης (*imperfect information games*). Σε αυτό τον τύπο παιγνίων οι παίκτες θα πρέπει να σταθμίσουν όλες τις πιθανές στρατηγικές όσον αφορά τις επιλογές των άλλων παικτών προκειμένου να λάβουν μια απόφαση. Ένα παράδειγμα παιγνίου ατελούς πληροφόρησης είναι το πόκερ, καθώς οι παίκτες δεν γνωρίζουν τι χαρτιά έχουν οι άλλοι παίκτες στα χέρια τους, άρα δεν γνωρίζουν τις ενέργειες τις οποίες έχουν επιλέξει.

2.7 Κανονικά και Εκτεταμένα Παίγνια

(normal - extensive form games)

Όταν σε ένα στρατηγικό παίγνιο οι ενέργειες των παικτών γίνονται ταυτόχρονα τότε το παίγνιο ονομάζεται κανονικού τύπου και μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν πίνακα απολαβών και στρατηγικών όπως τον πίνακα 1. Στα κανονικού τύπου παίγνια ο πίνακας απολαβών δείχνει τα προφίλ των στρατηγικών, δηλαδή τους πιθανούς συνδυασμούς όλων των δυνατών στρατηγικών και τις απολαβές των παικτών για κάθε προφίλ. Επίσης, βοηθάει να εντοπίσουμε τις κυρίαρχες στρατηγικές και την Ισορροπία Nash του παιγνίου.

Τα παίγνια εκτεταμένης μορφής είναι παίγνια στα οποία ο χρόνος αποτελεί καθοριστικό παράγοντα και στα οποία οι αποφάσεις δεν λαμβάνονται ταυτόχρονα αλλά ακολουθιακά, δηλαδή, κάθε παίκτης επιλέγει στρατηγική αφού πρώτα έχει επιλέξει στρατηγική ο προηγούμενος. Τα παίγνια εκτεταμένης μορφής αναπαρίστανται με δέντρα αποφάσεων τα οποία απεικονίζουν τις πιθανές εκβάσεις του παιγνίου και περιλαμβάνουν κόμβους αποφάσεων και τελικούς κόμβους με τις απολαβές. Οι κόμβοι ενώνονται με κλαδιά τα οποία αναπαριστούν τις πιθανές στρατηγικές.



Διάγραμμα 2: *Παράδειγμα Δέντρου Αποφάσεων εκτεταμένης μορφής παιγνίου*

3. Ισορροπία Nash

3.1 Ισορροπία Nash

Η ισορροπία Nash είναι μια κατάσταση σε ένα παίγνιο κατά την οποία κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική του, δεδομένου ότι οι στρατηγικές των υπολοίπων παικτών παραμένουν αμετάβλητες. Στην ισορροπία Nash κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει την απολαβή του αλλάζοντας στρατηγική. Έτσι, δεν υπάρχει κίνητρο για αλλαγή από κανέναν και άρα έχουμε ισορροπία. Ένα παιχνίδι μπορεί να έχει μία ή περισσότερες ισορροπίες Nash ή καμία. Όταν το παίγνιο έχει μία ισορροπία Nash, οι παίκτες μπορούν να παίζουν ντετερμινιστικά και να λαμβάνουν το μέγιστο όφελος.

Η ισορροπία Nash πήρε το όνομά της από τον νομπελίστα μαθηματικό John F. Nash (1928-2015). Ο Nash ως διδακτορικός φοιτητής στο Princeton University, σε ηλικία 22 ετών υπέβαλε την διατριβή του στην οποία παρουσίασε την έννοια της ισορροπίας, η οποία επέκτεινε σημαντικά την εμβέλεια της Θεωρίας Παιγνίων που μέχρι τότε επικεντρωνόταν κυρίως σε αυστηρά ανταγωνιστικά παίγνια δύο παικτών (zero sum games). Όσο ήταν ακόμα μεταπτυχιακός φοιτητής στο Princeton, ο Nash έγραψε επίσης μια θεμελιακή εργασία για τη θεωρία διαπραγμάτευσης. Αργότερα ανέλαβε ακαδημαϊκή θέση στο τμήμα Μαθηματικών του MIT. Το 1994 βραβεύτηκε με το βραβείο Νόμπελ στις οικονομικές επιστήμες.

Η ισορροπία Nash έχει δύο βασικές παραδοχές:

α. Οι παίκτες του παιγνίου δρουν ορθολογικά, δηλαδή επιδιώκουν τη βελτιστοποίηση των δικών τους απολαβών.

β. Γνωρίζουν ποιες είναι οι πιθανές στρατηγικές των άλλων παικτών.

Η ισορροπία Nash επίσης προϋποθέτει σταθερές καταστάσεις δηλαδή παίγνια όπου οι παίκτες έχουν αποκτήσει εκ πείρας άριστη γνώση του παιγνίου και του συνόλου των στρατηγικών, και γνωρίζουν τυχόν συμπεριφορικές ιδιαιτερότητες του αντιπάλου τους. Η ισορροπία Nash δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η έκβαση του παιγνίου είναι η καλύτερη που θα μπορούσε να είναι από πλευράς μεγιστοποίησης του συνολικού οφέλους. Θα δούμε στην πράξη τι ακριβώς σημαίνει ισορροπία Nash και πως επιδρούν όλες οι παράμετροι του παιγνίου με το παράδειγμα του Διλήμματος του Φυλακισμένου που ακολουθεί.

3.2 Συνάρτηση Βέλτιστης Απόκρισης

Σε ένα παίγνιο όπου ο κάθε παίκτης έχει στη διάθεσή του μόνο λίγες ενέργειες, μπορούμε να βρούμε τις Ισορροπίες Nash εξετάζοντας διαδοχικά το κάθε προφίλ ενεργειών για να δούμε αν ικανοποιεί τις συνθήκες ισορροπίας. Σε πιο περίπλοκα παίγνια θα χρειαστεί για τον ίδιο σκοπό να χρησιμοποιήσουμε τις *συναρτήσεις* *βέλτιστης απόκρισης*. Ονομάζουμε Βέλτιστη Απόκριση (Best Response) του παίκτη i εκείνο το προφίλ ενεργειών που μεγιστοποιεί την απολαβή του, δεδομένου του αμετάβλητου των ενεργειών των άλλων παικτών. Η συνάρτηση βέλτιστης απόκρισης $\mathbf{B_i}$ που μας δίνει το σύνολο των βέλτιστων αποκρίσεων του παίκτη **i** όταν το σύνολο των ενεργειών των άλλων παικτών είναι $\mathbf{\alpha_{-i}}$ είναι:

$$\mathbf{B_i(\alpha_{-i}) = \{ \alpha_i \text{ στο } A_i : u_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \geq u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) \text{ για όλα τα } \alpha'_i \text{ στο } A_i \}}$$

όπου $\mathbf{\alpha_i}$ η ενέργεια του παίκτη i, $\mathbf{\alpha_{-i}}$ η ενέργεια των άλλων παικτών, $\mathbf{A_i}$ το σύνολο των διαθέσιμων ενεργειών του παίκτη i, $\mathbf{u_i}$ η απολαβή του παίκτη i. Δηλαδή, το σύνολο των βέλτιστων αποκρίσεων του παίκτη i ($\mathbf{B_i}$) για το σύνολο των ενεργειών των υπολοίπων παικτών ($\mathbf{\alpha_{-i}}$) είναι οι ενέργειες ($\mathbf{\alpha_i}$) για τις οποίες η απολαβή του παίκτη i ($\mathbf{u_i(\alpha_i, \alpha_{-i})}$) είναι μεγαλύτερη ή ίση από τις απολαβές των υπολοίπων διαθέσιμων ενεργειών ($\mathbf{u_i(\alpha'_i, \alpha_{-i})}$).

Η Ισορροπία Nash είναι ένα προφίλ ενεργειών που έχει την ιδιότητα ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να επιτύχει καλύτερο αποτέλεσμα αλλάζοντας τη στρατηγική του, με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών. Με τη λογική των συναρτήσεων βέλτιστης απόκρισης μπορούμε να πούμε εναλλακτικά ότι Ισορροπία Nash ενός στρατηγικού παιγνίου είναι το προφίλ ενεργειών α* αν και μόνο αν η ενέργεια του κάθε παίκτη είναι η βέλτιστη απόκριση στις ενέργειες των άλλων παικτών:

$$\alpha^*_i \in B_i(\alpha^*_{-i}) \ \forall \text{ παίκτη } i$$

Αν κάθε παίκτης έχει μόνο μία βέλτιστη απόκριση στις ενέργειες των άλλων παικτών τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γίνει εξίσωση:

$$\alpha^*_i = b_i(\alpha^*_{-i}) \ \forall \text{ παίκτη } i$$

όπου b_i η μοναδική βέλτιστη απόκριση του παίκτη i. Άρα η Ισορροπία Nash βρίσκεται στο προφίλ ενεργειών που περιλαμβάνει τις βέλτιστες αποκρίσεις όλων των παικτών. Κάθε παίγνιο έχει n τέτοιες εξισώσεις, όπου n το πλήθος των παικτών του παιγνίου. Για παράδειγμα σε ένα παίγνιο με δύο παίκτες, τον 1 και τον 2, έχουμε δύο εξισώσεις:

$$\alpha^*_1 = b_1(\alpha^*_2)$$

$$\alpha^*_2 = b_2(\alpha^*_1)$$

Αν ισχύουν και οι δύο εξισώσεις, το προφίλ (α^*_1, α^*_2) είναι Ισορροπία Nash.

4. Παραδείγματα Στρατηγικών Παιγνίων

4.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Στο παράδειγμα “Το Δίλημμα του Φυλακισμένου” έχουμε δύο κρατούμενους οι οποίοι καλούνται να αποφασίσουν αν θα ομολογήσουν το έγκλημα (“καρφώνοντας” ουσιαστικά τον συνεργό τους) ή όχι. Οι δύο κρατούμενοι δεν μπορούν να συνεννοηθούν. Τα στοιχεία του παιγνίου είναι:

α. Παίκτες: οι δύο κρατούμενοι

β. Στρατηγικές: {ομολογεί, δεν ομολογεί}

γ. Απολαβές: Τα έτη ελάφρυνσης της ποινής φυλάκισης.

Οι *απολαβές* τους ανάλογα με τη στρατηγική που θα ακολουθήσει ο καθένας σε συνάρτηση με τη στρατηγική του άλλου παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2: *Απολαβές κρατουμένων ανάλογα με τις επιλεγείσες στρατηγικές εκάστου*

		κρατούμενος Β	
		ομολογεί	δεν ομολογεί
κρατούμενος Α	ομολογεί	(-2,-2)	(0,-4)
	δεν ομολογεί	(-4,0)	(-1,-1)

Εξετάζοντας τις απολαβές των παικτών στον πίνακα 2.1 παρατηρούμε ότι έχουμε ισορροπία Nash στην κατάσταση (*ομολογεί, ομολογεί*) όπου η απολαβή για κάθε παίκτη είναι -2, καθώς όντας σε αυτή την κατάσταση, κανένας από τους δύο δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική δεδομένου ότι η στρατηγική του άλλου παίκτη παραμένει η ίδια. Πράγματι,ο κρατούμενος Α δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική (*δεν ομολογεί, ομολογεί*) γιατί η απολαβή του θα μειωθεί από -2 σε -4. Το αντίστοιχο ισχύει και για τον Β. Αν θεωρήσουμε όμως ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση (*δεν ομολογεί, δεν ομολογεί*), ο Α έχει κίνητρο να μεταβεί στη στρατηγική (*ομολογει, δεν ομολογεί*) καθώς έτσι θα αυξήσει την απολαβή του από -1 σε 0. Σε αυτή την κατάσταση ο Β θα προτιμήσει και αυτός να *ομολογήσει* (*ομολογεί, ομολογεί*) καθώς θα αυξήσει την απολαβή του από -4 σε -2. Έτσι, το παίγνιο καταλήγει πάλι στην ισορροπία Nash (*ομολογεί, ομολογεί*) όπου κανένας παίκτης πλέον δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική.

Όσον αφορά την πρώτη παραδοχή της Ισορροπίας Nash περί ορθολογικότητας των παικτών, θα πρέπει στο παράδειγμά μας οι κρατούμενοι να επιδιώκουν τη βελτιστοποίηση της αμοιβής τους η οποία είναι η μικρότερη ποινή φυλάκισης. Σε περίπτωση που οι δύο κρατούμενοι είναι μέλη σπείρας που εκδικείται τα “καρφιά”, είναι πολύ πιθανό οι κρατούμενοι να ενεργήσουν αντίθετα με το *προφανές συμφέρον* τους δηλαδή να ομολογήσουν. Θα πρέπει λοιπόν να γνωρίζουμε όλες τις παραμέτρους που επηρεάζουν το παίγνιο για να μπορέσουμε να το μοντελοποιήσουμε σωστά. Εναλλακτικά λοιπόν σε περίπτωση που οι παίκτες είναι μέλη εκδικητικής σπείρας αναπροσαρμόζουμε τον πίνακα απολαβών ως εξής:

Πίνακας 3: *Απολαβές κρατουμένων – εναλλακτικό σενάριο*

		κρατούμενος Β	
		ομολογεί και γίνεται στόχος	δεν ομολογεί
κρατούμενος Α	ομολογεί και γίνεται στόχος	(-5,-5)	(-5,-3)
	δεν ομολογεί	(-3,-5)	(-2,-2)

Σε περίπτωση που ομολογήσει κάποιος κρατούμενος θα πρέπει να κρυφτεί για 5 χρόνια μέχρι να ξεχαστεί η προδοσία του από τη σπείρα του. Εν προκειμένω, η Ισορροπία Nash είναι η (*δεν ομολογεί, δεν ομολογεί*) με απολαβή -2 για τον καθένα, η οποία όπως θα δούμε και στη συνέχεια, είναι κυρίαρχη στρατηγική και για τους δύο παίκτες.

Επιστρέφοντας στη βασική μορφή του παιγνίου, παρατηρούμε στον πίνακα απολαβών ότι το σημείο Ισορροπίας Nash δεν είναι η βέλτιστη λύση του παιγνίου, η λύση δηλαδή που θα μεγιστοποιούσε τις συνολικές απολαβές. Η βέλτιστη επιλογή για τους δύο κρατούμενους είναι η (*δεν ομολογεί, δεν ομολογεί*) με την οποία τιμωρούνται με 1 χρόνο φυλακή ο καθένας. Θα πρέπει λοιπόν να επισημανθεί ότι η Ισορροπία Nash δεν υποδεικνύει τη βέλτιστη λύση αλλά την κατάσταση αυτή στην οποία θα φτάσουμε αν οι παίκτες επιδιώξουν να μεγιστοποιήσουν το προσωπικό τους όφελος, και την οποία κανένας παίκτης δεν θα ωφεληθεί επιπρόσθετα αν αλλάξει.

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου είναι ταυτόχρονο παίγνιο, καθώς οι παίκτες αποφασίζουν ταυτόχρονα και άρα χωρίς να γνωρίζουν τη στρατηγική του αντιπάλου τους. Επίσης είναι μη συνεργατικό αφού δεν υπάρχει η δυνατότητα συνεννόησης και συμμετρικό αφού οι απολαβές για τους παίκτες είναι αντίστοιχες και ανάλογες στα αντίστροφα προφίλ ενεργειών. Τέλος, είναι μη μηδενικού αθροίσματος, που σημαίνει ότι το όφελος κάποιου παίκτη δεν συνεπάγεται την ανάλογη ζημία του άλλου.

4.2 Η Μάχη των Φύλων

Ένα ζευγάρι αποφασίζει να πάει για ταινία στο σινεμά. Εκείνο το βράδυ προβάλλονται δύο ταινίες: *η αγάπη ήρθε σαν την άνοιξη* και *ο εξολοθρευτής*. Η γυναίκα προτιμά να δει τον εξολοθρευτή ενώ ο άντρας θέλει να δει το *η αγάπη ήρθε σαν την άνοιξη*. Αν δεν παρακολουθήσουν μαζί την ταινία δεν θα περάσουν καλά (μηδενική απολαβή), καθώς προέχει το να είναι μαζί. Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε αυτή την κατάσταση, ορίζουμε το παίγνιο με τα εξής στοιχεία:

α. Παίκτες: άντρας, γυναίκα

β. Στρατηγικές: {*εξολοθρευτής*, *η αγάπη ήρθε σαν την άνοιξη*}

γ. Απολαβές: Ο βαθμός ευχαρίστησης όπως φαίνεται στον πίνακα απολαβών

Πίνακας 4: *Απολαβές ζευγαριού στη Μάχη των Φύλων*

		Γυναίκα	
		εξολοθρευτής	*η αγάπη ήρθε σαν την*
Άνδρας	*εξολοθρευτής*	(1,2)	(0,0)
	η αγάπη ήρθε σαν την άνοιξη	(0,0)	(2,1)

Η Μάχη των Φύλων είναι ένα παίγνιο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μοντελοποίηση πολλών πραγματικών καταστάσεων. Για παράδειγμα, θεωρείστε δύο υψηλόβαθμα στελέχη ενός κόμματος που διαφωνούν σχετικά με τη στάση που πρέπει να τηρήσει το κόμμα αναφορικά με κάποιο ζήτημα. Προφανώς, και για τους δύο είναι χειρότερο να μην συμφωνήσουν, παρά να δεχτούν την άποψη του άλλου. Αντίστοιχα, ο κιθαρίστας και ο πιανίστας μιας μπάντας διαφωνούν για το ποιο θα είναι το πρώτο τραγούδι της συναυλίας τους. Και οι δύο φυσικά προτιμούν να δεχτούν τη γνώμη του άλλου παρά να ξεκινήσουν παίζοντας διαφορετικά τραγουδια.

Σε αυτό το παίγνιο παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο Ισορροπίες Nash. Η κατάσταση (*εξολοθρευτής, εξολοθρευτής*) και η (*η αγάπη ήρθε σαν την άνοιξη, η αγάπη* *ήρθε σαν την άνοιξη*). Και στις δύο αυτές καταστάσεις κανένας παίκτης από τους δύο δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική (δεδομένου ότι η στρατηγική του άλλου παραμένει αμετάβλητη) καθώς, αν το κάνει, θα μειωθούν οι απολαβές του από 2 ή 1 σε 0.

4.3 Ταίριασμα Νομισμάτων

Σε αυτό το παίγνιο έχουμε δύο παίκτες, τον Α και τον Β, οι οποίοι κρατούν από ένα κέρμα στο χέρι τους και το αφήνουν σε ένα τραπέζι ταυτόχρονα. Αν οι δύο παίκτες αφήσουν το κέρμα με την ίδια όψη (*κορώνα,κορώνα*) ή (*γράμματα, γράμματα*) ο Α κερδίζει 1 ευρώ και ο Β χάνει 1 ευρώ. Αν οι δύο παίκτες αφήσουν το κέρμα με την αντίθετη όψη (*κορώνα,γράμματα*) ή (*γράμματα, κορώνα*) ο Α χάνει 1 ευρώ και ο Β κερδίζει 1 ευρώ. Μοντελοποιώντας αυτό το παίγνιο έχουμε:

α. Παίκτες: ο Α και ο Β

β. Στρατηγικές: {*κορώνα, γράμματα*}

γ. Απολαβές: το χρηματικό ποσό που κερδίζει ή χάνει κάθε παίκτης, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5: *Απολαβές παικτών στο παίγνιο "Ταίριασμα Νομισμάτων"*

		Παίκτης Β	
		κορώνα	*γράμματα*
Παίκτης Α	*κορώνα*	(1,-1)	(-1,1)
	γράμματα	(-1,1)	(1,-1)

Τα δύο προηγούμενα παίγνια, "Το Δίλημμα του Φυλακισμένου" και "Η Μάχη των Φύλων", περιλαμβάνουν στρατηγικές συνεργασίας και μη συνεργασίας ή διένεξης. Δηλαδή οι παίκτες ανάλογα με τη στρατηγική που θα επιλέξουν μπορούν να αλλάξουν τις συνολικές απολαβές σε επίπεδο συστήματος. Για παράδειγμα, στο Δίλημμα του Φυλακισμένου αν οι παίκτες επιλέξουν (*ομολογεί*, *ομολογεί*) οι συνολικές απολαβές τους είναι -2 + (-2) = -4. Ενώ αν επιλέξουν (*δεν ομολογεί, δεν ομολογεί*) οι συνολικές απολαβές τους είναι -1 + (-1) = -2 > -4.

Στο παίγνιο Ταίριασμα νομισμάτων οι απολαβές των παικτών είναι αντίθετες σε πρόσημο και ίσες σε απόλυτη τιμή. Έτσι, οι συνολικές απολαβές του παιγνίου είναι πάντα 0, ανεξαρτήτως ποια στρατηγική θα επιλέξουν οι παίκτες. Αυτής της μορφής τα παίγνια είναι γνωστά ως παίγνια μηδενικού αθροίσματος (zero-sum games). Επίσης, τα παίγνια στα οποία τα ενδιαφέροντα των παικτών είναι διαμετρικά αντίθετα λέγονται “αυστηρά ανταγωνιστικά” (strictly competitive).

Στο παίγνιο “Ταίριασμα Νομισμάτων” αν κάποιος παίκτης αποφασίσει να παίζει ντετερμινιστικά χρησιμοποιώντας κάποιο μοτίβο, ο αντίπαλος παίκτης θα αναγνωρίσει το μοτίβο αποκτώντας πείρα και θα μπορεί να επιλέγει κάθε φορά τη στρατηγική που εξυπηρετεί το συμφέρον του. Η βέλτιστη στρατηγική λοιπόν και για τους παίκτες είναι να τυχαιοποιούν τις επιλογές τους ώστε να μπερδεύουν τον αντίπαλο. Έτσι, στο συγκεκριμένο παράδειγμα η πιθανότητα επιλογής των δύο στρατηγικών από τους παίκτες είναι ίση, αφού και οι απολαβές είναι ίσες για τις δύο στρατηγικές οπότε δεν υπάρχει λόγος προτίμησης κάποιας από τις δύο.

$$\boxed{P_{κορώνα} = P_{γράμματα} = 0,5}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι σε αυτό το παίγνιο δεν υπάρχει Ισορροπία Nash, με την παραδοχή ότι οι στρατηγικές των παικτών είναι *καθαρές* (*pure strategy Nash Equilibrium*). Στα παίγνια Καθαρής Στρατηγικής μόνο μία από τις διαθέσιμες στρατηγικές έχει πιθανότητα επιλογής μεγαλύτερη από 0, ενώ όλες οι άλλες έχουν πιθανότητα επιλογής 0. Πράγματι, σε οποιαδήποτε κατάσταση και να βρισκόμαστε, πάντα κάποιος από τους δύο παίκτες έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική αφού θα βελτιώσει την απολαβή του, με δεδομένο ότι ο άλλος παίκτης διατηρεί την ίδια στρατηγική (πίνακας 2.5). Για παράδειγμα, αν βρισκόμαστε στην κατάσταση (κορώνα, κορώνα) ο παίκτης Β έχει κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική του από κορώνα σε γράμματα καθώς έτσι θα αυξήσει τις απολαβές του από -1 σε 1. Όμως ούτε σε αυτή την κατάσταση (κορώνα, γράμματα) θα έχουμε Ισορροπία Nash αφού ο Παίκτης Α έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική από κορώνα σε γράμματα, αυξάνοντας έτσι την απολαβή του από -1 σε 1. Βλέπουμε λοιπόν ότι οδηγούμαστε σε έναν ατέρμονο βρόγχο αλλαγής στρατηγικών.

Πίνακας 6: *Στο παίγνιο “Ταίριασμα Νομισμάτων” δεν υπάρχει ισορροπία Nash Καθαρής Στρατηγικής*

		Παίκτης Β	
		κορώνα	*γράμματα*
Παίκτης Α	*κορώνα*	(1,-1)	(-1,1)
	γράμματα	(-1,1)	(1,-1)

Στη συνέχεια αυτής εργασίας θα δούμε πως εισάγοντας την έννοια της **μικτής στρατηγικής** (mixed strategy) μπορούμε να ορίσουμε και στο παίγνιο "Ταίριασμα Νομισμάτων" Ισορροπία Nash, αφού σύμφωνα με τον Nash, ***κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει Ισορροπία Nash***.

4.4 Το Κυνήγι του Ελαφιού

Δύο κυνηγοί προσπαθούν να πιάσουν ένα ελάφι. Θα καταφέρουν να πιάσουν το ελάφι μόνο αν συνεργαστούν και κρατήσουν τις προκαθορισμένες θέσεις τους. Οι δύο κυνηγοί μπορούν ωστόσο να εγκαταλείψουν τη θέση τους και να αφοσιωθούν ξεχωριστά ο καθένας στο κυνήγι ενός λαγού. Είναι βέβαιο ότι καθένας κυνηγός μπορεί να πιάσει ένα λαγό (τον οποίο φυσικά δεν θα μοιραστεί με τον άλλο κυνηγό), οι δύο μαζί με συνεργασία μπορούν να πιάσουν ένα ελάφι το οποίο μοιράζονται, ενώ αν μόνο ο ένας από τους δύο κυνηγήσει λαγό ο άλλος δεν θα μπορέσει να πιάσει το ελάφι μόνος του. Θεωρούμε ότι το μερίδιο του ελαφιού για τον καθένα έχει μεγαλύτερη αξία από το λαγό.

Η κατάσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως παίγνιο με τα εξής στοιχεία:

α. Παίκτες: οι δύο κυνηγοί

β. Στρατηγικές: {*ελάφι, λαγός*}

γ. Απολαβές: το μερίδιο από το ελάφι ή ο λαγός. Ποσοτικοποιημένες απολαβές όπως στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 7: *Απολαβές παικτών στο παίγνιο "Το Κυνήγι του Ελαφιού"*

		Κυνηγός Β	
		ελάφι	*λαγός*
Κυνηγός Α	*ελάφι*	(2,2)	(0,1)
	λαγός	(1,0)	(1,1)

Σε αυτό το παίγνιο έχει ενδιαφέρον να δούμε ότι υπάρχουν 2 Ισορροπίες Nash, στις στρατηγικές (*ελάφι, ελάφι*) και (*λαγός, λαγός*). Πράγματι, στην κατάσταση (*ελάφι, ελάφι*) όπου και οι δύο παίκτες έχουν απολαβή 2 κανένας από τους δύο δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική, δεδομένου ότι ο έτερος παίκτης διατηρεί την ίδια στρατηγική, αφού η απολαβή του θα μειωθεί από 2 σε 1. Αντίστοιχα, στην κατάσταση (*λαγός, λαγός*) όπου και οι δύο παίκτες έχουν απολαβή 1, κανένας από τους δύο δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική, δεδομένου ότι ο έτερος παίκτης διατηρεί την ίδια στρατηγική, αφού η απολαβή του θα μειωθεί από 1 σε 0.

4.5 Καρτέλ Εταιρειών

Το παίγνιο “Το Κυνήγι του Ελαφιού” μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο για τη μοντελοποίηση μιας σειράς πραγματικών καταστάσεων στις οποίες οι παίκτες δελεάζονται να παραβούν συμφωνημένους όρους προκειμένου να εξυπηρετήσουν καλύτερα τα δικά τους συμφέροντα. Ας θεωρήσουμε ένα καρτέλ εταιρειών οι οποίες έχουν συμφωνήσει μυστικά (και παράνομα!) να διατηρούν τις τιμές σε υψηλά επίπεδα. Φτιάχνουμε ένα παίγνιο με τα εξής στοιχεία:

α. παίκτες: οι εταιρίες

β. στρατηγικές: {*υψηλές, χαμηλές*} (εννοείται τιμές)

γ. απολαβές: κέρδη από τις πωλήσεις

Δεχόμαστε φυσικά ότι υπάρχουν 2 τιμές, οι χαμηλές και οι υψηλές, οι πελάτες είναι τέλεια πληροφορημένοι, το προϊόν είναι ακριβώς το ίδιο και δεν υπάρχει κόστος μετακίνησης από εταιρεία σε εταιρεία. Ο αριθμός των εταιρειών δεν επηρεάζει το μοντέλο, ωστόσο για να απλοποιηθεί η οπτικοποίηση των απολαβών μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο εταιρίες. Ο πίνακας λοιπόν των απολαβών είναι:

Πίνακας 8: *Απολαβές παικτών στο καρτέλ για τις τιμές*

		Εταιρεία Β	
		χαμηλές	*υψηλές*
Εταιρεία Α	*χαμηλές*	(1,1)	(5,0)
	υψηλές	(0,5)	(3,3)

Η Ισορροπία Nash σε αυτό το παίγνιο είναι η (*χαμηλές, χαμηλές*). Σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση κι αν βρισκόμαστε, κάποιος παίκτης έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική αφού έτσι θα αυξήσει τις απολαβές του. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το καρτέλ έχει συμφωνήσει να αποφύγει τον ανταγωνισμό κρατώντας ψηλά τις τιμές. Η εταιρεία Α όμως δελεάζεται να κατεβάσει τις τιμές της διαλύοντας μονομερώς το καρτέλ, καθώς έτσι όλοι πελάτες θα μετακινηθούν σε αυτή με αποτέλεσμα να αυξήσει την απολαβή της από 3 σε 5. Η εταιρεία Β (ή αν θέλετε οι υπόλοιπες εταιρείες του καρτέλ) δεν θα μείνει άπραγη. Θα κατεβάσει και αυτή τις τιμές προκειμένου να ανακτήσει τους πελάτες της. Έτσι το σύστημα θα έρθει πάλι στην κατάσταση (*χαμηλές, χαμηλές*) όπου και θα ισορροπήσει κατά Nash.

5. Κυριαρχία στρατηγικών

5.1 Αυστηρή Κυριαρχία

Η κυριαρχία στρατηγικών είναι μια έννοια που περιγράφει τη σχέση των απολαβών που έχει ένας παίκτης από την κάθε μία στρατηγική που μπορεί να επιλέξει, χωρίς να εξετάζουμε ποια στρατηγική θα επιλέξουν οι άλλοι παίκτες. Ας πάρουμε για παράδειγμα το τελευταίο παίγνιο που εξετάσαμε, το καρτέλ εταιρειών, εξετάζοντας τις στρατηγικές από την οπτική γωνία της εταιρείας Α. Αν η εταιρεία Β επιλέξει να σπάσει το καρτέλ υιοθετώντας χαμηλές τιμές, η εταιρεία Α μπορεί να χαμηλώσει αντίστοιχα και αυτή τις τιμές της παίρνοντας απολαβή 1, ή να διατηρήσει υψηλές τιμές παίρνοντας απολαβή 0. Προφανώς η *βέλτιστη απόκριση* σε αυτή την περίπτωση είναι οι χαμηλές τιμές.

Πίνακας 9: *Βέλτιστη απόκριση για την Α, αν η Β επιλέξει "χαμηλές"*

		Εταιρεία Β	
		χαμηλές	*υψηλές*
Εταιρεία Α	*χαμηλές*	(1,1)	(5,0)
	υψηλές	(0,5)	(3,3)

Αν η εταιρεία Β επιλέξει να τηρήσει τη μυστική συμφωνία και να κρατήσει τις υψηλές τιμές, η εταιρεία Α μπορεί να χαμηλώσει πρώτη τις τιμές της παίρνοντας απολαβή 5, ή να διατηρήσει υψηλές τιμές παίρνοντας απολαβή 3. Και σε αυτή την περίπτωση η *βέλτιστη απόκριση* για την εταιρεία Α είναι η στρατηγική *χαμηλές*.

Πίνακας 10: *Βέλτιστη απόκριση για την Α, αν η Β επιλέξει "υψηλές"*

		Εταιρεία Β	
		χαμηλές	*υψηλές*
Εταιρεία Α	*χαμηλές*	(1,1)	(5,0)
	υψηλές	(0,5)	(3,3)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για την εταιρεία Α, **ανεξαρτήτως** της στρατηγικής που θα επιλέξει η εταιρεία Β, η στρατηγική *χαμηλές* είναι η βέλτιστη καθώς σε κάθε περίπτωση της δίνει μεγαλύτερες απολαβές από τη στρατηγική *υψηλές*. Με άλλα λόγια, η εταιρεία Α θα πρέπει να επιλέξει τη στρατηγική *χαμηλές* χωρίς να νοιάζεται για τις επιλογές της εταιρείας Β, καθώς αυτή η στρατηγική εξυπηρετεί πάντα με καλύτερο τρόπο τα συμφέροντά της. Λέμε ότι η στρατηγική *χαμηλές* **κυριαρχεί αυστηρά** τις υπόλοιπες στρατηγικές ή γενικά ότι είναι **αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική**.

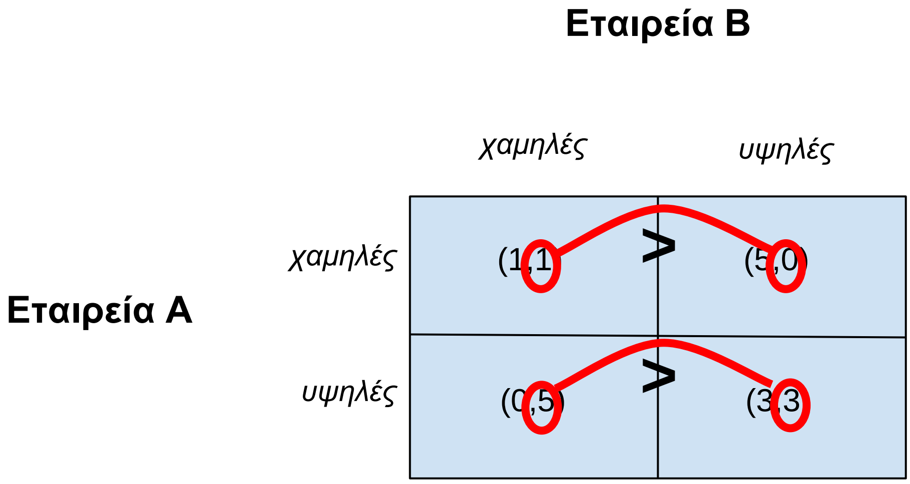
Γενικότερα, η στρατηγική s΄ του παίκτη i με απολαβή u κυριαρχεί αυστηρά έναντι της στρατηγικής s΄΄ όταν ισχύει η σχέση:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i'', s_{-i})$$

Δηλαδή, η απολαβή (u) του παίκτη i από τη στρατηγική **s΄** είναι **μεγαλύτερη** από την απολαβή της στρατηγικής **s΄΄** για κάθε στρατηγική s_{-i} των υπολοίπων παικτών (-i).

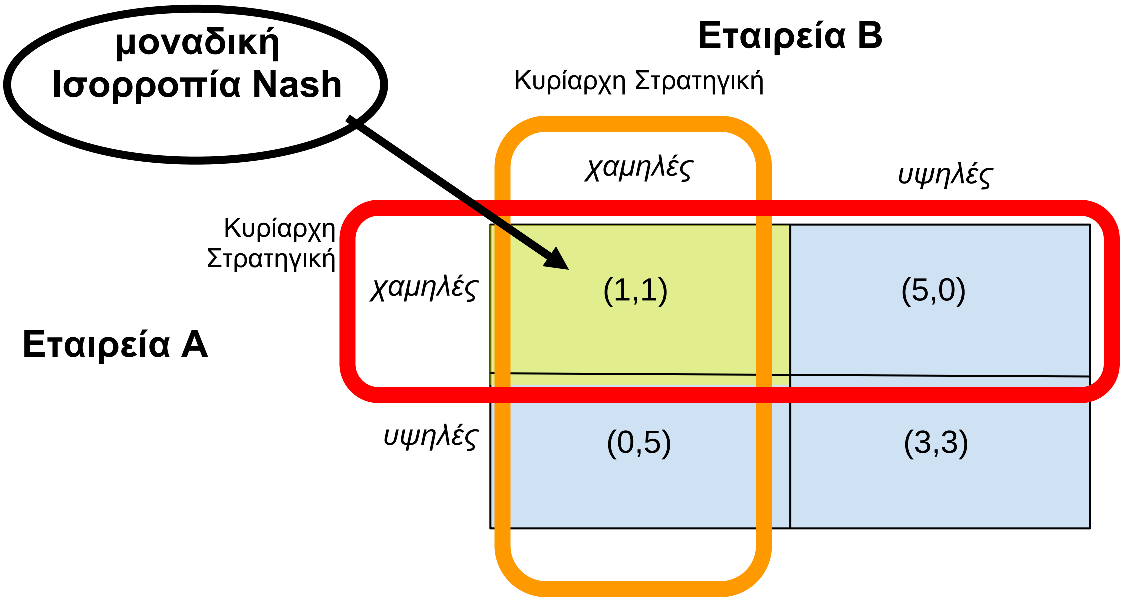
Εξετάζοντας το παράδειγμα του καρτέλ και από την πλευρά της εταιρείας Β, συμπεραίνουμε ότι η στρατηγική *χαμηλή* είναι κυρίαρχη και για αυτή. Αν λοιπόν η Α επιλέξει *υψηλές*, η βέλτιστη απόκριση για την Β είναι η στρατηγική *χαμηλές* με απολαβή 5 έναντι 3 της στρατηγικής *υψηλές*. Αντίστοιχα ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση που η εταιρεία Α επιλέξει *χαμηλές*.

Πίνακας 11: *Αυστηρή Κυριαρχία στρατηγικής «χαμηλές»*



Όταν και για τους δύο παίκτες του παιγνίου υπάρχει αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική, τότε το παίγνιο έχει μόνο μία Ισορροπία Nash, στην κατάσταση όπου επιλέγεται η κυρίαρχη στρατηγική από κάθε παίκτη.

Πίνακας 12: *Μοναδική Ισορροπία Nash στο παίγνιο Καρτέλ*



5.2 Ασθενής Κυριαρχία

Μια στρατηγική λέμε ότι είναι **ασθενώς κυρίαρχη** έναντι μιας άλλης, όταν η απολαβή από αυτήν, είναι **τουλάχιστον ίση** με τις απολαβές των άλλων στρατηγικών για κάθε ενέργεια που επιλέγουν να κάνουν οι άλλοι παίκτες. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i'', s_{-i})$$

Υποθέτουμε στο παίγνιο του καρτέλ ότι η μετακίνηση των πελατών από εταιρεία σε εταιρεία έχει κάποιο κόστος ή ότι οι πελάτες δεν είναι τέλεια πληροφορημένοι. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να μην μετακινούνται όλοι στη φθηνότερη εταιρεία, αλλά το μεγαλύτερο μέρος τους. Έτσι, οι απολαβές των εταιρειών ανάλογα τη στρατηγική τους γίνονται:

Πίνακας 13: *Πίνακας Απολαβών στη διαφοροποιημένη εκδοχή του παιγνίου Καρτέλ*

		Εταιρεία Β	
		χαμηλές	*υψηλές*
Εταιρεία Α	*χαμηλές*	(1,1)	(5,1)
	υψηλές	(1,5)	(3,3)

Αν η εταιρεία Α επιλέξει τη στρατηγική *υψηλές*, η εταιρεία Β έχει κίνητρο να επιλέξει τη στρατηγική *χαμηλές* καθώς αυτή θα της δώσει μεγαλύτερη απολαβή από τη στρατηγική *υψηλές*. Αν όμως η εταιρεία Α επιλέξει *χαμηλές*, η Β είναι αδιάφορη για το ποια στρατηγική θα επιλέξει, καθώς και οι δύο της δίνουν την ίδια απολαβή. Σε αυτό το παράδειγμα η στρατηγική *χαμηλές* είναι **ασθενώς κυρίαρχη** έναντι της στρατηγικής *υψηλές*.

6. Μικτές Στρατηγικές

Στο παίγνιο "Ταίριασμα Νομισμάτων" αναφέρθηκε η έννοια της Καθαρής Στρατηγικής και των Μικτών Στρατηγικών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τι ακριβώς είναι οι Μικτές Στρατηγικές, θα εισάγουμε την παράμετρο της πιθανότητας επιλογής στρατηγικής και θα επεκτείνουμε τον ορισμό της Ισορροπίας Nash. Καθαρή Στρατηγική έχουμε όταν οι παίκτες του παιγνίου επιλέγουν μία στρατηγική από το σύνολο των στρατηγικών με πιθανότητα p=1 ενώ όλες οι υπόλοιπες στρατηγικές έχουν πιθανότητα επιλογής p=0. Μικτή Στρατηγική έχουμε όταν ο παίκτης επιλέγει τυχαία ένα υποσύνολο στρατηγικών από τις διαθέσιμες (μπορεί και όλες), με πιθανότητα επιλογής της κάθε μιας $p_\alpha < 1$ και άθροισμα των πιθανοτήτων $p_s = 1$. Πιο απλά, η Μικτή Στρατηγική για έναν παίκτη σε ένα στρατηγικό παίγνιο είναι μια **κατανομή πιθανοτήτων ως προς το σύνολο των ενεργειών** που έχει στη διάθεσή του.

Στο παίγνιο "Ταίριασμα Νομισμάτων" είδαμε ότι κανένα προφίλ στρατηγικών δεν είναι Ισορροπία Nash καθώς πάντα κάποιος από τους δύο παίκτες έχει κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική του. Το χειρότερο που θα μπορούσε να κάνει κάποιος παίκτης σε μια σειρά επαναλήψεων του παιγνίου είναι παίζει ντετερμινιστικά μία καθαρή στρατηγική. Για παράδειγμα, αν ο παίκτης Α αποφασίσει να παίζει συνέχεια *γράμματα*, τότε ο άλλος παίκτης παρατηρώντας τη συμπεριφορά του πρώτου θα έπαιζε συνέχεια *κορώνα* μεγιστοποιώντας τη δική του απολαβή. Η πιθανότητα του Α να κερδίσει θα ήταν 0. Συνεπώς, το καλύτερο που μπορεί να κάνει είναι να μπερδεύει συνεχώς τον αντίπαλό του, επιλέγοντας κάθε φορά τυχαία *κορώνα* ή *γράμματα* με πιθανότητα επιλογής 0,5 και 0,5 αντίστοιχα, δεδομένης της συμμετρίας των απολαβών. Η πιθανότητα να κερδίσει τώρα ο Α είναι ίση με 0,5 και είναι η μέγιστη που μπορεί να επιτύχει. Σε αυτή τη Μικτή Στρατηγική του Α, η βέλτιστη απόκριση του παίκτη Β είναι να τυχαιοποιήσει με τη σειρά του και τη δική του στρατηγική, με πιθανότητες επιλογής των ενεργειών *κορώνα* ή *γράμματα* με πιθανότητα επιλογής 0,5 και 0,5 αντίστοιχα.

Πίνακας 14: *Πίνακας απολαβών στο παίγνιο «Ταίριασμα Νομισμάτων»*

		Παίκτης Β	
		κορώνα p=0,5	*γράμματα p=0,5*
Παίκτης Α	*κορώνα p=0,5*	(1,-1)	(-1,1)
	γράμματα p=0,5	(-1,1)	(1,-1)

Η Ισορροπία Nash στο παίγνιο “Ταίριασμα Νομισμάτων” είναι η (½ *κορώνα*, ½ *γράμματα*). Λόγω της απόλυτης συμμετρίας των απολαβών και δεδομένου ότι η Μικτή Στρατηγική έχει πλήθος 2, προκύπτει εύκολα το p=0,5 για τις δύο στρατηγικές. Στο επόμενο παίγνιο θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα επιλογής P της κάθε μιας στρατηγικής

6.1 Μερίδιο Αγοράς

Θα αναζητήσουμε την Ισορροπία Nash στο παρακάτω στρατηγικό παίγνιο στο οποίο μια αγορά σταθερού μεγέθους υπάρχουν 2 εταιρείες: μια μεγάλη εδραιωμένη πολυεθνική εταιρεία, με μεγάλους τζίρους και το μεγαλύτερο μερίδιο αγοράς, και μια μικρή startup με περιορισμένο budget αλλά βελτιωμένο και πιο οικονομικό (όμοιο) προϊόν η οποία κατέχει ένα μικρό μερίδιο αγοράς. Οι δύο ανταγωνιστές προγραμματίζουν το διαφημιστικό τους budget κάθε τετράμηνο και βασικός σκοπός τους είναι η διεύρυνση του μεριδίου αγοράς. Υποθέτουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το διαφημιστικό budget της μίας εταιρείας συγκριτικά με αυτό της άλλης, τόσο μεγαλώνει και το μερίδιο αγοράς της. Τα στοιχεία του παιγνίου είναι:

α. **Παίκτες**: η Πολυεθνική και η Startup

β. **Στρατηγικές**: {*μεγάλο, μικρό*} μεγάλο ή μικρό διαφημιστικό budget.

γ. **Απολαβές**: Η αύξηση του μεριδίου αγοράς σε συνάρτηση με τα κέρδη της όπως στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 15: *Πίνακας απολαβών παιγνίου Μεριδίου Αγοράς*

		Startup	
		μικρό ***Ps***	*μεγάλο* ***1-Ps***
Πολυεθνική	*μικρό*	(5,4)	(1,5)
	μεγάλο	(3,1)	(2,-1)

Η αρνητική απολαβή -1 για την Startup στο προφίλ (*μεγάλο, μεγάλο*) έχει τη λογική ότι αν επιλέξει να δαπανήσει πολλά χρήματα για διαφήμιση ταυτόχρονα με μεγάλη δαπάνη της Πολυεθνικής, θα χάσει μεγάλο μέρος του ρευστού της (μείωση κερδών) χωρίς να αυξήσει το μερίδιο αγοράς της.

Αρχικά θα αναζητήσουμε το Ps, δηλαδή την πιθανότητα η Startup να επιλέξει τη στρατηγική *μικρό*. Στις Μικτές Στρατηγικές η βέλτιστη κατανομή των πιθανοτήτων ανάμεσα στις δυνατές στρατηγικές είναι αυτή που καθιστούν τον αντίπαλο αδιάφορο ως προς την επιλογή της δικής του στρατηγικής. Δηλαδή θα πρέπει η Startup να βρει αυτό το μίγμα των στρατηγικών τυχαίας επιλογής, το οποίο θα κάνει την Πολυεθνική αδιάφορη ως προς την επιλογή της στρατηγικής *μικρό* ή *μεγάλο*. Αυτό σημαίνει ότι για την Πολυεθνική θα πρέπει να ισχύει U^{Π}(μικρό) = U^{Π}(μεγάλο), όπου U (utility) είναι η απολαβή (χρησιμότητα). Αν δεν ισχύει αυτή η ισότητα, σημαίνει ότι η Πολυεθνική θα είχε μεγαλύτερη απολαβή επιλέγοντας μία συγκεκριμένη στρατηγική, οπότε θα επέλεγε αυτή ντετερμινιστικά, με πιθανότητα p=1, άρα θα είχαμε στρατηγικό παίγνιο καθαρής στρατηγικής και όχι μικτής.

$$\mathbf{U^{\Pi}(\text{μικρό}) = U^{\Pi}(\text{μεγάλο})}$$

$$\mathbf{Ps(U\textit{μικρό}) + (1\text{-}Ps)(U\textit{μικρό}) = Ps(U\textit{μεγάλο}) + (1\text{-}Ps)(U\textit{μεγάλο})}$$

$$\mathbf{Ps(5) + (1\text{-}Ps)(1) = Ps(3) + (1\text{-}Ps)(2)}$$

$$\mathbf{4Ps + 1 = Ps + 2}$$

$$\mathbf{Ps = \tfrac{1}{3}}$$

Συνεπώς η Startup θα πρέπει να επιλέγει τυχαία μεταξύ των δύο στρατηγικών, με πιθανότητα επιλογής της στρατηγικής *μικρό* = ⅓ και πιθανότητα επιλογής της στρατηγικής *μεγάλο* = ⅔ ώστε να είναι αδιάφορο για την Πολυεθνική το ποια στρατηγική θα επιλέξει η ίδια.

Αντίστοιχα και η Πολυεθνική θα πρέπει να επιλέγει τυχαία κάθε φορά τη στρατηγική της ώστε να μην είναι δυνατό για τη Startup να προβλέψει την επιλογή της καθώς αυτό θα είχε αρνητικά αποτελέσματα για την ίδια.

Πίνακας 16: *Πίνακας απολαβών παιγνίου Μεριδίου Αγοράς*

		Startup	
		μικρό	*μεγάλο*
Πολυεθνική	*μικρό* ***Ps***	(5,4)	(1,5)
	μεγάλο ***1-Ps***	(3,1)	(2,-1)

Η πιθανότητα τυχαίας επιλογής της κάθε στρατηγικής ώστε να προκύψει η Μικτή Στρατηγική θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η Startup να είναι αδιάφορη ως προς την επιλογή της δικής της στρατηγικής. Υπολογίζουμε το Ps για την Πολυεθνική:

$$U^{\Pi}(\mu\iota\kappa\rho\acute{o}) = U^{\Pi}(\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o)$$

$$Ps(U\mathit{\mu\iota\kappa\rho\acute{o}}) + (1-Ps)(U\mathit{\mu\iota\kappa\rho\acute{o}}) = Ps(U\mathit{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o}) + (1-Ps)(U\mathit{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o})$$

$$Ps(4) + (1-Ps)(1) = Ps(5) + (1-Ps)(-1)$$

$$3Ps + 1 = 6Ps - 1$$

$$Ps = \tfrac{2}{3}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η Ισορροπία Nash του παιγνίου είναι η Μικτή Στρατηγική

((⅔ *μικρό* + ⅓ *μεγάλο*), (⅓ *μικρό* + ⅔ *μεγάλο*))

που σημαίνει ότι οι δύο εταιρείες θα έχουν τις μέγιστες απολαβές αν η Πολυεθνική επιλέγει τυχαία *μικρό* ή *μεγάλο* διαφημιστικό budget με πιθανότητα επιλογής ⅔ και ⅓ αντίστοιχα, ενώ η Startup επιλέγει τυχαία *μικρό* ή *μεγάλο* διαφημιστικό budget με πιθανότητα επιλογής ⅓ και ⅔ αντίστοιχα.

Πίνακας 17: *Πίνακας απολαβών με πιθανότητες επιλογής στρατηγικής*

		Startup	
		μικρό ***p = 1/3***	*μεγάλο* ***p = 2/3***
Πολυεθνική	*μικρό* ***p = 2/3***	(5,4)	(1,5)
	μεγάλο ***p = 1/3***	(3,1)	(2,-1)

Τα 4 προφίλ του πίνακα απολαβών θα προκύπτουν τυχαία κάθε τετράμηνο με τις εξής πιθανότητες:

(*μικρό, μικρό*): p = (⅔) x (⅓) = 2/9

(*μεγάλο, μικρό*): p = (⅓) x (⅓) = 1/9

(*μικρό, μεγάλο*): p = (⅔) x (⅔) = 4/9

(*μεγάλο, μεγάλο*): p = (⅓) x (⅔) = 2/9

με Σp = 2/9 + 1/9 + 4/9 + 2/9 = 9/9 =1

7. Εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση

Στα εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση ο χρόνος επηρεάζει την εξέλιξη και την έκβαση του παιγνίου, σε αντίθεση με τα ταυτόχρονα παίγνια όπου ο χρόνος δεν έχει καμία σημασία. Φυσικά δεν έχει σημασία η απόλυτη τιμή του χρόνου μεταξύ δύο ενεργειών, αλλά το ότι η μία απόφαση έπεται της άλλης και λαμβάνεται με επίγνωση όλων των προηγουμένων αποφάσεων όλων των παικτών (οι λέξεις απόφαση, ενέργεια και στρατηγική χρησιμοποιούνται υπό την ίδια έννοια). Όπως αναφέρθηκε και στο 1ο κεφάλαιο τα εκτεταμένα παίγνια αναπαρίστανται με δέντρα αποφάσεων προκειμένου να γίνει εφικτή η απόδοση της σημασίας του χρόνου και των διαδοχικών ενεργειών των παικτών.

7.1 Εμπορικός Πόλεμος ΗΠΑ - ΚΙΝΑΣ

Ας θεωρήσουμε μια κατάσταση στην οποία οι ΗΠΑ και η Κίνα διαπραγματεύονται τις μεταξύ τους εμπορικές σχέσεις. Στην παρούσα κατάσταση δεν υπάρχουν δασμοί και η διακίνηση των εμπορευμάτων γίνεται ελεύθερα. Ωστόσο επειδή η Κίνα είναι πιο ανταγωνιστική, το ετήσιο εμπορικό ισοζύγιο είναι αρνητικό για τις ΗΠΑ κατά 380 δισ. δολάρια. Ο πρόεδρος των ΗΠΑ θέλει να αντιμετωπίσει αυτό το πρόβλημα και ξεκινάει σκληρές διαπραγματεύσεις με τον Κινέζο πρόεδρο για την επιβολή δασμών.

Η κατάσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

α. παίκτες: ΗΠΑ, Κίνα

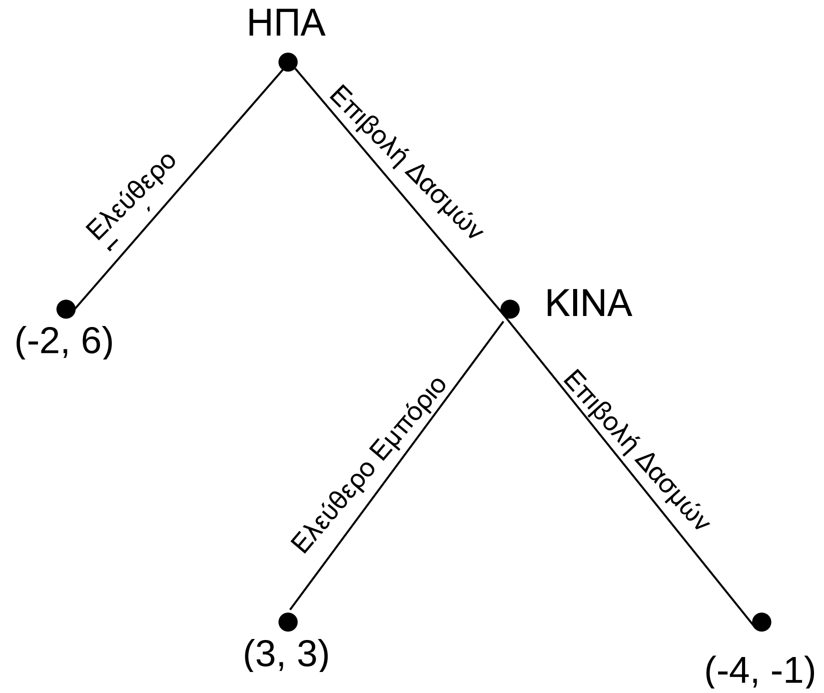
β. Στρατηγικές: {*Ελεύθερο Εμπόριο, Επιβολή Δασμών*}

γ. Απολαβές: Η συνεισφορά του μεταξύ τους εμπορίου στα ΑΕΠ των δύο κρατών

Οι ΗΠΑ είναι ο πρώτος παίκτης (ηγετικός) που θα πρέπει να πάρει μια απόφαση όσον αφορά την επιβολή ή μη των δασμών στις Κινεζικές εισαγωγές. Σε περίπτωση που οι ΗΠΑ αποφασίσουν να μην επιβάλλουν δασμούς στις Κινεζικές εισαγωγές αφήνοντας ελεύθερο το μεταξύ τους εμπόριο, το έλλειμμα θα συνεχίσει να υφίσταται για τους Αμερικάνους και οι απολαβές όπως φαίνεται στο σχετικό τερματικό κόμβο του δέντρου αποφάσεων 7.1 θα είναι -2, ενώ για τους Κινέζους θα είναι 6.

Αν οι ΗΠΑ αποφασίσουν να επιβάλλουν δασμούς, τότε η Κίνα θα πρέπει να αποφασίσει αν θα επιβάλλει και αυτή αντίστοιχα δασμούς στις αμερικάνικες εισαγωγές ως απάντηση, ή όχι. Αν αποφασίσει να μην επιβάλλει δασμούς, τότε η ανταγωνιστικότητά της θα μετριαστεί από τους δασμούς στις εξαγωγές της, με αποτέλεσμα το εμπορικό ισοζύγιο με τις ΗΠΑ να έρθει σε ισορροπία. Οι απολαβές της Κίνας θα μειωθούν από 6 σε 3 ενώ οι απολαβές των ΗΠΑ θα αυξηθούν από -3 σε 3. Σε περίπτωση που οι Κινέζοι απαντήσουν με ανάλογη επιβολή δασμών και ξεσπάσει εμπορικός πόλεμος μεταξύ των δύο χωρών, το εμπόριο θα συρρικνωθεί και έτσι και οι δύο χώρες θα έχουν χαμηλότερες απολαβές (-4, -1).

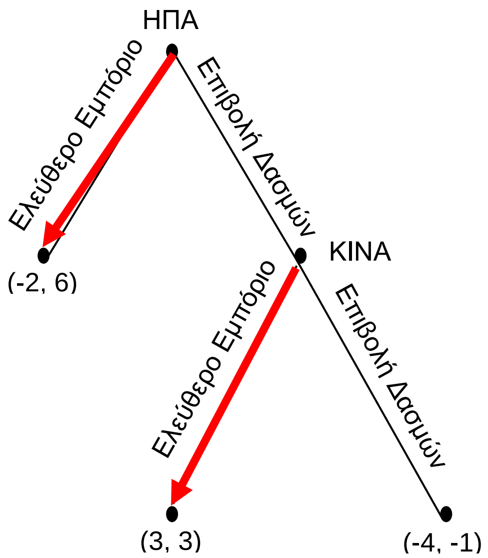
Προφανώς η Κίνα θα προτιμούσε οι ΗΠΑ να επιλέξουν *Ελεύθερο Εμπόριο*. Γνωρίζοντας όμως ότι πιθανόν να αποφασίσουν *Επιβολή Δασμών*, μπορούν να τις εκφοβίσουν με τον εκβιασμό ότι θα απαντήσουν με ανάλογους δασμούς (-4, -1). Με την μέθοδο της αντίστροφης επαγωγής την οποία θα δούμε παρακάτω, οι ΗΠΑ μπορούν να δουν ότι η Κίνα δεν πρόκειται να απαντήσει με ανάλογους δασμούς καθώς τη συμφέρει η στρατηγική *Ελεύθερο Εμπόριο* στην οποία έχουν απολαβή 3 (τελικός κόμβος: *Επιβολή Δασμών, Ελεύθερο Εμπόριο*).



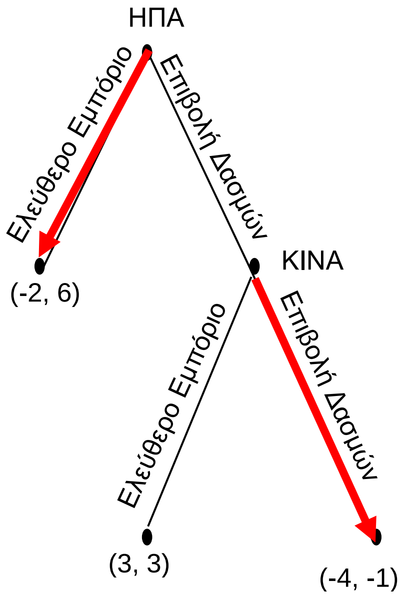
Διάγραμμα 3: *Δέντρο αποφάσεων*

Σε αυτό το παίγνιο το οποίο απεικονίζει υπεραπλουστευμένα την πραγματική κατάσταση, είναι φανερό ότι τελικά οι ΗΠΑ θα επιβάλλουν δασμούς και η Κίνα θα τους αποδεχθεί χωρίς (ανάλογα) αντίποινα, και τελικά θα ισορροπήσει το εμπορικό τους ισοζύγιο. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά τη συγκεκριμένη εμπορική διαμάχη με μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση.

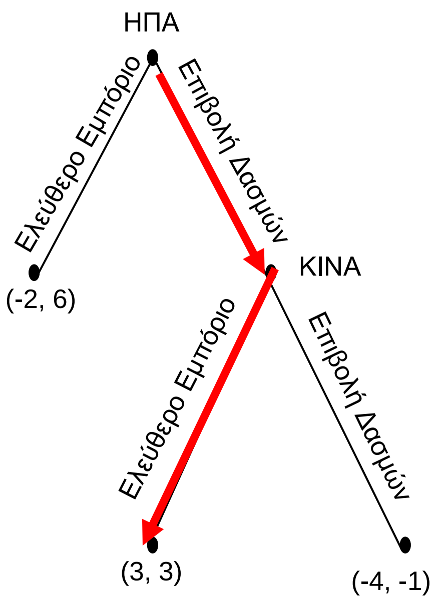
Αρχικά, έχει ενδιαφέρον να βρούμε την ισορροπία Nash σε αυτό το παίγνιο. Τα εκτεταμένα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση μπορούν να αποτυπωθούν και με πίνακα απολαβών αφού εντοπίσουμε τις καθαρές στρατηγικές των παικτών. Στο συγκεκριμένο παίγνιο αυτό είναι εύκολο αφού κάθε παίκτης αποφασίζει μία μόνο φορά. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι στα προφίλ στρατηγικών υπολογίζουμε και αυτά τα οποία είναι αδύνατον να επιτευχθούν πρακτικά, όπως η (*Ελεύθερο Εμπόριο*, *Επιβολή Δασμών*). Οι στρατηγικές των δύο χωρών στο παρόν παίγνιο είναι:



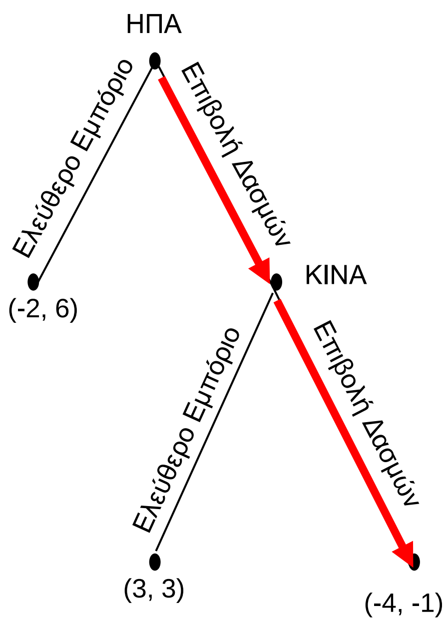
ελεύθερο εμπόριο, ελεύθερο εμπόριο (-2,6)



ελεύθερο εμπόριο, επιβολή δασμών (-2,6)



επιβολή δασμών, ελεύθερο εμπόριο (3,3)



επιβολή δασμών, επιβολή δασμών (-4,-1)

Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα απολαβών:

Πίνακας 18: *Πίνακας απολαβών εκτεταμένου παιγνίου*

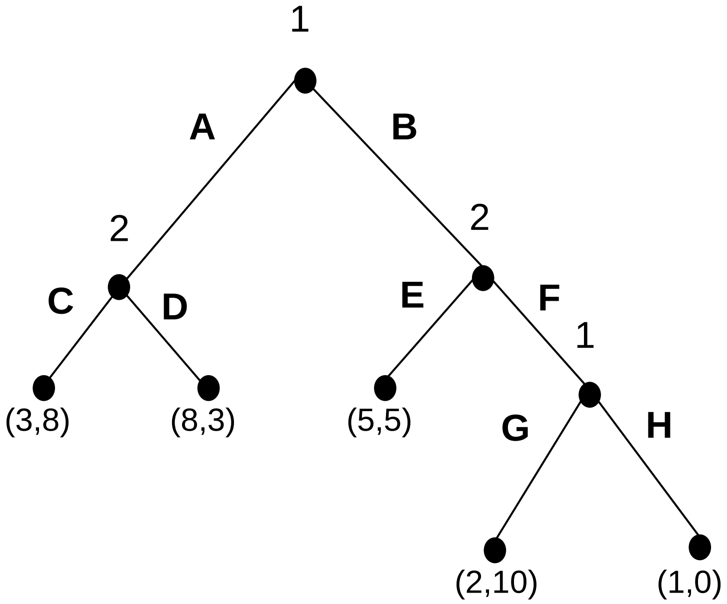
		ΚΙΝΑ	
		Ελεύθερο Εμπόριο	*Επιβολή Δασμών*
ΗΠΑ	*Ελεύθερο Εμπόριο*	(-2,6)	(-2,6)
	Επιβολή Δασμών	(3,3)	(-4,-1)

από τον οποίο προκύπτει ότι υπάρχει Ισορροπία Nash στην κατάσταση (*Επιβολή Δασμών, Ελεύθερο Εμπόριο*) με απολαβές 3 για κάθε παίκτη.

7.2 Υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία

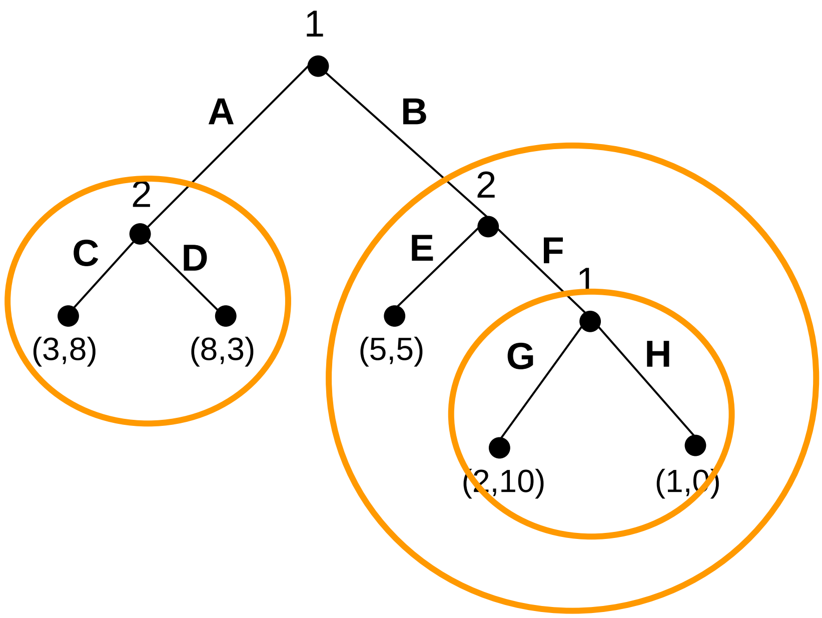
Η έννοια της Ισορροπίας Nash στα εκτεταμένα παίγνια παραβλέπει την ακολουθιακή δομή τους και αντιμετωπίζει τις στρατηγικές σαν μη αναστρέψιμες επιλογές. Απαιτεί την απόδοση του παιγνίου σε στρατηγική μορφή και στην ουσία εξετάζει μόνο τους τερματικούς κόμβους για την προσδιορισμό της ισορροπίας. Με άλλα λόγια οι στρατηγικές είτε είναι καθαρές είτε μικτές, προκαθορίζονται στην αρχή του παιγνίου, δηλαδή το παίγνιο παίζεται ντετερμινιστικά. Μια εναλλακτική έννοια ισορροπίας για τα εκτεταμένα παίγνια είναι η υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία, η οποία απαιτεί να είναι η στρατηγική του κάθε παίκτη βέλτιστη, με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών, όχι μόνο κατά την αρχή του παιγνίου αλλά και μετά σε κάθε ενδιάμεσο κόμβο.

Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια του υποπαιγνίου. Κάθε τμήμα του παιγνίου που έπεται ενός μη τερματικού κόμβου λέγεται υποπαίγνιο αυτού του παιγνίου. Ας θεωρήσουμε ένα ακολουθιακό παίγνιο με δύο παίκτες, τον 1 και τον 2 το οποίο παριστάνεται με το ακόλουθο δέντρο αποφάσεων:



Διάγραμμα 4: *Δέντρο αποφάσεων ακολουθιακού παιγνίου*

Τα τρία υποπαίγνια αυτού του παιγνίου φαίνονται κυκλωμένα στην παρακάτω εικόνα:



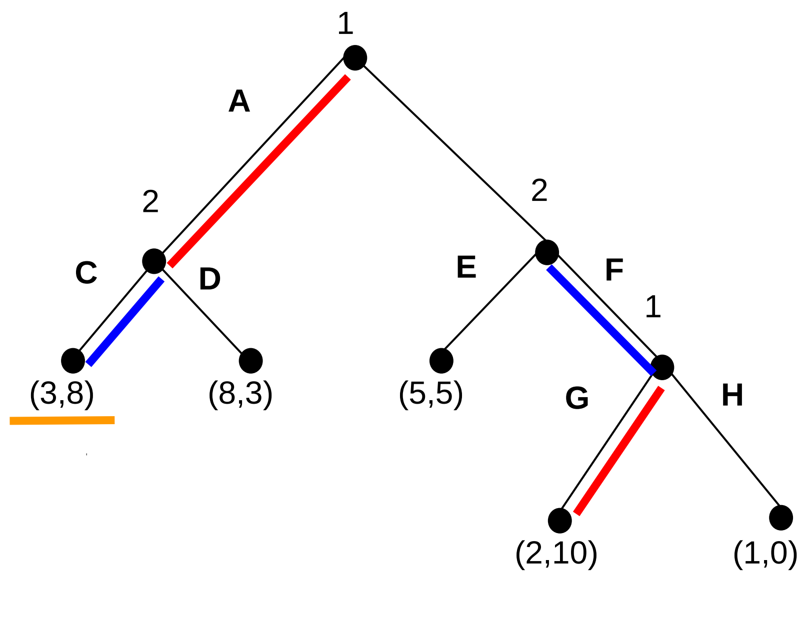
Οι πιθανές στρατηγικές για τον παίκτη 1 είναι οι (A, G), (A, H), (B, G), (B, H) ενώ για τον παίκτη 2 είναι οι (C, E), (C, F), (D, E), (D, F). Η στρατηγική μορφή του παιγνίου είναι:

ΠΑΙΚΤΗΣ 2

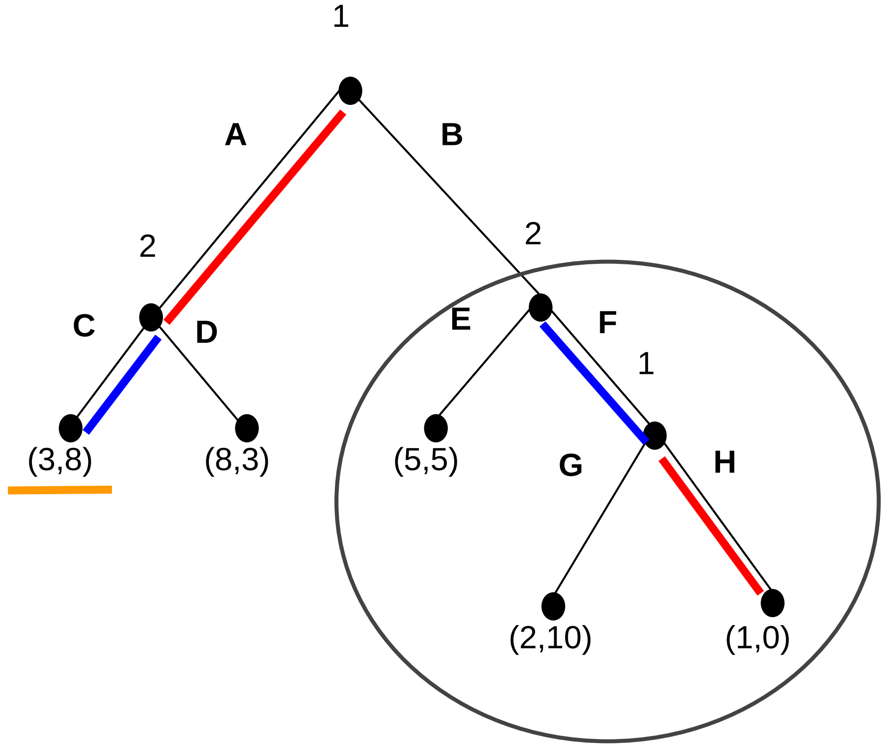
ΠΑΙΚΤΗΣ 1

	CE	CF	DF	DE
AG	(3,8)	(3,8)	(8,3)	(8,3)
BG	(5,5)	(2,10)	(2,10)	(5,5)
AH	(3,8)	(3,8)	(8,3)	(8,3)
BH	(5,5)	(1,0)	(1,0)	(5,5)

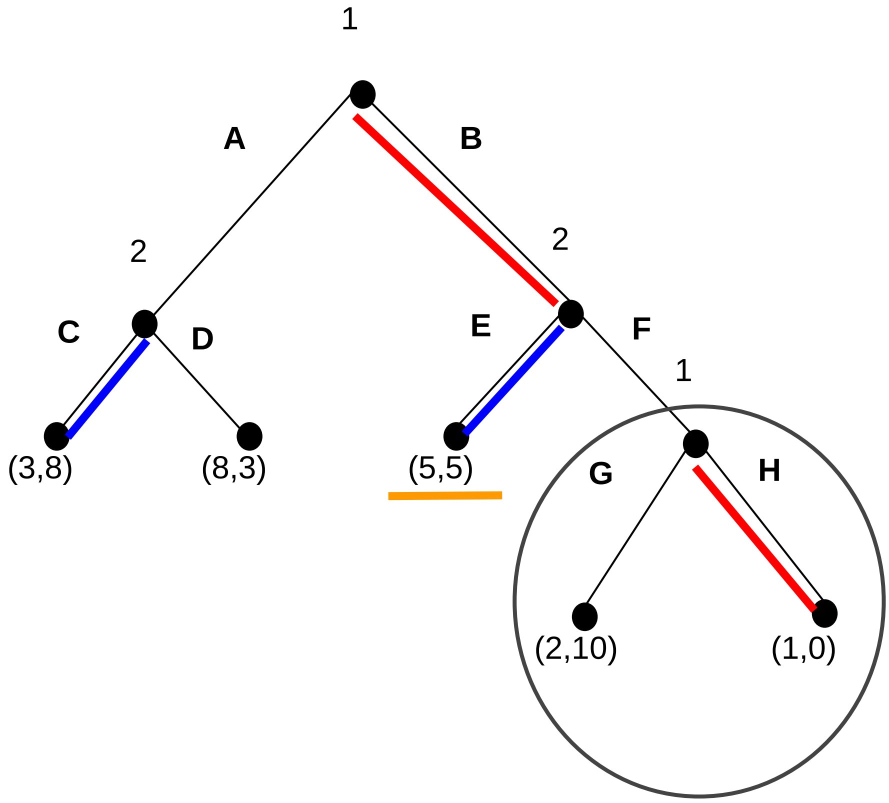
Το συγκεκριμένο παράδειγμα έχει 3 Ισορροπίες Nash, τις οποίες έχουμε κυκλώσει στο παραπάνω πίνακα απολαβών. Σε αυτές τις καταστάσεις, κανένας από τους δύο παίκτες δεν μπορεί να αυξήσει την απολαβή του αλλάζοντας τη στρατηγική του, δεδομένου ότι ο άλλος παίκτης θα κρατήσει σταθερή τη δική του στρατηγική. Η Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία προϋποθέτει επιπρόσθετα την ισορροπία Nash **σε κάθε υποπαίγνιο**. Σε ακολουθιακή μορφή, οι τρεις Ισορροπίες Nash είναι



(AG, CF)



(AH, CF)



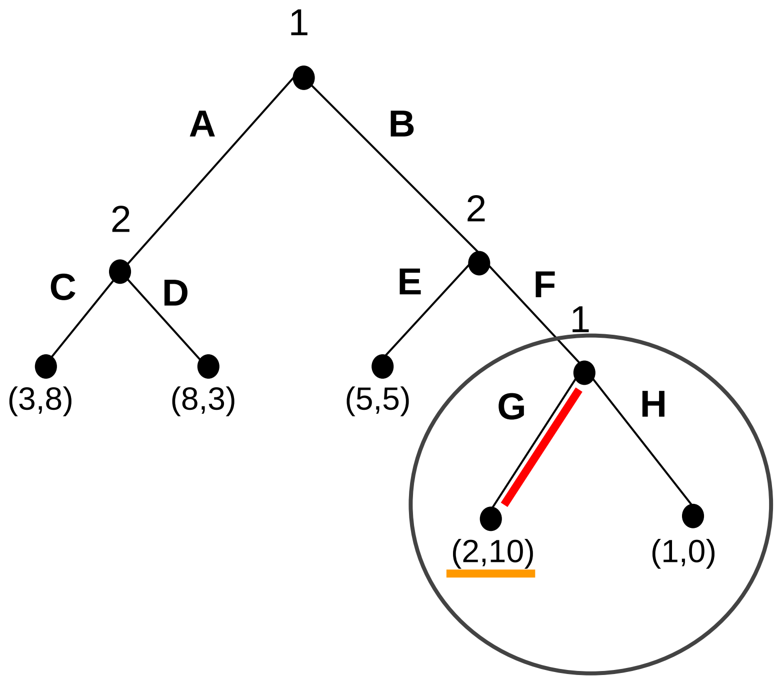
(BH, CE)

Στην ισορροπία Nash (BH, CE) στο κυκλωμένο υποπαίγνιο ο παίκτης 1 έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική από H σε G καθώς έτσι θα αυξήσει την απολαβή του από 1 σε 2. Άρα στο υποπαίγνιο δεν έχουμε Ισορροπία Nash και συνεπώς η Ισορροπία Nash (BH, CE) δεν είναι υποπαιγνιακά τέλεια. Αντίστοιχα στην Ισορροπία Nash (AH, CF) στο κυκλωμένο υποπαίγνιο δεν έχουμε ισορροπία Nash άρα και αυτή δεν είναι υποπαιγνιακά τέλεια. Η πρώτη Ισορροπία Nash (AG, CF) είναι η μόνη υποπαιγνιακά τέλεια.

7.3 Αντίστροφη Επαγωγή (backward induction)

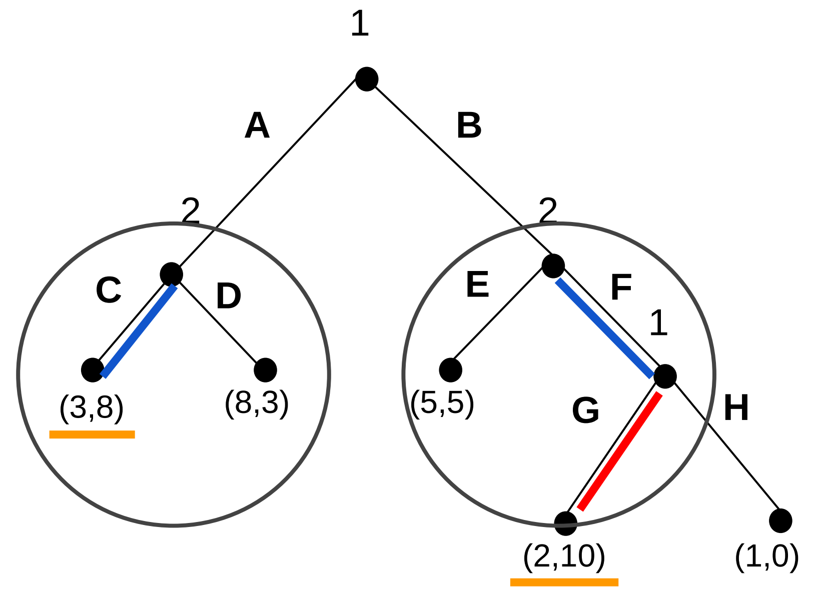
Η αντίστροφη επαγωγή είναι μια μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στα ακολουθιακά παίγνια πεπερασμένου ορίζοντα με σκοπό την εύρεση των υποπαιγνιακά τέλειων ισορροπιών. Η λογική αυτής της μεθοδολογίας είναι αρκετά απλή: ξεκινάμε να μελετάμε τους τερματικούς κόμβους και κινούμαστε ανάποδα προς τον αρχικό κόμβο του παιγνίου. Δηλαδή εξετάζουμε τις πιθανές εξελίξεις του παιγνίου από το τέλος (όλες τις πιθανές παραλλαγές του τέλους) προς την αρχή. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τις στρατηγικές που αποφέρουν τη μεγαλύτερη απολαβή για τον παίκτη που λαμβάνει απόφαση στο συγκεκριμένο βήμα. Όταν φτάσουμε στον αρχικό κόμβο, δηλαδή τη ρίζα του δέντρου αποφάσεων, θα έχουμε βρει όλες τις υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες. Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου το οποίο αποτελεί ένα ακολουθιακό παίγνιο πεπερασμένου ορίζοντα, θα εξηγήσουμε πρακτικά τη μεθοδολογία της αντίστροφης επαγωγής.

Αρχικά, εξετάζουμε τα υποπαίγνια που θα παιχτούν στο τέλος. Εδώ έχουμε μόνο ένα υποπαίγνιο, αυτό που έπεται της στρατηγικής F, και στο οποίο ο παίκτης που λαμβάνει απόφαση είναι ο 1. Μεταξύ των στρατηγικών G και H του υποπαιγνίου, ο 1 προτιμάει την G, αφού του δίνει μεγαλύτερη απολαβή από την H.

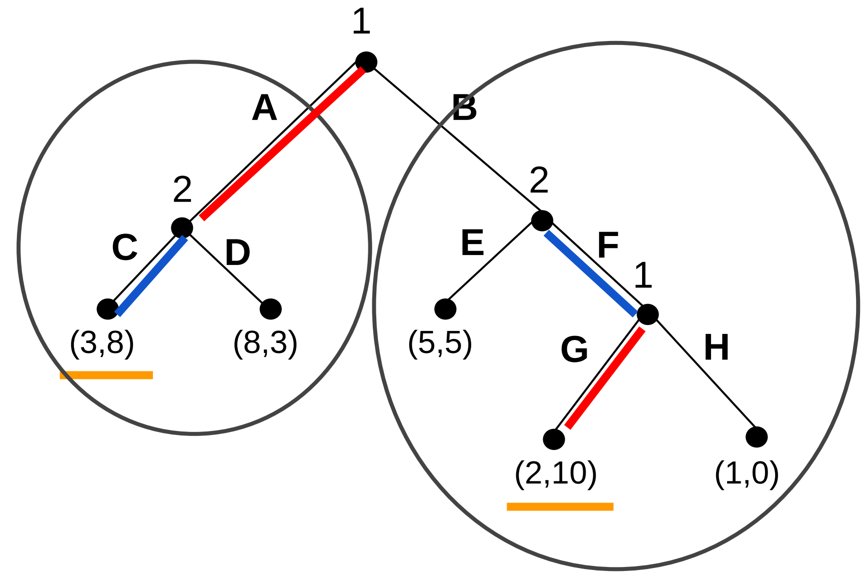


Διάγραμμα 5: *Δέντρο αποφάσεων με υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία*

Στο αμέσως προηγούμενο επίπεδο υπάρχουν 2 υποπαίγνια: αυτό που έπεται της στρατηγικής A και αυτό που έπεται της στρατηγικής B. Και πάλι θα επιλέξουμε τις στρατηγικές οι οποίες είναι κυρίαρχες σε κάθε υποπαίγνιο:



Τέλος, στο αμέσως προηγούμενο επίπεδο, το οποίο είναι και η αρχή του παιγνίου, έχουμε ένα υποπαίγνιο (το οποίο φυσικά ταυτίζεται με ολόκληρο το παίγνιο).



Ο παίκτης 1 θα προτιμήσει την στρατηγική A σε σχέση με την B γιατί θα έχει απολαβή 3 έναντι 2 (υπογραμμισμένες με πορτοκαλί).

8. Μοντέλα οικονομικών φαινομένων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως η Θεωρία Παιγνίων και η έννοια της Ισορροπίας Nash μας βοηθούν να κατανοήσουμε καλύτερα μερικά οικονομικά φαινόμενα μοντελοποιώντας τα σε παίγνια.

8.1 Μοντέλο ολιγοπωλίου Cournot

Το μοντέλο ολιγοπωλίου του Cournot περιγράφει μία αγορά στην οποία εταιρείες του ίδιου κλάδου προσφέρουν το ίδιο προϊόν και ανταγωνίζονται με βάση την ποσότητα παραγωγής. Η ποσότητα παραγωγής αποφασίζεται ανεξάρτητα και ταυτόχρονα από κάθε εταιρεία και δεν υπάρχει η δυνατότητα συνεννόησης - σχηματισμού καρτέλ. Στα ολιγοπώλια οι εταιρείες προσπαθούν να κερδίσουν μεγαλύτερο μερίδιο αγοράς, όταν αυτή θεωρείται πεπερασμένου μεγέθους. Ένας τρόπος να μετρηθεί το μερίδιο αγοράς είναι ο αριθμός πωληθέντων προϊόντων. Ωστόσο, λόγω του νόμου της προσφοράς και της ζήτησης, όσο μεγαλώνει η προσφορά τόσο μειώνεται η τιμή (και αντίστροφα), άρα οι εταιρείες καλούνται να συνεκτιμήσουν την προσφορά των ανταγωνιστών για να καταλήξουν στο βέλτιστο ύψος της δικής τους προσφοράς η οποία θα μεγιστοποιεί τα κέρδη τους.

Θεωρούμε ένα μοναδικό προϊόν το οποίο παράγεται από n εταιρείες. Το κόστος παραγωγής ποσότητας q του προϊόντος για την εταιρεία i δίνεται από τη συνάρτηση $C_i(q_i)$ και αυξάνεται όσο αυξάνεται το q. Ολόκληρη η παραγωγή πωλείται στην ίδια τιμή η οποία καθορίζεται από τη ζήτηση και τη συνολική παραγωγή όλων των εταιρειών. Έτσι, αν Q η συνολική παραγωγή, τότε η τιμή είναι P(Q) και φυσικά όσο αυξάνεται το Q τόσο μειώνεται το P. Τα έσοδα της εταιρείας i για παραγωγή q_i προϊόντων είναι $q_iP(q_1 + \dots + q_n)$. Άρα τα καθαρά έσοδα της εταιρείας, δηλαδή τα έσοδα μείον τα έξοδα είναι:

$$\boldsymbol{\pi_i(q_1, \dots, q_n) = q_iP(q_1 + \dots + q_n) - C_i(q_i)} \qquad (8.1.1)$$

Ο Cournot πρότεινε τη μοντελοποίηση αυτής της κατάστασης η οποία ως στρατηγικό παίγνιο μπορεί να παρουσιαστεί με τα εξής στοιχεία:

α. **Παίκτες**: Οι εταιρείες

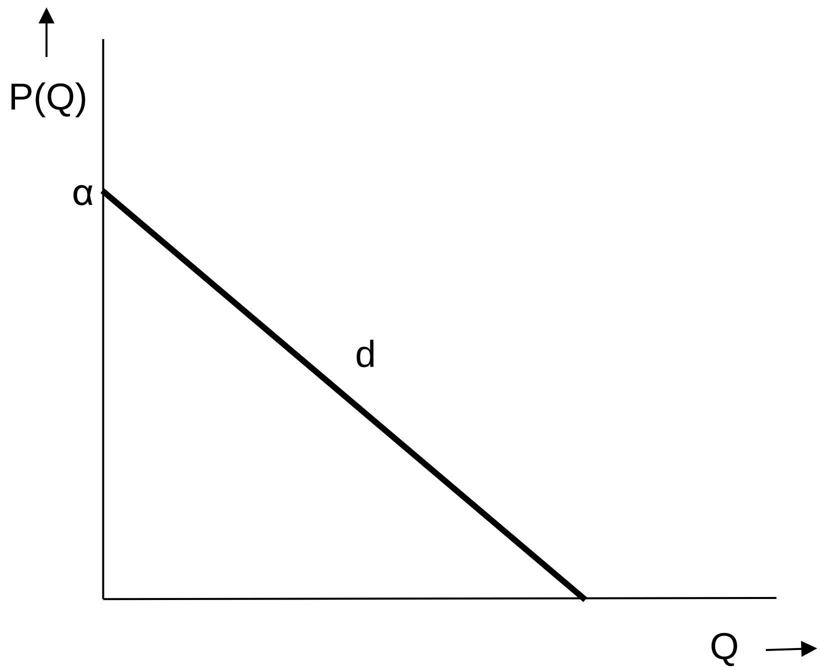
β. **Στρατηγικές**: Κάθε δυνατός όγκος παραγωγής (θετικός αριθμός) είναι μια δυνατή στρατηγική για κάθε εταιρεία.

γ. **Απολαβές**: Τα κέρδη τα οποία δίνονται από τη σχέση (8.1.1)

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο εταιρείες στον κλάδο, δηλαδή υπάρχει δυοπώλιο. Επίσης δεχόμαστε ότι η συνάρτηση κόστους είναι η ίδια και για τις δύο εταιρείες και είναι $C_i(q_i) = cq_i$ για όλα τα q_i όπου c το σταθερό κόστος ανά παραγόμενη μονάδα προϊόντος, και ότι η συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης είναι γραμμική και δίνεται από τη σχέση:

$$P(Q) = \alpha - Q \tag{8.1.2}$$

όπου τα $\alpha>0$ και $c>0$ είναι σταθερές. Το α αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τιμή στην οποία μπορεί να πωληθεί το προϊόν. Θα μπορούσε δηλαδή να είναι η τιμή του υποκατάστατου προϊόντος. Δεχόμαστε ότι οι εταιρείες σταματούν να παράγουν όταν το $\alpha = 0$, δηλαδή όταν η τιμή πώλησης είναι 0 και δεν ορίζουμε P για $\alpha>Q$.



Διάγραμμα 6: *Διάγραμμα συνάρτησης αντίστροφης ζήτησης*

Για να βρούμε την Ισορροπία Nash θα χρειαστεί αρχικά να βρούμε τις συναρτήσεις Βέλτιστης Απόκρισης των δύο εταιρειών και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τα επίπεδα παραγωγής που επαληθεύουν και τις δύο συναρτήσεις. Οι απολαβές της εταιρείας 1 είναι το γινόμενο της ποσότητας q_1 και της τιμής $P(q_1 + q_2)$ μείον το κόστος παραγωγής. Άρα, δεδομένου ότι $P(q_1 + q_2) = \alpha - q_1 - q_2$ και σύμφωνα με τη σχέση 8.1.1 η συνάρτηση απολαβής της 1 είναι

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1 P(q_1 + q_2) - C_1(q_1) = q_1(\alpha - c - q_1 - q_2)$$

Για να βρούμε το q_1 το οποίο μεγιστοποιεί τη συνάρτηση απολαβής της εταιρείας 1, δηλαδή το q_1 που μεγιστοποιεί τα κέρδη της όταν η εταιρεία 2 παράγει ποσότητα q_2, θα παραγωγίσουμε τη συνάρτηση και θα αναζητήσουμε το q_1 για το οποίο η παράγωγος είναι 0.

$$(q_1(\alpha - c - q_1 - q_2))' = (q_1\alpha - q_1c - q_1^2 - q_1q_2))' = \alpha - c -2q_1 - q_2$$

Αναζητούμε το q_1 για το οποίο η παράγωγος είναι 0:

$$\alpha - c -2q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow$$
$$q_1 = ½ (\alpha - c - q_2) \qquad (8.1.3)$$

Η σχέση 10.1.3 αποτελεί τη συνάρτηση βέλτιστης απόκρισης της εταιρείας 1 στην παραγωγή q_2 της εταιρείας 2. Αντίστοιχα βρίσκουμε τη συνάρτηση βέλτιστης απόκρισης της εταιρείας 2 ακολουθώντας την ίδια διαδικασία:

$$q_2 = ½ (\alpha - c - q_1) \qquad (8.1.4)$$

Η ισορροπία Nash αυτού του παιγνίου βρίσκεται στην κατάσταση όπου τα q1 και q2 επαληθεύουν τις σχέσεις (10.1.3) και (10.1.4) ταυτόχρονα. Επιλύοντας με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι το παίγνιο ολιγοπωλίου του Cournot έχει μόνο μία ισορροπία Nash:

$$\mathbf{(q_1^*, q_2^*) = (⅓(\alpha - c), ⅓(\alpha - c))}$$

8.2 Μοντέλο Ολιγοπωλίου Bertrand

Σε γενικές γραμμές, ο Cournot υποστήριζε ότι οι εταιρείες θα πρέπει να εστιάσουν στη σωστή ποσότητα παραγωγής-διάθεσης και η αγορά θα διαμορφώσει την τιμή, σύμφωνα με τον νόμο προσφοράς-ζήτησης. O Joseph Louis François Bertrand (1822–1900) διατύπωσε μια εναλλακτική προσέγγιση, η οποία βασίζεται στην ιδέα ότι οι εταιρείες θα πρέπει να επιλέξουν στρατηγικά την τιμή πώλησης και η αγορά θα ρυθμίσει την ποσότητα.

Το μοντέλο του Bertrand εφαρμόζεται κάτω από τις εξής παραδοχές:

α. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 εταιρείες σε έναν συγκεκριμένο κλάδο οι οποίες παράγωγουν το ίδιο προϊόν.

β. Οι εταιρείες δεν μπορούν να συνεργαστούν, δηλαδή να σχηματίσουν καρτέλ.

γ. Οι εταιρείες ανταγωνίζονται στη τιμή του προϊόντος την οποία ορίζουν ταυτόχρονα με την έννοια ότι κάθε εταιρεία δεν γνωρίζει ποια τιμή θα επιλέξουν οι άλλες.

δ. Οι καταναλωτές είναι άριστα πληροφορημένοι και προτιμούν να αγοράζουν το πιο φθηνό προϊόν. Αν κάποια εταιρεία πουλάει ακριβότερα, κανείς δεν αγοράζει από εκείνη, άρα η παραγωγή της είναι 0. Αν κάποιες εταιρείες πουλάνε στην ίδια τιμή η οποία είναι η χαμηλότερη της αγοράς, οι καταναλωτές μοιράζονται ομοιόμορφα στις εταιρείες.

ε. Κάθε εταιρεία μπορεί να ανταποκριθεί στη συνολική ζήτηση της αγοράς. Επίσης, υπάρχει η πιθανότητα μια εταιρεία να πουλάει κάτω από το κόστος παραγωγής οπότε να εμφανίζει ζημιές.

Θεωρούμε λοιπόν μια αγορά στην οποία n εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν σε ποσότητα q_i με κόστος $C_i(q_i)$. Η ζήτηση προσδιορίζεται από τη συνάρτηση ζήτησης D(p), δηλαδή η ζήτηση εξαρτάται από την τιμή διάθεσης του προϊόντος. Μπορούμε να παρουσιάσουμε το μοντέλο ολιγοπωλίου του Bertrand ως στρατηγικό παίγνιο με τα εξής στοιχεία:

α. Παίκτες: οι εταιρείες

β. Στρατηγικές: το σύνολο των δυνατών τιμών πώλησης του προϊόντος

γ. Απολαβές: το κέρδος των εταιρειών το οποίο είναι ίσο με

$$\boldsymbol{\pi_i = p_i D(p_i)/m - C_i(D(p_i)/m)}$$

όπου m είναι ο αριθμός των εταιρειών που πουλάνε στη χαμηλότερη τιμή και συνεπώς έχουν ίσα μερίδια αγοράς και κέρδη. Εφόσον φυσικά η εταιρεία i δεν πουλάει στην χαμηλότερη τιμή, τότε $\pi_i = 0$.

Θα εξετάσουμε μια περίπτωση δυοπωλίου του Bertrand ως στρατηγικό παίγνιο. Υποθέτουμε ότι το κόστος προϊόντος c είναι σταθερό και ίδιο για τις δύο ανταγωνίστριες εταιρείες, δηλαδή $C_i(q_i) = cq_i$. Επίσης, η συνάρτηση ζήτησης είναι $D(p) = α - p$ για $p \leq α$ και $D(p) = 0$ για $p > α$. Τέλος, θεωρούμε ότι $c < α$, δηλαδή το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι μικρότερο από τη μέγιστη τιμή διάθεσής του, έτσι ώστε να υπάρχει εφικτή περιοχή στην οποία μια εταιρεία να μπορεί να εμφανίζει κέρδος. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος της εταιρείας i είναι:

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)\, D(p_i) & \text{για } p_i < p_j \\ ½(p_i - c)\, D(p_i) & \text{για } p_i = p_j \\ 0 & \text{για } p_i > p_j \end{cases}$$

Θα αναζητήσουμε τις συναρτήσεις βέλτιστης απόκρισης των δύο εταιρειών και στη συνέχεια θα βρούμε την ισορροπία Nash του παιγνίου.

Η απολαβή της εταιρείας i ως συνάρτηση της τιμής p_i για διάφορες τιμές p_j της εταιρείας j είναι:

Αν $p_j < c$ δηλαδή η τιμή της εταιρείας j είναι χαμηλότερη από το κόστος c (η εταιρεία j πουλάει με ζημιά) τότε το κέρδος της εταιρείας i είναι αρνητικό αν $p_i \leq p_j$ και μηδενικό αν $p_i > p_j$. Επομένως σε αυτή την περίπτωση η Βέλτιστη Απόκριση της εταιρείας i είναι κάθε τιμή μεγαλύτερη από την τιμή της εταιρείας j.

Ως μαθηματική έκφραση: $B_i(p_j) = \{p_i : p_i > p_j \}$.

Αν $p_j = c$ δηλαδή η τιμή της εταιρείας j είναι ίση με το κόστος c (η εταιρεία j πουλάει με κέρδος 0) τότε το κέρδος της εταιρείας i είναι αρνητικό αν $p_i < p_j$ και μηδενικό αν $p_i \geq p_j$. Επομένως σε αυτή την περίπτωση η Βέλτιστη Απόκριση της εταιρείας i είναι κάθε τιμή μεγαλύτερη ή ίση με την τιμή της εταιρείας j.

Ως μαθηματική έκφραση: $B_i(p_j) = \{p_i : p_i \geq p_j \}$.

Αν $c < p_j \leq p^m$ (όπου p^m η τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη μιας μονοπωλούσας εταιρείας) δηλαδή η τιμή της εταιρείας j είναι μεγαλύτερη από το κόστος c (η εταιρεία j πουλάει με κέρδος p_j - c) τότε η Βέλτιστη Απόκριση της εταιρείας i είναι η τιμή p_j – ε όπου ε η ελάχιστη υποδιαίρεση της χρηματικής μονάδας (π.χ. ένα λεπτό του ευρώ).

Ως μαθηματική έκφραση: $B_i(p_j) = \{p_i : p_i \geq p_j\}$.

Συνοψίζοντας, για την εταιρεία i η Βέλτιστη Απόκριση είναι:

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j & \text{αν } p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j & \text{αν } p_j = c \\ p_j - \varepsilon & \text{αν } c < p_j \leq p^m \\ \{p^m\} & \text{αν } p^m < p_j \end{cases}$$

ενώ για την εταιρεία j η Βέλτιστη Απόκριση είναι

$$B_j(p_i) = \begin{cases} \{p_j : p_j > p_i & \text{αν } p_i < c \\ \{p_j : p_j \geq p_i & \text{αν } p_i = c \\ p_i - \varepsilon & \text{αν } c < p_i \leq p^m \\ \{p^m\} & \text{αν } p^m < p_i \end{cases}$$

Η ισορροπία Nash βρίσκεται εκεί όπου οι τιμές p_i και p_j επαληθεύουν και τις δύο συναρτήσεις και αυτό συμβαίνει μόνο όταν $p_i = p_j = c$

8.3 Μοντέλο δυοπωλίου Stackelberg

Στα ολιγοπωλιακά μοντέλα του Cournot και του Bertrand θεωρούμε ότι οι εταιρείες λαμβάνουν τις στρατηγικές αποφάσεις τους ταυτόχρονα, δηλαδή χωρίς να γνωρίζει η κάθε εταιρεία ποια στρατηγική θα επιλέξουν οι άλλες. Στο μοντέλο δυοπωλίου του Stackelberg οι ανταγωνίστριες εταιρείες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους ακολουθιακά, έχοντας γνώση σχετικά με τις επιλογές των στρατηγικών των άλλων παικτών. Ο παίκτης που κάνει την πρώτη κίνηση ονομάζεται *ηγέτης*.

Θεωρούμε 2 εταιρείες του ίδιου κλάδου, οι οποίες παράγουν το ίδιο προϊόν. Το κόστος της εταιρείας i για την παραγωγή q_i μονάδων του προϊόντος είναι $C_i(q_i)$ και η τιμή στην οποία πωλείται η παραγωγή όταν το συνολικό επίπεδο παραγωγής είναι Q είναι η P(Q). Η μεταβλητή η οποία αποτελεί το αντικείμενο των στρατηγικών αποφάσεων των εταιρειών που συμμετέχουν στο δυοπώλιο του Stackelberg είναι η ποσότητα παραγωγής, όπως και στο παίγνιο ολιγοπωλίου του Cournot. Η διαφορά με το μοντέλο του Cournot είναι ότι στο μοντέλο του Stackelberg οι εταιρείες γνωρίζουν τις στρατηγικές που επιλέγει ο αντίπαλος και ενεργούν ασύγχρονα - ακολουθιακά, δηλαδή η μία εταιρεία μετά την άλλη και όχι ταυτόχρονα. Πρακτικά, στο δυοπώλιο του Stackelberg κάθε εταιρεία γνωρίζει το επίπεδο παραγωγής της άλλης εταιρείας.

Η εταιρεία 1 είναι ο ηγετικός παίκτης, δηλαδή αυτός που θα κάνει την πρώτη κίνηση, επιλέγοντας ποσότητα $q_1 \geq 0$. Η εταιρεία 2 αφού μάθει την επιλεγείσα ποσότητα q_1 θα επιλέξει τη δική της ποσότητα παραγωγής $q_2 \geq 0$. Για την ηγέτιδα εταιρεία η πρώτη στρατηγική είναι απλά η επιλογή ενός επιπέδου παραγωγής ενώ για την εταιρεία 2 η στρατηγική της είναι συνάρτηση που συσχετίζει το ύψος της παραγωγής της με κάθε δυνατή παραγωγή της εταιρείας 1.

Το παίγνιο αυτό έχει πεπερασμένο ορίζοντα. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντίστροφη επαγωγή για να βρούμε τις υποπαιγνιακά τέλειες ισορροπίες του. Οι απολαβές (κέρδη) των εταιρειών είναι:

$$\boldsymbol{\pi_i(q_1, q_2) = q_iP(q_1 + q_2) - C_i(q_i)}$$

Η εταιρεία 1 θα επιλέξει πρώτη το επίπεδο παραγωγής με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους της ($\max(\pi_1)$). Όπως και στο παίγνιο ολιγοπωλίου του Cournot, για να βρούμε το q_1 το οποίο μεγιστοποιεί τα κέρδη της εταιρείας 1, θα πρέπει να παραγωγίσουμε την συνάρτηση κέρδους και να βρούμε το q_1 για το οποίο η παράγωγος αυτή είναι 0. Επειδή:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1P(q_1 + q_2) - C_1(q_1) = q_1(\alpha - c - q_1 - q_2)$$

αφού το κόστος παραγωγής $C_i(q_i)$ είναι σταθερό και ίδιο και για τις δύο εταιρείες και συμβολίζεται με c, έχουμε:

$$(q_1(\alpha - c - q_1 - q_2))' = (q_1\alpha - q_1c - q_1^2 - q_1q_2))' = \alpha - c -2q_1 - q_2$$

Αναζητούμε το q_1 για το οποίο η παράγωγος είναι 0:

$$\alpha - c - 2q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow$$
$$q_1 = ½ (\alpha - c - q_2)$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση βέλτιστης απόκρισης το q_2 έχουμε:

$$q_1(\alpha - c - q_1 - q_2) = q_1(\alpha - c - q_1 - ½(\alpha - c - q_1)) =$$
$$½\, q_1(\alpha - c - q_1)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης βέλτιστης απόκρισης είναι

$$(½\, q_1(\alpha - c - q_1))' = ½(\alpha - c) - q_1$$

Η οποία έχει ρίζα το $q_1 = ½(\alpha - c)$, άρα η βέλτιστη απόκριση της εταιρείας 1 είναι η ποσότητα παραγωγής $q^*_1 = ½(\alpha - c)$

9. Ο εμπορικός πόλεμος ΗΠΑ - Κίνας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε τον εμπορικό πόλεμο μεταξύ ΗΠΑ και Κίνας, ο οποίος βρίσκεται σε εξέλιξη από την 6η Ιουλίου 2018, όταν οι ΗΠΑ επέβαλαν δασμούς 25% σε προϊόντα εισαγωγής από την Κίνα αξίας 34 δις δολαρίων. Η Κίνα φυσικά απάντησε άμεσα με ανάλογους δασμούς και από τότε εξελίσσεται μία κατάσταση επιβολής δασμών και εκτόξευσης απειλών εκατέρωθεν.

Ο λόγος για τον οποίο οι ΗΠΑ ξεκίνησαν αυτή τη διαμάχη είναι ότι το ισοζύγιο εμπορίου με την Κίνα εμφάνιζε το 2018 ετήσιο έλλειμμα πάνω από 400 δις δολάρια. Ο πρόεδρος των ΗΠΑ Donald Trump θεωρεί ότι αυτό το έλλειμμα είναι αποτέλεσμα αθέμιτων πρακτικών της Κίνας, όπως για παράδειγμα τη διατήρηση του γουάν σε πολύ χαμηλά επίπεδα, και πιέζει για λήψη μέτρων εξισορρόπησης του εμπορικού ισοζυγίου. Τα πιο σημαντικά γεγονότα αυτής της διαμάχης αποτυπώνονται με χρονολογική σειρά στην εικόνα 9.1.

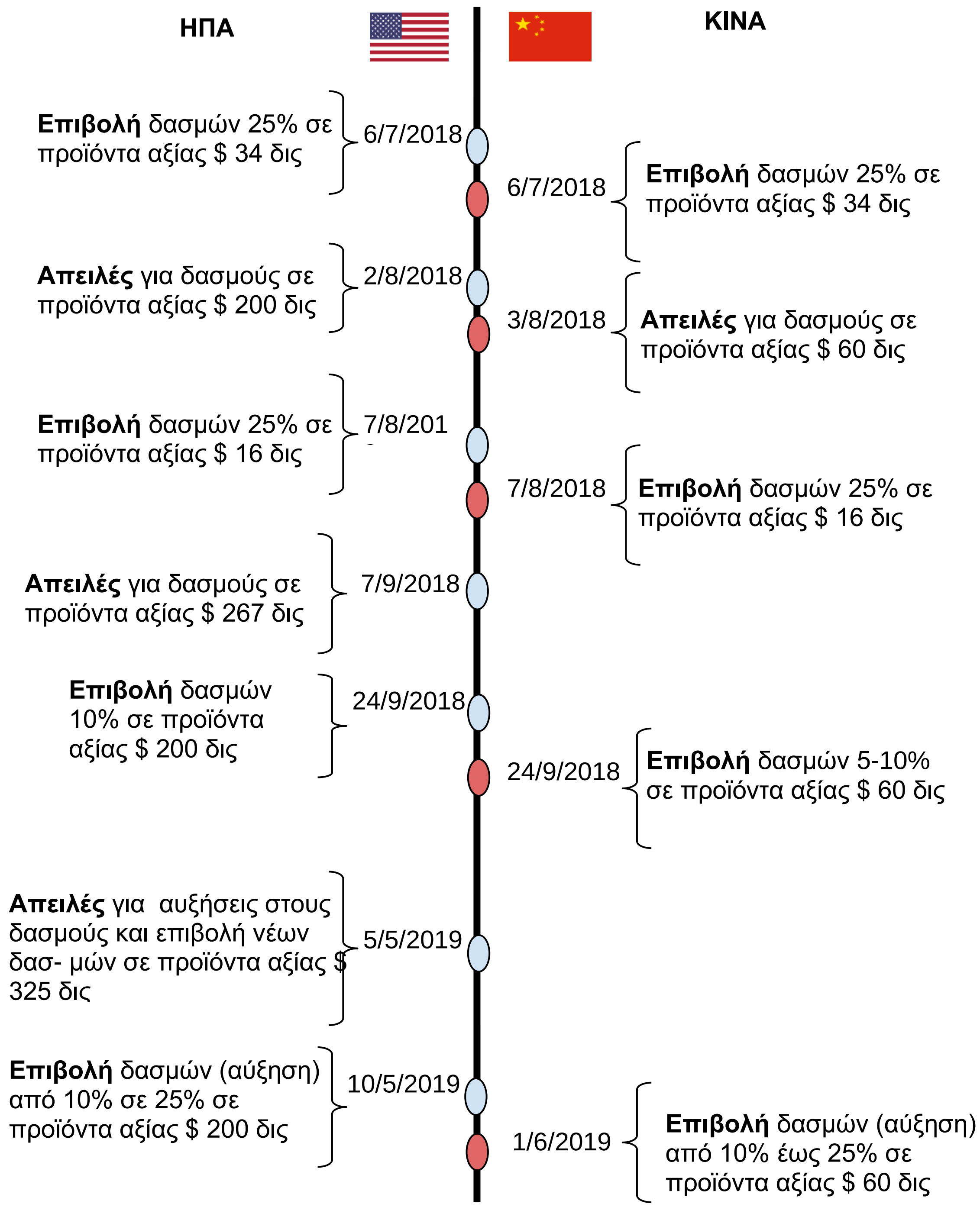
Το ερώτημα που θα εξετάσουμε είναι αν οι ΗΠΑ θα υλοποιήσουν τελικά τις απειλές τους για επιβολή δασμών στα υπόλοιπα κινέζικα προϊόντα αξίας 325 δις και ποια θα είναι η αντίδραση της Κίνας. Φυσικά αυτή η διαμάχη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ακολουθιακό παίγνιο και στη συνέχεια να επιλυθεί με τη μέθοδο της αντίστροφης αναγωγής.

Παραδοχές:

Η απολαβή των χωρών περιορίζεται στο μεταξύ τους εμπορικό ισοζύγιο. Στην πραγματικότητα, η Σινοαμερικάνικη διαμάχη μπορεί να σχετίζεται με πολλές παραμέτρους όπως είναι οι εμπορικές σχέσεις των δύο χωρών με την Ευρώπη, η γεωστρατηγική ισορροπία στην ευρύτερη περιοχή της ανατολικής Ασίας, ο έλεγχος της τεχνολογίας και των πληροφοριών, οι κινεζικές εισαγωγές πετρελαίου από την Μέση Ανατολή κλπ. Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε τον εμπορικό πόλεμο ως μία απομονωμένη διαμάχη, ανεξάρτητη από άλλες παραμέτρους πέρα από το εμπορικό ισοζύγιο.

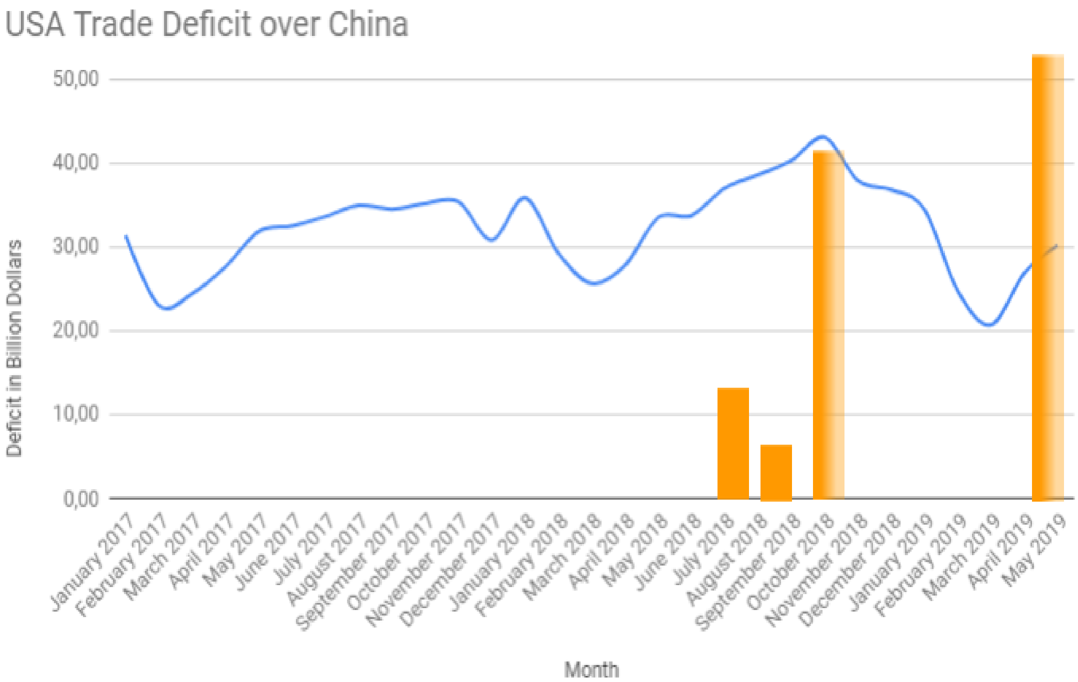
Το παίγνιο είναι πεπερασμένο, και θα ολοκληρωθεί σε δύο φάσεις: η πρώτη φάση είναι η απόφαση των ΗΠΑ για επιβολή δασμών στα υπόλοιπα κινέζικα προϊόντα, ύψους 325 δις δολαρίων ή για αποδοχή της υπάρχουσας κατάστασης. Η δεύτερη φάση είναι η απόφαση της Κίνας για αντίποινα ή αποδοχή.

Θεωρούμε ότι αν η Κίνα απαντήσει με αντίποινα στη νέα επιβολή δασμών από τις ΗΠΑ, οι ΗΠΑ θα προβούν σε ενέργειες τέτοιες που δεν θα ωφελήσουν παραπάνω τις ίδιες αλλά θα βλάψουν την Κίνα (π.χ. κυρώσεις σε Κινέζικες επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στις ΗΠΑ).



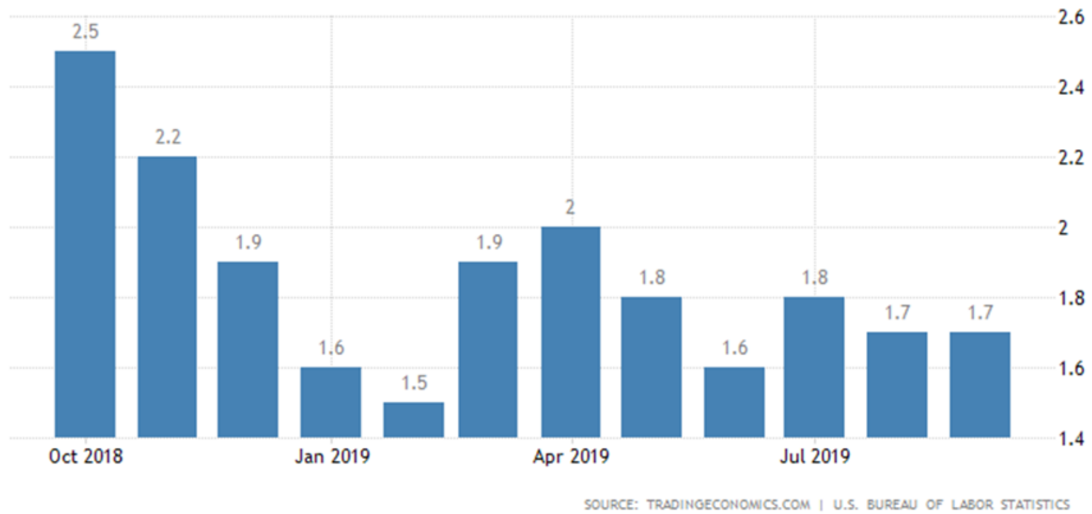
Εικόνα 9.1 *Η χρονική σειρά των πιο σημαντικών γεγονότων του σινοαμερικάνικου εμπορικού πολέμου*

Εικόνα 9.2: *Το εμπορικό ισοζύγιο των ΗΠΑ και της Κίνας*
Πηγή: https://www.thebalance.com/u-s-china-trade-deficit-causes-effects-and-solutions-3306277



Διάγραμμα 7: *Η επίπτωση στο έλλειμμα του εμπορικού ισοζυγίου των ΗΠΑ (μπλε γραμμή) από την επιβολή των δασμών στα Κινεζικά προϊόντα (πορτοκαλί μπάρες).*
Πηγή: https://www.census.gov/foreign-trade/balance/c5700.html

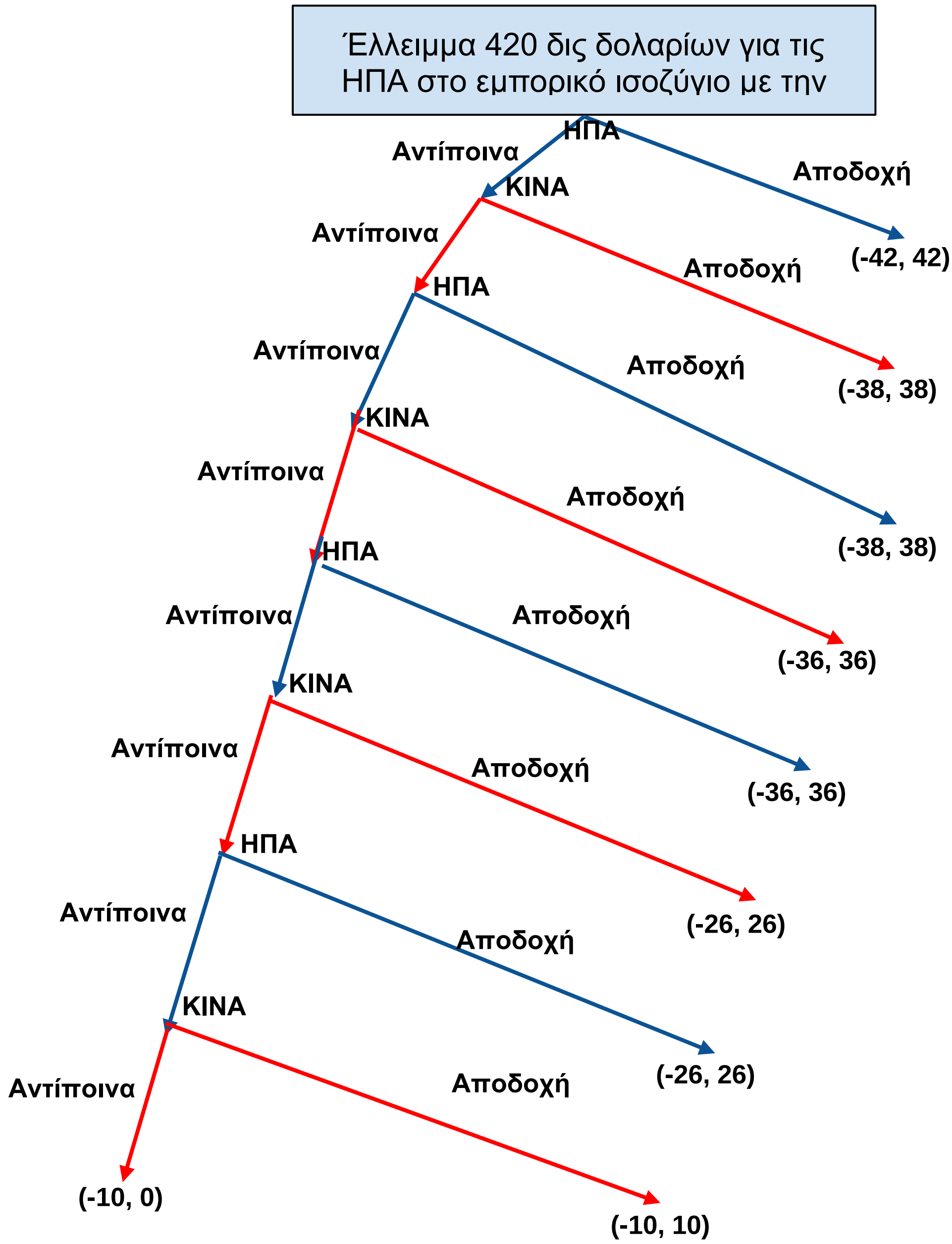
Διάγραμμα 8: *Η επίπτωση στο τζίρο του εμπορικού ισοζυγίου των ΗΠΑ - Κίνας (μπλε γραμμή) από την επιβολή των δασμών στα Κινεζικά προϊόντα (πορτοκαλί μπάρες).*
Πηγή: https://www.census.gov/foreign-trade/balance/c5700.html



Διάγραμμα 9: *Ο πληθωρισμός στις ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του εμπορικού πολέμου με την Κίνα*

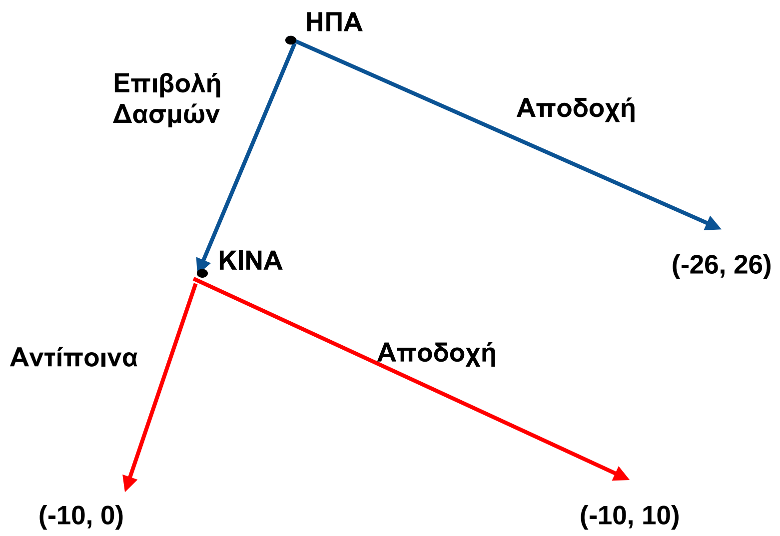
Παρούσα κατάσταση: θεωρείται αυτή μετά την 1η Ιουνίου 2019: οι ΗΠΑ έχουν ήδη επιβάλλει δασμούς ύψους 250 δις δολαρίων και απειλούν για νέους δασμούς στα υπόλοιπα προϊόντα αξίας 325 δις δολαρίων. Η Κίνα έχει ήδη επιβάλει δασμούς σε αμερικάνικα προϊόντα αξίας 110 δις δολαρίων. Το εμπορικό έλλειμμα για τις ΗΠΑ έχει μειωθεί αισθητά από την έναρξη του εμπορικού πολέμου, ωστόσο παραμένει ακόμα υψηλό (Διάγραμμα 7).

Ως **ακολουθιακό παίγνιο με τέλεια πληροφόρηση**, η Σινοαμερικάνικη εμπορική διαμάχη μπορεί να παρουσιαστεί όπως το ακόλουθο δέντρο αποφάσεων:



Διάγραμμα 10: *Δέντρο αποφάσεων Σινο-αμερικάνικου εμπορικού πολέμου*

Απομονώνουμε το τμήμα του δέντρου αποφάσεων που αφορά την παρούσα κατάσταση και τις πιθανές στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι δύο χώρες στο εξής:



Αρχικά θα αναζητήσουμε τις ισορροπίες Nash αυτού του παιγνίου. Προκειμένου να βρούμε τις ισορροπίες Nash θα πρέπει να αποτυπώσουμε το ακολουθιακό παίγνιο ως στρατηγικό (κανονικό) και να φτιάξουμε τον πίνακα απολαβών. Οι δυνατές καθαρές στρατηγικές των δύο παικτών είναι Επιβολή Δασμών και Αποδοχή για τις ΗΠΑ, ενώ για την Κίνα είναι Αντίποινα και Αποδοχή. Τα προφίλ των στρατηγικών είναι:

- (*Επιβολή Δασμών, Αντίποινα*) με απολαβές -10 για τις ΗΠΑ και 0 για την Κίνα.
- (*Επιβολή Δασμών, Αποδοχή*) με απολαβές -10 για τις ΗΠΑ και 10 για την Κίνα.
- (*Αποδοχή, Αντίποινα*) με απολαβές -26 για τις ΗΠΑ και -26 για την Κίνα.
- (*Αποδοχή, Αποδοχή*) με απολαβές -26 για τις ΗΠΑ και -26 για την Κίνα.

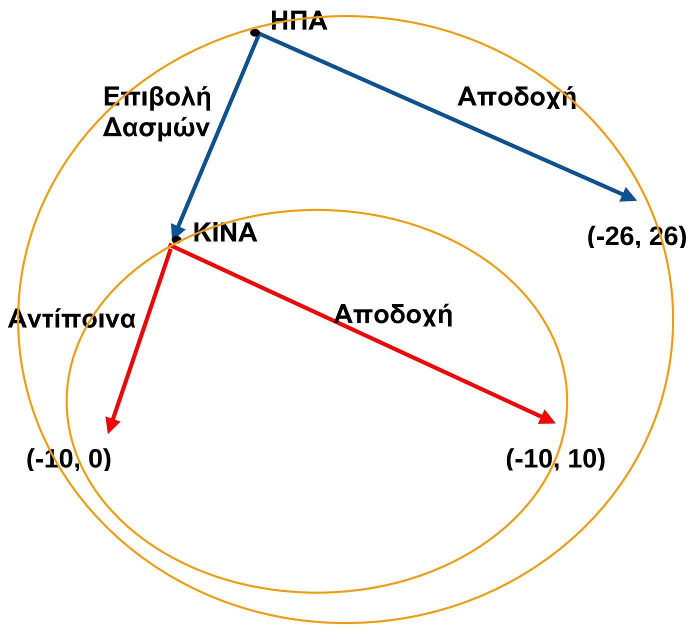
Ο πίνακας απολαβών της στρατηγικής μορφής του παιγνίου είναι:

Πίνακας 19: *Πίνακας απολαβών για το στρατηγικό παίγνιο «Εμπορικός πόλεμος ΗΠΑ - Κίνας»*

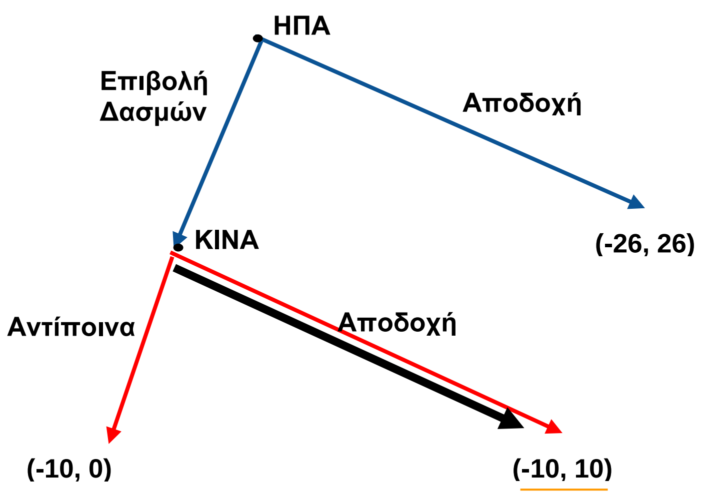
		ΚΙΝΑ	
		Αντίποινα	*Αποδοχή*
ΗΠΑ	*Επιβολή Δασμών*	(-10,0)	(-10,10)
	Αποδοχή	(-26,-26)	(-26,-26)

από τον οποίο προκύπτει μία και μοναδική καθαρή ισορροπία Nash, η (*Επιβολή Δασμών, Αντίποινα*) με απολαβές (-10, 10), αφού σε αυτή την κατάσταση κανένας από τους δύο παίκτες δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική.

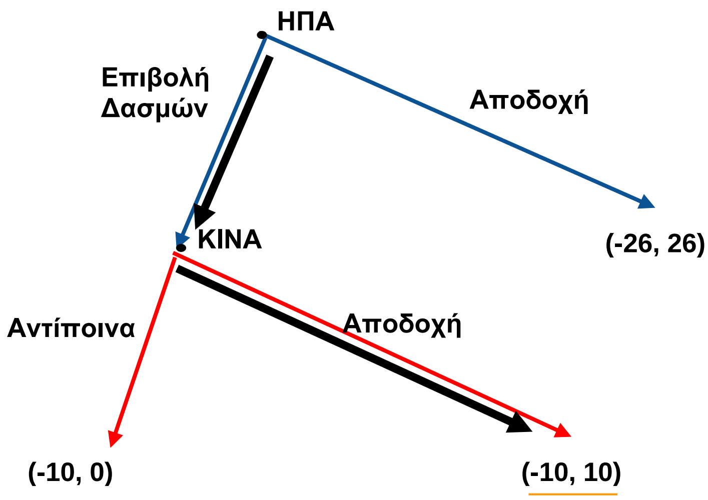
Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε τις Υποπαιγνιακά Τέλειες Ισορροπίες. Όπως έχει ήδη αναφερθεί μια Ισορροπία Nash είναι υποπαιγνιακά τέλεια όταν σε όλα τα υποπαίγνιά της έχουμε Ισορροπία Nash. Τα υποπαίγνια του παρόντος παιγνίου είναι δύο και φαίνονται κυκλωμένα στην παρακάτω εικόνα:



Για να βρούμε την Τέλεια Υποπαιγνιακά Ισορροπία θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της Αντίστροφης Αναγωγής. Ξεκινώντας από το υποπαίγνιο που θα παιχτεί στο τέλος (από την Κίνα), η Ισορροπία Nash επιτυγχάνεται με την επιλογή της στρατηγικής *Αποδοχή* όπου οι απολαβές των δύο χωρών είναι (-10, 10).



Στο αμέσως προηγούμενο υποπαίγνιο, το οποίο ταυτίζεται με το συνολικό παίγνιο, η Ισορροπία Nash επιτυγχάνεται με την επιλογή της στρατηγικής *Επιβολή Δασμών* από τους Αμερικάνους με απολαβές για τις δύο χώρες (-10, 10).



Συμπεράσματα

Η Θεωρία Παιγνίων είναι μία επιστήμη χρήσιμη στην μοντελοποίηση οικονομικών φαινομένων ώστε αυτά να γίνουν πιο κατανοητά και να μελετηθούν συστηματικά, συνεισφέροντας στη πρόβλεψη και τη λήψη στρατηγικών αποφάσεων. Προϋποθέσεις για τη σχεδίαση ενός μοντέλου ικανού να οδηγήσει σε χρήσιμα συμπεράσματα είναι η γνώση όλων των παραμέτρων που επηρεάζουν τις στρατηγικές αποφάσεις των παικτών, η κατανόηση των κινήτρων των παικτών και των στόχων τους, η σωστή αποτίμηση των απολαβών τους και η σωστή ποσοτικοποίηση μη ποσοτικών μεταβλητών. Η Θεωρία Παιγνίων απαιτεί και τη λήψη παραδοχών, όπως είναι η ορθολογικότητα των παικτών, οι οποίες όμως είναι τέτοιες που δεν αλλοιώνουν τα συμπεράσματα και επιτρέπουν την εφαρμογή της σε μια ευρεία γκάμα επιστημονικών πεδίων και ρεαλιστικών καταστάσεων.

Βιβλιογραφία

1. Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων, Martin J. Osborne, University of Toronto, εκδόσεις κλειδάριθμος 2004, ISBN: 978-960-461-393-9
2. Prediction. How to see and shape the future with Game Theory, Bruce Bueno De Mesquita, εκδόσεις Vintage 2010, ISBN: 9780099531845
3. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, Antoine Augustin Cournot, 1838
4. Theory of Games and Economic Behaviour, John von Neumann and Oskar Morgenstern, 1944

Πηγές

John Nash, "Non-Cooperative Games", Princeton University, DOI: 10.2307/1969529 (1951)
https://www.jstor.org/stable/1969529

Ross, Don, "Game Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
URL: https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/game-theory/

Investopedia: Nash Equilibrium
URL: https://www.investopedia.com/terms/n/nash-equilibrium.asp

Maria Serna, "An Introduction to Cooperative Game Theory", Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), 2016
ULR: http://www.cs.upc.edu/~mjserna/docencia/agt-miri/slides/AGT13-coop-GT.pdf

Alan Chang, "Combinatorial Game Theory", The University of Chicago, 2011
URL: http://math.uchicago.edu/~ac/cgt.pdf

Άρθρα για τον εμπορικό πόλεμο ΗΠΑ - Κίνας

Donald Trump can outgun China on trade tariffs but Beijing has other ways to fight back
https://www.scmp.com/news/china/diplomacy-defence/article/2151502/donald-trump-can-outgun-china-trade-tariffs-beijing-has

The US-China Trade War: A Timeline
https://www.china-briefing.com/news/the-us-china-trade-war-a-timeline/

A quick guide to the US-China trade war
https://www.bbc.com/news/business-45899310

US-China trade war will continue as costs to both sides are minimal
https://www.scmp.com/topics/us-china-trade-war