



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
Π.Μ.Σ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΖΗΜΙΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Απορέλλης Ι. Ευστάθιος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΙΤΣΕΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2018



UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
M.Sc.IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

MULTIVARIATE LOSS RESERVING

M.Sc. THESIS

Aporellis E. Efstathios

ADVISOR PROFESSOR: Pitselis Georgios

PIRAEUS 2018

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς για την στήριξη που μου δείξανε όλα αυτά τα χρόνια, για τις θυσίες που κάνανε για να μου παρέχουν τα πάντα προκειμένου να μπορέσω να σπουδάσω και να γίνω καλύτερος άνθρωπος.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μοντελοποίηση και η εκτίμηση των μελλοντικών υποχρεώσεων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης δεν απασχολεί μόνο τον ασφαλιστικό κλάδο αλλά και τον επιστημονικό. Διακεκριμένοι επιστήμονες έχουν αφιερώσει μέρος της ζωής τους για να καταφέρουν να δημιουργήσουν μια μέθοδο εκτίμησης των αποθεμάτων των ασφαλιστικών εταιριών η οποία θα μπορέσει να δώσει όσο το δυνατόν καλύτερα και πιο ακριβή αποτελέσματα.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να εξετάσουμε κάποιες από τις πιο βασικές μεθόδους αποθεματοποίησης ζημιών καθώς επίσης και η ανάλυση του μοντέλου των Φαινομενικά Ασυσχετίστων Παλινδρομήσεων (Seemingly Unrelated Regressions-SUR). Οι μέθοδοι που θα αναλυθούν θα συγκριθούν μέσω παραδειγμάτων για να διαπιστωθεί συσχέτισή τους καθώς και να εξεταστεί η καταλληλότητά τους.

ABSTRACT

Modeling and estimating the future liabilities of an insurance company is not just about the insurance industry but also the scientific one. Distinguished scientists have devoted a part of their lives to being able to create a method of assessing the stocks of insurance companies that will be able to give as much as possible better and more accurate results.

The purpose of this diploma thesis is to examine some of the most basic methods of loss reserving as well as the analysis of the Seemingly Unrelated Regressions (SUR) model. The methods to be analyzed will be compared by means of examples to establish their correlation and to examine their suitability.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Chain Ladder Μοντέλο	16
2.1 Σχέση μονοδιάστατου και πολυμεταβλητού μοντέλου	22
2.2 Πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder	23
2.2.1 Το Πολυμεταβλητό μοντέλο του Schnaus	25
2.2.2 Μέθοδος του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder	28
2.3. Διαφορά πρόβλεψης του μονοδιάστατου και του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder Prediction	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Αποθεματοποίηση με χρήση του μοντέλου Φαινομενικών Ασυσχετίστων Παλινδρομήσεων	33
3.1 Γενικευμένο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder	34
3.1.1 Μερικά Αποτελέσματα	37
3.2 SUR μοντέλο με τεταγμένες	39
3.3 Το Διμερές μοντέλο	41
3.4 Το Backward Recursive Reserve Development μοντέλο	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Φαινομενικά Ασυσχετίστες Παλινδρομήσεις με διαφορετικού μεγέθους παρατηρήσεις (SUR-USO)	45
4.1 Αριθμητική Επίλυση του SUR-USO μοντέλου	46
4.2 Εφικτή λύση του Γενικευμένου Προβλήματος Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων (GLLSP)	51
4.3 Αναδρομική μέθοδος για την επίλυση του SUR-USO μοντέλου	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Αριθμητικό Παράδειγμα	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Συμπεράσματα	70
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1	71
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2	75
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	88

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ασφαλιστικές εταιρίες καλούνται σύμφωνα με τη νομοθεσία να κρατούν ένα κεφάλαιο για τις μελλοντικές καλύψεις των ασφαλισμένων τους. Δουλειά του αναλογιστή είναι να δημιουργεί και να παρακολουθεί τα αποθέματα που χρειάζεται η εταιρία, έχοντας στα χέρια του κάποια εργαλεία που ονομάζονται μέθοδοι αποθεματοποίησης. Τα εργαλεία αυτά ποικίλουν ανάλογα με τις ανάγκες του αναλογιστή. Ξεκινάνε από απλά μοντέλα τα οποία μπορούν να δώσουν μια γρήγορη εικόνα για το ύψος των αποθεμάτων και εξελίσσονται σε πολύπλοκα μοντέλα που χρησιμοποιούν στατιστικές μεθόδους για να δώσουν όσο το δυνατό καλύτερα και εγκυρότερα αποτελέσματα γίνεται. Ταυτόχρονα με την εξέλιξη των μεθόδων αποθεματοποίησης θα πρέπει να αναπτύσσεται και η κρίση του αναλογιστή τόσο στην επιλογή των δεδομένων όσο και στα αποτελέσματα που παράγουν οι μέθοδοι που έχει χρησιμοποιήσει, δεν αρκεί η χρήση των μοντέλων από μόνη της για να φέρει σωστά αποτελέσματα, χρειάζεται η εμπειρία καθώς και η γνώση του χαρτοφυλακίου της εκάστοτε ασφαλιστικής επιχείρησης από τον αναλογιστή που έχει αναλάβει να υπολογίσει τα απαιτούμενα ασφαλιστικά αποθέματα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα εξετάσουμε τις παρακάτω μεθόδους αποθεματοποίησης:

1. **CL:** Το βασικό μοντέλο της μεθόδου Chain Ladder ή αλλιώς Standard Chain Ladder model (SCL).
2. **MCL:** Το πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder (Multivariate Chain Ladder model).
3. **GMCL:** Το γενικευμένο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder (General Multivariate Chain Ladder model).
4. **SUR:** Το μοντέλο των Φαινομενικά Ασυσχέτιστων Παλινδρομήσεων (Seemingly Unrelated Regressions model).
5. **SUR-USO:** Το μοντέλο των Φαινομενικά Ασυσχέτιστων Παλινδρομήσεων με διαφορετικού μεγέθους παρατηρήσεις (Seemingly Unrelated Regressions with Unequal Size Observations model).

Επίσης θα αναφερθούν τα παρακάτω μοντέλα, τα οποία δεν θα μας απασχολήσουν στους υπολογισμούς.

1. **BRRD**: Το μοντέλο της αναδρομικής ανάπτυξης των αποθεμάτων (Backward Recursive Reserve Development model).
2. **Διμερές Μοντέλο**, το οποίο είναι υπομοντέλο της φυσικής γενίκευσης του MCL μοντέλου.

Πριν εξετάσουμε τις μεθόδους αποθεματοποίησης που αναφέραμε προηγουμένως είναι συνετό να δούμε κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα την παρούσα διπλωματική εργασία.

Βασικές έννοιες-ορισμοί:

Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (Ordinary Least Squares – OLS)

Υποθέτουμε ότι το b είναι μια "υποψήφια" τιμή του διανύσματος β . Η ποσότητα $y_i - x_i^T b$ που ονομάζεται υπόλοιπο για την i -οστή παρατήρηση, μετράει την κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του σημείου (x_i, y_i) και του $y = x^T b$ και έτσι αξιολογεί το βαθμό προσαρμογής μεταξύ των πραγματικών δεδομένων και του μοντέλου. Το άθροισμα των τετραγωνικών υπολοίπων (SSR) είναι ένα μέτρο της συνολικής προσαρμογής του μοντέλου:

$$S(b) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^T b)^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}b)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}b)$$

Η τιμή του b που ελαχιστοποιεί αυτό το άθροισμα ονομάζεται εκτιμητής OLS για β . Η συνάρτηση αυτή έχει ένα ελάχιστο στο $b = \hat{\beta}$, η οποία μπορεί να δοθεί από το ρητό τύπο:

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i^T \right)^{-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πινάκων:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Εκτιμητής γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (Generalized Least Squares –GLS)

Σε ένα τυπικό μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης παρατηρούμε δεδομένα $(y_i, x_{ij}), i = 1, \dots, n, j = 2, \dots, k$ σε n στατιστικές μονάδες. Οι τιμές απόκρισης τοποθετούνται σε ένα διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ και οι τιμές πρόβλεψης τοποθετούνται σε ένα πίνακα σχεδιασμού $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T$, όπου $\mathbf{x}_i = (1, x_{2i}, \dots, x_{ki})$ είναι ένα διάνυσμα των k μεταβλητών πρόβλεψης (συν μια σταθερά) για την i -οστή μονάδα. Το μοντέλο υποθέτει ότι ο μέσος όρος του \mathbf{y} δοθέντος \mathbf{X} είναι μια γραμμική συνάρτηση του \mathbf{X} , ενώ η υπό όρους διακύμανση του δεδομένου σφάλματος \mathbf{X} είναι ένας γνωστός μη μοναδικός πίνακας $\mathbf{\Omega}$. Αυτό συνήθως γράφεται ως:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}[\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X}] = \mathbf{\Omega}$$

Εδώ $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$ είναι ένα διάνυσμα άγνωστων σταθερών (γνωστών ως συντελεστών παλινδρόμησης) που πρέπει να εκτιμηθούν από τα δεδομένα.

Όπως και με τον OLS εκτιμητή έτσι και για τον GLS το b είναι μια τιμή για το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}$. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \min(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^T \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$ έχει ένα ρητό τύπο της μορφής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{y}$$

Ο GLS εκτιμητής είναι αμερόληπτος, συνεπής, αποτελεσματικός και ασυμπτωτικά κανονικός. $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(0, (\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1})$.

Εφικτός εκτιμητής γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (Feasible Generalized Least Squares – FGLS)

Εάν ο πίνακας διασποράς των σφαλμάτων $\mathbf{\Omega}$ είναι άγνωστος, μπορεί κανείς να πάρει έναν συνεπή εκτιμητή του, $\hat{\mathbf{\Omega}}$ χρησιμοποιώντας μια υλοποιήσιμη εκδοχή του GLS γνωστή ως εφικτός εκτιμητής γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (FGLS). Στο FGLS μοντέλο, η μοντελοποίηση γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο το μοντέλο εκτιμάται από το OLS ή έναν άλλο σταθερό εκτιμητή και τα υπολείμματα χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία ενός συνεπή εκτιμητή του πίνακα συνδιασποράς των σφαλμάτων και στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιώντας το πίνακα

συνδιασποράς των σφαλμάτων μπορεί κανείς να εφαρμόσει τη μέθοδο των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων. Ο FGLS εκτιμητής δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

Έστω ότι έχουμε τον πίνακα $\widehat{\Omega}_{OLS}$ από το πρώτο βήμα, όπου $\widehat{\Omega}_{OLS} = \text{diag}(\widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2, \dots, \widehat{\sigma}_n^2)$. Ο FGLS εκτιμητής θα είναι ο:

$$\widehat{\beta}_{FGLS} = (\mathbf{X}'\widehat{\Omega}_{OLS}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\widehat{\Omega}_{OLS}^{-1}\mathbf{y}$$

Γενικά ο FGLS εκτιμητής έχει διαφορετικές ιδιότητες από τον OLS εκτιμητή. Για μεγάλο μέγεθος δείγματα όλες οι ιδιότητες (κάτω από κατάλληλες συνθήκες) είναι κοινές με του GLS εκτιμητή, αλλά για άπειρου μεγέθους δείγματα οι ιδιότητες του FGLS εκτιμητή είναι άγνωστες. Για άπειρου μεγέθους δείγματα ο FGLS εκτιμητής μπορεί να είναι λιγότερο αποδοτικός από τον OLS εκτιμητή.

Πρόβλημα γενικευμένων γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (Generalized Linear Least Square Problem – GLLSP)

Έστω ένα σύστημα $\sum_{j=1}^n X_{ij}\beta_j = y_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$) m γραμμικών εξισώσεων με n άγνωστες παραμέτρους $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ με $m > n$ (σημειώνουμε ότι για ένα γραμμικό μοντέλο όπως αυτό, δεν περιέχουν πληροφορίες όλα τα \mathbf{X} , η πρώτη στήλη γεμίζεται με άσσους, $X_{i1} = 1$, και μόνο οι υπόλοιπες στήλες περιέχουν πραγματικά δεδομένα. ($n = \text{αριθμός παλινδρομήσεων} + 1$)), το οποίο μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}$. Τέτοια συστήματα συνήθως δεν έχουν λύση, έτσι ο στόχος μας είναι αντί να βρούμε τις παραμέτρους $\boldsymbol{\beta}$ να λύσουμε το τετραγωνικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\text{argmin}} S(\boldsymbol{\beta}), \text{ όπου } S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{j=1}^n X_{ij}\beta_j \right|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

Το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T\mathbf{y}$ και έτσι οι παράμετροι $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$.

Βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής (Best Linear Unbiased Estimator – BLUE)

Αν ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ είναι γραμμικός, αμερόληπτος και έχει την ελάχιστη διακύμανση μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών της παραμέτρου θ , τότε ονομάζεται βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής.

σ-άλγεβρα

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση υποσυνόλων \mathfrak{F} του Ω καλείται σ-άλγεβρα αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$
2. Αν $A \in \mathfrak{F}$ τότε και $A^c \in \mathfrak{F}$
3. Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ (αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του Ω) τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

Επίσης αν \mathfrak{F} είναι μια σ-άλγεβρα τότε:

- i. $\emptyset \in \mathfrak{F}$
- ii. Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ τότε $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathfrak{F}$

Απόδειξη

- i. $\Omega' = \emptyset \in \mathfrak{F}$ άρα από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.
- ii. $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)' \in \mathfrak{F}$ από (2) και (3), αλλά $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'$ (Από το νόμο De Morgan $(\bigcup A_i)' = \bigcap A_i'$, $(\bigcap A_i)' = \bigcup A_i'$) (Κουνιάς και Καλπαζίδου, 2001).

LOWEES – LOESS

Η LOWESS (Locally Weighted Scatterplot Smoothing) ή LOESS (Locally weighted smoothing) είναι ένα δημοφιλές εργαλείο που χρησιμοποιείται στην ανάλυση παλινδρόμησης, το οποίο δημιουργεί μια ομαλή γραμμή μέσα από ένα διάγραμμα διασποράς για να μας βοηθήσει να δούμε τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών και να προβλέψουμε τις τάσεις. Συνήθως χρησιμοποιείται για:

- ✓ Προσαρμογή μιας γραμμής σε μια γραφική παράσταση διασποράς ή μια γραφική παράσταση χρόνου, όπου οι αραιές τιμές ή οι αδύναμες αλληλεξαρτήσεις μας παρεμποδίζουν από το να έχουμε μια γραμμή καλύτερης προσαρμογής.

- ✓ Γραμμική παλινδρόμηση όπου η τοποθέτηση ελαχίστων τετραγώνων δεν δημιουργεί μια γραμμή καλής προσαρμογής ή είναι πολύ έντονη για χρήση (Statisticshowto, 2013).

QR παραγοντοποίηση (QR Decomposition – QRD)

Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_{(m \times n)}(\mathbb{F})$ έχει n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Ο πίνακας A παραγοντοποιείται στη μορφή $A = QR$, όπου ο πίνακας $Q \in M_{(m \times n)}(\mathbb{F})$ έχει στήλες τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης του χώρου στηλών του A και ο πίνακας $R \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας (Δονάτος και Αδάμ, 2008).

Απόδειξη

Έστω $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A . Στα στοιχεία του πίνακα C θα εφαρμόσουμε το παρακάτω αλγόριθμο και θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο με ορθογώνια στοιχεία, έστω το $B_C = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ από τη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας το σύνολο B_C είναι μια βάση του χώρου στηλών του πίνακα A . Έχουμε:

$$\begin{aligned} a_1 &= u_1 \\ a_2 &= u_2 + \frac{\langle a_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = u_2 + q_{21} u_1 \\ &\vdots \\ a_n &= u_n + \frac{\langle a_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle a_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} = u_n + q_{n1} u_1 + \dots + q_{n,n-1} u_{n-1} \end{aligned}$$

όπου $q_{ij} = \frac{\langle a_i, u_j \rangle}{\|u_j\|^2}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Ο πίνακας A μπορεί να γραφεί στη μορφή $A =$

QR , όπου $Q = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)D^{-1}$, $D = \text{diag}(\|u_1\|, \|u_2\|, \dots, \|u_n\|)$ και

$$R = \begin{pmatrix} 1 & q_{21} & q_{31} & \dots & q_{n1} \\ & 1 & q_{32} & \dots & q_{n2} \\ & \textcircled{0} & 1 & \ddots & q_{n3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας R είναι αντιστρέψιμος αφού είναι το γινόμενο ενός διαγώνιου πίνακα και ενός άνω τριγωνικού, με διαγώνια στοιχεία τη μονάδα και συνεπώς $\det R = \|u_1\| * \|u_2\| * \dots * \|u_n\| \neq 0$. Επομένως, όταν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

επιτυγχάνεται η παραγοντοποίηση του πίνακα στη μορφή $A = QR$. Επίσης, αν πολλαπλασιάσουμε την σχέση $A = QR$ αριστερά επί το πίνακα Q^* έχουμε:

$$A = QR \Leftrightarrow Q^*A = Q^*QR$$

Για το πίνακα $Q = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)D^{-1}$ ισχύει η ιδιότητα $Q^*Q = I$, οπότε με αντικατάσταση στη δεξιά ισότητα της παραπάνω σχέσης βρίσκουμε ένα τρόπο υπολογισμού του πίνακα R , που είναι $R = Q^*A$.

Γενικευμένη QR παραγοντοποίηση (Generalized QR Decomposition – GQRD)

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας και B ένας $n \times p$, $n \geq m$, τότε υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες Q ($n \times n$) και V ($p \times p$) τέτοιοι ώστε:

$$Q^T A = R \quad \text{και} \quad Q^T B V = S$$

όπου, αν $n \leq p$ τότε:

$$R = \begin{bmatrix} [R_{11}] & m \\ \mathbf{0} & n - m \\ & m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S_{11} \\ p - n & n \end{bmatrix}$$

όπου οι πίνακες R_{11} ($m \times m$) και S_{11} ($n \times n$) είναι άνω τριγωνικοί, και να $n > p$ τότε:

$$R = \begin{bmatrix} [R_{11}] & m \\ \mathbf{0} & n - m \\ & m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} [S_{11}] & n - p \\ [S_{21}] & p \end{bmatrix}$$

όπου οι R_{11} ($m \times m$) και S_{21} ($p \times p$) είναι άνω τριγωνικοί (Anderson, Bai & Dongarra, 1994).

Απόδειξη

Από την QR παραγοντοποίηση του πίνακα A έχουμε:

$$Q^T A = \begin{bmatrix} [R_{11}] & m \\ \mathbf{0} & n - m \\ & m \end{bmatrix}$$

Έστω ότι ο Q^T πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα B , τότε η επιθυμητή παραγοντοποίηση έπεται από την RQ παραγοντοποίηση του $Q^T B$:

αν $n \leq p$ τότε:

$$(Q^T B)V = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S_{11} \\ p - n & n \end{bmatrix}$$

αλλιώς, η RQ παραγοντοποίηση του $B^{-1}A$ είναι της μορφής:

$$(Q^T B)V = \begin{bmatrix} S_{11} & n-p \\ S_{21} & p \end{bmatrix}$$

Ακολουθία Givens

Στην αριθμητική γραμμική άλγεβρα, μια ακολουθία Givens είναι μια περιστροφή στο επίπεδο που εκτείνεται από δύο άξονες συντεταγμένων. Οι περιστροφές Givens πήραν το όνομά τους από τον Wallace Givens, ο οποίος τους εισήγαγε στην αριθμητική ανάλυση τη δεκαετία του 1950. Η ακολουθία Givens περιγράφεται παρακάτω (Golub and Van Loan, 1996).

Η ακολουθία Givens αναπαριστάται από ένα πίνακα της μορφής:

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ όπου } c = \cos\theta \text{ και } s = \sin\theta$$

Έτσι για σταθερά $i > j$, τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα Givens υπολογίζονται ως:

$$g_{kk} = 1 \quad \text{για } k \neq i, j$$

$$g_{kk} = c \quad \text{για } k = i, j$$

$$g_{ji} = -g_{ij} = -s$$

Το προϊόν $G(i, j, \theta)x$ αντιπροσωπεύει μια αριστερόστροφη περιστροφή του διανύσματος x στο επίπεδο (i, j) κατά θ μοίρες.

Όταν ο πίνακας $G(i, j, \theta)$ της ακολουθίας Givens πολλαπλασιάζεται με έναν άλλο πίνακα (έστω A) από τα αριστερά (GA) μόνο οι γραμμές i και j του πίνακα A επηρεάζονται. Επομένως περιοριζόμαστε στο ακόλουθο πρόβλημα αντίθετης ροής (counterclockwise problem). Δοθέντων a και b , βρίσκουμε $c = \cos\theta$ και $s = \sin\theta$ τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

όπου $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ είναι το μήκος του διανύσματος (a, b) . Ο υπολογισμός του θ δεν είναι πάντα απαραίτητος, αντί αυτού υπολογίζουμε κατευθείαν τα c και s ως:

$$c = a/r$$

$$s = -b/r$$

Γενικευμένη Ακολουθία Givens

Ο γενικευμένος Givens πίνακας \mathbf{P} ορίζεται ως, $\mathbf{P} = \alpha \begin{pmatrix} c & d \\ s & c \end{pmatrix}$ και ο ανάστροφός του $\mathbf{P}^{-1} = \beta \begin{pmatrix} c & -d \\ -s & c \end{pmatrix}$, με β να ικανοποιεί τη σχέση $\alpha\beta(c^2 - sd) = 1$. (Ο πίνακας της γενικευμένης Givens ακολουθίας θα είναι ίδιος με τον πίνακα της ακολουθίας Givens αν $\alpha = \beta = 1$, $d = -s$ και $s^2 + c^2 = 1$) ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει τον πίνακα \mathbf{P} τέτοιο ώστε, για δυο δοθέντα δυσδιάστατα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} , να ισχύει $\mathbf{P}\mathbf{u} = k_1\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{P}^{-T}\mathbf{v} = k_2\mathbf{e}_1$ (Bitoli, Matioli and Yuan, 2013).

Αλγόριθμος υπολογισμού πίνακα \mathbf{P} .

1. Για δοθέντα διανύσματα $\mathbf{u} = (x, y)^T$ και $\mathbf{v} = (z, w)^T$ τέτοια ώστε $zx \neq 0$ και $\mathbf{u}^T\mathbf{v} \neq 0$.
2. Επιλέγουμε α και β τέτοια ώστε $(\alpha\beta xz\mathbf{u}^T\mathbf{v}) > 0$
3. Υπολογίζουμε τις σχέσεις:

$$\text{i. } c = \sqrt{\frac{xz}{\alpha\beta\mathbf{u}^T\mathbf{v}}}$$

$$\text{ii. } s = -\frac{y}{x}c$$

$$\text{iii. } d = \frac{w}{z}c$$

$$\text{iv. } k_1 = \alpha c(x + yw/z)$$

$$\text{v. } k_2 = \beta c(z + yw/x)$$

2. Chain Ladder Μοντέλο

Η πιο ευρέως διαδεδομένη μέθοδος αποθεματοποίησης είναι η μέθοδος Chain Ladder. Όλες οι ασφαλιστικές εταιρίες χρησιμοποιούν την απλή μορφή της συγκεκριμένης μεθόδου, ή κάποια παραλλαγή της, για να μπορέσουν να εκτιμήσουν τις μελλοντικές κεφαλαιακές τους υποχρεώσεις απέναντι στους πελάτες τους.

Οι ασφαλιστικές εταιρίες καλούνται να αποζημιώσουν τους πελάτες τους όταν επέλθει ο κίνδυνος για τον οποίο έχουν ασφαλιστεί. Πολλές φορές δεν είναι εφικτό, αλλά ούτε και βιώσιμο προς την εταιρία, να καταβάλλεται ολόκληρο το ποσό της κάλυψης σε μία μόνο δόση, γι αυτό το λόγο οι ασφαλιστικές εταιρίες καταβάλλουν τμήματα των αποζημιώσεων στους πελάτες τους ανά τακτά χρονικά διαστήματα, όπως έτος, εξάμηνο, τρίμηνο. Έτσι δημιουργείται ένας πίνακας πληρωμών ο οποίος έχει τη μορφή ενός τριγώνου, το οποίο ορίζεται από τα έτη των ατυχημάτων στις γραμμές του και τα έτη εξέλιξης των ζημιών στις στήλες του (ως έτος εξέλιξης ορίζουμε το έτος μετά από το οποίο έγινε το ατύχημα). Η μέθοδος Chain Ladder βασίζεται σε αυτό το τρίγωνο για την εκτίμηση των μελλοντικών πληρωμών που θα πρέπει να καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρία.

Η δομή της μεθόδου είναι απλή, το τρίγωνο το οποίο αποτελεί τα δεδομένα μας θα πρέπει να γίνει αθροιστικό προσθέτοντας στο κάθε έτος εξέλιξης ζημιών τις ζημιές των προηγούμενων ετών. Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές εξέλιξης ζημιών διαιρώντας δυο διαδοχικά ποσά ζημιών από το έτος εξέλιξης $k + 1$ στο έτος εξέλιξης k και έπειτα θα πρέπει να δημιουργήσουμε ένα πίνακα με το μέσο όρο και τη μέση τιμή των συντελεστών εξέλιξης (τα παραπάνω στατιστικά μεγέθη είναι ενδεικτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες ποσότητες, όπως τον μέσο όρο των τριών τελευταίων ετών, τον μέσο όρο των πέντε τελευταίων ετών και άλλα, η επιλογή γίνεται βάσει της κρίσης του αναλογιστή).

Στους Πίνακες 1 ως και 4 μπορούμε να δούμε μέσω ενός απλού παραδείγματος τα βήματα που απαιτούνται όπως περιγράφηκαν πιο πάνω.

Πίνακας 1. Μη αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών

Έτος Ατυχήματος	Έτη Εξέλιξης Ζημιών					
	0	1	2	3	4	5
2012	542	124	95	172	86	70
2013	987	136	89	110	74	
2014	1250	198	95	99		
2015	1496	234	190			
2016	1678	312				
2017	1723					

Πίνακας 2. Αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών

Έτος Ατυχήματος	Έτη Εξέλιξης Ζημιών					
	0	1	2	3	4	5
2012	542	666	761	933	1019	1089
2013	987	1123	1212	1322	1396	
2014	1250	1448	1543	1642		
2015	1496	1730	1920			
2016	1678	1990				
2017	1723					

Πίνακας 3. Συντελεστές εξέλιξης ζημιών ανά έτος

Έτος Ατυχήματος	1/0	2/1	3/2	4/3	5/4
2012	1,22878229	1,14264264	1,2260184	1,09217578	1,0686948
2013	1,13779129	1,079252	1,09075908	1,05597579	
2014	1,15840000	1,06560773	1,06416073		
2015	1,15641711	1,10982659			
2016	1,18593564				

Πίνακας 4. Συντελεστές εξέλιξης ζημιών με βάση το συνολικό μέσο όρο, το μέσο όρο των 3 τελευταίων ετών και τη μέση τιμή

Μέσος Όρος	1,173465265	1,099332243	1,126979400	1,074075786	1,068694799
Μέσος Όρος 3- ετών	1,166917583	1,084895443	1,126979400	1,074075786	1,068694799
Μέση Τιμή	1,168654460	1,094423193	1,108361775	1,070953437	1,068694799

Αφού δημιουργήσουμε όλους τους πίνακες και υπολογίζουμε όλες τις απαιτούμενες τιμές θα συμπληρώσουμε το κάτω μέρος του τριγώνου με βάση τους συντελεστές εξέλιξης ζημιών για το συνολικό μέσο όρο.

Δηλαδή θα επιλέξουμε τους συντελεστές ζημιών με βάση το συνολικό μέσο όρο και θα πολλαπλασιάσουμε κάθε τελική τιμή του αθροιστικού πίνακα πληρωμών με την εκάστοτε τιμή από το πίνακα εξέλιξης. Για παράδειγμα η τιμή **1492** η οποία αντιστοιχεί στο έτος ατυχήματος 2013 και στο τελευταίο έτος εξέλιξης έχει υπολογιστεί ως: $1396 * 1,068694799 = 1492$, ενώ η τιμή **2875** η οποία αντιστοιχεί στο έτος ατυχήματος 2017 και στο τελευταίο έτος εξέλιξης έχει υπολογιστεί ως:

$$1723 * 1,173465265 * 1,099332243 * 1,126979400 * 1,074075786 * 1,068694799 = 2875.$$

Τέλος, μετά τον υπολογισμό των εκτιμώμενων τελικών ζημιών θα αφαιρέσουμε από αυτές τις τελευταίες πληρωμένες ζημιές (οι οποίες είναι η κύρια διαγώνιος του αθροιστικού μας τριγώνου) για να βρούμε το απόθεμα σε κάθε έτος και αθροίζοντάς τα αποθέματα κάθε έτους θα έχουμε υπολογίσει την εκτίμηση του τελικού αποθέματος που θα χρειαστεί η ασφαλιστική εταιρία για την κάλυψη των αναγκών της.

Πίνακας 5. Εκτιμήσεις αθροιστικών πληρωμών ζημιών στα έτη εξέλιξης με βάση το μέσο όρο

Έτος Ατυχήματος	Εκτιμήσεις Αθροιστικών Πληρωμών με βάση το Μέσο Όρο							
	0	1	2	3	4	Εκτιμήσεις Τελικών Ζημιών	Πληρωμένες Ζημιές	Εκτίμηση Αποθέματος Ζημιών
2012	542	666	761	933	1019	1089	1089	0
2013	987	1123	1212	1322	1396	1492	1396	96
2014	1250	1448	1543	1642	1764	1885	1642	243
2015	1496	1730	1920	2164	2324	2484	1920	564
2016	1678	1990	2188	2465	2648	2830	1990	840
2017	1723	2022	2223	2505	2691	2875	1723	1152
Σύνολο						12655	9760	2895

Η παραπάνω περιγραφή της μεθόδου αποτελεί έναν εύκολο αλλά όχι γενικό τρόπο υπολογισμού των απαιτούμενων κεφαλαιακών υποχρεώσεων. Θα δούμε στη συνέχεια τη γενική μορφή της μεθόδου Chain Ladder και θα δώσουμε τους τύπους που υπολογίζουν τις απαιτούμενες τιμές για την εύρεση των αποθεμάτων.

Πίνακας 6. Τρίγωνο αθροιστικών πληρωμών

		Έτος Εξέλιξης Ζημιών							
Έτος Ατυχήματος	0	1	...	k	...	$n - i$...	$n - 1$	n
0	$Y_{0,0}$	$Y_{0,1}$...	$Y_{0,k}$...	$Y_{0,n-i}$...	$Y_{0,n-1}$	$Y_{0,n}$
1	$Y_{1,0}$	$Y_{1,1}$...	$Y_{1,k}$...	$Y_{1,n-i}$...	$Y_{1,n-1}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			
i	$Y_{i,0}$	$Y_{i,1}$...	$Y_{i,k}$...	$Y_{i,n-i}$			
⋮	⋮	⋮		⋮					
$n - k$	$Y_{n-k,0}$	$Y_{n-k,1}$...	$Y_{n-k,k}$					
⋮	⋮	⋮							
$n - 1$	$Y_{n-1,0}$	$Y_{n-1,1}$							
n	$Y_{n,0}$								

Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει το τρίγωνο των αθροιστικών πληρωμών, όπου $Y_{i,k}$ είναι η αθροιστική τιμή για το έτος ατυχήματος i και το έτος εξέλιξης k , με $i = 0, 1, \dots, n$ και $k = 0, 1, \dots, n$. Οι συντελεστές εξέλιξης ζημιών, οι οποίοι θα συμβολίζονται ως $F_{i,k}$, όπως είδαμε και παραπάνω, υπολογίζονται ως εξής:

$$F_{i,k} = \frac{Y_{i,k}}{Y_{i,k-1}}$$

Στη συνέχεια και αφού έχουμε δημιουργήσει το Πίνακα 3 βάσει του παραπάνω τύπου επιλέγουμε αν θα πάρουμε το συνολικό μέσο όρο, το μέσο όρο των τριών τελευταίων ετών, τη μέση τιμή ή όποια άλλη στατιστική μέθοδο επιλέξουμε για να συμπληρώσουμε το πίνακα των αθροιστικών πληρωμών.

Πίνακας 7. Εκτιμήσεις αθροιστικών πληρωμών

		Έτος Εξέλιξης Ζημιών								
Έτος Ατυχήματος	0	1	...	k	...	$n - i$...	$n - 1$	n	
0	$Y_{0,0}$	$Y_{0,1}$...	$Y_{0,k}$...	$Y_{0,n-i}$...	$Y_{0,n-1}$	$Y_{0,n}$	
1	$Y_{1,0}$	$Y_{1,1}$...	$Y_{1,k}$...	$Y_{1,n-i}$...	$Y_{1,n-1}$	$Y_{1,n}^{CL}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮	
i	$Y_{i,0}$	$Y_{i,1}$...	$Y_{i,k}$...	$Y_{i,n-i}$...	$Y_{i,n-1}^{CL}$	$Y_{i,n}^{CL}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮	
$n - k$	$Y_{n-k,0}$	$Y_{n-k,1}$...	$Y_{n-k,k}$...	$Y_{n-k,n-i}^{CL}$...	$Y_{n-k,n-1}^{CL}$	$Y_{n-k,n}^{CL}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮	
$n - 1$	$Y_{n-1,0}$	$Y_{n-1,1}$...	$Y_{n-1,k}^{CL}$...	$Y_{n-1,n-i}^{CL}$...	$Y_{n-1,n-1}^{CL}$	$Y_{n-1,n}^{CL}$	
n	$Y_{n,0}$	$Y_{n,1}^{CL}$...	$Y_{n,k}^{CL}$...	$Y_{n,n-i}^{CL}$...	$Y_{n,n-1}^{CL}$	$Y_{n,n}^{CL}$	

Έπειτα θα συμπληρώσουμε τις τιμές που λείπουν από το υπόλοιπο τρίγωνο, δηλαδή τα $Y_{i,k}^{CL}$ ως εξής:

$$Y_{i,k}^{CL} = Y_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{k-1} F_{i,j}$$

Να σημειώσουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε όλα τα Y^{CL} αλλά μόνο εκείνα που βρίσκονται στο τελευταίο έτος εξέλιξης, αφού τα υπόλοιπα έτη θα περιέχονται σε αυτό.

Τέλος για να υπολογίσουμε το απαιτούμενο απόθεμα που χρειάζεται η ασφαλιστική εταιρία θα χρησιμοποιήσουμε το τύπο:

$$R_i^{CL} = Y_{i,k}^{CL} - Y_{i,n-i}$$

Το βασικό μοντέλο της Chain Ladder παρουσιάζει κάποια προβλήματα τα οποία επηρεάζουν τις τελικές εκτιμήσεις για το απαιτούμενο απόθεμα που χρειάζεται η ασφαλιστική εταιρία. Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι η εμφάνιση πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών ζημιών οι οποίες μπορούν να επηρεάσουν (αυξήσουν ή μειώσουν) την εκτίμηση του αποθέματος [Πιτσέλης, 2016]. Άλλο ένα πρόβλημα που μπορεί να επηρεάσει τα αποθέματα είναι οι καθυστερήσεις διακανονισμού των ζημιών ή των πληρωμών καθώς και το γεγονός ότι οι εταιρίες έχουν εκκρεμή ευθύνη για γεγονότα που έχουν ήδη συμβεί και για απαιτήσεις που δεν έχουν ακόμη εξοφληθεί πλήρως [Verrall, et al. 2013]. Γενικά το βασικό μοντέλο της Chain Ladder δεν χαρακτηρίζεται για τη σταθερότητά του.

2.1 Σχέση μονοδιάστατου και πολυμεταβλητού μοντέλου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε και αναλύσαμε το μονοδιάστατο μοντέλο της Chain Ladder το οποίο όπως είδαμε αντιμετωπίζει αρκετά προβλήματα που επηρεάζουν ή αλλοιώνουν τις τελικές εκτιμήσεις των αποθεμάτων των ασφαλιστικών εταιριών.

Η μέθοδος Chain Ladder είναι μια μέθοδος αποθεματικής απώλειας η οποία μπορεί να τροποποιηθεί και να γενικευτεί με διάφορους τρόπους. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε ένα ενιαίο τρίγωνο και είναι γνωστό ότι οι προβλέψεις της για τις μη παρατηρούμενες (μελλοντικές) αθροιστικές απαιτήσεις ενός συνολικού χαρτοφυλακίου, που αποτελείται από αρκετά υπό-χαρτοφυλάκια, διαφέρουν από

τα ποσά των προβλέψεων για τις μη παρατηρούμενες αθροιστικές απαιτήσεις των υπό-χαρτοφυλακίων [Ajne, 1994]. Η διαφορετικότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος Chain Ladder παραμελεί τη δομή εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των υπό-χαρτοφυλακίων. Για το λόγο αυτό η χρήση του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder είναι αναγκαία για τη λύση του προβλήματος της μη προσθετικότητας.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη διαφορά των δύο μοντέλων θα ήταν προτιμότερο να δούμε τις διαφορές ανάμεσα στις εκτιμήσεις τους και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα καθώς και τις αποκλίσεις που τυχόν θα εμφανιστούν.

Προτού όμως συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο αυτών μεθόδων θα πρέπει να δούμε, έστω και συνοπτικά, τη δομή, τις παραμέτρους του πολυμεταβλητού μοντέλου καθώς και τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί.

2.2. Πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder

Το πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder υποθέτει ότι έχουμε m το πλήθος χαρτοφυλάκια τα οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι αποτελούν μέρος ενός αθροιστικού χαρτοφυλακίου, όπου κάθε ένα από τα επιμέρους χαρτοφυλάκια χαρακτηρίζεται από την οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{Y_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$ (Pröhl and Schmidt, 2005).

Θα γενικεύσουμε τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήσαμε για το μοντέλο της Chain Ladder προκειμένου να συνάδουν με το πολυμεταβλητό μας μοντέλο. Έτσι έχουμε:

Για κάθε χαρτοφυλάκιο m θεωρούμε το $Y_{i,k}^{(m)}$ να είναι το συνολικό ποσό απαιτήσεων για το έτος ατυχήματος $i \in \{0,1,\dots,n\}$ και το έτος εξέλιξης $k \in \{0,1,\dots,n\}$ και με $F_{i,k}^{(m)}$ θεωρούμε τον ατομικό συντελεστή εξέλιξης για το έτος ατυχήματος $i \in \{0,1,\dots,n\}$ και το έτος εξέλιξης $k \in \{1,\dots,n\}$. Για $i,k \in \{0,1,\dots,n\}$ θεωρούμε το m -διαστάσεων τυχαίο διάνυσμα των αθροιστικών απαιτήσεων $Y_{i,k}$ και για $i \in \{0,1,\dots,n\}$ και $k \in \{1,\dots,n\}$ θεωρούμε το m -διαστάσεων τυχαίο διάνυσμα των ατομικών συντελεστών εξέλιξης $F_{i,k}$.

Έτσι έχουμε το αθροιστικό τρίγωνο απαιτήσεων, στο οποίο θεωρούμε ότι όλα τα διανύσματα $Y_{i,k}$ είναι αυστηρά θετικά.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder ως ένα στοχαστικό μοντέλο, όπου για $m = 1$ έχουμε το μονοδιάστατο μοντέλο και για $m \geq 2$ έχουμε το πολυδιάστατο μοντέλο.

Πίνακας 8. Τρίγωνο αθροιστικών πληρωμών

	Έτος Εξέλιξης Ζημιών								
Έτος Ατυχήματος	0	1	...	k	...	$n - i$...	$n - 1$	n
0	$Y_{0,0}$	$Y_{0,1}$...	$Y_{0,k}$...	$Y_{0,n-i}$...	$Y_{0,n-1}$	$Y_{0,n}$
1	$Y_{1,0}$	$Y_{1,1}$...	$Y_{1,k}$...	$Y_{1,n-i}$...	$Y_{1,n-1}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			
i	$Y_{i,0}$	$Y_{i,1}$...	$Y_{i,k}$...	$Y_{i,n-i}$			
⋮	⋮	⋮		⋮					
$n - k$	$Y_{n-k,0}$	$Y_{n-k,1}$...	$Y_{n-k,k}$					
⋮	⋮	⋮							
$n - 1$	$Y_{n-1,0}$	$Y_{n-1,1}$							
n	$Y_{n,0}$								

Για τον ορισμό της πολυμεταβλητής Chain Ladder μεθόδου θα παρουσιάσουμε τα τυχαία διανύσματα $Y_{i,k}$ μέσω διαγώνιων πινάκων

$$D_{i,k} := \text{diag}(Y_{i,k})$$

Έτσι έχουμε $Y_{i,k} = D_{i,k} \mathbf{1}$ για κάθε $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$, όπου $\mathbf{1} \in \mathbf{R}^m$ είναι ένα διάνυσμα με όλα του τα στοιχεία ίσα με ένα, και

$$Y_{i,k} := D_{i,k-1} F_{i,k}$$

για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $k \in \{1, \dots, n\}$. Επίσης για $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ θεωρούμε το \mathcal{G}_k , το οποίο υποδηλώνει την σ-άλγεβρα (βλέπε κεφάλαιο 1, σ-άλγεβρα) που παράγεται από την οικογένεια συνόλων $\{Y_{i,l}\}_{i \in \{0, 1, \dots, n\}, l \in \{0, 1, \dots, k\}}$.

2.2.1 Το πολυμεταβλητό μοντέλο του Schnaus

Θα παρουσιάσουμε το πολυμεταβλητό μοντέλο του Schnaus ακριβώς όπως παρουσιάζεται στο άρθρο των Pröhl και Schmidt (2005), στο οποίο θα βασιστούμε για να δώσουμε τον ορισμό του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder.

- i. Για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ υπάρχει ένα \mathcal{G}_{k-1} μετρήσιμο τυχαίο διάνυσμα Φ_k τέτοιο ώστε:

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}}(Y_{i,k}) = D_{i,k-1} \Phi_k$$

για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- ii. Για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ υπάρχει ένας \mathcal{G}_{k-1} μετρήσιμος τυχαίος πίνακας Σ_k , ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τέτοιος ώστε:

$$\text{Cov}^{\mathcal{G}_{k-1}}(Y_{i,k}, Y_{j,k}) = \begin{cases} D_{i,k-1}^{1/2} \Sigma_k D_{i,k-1}^{1/2} & \text{αν } i = j \\ \mathbf{0} & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για κάθε $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus έχουμε:

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{F}_{i,k}) = \boldsymbol{\Phi}_k$$

και

$$\text{Cov}^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{F}_{i,k}, \mathbf{F}_{j,k}) = \begin{cases} \mathbf{D}_{i,k-1}^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{D}_{i,k-1}^{-1/2} & \text{αν } i = j \\ \mathbf{0} & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

(Για τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπε Παράτημα 1, Θεώρημα Π1.2).

Θεώρημα 1

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus. Για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ το τυχαίο διάνυσμα

$$\mathbf{F}_k^{CL} := \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \mathbf{F}_{j,k}$$

ικανοποιεί την σχέση $E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{F}_k^{CL}) = E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{F}_{i,k}) \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ με $i + k > n$, το οποίο ελαχιστοποιεί το υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης:

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}} \left((\mathbf{F}_{i,k} - \mathbf{Y})' (\mathbf{F}_{i,k} - \mathbf{Y}) \right)$$

για όλα τα m διαστάσεων τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{W}_{j,k} \mathbf{F}_{j,k}$$

με \mathcal{G}_{k-1} -μετρήσιμους τυχαίους πίνακες $\mathbf{W}_{0,k}, \dots, \mathbf{W}_{n-k,k}$ τέτοιους ώστε $\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{W}_{j,k} = \mathbf{I}$.

Το F_k^{CL} αναφέρεται στο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder για $k \in \{1, \dots, n\}$. Αν το $m = 1$, τότε συμπίπτει με το μονοδιάστατο μοντέλο της Chain Ladder για τα έτη εξέλιξης k , και στη περίπτωση όπου $k = n$ έχουμε $F_n^{CL} = F_{0,n}$.

Λαμβάνοντας υπόψη το έτος ατυχήματος $i \in \{1, \dots, n\}$, ο τύπος που συνδέει το τελευταίο παρατηρούμενο διάνυσμα των αθροιστικών απαιτήσεων $Y_{i,n-i}$ με τη πρόβλεψη του διανύσματος των μη παρατηρούμενων αθροιστικών απαιτήσεων $Y_{i,n-i+1}$ είναι:

$$Y_{i,n-i+1} = D_{i,n-i} F_{i,n-i+1}$$

Η βέλτιστη εκτίμηση του $Y_{i,n-i+1}$ μπορεί να εξασφαλιστεί αν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα των ατομικών παραγόντων της Chain Ladder $F_{i,n-i+1}$ με τη βέλτιστη εκτίμηση όπως αυτή δίνεται από το Θεώρημα 1.

Πόρισμα 1

Έστω ότι υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus πληρούνται, τότε για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ το τυχαίο διάνυσμα

$$Y_{i,n-i+1}^{CL} := D_{i,n-i} \left(\sum_{j=0}^{i-1} D_{j,n-i}^{1/2} \Sigma_{n-i+1}^{-1} D_{j,n-i}^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{i-1} D_{j,n-i}^{1/2} \Sigma_{n-i+1}^{-1} D_{j,n-i}^{1/2} F_{j,n-i+1}$$

ικανοποιεί τη σχέση $E^{\mathcal{G}_{n-i}}(Y_{i,n-i+1}^{CL}) = E^{\mathcal{G}_{n-i}}(Y_{i,n-i+1})$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα το οποίο ελαχιστοποιεί το υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{G}_{n-i}} \left((Y_{i,n-i+1} - Y)' (F_{i,n-i+1} - Y) \right)$$

για όλα τα n – διάστατα τυχαία διανύσματα Y που ικανοποιούν τη σχέση

$$Y = D_{i,n-i} \sum_{j=0}^{i-1} W_{j,n-i+1} F_{j,n-i+1}$$

με \mathbf{G}_{n-i} μετρήσιμους τυχαίους πίνακες $\mathbf{W}_{0,n-i+1}, \dots, \mathbf{W}_{i-1,n-i+1}$ τέτοιους ώστε $\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{W}_{j,n-i+1} = \mathbf{I}$ (Schmidt and Schnaus, 1996).

(Το παραπάνω Πόρισμα προκύπτει από το Θεώρημα Π1.2 του Παραρτήματος 1).

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder:

2.2.2 Μέθοδος του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus, το πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder, όπως αναφέρεται και στο άρθρο των Pröhl και Schmidt (2005), ορίζεται ως:

$$\mathbf{Y}_{i,n-i}^{CL} := \mathbf{Y}_{i,n-i}$$

για όλα τα $i \in \{1, \dots, n\}$ και

$$\mathbf{F}_k^{CL} := \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \mathbf{F}_{j,k}$$

για όλα τα $k \in \{1, \dots, n\}$ και

$$\mathbf{D}_{i,k-1}^{CL} := \text{diag}(\mathbf{Y}_{i,k-1}^{CL})$$

$$\mathbf{Y}_{i,k}^{CL} := \mathbf{D}_{i,k-1}^{CL} \mathbf{F}_k^{CL}$$

για όλα τα $i, k \in \{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + k > n$.

Πόρισμα 2

Έστω ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus, τότε για κάθε $i, k \in \{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + k > n$ το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y}_{i,k}^{CL}$ ικανοποιεί τη σχέση $E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{Y}_{i,k}^{CL}) = E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{Y}_{i,k})$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}} \left((\mathbf{Y}_{i,k} - \mathbf{Y})' (\mathbf{Y}_{i,k} - \mathbf{Y}) \right)$$

για όλα τα n -διάστατα τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}_{i,k-1}^{CL} \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{W}_{j,k} \mathbf{F}_{j,k}$$

με \mathcal{G}_{k-1} - μετρήσιμους τυχαίους πίνακες $\mathbf{W}_{0,k}, \dots, \mathbf{W}_{i-1,k}$ τέτοιους ώστε $\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{W}_{j,k} = \mathbf{I}$ (Pröhl και Schmidt, 2005).

Πόρισμα 3

Έστω ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus, τότε για κάθε $i, k \in \{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + k > n$ το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{1}' \mathbf{Y}_{i,k}^{CL}$ ικανοποιεί τη σχέση $E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{1}' \mathbf{Y}_{i,k}^{CL}) = E^{\mathcal{G}_{k-1}}(\mathbf{1}' \mathbf{Y}_{i,k})$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{G}_{k-1}} \left((\mathbf{1}' \mathbf{Y}_{i,k} - \mathbf{Y})^2 \right)$$

για όλα τα n -διάστατα τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{Y} = \mathbf{1}' \mathbf{D}_{i,k-1}^{CL} \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{W}_{j,k} \mathbf{F}_{j,k}$$

με \mathcal{G}_{k-1} - μετρήσιμους τυχαίους πίνακες $\mathbf{W}_{0,k}, \dots, \mathbf{W}_{i-1,k}$ τέτοιους ώστε $\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{W}_{j,k} = \mathbf{I}$ (Pröhl and Schmidt, 2005).

Ας δούμε λοιπόν την σχέση μεταξύ μονοδιάστατου και πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder μεθόδου μέσω μιας σύγκρισης στις προβλέψεις τους.

2.3. Διαφορά πρόβλεψης του μονοδιάστατου και του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder

Για τη περίπτωση που έχουμε $k = n$ ή ο πίνακας Σ_k είναι διαγώνιος, όπως μπορούμε να δούμε από το άρθρο των Pröhl και Schmidt (2005), ο παράγοντας εξέλιξης που αντιστοιχεί στο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder F_k^{CL} δεν εξαρτάται από τον Σ_k άρα οι ποσότητες $F_k^{CL(m)}$ του F_k^{CL} ικανοποιούν τη σχέση

$$F_k^{CL(m)} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{Y_{j,k-1}^{(m)}}{\sum_{h=0}^{n-k} Y_{h,k-1}^{(m)}} F_{j,k}^{(m)}$$

και επομένως συμπίπτουν με τους παράγοντες της Chain Ladder για τα υπό χαρτοφυλάκια m .

Αν έχουμε κάθε πίνακα $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}$ να είναι διαγώνιος, τότε η εκτίμηση που παράγεται από το μονοδιάστατο μοντέλο της Chain Ladder για κάθε υπό χαρτοφυλάκιο συμπίπτει με την εκτίμηση του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder για όλο το χαρτοφυλάκιο. Γενικά όμως, οι προβλέψεις του μονοδιάστατου μοντέλου και του πολυμεταβλητού, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, δεν είναι ίδιες.

Θεώρημα 2

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου του Schnaus και $2 \leq k \leq n$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Κάθε πρόβλεψη του παράγοντα εξέλιξης της Chain Ladder F_k^{CL} εξαρτάται μόνο από τους αντίστοιχους παράγοντες $F_{0,k}, \dots, F_{n-k,k}$.
2. Ο πίνακας Σ_k είναι διαγώνιος.

Απόδειξη

Έστω ότι η πρώτη πρόταση ισχύει. Για $m = 2$, καθένας από τους τυχαίους πίνακες

$$\left(\sum_{h=0}^{n-k} \mathbf{D}_{h,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{h,k-1}^{1/2} \right)^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \mathbf{F}_{j,k}$$

με $j \in \{0, 1, \dots, n - k\}$, είναι διαγώνιος και το Θεώρημα Π1.3 (βλέπε Παράρτημα 1) υπονοεί ότι οι τυχαίοι πίνακες

$$\mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2}$$

με $j \in \{0, 1, \dots, n - k\}$, είναι είτε όλοι διαγώνιοι είτε ανάλογοι μεταξύ τους.

1. Στη πρώτη περίπτωση, ο $\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}$ είναι διαγώνιος.
2. Στη δεύτερη περίπτωση, οι πίνακες $\mathbf{D}_{j,k-1}$ με $j \in \{0, 1, \dots, n - k\}$ είναι ανάλογοι μεταξύ τους έτσι ώστε να υπάρχει $c_1, \dots, c_{n-k} \in (0, \infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{Y}_{j,k-1} = c_j \mathbf{Y}_{0,k-1}$$

για όλα τα $j \in \{0, 1, \dots, n - k\}$ και ως εκ τούτου

$$\text{Cov}^{\mathcal{G}_{k-2}}(\mathbf{Y}_{j,k-1}, \mathbf{Y}_{0,k-1}) = c_j \text{Var}^{\mathcal{G}_{k-2}}(\mathbf{Y}_{0,k-1})$$

το οποίο είναι αδύνατο αφού,

$$\text{Cov}^{\mathcal{G}_{k-2}}(\mathbf{Y}_{j,k-1}, \mathbf{Y}_{0,k-1}) = \mathbf{0} \neq \text{Var}^{\mathcal{G}_{k-2}}(\mathbf{Y}_{0,k-1})$$

το οποίο υποδηλώνει ότι ο $\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}$ είναι διαγώνιος.

Για $m \geq 3$, θεωρούμε αυθαίρετα $q, r \in \{1, \dots, m\}$ τέτοια ώστε $q \neq r$ και διαγράφουμε όλες τις στήλες με δείκτη $p \in \{1, \dots, m\} \setminus \{q, r\}$ των πινάκων $\mathbf{D}_{j,k-1}$ και $\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}$. Ορίζουμε

$$\mathbf{A}_j := \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{D}_{j,k-1}^{1/2}$$

με $j \in \{0, 1, \dots, n - k\}$. Τότε οι εναπομείναντες πίνακες $\mathbf{D}_{j,k-1}^{q,r}$, $(\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})^{q,r}$ και $\mathbf{A}_j^{q,r}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{A}_j^{q,r} = (\mathbf{D}_{j,k-1}^{q,r})^{1/2} (\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})^{q,r} (\mathbf{D}_{j,k-1}^{q,r})^{1/2}$$

Από τη στιγμή που κάθε πίνακας $\mathbf{A}_j^{q,r}$, με $j \in \{0, 1, \dots, n - k\}$ είναι δισδιάστατος, θετικά ορισμένος και συμμετρικός τυχαίος πίνακας τέτοιος ώστε κάθε ένας απ τους τυχαίους πίνακες

$$\left(\sum_{h=0}^{n-k} \mathbf{A}_h^{q,r} \right) \mathbf{A}_j^{q,r}$$

να είναι διαγώνιος, έπεται, από τη περίπτωση όπου $m = 2$ ότι ο $(\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})^{q,r}$ είναι διαγώνιος. Για διάφορα $q, r \in \{1, \dots, m\}$ τέτοια ώστε $q \neq r$ έπεται ότι ο $\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}$ είναι διαγώνιος. Δείξαμε λοιπόν ότι ο πίνακας $\boldsymbol{\Sigma}_k$ είναι διαγώνιος, ως εκ τούτου η (1) συνεπάγεται τη (2) (Pröhl and Schmidt, 2005).

Είδαμε λοιπόν ότι το πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder λύνει το πρόβλημα της μη προσθετικότητας των προβλέψεων του μονοδιάστατου μοντέλου. Ως εκ τούτου η πρόβλεψη του αθροίσματος των συνολικών απαιτήσεων των επιμέρους χαρτοφυλακίων από το απλό μοντέλο της Chain Ladder δεν έχει νόημα αφού η μέθοδος αυτή αγνοεί τη συσχέτιση μεταξύ των υπό-χαρτοφυλακίων, εν αντιθέσει με το πολυμεταβλητό μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπόψη την συσχέτιση μεταξύ των συνολικών απαιτήσεων ενός έτους εξέλιξης. Επομένως η λογικότερη εκτίμηση του $\mathbf{1}'\mathbf{Y}_{i,k}$ με $i + k > n$ είναι η $\mathbf{1}'\mathbf{Y}_{i,k}^{CL}$, που είναι το άθροισμα των μη παρατηρούμενων απαιτήσεων του πολυμεταβλητού μοντέλου της Chain Ladder του $\mathbf{Y}_{i,k}$.

3. Αποθεματοποίηση με χρήση του μοντέλου Φαινομενικών Ασυσχέτιστων Παλινδρομήσεων

Αφού είδαμε τη σχέση μεταξύ μονοδιάστατου και πολυμεταβλητού μοντέλου για τη μέθοδο της Chain Ladder, θα μελετήσουμε την γενική μορφή της Multivariate Chain Ladder (MCL). Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τα παρακάτω αποτελέσματα θα εισάγουμε την έννοια των Φαινομενικά Ασυσχέτιστων Παλινδρομήσεων (Seemingly Unrelated Regressions – SUR).

Το μοντέλο των φαινομενικών ασυσχέτιστων εξισώσεων παλινδρόμησης, το οποίο προτάθηκε από τον Arnold Zellner το 1962, μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης. Αποτελείται από αρκετές εξισώσεις παλινδρόμησης, όπου η κάθε μία από έχει τη δική της εξαρτημένη μεταβλητή και διαφορετικά σύνολα επεξηγηματικών μεταβλητών. Κάθε εξίσωση είναι μια γραμμική παλινδρόμηση από μόνη της και μπορεί να εκτιμηθεί ξεχωριστά, γι αυτό το λόγο αναφέρεται το σύστημα ως φαινομενικά ασυσχέτιστο.

Το μοντέλο μπορεί να εκτιμηθεί από εξίσωση σε εξίσωση χρησιμοποιώντας τα συνήθη ελάχιστα τετράγωνα (βλέπε κεφάλαιο 1, OLS), οι εκτιμήσεις των οποίων είναι συνεπείς, αλλά όχι τόσο αποδοτικές όσο των SUR εκτιμήσεων. Αν δώσουμε μια συγκεκριμένη μορφή στο πίνακα διασποράς – συνδιασποράς τότε το SUR μοντέλο θα ισοδυναμεί με τα εφικτά γενικευμένα ελάχιστα τετράγωνα (βλέπε κεφάλαιο 1, FGLS), ενώ θα είναι ισοδύναμο με το OLS μοντέλο όταν οι όροι σφάλματος δεν θα συνδέονται μεταξύ των εξισώσεων (έτσι ώστε να είναι πραγματικά ασυσχέτιστοι) και όταν κάθε εξίσωση θα περιέχει ακριβώς το ίδιο σύνολο όρων παλινδρόμησης (regressors) στο δεξιό μέλος. Επίσης το μοντέλο των φαινομενικά ανεξάρτητων παλινδρομήσεων μπορεί να θεωρηθεί ως μια απλούστερη μορφή του γενικού γραμμικού μοντέλου (βλέπε κεφάλαιο 1, GLM) όπου ορισμένοι συντελεστές του πίνακα \mathbf{B} περιορίζονται να είναι ίσοι με το μηδέν ή ως γενίκευση του γενικού γραμμικού μοντέλου όπου οι όροι παλινδρόμησης (regressors) στο δεξιό μέλος επιτρέπεται να είναι διαφορετικοί σε κάθε εξίσωση. Τέλος μια γενίκευση του μοντέλου μπορεί να αποτελέσει και το μοντέλο

ταυτόχρονων εξισώσεων (simultaneous equations model), όπου οι όροι παλινδρόμησης στο δεξιό μέλος επιτρέπονται ως ενδογενείς μεταβλητές.

Ας δούμε λοιπόν πως επηρεάζεται το γενικευμένο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder με τη χρήση των φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων.

3.1. Γενικευμένο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder Model

Θα μελετήσουμε το γενικευμένο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain Ladder (General Multivariate Chain Ladder Model – GMCL) το οποίο μοντελοποιεί ταυτόχρονα πολλαπλά ασυσχέιστα τρίγωνα. Υποθέτουμε ότι έχουμε N τρίγωνα ίδιας διάστασης και $m \in \{1, \dots, N\}$ αναφέρεται στο m -οστό τρίγωνο, $i \in \{1, \dots, n\}$ είναι το i -οστό έτος ατυχήματος και $k \in \{1, \dots, n\}$ είναι το k -οστό έτος εξέλιξης.

Πίνακας 1. Αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών.

		Έτος Εξέλιξης Ζημιών				
Έτος Ατυχήματος	1	2	...	$n - 1$	n	
1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$...	$Y_{1,n-1}$	$Y_{1,n}$	
2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$...	$Y_{2,n-1}$		
⋮	⋮	⋮				
i	$Y_{i,1}$			
⋮	⋮	⋮	$Y_{i,n+1-i}$			
$n - 1$	$Y_{n-1,1}$	$Y_{n-1,2}$				
n	$Y_{n,1}$					

Συμβολίζουμε με $Y_{i,k} = (Y_{i,k}^{(1)}, \dots, Y_{i,k}^{(N)})'$ ένα $(N \times 1)$ διάνυσμα αθροιστικών ζημιών για το έτος ατυχήματος i και το έτος εξέλιξης k , όπου κάθε αθροιστική ζημία $Y_{i,k}^{(m)}$

υποθέτουμε ότι είναι αυστηρά θετική (το (m) αναφέρεται στο m -οστό τρίγωνο), $\mathfrak{D} = \{\mathbf{Y}_{i,k}; i + k \leq n + 1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n\}$ είναι το σύνολο όλων των παρατηρούμενων ζημιών, $\mathfrak{D}_{\cdot,k} = \{\mathbf{Y}_{i,j}; 1 \leq i \leq n, j \leq k\}$ είναι το σύνολο όλων των παρατηρούμενων ζημιών για κάθε έτος εξέλιξης k , $\mathfrak{D}_{i,k} = \{\mathbf{Y}_{i,j}; j \leq k\}$ είναι το σύνολο των παρατηρούμενων ζημιών για το έτος ατυχήματος i και το έτος εξέλιξης k . Επιπλέον συμβολίζουμε με $\mathbf{Y}_{\leq,k}^{(m)} = (Y_{1,k}^{(m)}, \dots, Y_{n+1-k,k}^{(m)})'$ το $(n + 1 - k) \times 1$ διάνυσμα των πρώτων $(n + 1 - k)$ ζημιών του έτους εξέλιξης k του m -οστού τριγώνου και με $\mathbf{Y}_{<,k}^{(m)} = (Y_{1,k}^{(m)}, \dots, Y_{n-k,k}^{(m)})'$ τις πρώτες $(n - k)$ ζημιές. Με $D(a)$ και $D(a)^b$ θα συμβολίζουμε τους $N \times N$ διαγώνιους πίνακες με τα N διαστάσεων διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)'$ και $(\alpha_1^b, \dots, \alpha_N^b)'$ κατά μήκος της διαγωνίου αντίστοιχα. Με vec συμβολίζουμε το φορέα διανύσματος ενός πίνακα τέτοιο ώστε αν έχουμε ένα $m \times n$ πίνακα $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, όπου κάθε στήλη $\boldsymbol{\alpha}_i$ είναι ένα $m \times 1$ διάνυσμα, τότε ο πίνακας \mathbf{A} να γίνει ένα $mn \times 1$ διάνυσμα, το οποίο είναι $vec(\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\alpha}'_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}'_n)'$.

Θα θεωρήσουμε το επόμενο μοντέλο, το οποίο είναι μια γενίκευση του MCL μοντέλου και δεν περιέχει τεταγμένους όρους, ως το βασικό μοντέλο για τη περίοδο εξέλιξης από το έτος k στο $k + 1$:

$$\mathbf{Y}_{i,k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{Y}_{i,k} + \boldsymbol{\varepsilon}_{i,k} \quad (3.1)$$

όπου $\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N1} & \cdots & \beta_{NN} \end{pmatrix}$ είναι ένας $N \times N$ πίνακας εξέλιξης της περιόδου

εξέλιξης k και η n -οστή γραμμή περιέχει τις παραμέτρους εξέλιξης για το N -οστό τρίγωνο (στον πίνακα \mathbf{B}_k παραλείπεται η περίοδος εξέλιξης του δείκτη k για τα β αφού δεν χρησιμοποιούνται στους επαναληπτικούς υπολογισμούς).

Ένας μη διαγώνιος πίνακας \mathbf{B}_k επιτρέπει την ανάπτυξη ενός τριγώνου, στο έτος εξέλιξης k , να εξαρτάται άμεσα από τις παρατηρούμενες απαιτήσεις των άλλων τριγώνων κατά τη περίοδο εξέλιξης k . Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε

παλινδρόμηση στις πληρωθείσες ζημίες έναντι των υφιστάμενων ζημιών (paid and incurred) έτσι ώστε η εκτιμώμενη πληρωθείσα και υφιστάμενη ζημιά να είναι κοντά η μία στην άλλη. Ωστόσο το πλήρως παραμετροποιημένο μοντέλο έχει N^2 παραμέτρους ανάπτυξης σε κάθε περίοδο.

Η άμεση εφαρμογή χωρίς περιορισμούς στις παραμέτρους δε συμβαίνει συχνά διότι η εκτίμηση των παραμέτρων δεν είναι πάντα εφικτή. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου, παρά τους περιορισμούς, οι καθορισμένοι παράμετροι δεν μπορούν να εκτιμηθούν, κυρίως στα έτη εξέλιξης της ουράς (tail development periods). Πιθανές λύσεις, όπως προτείνει ο Zhang (2010), είναι να χρησιμοποιούνται δεδομένα σε τραπεζοειδή μορφή για να βεβαιώνεται ότι υπάρχουν αρκετές παρατηρήσεις στην ουρά ή σύμφωνα με τον Mack (2003), η χρήση του απλού μοντέλου της Chain Ladder στις παραμέτρους εξέλιξης της ουράς.

Για το μοντέλο (3.1) έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{i,k} | \mathcal{D}_{i,k}) = \mathbf{0}$ (3.2)

- $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_{i,k} | \mathcal{D}_{i,k}) = D(\mathbf{Y}_{i,k})^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k D(\mathbf{Y}_{i,k})^{1/2}$ (3.3)

- Ζημίες από διαφορετικά έτη ατυχήματος είναι ανεξάρτητες (3.4)

- Τα $\boldsymbol{\varepsilon}_{i,k}$ είναι συμμετρικά κατανεμημένα (3.5)

όπου $\boldsymbol{\Sigma}_k = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$ είναι ένας $N \times N$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας (για κάθε σ παραλείπουμε τη περίοδο εξέλιξης k αφού δεν θα χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς μας).

Σημείωση 1

- Μπορούμε να γενικεύσουμε τη σχέση (3.3) χρησιμοποιώντας μια πιο γενική δομή διακύμανσης, $D(\mathbf{Y}_{i,k})^{\delta/2} \boldsymbol{\Sigma}_k D(\mathbf{Y}_{i,k})^{\delta/2}$, όπου το δ καθορίζει το βάρος στην εκτίμηση. Θεωρούμε το $\delta = 1$, έχοντας όμως τη δυνατότητα να τροποποιήσουμε τα αποτελέσματα με κάποιο άλλο δ .

- Η υπόθεση (3.5) δηλώνει ότι το διάνυσμα των σφαλμάτων $\varepsilon_{i,k}$ έχει συμμετρική συνάρτηση πιθανότητας, δηλαδή $p(\varepsilon_{i,k}) = p(-\varepsilon_{i,k})$. Αυτό είναι συχνά μια κατάλληλη προσέγγιση για τα αθροιστικά τρίγωνα, αλλά θα πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή για δεδομένα με υψηλή ασυμμετρία. (Zhang, 2010)

3.1.1. Μερικά Αποτελέσματα

Σύμφωνα με το Zhang (2010) χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1) αναδρομικά μπορούμε να πάρουμε τις τελικές τιμές των ζημιών για το έτος ατυχήματος i σε όρους τελευταίας παρατηρούμενης απώλειας $Y_{i,n+1-i}$ ως:

$$Y_{i,n} = \left(\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \mathbf{B}_k \right) Y_{i,n+1-i} + \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \left(\prod_{l=n-1}^{k+1} \mathbf{B}_l \right) \varepsilon_{i,k} \quad (3.6)$$

όπου $\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \mathbf{B}_k$ αντιπροσωπεύει το αυστηρό προϊόν του \mathbf{B}_k και $\prod_{l=n-1}^{k+1} \mathbf{B}_l$ ορίζεται ως ο ταυτοτικός πίνακας \mathbf{I} για να απλοποιηθεί η έκφραση. Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.6) και τις υποθέσεις (3.2) και (3.4) μπορούμε να δείξουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της τελικής ζημίας για το έτος ατυχήματος i εξαρτώμενη από τα παρατηρούμενα τρίγωνα \mathcal{D} είναι:

$$\begin{aligned} E(Y_{i,n} | \mathcal{D}) &= E(Y_{i,n} | \mathcal{D}_{i,n+1-i}) = E(Y_{i,n} | \mathcal{D}_{i,n+1-i}) \\ &= \left(\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \mathbf{B}_k \right) Y_{i,n+1-i} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τελική ζημία, χρησιμοποιώντας τον εκτιμώμενο πίνακα εξέλιξης $\hat{\mathbf{B}}_k$, ως:

$$\hat{Y}_{i,n} = \left(\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \hat{\mathbf{B}}_k \right) Y_{i,n+1-i} \quad (3.8)$$

Λήμμα 1

(βλέπε Zhang, 2010)

Σύμφωνα με τις υποθέσεις (3.2) ως (3.5), ισχύουν τα εξής:

- I. $E(\widehat{\mathbf{B}}_k | \mathcal{D}_{\cdot,k}) = \mathbf{B}_k$ και $E(\widehat{\mathbf{B}}_k) = \mathbf{B}_k$
- II. Εκτιμητές των πινάκων εξέλιξης από διαφορετικές περιόδους εξέλιξης είναι ασυσχέτιστοι, έτσι έχουμε $E(\widehat{\mathbf{B}}_j \widehat{\mathbf{B}}_k) = E(\widehat{\mathbf{B}}_k)E(\widehat{\mathbf{B}}_j) \quad \forall j \neq k$
- III. Δοθέντος $\mathcal{D}_{\cdot,n+1-i}$, ο εκτιμητής $\widehat{\mathbf{Y}}_{i,n}$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του $E(\mathbf{Y}_{i,n} | \mathcal{D})$, δηλαδή $E(\widehat{\mathbf{Y}}_{i,n} | \mathcal{D}_{\cdot,n+1-i}) = E(\mathbf{Y}_{i,n} | \mathcal{D})$
- IV. Ο εκτιμητής $\widehat{\mathbf{Y}}_{i,n}$ είναι αμερόληπτος του $E(\widehat{\mathbf{Y}}_{i,n})$, ήτοι $E(\widehat{\mathbf{Y}}_{i,n}) = E(\mathbf{Y}_{i,n})$

Απόδειξη

- I. $E(\widehat{\mathbf{B}}_k | \mathcal{D}_{\cdot,k}) = \mathbf{B}_k$ βγαίνει απ' ευθείας από το αποτέλεσμα που δίνεται από τον [Kakwani, 1967] σύμφωνα με την υπόθεση (3.5) και $E(\widehat{\mathbf{B}}_k) = E(E(\widehat{\mathbf{B}}_k | \mathcal{D}_{\cdot,k})) = E(\mathbf{B}_k) = \mathbf{B}_k$
- II. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $j < k$, τότε:

$$\begin{aligned} E(\widehat{\mathbf{B}}_j \widehat{\mathbf{B}}_k) &= E(E(\widehat{\mathbf{B}}_j \widehat{\mathbf{B}}_k | \mathcal{D}_{\cdot,k})) = \\ &= E(\widehat{\mathbf{B}}_j E(\widehat{\mathbf{B}}_k | \mathcal{D}_{\cdot,k})) \stackrel{(I)}{\Rightarrow} E(\widehat{\mathbf{B}}_j) \widehat{\mathbf{B}}_k \stackrel{(I)}{\Rightarrow} E(\widehat{\mathbf{B}}_k) E(\widehat{\mathbf{B}}_j) \end{aligned}$$

- III. Δοθέντος ότι τα $\mathcal{D}_{\cdot,n+1-i}$ και $\mathbf{Y}_{i,n+1-i}$ είναι γνωστά και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των (I), (II) και τη σχέση (3.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\widehat{\mathbf{Y}}_{i,n} | \mathcal{D}_{\cdot,n+1-i}) &= E \left[\left(\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \widehat{\mathbf{B}}_k \right) \mathbf{Y}_{i,n+1-i} | \mathcal{D}_{\cdot,n+1-i} \right] = E \left[\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \widehat{\mathbf{B}}_k \right] \mathbf{Y}_{i,n+1-i} \\ &= \left[\prod_{k=n-1}^{n+1-i} E(\widehat{\mathbf{B}}_k) \right] \mathbf{Y}_{i,n+1-i} = \left(\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \mathbf{B}_k \right) \mathbf{Y}_{i,n+1-i} = E(\mathbf{Y}_{i,n} | \mathcal{D}) \end{aligned}$$

IV. Από τα αποτελέσματα της (III) και της σχέσης (3.6) έχουμε

$$E(\hat{Y}_{i,n}|\mathcal{D}_{\cdot,n+1-i}) = E(Y_{i,n}|\mathcal{D}) = E(Y_{i,n}|\mathcal{D}_{\cdot,n+1-i})$$

Παίρνοντας τώρα μέσες τιμές και στα δύο μέλη καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$E(\hat{Y}_{i,n}) = E(Y_{i,n})$$

3.2. SUR μοντέλο με τεταγμένες

Οι Barnett και Zehnwirth, (2000) επισήμαναν ότι τόσο το μοντέλο της Chain Ladder όσο και το πολυμεταβλητό μοντέλο δεν είναι επαρκές αφού τείνουν να υπερτιμούν τις μεγάλες τιμές και να υποτιμούν τις μικρές. Η μόνη διαφορά των δύο μοντέλων (μονοδιάστατο και πολυμεταβλητό) είναι ότι το πολυμεταβλητό μοντέλο λαμβάνει υπ' όψιν του την διασπορά-συνδιασπορά στην εκτίμηση των παραμέτρων εξέλιξης. Τα δύο αυτά μοντέλα της Chain Ladder αποτυγχάνουν διότι αποκλείουν τον όρο της τεταγμένης, αν και δεν είναι ξεκάθαρο πως μπορεί να προστεθεί ο όρος αυτός στα μοντέλα, η χρήση του SUR μοντέλου δίνει τη λύση.

Υποθέτουμε ένα $N \times 1$ διάνυσμα τεταγμένων, $A_k = (\beta_{10}, \dots, \beta_{N0})'$, όπου β_{m0} είναι ο τεταγμένος όρος για το m -οστό τρίγωνο. Μπορούμε να επεκτείνουμε το βασικό μοντέλο (σχέση (3.1)) ως

$$Y_{i,k+1} = A_k + B_k Y_{i,k} + \varepsilon_{i,k} \quad (3.9)$$

Σημειώνουμε ότι εξακολουθούν να ισχύουν οι υποθέσεις (3.2) ως (3.4 και ο πίνακας B_k εξακολουθεί να είναι πίνακας εξέλιξης. Θα αναφερόμαστε πλέον στο μοντέλο της σχέσης (3.9) ως SUR μοντέλο με τεταγμένες ή ως μοντέλο με τεταγμένες, όπου η εκτίμηση του θα είναι η ίδια με του μοντέλου της σχέσης (Π2.1) (βλέπε Παράρτημα 2) εάν αλλάξουμε σε αυτή τον X_n και β_n ώστε να αντικατοπτρίζεται η συμπερίληψη των τεταγμένων.

Δηλαδή θα ορίσουμε ως $\mathbf{X}_n = (\mathbf{1}, \mathbf{Y}_{<,k}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}_{<,k}^{(N)})$ ένα $(n-k) \times (n+1)$ πίνακα, όπου $\mathbf{1}$ είναι η στήλη με μονάδες και $\boldsymbol{\beta}_n = (\beta_{n0}, \beta_{n1}, \dots, \beta_{nN})'$ θα είναι ένα $(N+1) \times 1$ διάνυσμα παραμέτρων προς εκτίμηση για το m -οστό τρίγωνο.

Για να κρατήσουμε την ίδια δομή όπως της σχέσης (3.8) για τις αναμενόμενες τελικές απαιτήσεις, θα συνδυάσουμε τα εκτιμώμενα β από κάθε έτος εξέλιξης έτσι ώστε οι τεταγμένοι όροι να μην αλλοιώσουν τα προγενέστερα αποτελέσματα. Έτσι θα γράψουμε την σχέση (3.9) ως:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Y}_{i,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Y}_{i,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{i,k} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

όπου προσθέσαμε μια σταθερή ισότητα στη πρώτη σειρά και θα θέσουμε:

$$\mathbf{Z}_{i,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{Y}_{i,k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{i,k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{i,k} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς η σχέση (3.10) θα γίνει: $\mathbf{Z}_{i,k+1} = \mathbf{E}_k \mathbf{Z}_{i,k} + \mathbf{e}_{i,k}$ (3.11)

Η σχέση (3.9) έχει γίνει πλέον ένα πολλαπλασιαστικό μοντέλο και μπορούμε να δούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (3.6) και (3.7) αν αντικαταστήσουμε σε αυτές τα $\mathbf{Y}_{i,k}$, \mathbf{B}_k και $\boldsymbol{\varepsilon}_{i,k}$ με $\mathbf{Z}_{i,k}$, \mathbf{E}_k και $\mathbf{e}_{i,k}$ αντίστοιχα, αφού $E(\mathbf{e}_{i,k} | \mathcal{D}_{i,k}) = \mathbf{0}$ βάσει της υπόθεσης (3.2). Στη συνέχεια αφού έχουμε υπολογίσει τον εκτιμητή $\hat{\mathbf{Z}}_{i,n} = (\prod_{k=n-1}^{n+1-i} \hat{\mathbf{E}}_k) \mathbf{Z}_{i,n+1-i}$ μπορούμε να αφαιρέσουμε τη σταθερά 1 και να πάρουμε τον εκτιμητή $\hat{\mathbf{Y}}_{i,n}$. Το Λήμμα 1 θα συνεχίσει να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα \mathbf{B}_k και \mathbf{E}_k με $\hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{E}}_k$ αντίστοιχα, αφού τα $(\hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{A}}_k)$ είναι αμερόληπτα (Zhang, 2010).

Τα μοντέλα με τεταγμένες συνήθως προτιμούνται αφού επιλύουν τα προβλήματα των μεθόδων της Chain Ladder και μας δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις. Στο παρακάτω κεφάλαιο θα δούμε τις σχέσεις δύο μοντέλων με το βασικό μοντέλο της (3.1) και στη συνέχεια θα αποδείξουμε μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος ότι το μοντέλο με τεταγμένες είναι το καλύτερο από όλα τα υπόλοιπα μοντέλα μας.

3.3. Το Διμερές μοντέλο

Όπως είδαμε η Chain Ladder παρουσιάζει ορισμένα προβλήματα τα οποία αντανακλούν στις εκτιμήσεις των μελλοντικών απαιτήσεων ενός χαρτοφυλακίου και συνάμα στο τελικό απόθεμα, ένα ακόμα πρόβλημα είναι η απόκλιση των αναλογιών ζημίας ανάμεσα στα πληρωθέντα τρίγωνα και τα υφιστάμενα. Λύση σε αυτό το πρόβλημα έρχεται να δώσει το διμερές μοντέλο, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υπομοντέλο του βασικού μας μοντέλου (3.1) αν έχουμε δύο το πλήθος τριγώνων, δηλαδή $N = 2$.

Η δομή του μοντέλου είναι απλή, θεωρούμε ένα τρίγωνο με P το οποίο αντιστοιχεί στις πληρωθείσες ζημίες και ένα δεύτερο τρίγωνο με C το οποίο αντιστοιχεί στις υφιστάμενες ζημίες. Το διμερές μοντέλο θα γίνει:

$$P_{i,k+1} = \beta_{11}P_{i,k} + \beta_{12}C_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^P \quad (3.12)$$

$$C_{i,k+1} = \beta_{21}P_{i,k} + \beta_{22}C_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^C \quad (3.13)$$

όπου $\varepsilon_{i,k}^P$ και $\varepsilon_{i,k}^C$ είναι οι όροι σφάλματος για τα δύο τρίγωνα αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τους Quarg και Mack (2004) οι προβλέψεις βάσει των πληρωθέντων ζημιών (paid) είναι διαφορετικές από αυτές των υφιστάμενων ζημιών (incurred), όταν υπάρχουν δεδομένα και για τα δύο είδη τριγώνων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, σε ξεχωριστή ανάπτυξη και για κάθε έτος ατυχήματος, ο προβαλλόμενος λόγος μεταξύ α) της αναλογίας πληρωμένων προς υφιστάμενων ζημιών και β) ο αντίστοιχος μέσος όρος σε ένα συγκεκριμένο έτος ατυχήματος, παραμένει ο ίδιος με εκείνον που παρατηρήθηκε στο τελευταίο έτος εξέλιξης, για το λόγο αυτό προτάθηκε το Munich Chain Ladder (MuCL) μοντέλο ως λύση, στο οποίο γίνεται παλινδρόμηση ανάμεσα στο συντελεστή εξέλιξης των πληρωμένων ζημιών με την αναλογία incurred-to-paid και στο συντελεστή εξέλιξης των υφιστάμενων ζημιών με την αναλογία paid-to-incurred. Έτσι μπορούμε να ανάγουμε τη λύση που προσφέρει η MuCL στο διμερές μοντέλο, διαιρώντας την σχέση (3.12) με $P_{i,k}$ και τη σχέση (3.13) με $C_{i,k}$, έτσι θα έχουμε:

$$\frac{P_{i,k+1}}{P_{i,k}} = \beta_{11} + \beta_{12} \frac{C_{i,k}}{P_{i,k}} + \frac{\varepsilon_{i,k}^P}{P_{i,k}} \quad (3.14)$$

$$\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} = \beta_{21} \frac{P_{i,k}}{C_{i,k}} + \beta_{22} + \frac{\varepsilon_{i,k}^C}{C_{i,k}} \quad (3.15)$$

Με βάση τα παραπάνω θα αναμέναμε συγκλίνουσες προβλεπόμενες *raid-to-incurred* αναλογίες από το διμερές μοντέλο, στη πραγματικότητα όμως η δομή του μοντέλου αυτού είναι πανομοιότυπη με του *Double Regression* μοντέλου, που μελετήθηκε από τον Mack (2003), ο οποίος υποστήριξε ότι θα παράγει περίπου το ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο *Munich Chain Ladder (MuCL)*, ωστόσο, ο εκτιμητής που προτείνει είναι πρακτικά ο $\hat{\beta}_0$. Αν και είναι πιθανό και τα δύο μοντέλα να έχουν *raid-to-incurred* αναλογίες που συγκλίνουν, δεν έχουμε κάποια βεβαιότητα ότι τα αποτελέσματα των τελικών απαιτήσεων θα είναι ίδια ή παρόμοια μεταξύ τους, λαμβάνοντας υπόψη τις ακόλουθες διαφορές:

- Το *MuCL* μοντέλο συγκεντρώνει όλα τα τυποποιημένα υπόλοιπα από κάθε περίοδο μαζί και τα χρησιμοποιεί ενώ το διμερές μοντέλο διεξάγεται διαδοχικά κατά την περίοδο ανάπτυξης και δε χρησιμοποιεί υπόλοιπα.
- Η *MuCL* δε λαμβάνει υπόψη τις ταυτόχρονες συσχετίσεις μεταξύ των χαρτοφυλακίων, αντιθέτως θεωρεί μόνο δομική εξάρτηση και τρέχει δύο ξεχωριστές παλινδρομήσεις, ενώ το διμερές μοντέλο αντικατοπτρίζει τόσο τις δομικές όσο και τις ταυτόχρονες συσχετίσεις των *FGLS* εκτιμητών που χρησιμοποιούνται (Zhang, 2010).

Τέλος αν στο διμερές μοντέλο εφαρμοστούν κατάλληλες αντικαταστάσεις τότε θα ισοδυναμεί με το *Backward Recursive Reserve Development* μοντέλο (*BRRD*) των Marker και Mohl (1980).

3.4. Το Backward Recursive Reserve Development μοντέλο

Το Backward Recursive Reserve Development (BRRD) μοντέλο, όπως περιγράφεται από τους Marker και Mohl (1980), μοντελοποιεί τις πληρωθείσες ζημίες μαζί με τα αποθέματα, δηλαδή προσπαθεί να υπολογίσει τα μελλοντικά αποθέματα για τις μελλοντικές απαιτήσεις ή τα εναπομείναντα αποθέματα. Σύμφωνα με το άρθρο του Zhang, (2010) το μοντέλο αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας μια περιορισμένη μορφή της σχέσης (3.1).

Η δομή του BRRD μοντέλου είναι απλή, υπολογίζονται οι paid-on-reserve λόγοι, οι οποίοι τοποθετούνται σε ένα πίνακα, δηλαδή υπολογίζονται οι λόγοι των πληρωθέντων ζημιών από το έτος εξέλιξης k στο έτος εξέλιξης $k + 1$ οι οποίοι διαιρούνται με το απόθεμα στο k . Έπειτα δημιουργείται ένας δεύτερος πίνακας ο οποίος περιλαμβάνει τα εναπομείναντα αποθέματα, δηλαδή το απόθεμα στο έτος εξέλιξης $k + 1$ προς το απόθεμα στο έτος εξέλιξης k , τέλος προβάλλονται οι στήλες των δύο αυτών πινάκων, λαμβάνοντας υπόψη απλούς μέσους όρους. Για να συμπληρώσουμε τους παραπάνω πίνακες θα χρησιμοποιήσουμε τους προβαλλόμενους λόγους, δηλαδή για το πρώτο πίνακα θα πολλαπλασιάσουμε το απόθεμα στο έτος εξέλιξης k με τις προβαλλόμενες paid-on-reserve αναλογίες στο έτος εξέλιξης $k + 1$ και για το δεύτερο πίνακα θα πολλαπλασιάσουμε το απόθεμα στο έτος εξέλιξης k με τις remaining-in-reserve αναλογίες στο έτος εξέλιξης $k + 1$. Στη συνέχεια το άθροισμα της προβαλλόμενης καταβληθείσας ζημίας για κάθε έτος θα είναι το απόθεμά μας.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{P_{i,k+1} - P_{i,k}}{C_{i,k}} &= \beta_{12} + \varepsilon_{i,k}^P \\ \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} &= \beta_{22} + \varepsilon_{i,k}^C \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου $E(\varepsilon_{i,k}^P | \mathcal{D}_{i,k}) = E(\varepsilon_{i,k}^C | \mathcal{D}_{i,k}) = 0$ και $Cov[(\varepsilon_{i,k}^P, \varepsilon_{i,k}^C)' | \mathcal{D}_{i,k}] = D[(\sigma_{11}, \sigma_{22})']$.

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο εξισώσεις με $C_{i,k}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_{i,k+1} &= P_{i,k} + \beta_{12}C_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^{P*} \\
C_{i,k+1} &= \beta_{22}C_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^{C*}
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

όπου $\varepsilon_{i,k}^{P*} = C_{i,k}\varepsilon_{i,k}^P$, $\varepsilon_{i,k}^{C*} = C_{i,k}\varepsilon_{i,k}^C$, $E(\varepsilon_{i,k}^{P*}|\mathcal{D}_{i,k}) = E(\varepsilon_{i,k}^{C*}|\mathcal{D}_{i,k}) = 0$ και $Cov((\varepsilon_{i,k}^{P*}, \varepsilon_{i,k}^{C*})'|\mathcal{D}_{i,k}) = C_{i,k}^2 D((\sigma_{11}, \sigma_{22})')$ (3.18).

Το BRRD μοντέλο, όπως αναφέραμε και προηγουμένως μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας το GMCL μοντέλο, αν αντικαταστήσουμε την σχέση (3.3) με τη σχέση (3.18) και θέσουμε περιορισμούς για τους συντελεστές παλινδρόμησης τέτοιους ώστε $\beta_{11} = 1$ και $\beta_{21} = 0$, οι οποίοι προκύπτουν από τη σχέση $\mathbf{R}\beta = \mathbf{q}$, όπου $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})'$.

Αφού αναλύσαμε και εξετάσαμε τις βασικότερες μεθόδους αποθεματοποίησης και βγάλαμε κάποια συμπεράσματα για την χρήση τους θα περάσουμε σε ένα πιο γενικό κεφάλαιο για τη μέθοδο SUR.

4. Φαινομενικά Ασυσχέτιστες Παλινδρομήσεις με διαφορετικού μεγέθους παρατηρήσεις (SUR-USO)

Όπως είδαμε παραπάνω η μέθοδος SUR υπέθετε ίσο αριθμό παρατηρήσεων μεταξύ των τριγώνων. Σε αυτό το κεφάλαιο, όπως αναφέρεται και στο άρθρο των Foschi και Kontoghiorghes (2002), θα παρουσιάσουμε μια τεχνική επίλυσης ενός SUR μοντέλου με άνισο αριθμό παρατηρήσεων.

Έχουμε δει ότι το SUR μοντέλο είναι:

$$y_i = X_i \beta_i + \varepsilon_i$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

ή

$$vec(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} n \\ \oplus_{i=1} X_i \end{pmatrix} vec(\{\beta_i\}_n) + vec(\varepsilon) \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, είναι το ακριβές άθροισμα των πινάκων,

δηλαδή: $\bigoplus_{i=1}^n X_i \equiv \bigoplus_i X_i \equiv diag(X_1, \dots, X_n)$, $\{\beta_i\}_n = \{\beta_i\} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ και

$vec(\{\beta_i\}) = (\beta_1^T, \dots, \beta_n^T)^T$, επίσης η ποσότητα $vec(\varepsilon)$ έχει μέση τιμή ίση με μηδέν και διασπορά $\Sigma \otimes I_t$, όπου $\Sigma = [\sigma_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρική και θετικά ημιορισμένη (Srivastava, Giles, 1987).

Σύμφωνα με το άρθρο των Foschi και Kontoghiorghes (2002), υπάρχουν αποτελεσματικές υπολογιστικές μέθοδοι για την επίλυση των SUR μοντέλων, οι οποίες μοντελοποιούν το SUR ως ένα γενικευμένο πρόβλημα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (βλέπε εισαγωγή, Generalized Linear Least Squares Problem – GLLSP)

χρησιμοποιώντας την γενικευμένη QR παραγοντοποίηση (βλέπε εισαγωγή, Generalized QR Decomposition – GQRD) για την επίλυσή του. Τις περισσότερες φορές θεωρείται, εσφαλμένα, ότι υπάρχει ο ίδιος αριθμός παρατηρήσεων στις εξισώσεις παλινδρόμησης, γεγονός που μπορεί να μην ισχύει πάντα (Srivastava, Giles, 1987).

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα εξετάσουμε το πρόβλημα των SUR μοντέλων με άνισο αριθμό παρατηρήσεων (SUR models with unequal size observations) ή όπως θα το ονομάζουμε εν συντομία SUR-USO και θα δώσουμε κάποιες στατιστικές ιδιότητες των εκτιμητών. Το SUR-USO μοντέλο υποθέτει ότι οι παρατηρήσεις από την i -οστή ($i > 1$) παλινδρόμηση αντιστοιχούν στο χρόνο με την $(i - 1)$ παλινδρόμηση.

4.1. Αριθμητική Επίλυση του SUR-USO μοντέλου

Σύμφωνα με το άρθρο των Foschi και Kontoghiorghes, 2002, κάθε παλινδρόμηση του μοντέλου που εξετάζουμε έχει διαφορετικό αριθμό παρατηρήσεων, έτσι έχουμε, $y_i, \varepsilon_i \in \mathbb{R}^{t_i}$, $X_i \in \mathbb{R}^{t_i \times k_i}$ και ο πίνακας διασποράς, για $i < j$ δίνεται από τη σχέση:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) = \sigma_{ij} \left(\mathbf{I}_{t_i} \mathbf{0}_{t_i \times (t_j - t_i)} \right) \quad (4.2)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι $t_i \leq t_{i+1}$, και μια συμπαγής μορφή του SUR-USO μοντέλου μπορεί να δωθεί από τη σχέση:

$$vec(\{y_i\}) = \left(\bigoplus_i X_i \right) vec(\{\beta_i\}) + vec(\{\varepsilon_i\}) \quad (4.3)$$

όπου η διασπορά του $vec(\{\varepsilon_i\})$ έχει δομή μπλοκ πίνακα, όπου το (i, j) μπλοκ δίνεται από τη σχέση (4.2).

Θα διαχωρίσουμε και θα επανατοποθετήσουμε τις παραμέτρους κάθε παλινδρόμησης σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} y_{1,i} \\ y_{2,i} \\ \vdots \\ y_{i,i} \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_i \end{matrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} X_{1,i} \\ X_{2,i} \\ \vdots \\ X_{i,i} \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_i \end{matrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,i} \\ \varepsilon_{2,i} \\ \vdots \\ \varepsilon_{i,i} \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_i \end{matrix} \quad (4.4)$$

όπου $h_1 = t_1$ και $h_i = t_i - t_{i-1}$ για $i = 2, 3, \dots, n$, με αυτό τον τρόπο το SUR-USO μοντέλο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως το σύνολο των εξισώσεων παλινδρόμησης:

$$\mathbf{y}_{i,j} = \mathbf{X}_{i,j} \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{i,j} \quad \text{για} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad i \leq j \quad (4.5)$$

όπου τα $\boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}$ έχουν μέση τιμή ίση με το μηδέν και πίνακα διασποράς $\sigma_{j,j} \mathbf{I}_{h_i}$. Επίσης οι εξισώσεις συνδιασποράς δίνονται από το τύπο:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,i} \boldsymbol{\varepsilon}_{l,j}^T) = \begin{cases} \sigma_{j,j} \mathbf{I}_{h_k} & \text{για} \quad l = k \\ 0_{h_k \times h_l} & \text{για} \quad l \neq k \end{cases}$$

όπου $k \leq i$ και $l \leq j$.

Παρατηρούμε ότι η σχέση (4.5) ισοδυναμεί με το γενικό γραμμικό μοντέλο (GLM):

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \text{vec}(\{\boldsymbol{\beta}_i\}) + \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

το οποίο με κατάλληλες αντικαταστάσεις μπορεί να γραφεί ως $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{X}} \boldsymbol{\beta} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, όπου $\bar{\mathbf{y}}_i^T = (\mathbf{y}_{i,i}^T, \mathbf{y}_{i,i+1}^T, \dots, \mathbf{y}_{i,n}^T) \in \mathbb{R}^{\mu_i}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T = (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,i}^T, \boldsymbol{\varepsilon}_{i,i+1}^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{i,n}^T) \in \mathbb{R}^{\mu_i}$, $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}(\{\boldsymbol{\beta}_i\})$

$$\text{και} \quad \bar{\mathbf{X}}_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \bigoplus_{i=1}^n X_{i,j} \end{pmatrix} \quad (4.7).$$

Ο όρος $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ έχει μέση τιμή μηδέν και πίνακα διασποράς $\boldsymbol{\Sigma}_{(i)} \otimes \mathbf{I}_{h_i}$, όπου $\boldsymbol{\Sigma}_{(i)} \equiv \boldsymbol{\Sigma}_{i,i}$: δηλώνει τον $(n - i + 1) \times (n - i + 1)$ υποπίνακα του $\boldsymbol{\Sigma}$ ξεκινώντας από τη θέση (i, i) (Golub and Van Loan, 1996). Επιπλέον τα διανύσματα $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_j$ είναι ασυσχέτιστα για $i \neq j$ και ο πίνακας συνδιασποράς του $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ δίνεται από το τύπο $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \bigoplus_i (\boldsymbol{\Sigma}_{(i)} \otimes \mathbf{I}_{h_i}) \in \mathbb{R}^{T \times T}$, όπου $T = \sum_i t_i = \sum_i \mu_i$ και $\mu_i = (n - i + 1)h_i$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο $\boldsymbol{\Sigma}_{(i)}$ είναι μη μηδενικός και $t_1 \geq k_i$ για $i = 1, \dots, n$.

Στο παρακάτω παράδειγμα μπορούμε να δούμε την δομή των μοντέλων (4.3),(4.6) και (4.8) καθώς και τους πίνακες διασποράς-συνδιασποράς τους.

Παράδειγμα 1. Παράδειγμα των μοντέλων (4.3),(4.6) και (4.8) για $n = 3$. (Foschi and Kontoghiorghes, 2002)

Το SUR-USO μοντέλο (4.3): $vec(\{y_i\}) = \left(\bigoplus_i X_i \right) vec(\{\beta_i\}) + vec(\{\varepsilon_i\})$

$$\begin{pmatrix} \underline{y_{11}} \\ y_{12} \\ \underline{y_{22}} \\ y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{12} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{13} \\ 0 & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon_{11}} \\ \varepsilon_{12} \\ \underline{\varepsilon_{22}} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας συνδιασποράς του $vec(\{\varepsilon_i\})$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1}I & \sigma_{1,2}I & 0 & \sigma_{1,3}I & 0 & 0 \\ \sigma_{2,1}I & \sigma_{2,2}I & 0 & \sigma_{2,3}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{2,2}I & 0 & \sigma_{2,3}I & 0 \\ \sigma_{3,1}I & \sigma_{3,2}I & 0 & \sigma_{3,3}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,2}I & 0 & \sigma_{3,3}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{3,3}I \end{pmatrix}$$

Το GLM (4.6): $\bar{y} = \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon}$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \underline{y_{13}} \\ y_{22} \\ \underline{y_{23}} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & X_{13} \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \underline{\varepsilon_{13}} \\ \varepsilon_{22} \\ \underline{\varepsilon_{23}} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας συνδιασποράς του $\bar{\varepsilon}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1}I & \sigma_{1,2}I & \sigma_{1,3}I & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{2,1}I & \sigma_{2,2}I & \sigma_{2,3}I & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{3,1}I & \sigma_{3,2}I & \sigma_{3,3}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{2,2}I & \sigma_{2,3}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{3,2}I & \sigma_{3,3}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{3,3}I \end{pmatrix}$$

Οι περιορισμοί του GLLSP (4.8): $\bar{y} = \bar{X}\beta + \bar{C}\bar{v}$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & X_{13} \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{1,1}I & C_{1,2}I & C_{1,3}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2}I & C_{2,3}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3}I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2,2}I & C_{2,3}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3,3}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3,3}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{pmatrix}$$

Αφού έχουμε υποθέσει ότι το μοντέλο μας ανάγεται στο πρόβλημα των γενικευμένων γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων, ο βέλτιστος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής (βλέπε εισαγωγή, BLUE) του SUR-USO μοντέλου θα προκύψει από τη λύση του προβλήματος γενικευμένων γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (GLLSP)

$$\operatorname{argmin}_{\bar{\varepsilon}, \beta} \|\bar{v}\| \quad \text{το οποίο υπόκειται στη} \quad \bar{y} = \bar{X}\beta + \bar{C}\bar{v} \quad (4.8)$$

όπου $\bar{\varepsilon} = \bar{C}\bar{v}$, $\bar{\Sigma} = \bar{C}\bar{C}^T$, ο άνω τριγωνικός πίνακας \bar{C} έχει πλήρη τάξη και το τυχαίο διάνυσμα \bar{v} έχει μηδενική μέση τιμή και πίνακα διασποράς I_T . Ο πίνακας \bar{C} έχει μπλοκ διαγώνια δομή και το i -οστό ($i = 1, \dots, n$) μπλοκ υπολογίζεται βάσει της σχέσης: $\bar{C}_{i,i} = C_{i,i} \otimes I_{h_i}$, όπου $\Sigma = CC^T$ και ο C είναι άνω τριγωνικός.

Για τη λύση του προβλήματος (4.8) υποθέτουμε τις σχέσης της γενικευμένης QR παραγοντοποίησης (βλέπε κεφάλαιο 1, Generalized QR Decomposition (GQRD)):

$$\bar{Q}^T \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.9a) \quad \text{και} \quad \bar{Q}^T \bar{C}\bar{P} = \begin{pmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} \\ \mathbf{0} & W_{2,2} \end{pmatrix} \quad (4.9b)$$

όπου \bar{R} και $W_{2,2}$ είναι άνω τριγωνικοί και $Q, P \in \mathbb{R}^{T \times T}$ είναι ορθογώνιοι.

Χρησιμοποιώντας τις δυο σχέσεις της 4.9 (4.9a και 4.9b) στην σχέση (4.8) το GLLSP μπορεί να γραφεί ως:

$$\arg \min_{\bar{v}_A, \bar{v}_B, \beta} \|\bar{v}_A\|^2 + \|\bar{v}_B\|^2 \text{ πού υπόκεινται στη}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_A \\ \bar{y}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_A \\ \bar{v}_B \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \bar{y}_A \\ \bar{y}_B \end{pmatrix}$ και $\mathbf{P}^T \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \bar{v}_A \\ \bar{v}_B \end{pmatrix}$, έτσι λύνοντας το παρακάτω σύστημα θα πάρουμε τη λύση για το SUR-USO μοντέλο.

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_A \\ \bar{y}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R} & \mathbf{W}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{v}_B \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Ο υπολογισμός της GQRD (σχέσεις 4.9a & 4.9b) καθώς και η επίλυση του συστήματος (4.10) είναι οι βασικές για την επίλυση του SUR-USO μοντέλου, το οποίο θα έχει μικρότερο υπολογιστικό βάρος αν γίνει επιλυθούν αποτελεσματικά οι σχέσεις (4.9a) και (4.9b). Επιπλέον, ο αποτελεσματικός υπολογισμός των GQRD σχέσεων θα έχει αντίκτυπο στην συνολική υπολογιστική πολυπλοκότητα αν απαιτείται ο επαναληπτικός εφικτός εκτιμητής του SUR-USO μοντέλου (Srivastava & Giles, 1987). Σε μια τέτοια περίπτωση, για κάθε επανάληψη θα χρησιμοποιείται ένας εκτιμητής $\hat{\Sigma}$ (αντί του αγνώστου πίνακα διασποράς Σ) με αποτέλεσμα να υπολογιστεί η σχέση (4.9a) μια φορά ενώ οι σχέσεις (4.9b) και (4.10) να υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη για διαφορετικά \bar{C} .

Στη συνέχεια θα δούμε μια εφικτή λύση για το πρόβλημα των γενικευμένων γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων (4.8) χρησιμοποιώντας την γενικευμένη QR παραγοντοποίηση (σχέσεις 4.9a&b).

4.2. Εφικτή λύση του Γενικευμένου Προβλήματος Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων (GLLSP)

Θα θεωρήσουμε την γενικευμένη QR παραγοντοποίηση $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{(0)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_0^T \bar{\mathbf{X}}_1$ (4.11a) και

$\mathbf{Q}_0^T \bar{\mathbf{C}}_{1,1} \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{1,1}^{(0)} & \mathbf{W}_{1,1} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{W}}_{1,1} \end{pmatrix}$ (4.11b) για την λύση του προβλήματος μας, όπου θα

υποθέσουμε μπλοκ αραιή δομή για τους πίνακές μας. Οι $\bar{\mathbf{C}}_{1,1}^{(0)}$ και $\bar{\mathbf{W}}_{1,1}$ είναι άνω τριγωνικοί πίνακες και ο \mathbf{P}_0 είναι ορθογώνιος (Foschi & Kontoghiorghes, 2002). Επιπλέον $\bar{\mathbf{R}}^{(0)} = \bigoplus_i \mathbf{R}_i^{(0)}$ και

$$\mathbf{Q}_0 = (\bigoplus_i \hat{\mathbf{Q}}_{0,i} \bigoplus_i \tilde{\mathbf{Q}}_{0,i}) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{0,1} & \dots & \hat{\mathbf{Q}}_{0,1} & \dots & \tilde{\mathbf{Q}}_{0,1} & \dots & \tilde{\mathbf{Q}}_{0,1} & \dots \\ & & \hat{\mathbf{Q}}_{0,n} & & & & \tilde{\mathbf{Q}}_{0,n} & \\ & & & & & & & \tilde{\mathbf{Q}}_{0,n} \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{X}_{1,i} = (\hat{\mathbf{Q}}_{0,i} \tilde{\mathbf{Q}}_{0,i}) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i^{(0)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{Q}}_{0,i} \mathbf{R}_i^{(0)}$ είναι η QRD για το $\mathbf{X}_{1,i}$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Χρησιμοποιώντας την (4.11) το πρόβλημα της (4.8) μπορεί να γραφεί ως:

$arg_{\beta, \hat{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1, (\bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n)} \min \|\hat{\mathbf{v}}_1\|^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|^2 + \sum_{j=2}^n \|\bar{\mathbf{v}}_j\|^2$ που υπόκεινται στην

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{y}}_n \\ \hat{\mathbf{y}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{(0)} \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{1,1}^{(0)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{W}}_{1,1} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{2,2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{\mathbf{C}}_{n,n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{W}}_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \bar{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}_n \\ \tilde{\mathbf{v}}_1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

όπου $\hat{\mathbf{y}}_1 = \hat{\mathbf{Q}}_0^T \bar{\mathbf{y}}_1$, $\tilde{\mathbf{y}}_1 = \tilde{\mathbf{Q}}_0^T \bar{\mathbf{y}}_1$ και $\mathbf{P}_0^T \bar{\mathbf{v}}_1 = (\hat{\mathbf{v}}_1^T \tilde{\mathbf{v}}_1^T)^T$, όπου $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{W}}_{1,1}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_1$ και έτσι η (4.12) μπορεί να απλουστευτεί:

$$arg_{\beta, \hat{\mathbf{v}}_1, (\bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n)} \min \|\hat{\mathbf{v}}_1\|^2 + \sum_{j=2}^n \|\bar{\mathbf{v}}_j\|^2 \text{ που υπόκεινται στην}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1^{(0)} \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{y}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{(0)} \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}_n \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{1,1}^{(0)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{2,2}^{(0)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{\mathbf{C}}_{n,n}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_1 \\ \bar{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}_n \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

όπου $\bar{\mathbf{y}}_1^{(0)} = \hat{\mathbf{y}}_1 - \widehat{\mathbf{W}}_{1,1} \tilde{\mathbf{v}}_1 = \hat{\mathbf{y}}_1 - \widehat{\mathbf{W}}_{1,1} \widehat{\mathbf{W}}_{1,1}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_1$ και $\bar{\mathbf{c}}_{1,1}^{(0)} \equiv \bar{\mathbf{c}}_{i,i}$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Κάνοντας χρήση της γενικευμένης ακολουθίας Givens (βλέπε κεφάλαιο 1, γενίκευση ακολουθίας Givens) μπορούμε να μηδενίσουμε τα μπλοκ $\bar{\mathbf{X}}_i$ ($i = 2, \dots, n$) ένα προς ένα, έτσι θα χρησιμοποιήσουμε το πίνακα $\bar{\mathbf{R}}^{(0)}$ ως άξονα για να μηδενίσουμε τα $\bar{\mathbf{X}}_n, \dots, \bar{\mathbf{X}}_2$ ξεκινώντας από το τέλος προς την αρχή, δηλαδή για $i = n, n-1, \dots, 2$ οι QRD υπολογίζονται:

$$\mathbf{Q}_i^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{(n-1)} \\ \bar{\mathbf{X}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}^{(n-i+1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{Q}_i^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1^{(n-i)} \\ \bar{\mathbf{y}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1^{(n-i+1)} \\ \bar{\mathbf{y}}_i^{(n-i+1)} \end{pmatrix} \quad (4.14b)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}}_{1,1}^{(n-i)} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{c}}_{1,i+1}^{(n-i)} & \dots & \bar{\mathbf{c}}_{1,n}^{(n-i)} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{c}}_{i,i}^{(0)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{c}}_{1,1}^{(n-i+1)} & \bar{\mathbf{c}}_{1,i}^{(n-i+1)} & \dots & \bar{\mathbf{c}}_{1,n}^{(n-i+1)} \\ \bar{\mathbf{c}}_{i,1}^{(n-i+1)} & \bar{\mathbf{c}}_{i,i}^{(n-i+1)} & \dots & \bar{\mathbf{c}}_{i,n}^{(n-i+1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14c)$$

όπου $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}$ είναι ορθογώνιος, $\bar{\mathbf{R}}^{(i)} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{R}_j^{(i)}$ και $\mathbf{R}_j^{(i)} \in \mathbb{R}$ είναι άνω τριγωνικός. Αξίζει να επισημανθεί ότι τα $\bar{\mathbf{c}}_{1,i}^{(n-i+1)}, \bar{\mathbf{c}}_{i,1}^{(n-i+1)}$ και $\bar{\mathbf{c}}_{i,i+1}^{(n-i+1)}, \dots, \bar{\mathbf{c}}_{i,n}^{(n-i+1)}$ συμπληρώνονται σε κάθε βήμα με αποτέλεσμα την συμπλήρωση των μπλοκ-υπέρ διαγώνιων και πρώτων μπλοκ-στηλών του $\bigoplus_i \bar{\mathbf{c}}_{i,i}^{(0)}$.

Θα υποθέσουμε μια τροποποίηση για το $\bigoplus_i \bar{\mathbf{c}}_{i,i}^{(0)}$ την οποία θα συμβολίσουμε με \mathbf{W} , δηλαδή:

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} W_{1,1}^{(0)} & W_{1,2}^{(0)} & W_{1,3}^{(0)} & \dots & W_{1,n}^{(0)} \\ W_{2,1}^{(0)} & W_{2,2}^{(0)} & W_{2,3}^{(0)} & \dots & W_{2,n}^{(0)} \\ W_{3,1}^{(0)} & 0 & W_{3,3}^{(0)} & \dots & W_{3,n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n,1}^{(0)} & 0 & 0 & \dots & W_{n,n}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(n-1)} & \bar{C}_{1,2}^{(n-1)} & \bar{C}_{1,3}^{(n-1)} & \dots & \bar{C}_{1,n}^{(n-1)} \\ \bar{C}_{2,1}^{(n-1)} & \bar{C}_{2,2}^{(n-1)} & \bar{C}_{2,3}^{(n-1)} & \dots & \bar{C}_{2,n}^{(n-1)} \\ \bar{C}_{3,1}^{(n-2)} & 0 & \bar{C}_{3,3}^{(n-2)} & \dots & \bar{C}_{3,n}^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}_{n,1}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & \bar{C}_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε μια σειρά $n - 1$ ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων μπορούμε να πάρουμε την RQ παραγοντοποίηση του \mathbf{W} . Οι παραγοντοποιήσεις που χρησιμοποιούμε για το \mathbf{W} θα μηδενίσουν τους υποπίνακες $\mathbf{W}_{2,1}^{(0)}, \dots, \mathbf{W}_{n,1}^{(0)}$ ξεκινώντας από τον τελευταίο, δηλαδή αν είχαμε απλή δομή πινάκων θα μηδενίζαμε όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα εκτός από το πρώτο.

Ο i -οστός παράγοντας ($i = 1, \dots, n - 1$) υπολογίζεται:

$$\begin{pmatrix} W_{1,1}^{(i-1)} & W_{1,n-i+1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots \\ W_{n-i,1}^{(i-1)} & W_{n-i,n-i+1}^{(0)} \\ W_{n-i+1,1}^{(i-1)} & W_{n-i+1,n-i+1}^{(0)} \end{pmatrix} \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} W_{1,1}^{(i)} & W_{1,n-i+1}^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ W_{n-i,1}^{(i)} & W_{n-i,n-i+1}^{(i)} \\ 0 & W_{n-i+1,n-i+1}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

όπου $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}$ είναι ορθογώνιος και $\mathbf{W}_{n-i+1,n-i+1}^{(i)}$ είναι άνω τριγωνικός.

Έτσι, ο άνω τριγωνικός συντελεστής της RQD του \mathbf{W} δίνεται από:

$$\begin{pmatrix} W_{1,1}^* & W_{1,2}^* \\ 0 & W_{2,2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{1,1}^{(n-1)} & W_{1,2}^{(n-1)} & \dots & W_{1,n}^{(1)} \\ 0 & W_{2,2}^{(n-1)} & \dots & W_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Από τις σχέσεις (4.14a, b & c) έπεται ότι η λύση του GLLSP (4.13) δίνεται από τη λύση του τριγωνικού συστήματος:

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1^{(n-1)} \\ \bar{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}^{(n-1)} & W_{1,2}^* \\ 0 & W_{2,2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{v}_B^* \end{pmatrix}$$

$$\text{όπου } \bar{\mathbf{y}}^* = \begin{pmatrix} \bar{y}_2^{(n-1)} \\ \vdots \\ \bar{y}_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την QR παραγοντοποίηση (σχέση 4.14a) χρησιμοποιώντας την σχέση (4.7) και τη μπλοκ διαγώνια δομή του $\bar{\mathbf{R}}^{(n-i)}$ υπολογίζοντας τις $(n-i+1)$ ενημερωμένες QR παραγοντοποιήσεις (updating QRDs-UQRDs)

$$\mathbf{Q}_{i,j}^T \begin{pmatrix} \mathbf{R}_j^{(n-i)} \\ \mathbf{X}_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_j^{(n-i+1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (j = 1, \dots, n-i+1) \quad (4.18)$$

Έτσι, στην (4.14a) $\mathbf{R}_s^{(n-i)} \equiv \mathbf{R}_s^{(n-i+1)}$ για $j = 1, \dots, i-1$ και

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} I_{\lambda_i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bigoplus_{j=i}^n \mathbf{Q}_{i,j}^{(1,1)} & \bigoplus_{j=i}^n \mathbf{Q}_{i,j}^{(1,2)} \\ \mathbf{0} & \bigoplus_{j=i}^n \mathbf{Q}_{i,j}^{(2,1)} & \bigoplus_{j=i}^n \mathbf{Q}_{i,j}^{(2,2)} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

όπου $\lambda_i = \sum_{j=1}^{i-1} k_j$ και $\mathbf{Q}_{i,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{i,j}^{(1,1)} & \mathbf{Q}_{i,j}^{(1,2)} \\ \mathbf{Q}_{i,j}^{(2,1)} & \mathbf{Q}_{i,j}^{(2,2)} \end{pmatrix}$. Αν χρησιμοποιήσουμε το \mathbf{Q}_i^T στην (4.19) για να υπολογίσουμε τη (4.14c), τότε από την (4.15) θα έχουμε:

$$\mathbf{W}_{i,1}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{W}}_{i,1}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{W}_{1,j}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{1,j}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.20b)$$

$$\mathbf{W}_{i,j}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{i,j}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \text{αν } i < j \quad (4.20c)$$

όπου $\mathbf{W}_{i,i}^{(0)}$, $\widetilde{\mathbf{W}}_{i,1}^{(0)}$, $\widetilde{\mathbf{W}}_{1,j}^{(0)}$ και $\widetilde{\mathbf{W}}_{i,j}^{(0)}$ είναι μπλοκ άνω τριγωνικοί (για $i, j = 2, \dots, n$).

Η αραιή δομή των υποπινάκων της σχέσης (4.16) η οποία χρησιμοποιείται στην εύρεση της QR παραγοντοποίησης του \mathbf{W} θα πρέπει να συνυπολογιστεί. Αν

χρησιμοποιήσουμε μια σειρά από παραγοντοποιήσεις οι οποίες διατηρούν την αραιή και τριγωνική μορφή των πινάκων $\widetilde{W}_{1,1}^{(i-1)}, \dots, \widetilde{W}_{n-i,1}^{(i-1)}$ τότε τα διαγώνια μπλοκ του πίνακα $\widetilde{W}_{n-i+1,1}^{(i-1)}$ της σχέσης (4.16) μπορούν να μηδενιστούν ένα προς ένα.

Ο ορθογώνιος πίνακας P_i ορίζεται ως $P_i = \widetilde{P}_{i,1} \dots \widetilde{P}_{i,i}$, όπου $\widetilde{P}_{i,j} = \widehat{P}_{i,j}^{(1)} \dots \widehat{P}_{i,j}^{(i-j+1)}$ και $\widehat{P}_{i,j}^{(s)}$ μηδενίζει το s -οστό μπλοκ των $(n-i+j)$ μπλοκ διαγώνιων του $\widetilde{W}_{n-i+1,1}^{(i-1)}$ ($i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, i$ και $s = 1, \dots, i-j+1$) (Foschi et al., 2002).

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μια αναδρομική μέθοδο για την επίλυση του SUR-USO μοντέλου.

4.3. Αναδρομική μέθοδος για την επίλυση του SUR-USO μοντέλου

Στο άρθρο τους οι Foschi και Kontoghiorghes (2002) αναφέρουν έναν αλγόριθμο επίλυσης του SUR-USO μοντέλου ο οποίος έχει μικρότερη υπολογιστική περιπλοκότητα και χρειάζεται μικρότερη μνήμη για τη χρήση του. Ο αλγόριθμος αυτός στην ουσία χρησιμοποιεί τις παραπάνω διαδικασίες όπως τις περιγράψαμε αλλά με τους απαραίτητους μετασχηματισμούς και απλοποιήσεις προκειμένου να μπορέσουν να απλουστευθούν.

Έτσι συνεχίζοντας από τη σχέση (4.14a) ο ορθογώνιος πίνακας της, Q_i^T , όταν εφαρμοστεί από τα δεξιά του $(\bar{X} \ \bar{C})$ για να μηδενίσει το \bar{X}_i θα γεμίσει ένα μπλοκ στο κάτω μέρος του \bar{C} , η συμπλήρωση αυτή θα μηδενιστεί με την εφαρμογή ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού από το δεξιό μέλος του τροποποιημένου \bar{C} (Foschi and Kontoghiorghes, 2002). Δηλαδή, ακολουθώντας τις σχέσεις (4.14a&b) θα υπολογίσουμε τη σχέση:

$$Q_i^T \begin{pmatrix} \bar{c}_{1,1}^{(n-i)} & \mathbf{0} & \bar{c}_{1,i+1}^{(n-i)} & \dots & \bar{c}_{1,n}^{(n-i)} \\ \mathbf{0} & \bar{c}_{i,i}^{(0)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{c}_{1,1}^{(n-i)} & \widehat{c}_{1,i}^{(n-i)} & \bar{c}_{1,i+1}^{(n-i+1)} & \dots & \bar{c}_{1,n}^{(n-i+1)} \\ \widehat{c}_{i,1}^{(n-i)} & \widehat{c}_{i,i}^{(n-i)} & \bar{c}_{i,i+1}^{(n-i+1)} & \dots & \bar{c}_{i,n}^{(n-i+1)} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

και την RQD:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}}_{1,1}^{(n-i)} & \widehat{\mathbf{C}}_{1,i}^{(n-i)} \\ \widehat{\mathbf{C}}_{i,1}^{(n-i)} & \widehat{\mathbf{C}}_{i,i}^{(n-i)} \end{pmatrix} \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{C}}_{1,1}^{(n-i+1)} & \overline{\mathbf{C}}_{1,i}^{(n-i+1)} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{C}}_{i,i}^{(n-i+1)} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

όπου $\overline{\mathbf{C}}_{1,1}^{(n-i+1)}$ και $\overline{\mathbf{C}}_{i,i}^{(n-i+1)}$ είναι άνω τριγωνικοί, $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}$ είναι ορθογώνιος, $\widehat{\mathbf{C}}_{i,1}^{(n-i)}$ και $\widehat{\mathbf{C}}_{1,i}^{(n-i)}$ έχουν, αντίστοιχα, την ίδια δομή με τους $\mathbf{W}_{i,1}^{(0)}$ και $\mathbf{W}_{1,i}^{(0)}$ της σχέσης (4.20) για $i = n, n-1, \dots, 2$. Οι ορθογώνιοι πίνακες $\overline{\mathbf{Q}}^T$ και $\overline{\mathbf{P}}$ στην (4.9) ορίζονται ως τα γινόμενα των αριστερών και δεξιών μετασχηματισμών, αντίστοιχα.

Όσον αφορά τις διαστάσεις των πινάκων μπορούμε να αναφέρουμε ότι η σχέση (4.22) περιέχει 4 μπλοκ του $\overline{\mathbf{C}}$, αντί για $2i$ μπλοκ όπως η αντίστοιχη σχέση (4.16), αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο αλγόριθμός μας να είναι μικρότερης υπολογιστικής πολυπλοκότητας και να απαιτεί χαμηλότερη χρήση μνήμης.

Η παραπάνω διαδικασία μετά το $(i+1)$ βήμα ($i = n-1, n-2, \dots, 1$) μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\substack{\overline{\mathbf{v}}_1^{(n-i)}, \overline{\mathbf{v}}_*^{(n-i)} \\ \overline{\mathbf{v}}_2, \dots, \overline{\mathbf{v}}_i, \beta}} \left\| \overline{\mathbf{v}}_1^{(n-i)} \right\|^2 + \left\| \overline{\mathbf{v}}_*^{(n-i)} \right\|^2 + \sum_{j=2}^i \left\| \overline{\mathbf{v}}_j \right\|^2 \text{ που υπόκεινται στη} \\ & \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{y}}_1^{(n-i)} \\ \overline{\mathbf{y}}_2 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{y}}_i \\ \overline{\mathbf{y}}_*^{(n-i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{R}}^{(n-i)} \\ \overline{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{X}}_i \\ 0 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{C}}_{1,1}^{(n-i)} & 0 & \dots & 0 & \overline{\mathbf{C}}_{1,i:n}^{(n-i)} \\ 0 & \overline{\mathbf{C}}_{2,2}^{(0)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\mathbf{C}}_{i,i}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{\mathbf{C}}_*^{(n-i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{v}}_1^{(n-i)} \\ \overline{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{v}}_2 \\ \overline{\mathbf{v}}_*^{(n-i)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

όπου $\overline{\mathbf{C}}_*^{(n-i)}$ είναι $(\sum_{j=i+1}^n \mu_j) \times (\sum_{j=i+1}^n \mu_j)$ άνω τριγωνικός και μη-μηδενικός, $\overline{\mathbf{y}}_*^{(n-i)} = \text{vec}(\{\overline{\mathbf{y}}_{i+1}^{(n-i)}, \overline{\mathbf{y}}_{i+2}^{(n-i-1)}, \dots, \overline{\mathbf{y}}_n^{(1)}\})$ και $\overline{\mathbf{v}}_*^{(n-i)} = \text{vec}(\{\overline{\mathbf{v}}_{i+1}, \dots, \overline{\mathbf{v}}_n\})$. Έτσι, η (4.23) είναι ισοδύναμη με την

$$\arg \min_{\substack{\beta, \overline{\mathbf{v}}_1^{(n-i)} \\ \overline{\mathbf{v}}_2, \dots, \overline{\mathbf{v}}_i}} \left\| \overline{\mathbf{v}}_1^{(n-i)} \right\|^2 + \left\| \overline{\mathbf{v}}_*^{(n-i)} \right\|^2 + \sum_{j=2}^i \left\| \overline{\mathbf{v}}_j \right\|^2 \text{ που υπόκεινται στη}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1^{(n-i)} \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}^{(n-i)} \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_i \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(n-i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{C}_{2,2}^{(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{C}_{i,i}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_1^{(n-i)} \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

όπου $\hat{y}_1^{(n-i)} = \bar{y}_1^{(n-i)} - \bar{C}_{1,i+1:n}^{(n-i)} \bar{v}_*^{(n-i)}$ και $\bar{v}_*^{(n-i)} = (\bar{C}_*^{(n-i)}) \bar{y}_*^{(n-i)}$.

Όπως αναφέραμε ο αλγόριθμος είναι στην ουσία μια επαναληπτική στρατηγική επίλυσης ενός προβλήματος γενικευμένων γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων μικρότερου μεγέθους και συνεπώς απαιτεί λιγότερη υπολογιστική προσπάθεια επίλυσης της RQ παραγοντοποίησης.

Στο i – οστό βήμα ο αναδρομικός αλγόριθμος λύνει το GLLSP (4.24) υπολογίζοντας την QRD στην (4.14a),

$$Q_i^T \begin{pmatrix} \hat{y}_1^{(n-i)} \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^{(n-i)} \\ \hat{y}_i \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$Q_i^T \begin{pmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(n-i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{C}_{i,i}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{1,1}^{(n-i)} & \hat{C}_{1,i}^{(n-i)} \\ \hat{C}_{i,1}^{(n-i)} & \hat{C}_{i,i}^{(n-i)} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

και την RQD στην (4.22). Όπως και στην περίπτωση της (4.13), η GLLSP (4.24) μπορεί να απλοποιηθεί σε:

$$\arg \min_{\substack{\beta, \hat{v}_1^{(n-i+1)}, \\ \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{i-1}}} \left\| \hat{v}_1^{(n-i)} \right\|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} \left\| \bar{v}_j \right\|^2 \text{ που υπόκεινται στη}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1^{(n-i+1)} \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}^{(n-i+1)} \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_{i-1} \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \bar{C}_{1,1}^{(n-i+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{C}_{2,2}^{(0)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{C}_{i-1,i-1}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_1^{(n-i+1)} \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_{i-1} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$\text{όπου } \hat{y}_1^{(n-i+1)} = \tilde{y}_1^{(n-i)} - \bar{C}_{1,i}^{(n-i+1)} \left(\bar{C}_{i,i}^{(n-i+1)} \right)^{-1} \hat{y}_i \quad (4.28).$$

Η δομή της σχέσης (4.27) είναι ίδια με την δομή της σχέσης (4.24), αλλά μικρότερη σε μέγεθος και η GLLSP (4.13) είναι ισοδύναμη με την σχέση (4.24) για $i = n$ και $\hat{y}_1^{(n-i)} \equiv \bar{y}_1^{(0)}$. Έτσι αυτή η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί επαναληπτικά για να λύσει τη σχέση (4.13) και να μας οδηγήσει σε έναν BLUE εκτιμητή του SUR-USO μοντέλου (Foschi και Kontoghiorghes, 2002). Ο Αλγόριθμος 1 συνοψίζει τα βήματα αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας.

Αλγόριθμος 1 : Επαναληπτική εκτίμηση του SUR-USO μοντέλου.

1. Υπολογίζουμε την GQRD σχέση (4.11), $\hat{y}_1 = \hat{Q}_0^T \bar{y}_1$ και $\tilde{y}_1 = \tilde{Q}_0^T \bar{y}_1$.
2. Λύνουμε το τριγωνικό σύστημα $\tilde{W}_{11} \tilde{v}_1 = \tilde{y}_1$.
3. Υπολογίζουμε $\bar{y}_1^{(0)} = \hat{y}_1 - \tilde{W}_{11} \tilde{v}_1$
4. Για $i = n, n - 1, \dots, 2$
5. Υπολογίζουμε την UQRD σχέση (4.14a)
6. Υπολογίζουμε τις σχέσεις (4.25) και (4.26)
7. Υπολογίζουμε την RQD σχέση (4.22)
8. Υπολογίζουμε την σχέση (4.28)
9. Τέλος
10. Λύνουμε το άνω τριγωνικό σύστημα $\bar{R}^{(n-1)} \beta = \hat{y}_1^{(n-1)}$

5. Αριθμητικό Παράδειγμα

Ας δούμε το παρακάτω αριθμητικό παράδειγμα από το άρθρο του Zhang, 2010 στο οποίο τα τρίγωνα που έχουμε ως δεδομένα μοντελοποιούνται ταυτόχρονα. Τα δεδομένα έχουν τροποποιηθεί για να διαφέρουν από αυτά του παραδείγματος τα οποία προέρχονται από τη General Accident Insurance Company όπως δημοσιεύθηκαν στο NAIC, πιο συγκεκριμένα τα τρία τρίγωνα που θα χρησιμοποιηθούν εμφανίζονται στους πίνακες (5.1) ως (5.3) και αποτελούν τις αθροιστικές πληρωθείσες και υφιστάμενες ζημιές από προσωπική κάλυψη αυτοκινήτου και τις αθροιστικές πληρωθείσες ζημιές από εμπορική κάλυψη αυτοκινήτου.

Πίνακας 5.1. Αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών για ατομική κάλυψη αυτοκινήτου

AY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	201,125	309,921	366,618	405,107	427,850	440,669	448,430	451,193	453,353	453,584
2	203,541	304,213	361,677	404,182	429,932	441,948	448,333	450,813	451,523	
3	216,932	329,704	400,120	447,542	469,760	479,999	485,611	487,224		
4	217,452	330,761	404,072	443,669	462,979	472,248	476,325			
5	219,597	347,611	419,215	458,490	476,376	486,738				
6	232,760	364,416	431,975	470,780	491,725					
7	241,616	368,294	433,086	473,357						
8	234,177	351,249	424,972							
9	236,631	354,803								
10	235,288									

Πίνακας 5.2. Αθροιστικό τρίγωνο υφιστάμενων ζημιών για ατομική κάλυψη αυτοκινήτου

AY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	425,423	436,426	446,061	447,726	450,995	453,598	454,797	455,025	454,986	455,363
2	424,627	440,267	445,507	450,295	452,038	452,583	453,050	453,231	453,193	
3	460,410	488,330	487,684	486,699	489,678	489,954	490,540	491,436		
4	508,319	499,641	494,833	487,819	483,914	483,163	482,706			
5	538,065	533,311	526,181	513,322	498,154	496,802				
6	522,178	527,307	518,486	511,711	511,503					
7	504,929	504,787	504,020	506,540						
8	485,754	468,097	476,328							
9	459,081	443,507								
10	438,236									

Πίνακας 5.3. Αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών για εμπορική κάλυψη αυτοκινήτου

AY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	29,8270	54,4490	71,2050	87,3980	98,0790	105,6950	109,8530	114,7890	115,4270	116,6900
2	33,3310	59,4800	79,7890	103,3560	115,9580	123,3990	126,6380	128,4150	129,5710	
3	34,5330	56,4840	77,6910	100,4350	114,0440	124,6720	127,9730	130,3590		
4	36,1280	64,3280	94,5420	111,0630	126,1490	134,5150	137,3470			
5	39,0530	71,2200	98,6070	118,9360	131,6630	140,1800				
6	45,1360	79,7670	107,2880	123,8350	136,3260					
7	50,7640	85,1250	107,3540	127,9870						
8	48,8030	80,4710	109,4390							
9	58,5590	95,6670								
10	65,2850									

Το έτος εξέλιξης των δεδομένων μας θα θεωρήσουμε ότι είναι το δέκατο, αφού δεν μας επηρεάζει η πλήρης ή μη ανάπτυξή τους. Στο παράδειγμα θα συγκρίνουμε τα βασικά μοντέλα που αναλύσαμε στην εργασία (SCL, MCL και GMCL) και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους, τόσο μεταξύ τους όσο και με το Munich Chain Ladder μοντέλο, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί μόνο ως μέτρο σύγκρισης των paid-on-incurred αναλογιών μιας και δε λαμβάνει υπόψη του τις συσχετίσεις μεταξύ των τριγώνων. Θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο SCL για την εξέλιξη στην ουρά προκειμένου να ισχυροποιήσουμε τις εκτιμήσεις (Mack, 2003), αφού:

- ✓ Παρόλο που τα πολυμεταβλητά μοντέλα προσπαθούν να πετύχουν αποδοτική εκτίμηση λαμβάνοντας υπόψη τη δομή της συνδιασποράς των υπολοίπων, μειώνεται η αποδοτικότητα όταν η συσχέτιση μεταξύ των όρων διαταραχής (disturbance terms) είναι μικρή, κάτι που συμβαίνει συχνά στις ουρές των ετών εξέλιξης (Merz & Wüthrich, 2008b).
- ✓ Όπως αναφέρει στο άρθρο του ο Zhang, (2010), δεδομένα που βρίσκονται στην ουρά των ετών εξέλιξης είναι συχνά καλά ανεπτυγμένα, γεγονός που οδηγεί σε μικρό $\hat{\Sigma}_k$ που χρησιμοποιείται για την εφικτή εκτίμηση της σχέσης (Π2.8). Η αντιστροφή ενός τέτοιου μικρού πίνακα μερικές φορές δίνει εσφαλμένη εκτίμηση των παραμέτρων.

Με τη χρήση του μοντέλου SCL δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε έναν πίνακα διασποράς, στα τελευταία έτη εξέλιξης συνεπώς θα χρησιμοποιούμε τον εκτιμητή του πίνακα διασποράς όπως υπολογίστηκε από τον Mack (1993) για να πάρουμε έναν εκτιμητή των διαγώνιων στοιχείων. Αυτός είναι:

$$\hat{\sigma}_{mm,n-1} = \min \left(\hat{\sigma}_{mm,n-2}, \hat{\sigma}_{mm,n-3}, \frac{\hat{\sigma}_{mm,n-2}^2}{\hat{\sigma}_{mm,n-3}} \right) \quad (5.1)$$

όπου $\sigma_{mm,k}$ είναι το m -οστό διαγώνιο στοιχείο του πίνακα διασποράς συνδιασποράς Σ_k , ενώ για τα υπόλοιπα μοντέλα θα χρησιμοποιήσουμε τον εκτιμητή $\hat{\Sigma}_g$ για το πίνακα διασποράς συνδιασποράς.

Βάσει του κώδικα που τρέξαμε διαπιστώσαμε ότι για τα έτη εξέλιξης της ουράς τα GMCL και MCL μοντέλα παράγουν παραμέτρους που δεν φαίνονται λογικοί, για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το απλό μοντέλο της Chain Ladder για τα έτη εξέλιξης 7 ως 10 και τα υπόλοιπα έτη θα τα μοντελοποιήσουμε με το πολυμεταβλητό μοντέλο. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του Zhang, 201, ο χωρισμός των δεδομένων στο σημείο αυτό αντικατοπτρίζει την πεποίθηση ότι το κέρδος από την αυξανόμενη πολυπλοκότητα του μοντέλου μετά το 7^ο έτος είναι μικρό (ασήμαντο).

Θα ξεκινήσουμε με το απλό SCL μοντέλο την ανάλυσή μας και στη συνέχεια θα υπολογίζουμε τους paid-to-incurred λόγους (όπως μπορούμε να δούμε και στο Πίνακα (5.4)) καθώς επίσης θα παρουσιάσουμε και τα αντίστοιχα γραφήματα χρησιμοποιώντας τα υπόλοιπα και τις προσαρμοσμένες τιμές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1 (βλέπε εισαγωγή για τη κόκκινη γραμμή του γραφήματος, LOESS).

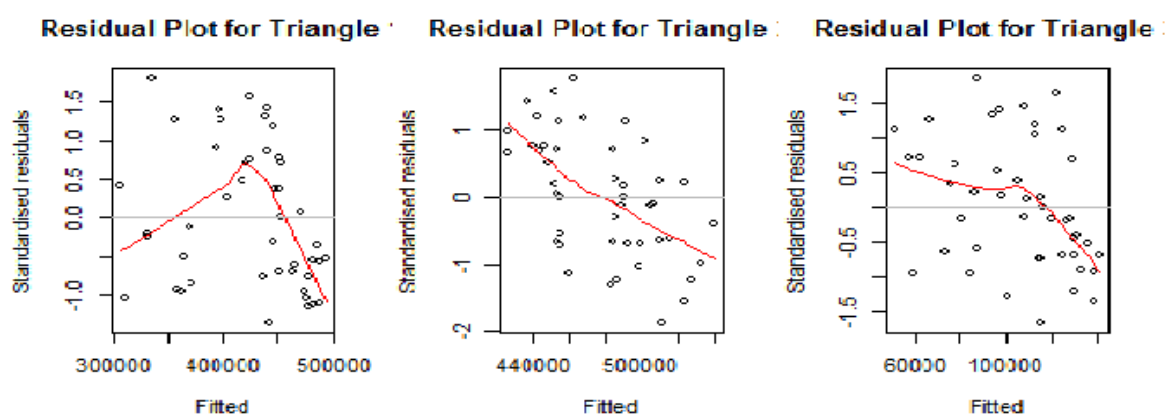
Πίνακας 5.4. Εκτιμώμενοι paid-to-incurred λόγοι (%)

AY	SCL	MCL	GMCL1	MuCL	GMCL2	GMCL3
1	99.61	99.61	99.61	99.50	99.61	99.61
2	99.60	99.60	99.60	99.55	99.60	99.60
3	99.44	99.44	99.44	100.23	99.44	99.44
4	99.37	99.37	99.37	100.23	99.37	99.37
5	99.84	99.84	99.55	100.04	99.53	99.49
6	100.28	100.27	99.69	100.03	99.64	99.60
7	102.65	102.65	101.67	99.95	99.74	99.56
8	108.56	108.57	105.47	99.81	99.87	99.56
9	116.58	116.51	109.33	99.67	99.99	99.56
10	119.16	119.07	109.89	99.69	100.01	99.55
Total	104.25	104.23	102.29	99.88	99.68	99.53

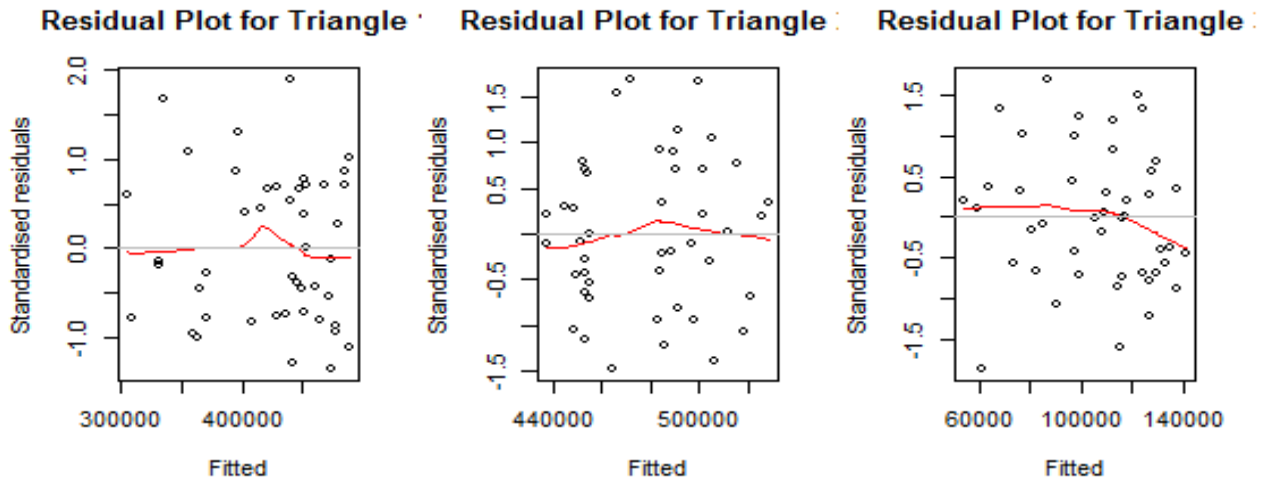
Υπάρχουν τρία προβλήματα αναφορικά με το SCL μοντέλο

- ❖ Οι συσχετίσεις μεταξύ των τριγώνων δεν λαμβάνονται υπόψη και η μέση τιμή του τετραγωνικού σφάλματος θα υποτιμηθεί εάν υπάρξουν θετικές συσχετίσεις.
- ❖ Τα διαγράμματα των τυποποιημένων υπολοίπων έναντι των προσαρμοσμένων τιμών για κάθε τρίγωνο δείχνουν μια σαφή πτωτική τάση, γεγονός που δείχνει ότι η υπόθεση σύμφωνα με το μοντέλο δεν είναι κατάλληλη (βλέπε Σχήμα 1).
- ❖ Οι paid-to-incurred λόγοι υπερβαίνουν κατά πολύ το 100% για τα έτη ατυχήματος 8 ως 10.

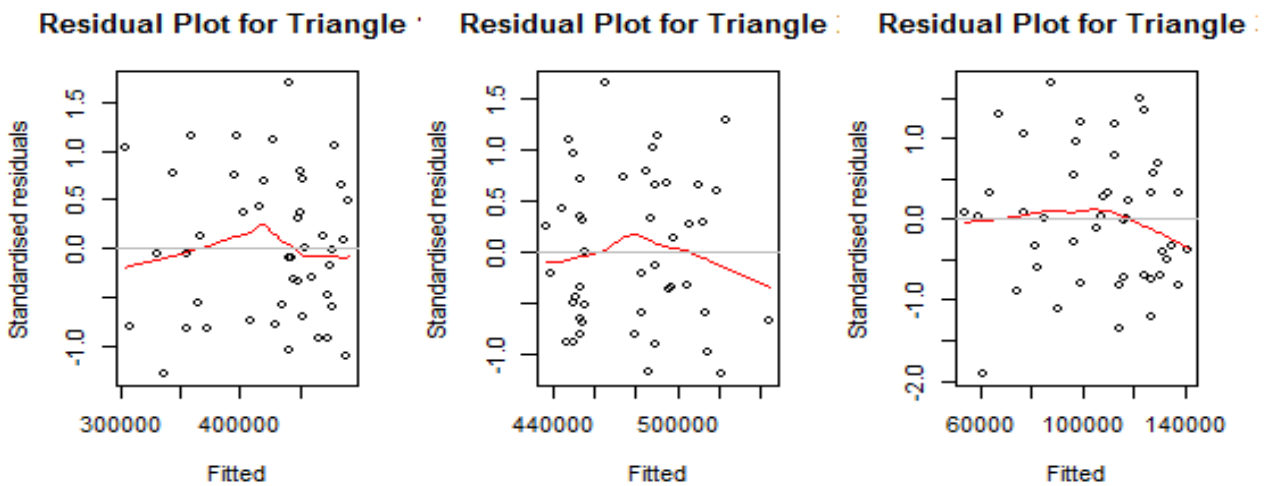
Για να λύσουμε το πρώτο πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε το MCL μοντέλο, δυστυχώς όμως δεν είναι ικανό να λύσει και τα υπόλοιπα προβλήματα, αφού η δομή του είναι πανομοιότυπη με αυτή του SCL. Μπορούμε να δούμε στο Πίνακα (5.4) ότι οι paid-to-incurred αναλογίες σύμφωνα με το MCL μοντέλο διαφέρουν για τα τελευταία έτη ατυχήματος. Τα γραφήματα των υπολοίπων είναι σχεδόν πανομοιότυπα με αυτά του SCL μοντέλου, για αυτό και επισημαίνονται μαζί του SCL μοντέλου στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Διάγραμμα υπολοίπων για τα μοντέλα SCL και MCL.



Σχήμα 2. Διάγραμμα υπολοίπων για το μοντέλο GMCL1.



Σχήμα 3. Διάγραμμα υπολοίπων για το μοντέλο GMCL2.

Σύμφωνα με τους Barnett και Zehnwirth (2000) το SCL μοντέλο καθώς επίσης και το MCL μοντέλο δεν είναι συχνά επαρκή, λόγω της έλλειψης των τεταγμένων όρων. Τα μοντέλα που παραλείπουν τους τεταγμένους όρους υπερτιμούν τις μεγάλες τιμές και να υποτιμούν τις μικρές, γι αυτό το λόγο παρατηρούμε μια πτωτική πορεία των υπολοίπων στο Σχήμα 1. Συνεπώς μια λύση για το δεύτερο πρόβλημα είναι να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο με τεταγμένες. Θα προσθέσουμε τεταγμένες στο MCL μοντέλο το οποίο πλέον θα το ονομάζουμε GMCL1, από το γράφημα των υπολοίπων στο Σχήμα 2 δεν μπορούμε να διακρίνουμε κάποιο μοτίβο και η LOESS γραμμή είναι πολύ επίπεδη για τα πρώτα δύο τρίγωνα, ενώ η μικρή καθοδική πορεία του τρίτου διαγράμματος είναι εντός του επιπέδου αποδοχής. Παρότι το GMCL1 μοντέλο φαίνεται να είναι ένα καλό μοντέλο για κάθε τρίγωνο, σύμφωνα με

το Πίνακα (5.4), διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο αυτό (GMCL1) εξακολουθεί να έχει αποκλίσεις, μολονότι διορθώνει εν μέρη τις αποκλίσεις, δεδομένου ότι οι λόγοι αυτοί είναι πλησιέστεροι στο 100% από εκείνους των SCL και MCL μοντέλων, αφού υπάρχει διαφορετική δομική σχέση μεταξύ των τριγώνων.

Το Munich Chain Ladder μπορούμε να δούμε ότι βελτιώνει ακόμα περισσότερο τους paid-to-incurred λόγους, όπως φαίνεται και στο Πίνακα (5.4), μιας και έχει σχεδιαστεί για να υπολογίζει την εξάρτηση αυτή. Όμως, όπως αναφέραμε, το μοντέλο δεν αντανakλά τις ταυτόχρονες συσχετίσεις μεταξύ των τριγώνων, συνεπώς δε θα χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιήσει τα τρία τρίγωνα ταυτόχρονα.

Θα δημιουργήσουμε το GMCL2 μοντέλο το οποίο θα είναι ένα μοντέλο με τεταγμένες και διαγώνιο μπλοκ πίνακα εξέλιξης της μορφής:

$$(\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k) = \begin{pmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ \beta_{30} & 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Οι paid-to-incurred αναλογίες του Πίνακα (5.4) φαίνεται ότι είναι κοντά στο 100% και μάλιστα είναι καλύτεροι από αυτούς του MuCL μοντέλου για τα έτη ατυχήματος 3 ως 6. Επίσης το διάγραμμα των υπολοίπων στο Σχήμα 3 δεν δείχνει μια ξεκάθαρη πορεία αν και η LOESS γραμμή στο δεύτερο διάγραμμα έχει μια καθοδική πορεία στις μεγάλες τιμές, δεν υπάρχει όμως σαφής παραβίαση των υποθέσεων του μοντέλου και συνεπώς το GMCL2 μοντέλο φαίνεται να επιλύει τα προβλήματα που αναφέραμε. Παρά την 'επιτυχία' του μοντέλου μπορούμε να αναφέρουμε ότι το GMCL2 υπερπροσαρμόζει τα δεδομένα αφού έχει πολλές παραμέτρους, γεγονός που αντιβαίνει τη βασική αρχή της απλότητας (δηλ, το απλούστερο μοντέλο με τις λιγότερες παραμέτρους και διακυμάνσεις αλλά με τη καλύτερη επεξηγηματική δύναμη). Θα πρέπει λοιπόν να αφαιρέσουμε κάποιες παραμέτρους που τυχόν είναι σε πλεονασμό για να κάνουμε πιο απλό το μοντέλο μας, θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με του παραδείγματος του Zhang, 2010 και θα διατηρήσουμε τις εκτιμώμενες παραμέτρους των β_{11} , β_{22} και β_{33} , ανεξάρτητα από τη στατιστική τους

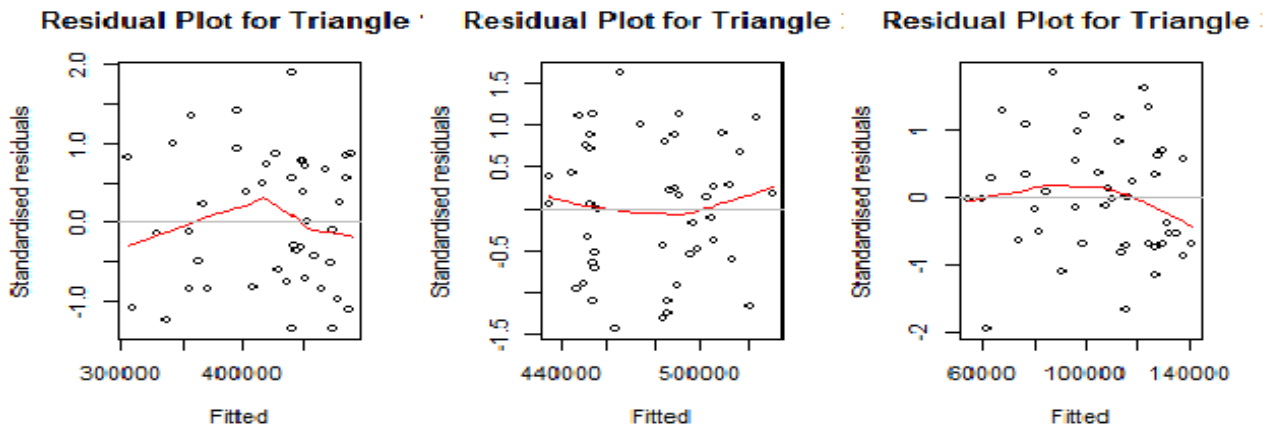
σημασία και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε μεταβλητές οι οποίες φαίνονται περιττές σταδιακά.

Θα αναφερόμαστε στο πιο «φειδωλό» μοντέλο GMCL3, το οποίο θα είναι το τελικώς επιλεγμένο. Σύμφωνα με το Πίνακα (5.4) οι *paid-to-incurred* αναλογίες συγκλίνουν, φαίνεται ξεκάθαρα ότι είναι καλύτερες από όλα τα προηγούμενα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε και τα γραφήματα των υπολοίπων (Σχήμα 4) μοιάζουν να είναι πιο αποδεκτά από των υπόλοιπων μοντέλων (εκτός του πρώτου διαγράμματος το οποίο φαίνεται να έχει μια μικρή πτωτική πορεία, η οποία όμως είναι εντός του πεδίου αποδοχής). Τέλος σύμφωνα με το Σχήμα 5, τα τα QQ διαγράμματα των τυποποιημένων υπολοίπων έναντι των ποσοστιαίων της Κανονικής κατανομής, μας δείχνουν ότι τα δεδομένα μας δεν ακολουθούν την Κανονική κατανομή, χωρίς αυτή η υπόθεση να είναι απαραίτητη για το μοντέλο μας, θα πρέπει μόνο να εξετάσουμε την υπόθεση της ασυμμετρίας στο (3.5). Μπορούμε να διακρίνουμε από το Σχήμα 6 πως δεν υπάρχει κάποια σαφής ένδειξη παραβίασης της υπόθεσης της ασυμμετρίας. Οι εκτιμώμενοι παράμετροι από το GMCL3 παρουσιάζονται στο Πίνακα (5.5).

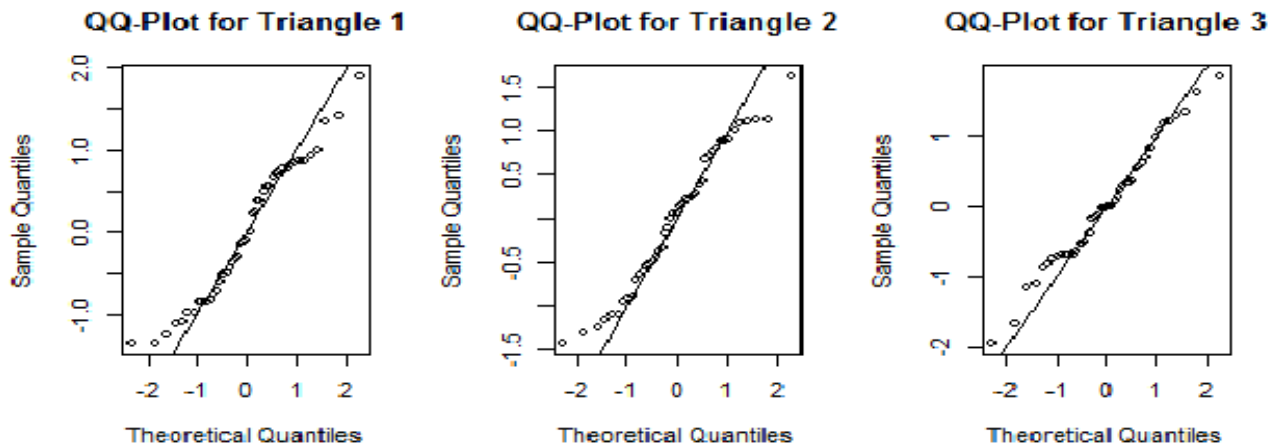
Μπορούμε να βελτιώσουμε τα μοντέλα SCL και MCL μιας και οι περισσότερες τεταγμένες παραμένουν στο μοντέλο. Οι τελευταίες τρεις γραμμές δείχνουν τις συσχετίσεις των υπολοίπων, οι οποίες ορίζονται ως:

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}}$$

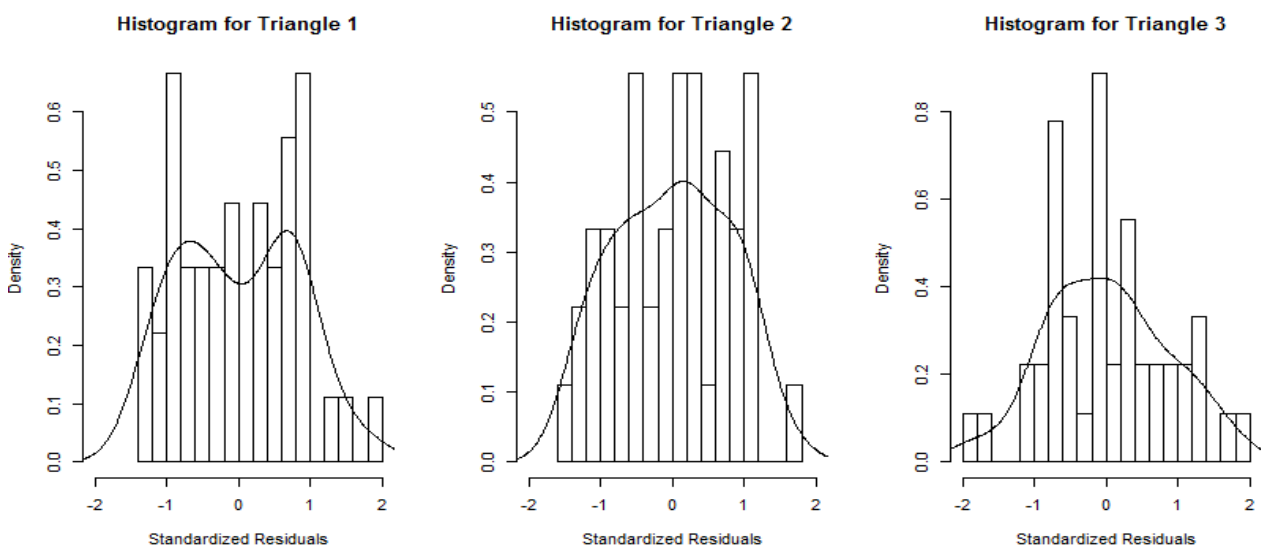
Παρατηρούμε τους ισχυρούς θετικούς συσχετισμοί μεταξύ των δυο τριγώνων προσωπικής κάλυψης αυτοκινήτου και των δυο τριγώνων πληρωμών, ενώ ο συσχετισμός μεταξύ των τριγώνων υφιστάμενων προσωπικών καλύψεων αυτοκινήτου και των πληρωθέντων εμπορικών καλύψεων αυτοκινήτου είναι δύσκολο να εξηγηθεί στις περιπτώσεις που οι θετικές και οι αρνητικές τιμές εμφανίζονται ίσες φορές.



Σχήμα 4. Διάγραμμα υπολοίπων για το μοντέλο GMCL3.



Σχήμα 5. QQ-plot για το μοντέλο GMCL3.



Σχήμα 6. Ιστόγραμμα για το μοντέλο GMCL3.

Πίνακας 5.5. Εκτιμήσεις παραμέτρων του μοντέλου GMCL3.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\beta}_{10}$	0	0	44.183	54.166	36.349	28.335	0	0	0
$\hat{\beta}_{11}$	1,275	1,198	0,991	0,925	0,944	0,951	1,005	1,003	1,005
$\hat{\beta}_{12}$	0,117	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{\beta}_{20}$	77.418	75.144	72.867	91.748	29.205	0	0	0	0
$\hat{\beta}_{21}$	0	0,115	0,374	0,886	0	1,001	0	0,999	1,008
$\hat{\beta}_{22}$	0,842	0,766	0,537	0,001	0,94	0	1,001	0	0
$\hat{\beta}_{30}$	11.217	0	20.097	6.067	0	9.176	0	0	0
$\hat{\beta}_{33}$	1,45	1,353	0,993	1,063	1,072	0,952	1,025	1,007	1,01
$\hat{\sigma}_{11}$	103,167	95,674	29,558	9,920	1,511	3,216	1,048	2,327	1,048
$\hat{\sigma}_{22}$	447,871	9,466	12,403	6,228	2,23	1,023	0,302	7,91E-07	2,07E-12
$\hat{\sigma}_{33}$	177,131	260,301	136,818	20,433	18,082	0,039	32,024	0,719	0,016
$\hat{\rho}_{12}$	0,313	0,318	0,708	0,926	0,497	0,915	0	0	0
$\hat{\rho}_{13}$	0,454	0,889	0,752	-0,093	0,281	0,073	0	0	0
$\hat{\rho}_{23}$	-0,205	0,002	0,993	-0,446	0,827	-0,289	0	0	0

Στο Πίνακα (5.6) μπορούμε να δούμε τις τελευταίες πληρωμές και τις μελλοντικές απαιτήσεις μαζί με το τελικό απόθεμα που θα χρειαστούμε για τα το χαρτοφυλάκιο, δηλαδή το άθροισμα των προσωπικών καλύψεων αυτοκινήτου που πληρώθηκαν και των εμπορικών καλύψεων αυτοκινήτου που πληρώθηκαν. Οι πληρωμές και οι υφιστάμενες προβλέψεις είναι πολύ κοντά στο GMCL3, για τις προσωπικές καλύψεις αυτοκινήτων, ωστόσο αυτό δεν ισχύει για τα SCL και MCL μοντέλα, όπου χρειάζεται περισσότερη ανάλυση για να διαλέξουμε μια τελική εκτίμηση για τη προσωπική κάλυψη αυτοκινήτου.

Πίνακας 5.6. Συνοπτικά στατιστικά στοιχεία για το χαρτοφυλάκιο.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Latest	570.274	581.094	617.583	613.672	626.918	628.051	601.344	534.411	450.470	300.573	5.524.390
Ultimate	570.274	582.742	621.781	623.821	644.543	663.792	670.455	664.981	687.504	699.637	6.429.529
IBNR	0	1.648	4.198	10.149	17.625	35.741	69.111	130.570	237.033	399.064	905.139

Παρατήρηση

Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να επεκταθεί και για το SUR-USO μοντέλο, όμως θα πρέπει η δομή των δεδομένων να είναι διαφορετική για να είναι εφικτή η χρήση του μοντέλου. Δυστυχώς υπήρξε πρόβλημα με την εισαγωγή των δεδομένων και την εντολή `systemfit`, η οποία χρησιμοποιείται για να γίνει η προσαρμογή του SUR μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα για να τρέξει η `systemfit` απαιτεί να διαβάσει τα δεδομένα μας από ένα πίνακα ο οποίος όμως είναι αδύνατο να τα περιέχει όλα αφού προσπαθούμε να προσαρμόσουμε το μοντέλο σε δύο (ή και περισσότερα) τρίγωνα. Το πρόβλημα ήταν ότι κάθε τιμή των τριγώνων αντιστοιχεί σε ένα σημείο συντεταγμένων (π.χ., (0,0), (4,9), και ούτω κάθε εξής), όμως κάθε τρίγωνο έχει τις δικές του τιμές σε αυτές τις συντεταγμένες, δηλαδή για κάθε τρίγωνο στη συντεταγμένη (0,0) αντιστοιχεί και άλλη τιμή, έτσι ο πίνακας των δεδομένων που απαιτείται για την `systemfit` θα είχε δυο τιμές για την ίδια συντεταγμένη με αποτέλεσμα να μην γίνει σωστά η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα.

(Θα παραθέσουμε ένα κομμάτι από το πίνακα για να γίνει πιο κατανοητό:

```
origin dev cal value
0-0  0 0 0 101125
0-1  0 1 1 209921
0-2  0 2 2 266618
.....
0-0  0 0 0 19827
0-1  0 1 1 44449
0-2  0 2 2 61205 ).
```

Δυστυχώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους που περιγράφηκαν στα κεφάλαια 2 και 3 για να υπολογίσουμε τα αποθέματα αν έχουμε άνισο αριθμό παρατηρήσεων στα έτη εξέλιξης και έτη ατυχήματος, για το λόγο αυτό θα παραλείψουμε την σύγκριση των μοντέλων.

6. Συμπεράσματα

Βάσει των μεθόδων που εξετάσαμε και αναλύσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια μεγάλη γκάμα μεθόδων που μπορεί να διαλέξει κανείς για να μοντελοποιήσει και να υπολογίσει τα αποθέματα που χρειάζεται μια ασφαλιστική επιχείρηση.

Έτσι, σύμφωνα και με τα παραπάνω, ένας αναλογιστής μπορεί να χρησιμοποιήσει την απλή μέθοδο της Chain Ladder προκειμένου να έχει μια πρώτη εικόνα για τα δεδομένα του και στη συνέχεια να επιλέξει ποια από τα παραπάνω μοντέλα θα ταιριάζανε καλύτερα στην ανάλυση που θα ήθελε να κάνει. Καμία μέθοδος δε μπορεί να εξαιρεθεί ή να θεωρηθεί ακατάλληλη, αφού κάθε μια έχει τη δική της χρήση και τα δικά της πλεονεκτήματα. Η σωστή επιλογή της μεθόδου έχει να κάνει με την εμπειρία του εκάστοτε χρήστη καθώς και με τον αριθμό των τριγώνων που έχει στη διάθεσή του. Μπορεί όπως είδαμε και στο παράδειγμά μας το μοντέλο με τεταγμένες να προσαρμόζει καλύτερα τα δεδομένα και να δίνει καλύτερες προβλέψεις όμως δεν είναι υποχρεωτική η χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου, αφού εξαρτάται από τον όγκο των δεδομένων. Σε περιπτώσεις όπου τα δεδομένα μπορεί να είναι λιγότερα ένα μοντέλο όπως αυτό με τις τεταγμένες μπορεί να μην είναι το κατάλληλο. Δεν είναι αναγκαίο να επιλεγούν ή να χρησιμοποιηθούν όλες οι μέθοδοι, αφού όπως είδαμε η μία συμπληρώνει την άλλη ή την διορθώνει.

Καθώς οι ασφαλιστικές εταιρίες εξελίσσονται νέες ανάγκες δημιουργούνται και νέες μέθοδοι απαιτούνται. Μέθοδοι όπως η SUR-USO η οποία μπορεί να εξελιχθεί σε βασική μέθοδο αποθεματοποίησης αφού δεν απαιτεί τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων για τον υπολογισμό των αποθεμάτων, γεγονός που μπορεί να διευκολύνει πολύ μελλοντικές προβλέψεις χωρίς όμως να υπάρχουν επαρκή δεδομένα, γεγονός το οποίο συναντάται αρκετά στις ασφαλιστικές εταιρίες και κυρίως στις νεοσύστατες εταιρίες. Αν και θεωρητική η μέθοδος αυτή μπορεί να εξελιχθεί περαιτέρω μιας και αποτελεί ένα νέο μοντέλο στο χώρο των ασφαλίσεων.

7. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε, για τα θεωρήματα του Παραρτήματος 1, \mathcal{H} να είναι μια υπό άλγεβρα του \mathcal{F} (Pröhl and Schmidt, 2005).

Θεώρημα Π1.1

Θεωρούμε τα τυχαία διανύσματα \mathbf{X}, \mathbf{Z} και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα \mathcal{H} μετρήσιμο τυχαίο διάνυσμα \mathbf{H} και \mathcal{H} μετρήσιμοι τυχαίοι πίνακες \mathbf{C} και \mathbf{E} τέτοιοι ώστε: $E^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\mathbf{H}$ και $E^{\mathcal{H}}(\mathbf{Z}) = \mathbf{E}\mathbf{H}$

Έστω $\boldsymbol{\Psi} := \text{cov}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ και $\boldsymbol{\Sigma} := \text{var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{Z})$ να είναι σχεδόν πάντα αναστρέψιμος. Τότε το τυχαίο διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{Y}} := (\boldsymbol{\Psi} + (\mathbf{C} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})(\mathbf{E}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}')\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z}$$

ικανοποιεί τη σχέση $E^{\mathcal{H}}(\hat{\mathbf{Y}}) = E^{\mathcal{H}}(\mathbf{X})$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το \mathcal{H} - υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{H}}((\mathbf{X} - \mathbf{Y})'(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))$$

για όλα τα τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} που έχουν τις ίδιες διαστάσεις με το \mathbf{X} και ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Z}$ με έναν \mathcal{H} μετρήσιμο τυχαίο πίνακα \mathbf{A} τέτοιο ώστε $\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{C}$.

Επιπλέον, αν $\boldsymbol{\Delta}$ είναι ένας \mathcal{H} μετρήσιμος τυχαίος πίνακας κατάλληλων διαστάσεων, τότε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{Y}}$ ικανοποιεί τη σχέση $E^{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{Y}}) = E^{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X})$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το \mathcal{H} - υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{H}}((\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X} - \mathbf{Y})'(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X} - \mathbf{Y}))$$

για όλα τα τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} που έχουν τις ίδιες διαστάσεις με το \mathbf{X} και ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Z}$ με έναν \mathcal{H} μετρήσιμο τυχαίο πίνακα \mathbf{A} τέτοιο ώστε $\mathbf{A}\mathbf{E} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{C}$.

Απόδειξη

Ο τυχαίος πίνακας

$$\widehat{\mathbf{A}} := (\boldsymbol{\Psi} + (\mathbf{C} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})(\mathbf{E}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}')\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$$

είναι \mathcal{H} μετρήσιμος και ικανοποιεί τη σχέση $\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{E} = \mathbf{C}$. Για κάθε \mathcal{H} μετρήσιμο τυχαίο πίνακα \mathbf{A} που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{C}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{H}}(\mathbf{AZ}) &= \mathbf{A}E^{\mathcal{H}}(\mathbf{Z}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{H} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{H} \\ &= E^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}, \mathbf{AZ} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}) &= \text{Cov}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}, (\mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}})\mathbf{Z}) \\ &= \text{Cov}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}, \mathbf{Z})(\mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}}) \\ &= (\boldsymbol{\Psi} - \widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}}) \\ &= -(\mathbf{C} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})(\mathbf{E}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}})' \\ &= -((\mathbf{C} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})(\mathbf{E}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{E}))' = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Που δίνει

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \mathbf{AZ}) &= \text{Var}^{\mathcal{H}}((\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}) - (\mathbf{AZ} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z})) \\ &= \text{Var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}) + \text{Var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{AZ} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

και έτσι

$$\begin{aligned} \text{Var}^{\mathcal{H}}((\mathbf{X} - \mathbf{AZ})'(\mathbf{X} - \mathbf{AZ})) &= \text{trace}\left(E^{\mathcal{H}}((\mathbf{X} - \mathbf{AZ})(\mathbf{X} - \mathbf{AZ})')\right) \\ &= \text{trace}\left(\text{Var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \mathbf{AZ})\right) \\ &= \text{trace}\left(\text{Var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z})\right) + \text{trace}\left(\text{Var}^{\mathcal{H}}(\mathbf{AZ} - \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{Z})\right) \end{aligned}$$

Αφού $trace\left(Var^{\mathcal{H}}(\mathbf{AZ} - \widehat{\mathbf{AZ}})\right) \geq 0$, ισχύει ο πρώτος ισχυρισμός.

Ο τελευταίος ισχυρισμός έπεται από τις παραπάνω αποδείξεις και από τις σχέσεις $E^{\mathcal{H}}(\Delta\mathbf{X}) = \Delta\mathbf{CH}$ και $Cov^{\mathcal{H}}(\Delta\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \Delta\mathbf{\Psi}$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να εξειδικευτεί ως:

Θεώρημα Π1.2

Έστω $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_r$ να είναι τυχαία διανύσματα και έστω ότι υπάρχει ένα \mathcal{H} -μετρήσιμο τυχαίο διάνυσμα που ικανοποιεί τη σχέση $E^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{H}$ για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, r\}$. Υποθέτουμε ακόμα ότι $Cov^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \mathbf{0}$ για κάθε $i, j \in \{0, 1, \dots, r\}$, έτσι ώστε για $i \neq j$ και για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, $\Sigma_i := var^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_i)$ να είναι σχεδόν σίγουρα αναστρέψιμος. Τότε το τυχαίο διάνυσμα:

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \left(\sum_{i=1}^r \Sigma_i^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=1}^r \Sigma_i^{-1} \mathbf{X}_i$$

ικανοποιεί την σχέση $E^{\mathcal{H}}(\widehat{\mathbf{Y}}) = E^{\mathcal{H}}(\mathbf{X}_0)$ και είναι το μοναδικό τυχαίο διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το \mathcal{H} - υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{H}}((\mathbf{X}_0 - \mathbf{Y})'(\mathbf{X}_0 - \mathbf{Y}))$$

για όλα τα τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} έχοντας τις ίδιες διαστάσεις όπως το \mathbf{X}_0 και ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i$ με \mathcal{H} -μετρήσιμους τυχαίους πίνακες $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ τέτοιους ώστε $\sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i = \mathbf{I}$. Επιπλέον αν Δ είναι ένας \mathcal{H} -μετρήσιμος τυχαίος πίνακας κατάλληλων διαστάσεων, τότε το τυχαίο διάνυσμα $\Delta\widehat{\mathbf{Y}}$ ικανοποιεί την σχέση $E^{\mathcal{H}}(\Delta\widehat{\mathbf{Y}}) = E^{\mathcal{H}}(\Delta\mathbf{X}_0)$ και είναι το μοναδικό διάνυσμα το οποίο ελαχιστοποιεί το \mathcal{H} - υποθετικό σφάλμα πρόβλεψης

$$E^{\mathcal{H}}((\Delta\mathbf{X}_0 - \mathbf{Y})'(\Delta\mathbf{X}_0 - \mathbf{Y}))$$

για όλα τα τυχαία διανύσματα \mathbf{Y} που έχουν τις ίδιες διαστάσεις με το \mathbf{X}_0 και ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i$ με \mathcal{H} -μετρήσιμους τυχαίους πίνακες $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ τέτοιους ώστε $\sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i = \mathbf{\Delta}$ (Pröhl and Schmidt, 2005).

Θεώρημα Π1.3

Έστω $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ είναι δισδιάστατοι συμμετρικοί πίνακες (Pröhl and Schmidt, 2005).

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Για κάθε $i \in \{1, \dots, r\}$, υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας \mathbf{D}_i τέτοιος ώστε

$$\mathbf{A}_i = \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{A}_j \right) \mathbf{D}_i$$

2. Οι πίνακες $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ είναι διαγώνιοι ή ανάλογοι μεταξύ τους.

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει το (1). Τότε ο πίνακας $\sum_{j=1}^r \mathbf{A}_j$ είναι είτε διαγώνιος ή όχι.

- Αν $\sum_{j=1}^r \mathbf{A}_j$ είναι διαγώνιος, τότε $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ είναι διαγώνιοι.
- Αν $\sum_{j=1}^r \mathbf{A}_j$ δεν είναι διαγώνιος, τότε η συμμετρία των $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ αποδίδει την ύπαρξη των $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, $\mathbf{D}_i = d_i \mathbf{I}$ και ως εκ τούτου

$$\mathbf{A}_i = d_i \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{A}_j \right)$$

για όλα τα $i \in \{1, \dots, r\}$, που σημαίνει ότι τα $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ είναι ανάλογα μεταξύ τους. Έτσι το (1) συνεπάγεται το (2). Η αντίστροφη συνέπεια είναι προφανής.

8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Σύμφωνα με το άρθρο του Zhang, 2010, οι εξαρτημένες μεταβλητές $Y_{i,k+1}^{(m)}$ του βασικού μας μοντέλου (3.1) δεν έχουν χαρακτήρα επεξηγηματικής μεταβλητής στις υπόλοιπες εξισώσεις και οι επιμέρους εξισώσεις για κάθε τρίγωνο συνδέονται στατιστικά με μια μη μηδενική συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων (Zhang, 2010), γεγονός που δικαιολογεί την χρήση των φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων (SUR) για την εκτίμηση των παραμέτρων. Στο παράρτημα που ακολουθεί να δούμε τη σχέση μεταξύ των εκτιμητών OLS, GLS και FGLS καθώς επίσης και πώς συνδέονται με το πολυμεταβλητό μας μοντέλο. Οι παρακάτω σχέσεις θα ισχύουν για όλες τις περιόδους εξέλιξης, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε την εξέλιξη από το k στο $k + 1$ ως παράδειγμα.

OLS, GLS και FGLS εκτιμήσεις.

Το μοντέλο (3.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\leq, k+1}^{(1)} \\ \mathbf{Y}_{\leq, k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{\leq, k+1}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} \quad (\Pi 2.1)$$

όπου $\mathbf{Y}_{\leq, k+1}^{(m)}$ είναι ένα $(n - k) \times 1$ διάνυσμα όλων των παρατηρούμενων ζημιών στο έτος εξέλιξης $k + 1$ του m -οστού τριγώνου. $\mathbf{X}_n = (\mathbf{Y}_{<, k}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}_{<, k}^{(N)})'$ είναι ένας $(n - k) \times N$ πίνακας των πρώτων $(n - k)$ παρατηρήσεων του έτους εξέλιξης k για κάθε τρίγωνο και ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \dots = \mathbf{X}_N$, $\boldsymbol{\beta}_n = (\beta_{n1}, \dots, \beta_{nN})'$ είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα των παραμέτρων εξέλιξης της n -οστής εξίσωσης, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ είναι ένα $(I - k) \times 1$ διάνυσμα σφαλμάτων της n -οστής εξίσωσης.

Το μοντέλο της (Π2.1) μπορεί εξίσου να γραφεί ως:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\Pi 2.2)$$

Με $\mathbf{Y} = \text{vec}(\mathbf{Y}_{\leq, k+1}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}_{\leq, k+1}^{(N)})$ να είναι ένα $N(n-k) \times 1$ διάνυσμα μεταβλητών απόκρισης, $\mathbf{X} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{X}_n$ είναι ένας $N(n-k) \times N^2$ μπλοκ διαγώνιος πίνακας με $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N$ κατά μήκος της διαγωνίου, (\otimes είναι το σύμβολο του γινομένου Kronecker για πίνακες). Με $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}(\beta_1, \dots, \beta_N)$ συμβολίζουμε το $NN \times 1$ διάνυσμα των παραμέτρων εξέλιξης και με $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{vec}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ συμβολίζουμε το $N(n-k) \times 1$ διάνυσμα των σφαλμάτων. Ακόμα $\mathbf{W} = \text{vec}(\mathbf{Y}_{<, k}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}_{<, k}^{(N)})$ να είναι ένα $N(n-k) \times 1$ διάνυσμα των πρώτων $(n-k)$ παρατηρούμενων ζημιών του έτους εξέλιξης k . Από τις υποθέσεις (3.3) και (3.4) έχουμε ότι:

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = D(\mathbf{W})^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\Sigma}_k \otimes \mathbf{I})D(\mathbf{W})^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Π2.3})$$

όπου \mathbf{I} είναι ο ταυτοτικός $(n-k) \times (n-k)$ πίνακας.

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της σχέσης (Π2.2) με $D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}$ έχουμε:

$$D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y} = D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}$$

δηλαδή $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (\text{Π2.4})$

όπου $\mathbf{Y}^* = D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}^* = D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* = D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\varepsilon}$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (Π2.3) έχουμε:

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon})D(\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{\Sigma}_k \otimes \mathbf{I}) \quad (\text{Π2.5})$$

Η παραπάνω σχέση διασποράς-συνδιασποράς θεωρείται συνεπής σύμφωνα με την τυπική SUR υπόθεση του Zellner, (1962), έτσι θα χρησιμοποιούμε τη σχέση (Π2.4) ως μοντέλο. Αν εφαρμόσουμε γενικευμένα ελάχιστα τετράγωνα στο μοντέλο μας θα πάρουμε τον βέλτιστο γραμμικό αμερόληπτο εκτιμητή (BLUE) του $\boldsymbol{\beta}$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_G = (\mathbf{X}^{*'}(\boldsymbol{\Sigma}_k \otimes \mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*'}(\boldsymbol{\Sigma}_k \otimes \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}^* \quad (\text{Π2.6})$$

και ο πίνακας διασποράς – συνδιασποράς του εκτιμητή θα είναι

$$V(\hat{\beta}_G) = (\mathbf{X}^{*'} (\boldsymbol{\Sigma}_k \otimes \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^*)^{-1} \quad (\text{Π2.7})$$

Οι παραπάνω σχέσεις βασίζονται σε ένα γνωστό πίνακα διασποράς - συνδιασποράς $\boldsymbol{\Sigma}_k$, εάν ο πίνακας αυτός δεν είναι γνωστός, θα πρέπει τον αντικαταστήσουμε με μια εκτίμησή του, έστω $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k$, μπορούμε πλέον να πάρουμε τον εφικτό γενικευμένο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (FGLS) του β :

$$\hat{\beta}_{FG} = (\mathbf{X}^{*'} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k \otimes \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*'} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k \otimes \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Y}^* \quad (\text{Π2.8})$$

Ο $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_k$ δεν είναι ο μοναδικός εκτιμητής που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένας άλλος εκτιμητής που προτιμάται, ο οποίος όμως είναι συνεπής αλλά όχι αμερόληπτος εκτιμητής, είναι ο:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 = \frac{1}{n-k} (\hat{\varepsilon}_1^*, \hat{\varepsilon}_2^*, \dots, \hat{\varepsilon}_N^*)' (\hat{\varepsilon}_1^*, \hat{\varepsilon}_2^*, \dots, \hat{\varepsilon}_N^*) \quad (\text{Π2.9})$$

όπου $\hat{\varepsilon}_m^*$ είναι ένα $(n-k) \times 1$ διάνυσμα σφαλμάτων τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή απλών ελαχίστων τετραγώνων (OLS) στη n -οστή εξίσωση παλινδρόμησης της (Π2.4).

Ως μια άλλη επιλογή για το $\boldsymbol{\Sigma}_k$ προτείνεται, από τους Zellner και Huang (1962) μια αμερόληπτη εκτιμήτρια να είναι η $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_u$, της οποίας τα στοιχεία ικανοποιούν τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_{mp} = \begin{cases} \frac{\hat{\varepsilon}_m^* \hat{\varepsilon}_m^*}{(n-k-K_m)} & \forall m = p \\ \frac{\hat{\varepsilon}_m^* \hat{\varepsilon}_p^*}{n-k-K_m-K_p + \text{tr} \left[(\mathbf{X}_m^{*'} \mathbf{X}_m^*)^{-1} \mathbf{X}_m^{*'} \mathbf{X}_p^* (\mathbf{X}_p^{*'} \mathbf{X}_p^*)^{-1} \mathbf{X}_p^{*'} \mathbf{X}_m^* \right]} & \forall m \neq p \end{cases} \quad (\text{Π2.10})$$

όπου K_m είναι ο αριθμός των παλινδρομήσεων στην m -οστή εξίσωση και tr (trace) το ίχνος του πίνακα. Μια άλλη εκτιμήτρια του πίνακα Σ_k είναι η $\hat{\Sigma}_g$ της οποίας τα στοιχεία ικανοποιούν τη παρακάτω σχέση και είναι αμερόληπτη μόνο αν $m = p$.

$$\hat{\sigma}_{mp} = \frac{\hat{\varepsilon}_m^* \hat{\varepsilon}_p^*}{[(n-k-K_m)(n-k-K_p)]^{1/2}} \quad (Π2.11)$$

Οι εκτιμητές $\hat{\beta}_G$ και $\hat{\beta}_{FG}$ λαμβάνουν υπ' όψιν την συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων, ωστόσο, εάν αγνοήσουμε τη συσχέτιση αυτή τότε μπορούμε να πάρουμε τον OLS εκτιμητή:

$$\hat{\beta}_O = (\mathbf{X}^* \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^* \mathbf{Y}^* \quad (Π2.12)$$

Επαναληπτικοί Εκτιμητές (IFGLS)

Αναφέραμε πως αν ο πίνακας Σ_k είναι άγνωστος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν εκτιμητή στην FGLS εκτίμηση, η χρήση του οποίου θα αυξήσει τη μεταβλητότητα του $\hat{\beta}_{FG}$, όπως αναφέρει στο άρθρο του και ο Zhang, 2010 με αποτέλεσμα να γεννηθεί το ερώτημα αν υπάρχει δυνατότητα να βελτιωθεί η επίδοση του $\hat{\beta}_{FG}$ και να κατασκευαστεί ένας πιο αποδοτικός εκτιμητής.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία για την επιλογή ενός εκτιμητή $\hat{\Sigma}_k$. Στην πραγματικότητα η εκτίμηση του $\hat{\beta}_{FG}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια εκτίμηση δύο σταδίων του Aitken, όπως περιέγραψε ο Zellner, (1962).

Τα βήματα της διαδικασίας είναι:

1. Αντικαθιστούμε τον πίνακα Σ_k με τον ταυτοτικό πίνακα I για να πάρουμε έναν (OLS) εκτιμητή του β .
2. Έπειτα εκτιμούμε τον Σ_k από τα υπόλοιπα (residuals) που είναι βασισμένα στον (OLS) εκτιμητή από το διάνυσμα των συντελεστών παλινδρόμησης β .
3. Ο νέος αυτός εκτιμητής του Σ_k χρησιμοποιείται στην σχέση (Π2.6) για να μας δώσει τον FGLS εκτιμητή.

Συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή και πέρα των δύο βημάτων, δηλαδή, όπως και στο δεύτερο βήμα θα χρησιμοποιήσουμε τα υπόλοιπα με βάση τον FGLS εκτιμητή για να πάρουμε μια άλλη εκτίμηση του Σ_k η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην σχέση (Π2.6) για να μας δώσει έναν διαφορετικό εκτιμητή του β . Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή οδηγούμαστε σε έναν Εφικτό Επαναληπτικό Εκτιμητή Γενικευμένων Τετραγώνων (Iterative Feasible Generalized Squares – IFGLS – estimator) του β .

Έστω ο εκτιμητής της l δοκιμής, $\hat{\beta}_l^{(l)}$. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι

$$\hat{\beta}_l^{(l)} = \left(\mathbf{X}^{*'} \left(\hat{\Sigma}_k^{(l)} \otimes \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^* \right)^{-1} \mathbf{X}^{*'} \left(\hat{\Sigma}_k^{(l)} \otimes \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{Y}^* \quad (\text{Π2.13})$$

όπου $\hat{\Sigma}_k^{(l)}$ είναι ένας συνεπής εκτιμητής του Σ_k δημιουργημένος από τα υπόλοιπα του $\hat{\beta}_l^{(l-1)}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο OLS εκτιμητής που υπολογίζεται με βάση τον $\hat{\Sigma}_k^{(0)} = \mathbf{I}$ είναι ο $\hat{\beta}_l^{(0)}$, δηλαδή ο εφικτός επαναληπτικός εκτιμητής γενικευμένων τετραγώνων στο βήμα μηδέν και ως εκ τούτου, ο FGLS εκτιμητής θα είναι ο εφικτός επαναληπτικός εκτιμητής γενικευμένων τετραγώνων στο βήμα ένα $\hat{\beta}_l^{(1)}$, βασισμένος στις σχέσεις (Π2.9), (Π2.10), και (Π2.11) (Zhang, 2010).

Σύγκριση αποδοτικότητας μεταξύ εκτιμητών

Ας δούμε ποίος από τους εκτιμητές που αναφέραμε είναι πιο αποδοτικός σε σχέση με τον άλλο. Θα μελετήσουμε τους τρεις εκτιμητές $\hat{\beta}_O, \hat{\beta}_G, \hat{\beta}_{FG}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Aitken, όταν ο Σ_k είναι γνωστός τότε ο καλύτερος γραμμικός αμερόληπτος εκτιμητής είναι ο GLS: $\hat{\beta}_G$, η διαφορά του με τον OLS σε όρους αποδοτικότητας είναι:

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_O) - V(\hat{\beta}_G) &= (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*'} (\Sigma_k \otimes \mathbf{I}) \mathbf{X}^* (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^*)^{-1} - (\mathbf{X}^{*'} (\Sigma_k \otimes \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^*)^{-1} \\ &= \mathbf{P} (\Sigma_k \otimes \mathbf{I}) \mathbf{P}' \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{P} = (\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*'} - (\mathbf{X}^{*'} (\Sigma_k \otimes \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^{*'} (\Sigma_k \otimes \mathbf{I})^{-1}$ το οποίο ικανοποιεί την σχέση $\mathbf{P} \mathbf{X}^* = \mathbf{0}$.

Αφού ο πίνακας διασποράς ($\Sigma_k \otimes I$) είναι θετικά ορισμένος, τότε ο πίνακας $P(\Sigma_k \otimes I)P'$ θα είναι τουλάχιστον θετικά ημι-ορισμένος και έτσι ο $\hat{\beta}_G$ είναι τουλάχιστον όσο αποδοτικός όσο και ο $\hat{\beta}_O$, θα είναι όμως το ίδιο αποδοτικοί όταν ο Σ_k είναι διαγώνιος, (Zhang, 2010).

Η σύγκριση των εκτιμητών FGLS και OLS δεν είναι εύκολη, διότι η αν χρησιμοποιήσουμε έναν εκτιμητή για τον πίνακα διασποράς τότε θα αυξηθεί η μεταβλητότητα του FGLS εκτιμητή με συνέπεια να μην είναι καλύτερος από τον OLS εκτιμητή, χωρίς όμως να γνωρίζουμε ποία είναι η μεταξύ τους σχέση. Στο άρθρο του ο Zhang, 2010, αναφέρει πως ο Zellner (1963) θεώρησε μια ειδική περίπτωση για ένα μοντέλο δύο εξισώσεων όπου οι όροι των σφαλμάτων είναι κανονικά κατανομημένοι και οι παλινδρομήσεις από διαφορετικές εξισώσεις είναι ορθογώνιες η μία με την άλλη, δηλαδή $X_1^* X_2^* = \mathbf{0}$, Σε αυτή την ειδική περίπτωση ο Zellner (1963) έδειξε ότι για ένα δείγμα με αριθμό παρατηρήσεων μικρότερο ή ίσο του 20 και την απόλυτη τιμή της πραγματικής ταυτόχρονης συσχέτισης $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \leq 0,3$, ο $\hat{\beta}_{FG}$ εκτιμητής είναι στη πραγματικότητα λιγότερο αποδοτικός από τον $\hat{\beta}_O$. Επιπλέον, μερικά ασυμπτωτικά προσεγγιστικά αποτελέσματα δηλώνουν ότι η αύξηση της αποδοτικότητας θα μειωθεί λόγω των:

1. Μικρή συσχέτιση μεταξύ των όρων διαταραχής (disturbance terms).
2. Υψηλή συσχέτιση μεταξύ παλινδρομήσεων σε διαφορετικές εξισώσεις.
3. Υψηλή συσχέτιση μεταξύ παλινδρομήσεων μέσα στην εξίσωση.

Έτσι αν τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα εξακολουθούν να ισχύουν σε πεπερασμένα δείγματα, αναμένουμε ότι ο απαιτούμενος συσχετισμός θα πρέπει να είναι ακόμα μεγαλύτερος από 0,3 για να κερδίσουμε σε αποδοτικότητα χρησιμοποιώντας τον $\hat{\beta}_{FG}$. Έχουμε λοιπόν σύμφωνα με τον Zhang, (2010) ότι, στη περίπτωση των πολλαπλών συσχετισμένων τριγώνων, παρόλο που, εύλογα, αναμένεται ότι περισσότερο αποδοτικές εκτιμήσεις θα προκύψουν απ την από κοινού εξέλιξη των τριγώνων, λαμβάνοντας υπόψη τη συσχέτιση, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι το αντίστροφο θα μπορούσε να συμβεί, λόγω της χρήσης ενός εκτιμώμενου Σ_k .

Ο επαναληπτικός εκτιμητής μέσω της διαδικασίας που αναφέραμε στοχεύει στη βελτίωση της αποδοτικότητας του FGLS εκτιμητή, χωρίς όμως να μπορεί να αποφύγει την πιθανή απώλεια της. Οι Srivastava και Giles (1987), αναφέρει ο Zhang (2010) στο άρθρο του, έδειξαν ότι οι επαναλήψεις μπορεί αν μην είναι πάντοτε χρήσιμες διότι οι FGLS και IFGLS έχουν την ίδια διακύμανση για μεγάλα δείγματα, αλλά για μικρού μεγέθους δείγματα, ο IFGLS θα μπορούσε να οδηγήσει σε απώλεια αποδοτικότητας. Ο IFGLS εκτιμητής ευνοείται σε χαμηλές συσχετίσεις μεταξύ των παλινδρομήσεων στις εξισώσεις και υψηλές συσχετίσεις μεταξύ των όρων σφάλματος.

Ας δούμε εν συντομία μια σύγκριση ανάμεσα στους OLS και FGLS εκτιμητές η οποία μπορεί επίσης να εφαρμοστεί στα SCL και MCL μοντέλα.

- Αμερόληψία: Ο OLS εκτιμητής είναι αμερόληπτος. Δηλαδή, (χρησιμοποιώντας την σχέση (Π2.12): $\hat{\beta}_O = (\mathbf{X}^* \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^* \mathbf{Y}^*$)

$$E(\hat{\beta}_O - \beta | \mathcal{D}_{.,k}) = (\mathbf{X}^* \mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{X}^* E(\boldsymbol{\varepsilon}^* | \mathcal{D}_{.,k}) = \mathbf{0}$$

Ο FGLS εκτιμητής είναι αμερόληπτος υπό την προϋπόθεση ότι οι όροι σφάλματος ακολουθούν συμμετρική κατανομή (Kakwani, 1967).

- Εκτίμηση του $\boldsymbol{\Sigma}_k$: Δεν είναι αναγκαία η εκτίμηση του $\boldsymbol{\Sigma}_k$ για να βρεθούν οι συντελεστές παλινδρόμησης, για τον OLS εκτιμητή αφού αγνοεί την από κοινού λειτουργία του συστήματος των εξισώσεων, όπως και το απλό μοντέλο της Chain Ladder. Ο IFGLS χρειάζεται μια εκτίμηση του $\boldsymbol{\Sigma}_k$, η οποία μπορεί να είναι ο αμερόληπτος εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_u$ που χρησιμοποιούν οι Merz και Wuthrich (2008b) ο οποίος όμως δεν είναι απαραίτητα θετικά ημι-ορισμένος, είτε ο εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_o$ ο οποίος τείνει να υποτιμάει τη παράμετρο σε μικρά δείγματα, όπως δεδομένα τριγώνων απώλειας. ή ο θετικά ημι-ορισμένος εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_g$ ο οποίος διορθώνει εν μέρει τους βαθμούς ελευθερίας και συνήθως προτιμάται.

- Αποδοτικότητα: Η αποδοτικότητα του OLS εκτιμητή μπορεί να βελτιωθεί με τη χρήση του FGLS εκτιμητή, τουλάχιστον ασυμπτωτικά, αφού λαμβάνεται υπόψη η συσχέτιση μεταξύ των εξισώσεων. Ωστόσο, όταν λαμβάνονται υπόψη οι ιδιότητες των πεπερασμένων δειγμάτων, και ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνονται υπόψη οι πληροφορίες συσχετισμού, δε μπορούμε να είμαστε σίγουροι, εκ των προτέρων, ότι ο $\hat{\beta}_{FG}$ είναι γενικά ανώτερος από τον $\hat{\beta}_O$. Στην πραγματικότητα, η απώλεια απόδοσης θα οδηγήσει σε παραδείγματα με μικρές συσχετίσεις όπως αναφέρει και ο Zhang, 2010 στο άρθρο του.

9. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Κώδικας Αριθμητικού Παραδείγματος

Απαιτούμενα πακέτα

library(ChainLadder)

require(systemfit)

Εισαγωγή των δεδομένων

```
pAp = t(matrix( c(201125, 309921, 366618, 405107, 427850, 440669, 448430,
451193, 453353, 453584, 203541, 304213, 361677, 404182, 429932, 441948,
448333, 450813, 451523, NA, 216932, 329704, 400120, 447542, 469760, 479999,
485611, 487224, NA, NA, 217452, 330761, 404072, 443669, 462979, 472248,
476325, NA, NA, NA, 219597, 347611, 419215, 458490, 476376, 486738, NA, NA,
NA, NA, 232760, 364416, 431975, 470780, 491725, NA, NA, NA, NA, NA, 241616,
368294, 433086, 473357, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 234177, 351249, 424972, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, 236631, 354803, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 235288,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA),nc=10)); pAp
```

```
pAi = t(matrix( c(425423, 436426, 446061, 447726, 450995, 453598, 454797,
455025, 454986, 455363, 424627, 440267, 445507, 450295, 452038, 452583,
453050, 453231, 453193, NA, 460410, 488330, 487684, 486699, 489678, 489954,
490540, 491436, NA,NA, 508319, 499641, 494833, 487819, 483914, 483163,
482706, NA, NA, NA, 538065, 533311, 526181, 513322, 498154, 496802, NA, NA,
NA, NA, 522178, 527307, 518486, 511711, 511503, NA, NA, NA, NA, NA,
504929, 504787, 504020, 506540, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 485754, 468097, 476328,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 459081, 443507, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
438236, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA), nc=10)); pAi
```

```
cAp = t(matrix( c(29827, 54449, 71205, 87398, 98079, 105695, 109853, 114789,
115427, 116690, 33331, 59480, 79789, 103356, 115958, 123399, 126638, 128415,
```

```

129571, NA, 34533, 56484, 77691, 100435,114044, 124672, 127973, 130359, NA,
NA, 36128, 64328, 94542, 111063, 126149, 134515, 137347, NA, NA, NA, 39053,
71220, 98607, 118936, 131663, 140180, NA, NA, NA, NA, 45136, 79767, 107288,
123835, 136326, NA, NA, NA, NA, NA, 50764, 85125, 107354, 127987, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, 48803, 80471, 109439, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 58559,
95667, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 65285, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA), nc=10)); cAp
data = list(PersonalAutoPaid = pAp, PersonalAutoIncurred = pAi,
CommercialAutoPaid = cAp); data
data = as(data, "triangles")

```

Διαχωρισμός δεδομένων για να μπορέσει να τρέξει η SCL για τα έτη 7 ως 10

```

data1 = data[, 1:7]
data2 = data[, 7:10]

```

#Προσαρμογή των μεθόδων SCL, MCL, GMCL με intersepts και πλήρες GMCL, αντίστοιχα

```

fit.scl = MultiChainLadder(data, "OLS")
fit.mcl = MultiChainLadder2(data)
fit.int = MultiChainLadder2(data, type = "MCL+int")

coefr = matrix(0,12,8)
posis = cbind(c(1:3, 5:7, 9, 12), 1:8)
coefr[posis] = 1
int = 1:6
restrMatr = c(rep(list(coefr), 6),rep(list(NULL), 3))
fit1 = MultiChainLadder(data1, "SUR", int = int,restrict.regMat = restrMatr, model =
"GMCL")
fit2 = MultiChainLadder(data2, "OLS")
fit = Join2Fits(fit1, fit2)
pred = predict(fit)
mse = Mse(fit, pred)

```

```
fit.full = JoinFitMse(fit, mse)
```

#Το μοντέλο GMCL με επιλογή παραμέτρων, καθορίζουμε διαφορετικούς πίνακες

#περιορισμού για κάθε περίοδο

```
coefr1 = matrix(0, 12, 6)
```

```
posis1 = cbind(c(2, 3, 5, 7, 9, 12), 1:6)
```

```
coefr2 = matrix(0, 12, 5)
```

```
posis2 = cbind(c(2, 5:7, 12), 1:5)
```

```
coefr3 = matrix(0, 12, 7)
```

```
posis3 = cbind(c(1:2, 5:7, 9, 12), 1:7)
```

```
coefr4 = matrix(0, 12, 7)
```

```
posis4 = cbind(c(1:2, 5, 6, 7, 9, 12), 1:7)
```

```
coefr5 = matrix(0, 12, 5)
```

```
posis5 = cbind(c(1, 2, 5, 7, 12), 1:5)
```

```
coefr6 = matrix(0, 12, 5)
```

```
posis6 = cbind(c(1, 2, 7, 9, 12), 1:5)
```

```
coefr1[posis1] = 1
```

```
coefr2[posis2] = 1
```

```
coefr3[posis3] = 1
```

```
coefr4[posis4] = 1
```

```
coefr5[posis5] = 1
```

```
coefr6[posis6] = 1
```

```
int = 1:6
```

```
restrMatr = c(list(coefr1, coefr2, coefr3, coefr4,coefr5, coefr6, rep(list(NULL), 3)))
```

```
fit1 = MultiChainLadder(da1, "SUR", int = int,restrict.regMat = restrMatr, model =  
"GMCL")
```

```
fit2 = MultiChainLadder(da2, "OLS")
```

```
fit = Join2Fits(fit1, fit2)
```

```
pred = predict(fit)
```

```
mse = Mse(fit, pred)
```

```
fit.sel = JoinFitMse(fit, mse)
```

Munich Chain Ladder

```
fit.mucl = MunichChainLadder(auto[[1]], auto[[2]])
```

Συνδυασμός όλων των Paid-to-Incurred αναλογιών

```
u1 = summary(fit.scl)@Ultimate  
r1 = u1[, 1]/u1[, 2]  
u2 = summary(fit.mcl)@Ultimate  
r2 = u2[, 1]/u2[, 2]  
u3 = summary(fit.int)@Ultimate  
r3 = u3[, 1]/u3[, 2]  
u4 = summary(fit.full)@Ultimate  
r4 = u4[, 1]/u4[, 2]  
u5 = summary(fit.sel)@Ultimate  
r5 = u5[, 1]/u5[, 2]  
r6 = summary(fit.mucl)[[1]][, 6]  
r6 = c(r6, summary(fit.mucl)[[2]][2, 3])  
ratios = cbind(r1, r2, r3, r6, r4, r5)  
dimnames(ratios)[[2]] = c("SCL", "MCL", "GMCL1", "MuCL", "GMCL2", "GMCL3" )  
ratios = format(round(ratios*100 ,2), big.mark="," , scientific = FALSE)  
print(ratios, quote = FALSE)
```

Εκτιμώμενοι παράμετροι θ , σ , ρ αντίστοιχα

```
fit.sel@coefficients  
fit.sel@residCov  
summary(fit.sel)@residCor
```

Στατιστικά για το τρίγωνο "1+3"

```
summary(fit.sel, portfolio = "1+3")@report.summary[[4]]
```

Γραφήματα υπολοίπων

```
par(mfrow = c(2, 3))  
plot(fit.scl, which.plot = 3:4)  
plot(fit.mcl, which.plot = 3:4)  
plot(fit.int, which.plot = 3:4)  
plot(fit.full, which.plot = 3:4)  
plot(fit.sel, which.plot = 3:4)
```

Ιστογράμματα

```
r = summary(fit.sel)@rstandard  
par(mfrow = c(1,3))  
for (i in 1:3){hist(r[, i], 20, freq = FALSE, xlim = c(-2, 2),  
                  xlab = "Standardized Residuals",  
                  main = paste("Histogram for Triangle", i))  
          lines(density(r[, i]))  
}
```

10. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Δονάτος Γ., Αδάμ Μ. (2008): *Γραμμική Άλγεβρα Θεωρία και Εφαρμογές*. Gutenberg, pp 320-321.
- Κουνιάς Σ., Καλπαζίδου Σ. (2001): *Πιθανότητες II, Θεωρία και Ασκήσεις*, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, pp 2.
- Πιτσέλης Γεώργιος (2016): *Αποθέματα Ζημιών*. Σημειώσεις Π.Μ.Σ. στην “Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου”, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, pp 12-16.
- Ajne, B., (1994). *Additivity of chain-ladder projections*. ASTIN Bulletin 24 (2), pp 311-318.
- Anderson E., Bai Z., and Dongarra J. (1994). LAPACK Working Note, *Generalized QR Factorization and its Applications (work in progress)*, pp 3-4.
- Barnett, G., Zehnwrith, B., (2000). *Best estimates for reserves*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society Casualty Actuarial Society LXXXVII, pp 245-321.
- Bitoli R., Matioli L.C., Yuan J. (2013). *A short note on a generalization of the Givens transformation*. Journal of Computers and Mathematics with Applications.
- Foschi, P. and Kontoghiorghes, E.J., (2002): *Seemingly unrelated regression model with unequal size observations: computational aspects*. Computational Statistics & Data Analysis 41 (2002), pp 1-14.
- Golub, G.H., Van Loan, C.F., (1996). *Matrix Computations, 3rd Edition*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD.
- Kakwani, N.C., (1967). *The unbiasedness of Zellner's seemingly unrelated regression equations estimators*. Journal of the American Statistical Association 62, pp 141-142.
- Mack T., (2003). *Presentation at ASTIN Colloquium 2003*, Berlin.
- Mack T., (1993). *Distribution-free calculation of the standard error*. ASTIN Bulletin pp 23.
- Marker, O.J. and Mohl, F.J., (1980). *Rating claims-made insurance policies*. CAS Discussion Paper Program, pp. 265-304.

- Merz M. and Wüthrich, M., (2008b). *Prediction error of the multivariate chain ladder reserving method*. North American Actuarial Journal 12 (2), pp 175-197.
- Pröhl, C. and Schmidt, K.D., [2005]: *Multivariate Chain-Ladder*. Lehrstuhl für Versicherungsmathematik Technische Universität Dresden, pp 4-9 & 11-14.
- Quarg G., Mack T., (2004). *Munich chain ladder*. Blatter DGVFM XXVI (4), pp 597-630.
- Schmidt, K.D., and Schnaus, A. [1996]: *An extension of Mack's model for the chain-ladder method*. ASTIN Bull. 26, pp 247-262.
- Srivastava V.K., Giles D.E.A., (1987). *Seemingly Unrelated Regression Equations Models*. Marcel Dekker Inc.
- Statisticshowto, (2013). *Lowess Smoothing in Statistics*.: <http://www.statisticshowto.com/lowess-smoothing/> (πρόσβαση 8 Μαΐου 2018).
- Verrall R. joint work with M.D. Martinez-Miranda, J.P Nielsen and S. Sperlich (2013): *Continuous Chain Ladder*, Cass Business School, City University London, pp 2.
- Zellner A., (1963). *Estimators for seemingly unrelated regressions equations: some exact finite sample results*. Journal of the American Statistical Association 58, pp 977-992.
- Zellner A., (1962). *An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias*. Journal of the American Statistical Association 57, pp 348-368.
- Zellner A., Huang D.S., (1962). *Further properties of efficient estimators for seemingly unrelated regression equations*. International Economic Review 3 (3), pp 300-313.
- Zhang, Y. (2010): *A General multivariate chain ladder model*. Insurance: Mathematics and Economics 46 (2010) 588-599, pp 2-12.

Ιστότοποι

https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinary_least_squares

https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_least_squares

<http://www.actuar.aegean.gr/notes/Econometrics/2%20-%20%CE%9F%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%9D%CE%9F%CE%9C%CE%95%CE%A4%CE%A1%CE%99%CE%91-%CE%9A%CE%95%CE%A6-2-18.3-2015-SENT.pdf>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_least_squares_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_least_squares_(mathematics))

https://en.wikipedia.org/wiki/Givens_rotation