ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Π.Μ.Σ. στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

«Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης μέσω Monte Carlo»

Κατσένιου Ευτυχία

Ιούλιος 2018

UNIVERSITY OF PIRAEUS

Department of Statistics & Actuarial Science

M.Sc. in Actuarial Science and Risk Management

«Monte Carlo Methods for Option Pricing»

Katseniou Eftychia

July 2018

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμώς τον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την ουσιαστική συμβολή του στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας και ενθάρρυνση για το καλύτερο αποτέλεσμα αυτής.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μαχαιρά, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για τη σημαντική του συμμετοχή στην ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Επίσης τον κύριο Πολίτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του ίδιου τμήματος, για την παρουσία του και συμμετοχή του στην επιτροπή της αξιολόγησης της διπλωματικής εργασίας μου.

Από τα βάθη της καρδιάς μου ευχαριστώ τους γονείς μου, τη μητέρα μου Μαρία και τον πατέρα μου Κώστα, οι οποίοι έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πραγματοποίηση του μεταπτυχιακού μου, τόσο υλικά όσο και συναισθηματικά. Τέλος, σημαντικό ρόλο στην ολοκλήρωσή των μεταπτυχιακών μου σπουδών έπαιξε το φιλικό μου περιβάλλον που με τη στήριξη του με βοήθησε για την ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου αυτής και τους οποίους επίσης ευχαριστώ θερμά .

Περίληψη

Μέσα από τη παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται παρουσίαση μεθόδων τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης (options) με χρήση της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo. Αρχικά γίνεται εισαγωγή σε βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων και της Στοχαστικής θεωρίας ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να κατανοήσει τη Απλή και Γεωμετρική κίνηση Brown. Στη συνέχεια παρουσιάζονται βασικά χρηματοοικονομικά προϊόντα με ειδικότερη βαρύτητα στα Δικαιώματα Προαίρεσης. Γίνεται η παρουσίαση της μεθόδου Black & Scholes και παρουσιάζονται ο τρόπος εύρεσης της εξίσωσης του μοντέλου καθώς και η λύση της. Έχοντας αναφέρει όλο το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση του μοντέλου Black & Scholes, εφαρμόζουμε το μοντέλο με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo δίνουμε παράδειγμα τιμολόγησης ενός δικαιώματος προαίρεσης. Μέσα από κώδικες της MATLABπροσομοιώνουμε τα μονοπάτια της τιμής ενός δικαιώματος και τιμολογούμε ένα «exchange» option. Στο τελευταίο μέρος παρουσιάζεται μία επέκταση του μοντέλου των Black & Scholes το οποίο ονομάζεται ''Jump Diffusion Model''. Η επέκταση αυτή αφορά τη προσθήκη τυχαίων μεταβολών (αλμάτων) στο μοντέλο Black&Scholes.

Abstract

Through this master thesis attempts to present methods of pricing options using the Monte Carlo simulation method. Initially, basic concepts of Probability theory and Stochastic Processes are introduced so that the reader is able to understand the Simple and Geometric Brownian motion. The Black & Scholes method is presented and so the way to solve the model equation and its solution. All the theoretical backgrounds are stated for the understanding of the Black & Scholes model via Monte Carlo simulation method using the MATLAB program. Also at the end an example of option pricing is given. Through MATLAB codes, which are presented in the Appendix A, we simulate the paths of the price of an «exchange» option. At the end, an extension of the Black & Scholes model is presented, called "Jump Diffusion Model". This extension involves the addition of random changes (jumps) to the model of Black & Scholes.

Πρόλογος

Η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης αποτελεί ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν σήμερα οι χρηματοπιστωτικές αγορές. Πολλά προβλήματα στη μαθηματική χρηματοοικονομία συνεπάγονται τον υπολογισμό ενός συγκεκριμένου ολοκληρώματος. Σε πολλές περιπτώσεις αυτά τα ολοκληρώματα μπορούν να εκτιμηθούν αναλυτικά και σε ακόμη περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να αποτιμηθούν χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση ή να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας μια μερική διαφορική εξίσωση (PDE) [1],[5], [6],[8],[9],[11]. Το διάσημο μοντέλο Black & Scholes, για παράδειγμα, παρέχει λύσεις κλειστής μορφής για την αξία ορισμένων δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (ευρωπαϊκού στυλ) [4],[5],[7],[15],[19]. Ωστόσο, όταν ο αριθμός των διαστάσεων στο πρόβλημα είναι μεγάλος, τα PDE και τα αριθμητικά ολοκληρώματα καθίστανται δύσκολα, οι τύποι που τα εκθέτουν είναι περίπλοκοι και δύσκολο να εκτιμηθούν με ακρίβεια μέσω συμβατικών μεθόδων [2],[3],[17],[18]. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι μέθοδοι Monte Carlo συχνά δίνουν καλύτερα αποτελέσματα, επειδή αποτελούν πολύτιμα και ευέλικτα υπολογιστικά εργαλεία για τον υπολογισμό της αξίας των δικαιωμάτων με πολλαπλές πηγές αβεβαιότητας ή με περίπλοκα χαρακτηριστικά [13],[15].

Ορισμένες προσεγγίσεις προσομοίωσης Monte Carlo έχουν προταθεί κατά την τελευταία δεκαετία για την αντιμετώπιση του προβλήματος της τιμολόγησης παραγώγων αμερικανικού τύπου [5],[12].

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι να εξετάσουμε κατά πόσο είναι δυνατή η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης μέσα από μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo [10],[11],[14].

Η εργασία μας διαρθρώνεται ως εξής:

Στα Κεφάλαια 1 και 2 παρουσιάζονται οι βασικές γνώσεις από το κλάδο των πιθανοτήτων και της Στοχαστικής Θεωρίας ώστε ο αναγνώστης να μπορέσει να κατανοήσει τη κίνηση Brown η οποία αποτελεί βασικό παράγοντα της μεθόδου και παρουσιάζεται στο τέλος του 2ου κεφαλαίου.

Στη συνέχεια μέσω μιας εισαγωγής στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, στο Κεφάλαιο 3, θα δοθούν οι απαραίτητοι ορισμοί και έννοιες ώστε να μπορέσει ο αναγνώστης να κατανοήσει τη τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω του μοντέλου των Black & Scholes.

Στο Κεφάλαιο 4 (βλ. Παράρτημα Α) θα χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα MATLAB μέσω το οποίου θα εφαρμόσουμε μεθόδους προσομοίωσης Monte Carlo στη μέθοδο τιμολόγησης που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 3. Αρχικά θα μελετήσουμε το απλό μοντέλο και μέσω ενός παραδείγματος θα κατασκευάσουμε δειγματικές τροχιές της τιμής του δικαιώματος. Στη συνέχεια αφού δοθεί ένα παράδειγμα τιμολόγησης δικαιώματος τύπου «exchange» θα μελετήσουμε το μοντέλο του Merton (Jump Diffusion Model). Στις τελευταίες παραγράφους του κεφαλαίου θα δοθούν αναλυτικές πληροφορίες για τους κώδικές που χρησιμοποιήθηκαν στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης μέσω της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo.

Περιεχόμενα

1. Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε βασικές έννοιες και θεωρήματα της θεωρίας πιθανοτήτων που χρησιμοποιούνται στις στοχαστικές ανελίξεις. Η θεωρία πιθανοτήτων μελετά φαινόμενα τα οποία υπόκεινται στη τυχαιότητα ή για τα οποία αδυνατούμε να περιγράψουμε της συμπεριφορά τους με συγκεκριμένους νόμους, όπως για παράδειγμα ο νόμος της βαρύτητας, η κίνηση των αστεριών, το αποτέλεσμα μια συγκεκριμένης μίξης χημικών στοιχείων ή οι νόμοι του Kirchoff. Τέτοια φαινόμενα μπορούμε να τα αναγάγουμε σε πειράματα που ονομάζουμε πειράματα τύχης. Η έννοια του πειράματος τύχης είναι βασικής σημασίας για τη θεωρία πιθανοτήτων η οποία αφορά σε αυτού του είδους τα πειράματα.

Ορισμός : Πείραμα τύχης είναι ένα πείραμα στο οποίο δεν ισχύει η σχέση αιτίου-αιτιατού δηλαδή αδυνατούμε να προσδιορίσουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του.

Για παράδειγμα η ρίψη δύο συγκεκριμένων ζαριών ή ο αριθμός ρίψεων ενός ζαριού έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξή ‘’6’’.

1.1 Χώρος πιθανότητας

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και ας θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο Α. Συμβολίζουμε με $P(A)$ την πιθανότητα του ενδεχομένου Α. Αν$\mathrm{A} = \{\omega\}$, δηλαδή το ενδεχόμενο Α αποτελείται από ένα στοιχείο του Ω, τότε είναι $\mathrm{P(A) = P(\{\omega\})}$και γράφουμε$\mathrm{P}(\omega)$.

Η συνολοσυνάρτηση P(·) ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:

A1. $\forall A, P(A) \geq 0$.

A2. $P(\Omega) = 1$.

A3. $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, για όλα τα ενδεχόμενα A_i, A_j τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j, i, j = 1,2, \dots$, δηλαδή είναι ξένα μεταξύ τους.

Το σύνολο ενδεχομένων συμβολίζεται συνήθως με $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{A}$ είναι μία σ-άλγεβρα, δηλαδή είναι ένα σύνολο που έχει τις εξής ιδιότητες [3],[4]:

I1. $\Omega \in \mathcal{A}$

I2. Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε και $A' \in \mathcal{A}$.

I3. Αν $A_n \in \mathcal{A}, n = 1,2, \dots$., τότε και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Η τριάδα ($\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot)$) καλείται χώρος πιθανότητας.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Τότε το σύνολο $A = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3,4\}\}$ δεν πληροί όλες τις ιδιότητες οπότε δεν αποτελεί σ-άλγεβρα. Αντίθετα το σύνολο $A = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα εφόσον πληροί όλες τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν.

Ορισμός: Με σ(A) συμβολίζουμε τη ελάχιστη σ-άλγεβρα που ορίζεται από ένα σύνολο A και είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που το περιέχει.

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε τρία υποσύνολα του Ω, K_1, K_2, K_3 τέτοια ώστε να ισχύει $K_1 \cap K_2 = \emptyset, i \neq j$ και $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \Omega$.
Τότε η σ-άλγεβρα:

$$\{\emptyset, K_1, K_2, K_3, K_1 \cup K_2, K_1 \cup K_2, K_2 \cup K_3, K_1 \cup K_3\}$$

είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα σ(K) η οποία περιέχει το K= $\{K_1, K_2, K_3\}$

Ορισμός: Η ελαχίστη σ- άλγεβρα υποσυνόλων του R, που περιέχει την κλάση C όλων των ανοικτών διαστημάτων της μορφής $(-\infty, \chi)$ ονομάζεται άλγεβρα Borel και συμβολίζεται με B(C).

1.2 Τυχαίες μεταβλητές

Έστω (Ω, A, P) ένας χώρος πιθανότητας, και X μία πραγματική συνάρτηση στο Ω που παίρνει πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο πλήθος τιμών $\chi_1, \chi_2 \ldots.$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα που δώσαμε θα θέλαμε βέβαια να μπορούσαμε να μιλάμε για την πιθανότητα με την οποία η X παίρνει την τιμή χ_i, για κάθε i. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ξέρουμε ότι για κάθε i, το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \chi_i\}$ είναι ενδεχόμενο, δηλαδή ότι ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του Ω, τότε αυτό ισχύει πάντα. Γιατί σε αυτή τη περίπτωση, όποιο και αν είναι το χ_i, το $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \chi_i\}$ είναι ένα υποσύνολο του Ω και άρα στοιχείο της $\mathcal{A}$, αφού η $\mathcal{A}$ περιέχει κάθε υποσύνολο του Ω. Όμως η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει εν γένει όλα τα υποσύνολα του Ω, άρα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \chi_i\}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Ο μόνος λογικός τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι να υποθέσουμε ρητά ότι η X είναι μία συνάρτηση στο Ω που έχει αυτή την επιθυμητή ιδιότητα. Οδηγούμαστε λοιπόν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός: Διακριτή πραγματική τυχαία μεταβλητή X σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω,A,P) είναι μία συνάρτηση X με πεδίο ορισμού το Ω και πεδίο τιμών ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο υποσύνολο $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$ των πραγματικών αριθμών, η οποία έχει την ιδιότητα το $\{\omega : X(\omega) = \chi_i\}$ να είναι ενδεχόμενο για κάθε i.

Εξ ορισμού λοιπόν, το $\{\omega : X(\omega) = \chi_i\}$ είναι ένα ενδεχόμενο, και άρα μπορούμε να μιλάμε για την πιθανότητά του. Το ενδεχόμενο $\{\omega : X(\omega) = \chi_i\}$ συμβολίζεται για συντομία $\{X = \chi_i\}$ και η πιθανότητα $P(\{\omega : X(\omega) = \chi_i\})$ με $P(X = \chi_i)$.

Έστω X μια διακριτή πραγματική τυχαία μεταβλητή. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό χ, το $\{\omega : X(\omega) = \chi_i\}$ είναι ενδεχόμενο. Πράγματι, αν $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$ είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει η X, τότε το $\{\omega : X(\omega) = \chi_i\}$ είναι ενδεχόμενο από τον ορισμό. Αν ο χ δεν είναι

κάποιος από αυτούς τους αριθμούς , τότε $\{\omega: X(\omega) = \chi_i\} = \emptyset$, το οποίο είναι επίσης ενδεχόμενο.
Αν οι πιθανές τιμές μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ είναι μόνο ακέραιοι αριθμοί ή μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε λέμε ότι η Χ είναι μια τυχαία μεταβλητή με ακέραιες ή μη αρνητικές ακέραιες τιμές αντίστοιχα.

Έχοντας ορίσει την έννοια της διακριτής τυχαίας μεταβλητής μπορούμε να ορίσουμε τώρα τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.
Δεν είναι δύσκολο να σκεφτούμε παραδείγματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Ως ένα πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε ένα πιθανοθεωριτικό μοντέλο για το χρόνο διάσπασης ενός πεπερασμένου αριθμού ραδιενεργών σωματιδίων. Έστω Τ η τυχαία μεταβλητή που δίνει το χρόνο που απαιτείται μέχρι τη διάσπαση του πρώτου σωματιδίου. Τότε η Τ πρέπει να είναι συνεχής, γιατί η πιθανότητα η πρώτη διάσπαση να συμβεί ακριβώς σε μία καθορισμένη χρονικής στιγμή είναι μηδενική. Εν γένει οι τυχαίες μεταβλητές που αφορούν μετρήσεις περιγράφονται καλύτερα ως συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.
Στις εφαρμογές, τυχαία μεταβλητή είναι μια αριθμητική ποσότητα που ορίζεται με βάση το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος. Από τη μαθηματική όμως άποψη, μια τυχαία μεταβλητή Χ είναι μια πραγματική συνάρτηση που ορίζεται σε έναν χώρο πιθανότητας. Φυσικά, θέλουμε η $P(X \leq \chi)$ να είναι καλά ορισμένη για κάθε πραγματικό αριθμό χ. Με άλλα λόγια αν $(\Omega, \mathcal{A}$,P) είναι χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται η Χ, θέλουμε το $\{\omega | X(\omega) \leq \chi\}$ να είναι ενδεχόμενο, δηλαδή στοιχείο της $\mathcal{A}$. Οδηγούμαστε λοιπόν τους εξής ορισμούς.

Ορισμός: Τυχαία μεταβλητή Χ σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}$,P) είναι μία πραγματική συνάρτηση $X(\omega), \omega \in \Omega$, τέτοια ώστε για κάθε $-\infty < \chi < \infty$, το $\{\omega | X(\omega) \leq \chi\}$ να είναι ενδεχόμενο.

Ορισμός: Η συνάρτηση κατανομής F μιας τυχαίας μεταβλητής Χ είναι η συνάρτηση $F(\chi) = P(X \leq x), -\infty < x < \infty$.

Η συνάρτηση κατανομής είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό διαφόρων πιθανοτήτων που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή Χ.

Στη πράξη, οι συνεχής συναρτήσεις κατανομής συνήθως ορίζονται με τη βοήθεια των συναρτήσεων πυκνότητας.

Ορισμός: Συνάρτηση πυκνότητας (συνεχούς τύπου) είναι μία μη αρνητική συνάρτηση f που ικανοποιεί την $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Αν η f είναι συνάρτηση πυκνότητας τότε η συνάρτηση F που ορίζεται από την $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, -\infty < x < \infty$, είναι συνεχής.
Η έννοια της ανεξαρτησίας δύο ή περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία πιθανοτήτων. Για δύο τυχαίες μεταβλητές έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός: Οι τυχαίες μεταβλητές X,Y καλούνται ανεξάρτητες αν $\forall\, A \in\ B_\chi\ και\ \forall\, B_y$ ισχύει η σχέση $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Ποιο απλά, οι μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες αν τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}, \{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα.

1.3 Ροπές τυχαίων μεταβλητών

Μια από τις πιο σημαντικές έννοιες στη θεωρία πιθανοτήτων είναι η έννοια της μέσης ή αναμενόμενης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός: Έστω η τ.μ. X. Η μέση ή αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X συμβολίζεται με E(X) και δίνεται από τη σχέση:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_x\,(x_i), αν\ η\ τ.μ. X\ είναι\ διακριτή \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx\,, αν\ η\ τ.μ. X\ είναι\ συνεχής \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά και το ολοκλήρωμα συγκλίνουν απόλυτα, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

Συνήθως συμβολίζεται $E(X) \equiv \mu_\chi$

Εξαιρετική χρησιμότητα έχει επίσης η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής δύο τυχαίων μεταβλητών, η οποία ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός: Η $E(X|Y)$ ορίζεται από τη σχέση:

$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$, αν X ,Y συνεχείς τ.μ.

και

$E(X|Y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i f_{X|Y}(x_i|y_i)$, αν X,Y διακριτές τ.μ.

καλείτε δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δεδομένης της Y.

Ορισμός: Η μέση τιμή

$$E[(x)^s] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^s \, f_x \, (x_r), \text{αν η τ.μ.} X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x)^s f_x(x) dx \, , \text{αν η τ.μ.} X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

καλείται ροπή s τάξης.

Έτσι αφού ορίσαμε τη μέση τιμή και τη ροπή s τάξης, μπορούμε στη συνέχεια να ορίσουμε τη διασπορά μιας τ.μ. X.

Ορισμός: Η μέση τιμή

$$E[(X - \mu x)^2] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu_\chi)^s \, f_x \, (x_r), \text{αν η τ.μ.} X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_\chi)^s f_x(x) dx \, , \text{αν η τ.μ.} X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

καλείται Διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X και συμβολίζεται συνήθως V(X) ή σ^2.

Τέλος δίνεται ο ορισμός της ροπογεννήτριας συνάρτησης.

Ορισμός: Έστω μία τ.μ. Χ με μέση τιμή

$$E(e^{tx}), t \in (-\delta, \delta), \delta > 0$$

Τότε η συνάρτηση:

$$M_\chi(t) = M(t) = E(e^{tx}), \qquad |t| < \delta$$

καλείται ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Χ.

1.4 Η κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson αποτελεί διακριτή κατανομή πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων που συμβαίνουν σε μία δεδομένη χρονική περίοδο, δεδομένου του μέσου αριθμού των περιστατικών που συμβαίνουν κατά τη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου.

Έστω Χ μία διακριτή τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει τιμές $0,1,2, \dots$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0,1,2$$

όπου λ μια δεδομένη θετική σταθερά. Η κατανομή αυτή καλείται κατανομή του Poisson, επειδή ανακαλύφθηκε από τον S. D. Poisson στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Λέμε ακόμα ότι η μεταβλητή Χ είναι κατανεμημένη κατά Poisson.

Οι τιμές της $f(x)$ υπολογίζονται είτε βάση πινάκων που δίνουν τις τιμές του $e^{-\lambda}$ για διάφορα λ είτε μέσω λογαρίθμων.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται μερικές ιδιότητες της κατανομής Poisson.

Μέση τιμή	$\mu = \lambda$
Διασπορά	$\sigma^2 = \lambda$
Τυπική απόκλιση	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
Συντελεστής ασυμμετρίας	$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Συντελεστής κύρτωσης	$\alpha_4 = 3 + (1/\lambda)$
Ροπογεννήτρια	$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Χαρακτηριστική συνάρτηση	$\Phi(\omega) = e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$

Πίνακας 1: Ιδιότητες κατανομής Poisson

Η κατανομή Poisson ισχύει μόνο όταν ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις.

Προϋποθέσεις για τη διανομή Poisson:

- Ένα συμβάν μπορεί να συμβεί πολλές φορές κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου.
- Τα συμβάντα εμφανίζονται ανεξάρτητα. Με άλλα λόγια, εάν συμβεί κάποιο γεγονός, δεν επηρεάζει την πιθανότητα ενός άλλου συμβάντος που συμβαίνει στην ίδια χρονική περίοδο.
- Ο ρυθμός εμφάνισης είναι σταθερός. δηλαδή, το ποσοστό δεν αλλάζει βάσει του χρόνου.
- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός συμβάντος είναι ανάλογη με το μήκος της χρονικής περιόδου. Για παράδειγμα, θα πρέπει να είναι δύο φορές πιο πιθανό για ένα συμβάν να εμφανιστεί σε μια χρονική περίοδο 2 ωρών από ό, τι για ένα γεγονός να συμβεί σε μια περίοδο 1 ώρας.

1.5 Χαρακτηριστική συνάρτηση

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση, η οποία ορίστηκε στη προηγούμενη παράγραφο, είναι ένα χρήσιμο εργαλείο, αλλά μειονεκτεί ως προς το ότι δεν ισχύει πάντα ότι $M_\chi(t) < \infty$.
Το μειονέκτημα αυτό δεν έχει μία άλλη συνάρτηση η οποία καλείται χαρακτηριστική συνάρτηση και ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός: Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. Χ είναι μία συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \to C$, όπου ορίζεται από τη σχέση:
$\varphi(t) = E(e^{itx})$,όπου $i = \sqrt{(-1)}$.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική για δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι αν γνωρίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη κατανομή της. Ο δεύτερος λόγος αναφέρεται στο ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές Χ και Υ έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση, τότε έχουν την ίδια κατανομή.

1.6 Στοχαστικές Διαδικασίες

Μια στοχαστική διαδικασία είναι ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο και με τυχαίο τρόπο. Η φύση, η καθημερινή ζωή, οι επιστήμες μας προσφέρουν μια πληθώρα τέτοιον φαινομένων ή φαινομένων που μπορούν να παρασταθούν μέσω μιας συνάρτησης δύο παραγόντων, του χρόνου και της τύχης. Οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διακριτού χρόνου και συνεχούς χρόνου. Διακριτού χρόνου καλούνται εκείνες των οποίων οι τυχαίες μεταβλητές μπορούν να πάρουν τιμές μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές ενώ συνεχούς χρόνου εκείνες των οποίων οι μεταβλητές παίρνουν τιμές οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ένας άλλος τρόπος διάκρισής τους είναι ως προς τη τυχαία μεταβλητή. Σε αυτή κατηγοριοποίηση διακριτής τυχαίας μεταβλητής καλούνται οι στοχαστικές διαδικασίες των οποίων η τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει μόνο συγκεκριμένες διακεκριμένες τιμές, ενώ στις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές παίρνει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού.

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε μόνο με συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες.

Ορισμός: Έστω T ένα σύνολο και (E,$\mathcal{E}$) ένας μετρήσιμος χώρος. Μια στοχαστική διαδικασία, με σύνολο δεικτών το T και τιμές στον (E,$\mathcal{E}$), είναι μια οικογένεια μετρήσιμων απεικονίσεων $X_t,\ t \in T$, από το χώρο πιθανοτήτων (Ω, $\mathcal{A}$,P) στον (E,$\mathcal{E}$). O (E,$\mathcal{E}$) καλείται χώρος καταστάσεων.

Το σύνολο T εκλαμβάνεται ως χρόνος με συνήθεις περιπτώσεις $T = \mathbb{N}$ και $T = \mathbb{R}_+$. Κυρίως θα χρησιμοποιήσουμε $T = \mathbb{R}_+$ και ο E θα είναι ο $\mathbb{R}^d$, ή ένα υποσύνολο Borel του $\mathbb{R}^d$ και $\mathcal{E}$ μια σ-άλγεβρα Borel του E.
Για κάθε $\omega \in \Omega$, οι απεικονίσεις $t \to X_t(\omega)$ είναι μια ‘καμπύλη’ στον E η οποία καλείται τροχιά ή ίχνος της X.

Στο πρώτο κεφάλαιο έγινε προσπάθεια να ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες τις στατιστικής και των πιθανοτήτων ώστε να τεθεί η μαθηματική βάση για την ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων. Με τον ορισμό βασικών εννοιών από την στοχαστική θεωρία, στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα ολοκληρωθεί αυτή τη προσπάθεια.

2. Στοχαστική Θεωρία

Συγκεκριμένες κατηγορίες στοχαστικών ανελίξεων έχουν πολύ καλές ιδιότητες με βάση τις οποίες αναπτύσσεται εκτενής θεωρία. Τέτοιες κατηγορίες είναι για παράδειγμα οι Μαρκοβιανές και οι Στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις. Μια άλλη κατηγορία είναι αυτή στην οποία ανήκουν οι στοχαστικές ανελίξεις που έχουν την ιδιότητα Martingale. Η σπουδαιότητα των Martingales οφείλεται στο ότι η σύγκλισή τους είναι εγγυημένη (Martingaleconvergencetheorem) και αυτό επιτρέπει την ανάπτυξή εξαιρετικά χρήσιμη για τις εφαρμογές θεωρίας.

2.1 Martingales

Στη παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τα martingales και θα δοθεί παράδειγμα για την καλύτερη κατανόησής τους. Ωστόσο στην αρχή πρέπει να οριστεί η διύλιση και η προσαρμοσμένη διύλιση.[13]

Όσο αυξάνεται ο χρόνος, τόσο αυξάνεται η γνώση μας για το τι συνέβη στο παρελθόν.
Αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

Ορισμός: Μια ακολουθία $\langle \Sigma_n \rangle_{n \in N^*}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται διύλιση (filtration), αν η $\langle \Sigma_n \rangle_{n \in N^*}$ είναι αύξουσα.

Στην πράξη η Σ_nπαριστάνει τη πληροφορία σε χρόνο n. Η Σ_n περιέχει όλα τα ενδεχόμενα A, ώστε σε χρόνο n να μπορεί να ελεγχθεί αν το A έχει πραγματοποιηθεί ή όχι.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα άπειρες φορές, άρα ο δειγματικός μας χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}^{cardN^*} := \{0,1\}^N = \{\langle a_n \rangle_{n \in N^*}: a_n = 0$ ή $\alpha_n = 1\}$.

Έστω $\Sigma := P(\Omega)$ και $\langle X_n \rangle_{n \in N^*}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n: \Omega \to \mathbb{R}$, ώστε

$$X_n = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ \eta\ n - \rho\acute{\iota}\psi\eta\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ K \\ 1, \alpha\nu\ \eta\ n - \rho\acute{\iota}\psi\eta\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \Gamma \end{cases}$$

Έστω $\Sigma_n: = \sigma(\{\chi_1, \dots, \chi_n\})$ και το ενδεχόμενο Α:={ οι 5 πρώτες ρίψεις φέρνουν τουλάχιστον 2 κορώνες}.
Σε χρόνο n=5, δηλαδή αφού το νόμισμα έχει ριφθεί 5 φορές, είναι δυνατόν να ελεγχθεί, αν πραγματοποιήθηκε το Α ή όχι. Αυτό σημαίνει ότι $A \in \Sigma_5$. Εν τούτοις, σε χρόνο n=4 δεν είναι δυνατόν να ελεγχθεί, αν το Α πραγματοποιήθηκε ή όχι. Αν το αποτέλεσμα των τεσσάρων πρώτων ρίψεων είναι Γ,Γ,Κ,Γ τότε το ενδεχόμενο Α παραμένει μη προβλέψιμο. Πρέπει να ρίξουμε το νόμισμα άλλη μια φορά για να δούμε τι θα συμβεί. Επομένως $A \notin \Sigma_4$. Το συγκεκριμένο παράδειγμα αποσαφηνίζει άλλο ένα σχετικό πρόβλημα. Έστω ότι το αποτέλεσμα των τεσσάρων πρώτων ρίψεων είναι Γ,Κ,Γ,Κ. Τότε μπορούμε να λέμε ότι το Α έχει ήδη συμβεί σε χρόνο n=4, οτιδήποτε και αν συμβεί σε χρόνο n=5. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι $A \in \Sigma_4$, αφού για να ανήκει το Α στην Σ_4 πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε αν το Α έχει πραγματοποιηθεί ή όχι μετά τις τέσσερίς ρίψεις, ανεξάρτητα από ποία ήταν τα τέσσερα πρώτα αποτελέσματα. Αυτό όμως δεν συμβαίνει στο παράδειγμά μας. Προφανώς η $\langle \Sigma_n \rangle_{n \in N^*}$ είναι μία διύλιση.

Ορισμός: Μια ακολουθία $\langle X_n \rangle_{n \in N^*}$ τυχαίων μεταβλητών είναι προσαρμοσμένη (adapted, adaptiert) σε μία διύλιση $\langle \Sigma_n \rangle_{n \in N^*}$ αν για κάθε $n \in N^*$ η X_n είναι Σ_n-μετρήσιμη.

Το παράδειγμα που ακολουθεί μας δίνει μία ιδέα για τη χρήση του όρου ‘‘ Martingale’’, ο οποίος προέρχεται από ένα τυχερό παιχνίδι.

Παράδειγμα

Ένας παίκτης που διαθέτει μια μεγάλη περιουσία ακολουθεί την εξής στρατηγική: Στοιχηματίζει 1 ευρώ στους άρτιους αριθμούς. Αν χάσει στοιχηματίζει 2 ευρώ στο επόμενο παιχνίδι. Αν χάσει στοιχηματίζει 2^2 ευρώ στο επόμενο παιχνίδι και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο. Αυτό του επιτρέπει αν εμφανιστεί άρτιος αριθμός να έχει καλύψει όλο το κεφάλαιο στο οποίο στοιχημάτισε και να κερδίσει 1 ευρώ. Το παιχνίδι μπορεί να είναι ρίψη ζαριού. Σήμερα όλα τα καζίνο απαγορεύουν αυτό το τρόπο παιξίματος. Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι αυτή η τακτική πρέπει να αποφεύγεται ανεξάρτητα της πολιτικής του καζίνο.

Έστω N η χρονική στιγμή που ο παίκτης κερδίζει για πρώτη φορά. Η τυχαία μεταβλητή N έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P(N = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 1,2, \ldots$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $P(N < \infty) = 1$, δηλαδή ο παίκτης μετά από πολλά παιχνίδια είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα κερδίσει. Αλλά, αν θεωρήσουμε L το ποσό που θα έχει χάσει μέχρι εκείνη τη στιγμή έχουμε ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής L είναι:

$$E(L) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) = \infty$$

Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης πρέπει να είναι προετοιμασμένος για απώλεια πολλών χρημάτων, όπως πρέπει να είναι και ο ιδιοκτήτης του καζίνο.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που ο παίκτης έχει αρχικό κεφάλαιο Σ_0και ποντάρει στους αρτίους αριθμούς, όπως υποθέσαμε στην αρχή του παραδείγματος.Μετά την ολοκλήρωση του πρώτου παιχνιδιού έχει κεφάλαιοΣ_1. Εάν δεν επιτευχθεί το κερδοφόρο ποντάρισμα συνεχίζει τη διαδικασία για n παιχνίδια έως ότου επιτευχθεί ο στόχος του. Το κεφάλαιό του αναπροσαρμόζεται μετά το τέλος κάθε πονταρίσματος σε $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ και η κάθε διαδικασία είναι ανεξάρτητη με την προηγούμενη και την επόμενη. Η ακολουθία $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Πριν παίξει το n+1 παιχνίδι ο παίκτης γνωρίζει τις τιμές των $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ αλλά για το Σ_{n+1} μπορεί μόνο να υποθέσει τη τιμή του. Αν το παιχνίδι είναι δίκαιο τότε η αναμενόμενη τιμή του Σ_{n+1}δεδομένων των $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ πρέπει να είναι η τιμή του Σ_n.

Δηλαδή

$$E(\Sigma_{n+1}|\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = \Sigma_n \tag{2.1}$$

που σημαίνει μη αλλαγή του κεφαλαίου του. Το καζίνο θα πρέπει να βρει τρόπο να αλλάξει τη παραπάνω σχέση ως εξής

$$E(\Sigma_{n+1}|\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n) \leq \Sigma_n$$

Ακολουθίες που ικανοποιούν τη σχέση (1.1) καλούνται martingales.

Ορισμός: Μια ακολουθία $\{\Sigma_n, n \geq 1\}$ είναι martingale ως προς την ακολουθία $\{X_n, x \geq 1\}$ αν για όλα τα $n \geq 1$

1) $E(|\Sigma_n|) < \infty$
2) $E(\Sigma_{n+1}|\, X_1, \dots, X_n) = \Sigma_n$

Η πρώτη συνθήκη είναι αναγκαία για να έχει νόημα η μέση τιμή της δεύτερης. Στη σχέση (2.1) έχουμε ότι $\{\Sigma_n, n \geq 1\}$ είναι martingale ως προς την ίδια ακολουθία. Ο ορισμός είναι πιο γενικός με την εισαγωγή της ακολουθίας $\{X_n, n \geq 1\}$.

2.2 Η αξία των Χρεογράφων ως Martingale

Η αξία ενός χρεογράφου, βάση της κλασικής θεμελιώδους οικονομικής ανάλυσης, είναι ίση με την παρούσα αξία των αναμενόμενων χρηματορροών που πληρώνει το αξιόγραφο στη διάρκεια της ζωής του. Οι τιμές αυτές παρουσιάζουν μεταβολές λόγω διαφόρων διακυμάνσεων, βασικών παραγόντων του οικονομικού περιβάλλοντος. Συνεπώς αν κατέχουμε την απαιτούμενη πληροφόρηση (διήθηση) μπορούμε να εκτιμήσουμε ακριβέστερα και πιο ρεαλιστικά, την αξία του χρεογράφου, ώστε να κινηθούμε βάση μιας κερδοφόρας επενδυτικής στρατηγικής. Ωστόσο, η αξία στο τέλος θα φανεί, λόγω των εξισορροπητικών δυνάμεων που ασκούνται στη αγορά.

Για τον υπολογισμό της αξίας ενός χρεογράφου, που ακολουθεί, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε:

- Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε την αξία μίας μετοχής.
- Την χρονική στιγμή t, η τιμή της μετοχής είναι p_t.
- Το μέρισμα που αποδίδει η μετοχή τη χρονική στιγμή $t+1$ είναι d_{t+1}.
- Με S_n δηλώνουμε το ιστορικό των τιμών έως τη χρονική στιγμή t.
- Τέλος r είναι το επιτόκιο προεξόφλησης.

Έτσι η αξία της μετοχής τη χρονική στιγμή t είναι:

$$p_t = (1+r)^{-1} E[p_{t+1} + d_{t+1} | S_t]$$

Δηλαδή για τον υπολογισμό της τιμής πρέπει να υπολογίσουμε τη παρούσα αξία (την στιγμή t) του αθροίσματος της αναμενόμενη τιμής και του μερίσματος, της χρονικής στιγμής $t+1$.

Συνεπώς, η αξία ενός χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t, την οποία συμβολίζουμε με (V_t) ,υπολογίζεται από το τύπο:

$$V_t = (1+r)^{-t} p_t n_t$$

όπου n_t ο αριθμός των χρεογράφων.

Αν το σύνολο των μερισμάτων που έχουν αποκτηθεί από το χαρτοφυλάκιο που αναφέρθηκε, επανεπενδυθεί σε νέες μετοχές, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου συνολικά, τη χρονική στιγμή $t+1$ θα είναι :

$$p_{t+1} n_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1}) n_t$$

Τέλος θα δείξουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t, είναι martingale :

$$\begin{aligned} V_t = (1+r)^{-t} p_t n_t &= (1+r)^{-t} n_t (1+r)^{-1} E[p_{t+1} + d_{t+1} | \Sigma_t] \\ &= E[(1+r)^{-t-1}(p_{t+1} + d_{t+1}) n_t | \Sigma_t] = E[(1+r)^{-t-1} p_{t+1} n_{t+1} | \Sigma_t] \\ &= E[V_{t+1} | \Sigma_t] \end{aligned}$$

2.3 Κίνηση Brown

Μια στοχαστική διαδικασία είναι ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο κατά τυχαίο τρόπο. Η φύση, η καθημερινή ζωή, οι επιστήμες μας προσφέρουν μας προσφέρουν μια πληθώρα τέτοιον φαινομένων ή φαινομένων τα οποία μπορούν να παρασταθούν μέσω μίας συνάρτησης δύο παραγόντων του χρόνου και της τύχης. Για παράδειγμα οι τιμές των προϊόντων, το μέγεθος ενός πληθυσμού ή το πλήθος των αναγραφόμενων σωματιδίων μέσω ενός μετρητή Geiger.

Ένα βασικό παράδειγμα είναι η κίνηση Brown των κόκκων γύρης σε υγρό. Αυτό το φαινόμενο οφείλει το όνομά του στο Βρετανό βοτανολόγο R.Brown, ο οποίος το ανακάλυψε το 1827. Η κίνηση αυτή προκαλείται από τις συνεχείς συγκρούσεις της γύρης με τα μόρια του υγρού. Οι συγκρούσεις αυτές ήταν συχνές ακόμα και σε μικρά διαστήματα παρατήρησης και ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης η επίδραση μίας σύγκρουσης είναι μηδενική σε σχέση με το συνολικό αποτέλεσμα. Η φυσική θεωρία της κίνησης Brown αναπτύχθηκε το 1905 από τον Einstein ο οποίος πρόσθεσε ότι:

- Η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες διαφορές.
- Οι διαφορές είναι Γκαουσιανές τ.μ.
- Οι τροχιές είναι συνεχής.

Η πρώτη ιδιότητα σημαίνει ότι οι μετατοπίσεις της γύρης σε μη τεμνόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τ.μ. και η δεύτερη ιδιότητα είναι αποτέλεσμα του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

2.3.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός: Η στοχαστική διαδικασία Wiener ή κίνηση Brown είναι μία οικογένεια $\langle W_t \rangle_{t\in[0,\infty)}$ τυχαίων μεταβλητών $W_t\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε:

a) $W_0 = 0$
b) οι τροχιές

$$W_{\cdot}(x) \colon [0,\infty) \to \mathbb{R} \colon t \to W_t(x)$$

είναι συνεχείς, για σταθερό $x \in \Omega$.
c) Για κάθε $\mathrm{n} \in \mathrm{N}^*, 0 < \mathrm{t}_1 < \cdots < \mathrm{t}_\mathrm{n}$ και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

d) $P\left(W_{t_1} \in A_1, \dots, W_{t_n} \in A_n\right) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_n \dots dx_1$

όπου η

$p(t,x,y) \coloneqq \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ ονομάζεται πυκνότητα μετάβασης από την κατάσταση x στην κατάσταση y σε χρόνο t [13].

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι για κάθε $t > 0$ η σ.π.π.f_{w_t} της W_t δίνεται από τον τύπο

$f_{w_t}(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλαδή η W_tακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση t.

Επίσης από την συνθήκη (c) του ορισμού έπεται άμεσα, οτι αν $0 < s < t$ τότε η κοινή σ.π.π. $f_{W_t w_s}$ των W_t και W_s δίνεται από το τύπο

$f_{W_t w_s} = p(s, 0, x) p(t - s, x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Ορισμός: Έστω n ∈ N* και $W_t := W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)})$. Η στοχαστική διαδικασία $\langle W_t \rangle_{t \in [0,\infty)}$ ονομάζεται n-διάστατη στοχαστική διαδικασία Wiener ή n-διάστατη κίνηση Brown, αν οι $\langle W_t^{(1)} \rangle_{t \in [0,\infty)}$,…, $\langle W_t^{n} \rangle_{t \in [0,\infty)}$ είναι ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Wiener.

2.3.2 Προσαυξήσεις της κίνησης Brown

Πρόταση: Για κάθε $0 < s < t$ η προσαύξηση $W_t - W_s$ ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση $t - s$.

Ορισμός: Μια στοχαστική διαδικασία $\langle X_t \rangle_{t \in T} (T \neq 0)$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις (stationary increments), αν για κάθε $s, t \in T$ η συνάρτηση κατανομής της $X_{t+h} - X_{s+h}$ είναι η ίδια για κάθε h ώστε $t + h, s + h \in T$.

Συνεπώς προκύπτει ότι η $\langle W_t \rangle_{t\in[0,\infty)}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις.Επίσης για κάθε $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$οι προσαυξήσεις $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα: Έστω $\langle W_t \rangle_{t\in[0,\infty)}$ μία στοχαστική διαδικασία και

$$\langle \Sigma_t \rangle_{t\in[0,\infty)} \coloneqq \langle \sigma(\{W_s : s \leq t\}) \rangle_{t\in[0,\infty)}$$

η διύλιση, που παράγεται από την$\langle W_t \rangle_{t\in[0,\infty)}$. Τότε η $\langle W_t \rangle_{t\in[0,\infty)}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία Wiener, αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

a) $W_0 = 0$
b) οι τροχιές

$$W_{\cdot}(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R} : t \to W_t(x)$$

   είναι συνεχείς, για σταθερό $x \in \Omega$.
c) Η $\langle W_t \rangle_{t\in[0,\infty)}$ είναι ένα $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in[0,\infty)} - martngale$
d) Η$\langle W_t^2 - t \rangle_{t\in[0,\infty)}$ είναι ένα $\langle \Sigma_t \rangle_{t\in[0,\infty)} - martngale.$

2.4 Γεωμετρική κίνηση Brown

Το αντικείμενο του στοχαστικού λογισμού είναι η ποσοτικοποίηση τη αβεβαιότητας η οποία αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό της χρηματιστηριακής αγοράς. Η Γεωμετρική κίνηση Brown είναι μια μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, η οποία χρησιμοποιείται στη μοντελοποίηση τιμών αξιογράφων γιατί είναι παντού θετική με πιθανότητα ένα και συνεπώς δεν παίρνει αρνητικές τιμές.

Η κατοχή μετοχών, εταιριών από τους επενδυτές, είναι μία δυνατότητα που τους παρέχεται μέσω της χρηματιστηριακής αγοράς. Με την κατοχή μιας εταιρικής μετοχής, ο επενδυτής έχει συμμετοχή στα κέρδη και της ζημίες της. Η μεταβλητότητα των τιμών μιας μετοχής σε καθημερινή βάση κάνει δύσκολη την πρόβλεψή της τιμής της με αποτέλεσμα καμία απόδοση να μην είναι εγγυημένη και συνεπώς περιέχει υψηλό κίνδυνο. Η γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιείται για τη πρόβλεψη της τιμής μιας μετοχής σε μικρές περιόδους με σκοπό να αμβλύνει την αδυναμία στη πρόβλεψη των αναμενόμενων τιμών μιας μετοχής.

Στη παρακάτω παράγραφο θα μοντελοποιήσουμε μέσο της Γεωμετρικής κίνησης Brown, την απόδοση ενός υποκείμενου τίτλου.

<u>Γεωμετρική κίνηση Brown</u>

Αν υποθέσουμε ότι η απόδοση ενός υποκείμενου τίτλου δίνεται από το τύπο:

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{\Delta S_{t-1}}{S_{t-1}} \qquad (2.2)$$

όπου:

- Με S_t συμβολίζουμε τη τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή t,
- με ΔS_t τη μεταβολή της τιμής για χρονική περίοδο Δt,
- μ την μέση τιμή της απόδοσης,
- σ την τυπική απόκλιση της απόδοσης και
- ε μια τυχαία μεταβλητή από την κανονική κατανομή N(0,1)

τότε, υποθέσουμε ότι δεν μοιράζεται μέρισμα και για διακριτό χρόνο, η μοντελοποίηση της ποσοστιαίας μεταβολής είναι:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (2.2)$$

Ο πρώτος προσθετέος στο δεύτερο μέλος δηλώνει τη μέση ποσοστιαία μεταβολή της τιμής σε χρονική περίοδο Δt, ενώ ο δεύτερος δίνει τη στοχαστική συνιστώσα της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής.

Από το τύπο (2.1) προκύπτει ότι η ποσοστιαία μεταβολή ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu \Delta t$ και διακύμανση $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Για $S_t = S_{t-1} + \Delta S_{t-1}$ προκύπτει από τον (2.1) ότι :

$$S_t = S_{t-1} + [S_{t-1}\mu \Delta t + S_{t-1}\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}]$$

και ως εκ τούτου για μικρά χρονικά διαστήματα είναι:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, d_t + \sigma\, dW_t$$

όπου W_t η κίνηση Brown.

Έτσι για σταθερά μ, σ και $dW_t \sim N(0, d_t)$ έχουμε ότι η κατανομή των ποσοστιαίων μεταβολών σε συνεχή χρόνο ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu\, d_t$ και διακύμανση $\sigma\sqrt{d_t}$.

Επομένως καταλήγουμε στη στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία περιγράφει τη τιμή του υποκείμενου τίτλου σε συνεχή χρόνο

$$dS_t = \mu S_t\, d_t + \sigma S_t\, dW_t$$

με λύση:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

Η συνολική αξία ενός υποκείμενου τίτλου S_t μέχρι την χρονική στιγμή $t \geq 0$, ακολουθεί τη Γεωμετρική κίνηση Brown αν ισχύει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός: Η στοχαστική ανέλιξη $S_t, t \geq 0$, ακολουθεί τη Γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και μεταβλητότητα $\sigma > 0$, αν για κάθε $y \geq 0, t > 0$ ισχύει:

a) η τυχαία μεταβλητή $ln\frac{S_{t+y}}{S_t} \sim N(\mu t, \sigma^2)$ και έχει αρχική τιμή $S_0 = 0$,

b) η τυχαία μεταβλητή $\frac{S_{t+y}}{S_t}$ είναι ανεξάρτητη από τις $S_u, 0 \leq u \leq t$.

Συνεπώς, αν $X_t, t \geq 0, t \sim N(\mu, \sigma^2)$είναι μια διαδικασία Brown τότε η $e^{X_t}, t \geq 0, t \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown.
Επίσης από την δεύτερη συνθήκη προκύπτει ότι μόνο οι παρούσες αξίες συμμετέχουν στον καθορισμό των πιθανοτήτων για τον υπολογισμό των αναμενόμενων αξιών του τίτλου.

Χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση της κανονικής κατανομής μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της, η οποία είναι

$$E\left[S_0 e^{\hat{\mu}t + \sigma B_t}\right] = S_0 e^{\hat{\mu}t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

όπου $\hat{\mu} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$

και την διακύμανση, μέσο του τύπου

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

η οποία είναι:

$$Var\left[S_0 e^{\hat{\mu}t+\sigma B_t}\right] = S_0^2 e^{2\hat{\mu}t+\frac{1}{2}\sigma^2 t}\,(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Κλείνοντας το δεύτερο κεφάλαιο έχουν προσδιορίσει οι βασικές έννοιες και ορισμοί για τις στοχαστικές διαδικασίες και την κίνηση Brownπου θα χρειαστούμε. Εν συνεχεία στο επόμενο κεφάλαιο, βασιζόμενοι στη Στοχαστική Θεωρία, ακολουθεί η περιγραφή χρηματοοικονομικών προϊόντων και η τιμολόγηση αυτών με το μοντέλο Black&Scholes.

3. Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα και Τιμολόγηση

Ο στόχος μιας επενδυτικής απόφασης είναι να αποκτηθεί ο απαιτούμενος συντελεστής απόδοσης με τον ελάχιστο κίνδυνο. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, διάφορα μέσα, πρακτικές και στρατηγικές έχουν σχεδιαστεί και αναπτυχθεί στο πρόσφατο παρελθόν. Με το απελευθέρωση των ορίων για το διεθνές εμπόριο και τις επιχειρήσεις, το παγκόσμιο εμπόριο απέκτησε δυναμική την τελευταία δεκαετία, ο κόσμος έχει εισέλθει σε μια νέα φάση παγκόσμιας ολοκλήρωσης. Η ενοποίηση των κεφαλαιαγορών σε παγκόσμιο επίπεδο προκάλεσε αυξημένο οικονομικό κίνδυνο με τις συχνές μεταβολές των επιτοκίων, της συναλλαγματικής ισοτιμίας και των τιμών των μετοχών. Για να ξεπεραστεί ο κίνδυνος που προκύπτει από αυτές τις μεταβαλλόμενες μεταβλητές και την αυξημένη εξάρτηση των κεφαλαιαγορών ενός συνόλου χωρών από άλλες, οι πρακτικές διαχείρισης κινδύνων έχουν επίσης αναμορφωθεί με την επινόηση τέτοιων μέσων που μπορούν να μετριάσουν το στοιχείο του κινδύνου. Αυτά τα νέα δημοφιλή μέσα είναι γνωστά ως χρηματοπιστωτικά παράγωγα, τα οποία όχι μόνο μειώνουν τον οικονομικό κίνδυνο αλλά και μας ανοίγουν νέες ευκαιρίες στην ανάληψη υψηλού κινδύνου [4],[5],[6],[12].

3.1 Χρηματοοικονομικά προϊόντα ή Χρηματιστηριακοί τίτλο

Παρακάτω παρουσιάζονται οι κυριότεροι χρηματιστηριακοί τίτλοι.

3.1.1 Μετοχές

Οι κάτοχοι των κοινών μετοχών όχι μόνο συμμετέχουν στο κοινό μετοχικό κεφάλαιο μίας εταιρίας αλλά κατέχουν και δικαιώματα όπως:

1. Συμμετέχουν στα κέρδη της εταιρίας, τα οποία προκύπτουν μετά την ικανοποίηση των δικαιωμάτων των κατόχων ομολογιών και προνομιούχων μετοχών.
2. Συμμετοχή στην έκδοση νέων μετοχών, εκτός αν έχουν παραιτηθεί από το συγκεκριμένο δικαίωμα.
3. Συμμετέχουν στο αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκκαθάριση της επιχείρησης, αφού πρώτα ικανοποιηθούν όλοι οι άλλοι δικαιούχοι.
4. Έχουν δικαίωμα ψήφου στη γενική συνέλευση της εταιρίας.

Γενικά οι ομολογίες και οι προνομιούχες μετοχές είναι ασφαλέστερες από τις απλές μετοχές αφού συμμετέχουν πρώτες στη διανομή περιουσίας αλλά και στο πλεόνασμα χρήσης. Στη περίπτωση βέβαια που η εταιρία παρουσιάζει σημαντικό ρυθμό ανάπτυξης και κατά συνέπεια παρουσιάζει μεγάλα κέρδη, οι κάτοχοι των μετοχών αποκομίζουν μεγάλες αποδόσεις.

Οι μετοχές έχουν επίσης το πλεονέκτημα να μην περιέχουν κινδύνους, όπως για παράδειγμα οι ομολογίες οι οποίες περιέχουν το κίνδυνο μη καταβολής τόκων, καθώς επίσης και να μην δεσμεύονται με καταβολή αναδρομικών μερισμάτων ή τόκων όπως οι προνομιούχες μετοχές. Τα κεφάλαια, ωστόσο, τα οποία προκύπτουν από την έκδοση νέων μετοχών έχουν μεγαλύτερο κόστος για την εταιρία από εκείνα που προέρχονται από άλλες πηγές. Αυτό συμβαίνει διότι ένας επενδυτής αναμένει μεγαλύτερες αποδόσεις οι οποίες θα πρέπει να ξεπερνούν τις αποδόσεις ασφαλέστερων τίτλων όπως οι ομολογίες που έχουν σταθερό εισόδημα. Η ικανοποίηση του επενδυτή συνδέεται με τη τιμή της μετοχής η οποία προσδοκά να είναι μεγαλύτερη η ίση της τιμής που την αγόρασε. Οι προσδοκώμενες αποδόσεις των επενδυτών θα πρέπει να θεωρούνται ως κόστος των ιδίων κεφαλαίων εκ μέρους της εταιρίας και θα πρέπει να είναι σε θέση να το καλύψει. Αν καταφέρει λοιπόν να καλύψει το κόστος αυτό τότε θα μπορεί να αντλήσει επιπλέον κεφάλαια με την έκδοση νέων μετοχών σε υψηλότερες τιμές και αποφεύγοντας έτσι την αραίωση των δικαιωμάτων των μετόχων της.

Βέβαια η εταιρία μπορεί να οδηγηθεί σε αντίθετα αποτελέσματα στη περίπτωση που υιοθετήσει τη νοοτροπία ότι τα ίδια κεφάλαια έχουν χαμηλό κόστος. Αυτή η ενέργεια μπορεί να οδηγήσει σε πρόκριση δραστηριοτήτων χαμηλής απόδοσης και ώς εκ τούτου στη μη ικανοποίηση των μετόχων.

3.1.2 Ομολογίες

Ένα ομόλογο είναι ένας τύπος επένδυσης που αντιπροσωπεύει ένα δάνειο μεταξύ ενός δανειολήπτη και ενός δανειστή. Για να το κατανοήσουμε μπορούμε να το σκεφτούμε σαν ένα προσωπικό δάνειο από μια τράπεζα – με την διαφορά όμως ότι στην περίπτωση αυτή μείς είμαστε ο δανειστής (γνωστός ως επενδυτής ή πιστωτής) και ο δανειολήπτης είναι γενικά μια κυβέρνηση ή εταιρεία (γνωστή ως εκδότης).

Στα ομόλογα, ο εκδότης υπόσχεται να καταβάλει τακτικούς τόκους στον επενδυτή με καθορισμένο επιτόκιο (το επιτόκιο κουπονιού) στο ποσό που έχει δανειστεί (το ονομαστικό ποσό) μέχρι μια συγκεκριμένη ημερομηνία (ημερομηνία λήξης). Μετά την ωρίμανση του ομολόγου, οι πληρωμές τόκων σταματούν και ο εκδότης υποχρεούται να εξοφλήσει τον επενδυτή με το ποσό του κεφαλαίου.

Επειδή οι πληρωμές τόκων γίνονται γενικά σε καθορισμένες χρονικές περιόδους και είναι αρκετά προβλέψιμες, τα ομόλογα καλούνται συχνά τίτλοι σταθερού εισοδήματος.

Τα ομόλογα θεωρούνται επενδύσεις χρέους. Από την άλλη πλευρά, μια αγορά μετοχών θεωρείται επένδυση μετοχικού κεφαλαίου επειδή ο επενδυτής (γνωστός και ως μέτοχος) γίνεται μέτοχος της εταιρείας.

Οι εκδότες μετοχών είναι συνήθως εταιρείες, οι εκδότες ομολόγων μπορούν να είναι είτε εταιρείες είτε κυβερνήσεις.

Ενώ τα ομόλογα γενικά δεν παρέχουν την ευκαιρία να μοιραστούν τα κέρδη της εταιρείας, ο μέτοχος δικαιούται να λάβει μέρος των κερδών και μπορεί επίσης να λάβει δικαιώματα ψήφου. Οι ομολογιούχοι κερδίζουν τόκο, ενώ οι μέτοχοι λαμβάνουν συνήθως μερίσματα. Αμφότεροι μπορεί να έχουν κεφαλαιακά κέρδη ή απώλειες κεφαλαίου εάν η τιμή στην οποία πωλούν τις συμμετοχές τους είναι, αντίστοιχα, υψηλότερη ή χαμηλότερη από την τιμή στην οποία τα αγόρασαν.

Τα ποσοστά των κουπονιών είναι προκαθορισμένα συνήθως και το επιτόκιο παραμένει σταθερό καθ 'όλη τη διάρκεια ζωής του ομολόγου. Ωστόσο, ορισμένα ομόλογα έχουν μεταβλητά ή κυμαινόμενα επιτόκια (οι τόκοι μεταβάλλονται από περίοδο σε περίοδο με βάση προκαθορισμένο χρονοδιάγραμμα ή τύπο). Ορισμένα ομόλογα δεν καταβάλλουν καθόλου τόκους μέχρι τη λήξη τους.

Επειδή οι κάτοχοι ομολόγων είναι οι πιστωτές και όχι οι ιδιοκτήτες των μεριδίων, σε περίπτωση πτώχευσης μιας εταιρείας, οι κάτοχοι ομολόγων έχουν υψηλότερη απαίτηση από τα περιουσιακά στοιχεία σε σχέση με τους μετόχους. Αυτό παρέχει πρόσθετη ασφάλεια στον επενδυτή ομολόγων χωρίς όμως να εξαλείφει εντελώς τον κίνδυνο.

Τέλος, τα ομόλογα διαπραγματεύονται διαφορετικά από τις μετοχές. Τα ομόλογα συνήθως διαπραγματεύονται στην αγορά εξω-χρηματιστηριακών (OTC), για παράδειγμα από έναν μεσίτη σε έναν μεσίτη άλλης επιχείρησης απευθείας αντί σε χρηματιστήριο.

3.1.3 Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Οι δύο βασικές κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια (ΣΜΕ) και τα δικαιώματα προαίρεσης (options). Μπορούν να λειτουργήσουν και σαν ασφαλιστικά προϊόντα αφού όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου κύριος σκοπός τους είναι η εξουδετέρωση κινδύνων. Ένα βασικό πλεονέκτημά τους είναι ότι παρέχουν την δυνατότητα στους κατόχους να κερδίσουν υψηλά κέρδη με μικρό κεφάλαιο, γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται ως μέσα κερδοσκοπίας. Για να γίνει βέβαια αυτό θα πρέπει να γίνει σωστή πρόβλεψή των αναμενόμενων τιμών των υποκείμενων τίτλων τους διότι σε αντίθετη περίπτωση ελλοχεύει ο κίνδυνος μεγάλων απωλειών. Η δυνατότητα όμως της κερδοσκοπίας που παρέχουν έχει οδηγήσει στη συμμετοχή μεγάλου αριθμού επενδυτών στην αγορά, έτσι διασφαλίζεται τόσο το απαραίτητο βάθος αλλά και η εύρυθμη λειτουργία της αγοράς.

Το χρηματιστήριο παραγώγων λειτούργησε στην Ελλάδα για πρώτη φορά το 1998, ωστόσο η διαπραγμάτευση των συγκεκριμένων παράγωγων είναι πολύ παλιά.

3.1.4 Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ)

Πρόκειται για συμβόλαια αγοράς προϊόντων τα οποία θα παραδοθούν σε μελλοντικό χρόνο και τα οποία προβλέπουν συγκεκριμένους όρους οι οποίοι καθορίζονται κατά τη σύναψή τους. Τα προϊόντα αυτά τα οποία αναφέρονται ως υποκείμενοι τίτλοι έχουν είτε φυσική υπόσταση όπως για παράδειγμα μέταλλα ή αγροτικά προϊόντα, είτε είναι κάποιο άλλο χρηματοοικονομικό προϊόν είτε τέλος αποτελεί πλασματικό μέγεθος, για παράδειγμα δείκτη τιμών μετοχών. Τα πιο γνωστά προθεσμιακά συμβόλαια είναι στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσής (ΣΜΕ) τα οποία είναι τυποποιημένα και διαπραγματεύονται καθημερινά στα χρηματιστήρια. Χαρακτηριστικό των ΣΜΕ είναι ότι συνήθως εκπληρώνεται ένα πολύ μικρό ποσοστό τους αφού δεν φτάνουν έως την υλοποίησής τους.

3.1.5 Χρηματοοικονομικά δικαιώματαή δικαιώματα προαίρεσης.

Ο κάτοχος ενός option έχει την δυνατότητα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πωλήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός υποκείμενου τίτλου σε μία προσυμφωνημένη τιμή. Τα option αποτελούνται από δύο κατηγορίες οι οποίες διαμορφώνονται βάση του είδους της συναλλαγής που δικαιούται να πραγματοποιήσει ο αγοραστής του option. Έτσι κατηγοριοποιούνται σε:

Call options: τα οποία παρέχουν στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός υποκείμενου τίτλου σε προσυμφωνημένη τιμή, σε κάποια μελλοντική ημερομηνία (Αμερικανικού τύπου) ή σε συγκεκριμένη ημερομηνία και μόνο (Ευρωπαϊκού τύπου). Ο πωλητής του δικαιώματος αναμένει κέρδη από την μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου, οι οποίες θα είναι τέτοιες ώστε να οδηγήσουν των αγοραστή να μην ασκήσει το δικαίωμα. Στη περίπτωση που επαληθευτούν οι προσδοκίες του τότε θα έχει αποκομίσει κέρδος ίσο με το ποσό που εισέπραξε κατά τη σύναψη του συμβολαίου.

Από την άλλη μεριά ο αγοραστής διατίθεται να καταβάλει ορισμένο ποσό ώστε να οι όροι συναλλαγής να είναι ευνοϊκότεροι από εκείνους που μελλοντικά θα διαμορφωθούν στην αγορά. Παράδειγμα, αν μπορεί να εξασφαλίσει τιμή αγοράς ‘T_0’ για κάποιον υποκείμενο τίτλο (call option), ενώ αναμένει ότι η τιμή του θα διαμορφωθεί κοντά στο επίπεδο ‘T_1’ (με

$T_1 > T_0$), θα μπορεί τότε ασκώντας το call option που αγόρασε, να αποκομίσει κέρδη ίσα προς $T_1 - T_0$ για κάθε μονάδα του υποκείμενου τίτλου.

Put options: τα οποία λειτουργούν όπως και τα call options που αναφέραμε με τη διαφορά ότι τα δικαιώματα και οι υποχρεώσει που περιγράψαμε είναι τώρα αντίστροφα.
Ο πωλητής ενός put option δεσμεύεται να αγοράσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ενός υποκείμενου τίτλου σε προσυμφωνημένη τιμή ενώ ο αγοραστής έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πωλήσει. Η τιμή του συγκεκριμένου δικαιώματος διαμορφώνεται βάση των μελλοντικών εξελίξεων του επιπέδου των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, ο πωλητής αναμένει ότι οι τιμές θα αυξηθούν ενώ ο αγοραστής ότι θα μειωθούν και τελικά οι δύο συμβαλλόμενοι πιστεύουν ότι έχουν συμφέρον να συμφωνήσουν με βάση τις τρέχουσες τιμές.

3.1.6 Χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης

Ορισμός: Μια συμφωνία η οποία παρέχει στον αγοραστή το δικαίωμα, όχι όμως υποχρέωση, να αγοράσει η να πουλήσει κάποιο αγαθό σε μία προκαθορισμένη τιμή και ημερομηνία καλείται Δικαίωμα προαίρεσης (options).
Τα δικαιώματα προαίρεσης ανήκουν στην κατηγορία των χρηματοοικονομικών προϊόντων και είναι από τα πλέον καινοτόμα και σύγχρονα οικονομικά εργαλεία. Τα δικαιώματα προαίρεσης χαρακτηρίζονται από:

- Το ασφάλιστρο Δικαιώματος (premium) το οποίο συμβολίζεται με P ή C ή V και αποτελεί τη τιμή που πρέπει να καταβάλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή ώστε να παραχωρηθεί στον πρώτο το πλεονέκτημα του δικαιώματος. Η τιμής αυτή αντισταθμίζει το γεγονός ότι ο πωλητής παραμένει εκτεθειμένος μετά τη πώληση, στις μεταβολές της αγοράς.
- Τη τιμή εξάσκησης (striking price-exercise price) η οποία συμβολίζεται με E ή K και είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία μπορεί να εξασκηθεί ένα δικαίωμα προαίρεσης ανεξάρτητα με τη τιμή αγοράς του υποκείμενου τίτλου.
- Χρόνος εξάσκησης (exercise date η expiry date) συμβολίζεται με T, εκφράζει το προσυμφωνημένο χρόνο εξάσκησης του δικαιώματος από τον αγοραστή και εξαρτάται από το αν το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκού ή Αμερικανικού τύπου.

- Στη πρώτη περίπτωση ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή μόνο στη λήξη ενώ στα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα η συναλλαγή μπορεί να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.
- Το είδος των δικαιωμάτων το οποίο εξαρτάται όχι μόνο από το χρόνο εξάσκησης αλλά και από το αν ο επενδυτής λαμβάνει θέση αγοραστή η πωλητή. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω τύποι δικαιωμάτων:

    - **Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European type call option):** Ο αγοραστής έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου ή ενός υποκείμενου τίτλου σε μία συμφωνημένη τιμή (τιμή εξάσκησης Ε) και σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή (λήξη-χρόνος εξάσκησης Τ).

      Η εξάσκηση του δικαιώματος θα γίνει από τον αγοραστή μόνο σε περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή Τ είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης. Αν με S_T συμβολίσουμε τη τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή Τ τότε για να εξασκηθεί το δικαίωμα θα πρέπει $S_T > E$. Στη περίπτωση αυτή ο αγοραστής θα αγοράσει στη τιμή Ε και θα πουλήσει αμέσως στη τιμή S_T, εισπράττοντας το ποσό με $(S_T - E)$. Σε περίπτωση που ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $S_T < E$, τότε το δικαίωμα δεν θα εξασκηθεί. Οπότε η πληρωμή σε κάθε περίπτωση είναι:

      $$(S_T - E)_+ = \max(S_T - E, 0)$$

      και η καθαρή θέση του αγοραστή :

      $$(S_T - E)_+ - C$$

      Σε κάθε περίπτωση ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή και τιμή αν το δικαίωμα εξασκηθεί από τον αγοραστή.

- **Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (European type put option):** Ο πωλητής έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πουλήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου ή ενός υποκείμενου τίτλου σε μία συμφωνημένη τιμή (τιμή εξάσκησης Ε) και σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή (λήξη-χρόνος εξάσκησης Τ).

  Η εξάσκηση του δικαιώματος θα γίνει από τον πωλητή μόνο σε περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή Τ είναι μικρότερη της τιμής εξάσκησης. Αν με S_T συμβολίσουμε τη τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή Τ τότε για να εξασκηθεί το δικαίωμα θα πρέπει $S_T < E.$ Στη περίπτωση αυτή ο πωλητής θα πουλήσει στη τιμή Ε και θα αγοράσει αμέσως στη τιμή S_T, εισπράττοντας το ποσό με $(E - S_T)$. Σε περίπτωση που ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $S_T > E$, τότε το δικαίωμα δεν θα εξασκηθεί. Οπότε η πληρωμή σε κάθε περίπτωση είναι:

  $$(E - S_T)_+ = \max(E - S_T, 0)$$

  και η καθαρή θέση του αγοραστή :

  $$(E - S_T)_+ - C$$

  Σε κάθε περίπτωση ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή και τιμή αν το δικαίωμα εξασκηθεί από τον αγοραστή.

- **Αμερικανικού τύπου δικαιώματα αγοράς (American type call option)**
- **Αμερικανικού τύπου δικαιώματα πώλησης (American type put option)**

  Τα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως τα Ευρωπαϊκά, με την μόνη διαφορά να έγκειται στο γεγονός ότι η εξάσκηση του δικαιώματος μπορεί να γίνει οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι τη λήξη.

- <u>Τη θέση των συναλλασσόμενων (position)</u>. Όπως έχει αναφερθεί στα δικαιώματα προαίρεσης παίρνουν μέρος δύο μέρη, ο αγοραστής του δικαιώματος και ο πωλητής του. Ο αγοραστής (buyer) έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή, με τη συγκεκριμένη θέση να καλείται long position ενώ αντίθετα short position ονομάζεται η θέση του πωλητή.

- Την αξία του δικαιώματος την οποία απαρτίζουν δύο στοιχεία:
    - **Η εσωτερική αξία (intrinsic value)**η οποία προκύπτει από της συναρτήσεις πληρωμής

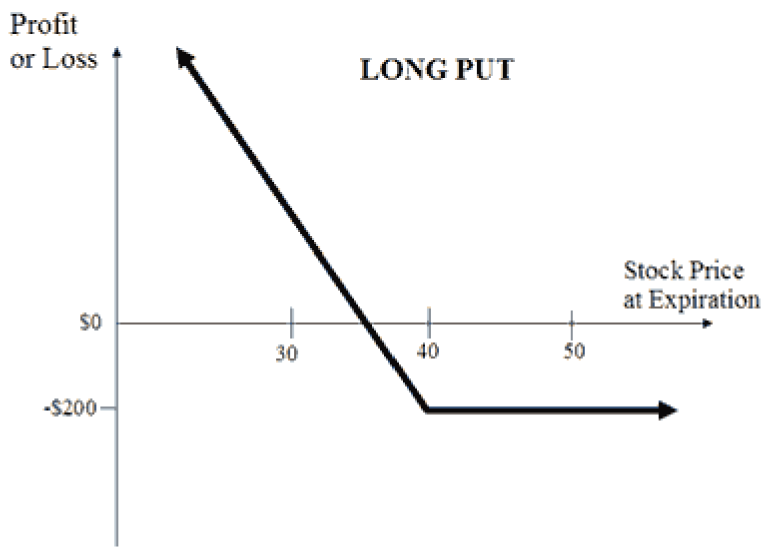
$(E - S_T)_+ = \max(E - S_T, 0)$ και $(S_T - E)_+ = \max(S_T - E, 0)$

των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων πώλησης και αγοράς αντίστοιχα, που περιγράφηκαν προηγουμένως.

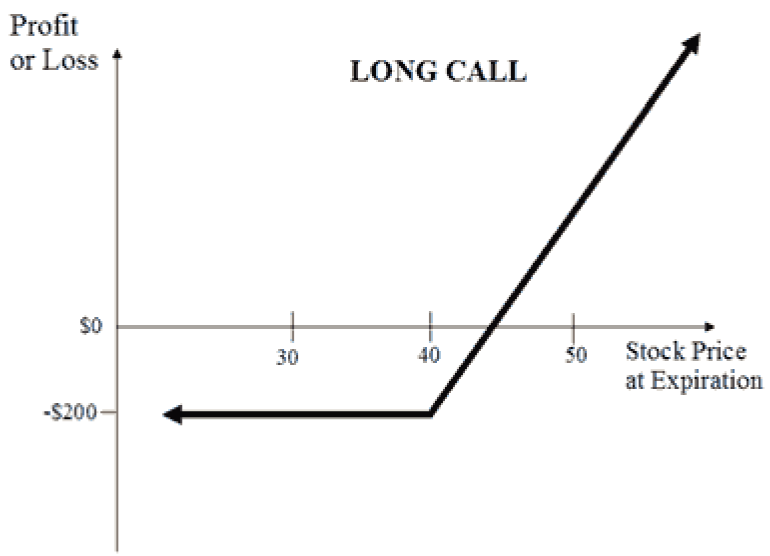
- **Η χρονική** αξία (time value) η οποία εξαρτάται από της παρακάτω μεταβλητές:
    - Το χρόνο μέχρι την χρονική στιγμή εξάσκησης του δικαιώματος αφού όσο μεγαλύτερος είναι τόσο αυξάνεται η αβεβαιότητα που σχετίζεται με το δικαίωμα. Η αβεβαιότητα αυτή έχει να κάνει με το κίνδυνο τον οποίο ενέχει το δικαίωμα και την αποζημίωση που πρέπει να καταβληθεί για την ανάληψή του.
    - Τη μεταβλητότητα (volatility) η οποία αντανακλά την ταχύτητα μεταβολής του υποκείμενου τίτλου του δικαιώματος. Ο τρόπος υπολογισμού της γίνεται βάσει ιστορικών δεδομένων (historical volatility), δηλαδή βάση πραγματικών τιμών μεταβλητότητας που έχουν παρατηρηθεί για τις τιμές του υποκείμενου τίτλου σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού αποτελεί η τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility) η οποία αποτελεί μια πρόβλεψη της διακύμανσης του υποκείμενου τίτλου.

Παρακάτω παρουσιάζονται διαγραμματικά Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα πώλησης και αγοράς με θέσεις:

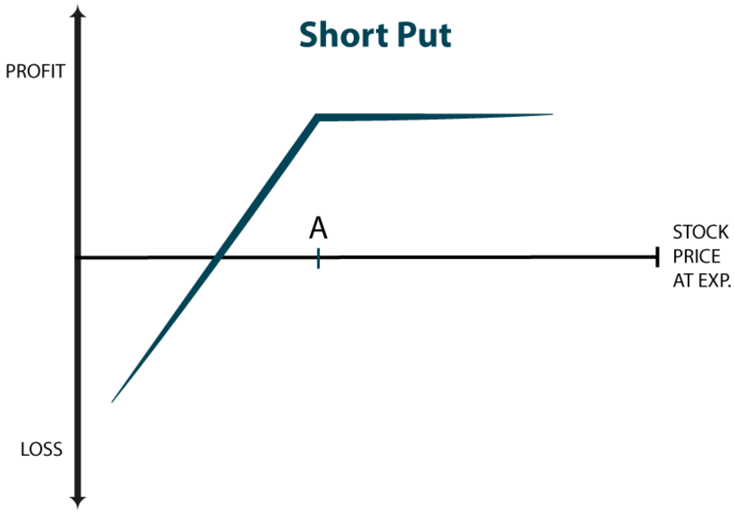
- Αγορά Δικαιώματος Πώλησης (Long Put Position)
- Πώληση Δικαιώματος Αγοράς (Long Call Position)
- Πώληση Δικαιώματος Πώλησης (Short Put Position)



Διάγραμμα 1: Αγορά δικαιώματος πώλησης [20]



Διάγραμμα 2: Πώληση δικαιώματος αγοράς [20]



Διάγραμμα 3: Πώληση Δικαιώματος Πώλησης [20]

Μετά και τη διαγραμματική απεικόνιση των θέσεων αγοράς ή πώλησης των δικαιωμάτων προαίρεσης ακολουθεί η ανάλυση του μοντέλου των Black & Scholes.

3.2 Το μοντέλο των Black&Scholes

Το μοντέλο Black & Scholes είναι ένα από τα σημαντικότερα κομμάτια της σύγχρονής χρηματοοικονομικής θεωρίας και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της τιμής των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγορά και πώλησης με υποκείμενο τίτλο μία μετοχή.

Για να κατανοήσουμε τη χρησιμότητα του μοντέλου των Black & Scholes, ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη κατοχή μας ένα δικαίωμα αγοράς. Τότε είμαστε εκτεθειμένοι στο κίνδυνο που απορρέει από το ενδεχόμενο η τιμή της μετοχής να ανέβει απότομα. Για να αντισταθμίσουμε το κίνδυνο αυτό μπορούμε να αγοράσουμε μια ποσότητα του υποκείμενου τίτλου, που στην περίπτωσή μας είναι μετοχές , στην αρχή με την πώληση του δικαιώματος. Ωστόσο, αν κρατήσουμε της μετοχές αυτές και μετά τη λήξη του δικαιώματος είμαστε και πάλι εκτεθειμένοι στο κίνδυνο μίας απότομής αλλαγής στην αξία τους. Η λύση στο πρόβλημα δίνεται από το μοντέλο των Black & Scholes και την θεωρίας τιμολόγησης των δικαιωμάτων που εκδόθηκε το 1973. Η βασική ιδέα ήταν ότι ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς, οποίος έχει πάρει θέση πωλητή (short position) στο δικαίωμα, μπορεί να προστατεύσει τη θέση του αγοράζοντας ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών, έτσι ώστε οι πιθανές απώλειες από τη θέση πωλητή που κατέχει, να αντισταθμιστούν από τη θέση αγοραστή (long position) στις μετοχές. Το ερώτημα που προκύπτει είναι πόσες μετοχές πρέπει να αγοράσει για να ελαχιστοποιήσει το κίνδυνο. Η απάντηση είναι με την συνεχή αναπροσαρμογή του ποσοστού των μετοχών και του δικαιώματος προαίρεσης στο χαρτοφυλάκιο, κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος [7]. Οι Black & Scholes απέδειξαν ότι οι επενδυτές μπορούν να δημιουργήσουν ένα χωρίς κίνδυνο χαρτοφυλάκιο στο οποίο όλοι οι κίνδυνοι της αγοράς αντισταθμίζονται και ελαχιστοποιούνται. Σε μια αποδοτική αγορά χωρίς ευκαιρίες arbitrage, κάθε χαρτοφυλάκιο με μηδενικό κίνδυνο αγοράς πρέπει να έχει αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης ίσο με το ακίνδυνο επιτόκιο. Η διατύπωση Black & Scholes καθιερώνει την κατάσταση ισορροπίας μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης του δικαιώματος προαίρεσης, της αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής και του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο [2],[4],[16],[18],[19]. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα περιγράψουμε αυτή τη μέθοδο.

Από τη δημοσίευση του μοντέλου των Black & Scholes, η ανάπτυξη του τομέα των παράγωγων τίτλων ήταν εκπληκτική. Η θεωρία της εξισορρόπησης Black & Scholes της θεωρίας τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ελκυστική δεδομένου ότι η τελική αποτίμηση των τιμών δικαιωμάτων προαίρεσης από το μοντέλο τους εξαρτάται από μερικές παρατηρήσιμες μεταβλητές εκτός από τις παραμέτρους μεταβλητότητας. Επομένως, η ακρίβεια του μοντέλου μπορεί να εξακριβωθεί με άμεσες εμπειρικές δοκιμές με δεδομένα της αγοράς. Η θεωρία τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης θεωρείται ευρέως ως η πιο επιτυχημένη θεωρία όχι μόνο στη χρηματοδότηση, αλλά σε όλους τους τομείς της οικονομίας λόγω της ικανότητάς της να εξηγεί τα εμπειρικά δεδομένα.

Για την εφαρμογή του μοντέλου θα πρέπει να γίνουν οι παρακάτω υποθέσεις :

1. Η τιμή του υποκείμενου τίτλου, ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown, δηλαδή
$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{3.1}$$
2. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r και η μεταβλητότητα σ είναι γνωστές από τους επενδυτές.
3. Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγών και προμήθειες από τη πώληση του περιουσιακού στοιχείου ή του δικαιώματος.
4. Η μετοχή δεν αποδίδει μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.
5. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage.
6. Η αγορά είναι αποτελεσματική, δηλαδή η διαπραγμάτευση του υποκείμενου τίτλου είναι συνεχής.
7. Η λήψη της θέσης πωλητή σε ένα δικαίωμα είναι επιτρεπτή για έναν επενδυτή.
8. Μπορούμε να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε οπουδήποτε αριθμό (όχι απαραίτητα ακέραιο) του περιουσιακού στοιχείου.

Το μοντέλο Black & Scholes μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα περιουσιακών στοιχείων που δεν έχουν τη μορφή (1), αλλά μπορεί να είναι δύσκολο να αντλήσουμε ακριβείς τύπους όπως για τη γεωμετρική κίνηση Brown. Η υπόθεση (4) μπορεί να εξαιρεθεί αν τα μερίσματα είναι γνωστά εκ των προτέρων. Μπορούν να καταβληθούν είτε σε διακριτά χρονικά διαστήματα είτε συνεχώς κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

3.3 Εύρεση της εξίσωσης Black & Scholes

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δικαίωμα με αξία $V(S,t)$, η οποία εξαρτάται μόνο από τη τιμή του υποκείμενου τίτλου S και τη χρονική στιγμή t. Το V μπορεί να είναι η αξία ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης ή ακόμα και η τιμή ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από διαφορετικά δικαιώματα, ωστόσο για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι αντιπροσωπεύει την αξία μόνο ενός δικαιώματος. Από το λήμμα του It$\hat{o}$ και το γεγονός ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στη χρονική στιγμή t, S(t), ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown, μπορούμε να γράψουμε:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX_t \tag{3.2}$$

η οποία αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου και απαιτεί να υπάρχουν η δεύτερη παράγωγος του V και η πρώτη παράγωγος του S. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από θέση αγοραστή σε ένα δικαίωμα και θέση πωλητή σε μία ποσότητα Δ του υποκείμενου τίτλου.

Αρχικά υπολογίζουμε τη ποσότητα Δ ώστε το χαρτοφυλάκιο να γίνει ντετερμινιστικό. Η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t, είναι:

$$\Pi(t) = V - \Delta S \tag{3.3}$$

και συνεπώς η μεταβολή στην αξία του δίνεται από τη σχέση:

$$d\Pi(t) = dV - \Delta dS \tag{3.4}$$

υποθέτοντας ότι το Δ είναι σταθερό στο χρόνο.

Επομένως αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2) στην (4) προκύπτει ότι

$$d\Pi(t) = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S\right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dX_t \tag{3.5}$$

Ο πρώτος όρος, στο δεύτερο μέρος, είναι ντετερμινιστικός ενώ ο δεύτερος στοχαστικός αφού περιέχει τη κίνηση Brown W_t.

Στην περίπτωση που επιλέξουμε, $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ (3.7) , τότε ο στοχαστικός όρος γίνεται μηδέν και η εξίσωση (3.5) γίνεται:

$$d\Pi = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt \tag{3.6}$$

Έτσι η επιλογή του $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ μετατρέπει τη σχέση από στοχαστική σε ντετερμινιστική.

Η απόδοση ενός ποσού Π, που επενδύεται σε ένα περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, θα έχει μία αύξηση $r\,\Pi dt$ σε χρόνο dt. Αν το $d\Pi$ ήταν μεγαλύτερο από το ποσό $r\,\Pi dt$ τότε θα υπήρχε ευκαιρία για arbitrage, δηλαδή κέρδος χωρίς κίνδυνο από το δανδισμό ενός ποσού Π και την επένδυσή του στο χαρτοφυλάκιο. Η απόδοση της στρατηγικής χωρίς κίνδυνο θα είναι μεγαλύτερη από το κόστος του δανεισμού. Αντίστροφα, αν το $d\Pi$ είναι μικρότερο από το $r\,\Pi dt$, για να επιτευχθεί arbitrage θα πρέπει ο επενδυτής να πάρει θέση πωλητή στο χαρτοφυλάκιο και καταθέσει Π σε τραπεζικό λογαριασμό (θα κερδίσει τους τόκους). Σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει ευκαιρία για χωρίς κίνδυνο και χωρίς κόστος σίγουρο κέρδος. Η ύπαρξη αυτού του ενδεχομένου με την ικανότητα διαπραγμάτευσης με χαμηλό κόστος διασφαλίζει ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου και του αποταμιευμένου ποσού, είναι σχεδόν ίσες. Έτσι θα πρέπει να ισχύει $d\Pi = r\,\Pi dt$ και επομένως από την (3.6) προκύπτει ότι

$$r\,\Pi dt = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας το Π στην παραπάνω εξίσωση μέσω της (3.3) και σε συνδυασμό με την (3.7) προκύπτει η

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{3.9}$$

η οποία αποτελεί την μερική διαφορική εξίσωση των B-S. Δεν πρέπει να παραβλέψουμε το γεγονός ότι, σύμφωνα με τις παραδοχές που αναφέρθηκαν προηγουμένως, κάθε παράγωγος τίτλος του οποίου η τιμή εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα αξία του S και το t και η οποία καταβάλλεται ως προκαταβολή, πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση B-S.

Για τη συνέχεια θα πρέπει να γίνουν τρείς παρατηρήσεις σχετικά με όσα έχουμε αναφέρει.

1) Εξ ορισμού το $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ είναι η ποσότητα των περιουσιακών στοιχείων που πρέπει να κατέχουμε για να αντισταθμίσουμε το κίνδυνο. Η αξία του Δ είναι θεμελιώδους σημασίας. Αποτελεί μέτρο της συσχέτισης μεταξύ των αλλαγών του δικαιώματος προαίρεσης ή άλλων παράγωγων προϊόντων και εκείνων του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.
2) Ο γραμμικός συντελεστής :

$$\mathcal{L}_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial}{\partial S} - r \tag{3.10}$$

εκφράζει το μέτρο της διαφοράς ανάμεσα στην απόδοση του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου και της απόδοσης μιας κατάθεσης σε τραπεζικό λογαριασμό. Αν και αυτή η διαφορά πρέπει να είναι ιδανικά μηδέν για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα ώστε να αποφεύγεται το arbitrage, θα δούμε στη συνέχεια ότι δεν ισχύει το ίδιο για τα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα προαίρεσης.

3) Η εξίσωση B-S (3.9) δεν περιέχει τον όρο τάσης μ του υποκείμενου τίτλου. Επομένως η τιμή του δικαιώματος θα είναι ανεξάρτητη από την απότομή ή αργά αυξάνεται το περιουσιακό στοιχείο. Η τιμή εξαρτάται μόνο από την μεταβλητότητα σ.

3.4 Η λύση της εξίσωσης B-S

Για να βρούμε την λύση της εξίσωσης (3.9) θα την μετασχηματίσουμε σε μορφή εξίσωσης διάχυσης (diffusion equation). Αρχικά κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών θα δείξουμε ότι είναι μία γραμμική παραβολική εξίσωση και στην συνέχεια η εξίσωση αυτή θα αναχθεί σε εξίσωση διάχυσης [13],[17]. Έτσι έχοντας πλέον προς λύση μία εξίσωση διάχυσης, κάνοντας ολοκληρωτικό μετασχηματισμό Fourier, αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και από το θεώρημα συνέλιξης που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, θα καταλήξουμε στην γενική λύση της εξίσωσης διάχυσης για κάθε ένα από τα είδη Ευρωπαϊκού δικαιώματος.

Μια εξίσωση παραβολικού τύπου έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b\frac{\partial V}{\partial x} + cv = 0 \tag{3.11}$$

και εν συνεχεία παίρνει τη μορφή εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{3.12}$$

Η λύση της εξίσωσης (3.12) προκύπτει κάνοντας χρήση μετασχηματισμού Fourier, για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες.

Για να δείξουμε ότι η εξίσωση (3.9) παίρνει τη μορφή (3.11) θα υποθέσουμε το επιτόκιο (r), τη μεταβλητότητα (σ) σταθερές και τις αλλαγές μεταβλητών:

$$S = K\,e^{x} \Longrightarrow e^{x} = \frac{S}{K} \Longrightarrow e^{2x} = \left(\frac{S}{K}\right)^2 \text{ ή } x = log\frac{S}{K} \tag{3.13}$$

$$V(S,t) = Kv(x,\tau) \tag{3.14}$$

$$\text{Με } \tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{2} \tag{3.15}$$

Υπολογίζουμε της μερικές παραγώγους της $V(S,t)$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -K\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = K\ \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = k\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\ln\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= -\frac{K}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{e^{-2x}}{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.18}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.9) παίρνουμε:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}v \tag{3.19}$$

Θέτοντας $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ (3.20)

τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} + kv \tag{3.21}$$

η οποία είναι της μορφής (3.11).

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής :

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x}e^{\beta x}h(x,\tau) \tag{3.22}$$

της οποίας η μερικοί παράγωγοι θα είναι:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x}e^{\beta x}\frac{\partial h}{\partial \tau} + \beta e^{\alpha x}e^{\beta x}h \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x}e^{\beta x}\frac{\partial h}{\partial \tau} + ae^{\alpha x}e^{\beta \tau}h \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial h}{\partial \tau} + \alpha e^{\alpha x}e^{\beta \tau}h\right] =$$

$$= \alpha^2 e^{\alpha x}e^{\beta \tau}h + 2ae^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial h}{\partial x} + e^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}e^{\beta \tau}h + 2ae^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial h}{\partial x} + e^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{3.25}$$

Έτσι από τις σχέσεις (3.22) με (3.25) βρίσκουμε :

$$e^{\alpha x}e^{\beta x}\frac{\partial h}{\partial \tau}+\beta e^{\alpha x}e^{\beta x}h=\alpha^2 e^{\alpha x}e^{\beta \tau}h+2ae^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial h}{\partial x}+e^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+$$

$$+(k-1)\left[e^{\alpha x}e^{\beta \tau}\frac{\partial h}{\partial \tau}+\alpha e^{\alpha x}e^{\beta \tau}h\right]-\ ke^{\alpha x}e^{\beta x}h\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{\partial h}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial h}{\partial x}[\kappa-1+2\alpha]+h[-k-\beta+\alpha(k-1)]+\alpha^2 \qquad (3.26)$$

Για να μετατρέψουμε τη προηγούμενη εξίσωση στη μορφή

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\ ,\qquad h\equiv h(x,\tau)$$

η οποία αποτελεί εξίσωση διάχυσης θα πρέπει

$$k-1+2a=0$$

και

$$-k-\beta+\alpha(k-1)+a^2=0$$

με $\alpha=-\frac{k-1}{2}$

και για το β βρίσκουμε $\beta=-\frac{(k+1)^2}{4}$

Επομένως η εξίσωση (3.22) γίνεται

$$v(x,\tau)=e^{-\frac{\kappa-1}{2}\chi}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}\ h(x,\tau) \qquad (3.27)$$

Και τελικά η (3.14) παίρνει τη μορφή:

$$V(S,\tau)=Kv(x,\tau)=Ke^{-\frac{\kappa-1}{2}\chi}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}\ h(x,\tau) \qquad (3.28)$$

Τελικά η εξίσωση των B-S ανάγεται στην εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\ , x \in \mathbb{R}\ , t \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$$

$$S = Ke^x$$

$$\tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{2}$$

$$V(S,\tau) = Ke^{-\frac{\kappa-1}{2}x}e^{-\frac{(k+1)^2}{4}\tau}\ h(x,\tau)$$

$$K = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Η προηγούμενη εξίσωση διάχυσης μπορεί να λυθεί με μετασχηματισμό Fourier. Ως αρχική συνθήκη παίρνουμε h(x,0)

Αν λοιπόν $\mathcal{F}(h) = \tilde{h}(k)$ ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης f ως προς x, τότε για την εξίσωση διάχυσης θα ισχύει:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} = -k^2\tilde{h} \tag{3.29}$$

με λύση

$$\tilde{h}(k,\tau) = \tilde{h}(k,0)e^{-k^2\tau} \tag{3.30}$$

με $\tilde{h}(k,0)$ να αντιπροσωπεύει το μετασχηματισμό Fourier της αρχικής συνάρτησης της h.

Για να καταλήξουμε στη λύση της $\tilde{h}(x,\tau)$ θα πρέπει να εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, επομένως ορίζουμε τους μετασχηματισμούς

$$\mathcal{F}(\tilde{h}_1) = \tilde{h}_1 = e^{-k^2\tau} \tag{3.31}$$

και

$$\mathcal{F}(\tilde{h}_2) = \tilde{h}_2 = \tilde{h}_1(k,0) \tag{3.32}$$

Έτσι η σχέση (3.30) γίνεται

$$\tilde{h}(k,\tau) = \tilde{h}_1(k,\tau)\tilde{h}_2(k,\tau) \tag{3.33}$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$h(x,\tau) = (h_1 * h_2)(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}]\ h(\xi,0)d\xi \tag{3.34}$$

Συνοψίζοντας για το 3ο Κεφάλαιο μελετήσαμε τις διάφορες μορφές των χρηματοοικονομικών προϊόντων και προσδιορίσαμε την εξίσωση Black & Scholes όσον αφορά την τιμολόγησή τους. Με βάση τα δεδομένα του κεφαλαίου 3 προχωράμε στο επόμενο κεφάλαιο όπου μέσω προσομοίωσης Monte Carlo και τη χρήση του προγράμματος MATLABγίνεται η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης.

4. Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης σε MATLAB με Χρήση της Μεθόδου Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στη χρηματοοικονομία με εφαρμογές όπως στη τιμολόγησή χαρτοφυλακίων, τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης και υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk). Το πλεονέκτημα της μεθόδου προσομοίωσης έγκειται στο γεγονός ότι οι περιπτώσεις κατά τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή ενός δικαιώματος είναι λίγες και απαιτούν εφαρμογή συγκεκριμένων μοντέλων, όπως το μοντέλο των Black&Scholes ή το μοντέλο του Merton (Jump Diffusion Model). Εφόσον λοιπόν η αναλυτική λύση στην πράξη είναι δύσκολή, γίνεται προσεγγιστικός υπολογισμός της τιμής με χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Ωστόσο ένα μειονέκτημα των συγκεκριμένων μεθόδων είναι η περιπλοκότητα των πράξεων αφού για να καθοριστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τη τιμή που θέλουμε χρειάζεται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων. Το μειονέκτημα αυτό μετριάζεται σε μεγάλο βαθμό με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων όπως το πρόγραμμα MATLAB το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε.

Στις παρακάτω παραγράφους θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά το μοντέλο των Black & Scholes για την παραγωγή των μονοπατιών της τιμής του υποκείμενου τίτλου, ενός δικαιώματος, μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo και στη συνέχεια η μέθοδος θα εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος τύπου «exchange». Τέλος θα μελετηθεί το μοντέλο του Merton (Jump Diffusion Model) από το οποίο θα παραχθούν τροχιές για τη τιμή ενός δικαιώματος μέσο της προσομοίωσης Monte Carlo.

4.1 Μελέτη του απλού μοντέλου χωρίς άλματα

4.1.1 Παραγωγή των μονοπατιών

Η προσομοίωση της πορείας της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι απαραίτητη για την τιμολόγησή του, έτσι χρειαζόμαστε ολόκληρή η τουλάχιστόν ένα κομμάτι της πορείας της τιμής του για μία δεδομένη τιμή ούτως ώστε να μπορεί να γίνει σωστή τιμολόγηση. Εξαιτίας της τυχαιότητας που προέρχεται από την γεωμετρική κίνηση Brown, η παραγωγή των μονοπατιών εμπεριέχει δύο είδη σφαλμάτων, το σφάλμα που προέρχεται από τον τυχαίο παράγοντα της μεθόδου Monte Carlo (sampling error) [9],[11],[18] και το οποίο μπορεί να μειωθεί με στρατηγικές μείωσης διακύμανσης και το σφάλμα της διακριτοποίηση. Για να καταλάβουμε το σφάλμα της διακριτοποίησης ας δούμε πώς διακριτοποιήται η στοχαστική διαφορική εξίσωση του Ito:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t \tag{4.1}$$

Η απλούστερη διακριτή προσέγγιση, γνωστή ως προσέγγιση του Euler, είναι η :

$$S_{t+\delta t} - S_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)\sqrt{\delta t}\, \varepsilon$$

όπου δt είναι το διάστημα μιας μικρής περιόδου και ε μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή από την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διασπορά δt. Η προσέγγιση αυτή ενέχει ένα ποσοστό σφάλματος το οποίο προέρχεται από τη μετατροπή της διαφορικής εξίσωσης σε πεπερασμένο αριθμό διαφορών, ωστόσο το σφάλμα αυτό ελαχιστοποιείται όσο το δt μικραίνει. Η μείωση του σφάλματος που προέρχεται από τη μέθοδο Monte Carlo (sampling error) μπορεί να επιτευχθεί με την αύξηση των επαναλήψεων της μεθόδου.

Το σφάλμα της διακριτοποίησης μπορεί να προκαλέσει αλλαγές στην κατανομή πιθανοτήτων της λύσης της εξίσωσης.Παίρνοντας πολύ μικρά διαστήματα δt μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα ωστόσο αυξάνεται σημαντικά ο χρόνος υπολογισμού.Για παράδειγμα το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown :

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \tag{4.2}$$

το οποίο μέσω του μετασχηματισμού Euler μετασχηματίζεται σε :

$$S_{t+\delta t} = (1 + \mu\, \delta t) S_t + \sigma S_t \sqrt{\delta t}\, \varepsilon \tag{4.3}$$

Στη εξίσωση (4.3) η περιθώρια κατανομή των S_i για i=0,1,2,…. είναι η κανονική ενώ στην (4.2) η λογαριθμοκανονική.

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε τον ορισμό της λογαριθμοκανονικής κατανομής:

Ορισμός: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y = e^X$ καλείται λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution) με παραμέτρους μ, σ^2 $(LN(\mu, \sigma^2))$. Επομένως, αν $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ τότε η τυχαία μεταβλητή $lnY \sim N(\mu, \sigma^2)$.

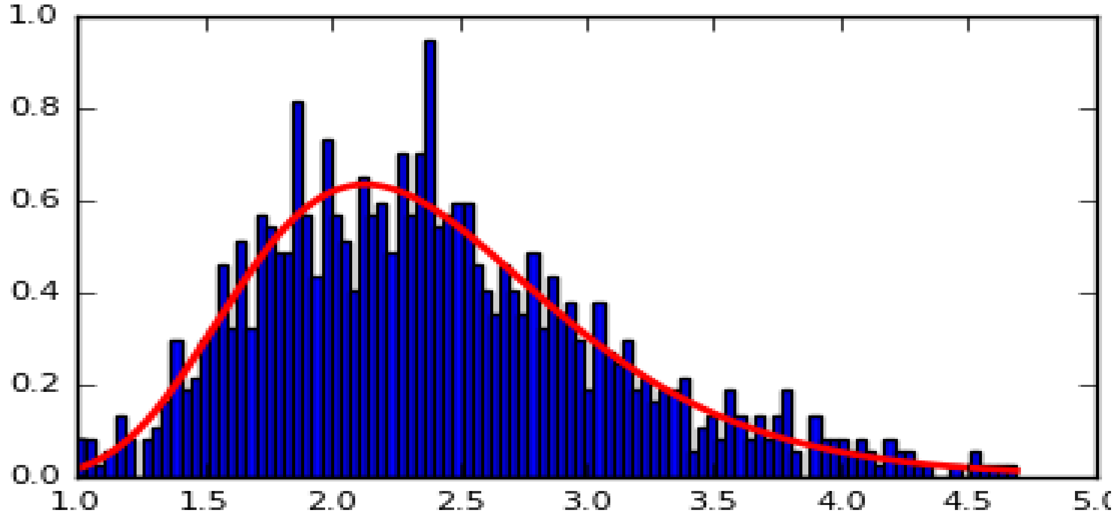
Η τυχαία μεταβλητή Y θα έχει συνάρτηση κατανομής:

$$F_{LN}(t) = P(Y \leq t) = P(e^X \leq t) = P(X \leq lnt) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{lnt-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{lnt-\mu}{\sigma}\right),\ t \geq 0$$

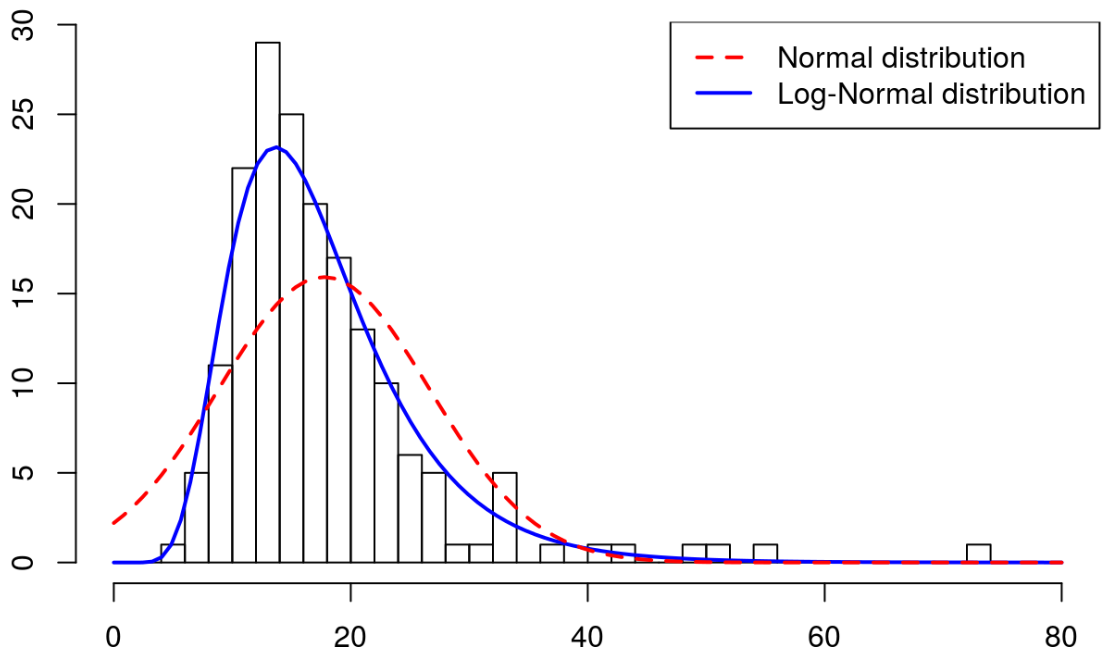
Και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{LN}(t) = \frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{lnt-\mu}{\sigma}\right) = \Phi'\left(\frac{lnt-\mu}{\sigma}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{lnt-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(lnt-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ t \geq 0$$

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο διαγράμματα, στο πρώτο διάγραμμα (βλ. Δίαγραμμα1) απεικονίζεται το ιστόγραμμα της λογαριθμοκανονικής κατανομής, ενώ στο δεύτερο (βλ. Δίαγραμμα2) αντιπαραβάλλονται οι καμπύλες της λογαριθμοκανονικής συγκριτικά με την κανονική κατανομή.



Διάγραμμα 1: Ιστόγραμμα λογαριθμικής κατανομής

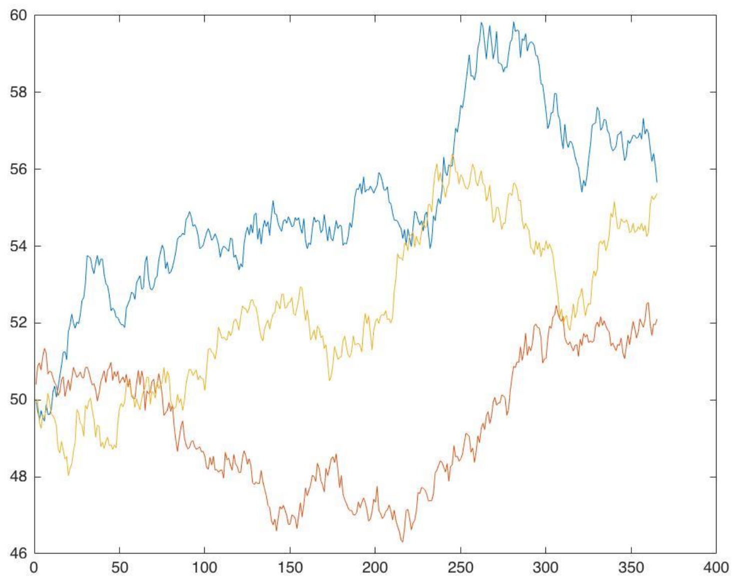


Διάγραμμα 2: Σύγκριση λογαριθμοκανονικής και κανονικής κατανομής γραφικά

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα μονοπάτια τα οποία παρήχθησαν από την εξίσωση (4.3) μέσω του προγράμματος MATLAB και αφορούν δικαίωμα προαίρεσης με αρχική τιμή $S_0 = 50$, μ=0.1, σ=0.3 και διάρκεια T=365.

Διαδικασία προσομοίωσης:

Χρησιμοποιώντας το αρχείο SamplePath[1] της MATLAB θα παράγουμε δειγματικές τροχίες για δικαίωμα με διάρκεια T= 1 χρονιά. Χωρίζοντας τον 1 χρόνο σε N=365 κομμάτια θα φτιάξουμε τα διαστήματα δt δηλαδή δt = T/N. Έτσι λοιπόν μπορούμε να δημιουργήσουμε τις πρώτες 365 τιμές μια για κάθε διάστημα δt. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την διαδικασία άλλες 100 φορές και παίρνουμε για κάθε δt τη μέση τιμή των αντίστοιχων εντάσεων της. Έτσι κάνοντας τρείς διαφορετικές προσομοίωση Monte Carlo δημιουργούμε τις τελικές τροχιές οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 1) με διαφορετικά χρώματα.

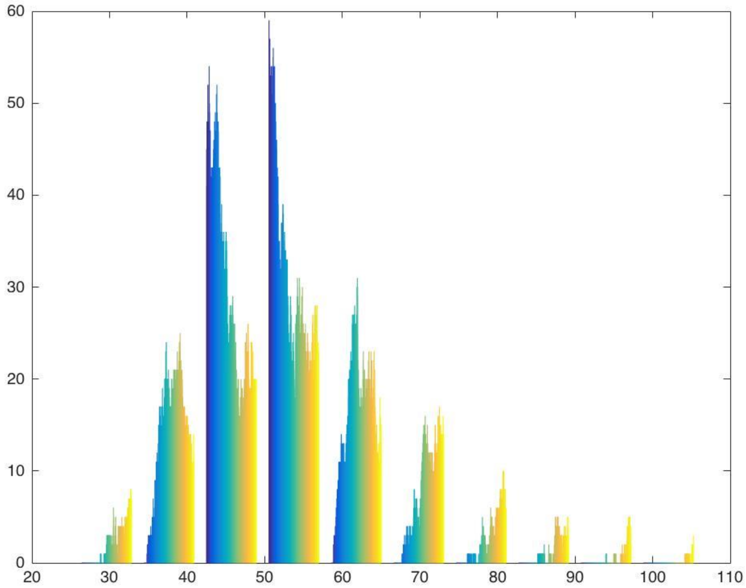


Εικόνα 1 Τροχιές της τιμής για 3 διαφορετικές προσομοιώσεις

Παρακάτω παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των τιμών (εικόνα 2) που παρήχθησαν από τις 100 επαναλήψεις το οποίο μας δίνει την κατανομή τους η οποία είναι λογαριθμοκανονική.

---

[1] Παράρτημα Α



Εικόνα 2 Ιστόγραμμα των τιμών του δικαιώματος

<u>Προσομοιώνοντας τη γεωμετρική κίνηση Brown</u>

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito η εξίσωση (4.2) μετασχηματίζεται στην εξίσωση:

$$dlogS_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\, dW_t \qquad (4.4)$$

για την οποία προκύπτει από την λογαριθμοκανονική κατανομή και για $\nu = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ ότι:

- $E\left[\frac{\log(S_t)}{S_0}\right] = \nu t$
- $V\left[\frac{\log(S_t)}{S_0}\right] = \sigma^2 t$
- $E\left[\frac{S_t}{S_0}\right] = e^{\mu t}$
- $V\left[\frac{S_t}{S_0}\right] = e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$

Η λύση της εξίσωσης (4.4) γράφεται ως :

$$S_t = S_0 \ e^{\left(\nu t + \sigma \int_0^t dW(\tau)\right)}$$

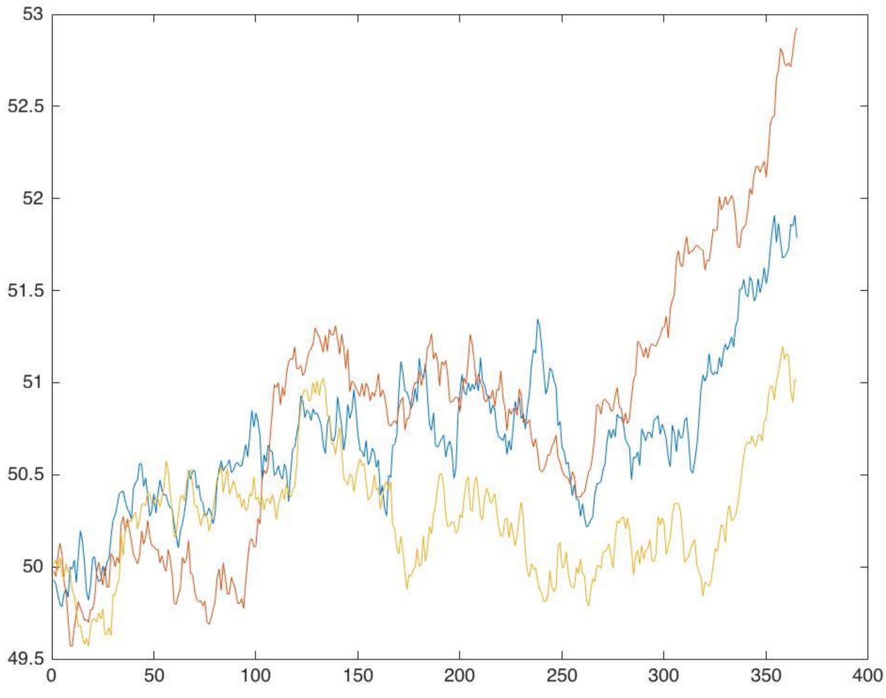
Για την προσομοίωση της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης σε διάστημα (0,T) πρέπει να διακριτοποιήσουμε το χρόνο σε διαστήματα δt. Έτσι από τη τελευταία εξίσωση προκύπτει η :

$$S_{t+\delta t} = S_t \, e^{(\nu \, \delta t + \sigma \, \sqrt{\delta t} \, \varepsilon)} \tag{4.5}$$

Όπου ε μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή από την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διασπορά δt.

Μετασχηματίζοντας τη (4.2) καταλήγουμε στην (4.4) ,η οποία είναι λογαριθμικού τύπου εξίσωση και οι τιμές των S_i ακολουθούν λογαριθμοκανονική κατανομή.

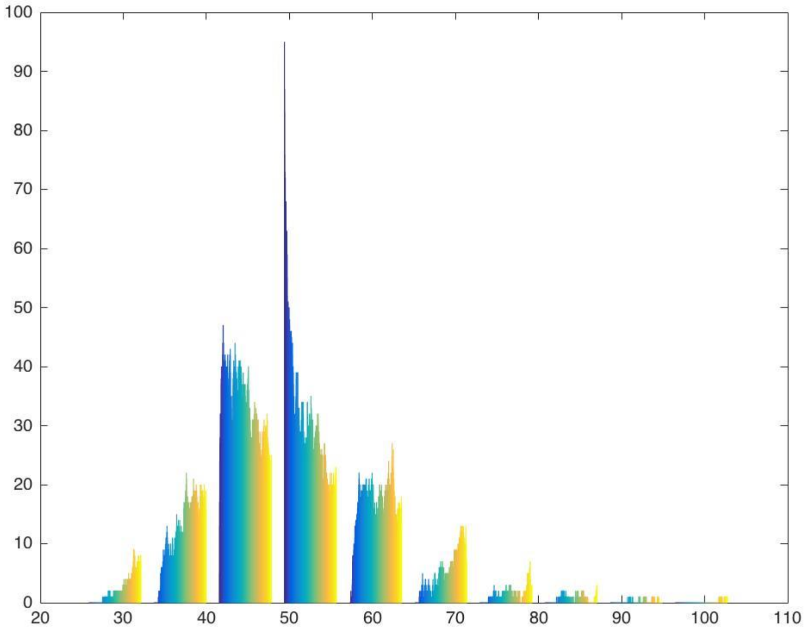
Χρησιμοποιώντας του κώδικα της MATLAB SamplePath2 [2] ο οποίος προσομοιώνει δειγματικές τροχιές για την τιμή του δικαιώματος κάνοντας χρήση της εξίσωσης (4.5) παίρνουμε για τρείς διαφορετικές προσομοιώσεις την εικόνα 3:



Εικόνα 3 Τροχιές της τιμής για 3 διαφορετικές προσομοιώσεις

Στο ιστόγραμμα των τιμών S_i (εικόνα 4) που ακολουθεί οι τιμές ακολουθούν τη λογαριθμοκανονική κατανομή.

[2] Παράρτημα Α



Εικόνα 4 Ιστόγραμμα των τιμών του δικαιώματος

4.1.2 Τιμολογώντας ένα «exchange» option

Η προσομοίωση Monte Carlo είναι εύκολο να εφαρμοστεί και για «exchange» δικαιώματα, δηλαδή δικαιώματα τα οποία αναφέρονται σε δύο περιουσιακά στοιχεία. Τα συγκεκριμένα δικαιώματα ονομάζονται «exchange» διότι στη λήξη μπορούμε να ανταλλάξουμε το ένα περιουσιακό στοιχείο με το άλλο. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα υπολογίσουμε τη τιμή ενός τέτοιου Ευρωπαϊκού δικαιώματος το οποίο αναφέρεται σε δύο περιουσιακά στοιχεία, των οποίων οι τιμές μοντελοποιούνται ως δυσδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown:

$$dU(t) = rU(t)dt + \sigma_U U(t)dW_U(t)$$
$$dV(t) = rV(t)dt + \sigma_V V(t)dW_V(t)$$

όπου οι δύο κινήσεις Brown έχουν στιγμιαία συσχέτιση ρ.

Η πληρωμή του δικαιώματος στη λήξη T είναι $\max(V_T - U_T, 0)$ συνεπώς η τελική πληρωμή εξαρτάται από τη διαφορά της τιμής των δύο περιουσιακών στοιχείων

Για παράδειγμα αν έχουμε στη κατοχή μας ένα περιουσιακό στοιχείο U και ένα exchange option τότε η πληρωμή στη λήξη θα είναι $U_T + \max(V_T - U_T, 0) = \max(V_T, U_T)$.
Η τιμολόγηση είναι εφαρμογή μιας γενίκευσης της προσέγγισης των Black & Scholes, συγκεκριμένα:

$$P = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{V_0}{U_0}\right) + \hat{\sigma}^2 \frac{T}{2}}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_V^2 + \sigma_U^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo στη MATLAB χρησιμοποιούμε το κώδικα ExchangeOption[3]. Στο συγκεκριμένο κώδικα πρέπει να παραχθούν μονοπάτια για δύο κινήσεις Brown οι οποίες είναι συσχετισμένες. Έτσι χρησιμοποιούμε την ακόλουθη μέθοδο η οποία είναι γνωστή ως ανάλυση Cholesky [1]:

Έστω δύο μεταβλητές από την κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης ρ και πίνακα συνδιακύμανσης:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Ο οποίος αναλύεται σε $\Sigma = LL'$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Επομένως για να παράγουμε δύο δυσδιάστατες συσχετισμένες κινήσεις Brown, πρέπει να παράγουμε αρχικά δύο ανεξάρτητες μεταβλητές Z_1, Z_2 από την κανονική κατανομή, ώστε :

$$\varepsilon_1 = Z_1$$

$$\varepsilon_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2$$

να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή των μονοπατιών.

[3] Παράρτημα Α

Το αποτέλεσμα που επιστρέφει ο κώδικας για $V_0 = 50$, $U_0 = 60, \sigma_V = 0.3, \sigma_U = 0.4, \rho = 0.7, T = \frac{5}{12}, \mu = 0.05$ είναι :

P =0.8621
$C_v = 0.8512$
$C_u = 0.873$

Όπου P η τιμή του δικαιώματος η οποία αποτελεί μέση τιμή των δύο τιμών C_v και C_u.

4.2 Το μοντέλο του Merton (Jump Diffusion model)

Το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελείται από δύο μέρη, αυτό των αλμάτων (Jumps) και της διάχυσης (diffusion) [7],[8],[11]. Το μέρος της διάχυσης καθορίζεται από την κίνηση Brown ενώ το μέρος των αλμάτων καθορίζεται από μία κρουστική συνάρτηση[4] και μία συνάρτηση κατανομής. Η κρουστική συνάρτηση δημιουργεί μεταβολές στην αξία του περιουσιακού στοιχείου και καθορίζεται από την συνάρτηση κατανομής. Το κομμάτι των αλμάτων σκοπό έχει να συμπεριλάβει στο μοντέλο ξαφνικές και απρόβλεπτες αλλαγές στη τιμή του υποκείμενου τίτλου οι οποίες οφείλονται σε διάφορους οικονομικούς και μη παράγοντες.
Η γενικευμένη εξίσωση του μοντέλου είναι:

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t + \nu\, S_t\, dN(t) \tag{4.6}$$

όπου:

- S_t : η τιμή του περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή t
- $W(t)$: η κίνηση Brown

4 Η κρουστική συνάρτηση (ή γενικευμένη συνάρτηση του Ντιράκ) είναι μαθηματική περιγραφή κάποιας ποσότητας η οποία μεταβάλλεται σαν να μετέχει σε φαινόμενο κρούσης. Η μεταβλητή αυτή ποσότητα, αν ήταν φυσική, θα είχε ελάχιστη διακύμανση σε όλη τη διάρκεια του χρόνου πριν την κρούση, τη στιγμή της κρούσης θα αυξανόταν ακαριαία στη μέγιστη τιμή και αμέσως μετά θα έπαιρνε σχεδόν αμέσως την ελάχιστη τιμή διακύμανσης και πάλι.

- $N(t)$: μία διαδικασία Poisson με ένταση άφιξης γεγονότων λ
- ν: η κρουστική συνάρτηση στην οποία οφείλονται τα άλματα από το S_ν στο $S_{\nu+1}$

Η προσέγγιση των Black & Scholes έφερε επανάσταση στο τομέα της τιμολόγησης και διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων προαίρεσης και θεωρεί ότι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου, το οποίο είναι υποκείμενος τίτλος σε ένα δικαίωμα προαίρεσης, ακολουθεί τροχιά που περιγράφεται από μία γεωμετρική κίνηση Brown. Ωστόσο η γεωμετρική κίνηση Brown δεν αντανακλά όλες τις πιθανές μεταβολές στη τιμή για παράδειγμα μίας μετοχής.
Έτσι ο Merton κατασκεύασε μια προσέγγιση στην οποία προβλέπονται ακραίες μεταβολές (άλματα) στη τιμή του περιουσιακού στοιχείου και η οποία είναι γνωστή ως ''Jump Diffusion Model''.

Οι υποθέσεις του μοντέλου είναι:

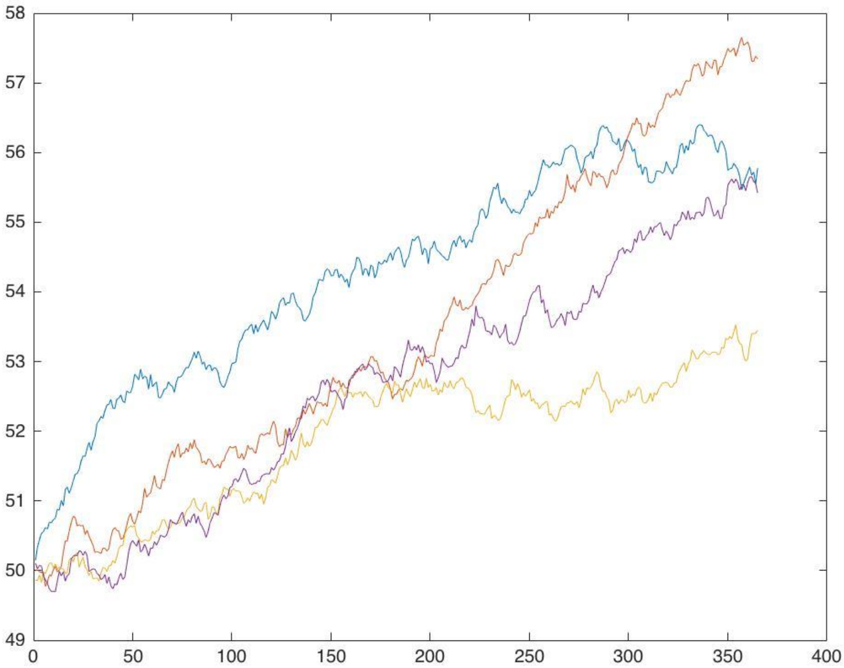
1. Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγής και φόροι.
2. Δεν αποδίδονται μερίσματα.
3. Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο παραμένει σταθερό.
4. Δεν υπάρχουν περιορισμοί όσον αφορά την αξία της συναλλαγής και την εξέλιξη των τιμών του περιουσιακού στοιχείου.
5. Η θέση short επιτρέπεται.
6. Όλες οι πληροφορίες είναι διαθέσιμες σε όλους τους επενδυτές.
7. Δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage.
8. Το δικαίωμα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού τύπου.
9. Η τιμή της μετοχής S_t καθορίζεται απο τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (4.6)

Επομένως η εξίσωση (4.3) γίνεται:

$$S_{t+\delta t} = (1 + \mu\, \delta t)S_t + \sigma S_t \sqrt{\delta t}\, \varepsilon + S_t\, DJ_t$$

όπου J_t είναι η διαδικασία που μετρά το αποτέλεσμα των αλμάτων που έχουν γίνει μέχρι τη χρονική στιγμή t.

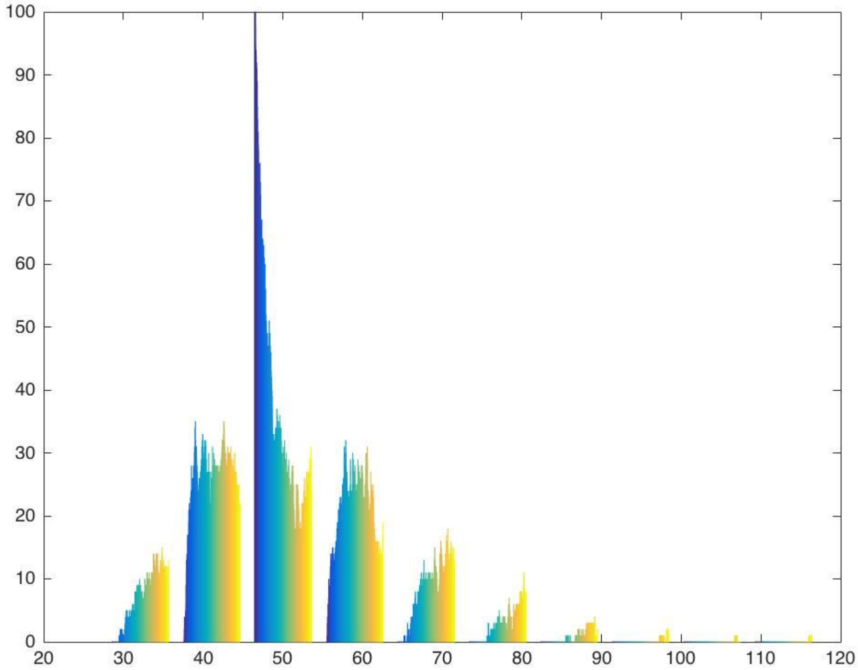
Χρησιμοποιώντας τον κώδικα SamplePathJumps[5] και για τις ίδιες τιμές που χρησιμοποιήθηκαν στη παράγραφο (4.1.1) παράγουμε τις τροχιές της τιμής S_t , οι οποίες φαίνονται στη εικόνα 5.



Εικόνα 5 Τροχιές της τιμής του δικαιώματος

[6]Παράρτημα Α

Στο ιστόγραμμα των τιμών S_i (εικόνα 6) που ακολουθεί οι τιμές ακολουθούν τη λογαριθμοκανική κατανομή.



Εικόνα 6 Ιστόγραμμα τιμών δικαιώματος

Συμπεράσματα

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ένα σημαντικό επίτευγμα της σύγχρονης Οικονομικής Θεωρίας. Το πλεονέκτημα της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης δεν είναι κατ’ ανάγκην να παρέχει την "σωστή τιμή". Η τιμή που δίνει η ίδια η αγορά είναι η καλύτερη μέθοδος τιμολόγησης, δηλαδή μια αποτελεσματική αγορά παρέχει την καλύτερη τιμή για τα δικαιώματα. Τα πραγματικά οφέλη των μοντέλων αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ότι παρέχουν μια ακριβή «στιγμιαία εικόνα» των τρεχουσών συνθηκών της αγοράς (π.χ. τεκμαρτή μεταβλητότητα).

Οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι μια σημαντική τεχνική για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης στα χρηματοοικονομικά αφού αποφεύγει πολύπλοκα μαθηματικά και έχει απλή εφαρμογή από εννοιολογική και πρακτική άποψη. Στην πράξη, είναι διαδικασίες δειγματοληψίας τυχαίων αποτελεσμάτων για μια συγκεκριμένη διαδικασία. Ωστόσο, ενώ πολλοί ακαδημαϊκοί και επαγγελματίες αναγνωρίζουν τα πλεονεκτήματα της προσομοίωσης μέσω μεθόδων MonteCarlo, μερικές μελέτες συζητούν τις αδυναμίες τους στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Για παράδειγμα, οι Clewlow και Strickland (1998) και Hull (2000) επισημαίνουν ότι οι συγκεκριμένες μέθοδοι παράγουν υψηλές διακυμάνσεις που οδηγούν σε υπολογιστική αναποτελεσματικότητα. Αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να παραληφθεί, διότι μια τέτοια αναποτελεσματικότητα μπορεί να προκαλέσει έναν προκατειλημμένο εκτιμητή της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης. Σε αυτή την εργασία, εστιάζουμε στην αποδοτικότητα και την ακρίβεια της προσομοίωσης στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Οι συναλλαγές των δικαιωμάτων ενέχει μεγάλο ποσοστό κινδύνου. Τα μοντέλα τιμολόγησης των δικαιωμάτων δημιουργήθηκαν ώστε να μειώσουν, να προβλέψουν και να ελέγξουν τον κίνδυνο για μεμονωμένα δικαιώματα ή για χαρτοφυλάκια δικαιωμάτων.

Τα συμπεράσματα από το πιο διαδεδομένο μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης Black & Scholes βασίζεται σε μια σειρά υποθέσεων που δεν υπάρχουν πάντα στην πραγματική αγορά.

Θεωρητικά, το μοντέλο Black & Scholes θα έπρεπε να λειτουργεί άψογα για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης, αν μπορούσε κανείς να επαναπροσδιορίζει συνεχώς ένα χαρτοφυλάκιο παραγώγων και αν η αναμενόμενη μεταβλητότητα ήταν σταθερή ίση με τη μεταβλητότητα της τιμής των μετοχών. Τα πειράματα για τις ευρωπαϊκά δικαιώματα δείχνουν ότι, παρόλο που η επανεξισορρόπηση δεν μπορεί να γίνει συνεχώς στην πραγματικότητα, ο κίνδυνος που συνδέεται με τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς μπορεί να ελεγχθεί. Η συχνή αυτή εξισορρόπηση θα μπορούσε να αποτρέψει την εμφάνιση μεγάλων σφαλμάτων αντιστάθμισης κινδύνου κατά μέσο όρο. Ωστόσο, η σταθερή αντιστάθμιση με μια λανθασμένη αναμενόμενη μεταβλητότητα μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλα σφάλματα αντιστάθμισης. Από την άποψη του εμπόρου, η υπερεκτίμηση μιας επιλογής μπορεί να είναι κερδοφόρα, αλλά η υποτίμηση μιας επιλογής μπορεί να προκαλέσει ζημία.

Συμπερασματικά καταλήγουμε στο γεγονός ότι στην πραγματική αγορά οι υποθέσεις του μοντέλου B&S δεν επαληθεύονται πάντα σε ικανοποιητικό ποσοστό. Ωστόσο κάνοντας χρήση μεθόδων προσομοίωσης για το μοντέλο των B&S μπορούμε να εξάγουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για παραμέτρους του μοντέλου, όπως για παράδειγμα η μεταβλητότητα. Με τη χρήση της σωστής μεταβλητότητας το μοντέλο δουλεύει αρκετά ικανοποιητικά για ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς ακόμα και όταν η συνεχής εξισορρόπηση δεν είναι εφικτή.

Παράρτημα Α

Κώδικες και συναρτήσεις MATLAB

A.1SamplePaths.m

Στο κώδικα που ακολουθεί γίνεται προσομοίωση για τις τροχιές της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης βάση του τύπου (4.3) [16],[18]. Αρχικά ορίζεται ο αριθμός επαναλήψεων της μεθόδου Monte Carlo και στην συνέχεια ακολουθεί η πρώτη εντολή επανάληψης for της προσομοίωσης. Αφού γίνει η δήλωση των παραμέτρων του μοντέλο γίνεται ο υπολογισμός της ποσότητας dw, η οποία αφορά την κίνηση Brown. Ωστόσο η ποσότητα αυτή δεν χρησιμοποιείται στη συνέχεια του προγράμματος καθώς χρησιμοποιούμε το διακριτό μοντέλο. Ακολουθεί ο υπολογισμός της τιμής του δικαιώματος για κάθε χρονική στιγμή j και αποθήκευση των παραγόμενων τιμών στον πίνακα S. Τέλος για κάθε επανάληψη της μεθόδου MC υπολογίζουμε τη μέση τιμή του πίνακα S και την αποθηκεύουμε στο πίνακα mean_S.

```
h=100; % the number of mc

for u=1:h
  mu=0.1; sigma=0.3;

 T=1; N=365; dt=T/N;      % discretize a T period to N pieces with length dt
 S0=50;

dW=sqrt(dt)*randn(1,N); % estimate the increments dW=W(t)-W(s)   0<s<t<T
W=cumsum(dW);            %cumulative sum
St=S0;
tint=0;
DJ=0;
for j=1:N%xwrizoume to T se N periodoys diastimatos dt kai theloume ti timi
toy lamda gia kathe mia apo aytes tis periodoys
  et=normrnd(0,1);
  Stdt = (1+mu*dt)*St+sigma*St*sqrt(dt)*et;

  St=Stdt;  % redifine the St
  S(u,j)=Stdt;% save Stdt values to S(j) matrix
  t(j)=tint+dt;
  tint=t(j);
  mo(j)=DJ;
end
end
```

```
%ypologismos toy mesoy twn entasewn
mean_S=sum(S)/h;
figure (1)
plot(mean_S)
figure (2)
hist(S)
```

A.2 SamplePath2.m

Ο παρακάτω κώδικας είναι ίδιος με το κώδικα SimplePath.m με την μόνη διαφορά ότι για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος για κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιείται ο τύπος (4.5).

```
h=100; % the number of mc

for u=1:h
  mu=0.1; sigma=0.3;

 T=1; N=365; dt=T/N;      % discretize a T period to N pieces with length dt
 S0=50;

dW=sqrt(dt)*randn(1,N); % estimate the increments dW=W(t)-W(s)  0<s<t<T
W=cumsum(dW);             %cumulative sum
St=S0;
tint=0;
forj=1:N%xwrizoume to T se N periodoys diastimatos dt kai theloume ti
  n=(mu-0.5*sigma^2)*dt;
  et=normrnd(0,1);
  Stdt = St*exp(n*dt+sigma*sqrt(dt)*et);

    St=Stdt;  % redifine the St
    S(u,j)=Stdt;% save Stdt values to S(j) matrix
    t(j)=tint+dt;
    tint=t(j);
    mo(j)=DJ;
end
end

%ypologismos toy mesoy twn entasewn
mean_S=sum(S)/h;

mean_S=sum(S)/h;
 figure (1)
 plot(mean_S)
figure (2)
 hist(S)
```

A.3 SamplePathJumps.m

Ο κώδικας που ακολουθεί αποτελεί επέκταση του προηγούμενου κώδικα. Η επέκταση αφορά τη προσθήκη αλμάτων (Jumps) για την προσομοίωση των τιμών του δικαιώματος του κεφαλαίου 4.2 κάνοντας χρήση της εξίσωσης (4.6). Για τον υπολογισμό των αλμάτων χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις pointpoissonNt και CPP οι οποίες περιγράφονται παρακάτω.

```
h=100; % the number of mc

for u=1:h
  mu=0.1; sigma=0.3;

 T=1; N=365; dt=T/N;      % discretize a T period to N pieces with length dt
 S0=50;

dW=sqrt(dt)*randn(1,N); % estimate the increments dW=W(t)-W(s)  0<s<t<T
W=cumsum(dW);             %cumulative sum
St=S0;
tint=0;
DJ=0;
for j=1:N%xwrizoume to T se N periodoys diastimatos dt kai theloume ti timi
toy lamda gia kathe mia apo aytes tis periodoys
%*** ??? ?? jumps
     Nt=pointpoissonNt(S0,j);
if j>2 &&  Nt~=0;  % prepei kai Nt>0 alla einai etsi k alliws gia j>2
      J(j)=CPP(mu,Nt,sigma);
      DJ=J(j)-J(j-1);
else
       DJ=0;
end
%******
  et=normrnd(0,1);
  Stdt = (1+mu*dt)*St+sigma*St*sqrt(dt)*et;

    St=Stdt;  % redifine the St
    S(u,j)=Stdt;% save Stdt values to S(j) matrix
    t(j)=tint+dt;
    tint=t(j);
    mo(j)=DJ;
end
end

%ypologismos toy mesoy twn entasewn
mean_S=sum(S)/h;
figure (1)
plot(mean_S)
figure (2)
hist(S)
```

A.4 Οι συναρτήσεις pointpoissonNt και CPP

Οι συναρτήσεις pointpoissonNt και CPP χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση μιας συνθέτης διαδικασίας Poisson. Η σύνθετη διαδικασία Poisson είναι μία στοχαστική διαδικασία (σε συνεχή χρόνο) με άλματα τα οποία συμβαίνουν τυχαία, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson , αλλά και με τυχαίο μέγεθος αλμάτων το οποίο ακλουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας. Η συνάρτηση pointpoissonNt είναι μια απλή διαδικασία Poisson η οποία επιστρέφει τον αριθμό των αλμάτων Nt. Στη συνέχεια η συνάρτηση CPP υπολογίζει το άθροισμα.

```
function [Nt]=pointpoissonNt(l,t)
Tkzero=exprnd(l);
e=0;
for k=1:200
    Tk(k)=Tkzero+e;

if t>Tk(k)
        x(k)=1;
else
        x(k)=0;
end
   Tkzero=Tk(k);
   e=exprnd(l);
end
Nt=sum(x);
end
```

```
function [J]=CPP(mu,Nt,v)

h=Nt;
zzero=0;
for k=1:h
   z=normrnd(mu,v^2);
    j=z+zzero;
    zzero=j;
end
J=j;
end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Γ.Δ. Ακρίβης –Β. Α. Δούγαλης (2011)«*Αριθμητικές Μέθοδοι για τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*» Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο

[2] Μ. Ανθρωπέλος (2016) Χειρόγραφες σημειώσεις μαθήματος «*Πιστωτικός Κίνδυνος*» Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[3] Δ. Λ. Αντζουλα□κος, Μ. Κου□τρας, Β. Κ. Μπε□νος (2004) «*Ασκη□σεις Πιθανοτήτων Μέρος Ι*», Β’ Ε□κδοση, Εκδο□σεις Αθ. Σταμου□λης

[4] Α. Ν. Γιαννακο□πουλος(2011) σημειώσεις«*Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά*» Τμη□μα Στατιστικη□ς, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

[5] Ν. Μαχαιράς (2015) Σημειώσεις μαθήματος «*Στοχαστικές Διαδικασίες στα Χρηματοοικονομικά και τον Αναλογισμό*» Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[6] Μ. Μπούτσικας (2016) Σημειώσεις μαθήματος «*Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*» Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[7] Β. Σεβρόγλου (2016) Χειρόγραφες σημειώσεις «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα»Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[8] Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης (2013) «*Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*» 2η έκδοση, εκδόσεις Παπασωτηρίου, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα

[9] Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης (2006) «*Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων*» Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα

[10] Ε. Χαρμανδάρης (2013) Χειρόγραφες σημειώσεις μαθήματος «*Προσομοίωση Monte Carlo*» Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[11] Paulo Brandimarte (2006)«*Option Pricing by Monte Carloo Methods*» 2nd Edition,Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction

[12] Mark Broadie, Paul Glasserman (1997)«*Pricing American-style securities using simulation*», Columbia University, New York

[13] Patrick Burger & Marcus Kliaras (2013)«*Jump Diffusion Models for Option Pricing Vs The Black Scholes Model*» University of Applied Sciences, Vienna, p.p. 5-22

[14] Dempster Michael A.H., Pliska S. (1997) «*Mathematics of derivatives securities*», Cambridge University, United Kingdom

[15] D. Duffie (2001) «*Dynamic Asset Pricing Theory*» 3rd edition, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

[16] Garcia R., Ghysels E., Renault E. (2004) «*The econometrics of option pricing*», Montréal, p.p. 21-23, 25-29

[17] J. C. Hull (2003)«*Options Futures and Other Derivatives*» 8th Edition, Pearson, Prentice-Hall, University of Toronto, p.p. 299-331

[18] Merton R. (1976) «*Option Pricing When Underlying Stock prices are Discontinuous*», Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA,p.p.127-135, 137-139, 142-134

[19] Evan L. Turner (2010) «*The Black-Scholes Model and Extension*», University of Chicago, Chicago, USA, p.p. 2-8, 11-14

[20] Internet, source: Investopedia, European Options

https://www.investopedia.com/terms/e/europeanoption.asphttps://www.investopedia.com/university/options-pricing/profit-loss-diagrams.asp