ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ:
“ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ”

«ΜΟΝΤΕΛΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ»

ΜΩΡΑΪΤΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

2017

Στον μπαμπά μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κλασσικό μοντέλο εφοδιασμένο με FGM copula

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Κλασσικό μοντέλο με στρατηγική σταθερού μερίσματος εφοδιασμένο με FGM copula

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Κλασσικό μοντέλο με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου εφοδιασμένο με FGM copula

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή μου κ. Χατζηκωνσταντινίδη διότι με την αμέριστη βοήθεια και καθοδήγηση μπόρεσα να ολοκληρώσω την παρούσα διπλωμαική εργασία. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που με στήριξαν στην προσπάθεια μου να ολοκληρώσω έναν ακόμα κύκλο σπουδών.

ABSTRACT

This diploma thesis deals with various ruin measures and the type of distribution of dividends paid to insured persons for stochastic surplus processes where there is a link between the intermediate times of risk exposure and the corresponding amounts of compensation required. In particular, the last 3 chapters examine the case where dependency is implemented through a FGM copula. The six chapters that follow for each of the cases examined and the corresponding stochastic surplus processes will examine the different forms of the Gerber-Shiu function as well as the expected dividends paid by the insurer up to the time of bankruptcy.

The first chapter provides a detailed description of the classical model of risk theory and presents the results obtained by the Gerber-Shiu function for the aforementioned model.

In the second chapter we study the classical model with a fixed dividend strategy and analytical results are presented for Gerber-Shiu's function and the moments of discounted dividends under the above-mentioned strategy in the case of the classical model.

The third chapter examines the classical model with a threshold dividend strategy. Integral equations for the penalty function are written, the probability of total bankruptcy, the time of this and the surplus the moment before bankruptcy and deficit during bankruptcy are studied.

In Chapter 4, as in the next two chapters, we study the classical model equipped with the FGM copula, the differences that arise in the various models with this coupling are presented, and are searched for all-differential equations for the penalty function, marginal conditions as well as analytical expressions of the Laplace transform for the time of bankruptcy. In particular, in the classic model with a dividend strategy strategy equipped with FGM copula, apart from the analysis of the Gerber-Shiu function, reference is also made to the expected dividends received.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετόνται τα διάφορα μέτρα χρεοκοπίας κάθως και το είδος της κατανομής των μερισμάτων που καταβάλλονται στους ασφαλισμένους για στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος στις οποίες υπάρχει σύνδεση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και των αντίστοιχων μεγεθών των απαιτουμένων αποζημιώσεων. Ειδικότερα, στα 3 τελευταία κεφάλαια θα εξεταστεί η περίπτωση όπου η εξάρτηση υλοποιείται μέσω μιας σύζευξης FGM. Στα 6 κεφάλαια που ακολουθούν για κάθε μια απο τις περιπτώσεις που εξετάζονται και για τις αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος θα μελετηθούν οι διάφορες μορφές της συνάρτησης Gerber-Shiu καθώς και τα αναμενόμενα μερίσματα που καταβάλει η ασφαλιστική εταιρεία έως την στιγμή της χρεοκοπίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται λεπτομερής περιγραφή του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν απο την συνάρτηση Gerber-Shiu για το προαναφερόμενο μοντέλο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται το κλασσικό μοντέλο με στρατηγική σταθερού μερίσματος και παρουσιάζονται αναλυτικά αποτελέσματα για την συνάρτηση των Gerber-Shiu και των ροπών των προεξοφλημένων μερισμάτων κάτω απο την ύπαρξη της προαναφερόμενης στρατηγικής στην περίπτωση του κλασσικού μοντέλου.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται το κλασσικό μοντέλο με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου.Διατυπώνονται ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την συνάρτηση ποινής, μελετάται η πιθανότητα ολικής χρεοκοπίας, ο χρόνος αυτής καθώς και το πλεόνασμα την στιγμή πριν την χρεοκοπία και έλλειμμα κατά την χρεοκοπία.

Στο κεφάλαιο 4 όπως και στα δύο επόμενα κεφάλαια γίνεται μελέτη του κλασσικού μοντέλου εφοδιασμένου με την FGM copula , παρουσιάζονται οι

διαφοροποιήσεις που προκύπτουν στα διάφορα μοντέλα με την σύζευξη αυτή και αναζητούνται ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την συνάρτηση ποινής, περιθώριες συνθήκες καθώς και αναλυτικές εκφρασεις του μετασχηματισμού Laplace για το χρόνο της χρεοκοπίας. Ειδικότερα, στο κλασσικό μοντελό με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου εφοδιασμένου με FGM copula εκτος απο την ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu γίνεται αναφορά και στις ανεμενόμενες ληρωμένς μερισμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση συγκροτεί και διατηρεί συνεχώς επαρκές διαθέσιμο περιθώριο φερεγγυότητας, ανάλογο προς το σύνολο των δραστηριοτήτων της, που αντιστοιχεί σε περιουσία ελεύθερη από υποχρεώσεις που δεν μπορούν να προβλεφθούν, χωρίς να υπολογίζονται στην περιουσία αυτή τα άϋλα περιουσιακά της στοιχεία. Το διαθέσιμο αυτό υπολογίζεται σε συνάρτηση είτε προς το ετήσιο ποσό των ασφαλίστρων είτε προς τη μέση επιβάρυνση των ασφαλισμάτων και καθορίζεται ίσο με το μεγαλύτερο από τα δύο αποτελέσματα εργασιών της ασφαλιστικής επιχείρησης που βασίζονται στα ασφάλιστρα και τις αποζημιώσεις. Σε περίπτωση αδυναμίας συγκρότησης του, η επιχείρηση αντιμετωπίζει τον κίνδυνο να ανακληθεί η άδεια λειτουργίας της.

Το αναγκαίο περιθώριο φερεγγυότητας πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερο του εγγυητικού κεφαλαίου, και συγκεκριμένα για επιχειρήσεις που δραστηριοποιούνται στην Ελλάδα πρέπει το εγγυητικό κεφάλαιο να αποτελεί το 1/3 του απαιτούμενου περιθωρίου φερεγγυότητας και δεν μπορεί να είναι χαμηλότερο από ένα κατώτατο όριο που, ανεξάρτητα του όγκου των εργασιών της ασφαλιστικής επιχείρησης, πρέπει να αντιστοιχεί, ανάλογα με τον κλάδο (τους κλάδους) που ασκεί, σε ελάχιστο ποσό 2 εκ. ευρώ (άσκηση κλάδου ατυχημάτων, ασθενειών, χερσαίων σιδηροδρομικών οχημάτων, αεροσκαφών, πλοίων, μεταφερομένων εμπορευμάτων, πυρκαϊών, λοιπών ζημιών αγαθών, νομικής προστασίας, διαφόρων χρηματικών απωλειών και βοήθεια) μέχρι 4,5 εκ. ευρώ (κλάδοι ζωής). Μεταξύ των δύο αυτών κατηγοριών βρίσκονται διάφοροι ασφαλιστικοί κλάδοι όπως οι κλάδοι εγγυήσεων, πιστώσεων και τα διάφορα είδη αστικής ευθύνης, δηλαδή οι κλάδοι 10 μέχρι και 15 της κατηγορίας ζημιών, για τους οποίους προβλέπεται εγγυητικό κεφάλαιο όχι κατώτερο των 3 εκ. ευρώ

Η Αναλογιστική επιστήμη καλείται να συνδράμει στην αξιολόγηση του συνολικού κινδύνου από καταστροφικά γεγονότα σε σχέση με τα συνολικά αποθέματα και πλεονάσματα της ασφαλιστικής εταιρίας. Οι αναλογιστικοί Οργανισμοί ιδρύθηκαν για να στηρίξουν και να προωθήσουν τις μεθόδους της αναλογιστικής επιστήμης, και να προστατεύσουν το δημόσιο συμφέρον με την προώθηση ηθικών προτύπων (Hickman 2004, σελ. 4). Η αναθεώρηση του 1920 που αφορούσε τα ποσοστά ασφαλιστικής αποζημίωσης των εργατών της Νέας Υόρκης απαίτησε πάνω από δυο μήνες εντατικής εργασίας από εντεταλμένες ομάδες αναλογιστών (Michelbacher 1920, σελίδες 224, 230). Στη δεκαετία του 1930 και του 1940, αναπτύχθηκαν νέες μαθηματικές βάσεις για στοχαστικές διαδικασίες (Bühlmann 1997, σελ. 168). Οι αναλογιστές μπορούσαν πλέον να προβλέπουν πιθανές απώλειες χρησιμοποιώντας μοντέλα τυχαίων γεγονότων, αντί των παραδοσιακών προσδιοριστικών μεθόδων που τους περιόριζαν κατά το παρελθόν.

Το κομμάτι των Αναλογιστικών μαθηματικών που ασχολείται με την πιθανότητα να χρεοκοπήσει ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο έχει το γενικό τίτλο θεωρία κινδύνου και η ειδικότερη ανάλυση των ζητημάτων που ανακύπτουν καλύπτεται απο αναλύσεις υπο τον τίτλο θεωρία χρεοκοπίας. Η διαχείριση κινδύνου αναφέρεται ως μια από τις πιο σημαντικές καινοτομίες του 20ου αιώνα Μέχρι το 1950 το δοκούν μιας επένδυσης ήταν η επιστροφή του κεφαλαίου Στη πρωτοποριακή δημοσίευση του Markowitz το 1952 παρουσιάστηκε η θεωρία του χαρτοφυλακίου σύμφωνα με την οποία η αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης καθορίζεται από ένα διάγραμμα κινδύνου-επιστροφών όπου ο κίνδυνος υπολογίζεται με τη χρήση τυπικών κατανομών. Βασικό αντικείμενο της θεωρίας χρεοκοπίας είναι η μελέτη τόσο των εξόδων όσο και των εσόδων μιας ασφαλιστικής εταιρίας καθώς και το πως οι ποσότητες αυτές μεταβάλλονται στον χρόνο. Οι βασικές ποσότητες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά το χρόνο της χρεοκοπίας.

Η θεωρία Συλλογικών Κινδύνων εμφανίστηκε για πρώτη φορά στις αρχές του 20ου αιώνα με την διδακτορική διατριβή του Σουηδού Fillip Lundberg (1903) με τίτλο "Approximations of the Probability Function/ Reinsurance of Collective Risks". Μάλιστα, κάποιες από τις ποσότητες που θα μελετηθούν εκτενέστερα παρακάτω φέρουν το όνομά του. Βασιζόμενος στην διατριβή του Lundberg, το 1929, ο επίσης Σουηδός Cramer εισήγαγε την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία κινδύνων. Με βάση τις δημοσιεύσεις των δυο Σουηδών δημιουργήθηκε το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων ή μοντέλο των Cramer-Lundberg με κύριο χαρακτηριστικό οτι ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται απο μια κατανομή Poisson. Το μοντέλο αυτό περιγράφει την εξέλιξη του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στο χρόνο με κεντρική εστίαση στο αν κάποια στιγμή το πλεόνασμα (έσοδα – έξοδα) κινδυνεύει να γίνει αρνητικό. Για να αποφευχθεί αυτό η ασφαλιστική χρησιμοποιεί ένα αρχικό αποθεματικό αφού ως γνωστό κάθε ασφαλιστική επιχείρηση κατά την έναρξη των εργασιών της υποχρεούται απο το νόμο να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί το πλεόνασμα της εταιρείας κατά την έναρξη των εργασιών της. Πρέπει να τονίσουμε ότι παρακολουθούμε τα έξοδα (αποζημειώσεις) της εταιρείας καθώς αυτά εξελίσσονται διαρκώς όχι μόνο στο τέλος λειτουργίας του χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με το μοντέλο των Cramer-Lundberg, το πλήθος των κινδύνων θεωρείται οτι ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Επίσης, οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Οι Gerber και Shiu , το 1998, ανέλυσαν τη συμπεριφορά του πλεονάσματος μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής (expected discounted penalty function). Η συνάρτηση αυτή δίνει την δυνατότητα απο κοινού μελέτης του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείματος ακριβώς τη στιγμή της χρεοκοπίας και του πλεονάσματος μετά την χρεοκοπία. Παρακάτω θα ορίσουμε και θα αναπτύξουμε τις βασικές έννοιες του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας.

1.2 *Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων*

Για να προχωρήσουμε στην μοντελοποίηση του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού οργανισμού πρέπει να προσδιορίσουμε τον αριθμό των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται.
Ο Andersen, το 1957, ανέφερε ότι το πλήθος των ζημιών περιγράφεται ικανοποιητικά από μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, δηλαδή από μια στοχαστική διαδικασία για την οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που δεν ακολουθούν αναγκαστικά την εκθετική κατανομή όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Ορισμός 1.1

Οι συνολικές απαιτήσεις στο διάστημα [0,t] περιγράφονται απο την σύνθετη ανέλιξη {S (t): t ≥0} η οποία ορίζεται για κάθε t απο την σχέση:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N(t)} X_i\,, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

όπου,

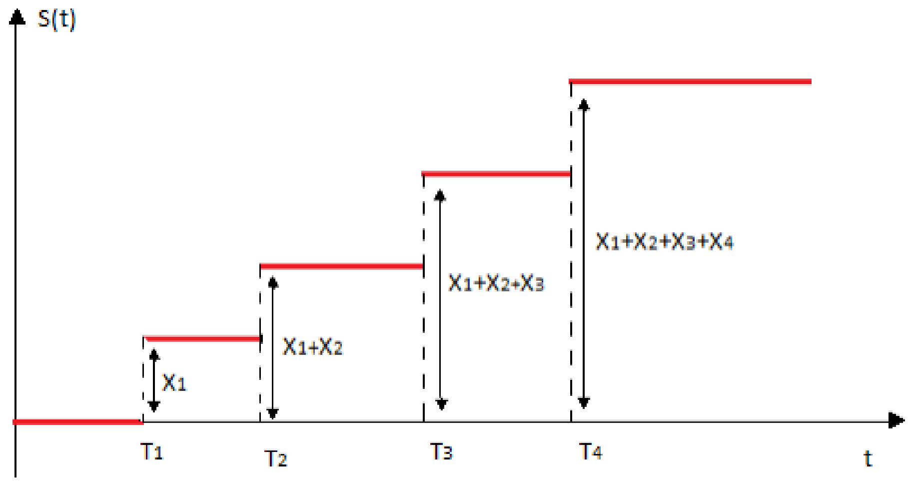
N (t): μια στοχαστική διαδικασία η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα [0,t]. Επειδή η N(t) μετράει πλήθος είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία.

X_i: το ύψος της απαίτησης i. Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες αλλά και ανεξάρτητες από το πλήθος των αποζημιώσεων σε ένα διάστημα N(t).

Στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων το πλήθος των απαιτήσεων είναι μια στοχαστική ανέλιξη Poisson.

Μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{ X_t : t \in T\}$ όπου T είναι ένα σύνολο. Συνήθως το t συμβολίζει χρόνο.
Αν ο χρόνος αυτός παίρνει διακριτές τιμές τότε μιλάμε για μια στοχαστική ανέλιξη διακριτής παραμέτρου ή σε διακριτό χρόνο. Διαφορετικά, αν το T είναι μη αριθμήσιμο σύνολο, τότε έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη συνεχούς παραμέτρου ή σε συνεχή χρόνο.
Μια άλλη διάκριση των στοχαστικών ανελίξεων είναι ανάλογα με το πλήθος των τιμών για το X_t. Ανάλογα με το αν το πλήθος αυτών των τιμών είναι αριθμήσιμο ή όχι, μιλάμε για μια ανέλιξη με διακριτές ή συνεχείς τιμές.

Τα περισσότερα παραδείγματα ανελίξεων με ενδιαφέρον στη θεωρία κινδύνου γενικά, αλλά και τη θεωρία χρεοκοπίας αφορούν στοχαστικές ανελίξεις σε συνεχή χρόνο.
Το απλούστερο παράδειγμα μιας τέτοιας ανέλιξης είναι η ανέλιξη Poisson.



Σχήμα 1. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$.

Το γράφημα της S(t) απεικονίζει μια δυνατή εξέλιξη τιμών της διαδικασίας συνολικών αποζημιώσεων σε μια μικρή σχετικά χρονική περίοδο. Έτσι η δειγματοσυνάρτηση της S(t) είναι μια δεξιά-κλιμακωτή συνάρτηση .

Τα σημεία ασυνέχειας (σημεία στα οποία εμφανίζει άλματα) εμφανίζονται στα σημεία όπου εμφανίζονται οι απαιτήσεις και το ύψος των αλμάτων είναι ίσο με το μέγεθος των αντίστοιχων αποζημιώσεων.

Τα οριζόντια μήκη των βημάτων αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους.

Ορισμός 1.2

Μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή μια ανέλιξη που είναι μη φθίνουσα (με πιθανότητα ένα) και παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές, ονομάζεται στοχαστική ανέλιξη Poisson αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

- $N(0)=0$
- Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$(1) \qquad Pr(N(t+h)=n+k|N(t)=n)=\begin{cases}\lambda h+o(h), k=1\\ 1-\lambda h+o(h), k=0\\ o(h), k\geq 2\end{cases}$$

Το $o(h)$ δηλώνει μια ποσότητα που συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα απο το h καθώς $h \to 0$.

- Για κάθε $t < s$ η τυχαία μεταβλητή $N(s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$.

Παρατήρηση
Ένας ισοδύναμος ορισμός της ανέλιξης Poisson είναι: μια απαριθμήτρια ανέλιξη $\{N(t): t \geq 0\}$ λέγεται ανέλιξη Poisson αν ικανοποιεί την σχέση (1) και έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

- Έχει ισόνομες προσαυξήσεις και μάλιστα σε διάστημα μήκους t το πλήθος των συμβάντων ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λt δηλαδή,

$$\Pr[N(t+s) - N(s) = n] = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ \text{n=0,1,2,...}$$

Μια ανέλιξη Poisson , όπως και κάθε απαριθμήτρια συνάρτηση, ορίζει μια ακολουθία απο τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2, \dots$ που λέγεται ακολουθία των χρόνων άφιξης με τον ακόλουθο τρόπο:

$$T_1 = \min\{t: N(t) = 1\}$$

$$T_2 = \min\{t: N(t) = 2\}$$
$$\dots$$
$$T_k = \min\{t: N(t) = k\}$$

Έτσι η συνεχής τυχαία μεταβητή T_k παριστάνει το χρόνο άφιξης του k-γεγονότος.

<u>*Ορισμός 1.3*</u>

Με βάση αυτήν την ακολουθία μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία
$\{T_\kappa: k = 1,2, \dots N(t)\}$ ως εξής:

$$W_1 = T_1$$

$$W_2 = T_2 - T_1$$
$$\dots$$
$$W_\kappa = T_\kappa - T_{K-1}$$

Οι μεταβλητές W_k καλούνται ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής, είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τ.μ με παράμετρο λ και επειδή $W_k \sim Exp(\lambda), \forall k = 2,3,\dots,N(t)$, προκύπτει ότι $W_1 + W_2 + \cdots + W_n \sim G\ (n, \lambda)$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\Pr(N(t) = k) &= \Pr(N(t) \leq k) - \Pr(N(t) \leq k-1) \\
&= \Pr(W_1 + W_2 + \cdots + W_{k+1} > t) - \Pr(W_1 + W_2 + \cdots + W_k > t) \\
&= e^{-\lambda y} \sum_{v=0}^{k} \frac{(\lambda t)^v}{v!} - e^{-\lambda y} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^v}{v!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$=> N(t) \sim Poi(\lambda t)$$

Αν τώρα ο n είναι ακέραιος , οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Erlang, και άρα $W_1 + W_2 + \cdots + W_n \sim Erl\ (n, \lambda)$, άρα για κάθε t η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt και άρα E(N(t))=λt ενώ

E(S(t))= E[E(S(t))|N(t)=n]

=E[$\sum_{i=0}^{N(t)} Y_i$|N(t) = n]

=E[N(t)μ]

=μ E[N(t)]

=μλt

1.3 *Στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) πλεονάσματος*

Το πλεόνασμα σε μια τυχαία χρονική στιγμή t επηρεάζεται από τους εξής τρεις παράγοντες: το απόθεμα την χρονική στιγμή 0, από τα ασφάλιστρα που έχει λάβει ο ασφαλιστής μέχρι την χρονική στιγμή t και από το ποσό των ζημιών που έχουν πληρωθεί μέχρι την χρονική στιγμή t. Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος παρακολουθεί τον κίνδυνο του πλεονάσματος αν θα γίνει κάποια στιγμή αρνητικό.

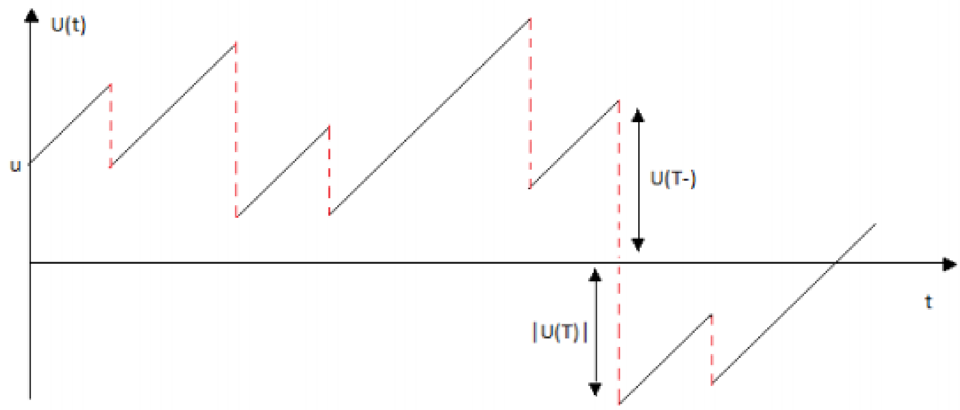
Ορισμός 1.4
Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ απο τη σχέση:

$$U(t) = \underbrace{u + P(t)}_{έσοδα} - \underbrace{S(t)}_{έξοδα} \quad , t \geq 0$$

όπου
P(t): το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$
S(t): η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημειώσεις

και
U (t): απόθεμα ή πλεόνασμα την χρονική στιγμή t

U(0): αρχικό αποθεματικό. (Στην θεωρία κινδύνων θεωρούμε ότι η ασφαλιστική υποχρεούται να αρχίζει την λειτουργία της με ένα αρχικό αποθεματικό u την στιγμή $t = 0$).
Θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι σταθερός. Η P(t) είναι μια αύξουσα συνάρτηση και γραμμική της μορφής $P(t) = ct$ όπου c είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου, το οποίο δεν μεταβάλλεται στο χρόνο (ένταση ασφαλίστρου).



Σχήμα 2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$.

Οι δειγματοσυναρτήσεις της U(t) εμφανίζουν άλματα προς τα κάτω τις χρονικές στιγμές T_1, T_2,... επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένων. Αυτά τα άλματα είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα προς τα πάνω άλματα της S(t). Ετσι η ενώ η δειγματοσυνάρτηση της S(t) είναι κλιμακωτή(έχει σταθερή τιμή σε κάθε διάστημα (T_i ,T_{i+1}), U(t) έχει αντίστοιχα ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση ίση με το συντελεστή διεύθυνσης c.

<u>Ορισμός 1.5</u>

Αν ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

1. $P(t) = ct$ για κάποιο $c > 0$, δηλαδή η P(t) γραμμική συνάρτηση
2. Οι μεταβλητές Y_i, που δηλώνουν το μέγεθος των αποζημειώσεων, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και είναι επίσης ανεξάρτητες απο τον αριθμό των αποζημιώσεων σε ένα διάστημα, $N(t)$
3. Η $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, και άρα η ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson

τότε έχουμε το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων .

Η πιο βασική υπόθεση που γίνεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων είναι η **συνθήκη καθαρού κέρδους**, δηλαδή οτι $\boldsymbol{c > \lambda\mu_1}$. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει οτι τα έσοδα της εταιρείας είναι περισσότερα απο τα αναμενόμενα έξοδα. Συνεπώς, η συνθήκη απαιτεί τα έσοδα να υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα στην μονάδα του χρόνου. Στο δεξιό μέλος έχουμε το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στην μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο με την μέση αποζημίωση που ορίζεται ως:

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = E(X_i)$$

Η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην θεωρία χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα το πλεόνασμα $U(t)$ του ασφαλιστή να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό.

Ορισμός 1.6

Το *περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor)* ή συντελεστής ασφαλείας θ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται απο την σχέση:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1$$

Είναι προφανές οτι αφού $c > \lambda \mu_1$ το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές. Επίσης, μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Ο συντελεστής θ εκφράζει διαισθητικά πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα απο τα έξοδα της εταιρείας κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο. Έτσι, το θ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή.Για το λόγο αυτό το θ παίρνει τιμές απο 0 έως 1 γιατί διαφορετικά το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν είναι ανταγωνιστικό.

Απο την παραπάνω σχέση προκύπτει οτι: $c = (1 + \theta)\lambda \mu_1$ το οποίο ονομάζεται και επιβαρυμένο ασφάλιστρο.

1.4 *Το κλασικό μοντέλο: πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο και συντελεστής προσαρμογής*

Για $t \geq 0$, ορίζουμε $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) \leq 0\}$ $\mu\varepsilon\ inf\emptyset = \infty$ να είναι ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική (ruin time).

Παρόλο που το κλασικό μοντέλο με άπειρο χρόνο δεν είναι ίσως το πιο ρεαλιστικό έρευνα για πολλές δεκαετίες έδειξε οτι έχει την δυνατότητα να προσφέρει αναλυτικά αποτελέσματα.

Ορισμός 1.7

Ένα από τα σημαντικότερα μέτρα στην θεωρία χρεοκοπίας, είναι η πιθανότα το πλεόνασμα να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό. Αν θεωρήσουμε T την χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνει η χρεοκοπία, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται απο τον παρακάτω τύπο.

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u), \qquad u \geq 0$$

ή

$$\psi(u) = Pr(U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u), \qquad u \geq 0$$

Σχόλια

1. Αν δεν ισχύει $c > \lambda\mu_1$ τότε ψ(u)=1 για κάθε $u > 0$, δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη.
2. Η ψ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u. Ισχύει μάλιστα $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.
3. Η πιθανότητα χρεοκοπίας αναφέρεται σε άπειρο χρόνο

Με τον όρο χρεοκοπία εννοούμε την μαθηματική χρεοκοπία. Η πραγματικότητα, φυσικά, είναι πιο σύνθετη. Στην πράξη, η διαδικασία πλεονάσματος δεν αποτελεί μοναδικό πόρο μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Ενδεικτικά,στον χώρο των γενικών ασφαλίσεων κύρια πηγή εσόδων αποτελούν πλέον οι επενδύσεις των ασφαλίστρων. Η ασφαλιστική πρακτική επίσης θέλει τις αποζημιώσεις με κάποια χρονική καθυστέρηση (lag), συνήθως στο τέλος ενός οικονομικού έτους ή εξαμήνου, και όχι στιγμιαία γεγονότα «πραγματικού χρόνου». Συνεπώς η μαθηματική χρεοκοπία που εξετάζουμε εδω δεν ταυτίζεται απαραίτητα με την πραγματικη χρεοκοπία.Μαθηματικά αυτό σημαίνει οτι μια εταιρία, υπολογίοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προσδιορίσει το αρχικό απαιτούμενο απόθεμα, το ασφάλιστρο και το επιπλέον περιθώριο ασφαλείας.

Ορισμός 1.8

Το ενδεχόμενο να συμβεί η χρεοκοπία είναι συμπληρωματικό ενδεχόμενο της πιθανότητας να μην συμβεί η χρεοκοπία. Η πιθανότητα της μη χρεοκοπίας ορίζεται ως:

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = Pr(T > \infty | U(0) = u)$$

Η δ(u) είναι μια αύξουσα συνάρτηση και το όριο της τείνει στο 1. Επειδή είναι συνεχής από δεξιά, διαπιστώνουμε ότι η δ(u) μπορεί να θεωρηθεί σαν μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Είναι η δ(u) συνεχής ή διακριτή κατανομή;

Η απάντηση είναι ότι η δ(u) δεν είναι ούτε συνεχής ούτε διακριτή, αλλά μια μεικτή κατανομή, αφού δ(0)>0, δηλαδή η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι θετική, ενώ η δ(u) είναι συνεχής (έχει πυκνότητα) στο $(0, \infty)$.

Πρόταση 1.1

Στο κλασσικό μοντέλο, η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x) dx$$

<u>Ορισμός 1.9</u>

Καλούμε <u>μέγιστη σωρευτική απώλεια (maximal aggregate loss)</u> την τ.μ.

$$L = \max_{t \geq 0} \{ S(t) - ct \} = \max_{t \geq 0} \{ u - U(t) \}$$

όπου S(t) κεφάλαιο που απαιτείται στο [0,t] και ct ποσό που εισπράττεται στο [0,t]

Η L εκφράζει τη μεγαλύτερη συνολική ζημιά (απώλεια) από όλες τις δυνατές στο [0,t] και είναι πού σημαντικό μέγεθος που συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Προφανώς δεν εμφανίζεται χρεοκοπία όταν

$$\begin{aligned} U(t) \geq 0, \forall t \geq 0 &\Leftrightarrow u + ct - S(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow u \geq S(t) - ct, \forall t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow u \geq \max_{t \geq 0} \{ S(t) - ct \} \\ &\Leftrightarrow u \geq L \end{aligned}$$

Οπότε $\{ \text{δεν εμφανίζεται χρεοκοπία} \} = \{ L \leq u \}$

Άρα $\delta(u) = \Pr(L \leq u) \Rightarrow 1 - \psi(u) = \Pr(L \leq u)$

$$\psi(u) = 1 - \Pr(L \leq u)$$

$$\boxed{\psi(u) = \Pr(L > u)}$$

Επειδή για t = 0 είναι S(0)-c.0 = 0 – 0 = 0

και

$$L \geq S(0) - c.0 \Rightarrow L \geq 0$$

Αφού $U(t) = u + ct - S(t), \forall t \geq 0$ *αν* $U(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ *τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία. Άρα δεν εμφανίζεται χρεοκοπία αν* $u \geq S(t) - ct, \forall t \geq 0$, *οπότε το ενδεχόμενο* $\{(L \leq u)\}$ *είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο μη εμφάνισης χρεοκοπίας.*

Άρα αν $\psi(u) = \Pr$ *{να εμφανισθεί χρεοκοπία}*

$\Rightarrow 1 - \psi(u) = \Pr$ {να μην εμφανιστεί χρεοκοπία}

$= \Pr$ *{η μεγαλύτερη δυνατή απώλεια δεν υπερβαίνει το αρχικό αποθεματικό}*

$= \Pr(L \leq u)$

$= F_L(u)$

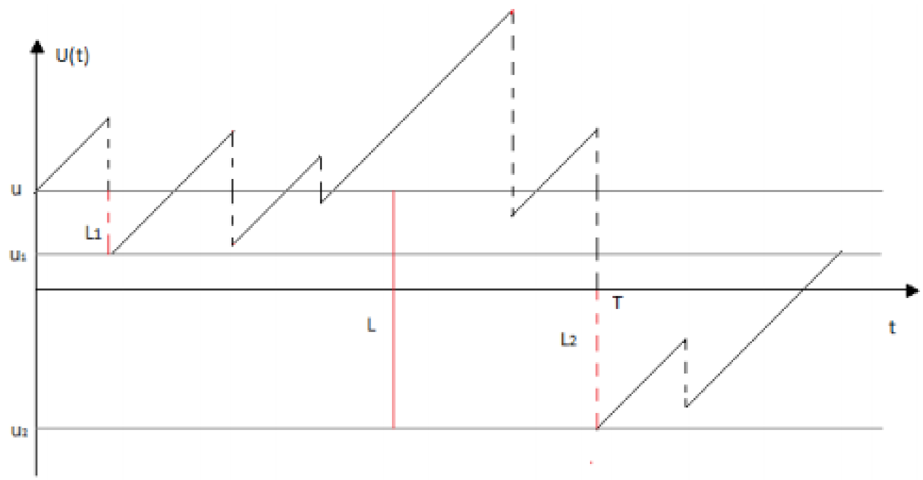
Η κατανομή της L μπορεί να μελετηθεί αν την αναλύσουμε σε ένα τυχαίο άθροισμα τ.μ. δλδ. $L=L_1+L_2+\ldots+L_N$ *όπου οι* L_i *είναι ανεξάρτητες*

Ας δούμε διεξοδικότερα αυτές τις τ.μ.
Η τ.μ. L_1 *παριστά το μέγεθος της πτώσης της U(t) κάτω από το u*
(αν και όταν συμβεί τέτοια πτώση)

Η τ.μ. L_2 *παριστά το μέγεθος της πτώσης της U(t) κάτω από το* $u-L_1$

Η τ.μ. L_3 *παριστά το μέγεθος της πτώσης της U(t) κάτω από το* $u-L_1-L_2$ *κ.ο.κ*

Άρα το N = τυχαίος αριθμός των "record lows" (καταγεγραμμένων πτώσεων)



Σχήμα 3. Μέγιστη σωρευτική απώλεια στη διαδικασία πλεονάσματος.

<u>Ορισμός 1.10</u>
Μια πτώση της τιμής του πλεονάσματος θα θεωρείται ως "record low", αν λόγω της εμφάνισης μιας απαίτησης, η τιμή του πλεονάσματος γίνεται μικρότερη από την ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος που είχε παρατηρηθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή.

Σύμφωνα λοιπόν με τον παραπάνω ορισμό η τ.μ. L_i *παριστά την κάθετη πτώση από την i-1 καταγραμμένη πτώση μέχρι την i.*

Έστω T η στιγμή της χρεοκοπίας.
Προφανώς U(t) είναι η τιμή που παίρνει η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος U(t) τη στιγμή της χρεοκοπίας, η οποία τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι αρνητική. Επομένως –U(t) είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν όταν επέλθει χρεοκοπία.
Ορίσαμε L_1 να παριστά το μέγεθος της πτώσης κάτω από την αρχική τιμή u. Δηλαδή L_1 είναι η τιμή της διαφοράς S(t) - ct τη στιγμή που η διαφορά αυτή καθίσταται για πρώτη φορά θετική. (Επειδή L_1=u – U(t) όταν αυτή γίνει θετική,

$$\begin{aligned} L_1 &= \min\{t : u - U(t) > 0\} \\ &= \min\{t : S(t) - ct > 0\} \\ &= \min\{t : S(t) > ct\} \end{aligned}$$

<u>Έτσι η L_1 , έχει την ίδια σχέση ως προς το αρχικό απόθεμα u, που η τ.μ. –U(t) έχει ως προς το μηδέν.</u>
Είναι $L_1 = u - U(t_1) = u- (u-U(t_1))= u - (u + ct_1 - S(t_1))= S(t_1)- ct_1$ και $L_1 > 0$ άρα $S(t_1)> ct_1$ και t_1 η πρώτη στιγμή που συμβαίνει κάτι τέτοιο, άρα μπορούμε να πούμε ότι η τ.μ. L_1 εκφράζει την απώλεια τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν, γιατί για u = 0 η χρεοκοπία συμβαίνει όταν S(t) > c T όπου T ο χρόνος χρεοκοπίας δηλ. η χρονική στιγμή που για πρώτη φορά το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το μηδέν.
Οπότε για u = 0 είναι t_1 = T αφού t_1 είναι η χρονική στιγμή που το πλεόνασμα πέφτει κάτω από u = 0.
Αν τώρα θεωρήσουμε τα claims που <u>εμφανίζονται μετά τον χρόνο t_1</u> σαν μια ακολουθία παρατηρήσεων του αρχικού πειράματος και θεωρήσουμε u = 0, τότε αν $N \geq 2$ τότε t_2 θα είναι ο χρόνος χρεοκοπίας για αυτή την ακολουθία παρατηρήσεων επειδή t_2 θα είναι η πρώτη χρονική στιγμή μετά την t_1 για την οποία καταγράφεται μια ζημιά στο $(t_1 , t_2]$

Άρα $L_2 \overset{d}{=} L_1$ όμοια $L_i \overset{d}{=} L_1$ και άρα $L_1, L_2, \ldots$ είναι i.i.d

Εστω u=0 ($L_1 \overset{d}{=}$ -U(t) για u = 0)
Έστω τ.μ. N = αριθμός καταγραμμένων πτώσεων που εμφανίζονται στις χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 <\ldots<t_N$
Για τη στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος θα λέμε ότι μια "καταγεγραμμένη πτώση" εμφανίζεται τη χρονική στιγμή t αν

U(t) < U(s) για κάθε $s \leq t$

Προφανώς N = 0 αν $U(t) \geq U(0) = u \quad \forall t \geq 0$

Οι χρονικές στιγμές t_i είναι οι χρονικές στογμές εμφάνισης απαιτήσεων.

Τότε ισχύει: $U = U(0) > U(t_1) > U(t_2) >\ldots>U(t_N)$ και
$$L=u - U(t_N)= u - (u + ct_N - S(t_N))= S(t_N))- ct_N$$

και $$L = u - U(t_N)= (u- U(t_1))+ (U(t_1) - U(t_2))+\ldots+(U(t_{N-1}) - U(t_N))$$
$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$$ *όπου L_i η απώλεια στο $(t_{i-1} , t_i]$*

Παρατηρούμε λοιπόν ότι t_i είναι η πρώτη χρονική στιγμή μετά το χρόνο t_{i-1} έτσι ώστε να εμφανισθεί μια ζημιά στο $(t_{i-1}, t]$ (αν εμφανίζεται μια τέτοια ζημιά)

Αν η τ.μ. $N \geq 1$ τότε ο χρόνος t_1 είναι ο χρόνος που για πρώτη φορά το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u.

Έτσι αν Υ είναι το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t_1 δοθέντος $N \geq 1$

τότε

$$Y = u - L_1$$

$$= u - (u - U(t_1))$$

$$= U(t_1)$$

1.4.1 Συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient)

Επειδή $U(t) = u + ct - S(t)$ *θέλουμε*

$$ct \geq E[S(t)] \Leftrightarrow ct \geq E(X)E[N(t)]$$

Έστω $p_1 = E[X^2]$ και η στοχαστική διαδικασία N(t) είναι ομογενής με μέσο mt
Τότε $ct \geq \mu_1 m t \Rightarrow c \geq \mu_1 m$ *δηλ.*

$$c = (1+\theta)\mu_1 m \qquad \theta > 0$$

(περιθώριο ασφαλείας-αρχή ασφαλίστρου)

Παρατηρήσεις:

(i) *Αν η ανισότητα* $c \geq \mu_1 m$ *δεν είναι αυστηρή , τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι 1. Έτσι απαιτείται* $\theta > 0$

(ii) *Έστω η N(t) είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο λ*
Τότε $U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu_1 t - S(t)$ *με* $c = (1+\theta)\lambda E(X)$

(iii) *Εκτός από* $\theta > 0$ *απαιτείται και* $u > 0$*, μια συνθήκη που άλλωστε επιβάλλεται και νομοθετικά (γιατί απαιτείται ελάχιστο μετοχικό κεφάλαιο, περιθώριο φερεγγυότητας κ.λ.π)*
Π.χ. αποδεικνύεται ότι $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$
Ο περιορισμός αυτής της ποσότητας σε 1% απαιτεί θ = 99 δηλαδή ασφάλιστρο εκατονταπλάσιο της αναμενόμενης τιμής κινδύνου , που βέβαια είναι εξωπραγματικό.

(iv) *Όσο μεγάλο και να είναι το u, δεν επιτρέπεται θ=0.*
Έτσι το θ αλλά και το u παίζουν σημαντικό ρόλο στο να εξασφαλισθεί αποδεκτή πιθανότητα χρεοκοπίας.

'Εστω $T_i \sim Exp(\lambda)$

Για τον R είναι δύσκολο να δοθεί ορισμός , οπότε θα αναφέρουμε που εμφανίζεται και πως υπολογίζεται.

<u>Ορισμός 1.11</u>

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα (αν υπάρχει) της εξίσωσης

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_x(r) \quad (1)$$

$$M_x(r) = E(e^{rX})$$

Επειδή $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ $\quad (1+q)\, p_1 = \frac{c}{l}$ *οπότε η (1) γίνεται*

$$1 + \frac{c}{\lambda} r = M_x(r) \Rightarrow \quad \lambda + cr = \lambda M_x(r)$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(i) *Ο R είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου λ (συχνότητα του κινδύνου) και εξαρτάται μόνο από το περιθώριο ασφαλείας θ και από τα χαρακτηριστικά του ύψους της αποζημίωσης (δηλ. τα E(X) και $M_x(r)$)*

(ii) *Η (1) έχει τετριμμένη λύση r = 0*
Αν όμως θ > 0 , τότε μπορεί να υπάρχει θετική ρίζα, που είναι το R. Για να υπάρχει θα πρέπει να υπάρχει ροπογεννήτρια της X. (Αν όμως δεν υπάρχει ροπογεννήτρια της X – π.χ. αν X ~ Pareto, lognormal- τότε μπορεί να μην υπάρχει θετική λύση της (1)

(iii) *Για να δούμε αν η (1) έχει μοναδική θετική λύση, θεωρούμε ότι η ροπογεννήτρια της X, η $E(e^{tX})$, ορίζεται " t ³ 0*
(η ροπογεννήτρια γενικά μπορεί να μην υπάρχει καθόλου, δηλ, να τείνει στο άπειρο ή μπορεί να υπάρχει για ορισμένες μόνο τιμές t)

(iv) *Αν η (1) έχει περισσότερες από μια θετικές ρίζες, έστω $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ τότε ο R ορίζεται ως* $R = \min\{\, \rho_i \,;\ 1 \le i \le n \,\}$

Παράδειγμα

Αν X ~ Exp(β) να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής
Λύση

Είναι $\mathrm{M}_{C}(r)=\frac{b}{b-r}$ *και* $p_1=\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1}{\beta}$ *τότε η*

$$1+(1+\theta)p_1 r = M_x(r)$$

γίνεται $1+(1+\theta)\frac{1}{\beta}r=\frac{\beta}{\beta-r}$ $\Rightarrow \beta-r+\frac{(1+\theta)r}{\beta}(\beta-r)=\beta$

$$\Rightarrow \frac{(1+\theta)r}{\beta}(\beta-r)-r=0$$

$$\Rightarrow r\{\frac{(1+\theta)}{\beta}(\beta-r)-1\}=0$$

$$\overset{s>0}{\Rightarrow} \frac{(1+\theta)}{\beta}(\beta-R)=1$$

$$\Rightarrow \beta-R=\frac{\beta}{1+\theta} \Rightarrow R=\beta-\frac{\beta}{1+\theta}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

(Αυτή είναι η μοναδική κατανομή της X για την οποία υπάρχει ένας ωραίος και απλός τύπος υπολογισμού του R.
Για οποιαδήποτε άλλη κατανομή, η εύρεση του R απαιτεί αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού βρίσκοντας έτσι προσεγγιστικές τιμές.
Όμως αυτές οι αριθμητικές μέθοδοι, που ουσιαστικά είναι επαναληπτικές - π.χ. Newton-Raphson για να δουλέψουν απαιτούν μια αρχική τιμή του R.
Για να βρούμε μια τέτοια τιμή αρκεί να βρούμε ένα φράγμα του R και την τιμή του φράγματος να την χρησιμοποιήσουμε σαν αρχική τιμή).

Πόρισμα 1.4.α

Ισχύει ότι $R<\frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$

Απόδειξη

Είναι

$$1+(1+q)E(X)R=M_X(R)=E(e^{RX})$$

$$= E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(RX)^n}{n!}\right) = E\left(1 + RX + \frac{R^2X^2}{2} + \ldots\right) > 1 + E(X)R + \frac{1}{2}E\left(X^2\right)R^2$$

Αρα

$$\theta E(X)R > \frac{1}{2}E\left(X^2\right)R^2 \overset{R>0}{\Rightarrow} \theta E(X) > \frac{1}{2}E\left(X^2\right)R$$

$$\Rightarrow R < \frac{2\theta E(X)}{E\left(X^2\right)}$$

<u>*Πόρισμα 1.4.b*</u>

Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$(1+\theta) = \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x)dx$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Ισχύει

$$M_x(R) = \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{Rx} F'(x)dx = -\int_0^{\infty} e^{Rx}[1-\overline{F}(x)]'dx$$

$$= -\{e^{Rx}\overline{F}(x)|_{x=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \mathrm{Re}^{Rx}\overline{F}(x)dx\}$$

$$= \overline{F}(0) - \lim_{x\to\infty} e^{Rx}\overline{F}(x) + R\int_0^{\infty} e^{Rx}\overline{F}(x)dx\}$$

Όμως

$$0 \le e^{Rx}\overline{F}(x) \overset{\gamma\iota\alpha\ y\ge x}{=} e^{Rx}\int_x^{\infty} f(y)dy = \int_x^{\infty} e^{Rx} f(y)dy \overset{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ e^{Rx}\le e^{Ry}}{\le} \int_x^{\infty} e^{Ry} f(y)dy$$

Δηλ. $$0 \le e^{Rx}\overline{F}(x) \le \int_x^{\infty} e^{Ry} f(y)dy$$

Όμως $$E(e^{Rx}) = \int_0^{\infty} e^{Ry} f(y)dy < \infty$$

άρα

$$0 \le \lim_{x\to\infty} e^{Rx}\overline{F}(x) \le \lim_{x\to\infty}\int_x^{\infty} e^{Ry} f(y)dy = \lim_{x\to\infty}\{\int_0^{\infty} e^{Ry} f(y)dy - \int_0^{x} e^{Ry} f(y)dy\} = \int_0^{\infty} e^{Ry} f(y)dy - \int_0^{\infty} e^{Ry} f(y)dy = 0$$

(γιατί $\int_0^{\infty} e^{Ry} f(y) dy < \infty$ *)*

Άρα $\lim_{x\to\infty} e^{Rx}\overline{F}(x) = 0$

οπότε

$$M_x(R) = \overline{F}(0) + R\int_0^{\infty} e^{Rx}\overline{F}(x)dx = 1 + R\int_0^{\infty} e^{Rx}\overline{F}(x)dx$$

Έστω

$$f_e(x) = \frac{\overline{F}(x)}{E(x)} \quad x > 0.$$

Επειδή

$$\int_0^{\infty} \overline{F}(x)dx = E(x) \Rightarrow f_e(x) > 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \int_0^{\infty} f_e(x)dx = 1$$

η εξίσωση

$$1 + (1+\theta)E(x)R = M_x(R)$$

γίνεται

$$1 + (1+\theta)\mathrm{E}(x)R = 1 + R\int_0^{\infty} e^{Rx}\overline{F}(x)dx \Rightarrow (1+\theta)\mathrm{E}(x) = \int_0^{\infty} e^{Rx}\overline{F}(x)dx$$

Άρα ο R είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$(1+\theta) = \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x)dx$$

<u>Πόρισμα 1.4.c</u>

Αν το μέγεθος της απαίτησης δεν ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή , έστω m, τότε

$$R \geq \frac{1}{m}\ln(1+\theta)$$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι

$$1+\theta = \int_0^{\infty} e^{Rx} f_e(x)dx = \int_0^{m} e^{Rx} f_1(x)dx \leq \int_0^{m} e^{Rm} f_1(x)dx = e^{Rm}\int_0^{m} f_1(x)dx = e^{Rm}$$

Άρα

$$1+\theta \le e^{Rm} \Rightarrow Rm \ge \ln(1+\theta) \Rightarrow R \ge \frac{\ln(1+\theta)}{m}$$

1.4.2 Η ανισότητα του Lundberg και ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg

Η πιο γνωστή ανισότητα στο κλασσικό μοντέλο είναι η ανισότητα Lundberg. Η ανισότητα αυτή συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας και τον συντελεστή προσαρμογής και ταυτόχρονα δίνει ενα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας συναρτήσει του συντελεστή προσαρμογής και του αρχικού κεφαλαίου.

Ορισμός 1.10 (Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg)

Ορίζουμε ως θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg, την εξίσωση της μορφής

$$cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0,$$

όπου $\hat{f}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $f(s)$.

Παρατήρηση
Οι θετικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης υπάρχουν για δ>0, ανεξάρτητα αν το περιθώριο ασφαλείας θ είναι θετικό ή όχι. Για δ=0

- *αν θ<0 τότε οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικές*
- *αν θ>0 οι ρίζες είναι ίσες με μηδέν*

Θεώρημα 1.4.2.1 (Ανισότητα του Lundberg)

Όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R, ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο $u \ge 0$ είναι

$$\psi(u) \le e^{-Ru}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη της ανισότητας Lundberg γίνεται με επαγωγή. Θεωρούμε $\psi_n(u)$ την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν την n-οστή αποζημίωση. Για n=1,2,3,… έχουμε ότι:

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi(u)$$

Για n=0 είναι φανερό ότι $\psi_0(u) = 0 \le e^{-Ru}$.
Εάν υποθέσουμε οτι η ανισότητα ισχύει για κάποιο n, άρα $\psi_n(u) \le e^{-Ru}$, θα δείξουμε οτι ισχύει και $\psi_{n+1}(u) \le e^{-Ru}$.
Άς εξετάσουμε τι συμβαίνει με το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο. Αν το ενδεχόμενο αυτό εμφανισθεί τη χρονική στιγμή t > 0 , ο χρόνος εμφάνισής του είναι εκθετικός με σ.π.π. $\lambda e^{-\lambda t}$ και το διαθέσιμο πλεόνασμα για να καταβληθεί το ύψος της αποζημίωσης (από την εμφάνιση του ενδεχομένου) μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή είναι u+ct.

Επομένως χρεοκοπία θα έχουμε (λόγω του πρώτου ενδεχομένου) αν το μέγεθος της ζημιάς είναι μεγαλύτερο από το υπάρχον , δηλ. αν

X > u + ct (όπου X το ύψος της αποζημίωσης)

με πιθανότητα

Pr(X > u + ct)=1-F(u+ct)

Αν τώρα το μέγεθος της ζημιάς είναι $X : 0 \leq X \leq u + ct$ *τότε δεν θα έχουμε χρεοκοπία από την εμφάνιση του πρώτου ενδεχόμενου, και πληρώνοντας το ύψος X απομένει πλεόνασμα u+ct-X.*

Τότε επειδή θέλω η χρεοκοπία να εμφανισθεί πριν ή και κατά το (n+1)-οστό ενδεχόμενο και επειδή έχει εμφανισθεί ένα ενδεχόμενο που δεν προκάλεσε χρεοκοπία, έπεται ότι χρεοκοπία μπορεί να εμφανισθεί στα επόμενα n ζημιογόνα ενδεχόμενα.

Επειδή η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, αυτό είναι το ίδιο με την πιθανότητα η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος να ξεκινά με αρχικό κεφάλαιο u+ct-X και η χρεοκοπία να εμφανισθεί στα επόμενα n ζημιογόνα ενδεχόμενα, και από νόμο ολικής πιθανότητας έχω

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[1-F(u+ct)]\,dt + \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t}\,(\int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-X) f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \{[1-F(u+ct)] + \int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-X) f_X(x)\,dx)\}\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \int_0^\infty \{\int_{u+ct}^\infty f(x)dx + \int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-X) f_X(x)\,dx)\}\lambda e^{-\lambda t}dt\end{aligned}$$

και επειδή υποθέσαμε $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ έχουμε

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)\,dxdt + \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f_X(x)\,dxdt$$

γνωρίζοντας ότι $e^{-R(u+ct-x)} \geq 1$ για $x \geq u + ct$ έχουμε:

$$\int_{u+ct}^\infty f_x(x)dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)dx$$

άρα

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)dxdt = e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} m_X(R)dt$$

όμως από την εξίσωση του Lundberg , $\lambda + cR = \lambda m_X(R)$ ισχύει:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t}(\lambda + cR)dt = 1$$

και τελικά φτάνουμε στο ζητούμενο δηλαδή:

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}. \blacksquare$$

Θα δώσουμε δυο ερμηνείες για την ανισότητα του Lundberg:

1)Για δεδομένο αρχικό κεφάλαιο u, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

2)Για μια δεδομένη τιμή του συντελεστή προσαρμογής, όσο μεγαλώνει το αρχικό κεφάλαιο, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η ανισότητα του Lundberg πρακτικά μας δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Το συγκεκριμένο φράγμα είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην θεωρία χρεοκοπίας σε περιπτώσεις που οι αποζημιώσεις δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ή όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η ανισότητα αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετασθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ του αρχικού αποθεματικού u και του περιθωρίου ασφαλείας θ , που είναι δύο παράμετροι υπό τον έλεγχο της ασφαλιστικής επιχείρησης.

Πράγματι

(i) *Έστω ότι επιθυμούμε να ανεχθούμε πιθανότητα χρεοκοπίας έστω α% (π.χ. α=1% ή α=5%) και ότι αρχικό κεφάλαιο u είναι διαθέσιμο. Τότε για να βρώ το θ έχω* $\psi(u) \leq$ α και επειδή $\psi(u) \leq e^{-Ru}$

αρκεί $e^{-Ru} = \alpha \Rightarrow R = -\frac{\ln a}{u}$ *με u γνωστό και άρα αφού*

$$1+(1+\theta)E(x)R = M_x(R)$$

$$\Rightarrow 1+\theta = \frac{M_x(R)-1}{E(x)R} \Rightarrow \theta = \frac{M_x(R)-1}{E(x)R} - 1 = \frac{\mathrm{E}(e^{RX})-1}{E(X)R} - 1 = \frac{\mathrm{E}\left(e^{-\frac{\ln a}{u}X}\right)-1}{-E(X)\frac{\ln a}{u}}$$

Άρα

$$\theta = \frac{u\left\{E\left(e^{-\frac{\ln \alpha}{u}X}\right)-1\right\}}{-E(X)\ln a} - 1$$

(ii) *Έστω τώρα ότι επιθυμούμε ένα συντελεστή επιβάρυνσης θ (γνωστό), έτσι ώστε να απαιτείται κεφάλαιο u , που να εξασφαλίζει πιθανότητα χρεοκοπίας το πολύ 0<α<1*

Επειδή $\psi(u) \le e^{-Ru}$ *και θέλω* $\psi(u) \le \alpha$ *αρκεί* $e^{-Ru} = \alpha$

$$u = -\frac{\ln a}{R}$$

Επίσης από ανισότητα Lundberg έχω $\psi(\infty) = 0 \Rightarrow \delta(\infty) = 1$

Πράγματι $0 \le \psi(u) \le e^{-Ru}$ *άρα* $0 \le \lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) \le \lim\limits_{u\to\infty} e^{-Ru}$

$$0 \le \psi(\infty) \le 0 \Rightarrow \psi(\infty) = 0$$

<u>*Θεώρημα 1.2 (Ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg)*</u>

Δείξαμε ότι αν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R τότε ισχύει $\psi(u) \le e^{-Ru}$, $u \ge 0$

Το θεώρημα που θα δείξουμε στη συνέχεια είναι συναφές προς την προηγούμενη ανισότητα και προσφέρει μια πολύ καλή προσέγγιση της Ψ(u) για μεγάλες τιμές του u. Για να δείξουμε τη ζητούμενη ασυμπτωτική σχέση θα ολοκληρώσουμε την ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η Ψ(u).

Αρχικά θα δείξουμε το παρακάτω

<u>*Λήμμα*</u>

$$\int_0^t \int_0^u \psi(u-x)\,dF(x)\,du = \int_0^t \psi(t-x)\,F(x)\,dx$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Ισχύει

$$\int_0^t \int_0^u \psi(u-x) f(x)\,dx\,du = \int_0^t \int_x^t \psi(u-x) f(x)\,du\,dx = \int_0^t f(x) \int_x^t \Psi(u-x)\,du\,dx$$

Θέτω $y = u - x \Rightarrow dy = du$ *και* $x \le u \le t \Rightarrow 0 \le u - x \le t - x \Rightarrow 0 \le y \le t - x$

Άρα

$$\int_0^t \int_0^u \psi(u-x) f(x)\,dx\,du = \int_0^t \int_0^{t-x} \psi(y) f(x)\,dy$$

στην οποία θέτοντας

$$G(x) = \int_0^x \psi(y)\,dy \quad \acute{a}ra \quad G'(x) = \psi(x)$$

έχουμε

$$\int_0^t \int_0^{t-x} \psi(y) f(x)\,dy\,dx = \int_0^t f(x) \int_0^{t-x} \psi(y)\,dy\,dx = \int_0^t \Gamma(t-x) f(x)\,dx = \int_0^t \Gamma(t-x) F'(x)\,dx$$

$$= \Gamma(t-x)F(x)\Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t-x)F(x)\,dx$$

$$= \Gamma(0)F(t) - \Gamma(t)F(0) + \int_0^t \Psi(t-x)F(x)\,dx$$

$$= \int_0^t \psi(t-x)F(x)\,dx$$

που είναι το ζητούμενο.

<u>Ολοκλήρωση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η ψ(u)</u>

Ισχύει:

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\,\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u), u \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^t \psi'(u)\,du = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t\int_0^u \psi(u-x)f(x)dxdu - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(u)du$$

απο Λήμμα έχουμε

$$\Rightarrow \psi(t) - \psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)F(x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(u)du$$

Είναι

$$\int_0^t \psi(u)du = \int_0^t \psi(t-x)dx \text{ για } u = t-x \Rightarrow du = -dx$$

και

$$\int_0^t \bar{F}(u)du = \int_0^t \bar{F}(x)dx$$

Άρα, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)F(x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(x)dx$$

$$= \psi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)\bar{F}(x)dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(x)dx$$

Όμως, $\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}$

και

$$c=(1+\theta)\lambda E(X) \Rightarrow 1+\theta=\frac{c}{\lambda E(X)}$$

Άρα

$$\psi(0)=\frac{\lambda E(X)}{c}$$

οπότε

$$\psi(0)-\frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(x)dx=\frac{\lambda}{c}\left\{E(X)-\int_0^t \bar{F}(x)dx\right\}=\frac{\lambda}{c}\left\{\int_0^\infty \bar{F}(x)dx-\int_0^t \bar{F}(x)dx\right\}=\frac{\lambda}{c}\int_t^\infty \bar{F}(x)dx$$

Άρα, παίρνουμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\psi(t)=\frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)\bar{F}(x)dx+\frac{\lambda}{c}\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διάφορες χρήσεις. Για οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής F αυτή μπορεί να λυθεί αριθμητικά για να υπολογίσουμε την ψ(u). Προς τούτο όμως θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια μια άλλη μέθοδο. Μια άλλη χρήση της (1) είναι η εύρεση του ασυμπτωτικού τύπου του Cramer για την ψ(u).

Σημείωση

Για την προαναφερθείσα πρώτη χρήση της (1), έχουμε:

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{1}{E(X)}\psi(0)$$

και

$$f_e(x)=\frac{\bar{F}(x)}{E(x)} \Rightarrow \frac{\lambda}{c}\bar{F}(x)=\frac{\psi(0)}{E(X)}f_e(x)E(X)=\psi(0)f_e(x)$$

Άρα,

$$\frac{\lambda}{c}\bar{F}(x)=\psi(0)\frac{\bar{F}(x)}{E(x)}=\psi(0)f_e(x)$$

και

$$\frac{\lambda}{c}\int_t^\infty \bar{F}(x)dx=\psi(0)\int_t^\infty \frac{\bar{F}(x)}{E(x)}dx=\psi(0)\int_t^\infty f_e(x)dx=\psi(0)\,\bar{F}_e(t),$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$\psi(u) = \psi(0)\int_0^u \psi(u-x)f_e(x)dx + \psi(0)\overline{F_e}(u), u \geq 0$$

ή

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x)f_e(x)dx + \frac{1}{1+\theta}\overline{F_e}(u), u \geq 0 \qquad (1a)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην (1α), όπου

$$\hat{\psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du \ , \qquad \widehat{f_e}(s) = \int_0^\infty e^{-su}f_e(u)du$$

και

$$\widehat{\overline{F_e}}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\overline{F_e}(u)du = \frac{1-\widehat{f_e}(s)}{s}$$

βρίσκουμε

$$\hat{\psi}(\,s) = \frac{1}{1+\theta}\hat{\psi}(s)\widehat{f_e}(s) + \frac{1}{1+\theta}\widehat{\overline{F_e}}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{\psi}(\,s) = \frac{\frac{1}{1+\theta}\widehat{\overline{F_e}}(s)}{1-\frac{1}{1+\theta}\widehat{f_e}(s)} \qquad (1\beta).$$

Λήμμα 2
Αν $S = X_1 + \cdots + X_N$ με $\Pr(N=n) = pq^n, n = 0,1,2,\ldots$ και f η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X. Τότε

$$\hat{\bar{G}}(s) = \frac{q\hat{\bar{F}}(s)}{1-q\hat{f}(s)}$$

όπου $\hat{\bar{G}}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $\bar{G}(x) = \Pr(S > x)$.

Έτσι, σύμφωνα με αυτό το αποτέλεσμα, απο την (1β) συμπεραίνουμε ότι η ψ(u) είναι η συνάρτηση επιβίωσης (δεξιά ουρά) μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, δηλαδή

$$\psi(u) = \Pr(L > u)$$

όπου $L = Y_1, \ldots, Y_M$, με

$$\Pr(M=n) = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n, n = 0,1,2,\ldots$$

δηλαδή $M \sim G(\frac{\theta}{1+\theta})$ και η τυχαία μεταβλητή Υ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)}$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής των αποζημιώσεων X. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής L είναι μικτού τύπου, γιατί η L έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, με

$$\Pr(L = 0) = \frac{\theta}{1+\theta} (= \Pr(M = 0)).$$

Άρα, έχουμε:

$$\Psi(0) = \Pr(L > 0) = 1 - \Pr(L \leq 0) = 1 - \Pr(L = 0) = 1 - \frac{\theta}{1+\theta} = \frac{1}{1+\theta}$$

και

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr\,(M = n)\overline{F_e^{*n}}(u) \Rightarrow \Psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{(1+\theta)^{n+1}} \overline{F_e^{*n}}(u)$$

Λήμμα 3
Αν για τις συναρτήσεις $a(x), b(x)$ ισχύει:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$$

τότε γράφουμε $a(x) \backsim b(x), x \to \infty$.

Θεώρημα
Υποθέτουμε ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R>0. Τότε,

$$\psi(u) \backsim Ce^{-Ru}, u \to \infty$$

δηλαδή,

$$C = \lim_{n\to\infty} e^{Ru}\psi(u)$$

όπου

$$C = \frac{\theta E(X)}{E(Xe^{RX}) - (1+\theta)E(X)}$$

Σημείωση: είναι $E(Xe^{RX}) = M_X'(R)$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω αποτέλεσμα που είναι ειδική περίπτωση του πολύ γνωστού ανανεωτικού θεωρήματος.
Αν g(x) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής και η συνάρτηση $a(x)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$a(x) = b(x) + \int_0^x a(x-y)g(y)dy\,, x > 0 \qquad (2)$$

τότε

$$\lim_{x\to\infty} a(x) = \frac{\int_0^\infty b(y)dy}{\int_0^\infty yg(y)dy} \qquad (3)$$

Εμείς, δείξαμε ότι

$$\psi(t) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^t \psi(t-x)f_e(x)dx + \frac{1}{1+\theta}\overline{F_e}(t), t \geq 0$$

Αυτή η εξίσωση είναι σχεδόν ίδιας μορφής με την ανανεωτική εξίσωση (2) εκτός του οτι υπάρχει ο όρος $\frac{1}{1+\theta}$. Μπορούμε εύκολα να την φέρουμε στη μορφή της (2). Πράγματι, πολλαπλασιάζω και τα δυο μέλη με e^{Rt} και παίρνω

$$e^{Rt}\psi(\mathrm{t}) = \int_0^t e^{R(t-x)}\psi(t-x)\frac{e^{Rx}f_e(x)dx}{1+\theta} + \frac{e^{Rt}\overline{F_e}(t)}{1+\theta} \qquad (4)$$

Θέτω $\psi_1(t) = e^{Rt}\psi(\mathrm{t})$, $g(x) = \frac{e^{Rx}f_e(x)}{1+\theta}$, $b(x) = \frac{e^{Rt}\overline{F_e}(x)}{1+\theta}$.

Τότε, η (4) γράφεται

$$\psi_1(t) = \int_0^t \psi_1(t-x)g(x)dx + b(t), t > 0$$

και επειδή

$$\int_0^\infty g(x)dx = \frac{1}{1+\theta}\int_0^\infty e^{Rx} f_e(x)dx = 1$$

έπεται ότι η $g(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
Άρα, η $\Psi_1(t)$ ικανοποιεί μια ανανεωτική εξίσωση της μορφής (2). Επομένως, ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty}\Psi_1(t) = \frac{\int_0^\infty b(y)dy}{\int_0^\infty yg(y)dy} \qquad (5).$$

Είναι:

$$\int_0^\infty b(y)dy = \frac{1}{1+\theta}\int_0^\infty e^{Ry}\overline{F_e}(y)dy = \frac{1}{R(1+\theta)}\int_0^\infty (e^{Ry})'\,\overline{F_e}(y)dy$$

$$= \frac{1}{R(1+\theta)}\left\{e^{Ry}\overline{F}_e(y)|_{y=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{Ry}\overline{F_e'}(y)dy\right\}$$

$$= \frac{1}{R(1+\theta)}\left\{0 - \overline{F}_e(0) + \int_0^{\infty} e^{Ry}f_e(y)dy\right\}$$

$$= \frac{1}{R(1+\theta)}\{-1+1+\theta\}$$

$$= \frac{\theta}{R(1+\theta)}$$

όπου

$$\overline{F}_e(x) = \frac{\int_x^{\infty}\overline{F}(y)dy}{E(X)} \Rightarrow \overline{F}_e(0) = 1$$

και

$$\int_0^{\infty} y\, g(y)dy = \frac{1}{1+\theta}\int_0^{\infty} y\, e^{Ry}f_e(y)dy = \frac{1}{R(1+\theta)}\int_0^{\infty}(e^{Ry})'yf_e(y)dy$$

$$= \frac{1}{R(1+\theta)}\left\{e^{Ry}yf_e(y)|_{y=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{Ry}(yf_e(y))'dy\right\}$$

$$= \frac{1}{R(1+\theta)}\left\{\lim_{y\to\infty} e^{Ry}yf_e(y) - \int_0^{\infty} e^{Ry}\, f_e(y)dy - \int_0^{\infty} e^{Ry}yf_e'(y)dy\right\}$$

όμως

$$0 \le e^{Ry}yf_e(y) = \frac{e^{Ry}y}{E(X)}\int_y^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{E(X)}\int_y^{\infty} e^{Ry}yf(x)dx \le \frac{1}{E(X)}\int_y^{\infty} xe^{Rx}f(x)dx$$

και

$$0 \le \lim_{y\to\infty} e^{Ry}yf_e(y) \le \frac{1}{E(X)}\lim_{y\to\infty}\int_y^{\infty} x\, e^{Rx}f(x)dx$$

$$= \frac{1}{E(X)}\lim_{y\to\infty}\left\{\int_0^{\infty} xe^{Rx}f(x)dx - \int_0^{y} xe^{Rx}f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{E(X)}\{E[Xe^{Rx}] - E[Xe^{Rx}]\} = 0$$

για $E[Xe^{Rx}] = M'_x(R) < \infty$.

Έπίσης,

$$f_e(y) = \frac{\bar{F}(y)}{E(X)} \Rightarrow f'_e(y) = -\frac{f(y)}{E(X)}.$$

Άρα,

$$\int_0^\infty yg(y)dy = \frac{1}{R(1+\theta)}\left\{-\int_0^\infty e^{Ry} f_e(y)dy + \frac{1}{E(X)}\int_0^\infty ye^{Ry} f(y)dy\right\}$$

$$= \frac{1}{R(1+\theta)}\left\{-(1+\theta) + \frac{1}{E(X)}M'_x(R)\right\}$$

$$= \frac{M'_x(R) - (1+\theta)E(X)}{R(1+\theta)E(X)}.$$

Άρα η (5) γράφεται:

$$\lim_{t\to\infty} e^{Rt}\psi(t) = \frac{\frac{\theta}{R(1+\theta)}}{\frac{M'_x(R) - (1+\theta)E(X)}{R(1+\theta)E(X)}} = \frac{\theta E(X)}{M'_x(R) - (1+\theta)E(X)}$$

δηλαδή,

$$\lim_{t\to\infty} e^{Rt}\psi(t) = C \Rightarrow e^{Rt}\psi(t) \backsim C \Rightarrow \psi(t) \backsim Ce^{-Rt}$$

Έτσι, εκτός της εκθετικής ανισότητας $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, απο τον ασυμπτωτικό τύπο του Cramer προκύπτει ότι η $\psi(u)$ συμπεριφέρεται ως μια εκθετική συνάρτηση για τις μεγάλες τιμές u. Προφανώς, για να ισχύει η ανισότητα Lundberg

Αναφέρουμε οτι οι δυο αυτές σχέσεις έχουν μεγάλη σημασία όχι μόνο στο κλασικό μοντέλο, αλλά και σε διάφορα άλλα γενικότερα μοντέλα της θεωρίας κινδύνων, αφού μπορούν να γενικευτούν στην περίπτωση π.χ. όπου οι αποζημιώσεις δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ή όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων δεν είναι εκθετικοί.

1.5 *Ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την ψ(u)*

Ορισμός 1.11

Έστω οτι 0< $\varphi < 1$ και η F(x) είναι μια συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$ με F(0)=0 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Αν η συνάρτηση m ικανοποιεί την εξίσωση:

$$m(x) = \varphi \int_0^y m(x-y)dF(y) + \varphi r(x), \quad x \geq 0$$

όπου $r(x)$ είναι κάποια φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $(0, \infty)$. Τότε η $m(x)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation).

Θα θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα της εύρεσης ενός αναλυτικού τύπου για την ψ(u) ή την δ(u)=1-ψ(u)

Αν η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος έχει την ανανεωτική ιδιότητα, τότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας (στο διηνεκές) δ(u), μπορεί να εκφρασθεί ως η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας όταν επέλθει το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο και μη-χρεοκοπίας στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη το πλεόνασμα που απομένει μετά το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο.

Έστω λοιπόν t η χρονική στιγμή εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου και x το ύψος της αντίστοιχης αποζημίωσης. Για να μη συμβεί χρεοκοπία θα πρέπει να μη συμβεί χρεοκοπία από το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο (άρα το πλεόνασμα u+ct τη χρονική στιγμή t πρέπει να είναι μεγαλύτερο του x) και στη συνέχεια θέλουμε να μη συμβεί χρεοκοπία όταν η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά με αρχικό κεφάλαιο u+ct-x. Έτσι από τον τύπο ολικής πιθανότητας έχω:

$$\delta(u) = \int_0^\infty f_T(t) \left(\int_0^{u+ct} \delta(u+ct-x) f(x) dx \right) dt$$

$$1-\psi(u) = \int_0^\infty f_T(t) \left(\int_0^{u+ct} [1-\psi(u+ct-x)] f(x) dx \right) dt = \int_0^\infty f_T(t) \{ \int_0^{u+ct} f(x) - \int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x) f(x) dx \} dt$$

$$= \int_0^\infty f_T(t) \{ F(u+ct) - \int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x) f(x) dx \} dt$$

$$Άρα \quad \psi(u) = 1 - \int_0^\infty f_T(t)[1-F(u+ct)]dt + \int_0^\infty f_T(t)\left(\int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)\, f(x)dx\right)dt$$

$$\psi(u) = \int_0^\infty f_T(t) - \int_0^\infty f_T(t)F(u+ct)]dt + \int_0^\infty f_T(t)\left(\int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)\, f(x)dx\right)dt$$

$$\psi(u) = \int_0^\infty f_T(t)[1-F(u+ct)]dt + \int_0^\infty f_T(t)\left(\int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)\, f(x)dx\right)dt$$

Αν η διαδικασία αποζημιώσεων είναι η σύνθετη Poisson τότε $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ *, δηλαδή έχω το κλασικό μοντέλο τότε*

$$\delta(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct} \delta(u+ct-x) f(x)dx\right)dt \quad (3)$$

και

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[1-F(u+ct)]dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left(\int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)\, f(x)dx\right)dt$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της δ(u).

Από την (3) θέτοντας u+ct = s έχουμε για $0 \le t < \infty \Rightarrow u \le s < \infty$ *και* $dt = \frac{1}{c} ds$

Άρα

$$\delta(u) = \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left(\int_0 \delta(s-x)\, f(x)dx\right)\frac{1}{c}ds = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left(\int_0 \delta(s-x)\, f(x)dx\right)ds$$

(5)

Για να παραγωγίσουμε την (5) χρησιμοποιούμε το παρακάτω

<u>*Υπενθύμιση*</u>

Επειδή το $\int_{\phi_1(u)}^{\phi 2(u)} g(u,s)ds$ *είναι συνάρτηση μόνο του u ισχύει ότι:*

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} g(u,s)ds = g(u,\phi_2(u))\phi_2'(u) - g(u,\phi_1(u))\phi_1'(u) + \int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} \frac{\partial}{\partial u} g(u,s)ds$$

Παρατηρούμε ότι η (5) γράφεται

$$\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds \quad με \quad g(u,s) = e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \delta(s-x) f(x)dx$$

και

$\phi_1(u)=u \quad \phi_2(u)=\infty$ άρα $\phi'_1(u)=1 \qquad \phi_2'(u)=0$

οπότε

$$g(u,\phi_2(u))\phi_2'(u)-g(u,\phi_1(u))\phi_1'(u)=-g(u,u)=-\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx$$

και

$$\frac{\partial}{\partial u}g(u,s)=\frac{\lambda}{c}\,e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \delta(s-x)f(x)dx$$

Άρα

$$\delta'(u)=\frac{\lambda}{c}\left\{-\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx+\int_u^\infty \frac{\lambda}{c}e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}\left(\int_0^s \delta(s-x)f(x)dx\right)ds\right\}$$

δηλ.

$$\delta'(u)=\frac{\lambda}{c}\delta(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx \qquad u\geq 0 \qquad (6)$$

<u>Θεώρημα 1.4</u>

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-x)f_X(x)dx+\bar{F}_X(u)\right) \quad .$$

<u>Απόδειξη</u>

Από την (6)

και επειδή $\delta(u)=1-\psi(u) \Rightarrow \delta'(u)=-\psi'(u)$

παίρνω $-\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}(1-\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u\left[1-\psi(u-x)\right]f(x)dx$

$$=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx-\frac{\lambda}{c}\bar{F}(u) \qquad u\geq 0$$

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-x)f_X(x)dx+\bar{F}_X(u)\right)$$

<u>Ποια είναι, όμως, η πιθανότητα χρεοκοπίας αν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν;</u>

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι:

$$\int_0^\infty \psi'(u)du = \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty \psi(u)du - \int_0^\infty \int_0^u \psi(u-x) f_X(x)dxdu - \int_0^\infty \bar{F}(u)du\right),$$

ή ισοδύναμα

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^\infty \psi(u)du - \int_0^\infty f_X(x)\int_0^u \psi(u-x)dxdu - E(X)\right),$$

ή ισοδύναμα

$$-\psi(0) = -\frac{\lambda}{c}E(X),$$

ή τελικά

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \quad \text{και} \quad \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

<u>Σημείωση:</u>
Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ανεξάρτητα της ύπαρξης του συντελεστή προσαρμογής και αποτελούν ειδική περίπτωση της σ.π.π. L_1

Συνεπώς για αρχικό αποθεματικό ίσο με το μηδέν η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι εξίσωση συναρτήσει του περιθωρίου κέρδους θ.

<u>Ποια είναι, όμως, η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαιτίας ενός μοναδικού ζημιογόνου ενδεχομένου ;</u>

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής απαιτείται η κατανομή του χρόνου εμφάνισης του ζημιογόνου ενδεχόμενου και η κατανομή του ύψους της αποζημίωσης.
Έστω T η τ.μ. που παριστά το χρόνο εμφάνισης του ζημιογόνου ενδεχόμενου.
Τότε για την $U(t) = u + ct - S(t)$ *είναι*

$$S(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < T \\ X & , \ t \geq T \end{cases}$$

όπου η τ.μ. X = ύψος αποζημίωσης αν συμβεί το ενδεχόμενο
Χρεοκοπία θα συμβεί αν κατά τη χρονική στιγμή έστω t εμφάνισης του ζημιογόνου ενδεχόμενου το υπάρχον αποθεματικό, έστω u +ct , είναι μικρότερο από το ύψος της ζημιάς (αποζημίωσης) X.

Άρα από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχω:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \int_0^\infty f_T(t)\,\Pr(X > u+ct)\,dt \\ &= \int_0^\infty f_T(t)\left[1 - F_X(u+ct)\right]dt\end{aligned} \qquad (1)$$

και επειδή $f_T(t) = F'_T(t)$

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \int_0^\infty F'_T(t)\left[1 - F_X(u+ct)\right]dt = \\ &= F_T(t)\left[1 - F_X(u+ct)\right]\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty F_T(t)\left[1 - F_X(u+ct)\right]'dt \\ &= \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\lim_{t\to\infty} \bar{F}_X(u+ct)} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{F_T(0)}\bar{F}_X(u) + c\int_0^\infty F_T(t)\left[f_X(u+ct)\right]dt\end{aligned}$$

Άρα

$$\psi(u) = \int_0^\infty F_T(t)\, f_X(u+ct)\, dt \qquad (2)$$

Θέτω τώρα $u + ct = s \quad 0 \le t < \infty$

$\Rightarrow u \le u+ct < \infty$

$\Rightarrow u \le s < \infty$

και $dt = \frac{1}{c}ds \;,\; t = \frac{s-u}{c}$

Από (1) $\psi(u) = \int_u^\infty f_T\left(\frac{s-u}{c}\right)\bar{F}_X(s)\frac{1}{c}ds = \frac{1}{c}\int_u^\infty f_T\left(\frac{s-u}{c}\right)\bar{F}_X(s)\,ds$

και

Από (2) $\psi(u) = c\int_u^\infty F_T\left(\frac{s-u}{c}\right)f_X(s)\frac{1}{c}ds = \int_u^\infty F_T\left(\frac{s-u}{c}\right)f_X(s)\,ds$

<u>Ορισμός 1.12</u>

Η συνάρτηση $f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)}$ *λέγεται συνάρτηση ισορροπίας (equilibrium function)* και επειδή $\int_0^\infty \bar{F}(x)dx = E(x)$ η $f_e(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-x)f_X(x)dx + \bar{F}_X(u)\right),$$

παίρνουμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-t)\bar{F}(t)dt - \int_0^\infty \bar{F}(t)dt\right)$$

επειδή

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\psi(0)}{E(x)}$$

η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας , η οποία είναι:

$$\psi(u) = \psi(0)\left(\int_0^u \psi(u-t)f_e(t)dt - \bar{F}_e(u)\right).$$

1.6 *Η συνάρτηση Gerber-Shiu*

Οι Hans Gerber και Elias Shiu το 1998, κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές

- T, δηλαδή το χρόνο χρεοκοπίας (τη χρονική στιγμή κατα την οποία το πλεόνασμα παίρνει πρώτη φορά αρνητική τιμή),
- $|U(t)|$, το έλλειμμα τη στιγμή ακριβώς μετά την χρεοκοπία και
- $U(T-)$, το πλεόνασμα την στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία

σε μια μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.
Η λέξη ποινή χρησιμοποιείται διότι θεωρούμε ότι την στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία ο ασφαλιστής θα επιβαρυνθεί με κάποια ποινή. Η ποινή αυτή εξαρτάται απο το πλεόνασμα πριν και μετά την χρεοκοπία. Η συνάρτηση αυτή, μάλιστα, είναι γνωστή και με την ονομασία 'συνάρτηση Gerber-Shiu'.

Ορισμός 1.13
Έστω $w\ (x,y)$ για $x,y \geq 0$ μια μη αρνητική δισδιάστατη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ και δ≥ 0. Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ σε ενα κλασσικό μοντέλο.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu δίνεται απο τον τύπο:

$$\mathrm{m(u) = E\left[e^{-\delta t}w(U(T-), |U(T)|)I(T < \infty)|U(0) = u\right], u \geq 0}$$

όπου δ έιναι η ένταση ανατοκισμού και η συνάρτηση I(.) είναι μια δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου , η οποία μας πληροφορεί οτι έχει επέλθει η χρεοκοπία.

Η ποσότητα $e^{-\delta t}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως προεξοφλητικός παράγοντας ή ως μετασχηματισμός Laplace. Τέλος, η μεταβλητή Τ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας.

<u>Η ποσότητα $w(U(T-),|U(T)|)$ αποτελεί ουσιαστικά την ποινή που καλείται να πληρώσει ο ασφαλιστής και για την ακρίβεια είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία της ποινής την στιγμή της χρεοκοπίας.</u>

Η συνάρτηση m(u) αλλίως καλείται ανανεομένη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής (expected discounted penalty function). Η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι, διαισθητικά, μια πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές. Συγκεκριμένα, η μεταβλητή αυτή είναι το αρχικό αποθεματικό u στο χαρτοφυλάκιο που εξετάζουμε.

<u>Απο τον ορισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu, προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Ας αναφέρουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις:</u>

i. Για δ=0 και w(x,y)=1 η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή

$$m_{\delta}(u) = E[I(T < \infty)|U(0) = u] = \Psi(u).$$

Αυτό έπεται άμεσα απο το γεγονός ότι η αναμενόμενη τιμή της δείκτριας συνάρτησης ενός ενδεχομένου ισούται με την πιθανότητα του ενδεχομένου.

ii. Για δ>0 και w(x,y)=1 προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$m(u) = E[e^{-\delta t} I(T < \infty)|U(0) = U]$$

iii. Για δ>0 και $w(x,y) = I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)$ προκύπτει η προεξοφλημένη απο κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας

$$F_{\delta}(x_1, x_2|u) = E[e^{-\delta t} I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)|U(0) = \mathrm{u}$$

iv. Για δ=0 και $w(x,y) = I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)$, προκύπτει η απο κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών U(T-) και |U(T)|:

$$F_0(x_1, x_2|u) = E[I(x \leq x_1)I(y \leq x_2)|U(0) = u]$$

v. Για δ>0 και $w(x,y) = I(x = x_1)$, προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, U(T-), δηλαδή:

$$h(x_1, u) = E[e^{-\delta t} I(U(T-) \leq x_1)I(T < \infty)|U(0) = \mathrm{u}]$$

vi. Για δ>0 και $w(x,y) = I(y = x_2)$, προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας |U(T)|:

$$h(x_2|u) = E\left[e^{-\delta t} I(|U(T)| = x_2) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right] \quad .$$

Απο μαθηματική άποψη, η συνάρτηση Gerber-Shiu που αναφέραμε παραπάνω μπορεί να πάρει την εξής ισοδύναμη μορφή:

Έστω $f(x,y,t|u)$ η ελλειμματική από κοινού πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν και του ελλείμματος αμέσως μετά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι το ρχικό αποθεματικό είναι u. Η πυκνότητα αυτή είναι ελλειμματική αφού ισχύει :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y,t|u) dt dx dy = \psi(u) \quad .$$

Τότε η συνάρτηση των Gerber-Shiu γράφεται ως εξής:

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) e^{-\delta t} f(x,y,t|u) dx dy dt \quad .$$

Στη θεωρία χρεοκοπίας για το κλασικό μοντέλο κυρίαρχο ρόλο παίζει ο συντελεστής προσαρμογής. Αυτός ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα (αν υπάρχει τέτοια ρίζα) της εξίσωσης του Lundberg.
Όπως έχουμε αναφέρει, η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ειδική περίπτωση της συνάρτησης των Gerber-Shiu για δ=0 και w(x,y)=1. Οι Gerber-Shiu μελέτησαν την παρακάτω εξίσωση , η οποί αποτελεί γενίκευση της συνήθους εξίσωσης του Lundberg για το κλασικό μοντέλο.

Για σ≥ 0 ορίζουμε την συνάρτηση

$$l(s) = \sigma + \lambda - cs \,.$$

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση

$$l(s) = \lambda \hat{f}(s)$$

όπου $\hat{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας f των αποζημιώσεων.

Παρατηρούμε οτι η κλίση της ευθείας είναι αρνητική. Η εξίσωση αναφέρεται ως γενικευμένη εξίσωση του Lundberg. Η εξίσωση αυτή έχει μια μοναδική ρίζα στον μη-αρνητικό ημιάξονα η οποία συμβολίζεται ρ.

Εφαρμογή

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση του κλασικού μοντέλου με εκθετικές αποζημιώσεις,

$$f(x) = be^{-bx}, x \geq 0 .$$

Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg είναι

$$\lambda\hat{f}(s) = \sigma + \lambda - cs$$

και εφόσον

$$\hat{f}(s) = \frac{b}{b+s}$$

προκύπτει η σχέση

$$\sigma + \lambda - cs = \frac{\lambda b}{b+s} .$$

Με απαλοιφή παρανομαστή αυτή γράφεται

$$cs^2 + (cb - \sigma - \lambda)s - b\sigma = 0 .$$

Για σ>0, αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με μια θτική και μια αρνητική ρίζα. Η θετική ρίζα ρ, ισούται με

$$\rho = \frac{\lambda + \sigma - cb + \sqrt{(cb - \sigma - \lambda)^2 + 4cb\sigma}}{2c} .$$

Θεώρημα 1.5

Η συνάρτηση m(u) των Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$m'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-y)dP(y) - \frac{\lambda}{c} z(u), \qquad u \geq 0$$

όπου $z(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)dP(y)$

1.7 Τελεστής των Dickson-Hipp

Ορισμός 1.14

Για μια συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται ο τελεστής $T_r f(x)$, ο οποίος δίνεται απο την σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u)du, \quad r \in C, x \geq 0.$$

Λήμμα 1.1

Ισχύουν τα εξής:
1) $T_r f(0) = \hat{f}(r)$.
2) $Aν$ $T_r \hat{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(x)$ τότε

$$T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}.$$

3) $T_{r_1} T_{r_2} = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}$ $\forall r_2 \neq r_1$.

<u>Απόδειξη</u>

1) Προφανώς για x=0 , η σχέση $T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u) du$ γίνεται

$$T_r f(0) = \int_x^\infty e^{-ru} f(u) du = \hat{f}(r), \quad r \in C$$

2) Ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(x)$ δίνεται απο την σχέση

$$T_r \hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, T_r f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-ru} f(y) \left(\int_0^y e^{-x(r-s)} dx \right) dy,$$

και άρα προκύπτει το αποτέλεσμα $T_r \hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}$.

3) Έστω η συνάρτηση $g(x) = T_{r_2} f(x)$, τότε ισχύει η σχέση

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_1} g(x)$$

$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} g(u) du$$

$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} T_{r_2} f(u) du$$

$$= \int_x^\infty e^{-r_1(u-x)} \int_u^\infty e^{-r_2(s-u)} ds du,$$

απο την οποία συμπεραίνουμε ότι προκύπτει η εξίσωση

$$T_{r_1}T_{r_2}f(x) = \int_x^{\infty}\int_u^{\infty} e^{-r_1(u-x)}\, e^{-r_2(s-u)} f(s)dsdu.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι περιορισμοί $x \leq u < \infty$ και $u \leq s < \infty$. Με αλλαγή των ορίων $x \leq u < s$ και $x \leq s < \infty$ και ύστερα απο πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\mathrm{T_{r_1}T_{r_2}f(x)} = \int_x^{\infty}\int_u^{\infty} \mathrm{e^{-r_1(u-x)}\, e^{-r_2(s-u)} f(s)dsdu}$$

$$= \int_x^{\infty} \mathrm{f(s)e^{r_1x}e^{-r_2s}} \left(\int_x^s \mathrm{e^{-r_1u}e^{r_2u}\, du}\right) \mathrm{ds}$$

$$= \int_x^{\infty} \mathrm{f(x)\; e^{r_1x}e^{-r_2s}} \left(\int_x^s \mathrm{e^{(r_2-r_1)u}du}\right) \mathrm{ds}$$

$$= \int_x^{\infty} \mathrm{f(s)\; e^{r_1x}e^{-r_2s}} \left[\frac{1}{\mathrm{r_2-r_1}}\left(\mathrm{e^{(r_2-r_1)s}-e^{(r_2-r_1)x}}\right)\right] \mathrm{ds}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r_2-r_1}}\left[\int_x^{\infty} \mathrm{e^{r_1x}e^{-r_2s}}\left(\mathrm{e^{(r_2-r_1)s}-e^{(r_2-r_1)x}}\right) f(s)ds\right]$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r_2-r_1}}\left[\int_x^{\infty} \mathrm{e^{-r_1(s-x)}} f(s)ds - \int_x^{\infty} \mathrm{e^{-r_2(s-x)}} f(s)ds\right]$$

Άρα απο τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι

$$T_{r_1}T_{r_2} = \frac{T_{r_1}f(x) - T_{r_2}f(x)}{r_2 - r_1} \qquad \blacksquare$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Μια επέκταση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας, είναι η υπόθεση της ύπαρξης στρατηγικής σταθερού μερίσματος(constant dividend barrier strategy), με την οποία παρακολουθείται η πολιτική της χορήγησης μερισμάτων από την ασφαλιστική εταιρία καθώς μεταβάλλεται το ασφαλιστικό της χαρτοφυλάκιο.

Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον στατιστικό και αναλογιστή De Finetti ,το 1957, ο οποίος έφερε στο επίκεντρο την διερεύνηση των μερισμάτων που πληρώνονται στους μετόχους μιας ασφαλιστικής, μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας. Ακολούθησαν πολλές ακόμα μελέτες με πιο ξεχωριστές αυτές των Gerber-Shiu (1998,2005) και Dickson-Waters (2004).

Στο κλασσικό μοντέλο η διανομή μερισμάτων γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Ο ασφαλιστής έχει την υποχρέωση να πληρώνει μερίσματα με σταθερό ρυθμό όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει ένα επίπεδο. Αυτό το επίπεδο είναι γνωστό με τον όρο κατώφλι.
Όταν το πλεόνασμα βρίσκεται κάτω από το όριο μερίσματος, η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στην κλασσική περίπτωση, όπου η αύξηση του πλεονάσματος διαμορφώνεται από την αύξηση των ασφαλίστρων με σταθερό ρυθμό c και η μείωση οφείλεται στις ζημιές που καλείται να καλύψει ο ασφαλιστής.

Θεωρούμε, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα κατώφλι στο επίπεδο $b > u$.

Με τη στρατηγική σταθερού μερίσματος δεν πληρώνεται καθόλου μέρισμα όσο το πλεόνασμα βρίσκεται κάτω απο ένα σταθερό όριο, όταν όμως το πλεόνασμα βρεθεί πάνω από αυτό, πληρώνεται σαν μέρισμα ολόκληρο το ποσό που ξεπερνά το όριο, μέχρι την εμφάνιση της επόμενης ζημιάς.

2.2 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος.

Ορισμός 2.1

Έστω $U_b(t)$ η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος με αρχικό πλεόνασμα $U_b(0) = u$. Δεδομένου ότι υπάρχει μια στρατηγική σταθερού μερίσματος η στοχαστική ανέλιξη έχει την παρακάτω μορφή:

$$U_b(t) = \begin{cases} u + ct - S(t), & U_b(t) < b \\ u - S(t), & U_b(t) = b \end{cases}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε ότι η δυναμική της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b \\ -dS(t), & U_b(t) = b \end{cases}.$$

Για $b = \infty$ έχουμε το κλασσικό μοντέλο θεωρία χρεοκοπίας που αναλύσαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

2.3 Χρόνος χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

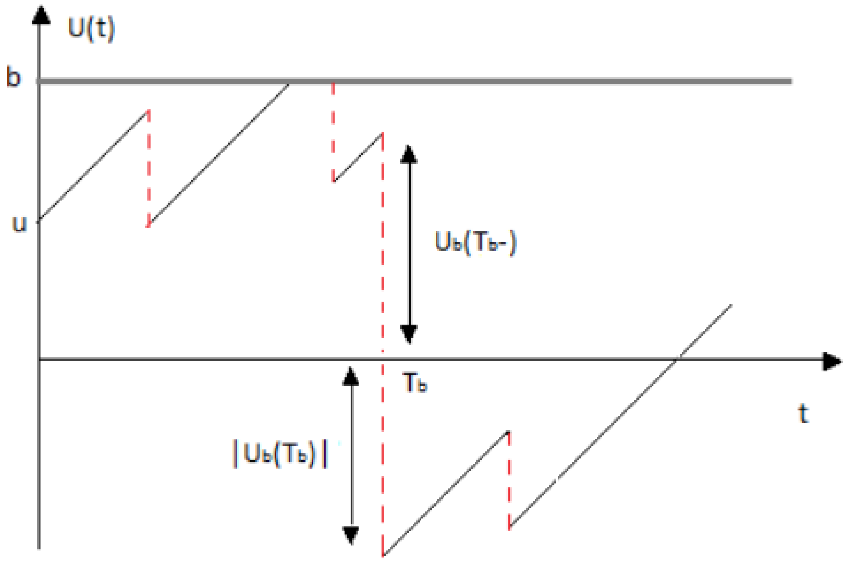
Ορισμός 2.2

Ορίζουμε

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\}, \quad u \leq b$$

ως το χρόνο χρεοκοπίας κάτω απο την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, δηλαδή ο χρόνος έως ότου το πλεόνασμα βρεθεί για πρώτη φορά κάτω απο το μηδέν.

Ας δούμε όμως και σχηματικά τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος υπό τη στρατηγική σταθερού μερίσματος .



Σχήμα 4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού

2.4 <u>Ηπιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος</u>

<u>Ορισμός 2.3</u>

Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος ορίζεται ως:

$$\psi_b(u) = Pr(T_b < \infty) = Pr(U_b(t) < 0)\,, \quad u \leq b.$$

Ποια σχέση συνδέει την $\psi_b(u)$ με την ψ(u) ;

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν από τη διέλευση από το b και την πιθανότητα μετά από τη διέλευση από το b.

Άρα ισχύει ότι ψ(u) = $\psi_b(u)$+(1-$\psi_b(u))\psi(b)$ και συνεπώς

$$\psi_b(u) = \frac{\psi(u)-\psi(b)}{1-\psi(b)} \qquad 0 \leq u < b$$

2.5 Η συνάρτηση Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (συνάρτηση Gerber-Shiu) υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος με αρχικό απόθεμα $u \leq b$ και ένταση ανατοκισμού $\delta \geq 0$ δίνεται απο τον τύπο:

$$m_b(u) = E\left[e^{-\delta t} w\{U(T_b -), |U_b(T_b)|\} I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right], \quad u \leq b$$

όπου, $0 \leq w(x, y) < \infty$ μια δισδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$.

Είναι φανερό απο τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$ ότι πρόκειται για μια ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς μερίσματα, U(t). Έτσι, για $b \to \infty$ έχουμε ότι

$$\lim_{b\to\infty} U_b(t) = U(t) \Rightarrow \lim_{b\to\infty} m_b(u) = m(u) .$$

Ας δούμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις:

- Για δ>0 και $w(x, y) = 1$ παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας
$$m_{T_b}(u, b) = E[e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty) | U_b(0) = u]$$

- Για δ=0 και $w(x, y) = 1$ παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας
$$m_{T_b}(u, b) = E[I(T_b < \infty) | U_b(0) = u]$$

- Για δ>0 και $w(x, y) = I(x \leq x_1) I(y \leq x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη απο κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας
$$m_{T_b}(u, b) = E\left[e^{-\delta T_b} I(U_b(T_b -) \leq x_1) I(|U_b(T_b)| \leq x_2) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right]$$

- Για δ>0 και $w(x, y) = I(x = x_1) I(y = x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας
$$m_{T_b}(u, b) = E\left[e^{-\delta T_b} I(U_b(T_b -) = x_1) I(|U_b(T_b)| = x_2) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right]$$

- Για δ>0 και $w(x, y) = I(x \leq x_1)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος $U_b(T_b -)$ την στιγμή πριν την χρεοκοπία
$$m_{T_b}(u, b) = E\left[e^{-\delta T_b} I(U_b(T_b -) \leq x_1) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right]$$

- Για δ>0 και $w(x, y) = I(y \leq x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $|U_b(T_b)|$ την στιγμή πριν την χρεοκοπία
$$m_{T_b}(u, b) = E\left[e^{-\delta T_b} I(|U_b(T_b)| \leq x_2) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right] .$$

2.6 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την $m_b(u)$

Παρακάτω θα διατυπώσουμε ολοκληρωτική εξίσωση της $m_b(u)$ και στη συνέχεια θα την μετατρέψουμε σε ολοκληροδιαφορική εξίσωση καθορίζοντας την οριακή συνθήκη που τη διέπει κάτω από την ύπαρξη κατωφλίου. Έστω t ο χρόνος της πρώτης απαίτησης και y το αιτούμενο ποσό.

Υπάρχουν δύο εκδοχές :

i) $t < (b-u)/c$ και το πλεόνασμα δεν έχει φτάσει ακόμα το κατώφλι. Στην περίπτωση αυτή το πλεόνασμα πρίν τη χρονική στιγμή t είναι u+ct

ii) $t \geq (b-u)/c$ και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρονική στιγμή t είναι b

Με την παραδοχή ότι η πιθανότητα της απαίτησης την χρονική στιγμή t είναι $\lambda e^{-\lambda t}dt$ και η πιθανότητα του αιτούμενου ποσού να είναι y, είναι dP(y)έχουμε

$$m_b(u) = \int_0^{(b-u)/c} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\gamma_b(u+ct)dt + \int_{(b-u)/c}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\gamma_b(b)dt \qquad \text{για } 0 \leq u \leq b$$

όπου

$$\gamma_b(t) = \int_0^t m_b(t-y)dP(y) + \zeta(t)$$

και

$$\zeta(t) = \int_t^{\infty} w(t, y-t)dP(y)$$

γνωστή ως συνάρτηση Gerber- Shiu ανεξάρτητη των b και $m_b(u)$

Μια άλλη μορφή της $m_b(u)$ είναι

$$m_b(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^b e^{-[(\lambda+\delta)/c](t-u)}\gamma_b(t)dt + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\gamma_b(b)e^{-[(\lambda+\delta)/c](b-u)} \qquad \text{για } 0 \leq u \leq b \quad (2.6.4)$$

με παραγώγιση της οποίας ως προς u και για $0 \leq u \leq b$ βρίσκουμε:

$$m'_b(u) = -\frac{\lambda}{c}\gamma_b(u) + (\frac{\lambda+\delta}{c})\frac{\lambda}{c}\int_u^b e^{-[(\lambda+\delta)/c](t-u)}\gamma_b(t)dt + \left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\gamma_b(b)e^{-[(\lambda+\delta)/c](b-u)}$$

που είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την $m_b(u)$.

Συνδιάζοντας τους δύο παραπάνω τύπους καταλήγουμε στη σχέση:

$$m'_b(u) = \frac{\lambda+\delta}{c}m_b(u) - \frac{\lambda}{c}\gamma_b(u) \qquad (2.6.6)$$

Αν τώρα αντικαταστίσουμε το $\gamma_b(u)$ από παραπάνω θα έχουμε:

$$m'_b(u) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_b(u-y)\,dP(y) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)m_b(u) - \frac{\lambda}{c}\zeta(u) \quad \textit{(2.6.7)}$$

Πρέπει εδώ να τονισθεί ότι η παραπάνω ολοκληροδιαφορική εξίσωση δεν εξαρτάται από το b. Έτσι η συνάρτηση Gerber-Shiu για όλες τις τιμές του b, ακόμα και για b=∞ *ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση.*
Η μόνη διαφορά μεταξύ αυτών των συναρτήσεων είναι τα όρια που καθορίζονται κάθε φορά
Αν στην (2.6.4) θέσουμε u=b έχουμε $m_b(b) = \frac{l}{l+d} g_b(b)$ *και άρα από (2.6.6) προκύπτει* $m'_b(b) = 0$ *(2.6.8)*

2.7 *<u>Γενική λύση της $m_b(u)$</u>*

Στη συνέχεια θα δώσουμε τη γενική λύση της $m_b(u)$ *που ικανοποιεί τις (2.6.7) και (2.6.8) αφού πρώτα αναφερθούν τα παρακάτω απαραίτητα πορίσματα επί των οποίων στηρίζεται η εξαγωγή της λύσης*

<u>Λήμμα 2.1</u>
Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\varphi'(u) = \alpha\varphi(u) + \beta\int_0^u \varphi(u-x)h(x)dx + \gamma w(u), \quad u \geq 0 \qquad (2.7.1)$$

όπου α, β, γ σταθερές ανεξάρτητες της μεταβλητής u και h, w γνωστές συναρτήσεις.
Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις φ, h, w έχουν πεπερασμένους μετασχηματιμούς Laplace.
Τότε η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται απο την σχέση:

$$\varphi(u) = \varphi(0)v(u) + \gamma\int_0^u v(u-y)w(x)dx, \qquad u \geq 0, \quad (2.7.2)$$

όπου η συνάρτηση $v(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$v'(u) = av(u) = \beta\int_0^u v(u-x)f(x)dx, \quad u \geq 0,$$

που είναι η αντίστοιχη ομογενής της (2.7.1) με $v(0) = 1$.
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση m(u) των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων ικανοποιεί την

$$m'(u) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^u m(u-y)\,dP(y) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)m(u) - \frac{\lambda}{c}\zeta(u) \qquad u \geq 0$$

που είναι της μορφής (2.7.1).

Θεωρούμε, λοιπόν, την συνάρτηση $v(u)$ που ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή συνάρτηση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (2.7.1).

Έχουμε:

$$v'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} v(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u v(u-x)\zeta(x)dx, \quad u \geq 0, \qquad (2.7.3) \quad \text{με } v(0) = 1.$$

Με βάση το παραπάνω λήμμα εξάγουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.1

Η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης

$$m'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u m(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\zeta(u), \qquad u \geq 0$$

δίνεται απο την

$$\mathrm{m(u) = m(0)v(u)} - \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\int_0^{\mathrm{u}} \mathrm{v(u-x)\zeta(x)dx}, \quad \mathrm{u} \geq 0$$

όπου η $\mathrm{v(u)}$ ικανοποιεί την (2.7.3) με $\mathrm{v(0)} = 1$.

Το λήμμα 2.1 ισχύει για κάθε $0 \leq \mathrm{u} \leq \mathrm{b}$. Έτσι παίρνουμε και το παρακάτω πόρισμα για την συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Πόρισμα 2.2

Η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης

$$\mathrm{m'_b(u)} = -\frac{\lambda}{\mathrm{c}}\int_0^{\mathrm{u}} \mathrm{m_b(u-y)f(x)dx} + \frac{\lambda+\delta}{\mathrm{c}}\mathrm{m_b(u)} - \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\zeta(\mathrm{u}), \quad 0 \leq \mathrm{u} \leq \mathrm{b}$$

δίνεται απο την σχέση

$$\mathrm{m_b(u) = m_b(0)v(u)} - \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\int_0^{\mathrm{u}} \mathrm{v(u-x)\zeta(x)dx}, \quad \mathrm{u} \geq 0$$

όπου η $\mathrm{v(u)}$ ικανοποιεί την (2.7.3) με $\mathrm{v(0)} = 1$.

Με βάση τα δυο παραπάνω πορίσματα θα δώσουμε τη γενική λύση της $m_b(u)$ μέσω της $m(u)$

Πρόταση 2.1

Η γενική λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης

$$m'_b(u) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy + \frac{\lambda+\delta}{c}m_b(u) - \frac{\lambda}{c}z(u), \ \ 0 \le u \le b$$

με οριακή συνθήκη την $m'_b(b) = 0$ δίνεται απο την

$$m_b(b) = m(u) + k(b)v(u), \quad 0 \le u \le b$$

όπου η σταθερά $k(b)$ δίνεται απο την σχέση

$$k(b) = -\frac{m'(b)}{v'(b).}$$

2.8 Μελέτη της συνάρτησης $v(u)$

Ξεκινώντας θα αποδείξουμε ότι η γενική λύση της συνάρτησης (2.7.3) είναι ανάλογη του γινομένου μιας εκθετικής συνάρτησης και της κατανομής μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Ορίζουμε λοιπόν την $\Psi(u)$ ως:

$$v(u) = \frac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}e^{\rho u} \qquad (2.9.1)$$

Όπου ρ η μη αρνητική ρίζα της (2.7.α) και $\Psi(0)$ που θα ορισθεί παρακάτω.

Από τις σχέσεις

$$v'(u) = -\frac{\lambda}{u}\int_0^u v(u-y)dF(y) + \frac{\lambda+\delta}{c}v(u)$$

και

$$z+\frac{\lambda}{c}\tilde{p}(z)-\frac{\lambda+\delta}{c}=0,$$

έχουμε ότι

$$\Psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u[1-\Psi(u-y)]e^{-\rho y}dF(y)+\left(\rho-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)[1-\Psi(u)]$$
$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^u[1-\Psi(u-y)]e^{-\rho y}dF(y)-\frac{\lambda}{c}\hat{f}(\rho)[1-\Psi(u)] \qquad (2.4).$$

Ας υποθέσουμε ότι $\hat{P}(y)=1-\bar{\hat{P}}(y)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μετασχηματισμού Esscher ισχύει :

$$d\hat{P}(y)=\frac{e^{-\rho y}dF(y)}{\hat{f}(\rho)} \quad \text{με σ.π.π } \hat{P}(y)=\frac{d}{dy}d\hat{P}(y)$$

με μέση τιμή $\hat{p}_1=\int_0^\infty y\ d\hat{P}(y)=\int_0^\infty ye^{-\rho y}\frac{dF(y)}{\hat{f}(y)}$

Επίσης, ορίζουμε

$$\hat{c}=\frac{c}{\hat{f}(\rho)}$$

και

$$\Psi(0)=\hat{\varphi}=\frac{\lambda\widehat{p_1}}{\hat{c}}.$$

άρα $0<\psi(0)<1$, και η $\Psi(u)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\Psi'(u)=\frac{\lambda}{\hat{c}}\int_0^u[1-\Psi(u-y)]d\hat{P}(y)-\frac{\lambda}{\hat{c}}[1-\Psi(u)],$$

με αρχική τιμή την $\Psi(0)$ όπως ορίστηκε παραπάνω.

Έτσι, η $\psi(u)$ είναι η συνάρτηση που περιγράφει την πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο μιας σύνθετης Poisson χωρίς κατώφλι, όπου το λ είναι η παράμετρος της Poisson, $\hat{P}(y)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των ατομικών μεγεθών των απαιτήσεων, και το $\hat{c}$ το ετήσιο επιτόκιο ασφαλίστρων. Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι η $\Psi(u)$ είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $\hat{\varphi}$ και σ.π.π $\hat{g}(y)=\frac{\bar{\hat{P}}(y)}{\hat{p}_1}$

Αν επιπλέον δ=0, τότε το ρ=0 και συνεπάγεται ότι $\hat{P}(y) = P(y)$ και $\hat{c} = c$. Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η ίδια όπως στο κλασσικό μοντέλο και

$$v_0(u) = v(u)|_{\delta=0} = \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}.$$

Η ανάλυση της $v(u)$ λόγω της σχέσης $v(u) = \frac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}e^{\rho u}$ είναι ισοδύναμη με την ανάλυση της σύνθετης γεωμετρικής ουράς που εκφράζει η $\Psi(u)$.
Έτσι έχουμε:

$$v(u) \sim \frac{1}{1-\Psi(0)}e^{\rho u}, \qquad u \to \infty.$$

Είναι σημαντικό να θεωρήσουμε οτι υπάρχει ένας συντελεστής έστω $\hat{\kappa}$. Θεωρούμε, επίσης, ότι $\hat{\theta}$ είναι το περιθώριο ασφαλείας και ικανοποιεί την

$$\hat{c} = \lambda\widehat{p_1}(1+\hat{\theta})$$

ή ισοδύναμα την

$$c = \lambda\widehat{p_1}\left(1+\hat{\theta}\right)\hat{f}(\rho).$$

Το $\hat{\kappa}$ ικανοποιεί την σχέση:

$$1 + \left(1+\hat{\theta}\right)\widehat{p_1}\hat{\kappa} = \int_0^\infty e^{\hat{\kappa}y}d\hat{P}(y) = \frac{\hat{f}(\rho-\hat{\kappa})}{\hat{f}(\rho)}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\tilde{p}(\rho)$, έχουμε ότι

$$\hat{f}(\rho) + \frac{c}{\lambda}\hat{\kappa} = \hat{f}(\rho-\hat{\kappa}).$$

Επιπλέον, αν –κ ικανοποιεί την $z + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(z) - \frac{\lambda+\delta}{c} = 0$ παίρνουμε ότι

$$-\kappa + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(-\kappa) - \frac{\lambda+\delta}{c} = 0,$$

και άρα

$$\hat{\kappa} = \rho + \kappa.$$

Λόγω του ασυμπτωτικού τύπου του Cramer για την χρεοκοπία συμπεραίνουμε ότι

$$\Psi(\,u) \sim \hat{C}e^{-(\rho+\kappa)u} \quad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\, u \to \infty,$$

όπου $\hat{C}$ μια σταθερά και άρα η (2.9.1) μπορεί να πάρει την μορφή

$$v(u) - \frac{1}{1-\Psi(0)} e^{\rho u} = -\frac{\Psi(u)}{1-\Psi(0)} e^{\rho u},$$

και συνεπώς

$$v(u) - \frac{1}{1-\Psi(0)} e^{\rho u} \sim -\frac{\hat{C}}{1-\Psi(0)} e^{-\kappa u}, \quad u \to \infty.$$

Τώρα θα αναλύσουμε την εύρεση της λύσης της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης

$$v'(u) = -\frac{\lambda}{u} \int_0^u v(u-y) dF(y) + \frac{\lambda+\delta}{c} v(u) \qquad (2.9.2)$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης για μεγάλο $z > \rho$ και προκύπτει:

$$z\tilde{v}(z) - v(0) = -\frac{\lambda}{c} \hat{f}(z)\tilde{v}(z) + \frac{\lambda+\delta}{c} \tilde{v}(z).$$

Αν $v(0) = 1$, έχουμε

$$\left(z + \frac{\lambda}{c} \hat{f}(z) - \frac{\lambda+\delta}{c}\right) \tilde{v}(z) = 1$$

και αν $-\kappa$ η γνωστή αρνητική ρίζα της (2.7.α) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\left(z + \kappa + \frac{\lambda}{c}\left(\hat{f}(z) - \hat{f}(-\kappa)\right)\right) \tilde{v}(z) = 1$$

και τελικά

$$\tilde{v}(z) = \frac{\lambda}{c} \frac{(\hat{f}(-k) - \hat{f}(z))}{z+k} \tilde{v}(z) + \frac{1}{z+k}$$

Όπου αντιστρέφοντας τώρα τους μετασχηματισμούς Laplace καταλήγουμε στην

$$v(u) = \left(1 + \frac{\delta}{c\kappa}\right) \int_0^u v(u-y) g_2(y) dy + e^{-ku}$$

όπου $g_2(x) = \frac{e^{-kx} \int_x^\infty e^{ky} dP(y)}{\int_0^\infty e^{ky} \bar{P}(y) dy} \qquad x \geq 0$

Παρατήρηση

Απο την σχέση (2.9.2) και με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace μπορούμε να μελετήσουμε την $v(u)$ για γνωστές οικογένειες κατανομών της $f(x)$.

$$v'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} v(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u v(u-x)z(x)dx, \quad u \geq 0,$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace έχουμε,

$$s\hat{v}(u) - v(0) = \frac{\lambda+\delta}{c}\hat{v}(s) - \frac{\lambda}{c}\hat{v}(s)\hat{f}(s)$$

$$\Rightarrow s\hat{v}(u) - 1 = \frac{\lambda+\delta}{c}\hat{v}(s) - \frac{\lambda}{c}\hat{v}(s)\hat{f}(s)$$

$$\Rightarrow \left(s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(s)\right)\hat{v}(s) = 1$$

$$\Rightarrow \hat{v}(s) = \frac{1}{s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(s)}.$$

Εφαρμογή

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο β. Τότε η συνάρτηση κατανομής είναι της μορφής

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace είναι γνωστός $\frac{\beta}{s+\beta}$.

Άρα στην παραπάνω παρατήρηση αν αντικαταστήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$\hat{v}(s) = \frac{1}{s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\frac{\beta}{s+\beta}}$$

$$= \frac{c(s+\beta)}{cs(s+\beta) - (\lambda+\delta)(s+\beta) + \lambda\beta}$$

$$= \frac{c(s+\beta)}{cs^2 + \beta cs - (\lambda+\delta)s - \beta(\lambda+\delta) + \lambda\beta}$$

$$\Rightarrow \hat{v}(s) = \frac{c(s+\beta)}{cs^2 + [\beta c - (\lambda+\delta)]s - \beta\delta} \ .$$

Ο παρανομαστής είναι δευτέρου βαθμού και έχει δύο ρίζες. Αν πάρουμε τη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg, έχουμε:

$$cs + \lambda\hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0$$

$$\Rightarrow cs + \lambda\frac{\beta}{s+\beta} - (\lambda + \delta) = 0$$

$$\Rightarrow cs(s+\beta) + \lambda\beta - (\lambda+\delta)(s+\beta) = 0$$

$$\Rightarrow cs^2 + \beta cs + \lambda\beta - \beta(\lambda+\delta) - s(\lambda+\delta) = 0$$

$$\Rightarrow cs^2 + [\beta c - (\lambda+\delta)]s - \beta\delta = 0.$$

Παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, επομένως έχει μία ρίζα την ρ=ρ(δ) και μία ρίζα την –R, όπου R>0.

Άρα,

$$cs^2 + [\beta c - (\lambda+\delta)]s - \beta\delta = c(s-\rho)(s+R)$$

Επομένως,

$$\hat{v}(s) = \frac{(s+\beta)}{(s-\rho)(s+R)} = \frac{a_1}{s-\rho} + \frac{a_2}{s+R}$$

$$= \frac{a_1(s+R) + a_2(s-\rho)}{(s-\rho)(s+R)}$$

$$\Rightarrow (s+\beta) = a_1(s+R) + a_2(s-\rho)$$

$$= (a_1 + a_2)s + a_1R - a_2\rho.$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1R + a_2\rho = \beta \end{cases},$$

βρίσκουμε τις τιμές των a_1, a_2.

Απο τα παραπάνω συνεπάγεται

$$\hat{v}(s) = \frac{a_1}{s-\rho} + \frac{a_2}{s+R}.$$

Αν πάρουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$\int_0^\infty e^{-su}e^{au} = \int_0^\infty e^{-(s-a)u}du = \frac{1}{s-a}$$

έχουμε

$$v(u) = a_1 e^{\rho u} + a_2 e^{-Ru}$$

όπου a_1, a_2 η λύση του παραπάνω συστήματος.

2.10 Ο χρόνος χρεοκοπίας T_b, το πλεόνασμα την στιγμη πριν την χρεοκοπία $U_b(T_b)$ και το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας $|U_b(T_b)|$.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις πιθανολογικές ιδιότητες του χρόνου της χρεοκοπίας T_b, του πλεονάσματος την στιγμη πριν την χρεοκοπία $U_b(T_b -)$ και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας $|U_b(T_b)|$ για $b < \infty$.

2.10.1 Ο χρόνος της χρεοκοπίας

Πρώτα απ΄όλα ο χρόνος της χρεοκοπίας είναι μια πεπερασμένη τυχαία μεταβλητή, δηλαδή, $\Pr(T_b < \infty) = 1$. Ως εκ τούτου, για $b < \infty$ η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$m_b(u) = E\left[e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|)\right].$$

Γνωρίζουμε απο τις ακόλουθες σχέσεις

$$m_b(u) = m_\infty(u) - \frac{m'_\infty}{v'(u)} v(u), \quad 0 \le u \le b$$

και

$$v(u) = \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)} e^{\rho u}$$

ότι για $0 \leq u \leq b$ έχουμε

$$m_b(u) = m_\infty(u) + \frac{m'_\infty(b)e^{-\rho b}}{\Psi'(b) - \rho[1-\Psi(b)]}[1-\Psi(u)]e^{\rho u}.$$

Θεωρούμε ότι $E(e^{-\delta T_b})$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, ο οποίος αντιστοιχεί στην περίπτωση που $w(x_1, x_2) = 1$.
Επειδή η

$\overline{K}(u) = m_\infty(u)|_{w(x_1,x_2)=1} = E\left[e^{-\delta T_\infty} I(T_\infty < \infty)\right]$ *είναι η λύση της*

$\overline{K}(u) = \varphi_1 \int_0^u \overline{K}(u-y) g_1(y) dy + \varphi_1 \int_u^\infty g_1(y)\, dy,$ για $\varphi_1 = 1 - {}^{\delta}/_{\rho c}$.

[Πόρισμα Lin-Willmot(1999)]

η $\overline{K}(u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο φ_1 όταν η $g_1(y)$ ικανοποιεί την (2.7.4)
και μπορεί να γραφτεί ως

$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_1)\varphi_1^n \overline{G_1^{*n}}(u)$ *με την* $\overline{G_1^{*n}}(x)$ *να είναι η ουρά της ν-οστής συνέλιξης της* $g_1(x)$ *(2.10.1.0)*

Ομοίως, αφού η $\Psi(u)$ είναι ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $\hat{\varphi}$, και με δευτερεύουσα κατανομή με σ.π.π $\hat{g}(y)$, έχουμε

$$\Psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\hat{\varphi})\widehat{\varphi^n}\overline{\widehat{G^{*n}}}(u)$$

όπου $\overline{\widehat{G^{*n}}}(x)$ *να είναι η ουρά της ν-οστής συνέλιξης της* $\hat{g}(x)$

Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ως εξής:

$E\left(e^{-\delta T_b}\right) = \overline{K}(u) + \frac{\overline{K'}(b)e^{-\rho b}}{\Psi'(b)-\rho[1-\Psi(b)]}[1-\Psi(u)]e^{\rho u}$ (2.10.1.1)

Ως ειδική περίπτωση, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου που το πλεόνασμα βρίσκεται πρώτη φορά κάτω απο το αρχικό απόθεμα μπορεί να υπολογιστεί μέσω της

$$E\left(e^{-\delta T_b}\right)|_{u=0} = \varphi_1 + \frac{\overline{K'}(b)e^{-\rho b}}{\Psi'(b)-\rho[1-\Psi(b)]}[1-\hat{\varphi}] \quad (2.10.1.2)$$

Μπορούμε να έχουμε μεγαλύτερη απλοποίηση του τύπου (2.10.1.1) αν οι αποζημιώσεις έχουν κατανομή εκθετική ή μίξη δύο εκθετικών ή μίξη δύο Erlangs γιατί τότε είναι γνωστές οι αναλυτικές εκφράσεις των $\overline{K}(u)$ και $\Psi(u)$ και μας διευκολύνουν να βρούμε τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας T_b όπως θα αναλυθεί παρακάτω

2.10.1.a Οι αποζημειώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε αποζημιώσεις με σ.π.π. της μορφής $P(y) = 1 - e^{-\mu y}$ $y \geq 0$ με μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(z) = \frac{\mu}{\mu+z}$

Τότε η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg $z + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(z) - \frac{\lambda+\delta}{c} = 0$ απλοποιείται σε $cz^2 + (c\mu - \lambda - \delta)z - \delta\mu = 0$ η οποία μας δίνει δύο χρήσιμες ταυτότητες

$$\kappa - \rho = \mu - \frac{\lambda+\delta}{c} \quad \text{και} \quad \kappa\rho = \frac{\delta\mu}{c}$$

και λόγω αυτών έχουμε $\phi_1 = 1 - \frac{\delta}{c\rho} = \frac{\mu-\kappa}{\mu}$

Έτσι λόγω της μορφής της P(y) και των (2.7.4) και (2.10.1.0) έχουμε ότι :

$$\overline{K}(u) = \phi_1 e^{-\kappa u} = \frac{\mu-\kappa}{\mu} e^{-\kappa u}$$

Επιπλέον επειδή $P_1(y)$ =P(y) έχουμε

$$\hat{P}(y) = 1 - e^{-(\mu+\rho)y} \qquad \hat{c} = \frac{\lambda}{\mu-\kappa} \quad \text{και} \quad \hat{\phi} = \frac{\lambda\hat{\rho}_1}{\hat{c}} = \frac{\mu-\kappa}{\mu+\rho}$$

και τελικά $\Psi(u) = \hat{\phi} e^{-(1-\hat{\phi})(\mu+\rho)u} = \frac{\mu-\kappa}{\mu+\rho} e^{-(\kappa+\rho)u}$

και άρα η (2.10.1.1) παίρνει την μορφή

$$E\left(e^{-\delta T_b}\right) = \frac{\mu-\kappa}{\mu} e^{-\kappa u} + \frac{\mu-\kappa}{\mu} \frac{\kappa e^{-\kappa b}}{(\rho+\mu)\rho e^{\rho b} + (\mu-k)\kappa e^{-\kappa b}} [(\rho+\mu)e^{\rho u} - (\mu-k)e^{-\kappa u}]$$

$$= \frac{\lambda(ke^{-\kappa b}e^{\rho u} + \rho e^{\rho b}e^{-\kappa u})}{c[(\rho+\mu)\rho e^{\rho b} + (\mu-k)ke^{-\kappa b}]} \qquad (2.10.1.a.1)$$

Οι ροπές για το T_b προκύπτουν με παραγώγιση της παραπάνω σχέσης και στη συνέχεια για δ=0 οπότε παίρνουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_b) = \frac{c\mu e^{R(b-u)}\left(c\mu e^{Ru} - \lambda\right)}{\lambda(c\mu-\lambda)^2} - \frac{1+\mu u}{c\mu-\lambda} \qquad \text{με} \quad R = \kappa(0) = \frac{\theta\mu}{1+\theta}$$

και ομοίως για τις άλλες ροπές να και προκύπτουν από δύσκολες παραγωγίσεις . Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ροπές στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, και που τότε έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_b)|_{u=0} = \frac{c\mu e^{Rb} - \lambda}{\lambda(c\mu-\lambda)}$$

και

$$Var(\mathrm{T}_b)|_{u=0} = \frac{(c\mu+\lambda)(c^2\mu^2 e^{2Rb} - \lambda^2) - 2\lambda\mu\ e^{Rb}(c\mu-\lambda)(\lambda b + 2c + \mu cb)}{\lambda^2(c\mu-\lambda)^3}$$

2.10.1.b Οι αποζημιώσεις ακολουθούν μίξη δύο εκθετικών κατανομών

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε αποζημιώσεις με σ.π.π. της μορφής

$$F(y) = 1 - \omega e^{-\alpha y} - (1-\omega)e^{-\beta y} \qquad y \geq 0$$

Τότε η η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg $z + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(z) - \frac{\lambda+\delta}{c} = 0$ ως γνωστό έχει δύο αρνητικές ρίζες, τις –r και –κ , και μία μη αρνητική , την ρ, σε αύξουσα σειρά, ενώ και οι δύο σ.π.π $g_1(y)$ και $g_2(y)$ είναι συνδυασμός δύο εκθετικών και αναλυτικότερα για i=1,2,…

$$g_i(y) = p_i a e^{-ay} + (1-p_i)\beta e^{-\beta y}$$

όπου $p_1 = \frac{\omega(\beta+\rho)}{\omega\beta + (1-\omega)\alpha + \rho}$ και $p_2 = \frac{\omega(\beta-\kappa)}{\omega\beta + (1-\omega)\alpha - \kappa}$

και τότε

$$\overline{K}(u) = \mathrm{E}\{e^{-\delta T_\infty} I(T_\infty < \infty)\} = \frac{\phi_1}{r-\kappa}\left[(\phi-\kappa)e^{-\kappa u} + (r-\phi)e^{-ru}\right]$$

με $\phi_1 = 1 - \frac{\delta}{c\rho}$

και $\phi = a(1-p) + \beta p$

ενώ επειδή $\tilde{u}(z) = \phi_2 \tilde{u}(z)\tilde{g}_2(z) + \frac{1}{z+\kappa}$ με $\phi_2 = 1 + \frac{\delta}{c\kappa}$, $\tilde{g}_2(z) = \int_0^\infty e^{-zx} g_2(x)dx$

άρα

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{[1-\phi_2\tilde{g}_2(z)](z+\kappa)}$$

$$= \frac{1}{1-\phi_2[p_2 a/(z+\alpha) + (1-p_2)\beta/(z+\beta)](z+\kappa)}$$

$$= \frac{(z+\alpha)(z+\beta)}{[(z+\alpha)(z+\beta) - \phi_2 p_2 a(z+\beta) - \phi_2(1-p_2)\beta(z+\alpha)](z+\kappa)}$$

Ο παρανομαστής τώρα είναι το πρώτο μέλος της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg και αφού έχει ρίζες –κ,-r, ρ παραγοντοποιείται κατά τα γνωστά σε (z-ρ)(z+κ)(z+r)

Άρα έχουμε $\tilde{\upsilon}(z) = \frac{(z+\alpha)(z+\beta)}{(z-\rho)(z+\kappa)(z+r)}$

και με την ανάλυσή του σε απλά κλάσματα

$$\widetilde{\upsilon}(z) = \frac{C_\rho}{z-\rho} + \frac{C_\kappa}{z+\kappa} + \frac{C_r}{z+r}$$

όπου $C_\rho = \dfrac{(\alpha+\rho)(\beta+\rho)}{(\kappa+\rho)(r+\rho)}$ $\quad C_\kappa = \dfrac{(\alpha-\kappa)(\beta-\kappa)}{(r-\kappa)(\rho+\kappa)}$ $\quad C_r = \dfrac{(\alpha-r)(\beta-r)}{(\kappa-r)(\rho+r)}$

Άρα έχουμε ότι $\qquad \upsilon(u) = C_\rho e^{\rho u} + C_\kappa e^{-\kappa u} + C_r e^{-ru}$

και μπορούμε τώρα να έχουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b από την

$$m_b(u) = m_\infty(u) + \frac{m'_\infty(b)e^{-\rho b}}{\Psi'(b) - \rho[1-\Psi(b)]}[1-\Psi(u)]e^{\rho u}$$

και είναι αυτός ένας γραμμικός συνδυασμός των $e^{\rho u}$, $e^{-\kappa u}$, e^{-ru}

2.10.2 Το πλεόνασμα τη στιγμή πριν τη χρεοκοπία $U_b(T_b -)$

Τώρα ας ασχοληθούμε με την κατανομή του πλεονάσματος την στιγμή πριν την χρεοκοπία $U_b(T_b -)$. Παίρνοντας δ=0 και $w(x_1, x_2) = w_1(x_1)$, η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$m_{b,1}(u) = m_b(u)|_{\delta=0, w(x_1,x_2)=w_1(x_1)} = E[w_1(U_b(T_b -)].$$

Για να πάρουμε μια γενική έκφραση της $m_{b,1}(u)$, λαμβάνουμε υπόψη ότι για δ=0 η

$$v_0(u) = v(u)|_{\delta=0} = \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}$$

είναι η λύση της ομογενούς ανανεωτική συνάρτησης

$$v(u) = \left(1 + \frac{\delta}{c\kappa}\right)\int_0^u v(u-y)g_2(y)dy + e^{-\kappa u}$$

όπου η $g_2(x)$ είναι σ.π.π που ορίζεται ως

$$g_2(x) = \frac{e^{-\kappa x}\int_x^\infty e^{\kappa x} dF(y)}{\int_0^\infty e^{\kappa y}\bar{F}(y)dy}, \quad x \geq 0.$$

Έτσι,

$$m_{b,1}(u) = m_{\infty,1}(u) + \tfrac{1-\psi(u)}{\psi'(b)} m'_{\infty,1}(b) \qquad (2.10.2.1)$$

Απο την σχέση $\zeta(t) = \int_t^\infty w(t, y - t)dF(y)$ προκύπτει ότι $\zeta(y) = w_1(y)\bar{F}(y)$ και απο την σχέση

$$m_\infty(u) = \left(1 - \frac{\delta}{c\rho}\right)\int_0^u m_\infty(u - y)g_1(y)dy + \frac{\lambda}{c}e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho y}\zeta(y)dy$$

όπου η $g_1(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μορφής

$$g_1(x) = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}dF(y)}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)dy}, \quad x \geq 0,$$

παίρνουμε ότι

$$m_{\infty,1}(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_{\infty,1}(u - y)dF_1(y) + \frac{1}{1+\theta}\int_u^\infty w_1(y)dF_1(y)$$

και αφού ρ=0 και $G_1(y) = F_1(y)$ έχουμε:

$$m_{\infty,1}(u) = \frac{1}{\theta}\{\int_0^u \psi(u - y)w_1(y)dF_1(y) + \int_u^\infty w_1(y)dF_1(y) - \psi(u)\int_0^\infty w_1(y)dF_1(y)\}$$

λόγω της οποίας η (2.10.2.1) γίνεται

$$m_{b,1}(u) = \frac{1}{\theta}\{-\int_0^u [1 - \psi(u - y)]w_1(y)dF_1(y) + \frac{1 - \psi(u)}{\psi'(b)}\int_0^b \psi'(b - y)w_1(y)dF_1(y)\} + \frac{1 - \psi(u)}{(1+\theta)[-\psi'^{(b)}]}\frac{F(b)}{p_1}w_1(b)$$

(2.10.2.2)

Άρα τώρα θέτοντας $w_1(x_1) = I(x_1 \leq y)$ για $0 \leq y \leq b$ στην παραπάνω σχέση και παραγωγίζοντας παίρνουμε την κατανομή του $U_b(T_b -)$ ως ακολούθως :

(ι) για 0<y<b το $U_b(T_b -)$ έχει σ.π.π.

$$f_S(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\dfrac{\hat{F}(y)}{\pi_1}\left\{\dfrac{[1-\psi(u)]\psi'(b-y)}{\psi'(b)} - [1-\psi(u-y)]\right., & 0 < y \leq u \\[2ex] \dfrac{1}{\theta}\dfrac{\hat{F}(y)}{\pi_1}\left\{\dfrac{[1-\psi(u)]\psi'(b-y)}{\psi'(b)}\right., & u < y < b \end{cases}$$

(ιι) στο b έχει μάζα πιθανότητας

$$\Pr\{U_b(T_b-)=b\}=\frac{1}{1+\theta}\frac{\hat{F}(b)}{p_1}\frac{1-\psi(u)}{[-\psi'(b)]}$$

(2.10.2.3)

Αν τώρα πάρουμε $w_1(x_1)=x_1^k$ η εξίσωση Gerber-Shiu γίνεται η κ-οστή ροπή του $U_b(T_b-)$
και οι υπόλοιπες ροπές μπορούν να προκύψουν από την (2.10.2.2)

2.10.2.a Το $U_b(T_b-)$ *με τις αποζημειώσεις να ακολουθούν εκθετική κατανομή*

Εδώ έχουμε δεδομένο ότι $\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{1+\vartheta}$ και άρα η (2.10.2.3)
γίνεται:

(ι) για 0<y<b το $U_b(T_b-)$ έχει σ.π.π.

$$f_S(y)=\begin{cases}\dfrac{\mu}{\theta}e^{-\frac{\mu}{1+\theta}y}\left(1-e^{-Ry}\right), & 0<y\le u\\ \dfrac{\mu}{\theta(1+\theta)}e^{-\frac{\mu}{1+\theta}y}\left(1+\theta-e^{-Ru}\right), & u<y<b\end{cases}$$

(ιι) στο b έχει μάζα πιθανότητας

$$\Pr\{U_b(T_b-)=b\}=\frac{1}{\theta}\,e^{-\frac{\mu}{1+\theta}b}\left(1+\theta-e^{-Ru}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή οι ροπές υπολογίζονται με τη βοήθεια ελλιπών gamma-συναρτήσεων

2.10.3 Το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας ($|U_b(T_b)|$)

Τέλος, θα παρουσιάσουμε μια αναλυτική έκφραση για την κ-οστή ροπή του ελλέιμματος $|U_b(T_b)|$.

Αν δ=0 και $w(x_1, x_2) = x_2^k$ για k=1,2,3,..., η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$m_{b,2}(u) = m_b(u)|_{\delta=0, w(x_1,x_2)=x_2^k} = E[|U_b(T_b)|^k].$$

Όμοια με την περίπτωση του πλεονάσματος, η έκφραση για την $m_{b,2}(u)$ δίνεται από

$$m_{b,2}(u) = m_{\infty,2}(u) + \frac{1-\psi(u)}{\psi'(b)} m'_{\infty,2}(b),$$

όπου

$$m_{\infty,2}(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_{\infty,2}(u-y)dP_1(y) + \frac{k}{1+\theta}\int_u^\infty \int_y^\infty (t-y)^{k-1} dP_1(t)dy.$$

Οι Lin-Willmot (2000) έδειξαν , επίσης, ότι για k=1,2,... ισχύει

$m_{\infty,2}(u) = E[\,|U(T_\infty)|^k I(T_\infty < \infty)]$=

$$=-\frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1\theta}\psi(u)-\frac{1}{p_1\theta}\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}p_{k-j}\int_u^\infty (x-u)^j\psi(x)dx+k\int_u^\infty (x-u)^{k-1}\psi(x)dx.$$

όπου $\sum_{j=0}^{-1} = 0$

(2.10.3.1)

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση για b=u παίρνουμε:

για κ=1

$$m'_{\infty,2}(b) = -\frac{p_2}{2p_1\theta}\psi'(b) - \psi(b)$$

για κ=2,3,... 1 $\quad m'_{¥,2}(b) = -\frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1 q} y'(b) + \frac{p_k}{p_1 q} y(b) +$

$$\frac{\kappa}{p_1\theta}\sum_{j=0}^{k-3}\binom{k-1}{j}p_{k-j-1}\int_b^\infty (x-b)^j\psi(x)dx-k(k-1)\int_b^\infty (x-b)^{k-2}\psi(x)dx.$$

(2.10.3.2)

Αντικαθιστώντας τις (2.10.3.1) και (2.10.3.2) στην (2.10.3.0) έχουμε την ζητούμενη αναλυτική σχέση για το $E[|U_b(T_b)|^k]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

3.0 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε μια άλλη στρατηγική μερίσματος που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, και μπορεί να θεωρηθεί ευρύτερη από την στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Είναι η στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, σύμφωνα με την οποία δεν δίνεται μέρισμα όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από ένα σταθερό κατώφλι, ενώ όταν το πλεόνασμα υπερβεί το κατώφλι αυτό, τα μερίσματα πληρώνονται με ρυθμό μικρότερο από τον αρχικό ρυθμό που θεωρούμε ότι είναι αυτός που έχουμε τη στιγμή που το πλεόνασμα υπερβαίνει το κατώφλι.

Είναι εύκολα κατανοητό ότι η στρατηγική σταθερού μερίσματος, είναι ειδική περίπτωση της στρατηγικής αυτής, και οι Gerber-Shiu απέδειξαν το 2005 ότι η στρατηγική αυτή είναι βέλτιστη όταν ο ρυθμός μερίσματος έχει οριοθέτηση ως προς την ανώτατη τιμή του, και οι ατομικές απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή. Εδώ θα επιχειρήσουμε να εξετάσουμε μια γενική λύση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu κάτω από τη στρατηγική αυτή για να περιγράψουμε τα αποτελέσματά της, την πιθανότητα και το χρόνο χρεοκοπίας, το πλεόνασμα αμέσως πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ

3.1.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Για να προσεγγίσουμε την κατά Gerber-Shiu συνάρτηση ποινής για ένα μοντέλο σύνθετης Poisson κάτω από στρατηγική κατωφλίου, κατ' αρχήν θεωρούμε τις ανεξάρτητες θετικές τ.μ $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ *των ατομικών απαιτήσεων, που έχουν κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής* $F(y) = 1 - \hat{F}(y)$, $y \geq 0$ *με σ.π.π* $f(y) = F'(y)$

και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s)=\int_0^{\infty} e^{-sy}dF(y)$ *, και έστω N(t) ο συνολικός αριθμός των απαιτήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t, να είναι διαδικασία Poisson ανεξάρτητη των* $\{Y_1,Y_2,\ldots\}$ *με παράμετρο λ > 0.Τότε οι αντίστοιχοι ενδιάμεσοι χρόνοι* $\{V_1,V_2,\ldots\}$ *μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων, επίσης ανεξάρτητοι των* $\{Y_1,Y_2,\ldots\}$ *και ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ.*

Έστω τέλος $\left\{S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \;\; ; t\geq 0\right\}$ *οι συνολικές απαιτήσεις μέχρι τη χρονική στιγμή t με S(t) = 0 όταν N(t)=0 ,* $u\geq 0$ *το αρχικό πλεόνασμα , b>0 το κατώφλι και* c_1 *ο ετήσιος ρυθμός είσπραξης του ασφαλίστρου όπου* $c_1=(1+\theta_1)\lambda \mathrm{E}\{Y_1\}$ *με* θ_1 *το γνωστό περιθώριο ασφαλείας.*

Αν ονομάσουμε a *,* $0<a\leq c_1$ *τον ρυθμό ετήσιου μερίσματος όταν το πλεόνασμα βρίσκεται πάνω από το κατώφλι b τότε ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων διαμορφώνεται σε* $c_2=c_1-a\geq 0$ *και ομοίως* $c_i=(1+\theta_i)\lambda \mathrm{E}\{Y_i\}$ $i=1,2,\ldots$ *με την επισήμανση ότι τα* θ_i *<u>ΔΕΝ</u> είναι υποχρεωτικά θετικά.*

Το πλεόνασμα $\{U_b(t)\,;\, t\geq 0\}$ τότε μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\mathrm{dU_b(t)}=\begin{cases}\mathrm{c_1 d_t - dS(t), U_b(t)\leq b}\\ \mathrm{c_2 d_t - dS(t), U_b(t)} > b\end{cases}$$

και αν $\{T_b=\inf\{t \mid U_b(t)<0\}\}$ ο χρόνος της χρεοκοπίας γίνεται προφανές ότι για $\{T_b=\infty\}$δεν έχουμε χρεοκοπία και αν $\{b=\infty\}$το μοντέλο με κατώφλι γίνεται το γνωστό κλασσικό μοντέλο, ενώ όταν α=c_1 έχουμε το γνωστό μοντέλο σταθερού μερίσματος.

Αξίζει να τονισθεί ότι το μοντέλο αυτό μπορεί να αποκλιθεί μοντέλο σύνθετης Poisson με ρυθμό ασφαλίστρων δύο ταχυτήτων.

Έστω τώρα η γνωστή κατά Gerber-Shiu συνάρτηση ποινής

$$\mathrm{m(u;b)=E\{e^{-\delta T_b}w(U_b(T_b-),|U_b(T_b)|)I(T_b<\infty)|U_b(0)=u\}}$$

με $\delta\geq 0$τη γνωστή μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace , $w(x_1,x_2)$ $x_1>0$, $x_2>0$η μη αρνητική συνάρτηση πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία x_1 και x_2 το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία, ενώ $I(E)$ δείκτρια συνάρτηση ενδεχομένου E .

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη της συνάρτησης και στην εξαγωγή συμπερασμάτων είναι χρήσιμη η αναφορά σε βασικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν για την απαιτούμενη ανάλυσή της.

3.1.2 ΤΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

3.1.1.1 Τελεστής των Dickson-Hipp

Εστω f μια ολοκληρώσιμη πραγματική συνάρτηση
και s μια αρνητικός πραγματικός αριθμός ή μιγαδικός με μη αρνητικό πραγματικό μέρος.

Τότε ορίζουμε

$$T_s f(x) = \int_x^{\infty} e^{-s(y-x)} f(y) dy$$

να είναι αντιμεταθετικός δηλ. $T_s T_r f(x) = T_r T_s f(x) = \frac{T_s f(x) - T_r f(x)}{r-s}, s \neq r$

3.1.1.2 Η m(u) του μοντέλου σταθερού μερίσματος

Η ολοκληροδιαφορικη

$$m'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c_1} m(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^u m(u-y) dF(y) - \frac{\lambda}{c_1} z(u), u \geq 0 \qquad (3.1.1.2.1)$$

$$\mu\varepsilon \qquad z(t) = \int_t^{\infty} w(t, y-t) dF(y)$$

έχει γενική λύση της μορφής

$$m(u) = m_{\infty}(u) + kv(u), u \geq 0 \qquad (3.1.1.2.2)$$

k σταθερά και v(u) να ικανοποιεί την

$$v'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c_1} v(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^u v(u-y) dF(y), u \geq 0$$

Για i=1 και 2 έστω p_i οι θετικές ρίζες (μη αρνητικές όταν $\theta_\iota > 0$) της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg

$$c_i s + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0$$

οι οποίες υπάρχουν πάντα ανεξάρτητα για $\delta > 0$

και τότε η

$$v(u) = \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(0)} e^{\rho_1 u}, u \geq 0$$

είναι λύση της

$$\Psi'(u) = \frac{\lambda}{\widehat{c_1}} \int_0^u [1 - \Psi(u-y)] d\hat{F}(y) - \frac{\lambda}{\widehat{c_1}} [1 - \Psi(u)], u \geq 0$$

όπου $\widehat{c_1} = \frac{c_1}{\tilde{p}(\rho_1)}$ και η $\hat{F}$ να ικανοποιεί την

$$d\hat{F}(y) = \frac{e^{-\rho_1 y} dF(y)}{\hat{f}(\rho_1)}$$

Ως εκ τούτου η Ψ είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής με παράμετρο

$$\Psi(0) = \frac{\lambda}{\widehat{c_1}} \int_0^\infty t \, d\hat{F}(t)$$

και σ.π.π της κατανομής των ατομικών απαιτήσεων $\bar{\hat{F}}(y) / \int_0^\infty t \, d\hat{F}(t)$, $y \geq 0$

Αν για i=1 και 2 ορίσουμε A_I με

$$\widetilde{A_\iota}(y) = 1 - A_i(y) = \frac{\int_y^\infty e^{-\rho_i (t-y)} \bar{F}(t) dt}{\int_0^\infty e^{-\rho_i t} \bar{F}(t) dt} = \frac{T_{\rho_i} \bar{F}(y)}{T_{\rho_i} \bar{F}(0)} \qquad y \geq 0$$

και μετασχηματισμό Laplace

$$\widetilde{a_i}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dA_i(y) = \frac{\rho_i}{1-\hat{f}(\rho_i)} \frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_i)}{\rho_i - s} \qquad (3.1.1.2.3)$$

και επιπρόσθετα ορίσουμε την παράμετρο

$$\pi_i = \frac{\lambda[1-\hat{f}(\rho_i)]}{c_i \rho_i} = \frac{\lambda}{c_i} T_{\rho_i} \bar{F}(0)$$

ισχύει ότι $0 < \pi_i < 1$ και αν $\rho_i \to 0 \ , \pi_i \to \dfrac{1}{1+\theta_i}$

τότε η $m_\infty(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\infty(u) = \pi_1 \int_0^u m_\infty(u-y) dA_1(y) + \frac{\lambda}{c_1} T\rho_1 z(u) \qquad u \geq 0$$

3.2 ΟΛΟΚΛΗΡΟΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ

Η συνάρτηση ποινής έχει διαφορετική συμπεριφορά αν το αρχικό πλεόνασμα u βρίσκεται πάνω ή κάτω από το κατώφλι b.

Έτσι $$m(u;b) = \begin{cases} m_1(u), 0 \leq u \leq b \\ m_2(u), u > b \end{cases}$$

Θεώρημα 3.2.1

Η $m(u;b)$ ικανοποιεί τις παρακάτω ολοκληροδιαφορικές

$$m'(u;b) = \begin{cases} m_1'(u) = \dfrac{\lambda+\delta}{c_1} m_1(u) - \dfrac{\lambda}{c_1} \displaystyle\int_0^u m_1(u-y) dF(y) - \dfrac{\lambda}{c_1} z(u), 0 \leq u \leq b \\ m_2'(u) = \dfrac{\lambda+\delta}{c_2} m_2(u) - \dfrac{\lambda}{c_2} [\displaystyle\int_0^{u-b} m_2(u-y) dF(y) + \int_{u-b}^{u} m_1(u-y) dF(y)] - \dfrac{\lambda}{c_2} z(u), u > b \end{cases}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αν ισχύει $0 \leq u \leq b$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Η πρώτη απαίτηση έρχεται πριν το πλεόνασμα να φτάσει το κατώφλι
(ii) Η πρώτη απαίτηση συμβαίνει ενώ το πλεόνασμα έχει υπερβεί το κατώφλι
(iii) Όσο αφορά το ύψος της αποζημίωσης υπάρχουν επίσης δύο εκδοχές:

(i) Η διαδικασία θα συνεχιστεί με νέο επίπεδο αποθεματικού
(ii) Η πρώτη ατομική απαιτηση θα οδηγήσει στην χρεοκοπία

Υλοποιώντας τα παραπάνω έχουμε:

$$m(u;b) = m_1(u) = \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-\delta t}\Big[\int_0^{u+c_1 t} m(u+c_1 t-y;b)dF(y) + \int_{u+c_1 t}^{\infty} w(u+c_1 t, y-u-c_1 t)dF(y)\Big]\lambda e^{-\lambda t}dt + \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-\delta t}\Big[\int_0^{b+c_2\left(t-\frac{b-u}{c_1}\right)} m\left(b+c_2\left(t-\frac{b-u}{c_1}\right)-y;b\right)dF(y) + \int_{b+c_2\left(t-\frac{b-u}{c_1}\right)}^{\infty} w\left(b+c_2\left(t-\frac{b-u}{c_1}\right), y-b-c_2\left(t-\frac{b-u}{c_1}\right)\right)dF(y)\lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda\int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-(\lambda+\delta)t}\gamma(u+c_1 t;b)dt + \lambda\int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t}\gamma\left(b+c_2\left(t-\frac{b-u}{c_1}\right);b\right)dt \tag{3.2.1.1}$$

με $\gamma(t;b) = \int_0^t m(t-y;b)dF(y) + \zeta(t)$

και αλλάζοντας μεταβλητές στην (3.2.1.1) παίρνουμε

$$m_1(u) = \frac{\lambda}{c_1}e^{(\lambda+\delta)u/c_1}\int_u^b e^{-\frac{(\lambda+\delta)t}{c_1}}\gamma(t;b)dt + \frac{\lambda}{c_2}e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c_1}}\int_b^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)\left[t-\frac{(c_1-c_2)b}{c_1}\right]}{c_2}}\gamma(t;b)dt \quad \text{με } 0 \leq u \leq b \tag{3.2.1.2}$$

η οποία με παραγώγιση δίνει:

$$m_1'(u) = \frac{\lambda}{c_1}\frac{\lambda+\delta}{c_1}e^{(\lambda+\delta)u/c_1}\int_u^b e^{-\frac{(\lambda+\delta)t}{c_1}}\gamma(t;b)dt - \frac{\lambda}{c_1}\gamma(u;b) + \frac{\lambda}{c_2}\frac{\lambda+\delta}{c_1}e^{(\lambda+\delta)u/c_1}\int_b^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)\left[t-\frac{(c_1-c_2)b}{c_1}\right]}{c_2}}\gamma(t;b)dt = \frac{\lambda+\delta}{c_1}m_1(u) - \frac{\lambda}{c_1}\gamma(u;b), 0 \leq u \leq b$$

ή ισοδύναμα

$$m_1'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c_1}m_1(u) - \frac{\lambda}{c_1}\int_0^u m_1(u-y)dF(y) - \frac{\lambda}{c_1}z(u), 0 \leq u \leq b$$

Ομοίως αν $u \geq b$

$$m(u;b) = m_2(u) = \frac{\lambda}{c_2} e^{(\lambda+\delta)u/c_2} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)t}{c_2}} \gamma(t;b)dt$$

και

$$\begin{aligned} m_2'(u) &= \frac{\lambda+\delta}{c_2} m_2(u) - \frac{\lambda}{c_2}\gamma(u;b) \\ &= \frac{\lambda+\delta}{c_2} m_2(u) - \frac{\lambda}{c_2}\left[\int_0^{u-b} m_2(u-y)dF(y) + \int_{u-b}^{u} m_1(u-y)dF(y)\right] \\ &- \frac{\lambda}{c_2}\zeta(u) \end{aligned}$$

Συμπεράσματα- παρατηρήσεις

(i) Η 3.2.1.0 για m_1 συμπίπτει με την 3.1.1.2.1 , άρα και η γενική λύση της 3.1.1.2.2
την ικανοποποιεί

(ii) Η 3.2.1.0 για m_1 δεν εξαρτάται από το m_2 , ενώ για m_2 εξαρτάται από το m_1

(iii) Η μελέτη της m(u;b) για u=b δείχνει ότι αυτή είναι συνεχής για u=b
ενώ η παράγωγός της όχι στο ίδιο σημείο

Απόδειξη

$$\begin{aligned} m_2'(b) &:= \lim_{u \to b^+} m_2'(u) \\ &= \frac{\lambda+\delta}{c_2} m_2(b) \\ &- \frac{\lambda}{c_2}\int_0^b m_1(b-y)dF(y) - \frac{\lambda}{c_2} z(b) = \frac{\lambda+\delta}{c_2} m_1(b) + \frac{c_1}{c_2}\left[m_1'(b) - \frac{\lambda+\delta}{c_1} m_1(b)\right] \end{aligned}$$

δηλαδή

$$c_1 m_1'(b) = c_2 m_2'(b) \Rightarrow m'_1(b) = \frac{c_2}{c_1} m'_2(b)$$

και επειδή τα $m_1'(b)$, $m_2'(b)$ είναι οι πλευρικές παράγωγοι στο u=b

και δεν είναι ίσες η m(u;b) παρουσιάζει γωνιακό σημείο στο

3.3 ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΟΤΑΝ ΤΟ u>b

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3

Η συνάρτηση m_2 ικανοποιεί την

$$m_2(u) = \pi_2 \left[\int_0^{u-b} m_2(u-y)\,dA_2(y) + \int_{u-b}^{u} m_1(u-y)\,dA_2(y) \right] + \frac{\lambda}{c_2} T_{\rho_2} z(u), u > b$$

με π_2 , A_2 , ζ όπως έχουν ορισθεί στο 3.1.1.2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $s > 0$ πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση της 3.2.1.0 με $c_2 e^{-s(u-b))}$ και ολοκληρώνουμε ως προς u και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
c_2 \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} m_2'(u)\,du &= c_2 \left[-m_2(b) + s \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} m_2(u)\,du \right] \\
&= c_2 s T_s m_2(b) - c_2 m_2(b) \\
&= (\lambda+\delta) T_s m_2(b) \\
&\quad - \lambda \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} \int_0^{u-b} m_2(u-y)\,dF(y)\,du \\
&\quad - \lambda \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} \int_0^{b} m_1(y) p(u-y)\,dy\,du - \lambda T_s z(b) \\
&= (\lambda+\delta) T_s m_2(b) \\
&\quad - \lambda \int_0^{\infty} e^{-sy} \int_{y+b}^{\infty} e^{-s(u-y-b)} m_2(u-y)\,du\,dF(y) \\
&\quad - \lambda \int_0^{b} m_1(y) \int_b^{\infty} e^{-s(u-b)} p(u-y)\,du\,dy - \lambda T_s z(b) \\
&= (\lambda+\delta) T_s m_2(b) - \lambda \hat{f}(s) T_s m_2(b) \\
&\quad - \lambda \int_0^{b} m_1(y) T_s p(b-y)\,dy - \lambda T_s z(b)
\end{aligned}$$

και με αναδιάταξη των όρων λαμβάνουμε

$$\left[c_2 s - (\lambda+\delta) + \lambda \hat{f}(s)\right] T_s m_2(b) = c_2 m_2(b) - \lambda \int_0^b m_1(y) T_s p(b-y)\,dy - \lambda T_s z(b) \tag{3.3.1}$$

Για να προσδιορίσουμε το $c_2 m_2(b)$ αντικαθιστούμε το s με τη μη αρνητική ρίζα ρ_2 της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg και έτσι

$$c_2 m_2(b) = \lambda \int_0^b m_1(y) T_{\rho_2} p(b-y)\,dy + \lambda T_{\rho_2} z(b)$$

οπότε η (3.3.1) γίνεται:

$$[c_2(s-\rho_2)+\lambda\tilde{p}(s)-\lambda\tilde{p}(\rho_2)]T_s m_2(b)$$
$$=\lambda\left[\int_0^b m_1(y)T_{\rho_2}p(b-y)dy-\int_0^b m_1(y)T_s p(b-y)dy\right]+\lambda\left[T_{\rho_2}z(b)-T_s z(b)\right]$$

και διαιρώντας με s-ρ_2

$$\left[c_2-\lambda\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_2)}{\rho_2-s}\right]T_s m_2(b)=\left[c_2-\lambda\frac{1-\hat{f}(\rho_2)}{\rho_2}\widetilde{a_2}(s)\right]T_s m_2(b)$$
$$=\lambda\int_0^b m_1(y)\frac{T_{\rho_2}p(b-y)-T_s p(b-y)}{s-\rho_2}dy+\frac{T_{\rho_2}z(b)-T_s z(b)}{s-\rho_2}$$

όπου $\widetilde{a_2}(s)$ η (3.1.1.2.3) για i=2

και έχουμε

$$c_2T_s m_2(b)=\lambda\frac{1-\hat{f}(\rho_2)}{\rho_2}\widetilde{a_2}(s)T_s m_2(b)+\lambda\int_0^b m_1(y)T_sT_{\rho_2}p(b-y)dy+\lambda T_sT_{\rho_2}\zeta(b)$$

Οπότε αντιστρέφοντας τους τελεστές έχουμε

$$m_2(u)=\pi_2\int_0^{u-b} m_2(u-y)dA_2(y)+\frac{\lambda}{c_2}\int_{u-b}^{u} m_1(u-y)T_{\rho_2}p(y)dy+\frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}z(u),u>b$$

Επειδή όμως

$$T_{\rho_2}p(y)dy=\left[\int_0^\infty e^{-\rho_2 t}\bar{F}(t)dt\right]dA_2(y)\ \text{ και }\ \int_0^\infty e^{-\rho_2 t}\bar{F}(t)dt=\frac{1-\hat{f}(\rho_2)}{\rho_2}$$

έχουμε τελικά για u > b

$$m_2(u)=\pi_2\left[\int_0^{u-b} m_2(u-y)dA_2(y)+\int_{u-b}^{u} m_1(u-y)dA_2(y)\right]+\frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}\zeta(u)$$

ή με άλλο τρόπο γραφής

$$m(u;b)=\pi_2\int_0^u m(u-y;b)dA_2(y)+\frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}\zeta(u),u>b$$

3.4 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ

Η λύση της m_1 είναι της μορφής

$$m_1(u)=m_\infty(u)+kv(u)$$

Και για u=b γίνεται

$$m_\infty(b)+kv(b)=m_1(b)=m_2(b)=$$
$$=\pi_2\int_0^b m_\infty(b-y)dA_2(y)+k\pi_2\int_0^b v(b-y)dA_2(y)+\frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}\zeta(b)$$

Άρα το κ είναι

$$k=\frac{\pi_2\int_0^b m_\infty(b-y)dA_2(y)-m_\infty(b)+\frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}\zeta(b)}{v(b)-\pi_2\int_0^b v(b-y)dA_2(y)}$$

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε την m_∞ σε όρους σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.
Έστω λοιπόν για i=1 και 2 η ακόλουθη α.σ.π.π

$$K_i(y) = 1 - \overline{K}_i(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\pi_i)\pi_i^n A_i^{*n}(y), \qquad u \geq 0$$

Με A_i^{*n} *να εκφράζει τη ν-οστή συνέλιξη του* A_i *με τον εαυτό του.*
Τότε

$$m_\infty(u) = \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)}\int_0^u T_{\rho_1}\zeta(u-y)dK_1(y) + \frac{\lambda}{c_1}T_{\rho_1}\zeta(u)$$

$$= \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)}\left[-\int_0^u K_1(u-y)dT_{\rho_1}\zeta(y) - K_1(u)T_{\rho_1}\zeta(0) + T_{\rho_1}\zeta(u)\right], u \geq 0$$

Lin-Willmot (1999)

Ας δούμε τώρα έκφραση και για το m_2
Αν πάρουμε $x=u-b$ *και* $g(x)=m_2(x+b)$ $x > 0$ *μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την* $m_2(u)$ *του θεωρήματος 3.3 ως*

$$g(x) = \pi_2 \int_0^x g(x-y)dA_2(y) + h(x+b), x > 0$$

όπου

$$h(x+b) = h(u) = \pi_2 \int_{u-b}^{u} m_1(u-y)dA_2(y) + \frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}\zeta(u), u > b$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα Lin-Willmot στην g(x) έχουμε

$$m_2(u) = g(x) = \frac{1}{1-\pi_2}\int_0^x h(x+b-y)dK_2(y) + h(x+b)$$

$$= \frac{1}{1-\pi_2}\int_0^{u-b} h(u-y)\,dK_2(y) + h(u)$$

$$= -\frac{1}{1-\pi_2}\left[\int_b^u K_2(u-y)dh(y) + K_2(u-b)\,h(b)\right] + h(u)$$

3.4.1 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ m(u,b) σε ΒΗΜΑΤΑ

(i) $m_\infty(u) = \frac{\lambda}{c_1(1-\pi_1)}\int_0^u T_{\rho_1}z(u-y)dK_1(y) + \frac{\lambda}{c_1}T_{\rho_1}z(u), u \geq 0$

(ii) $k = \dfrac{\pi_2\int_0^b m_\infty(b-y)dA_2(y) - m_\infty(b) + \frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}z(b)}{v(b) - \pi_2\int_0^b v(b-y)dA_2(y)}$

(iii) $m_1(u) = m_\infty(u) + k\frac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}e^{\rho_1 u}, u \geq 0$

(iv) $h(u) = \pi_2\int_{u-b}^{u} m_1(u-y)dA_2(y) + \frac{\lambda}{c_2}T_{\rho_2}z(u), u > b$

(v) $\quad m_2(u) = \frac{1}{1-\pi_2}\int_0^{u-b} h(u-y)dK_2(y) + h(u) \qquad u > b$

3.5 Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΟΛΙΚΗΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Θεώρημα 3.5

Η πιθανότητα ολικής χρεοκοπίας για ένα μοντέλο σύνθετης Poisson με στρατηγική κατωφλίου δίνεται από την

$$\psi(u;b) = \begin{cases} \psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b)\psi_{1,\infty}(u), 0 \le u \le b \\ \psi_2(u) = -\frac{1+\theta_2}{\theta_2}\int_0^{u-b} h(u-y)d\psi_{2,\infty}(y) + h(u), u > b \end{cases}$$

όπου $\quad q(b) = \frac{\theta_2}{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)+\theta_2}$ στο [0,1]

και

$$h(u) = \frac{1}{1+\theta_2}\int_{u-b}^{u} \psi_1(u-t)dF_e(t) + \frac{1}{1+\theta_2}\overline{F_e}(u), u > b$$

με $\quad F_e(y) = 1 - \overline{F}_e(y) = \int_0^y \frac{\bar{F}(t)dt}{E[Y_1]} = \int_0^y f_e(t)dt,\ y \ge 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τα συμπεράσματα 3.4.1 έχουμε

$$k = \frac{\frac{1}{1+\theta_2}\int_0^b \psi_{1,\infty}(b-y)dF_e(y) - \psi_{1,\infty}(b) + \frac{1}{1+\theta_2}\overline{F}_e(b)}{\frac{1-\psi_{1,\infty}(b)}{1-\psi_{1,\infty}(0)} - \frac{1}{1+\theta_2}\int_0^b \frac{1-\psi_{1,\infty}(b-y)}{1-\psi_{1,\infty}(0)}dP_e(y)}$$

$$= \left[1-\psi_{1,\infty}(0)\right]\frac{\frac{1}{1+\theta_2}\left[(1+\theta_1)\psi_{1,\infty}(b) - \overline{F}_e(b)\right] - \psi_{1,\infty}(b) + \frac{1}{1+\theta_2}\overline{F}_e(b)}{1-\psi_{1,\infty}(b) - \frac{1}{1+\theta_2}\left[F_e(b) - \int_0^b \psi_{1,\infty}(b-y)dF_e(y)\right]}$$

$$= \left[1-\psi_{1,\infty}(0)\right]\frac{\left(\frac{1+\theta_1}{1+\theta_2}\right)\psi_{1,\infty}(b)}{1-\psi_{1,\infty}(b) - \frac{1}{1+\theta_2}F_e(b) + \frac{1+\theta_1}{1+\theta_2}\psi_{1,\infty}(b) - \frac{1}{1+\theta_2}\overline{F}_e(b)}$$

$$= \left[1-\psi_{1,\infty}(0)\right]\frac{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)}{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)+\theta_2}$$

Επίσης από 3.4.1

$$\psi_1(u) = \psi_{1,\infty}(u) + \frac{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)}{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)+\theta_2}\left[1-\psi_{1,\infty}(u)\right]$$

$$= \frac{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)}{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)+\theta_2} + \frac{\theta_2}{(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b)+\theta_2}\psi_{1,\infty}(u),\ 0 \le u \le b$$

πού δίνει το ζητούμενο.

Σημείώσεις

(i) *Από το θεώρημα διαπιστώνουμε ότι το ψ_1 είναι σταθμισμένος μέσος της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση σταθερού μερίσματος και όταν αυτή εκφράζεται από την Poisson του κλασικού μοντέλου.*

(ii) *Για $0 \le u \le b$ η πιθανότητα μιας πτώσης κάτω από το αρχικό αποθεματικό u είναι:*

$$\psi(0; b-u) = \frac{(1+\theta_1)(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b-u)+\theta_2}{(1+\theta_1)\left[(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b-u)+\theta_2\right]}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με τη χρήση της $\psi(u;b)$ και της q(b) του θεωρήματος έχουμε:

$$\psi(0; b-u) = 1 - q(b-u) + q(b-u)\psi_{1,\infty}(0) = 1 - \frac{\theta_1}{1+\theta_1}q(b-u)$$

$$= \frac{(1+\theta_1)(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b-u)+\theta_2}{(1+\theta_1)\left[(\theta_1-\theta_2)\psi_{1,\infty}(b-u)+\theta_2\right]},0 \le u \le b$$

(iii) Για u > b, η πιθανότητα πτώσης κάτω από το αρχικό επίπεδο ψ(0;0) με το μοντέλο αυτό, είναι η ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα του κλασικού μοντέλου με ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρου c_2

(iv) Σημαντικό πλεονέκτημα της $\psi(u;b)$ που βρήκαμε είναι ότι *ΟΛΕΣ οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται έχουν γνωστό τύπο και μπορούν απευθείας να υπολογισθούν.*

Αυτό θα γίνει καλύτερα κατανοητό με τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν

Παραδειγμα 3.5.α

Έστω ότι οι απαιτήσεις αποζημίωσης σε ένα μοντέλο ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσο 1/μ ,

μ > 0 τότε ως γνωστό $P(y) = 1 - e^{-\mu y} = F_e(y), y \ge 0$. *Αν θεωρήσουμε* $\beta_i = \dfrac{\theta_i}{1+\theta_i}\mu$

$i = 1,2$

ο συντελεστής προσαρμογής Lundberg για ένα μοντέλο σύνθετης Poisson με ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων c_i , τότε ως γνωστό $\psi_{i,\infty}(u) = \frac{1}{1+\theta_i}e^{-\beta_i u}$ $u \ge 0,\ \ i = 1,2$

και από 3.4.1 η πιθανότητα πτώσης κάτω από το αρχικό επίπεδο u είναι

$$\psi(0; b-u) = \frac{(\theta_1-\theta_2)e^{-\beta_1(b-u)}+\theta_2}{(\theta_1-\theta_2)e^{-\beta_1(b-u)}+(1+\theta_1)\theta_2}, 0 \le u \le b$$

και

$$\psi_1(u) = 1 - q(b) + \frac{q(b)}{1+\theta_1}e^{-\beta_1 u}, 0 \le u \le b$$

με $$q(b) = \frac{(1+\theta_1)\theta_2}{(\theta_1-\theta_2)e^{-\beta_1 b}+(1+\theta_1)\theta_2}$$

Με την παραπάνω $\psi_1(u)$ η h(u) της 3.4.1 γίνεται:

$$h(u)=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{-\int_{u-b}^{u}[1-q(b)]de^{-\mu t}-\frac{q(b)}{1+\theta_1}\int_{u-b}^{u}e^{-\beta_1(u-t)}de^{-\mu t}+e^{-\mu u}\right\}$$
$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{[1-q(b)]e^{-\mu(u-b)}-[1-q(b)]e^{-\mu u}+\frac{\mu q(b)}{1+\theta_1}e^{-\beta_1 u}\int_{u-b}^{u}e^{(\beta_1-\mu)t}dt+e^{-\mu u}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{[1-q(b)]e^{-\mu(u-b)}+q(b)e^{-\mu u}+\frac{\mu q(b)}{1+\theta_1}\frac{1}{\beta_1-\mu}e^{-\beta_1 u}\left[1-e^{-(\beta_1-\mu)b}\right]e^{(\beta_1-\mu)u}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{[1-q(b)]e^{-\mu(u-b)}+q(b)e^{-\mu u}-q(b)\left[1-e^{-(\beta_1-\mu)b}\right]e^{-\mu u}\right\}$$
$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left[1-q(b)+q(b)e^{-\beta_1 b}\right]e^{-\mu(u-b)}$$
$$=\frac{1}{1+\theta_2}Q(b)e^{-\mu(u-b)},u>b$$

όπου

$$Q(b)=1-q(b)+q(b)e^{-\beta_1 b}$$

και

$$\psi_2(u)=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{-\frac{1}{\theta_2}\int_0^{u-b}Q(b)\,e^{-\mu(u-y-b)}de^{-\beta_2 y}+Q(b)e^{-\mu(u-b)}\right\}$$

$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{Q(b)\frac{\beta_2}{\theta_2}\int_0^{u-b}e^{-(\beta_2-\mu)y}dy+Q(b)\right\}e^{-\mu(u-b)}$$
$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{-Q(b)\frac{\beta_2}{\theta_2}\frac{1}{\beta_2-\mu}\left[e^{-(\beta_2-\mu)(u-b)}-1\right]+Q(b)\right\}e^{-\mu(u-b)}$$

$$=\frac{1}{1+\theta_2}\left\{Q(b)\left[e^{-(\beta_2-\mu)(u-b)}-1\right]+Q(b)\right\}e^{-\mu(u-b)}$$
$$=\frac{1}{1+\theta_2}Q(b)e^{-\beta_2(u-b)},u>b$$

Και συνοψίζοντας $\psi(u;b)=$
$$\begin{cases}\psi_1(u)=1-q(b)+\frac{q(b)}{1+\theta_1}e^{-\beta_1 u},\ 0\le u\le b\\ \psi_2(u)=\frac{1}{1+\theta_2}\left[1-q(b)+q(b)e^{-\beta_1 b}\right]e^{-\beta_2(u-b)},u>b\end{cases}$$
Προφανώς $0\le Q(b)\le 1$ και άρα

$$\psi_2(u)\le\frac{1}{1+\theta_2}e^{-\beta_2(u-b)}$$

<u>Παραδειγμα 3.5.b</u>

Έστω ότι οι απαιτήσεις αποζημίωσης σε ένα μοντέλο ακολουθούν συνδυασμό δύο εκθετικών και συγκεκριμένα $\overline{P}(y)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j e^{-\mu_j y},y\ge 0,\mu_j>0,$ *με* $\overline{P_e}(y)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j^* e^{-\mu_j y},\ y\ge 0$

όπου $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$, $\omega_j^*=\frac{\omega_j/\mu_j}{\sum_{l=1}^{n}\omega_l/\mu_l},j=1,2,\dots,n,\ \psi_{i,\infty}(u)=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}e^{-\beta_{ij}u},\ u\ge 0,\ i=1,2$

και $0<\beta_{i1}<\beta_{i2}<\ldots<\beta_{in}$ *οι πραγματικές διακριτές ρίζες της* $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\omega_j^*\mu_j}{\mu_j-\beta}\right)=1+\theta_i$

και επιπλέον $$C_{ij} = \frac{\left[\sum_{l=1}^{n} \frac{w_l^*}{\mu_l - \beta_{ij}}\right]}{\left[\sum_{l=1}^{n} \frac{w_l^* \mu_l}{(\mu_l - \beta_{ij})^2}\right]}, i = 1,2, j = 1,2, \dots, n$$

Τότε από τη σημείωση (ii) έχουμε :

$$\psi(0; b-u) = \frac{(1+\theta_1)(\theta_1 - \theta_2)\sum_{j=1}^{n} C_{1,j} e^{-\beta_{1j}(b-u)} + \theta_2}{(1+\theta_1)\left[(\theta_1 - \theta_2)\sum_{j=1}^{n} C_{1,j} e^{-\beta_{1j}(b-u)} + \theta_2\right]}, 0 \le u \le b$$

όπως και ότι : $\psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b)\sum_{j=1}^{n} C_{1,j} e^{-\beta_{1j}u}$ *με*

$$q(b) = \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_2)\sum_{j=1}^{n} C_{1,j} e^{-\beta_{1j}b} + \theta_2}$$

Τώρα λοιπόν πριν την αναλυτική έκφραση για την $\psi_2(u)$ να επισημάνουμε ότι ισχύουν εδώ:

$\sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{il} C_{il}}{\mu_j - \beta_{il}} = \frac{\theta_i}{1+\theta_i}, i = 1,2$ *και αφού* $\sum_{l=1}^{n} C_{il} = \psi_{i,\infty}(0) = \frac{1}{1+\theta_i}$

έχουμε

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_j C_{il}}{\mu_j - \beta_{il}} = \sum_{l=1}^{n} C_{il} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{il} C_{il}}{\mu_j - \beta_{il}} = \frac{1}{1+\theta_i} + \frac{\theta_i}{l+\theta_i} = 1, \qquad i = 1,2$$

Ανάλογα ισχύει $h(u) = \frac{1}{1+\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^* \left\{\int_{u-b}^{u} \psi_1(u-t) e^{-\mu_j t} dt + e^{-\mu_j u}\right\}$

$$= \frac{1}{1+\theta_2}\sum_{j=1}^{n} w_j^* \left\{[1-q(b)]e^{-\mu_j(u-b)} + q(b)e^{-\mu_j u} + q(b)\sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_j C_{1l}}{\mu_j - \beta_{1l}}\left[e^{-\beta_{1l}} e^{-\mu_j(u-b)} - e^{-\mu_j u}\right]\right\}$$

Και με τη χρήση του παραπάνω αθροίσματος έχουμε για i = 1

$h(u) = \sum_{j=1}^{n} w_j^* Q_j(b)\, e^{-\mu_j(u-b)}$ με $Q_j(b) = 1 - q(b) + q(b)\sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_j C_{1l}}{\mu_j - \beta_{1l}}, j = 1, \dots, n$

Κατόπιν αυτών:

$$\psi_2(u) = \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} + \sum_{j=1}^{n} \omega_j^* Q_j(b) \left\{\frac{1}{1+\theta_2} - \frac{1}{\theta_2}\sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}}\right\} e^{-\mu_j(u-b)}$$

$$= \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} = \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} C_{2j} \left\{\sum_{l=1}^{n} \frac{\omega_l^* Q_l(b)}{\mu_l - \beta_{2j}}\right\} e^{-\beta_{2j}(u-b)}, u > b$$

και τελικά

$$\psi(u; b) = \begin{cases} \psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b)\sum_{j=1}^{n} C_{1j} e^{-\beta_{1j}u}, 0 \le u \le b \\ \psi_2(u) = \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} C_{2j} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\omega_l^* Q_l(b)}{\mu_l - \beta_{2j}}\right] e^{-\beta_{2j}(u-b)}, u > b \end{cases}$$

Αν οι απαιτήσεις είναι μείξη εκθετικών π.χ. $\omega_i \geq 0$ για όλα τα j τότε και $C_{ij} \geq 0$ για ι=1,2
και $0 \leq Q_j(b) \leq 1$ για όλα τα j οπότε μπορούμε να βρούμε άνω φράγμα για την $\psi_2(u)$
Δηλαδή:

$$\psi_2(u) = \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{2l}(u-b)} \leq \frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^* Q_j(b) \sum_{l=1}^{n} \frac{\beta_{2l} C_{2l}}{\mu_j - \beta_{2l}} e^{-\beta_{21}(u-b)}$$
$$= \frac{1}{1+\theta_2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j^* Q_j(b) e^{-\beta_{21}(u-b)} \leq \frac{1}{1+\theta_2} e^{-\beta_{21}(u-b)} \quad u > b$$

3.6 ΧΡΟΝΟΣ ΟΛΙΚΗΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Εδώ θα ασχοληθούμε με μια συγκεκριμένη περίπτωση της κατά Gerber- Shiu συνάρτησης ποινής m(u;b)

Θεωρούμε αυθαίρετα το μετασχηματισμό Laplace της στιγμής της χρεοκοπίας

$\square(u;b) = E\{e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty) | U_b(0) = u\}$ με $\delta \geq 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$

για όλα τα μη αρνητικά ζεύγη (x_1, x_2) οπότε το *z tautízetai me to* $\hat{F}$

Επίσης όταν το δ > 0 μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m(u;b) = E\{e^{-\delta T_b} | U_b(0) = u\}$ (για δ = 0 έχουμε την πιθανότητα ολικής χρεοκοπίας που έχουμε περιγράψει στο 3.5)

Αφού έχουμε γνωστής μορφής μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T_b, η κατανομή του μπορεί να βρεθεί με αντίστροφη μεθόδευση, δηλ να βρεθούν οι ροπές του με παραγώγιση ως προς δ, αλλά στην πραγματικότητα πρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ότι δεν εκφράζεται πλήρως μέσω του δ, αλλά μόνο μέσω συναρτήσεων του δ, $\rho_1 = \rho_1(\delta)$ και $\rho_2 = \rho_2(\delta)$

Θέτουμε λοιπόν

$$L(u;b) = m(u;b)|_{w\equiv 1}$$
$$L_1(u) = m_1(u)|_{w\equiv 1}$$
$$L_2(u) = m_2(u)|_{w\equiv 1}$$
$$L_\infty(u) = m_\infty(u)|_{w\equiv 1}$$

που θα μας οδηγήσει στην εύρεση του μετασχηματισμού Laplace για τον χρόνο χρεοκοπίας T_b

Πόρισμα 3.6.1

Ο μετασχηματισμός Laplace για τον χρόνο χρεοκοπίας T_b , ενός μοντέλου σύνθετης Poisson με στρατηγική κατωφλίου ικανοποιεί την

$$L(u;b) = \begin{cases} L_1(u) = L_\infty(u) + k\frac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}e^{\rho_1 u}, 0 \le u \le b \\ L_2(u) = \frac{1}{1-\pi_2}\int_0^{u-b} h(u-y)dK_2(y) + h(u), u > b \end{cases} \quad (3.6.1)$$

με $$L_\infty(u) = \frac{\pi_1}{1-\pi_1}\left[\int_0^u \overline{K_1}(u-y)dA_1(y) - \overline{K_1}(u) + \overline{A_1}(u)\right], \quad u \ge 0$$

$$k = \frac{\pi_2\int_0^b L_\infty(b-y)dA_2(y) - L_\infty(b) + \pi_2\overline{A_2}(b)}{v(b) - \pi_2\int_0^b v(b-y)dA_2(y)} \quad ,$$

$$h(u) = \pi_2\int_{u-b}^{u} L_1(u-t)dA_2(t) + \pi_2\overline{A_2}(u)$$

και $$L_\infty(u) = \frac{\pi_1}{1-\pi_1}\left[\int_0^u \overline{K_1}(u-y)dA_1(y) - \overline{K_1}(u) + \overline{A_1}(u)\right], u \ge 0$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για συγκεκριμένη κατανομή (απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική) όπου $P(y) = 1 - e^{-\mu y}$ $\mu > 0$ και πιο συγκεκριμένα $A_1(y) = A_2(y) = P(y) = 1 - e^{-\mu y}$ με μτασχηματισμό Laplace για την Y_1 $\tilde{p}(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$

και $\pi_i = \frac{\lambda}{c_i(\rho_i + \mu)}$ *i= 1 , 2*

Ξέρουμε τότε ότι

$$\tilde{K}_i(u) = \pi_i e^{-\tau_i u}$$

όπου

$$\tau_i = (1 - \pi_i)\mu$$

και $L_\infty(u) = \tilde{K}_i(u) = \pi_1 e^{-\tau_1 u}$, $\Psi(u) = \frac{\mu-\tau_1}{\mu+\rho_1}e^{-(\rho_1+\tau_1)u}$

αντικαθιστώντας $v(u) = \frac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}e^{\rho u}$

και

$$m_\infty(u) = \pi_1\int_0^u m_\infty(u-y)dA_1(y) + \frac{\lambda}{c_1}T\rho_1\zeta(u)$$

$\sigma\tau\eta\nu\ k = \frac{\pi_2 \int_0^b L_\infty(b-y)dA_2(y) - L_\infty(b) + \pi_2 \overline{A_2}(b)}{v(b) - \pi_2 \int_0^b v(b-y)dA_2(y)}$

παίρνουμε:

$$k = \frac{\left(\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1\right) L_\infty(b)}{\frac{1-\Psi(b)}{1-\Psi(0)} e^{\rho_1 b} - \pi_2 \int_0^b \frac{1-\Psi(b-y)}{1-\Psi(0)} e^{\rho_1 (b-y)} dA_2(y)}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1}\right)\left(\frac{\pi_2}{\pi_1} - 1\right) \pi_1 e^{-\tau_1 b}}{\left[1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}\right] e^{\rho_1 b} + \pi_2 e^{\rho_1 b} \int_0^b \left[1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu} e^{-(\rho_1 + \tau_1)(b-y)}\right] e^{-\rho_1 y} de^{-\mu y}}$$

$$= \frac{\rho_1 + \tau_1}{\mu + \rho_1} \frac{(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1) b} + \frac{\mu \pi_2}{\mu + \rho_1}\left[e^{-(\mu + \rho_1) b} - 1\right] + \mu \pi_2 \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1) b} \int_0^b e^{(\tau_1 - \mu) y} dy}$$

$$= \frac{\rho_1 + \tau_1}{\mu + \rho_1} \frac{(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1) b} + \frac{\mu \pi_2}{\mu + \rho_1}\left[e^{-(\mu + \rho_1) b} - 1\right] + \frac{\mu \pi_2}{\mu + \rho_1}\left[e^{-(\rho_1 + \tau_1) b} - e^{-(\mu + \rho_1) b}\right]}$$

$$= \frac{(\pi_2 - \pi_1)(\rho_1 + \tau_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}$$

Έτσι η (3.6.1) δίνει

$$L_1(u) = \pi_1 e^{-(1-\pi_1)\mu u} + \frac{k}{1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1}}\left[1 - \frac{\mu - \tau_1}{\mu + \rho_1} e^{-(\rho_1 + \tau_1) u}\right] e^{\rho_1 u}$$

$$= \left\{\pi_1 - \frac{k(\mu - \tau_1)}{\rho_1 - \tau_1}\right\} e^{-\tau_1 u} + \frac{k(\mu - \tau_1)}{\rho_1 - \tau_1} e^{\rho_1 u}$$

$$= \pi_1 \left\{1 - \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}\right\} e^{-\tau_1 u} + \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}} e^{\rho_1 u}$$

$$= \pi_1 r(b) e^{-\tau_1 u} + [1 - r(b)] e^{\rho_1 u}, 0 \le u \le b$$

$\mu\varepsilon\ r(b) = 1 - \frac{\mu(\pi_2 - \pi_1) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}{\rho_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) e^{-(\rho_1 + \tau_1) b}}$

και θέτωντας $R(b) = \frac{\rho_1}{\mu + \rho_1}[1 - r(b)] e^{-\mu b} + \frac{\mu}{\mu + \rho_1}[1 - r(b)] e^{\rho_1 b} + r(b) e^{-\tau_1 b}$
έχουμε $h(u) = \pi_2 R(b) e^{-\mu(u-b)}, u > b$

και ανάλογα

$$L_2(u) = \pi_2 R(b) e^{-\tau_2(u-b)}, \qquad u > b$$

για να έχουμε τελικά

$$L(u;b) = \begin{cases} L_1(u) = [1-r(b)]e^{\rho_1 u} + \pi_1 r(b) e^{-\tau_1 u}, 0 \le u \le b \\ L_2(u) = \pi_2 \left\{ \frac{\rho_1}{\mu+\rho_1}[1-r(b)]e^{-\mu b} + \frac{\mu}{\mu+\rho_1}[1-r(b)]e^{\rho_1 b} + r(b)e^{-\tau_1 b} \right\} e^{-\tau_2(u-b)}, u > b \end{cases}$$

<u>Πόρισμα 3.6.2</u>

Ο μετασχηματισμός Laplace για τον χρόνο χρεοκοπίας T_b , ενός μοντέλου μίξης εκθετικών με στρατηγική κατωφλίου

<u>Απόδειξη</u>

Για i = 1 ,2 έχουμε $\tilde{A}_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}^* e^{-\mu_j y}, y \ge 0$ *με*

$$\omega_{ij}^* = \frac{\omega_j/(\mu_j+\rho_i)}{\sum_{l=1}^{n} \omega_l/(\mu_l+\rho_i)}, j = 1,2,\dots,n$$

και $\tilde{K}_i(u) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} e^{-\beta_{ij} u}, u \ge 0$, $0 < \beta_{i1} < \beta_{i2} < \dots < \beta_{in}$

οι πραγματικές διακριτές ρίζες της $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\omega_j^* \mu_j}{\mu_j - \beta} \right) = 1 + \theta_i$

και επιπλέον $C_{ij} = \frac{\left[\sum_{l=1}^{n} \frac{w_l^*}{\mu_l - \beta_{ij}}\right]}{\left[\sum_{l=1}^{n} \frac{w_l^* \mu_l}{(\mu_l - \beta_{ij})^2}\right]}, i = 1,2, j = 1,2,\dots,n$

και όπως ακριβώς στο (3.5.b)

$$\psi_1(u) = 1 - q(b) + q(b) \sum_{j=1}^{n} C_{1,j} e^{-\beta_{1j} u}$$

με

$$q(b) = \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_2)\sum_{j=1}^{n} C_{1,j} e^{-\beta_{1j} b} + \theta_2}$$

Τώρα λοιπόν πριν την αναλυτική έκφραση για την $\psi_2(u)$ να επισημάνουμε ότι και εδώ ισχύουν:

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\beta_{il}C_{il}}{\mu_j-\beta_{il}}=\frac{\theta_i}{1+\theta_i}, i=1,2$$

και αφού $\sum_{l=1}^{n}C_{il}=\psi_{i,\infty}(0)=\frac{1}{1+\theta_i}$

έχουμε

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\mu_jC_{il}}{\mu_j-\beta_{il}}=\sum_{l=1}^{n}C_{il}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\beta_{il}C_{il}}{\mu_j-\beta_{il}}=\frac{1}{1+\theta_i}+\frac{\theta_i}{l+\theta_i}=1,\ i=1,2 \text{ και άρα}$$

όμοια με (3.5.b) έχουμε

$$\psi_2(u)=\frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^*Q_j(b)\sum_{l=1}^{n}\frac{\beta_{2l}C_{2l}}{\mu_j-\beta_{2l}}e^{-\beta_{2l}(u-b)}\leq\frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^*Q_j(b)\sum_{l=1}^{n}\frac{\beta_{2l}C_{2l}}{\mu_j-\beta_{2l}}e^{-\beta_{21}(u-b)}$$

$$=\frac{1}{1+\theta_2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j^*Q_j(b)e^{-\beta_{21}(u-b)}\leq\frac{1}{1+\theta_2}e^{-\beta_{21}(u-b)}\quad u>b$$

3.7 Το πλεόνασμα τη στιγμή πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία

3.7.1 Περιθώριες σ.π.π για πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και για έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε τις από κοινού περιθώριες συναρτήσεις κατανομής του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά την στιγμή της χρεοκοπίας, καθώς και την κατανομή του πλεονάσματος ακριβώς πριν την πτώση κάτω από το αρχικό επίπεδο u.
Έχοντας δ = 0 και $w(x_1,x_2)=I(X_1\leq x_1,X_2\leq x_2)$
και τις

$$F(x_1,x_2/u;b)\quad F_1(x_1,x_2/u;b)\quad F_2(x_1,x_2/u;b)\quad F_\infty(x_1,x_2/u;b)$$

να είναι οι αντίστοιχες αθροιστικές των

$$m(u;b)\quad m_1(u)\quad m_2(u)\quad m_\infty(u)$$

και ορίζοντας

$$\zeta(u)=I(u\leq x_1)\left[\hat{F}(u)-\hat{F}(u+x_2)\right]$$

έχουμε

$$F_{\infty}(x_1, x_2|u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_1}\left\{\begin{array}{c}[F_e(x_1+x_2) - F_e(x_1) - F_e(x_2)]\Psi_{1,\infty}(u) \\ +\dfrac{1}{E[Y_i]}\displaystyle\int_0^{x_1} \Psi_{1,\infty}(u-ny)[\bar{F}(y) - \bar{F}(y+x_2)]\,dy\end{array}\right\}, 0 \le x_1 \le u \\ \dfrac{1}{\theta_1}\left\{\begin{array}{c}(1+\theta_1)\left[\Psi_{1,\infty}(u) - \Psi_{1,\infty}(u+x_2)\right] + \Psi_{1,\infty}(u)[F_e(x_1+x_2) - F_e(x_1) - F_e(x_2)] \\ +\dfrac{1}{E[Y_i]}\displaystyle\int_0^{x_2} \Psi_{1,\infty}(u+x_2-y)\bar{F}(y)dy - [F_e(x_1+x_2) - F_e(x_1)(x_1+x_2) - F_e(x_1)]\end{array}\right\}, x_1 > u \end{cases}$$

και τις παρακάτω περιθώριες του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά την στιγμή της χρεοκοπίας

$$\mathrm{F}_{\infty,\mathrm{X}_1}(\mathrm{x}_1|\mathrm{u}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_1}\left\{-\mathrm{P_e}(\mathrm{x}_1)\Psi_{1,\infty}(\mathrm{u}) + \dfrac{1}{\mathrm{E}[\mathrm{Y_i}]}\displaystyle\int_0^{\mathrm{x}_1} \Psi_{1,\infty}(\mathrm{u}-\mathrm{y})\,\bar{\mathrm{F}}(\mathrm{y})\mathrm{dy}\right\}, 0 \le \mathrm{x}_1 \le \mathrm{u} \\ \dfrac{1}{\theta_1}\left\{\theta_1\Psi_{1,\infty}(\mathrm{u}) + \left[1 + \Psi_{1,\infty}(\mathrm{u})\right]\overline{\mathrm{F_e}}(\mathrm{x}_1)\right\}, \mathrm{x}_1 > u \end{cases}$$

$$\mathrm{F}_{\infty,\mathrm{X}_2}(\mathrm{x}_2|\mathrm{u}) = \frac{1}{\theta_1}\left\{(1+\theta_1)\left[\Psi_{1,\infty}(\mathrm{u}) - \Psi_{1,\infty}(\mathrm{u}+\mathrm{x}_2)\right] - \Psi_{1,\infty}(\mathrm{u})\mathrm{F_e}(\mathrm{x}_2) + \frac{1}{\mathrm{E}[\mathrm{Y_i}]}\int_0^{\mathrm{x}_2}\Psi_{1,\infty}(\mathrm{u}+\mathrm{x}_2-\mathrm{y})\overline{\mathrm{F_e}}(\mathrm{y})\mathrm{dy}\right\}$$

με την χρήση των οποίων παίρνουμε από την 3.4.1 αναλυτικές εκφράσεις της

$$F(x_1, x_2 / u; b)$$

__Πόρισμα 3.7.1.a__

Αν πάρουμε

$$\sigma(x_1, x_2|u) = \overline{F}_e(u) + \overline{F}_e(x_1+x_2) - \overline{F}_e(x_1) - \overline{F}_e(u+x_2), u \ge 0$$

Τότε η $F(x_1, x_2 / u; b)$ δίνεται από τις

$$F_1(x_1, x_2|u; b) = F_\infty(x_1, x_2|b) + k[1 - \Psi_{1,\infty}(u)], 0 \le u \le b$$

$$F_2(x_1, x_2|u; b) = -\frac{1+\theta_2}{\theta_2}\left[\int_b^u \Psi_{2,\infty}(u-y)dh(y) + \Psi_{2,\infty}(u-b)h(b)\right] + h(u), u > b$$

με

$$k = \frac{(\theta_1-\theta_2)F_\infty(x_1, x_2|b) - \overline{F_e}(b) + I(b \le x_1)\sigma(x_1, x_2|b)}{(\theta_1-\theta_2)\Psi_{1,\infty}(b)+\theta_2}$$

και

$$h(u) = \frac{1}{1+\theta_2}\int_{u-b}^{u} F_1(x_1, x_2|u-y; b)\, d\overline{F_e}(y) + \frac{I(u \le x_1)}{1+\theta_2}\sigma(x_1, x_2|u), u > b$$

3.7.1.a.1 Ελλειμματική περιθώρια σ.π.π για το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία

Παραγωγίζουμε την $F(x_1, x_2 / u; b)$του παραπάνω πορίσματος και με $x_2 \to \infty$ η ζητούμενη σ.π.π είναι:

$$\mathrm{F}_{1,\mathrm{X}_1}(\mathrm{x}_1|\mathrm{u}; \mathrm{b}) = \mathrm{F}_{\infty,\mathrm{X}_1}(\mathrm{x}_1|\mathrm{b}) + k[1 - \Psi_{1,\infty}(u)], 0 \le u \le b$$

$$F_{2,X_1}(x_1|u; b) = -\frac{1+\theta_2}{\theta_2}\left[\int_b^u \Psi_{2,\infty}(u-y)dh(y) + \Psi_{2,\infty}(u-b)h(b)\right] + h(u), u > b$$

με

$$k = \frac{(\theta_1-\theta_2)F_{\infty,X_1}(x_1|b) - \overline{F_e}(b) + I(u \le x_1)[\overline{F_e}(b) - \overline{F_e}(x_1)]}{(\theta_1-\theta_2)\Psi_{1,\infty}(b)+\theta_2} \quad ,$$

$$h(u) = \frac{1}{1+\theta_2}\int_{u-b}^{u} F_{1,X_1}(x_1|u-y; b)\, dP_e(y) + \frac{I(u \le x_1)}{1+\theta_2}[\overline{F_e}(b) - \overline{F_e}(x_1)], u > b$$

3.7.1.a.2 Ελλειμματική περιθώρια σ.π.π για το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία

Παραγωγίζουμε την $F(x_1, x_2 / u; b)$του παραπάνω πορίσματος και με $x_1 \to \infty$ η ζητούμενη σ.π.π είναι:

$$F_{1,X_2}(x_2|u; b) = F_{\infty,X_2}(x_2|b) + k[1 - \Psi_{1,\infty}(u)], 0 \le u \le b$$

$F_{1,X_2}(x_2|u;b) = -\frac{1+\theta_2}{\theta_2}\left[\int_b^u \Psi_{2,\infty}(u-y)dh(y) + \Psi_{2,\infty}(u-b)h(b)\right] + h(u), u > b$
με

$$k = \frac{(\theta_1-\theta_2)F_{\infty,X_2}(x_2|b) - \overline{F_e}(b+x_2)}{(\theta_1-\theta_2)\Psi_{1,\infty}(b)+\theta_2} \quad , \quad h(u) = \frac{1}{1+\theta_2}\int_{u-b}^u F_{1,X_2}(x_2|u-y;b)\, dF_e(y) + \frac{1}{1+\theta_2}[\overline{F}_e(u) - \overline{F}_e(u+x_2)], u > b$$

3.7.1.a.3 Κατανομή της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο

Αυτή δίνεται από την

$$G(x_2|0) = F_{\infty,X_2}(x_2|b-u) + \frac{\theta_1}{1+\theta_1}k, 0 \leq u \leq b$$

όπου $$k = \frac{(\theta_1-\theta_2)F_{\infty,X_2}(x_2|b-u) - \overline{F_e}(b-u+x_2)}{(\theta_1-\theta_2)\Psi_{1,\infty}(b)+\theta_2}$$

3.7.2 Από κοινού περιθώριες ροπές για πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και για έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Θέτοντας δ=0 και $w(x_1,x_2) = (x_1^{\,h}, x_2^{\,l})$ *με h , l αυθαίρετες μη αρνητικές σταθερές και*

$$F^{h,l}(u;b) \quad F_1^{h,l}(u;b) \quad F_2^{h,l}(u;b) \quad F^{h,l}{}_{\infty}(u;b)$$

να είναι οι αντίστοιχες από κοινού ροπές που προκύπτουν από τις

$$m(u;b) \quad m_1(u) \quad m_2(u) \quad m_\infty(u)$$

και συμβολίζοντας με n την n-τάξεως ουρά του P θα είναι

$$\overline{F_{e,n}}(y) = 1 - F_{e,n}(y) = \frac{\int_y^\infty \overline{F_{e,n-1}}(t)dt}{\int_0^\infty \overline{F_{e,n-1}}\,(t)dt}$$

με $\overline{F_{0,e}}(t) = \overline{F}(t)$, $\overline{F_{1,e}}(t) = \overline{F}_e(t)$ και $p_n = \int_0^\infty y^n dF(y)$ η n-ροπή του Y_1

έχουμε

$$\overline{F_{e,n}}(y) = \frac{1}{p_n}\int_y^\infty (t-y)^n dF(t) \quad \text{και} \quad \int_u^\infty \zeta(t)dt = p_l\int_u^\infty t^h\overline{F_{e,l}}(t)dt$$

που δίνουν τελικά ότι οι *από κοινού ροπές του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας ικανοποιούν*
την

$$F^{h,l}(u;b) = \begin{cases} F_1^{h,l}(u) = F_\infty^{h,l}(u) + k\left[1 - \Psi_{1,\infty}(u)\right], 0 \le u \le b \\ F_2^{h,l}(u) = -\dfrac{1}{1+\theta_2}\left[\displaystyle\int_b^u \Psi_{2,\infty}(u-y)\, dh(y) + \Psi_{1,\infty}(u-b)h(b)\right] + h(u), u > b \end{cases}$$

όπου

$$F_\infty^{h,l}(u) = \frac{\theta_1 p_1}{p_1}\left\{\int_0^u y^h\left[\Psi_{1,\infty}(u-y) - \Psi_{1,\infty}(u)\right]\overline{F_{e,l}}(y)dy + \int_u^\infty y^h\left[1 - \Psi_{1,\infty}(u)\right]\overline{F_{e,l}}(y)dy\right\}$$

με

$$k = \frac{(\theta_2 - \theta_1)F_\infty^{h,l}(b) - \overline{F}_e(b) + \frac{p_l}{p_1}\int_b^\infty t^h \overline{F_{e,l}}(t)dt}{(\theta_2 - \theta_1)\Psi_{1,\infty}(b) + \theta_2} \quad , \quad h(u) = \frac{1}{1+\theta_2}\int_{u-b}^u F_1^{h,l}(u-y)dF_e(y) + \frac{\lambda p_1}{c_2}\int_u^\infty t^h \overline{F_{e,l}}(t)dt, u > b$$

και έτσι

<u>για να πάρω περιθώριες ροπές για το πλεόνασμα ακριβώς πρίν τη χρεοκοπία βάζω l = 0 στην $F^{h,l}(u;b)$</u>

<u>ενώ για να πάρω περιθώριες ροπές για το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία βάζω h= 0 στην $F^{h,l}(u;b)$</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ FGM copula

4.1Εισαγωγή

Τα μοντέλα που μελετήσαμε στο πρώτο μέρος βασίζονται στην υπόθεση ότι τα ύψη των απαιτήσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ αυτών δεν έχουν καμία εξάρτηση. Παρόλο ότι αυτή η λογική απλοποιεί τη μελέτη πολλών ποσοτήτων που πρέπει να αναλυθούν, αποδείχθηκε στην πράξη περιοριστική και ανεπαρκής σε αρκετές περιπτώσεις. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη να μελετήσουμε μοντέλα με σχέση εξάρτησης μεταξύ αυτών των δύο μεγεθών.
Εδώ λοιπόν θα ασχοληθούμε με μοντέλα διαχείρησης κινδύνου στα οποία υπάρχει δομή εξάρτησης των δύο αυτών ποσοτήτων που ορίζεται από την γενικευμένη Farlie-Gumbel-Morgnstern (FGM) σύζευξη (copula).

(Στη συνέχεια θα υιοθετήσουμε τους όρους FGM copula στο πνεύμα της εναρμόνισης με τη διεθνή βιβλιογραφία)

Θα αναλύσουμε τόσο το κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με την FGM copula, όπου θα διατυπώσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της γνωστής κατά Gerber-Shiu συνάρτησης ποινής, όσο και το μοντέλο σταθερού μερίσματος επίσης εφοδιασμένου με την FGM copula, διατυπώνοντας ολοκληροδιαφορική εξίσωση που θα λαμβάνει υπόψη τα όρια του μοντέλου και τέλος θα ασχοληθούμε με την ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την Gerber-Shiu συνάρτηση ποινής καθώς και την εξίσωση για την αναμενόμενη πληρωμή μερισμάτων μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με στρατηγική κατωφλίου εφοδιασμένου επίσης με FGM copula.

4.2 Το κλασσικό μοντέλο με FGM copula

Ορισμός 4.1

Ο αριθμός των απαιτήσεων $\underline{N} = \{N(t)\,; t \in R^+\}$ *είναι μία ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους* $\{W_j\ ; j \in N^+\}$ *που αποτελούν μία ακολουθία ανεξάρτητων θετικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ίδια με αυτή της W, δηλ. έχουν σ.π.π* $f_W(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ *α.σ.π.* $F_W(t) = 1-e^{-\lambda t}$ *και μετασχηματισμό Laplace* $f_W^{\,*}(s) = E\left[e^{-sW}\right] = \dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

Ορισμός 4.2

Το ύψος των απαιτήσεων $\{X_j\ ; j \in N^+\}$ *όπου* X_j *το ύψος της j απαίτησης επίσης αποτελούν μία ακολουθία ανεξάρτητων θετικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ίδια με αυτή της W, δηλ. έχουν σ.π.π* $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ *α.σ.π.* $F_X(t) = 1-e^{-\lambda t}$ *και μετασχηματισμό Laplace* $f_X^{\,*}(s) = E\left[e^{-sX}\right] = \dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

Ορισμός 4.3

Τα $\{(X_j, W_j)\ ;\ j \in N^+\}$ *αποτελούν μια ακολουθία τυχαίων διανυσμάτων που τα στοιχεία τους μπορεί και να είναι εξαρτημένα. Έχουν από κοινού σ.π.π* $f_{X,W}(x,t)$ $x\ ,\ t \in R^+$*, και όταν οι X, W είναι συνεχείς έχουμε L.T*

$$f^*_{X,W}(s_1, s_2) = E\left[e^{-s_1 X} e^{-s_2 X}\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 X} e^{-s_2 X} f_{X,W}(x,t)\,dx\,dt$$

Ορισμός 4.4

Το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων είναι $\underline{S} = \{S(t) > 0\ ; t \geq 0\}$

όπου

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Xj \quad \mu\varepsilon \quad \sum_{\alpha}^{b} Xj = 0 \qquad \text{αν } b<a$$

Ορισμός 4.5

Το συνολικό πλεόνασμα είναι

$$\underline{U} = \{U(t) > 0\ ; t \geq 0\}$$

όπου $U(t) = u - pt - S(t)$ *και u ,p,T από το κλασικό μοντέλο.*

Σημείωση1

Για να μην υπάρχει χρεοκοπία πρέπει να ισχύει:

$$E[pW_i - X_i] > 0 \quad i = 1,2,\ldots$$

Σημείωση2

Οι αυξήσεις του πλεονάσματος $\{(X_j - pW_j)\}$ $j = 1,2,\ldots$ *είναι ανεξάρτητες και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ένα εκθετικό άνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας* $\psi(u) \leq e^{-\rho u}$ *όπου ο συντελεστής προσαρμογής (αν υπάρχει) είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης* $E\left[e^{r(pW_1 - X_1)}\right] = 1$*, καθώς επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο είναι ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.*

4.2.1 H FGM copula

Αυτή η copula ανήκει σε μια οικογένεια συζεύξεων με γενικό τύπο

$$C(u,v)=uv+\theta h(u)g(u)$$

όπου h , g μη μηδενικές πραγματικές συναρτήσεις (Ubena-Flores 2004)

Εδώ θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση

$$h(u)=u^{\alpha}(1-u)^{b} \quad \text{και} \quad g(v)=v^{c}(1-v)^{d} \quad \text{με } a,b,c,d\geq 1$$

οπότε ο γενικός τύπος γίνεται

$$C(u,v)=uv+\theta u^{\alpha}(1-u)v^{c}(1-v)^{d} \qquad (1.2.1)$$

*που είναι μια επέκταση της **κλασικής FGM** copula*

$$C(u,v)=uv+\theta uv(1-u)(1-v) \quad \textbf{με } -1\leq\theta\leq 1$$

Η σ.π.π της (1.2.1) είναι $c(u,v)=1+\theta h'(u)g'(u)$

και η από κοινού α.σ.π.π είναι

ενώ η σ.π.π $f_{X,W}$ *του (X,W) είναι*

$$F_{X,W}(x,t)=C\big(F_X(x),F_W(t)=F_X(x)F_W(t)\big)+qF_X(x)^{a}(1-F_X(x))^{b}F_W(t)^{c}(1-F_w(t))^{d}$$
(1.2.a)

Σημείωση

Θεωρούμε a,b ≥ 1 $\quad c \in \{2,3,\ldots\}$ *και d > 1*

4.2.2 Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg με FGM

Για να αναλύσουμε τα διάφορα μέτρα χρεοκοπίας πρέπει πρώτα να βρούμε τις ιδιότητες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg υπό FGM και να εξετάσουμε τις ιδιότητές της ή ακριβέστερα να μπορέσουμε να καθορίσουμε το πλήθος των μιγαδικών ριζών της με πραγματικό μέρος μη αρνητικό. Αυτό θα μας βοηθήσει να βρούμε ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $m_\delta(u)$ όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Ορισμός 4.6

Ορίζουμε $\underset{\sim}{\tilde{U}} = \{\tilde{U}_k \ , \ k = 0,1,2,\ldots\}$ *τη διακριτού χρόνου διαδικασία του πλεονάσματος με* $\tilde{U}_0 = u$ *και* $\tilde{U}_k = U_{T_k}$ *να εκφράζει το πλεόνασμα αμέσως μετά την κ αποζημίωση δηλ.*

$$\tilde{U}_k = u + \sum_{j=1}^{k} \left(pW_j - X_j \right) \ , \quad k \in N^+$$

Ορισμός 4.7

Η διαδικασία $\underset{\sim}{\tilde{V}} = \left\{ e^{-\delta \sum_{j=1}^{k} W_j + sU_k} \ , \ s > 0 \ , \ k = 0,1,2,\ldots \right\}$ *είναι martingale αν και μόνο αν*

$$E\left(e^{-\delta W} e^{-s(pW - X)}\right) = 1 \qquad (1.2.m) ,$$

που αντιστοιχεί σε γενικευμένη Lundberg

Για το κλασικό μοντέλο με FGM έχουμε:

$$E\left(e^{-\delta W} e^{-s(pW - X)}\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx} e^{t(sp - \delta)} f_{X,W}(x,t) \, dx \, dt =$$

$$\overset{(1.2.a)}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sx} e^{t(sp-\delta)} f_X(x)\, f_W(t) dx\, dt +$$

$$\theta \int_0^\infty\int_0^\infty e^{t(sp-\delta)} e^{-sx} h'(F_X(x)) g'(F_W(t)) f_X(x) f_W(t) dx\, dt$$

Θέτοντας $g_Z(x) = f_X(x) - f_X(x) h'(F_X(x))$ με L.T $g_Z^*(s)$
και

$$k_W(t) = f_W(t) g'(F_W(t)) \qquad \text{με L.T} \quad k_W^*(s) = \int_0^\infty e^{-ts} f_W(t) g'(F_W(t)) dt$$

και αφού $g(v) = v^c (1-v)^d$ *με παραγοντική ολοκλήρωση παίρνουμε*

$$k_W^*(s) = \frac{s}{\lambda}\int_0^1 u^{(c+1)-1}(1-u)^{d+\frac{s}{\lambda}-1} du = \frac{\Gamma(c+1)\Gamma\left(d+\frac{s}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(c+1+d+\frac{s}{\lambda}\right)}\frac{s}{\lambda} = \frac{c!\lambda^c\, s}{\prod_{i=1}^{c+1}(s+\lambda_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{c+1}\frac{a_i}{s+\lambda_i} = \sum_{i=1}^{c+1} a_i \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i},$$

$$\lambda_i = \lambda(d+i-1)$$

$$a_i = \frac{c!\lambda^c(-1)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{c+1}(-\lambda_i+\lambda_j)}$$

οπότε $\quad k_W(t) = \sum_{i=1}^{c+1} a_i\, e^{-\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{c+1} a_i \lambda_i\, e^{-\lambda_i t} \quad , \quad t \geq 0$

Επίσης έχουμε

$$E\left(e^{-\delta W} e^{-s(pW-X)}\right) = f_X^*(s) f_W^*(\delta - sp) + \theta k_W^*(\delta - sp)\left\{f_X^*(s) - g_Z^*(s)\right\}$$

και επειδή $f_W^*(s) = E\left[e^{-sW}\right] = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

η (1.2.m) γίνεται

$$f_W^*(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-sp} + \theta\frac{c!\lambda^c(\delta-sp)}{\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\left\{f_X^*(s) - g_Z^*(s)\right\} = 1 \Rightarrow$$

$$(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)= f_X{}^*(s)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)+\theta c!\lambda^c(\delta-sp)(\lambda+\delta-sp)\left\{f_X{}^*(s)-g_Z{}^*(s)\right\}$$

Η παραπάνω σχέση, που είναι μια άλλη έκφραση της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το πλήθος των μιγαδικών ριζών της, με μη αρνητικό πραγματικό μέρος.

<u>*Πρόταση 4.2.1.s*</u>

Για δ > 0 και θ ≠ 0 η $E\left(e^{-\delta W}e^{-s(pW-X)}\right)=1$ (γεν. Lundberg) έχει ακριβώς c+2 μιγαδικές ρίζες με πραγματικό μέρος μη αρνητικό.

<u>*Απόδειξη*</u>

Θεωρούμε το ημικύκλιο που δημιουργείται στο μιγαδικό επίπεδο με διάμετρο τα σημεία A(0,-r) και B(0,r) <u>δεξιά του ψ'ψ</u> με $r\to\infty$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rouche θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\left| f_X^*(s)\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)+\theta c!\lambda^c(\delta-sp)\,\xi\,(\lambda+\delta-sp)\left\{f_X^*(s)-g_Z^*(s)\right\}\right| \le \left|(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)\right|$$

ή ισοδύναμα

$$\left| f_X{}^*(s)\frac{\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}+\frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)(\lambda+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\left\{f_X{}^*(s)-g_Z{}^*(s)\right\}\right| \le 1 \Rightarrow$$

$$\left| f_X{}^*(s)\frac{\lambda}{(\lambda+\delta-sp)}+\frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)}{\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\left\{f_X{}^*(s)-g_Z{}^*(s)\right\}\right| \le 1$$

και επειδή και τα δύο κλάσματα είναι λόγος πολυωνύμων με βαθμό παρανομαστή μεγαλύτερο από βαθμό αριθμητή έχουν όριο μηδέν, άρα η ανισότητα ισχύει αν s*≠ 0*

Αν s=0 τότε

$$\frac{\lambda}{(\lambda+\delta-sp)}>0 \quad \text{και} \quad \frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)}{\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}>0 \quad \text{με} \quad \frac{\lambda}{(\lambda+\delta)}+\frac{\theta c!\lambda^c\delta}{\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta)}<1$$

Οπότε

$$\left| f_X^{\,*}(s)\frac{\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}+\frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)(\lambda+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\left\{f_X^{\,*}(s)-g_Z^{\,*}(s)\right\}\right| \le$$

$$\left| f_X^{\,*}(s)\frac{\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\right|+\left|\frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)(\lambda+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\left\{f_X^{\,*}(s)-g_Z^{\,*}(s)\right\}\right| =$$

$$\left| f_X^{\,*}(s)\right|\left|\frac{\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\right|+\left|\frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)(\lambda+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\right|\left|f_X^{\,*}(s)-g_Z^{\,*}(s)\right| \le$$

$$\left|\frac{\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\right|+\left|\frac{\theta c!\lambda^c(\delta-sp)(\lambda+\delta-sp)}{(\lambda+\delta-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta-sp)}\right| \le \frac{\lambda}{\lambda+\delta}+\frac{\theta\delta c!\lambda^c}{\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta)} =$$

$$\frac{\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta)+\theta\delta c!\lambda(\lambda+\delta)}{(\lambda+\delta)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i+\delta)}<1$$

Πρόταση 4.2.2.p

Για δ = 0 και θ ≠ 0 η $E\left(e^{-\delta W}e^{-s(pW-X)}\right)=1$ (γεν. Lundberg) έχει ακριβώς c+1 μιγαδικές ρίζες με πραγματικό μέρος θετικό και την μηδενική.

Απόδειξη

Έστω D ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\left|\frac{k-s}{k}\right|=1$ *, που είναι κύκλος με κέντρο κ και ακτίνα κ.*

Αν πάρουμε δ=0 και $k\to\infty$ *έχουμε:*

$$\left| f_X^{\,*}(s)\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i-sp)+\theta c!\lambda^c(-sp)\left\{f_X^{\,*}(s)-g_Z^{\,*}(s)\right\}\right| \le \left|(\lambda-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i-sp)\right|$$

όπου οι συναρτήσεις μ(χ) = $f_X^{\,*}(s)\lambda\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i-sp)+\theta c!\lambda^c(-sp)\left\{f_X^{\,*}(s)-g_Z^{\,*}(s)\right\}$

και γ(χ)= $(\lambda-sp)\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i-sp)$ είναι συνεχείς στο D.

Επίσης αφού

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(1-E\left(e^{-k(1-z)(X-pW)}\right)\right)|_{z=1} > 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(1-f^*{}_X(k-kz)\frac{\lambda}{\lambda-(k-kz)p}+\frac{\theta c!\lambda^c(-(k-kz)p)}{\prod_{i=1}^{c+1}(\lambda_i-(k-kz)p)}\left\{f^*{}_X(k-kz)-f^*{}_Z(k-kz)\right\}\right)|_{z=1} > 0$$

Άρα από θεώρημα Klimenok-2001 οι ρίζες της γενικευμένης Lundberg μέσα στο D είναι c+1 , ενώ έχουμε και την τετριμμένη ρίζα δηλ. το μηδέν.

Σημείωση
Αν d = 1 , δ > 0 , θ $\neq 0$ η γενικευμένη Lundberg έχει ακριβώς c+1 ρίζες με πραγματικό μέρος θετικό.

Αν δ=0 και θ $\neq 0$ έχει c ρίζες με πραγματικό μέρος θετικό και την μηδενική**.**

4.3 Μετασχηματισμός LAPLACE για την $m_b(u)$

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το μετασχηματισμό LAPLACE της κατά Gerber-Shiu συνάρτησης ποινής

$$m_b(u)=E\left[e^{-\delta T}w\left(U(T^-),|U(T)|\right)I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]$$

στο κλασσικό μοντέλο με FGM copula, και επειδή θα χρειαστεί και εδώ ο τελεστής Dickson-Hipp (3.1.1.1 α-μέρους) επαναδιατυπώνουμε τον ορισμό και τις ιδιότητές του.

Έχουμε ορίσει $T_s f(x)=\int_x^\infty e^{-s(y-x)}f(y)dy$ με τις *ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $T_s f(0)=\int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy=f^*(y)$

(ii) $T_sT_r f(x)=T_rT_s f(x)=\frac{T_s f(x)-T_r f(x)}{r-s}=\int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy=f^*(y)\,,s\neq r$

(iii) $T_{rk}\ldots T_{r2}T_{r1}f(x)=(-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{T_{ri}f(x)}{\tau'_k(r_i)}$ *για διακεκριμένους $r_1, r_2, \ldots r_k$*

μιγαδικούς όπου $\tau_k(r)=\prod_{i=1}^{k}(r-r_i)$ *και αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace*

$$T_sT_{rk}\ldots T_{r2}T_{r1}f(0)=(-1)^{k-1}\left(\frac{f^*(s)}{\tau_k(s)}-\sum_{i=1}^{k}\frac{f^*(x)}{(s-r_i)\tau'_k(r_i)}\right)$$

Παίρνοντας λοιπόν τώρα υπόψη τη στιγμή και το ύψος της πρώτης απαίτησης έχουμε:

$$m_b(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} m_b(u + pt - x) f_{X,W}(x,t) dxdt$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} m_b(u + pt - x) f_X(x) f_W(t) dxdt +$$
$$+ \theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} m_b(u + pt - x) h'(F_X(x)) g'(F_W(t)) f_X(x) f_W(t) dxdt$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} m_b(u + pt - x) f_X(x) f_W(t) dxdt +$$
$$+ \theta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} m_b(u + pt - x)(g'(F_W(t)) f_X(x) f_W(t) - g'(F_W(t)) g_z(x) f_W(t)) dxdt$$

όπου $h(u) = u^\alpha (1-u)^b$ *και* $g(u) = u^c (1-u)^d$ *με* $a,b,c,d \geq 1$

Επειδή τώρα

$$g_Z(x) = f_X(x) - f_X(x) h'(F_X(x)) \text{ και } k_W(t) = f_W(t) g'(F_W(t))$$

<u>η $m_b(u)$ γίνεται</u>

$$m_b(u) = \int_0^\infty E\{m_\delta(u + pt - X)\} e^{-\delta t} f_W(t) dt + \theta \int_0^\infty E\{m_\delta(u + pt - X)\} e^{-\delta t} k_W(t) dt -$$
$$- \theta \int_0^\infty E\{m_\delta(u + pt - Z)\} e^{-\delta t} k_W(t) dt$$

και θέτοντας y=u+pt

$$pm_b(u) = \lambda \int_u^\infty E\{m_\delta(y - X)\} e^{-y\frac{\delta+\lambda}{p}} e^{u\frac{\delta+\lambda}{p}} dy + \theta \sum_{i=1}^{c+1} \int_u^\infty a_i \, E\{m_\delta(y - X)\} e^{-y\frac{\delta+\lambda_i}{p}} e^{u\frac{\delta+\lambda_i}{p}} dy -$$
$$- \theta \sum_{i=1}^{c+1} \int_u^\infty a_i \, E\{m_\delta(y - Z)\} e^{-y\frac{\delta+\lambda_i}{p}} e^{u\frac{\delta+\lambda_i}{p}} dy$$

*Η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της πρώτης ιδιότητας του τελεστή **Dickson-Hipp** γίνεται:*

$$pm_b(u)=\lambda T_{\frac{\delta+\lambda}{p}}\mu_1(u)+\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i T_{\frac{\delta+\lambda_i}{p}}\mu_1(u)-\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i T_{\frac{\delta+\lambda_i}{p}}\mu_2(u) \qquad (1.2.3.m)$$

όπου

$$\mu_1(u)=E\{m_b(u-X)\}=\int_0^u m_b(u-x)f_x(x)+w_1(u)$$

$$\mu_2(u)=E\{m_b(u-Z)\}=\int_0^u m_b(u-x)g_Z(x)+w_2(u)$$

$$w_1(u)=\int_u^\infty w(u,x-u)f_x(x)dx$$

$$w_2(u)=\int_0^u w(x-u)g_Z(x)dx$$

και παίρνοντας τον L.T. του (1.2.3.m) έχουμε:

$$pm^*{}_b(s)=\lambda\left\{\frac{\mu_1^*(s)-\mu^*{}_1\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)}{\frac{\delta+\lambda}{c}-s}\right\}+\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left\{\frac{\mu_1^*(s)-\mu^*{}_1\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}\right)}{\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s}\right\}-\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i\,\frac{\mu_2^*(s)-\mu^*{}_2\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}\right)}{\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s}$$

όπου

$$\mu_1^*(s)=m^*{}_b(s)f^*{}_X(s)+w_1^*(s)$$
$$\mu_2^*(s)=m^*{}_b(s)g^*{}_Z(s)+w_2^*(s)$$

και έτσι τελικά έχουμε:

$$m_b^*(s)=\frac{w_1^*(s)\{f^*{}_W(\delta-sp)+\theta k^*{}_W(\delta-sp)\}-\theta w_2^*(s)k^*{}_W(\delta-sp)+v^*(s)}{1-f_X^*(s)f^*{}_W(\delta-sp)-\theta f_X^*(s)k^*{}_W(\delta-sp)+\theta k^*{}_W(\delta-sp)g_Z^*(s)} \qquad (1.2.3.m.b)$$

με

$$v^*(s)=-\lambda\,\frac{\mu^*{}_1\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)}{\delta+\lambda-sp}-\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i\,\frac{\mu^*{}_1\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}\right)}{\delta+\lambda_i-sp}+\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i\,\frac{\mu^*{}_2\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}\right)}{\delta+\lambda_i-sp}$$

Πρόταση 4.3.s.

Στο κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με FGM copula, ο L.T. της κατά Gerber-Shiu συνάρτησης ποινής m_b δίνεται από τον τύπο

$$m_b^*(s) = \frac{\beta_{1,\delta}^*(s) + \beta_{2,\delta}^*(s)}{h_{1,\delta}^*(s) - h_{2,\delta}^*(s)} \qquad (4.3.p)$$

με

$$h_{1,\delta}^*(s) = \left(\frac{\delta + \lambda}{p} - s \right) \prod_{i=1}^{c+1} \left(\frac{\delta + \lambda_i}{p} - s \right)$$

$$h_{2,\delta}^*(s) = h_{1,\delta}^*(s) \left\{ f_X^*(s) f^*{}_W(\delta - sp) + \theta f_X^*(s) k^*{}_W(\delta - sp) - \theta g_Z^*(s) k^*{}_W(\delta - sp) \right\}$$

$$\beta_{1,\delta}^*(s) = h_{1,\delta}^*(s) \left\{ w_1^*(s) \left(f^*{}_W(\delta - sp) + \theta k^*{}_W(\delta - sp) \right) - \theta w_2^*(s) k^*{}_W(\delta - sp) \right\}$$

$$\beta_{2,\delta}^*(s) = -\sum_{j=1}^{c+2} \beta_{1,\delta}^*(\rho_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{c+2} \left(\frac{s - \rho_k}{\rho_j - \rho_k} \right) = -\tau_{c+2}(s) \sum_{j=1}^{c+2} \frac{\beta_{1,\delta}^*(\rho_j)}{(s - \rho_j) \tau'_{c+2}(\rho_j)}$$

$$\tau_{c+2}(s) = \prod_{j=1}^{c+2} (s - \rho_j) \qquad \tau'_{c+2}(\rho_j) = \prod_{k=1, k \neq j}^{c+2} (\rho_j - \rho_k)$$

<u>Απόδειξη</u>
Αφού

$$\beta_{2,\delta}{}^{*}(s)=h_{1,\delta}{}^{*}(s)v^{*}(s)=$$

$$=\left(\frac{\delta+\lambda}{p}-s\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)v^{*}(s)$$

$$=-\frac{\lambda}{p}\mu^{*}{}_{1}\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)-\theta\left(\frac{\delta+\lambda-sp}{p}\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i-sp}{p}\right)\sum_{i=1}^{c+1}\alpha_{\iota}\left(\frac{\mu^{*}{}_{1}\left(\frac{\delta+\lambda_{\iota}}{p}\right)}{\delta+\lambda_i-sp}\right)+$$

$$+\theta\left(\frac{\delta+\lambda-sp}{p}\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i-sp}{p}\right)\sum_{i=1}^{c+1}\alpha_{\iota}\left(\frac{\mu^{*}{}_{2}\left(\frac{\delta+\lambda_{\iota}}{p}\right)}{\delta+\lambda_i-sp}\right)$$

$$=-\frac{\lambda}{p}\mu^{*}{}_{1}\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)-\theta\left(\frac{\delta+\lambda-sp}{p}\right)\sum_{i=1}^{c+1}\alpha_{\iota}\left(\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i-sp}{p}\right)\right)\mu^{*}{}_{1}\left(\frac{\delta+\lambda_{\iota}}{p}\right)+$$

$$+\theta\left(\frac{\delta+\lambda-sp}{p}\right)\sum_{i=1}^{c+1}\alpha_{\iota}\left(\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i-sp}{p}\right)\right)\mu^{*}{}_{2}\left(\frac{\delta+\lambda_{\iota}}{p}\right)$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω $\beta_{2,\delta}{}^{*}(s)$ στην (1.2.3.m.b), αφού πρώτα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή με την ποσότητα

$$\left(\frac{\delta+\lambda}{p}-s\right)\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_j}{p}-s\right)$$

έχουμε το ζητούμενο L.T. δηλ. $m_b{}^{*}(s)=\dfrac{\beta_{1,\delta}{}^{*}(s)+\beta_{2,\delta}{}^{*}(s)}{h_{1,\delta}{}^{*}(s)-h_{2,\delta}{}^{*}(s)}$

4.4 Ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $m_b(u)$

Στο κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με FGM copula, για να βρούμε ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την m_b , θα χρειαστεί να στηριχτούμε στο παρακάτω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ

Στο κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με FGM copula, ο L.T. της κατά Gerber-Shiu συνάρτησης ποινής m_b ικανοποιεί τη σχέση:

$$m^*{}_b(s)=\frac{T_sT_{r_1}\ldots T_{r_{c+2}}\beta_{1,\delta}(0)}{1-T_sT_{r_1}\ldots T_{r_{c+2}}h_{2,\delta}(0)}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας της ιδιότητα (iii) του τελεστή Dickson-Hipp που έχουμε αναφέρει στην 1.2.3 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\beta_{1,\delta}{}^*(s)+\beta_{2,\delta}{}^*(s)&=\beta_{1,\delta}{}^*(s)-\tau_{c+2}(s)\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\beta_{1,\delta}{}^*(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}\\&=\tau_{c+2}(s)\left\{\frac{\beta_{1,\delta}{}^*(s)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\beta_{1,\delta}{}^*(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}\right\}\\&=\tau_{c+2}(s)(-1)^{c+2}T_sT_{r_1}\ldots T_{r_{c+2}}\beta_{1,\delta}(0)\end{aligned}$$

και

$$h_{1,\delta}{}^*(s)=h_{1,\delta}{}^*(0)\prod_{k=1}^{c+2}\left(\frac{s-\rho_k}{-\rho_k}\right)+s\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{1,\delta}{}^*(\rho_j)}{\rho_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{c+2}\left(\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}\right)\Rightarrow$$

$$h_{1,\delta}^{*}(s)-h_{2,\delta}^{*}(s)=h_{1,\delta}^{*}(0)\frac{\tau_{c+2}(s)}{\prod_{k=1}^{c+2}(-\rho_k)}+s\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{2,\delta}^{*}(\rho_j)\tau_{c+2}(s)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-h_{2,\delta}^{*}(s)$$

$$=\tau_{c+2}(s)\left\{\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\prod_{k=1}^{c+2}(-\rho_k)}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{sh_{2,\delta}^{*}(\rho_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\frac{h_{2,\delta}^{*}(s)}{\tau_{c+2}(s)}\right\}$$

$$=\tau_{c+2}(s)\left\{\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\prod_{k=1}^{c+2}(-\rho_k)}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{(s-\rho_j+\rho_j)h_{2,\delta}^{*}(\rho_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\frac{h_{2,\delta}^{*}(s)}{\tau_{c+2}(s)}\right\}$$

$$=\tau_{c+2}(s)\left\{\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\prod_{k=1}^{c+2}(-\rho_k)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{1,\delta}^{*}(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{2,\delta}^{*}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\frac{h_{2,\delta}^{*}(s)}{\tau_{c+2}(s)}\right\}$$

$$=\tau_{c+2}(s)\left\{\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{1,\delta}^{*}(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-(-1)^{c+2}T_sT_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{C+2}}h_{2,\delta}(0)\right\}$$

Αλλά

$$\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{1,\delta}^{*}(\rho_j)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}=\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}+\sum_{i=0}^{c+2}\sigma_i\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\rho_j^{\,c+1-i}}{\tau'_{c+2}(\rho_j)}$$

$$=\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}+\sigma_0\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\rho_j^{\,c+1}}{\tau'_{c+2}(\rho_j)}+\sum_{i=0}^{c+1}\sigma_i\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\rho_j^{\,c+1-i}}{\tau'_{c+2}(\rho_j)}+\sigma_{c+2}\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\rho_j^{\,-1}}{\tau'_{c+2}(\rho_j)}$$

$$=\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}+\sigma_0+\sigma_{c+2}\frac{(-1)^{c+1}}{\prod_{j=1}^{c+2}\rho_j}=\frac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}+(-1)^{c+2}+\left(\frac{\delta+\lambda}{p}\right)\prod_{j=1}^{c+2}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}\right)\frac{(-1)^{c+1}}{\prod_{j=1}^{c+2}\rho_j}=(-1)^{c+2}$$

Οπότε τελικά καταλήξαμε στις σχέσεις:

$$\begin{cases} h_{1,\delta}^{*}(s)-h_{2,\delta}^{*}(s)=(-1)^{c+2} \\ h_{1,\delta}^{*}(s)-h_{2,\delta}^{*}(s)=\tau_{c+2}(s)\left\{\dfrac{h_{1,\delta}^{*}(0)}{\tau_{c+2}(0)}-\displaystyle\sum_{j=1}^{c+2}\frac{h_{1,\delta}^{*}(\rho_j)}{(-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-(-1)^{c+2}T_sT_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{C+2}}h_{2,\delta}(0)\right\} \end{cases}$$

και αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα έχουμε

$$h_{1,\delta}^{*}(s)-h_{2,\delta}^{*}(s)=\tau_{c+2}(s)(-1)^{c+2}(1-T_sT_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{c+2}}h_{2,\delta}(0))$$

Θυμίζουμε επίσης ότι

$$\beta_{1,\delta}^{*}(s)+\beta_{2,\delta}^{*}(s)\;=\tau_{c+2}(s)(-1)^{c+2}T_sT_{r_1}\ldots T_{r_{c+2}}\beta_{1,\delta}(0)$$

Και αν τις αντικαταστήσουμε στο (1.2.3.p) έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 4.4.p

Στο κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με FGM copula, η κατά Gerber-Shiu συνάρτησης ποινής m_b επαληθεύει την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$m_b(u)=\int_0^u m_b(u-y)\mu_\delta(y)dy+\eta_\delta(u)=\frac{1}{1+k_\delta}\int_0^u m_b(u-y)\theta_\delta(y)dy+\frac{1}{1+k_\delta}G_\delta(u)$$

όπου

$$\mu_\delta(y)=T_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{c+2}}h_{2,\delta}(u)$$
$$\eta_\delta(u)=T_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{c+2}}\beta_{1,\delta}(u)$$

και

$$\frac{1}{1+k_\delta}=1-\frac{\delta}{p}\frac{\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}\right)}{\prod_{j=1}^{c+2}(\rho_j)}=T_0T_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{c+2}}h_{2,\delta}(0)<1$$

$$G_\delta(u)=(1+k_\delta)\eta_\delta(u)\qquad \theta_\delta(y)=(1+k_\delta)\mu_\delta(y)$$

Απόδειξη

(i) Η ζητούμενη ανανεωτική εξίσωση προκύπτει αντιστρέφοντας τον L.T λήμματος στην 4.4

(ii) Για να είναι ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση πρέπει επιπλέον να αποδειχθεί ότι $\int_0^\infty \mu_\delta(y)dy<1$

(η απόδειξη στηρίζεται στην ιδιότητα (iii) του τελεστή Dickson-Hipp και στο λήμμα 1 σελ. 395 Li and Garrido (2004))

4.5 Μετασχηματισμός Laplace για τον χρόνο της χρεοκοπίας

Θα θεωρήσουμε την ιδική περίπτωση της κατά Gerber-Shiu συνάρτηση ποινής με $w(x_1,x_2)=1$ για όλα τα μη αρνητικά x,y και θα αποδίξουμε ότι ο L.T. του χρόνου της χρεοκοπίας , φ_τ , επαληθεύει μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που μπορεί να εκφρασθεί σε μορφή σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Πρόταση 4.5.1.s

Στο κλασικό μοντέλο εφοδιασμένο με FGM copula, ο L.T. του χρόνου χρεοκοπίας φ_τ κατά ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_\tau(u)=\frac{1}{1+k_\delta}\int_0^u \phi_\tau(u-y)\theta_\delta(y)dy+\frac{1}{1+k_\delta}\int_u^\infty \theta_\delta(y)dy$$

που έχει μορφή σύνθετης γεωμετρικής

$$\phi_\tau(u)=\frac{k_\delta}{1+k_\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+k_\delta}\right)^j \overline{V}_\delta^{*j}(u) \quad , \quad u\geq 0$$

όπου $\overline{V}_\delta^{*j}(u)$ *η κατανομή της η-οστής συνέλιξης της σ.π.π. της* ϑ_δ

Απόδειξη

Αν θέσουμε w(x ,y)=1 τότε στην $m_b(u)$ *της πρότασης (1.2.4) τότε τα* k_δ , $\theta_\delta(y)$ *δεν αλλάζουν ενώ η* $m_b(u) = \varphi_\tau(u)$

Για να βρούμε τον L.T. της $\eta_\delta(u)$ *έχουμε*

$$s\eta^*{}_\delta(s)=sT_sT_{\rho_1}...T_{\rho_{c+2}}\beta_{1,\delta}(0)=s(-1)^{c+2}\left\{\frac{\beta^*{}_{1,\delta}(s)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\beta^*{}_{1,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}\right\}$$

με $$\beta^*{}_{1,\delta}(s)=\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)-\eta^*{}_{2,\delta}(s)}{s}$$

άρα

$$s\eta^*{}_\delta(s)=(-1)^{c+2}\left\{\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)-\eta^*{}_{2,\delta}(s)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)-\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}\right\}=$$

$$=(-1)^{c+2}\left\{\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)}{\tau_{c+2}(s)}-\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(s)}{\tau_{c+2}(s)}-s\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{(s-\rho_j)\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}+s\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}\right\}$$

$$=(-1)^{c+2}\left\{\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)}{\tau_{c+2}(s)}-\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(s)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{(s-\rho_j)\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{\rho_j\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}\right\}$$

$$+(-1)^{c+2}\left\{\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\tau'{}_{c+2}(\rho_j)}\right\}$$

$$=(-1)^{c+2}\left\{\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(s)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}\right)+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}\right\}$$

$$=(-1)^{c+2}\left\{\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(\rho_j)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}\right\}-T_sT_{\rho_1}\dots T_{\rho_{c+2}}\eta_{2,\delta}(0)$$

και λόγω της (iii) του τελεστή Dickson-Hipp έχουμε:

$$s\eta^*{}_{\delta}(s)=(-1)^{c+2}\left\{\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)}{\tau_{c+2}(s)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}-\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{c+2}T_0T_{\rho_1}\dots T_{\rho_{c+2}}\eta_{2,\delta}(0)-\frac{\eta^*{}_{2,\delta}(0)}{\tau_{c+2}(0)}\right\}-T_sT_{\rho_1}\dots T_{\rho_{c+2}}\eta_{2,\delta}(0)$$

και επειδή από λήμμα Li-Garrido(2004)

$$\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{(s-\rho_j)\tau'_{c+2}(\rho_j)}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{\frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-\rho_j\right)}{\rho_j\tau'_{c+2}(\rho_j)}=\frac{\sigma_{c+1}}{\tau_{c+2}(0)}+\frac{\sigma'_{c+1}}{\tau_{c+2}(s)}$$

παίρνουμε

$$s\eta^*{}_{\delta}(s)=T_0T_{\rho_1}\dots T_{\rho_{c+2}}\eta_{2,\delta}(0)-T_sT_{\rho_1}\dots T_{\rho_{c+2}}\eta_{2,\delta}(0)=\frac{1}{1+k_\delta}-\mu^*{}_{\delta}(s)$$

Όμως επειδή

$$G^*{}_{\delta}(s)=\frac{1}{s}(1+k_\delta)h^*{}_{\delta}(s)=\frac{1}{s}(1+k_\delta)\left(\frac{1}{(1+k_\delta)}-\mu^*{}_{\delta}(s)\right)=\frac{1}{s}(1-\theta^*{}_{\delta}(s))$$

και

$$m^*_\delta(s) = \frac{G^*_\delta(s)}{(1+k_\delta) - \theta^*_\delta(s)}$$

και άρα τελικά

$$\phi^*_\tau(s) = \frac{\dfrac{1-\theta^*_\delta(s)}{s}}{(1+k_\delta) - \theta^*_\delta(s)}$$

η οποία με αντιστροφή του L.T. δίνει το ζητούμενο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ ΕΦΟΔΙΑΣΜΕΝΟΥ ΜΕ FGM copula

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε το κλασικό μοντέλο με στρατηγική σταθερού μερίσματος εφοδιασμένο με FGM copula.
Θα αναζητήσουμε ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που θα είναι μια μορφή της Gerber-Shiu συνάρτηση ποινής του κλασικού μοντέλου, σε συνάρτηση με ένα γραμμικό συνδυασμό πεπερασμένου πλήθους μερικών λύσεων της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης.

5.2 Το μοντέλο

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο το πλεόνασμα είναι $\underline{U}=\{U(t)>0\,; t \geq 0\}$ *όπου* $U(t)=u+pt-S(t)$ *με U(0)=u με u,p,T από το κλασικό μοντέλο, το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων είναι* $\underline{S}=\{S(t)>0\,; t\geq 0\}$

όπου $S(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} Xj$ *με* $\sum_{\alpha}^{b} Xj=0$ *αν b<a , ο αριθμός των απαιτήσεων* $\underline{N}=\{N(t)\ ;\ t\in R^{+}\}$ *είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και οι ενδιάμεσοι χρόνοι* $\{W_j\ ;\ j\in N^{+}\}$ *αποτελούν μία ακολουθία ανεξάρτητων θετικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ίδια με αυτή της W, δηλ. έχουν σ.π.π* $f_W(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ *α.σ.π.* $F_W(t)=1-e^{-\lambda t}$ *και μετασχηματισμό Laplace* $f_W^{\,*}(s)=E\left[e^{-sW}\right]=\dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

Το ύψος των απαιτήσεων $\{X_j\,; j\in N^{+}\}$ *όπου* X_j *το ύψος της j απαίτησης επίσης αποτελούν μία ακολουθία ανεξάρτητων θετικών τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ίδια με αυτή της W.*

Τα $\{(X_j, W_j)\ ;\ j\in N^{+}\}$ αποτελούν μια ακολουθία τυχαίων διανυσμάτων που τα στοιχεία τους μπορεί και να είναι εξαρτημένα. Έχουν από κοινού σ.π.π $f_{X,W}(x,t)$ $x\ ,\ t\in R^{+}$, και όταν οι X , W είναι συνεχείς έχουμε L.T

$$f_{X,W}^{*}(s_1,s_2)=E\left[e^{-s_1X}e^{-s_2X}\right]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s_1X}e^{-s_2X}\, f_{X,W}(x,t\ )\,dx\,dt$$

με την από κοινού κατανομή των (X,W) να βασίζεται στην FGM copula όπως έχει περιγραφεί στην 4.2.1. και οι $k_w(t)$ και $k^*{}_w(t)$ να ορίζονται στην 4.2.2.

5.3 Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση ποινής $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ υπό στρατηγική σταθερού μερίσματος

Αν

$$\underline{U_{\tilde{b}}(u)} = \{U_{\tilde{b}}(t)\ t \geq 0\}$$

η διαδικασία πλεονάσματος υπό στρατηγική σταθερού μερίσματος τότε

$$dU_{\tilde{b}}(t) = \begin{cases} pdt - dS(t) & U_{\tilde{b}}(t) \leq \tilde{b} \\ -dS(t) & U_{\tilde{b}}(t) = \tilde{b} \end{cases}$$

και

$$T_{\tilde{b}} = \inf\{t > 0\ ,\ U_{\tilde{b}}(t) < 0\}$$

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u) = E\left[e^{-\delta T_{\tilde{b}}} w\left(U_{\tilde{b}}\left(T_{\tilde{b}}^{-}\right), \left|U_{\tilde{b}}\left(T_{\tilde{b}}\right)\right|\right) I\left(T_{\tilde{b}} < \infty\right) | \, U_{\tilde{b}}(0) = u\right]$$

και όταν w(x,y)=1

$$\phi_{T_{\tilde{b}}}(u) = E\left[e^{-\delta T_{\tilde{b}}} I\left(T_{\tilde{b}} < \infty\right) | \, U_{\tilde{b}}(0) = u\right]$$

είναι ο L.T. του χρόνου χρεοκοπίας $T_{\tilde{b}}$ με μεταβλητή το δ.

Η εύρεση ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης για την $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ εστιάζει στη χρονική στιγμή της πρώτης αίτησης για αποζημίωση W_1=t και το αντίστοιχο απαιτούμενο ποσό X_1=x και εξετάζει δύο πιθανά σενάρια. Στο πρώτο η πρώτη αποζημίωση συμβαίνει πριν το πλεόνασμα φτάσει στο $\tilde{b}$ οπότε δεν πληρώνεται κανένα μέρισμα ή στο δεύτερο η αποζημίωση να αιτηθεί αφού το πλεόνασμα έχει περάσει το $\tilde{b}$ και τότε τα μερίσματα είναι κατανεμημένα μεταξύ του χρόνου $\frac{\tilde{b}-u}{p}$ στον οποίο το πλεόνασμα *έφθασε στο* $\tilde{b}$ *και της χρονικής στιγμής t της πρώτης αποζημίωσης. Στο πρώτο σενάριο μπορεί το ύψος της απαίτησης να είναι μεγαλύτερο του u+pt και να έχουμε χρεοκοπία ή όχι, ενώ αντίστοιχα στο δύτρο σενάριο η πρώτη απαίτηση είναι μεγαλύτερη του* $\tilde{b}$ *και έχουμε χρεοκοπία ή όχι. Σημειώνεται ότι αν δεν συμβεί χρεοκοπία η διαδικασία πλεονάσματος αναδιαμορφώνεται με βάση τα καινούργια δεδομένα.*

Ετσι η $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ *μπορεί να εκφρασθεί ώς:*

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}}\int_0^{u+pt}e^{-\delta t}m_{\delta,\tilde{b}}(u+pt-x)f_{X,W}(x,t)\,dx\,dt+\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty}\int_0^{\tilde{b}}e^{-\delta t}m_{\delta,\tilde{b}}(\tilde{b}-x)f_{X,W}(x,t)\,dx\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}}\int_{u+pt}^{\infty}e^{-\delta t}w(u+pt,x-u-pt)f_{X,W}(x,t)\,dx\,dt+\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty}\int_{\tilde{b}}^{\infty}e^{-\delta t}(\tilde{b},x-\tilde{b})f_{X,W}(x,t)\,dx\,dt$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$f_{X,W}(x,t)=f_X(x)f_W(t)+\theta k_X(x)k_W(t)$$

έχουμε

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\lambda\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}}\int_0^{u+pt}e^{-\delta t}m_{\delta,\tilde{b}}(u+pt-x)f_X(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+\lambda\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty}\int_0^{\tilde{b}}e^{-\delta t}m_{\delta,\tilde{b}}(\tilde{b}-x)f_X(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$\lambda\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}}\int_{u+pt}^{\infty}e^{-\delta t}w(u+pt,x-u-pt)f_X(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+\lambda\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty}\int_{\tilde{b}}^{\infty}e^{-\delta t}(\tilde{b},x-\tilde{b})f_X(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$\theta\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}}\int_0^{u+pt}e^{-\delta t}m_{\delta,\tilde{b}}(u+pt-x)k_X(x)k_W(t)\,dx\,dt+\theta\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty}\int_0^{\tilde{b}}e^{-\delta t}m_{\delta,\tilde{b}}(\tilde{b}-x)k_X(x)k_W(t)\,dx\,dt+$$

$$\theta\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}}\int_{u+pt}^{\infty}e^{-\delta t}w(u+pt,x-u-pt)k_X(x)k_W(t)\,dx\,dt+\theta\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty}\int_{\tilde{b}}^{\infty}e^{-\delta t}(\tilde{b},x-\tilde{b})k_X(x)k_W(t)\,dx\,dt$$

και θέτοντας

$$w_1(z)=\int_z^{\infty}w(z,x-z)f_X(x)\,dx$$

$$w_2(z)=\int_z^{\infty}w(z,x-z)k_X(x)\,dx$$

$$\sigma_1(z)=\int_0^z m_{\delta,\tilde{b}}(z-x)f_X(x)\,dx+w_1(z)$$

$$\sigma_2(z)=\int_0^z m_{\delta,\tilde{b}}(z-x)k_X(x)\,dx+w_2(z)$$

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}} e^{-\delta t}\lambda e^{-\lambda t}\sigma_1(u+pt)dt+\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty} e^{-\delta t}\lambda e^{-\lambda t}\sigma_1(\tilde{b})dt+\theta\int_0^{\frac{\tilde{b}-u}{p}} e^{-\delta t}k_W(t)\sigma_2(u+pt)dt+\lambda\int_{\frac{\tilde{b}-u}{p}}^{\infty} e^{-\delta t}k_W(t)\sigma_2(\tilde{b})dt$$

όπου αν θέσουμε s=u+pt και τις συναρτήσεις της 5.2.2

$$p\,m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\lambda\int_u^{\tilde{b}} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s)ds+\lambda\int_{\tilde{b}}^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(\tilde{b})ds+\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i\int_u^{\tilde{b}} e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2(s)ds+\theta\sum_{i=1}^{c+1}a_i\int_{\tilde{b}}^{\infty} e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2(\tilde{b})ds$$

ή συντομότερα αν

$$s\wedge\tilde{b}=\min(s_1;s_2)$$

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\frac{\lambda}{p}\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds+\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds \tag{5.3.1}$$

<u>Θεώρημα 5.3.2</u>

Η συνάρτηση ποινής $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ υπό στρατηγική σταθερού μερίσματος ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}I-D\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{p}I-D\right)m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\frac{\lambda}{p}\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}I-D\right)\sigma_1(u)+\frac{\theta c!\lambda^c}{p^c}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}I-D\right)\left(\frac{\delta}{p}I-D\right)\sigma_2(u)$$

με $0\le u\le\tilde{b}$ και I , D κατάλληλους ταυτοτικούς και διαφορικούς τελεστές αντίστοιχα.

<u>Απόδειξη</u>

Παραγωγίζοντας την (5.3.1) έχουμε

$$m'_{\delta,\tilde{b}}(u)=-\frac{\lambda}{p}\sigma_1(u)+\frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds+\frac{\theta}{p}c!\lambda^c(-1)^{c-1}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds$$

για $0\le u\le\tilde{b}$ με δεδομένο $\sum_{i=1}^{c+1}a_i=0$ (5.3.1.p)

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την (5.3.1) με $\frac{\lambda+\delta}{p}$ και αφαιρώντας την κατά μέλη με την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\frac{\lambda}{p}\sigma_1(u)+\frac{\theta}{p}g_{\delta,\tilde{b}}(u)$$

όπου

$$g_{\delta,\tilde{b}}(u)=c!\,\lambda^c(-1)^{c-1}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}\left(\frac{\lambda-\lambda_i}{p}\right)\int_u^{\infty}e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds \tag{5.3.2}$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση και με τη βοήθεια του Λήμματος 1 για l=0 έχουμε

$$g'_{\delta,\tilde{b}}(u)=(-1)^{c-1}\frac{c!\lambda^c}{p}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}(\lambda-\lambda_i)\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)\int_u^{\infty}e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds \tag{5.3.3}$$

αφού εφαρμόσαμε τον τελεστή

$$\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$$

στο $\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ και άρα καταλήγουμε στο

$$\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)g_{\delta,\tilde{b}}(u)=(-1)^{c-1}\frac{c!\,\lambda^c}{p^2}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}(\lambda-\lambda_i)\,(\lambda_j-\lambda_i)$$
$$\times\int_u^{\infty}e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε τον τελεστή $\prod_{j=1}^{c-2}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$ και στα δύο μέρη της (2.2.3) για l = 0,…,c-3 παίρνουμε

$$\prod_{j=1}^{c-2}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)g_{\delta,\tilde{b}}(u)=(-1)^{c-1}\frac{c!\,\lambda^c}{p^{c-1}}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}(\lambda-\lambda_i)$$
$$\times\prod_{j=1}^{c-2}(\lambda_j-\lambda_i)\int_u^{\infty}e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds$$

στην οποία ομοίως αν εφαρμόσουμε τον $\left(\frac{\lambda_{c-1}+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$ και l=c-2 έχουμε

$$\prod_{j=1}^{c-2}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)g_{\delta,\tilde{b}}(u)=(-1)^{c-1}\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}(\lambda-\lambda_i)\prod_{j=1}^{c-1}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$\times\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds+\frac{c!\lambda^c}{p^{c-1}}\sigma_2(u)$$

Στην παραπάνω σχέσημγια l=c-1 εφαρμόζουμε και στα δύο μέρη τον τελεστή $\left(\frac{\lambda_c+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$ και έχουμε

$$\prod_{j=1}^{c}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)g_{\delta,\tilde{b}}(u)=(-1)^{c-1}\frac{c!\,\lambda^c}{p^{c+1}}\sum_{i=1}^{c+1}\frac{\lambda_i}{\tau'_{c+1}(\lambda_i)}(\lambda-\lambda_i)\prod_{j=1}^{c}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$\times\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\left(s\wedge\tilde{b}\right)ds$$

$$+\frac{c!\lambda^c}{p^c}(\lambda-\lambda_c-\lambda_{c+1})\sigma_2(u)+\frac{c!\lambda^c}{p^{c-1}}\left(\frac{\lambda_c+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\sigma_2(u)$$

Και τελικά εφαρμόζοντας ομοίως στην παραπάνω σχέση τον τελεστή $\left(\frac{\lambda_{c+1}+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$ έχουμε

$$\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)g_{\delta,\tilde{b}}(u)=\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}(\lambda-\lambda_c-\lambda_{c+1})\left(\frac{\lambda_{c+1}+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\sigma_2(u)$$

$$+\frac{c!\lambda^c}{p^{c-1}}\left(\frac{\lambda_{c+1}+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\frac{\lambda_c+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\sigma_2(u)+\frac{c!\lambda^c}{p^{c+1}}\lambda_{c+1}(\lambda_{c+1}-\lambda)\sigma_2(u)$$

Που είναι ισοδύναμο με

$$\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)g_{\delta,\tilde{b}}(u)=\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}\delta(\lambda+\delta)\sigma_2(u)-\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}(2\delta+\lambda)\sigma'_2(u)+\frac{c!\,\lambda^c}{p^{c-1}}\sigma''_2(u)$$

$$=\frac{c!\,\lambda^c}{p^{c-1}}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\frac{c!\,\lambda^c}{p^{c-1}}\left(\frac{\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\sigma_2(u)$$

η εφαρμογή στο οποίο του τελεστή $\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$ δίνει το ζητούμενο.

5.4 Περιθώριες συνθήκες

Το επόμενο βήμα ώστε να μπορέσουμε να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση ποινής $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ είναι να βρούμε τις περιθώριες συνθήκες για αυτή στην ολοκληροδιαφορική εξίσωση που έχουμε από το θεώρημα 5.3.2 και για να το επιτύχουμε χρειαζόμαστε τα δύο παρακάτω Λήμματα

Λήμμα 5.4.1

Για τα $\lambda_i=\lambda(d+i-1)$ *και τα* $a_i = \dfrac{c!\lambda^c(-\lambda_i)}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{c+1}(-\lambda_i+-\lambda_j)}$ *(i=1,2,…,c+1) ισχύει*

$$\sum_{i=1}^{c+1} a_i(\lambda_i+\delta)^l = \begin{cases} 0, \quad l=0,\dots,c-2 \\ (-1)^{c-1}c!\,\lambda^c, \qquad l=c-1 \\ (-1)^{c-1}c!\,\lambda^c(c\delta+\sum_{i=1}^{c+1}\lambda_i), l=c \end{cases}$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Ορίζουμε $k_\delta\,(t)=\sum_{i=1}^{c+1} a_i e^{-(\lambda_i\delta)t}=e^{-\delta t}k_W(t)$ *και τον αντίστοιχο μετασχηματισμό του Laplace*

$$k_\delta^* = k_W^*(s+\delta)$$

Τότε από Κ.Ο.Θ έχουμε $k_\delta(0)=k_W(0)=\sum_{i=1}^{c+1}a_i=\lim_{s\to\infty} s\,k_W^*(s)=0$

και

$$k_\delta^{(l)}(t)|_{t=0}=\sum_{i=1}^{c+1}a_i\,(-1)^l(\lambda_i+\delta)^l=\lim_{s\to\infty}s^{l+1}k_\delta^*(s)=\lim_{s\to\infty}s^{l+1}k_W^*(s)=0$$

για $l=0,1,2,\cdots,c-2$

$$k_\delta^{(c-1)}(t)|_{t=0}=\sum_{i=1}^{c+1}a_i\,(-1)^{c-1}(\lambda_i+\delta)^{c-1}=\lim_{s\to\infty}s^c\frac{c!\,\lambda^c(s+\delta)}{\prod_{i=1}^{c+1}(s+\delta+\lambda_i)}=c!\,\lambda^c$$

Και

$$k_\delta^{(c)}(t)|_{t=0}=\sum_{i=1}^{c+1}a_i\,(-1)^c(\lambda_i+\delta)^c=\lim_{s\to\infty}s(s^c k_W^*(s+\delta)-c!\,\lambda^c)$$

$$=\lim_{s\to\infty}s(s^c\frac{c!\lambda^c(s+\delta)}{\prod_{i=1}^{c+1}(s+\delta+\lambda_i)}-c!\,\lambda^c)=-c!\,\lambda^c\big(c\delta+\sum_{i=1}^{c+1}\lambda_i\big)$$

Λήμμα 5.4.2

Για $u \le \tilde{b}$ *ισχύει*

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(n)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-j-1}\sigma_1^{(j)}(u)\right) + \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s\wedge\tilde{b})ds + \frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left(\frac{\lambda_i}{p}\right)^{n}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s\wedge\tilde{b})ds$$

n = 1,…,c-1

(5.4.2.1)

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(c)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c-j-1}\sigma_1^{(j)}(u)\right) + \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s\wedge\tilde{b})ds + \frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{c}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2(s\wedge\tilde{b})ds - \frac{\theta}{p^c}(-1)^{c-1}c!\,\lambda^c\sigma_2(u)$$

(5.4.2.2)

και

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(c+1)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=0}^{c}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c-j}\sigma_1^{(j)}(u)\right) + \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c+1}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s\wedge\tilde{b})ds$$

$$+\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{c+1}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2(s\wedge\tilde{b})ds - \frac{\theta}{p^c}(-1)^{c-1}c!\,\lambda^c\sigma_2'(u) - \frac{\theta}{p^{c+1}}(-1)^{c-1}c!\,\lambda^c\left(c\delta+\sum_{j=1}^{c+1}\lambda_j\right)\sigma_2(u)$$

(5.4.2.3)

Απόδειξη

Παραγωγίζοντας την 5.4.2.1 έχουμε

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(n+1)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-j-1}\sigma_1^{(j+1)}(u)\right) + \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n+1}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s\wedge\tilde{b})ds$$

$$+\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{n+1}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2(s\wedge\tilde{b})ds - \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n}\sigma_1(u)$$

$$-\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{n}\sigma_2(u)$$

και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 για l=o,…,c-2 έχουμε

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(n+1)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-j}\sigma_1^{(j)}(u)\right) + \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n+1}\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1\big(s\wedge\tilde{b}\big)ds$$

$$+\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1} a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{n+1}\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\big(s\wedge\tilde{b}\big)ds$$

ενώ για n = c-1

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(c)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c-j-1}\sigma_1^{(j)}(u)\right) + \frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c}\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1\big(s\wedge\tilde{b}\big)ds$$
$$+\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1} a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{c}\int_u^{\infty} e^{-(\delta+\lambda_i)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2\big(s\wedge\tilde{b}\big)ds - \frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1} a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{c-1}\sigma_2(u)$$

που μας οδηγεί στην 5.4.3.2 για l =c-1

Η 5.4.3.3 προκύπτει από την παραγώγιση της 5.4.3.2 και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 για l = c

<u>Θεώρημα 5.3.3</u>

Η ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την συνάρτηση ποινής $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ του θεωρήματος 5.3.2 ικανοποιεί τις παρακάτω c+2 περιθώριες

$$m_{\delta,\tilde{b}}(\tilde{b}) = \frac{\lambda}{\delta+\lambda}\sigma_1(\tilde{b}) + \theta\frac{c!\,\lambda^c\delta}{\prod_{i=1}^{c+1}(\delta+\lambda_i)}\sigma_2(\tilde{b})$$

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(1)}(b) = 0$$

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(n)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-j-1}\sigma_1^{(j)}(u)\right), n = 2, \dots, c$$

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(c+1)}(u) = -\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=1}^{0}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{c-j}\sigma_1^{(j)}(\tilde{b})\right) - \frac{\theta}{p^c}(-1)^{c-1}c!\,\lambda^c\sigma_2'(\tilde{b})$$

Απόδειξη

Για $u=\tilde{b}$ στην

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u)=\frac{\lambda}{p}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_1(s\wedge\tilde{b})ds+\frac{\theta}{p}\sum_{\iota=1}^{c+1}a_i\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\left(\frac{s-u}{p}\right)}\sigma_2(s\wedge\tilde{b})ds$$

έχουμε

$$m_{\delta,\tilde{b}}(\tilde{b})=\frac{\lambda}{\delta+\lambda}\sigma_1(\tilde{b})+\theta\sum_{i=1}^{c+1}\frac{a_i}{\delta+\lambda_i}\sigma_2(\tilde{b})$$

και με s=δ παίρνουμε το πρώτο ζητούμενο.

Το δεύτερο ζητούμενο προκύπτει αν θέσουμε $u=\tilde{b}$ στην (2.2.1.p)
και l=0 στο λήμμα 2.3.1

Η τρίτη συνθήκη προκύπτει για $u=\tilde{b}$ στην (5.4.2.1) οπότε έχουμε

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(n)}(u)=-\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-j-1}\sigma_1^{(j)}(u)\right)+\frac{\lambda}{p}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-1}\sigma_1(\tilde{b})$$
$$+\frac{\theta}{p}\sum_{i=1}^{c+1}a_i\left(\frac{\lambda_i+\delta}{p}\right)^{n-1}\sigma_2(\tilde{b}),\qquad n=1,\dots,c-1$$

το οποίο για l=0,…,c-2 στο Λήμμα 2.3.1 μας δίνει

$$m_{\delta,\tilde{b}}^{(n)}(u)=-\frac{\lambda}{p}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\right)^{n-j-1}\sigma_1^{(j)}(\tilde{b})\right),\ \ n=2,\dots,c-1$$

Θεώρημα 5.4.4

Για την $m_{\delta,\tilde{b}}(u)$ ισχύει

$$m_{\delta,\tilde{b}}(u) = m_{\delta,\infty}(u) + \sum_{l=1}^{c+2} \eta_l v_{l,\delta}(u), \qquad 0 \le u \le \tilde{b}$$

όπου $m_{\delta,\infty}(u)$ η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής χωρίς κατώφλι

Απόδειξη

Όπως γνωρίζουμε η $m_{\delta,\infty}(u)$ είναι λύση μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης και ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική

$$\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)m_{\delta,\infty}(u)$$

$$=\frac{\lambda}{p}\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\int_0^u m_{\delta,\infty}(u-x)f_X(x)dx+w_1(u)\right)$$

$$+\frac{\theta c!\,\lambda^c}{p^c}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\frac{\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\int_0^u m_{\delta,\infty}(u-x)k_X(x)dx+w_2(u)\right)$$

όπου τα $\upsilon_{i,\delta}(u)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της

$$P(\mathcal{D})\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)v_\delta(u)=\frac{\lambda}{p}P(\mathcal{D})\int_0^u v_\delta(u-z)f_X(z)dz$$

$$+\frac{\theta c!\,\lambda^c}{p^c}\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\frac{\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)$$

$$\times\int_0^u v_\delta(u-z)k_X(z)dz$$

με

$$P(\mathcal{D})=\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)=\sum_{k=0}^{c+1}P_k\mathcal{D}^k$$

Βρίσκουμε τον L.T του $\upsilon_\delta(u)$ που μπορεί να γραφτεί ώς

$$d(u)=\frac{\lambda}{p}q_1(u)+\frac{\theta c!\,\lambda^c}{p^c}q_2(u)$$

με

$$d(u)=P(\mathcal{D})\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)v_\delta(u)$$

$$=\frac{\lambda+\delta}{p}P_0v_\delta(u)+\frac{\lambda+\delta}{p}\sum_{k=1}^{c+1}P_k\mathcal{D}^kv_\delta(u)-\sum_{k=0}^{c+1}P_k\mathcal{D}^{k+1}v_\delta(u)$$

$$q_1(u)=P(\mathcal{D})\int_0^u v_\delta(u-z)f_X(z)dz$$

$$q_2(u)=\left(\frac{\lambda+\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\left(\frac{\delta}{p}\mathcal{I}-\mathcal{D}\right)\int_0^u v_\delta(u-z)k_X(z)dz$$

που είναι ο

$$d^*(s)=\frac{\lambda}{p}q_1^*(s)+\frac{\theta c!\,\lambda^c}{p^c}q_2^*(s)$$

και αφού

$$d^*(s)=\frac{\lambda+\delta}{p}P_0v_\delta^*(s)+\frac{\lambda+\delta}{p}\sum_{k=1}^{c+1}P_k\left[s^kv_\delta^*(s)-\sum_{j=1}^{k}s^{k-j}v_\delta^{j-1}(0)\right]$$

$$-\sum_{k=0}^{c+1}P_k\left[s^{k+1}v_\delta^*(s)-\sum_{j=1}^{k+1}s^{k+1-j}v_\delta^{j-1}(0)\right]$$

$$=\left(\frac{\delta+\lambda}{p}-s\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)v_\delta^*(s)-\frac{\lambda+\delta}{p}\sum_{k=1}^{c+1}P_k\sum_{j=1}^{k}s^{k-j}v_\delta^{j-1}(0)$$

$$+\sum_{k=0}^{c+1}P_k\sum_{j=0}^{k}s^{k-j}\upsilon_\delta^{j}(0)$$

έχουμε

$$d^*(s) = \left(\frac{\delta+\lambda}{p} - s\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p} - s\right)v_\delta^*(s)$$

$$-\sum_{k=1}^{c+1} P_k \sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\left(\frac{\lambda+\delta}{p} v_\delta^{j-1}(0) - v_\delta^j(0)\right)$$

$$+P_0 v_\delta(0) + \sum_{k=1}^{c+1} P_k s^k v_\delta(0)$$

$$= \left(\frac{\delta+\lambda}{p} - s\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p} - s\right)v_\delta^*(s) - \sum_{k=1}^{c+1} P_k \sum_{j=1}^{k} s^{k-j}\left(\frac{\lambda+\delta}{p} v_\delta^{j-1}(0) - v_\delta^j(0)\right)$$

$$+P(s)\, v_\delta(0)$$

Ανάλογα έχουμε

$$q_1^*(s) = \prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p} - s\right) f_X^*(s) v_\delta^*(s) - \sum_{k=1}^{c+1} P_k \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j}\mathcal{D}^{(j)}$$

$$\times \int_0^u v_\delta(u-x) f_X(x)dx|_{u=0}$$

και

$$q_2^*(s) = \left(\frac{\delta+\lambda}{p} - s\right)\left(\frac{\delta}{p} - s\right) k_X^*(s) v_\delta^*(s) - \mathcal{D}\int_0^u v_\delta(u-x) k_X(x)dx|_{u=0}$$

Αρα με όλες αυτές τις σχέσεις καταλήγουμε στο

$$v_\delta^*(s) = \frac{\zeta_{c+1,\delta}(s)}{\left(\frac{\delta+\lambda}{p} - s\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p} - s\right) - \frac{\lambda}{p}\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p} - s\right) f_X^*(s) - \theta\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}\left(\frac{\delta+\lambda}{p} - s\right)\left(\frac{\delta}{p} - s\right) k_X^*(s)}$$

όπου

$$\zeta_{c+1,\delta}(s)=-\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_j}{p}-s\right)v_\delta(0)+\sum_{k=1}^{c+1}P_k\sum_{j=0}^{k-1}s^{k-1-j}\left(\frac{\delta+\lambda}{p}v_\delta^{(j)}(0)-v_\delta^{(j+1)}(0)\right)$$

$$-\frac{\lambda}{p}\sum_{k=1}^{c+1}P_k\sum_{j=0}^{k-1}s^{k-1-j}\mathcal{D}^{(j)}\int_0^u v_\delta(u-x)f_X(x)dx|_{u=0}$$

$$-\theta\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}\mathcal{D}\int_0^u v_\delta(u-x)k_X(x)dx|_{u=0}$$

$$=-\prod_{j=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_j}{p}-s\right)v_\delta(0)+\sum_{j=0}^{c}P_k\sum_{k=j+1}^{c+1}P_k s^{k-1-j}\left(\frac{\delta+\lambda}{p}v_\delta^{(j)}(0)-v_\delta^{(j+1)}(0)\right)$$

$$-\frac{\lambda}{p}\sum_{k=1}^{c+1}\sum_{j=0}^{k-1}P_k s^{k-1-j}\mathcal{D}^{(j)}\int_0^u v_\delta(u-x)f_X(x)dx|_{u=0}$$

$$-\theta\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}\mathcal{D}\int_0^u v_\delta(u-x)k_X(x)dx|_{u=0}$$

5.5 Αναλυτική έκφραση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες

Αν η παράμετρος α της γενικευμένης FGM copula είναι θετικός ακέραιος και οι απαιτήσεις X ακολουθούν εκθετική κατανομή με $f_X^*(s)=\frac{a}{s+a}$
έχουμε

$$k_X^*(s)=\sum_{i=1}^{a+1}\frac{b_i}{s+a_i}=\frac{a!\,a^a s}{\prod_{i=1}^{a+1}(s+a_i)}$$

όπου

$$a_i=a(b+i-1)(i=1,\dots,a+1)$$

$$b_i=\frac{a!\,a^a(-a_i)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{a+1}(-a_i+a_j)}$$

και άρα

$$\mathrm{v}_{\mathrm{i},\delta}^{*}(\mathrm{s})=\frac{\mathrm{x}_{1,\mathrm{i},\mathrm{a}+\mathrm{c}+3,\mathrm{d}}(\mathrm{s})}{\mathrm{x}_{2,\mathrm{a}+\mathrm{c}+4,\delta}(\mathrm{s})}$$

Με

$$x_{1,i,a+c+3,d}(s)=(a+s)\prod_{j=1}^{a+1}\left(s+a_j\right)\zeta_{i,c+1,\delta}(s)$$

και

$$x_{2,a+c+4,\delta}(s)=(a+s)\prod_{j=1}^{a+1}(s+a_j)\left(\frac{\delta+\lambda}{p}-s\right)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)$$

$$-\frac{\lambda a}{p}\prod_{j=1}^{a+1}(s+a_j)\prod_{i=1}^{c+1}\left(\frac{\delta+\lambda_i}{p}-s\right)$$

$$-\theta\frac{c!\,\lambda^c}{p^c}\left(\frac{\delta+\lambda}{p}-s\right)\left(\frac{\delta}{p}-s\right)a!\,a^a s(a+s)$$

Αρα

$$x_{1,i,a+c+3,\delta}(s)=\sum_{j=1}^{a+2}x_{1,i,a+c+3,\delta}\left(-R_j\right)\prod_{k=1}^{c+2}\left(\frac{s-\rho_k}{-R_j-\rho_k}\right)\prod_{k=1,k\neq j}^{a+2}\left(\frac{s+R_k}{-R_j+R_k}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{c+2}x_{1,i,a+c+3,\delta}\left(\rho_j\right)\prod_{k=1}^{a+2}\left(\frac{s+R_k}{\rho_j+R_k}\right)\prod_{k=1,k\neq j}^{c+2}\left(\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}\right)$$

και

$$x_{2,a+c+4,\delta}(s)=x_{2,a+c+4,\delta}(0)\prod_{j=1}^{c+2}\left(\frac{s-\rho_j}{-\rho_j}\right)\prod_{j=1}^{a+2}\left(\frac{s+R_j}{R_j}\right)$$

Οπότε

$$v_{i,\delta}^{*}(s)=\sum_{j=1}^{a+2}\frac{a_{1,i,j}}{s+R_j}+\sum_{j=1}^{c+2}\frac{a_{2,i,j}}{s-\rho_j} \tag{2.4.1}$$

όπου

$$a_{1,i,j}=\frac{x_{1,i,a+c+3,\delta}(-R_j)}{x_{2,a+c+4,\delta}(0)}\frac{\prod_{j=1}^{c+2}(-\rho_j)}{\prod_{k=1}^{c+2}(-R_j-\rho_k)}\frac{\prod_{j=1}^{a+2}R_j}{\prod_{k=1,k\neq j}^{a+2}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$a_{2,i,j} = \frac{x_{1,i,a+c+3,\delta}(\rho_j)}{x_{2,a+c+4,\delta}(0)} \frac{\prod_{j=1}^{c+2}(-\rho_j)}{\prod_{k=1}^{c+2}(\rho_j + R_k)} \frac{\prod_{j=1}^{a+2} R_j}{\prod_{k=1,k\neq j}^{a+2}(\rho_j - \rho_k)}$$

Και βρίσκοντας τον αντίστροφο L.T. της (2.4.1) έχουμε

$$v_{i,\delta}(u) = \sum_{j=1}^{a+2} a_{1,i,j} e^{-R_j u} + \sum_{j=1}^{c+2} a_{2,i,j}\, e^{\rho_j u}$$

Επειδή τώρα

$$\varphi_{T_\infty} = \sum_{j=1}^{a+2} s_j e^{-R_j u}$$

αν αντικαταστήσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις στην σχέση του θεωρήματος Μ.2.4 έχουμε

$$\varphi_{T_{\tilde{b}}}(u) = \sum_{j=1}^{a+2} s_j e^{-R_j u} + \sum_{i=1}^{c+2} \eta_i \sum_{j=1}^{a+2} a_{1,i,j}\, e^{-R_j u} + \sum_{i=1}^{c+2} \eta_i \sum_{j=1}^{c+2} a_{2,i,j}\, e^{\rho_j u}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
Κλασσικό μοντέλο με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου εφοδιασμένο με FGM copula
6.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε την Poisson διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ με

$$U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0$$

με u το αρχικό πλεόνασμα , c ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων και $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ οι συνολικές απαιτήσεις με $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής που παριστάνεται με F_X και σ.π.π f_X που έχει L.T. f_X^*, όπου $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με θετική παράμετρο λ ανεξάρτητη των $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ και η οποία αντιπροσωπεύει τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t.
Ορίζουμε $\{W_j, j \geq 1\}$ μια ακολουθία αφίξεων των απαιτήσεων με κοινή σ.π.π $p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Προφανώς τα $\{(X_j, W_j), j \geq 1\}$ είναι τυχαία διανύσματα ενώ η συνθήκη καθαρού κέρδους δίνεται από τη σχέση $c > \lambda \mathrm{E}(X_1)$
Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε ένα διαφοροποιημένο μοντέλο του παραπάνω όπου τα X_j, W_j

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΑΛΛΑ ΕΧΟΥΝ ΣΧΕΣΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΜΙΑ FGM copula

Η FGM copula για $\theta \in [-1,1]$ ορίζεται ως

$$C_\theta^{FGM}(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2), u_1, u_2 \in [0,1]$$

και θεωρούμε ότι για δοσμένο $j \geq 1$ η από κοινού σ.π.π των $\{(X_j, W_j), j \geq 1\}$ είναι η

$$f_{X,W}(x,t) = f_X(x)\lambda e^{-\lambda t} + \theta h_X(x)\left(2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\right), \quad x, t \geq 0$$

με

$$h_X(x) = \left(1 - 2F_X(x)\right) f_X(x), x \geq 0 \qquad \text{και} \qquad \text{L.T.} \qquad h_X^*$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η εταιρεία πληρώνει μερίσματα με τον ακόλουθο τρόπο: Όταν το πλεόνασμα βρίσκεται κάτω από ένα κατώφλι $b(\geq u)$ δεν πληρώνεται μέρισμα αλλά όταν αυτό βρίσκεται πάνω από το b έχουμε συνεχή πληρωμή μερισμάτων με ρυθμό c-α $\alpha \in [0, c]$ και $\alpha > \lambda E(X_1)$ ένας συντελεστής ασφαλείας. Το προσαρμοσμένο πλεόνασμα τώρα ικανοποιεί την

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), U_b(t) < b \\ adt - dS(t), U_b(t) \geq b \end{cases} \quad t \geq 0 \text{ με } U_b(0) = u \quad (6.2)$$

Έστω
$T_b = \inf\{t \geq 0, U_b(t) < 0\}(\inf\{\emptyset\} = \infty)$ η στιγμή της χρεοκοπίας και για $\delta \geq 0$

η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι η
$$m(u;a;b) = E\left(e^{-\delta T_b} w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right), u \geq 0$$

Στην στρατηγική μερίσματος κατωφλίου που περιγράψαμε παραπάνω η διαδικασία διανομής μερίσματος $\{D(t), t \geq 0\}$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση
$$dD(t) = \begin{cases} (c-a)dt, U_b(t) \geq b \\ 0, \qquad U_b(t) < b' \end{cases} \qquad t \geq 0$$
Ορίζουμε τώρα την
$$v(u;b) = E\left(\int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t) | U_b(0) = u\right), \ u \geq 0 \ , \delta \geq 0$$
η οποία εκφράζει τις προσαρμοσμένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι την χρεοκοπία
Στη συνέχεια για λόγους απλότητας θα χρησιμοποιήσουμε τους
συμβολισμούς $m(u;a;b) = \begin{cases} m_1(u), \ 0 \leq u < b \\ m_2(u), \qquad u \geq b \end{cases} \quad \begin{cases} m(u) = m(u;0;b) \\ m(u;\infty) = m(u;a;\infty) \end{cases}$

$$v(u;b) = \begin{cases} v_1(u), \qquad 0 \leq u < b \\ v_2(u), \qquad u \geq b \end{cases}$$

<u>*6.2 Ανάλυση των συναρτήσεων Gerber-Shiu*</u>

Θα αναλύσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu για την διαδικασία μερίσματος <u>κατωφλίου εφοδιασμένου με FGM copula,</u> υπενθυμίζοντας πρώτα μερικά συμπεράσματα για την $m(u)$ $u \in [0,b]$ *υπό στρατηγική σταθερού μερίσματος η οποία τότε ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση*
$$\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)m(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\sigma_1(u) + \frac{\lambda\theta}{c}\left(\frac{\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\sigma_2(u), 0 \leq u \leq b$$
(6.4)
με
$$m'(b) = 0, \quad m''(b) = -\frac{\lambda}{c}\sigma_1'(b) - \frac{\lambda\theta}{c}\sigma_2'(b)$$
όπου
$$\sigma_1(u) = \int_0^u m(u-x) f_X(x) dx + a_1(u)$$

$$\sigma_2(u) = \int_0^u m(u-x) h_X(x) dx + a_2(u)$$

$$a_1(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f_X(x) dx$$

$$a_2(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) h_X(x) dx$$

Από την θεωρία των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι η (6.4) μπορεί να γραφτεί ως :

$$m(u) = m(u;\infty) + \gamma_1 y_1(u) + \gamma_2 y_2(u), \qquad 0 \le u \le b$$

με γ_1, γ_2 σταθερές και $y_1(.)$, $y_2(.)$ συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$\left(\frac{\boldsymbol{\lambda+\delta}}{\mathbf{c}}\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{2\lambda+\delta}}{\mathbf{c}}\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\mathbf{y_i(u)}$$
$$= \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{c}}\left(\frac{\boldsymbol{2\lambda+\delta}}{\mathbf{c}}\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{u}} \mathbf{y_i(u-x) f_X(x) dx}$$
$$+ \frac{\boldsymbol{\lambda\theta}}{\mathbf{c}}\left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{\mathbf{c}}\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{u}} \mathbf{y_i(u-x) h_X(x) dx}, \qquad \mathbf{i = 1, 2}$$

Θεωρώντας τώρα τον τελεστή Dickson-Hipp που ως γνωστό είναι ο

$$\mathrm{T_r f(x)} = \int_{\mathrm{x}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{r(u-x)}} \mathrm{f(u)du}, \ \mathrm{x} \ge 0 \ \text{με}$$

$$\mathrm{T_s f'(b)} = \mathrm{sT_s f(b)} - \mathrm{f(b)}$$

και παίρνοντας το $T_s(*)(0)$ και στα δύο μέρη της (6.6) και αντιστρέφοντάς την βλέπουμε ότι η $y_i(.)$ i=1,2 ικανοποιεί τις ακόλουθες ανανεωτικές εξισώσεις

$$\mathrm{y_i(u)} = \int_0^{\mathrm{u}} \mathrm{y_i(u-x)h(x)dx} + \mathrm{r_i(u)}, \qquad \mathrm{i} = 1{,}2$$

όπου

$$\mathrm{h(u)} = \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\mathrm{T}_{\rho_2}\mathrm{f_X(u)} + \frac{\lambda\theta}{\mathrm{c}}\mathrm{T}_{\rho_2}\mathrm{h_X(u)} + \frac{\lambda}{\mathrm{c}}\left(\frac{2\lambda+\delta}{\mathrm{c}} - \rho_1\right)\mathrm{T}_{\rho_2}\mathrm{T}_{\rho_1}\mathrm{f_X(u)} + \frac{\lambda\theta}{\mathrm{c}}\left(\frac{\delta}{\mathrm{c}} - \rho_1\right)\mathrm{T}_{\rho_2}\mathrm{T}_{\rho_1}\mathrm{h_X(u)}$$

$$\mathrm{r_1(u)} = \frac{\rho_1 - \frac{3\lambda+2\delta}{\mathrm{c}}}{\rho_1 - \rho_2}\mathrm{e}^{\rho_1 \mathrm{u}} + \frac{\rho_2 - \frac{3\lambda+2\delta}{\mathrm{c}}}{\rho_2 - \rho_1}\mathrm{e}^{\rho_2 \mathrm{u}}$$

$$r_2(u) = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} e^{\rho_1 u} + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} e^{\rho_2 u}$$

και ρ_1, ρ_2 να είναι οι 2 πραγματικές ρίζες της γενικευμένης Lundberg

$$g(s) = \left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - s\right) - \frac{\lambda}{c} f_X^*(s)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c} - s\right) - \frac{\lambda\theta}{c} h_X^*(s)\left(\frac{\delta}{c} - s\right) = 0$$

Από τη θεωρία των ανανεωτικών εξισώσεων συμπεραίνουμε ότι

$$y_i(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^u r_i(u-x) dH^{n*}(x), \qquad i = 1{,}2$$

όπου $\mathrm{H}(x) = \int_0^x h(u)du$ *και* $\mathrm{H}^{n^*}(x)$ *να παριστά την n-οστή συνέλιξη της H(x) με τον εαυτό της.*

Θα βρούμε τώρα την ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την Gerber-Shiu συνάρτηση m(u;a;b)

Θεώρημα 6.2.1

Η Gerber-Shiu συνάρτηση m(u;a;b) ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\ell-\mathcal{D}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell-\mathcal{D}\right)m_1(u)=\frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell-\mathcal{D}\right)\pi_1(u)+\frac{\lambda\theta}{c}\left(\frac{\delta}{c}\ell-\mathcal{D}\right)\pi_2(u),\quad 0\le u<b$$

$$\left(\frac{\lambda+\delta}{a}\ell-\mathcal{D}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{a}\ell-\mathcal{D}\right)m_2(u)=\frac{\lambda}{a}\left(\frac{2\lambda+\delta}{a}\ell-\mathcal{D}\right)$$
$$\times\left(\int_0^{u-b} m_2(u-x)f_X(x)dx+\int_{u-b}^{u} m_1(u-x)f_X(x)+\int_u^{\infty}\omega(u,x-u)f_X(x)dx\right)$$
$$+\frac{\lambda\theta}{a}\left(\frac{\delta}{a}\ell-\mathcal{D}\right)$$
$$\times\left(\int_0^{u-b} m_2(u-x)h_X(x)dx+\int_{u-b}^{u} m_1(u-x)h_X(x)dx+\int_u^{\infty}\omega(u,x-u)h_X(x)dx\right),u\ge b$$

με $m_1(b)=m_2(b)$ και

$$\pi_1(u)=\int_0^u m_1(u-x)f_X(x)dx+\beta_1(u),\qquad \beta_1(u)=\int_u^{\infty}\omega(u,x-u)f_X(x)dx$$

$$\pi_2(u)=\int_0^u m_1(u-x)h_X(x)dx+\beta_2(u),\qquad \beta_2(u)=\int_u^{\infty}\omega(u,x-u)h_X(x)dx$$

<u>Απόδειξη:</u>

Εστιάζοντας στη χρονική στιγμή και το ύψος της πρώτης απαίτησης έχουμε:

$$m_1(u)=\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}m(u+ct-x;a;b)\left[f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}+\theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t}-\lambda\, e^{-\lambda t}\right]dxdt$$

$$+\int_0^{\frac{b-u}{c}}\int_{u+ct}^{\infty} e^{-\delta t}\omega(u+ct, x-u-ct)\times\left[f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}+\theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}\right]dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty}\int_0^{b+a(t-\frac{b-u}{c})} e^{-\delta t}m\left(b+a\left(t-\frac{b-u}{c}\right)-x;a;b\right)\times\left[f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}+\theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t}\right.$$
$$\left.-\lambda e^{-\lambda t}\right]dxdt$$

$$+\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty}\int_{b+a\left(t-\frac{b-u}{c}\right)}^{\infty} e^{-\delta t}\omega\left(b+a\left(t-\frac{b-u}{c}\right);x-b-a\left(t-\frac{b-u}{c}\right)\right)\times\left[f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}\right.$$
$$\left.+\theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}\right]dxdt$$

ή διαφορετικά

$$m_1(u)=\lambda\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-(\lambda+\delta)t}(\pi_1(u+ct)-\theta\pi_2(u+ct))dt$$
$$+2\lambda\theta\int_0^{\frac{b-u}{c}} e^{-2(\lambda+\delta)t\pi_2(u+ct)dt}$$
$$+\lambda\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)t}\left(\pi_1\left(b+a\left(t-\frac{b-u}{c}\right)\right)-\theta\pi_2\left(b+\left(t-\frac{b-u}{c}\right)\right)\right)dt$$
$$+2\lambda\theta\int_{\frac{b-u}{c}}^{\infty} e^{-2(\lambda+\delta)t}\pi_2\left(b+a\left(t-\frac{b-u}{c}\right)\right)dt$$

Αν τώρα θέσουμε u+ct = v έχουμε

$$m_1(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^b e^{-\frac{(\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\left(\pi_1(v)-\theta\pi_2(v)\right)dv+\frac{2\lambda\theta}{c}\int_u^b e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2(v)\,dv$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_b^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\left(\pi_1\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)-\theta\pi_2\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)\right)dv$$

$$+\frac{2\theta\lambda}{c}\int_b^\infty e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)dv$$

με

$$m_1'(u)=\frac{\lambda}{c}\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^b e^{-\frac{(\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\big(\pi_1(v)-\theta\pi_2(v)\big)dv$$
$$+\frac{2\lambda\theta}{c}\frac{2\lambda+\delta}{c}\int_u^b e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2(v)\,dv$$

$$+\frac{\lambda}{c}\frac{\lambda+\delta}{c}\int_b^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\left(\pi_1\left(b+a\left(\frac{v-u}{c}\right)\right)-\theta\pi_2\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)\right)dv$$

$$+\frac{2\lambda\theta}{c}\frac{2\lambda+\delta}{c}\int_b^\infty e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)dv-\frac{\lambda}{c}\pi_1(u)-\frac{\lambda\theta}{c}\pi_2(u)$$

Από τις παραπάνω $m_1(u)$ και $m_1'(u)$ έχουμε ότι

$$\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\ell-\mathcal{D}\right)m_1(u)=-\frac{\lambda}{c}\frac{2\lambda\theta}{c}\int_u^b e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2(v)dv-\frac{\lambda}{c}\frac{2\lambda\theta}{c}$$

$$\times\int_b^\infty e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)dv-\frac{\lambda}{c}\pi_1(u)-\frac{\lambda\theta}{c}\pi_2(u)$$

και με παραγώγιση

$$\mathcal{D}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\ell-\mathcal{D}\right)m_1(u)$$
$$=-\frac{2\lambda+\delta}{c}\frac{\lambda}{c}\frac{2\lambda\theta}{c}\int_u^b e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2(v)dv+\frac{\lambda}{c}\pi_1'(u)+\frac{\lambda\theta}{c}\pi_2'(u)$$
$$+\frac{\lambda}{c}\frac{2\lambda\theta}{c}\pi_2(u)$$

$$-\frac{2\lambda+\delta}{c}\frac{\lambda}{c}\frac{2\lambda\theta}{c}\int_b^\infty e^{-\frac{(2\lambda+\delta)(v-u)}{c}}\pi_2\left(b+a\left(\frac{v-b}{c}\right)\right)dv$$

Οι δύο τελευταίες ισότητες δίνουν το ζητούμενο.
Όμοια έχουμε και όταν

$$m_2(u)=\int_0^\infty\int_0^{u+at} e^{-\delta t}m(u+at-x;b)\left[f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}+\theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t})\right]dxdt$$

$$+\int_{0}^{\infty}\int_{u+at}^{\infty} w(u+at, x-u-at)\left[f_X(x)\lambda e^{-\lambda t}+\theta h_X(x)(2\lambda e^{-2\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t})\right]dxdt$$

<u>Θεώρημα 6.2.2</u>

Η Gerber-Shiu συνάρτηση m(u;a;b) δίνεται από τη σχέση

$$m(u;a;b)=\begin{cases} m(u;\infty)+\xi_1 y_1(u)+\xi_2 y_2(u), 0\le u<b \\ k_1(u)+\xi_1 k_2(u)+\xi_2 k_3(u), u\ge b \end{cases}$$

με ξ_1, ξ_2 σταθερές και

$$k_1(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{u-b} A(u-x)dH_a^{n*}(x)+\int_0^{u-b} dH_a^{n*}(x)\int_0^{b} m(y;\infty)R(u-x-y)dy\right)$$

$$k_2(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{u-b} dH_a^{n*}(x)\int_0^{b} y_1(y)R(u-x-y)dy$$

$$k_3(u)=\frac{\lambda}{a}T_{\rho_4}f_X(u)+\frac{\lambda\theta}{a}T_{\rho_4}h_X(u)+\frac{\lambda}{a}\left(\frac{2\lambda+\delta}{a}-\rho_3\right)T_{\rho_4}T_{\rho_3}f_X(u)$$
$$+\frac{\lambda\theta}{a}\left(\frac{\delta}{a}-\rho_3\right)T_{\rho_4}T_{\rho_3}h_X(u)$$

$$R(u)=\frac{\lambda}{a}\left(\frac{2\lambda+\delta}{a}-\rho_3\right)T_{\rho_3}T_{\rho_4}f_X(u)+\frac{\lambda}{a}T_{\rho_4}f_X(u)+\frac{\lambda\theta}{a}\left(\frac{\delta}{a}-\rho_3\right)T_{\rho_4}T_{\rho_3}h_X(u)$$
$$+\frac{\lambda\theta}{a}T_{\rho_4}h_X(u)$$

$$A(u)=T_{\rho_3}T_{\rho_4}\left\{\frac{\lambda}{a}\frac{2\lambda+\delta}{a}\beta_1(u)-\frac{\lambda}{a}\beta_1'(u)+\frac{\lambda\theta}{a}\frac{\delta}{a}\beta_2(u)-\frac{\lambda\theta}{a}\beta_2'(u)\right\}(u)$$

$$H_a(u)=\int_0^{u} h_a(x)dx$$

όπου

$$h[r_1,s]=\frac{h(s)-h(r_1)}{s-r_1}$$

$$h[r_1,r_2,s]=\frac{h[r_1,s]-h[r_1,r_2]}{s-r_2}$$

$$h[r_1,r_2,r_3,s]=\frac{h[r_1,r_2,s]-h[r_1,r_2,r_3]}{s-r_3}$$

<u>Απόδειξη:</u>
Εφαρμόζουμε τον τελεστή Dickson-Hipp $T_s(*)(b)$ και στα δύο μέρη της ολοκληρο-διαφορικής του θεωρήματος (6.1) για $m_2(u)$ $u \geq b$ και έχουμε:

$$-m_2'(b)+s\big(sT_sm_2(b)-m_2(b)\big)-\frac{3\lambda+2\delta}{a}\big(sT_sm_2(b)-m_2(b)\big)$$
$$+\frac{\lambda+\delta}{a}\frac{2\lambda+\delta}{a}T_sm_2(b)$$

$$=\frac{\lambda}{a}\frac{2\lambda+\delta}{a}\left(f_X^*(s)T_sm_2(b)+\int_0^b m_1(y)T_sf_X(b-y)dy+T_s\beta_1(b)\right)$$
$$-\frac{\lambda}{a}\left(sf_X^*(s)T_sm_2(b)+s\int_0^b m_1(y)T_sf_X(b-y)dy\right)$$
$$-\frac{\lambda}{a}\left(-\int_0^b m_1\,(b-y)f_X(x)dy+T_s\beta_1'(b)\right)$$

$$+\frac{\lambda\theta}{a}\frac{\delta}{a}\left(h_X^*(s)T_sm_2(b)+\int_0^b m_1(y)T_sh_X(b-y)dy+T_s\beta_2(b)\right)$$
$$-\frac{\lambda\theta}{a}\left(sh_X^*(s)T_sm_2(b)+s\int_0^b m_1(y)T_sh_X(b-y)dy\right)$$
$$-\frac{\lambda\theta}{a}\left(-\int_0^b m_1(y)T_sh_X(b-y)dy+T_s\beta_2'(b)\right)$$

που μπορεί να μετασχηματισθεί σε

$$\left\{\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)-\frac{\lambda}{\alpha}f_X^*(s)\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)-\frac{\lambda\theta}{\alpha}h_X^*(s)\left(\frac{\delta}{\alpha}-s\right)\right\}T_sm_2(b)$$

$$=\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)\int_0^b m_1(y)T_sf_X(b-y)dy+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\left(\frac{\delta}{\alpha}-s\right)\int_0^b m_1(y)T_sh_X(b-y)dy$$

$$+\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^b m_1(y)\, f_X(b-y)dy+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\int_0^b m_1(y)h_X(b-y)dy+m_2'(b)$$

$$+\left(s-\frac{3\lambda+2\delta}{\alpha}\right)m_2(b)+\frac{\lambda}{\alpha}\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}T_s\beta_1(b)-\frac{\lambda}{\alpha}T_s\beta_1'(b)+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\frac{\delta}{\alpha}T_s\beta_2(b)-\frac{\lambda\theta}{\alpha}T_s\beta_2'(b)$$

και με τη βοήθεια τις βασικής ιδιότητας του τελεστή Dickson-Hipp έχουμε

$$\left\{\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)-\frac{\lambda}{\alpha}f_X^*(s)\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)-\frac{\lambda\theta}{\alpha}h_X^*(s)\left(\frac{\delta}{\alpha}-s\right)\right\}T_s m_2(b)[s,\rho_3,\rho_4]$$

$$=\left(1-T_s h_a(0)\right)T_s m_2(b)$$

$$\left\{\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^b m_1(y)f_X(b-y)dy+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\int_0^b m_1(y)h_X(b-y)dy+m_2'(b)+\left(s-\frac{3\lambda+2\delta}{\alpha}\right)m_2(b)\right\}[s,\rho_1,\rho_2]$$

$$=0$$

$$\left\{\frac{\lambda}{\alpha}\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}T_s\beta_1(b)-\frac{\lambda}{\alpha}T_s\beta_1'(b)+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\frac{\delta}{\alpha}T_s\beta_2(b)-\frac{\lambda\theta}{\alpha}T_s\beta_2'(b)\right\}[s,\rho_1,\rho_2]=T_sA(b)$$

$$\left\{\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)\int_0^b m_1(y)T_s f_X(b-y)dy+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\left(\frac{\delta}{\alpha}-s\right)\int_0^b m_1(y)T_s h_X(b-y)dy\right\}[s,\rho_3,\rho_4]$$

$$=\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}-s\right)\int_0^b m_1(y)T_sT_{\rho_3}\,T_{\rho_4}f_X(b-y)dy+\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^b m_1(y)\,T_sT_{\rho_4}f_X(b-y)dy$$

$$+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\left(\frac{\delta}{\alpha}-\rho_3\right)\int_0^b m_1(y)T_sT_{\rho_3}\,T_{\rho_4}h_X(b-y)dy+\frac{\lambda\theta}{\alpha}\int_0^b m_1(y)\,T_sT_{\rho_4}h_X(b-y)dy$$

$$=\int_0^b m_1(y)\,T_sR(b-y)dy$$

και με τη βοήθεια του διαφορικού τελεστή παίρνουμε

$$\left(1-T_sh_a(0)\right)T_sm_2(b)=\int_0^b m_1(y)T_sR(b-y)dy+T_sA(b)$$

από την οποία με αντιστροφή του τελεστή Dickson-Hipp έχουμε

$$m_2(u)=\int_0^{u-b} m_2(u-y)h_a(y)dy+\int_{u-b}^{u} m_1(u-y)R(y)dy+A(u), u\geq b$$

$$m_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{u-b} \left(\int_0^b m_1(y)R(u-x-y)dy + A(u-x) \right) dH_a^{n*}(x), u > b$$

και με αντικατάσταση της $m_1(y)$ θα πάρουμε

$$m_2(u) = k_1(u) + \xi_1 k_2(u) + \xi_2 k_3(u), u \geq b$$

που είναι το ζητούμενο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα ξ_1, ξ_2 ικανοποιούν τις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις

$$\xi_1 \left(\frac{\lambda}{\alpha} c_2 \left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha} \right) - \frac{\lambda\theta}{\alpha} c_5 \left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha} \right) + \frac{2\lambda\theta}{\alpha} c_5 \left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha} \right) - y_1(b) \right)$$

$$+\xi_2 \left(\frac{\lambda}{\alpha} c_3 \left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha} \right) - \frac{\lambda\theta}{\alpha} c_6 \left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha} \right) + \frac{2\lambda\theta}{\alpha} c_6 \left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha} \right) - y_2(b) \right)$$

$$= m(b;\infty) - \frac{\lambda}{\alpha} c_1 \left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha} \right) + \frac{\lambda\theta}{\alpha} c_4 \left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha} \right) - \frac{2\lambda\theta}{\alpha} c_4 \left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha} \right)$$

$$\xi_1(y_1(b) - (y_1 * R)(b)) + \xi_2(y_2(b) - (y_2 * R)(b)) = -m(b;\infty) + (m(*;\infty) * R)(b) + A(b)$$

$$c_0(\alpha) = \int_b^{\infty} e^{-a(u-b)} du \int_b^u k_0(x) f_X(u-x) dx$$

$$c_1(\alpha) = T_\alpha \beta_1(b) + \int_0^b m(x;\infty) T_a f_X(b-x) dx + \int_b^{\infty} e^{-a(u-b)} du \int_b^u k_1(x) f_X(u-x) dx$$

$$c_2(\alpha) = \int_0^b y_1(x)\, T_a f_X(b-x) dx + \int_b^{\infty} e^{-a(u-b)} du \int_b^u k_2(x) f_X(u-x) dx$$

$$c_3(\alpha) = \int_0^b y_2(x)\, T_a f_X(b-x) dx + \int_b^{\infty} e^{-a(u-b)} du \int_b^u k_3(x) f_X(u-x) dx$$

$$c_4(\alpha) = T_a \beta_2(b) + \int_0^b m(x;\infty) T_a h_X(b-x) dx + \int_b^{\infty} e^{-a(u-b)} du \int_b^u k_1(x) h_X(u-x) dx$$

$$c_5(\alpha) = \int_0^b y_1(x)\, T_a h_X(b-x) dx + \int_b^{\infty} e^{-a(u-b)} du \int_b^u k_2(x) h_X(u-x) dx$$

$$c_6(\alpha) = \int_0^b y_2(x)\, T_a h_X(b-x)dx + \int_b^\infty e^{-a(u-b)}du \int_b^u k_3(x)h_X(u-x)dx$$

$$c_7(\alpha) = \int_b^\infty e^{-a(u-b)}du \int_b^u k_0(x)h_X(u-x)dx\ (y_i * R)(b) = \int_0^b y_i\,(b-x)R(x)dx, i = 1,2$$

6.3 Αναμενόμενες πληρωμές μερισμάτων

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεωρήματα

Θεώρημα 6.3.1
Οι αναμενόμενες πληρωμές μερισμάτων ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)v_1(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\pi_3(u) + \frac{\lambda\theta}{c}\left(\frac{\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\pi_4(u), 0 \le u \le b$$

$$\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)v_2(u)$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{2\lambda+\delta}{c}\ell - \mathcal{D}\right)\left(\int_0^{u-b} v_2(u-x)f_X(x)dx + \int_{u-b}^{u} v_1(u-x)f_X(x)dx\right)$$

$$+\frac{\lambda\theta}{a}\left(\frac{\delta}{a}\ell - \mathcal{D}\right)\left(\int_0^{u-b} v_2(u-x)h_X(x)dx + \int_{u-b}^{u} v_1(u-x)h_X(x)dx\right) + \frac{c-a}{a}\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}, u > b$$

με $v_1(b) = v_2(b)$ $\quad \pi_3(u) = \int_0^u v(u-x;b)f_X(x)dx$ και $\pi_4(u) = \int_0^u v(u-x;b)h_X(x)dx$

Θεώρημα 6.3.2
Οι αναμενόμενες καταβολές μερισμάτων v(u;b) είναι:

$$v(u;b) = \begin{cases} \eta_1 y_1(u) + \eta_2 y_2(u), 0 \le u \le b \\ k_0(u) + \eta_1 k_2(u) + \eta_2 k_3(u), u \ge b \end{cases}$$

όπου $k_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c-a}{a}\frac{2\lambda+\delta}{a}\frac{1}{\rho_3\rho_4} H_a^{n*}(u-b)$ ενώ τα η_1, η_2 ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\eta_1\left(\frac{\lambda}{\alpha}c_2\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}\right) - \frac{\lambda\theta}{\alpha}c_5\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}\right) + \frac{2\lambda\theta}{\alpha}c_5\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}\right) - y_1(b)\right)$$

$$+\eta_2\left(\frac{\lambda}{\alpha}c_3\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}\right) - \frac{\lambda\theta}{\alpha}c_6\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}\right) + \frac{2\lambda\theta}{\alpha}c_6\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}\right) - y_2(b)\right)$$

$$= -\frac{\lambda}{\alpha}c_0\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}\right)+\frac{\lambda\theta}{\alpha}c_7\left(\frac{\lambda+\delta}{\alpha}\right)-\frac{2\lambda\theta}{\alpha}c_7\left(\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}\right)$$

$$\eta_1(y_1(b)-(y_1*R)(b))+\eta_2(y_2(b)-(y_2*R)(b))=\frac{c-a}{a}\frac{2\lambda+\delta}{\alpha}\frac{1}{\rho_3\rho_4}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Προσωπικές σημειώσεις κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιου
- http://dione.lib.unipi.gr/xmlui/bitstream/handle/unipi/9657/Kasanni_Aikaterini.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Lin, S., Pavlova, K.P., (2006). The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy. Insurance Mathematics and Economics, 38, 57-80.
- Lin, X. S. & Willmot, G. E. (1999). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. Insurance Mathematics and Economic , 25, 63-84.
- Lin, S., Willmot, G. & Drekic, S. (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier: Analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. Insurance Mathematics and Economics, 33, 551-566.
- Li, S. & Garrido, J. (2004b). On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier. Insurance Mathematics and Economics, 35, 529-539
- Li, S. & Garrido, J. (2004). On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. Advances in Applied probability, 37, 836-856.