ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΥΣ ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΩΝ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Νικόλαος Δ. Οικονόμου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς

Μάρτιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθ. Αγιακλόγλου Χρήστος (Επιβλέπων)
- Καθ. Γκλεζάκος Μιχαήλ
- Καθ. Τσίμπος Κλέων

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

MEASURING VALUE AT RISK USING GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC MODELS FOR EUROPEAN INDICES

By

Nikolaos D. Oikonomou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

March 2017

Στην οικογένεια μου

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου προς τον κ. Αγιακλόγλου Χρήστο, Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την αμέριστη βοήθεια και καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας καθώς και για τη γενικότερη συνεργασία μας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Εφαρμοσμένης Στατιστικής για τις πολύτιμες γνώσεις και τα εφόδια που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών. Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που στέκεται αρωγός σε κάθε μου προσπάθεια.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιαστεί η μέτρηση του κινδύνου, όπως αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση της μεθόδου Value-at-Risk (VaR). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ο ερευνητής μπορεί να υπολογίσει την Αξία σε Κίνδυνο ενός περουσιακού στοιχείου με έναν αριθμό, ο οποίος εκφράζει τη μέγιστη αναμενόμενη απώλεια μιας επένδυσης, για δεδομένη χρονική περίοδο και σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Για τον υπολογισμό του VaR θα εφαρμοστεί μια σύνθετη οικονομετρική προσέγγιση βασισμένη στην ανάλυση χρονοσειρών, η οποία συνδυάζει τα Μεικτά Ολοκληρωμένα Υποδείγματα με βάση τη μεθοδολογία των Box-Jenkins με τα Γενικευμένα Αυτοπαλίνδρομα υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας Υποδείγματα.

Η εφαρμογή των υποδειγμάτων αυτών θα συντελέσει στον υπολογισμό του VaR το οποίο και θα αποτελεί την πρόβλεψη της επόμενης περιόδου της διαδικασίας. Η οικονομετρική αυτή προσέγγιση θα εφαρμοστεί μέσω των υποδειγμάτων ARIMA-GARCH στις λογαριθμικές αποδόσεις βασικών χρηματιστηριακών δεικτών Ευρωπαϊκών χρηματιστηρίων με κύριο σκοπό την εκτίμηση της μεταβλητότητας, όπως αυτή αποτυπώνεται στους εν λόγω δείκτες. Εν συνεχεία, με τη χρήση αυτής θα υπολογιστεί το VaR για όλους τους δείκτες και παράλληλα θα διενεργηθεί ο επανέλεγχός του προκειμένου να επαληθευτεί η εγκυρότητα των υπό μελέτη υποδειγμάτων VaR.

Abstract

The objective of this thesis is to present the concept of Risk Measurement as it is achieved by using the Value-at-Risk (VaR) method. According to this technique, the user can estimate the risk by a single number which represents the worst expected loss of an asset for a given horizon at a fixed confidence level. The estimate of VaR is obtained by using a sophisticated econometric approach based on Time Series Analysis, which combines and matches AutoRegressive Integrated Moving Average (ARIMA) models based on Box-Jenkins methodology with Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedastic (GARCH) models.

The application of these models will provide VaR as one-step-ahead forecast of the process. Thus, an efficient econometric approach based on ARIMA-GARCH models is applied to log returns of major European stock market indices with the aim to estimate volatility, as it is captured on them. Finally, the estimates of VaR will be measured for indices in total and Backtesting technique for verifying the accuracy of VaR models will be performed.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Διαγραμμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

1.1 Εισαγωγή

Ο κίνδυνος ανέκαθεν, αποτελούσε συνισταμένη της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ο άνθρωπος καθημερινά, έρχεται αντιμέτωπος με κινδύνους πότε ασήμαντους και πότε σημαντικότερους, εξαιτίας των διαφόρων δραστηριοτήτων στις οποίες λαμβάνει μέρος κατά τη διάρκεια της ημέρας. Έτσι, κάθε δραστηριότητα στην οποία συμμετέχει, ενέχει κινδύνους άλλοτε απίθανους και άλλες φορές πιο πιθανούς να συμβούν, οι οποίοι όμως σε κάθε περίπτωση, επηρεάζουν άμεσα τον τρόπο που λειτουργεί και λαμβάνει αποφάσεις.

Αυτό ωστόσο που κάνει τον κίνδυνο συναρπαστικό τόσο στη μελέτη του αλλά όσο και στη διερεύνησή του συνίσταται στο ότι, ενώ κάποιοι από τους κινδύνους που λαμβάνονται από τους ανθρώπους δεν έχουν απευθείας τη συναίνεσή τους, την ίδια στιγμή η ανάληψή τους έχει ως κύριο σκοπό την ευχαρίστηση που απολαμβάνει κάποιος μέσα από την ανάληψη του «ρίσκου» (*risk*). Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτού, αποτελούν οι υψηλές ταχύτητες στους δρόμους από τους οδηγούς ή ακόμη τα τυχερά παιγνίδια που πολλοί άνθρωποι λιγότερο ή περισσότερο έχει συμβεί να παίξουν. Βέβαια, κάποιοι από τους κινδύνους αυτούς μπορεί να μοιάζουν ασήμαντοι, ωστόσο κάποιοι άλλοι επηρεάζουν σημαντικά τον τρόπο με τον οποίο ζουν οι άνθρωποι καθημερινά.

Είναι συνεπώς κατανοητό, πως κάθε μεγάλο επίτευγμα που προήλθε από την εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού, από τη στιγμή δηλαδή που ο άνθρωπος των σπηλαίων δημιούργησε τα πρώτα του εργαλεία μέχρι και την ανάλυση του ανθρώπινου γονιδιώματος από τους επιστήμονες, αυτό κατέστη εφικτό διότι κάποιος παρουσιάστηκε πρόθυμος να αναλάβει το ρίσκο και τελικώς να αλλάξει την μέχρι τότε κατάσταση (*status quo*), όπως αναφέρει ο Damodaran (2007).

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί ο κίνδυνος και ορισμένα στοιχεία του και παράλληλα θα γίνει ανάλυσή του, διαμορφώνοντας ένα γενικό πλαίσιο αυτού. Αρχικά, θα γίνει μια ιστορική αναδρομή στην έννοια του κινδύνου και τι αυτή αντιπροσώπευε σε όλα τα στάδια της ιστορίας του ανθρώπου, από τον άνθρωπο των σπηλαίων μέχρι και τη σημερινή εποχή. Επίσης, αφού δοθεί ο ορισμός του, και αφού αποτυπωθεί η ανάγκη αντιμετώπισής του, έπειτα θα γίνει ανάλυση του κινδύνου, αφού πρώτα διαχωριστεί σε επιμέρους κατηγορίες. Το κεφάλαιο θα κλείσει, με εκτενή αναφορά στη διοικητική του κινδύνου και θα παρουσιαστούν διάφοροι τρόποι που χρησιμοποιούνται σήμερα στη διαχείρισή του από τους οργανισμούς. Κρίνεται σκόπιμο σε αυτό το σημείο να τονιστεί, πως παρά το ότι υπάρχουν σημαντικοί φυσικοί κίνδυνοι στο σύμπαν, κύριος σκοπός του κεφαλαίου είναι να καταγραφούν μόνο οι οικονομικοί κίνδυνοι και πιθανές συνέπειες που απορρέουν από αυτούς.

1.2 Ιστορική Αναδρομή στην Έννοια του Κινδύνου

Καθ' όλη την ιστορία της εξέλιξης του ανθρώπινου είδους, τόσο ο κίνδυνος όσο και η επιβίωση αποτελούσαν δύο άρρηκτα συνυφασμένες έννοιες. Οι προϊστορικοί άνθρωποι εξέθεταν τις ζωές τους συχνά στον κίνδυνο, καθώς έρχονταν αντιμέτωποι με φυσικούς κινδύνους, όπως άγρια ζώα, στην προσπάθεια τους να εξασφαλίσουν τροφή και καταφύγιο προκειμένου να επιβιώσουν. Αλλά ακόμη και από τη στιγμή που ιδρύθηκαν οι πρώτες κοινωνίες ανθρώπων και αργότερα αναπτύχθηκαν οι πρώτοι πολιτισμοί, όπως για παράδειγμα οι Βαβυλώνιοι, οι Σουμέριοι αλλά και αργότερα ο Ελληνικός πολιτισμός, άλλοι κίνδυνοι όπως πόλεμοι και επιδημίες συνέχιζαν να ταλανίζουν την ανθρωπότητα. Όμως και στην πιο πρόσφατη ιστορία, ο φυσικός κίνδυνος και η ανταμοιβή που ελάμβανε κάποιος από την ανάληψή του ήταν δύο έννοιες άρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους.

Είναι γνωστό ότι από τότε που η ναυτιλία χρησιμοποιήθηκε ως μέσο για εμπορικούς σκοπούς, δημιουργήθηκε μια νέα αγορά για την ανάληψη κινδύνου από αυτούς που καλούνταν να αναλάβουν το ρίσκο. Από την εποχή ακόμη όπου οι Βίκινγκς επιβιβάζονταν σε πλοία από τη Σκανδιναβία και ταξίδευαν τόσο για τη Βρετανία όσο και για την Αμερική διασχίζοντας τον Ατλαντικό Ωκεανό, προκειμένου να αναζητήσουν καινούρια γη, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα στην επιζήτηση του κινδύνου. Η ανάπτυξη της ναυτιλίας ως μέσο εμπορικών συναλλαγών δημιούργησε νέα μονοπάτια για ανάληψη κινδύνου από τη μια και τα κέρδη από την ανάληψή του από την άλλη, με τον κίνδυνο της βύθισης των πλοίων από τους πειρατές να αντισταθμίζεται από τα οφέλη και τα κέρδη των πλοίων από το εμπόρευμα που μετέφεραν. Επίσης, επιτράπηκε ο διαχωρισμός του φυσικού κινδύνου από τον οικονομικό καθώς οι πλουσιότεροι στοιχημάτιζαν τα χρήματά τους, ενώ οι πτωχότεροι διακινδύνευαν τις ζωές τους ταξιδεύοντας με τα πλοία.

Το εμπόριο μπαχαρικών που ευδοκίμησε περίπου στο 350 π.Χ, αλλά επεκτάθηκε και έγινε σημαντικό μέρος των εμπορικών δραστηριοτήτων διαφόρων αυτοκρατοριών στα μέσα της προηγούμενης χιλιετίας, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα. Έμποροι από την Ινδία φόρτωναν βάρκες με πιπέρι και κανέλα και το έστελναν στην Περσία, στην Αραβία και στην Ανατολική Αφρική. Από εκεί, το φορτίο μεταφερόταν στη Βενετία και στη Τζένοα και κατόπιν στην υπόλοιπη Ευρώπη. Οι Ισπανοί και οι Ολλανδοί, που μετέπειτα το παράδειγμά τους ακολούθησαν οι Άγγλοι, διεύρυναν τις εμπορικές συναλλαγές στις Ανατολικές Ινδίες. Έμποροι από το Λονδίνο, τη Λισαβόνα και το Άμστερνταμ με την υποστήριξη της Βασίλισσας επένδυαν σε πλοία και προμήθειες για τα ταξίδια που θα επιχειρούσαν. Οι κίνδυνοι που καλούνταν να αντιμετωπίσουν στη διαδρομή ήταν πολλοί και ήταν σύνηθες να χαθεί το μισό ή και περισσότερο από το εμπόρευμα που μετέφεραν, ωστόσο οι πολύ καλές τιμές που αποκόμιζαν από την πώληση των μπαχαρικών τα οποία έφθαναν στους τελικούς προορισμούς, καθιστούσαν την όλη προσπάθεια μια επικερδή επιχείρηση τόσο για τους πλοιοκτήτες όσο και για τους ναυτικούς. Άλλο παράδειγμα επίσης, ήταν οι Ισπανοί εξερευνητές οι οποίοι ξεκίνησαν για να ανακαλύψουν Νέους Κόσμους και οι οποίοι αναγνώριζαν, πως σε αυτό τους το εγχείρημα διέτρεχαν πραγματικό κίνδυνο είτε να τραυματιστούν ή και ακόμη να μην επιβιώσουν, ωστόσο αντιλαμβάνονταν επίσης πως το τίμημα αν επιβίωναν ήταν αρκετά μεγάλο (Damodaran, 2007).

Στη σημερινή εποχή, ο κίνδυνος που απορρέει από τις εμπορικές συναλλαγές είναι συνυφασμένος κατά το πλείστον με τις επιχειρήσεις και τις χρηματοπιστωτικές αγορές. Έτσι η ανάπτυξη των επιχειρήσεων από τη μια και η έλευση των χρηματοοικονομικών εργαλείων και των αγορών από την άλλη πλευρά, αποτέλεσαν νέα πεδία εφαρμογής του κινδύνου. Παράδειγμα των κινδύνων που εμπίπτουν στο πεδίο των χρηματοοικονομικών, αποτελεί η περίπτωση όπου κάποιος επενδυτής αγοράζει δικαιώματα αγοράς σε μετοχές στον κλάδο της τεχνολογίας και ο οποίος μπορεί να εκτεθεί σε σημαντικούς χρηματοοικονομικούς κίνδυνους.

1.3 Ορισμός του Κινδύνου

Παρά το γεγονός, ότι ο κίνδυνος (*Risk*) συναντάται σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα, υπάρχει από την άλλη μεριά χαρακτηριστική δυσκολία στο να προσδιοριστεί επακριβώς η έννοια του κινδύνου και το τι πραγματικά αυτή εκφράζει. Η συζήτηση αυτή, βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ του υποκειμενικά μετρήσιμου κινδύνου και του αντικειμενικά μετρήσιμου κινδύνου. Το 1921, ο Frank Knight θέλησε να διαχωρίσει τον κίνδυνο, συνοψίζοντας τη διαφορά μεταξύ κινδύνου και αβεβαιότητας. Παραφράζοντας κάποια από λόγια του είπε τα εξής:

Η αβεβαιότητα είπε πρέπει να λαμβάνεται σαν μια έννοια διαφορετική από την έννοια του κινδύνου, από τον οποίο ποτέ δεν έγινε σωστός διαχωρισμός της. Αυτό που στην ουσία έχει σημασία ανέφερε, είναι ότι ο κίνδυνος αποτελεί μερικές φορές μία ευαίσθητα μετρήσιμη ποσότητα, ενώ κάποιες άλλες όχι και για το λόγο αυτό υπάρχουν εκτεταμένες και καίριες διαφορές στα δύο φαινόμενα. «Η μετρήσιμη αβεβαιότητα ή πιο σωστά ο κίνδυνος προσέθεσε, όπως θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο όρος, είναι μακράν τόσο διαφορετικός από έναν μη-μετρήσιμο, ο οποίος δεν εμπεριέχει καθόλου αβεβαιότητα».

Εν συντομία, ο Knight προσδιόρισε τον κίνδυνο μόνο ως μια μετρήσιμη αβεβαιότητα, δίνοντας το ακόλουθο παράδειγμα. Δύο άτομα διαλέγουν από ένα δοχείο κόκκινες και μαύρες μπάλες, με τον πρώτο να αγνοεί τον αριθμό των μπαλών διαφορετικού χρώματος που βρίσκεται στο δοχείο, ενώ τον δεύτερο, να γνωρίζει ότι υπάρχουν τρεις μπάλες χρώματος κόκκινου για κάθε μια μαύρη μπάλα. Το δεύτερο άτομο υπολογίζει (σωστά) την πιθανότητα να τραβήξει κόκκινη μπάλα και βρίσκει ότι είναι 75% αλλά ο πρώτος ενεργεί κάτω από την αντίληψη ότι υπάρχει 50% πιθανότητα να τραβήξει μια κόκκινη μπάλα. Ο Knight κατέληξε πως το δεύτερο άτομο είναι εκτεθειμένο σε κίνδυνο, ενώ το πρώτο πάσχει από άγνοια.

Η εντύπωση που δίνεται αν η αβεβαιότητα είναι αντικειμενική ή υποκειμενική φαίνεται να μη τοποθετείται σωστά. Είναι αλήθεια, ότι ο κίνδυνος ο οποίος είναι μετρήσιμος είναι πιο εύκολο να ασφαλιστεί, αλλά είναι επίσης αλήθεια πως αυτό που πρέπει κάποιον να ενδιαφέρει είναι η κάθε είδους αβεβαιότητα, μετρήσιμη ή όχι. Σε μια δημοσίευση σχετικά με τον ορισμό του κινδύνου, ο Holton (2004) υποστήριξε ότι υπάρχουν δύο συστατικά που χρειάζονται για έναν κίνδυνο να υφίσταται. Το πρώτο είναι η αβεβαιότητα σχετικά με τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος και το άλλο είναι ότι τα αποτελέσματα δεν έχουν σημασία όταν παρουσιάζονται σε όρους παρεχόμενης χρησιμότητας. Έφερε μάλιστα ως παράδειγμα, έναν άνθρωπο ο οποίος πηδάει από ένα αεροπλάνο χωρίς να φορά αλεξίπτωτο, λέγοντας ότι ο συγκεκριμένος δε διατρέχει κανένα κίνδυνο καθώς είναι σίγουρο ότι δε θα επιβιώσει (καμία αβεβαιότητα) και ότι διαλέγοντας κάποιος μπάλες από ένα δοχείο δεν εκτίθεται σε κάποιον κίνδυνο, καθώς ένας πλούσιος παραμένει ανεπηρέαστος είτε τραβήξει κόκκινη είτε μαύρη μπάλα. Βέβαια, η διαδικασία αυτή θα μετατρεπόταν σε μια διαδικασία που θα εμπεριείχε κίνδυνο αν δινόταν διαφορετική αξία στις κόκκινες και τις μαύρες μπάλες.

Ο Κίνδυνος (*Risk*) συναντάται σε τόσους διαφορετικούς κλάδους από τον τομέα των ασφαλίσεων και τον κλάδο των μηχανικών έως τη θεωρία χαρτοφυλακίου και δεν πρέπει να προκαλεί εντύπωση το γεγονός ότι προσδιορίζεται διαφορετικά από τον εκάστοτε κλάδο. Κάποια παραδείγματα τα οποία συνοψίζουν τις διαφορές στον τρόπο με τον οποίο κάθε κλάδος αποτυπώνει τον κίνδυνο παρουσιάζονται παρακάτω:

α. *Κίνδυνος έναντι Πιθανοτήτων*: Κάποιοι ορισμοί του κινδύνου στοχεύουν μόνο στην πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός, ενώ άλλοι περισσότερο περιεκτικοί ορισμοί ενσωματώνουν τόσο την πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός όσο και τις επιπτώσεις από το ίδιο το γεγονός. Έτσι, η πιθανότητα να λάβει χώρα ένας ισχυρός σεισμός μπορεί να είναι πολύ μικρή, αλλά οι επιπτώσεις από την πραγματοποίηση αυτού του ενδεχομένου, μπορεί να είναι τόσο καταστροφικές, πράγμα το οποίο θα τον κατέτασσε σε ένα υψηλού κινδύνου γεγονός.

β. *Κίνδυνος έναντι Απειλής*: Σε μερικούς κλάδους, συναντάται μια αντίθεση μεταξύ του κινδύνου και της απειλής. Μια απειλή αποτελεί ένα συμβάν μικρής πιθανότητας να πραγματοποιηθεί, με πολύ όμως μεγάλο αντίκτυπο. Ο κίνδυνος από την άλλη μεριά, προσδιορίζεται ως ένα γεγονός μεγάλης πιθανότητας να συμβεί, κατά το οποίο όμως παρέχεται αρκετή πληροφόρηση, προκειμένου να αξιολογηθεί τόσο η πιθανότητα πραγματοποίησης όσο και οι συνέπειες του γεγονότος αυτού.

γ. *Όλα τα αποτελέσματα έναντι των Αρνητικών αποτελεσμάτων*: Μερικοί ορισμοί που δίνονται για τον κίνδυνο εστιάζουν μόνο στην πραγματοποίηση των χειρότερων σεναρίων, ενώ άλλοι είναι πιο εκτεταμένοι θεωρώντας και αντιμετωπίζοντας όλη τη μεταβλητότητα ως κίνδυνο. Ο προσδιορισμός για παράδειγμα των μηχανικών για την έννοια του κινδύνου, δίνεται ως το γινόμενο της πιθανότητας να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός, το οποίο θεωρείται μη επιθυμητό και της αξιολόγησης της αναμενόμενης ζημίας από το γεγονός το οποίο θα συμβεί.

Με άλλα λόγια, πρόκειται για το παρακάτω γινόμενο:

*Κίνδυνος= Πιθανότητα ενός ατυχήματος * Επιπτώσεις από την απώλεια*

Εν αντιθέσει, ο κίνδυνος στα χρηματοοικονομικά προσδιορίζεται σε όρους μεταβλητότητας των πραγματικών αποδόσεων που αποφέρει μια επένδυση γύρω από μια αναμενόμενη απόδοση, ακόμη και όταν αυτές οι αποδόσεις αναπαριστούν θετικά αποτελέσματα.

Το Κινεζικό σύμβολο που αποτυπώνεται κάτωθι, αντιπροσωπεύει τον κίνδυνο περιγράφοντας τον με τέτοιο τρόπο, ώστε να αναδεικνύεται η δυϊκότητα την οποία αυτός περικλείει:

危險

Το Κινεζικό αυτό σύμβολο δεν αποτελεί παρά ένα συνδυασμό του κινδύνου και της ευκαιρίας, αναπαριστώντας την κάτω πλευρά και την άνω πλευρά του κινδύνου αντίστοιχα. Οι δύο συνισταμένες όπως αυτές παρουσιάζονται από τα δύο μέρη του συμβόλου, εξηγούν πως δεν υφίσταται η έννοια της ευκαιρίας δίχως την ανάληψη κάποιου κινδύνου. Έτσι, κάθε προσπάθεια που εστιάζει προς την κατεύθυνση της ελάττωσης της έκθεσης στον κίνδυνο, θα μειώνει επίσης το ενδεχόμενο για την ευκαιρία που προκύπτει λόγω αυτής, όπως χαρακτηριστικά τονίζει ο Damodaran (2005).

1.4 Ανάγκη Αντιμετώπισης του Κινδύνου

Όλοι οι οργανισμοί που δραστηριοποιούνται στο χώρο των επιχειρήσεων είναι υποχρεωμένοι να διαχειρίζονται κινδύνους. Εκείνοι που παρουσιάζονται πιο έμπειροι πετυχαίνουν τη σωστή διαχείρισή τους, οι υπόλοιποι όχι. Κι ενώ υπάρχουν εταιρείες οι οποίες αποδέχονται τον κίνδυνο παθητικά, άλλες πάλι όχι απλώς τον αναλαμβάνουν αλλά προσπαθούν μέσα από αυτή τη διαδικασία να δημιουργήσουν συγκριτικό πλεονέκτημα από αυτή τους την έκθεση. Σε κάθε περίπτωση ωστόσο, οι κίνδυνοι θα πρέπει να παρακολουθούνται προσεκτικά εξαιτίας του ενδεχομένου να επιφέρουν ζημία σε αυτόν που δέχεται να τους αναλάβει.

Η ανάγκη για αντιμετώπιση των κινδύνων και η μεγάλη ανάπτυξη στη διαχείριση αυτών, μπορεί να εντοπιστεί στην αυξημένη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αγορών και τοποθετείται στις αρχές της δεκαετίας του 1970. Παραδείγματα γεγονότων που άφησαν το στίγμα τους και προκάλεσαν τεράστιες οικονομικές καταστροφές σε παγκόσμιο επίπεδο είναι τα ακόλουθα:

- Το σύστημα σταθερών (κλειδωμένων) συναλλαγματικών ισοτιμιών καταργήθηκε το 1971, οδηγώντας σε κυμαινόμενες και ασταθείς συναλλαγματικές ισοτιμίες.

- Οι αιφνίδιες μεταβολές (*shocks*) στις τιμές πετρελαίου που άρχισαν το 1973, συνοδεύτηκαν από υψηλό πληθωρισμό και βίαιες διακυμάνσεις στα επιτόκια.

- Τη Μαύρη Δευτέρα (*Black Monday*) τον Οκτώβριο του 1987, οι Αμερικανικές μετοχές κατέρρευσαν πέφτοντας 23 τοις εκατό, εξαφανίζοντας ταυτόχρονα 1 περίπου τρις Αμερικανικά δολάρια ($) σε κεφάλαια.

- Κατά την πανωλεθρία στην αγορά ομολόγων το 1994, η Κεντρική Ομοσπονδιακή Τράπεζα των Η.Π.Α, αφού προηγουμένως είχε διατηρήσει τα επιτόκια για τρία συνεχόμενα έτη σε ιστορικά χαμηλά, ξεκίνησε έξι διαδοχικές αυξήσεις στα επιτόκια, κίνηση με την οποία εξάλειψε περίπου 1.5 τρις δολάρια ($) κεφαλαίων σε παγκόσμιο επίπεδο.

- Η Ιαπωνική φούσκα μετοχών η οποία έλαβε χώρα στα τέλη του 1989, στέλνοντας το δείκτη Nikkei από τις 39.000 στις 17.000 μονάδες τρία χρόνια αργότερα. Συνολικά χάθηκαν 2.7 τρις δολάρια ($), οδηγώντας την Ιαπωνία σε μια άνευ προηγουμένου χρηματοπιστωτική κρίση.

- Οι αναταραχές στα Ασιατικά χρηματιστήρια το 1997, εξαφάνισαν περί τα 3/4 των κεφαλαίων σε Αμερικανικά Δολάρια σε χώρες της Ασιατικής Ηπείρου.

- Η Ρωσική χρεοκοπία του 1998, πυροδότησε μια παγκόσμια κρίση, η οποία κορυφώθηκε αργότερα με την αποτυχία ενός μεγάλου *hedge fund*.

- Το Σεπτέμβριο του 2001, μετά από τρομοκρατική επίθεση στο Παγκόσμιο κέντρο εμπορίου στην καρδιά της Νέας Υόρκης, οι αγορές πάγωσαν για 6 συνεχείς ημέρες. Πέραν των απωλειών σε ανθρώπινες ζωές, το κόστος για την Αμερικανική οικονομία ανήλθε στο 1.7 τρις δολάρια ($) σε αξία.

- Το Σεπτέμβριο του 2008, έλαβε χώρα η μεγαλύτερη φούσκα ακινήτων στην παγκόσμια ιστορία και ταυτόχρονα η Αμερικανική επενδυτική τράπεζα κολοσσός Lehmman Brothers κατέρρευσε υπό το βάρος τοξικών χρηματοοικονομικών προϊόντων, οδηγώντας τις Η.Π.Α στη δεύτερη μεγαλύτερη ύφεση που γνώρισαν από το 1929. Εκτός του ότι οι ζημιές για την Αμερικανική οικονομία ήταν ανυπολόγιστες, ο αντίκτυπος για την παγκόσμια οικονομία ήταν και συνεχίζει να είναι τεράστιος μέχρι και σήμερα.

Το μόνο κοινό στοιχείο που παρατηρείται ανάμεσα στα γεγονότα που παρατέθηκαν είναι η μη προβλεπτικότητα. Αποτέλεσμα της δυσκολίας για πρόγνωση των μελλοντικών καταστάσεων, είναι οι χρηματοπιστωτικές αγορές ανά τον κόσμο να μένουν εμβρόντητες με την ταχύτητα κατά την οποία εξελίσσονται οι μεταβολές. Αυτές με τη σειρά τους, ευθύνονται για ουσιαστικές χρηματοοικονομικές ζημίες, που συχνά επηρεάζουν τόσο οικονομίες χωρών ανά τον κόσμο όσο και το χρηματοπιστωτικό σύστημα στο σύνολό του (Jorion, 2007).

1.5 Τα Είδη των Κινδύνων

Οι επιχειρήσεις είναι συχνά εκτεθειμένες σε διάφορους τύπους κινδύνων καθένας από τους οποίους μπορεί να καταταχθεί ευρύτερα είτε σε επιχειρηματικούς κινδύνους είτε σε χρηματοοικονομικούς και επενδυτικούς.

Επιχειρηματικοί Κίνδυνοι είναι αυτοί τους οποίους η εκάστοτε επιχείρηση λαμβάνει υπ' όψιν, στην προσπάθεια της να δημιουργήσει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα και να προσθέσει αξία στους μετόχους. Ο επιχειρηματικός κίνδυνος γενικότερα περιλαμβάνει τόσο τις επιχειρηματικές αποφάσεις που λαμβάνουν οι οργανισμοί όσο και το επιχειρηματικό περιβάλλον στο οποίο επιχειρούν και ενεργούν. Οι επιχειρηματικές αποφάσεις με τη σειρά τους, περιλαμβάνουν εκείνες τις αποφάσεις που συνδέονται με τη διεξαγωγή επενδύσεων, τις επιλογές ανάπτυξης προϊόντος, αλλά και τις στρατηγικές μάρκετινγκ.

- *Στρατηγικοί Κίνδυνοι* που απορρέουν από την οργανωτική δομή που διαμορφώνει κάθε οργανισμός και περιλαμβάνουν αποφάσεις που λαμβάνονται στα ανώτατα επίπεδα ιεραρχίας της εταιρείας από στελέχη.

- *Μακροοικονομικοί Κίνδυνοι* που απορρέουν από το ευμετάβλητο και συχνά ασταθές επιχειρηματικό περιβάλλον μέσα στο οποίο λειτουργούν οι επιχειρήσεις. Μάλιστα μια συνετή έκθεση σε επιχειρηματικό κίνδυνο, αποτελεί μια βασική ικανότητα κάθε επιχειρηματικής δραστηριότητας.

Χρηματοοικονομικοί Κίνδυνοι είναι αυτοί οι οποίοι σχετίζονται με πιθανές απώλειες εξαιτίας χρηματοοικονομικών δραστηριοτήτων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα, αποτελούν απώλειες που συμβαίνουν ως αποτέλεσμα αλλαγών στα επιτόκια αγοράς ή αθέτησης υποχρεώσεων. Όσον αφορά βιομηχανικούς οργανισμούς, η έκθεσή τους σε χρηματοοικονομικούς κινδύνους πάσης φύσεως θα πρέπει να γίνεται προσεκτικά ώστε οι επιχειρήσεις να επικεντρώνονται σε αυτό που κάνουν καλύτερα - δηλαδή τη διαχείριση της έκθεσης σε επιχειρηματικούς κινδύνους.

Σε αντίθεση με όσα προαναφέρθηκαν, πρωταρχική λειτουργία των χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων, αποτελεί η ενεργή διαχείριση των χρηματοοικονομικών κινδύνων και σκοπός τους είναι τόσο να μεσολαβούν όσο και να συμβουλεύουν σχετικά με αυτούς τους κινδύνους. Κύριο μέλημα τέτοιων ιδρυμάτων, θα πρέπει να είναι η μέτρηση του κινδύνου με τη μεγαλύτερη ακρίβεια, έτσι ώστε να καθίσταται αποτελεσματικότερος ο έλεγχος και η αξιολόγησή του. Κατανοώντας τον κίνδυνο, οι διαχειριστές του μπορούν πιο εύκολα να προγραμματίζουν και να λαμβάνουν μέτρα για την αντιμετώπισή του, να είναι με άλλα λόγια καλύτερα προετοιμασμένοι για την «αναπόφευκτη αβεβαιότητα».

Οι ***Επενδυτικοί Κίνδυνοι*** είναι αυτοί που τροφοδοτούνται από τη συγκυρία και συνδέονται άρρηκτα με το μακροοικονομικό περιβάλλον και τη γενικότερη κατάσταση που επικρατεί σε μια χώρα στην οποία έχει πραγματοποιηθεί η επένδυση, αποτελώντας ταυτόχρονα κινδύνους που συνδέονται τόσο με την επιχείρηση όσο και με τον κλάδο.

Η διερεύνηση των επενδυτικών κινδύνων από μια ευρύτερη οπτική, συνηγορεί στο ότι όλοι οι κίνδυνοι εντάσσονται σε δύο κατηγορίες:

- Οι πρώτοι προέρχονται από το ευρύτερο οικονομικό πλαίσιο, τη λεγόμενη αγορά και δεν είναι εύκολα αντιμετωπίσιμοι από τον εκάστοτε επενδυτή, συχνά παραδείγματα των οποίων αποτελούν η επιδείνωση της διεθνούς και εθνικής οικονομικής κατάστασης, ο πληθωρισμός, η άνοδος ή η πτώση επιτοκίων, τα έκτακτα γεγονότα, οι τεχνολογικές εξελίξεις κ.α., όπως τονίζει ο Γκλεζάκος (2014). Όλοι αυτοί οι κίνδυνοι αποτελούν τον κίνδυνο αγοράς (*Market Risk*) ή αλλιώς το συστηματικό κίνδυνο.

- Οι δεύτεροι συνδέονται απευθείας με την ίδια την επένδυση. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών αποτελούν κακές επιλογές, λανθασμένες πολλές φορές εκτιμήσεις, κακές χρονικές τοποθετήσεις, βιαστικές αποφάσεις κ.α. Οι κίνδυνοι της εν λόγω κατηγορίας, αποτελούν τον ειδικό κίνδυνο ή διαφορετικά τον μη συστηματικό κίνδυνο (*Non-Systematic Risk*).

Όσον αφορά τον ειδικό κίνδυνο, αυτός μπορεί να αποτυπωθεί διαμέσου κάποιων συμψηφισμών, δεδομένου ότι εξαρτάται από τα δεδομένα των επιμέρους επενδύσεων. Μέσω του επιμερισμού των κεφαλαίων του σε πολλές επενδύσεις, ο επενδυτής προσδοκά στη λεγόμενη αντιστάθμιση του κινδύνου των στοιχείων που διακρατά, χρησιμοποιώντας τις υπεραποδόσεις της μιας επένδυσης προκειμένου να ισοσκελίσει της αποδόσεις της άλλης. Στην περίπτωση που προαναφέρθηκε και για να προκύψει το παραπάνω αποτέλεσμα, θα πρέπει να μην υπάρχει τέλεια θετική συσχέτιση μεταξύ των επενδύσεων που κάποιος έχει τοποθετηθεί και συνεπώς αυτή αποτελεί ένα χαρτοφυλάκιο επενδύσεων, όπως αναφέρει ο Γκλεζάκος (2014).

Ο συνολικός κίνδυνος μιας επένδυσης, που ουσιαστικά είναι το σύνολο τόσο του συστηματικού όσο και του μη συστηματικού, εκφράζεται με τη διακύμανση ή και την τυπική απόκλιση των αποδόσεων της γύρω από τη μέση τιμή της:

$$\sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{n} p_{it}[R_{it} - \bar{R}_i]^2$$

Ο συσχετισμός τυπικής απόκλισης και απόδοσης, εκφράζει τις μονάδες κινδύνου ανά μονάδα απόδοσης, είναι γνωστός ως συντελεστής μεταβλητότητας (*coefficient of variation*) και υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$CV = \frac{\sigma}{R_i}$$

Ο παραπάνω συντελεστής επιτρέπει στον επενδυτή τον καθορισμό της μεταβλητότητας ή του κινδύνου σε σχέση με το τι απόδοση προσδοκά να λάβει από την επένδυση στην οποία έχει τοποθετηθεί. Συνεπώς, όσο μικρότερη η αναλογία μεταξύ τυπικής απόκλισης και μέσης απόδοσης, τόσο καλύτερη ισορροπία μεταξύ κινδύνου και απόδοσης. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί, πως αν η αναμενόμενη απόδοση στον παρονομαστή είναι μηδέν ή παίρνει αρνητικές τιμές, ο συντελεστής σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αποτελέσει βάση για παρερμηνείες.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας, μπορεί να βοηθήσει τους επενδυτές να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ κινδύνου και ανταμοιβής. Για παράδειγμα, αν ένας επενδυτής δεν είναι ριψοκίνδυνος μπορεί να στρέφεται σε προϊόντα τα οποία παραδοσιακά ενέχουν μικρό βαθμό μεταβλητότητας και μεγάλο βαθμό απόδοσης. Αντιθέτως, οι πιο ριψοκίνδυνοι επενδυτές στρέφονται σε προϊόντα που εμπεριέχουν μεγάλο βαθμό μεταβλητότητας, αγνοώντας ενδεχόμενες απώλειες που μπορεί να υποστούν.

Είδη Χρηματοοικονομικών Κινδύνων

Μερικά είδη των χρηματοοικονομικών κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις και αξίζει να αναφερθούν είναι:

- *Κίνδυνος της Αγοράς* (*Market Risk*): Είναι ο κίνδυνος απώλειας λόγω μεταβολών που επέρχονται στην αγορά και περιλαμβάνει τον κίνδυνο τιμών, τον κίνδυνο επιτοκίων, το συναλλαγματικό κίνδυνο όπως επίσης και τον κίνδυνο βίαιων μεταβολών στις τιμές των μετοχών.

- *Πιστωτικός Κίνδυνος* (*Credit Risk*): Αποτελεί τον κίνδυνο κατά τον οποίο κάποιο από τα αντισυμβαλλόμενα μέρη μπορεί να αθετήσει τις υποχρεώσεις του προς το άλλο.

- *Λειτουργικός Κίνδυνος* (*Operational Risk*): Αποτελεί τον κίνδυνο απώλειας για την επιχείρηση, λόγω αποφάσεων αλλά και ενεργειών που αφορούν την ευρύτερη λειτουργία της επιχείρησης και είναι ένας από τους πιο σημαντικούς κινδύνους που αντιμετωπίζει ένας οργανισμός.

- *Κίνδυνος Ρευστότητας* (*Liquidity Risk*): Είναι ο κίνδυνος ο οποίος επηρεάζει την ικανότητα αγοράς ή πώλησης ενός περουσιακού στοιχείου, άλλοτε για λόγους αντιστάθμισης και άλλες φορές προκειμένου κάποιος επενδυτής να κλείσει μια ανοιχτή θέση του.

- *Κίνδυνος Χώρας* (*Country Risk*): Είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με το ενδεχόμενο αδυναμίας πληρωμών σε εξωτερικούς πιστωτές από την πλευρά μια χώρας.

- *Πολιτικός Κίνδυνος* (*Political Risk*): Αποτελεί τον κίνδυνο που συνδέεται άμεσα με αποφάσεις που λαμβάνονται από τις εκάστοτε κυβερνήσεις χωρών και επιφέρουν αλλαγές στο νομοθετικό πλαίσιο μιας χώρας.

- *Συστημικός Κίνδυνος* (*Systemic Risk*): Είναι ο κίνδυνος που απορρέει από την αδυναμία ενός χρηματοπιστωτικού οργανισμού, ο οποίος θα μπορούσε να προκαλέσει ντόμινο αλλά και επιμολύνσεις σε άλλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, απειλώντας το σύστημα στο σύνολό του.

- *Κίνδυνος Φήμης* (*Reputation Risk*): Αποτελεί τον κίνδυνο μια επιχείρηση ή ένας οργανισμός να επηρεαστεί αρνητικά, εξαιτίας ενός μη προβλέψιμου γεγονότος.

- *Περιβαλλοντικός Κίνδυνος* (*Environmental Risk*): Αποτελεί τον κίνδυνο κατά τον οποίο ένας οργανισμός μπορεί να υποστεί απώλειες από ζημιές που προκάλεσε στο περιβάλλον με δική του υπαιτιότητα ή μη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί η οικολογική καταστροφή που προκάλεσε η πετρελαϊκή εταιρεία BP στον Κόλπο του Μεξικού το 2010.

Κάθε ένας από τους παραπάνω χρηματοοικονομικούς κινδύνους που προαναφέρθηκαν και τους οποίους αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις, αποτελούν συχνά αιτία αστάθειας για τις ίδιες στο περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιούνται. Επιπρόσθετα, οι ενδεχόμενες απώλειες που υφίστανται από την έκθεσή τους σε αυτούς, συνιστούν πολλές φορές απειλή για την ίδια την ύπαρξή τους, γι' αυτό το λόγο οι εκάστοτε οργανισμοί δίνουν μεγάλη βαρύτητα στην αντιμετώπισή τους.

1.6 Η Διοικητική του Κινδύνου

Ο κίνδυνος (*Risk*) από μόνος του σαν έννοια έχει νόημα αλλά αυτό που πραγματικά ενδιαφέρει κάποιον είναι η σωστή διαχείρισή του, πράγμα το οποίο αποτελεί ίσως και το πιο σημαντικό βήμα στην πορεία ενός επενδυτή για μια επικερδή επένδυση. Εδώ και αρκετά χρόνια, το δικαίωμα του ορισμού και της διαχείρισης του κινδύνου ανήκει αποκλειστικά σε αυτούς που είναι υπεύθυνοι για την αντιστάθμισή του, τους λεγόμενους (*Risk Hedgers*) για τους οποίους σκοπός της διοικητικής κινδύνου είναι το να μειώνουν ή και ακόμη να εξαλείφουν κάθε πιθανή έκθεση στον κίνδυνο.

Το Γενικό Πλαίσιο Εφαρμογής της Διοικητικής Κινδύνου

Η Διοικητική του Κινδύνου (*Risk Management*) αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό μέρος στη διαδικασία που ακολουθείται προκειμένου να αντιμετωπιστεί ένας κίνδυνος. Για το λόγο αυτό, δημιουργήθηκε ένα πλαίσιο γύρω από το οποίο ένας οργανισμός αναπτύσσεται, εντάσσοντας διαδικασίες λήψης αποφάσεων, αντί να αντιμετωπίζει κάθε κίνδυνο ξεχωριστά. Η συγκεκριμένη πολιτική που εφαρμόζεται από τον εκάστοτε οργανισμό αποτελεί ένα εργαλείο, χάρη στο οποίο η ίδια η επιχείρηση μπορεί να επικοινωνεί τι η ίδια θεωρεί αποδεκτό επίπεδο κινδύνου. Οι διαδικασίες που εμπεριέχονται μέσα σε αυτό το πλαίσιο, περιλαμβάνουν εκτός των άλλων, δείκτες παρακολούθησης αλλά και κίνητρα για αποτελεσματικότερη διοίκηση. Μολονότι, πολλές επιχειρήσεις τα τελευταία χρόνια έχουν εντάξει πολιτικές και διαδικασίες προκειμένου να διαχειρίζονται τον κίνδυνο, όλοι οι οργανισμοί μηδενός εξαιρουμένου, θα πρέπει να εντείνουν συνεχώς τις προσπάθειές τους, ώστε να αναπτύσσουν νέα εργαλεία αναγνώρισης αλλά και διαχείρισης κάθε πιθανού κινδύνου (Horcher, 2005).

Το Προφίλ του Κινδύνου που Παρουσιάζει ένας Οργανισμός

Η ανάπτυξη μιας ευρύτερης πολιτικής για τη διαχείριση κινδύνου απαιτεί πρώτα από όλα να γίνει κατανοητό το προφίλ κινδύνου που έχει ένας οργανισμός. Αυτό εξαρτάται συνήθως από κάποια χαρακτηριστικά, όπως η κουλτούρα διαχείρισης που έχει η εκάστοτε επιχείρηση, οι μέτοχοί της όπως επίσης και το περιβάλλον μέσα στο οποίο δραστηριοποιείται.

Το πρώτο στάδιο προκειμένου ένας οργανισμός να διαχειριστεί τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο, είναι η σωστή αναγνώριση όλων των σχετικών εκθέσεων στις οποίες υποβάλλεται. Παρόλο που ο συνολικός κίνδυνος τον οποίο αντιμετωπίζει μια επιχείρηση συνίσταται σε επιμέρους κινδύνους όπως ο κίνδυνος μεταβλητότητας των τιμών ή ο κίνδυνος ρευστότητας, όλοι ωστόσο θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ενιαίο σύνολο όταν πρόκειται να αποτυπωθεί ο αντίκτυπος που πρόκειται να έχει για την επιχείρηση. Κι αυτό γιατί όλοι οι κίνδυνοι που εμφανίζονται δεν είναι κατ' αρχήν εμφανείς και αναγνωρίσιμοι από τον ίδιο τον οργανισμό. Παράδειγμα αποτελεί μια επιχείρηση η οποία έχει έσοδα σε συνάλλαγμα. Έτσι, στην περίπτωση που το ξένο νόμισμα ακολουθήσει πτωτική πορεία έναντι του εγχώριου, τα έσοδά της με τη σειρά τους θα μειωθούν. Από τη άλλη, καθώς τα έσοδα σε συνάλλαγμα μειώνονται, την ίδια στιγμή η ανατίμηση του εγχώριου νομίσματος καθιστά τα προϊόντα της μη ανταγωνιστικά.

Το δεύτερο στάδιο είναι ο έλεγχος του κινδύνου, ο οποίος επιτυγχάνεται μέσω της αντιστάθμισής του. Μολονότι, αρκετοί μεγάλοι οργανισμοί χρησιμοποιούν μια σαφή τακτική αντιστάθμισής του, πολλοί άλλοι απλά δεν το πράττουν. Ο καθορισμός από την ίδια την επιχείρηση σχετικά με το τι κίνδυνος αντισταθμίζεται αλλά και το μέγεθος αυτού που θα πρέπει να αναληφθεί, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον ίδιο τον οργανισμό, την ασφάλεια των εκτιμήσεων που δίνονται από τα στελέχη του όπως και τη σωστή αξιολόγηση των πιθανών εκθέσεων που πρόκειται να υποβληθεί. Στην περίπτωση όπου μια επιχείρηση αποφάσιζε να μην αντισταθμίσει τον κίνδυνο, αυτή μπορεί να εκτίθονταν σε μεταβολές τιμών οι οποίες μπορούσαν να οδηγήσουν άλλοτε σε κέρδη και άλλες φορές σε ζημίες (Horcher, 2005).

Το Επίπεδο Ανοχής στον Κίνδυνο από την Πλευρά του Οργανισμού

Η διαχείριση του κινδύνου εμπεριέχει τη μείωση της πιθανότητας ενδεχόμενων απωλειών. Ο σωστός καθορισμός ενός αποδεκτού επιπέδου κινδύνου, αλλά και έκθεσης από μεριά ενός οργανισμού, συμβάλλει στη διαμόρφωση στρατηγικών διαχείρισης, επιτρέποντας λήψεις αποφάσεων σχετικά με το τι απώλειες μπορεί να γίνουν αποδεκτές από τον οργανισμό. Η ανοχή στον κίνδυνο, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ικανότητα μιας επιχείρησης να ανθίσταται σε αυτόν. Εξαρτάται επομένως από την κουλτούρα που υιοθετεί ένας οργανισμός και αυτή τις περισσότερες φορές διαμορφώνεται από τους μετόχους του. Πρέπει επίσης να τονιστεί, πως ο καθορισμός ενός αποδεκτού επιπέδου του κινδύνου είναι πολύ σημαντικός, καθώς η επιχείρηση και ο κίνδυνος αλληλοσυνδέονται μεταξύ τους. Έτσι, η απόφαση σχετικά με την ανοχή του κινδύνου από την πλευρά της επιχείρησης, καθορίζεται από τις ανάλογες ευκαιρίες που παρουσιάζονται για κέρδη.

Η ανοχή στον κίνδυνο από μέρος του οργανισμού εξαρτάται τόσο από τη φύση του ίδιου όσο και από το περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιείται. Προκειμένου να εφαρμόσει μια στρατηγική αντιστάθμισης του κινδύνου, θα ήταν σκόπιμο να λάβει υπόψη του ορισμένα στοιχεία. Έτσι, η δομή που έχει ένας οργανισμός παρέχει πληροφορίες, σχετικά με τον κίνδυνο που μπορεί να αναλάβει. Επίσης, ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί προσφέρει κατευθυντήριες γραμμές για το σκοπό αυτό. Επιπροσθέτως, λόγος πρέπει να γίνεται τόσο για τις αρχές κάτω από τις οποίες λειτουργεί ο εκάστοτε οργανισμός, οι οποίες με τη σειρά τους συχνά επηρεάζουν την κουλτούρα του, όσο και τα προσωπικά χαρακτηριστικά των μετόχων του (Horcher, 2005).

Η Διαχείριση του Κινδύνου μέσα στο Ανταγωνιστικό Περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιείται ένας Οργανισμός

Μια πολύ σημαντική παράμετρος στη διαδικασία που ακολουθείται για την αντιστάθμιση του κινδύνου από τη μεριά ενός οργανισμού, είναι το πως τοποθετούνται οι ανταγωνιστές του στην αγορά. Λόγου χάριν, στην περίπτωση όπου ένας οργανισμός προβαίνει σε αντιστάθμιση κινδύνου ενώ οι ανταγωνιστές του δεν το πράττουν, αυτό αποτελεί αυτόματα μειονέκτημα για τον ίδιο τον οργανισμό. Επίσης, οι όποιες αλλαγές επέρχονται στη τιμολογιακή πολιτική που ακολουθεί, επιφέρουν αλλαγές στα κόστη και αυτές με τη σειρά τους στις συμπεριφορές των καταναλωτών.

Κατά συνέπεια, ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος μετακυλύει συχνά στους τελικούς καταναλωτές με τη μορφή της προσαρμογής στις τιμές, ελαττώνοντας με τον τρόπο αυτό την όποια επίδραση στον ίδιο τον οργανισμό. Αυτό συναντάται συνήθως στην περίπτωση όπου η αλλαγή στη ζήτηση αποδεικνύεται σχετικά αργή σε σχέση με τις αλλαγές που επέρχονται στις τιμές. Οι δραστηριότητες των ανταγωνιστών και της αγοράς, επηρεάζουν το τοπίο του ανταγωνισμού που διαμορφώνεται με τρόπους όπως η ενδεχόμενη ροπή των πελατών να αποδέχονται τον κίνδυνο μέσα από αυξήσεις τιμών ή και ακόμη, η προθυμία από πλευράς προμηθευτών να δεσμεύονται σε συμβόλαια, στα οποία έχει προκαθοριστεί μια σταθερή τιμή εκ των προτέρων χωρίς να επηρεάζεται από τον συναλλαγματικό κίνδυνο (Horcher, 2005).

Παράγοντες που Συντελούν στην Αντιστάθμιση του Κινδύνου

Ο πρώτος και πιο σημαντικός παράγοντας αντιστάθμισης εντοπίζεται σε προϊόντα διαχείρισής του, τα οποία δεν είναι άλλα από προϊόντα αντιστάθμισης κινδύνου (*risk hedging products*) όπως τα χρηματοοικονομικά παράγωγα και τα προϊόντα ανταλλαγών (*Swaps*). Τα συγκεκριμένα προϊόντα, αποφέρουν σημαντικά έσοδα για αυτούς που τα προσφέρουν και αξίζει να σημειωθεί πως αποτελούν τη ραχοκοκαλιά της διοικητικής κινδύνου. Ο δεύτερος παράγοντας αφορά την ίδια την ανθρώπινη φύση, η οποία κάνει τον άνθρωπο να θυμάται περισσότερο τις απώλειες παρά τα όποια κέρδη. Ο τρίτος παράγοντας, σχετίζεται με το διαχωρισμό της διοίκησης από την ιδιοκτησία και ο οποίος εν τέλει, είναι και αυτός που δημιουργεί έντονες διαφωνίες ανάμεσα στους μετόχους και τους μάνατζερ, για το τι είναι σωστό για την εύρυθμη λειτουργία της επιχείρησης. Έτσι, οι μάνατζερ είναι αυτοί που στο τέλος της ημέρας θα αποφασίσουν για το πόσο κίνδυνο είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν και πως θα αντισταθμίσουν αυτόν και όχι οι ιδιοκτήτες, που μπορεί ποτέ να μη δεχόντουσαν να αναλάβουν, ούτε καν να αντισταθμίσουν έναν επερχόμενο κίνδυνο.

Μολονότι η έλξη που προσφέρει ο κίνδυνος σε αυτόν που δέχεται να τον αναλάβει είναι μεγάλη, η διαχείριση του ίδιου του κινδύνου αποτελεί κάτι παραπάνω από την απλή αντιστάθμισή του. Επιχειρήσεις που είναι σταθερά διστακτικές στην ανάληψή του ρίσκου, συνηθίζουν να μην παίρνουν θέση, ακόμη και όταν η ανάληψη ενός κινδύνου θα μπορούσε να λειτουργήσει προς όφελός τους. Στην πραγματικότητα, οι πιο επιτυχημένες επιχειρήσεις της εποχής μας, από τη General Motors στις αρχές του 20^{ου} αιώνα μέχρι τη Microsoft, τη WalMart και τη Google του σήμερα, κάθε μια από αυτές έφθασε στην κορυφή, διότι μελέτησε συγκεκριμένους κινδύνους που θα μπορούσε να εκμεταλλευτεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να τοποθετηθεί μπροστά από τους ανταγωνιστές της και τους χρησιμοποίησε προς ίδιον όφελος. Αυτή θα μπορούσε να αποτελεί μια ολοκληρωμένη προσέγγιση για τη διοικητική κινδύνου, όπως αυτή συλλαμβάνει τόσο την αντιστάθμισή του από τη μία πλευρά, όσο και τον στρατηγικό κίνδυνο από την άλλη.

1.7 Ανακεφαλαίωση

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού, ήταν η ανάλυση του κινδύνου και η ανάγκη αντιμετώπισής του. Αρχικά, έγινε προσπάθεια διαχωρισμού του σε δύο συνισταμένες, στο φυσικό κίνδυνο που αποτελεί μέρος της ανθρώπινης φυσικής δραστηριότητας από τη μια και στον οικονομικό κίνδυνο που απορρέει από τις αποφάσεις των ανθρώπων στις εμπορικές δραστηριότητες που αναπτύσσουν, τόσο σε επίπεδο οργανισμών και επιχειρήσεων (επιχειρηματικός) όσο και σε επίπεδο χρηματοοικονομικών αγορών (χρηματοοικονομικός) και επενδύσεων (επενδυτικός) από την άλλη. Το κεφάλαιο έκλεισε, με μια συνοπτική παρουσίαση διαφόρων ειδών χρηματοοικονομικών κινδύνων που υπάρχουν, οι οποίοι είναι αυτοί που μας ενδιαφέρουν και αποτελούν αντικείμενο μελέτης στο πεδίο των χρηματοοικονομικών. Παράλληλα, έγινε μια εκτενής αναφορά στη διοικητική του κινδύνου, στο προφίλ των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι οργανισμοί, όπως επίσης και στους τρόπους με τους οποίους οι οργανισμοί επιλέγουν να τους διαχειρίζονται και να τους αντισταθμίζουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ

2.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα έχουν γίνει μάρτυρες απρόσμενων αλλαγών που συμβαίνουν στις διεθνείς αγορές. Για το λόγο αυτό, κεντρικές τράπεζες και άλλες αρχές που είναι υπεύθυνες ώστε να ρυθμίζουν την αγορά (*regulators*) έχουν οδηγηθεί από πολύ νωρίς στην επανεξέταση των κεφαλαιακών αναγκών που κρίνεται αναγκαίο να έχουν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, μεταξύ αυτών εμπορικές τράπεζες και ασφαλιστικοί οργανισμοί προκειμένου να διαχειρίζονται αποτελεσματικότερα τον κίνδυνο.

Τα συγκεκριμένα ιδρύματα, υποχρεούνται να έχουν επαρκή κεφάλαια ούτως ώστε να παρέχουν ένα δίχτυ ασφαλείας, έναντι απρόσμενων απωλειών. Για ένα μεγάλο διάστημα ωστόσο, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις δεν ήταν τόσο αυστηρές για τους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς και δεν αντανακλούσαν τους βαθύτερους οικονομικούς κινδύνους που αντιμετωπίζουν αυτά τα ιδρύματα. Ένα σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση αυτή, ήταν η εισαγωγή και η τήρηση νέων κεφαλαιακών απαιτήσεων βασισμένων στον κίνδυνο.

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα προκειμένου να μετρήσουν και να αξιολογήσουν τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο που συνδέεται με ενδεχόμενες απώλειες, χρησιμοποιούν κατά κόρον κάποιες από τις πιο γνωστές μεθόδους μέτρησης του, όπως είναι η μέθοδος αποτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk) ή (VaR), η μέθοδος Expected Shortfall, η αναλογία του Sortino (Sortino Ratio), η ανάλυση σεναρίου (Scenario Analysis) και οι δοκιμές πίεσης (Stress Testing). Κύριο χαρακτηριστικό αυτών των τεχνικών, είναι η έμφαση που δίνεται στην ανάλυση μόνο των κακών σεναρίων που ενδέχεται να επικρατήσουν μελλοντικά.

Από τις τεχνικές μέτρησης που προαναφέρθηκαν, η μέθοδος αποτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο αποτελεί και την πιο συχνά εφαρμοζόμενη μέθοδο που χρησιμοποιείται από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, όπως τράπεζες και εταιρείες επενδυτικών κεφαλαίων, προκειμένου να έχουν άμεση εικόνα των πιθανών απωλειών που ενδέχεται να υποστούν σε ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Κατά συνέπεια, η συγκεκριμένη μέθοδος αποτελεί ένα μέτρο αποτίμησης των αναμενόμενων απωλειών για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης και μπορεί να μεταφράζεται άμεσα σε ένα μέτρο ρύθμισης κεφαλαίων.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί η μέθοδος αποτίμησης κινδύνου VaR ή αλλιώς της Αξίας σε Κίνδυνο. Αρχικά θα δοθεί ο ορισμός της και ο τρόπος υπολογισμού της, θα αναλυθούν οι δύο βασικές μέθοδοι αποτίμησής της (μη παραμετρική και παραμετρική) καθώς και η μέθοδος ελέγχου της εγκυρότητας των υποδειγμάτων VaR με τη διαδικασία του επανελέγχου (*backtesting*). Στη συνέχεια, αφού πραγματοποιηθεί η διάσπαση του VaR στα τρία βασικά μέρη του, θα παρουσιαστούν εκτενώς τα εργαλεία του, βάσει των οποίων μπορεί να αποτιμηθεί ένας κίνδυνος. Το παρόν κεφάλαιο, θα κλείσει με αναφορά σε γενικές τεχνικές προσομοίωσης του VaR, όπως είναι η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation) και η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo και θα παρουσιαστούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε μιας μεθόδου.

2.2 Ορισμός της Αξίας σε Κίνδυνο

Η μέθοδος της Αξίας σε Κίνδυνο (Value-at-Risk) είναι ένα στατιστικό μέτρησης της κάτω πλευράς του κινδύνου βασισμένο στις τωρινές θέσεις που έχουν ληφθεί. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα αυτού του μέτρου, είναι ότι καταφέρνει να συνοψίσει τον κίνδυνο σε έναν και μόνο εύκολα κατανοητό αριθμό. Αυτό εξηγεί και το γεγονός γιατί το VaR έχει γίνει ένα εργαλείο για να κατανοούνται καλύτερα οι κίνδυνοι που απορρέουν από τις εμπορικές δραστηριότητες μιας επιχείρησης από τα ανώτερα στελέχη διοίκησης, όπως λόγου χάριν οι διαχειριστές κινδύνου ή ακόμη και οι διευθυντές, όπως αναφέρει ο Jorion (2007).

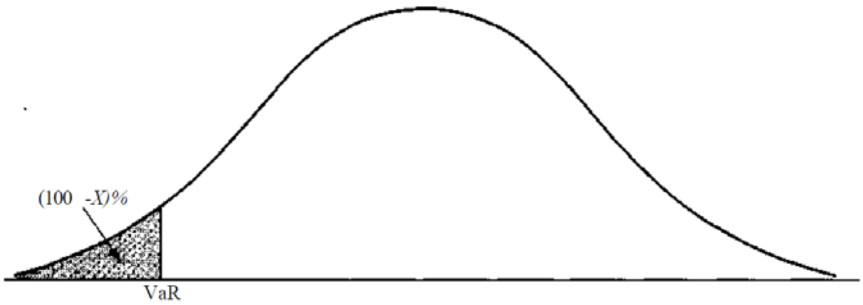
Η J.P. Morgan Chase ήταν η πρώτη τράπεζα η οποία εφήρμοσε τη μέθοδο VaR. Στην ετήσια έκθεση που υπέβαλλε το 1994 ανέφερε πως το ημερήσιο *Trading VaR* της ήταν κατά μέσο όρο 15 εκατομμύρια δολάρια ($) σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης. Βασισμένοι σε αυτή την πληροφορία, οι μέτοχοι της εταιρείας ήταν σε θέση να κρίνουν αν ήταν ικανοποιημένοι σε αυτό το επίπεδο κινδύνου. Ωστόσο, προτού αποκαλυφθούν αυτά τα στοιχεία, οι μέτοχοι είχαν μια ασαφή εικόνα σχετικά με τον κίνδυνο που απέρρεε από τις εμπορικές δραστηριότητες που αναλάμβανε η τράπεζα, με αποτέλεσμα να μη γωρίζουν επακριβώς την έκθεσή τους στον κίνδυνο.

Τρόπος Υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο

Ο τρόπος καθορισμού του υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) δίνεται ως εξής:

Το VaR αποτελεί τη χειρότερη δυνατή απώλεια που μπορεί να υποστεί κάποιος, τέτοια ώστε να υπάρχει μια μικρή μόνο προκαθορισμένη πιθανότητα οι πραγματικές απώλειες που θα βιώσει να είναι μεγαλύτερες. Αυτός ο ορισμός περιλαμβάνει δύο ποσοτικούς παράγοντες, το χρονικό ορίζοντα και το επίπεδο εμπιστοσύνης (*confidence level*). Συμβολίζοντας με c το επίπεδο εμπιστοσύνης και L την απώλεια με την οποία μετράται το VaR προκύπτει ένας γενικός ορισμός του VaR, ο οποίος δίνεται ως η μικρότερη απώλεια σε απόλυτο αριθμό τέτοια ώστε:

$$P(L > VaR) \leq 1 - c$$



Πηγή: Hull (2002)

Διάγραμμα 2.1

Περιγραφή του VaR

Λόγου χάριν, για ένα 99.9% επίπεδο εμπιστοσύνης το VaR θα είναι η χειρότερη απώλεια που μπορεί να υποστεί κάποιος, τέτοια ώστε η πιθανότητα να υπάρξει μια μεγαλύτερη απώλεια να είναι μικρότερη από 0.1%. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει πως υπάρχει 0.1% πιθανότητα οι απώλειες που θα έχει κάποιος να είναι μεγαλύτερες από τις αναμενόμενες.

Βήματα Υπολογισμού της Αξίας σε Κίνδυνο

Ας θεωρηθεί για παράδειγμα ότι κάποιος επιχειρεί να μετρήσει το VaR ενός χαρτοφυλακίου μετοχών αποτελούμενο από 100 εκ. δολάρια ($) για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης. Τα επόμενα βήματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό του VaR δίνονται παρακάτω:

- Ορισμός της αξίας του χαρτοφυλακίου που υπάρχει προς διάθεση (π.χ. 100 εκ. ($)).

- Μέτρηση της μεταβλητότητας του παράγοντα κινδύνου (π.χ 15% κάθε χρόνο).

- Καθορισμός του χρονικού ορίζοντα (π.χ 10 ημέρες διαπραγμάτευσης).

- Καθορισμός του επιπέδου εμπιστοσύνης (π.χ 99%, το οποίο συνίσταται 2.33, θεωρώντας ότι πρόκειται για κανονική κατανομή).

- Αναφορά στη χειρότερη δυνατή απώλεια, με τη μετατροπή όλων των προηγούμενων διαθέσιμων πληροφοριών σε μια κατανομή πιθανότητας των εσόδων, η οποία συνοψίζεται από το VaR (π.χ 7 εκ. δολάρια ($) σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης (Jorion, 2007).

Με τη διαδικασία που περιγράφηκε δίνεται μια πλήρης εικόνα για την πορεία που κάποιος πρέπει να ακολουθήσει ώστε να υπολογίσει την Αξία σε Κίνδυνο. Γίνεται άμεσα αντιληπτό πως τα βήματα της εν λόγω διαδικασίας παραμένουν τα ίδια, είτε πρόκειται για διαφορετικό επίπεδο εμπιστοσύνης ή μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα από το προαναφερθέν παράδειγμα.

2.3 Μη Παραμετρικό και Παραμετρικό VaR

Οι δύο κυριότερες μέθοδοι αποτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) είναι η μη παραμετρική και η παραμετρική μέθοδος. Τα μη παραμετρικά υποδείγματα, όπως λόγου χάρη τα υποδείγματα που βασίζονται στην ιστορική προσομοίωση, αυτά δεν απαιτούν να γίνει εκ των προτέρων καμία υπόθεση σχετικά με την κατανομή των παραγόντων κινδύνου, καθώς βασίζονται αποκλειστικά στην ιστορική κατανομή των αποδόσεων των παραγόντων κινδύνου. Όσον αφορά τα παραμετρικά VaR υποδείγματα, αυτά βασίζονται σε γνωστές στατιστικές κατανομές προκειμένου να καθορίσουν την κατανομή των αποδόσεων, ώστε να εκτιμήσουν εν τέλει την τυπική απόκλιση των αποδόσεων ενός περουσιακού στοιχείου. Για το λόγο αυτό ασφαλείς προβλέψεις της μεταβλητότητας αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι κάθε αξιόπιστου VaR υποδείγματος. Στην ενότητα αυτή, θα περιγραφούν αναλυτικά οι δύο μέθοδοι αποτίμησης της Αξίας σε Κίνδυνο και θα δοθούν τα χαρακτηριστικά κάθε μιας μεθόδου ξεχωριστά.

2.3.1 Μη Παραμετρικό VaR

Χρησιμοποιώντας την πιο γενική μέθοδο υπολογισμού του, δε γίνεται καμία υπόθεση σχετικά με τη μορφή της κατανομής των αποδόσεων. Αν καθοριστεί το W_o ως η αρχική επένδυση, ως R το ποσοστό της απόδοσής της, το οποίο είναι τυχαίο, και εφόσον θεωρηθεί επίσης πως η θέση που κάποιος έχει τοποθετηθεί είναι προκαθορισμένη, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου του στο τέλος του χρονικού ορίζοντα που έχει τεθεί θα είναι $W = W_o(1+R)$. Επίσης, η αναμενόμενη απόδοση και η μεταβλητότητα του R ορίζονται με μ και σ αντίστοιχα. Ας θεωρηθεί τώρα ότι η μικρότερη τιμή του χαρτοφυλακίου σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης c είναι $W^* = W_o(1+R^*)$. Το VaR μετρά τη χειρότερη απώλεια σε κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης, και εκφράζει ένα θετικό αριθμό. Βέβαια το ερώτημα που τίθεται είναι αναφορικά με τι είναι σχετικός αυτός ο αριθμός που αποδίδεται μέσω του VaR. Μια προσέγγιση που δίνεται για να καθοριστεί η σχετική Αξία σε Κίνδυνο ή (*relative*) VaR δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$VaR(mean) = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu) \tag{2.1}$$

Συχνά το *trading* VaR ορίζεται ως το *absolute* VaR και αποτυπώνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$VaR(zero) = W_0 - W^* = -W_0 R^*$$

Εφόσον ο χρονικός ορίζοντας είναι μικρός, η μέση απόδοση θα μπορούσε να είναι μικρή, ωστόσο και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις θα δίνονται παρόμοια αποτελέσματα. Αλλιώς, το σχετικό (*relative*) VaR είναι εννοιολογικά περισσότερο κατάλληλο, διότι αποτυπώνει τον κίνδυνο σε όρους απόκλισης από το μέσο στην ημερομηνία στόχο και αντιπροσωπεύει με τον καλύτερο τρόπο τη «χρονική αξία» των χρημάτων. Η προσέγγιση που μόλις αναφέρθηκε, είναι κατά βάση πιο συντηρητική, αν η τιμή του μέσου είναι θετική. Αποτελεί επίσης μια πιο συνεπή προσέγγιση, όταν πρόκειται για μη αναμενόμενες απώλειες και η οποία έχει γίνει συνήθης πρακτική στη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου για μεγάλους χρονικούς ορίζοντες (Jorion, 2007).

Στην πιο γενική μορφή του το VaR μπορεί να παραχθεί από την κατανομή πιθανότητας της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου $f(w)$. Σε δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης c, προσδοκάται να βρεθεί το χειρότερο δυνατό W^*, ώστε η πιθανότητα να ξεπεραστεί αυτή η τιμή να είναι c τέτοιο ώστε:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw$$

ή τέτοιο ώστε η πιθανότητα μιας τιμής μικρότερης από W^*, $p = P(w \le W^*)$ να είναι $1-c$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$1-c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \le W^*) = p$$

Με άλλα λόγια, η περιοχή από το $-\infty$ μέχρι το W^* πρέπει να αθροίζει στο $p = 1-c$. Ο αριθμός W^* καλείται ως το ποσοστημόριο της κατανομής και ο οποίος είναι η αποκομμένη (*cut-off*) τιμή με προκαθορισμένη πιθανότητα αυτή η τιμή να ξεπεραστεί. Σε αυτό το σημείο, ας σημειωθεί ότι δε χρησιμοποιήθηκε η τυπική απόκλιση για την εύρεση του VaR και πως ο πιο πάνω προσδιορισμός ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή συνεχή ή διακριτή, με παχιές ουρές ή με λεπτές.

2.3.2 Παραμετρικό VaR

Ο υπολογισμός του VaR μπορεί να απλουστευθεί αν η κατανομή μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στην παραμετρική οικογένεια κατανομών, όπως είναι η κανονική κατανομή. Παρόλο που αυτή είναι η συνήθης περίπτωση, το VaR μπορεί να προκύψει και απευθείας από την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ο οποίος εξαρτάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης. Αυτή η μέθοδος καλείται παραμετρική κι αυτό διότι περικλείει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, όπως είναι η τυπική απόκλιση χωρίς να περιορίζεται μόνο στην ανάγνωση του ποσοστημορίου πίσω από την εμπειρική συνάρτηση κατανομής.

Αυτή η μέθοδος είναι απλή και βολική, καθώς παράγει πιο ακριβείς μετρήσεις του VaR. Το θέμα έγκειται στο εάν η υπόθεση που γίνεται για την κατανομή είναι ρεαλιστική. Ας υποτεθεί ότι τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται περιγράφονται από την κανονική κατανομή. Αρχικά θα χρειαστεί να μεταφραστεί η γενική κατανομή $f(w)$ σε μια τυπική κανονική κατανομή $\Phi(\varepsilon)$, όπου το ε έχει μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση τη μονάδα και στη συνέχεια να συνδεθεί το W^* με την αποκομμένη (*cutoff*) απόδοση R^* έτσι ώστε να ισχύει $W^* = W_o(1+R^*)$. Γενικά το R^* είναι αρνητικό και μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή $-\left\|R^*\right\|$. Μπορεί επίσης το R^* να συνδεθεί με έναν αριθμό $a > 0$ θέτοντας:

$$-a = \frac{-\left\|R^*\right\| - \mu}{\sigma} \tag{2.2}$$

Ισοδύναμα αυτό μπορεί να τεθεί:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-\left\|R^*\right\|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-a} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

Έτσι το πρόβλημα της εύρεσης του VaR είναι ισοδύναμο με το να προκύψει ένας αριθμός a τέτοιος, ώστε η περιοχή που περικλείεται αριστερά από αυτό τον αριθμό να είναι ίση με $1-c$. Για προκαθορισμένη πιθανότητα p, ο αριθμός a μπορεί να βρεθεί από τους πίνακες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$p = N(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon \tag{2.3}$$

Η συνάρτηση όπως δίνεται από την εξίσωση (2.3) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση δικαιωμάτων μέσω του μοντέλου Black and Scholes. Η εν λόγω εξίσωση, αυξάνει μονότονα από το 0 (για $x = -\infty$) στο 1 (για $x = +\infty$) μέσω του 0.5 καθώς το x περνά διαμέσου του μηδενός. Έπειτα, επαναλαμβάνοντας τα βήματα που απαιτήθηκαν, από τον υπολογισμό του a, υπολογίζεται η αποκομμένη (*cut-off*) τιμή της απόδοσης R^* και το VaR. Μετασχηματίζοντας την εξίσωση (2.2) προκύπτει η αποκομμένη τιμή (*cut-off*) της απόδοσης, η οποία περιγράφεται με την ακόλουθη σχέση:

$$R^* = -a\sigma + \mu$$

Ας υποτεθεί τώρα πως οι παράμετροι μ και σ εκφράζονται σε ετήσια βάση και το χρονικό διάστημα συμβολίζεται με Δt και αφορά έτη.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.1) το VaR μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με το μέσο σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$VaR(mean) = -W_o(R^* - \mu) = W_o \alpha \sigma \sqrt{\Delta t}$$

Οι δύο μέθοδοι δίνουν παρόμοια αποτελέσματα κατά τον υπολογισμό του VaR. Στην περίπτωση που το επίπεδο εμπιστοσύνης δεν είναι αρκετά μεγάλο, τυπικά χαμηλότερο από το 99%, η κανονική κατανομή αναπαριστά πολλές εμπειρικές κατανομές, ειδικά για μεγάλα, καλά διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια.

Η παραμετρική μέθοδος γενικεύεται και σε άλλες κατανομές, στην περίπτωση όπου όλη η αβεβαιότητα εμπεριέχεται στην παράμετρο σ. Οι άλλες κατανομές συνεπάγονται διαφορετικές τιμές του α. Αντί λοιπόν της κανονικής κατανομής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κατανομή $t-student$ με 6 βαθμούς ελευθερίας, για παράδειγμα. Τέτοια κατανομή σαν και αυτή που προαναφέρθηκε, έχει πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή (Jorion, 2007).

2.4 Επανέλεγχος της Αξίας σε Κίνδυνο

Τα υποδείγματα Value-at-Risk είναι χρήσιμα μόνο στο βαθμό κατά τον οποίο καταφέρνουν να προβλέπουν τον κίνδυνο με αρκετή ακρίβεια. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο, η εφαρμογή αυτών των υποδειγμάτων πρέπει να συνοδεύεται πάντα από την επαλήθευσή τους. Η εγκυρότητα ενός υποδείγματος αποτελεί μια διαδικασία όπου ελέγχεται η καταλληλότητα του συγκεκριμένου υποδείγματος. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με μια σειρά εργαλείων, συμπεριλαμβανομένων του επανελέγχου (*backtesting*) και των δοκιμών πίεσης (*stress testing*).

Η διαδικασία του επανελέγχου (*backtesting*) αποτελεί μια στατιστική διαδικασία κατά την οποία επαληθεύεται αν οι πραγματικές απώλειες βρίσκονται πολύ κοντά με τις αναμενόμενες απώλειες. Με βάση αυτή την παραδοχή, συγκρίνονται συστηματικά οι ιστορικές προβλέψεις του VaR με τις συνδεόμενες αποδόσεις χαρτοφυλακίου.

Τέτοιου είδους διαδικασίες, που ενίοτε καλούνται *reality checks* είναι χρήσιμες για τους διαχειριστές κινδύνου, οι οποίοι χρειάζεται να ελέγχουν ότι οι προβλέψεις του VaR είναι ρεαλιστικές. Στην περίπτωση που αυτό δεν ισχύει, τα υποδείγματα αυτά θα πρέπει να επενεξετάζονται για λανθασμένες αρχικές υποθέσεις που έχουν γίνει, λανθασμένες παραμέτρους, ή και τυχόν λανθασμένη μοντελοποίηση. Επίσης, αυτή η διαδικασία παρέχει ιδέες για βελτίωση και συνεπώς θα πρέπει να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι όλων των υποδειγμάτων VaR, όπως τονίζει ο Jorion (2007).

Η έρευνα που έχει γίνει γύρω από τον επανέλεγχο των συστημάτων μέτρησης VaR επικεντρώνεται γύρω από τρεις κατηγορίες μεθοδολογιών οι οποίες είναι οι εξής:

- *Δοκιμές κάλυψης* (*Coverage tests*), οι οποίες αξιολογούν εάν η συχνότητα των υπερβάσεων είναι συνεπής με το ποσοστημόριο της απώλειας ενός μέτρου VaR το οποίο και αντικατοπτρίζει.

- *Δοκιμές κατανομών* (*Distribution tests*), οι οποίες αποτελούν τεστ καλής προσαρμογής, τα οποία εφαρμόζονται στις συνολικές κατανομές απώλειας που προβλέπονται από τα μέτρα VaR.

- *Δοκιμές ανεξαρτησίας* (*Independence tests*), οι οποίες αξιολογούν εάν τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ανεξάρτητα από τη μια περίοδο στην άλλη, (Holton, 2003).

Τα υποδείγματα VaR όπως προαναφέρθηκε, είναι χρήσιμα στο βαθμό για τον οποίο παρέχουν ασφαλείς εκτιμήσεις. Για να γίνει αυτό, οι χρήστες πρέπει να ελέγχουν συστηματικά την εγκυρότητα αυτών των υποδειγμάτων διαμέσου της σύγκρισης των αναμενόμενων και των πραγματικών απωλειών. Στην περίπτωση κατά την οποία το υπόδειγμα είναι σωστά ορισμένο, ο αριθμός των παρατηρήσεων που βρίσκονται εκτός VaR θα πρέπει να ευθυγραμμίζεται με το επίπεδο εμπιστοσύνης. Ο αριθμός των υπερβάσεων είναι επίσης γνωστός και ως ο αριθμός των εξαιρέσεων. Με μεγάλο αριθμό εξαιρέσεων, το υπόδειγμα υποεκτιμά τον κίνδυνο. Αυτό αποτελεί ένα μεγάλο πρόβλημα, διότι πολύ μικρό χρηματικό κεφάλαιο καταλήγει να κατανέμεται σε μονάδες ανάληψης κινδύνου. Από την άλλη, λίγες εξαιρέσεις αποτελούν επίσης πρόβλημα γιατί οδηγούν σε υπερβάσεις ή ανεπαρκή κατανομή του χρηματικού κεφαλαίου κατά μήκος των μονάδων.

2.4.1 Επανέλεγχος με Δοκιμές Κάλυψης

Το τεστ του Kupiec (1995) αποτελεί το πιο γνωστό τεστ κάλυψης και στοχεύει στη συχνότητα των απωλειών στις ουρές της κατανομής, το οποίο βασίζεται στη συχνότητα των απωλειών που υπερβαίνουν το VaR. Ας θεωρηθεί ως x ο αριθμός των αποτυχιών ή των εξαιρέσεων (ο αριθμός των περιπτώσεων όπου οι απώλειες υπερβαίνουν το προβλεπόμενο VaR) σε ένα δείγμα μεγέθους n. Αν το υπόδειγμα VaR είναι ρεαλιστικό, το x ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p). Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, το υπόδειγμα πρόβλεψης είναι σωστό και η παρατηρούμενη συχνότητα των απωλειών στην ουρά είναι συνεπής με τη συχνότητα των εξαιρέσεων που το υπόδειγμα προβλέπει (Da Silva et al., 2006). Το τεστ βασίζεται στην αναλογία πιθανότητας (*Likelihood Ratio*) για τη μηδενική υπόθεση, η οποία δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$LR = -2Log\left[(1-p^*)^{n-x}(p^*)^x\right] + 2Log\left[\left(1-\left[\frac{x}{n}\right]\right)^{n-x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\right]$$

όπου p^* είναι η πιθανότητα των εξαιρέσεων κάτω από τη μηδενική υπόθεση, n το μέγεθος του δείγματος και x ο αριθμός των εξαιρέσεων στο δείγμα.

Το τεστ του Kupiec αποτελεί το πιο γνωστό τεστ που χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση των υποδειγμάτων κινδύνου, όπως είναι τα υποδείγματα Value at Risk. Επιπρόσθετα, όπως συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις των τεστ, το τεστ του Kupiec εμπεριέχει κάποιο βαθμό σφάλματος, ο οποίος προκύπτει από τη χρησιμοποίησή του. Μάλιστα, κάτω από ορισμένες περιπτώσεις αυτά τα σφάλματα μπορεί να είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

2.4.2 Επανέλεγχος με Δοκιμές Κατανομών

Οι Crnkovic και Drachman (1996) παρουσίασαν ένα τεστ για να αξιολογήσουν τα υποδείγματα μέτρησης κινδύνου τα οποία βασίζονται στην προβλεπτικότητα των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας (*Probabilty Density Function*). Ο σκοπός του τεστ είναι να ελεγχθεί αν υπάρχει συμφωνία μεταξύ του προβλεπόμενου και του πραγματικού PDF *(Probability Density Function*) των μεταβλητών, όπως αναφέρουν οι Da Silva et al., (2006). Η πληροφορία που παρέχει το τεστ είναι ότι, αν οι πραγματικές αποδόσεις κατανέμονται τυχαία, τότε τα εκατοστημόρια αυτών θα πρέπει να κατανέμονται ομοιόμορφα στην προβλεπόμενη PDF. Προκειμένου να αξιολογηθεί η ανεξαρτησία των εκατοστημορίων που έχουν υπολογιστεί, προτάθηκε το BDS στατιστικό μέτρο, το οποίο παρουσιάστηκε από τους Brock et al. (1996).

Το ομοιόμορφο τεστ της κατανομής βασίζεται στο στατιστικό μέτρο του Kuiper's, τέτοιο ώστε να είναι το ίδιο ευαίσθητο για όλες τις τιμές του δείγματος. Θεωρώντας $F(x)$ μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής των παρατηρηθεισών εκατοστημορίων, το στατιστικό μέτρο του Kuiper για την απόκλιση μεταξύ της $F(x)$ και της ομοιόμορφης αθροιστικής κατανομής $G(x)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$K(F(x), G(x)) = \max\{f(x) - g(x)\} - \min\{f(x) - g(x)\}$$

Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου έγκειται στο ότι, το συγκεκριμένο τεστ δε λαμβάνει υπόψη μόνο τις μεσαίες τιμές του δείγματος, όπως κάνει για παράδειγμα το τεστ των Kolmogorov-Smirnov. Το τεστ BDS (Brock-Dechert-Scheinkman) μπορεί να εφαρμοστεί σε μια σειρά από εκτιμώμενα κατάλοιπα, προκειμένου να ελεγχθεί εάν αυτά τα κατάλοιπα είναι ανεξάρτητα και ταυτόσημα κατανεμημένα (iid). Η βασική ιδέα του συγκεκριμένου τεστ, είναι να επιλεγεί η απόσταση μεταξύ ενός ζεύγους σημείων (ε). Εφόσον οι παρατηρήσεις της σειράς είναι (iid), τότε για κάθε ζεύγος σημείων, η πιθανότητα η απόσταση μεταξύ των σημείων να είναι μικρότερη ή ίση με το ε θα είναι σταθερή και ίση με $c_1(\varepsilon)$.

Το σετ των ζευγών των σημείων επιλέγεται καθώς κάποιος κινείται μεταξύ συνεχόμενων παρατηρήσεων του δείγματος, οι οποίες είναι τοποθετημένες σε σειρά. Δεδομένης μιας παρατήρησης s και μιας παρατήρησης t κάποιος μπορεί να κατασκευάσει ένα σετ ζευγών της μορφής $\{[x_s, x_t];[x_{s+1}, x_{t+1}];[x_{s+2}, x_{t+2}];...;[x_{s+m-1}, x_{t+m-1}]\}$ όπου m είναι ο αριθμός των διαδοχικών σημείων που χρησιμοποιούνται στο σετ, το οποίο καλείται διάσταση. Η από κοινού πιθανότητα κάθε ζεύγους σημείων που χρησιμοποιούνται στο σετ και τα οποία ικανοποιούν το ε είναι $c_m(\varepsilon)$. Σύμφωνα με το BDS τεστ, κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας, αυτή η πιθανότητα θα είναι το γινόμενο των ανεξάρτητων πιθανοτήτων για κάθε ζεύγος. Η πιθανότητα μιας επιλεγμένης διάστασης μπορεί να υπολογιστεί αν κάποιος περάσει διαμέσου όλων των πιθανών σετ αυτού του μεγέθους έτσι ώστε να μπορέσει να αντλήσει από το δείγμα και να μετρήσει τα σετ που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Η αναλογία του αριθμού των σετ που ικανοποιεί τη συνθήκη, διαιρείται από το συνολικό αριθμό των σετ παρέχοντας την εκτίμηση της πιθανότητας. Δεδομένου ενός δείγματος παρατηρήσεων μιας σειράς X, αυτή η συνθήκη αποτυπώνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$c_{m,n}(\varepsilon) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{a=1}^{n-m+1} \sum_{t=a+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} I_{\varepsilon}(\mathrm{X}_{\alpha+j}, X_{t+j})$$

Το BDS τεστ είναι αδιαμφισβήτητα ο πιο ισχυρός έλεγχος μη γραμμικότητας. Αρχικά κατασκευάστηκε για τον έλεγχο της υπόθεσης των ανεξάρτητων και ταυτόσημα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, ωστόσο χρησιμοποιήθηκε κυρίως ως ένα μέσο ανάλυσης των καταλοίπων ενός προσαρμοσμένου υποδείγματος. Επιπλέον, αποτελεί ένα πανίσχυρο εργαλείο ανίχνευσης της υπολειπόμενης εξάρτησης και της παρουσίας μη γραμμικής δομής σε υπό μελέτη συστήματα (Zivot and Wang, 2006).

2.4.3 Επανέλεγχος με Δοκιμές Ανεξαρτησίας

Μια εναλλακτική προσέγγιση επανελέγχου προτάθηκε από τον Christoffersen (1998) και ήταν η εκτίμηση ενός διαστήματος εμπιστοσύνης, το οποίο βασίζεται στο διαθέσιμο δείγμα και επικυρώνει εάν ο παρατηρούμενος αριθμός των εξαιρέσεων είναι συνεπής με τον αναμενόμενο, συμπεριλαμβανομένου και ενός τεστ ανεξαρτησίας. Από την πλευρά του, πρότεινε μια διαδικασία που αξιολογεί την ακρίβεια των εκτιμήσεων στα διαστήματα εμπιστοσύνης.

Η μηδενική υπόθεση των υπό συνθήκη τεστ κάλυψης είναι ότι το $I_t \sim i.i.d.Bernoulli(p)$, έναντι της εναλλακτικής ότι $I_t \sim i.i.d.Bernoulli(\pi)$, όπου I_t αποτελεί την ακολουθία των παραβιάσεων VaR_t, p είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης και π είναι ίσο με την αναλογία μεταξύ του αριθμού των παρατηρήσεων και του μεγέθους του δείγματος. Το τεστ (uc) τότε δίνεται ως εξής:

$$H_{0,uc}: \pi = p$$

Το παραπάνω τεστ θεωρεί ότι οι εξαιρέσεις είναι ανεξάρτητες και εξαιτίας αυτού, ελέγχεται αυτή η υπόθεση, έναντι της εναλλακτικής ότι η ακολουθία των εξαιρέσεων ακολουθεί μια ακολουθία Markov πρώτης τάξης, με μήτρα πιθανοτήτων όπως δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-\pi_{01} \pi_{01} \\ 1-\pi_{11} \pi_{11} \end{bmatrix}$$

όπου π_{ij} είναι η πιθανότητα ενός i τη χρονική στιγμή $t-1$ να ακολουθείται από ένα j τη χρονική στιγμή t. Το τεστ της ανεξαρτησίας (ind) είναι το εξής:

$$H_{0,\, ind}: \pi_{01} = \pi'_{11}$$

Τα δύο αυτά τεστ συνδυάζονται σε ένα τεστ υπό συνθήκη κάλυψης (*conditional coverage*) το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$H_{0,cc}: \pi_{01} = \pi_{11} = p$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, το στατιστικό μέτρο κατανέμεται όπως ακριβώς μια κατανομή X^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας (Da Silva et al., 2006).

2.4.4 Κριτήρια Εφαρμογής της Διαδικασίας Επανελέγχου της Αξίας σε Κίνδυνο

Η επιλογή των ποσοτικών παραγόντων είναι σημαντική στην περίπτωση όπου θα εφαρμοστεί η διαδικασία του επανελέγχου (*backtesting*). Στόχο θα πρέπει να αποτελεί η εκτέλεση δοκιμών, τέτοιων ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να εντοπιστούν αποκλίσεις στις προβλέψεις του VaR. Μεγαλύτεροι χρονικοί ορίζοντες μειώνουν τον αριθμό των ανεξάρτητων παρατηρήσεων και έτσι την ισχύ των τεστ. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιηθεί 2 εβδομάδων VaR χρονικός ορίζοντας, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν στη διάθεση μόνο 26 ανεξάρτητες παρατηρήσεις το έτος. Σε αντίθεση με το παραπάνω παράδειγμα, αν χρησιμοποιηθεί 1 ημέρα VaR χρονικός ορίζοντας, θα υπάρχουν 252 παρατηρήσεις για το ίδιο έτος. Έτσι ένας μικρότερος χρονικός ορίζοντας αυξάνει την ισχύ των τεστ. Αυτό εξηγεί και το γεγονός, γιατί η επιτροπή της Βασιλείας προκρίνει την εκτέλεση της διαδικασίας επανελέγχου (*backtesting*) για 1 ημέρα χρονικό ορίζοντα, ακόμη και αν ο ορίζοντας είναι 10 ημέρες, για λόγους επάρκειας κεφαλαίων.

Παρομοίως, η επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να οδηγεί σε ισχυρά τεστ. Στην περίπτωση όπου προτιμάται ένα υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης, αυτό έχει ως αποτέλεσμα τόσο ο αναμενόμενος αριθμός των παρατηρήσεων στην ουρά της κατανομής όσο και η ισχύς των τεστ να μειώνεται. Ας εξεταστεί για παράδειγμα, τι συμβαίνει όταν χρησιμοποιηθεί ως επίπεδο εμπιστοσύνης το 95%. Είναι γνωστό, ότι μόνο κατά τύχη αναμένεται μια χειρότερη απώλεια από ότι το VaR σε 1 ημέρα σε περίοδο 20 ημερών. Αν τώρα είχε επιλεχθεί διάστημα εμπιστοσύνης 99%, θα έπρεπε να περιμένει κάποιος κατά μέσο όρο 100 ημέρες, προκειμένου να επιβεβαιώσει ότι το υπόδειγμα ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Συνεπώς, όταν πρόκειται να εφαρμοστεί η εν λόγω διαδικασία, το διάστημα εμπιστοσύνης δε θα πρέπει να τίθεται τόσο υψηλό. Στην πράξη ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 95 τοις εκατό ανταποκρίνεται καλά στη διαδικασία του επανελέγχου (*backtesting*) (Jorion, 2007).

2.5 VaR Χαρτοφυλακίου

Ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να χαρακτηριστεί από τις θέσεις που λαμβάνονται πάνω σε κάποια στοιχεία, εκφρασμένα για παράδειγμα σε νόμισμα βάσης όπου χάριν ευκολίας χρησιμοποιείται το δολάριο. Αν η θέση που έχει ληφθεί είναι προκαθορισμένη για έναν επιλεγμένο χρονικό ορίζοντα, το ποσοστό απόδοσης του χαρτοφυλακίου αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των αποδόσεων των υποκείμενων στοιχείων, όπου τα βάρη δίνονται με βάση τις σχετικές ποσότητες που επενδύθηκαν στην αρχή της περιόδου. Συνεπώς, το VaR ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να αποτυπωθεί ως ένας συνδυασμός από κινδύνους των υποκείμενων στοιχείων που το απαρτίζουν.

Το ποσοστό απόδοσης του χαρτοφυλακίου από το χρόνο t έως το $t+1$ καθορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω ποσότητα ως εξής:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t+1}$$

όπου N είναι ο αριθμός των στοιχείων που το αποτελούν, $R_{i,t+1}$ το ποσοστό απόδοσης πάνω στο κάθε στοιχείο i και w_i είναι το βάρος του. Το ποσοστό της απόδοσης καθορίζεται, ως η αλλαγή που επέρχεται στην τιμή του δολαρίου ή αλλιώς η απόδοση του δολαρίου μετρημένη σε κλίμακα της αρχικής επένδυσης. Πρόκειται σαφώς, για μια αδιάστατη μέτρηση.

Τα βάρη κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αθροίζουν στη μονάδα και αυτό επιτυγχάνεται, με το να μετρώνται κλιμακωτά οι τοποθετήσεις σε δολάρια σε κάθε στοιχείο

w_i από τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου W. Αυτό αμέσως αποκλείει χαρτοφυλάκια τα οποία έχουν μηδενικές καθαρές επενδύσεις $W = 0$, όπως είναι για παράδειγμα οι τοποθετήσεις σε παράγωγα. Ωστόσο, θα μπορούσαν να υπήρχαν θετικά και αρνητικά βάρη w_i, συμπεριλαμβανομένων τιμών πολύ μεγαλύτερων της μονάδας. Αν η καθαρή αξία του χαρτοφυλακίου είναι μηδενική, υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί ένα άλλο μέτρο, όπως είναι το άθροισμα των μεικτών τοποθετήσεων ή η απόλυτη τιμή όλων των τοποθετήσεων σε δολάρια W^*. Τότε όλα τα βάρη θα καθορίζονται σε σχέση με αυτό το σημείο αναφοράς. Εναλλακτικά, θα μπορούσαν να εκφραστούν οι αποδόσεις σε όρους δολαρίων, καθορίζοντας μια ποσότητα δολαρίων που επενδύεται σε ένα στοιχείο i ως $W_i = w_i W$. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στην παραδοσιακή ανάλυση *mean-variance*, κάθε συστατικό στοιχείο του αποτελεί ένα τίτλο.

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου, μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας μια σημειογραφία μήτρας (*matrix notation*) και αντικαθιστώντας μια σειρά αριθμών από ένα διάνυσμα σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_N R_N = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \ldots w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \\ R_N \end{bmatrix} = w' R$$

όπου το w' αναπαριστά το μετατραπόμενο διάνυσμα των βαρών και το R είναι το κατακόρυφο διάνυσμα περιέχοντας τις ατομικές αποδόσεις των στοιχείων.

Η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου τότε είναι:

$$E(R_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$$

και η διακύμανση είναι:

$$V(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (2.4)$$

Το παραπάνω άθροισμα αντιπροσωπεύει όχι μόνο τον κίνδυνο που εμπεριέχεται στα ανεξάρτητα σ_i^2 αλλά και σε όλες τις συνδιακυμάνσεις και το οποίο καταλήγει σε ένα σύνολο από $N(N-1)/2$ διαφορετικούς όρους. Καθώς όμως ο αριθμός των στοιχείων του χαρτοφυλακίου αυξάνει, γίνεται ολοένα και δυσκολότερο να παρακολουθηθούν όλοι οι όροι συνδιακύμανσης, έτσι για λόγους ευκολίας μπορεί να γίνει χρήση μιας σημειογραφίας μήτρας. Συνεπώς, η διακύμανση μπορεί να γραφτεί ως ακολούθως:

$$\sigma_p{}^2 = \left[w_1 ... w_N\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 \sigma_{12} \sigma_{13} ... \sigma_{1\mathrm{N}} \\ . \\ . \\ . \\ \sigma_{\mathrm{N}1} \sigma_{\mathrm{N}2} \sigma_{\mathrm{N}3} \sigma_{\mathrm{N}}{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_N \end{bmatrix}$$

Καθορίζοντας το Σ ως τη μήτρα συνδιακυμάνσεων, η διακύμανση του ποσοστού της απόδοσης χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sigma_p{}^2 = w' \Sigma w$$

όπου w αποτελούν τα βάρη. Επίσης, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί ακόλουθα ως:

$$\sigma_p{}^2 W^2 = x' \Sigma x$$

Μέχρι τώρα δεν έχει γίνει καμία υπόθεση σχετικά με την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Αυτό που στην ουσία προσδοκάται, είναι να μεταφραστεί η διακύμανση χαρτοφυλακίου σε ένα μέτρο VaR. Για να γίνει αυτό, χρειάζεται να είναι γνωστή η κατανομή που ακολουθούν οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου. Στο υπόδειγμα *delta-normal,* όλες οι αποδόσεις των στοιχείων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο θεωρείται ότι κατανέμονται κανονικά. Αυτό είναι σχετικά βολικό, διότι οι αποδόσεις χαρτοφυλακίου οι οποίες αποτελούν ένα γραμμικό συνδυασμό από κοινού κανονικών τυχαίων μεταβλητών, είναι επίσης κανονικά κατανεμημένες, όπως αναφέρει ο Jorion (2007). Εφόσον ισχύει κάτι τέτοιο, μπορεί εύκολα να μεταφραστεί το επίπεδο εμπιστοσύνης c σε μια τυπική κανονική απόκλιση a τέτοια ώστε η πιθανότητα να παρατηρηθεί μια απώλεια χειρότερη από το $-a$ να είναι c. Ορίζοντας ως W την αρχική τιμή του χαρτοφυλακίου, το VaR χαρτοφυλακίου προκύπτει από την παρακάτω σχέση ως εξής:

$$\textit{Portfolio VaR} = VaR_p = \alpha \sigma_p W = \alpha \sqrt{x' \Sigma x}$$

Διαφοροποιημένο VaR καλείται το VaR ένος χαρτοφυλακίου, το οποίο λαμβάνει υπόψη τα οφέλη μεταξύ των μερών που το απαρτίζουν. Σε αυτό το σημείο, μπορεί να οριστεί ο ανεξάρτητος κίνδυνος του κάθε μέρους που απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης:

$$VaR_i = \alpha\sigma_i |W_i| = \alpha\sigma_i |w_i| W \qquad (2.5)$$

Σημειώνεται δε, πως για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η απόλυτη τιμή του βάρους w_i διότι αυτή μπορεί να είναι αρνητική, ενώ το μέτρο κινδύνου πρέπει να είναι θετικός αριθμός.

Ατομικό VaR καλείται το VaR ενός μέρους που απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο το οποίο τίθεται σε *απομόνωση*. Η εξίσωση (2.4) δείχνει ότι το VaR χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τις διακυμάνσεις, συνδιακυμάνσεις και τον αριθμό των στοιχείων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Η συνδιακύμανση είναι ένα μέτρο που εκφράζει το βαθμό στον οποίο δύο μεταβλητές κινούνται γραμμικά προς την ίδια κατεύθυνση. Στην περίπτωση όπου δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, οι συνδιακυμάνσεις είναι ίσες με το μηδέν. Μια θετική συνδιακύμανση σημαίνει πως οι δύο μεταβλητές τείνουν να κινούνται προς τις ίδιες κατευθύνσεις. Αντίθετα, μια αρνητική συνδιακύμανση σημαίνει ότι οι εν λόγω μεταβλητές κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Το μέγεθος της συνδιακύμανσης ωστόσο, εξαρτάται από τις διακυμάνσεις των ατομικών μερών και δεν είναι εύκολο να ερμηνευθεί. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι ένα πιο βολικό, απαλλαγμένο από την κλίμακα μέτρο γραμμικής εξάρτησης:

$$\rho_{12} = \sigma_{12} / (\sigma_1 \sigma_2)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης ρ παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1. Όταν είναι ίσος με τη μονάδα, οι δύο μεταβλητές είναι τέλεια συσχετισμένες, ενώ όταν παίρνει την τιμή μηδέν οι μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες. Μικρότερος κίνδυνος χαρτοφυλακίου μπορεί να επιτευχθεί διαμέσου χαμηλών συσχετίσεων μεταξύ των στοιχείων που το απαρτίζουν ή με το να συμπεριληφθεί ένας μεγάλος αριθμός στοιχείων.

Ασθενείς συσχετίσεις κατά συνέπεια, βοηθούν στη διαφοροποίηση του εκάστοτε χαρτοφυλακίου. Ένα απλό παράδειγμα, θα μπορούσε να αποτελεί ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο απαρτίζεται από δύο μόνο στοιχεία. Η διαφοροποιημένη διακύμανση χαρτοφυλακίου δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

Το VaR χαρτοφυλακίου τότε δίνεται ως εξής:

$$VaR_p = \alpha\sigma_p W = \alpha\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}W \quad (2.6)$$

Η παραπάνω σχέση, μπορεί να συσχετιστεί με το ατομικό VaR όπως ορίστηκε από τη σχέση (2.5). Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με το μηδέν, το VaR χαρτοφυλακίου παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$VaR_p = \sqrt{\alpha^2 w_1^2 W_2 \sigma_1^2 + \alpha^2 w_2^2 W^2 \sigma_2^2} = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2}$$

Ο κίνδυνος χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι χαμηλότερος από το άθροισμα των VaR των επιμέρους στοιχείων, ώστε να ισχύει η σχέση $VaR_p < VaR_1 + VaR_2$. Αυτό εξηγεί και το γεγονός ότι διαθέτοντας στοιχεία τα οποία κινούνται ανεξάρτητα, ένα χαρτοφυλάκιο θα είναι λιγότερο ριψοκίνδυνο σε σχέση με κάθε άλλο στοιχείο μόνο του. Έτσι το VaR είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου για κανονικές αλλά και γενικότερα ελλειπτικές κατανομές. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ακριβώς ίσος με τη μονάδα και τα w_1 και w_2 είναι και τα δύο θετικά, η εξίσωση που δόθηκε από τη σχέση (2.6) απλοποιείται και γίνεται:

$$VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2VaR_1 \times VaR_2} = VaR_1 + VaR_2$$

Με άλλα λόγια, το VaR χαρτοφυλακίου είναι ίσο με το άθροισμα των ατομικών VaR εφόσον τα δύο στοιχεία είναι τέλεια συσχετισμένα. Γενικά ωστόσο, αυτό δεν ισχύει, καθώς οι συσχετίσεις είναι τυπικά ατελείς. Το όφελος που προκύπτει από τη διαφοροποίηση μπορεί να μετρηθεί από τη διαφορά μεταξύ ενός διαφοροποιημένου VaR και ενός μη-διαφοροποιημένου.

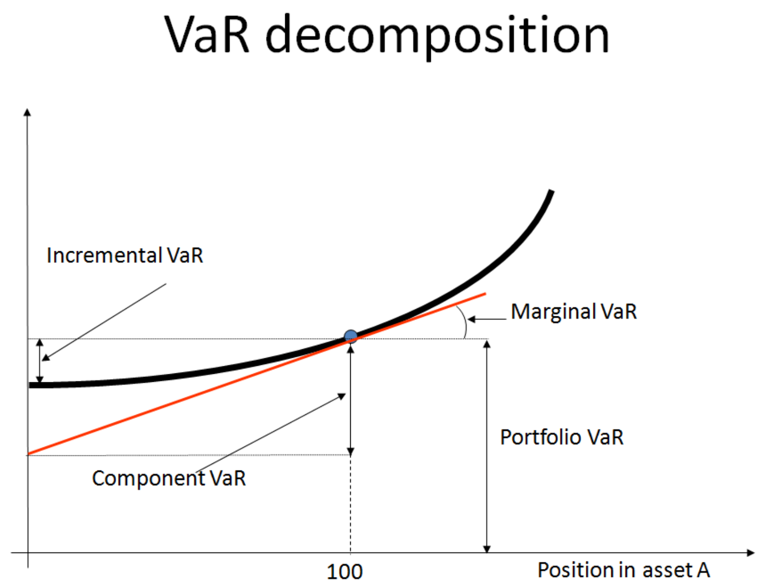
Μη-διαφοροποιημένο VaR καλείται το άθροισμα των ατομικών VaR, ή το VaR χαρτοφυλακίου, όταν δεν υπάρχει καμία θέση ανοικτής πώλησης (*short position*) και επιπλέον όλες οι συσχετίσεις είναι ίσες με τη μονάδα. Η παραπάνω ερμηνεία διαφέρει όταν επιτρέπονται ανοικτές πωλήσεις. Ας θεωρηθεί τώρα, ότι το χαρτοφυλάκιο που κάποιος διακρατεί περιέχει ένα στοιχείο στο οποίο έχει πάρει θέση ανοικτής αγοράς (*long position*) και ένα άλλο στοιχείο στο οποίο έχει πάρει θέση ανοικτής πώλησης (*short position*) (w_1 είναι θετικό και w_2 αρνητικό).

Αυτή η περίπτωση, μπορεί να αναφέρεται σε ένα *hedge fund* το οποίο έχει πάρει θέση *long* 1 δισ. δολάρια ($) σε εταιρικά ομόλογα και θέση *short* 1 δισ. δολάρια ($) σε κρατικά ομόλογα. Το λογικό σε αυτή την περίπτωση, είναι οι αποδόσεις των εταιρικών ομολόγων να είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από ότι των κρατικών. Αν ο συντελεσής συσχέτισης είναι ίσος με τη μονάδα, το *fund* δεν αντιμετωπίζει κανένα κίνδυνο, διότι κάθε κίνδυνος που εμπεριέχεται σε ένα στοιχείο θα αντισταθμίζεται από το κέρδος που θα αντιστοιχίζεται στο άλλο. Το VaR χαρτοφυλακίου τότε είναι μηδέν.

Αντ' αυτού, ο κίνδυνος θα είναι μεγαλύτερος αν ο συντελεστής είναι -1, στην οποία περίπτωση οι απώλειες στο ένα στοιχείο θα ενισχύονται από τα κέρδη του άλλου. Το μη-διαφοροποιημένο VaR μπορεί να ερμηνευτεί ως το VaR χαρτοφυλακίου, όταν η συσχέτιση παίρνει τη χειρότερη τιμή, η οποία είναι η τιμή -1. Έτσι το *μη-διαφοροποιημένο* VaR παρέχει ένα απόλυτα κακό σενάριο (*worst case scenario*) για το χαρτοφυλάκιο, όπως χαρακτηριστικά τονίζει ο Jorion (2007).

2.6 Εργαλεία VaR

Αρχικά, η διαδικασία μέτρησης VaR αναπτύχθηκε ως μια μεθοδολογία για να μετράται ο κίνδυνος χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, η μέτρηση της Αξίας σε Κίνδυνο αποτελεί κάτι παραπάνω από μια απλή αναφορά ενός και μόνο αριθμού. Με την πάροδο του χρόνο, οι διαχειριστές κινδύνου (*risk managers*) αντιλήφθηκαν πως θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τη διαδικασία του VaR για την ενεργητική διαχείριση του κινδύνου. Μια τυπική ερώτηση με βάση τα παραπάνω, μπορεί να είναι η εξής: Ποια θέση πρέπει να αλλάξει κάποιος προκειμένου να τροποποιήσει το VaR ποιο αποτελεσματικά; Μια τέτοια πληροφόρηση είναι χρήσιμη διότι τα χαρτοφυλάκια εμπορεύονται σταδιακά και αυτό προκύπτει εξαιτίας της ύπαρξης του λεγόμενου κόστους συναλλαγών. Αυτός είναι και ο σκοπός της ανάπτυξης των εργαλείων VaR, τα οποία περιλαμβάνουν το *marginal, incremental* και το *component* VaR (Jorion, 2007).



Πηγή: Δράκος Κ. (2010)

Διάγραμμα 2.2

Διάσπαση της Αξίας σε Κίνδυνο

Στο παραπάνω γράφημα, δίνεται η απεικόνιση της διάσπασης της Αξίας σε Κίνδυνο (*VaR decomposition*) στα τρία μέρη που το απαρτίζουν και ταυτόχρονα παρατίθεται το VaR χαρτοφυλακίου επιτρέποντας τις όποιες συγκρίσεις ανά μεταξύ τους.

2.6.1 Οριακό VaR

Προκειμένου να μετρηθεί το αποτέλεσμα της αλλαγής θέσεων στον κίνδυνο που συμβαίνει σε ένα χαρτοφυλάκιο, τα ατομικά VaR δεν κρίνονται επαρκή. Η μεταβλητότητα μετρά την αβεβαιότητα στην απόδοση ενός στοιχείου το οποίο έχει απομονωθεί από το σύνολο των στοιχείων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Ωστόσο, όταν το παραπάνω στοιχείο ανήκει σε ένα χαρτοφυλάκιο, αυτό που έχει σημασία είναι η κατανομή του κινδύνου του χαρτοφυλακίου.

Ας υποτεθεί ότι αρχικά κάποιος ξεκινά από το υπάρχον χαρτοφυλάκιο, το οποίο αποτελείται από N στοιχεία $j = 1, \ldots, N$. Στη συνέχεια, θεωρεί ένα νέο χαρτοφυλάκιο προσθέτοντας μια μονάδα ενός στοιχείου i. Προκειμένου να αξιολογήσει τον αντίκτυπο αυτής της αλλαγής, μετρά την περιθώρια κατανομή του κινδύνου της, αυξάνοντας το w κατά ένα μικρό αριθμό ή διαφορίζοντας την εξίσωση (2.4) σε σχέση με το w_i κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

$$\frac{\theta\sigma_p^{\ 2}}{\theta w_i} = 2w_i\sigma_i^{\ 2}+2\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} w_j\sigma_{ij} = 2\operatorname{cov}(R_i\,, w_i R_i+\sum_{j\neq i}^{N} w_j R_j) = 2\operatorname{cov}(R_i\,, R_p)$$

Εφόσον ισχύει ότι $\frac{\theta\sigma_p^{\ 2}}{\theta w_i} = 2\sigma_p\theta\sigma_p/\theta\sigma w_i$, η ευαισθησία στην μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου σε μια αλλαγή στο βάρος προκύπτει από τη σχέση:

$$\frac{\theta\sigma_p}{\theta w_i} = \frac{\operatorname{cov}(R_i\,, R_p)}{\sigma_p}$$

Μετατρέποντας την παραπάνω σχέση σε ένα αριθμό VaR, μια έκφραση για το οριακό VaR, το οποίο είναι ένα διάνυσμα, είναι η εξής:

$$\Delta VaR_i = \frac{\theta VaR}{\theta x_i} = \frac{\theta VaR}{\theta w_i W} = \alpha\frac{\theta\sigma_p}{\theta w_i} = \alpha\frac{\operatorname{cov}(R_i\,, R_p)}{\sigma_p}$$

Οριακό VaR ή ***Marginal* VaR** (***ΔVaR***) καλείται η αλλαγή που επέρχεται στο VaR ενός χαρτοφυλακίου, η οποία προέρχεται προσθέτοντας μια επιπλέον ποσότητα χρήματος (π.χ 1 δολάριο) στην έκθεση στον κίνδυνο σε ένα δεδομένο μέρος του. Αποτελεί επίσης, τη μερική (ή γραμμική) παράγωγο σε σχέση με τη θέση του συγκεκριμένου μέρους του χαρτοφυλακίου. Το Οριακό VaR μπορεί ακόμη να συσχετιστεί με το βήτα ενός χαρτοφυλακίου, το οποίο καθορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i\,, R_p)}{\sigma_p^{\ 2}} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p^{\ 2}} = \frac{\rho_{ip}\sigma_i\sigma_p}{\sigma_p^{\ 2}} = \rho_{ip}\frac{\sigma_i}{\sigma_p}$$

η οποία μετρά την κατανομή ενός στοιχείου στο συνολικό κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου. Ως βήτα (beta) επίσης καλείται ο συστηματικός κίνδυνος (*systematic risk*) ενός στοιχείου i σε σχέση με το p και μπορεί να μετρηθεί από το συντελεστή κλίσης σε μια παλινδρόμηση των αποδόσεων των στοιχείων R_i πάνω στην απόδοση χαρτοφυλακίου R_p τέτοια ώστε να ισχύει:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{p,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad t = 1,...,T$$

Ο συστηματικός κίνδυνος αποτελεί τη βάση για το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περουσιακών Στοιχείων (*CAPM*), το οποίο αναπτύχθηκε από τον Sharpe το 1964. Σύμφωνα με το εν λόγω υπόδειγμα, οι επενδυτές οι οποίοι έχουν διαφοροποιήσει σωστά το χαρτοφυλάκιό τους, χρειάζεται μόνο να αντισταθμίζουν το συστηματικό κίνδυνο των στοιχείων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο που σχετίζεται με την αγορά. Με άλλα λόγια το ασφάλιστρο κινδύνου πάνω σε όλα τα στοιχεία θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από το βήτα.

Η σχέση που συνδέει το ΔVaR και το β συνοψίζεται παρακάτω:

$$\Delta VaR_i = \frac{\theta VaR}{\theta x_i} = \alpha(\beta_i \times \sigma_p) = \frac{VaR}{W} \times \beta_i$$

Το Οριακό VaR ή (*marginal* VaR) μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εξυπηρετήσει ένα μεγάλο πλήθος σκοπών της διαχείρισης κινδύνου. Ας θεωρηθεί για παράδειγμα, ένας επενδυτής ο οποίος θέλει να μειώσει το VaR του χαρτοφυλακίου του και διαθέτει την επιλογή να μειώσει όλες τις θέσεις που έχει πάρει κατά μία καθορισμένη ποσότητα, π.χ 100.000 δολάρια ($). Ο επενδυτής θα πρέπει να κατατάξει όλα τα οριακά VaR και να επιλέξει το μεγαλύτερο ΔVaR δηλαδή τη μεγαλύτερη αλλαγή που επέρχεται στο VaR, διότι αυτή θα επιφέρει το μεγαλύτερο αντισταθμιστικό αποτέλεσμα, όπως αναφέρει ο Jorion (2007).

2.6.2 Επαυξημένο VaR

Η συγκεκριμένη μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί, εάν θελήσει κάποιος να αξιολογήσει τον αντίκτυπο μιας προτεινόμενης μεταβολής στο χαρτοφυλάκιο p. Αυτή η νέα μεταβολή αναπαρίσταται από τη θέση a, η οποία αποτελεί ένα διάνυσμα από επιπλέον εκθέσεις στους παράγοντες κινδύνου, μετρημένη σε δολάρια. Ιδανικά, θα πρέπει να μετρηθεί το VaR χαρτοφυλακίου στην αρχική θέση VaR_p και στη συνέχεια να μετρηθεί ξανά στη νέα θέση που θα ληφθεί VaR_{p+a}. Το Επαυξημένο VaR το οποίο λαμβάνεται σε αυτή την περίπτωση περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$Incremental\ VaR = VaR_{p+a} - VaR_p$$

Αυτή η «πριν και μετά» σύγκριση είναι αρκετά κατατοπιστική. Αν λοιπόν το VaR μειωθεί, η νέα μεταβολή αποτελεί μείωση κινδύνου ή αντιστάθμιση, αλλιώς αποτελεί αύξηση του κινδύνου. Σημειώνεται σε αυτό το σημείο, ότι το a μπορεί να αναπαριστά μια αλλαγή σε ένα μόνο μέρος ή να παρουσιάζει μια πιο πολυσύνθετη αλλαγή με αλλαγές που επέρχονται σε πολλαπλά μέρη του χαρτοφυλακίου.

Με τον όρο ***Επαυξημένο VaR*** ή ***Incremental VaR*** (***IVaR***) καλείται η μεταβολή που επέρχεται στο VaR εξαιτίας μιας νέας θέσης που έχει ληφθεί. Διαφέρει από το Οριακό VaR στο ότι η ποσότητα που προστίθεται ή αφαιρείται μπορεί να είναι μεγάλη, περίπτωση στην οποία το VaR διαμορφώνεται σε μια μη-γραμμική σχέση. Το κύριο μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι απαιτεί πλήρη επαναξιολόγηση του VaR χαρτοφυλακίου κάθε φορά που πραγματοποιείται νέα μεταβολή. Αυτό πολλές φορές μπορεί να είναι χρονοβόρο για μεγάλα χαρτοφυλάκια.

Επεκτείνοντας το VaR_{p+a} σε μια σειρά γύρω από το αρχικό σημείο καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$VaR_{p+a} = VaR_p + (\Delta VaR)' \times a + ...$$

όπου αγνοούνται οι όροι δεύτερης τάξης, αν οι αποκλίσεις a είναι μικρές. Έτσι το *Incremental VaR* μπορεί να παρουσιαστεί κατά προσέγγιση με την παρακάτω μορφή ως εξής:

$$Incremental\ VaR \approx (\Delta VaR)' \times a$$

Η μέθοδος με τη χρήση του Επαυξημένου VaR μπορεί να εφαρμοστεί στη γενική περίπτωση, όπου η μεταβολή που επιτελείται περιέχει μια σειρά από νέες εκθέσεις σε παράγοντες κινδύνου. Ας θεωρηθεί αντ' αυτού, μια συγκεκριμένη περίπτωση όπου μια νέα μεταβολή περιέχει μια θέση σε έναν μόνο παράγοντα κινδύνου. Η αξία του χαρτοφυλακίου μεταβάλλεται και από την παλιά τιμή W περνά στη νέα τιμή $W_{p+a} = W + a$, όπου το a είναι η ποσότητα που επενδύεται στο στοιχείο i. Μπορεί επίσης να γραφτεί η διακύμανση των αποδόσεων (σε δολάρια) του νέου χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma^2_{p+a} W^2_{p+a} = \sigma_p^2 W^2 + 2aW\sigma_{ip} + a^2 \sigma_i^2$$

Μια ενδιαφέρουσα πρόκληση που συχνά αντιμετωπίζουν οι διαχειριστές κινδύνου, είναι το να στοχοποιήσουν το μέγεθος της νέας μεταβολής που οδηγεί στο μικρότερο κίνδυνο χαρτοφυλακίου. Διαφορίζοντας σε σχέση με το a, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\theta\sigma_{p+a}{}^2 W_{p+a}{}^2}{\theta a} = 2W\sigma_{ip} + 2a\sigma_i{}^2$$

η οποία επιτυγχάνει μια μηδενική τιμή για την παρακάτω ποσότητα:

$$a^* = -W\frac{\sigma_{ip}}{\sigma_i{}^2} = -W\beta_i\frac{\sigma_p{}^2}{\sigma_i{}^2}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την ελάττωση διακύμανσης στη θέση που έχει ληφθεί, γνωστή και ως η «καλύτερη αντιστάθμιση» (*best hedge)* και ορίζεται ως η επιπλέον ποσότητα που πρέπει να επενδυθεί σε ένα στοιχείο, τέτοια ώστε να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο του συνολικού χαρτοφυλακίου (Jorion, 2007).

2.6.3 Συνιστωτικό VaR

Για τη διαχείριση του κινδύνου, θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμο να δοθεί μια εικόνα της διάσπασης του κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Αυτό όμως δεν προκύπτει άμεσα, διότι η μεταβλητότητα χαρτοφυλακίου είναι μια μη γραμμική σχέση των συνιστωσών που το απαρτίζουν. Χρησιμοποιώντας όλα τα ατομικά VaR, προσθέτοντάς τα και υπολογίζοντας ταυτόχρονα το ποσοστό, παρατηρείται πως κάτι τέτοιο δεν είναι χρήσιμο, γιατί αγνοεί τελείως τον αντίκτυπο της διαφοροποίησης. Αντ' αυτού, αυτό που χρειάζεται είναι μια προσθετική διάσπαση του VaR που να λαμβάνει υπόψη το όφελος που προκύπτει από τη διαφοροποίηση.

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται το οριακό VaR ως ένα εργαλείο που βοηθά στον υπολογισμό της συνεισφοράς του κάθε στοιχείου στον ήδη υπάρχοντα κίνδυνο του χαρτοφυλακίου. Πολλαπλασιάζοντας το οριακό VaR με τη θέση που έχει ληφθεί σε ένα στοιχείο (σε δολάρια) ή διαφορετικά σε ένα παράγοντα κινδύνου i προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$ComponentVaR_i = (\Delta VaR_i) \times w_i W = \frac{VaR\beta_i}{W} w_i W = VaR\beta_i w_i$$

Έτσι, η μέθοδος του Συνιστωτικού VaR υποδεικνύει πως το VaR χαρτοφυλακίου θα άλλαζε κατά προσέγγιση, εάν ένα μέρος του διαγραφόταν από το χαρτοφυλάκιο. Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί, ότι η ποιότητα αυτής της γραμμικής προσέγγισης βελτιώνεται όταν οι συνιστώσες (*components*) του VaR είναι μικρές. Συνεπώς, αυτή η διάσπαση είναι πιο χρήσιμη όταν αφορά μεγάλα χαρτοφυλάκια τα οποία αποτελούνται από πολλές μικρές τοποθετήσεις. Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να τονιστεί ότι αυτές οι συνιστώσες (*components*) του VaR αθροίζουν ακριβώς σε ένα συνολικό VaR χαρτοφυλακίου. Το άθροισμα αυτό δίνεται με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης:

$$CVaR_1 + CVaR_2 + ... + CVaR_N = VaR(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i) = VaR$$

Με αυτό τον τρόπο, τα συνιστωτικά VaR μέτρα αθροίζουν στο συνολικό VaR. Έτσι, προκύπτει ένα προσθετικό μέτρο του κινδύνου του χαρτοφυλακίου το οποίο αντανακλά τις συσχετίσεις. Οι συνιστώσες δηλαδή που δίνουν ένα αρνητικό σήμα, επιδρούν αντισταθμιστικά έναντι των υπολειπόμενων του χαρτοφυλακίου. Σε αντίθεση, οι συνιστώσες που δίνουν θετικό σήμα, αυξάνουν τον κίνδυνο χαρτοφυλακίου.

Με τον όρο ***Συνιστωτικό VaR*** ή **Component VaR** (***CVaR***) ορίζεται ο διαχωρισμός του VaR χαρτοφυλακίου, ο οποίος υποδεικνύει το κατά πόσο το VaR χαρτοφυλακίου προσεγγιστικά θα άλλαζε αν το δοθέν μέρος είχε διαγραφεί. Επίσης, μπορεί να εξαχθεί πως το Συνιστωτικό VaR αθροίζει στο VaR χαρτοφυλακίου. Επιπλέον, το Συνιστωτικό VaR μπορεί να απλουστευθεί περαιτέρω. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι το β_i είναι ίσο με το συντελεστή συσχέτισης ρ_i, σ_i φορές διαιρούμενο από το σ_p του χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφτεί η παρακάτω εξίσωση ως εξής:

$$CVaR_i = VaRw_i\beta_i = (\alpha\sigma_p W)w_i\beta_i = (\alpha\sigma_i w_i W)\rho_i = VaR_i\rho_i$$

$$\textit{Ποσοστό συμμετοχής στο VaR ενός μέρους } i = \frac{CVaR_i}{VaR} = w_i\beta_i$$

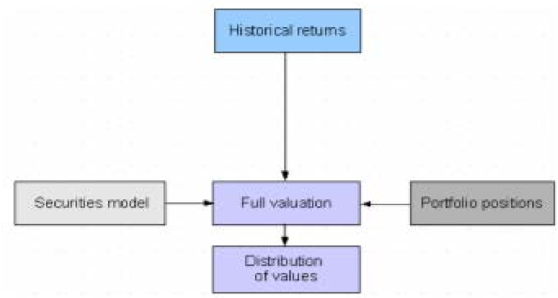
Γενικά πάντως θα πρέπει να σημειωθεί, πως τα εργαλεία VaR μπορούν να παρέχουν μια ανάλυση της συνεισφοράς στον κίνδυνο, σε πολλές και διαφορετικές περιπτώσεις. Για μεγάλα χαρτοφυλάκια, το Συνιστωτικό VaR μπορεί να εμφανιστεί σε διάφορες μορφές, όπου π.χ να αφορά μια ισοτιμία, χρεόγραφα, γεωγραφική τοποθεσία ή μονάδα μιας επιχείρησης (Jorion, 2007).

2.7 Μέθοδοι Προσομοίωσης του VaR

Σε αυτή την ενότητα, θα περιγραφούν γενικές τεχνικές προσομοίωσης του VaR που χρησιμοποιούνται στην πράξη, όπως η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation), καθώς και η προσομοίωση Monte Carlo και θα γίνει σύγκριση αυτών προκειμένου να δοθεί μια πλήρης εικόνα για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μιας μεθόδου.

2.7.1 Ιστορική Προσομοίωση

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης παρέχει μια ευθεία εφαρμογή της πλήρης αποτίμησης του VaR. Η κύρια υπόθεση που γίνεται στη συγκεκριμένη μέθοδο, είναι ότι μια σειρά από πιθανά μελλοντικά σενάρια αναπαρίσταται πλήρως από το τι συνέβη σε μια συγκεκριμένη περίοδο στο παρελθόν. Αυτή η μεθοδολογία, περιλαμβάνει τη συλλογή μιας σειράς από αλλαγές στους παράγοντες κινδύνου, για δεδομένο διάστημα στο παρελθόν, για παράδειγμα καθημερινές αλλαγές σε ένα διάστημα 5 ετών. Τα σενάρια τα οποία λαμβάνονται υπ'όψιν, αποτελούν μια καλή αναπαράσταση όλων των ενδεχομένων που θα μπορούσαν να συμβούν μεταξύ του παρόντος και του μέλλοντος. Τα στοιχεία που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο τότε επαναξιολογούνται ακολούθως έναντι κάθε πιθανού σεναρίου. Αυτό παράγει με τη σειρά του μια κατανομή των τιμών χαρτοφυλακίου ή ισοδύναμα μια κατανομή των αλλαγών στην τιμή του χαρτοφυλακίου σε σχέση με την τωρινή του τιμή. Συνήθως, κάποιες από αυτές τις αλλαγές περιέχουν κέρδη και άλλες απώλειες. Κατατάσσοντας τις αλλαγές που επέρχονται σε ένα χαρτοφυλάκιο από τη χειρότερη στην καλύτερη, το 99% VaR, για παράδειγμα, υπολογίζεται ως η απώλεια, τέτοια ώστε το 1% από τα κέρδη ή τις απώλειες να είναι κάτω από αυτό και το 99% πάνω από αυτό.



Πηγή: Bohdalová M. (2007)

Διάγραμμα 2.3

Η μέθοδος της Ιστορικής Προσομοίωσης

Το κύριο πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου συνοψίζεται στο ότι δεν γίνεται καμία υπόθεση για τις αλλαγές στους παράγοντες κινδύνου που προέρχονται από μια συγκεκριμένη κατανομή. Έτσι, αυτή η μεθοδολογία είναι συνεπής με τις αλλαγές που συντελούνται από οποιαδήποτε κατανομή. Ένα ακόμη σημαντικό πλεονέκτημα προκύπτει από το γεγονός ότι η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης δεν περιλαμβάνει την εκτίμηση στατιστικών παραμέτρων, όπως λόγου χάρη των διακυμάνσεων ή των συνδιακυμάνσεων και συνεπώς αποφεύγονται σφάλματα εκτίμησης. Επίσης, αποτελεί μια μεθοδολογία η οποία είναι εύκολο να παρουσιαστεί και να γίνει κατανοητή από το ευρύ κοινό.

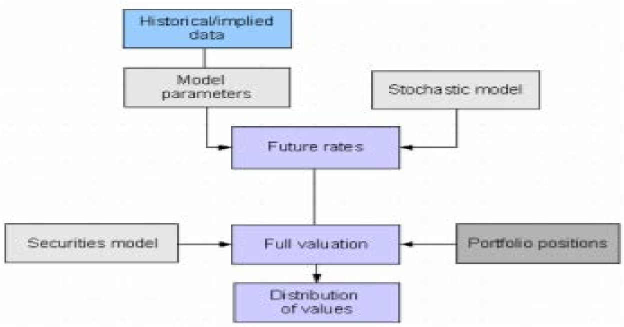
Ωστόσο, η μέθοδος δεν παύει να παρουσιάζει και ορισμένα μειονεκτήματα. Το κυριότερο εξ αυτών, είναι πως η ιστορική προσομοίωση στην πιο αμιγή μορφή της, είναι πολύ δύσκολο να παραγματοποιείται κι αυτό γιατί απαιτεί δεδομένα για όλους τους παράγοντες κινδύνου για μια μακρά ιστορική περίοδο, προκειμένου να δοθεί μια αντιπροσωπευτική εικόνα για το τι αναμένεται να συμβεί στο μέλλον. Ένα άλλο επίσης μειονέκτημα, είναι ότι η συγκεκριμένη μέθοδος δεν περιλαμβάνει καμία υπόθεση για την κατανομή και συνεπώς τα σενάρια που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του VaR, περιορίζονται σε αυτά που έλαβαν χώρα στο δείγμα του ιστορικού διαστήματος που λαμβάνεται υπ' όψιν, όπως αναφέρει η Bohdalová (2007).

2.7.2 Προσομοίωση Monte Carlo

Οι τεχνικές προσομοίωσης Monte Carlo αποτελούν τις πιο ευέλικτες και δυναμικές τεχνικές αποτίμησης του VaR, καθώς λαμβάνουν υπόψη τόσο όλες τις μη γραμμικότητες σε μια τιμή χαρτοφυλακίου σε σχέση με τους βασικούς παράγοντες κινδύνου, όσο και την ενσωμάτωση όλων των επιθυμητών ιδιοτήτων της κατανομής, όπως παχιές ουρές και χρονικά μεταβαλλόμενες διακυμάνσεις. Επίσης, οι προσομοιώσεις Monte Carlo μπορούν να επεκταθούν προκειμένου να εφαρμοστούν για μεγαλύτερες περιόδους, καθιστώντας έτσι εφικτό να χρησιμοποιούνται και ως εργαλείο μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου. Ωστόσο, αυτές οι τεχνικές είναι μακράν οι πιο επίπονες από υπολογιστικής άποψης.

Η κύρια διαφορά μεταξύ ιστορικής προσομοίωσης και προσομοίωσης Monte Carlo είναι ότι η ιστορική προσομοίωση διεξάγει την προσομοίωση χρησιμοποιώντας τις πραγματικά παρατηρούμενες τιμές στην αγορά κατά τη διάρκεια των τελευταίων X περιόδων προκειμένου να παραχθούν Y υποθετικά κέρδη ή απώλειες, ενώ στην προσομοίωση Monte

Carlo μια γεννήτρια τυχαίων γεγονότων χρησιμοποιείται για να παράξει δεκάδες χιλιάδες υποθετικές αλλαγές που συμβαίνουν στην αγορά.



Πηγή: Bohdalová M. (2007)

Διάγραμμα 2.4

Η μεθόδος Προσομοίωσης Monte Carlo

Αυτές στη συνέχεια, χρησιμοποιούνται για να κατασκευαστούν τόσο χιλιάδες υποθετικά κέρδη και απώλειες που συντελούνται στο τωρινό χαρτοφυλάκιο όσο και αλλαγές στην κατανομή των πιθανών κερδών ή απωλειών του χαρτοφυλακίου (Bohdalová, 2007).

2.8 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάστηκε η μέθοδος αποτίμησης κινδύνου Value at Risk ή Αξίας σε Κίνδυνο. Αρχικά, αφού δόθηκε ο ορισμός του και παρουσιάστηκαν τα βήματα και ο τρόπος υπολογισμού του, στη συνέχεια παρουσιάστηκαν οι δύο κύριες μέθοδοι αποτίμησης του VaR, η μη παραμετρική και η παραμετρική μέθοδος. Αναφορά έγινε επίσης, στη διαδικασία του επανελέγχου (*backtesting*) η οποία χρησιμοποιείται προκειμένου να ελεγχθεί η εγκυρότητα των υποδειγμάτων που κατασκευάζονται και επιπλέον παρουσιάστηκαν τα κριτήρια εφαρμογής της εν λόγω διαδικασίας.

Κατόπιν, αναπτύχθηκε το VaR χαρτοφυλακίου όπου και έγινε διαχωρισμός του σε διαφοροποιημένο και μη διαφοροποιημένο και στη συνέχεια έγινε παρουσίαση της μεθόδου διάσπασης του VaR σε τρία επιμέρους μέρη του. Τα μέρη που το απαρίζουν είναι το οριακό, το επαυξημένο και το συνιστωτικό VaR, με τη χρήση των οποίων καθίσταται εφικτή η μέτρηση του VaR κάτω από μεταβολές που μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο. Το κεφάλαιο έκλεισε, με παρουσίαση δύο γενικών μεθόδων προσομοίωσης του VaR, πρώτα με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης και έπειτα με τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo, όπου και δόθηκαν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε μιας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ

3.1 Εισαγωγή

Οι Δείκτες στην Οικονομική Επιστήμη, αποτελούν εργαλεία μέτρησης τόσο των σημερινών συνθηκών που επικρατούν σε μια οικονομία, όσο και εξέτασης των οικονομικών και χρηματοοικονομικών τάσεων που αναμένονται να επικρατήσουν στο μέλλον. Για το λόγο αυτό, συχνά χρησιμοποιούνται προκειμένου να μετρήσουν την ανάπτυξη που βιώνει μια οικονομία ως σύνολο ή ακόμη και όποιες τυχόν αλλαγές συντελούνται σε επιμέρους τομείς της. Σύμφωνα με τον Παπαχρήστου (2009), αντικειμενικός σκοπός τους είναι να καταγράψουν και να αποτυπώσουν τη μέση τάση που αποδίδεται σε μια κατηγορία ομοειδών οικονομικών μεγεθών. Όσον αφορά τα μεγέθη που μπορούν να αντικατοπτρίσουν, αυτά μπορεί να είναι τιμές καταναλωτικών αγαθών, ποσότητες που αφορούν τον κλάδο της βιομηχανίας ή ακόμη συνολικές αξίες όπως το εθνικό εισόδημα, το ακαθάριστο εθνικό προϊόν κ.α. Επίσης, στο πεδίο των χρηματοοικονομικών, χρησιμοποιούνται ευρέως στην τεχνική ανάλυση για την ανίχνευση τάσεων αναφορικά με την πορεία των μετοχών εταιρειών ή και ακόμη για την εύρεση μοτίβων στις τιμές των μετοχών ή άλλων περουσιακών στοιχείων τα οποία εμπορεύονται στα χρηματιστήρια αξιών. Με βάση αυτή τη διάκριση, ο διαχωρισμός τους γίνεται σε δείκτες τιμών, δείκτες ποσοτήτων και δείκτες αξιών.

Οι Δείκτες αποτελούν αριθμούς απαλλαγμένους από μονάδες μέτρησης, επιτρέποντας κατά συνέπεια συγκρίσεις μεταξύ τιμών εκφρασμένων σε διαφορετικά νομίσματα, όπως π.χ τιμές καταναλωτή στην Κίνα σε γουάν με τιμές καταναλωτή στην Ευρώπη σε ευρώ, αλλά και μεταξύ ποσοτήτων εκφρασμένων σε διαφορετικά συστήματα μέτρησης. Με τη χρήση των δεικτών επιτρέπεται επίσης η άμεση σύλληψη τόσο της πορείας που θα ακολουθηθεί όσο και του μεγέθους της μεταβολής που πρόκειται να συντελεστεί. Λόγου χάριν, μια αύξηση της τιμής του δείκτη συνεπάγεται ακολούθως μια αυξητική μέση τάση, αντίστοιχα μια μείωση στην τιμή προσδίδει μείωση της αντίστοιχης τάσης. Επίσης, ως επί το πλείστον, η σύνθεση των δεικτών περιορίζεται σε ένα δείγμα, αποτελώντας με αυτό τον τρόπο και ένα ρόλο αντιπροσωπευτικότητας της συγκεκριμένης κατηγορίας που μελετάται, όπως αναφέρει ο Γκλεζάκος (2014).

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετηθούν οι οικονομικοί και χρηματιστηριακοί δείκτες, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρέως στην Οικονομική Επιστήμη και αποτελούν πυξίδα στη μελέτη των συνθηκών που πρόκειται να επικρατήσουν στο μέλλον. Αρχικά, θα γίνει αναφορά στους αμιγώς οικονομικούς δείκτες, παραθέτοντας παράλληλα κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών. Εν συνεχεία, θα παρουσιαστούν οι χρηματιστηριακοί δείκτες τιμών και αποδόσεων που συμμετέχουν στο Χρηματιστήριο Αθηνών (ΧΑ) και έμφαση θα δοθεί τόσο στο Γενικό Δείκτη όσο και στους Δείκτες FTSE. Το παρόν κεφάλαιο, θα ολοκληρωθεί με την περιγραφή του κανονιστικού πλαισίου μέσα από το οποίο πραγματοποιείται η σύνθεση αλλά και η διαχείριση των εν λόγω δεικτών.

3.2 Οικονομικοί Δείκτες

Μερικά αξιοσημείωτα παραδείγματα δεικτών τιμών που χρησιμοποιούνται στην Οικονομική Επιστήμη και αποτελούν εργαλεία μέτρησης σε μακροοικονομικό επίπεδο είναι τα εξής: ο Δείκτης Τιμών Καταναλωτή (Consumer Price Index), ο Δείκτης Τιμών Παραγωγού (Producer Price Index), ο Δείκτης Τιμών Εξαγωγών (Export Price Index), ο Δείκτης Τιμών Εισαγωγών (Import Price Index) και ο Δείκτης Αποπληθωρισμού του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (GDP deflator). Οι παραπάνω δείκτες, αποτελούν εργαλεία μέτρησης στην Οικονομική Επιστήμη και κατ' επέκταση στη μακροοικονομική ανάλυση και χρησιμοποιούνται για να αποτυπώσουν τόσο την οικονομική δραστηριότητα μιας χώρας όσο και να συμβάλλουν επίσης στην άσκηση οικονομικής πολιτικής.

3.2.1 Ο Δείκτης Τιμών Καταναλωτή

Ο Δείκτης τιμών καταναλωτή (Consumer Price Index) αποτελεί ένα εργαλείο μέτρησης των αλλαγών που συντελούνται στο επίπεδο των τιμών ενός καλαθιού των αγαθών και των υπηρεσιών που καταναλώνουν και χρησιμοποιούν αντίστοιχα τα νοικοκυριά. Αλλαγές, οι οποίες με τη σειρά τους επηρεάζουν την πραγματική αγοραστική δύναμη των εισοδημάτων των καταναλωτών και την σχετική τους ευημερία, αποτυπώνοντας πάντα μια μέση τάση, καθώς οι τιμές αυτών που μετρώνται δε μεταβάλλονται κατά τον ίδιο τρόπο και με τον ίδιο ρυθμό. Η απόδοση ενός δείκτη τιμών, συνήθως αποδίδεται με τιμή ίση με τη μονάδα ή χρησιμοποιώντας ως βάση το 100, λαμβάνοντας υπόψη κάποια περίοδο αναφοράς. Όσον αφορά τις άλλες χρονικές περιόδους οι τιμές του δείκτη, αυτές υποδηλώνουν την ποσοστιαία μεταβολή στις τιμές βάση της τιμής της περιόδου αναφοράς. Αξίζει να αναφερθεί, πως εκτός των άλλων μπορούν επίσης να υπολογίσουν διαφορές σε επίπεδα τιμών μεταξύ διαφορετικών περιοχών στο ίδιο χρονικό σημείο.

Η ιστορία των δεικτών τιμών καταναλωτή πάει πολύ πίσω στο χρόνο και συγκεκριμένα στο 19ο αιώνα. Οι δείκτες ***Laspeyres*** και ***Paasche***, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα, προτάθηκαν τη δεκαετία του 1870. Ένας από τους βασικότερους λόγους για τη δημιουργία ενός δείκτη τιμών καταναλωτή, ήταν να αποζημιώσει τους μισθωτούς για τον πληθωρισμό με το να προσαρμόσει τους μισθούς σε αναλογία με την ποσοστιαία αλλαγή στο δείκτη τιμών καταναλωτή, μια διαδικασία γνωστή και ως (*indexation*). Υπεύθυνοι για τους δείκτες αυτούς είναι συνήθως τα Υπουργεία Εμπορίου κάθε χώρας και η σύνταξη αυτών είναι αποκλειστική ευθύνη των εθνικών στατιστικών υπηρεσιών (στην Ελλάδα υπεύθυνο όργανο είναι η Ελληνική Στατιστική Αρχή).

Τα κύρια χαρακτηριστικά για τα οποία διακρίνονται οι δείκτες είναι τα εξής: Πρώτον δημοσιεύονται συχνά, ως επί το πλείστον κάθε μήνα αλλά δίνονται επίσης και κάθε τρίμηνο. Δεύτερον είναι άμεσα διαθέσιμοι, περίπου δύο εβδομάδες μετά από το τέλος του μήνα ή του τριμήνου. Τρίτον, δεν είθισται να αναθεωρούνται. Εκτός των άλλων, οι δείκτες χρησιμοποιούνται επίσης για ευρετηρίαση συντάξεων, ευρετηρίαση άλλων πληρωμών και λειτουργούν, ως βοηθητικοί για το γενικό ρυθμό πληθωρισμού. Η χρησιμοποίησή τους επίσης για άσκηση νομισματικής πολιτικής από τις κεντρικές τράπεζες, καταδεικνύει το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν στη οικονομία μιας χώρας.

***Ο Δείκτης Laspeyres*:**

$$P_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^{t+1} Q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} P_i^t Q_i^t} \equiv \sum_{i=1}^{n} (p_i^{\,t} / p_i^{\,0}) s_i^{\,0}$$

Ο Δείκτης Laspeyres, πήρε το ονομά του από τον Γερμανό οικονομολόγο Etienne Laspeyres. Συχνά καλείται ως ένας δείκτης σταθμισμένος σύμφωνα με κάποια σταθερή τιμή (*fixed weighted*) ή σταθμισμένος σύμφωνα με κάποια βάση αναφοράς (*base weighted*) και υπολογίζεται ως ένας αριθμητικός σταθμικός μέσος, ο οποίος χρησιμοποιεί βάρη της προηγούμενης περιόδου αναφοράς.

***Ο Δείκτης Paasche*:**

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^t Q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 Q_i^t} \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{n} (p_i{}^t / p_i{}^0)^{-1} s_i{}^t \right\}^{-1}$$

Ο Δείκτης Paasche, ο οποίος συχνά αποκαλείται και ως τρέχον σταθμισμένος δείκτης (*current weighted index*). Είναι ένας αρμονικός σταθμικός μέσος των τιμών επί των ποσοτήτων, ο οποίος χρησιμοποιεί τα πραγματικά μερίδια συμμετοχής των ποσοτήτων σε μεταγενέστερη περίοδο t όπως ακριβώς τα ίδια τα βάρη. Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο δεικτών είναι ότι, ενώ ο δείκτης Laspeyres χρησιμοποιείται για σταθερές (*fixed*) τιμές σε ένα καλάθι αγαθών ή υπηρεσιών, από την άλλη ο δείκτης Paschee χρησιμοποιείται για ένα καλάθι στο οποίο οι τιμές αλλάζουν.

Συγκρίνοντας τους παραπάνω δείκτες μεταξύ τους, όταν οι αλλαγές των τιμών και των ποσοτήτων (σταθμισμένες σε αξία) είναι αρνητικά συσχετισμένες, τότε ο δείκτης Laspeyres υπερτερεί του δείκτη Paasche. Αντίθετα, αν οι σταθμισμένες μεταβολές στην τιμή και στην ποσότητα είναι θετικά συσχετισμένες, τότε ο δείκτης Paasche υπερτερεί του Laspeyres. Ωστόσο, καθώς η ίδια η φύση των καταναλωτών τους καθιστά επιρρεπείς στο να επιζητούν όσο το δυνατόν χαμηλές τιμές (*price-takers*), αυτοί τείνουν να αντιδρούν στις μεταβολές των τιμών με το να αντικαθιστούν αγαθά και υπηρεσίες τα οποία έχουν γίνει σχετικά φθηνότερα για αυτούς και τα οποία μέχρι τότε ήταν σχετικά ακριβότερα για εκείνους, γνωστό και ως «φαινόμενο της αντικατάστασης» (*substitution effect*).

Σύμφωνα με το φαινόμενο της αντικατάστασης, τείνει να δημιουργείται μια αρνητική συσχέτιση μεταξύ τιμής και ποσότητας και στην περίπτωση αυτή, ο δείκτης Laspeyres είναι μεγαλύτερος. Με άλλα λόγια υπερτερεί του δείκτη Paasche, και των οποίων η διαφορά τείνει να μεγαλώνει καθώς αυξάνει ο χρονικός ορίζοντας - πάντα σε όρους επιπέδων δείκτη και όχι ποσοστιαίας μεταβολής.

3.2.2 Ο Δείκτης Τιμών Παραγωγού

Ο Δείκτης Τιμών Παραγωγού (Producer Price Index) αποτελεί ένα δείκτη τιμών, ο οποίος καταγράφει τη μέση μεταβολή στις τιμές πώλησης που λαμβάνονται από τους εγχώριους παραγωγούς αγαθών και υπηρεσιών. Ο εν λόγω δείκτης, αποτυπώνει τις αλλαγές που επέρχονται στην τιμή από τη σκοπιά του πωλητή και διαφέρει από τους άλλους δείκτες, λόγου χάρη το Δείκτη Τιμών Καταναλωτή (ΔΤΚ), ο οποίος μετρά την αλλαγή που επέρχεται στην τιμή από τη σκοπιά του αγοραστή. Διακρίνεται σε τρεις βασικές κατηγορίες: το δείκτη με βάση τη βιομηχανία (*industry-based*), το δείκτη με βάση τα εμπορεύματα (*commodity-based*), το δείκτη με βάση τα εμπορεύματα, ο οποίος ταυτόχρονα βασίζεται στην τελική και την ενδιάμεση ζήτηση (*commodity-based final demand-intermediate demand*).

Για παράδειγμα στις Η.Π.Α υπάρχουν περίπου 10,000 PPI (Producer Price Indices) οι οποίοι δημοσιεύονται κάθε μήνα τόσο για μεμονωμένα προϊόντα, όσο και για κατηγορίες προϊόντων. Μέσω των παραπάνω δεικτών, αναπαρίστανται σχεδόν όλα τα αγαθά που παράγουν οι βιομηχανίες σε τομείς όπως η εξόρυξη, η αγροτική παραγωγή, οι κατασκευές κ.α. Οι παραπάνω δείκτες δε διαφέρουν στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται σε σχέση με άλλους δείκτες, όπως για παράδειγμα ο ΔΤΚ. Έτσι, και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται ως βάση το 100 και όποιες αλλαγές συντελούνται σε μελλοντικές περιόδους μετρώνται με βάση την περίοδο αναφοράς. Συνεπώς αν ένα αγαθό έχει ως βάση ΔΤΠ (Δείκτης Τιμών Παραγωγού) το 100 και τον επόμενο μήνα έχει ΔΤΠ 110, αυτό υποδηλώνει μια αύξηση της τάξης του 10% σε σχέση με την προηγούμενη περίοδο.

Οι ταξινομημένοι δείκτες παραγωγού βασιζόμενοι στην βιομηχανία (*Industry-based classification PPI*) μετρώνται σε επίπεδο βιομηχανίας και αποτυπώνουν τις αλλαγές στις τιμές που επέρχονται στην παραγωγή μιας εταιρείας στον κλάδο της βιομηχανίας, έξω όμως από το περιβάλλον στο οποίο δραστηριοποιείται. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει πως ένας ΔΤΠ σε επίπεδο βιομηχανίας, μετρά την καθαρή απόδοση της εταιρείας. Οι ταξινομημένοι δείκτες παραγωγού βασιζόμενοι στα εμπορεύματα (*Commodity-Based Classification PPI*) περιλαμβάνουν προϊόντα και υπηρεσίες με βάση τόσο κάποιων ομοιοτήτων που εντοπίζονται, όσο και της σύνθεσης παραγωγής και αγνοούν τελείως την κατηγοριοποίηση της βιομηχανίας, με βάση το προϊόν το οποίο κατηγοριοποιείται. Οι ταξινομημένοι δείκτες παραγωγού τελικής και ενδιάμεσης ζήτησης βασιζόμενοι στα εμπορεύματα (*Commodity-Based Final Demand-Intermediate Demand Classification PPI*), συνθέτουν ένα σύστημα και αποτελούν μια προσθήκη στους ήδη υπάρχοντες δείκτες τιμών παραγωγού. Αυτό το σύστημα επανακατηγοριοποιεί τους εμπορικούς δείκτες για αγαθά, υπηρεσίες και κατασκευές σε υποκατηγορίες προϊόντων, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τους τόσο το συγκεκριμένο αγοραστή των εν λόγω προϊόντων, όσο και την ποσότητα της φυσικής επεξεργασίας που υφίστανται (IMF, 2009).

3.2.3 Ο Δείκτης Τιμών Εξαγωγών και Εισαγωγών

Ένας δείκτης τιμών εκφράζει ένα περιληπτικό μέτρο της αναλογικότητας ή των αλλαγών που υφίσταται ένα σετ τιμών στο πέρασμα του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, οι Δείκτες Εξαγωγών και Εισαγωγών (Export and Import's Indices) ή (XMPI's) καταγράφουν τη συνολική μεταβολή στις τιμές των συναλλαγών που αφορούν αγαθά και υπηρεσίες μεταξύ των κατοίκων μιας οικονομικής ζώνης (π.χ χώρας) και των κατοίκων του υπόλοιπου κόσμου. Επίσης, οι τιμές των διαφορετικών αγαθών και υπηρεσιών δεν αλλάζουν με τον ίδιο ρυθμό. Έτσι, ένας τέτοιος δείκτης τιμών συνοψίζει τη μεταβολή αυτών, υπολογίζοντας το μέσο όρο τους.

Ένας δείκτης τιμών εξαγωγών (Export Index) ή (XPI) μετρά τις αλλαγές που επέρχονται στο επίπεδο τιμών των αγαθών και των υπηρεσιών που παρέχονται από τους κατοίκους μιας ορισμένης οικονομικής ζώνης (συνήθως χώρας) και τα οποία με τη σειρά τους, χρησιμοποιούνται από τους κατοίκους του υπόλοιπου κόσμου. Εν αντιθέσει, ένας δείκτης τιμών εισαγωγών (Import Index) ή (MPI) μετρά τις αλλαγές που επέρχονται στο επίπεδο τιμών των αγαθών και των υπηρεσιών που παρέχονται από τους κατοίκους του υπολοίπου κόσμου και τα οποία με τη σειρά τους χρησιμοποιούνται από τους κατοίκους μιας ορισμένης οικονομικής ζώνης.

Όπως και όλοι οι άλλοι δείκτες τιμών, έτσι και οι δείκτες τιμών εξαγωγών και εισαγωγών εξηπηρετούν διάφορους σκοπούς. Ακριβέστερα, το πως αυτοί καθορίζονται και κατασκευάζονται εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την πηγή των δεδομένων που χρησιμοποιείται για την κατασκευή τους, από ποιους πρόκειται να χρησιμοποιηθούν, όπως επίσης και για το λόγο για τον οποίο αυτοί θα χρησιμοποιηθούν. Έτσι οι XMPI's μπορούν να μετρήσουν τόσο την κατά μέσο όρο μεταβολή των τιμών των αγαθών και των υπηρεσιών καθώς αυτές αλλάζουν ιδιοκτησία μεταξύ των κατοίκων διαφορετικών οικονομικών ζωνών.

Ένας μηνιαίος ή τριμηνιαίος δείκτης XMPI με λεπτομερή δεδομένα από το εμπόριο και τη βιομηχανία επιτρέπει την παρακολούθηση του βραχυπρόθεσμου πληθωρισμού των τιμών διαφορετικών ειδών εμπορευμάτων. Μετρήσεις των μεταβολών σε όρους εμπορίου μιας χώρας, οι οποίες καθορίζονται ως η αναλογία του XPI προς τον MPI, χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των αλλαγών που επέρχεται στο εισόδημα των κατοίκων. Έτσι, οι εν λόγω δείκτες αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο μέτρησης στην Οικονομική Επιστήμη και παράλληλα η χρησιμότητά τους είναι καθοριστικής σημασίας, καθώς αποτελούν έναν αποπληθωριστή των ονομαστικών τιμών των εισαγωγών και των εξαγωγών, ο οποίος αποσκοπεί να αντλήσει τις εκτιμήσεις του ακαθάριστου εγχώριου προϊόντος, μέσω της προσέγγισης των δαπανών (IMF, 2009).

3.2.4 Ο Δείκτης Αποπληθωρισμού του ΑΕΠ

Ο Δείκτης αποπληθωρισμού του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (GDP deflator) αποτελεί ένα εργαλείο μέτρησης του επιπέδου των τιμών όλων των νέων, εγχώρια παραγόμενων, τελικών προϊόντων και υπηρεσιών σε μια οικονομία. Το ακαθάριστο εγχώριο προϊόν είναι η συνολική τιμή όλων των τελικών προϊόντων και υπηρεσιών που παράγονται σε μια οικονομία κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης περιόδου.

Όπως και ο δείκτης τιμών καταναλωτή, έτσι και ο δείκτης αποπληθωρισμού αποτελεί μια αναλογία του ονομαστικού προς το πραγματικό ΑΕΠ. Συνεπώς, ο εν λόγω δείκτης είναι ένα εργαλείο μέτρησης του πληθωρισμού προς τον αποπληθωρισμό σε σχέση με ένα έτος βάσης. Αντίθετα με τον ΔΤΚ, ο δείκτης αποπληθωρισμού δε βασίζεται σε ένα καθορισμένο καλάθι από αγαθά και υπηρεσίες. Έτσι, ένα τέτοιο καλάθι επιτρέπεται να αλλάζει από έτος σε έτος ανάλογα με τις διαφοροποιήσεις που επέρχονται στις καταναλωτικές και επενδυτικές συνήθειες των ανθρώπων.

Στα περισσότερα συστήματα των Εθνικών λογαριασμών, ο δείκτης αποπληθωρισμού μετρά την αναλογία του ονομαστικού προς το πραγματικό ΑΕΠ. Ο τύπος υπολογισμού του είναι ο εξής:

$$GDPdeflator = \frac{No\min alGDP}{\mathrm{Re}\,alGDP} \times 100 \tag{3.3}$$

Το ονομαστικό ΑΕΠ ενός δεδομένου έτους, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις τιμές αυτού του έτους, ενώ το πραγματικό ΑΕΠ του ίδιου έτους υπολογίζεται με τη χρήση των τιμών του έτους βάσης. Ο συγκεκριμένος τρόπος υπολογισμού δείχνει, ότι διαιρώντας το ονομαστικό ΑΕΠ με τον δείκτη αποπληθωρισμού του ΑΕΠ και πολλαπλασιάζοντάς το με το 100 προκύπτει το πραγματικό ΑΕΠ.

Όπως προαναφέρθηκε, σε αντίθεση με κάποιους δείκτες όπως ο ΔΤΚ, ο αποπληθωριστής του ΑΕΠ δε βασίζεται σε κάποιο καθορισμένο και σταθερό καλάθι αγαθών και υπηρεσιών και συνεπώς επιτρέπει αλλαγές. Πιο συγκεκριμένα, για τον αποπληθωριστή ΑΕΠ, το καλάθι κάθε έτους αποτελείται από ένα σετ από αγαθά, τα οποία παράγονται εγχώρια και σταθμίζονται με βάση την τιμή που επικρατεί στην αγορά, της συνολικής κατανάλωσης του κάθε αγαθού. Η θεωρία που υπάρχει πίσω από αυτή τη μέθοδο, έγκειται στο γεγονός ότι ο δείκτης αποπληθωρισμού αντανακλά όλες τις αλλαγές που επέρχονται στις δαπάνες των καταναλωτών. Λόγου χάριν, αν η τιμή του κοτόπουλου αυξηθεί σε σχέση με την τιμή του βοδινού κρέατος, τότε οι καταναλωτές είναι πιο πιθανό να ξοδέψουν περισσότερα χρήματα στο βοδινό προκειμένου να υποκαταστήσουν την ανάγκη τους για το κοτόπουλο. Αξίζει να αναφερθεί ότι στην πράξη, η διαφορά μεταξύ του δείκτη αποπληθωρισμού και του ΔΤΚ είναι συχνά σχετικά μικρή. Έτσι, οι κυβερνήσεις στις αναπτυγμένες χώρες του κόσμου όλο και περισσότερο χρησιμοποιούν τους δείκτες τιμών τόσο για δημοσιονομικό και νομισματικό σχεδιασμό όσο και για πληρωμές δικαιούχων ενταγμένων σε κοινωνικά προγράμματα.

3.3 Χρηματιστηριακοί Δείκτες

Τα Χρηματιστήρια Αξιών αποτελούν τις λεγόμενες αγορές και δημιουργήθηκαν με σκοπό την επιζήτηση τόσο βραχυπρόθεσμων αλλά κυρίως των μακροπρόθεσμων κεφαλαίων και παράλληλα λειτούργησαν από την ανάγκη που δημιουργήθηκε για την πραγματοποίηση αγοραπωλησιών μεγάλων ποσοτήτων εμπορευμάτων που βρίσκονται μακριά από τον τόπο διαπραγμάτευσής τους. Ένας τρόπος προκειμένου οι επενδυτές που συμμετείχαν στις αγοραπωλησίες να έχουν άμεση πληροφόρηση για τις μεταβολές που συντελούνται στις εν λόγω συναλλαγές, ήταν να κατασκευαστούν κάποιοι δείκτες, οι οποίοι θα τους επέτρεπαν να αντιλαμβάνονται άμεσα και εύκολα τις όποιες αυτές αλλαγές, όταν αυτές συμβαίνουν.

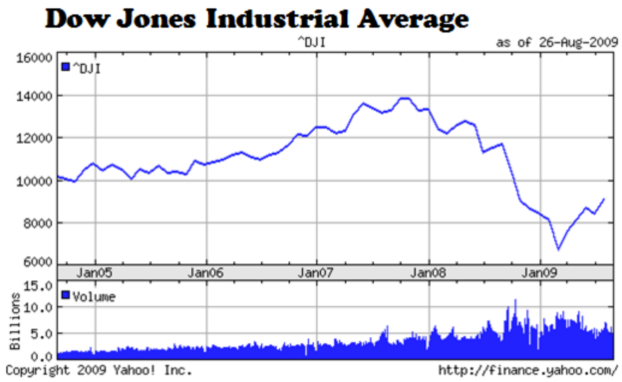
Ο διαχωρισμός αυτών των δεικτών γίνεται σε δύο κατηγορίες, τους ***ισοσταθμικούς*** (*equally weighted*) και τους ***σταθμικούς*** (*weighted*). Όσον αφορά τους πρώτους, αυτοί αποδίδουν ίση βαρύτητα σε κάθε στοιχείο της κατηγορίας και ο τρόπος υπολογισμού τους προκύπτει ως ένας απλός αριθμητικός μέσος των τιμών των εν λόγω μετοχών που μετέχουν σε αυτούς. Από την άλλη, οι ***σταθμικοί*** Δείκτες αποδίδουν με διαφορετικό τρόπο τη βαρύτητα στα διάφορα στοιχεία αντί κάποιων άλλων και ο τρόπος υπολογισμού τους προκύπτει είτε με κάποια στάθμιση πάνω στην αξία των μετοχών που μετέχουν σε αυτούς (*value weighted indices*), είτε ως δείκτες που τα βάρη τους δίνονται ανάλογα με τις τιμές των μετοχών που μετέχουν σε αυτούς (*price weighted indices*). Ως επί το πλείστον, στάθμιση στους δείκτες αυτούς γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική αξία του κάθε στοιχείου. Λόγου χάριν, ο υπολογισμός του δείκτη τιμών καταναλωτή γίνεται με κριτήριο η απόδοση μεγαλύτερης βαρύτητας να αφορά αποκλειστικά τιμές αγαθών, οι οποίες με τη σειρά τους επιβαρύνουν αναλογικά περισσότερο τον προϋπολογισμό των καταναλωτών, όπως αναφέρει ο Παπαχρήστου (2009).

Οι Γενικοί Δείκτες Τιμών δεν αποτελούν παρά μια απεικόνιση των τιμών των μετοχών των εισηγμένων στο χρηματιστήριο τιμών και οι οποίοι αποτυπώνουν τη μέση τάση των τιμών αυτών. Εκτός του γενικού τους ρόλου να εμφανίζουν ένα μέσο όρο τιμών, οι δείκτες τιμών μετοχών εξυπηρετούν και άλλες ανάγκες όπως είναι η χρήση τους για την πρόβλεψη της μέσης τάσης των τιμών ή η χρησιμοποίησή τους ως μέτρο σύγκρισης προκειμένου να αξιολογηθούν οργανισμοί συλλογικών επενδύσεων. Πρέπει επιπλέον να σημειωθεί και η συνεισφορά τους ως εργαλεία τόσο στρατηγικής επενδύσεων, όπως αυτή που πραγματοποιείται στη διαχείριση Αμοιβαίων Κεφαλαίων όσο και ως μέσα επένδυσης, όταν πρόκειται για διαπραγματεύσιμα Αμοιβαία Κεφάλαια.

Οι εν λόγω δείκτες του Χρηματιστηρίου είναι συνήθως σταθμικοί δείκτες και η κατανομή των βαρών γίνεται με βάση την αξία των μετοχών. Καθένας από αυτούς αφορά και μια συγκεκριμένη κατηγορία μετοχών, διακρίνοντάς τους σε δείκτες μεγάλης κεφαλαιοποίησης, μικρής κεφαλαιοποίησης, κλαδικούς δείκτες κ.α. Θα πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο, πως οι μετοχές που λαμβάνονται υπόψη προκειμένου να υπολογιστεί ο δείκτης βασίζονται στη χρηματιστηριακή αξία, την εμπορευσιμότητα, τη διασπορά και την ιστορία της μετοχής, όπως τονίζει ο Παπαχρήστου (2009).

Η χρησιμότητα των χρηματιστηριακών δεικτών αποδίδεται στο ότι αποτελούν για τους επενδυτές ένα μέσο να συλλαμβάνουν άμεσα και κατανοητά τις μεταβολές που συντελούνται στο επίπεδο τιμών της αγοράς. Όπως αναφέρει ο Γκλεζάκος (2014), αναφορές που γίνονται καθημερινά για την πορεία (πάνω ή κάτω) που ακολουθεί κάποιος δείκτης άμεσα αντικατοπτρίζουν την πορεία που ακολούθησε η αγορά (ανοδική ή καθοδική) και τις όποιες συνέπειες συνοδεύουν τα χαρτοφυλάκια των επενδυτών. Επίσης, με τη χρήση των δεικτών ο επενδυτής εντοπίζει και μελετά τους παράγοντες εκείνους που επηρεάζουν τις τιμές άλλων τίτλων, καθώς οι διαδοχικές τιμές τους ποσοτικοποιούν την πορεία της αγοράς σε επίπεδο χρηματιστηρίου. Με αυτό τον τρόπο, γίνεται δυνατή η εφαρμογή ποσοτικών μεθόδων με τη χρήση των οποίων καθίστανται εφικτές συγκρίσεις με άλλες παραμέτρους όπως ισοτιμίες, πληθωρισμός, επιτόκια κ.α.

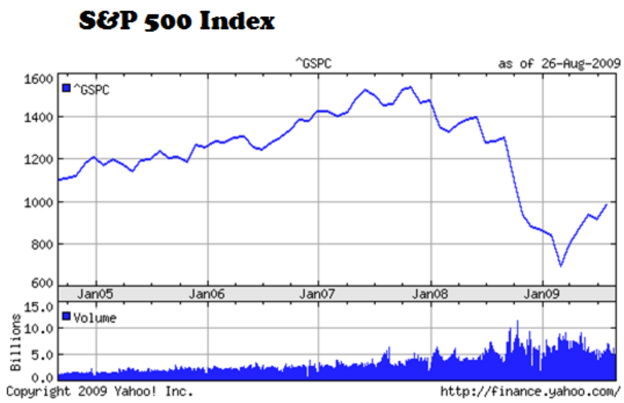
Στα Διαγράμματα 3.1 και 3.2 δίνονται οι δύο παγκοσμίως γνωστοί στο ευρύ κοινό χρηματιστηριακοί δείκτες, DJIA και S&P 500 αντίστοιχα, όπου περιγράφεται η εξέλιξη της πορείας της τιμής του κάθε δείκτη σε ένα διάστημα 4 ετών. Ο πρώτος περιλαμβάνει 30 γνωστές μετοχές μεγάλων εταιρειών (*blue chips*) που δραστηριοποιούνται στις Η.Π.Α και εμπορεύονται στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης, ενώ ο δεύτερος περιλαμβάνει 500 μετοχές και αποτελεί ένα δείκτη οδηγό, ο οποίος αντανακλά την πορεία των δεικτών μεγάλης κεφαλαιοποίησης που διαμορφώνεται σε παγκόσμιο επίπεδο.



Πηγή: Yahoo Finance (2009)

Διάγραμμα 3.1

Εξέλιξη της τιμής του Δείκτη DJIA από το 2005 έως το 2009



Πηγή: Yahoo Finance (2009)

Διάγραμμα 3.2

Εξέλιξη της τιμής του Δείκτη S&P 500 από το 2005 έως το 2009

Σημαντικά οφέλη που προκύπτουν από τη χρησιμοποίηση των εν λόγω δεικτών, είναι η μελέτη των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων τάσεων της χρηματιστηριακής αγοράς, ο υπολογισμός της ευαισθησίας κάθε μετοχής στις μεταβολές της αγοράς, όπως επίσης και η δυνατότητα επένδυσης στην πορεία της αγοράς ως σύνολο, η οποία μπορεί να επιτευχθεί μέσω χρηματιστηριακών προϊόντων.

3.3.1 Οι Δείκτες Τιμών και Αποδόσεων των Μετοχών του ΧΑ

Στο χώρο των χρηματοοικονομικών επενδύσεων, η γνώση των διακυμάνσεων στα επίπεδα των τιμών των μετοχών είναι καθοριστικής σημασίας, καθώς είναι αυτές οι διακυμάνσεις που εκφράζουν τις αντίστοιχες διαφοροποιήσεις στην προσφορά και τη ζήτηση και αποτυπώνουν το κλίμα που κάθε φορά επικρατεί στην αγορά. Όσο όμως περισσότερο είναι το πλήθος των εισηγμένων επιχειρήσεων, καθίσταται δυσκολότερο κάποιος επενδυτής να κατανοήσει τις τάσεις και τις καταστάσεις που διαμορφώνονται στην αγορά, μιας και πρέπει να εξετάσει και να αναλύσει τα δεδομένα αντίστοιχα μεγάλου πλήθους επιχειρήσεων, όπως τονίζει ο Γκλεζάκος (2014).

Προκειμένου αυτό του πρόβλημα να ξεπεραστεί, κατασκευάστηκαν οι δείκτες τιμών, οι οποίοι μπορεί μεν να αποτελούν πλασματικά μεγέθη, εκφράζουν όμως περιεκτικά και αρκετά ικανοποιητικά τις μεταβολές που επέρχονται στα επίπεδα των τιμών. Συνεπώς, προκειμένου ένας δείκτης να εκφράζει αποτελεσματικά την παρούσα κατάσταση και τις τάσεις της αγοράς, θα πρέπει να προκύπτει από τη σύνθεση των δεδομένων όλων των εισηγμένων επιχειρήσεων στις οποίες αναφέρεται. Στην πράξη ωστόσο, με την εφαρμογή διαφόρων τεχνικών δειγματοληψίας που εφαρμόζονται, καθίσταται εφικτή η διαμόρφωση αποτελεσματικών δεικτών, οι οποίοι βασίζονται στα δεδομένα ενός υποσυνόλου μετοχών το οποίο μάλιστα είναι και αντιπροσωπευτικό.

Συνεχίζοντας, ο Γκλεζάκος (2014) αναφέρει πως ο διαχωρισμός αυτών γίνεται σε διάφορες κατηγορίες, ανάλογα με τις μετοχές που εκφράζουν και τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται οι τιμές τους. Πιο συγκεκριμένα, με βάση την πρώτη κατηγορία διακρίνονται σε κλαδικούς, γενικούς και ειδικούς, ενώ με βάση τη δεύτερη κατηγορία διακρίνονται σε σταθμισμένους και απλούς.

Οι κλαδικοί δείκτες, αποτυπώνουν το επίπεδο των τιμών και αντικατοπτρίζουν τις αλλαγές που επέρχονται στις τιμές των μετοχών των εταιρειών που ανήκουν σε κάποιο συγκεκριμένο κλάδο, όπως αυτών της πληροφορικής, της υψηλής τεχνολογίας κ.α.

Οι γενικοί δείκτες, αναφέρονται στις εισηγμένες εταιρείες μιας χρηματιστηριακής αγοράς οι οποίες λαμβάνονται ως σύνολο. Τέτοιο παράδειγμα, αποτελεί π.χ. ο Γενικός Δείκτης τιμών του Χρηματιστηρίου Αθηνών (ΧΑ).

Οι ειδικοί δείκτες εκφράζουν με τη σειρά τους μια κατηγορία δεικτών των οποίων το επίπεδο τιμών και οι τάσεις των επιχειρήσεων κατατάσσονται σε ομάδες με βάση κριτήρια διακλαδικά, όπως είναι το μέγεθος των επιχειρήσεων και η επικινδυνότητα των επιχειρήσεων στις οποίες αναφέρονται. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών, είναι ο Δείκτης Υψηλής Κυκλοφοριακής Ταχύτητας του Χρηματιστηρίου Αθηνών ή ο Δείκτης Παράλληλης Αγοράς.

Σύμφωνα με τον Παπαχρήστου (2009) το ***Χρηματιστήριο Αθηνών*** (ΧΑ) με τη σειρά του καταρτίζει μια σειρά Δεικτών, οι οποίοι προσδοκούν να αποτυπώσουν τις τάσεις στην αντίστοιχη κατηγορία μετοχών των εισηγμένων εταιρειών στην αγορά μετοχών του ΧΑ.

Οι Δείκτες αυτοί είναι οι εξής:

- *Ο Γενικός Δείκτης Τιμών*, ο οποίος αποσκοπεί να αποτυπώσει τη μέση τάση της τιμής των μετοχών εταιρειών που ανήκουν στην Κατηγορία Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης (τα λεγόμενα blue chips).

- *Ο Δείκτης Συνολικής Απόδοσης του Γενικού Δείκτη*, στον οποίο αποτυπώνεται η απόδοση του Γενικού Δείκτη όπως αυτή επηρεάζει τα χαρτοφυλάκια των επενδυτών.

- *Ο Δείκτης Τιμών Μεσαίας Κεφαλαιοποίησης*, ο οποίος αποτυπώνει τη μέση τάση της τιμής των μετοχών των εταιρειών που ανήκουν σε μικρότερες κατηγορίες όπως αυτών της Μεσαίας & Μικρής Κεφαλαιοποίησης.

- *Ο Δείκτης Υψηλής Κυκλοφοριακής Ταχύτητας*, ο οποίος αποσκοπεί να δώσει τη μέση τάση της τιμής των μετοχών που παρουσιάζουν μεγάλη ημερήσια κυκλοφοριακή ταχύτητα. Πρακτικά, αφορά μετοχές με μεγάλο όγκο συναλλαγών συγκρινόμενες με την κεφαλαιοποίησή τους.

- *Ο Δείκτης όλων των Μετοχών* ο οποίος αποτυπώνει τη μέση τάση της τιμής των μετοχών κάθε κατηγορίας (κοινών, προνομιούχων κ.α.) όλων των εισηγμένων εταιρειών κάθε κατηγορίας είτε πρόκειται για μεγάλη, μεσαία ή μικρή κεφαλαιοποίηση στην αγορά μετοχών του ΧΑ.

- *Ο Δείκτης Τιμών Εναλλακτικής Αγοράς*, ο οποίος καταγράφει τη μέση τάση της τιμής των μετοχών των εταιρειών που είναι εισηγμένες στην Εναλλακτική Αγορά του.

Όλοι οι παραπάνω δείκτες καταρτίζονται με σκοπό να καταγράφουν σε πραγματικό χρόνο τη μέση τάση που ακολουθούν οι τιμές των μετοχών σε διάφορες κατηγορίες και με βάση ορισμένα χαρακτηριστικά και αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στις αποφάσεις που καλούνται να λάβουν οι επενδυτές.

3.3.2 Ο Γενικός Δείκτης του ΧΑ

Οι προϋποθέσεις προκειμένου να συμμετέχει στο Γενικό Δείκτη μια μετοχή συνοψίζονται ακολούθως. Αρχικά, θα πρέπει ανήκει στην κατηγορία της μεγάλης κεφαλαιοποίησης. Επίσης, να είναι εισηγμένη στο ΧΑ για τουλάχιστον 6 μήνες. Από τον τελευταίο κανόνα εξαιρούνται οι μετοχές επιχειρήσεων που έχουν χρηματιστηριακή αξία ίση ή μεγαλύτερη του 2% του αθροίσματος των μέσων χρηματιστηριακών αξιών του συνόλου των εισηγμένων εταιρειών. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να παρουσιάζουν συναλλαγές για τουλάχιστον το ήμισυ των συνεδριάσεων του ΧΑ της περιόδου που εξετάζεται. Εξαιρούνται από τον Γενικό Δείκτη, μετατρέψιμες προνομιούχες μετοχές, μετατρέψιμες ομολογίες και μετοχές εταιρειών επενδύσεων, όπως αναφέρει ο Γκλεζάκος (2014).

Οι μετοχές που έχουν δικαίωμα συμμετοχής, κατατάσσονται με βάση τη Μέση Χρηματιστηριακή τους Αξία (ΜΧΑ) και στη συνέχεια ταξινομούνται με βάση την Αξία των Συναλλαγών τους (δεν περιλαμβάνονται οι συναλλαγές που πραγματοποιούνται με πακέτα). Η τελική κατάταξη, προκύπτει από τον αριθμητικό μέσο όρο των σειρών διαβάθμισης, με βάση τα δύο πιο πάνω κριτήρια. Σε περίπτωση ισοβαθμίας δύο μετοχών, επιλέγεται η μετοχή με τη μεγαλύτερη ΜΧΑ. Από την πιο πάνω κατάταξη επιλέγονται οι 60 πρώτες μετοχές, οι οποίες συγκροτούν το Γενικό Δείκτη (ΓΔ). Σημειώνεται ότι δεν επιτρέπεται να περιληφθούν στον ΓΔ περισσότερες από 5 εταιρείες του ίδιου κλάδου, εκτός ειδικών εξαιρέσεων (Γκλεζάκος, 2014).

Υπολογισμός της Τιμής του Γενικού Δείκτη

Η τιμή του Γενικού Δείκτη υπολογίζεται με βάση την πιο κάτω σχέση:

$$Γ\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i N_i}{d}$$

Όπου:

$i =$ οι μετοχές που μετέχουν στο Δείκτη $(i = 1, 2, 3, ..., ..., n)$

$P_i =$ Τιμή της μετοχής (τιμή κλεισίματος ή τρέχουσα τιμή)

$N_i =$ Ο αριθμός των μετοχών σε "τεμάχια" της μετοχής i

$d =$ Βάση υπολογισμού του Δείκτη, ήτοι συνολική αξία των εταιρειών του δείκτη κατά την περίοδο έναρξης του υπολογισμού του.

Το d επαναπροσδιορίζεται κάθε φορά που καταβάλλονται μερίσματα από τις εταιρείες του δείκτη, καθώς και κάθε φορά που πραγματοποιούνται από αυτές μεταβολές του μετοχικού κεφαλαίου τους, με βάση την επόμενη σχέση, όπως τονίζει ο Γκλεζάκος (2014):

$$d_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i N_i}{P_{κλεισίματος}}$$

Μέσω του υπολογισμού της τιμής του Γενικού Δείκτη δίνεται η μέση τάση που επικρατεί στο χρηματιστήριο σε πραγματικό χρόνο και αποτελεί το κατ' εξοχήν εργαλείο μέτρησης που προσδιορίζει την κατεύθυνση που ακολουθεί συνολικά η αγορά (ανοδικά ή καθοδικά) κατά τη διάρκεια μιας συνεδρίασης. Στο τέλος αυτής, καθορίζεται και η τιμή κλεισίματος μέσω της οποίας αποτυπώνεται το μέγεθος της μεταβολής που έχει επέλθει από την τελευταία συνεδρίαση.

Πίνακας 3.1

Χαρακτηριστικά του Γενικού Δείκτη ΧΑ

Ονομασία	**Γενικός Δείκτης Τιμών Χ.Α.**
Χρηματιστήριο Διαπραγμάτευσης	Χρηματιστήριο Αθηνών (Χ.Α.)
Περιγραφή	Απεικονίζει την τάση των μετοχών των εισηγμένων εταιρειών που διαπραγματεύονται στην Κατηγορία Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης του Χ.Α. Στα κριτήρια συμμετοχής στον δείκτη συμπεριλαμβάνονται: -Συμμετοχή μιας μόνο κατηγορίας κοινών με δικαίωμα ψήφου μετοχών για κάθε εταιρεία. -Συνεχής παρουσία τουλάχιστον 6 μηνών στην Αγορά Μετοχών εκτός και αν στο υπό εξέταση χρονικό διάστημα οι μετοχές της εν λόγω εταιρείας παρουσιάζουν Μέση Χρηματιστηριακή Αξία (ΜΧΑ) ≥ από το 2% της Συνολικής ΜΧΑ της Αγοράς Μετοχών του Χ.Α. -Μετοχές εταιρειών επί των οποίων δεν έγιναν πράξεις για τουλάχιστον το ήμισυ των συνεδριάσεων του Χ.Α της περιόδου που εξετάζεται αποκλείονται από τη συμμετοχή τους στο δείκτη. -Στο Γεν. Δείκτη μπορούν να συμμετέχουν μόνον οι μετοχές που ανήκουν στην κατηγορία Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης και δεν εμφανίζονται στο Δείκτη Υψηλής Κυκλοφοριακής Ταχύτητας. -Περισσότερες πληροφορίες από την ενότητα «Δείκτες» στην ιστοσελίδα του Χ.Α: http://www.athex.gr
Τεχνικά Χαρακτηριστικά	
Βάση	100.00
Έτος Βάσης [Ημέρα-Μήνας-Έτος]	31 Δεκεμβρίου 1980
Τύπος Δείκτη	Ευρείας Επιλογής (Υψηλής Κεφαλαιοποίησης Blue Chip)
Μαθηματικός Τύπος Υπολογισμού	Στάθμιση ως προς την Κεφαλαιοποίηση
Σύνθεση Δείκτη – Αποδεκτές Αξίες	Οι 60 μεγαλύτερες εταιρίες blue chip της κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης («Big Cap») του Χρηματιστηρίου Αθηνών. *(Περισσότερες πληροφορίες στη τελευταία έκδοση των Βασικών Κανόνων).*
Κριτήρια Στάθμισης	Κεφαλαιοποίηση
Μέγιστη Στάθμιση Μετοχής	Χωρίς Όριο
Προσαρμοσμένο Ποσοστό Διασποράς (Free Float)	
Δείκτης Απόδοσης / Τιμών	Δείκτης Τιμών
Συχνότητα Τακτικών Αναθεωρήσεων	2 φορές τον χρόνο (Απρίλιο και Οκτώβριο)
Χρήση Κλαδικής Κατάταξης	Ναι
Προσαρμογή συνέπεια Εταιρικών Πράξεων	Καθημερινά εφόσον απαιτείται και πριν την έναρξη της συνεδρίασης όταν υπάρχει αποκοπή μετοχής
Νόμισμα	Ευρώ - Οι τιμές του δείκτη είναι καθαρός αριθμός.
Διάχυση Δεδομένων	
Συχνότητα Υπολογισμού	Πραγματικός Χρόνος (Κάθε 30 '')
Περίοδος Υπολογισμού	10:24 - 16:50 (Τοπική Ώρα)
Ιστορικά δεδομένα από: [Ημέρα-Μήνας-Έτος]	2 Ιανουαρίου 1985
Τύπος Ιστορικών Δεδομένων	Ανώτερη, Κατώτερη, Κλείσιμο, Σύνθεση
Κωδικός ISIN	GRI99117A004
Κωδικός Reuters	ATG
Κωδικός Bloomberg	ASE
Κωδικός Telekurs	GD
Παράγωγα Προϊόντα	
Χρηματιστήριο Διαπραγμάτευσης Παράγωγων Προϊόντων	Κανένα
Τυποποιημένα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures)	Κανένα
Τυποποιημένα Συμβόλαια Δικαιωμάτων (Options)	Κανένα
Άλλα Τυποποιημένα Προϊόντα	Κανένα
Exchange Traded Funds (ETF's)	Κανένα
Λοιπά Στοιχεία	
Κατοχύρωση Εμπορικού Σήματος ®	
Αμοιβή για την άδεια χρήσης του δείκτη	Ναι
Κόστος χρήσης του δείκτη σε παράγωγα προϊόντα	Ναι
Υπεύθυνος πωλήσεων	
Τηλέφωνο Επικοινωνίας	(+30-210)336-6166
Διεύθυνση E-mail	
Index Compiler	Χρηματιστήριο Αθηνών
Διεύθυνση E-mail	Information Dissemination Dpt@helex.gr
Ιστοσελίδα	http://www.athex.gr
Τηλέφωνο Επικοινωνίας	(+30-210)336-6800

Πηγή: Γκλεζάκος Μ. (2007)

Στον Πίνακα 3.1, γίνεται μια συνοπτική περιγραφή κάποιων χαρακτηριστικών του Γενικού Δείκτη ΧΑ. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται μια γενική εισαγωγή για το τι αυτός αντικατοπτρίζει και εν συνεχεία, δίνονται κάποια τεχνικά χαρακτηριστικά του, όπως η βάση του, ο τύπος του δείκτη αλλά και το κριτήριο στάθμισής του. Παράλληλα, δίνονται κάποια στοιχεία σχετικά με τη διάχυση των δεδομένων του, όπως η συχνότητα και η περίοδος υπολογισμού του καθώς και ο τύπος των ιστορικών δεδομένων του, προβάλλοντας μια σαφή εικόνα για τον εν λόγω δείκτη.

3.3.3 Οι Δείκτες FTSE/ΧΑ

Οι δείκτες FTSE/ΧΑ δημιουργήθηκαν με βάση τις προδιαγραφές της FTSE International Limited και κατασκευάστηκαν με την προοπτική να αποτελέσουν ένα εργαλείο μέτρησης των μεταβολών των τιμών στις διάφορες κατηγορίες μετοχών του ΧΑ στις οποίες αναφέρονται. Με άλλα λόγια, αποτελούν μέτρα απεικόνισης των τάσεων που διαμορφώνονται και μπορούν να αποτυπώσουν συναλλαγές που εκτελούνται στην περίπτωση των παραγώγων τόσο σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης όσο και σε δικαιώματα προαίρεσης στους δείκτες αυτούς.

Η ομάδα δεικτών FTSE/ΧΑ περιλαμβάνει τους πιο κάτω επιμέρους δείκτες:

- ***FTSE/ΧΑ 20***
- ***FTSE/ΧΑ Mid 40***
- ***FTSE/ΧΑ Small Cap 80***
- ***FTSE/ATHEX Liquid Mid***
- ***FTSE/ATHEX/CYSE Τραπεζικός***
- ***FTSE/ATHEX 140***
- ***FTSE/ATHEX International***
- ***FTSE/ΧΑ***

Πιο αναλυτικά:

- Ο Δείκτης FTSE/ΧΑ 20, καταγράφει τη μέση τάση των τιμών των μετοχών μεγάλης κεφαλαιοποίησης του ΧΑ και περιλαμβάνει τις 20 μεγαλύτερες εταιρείες της Κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης.

- Ο Δείκτης FTSE/ΧΑ Mid 40, καταγράφει τη μέση τάση των τιμών των μετοχών της Μεσαίας Κεφαλαιοποίησης του ΧΑ και περιλαμβάνει τις επόμενες 40 μεγαλύτερες εταιρείες της Κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης.

- Ο Δείκτης FTSE/ΧΑ Small Cap 80, καταγράφει τη μέση τάση των τιμών των μετοχών της μικρής κεφαλαιοποίησης του ΧΑ και περιλαμβάνει τις 80 μεγαλύτερες εταιρείες της Κατηγορίας Μεσαίας και Μικρής Κεφαλαιοποίησης.

- Ο Δείκτης FTSE/ATHEX Liquid Mid, αποτελεί υποσύνολο του FTSE/ΧΑ Mid 40 και περιλαμβάνει τις μετοχές του δείκτη αυτού, οι οποίες έχουν και τη μεγαλύτερη εμπορευσιμότητα.

- Ο Δείκτης FTSE/ATHEX/CYSE Τραπεζικός, ο οποίος καταγράφει τη μέση τάση των τιμών των μετοχών που συμμετέχουν στον τραπεζικό τομέα τόσο στην Αθήνα όσο και την Κύπρο και περιλαμβάνει τις τραπεζικές μετοχές των Δεικτών FTSE/ΧΑ 20, FTSE/ΧΑ Mid 40 και FTSE/ΧΑΚ 20.

- Ο Δείκτης FTSE/ATHEX 140 αποτελεί γενικό δείκτη αναφοράς του ΧΑ, και αποτυπώνει τη μέση τάση των τιμών των μετοχών του ΧΑ και στο σύνολό του περιλαμβάνει τις αποδεκτές εταιρείες της Κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης.

- Ο Δείκτης FTSE/ATHEX International αποτελεί γενικό δείκτη αναφοράς όλων των αγορών του ΧΑ και περιλαμβάνει μετοχές εταιρειών ελληνικών και αλλοδαπών που ικανοποιούν τα κριτήρια της Κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης.

- Οι κλαδικοί Δείκτες FTSE/ΧΑ αποτυπώνουν και αυτοί με τη σειρά τους τη μέση τάση των τιμών των μετοχών σε διάφορους κλάδους οικονομικής δραστηριότητας του ΧΑ και στο σύνολό τους περιέχουν ο καθένας, τις εταιρείες του Δείκτη FTSE/ATHEX 140 που ανήκουν στον αντίστοιχο κλάδο σύμφωνα με τον Dow Jones Industry Classification Benchmark (ICB) (αρθ.1, Ground Rules for the Management of the FTSE/ATHEX Index Series, Athens Exchange-FTSE The Index Company, version 6.2. Athens 2008, από τον ιστότοπο www.athex.gr).

Καθένας από τους παραπάνω δείκτες, υπολογίζονται με βάση το σταθμισμένο αριθμό μετοχών και την αντίστοιχη σταθμισμένη χρηματιστηριακή αξία της μετοχής. Αντικειμενικός τους σκοπός, είναι η καταγραφή της μέσης τάσης των τιμών των μετοχών σε διάφορους κλάδους και κατηγορίες και η συμβολή τους στην πληροφόρηση των επενδυτών κυρίως σε παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, είναι καίριας σημασίας.

Σύνθεση των Δεικτών FTSE/XA

Οι μετοχές των εταιρειών προκειμένου να συμμετέχουν σε κάποιο δείκτη, θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες γενικές και ειδικές προϋποθέσεις συμμετοχής αποτελώντας έτσι τις αποδεκτές μετοχές στο δείκτη αυτό. Γενικές αποκαλούνται οι προϋποθέσεις που ικανοποιούν οι αποδεκτές μετοχές όλων των δεικτών, ενώ ειδικές είναι εκείνες οι προϋποθέσεις οι οποίες θα πρέπει να τηρούνται από τις αποδεκτές μετοχές συγκεκριμένου δείκτη.

Οι Δείκτες FTSE/XA καταρτίζονται με βάση α) τις κοινές μετοχές και όχι μετατρέψιμες ή προνομιούχες μετοχές, β) εισηγμένων εταιρειών πλην εταιρειών επενδύσεων (ΑΕΔΑΚ Α/Κ ή ΔΑΚ, ΕΕΧ) γ) με διαμόρφωση ακριβούς και αξιόπιστης τιμής για να επιτρέπει τον υπολογισμό Χρηματιστηριακών Αξιών και δ) που εμφανίζουν συναλλαγές στο σύστημα συνεχούς διαπραγμάτευσης της αγοράς καθ' όλη τη διάρκεια της συνεδρίασης (αρθ. 4, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008). Επίσης οι μετοχές των Δεικτών γενικά, πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω προϋποθέσεις επιλεξιμότητας ως προς α) την ευρεία διασπορά των μετοχών (συντελεστής διασποράς μεγαλύτερος του 20%), β) την εμπορευσιμότητα (κυκλοφοριακή ταχύτητα τουλάχιστον 20% σε ετήσια βάση) και γ) το ιστορικό των συναλλαγών στην αγορά (συναλλαγές τουλάχιστον στις μισές συνεδριάσεις του προηγούμενου εξαμήνου) (αρθ. 5, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008).

Πέραν των γενικών προϋποθέσεων οι μετοχές που συμμετέχουν στους Δείκτες FTSE/XA 20, 40, 80, Liquid Mid, CYSE Banking & 140 πρέπει ειδικότερα: α) να εμφανίζουν συναλλαγές στο XA και β) να έχουν επαρκή αξία συναλλαγών σε όλες τις αγορές (εννοείται Αθήνας και Κύπρου) με μεγαλύτερη αξία συναλλαγών στο XA. (αρθ. 4.9, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008). Πέραν των γενικών προϋποθέσεων, οι μετοχές που συμμετέχουν στο Δείκτη FTSE/XA International πρέπει ειδικότερα α) να πραγματοποιούν συναλλαγές στο XA και β) να ικανοποιούν τα κριτήρια της Κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης (αρθ. 4.10, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008). Ειδικότερα οι μετοχές του FTSE/XA CYSE Τραπεζικού πρέπει α) να είναι πρώτον εισηγμένες στο Χρηματιστήριο Αξιών Κύπρου, εκτός των Κατηγοριών Ειδικών Χαρακτηριστικών, β) να ικανοποιούν τα κριτήρια της Κατηγορίας Μεγάλης Κεφαλαιοποίησης και γ) να κατατάσσονται στο Κλάδο των Τραπεζών με βάση τον Dow-Jones Industry Classification Benchmark (ICB).

Προκειμένου να καταρτισθεί ο Δείκτης FTSE/XA 20 ακολουθείται η εξής διαδικασία. Καταρτίζεται πίνακας των μετοχών που ανήκουν στην Κατηγορία Μεγάλης

Κεφαλαιοποίησης του ΧΑ, οι οποίες πληρούν τις γενικές προϋποθέσεις συμμετοχής στο Δείκτη και ικανοποιούν τις προϋποθέσεις επιλεξιμότητας (διασπορά, εμπορευσιμότητα) κατά φθίνουσα σειρά της Χρηματιστηριακής Αξίας τους. Οι 20 πρώτες μετοχές του πίνακα επιλέγονται για το Δείκτη FTSE/XA 20.

Κατά τη μεταβολή της σύνθεσης του Δείκτη FTSE/XA 20 στην τακτική εξαμηνιαία αναθεώρηση προβλέπεται ότι, προκειμένου να εισαχθεί νέα μετοχή στη σύνθεση, πρέπει να ανέβει τουλάχιστον στη 15^{η} θέση του Πίνακα, ενώ για να εξαχθεί μια υφιστάμενη μετοχή πρέπει να κατέβει τουλάχιστον στη 26^{η} θέση. Αν ο αριθμός των προτεινόμενων για εισαγωγή μετοχών είναι μεγαλύτερος (μικρότερος) από τον αριθμό των προτεινόμενων για εξαγωγή (εισαγωγή), τότε εισάγονται στο Δείκτη κατά φθίνουσα σειρά της Χρηματιστηριακής Αξίας τους τόσες μετοχές μέχρι να συμπληρωθεί ο αριθμός 20.

Οι επόμενες 40 μετοχές που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις επιλεξιμότητας, επιλέγονται για το Δείκτη FTSE/XA Mid 40. Οι μετοχές που περιλαμβάνονται στο Δείκτη FTSE/XA Liquid Mid είναι οι περισσότερο εμπορεύσιμες μετοχές του FTSE/XA Mid 40. Κατά τη μεταβολή της σύνθεσης του Δείκτη στην τακτική εξαμηνιαία αναθεώρηση προβλέπεται ότι, οι μετοχές που εκπίπτουν από το Δείκτη FTSE/XA 20, εισάγονται αυτόματα στο Δείκτη FTSE/XA Mid 40, αν κατατάσσονται σε σειρά υψηλότερη της μετοχής με την ελάχιστη χρηματιστηριακή αξία του Δείκτη αυτού. Προκειμένου να εισαχθεί νέα μετοχή στη σύνθεση του FTSE/XA Mid 40, πρέπει να ανέβει τουλάχιστον στην 50^{η} θέση, ενώ για να εξαχθεί μια πρέπει να κατέβει τουλάχιστον στην 71^{η} θέση του ίδιου πίνακα κατάταξης. Στην περίπτωση που ο αριθμός των εισερχόμενων μετοχών είναι διάφορος του αριθμού των εξερχόμενων, ισχύει ότι και παραπάνω.

Ο Δείκτης FTSE/XA 80 Small Cap περιλαμβάνει τις 80 πρώτες μετοχές, σύμφωνα με τη Χρηματιστηριακή Αξία τους, που ανήκουν στην Κατηγορία της Μεσαίας και Μικρής Κεφαλαιοποίησης και πληρούν τις γενικές προϋποθέσεις, τις ειδικές προϋποθέσεις και τα κριτήρια επιλεξιμότητας. Στην τακτική εξαμηνιαία αναθεώρηση, προκειμένου να εισαχθεί νέα μετοχή στη σύνθεση του FTSE/XA 80 Small Cap, πρέπει να ανέβει τουλάχιστον στην 60^{η} θέση, ενώ για να εξαχθεί μια πρέπει να κατέβει τουλάχιστον στην 101^{η} θέση του πίνακα κατάταξης Μεσαίας και Μικρής Κεφαλαιοποίησης. Στην περίπτωση που ο αριθμός των εισερχόμενων μετοχών είναι διάφορος του αριθμού των εξερχόμενων, ισχύει ότι και παραπάνω.

Ο Δείκτης FTSE/XA 140 περιλαμβάνει τις 20+40+80 των Δεικτών FTSE/XA 20, FTSE/XA Mid 40 και FTSE/XA Small Cap 80. Οι κλαδικοί δείκτες προκύπτουν από τις μετοχές του αντίστοιχου κλάδου σύμφωνα με τον Dow-Jones Industry Classification Benchmark (ICB) που περιλαμβάνονται στον Δείκτη FTSE/XA 140. Η διαδικασία αναθεώρησης του Δείκτη, συμπίπτει με τη διαδικασία κατάρτισης που περιγράφηκε μόλις πριν.

Ο Δείκτης FTSE/XAK Τραπεζικός περιλαμβάνει τις μετοχές των Δεικτών FTSE/XA 20, FTSE/XA Mid 40 και FTSE/XAK 20 που κατατάσσονται στον Τραπεζικό κλάδο σύμφωνα με τον Dow-Jones Industry Classification Benchmark (ICB). Δεδομένου ότι ο αριθμός των μετοχών του Δείκτη δεν είναι δεδομένος, η διαδικασία αναθεώρησης του Δείκτη συμπίπτει με τη διαδικασία κατάρτισης που περιγράφηκε προηγούμενα (αρθ. 6, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008).

Διαχείριση των Δεικτών FTSE/XA

Η Συμβουλευτική Επιτροπή Δεικτών FTSE/XA είναι το όργανο το οποίο είναι υπεύθυνο για τη διαχείριση και λειτουργία των Δεικτών με ανεξαρτησία και διαφάνεια. Η Επιτροπή αυτή περιλαμβάνει τον Πρόεδρο του XA ως προεδρεύοντα και 6 μέλη εκ των οποίων 3 επιλέγονται μεταξύ των στελεχών της Ελληνικής κεφαλαιαγοράς και 3 μεταξύ των στελεχών της διεθνούς κεφαλαιαγοράς. Τα μέλη της Επιτροπής επιλέγονται από κοινού από την εταιρεία FTSE International Limited και το Χρηματιστήριο Αθηνών. Στην αρμοδιότητα της Επιτροπής είναι να εξετάζει και να επικυρώνει μεταβολές της σύνθεσης των δεικτών σύμφωνα με τους αντίστοιχους βασικούς κανόνες.

Η εταιρεία FTSE International είναι υπεύθυνη για την παρακολούθηση των μεταβολών της σύνθεσης των Δεικτών, ελέγχει την εύρυθμη λειτουργία τους και λειτουργεί συμβουλευτικά στο XA όσον αφορά το χειρισμό περίπλοκων εταιρικών πράξεων των εισηγμένων εταιρειών. Το Χρηματιστήριο Αθηνών έχει την πλήρη ευθύνη για την καθημερινή λειτουργία των δεικτών, παρακολουθεί όλες τις εταιρικές πράξεις των εισηγμένων εταιρειών και αναθεωρεί τη σύνθεση και τη στάθμιση των δεικτών αναλόγως σε τακτικές εξαμηνιαίες αξιολογήσεις και αναθεωρήσεις κάθε Ιούνιο και Δεκέμβριο (αρθ. 3, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008). Στις περιπτώσεις όμως που μια μετοχή Δείκτη α) μπαίνει σε καθεστώς προσωρινής αναστολής διαπραγμάτευσης για διάστημα μεγαλύτερο των 10 συνεδριάσεων ή β) διαγράφεται από την αγορά ή γ) μετατάσσεται σε άλλη κατηγορία, τότε η μετοχή αφαιρείται αμέσως από τη σύνθεση του Δείκτη και αντικαθίσταται από την πρώτη υποψήφια μετοχή του αντίστοιχου πίνακα κατάταξης.

Υπολογισμός των Δεικτών FTSE/XA

Οι Δείκτες FTSE/XA υπολογίζονται και δημοσιεύονται σε πραγματικό χρόνο (*real time*) κάθε 30 δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια των συνεδριάσεων με βάση τις τιμές συναλλαγής των μετοχών και απεικονίζονται με δύο δεκαδικά ψηφία. Κατά το κλείσιμο, υπολογίζονται με βάση τις τιμές κλεισίματος των μετοχών όπως αυτές υπολογίζονται από το XA κατά το κλείσιμο (Appendix A, Ground Rules for the FTSE/ATHEX Index, 2008).

Ο τύπος υπολογισμού ενός Δείκτη FTSE/XA είναι:

$$P_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot Q_i \cdot f_i}{D}$$

όπου:

P_t: η τρέχουσα τιμή του Δείκτη

P_0: η τιμή του Δείκτη κατά την ημερομηνία βάσης (τιμή βάσης)

n : ο αριθμός των μετοχών που συμμετέχουν στη σύνθεση του Δείκτη

S_i: η τελευταία τιμή συναλλαγής της μετοχής *i*

QS_i: ο συνολικός αριθμός των μετοχών σε κυκλοφορία

f_i: ο συντελεστής ευρείας διασποράς (*free float*) ως δεκαδικός αριθμός

$S_i Q_i f_i$: η σταθμισμένη Χρηματιστηριακή Αξία της εταιρείας και,

D: η Βάση του Δείκτη, η οποία αντιπροσωπεύει τη Χρηματιστηριακή Αξία του Δείκτη κατά την ημερομηνία βάση.

Όπως προαναφέρθηκε, οι εν λόγω δείκτες χρησιμοποιούνται κατά κόρον για επενδύσεις σε παράγωγα όπως συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιώματα προαίρεσης, αποτελώντας ιδανικό εργαλείο για τη λήψη αποφάσεων αναφορικά με τοποθετήσεις στα εν λόγω χρηματοοικονομικά προϊόντα.

3.4 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό, έγινε μια συνοπτική περιγραφή των δεικτών οι οποίοι έχουν ως αντικειμενικό σκοπό να καταγράψουν την τάση που επικρατεί σε μια κατηγορία ομοειδών οικονομικών μεγεθών. Ταυτόχρονα, δόθηκαν οι κυριότεροι δείκτες τιμών που χρησιμοποιούνται ευρέως στην Οικονομική Επιστήμη, όπως είναι ο Δείκτης Τιμών Καταναλωτή, ο Δείκτης Τιμών Παραγωγού, οι Δείκτες Εξαγωγών και Εισαγωγών, όπως επίσης και ο Δείκτης Αποπληθωρισμού του ΑΕΠ.

Στη συνέχεια, αποτυπώθηκαν οι δείκτες που χρησιμοποιούνται στις χρηματιστηριακές αγορές και έγινε ο διαχωρισμός τους σε κατηγορίες, όπως σταθμικοί και ισοσταθμικοί και επιπλέον δόθηκε η χρησιμότητα αυτών για τους επενδυτές. Επίσης, παρουσιάστηκαν οι δείκτες τιμών του Χρηματιστηρίου Αθηνών και αφού αποτυπώθηκε ο τύπος υπολογισμού της τιμής του Γενικού Δείκτη Χ.Α, απεικονίστηκαν κάποια τεχνικά χαρακτηριστικά του. Το παρόν κεφάλαιο έκλεισε με περιγραφή των δεικτών FTSE/ΧΑ, δίνοντας παράλληλα τις γενικές και ειδικές προϋποθέσεις συμμετοχής τους, καθώς και τη διαδικασία κατάρτισής τους και επιπλέον παρουσιάστηκε η διαχείρισή τους και ο τύπος υπολογισμού τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Με τον όρο χρονοσειρά καλείται μια σειρά από σημεία διατεταγμένα στο χρόνο. Στην πραγματικότητα, μια χρονοσειρά δεν είναι τίποτε άλλο, παρά μια ακολουθία σημείων που ισαπέχουν χρονικά μεταξύ τους. Η μελέτη των χρονοσειρών αποτελεί πεδίο εφαρμογής της Ανάλυσης Χρονοσειρών (Time Series Analysis), η οποία με τη σειρά της βρίσκει σημείο εφαρμογής σε διάφορες επιστήμες. Για παράδειγμα, χρονοσειρές συναντώνται ευρέως στο πεδίο της Οικονομικής Επιστήμης, είτε αυτές αφορούν στοιχεία για τον πληθωρισμό μιας χώρας, είτε την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής στο Χρηματιστήριο. Επιπλέον, οι επιστήμονες στο πεδίο των Κοινωνικών Επιστημών συχνά χρησιμοποιούν την ανάλυση χρονοσειρών για τη μελέτη πληθυσμών, όπως οι γεννήσεις. Επίσης, η εν λόγω ανάλυση, βρίσκει συχνά εφαρμογές τόσο σε ιατρικές όσο και επιδημιολογικές μελέτες, όπου ο ερευνητής καλείται να μελετήσει την εξέλιξη κάποιων τιμών, προκειμένου να αξιολογήσει τον μελλοντικό κίνδυνο κάποιας μόλυνσης στον πληθυσμό ή την ποιότητα ενός φαρμάκου.

Το πρώτο και πιο σημαντικό βήμα ενός ερευνητή στην ανάλυση χρονοσειρών είναι η λεπτομερής και σε βάθος παρατήρηση των δεδομένων που εκτυλίσσονται στο χρόνο. Αυτή η λεπτομερής εξέταση αποτελεί συνδυασμό δύο συνιστωσών: πρώτον, της μεθόδου που πρόκειται να εφαρμοστεί και δεύτερον, των στατιστικών προσεγγίσεων που θα χρησιμοποιηθούν προκειμένου να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα από τα υπό μελέτη δεδομένα, όπως αναφέρουν οι Shumway και Stoffer (2011). Οι δύο σημαντικότερες προσεγγίσεις που συναντώνται στη μελέτη χρονοσειρών είναι η προσέγγιση με βάση το πεδίο του χρόνου (*time domain*) και η προσέγγιση με βάση το πεδίο των συχνοτήτων (*frequency domain*).

Η προσέγγιση με βάση το πεδίο του χρόνου πηγάζει από την υπόθεση ότι η συσχέτιση μεταξύ δύο ακόλουθων σημείων στο χρόνο εξηγείται καλύτερα από την εξάρτηση της τωρινής τιμής που μελετάται από παρελθοντικές τιμές της, όπως τονίζουν οι Shumway και Stoffer (2011). Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως από τους ερευνητές όταν πρόκειται για χρονοσειρές στο πεδίο του χρόνου είναι η μέθοδος που προτάθηκε από τους Box and Jenkins (1970), οι οποίοι δημιούργησαν τα υποδείγματα ARIMA προκειμένου να χειριστούν τόσο την χρονικά συσχετισμένη μοντελοποίηση όσο και την πρόβλεψη. Μάλιστα, οι προβλέψεις που διενεργούνται με τα πλέον γνωστά και ως Box-Jenkins υποδείγματα, αποδεικνύονται στην πράξη καλύτερες και πιο αξιόπιστες από τις αντίστοιχες προβλέψεις που προσφέρουν τα μεγάλα μακροοικονομετρικά υποδείγματα. Το κύριο χαρακτηριστικό των εν λόγω υποδειγμάτων είναι ότι πρόκειται για πολλαπλασιαστικά υποδείγματα και ως εκ τούτου, τα παρατηρούμενα δεδομένα θεωρείται ότι είναι αποτέλεσμα γινομένων από παράγοντες που περιέχουν διαφορικούς τελεστές, οι οποίοι ανταποκρίνονται με συνέπεια σε μια διαδικασία λευκού θορύβου (Shumway and Stoffer, 2011).

Αντίθετα, στην Ανάλυση Χρονοσειρών με βάση το πεδίο συχνοτήτων, τα αρχικά χαρακτηριστικά σε μια υπό μελέτη χρονοσειρά, θεωρείται ότι σχετίζονται με περιοδικές ή συστηματικές ημιτονοειδείς διακυμάνσεις, οι οποίες συναντώνται με φυσικό τρόπο στα περισσότερα δεδομένα, όπως χαρακτηριστικά τονίζεται από τους Shumway και Stoffer (2011). Αυτές οι περιοδικές διακυμάνσεις, συχνά προκαλούνται από βιολογικά, φυσικά ή περιβαλλοντικά φαινόμενα. Ωστόσο, η εν λόγω προσέγγιση δεν περιορίζεται εκεί, αλλά επεκτείνεται και στο πεδίο των Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών όπου ο ερευνητής ενδιαφέρεται να μελετήσει την ετήσια περιοδικότητα κάποιων φαινομένων, όπως για παράδειγμα την ετήσια περιοδικότητα σε κάποιους οικονομικούς δείκτες μιας χώρας.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει κύρια αναφορά στις χρονοσειρές μέσα από το πρίσμα του πεδίου του χρόνου, όπου και θα παρουσιαστούν βασικά εργαλεία της εν λόγω ανάλυσης. Αρχικά, αφού επισημανθούν βασικές έννοιες όπως η στασιμότητα και η αντιστρεψιμότητα, θα αναλυθούν οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης και παράλληλα θα παρουσιαστούν οι έλεγχοι καταλοίπων, όπως είναι ο έλεγχος των *Box-Pierce* και ο έλεγχος *Ljung-Box*. Στη συνέχεια, θα περιγραφούν τόσο τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR όσο και τα υποδείγματα κινητού μέσου MA. Το κεφάλαιο θα κλείσει, με εκτενή αναφορά στα μεικτά υποδείγματα τύπου ARMA και στα μεικτά ολοκληρωμένα υποδείγματα τύπου ARIMA, τα οποία αποτελούν και τη βάση στο πεδίο των προβλέψεων με βάση τις χρονοσειρές στο πεδίο του χρόνου.

4.2 Στοιχεία Χρονοσειρών

Τα στοιχεία χρονοσειρών, αποτελούν μια από τις κύριες μορφές δεδομένων για τις διάφορες οικονομικές μεταβλητές που υπεισέρχονται σε ένα οικονομετρικό υπόδειγμα. Χρονοσειρά (*time series*) είναι ένα δείγμα $y_1, y_2, ..., y_T$, όπου ο δείκτης παριστάνει ισαπέχοντα χρονικά σημεία (έτη, μήνες, κ.ο.κ.). Επίσης, οι παρατηρήσεις $y_1, y_2, ..., y_T$ θεωρείται ότι είναι συγκεκριμένες τιμές ή συγκεκριμένες πραγματοποιήσεις (*realizations*) των τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, ..., Y_T$ και ότι, επιπλέον, οι τυχαίες αυτές μεταβλητές, $Y_1, Y_2, ..., Y_T$, είναι μέρος μόνο μιας άπειρης σειράς (ακολουθίας) τυχαίων μεταβλητών. Η άπειρη αυτή ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών ονομάζεται στοχαστική ή τυχαία διαδικασία (*stochastic process*) ή *στοχαστική ανέλιξη* και συνήθως παριστάνεται ως $\{Y_T\}$. Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω, μια παρατηρούμενη σειρά n διαδοχικών παρατηρήσεων $(y_1, y_2, ..., y_T)$ είναι μία συγκεκριμένη πραγματοποίηση μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_T\}$.

Γενικά, όπως και στην περίπτωση T τυχαίων μεταβλητών, μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από μια συνδυασμένη συνάρτηση πιθανότητας $f(y_1, y_2, ..., y_T)$. Αν ήταν γνωστή η συνάρτηση πιθανότητας, τότε θα ήταν εύκολο να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης πραγματοποιήσεως ή η πιθανότητα μιας μελλοντικής τιμής (Κιντής, 2010). Επειδή, όμως, όχι μόνο η συνάρτηση πιθανότητας δεν είναι γνωστή, αλλά ούτε και η πλήρης εξειδίκευση της μορφής της είναι δυνατή, σκοπός της ανάλυσης χρονοσειρών είναι η διατύπωση υποδειγμάτων που να μπορούν να περιγράφουν το μηχανισμό της στοχαστικής διαδικασίας από την οποία προέκυψε η συγκεκριμένη σειρά.

Πηγή: Yahoo Finance (2017)

Διάγραμμα 4.1

Εξέλιξη της τιμής του Δείκτη Nasdaq

από το 2006 έως το 2016

Στο Διάγραμμα 4.1, περιγράφεται η εξέλιξη των τιμών του Δείκτη Nasdaq, υψηλής τεχνολογίας από το 2006 έως το 2016. Αυτό που παρατηρείται στη συγκεκριμένη χρονοσειρά είναι μια διαχρονική αύξηση της τιμής του δείκτη, πράγμα το οποίο υποδεικνύει μια διαχρονικά αυξητική τάση των τιμών των μετοχών που αφορούν εταιρείες υψηλής τεχνολογίας.

Η Έννοια της Στασιμότητας

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται αυστηρώς στάσιμη (*strictly stationary*) όταν οι ιδιότητές της δεν επηρεάζονται από μια αλλαγή στην αρχή μετρήσεως του χρόνου. Αυτό σημαίνει, ότι η συγκεκριμένη σειρά μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές, οι οποίοι μπορούν να προκύψουν από δεδομένα του παρελθόντος.

Κάθε στοχαστική χρονοσειρά $y_1,...,y_T$, μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει παραχθεί από ένα σετ από κοινού κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών. Το συγκεκριμένο σετ των σημείων $y_1,...,y_T$, αναπαριστά το αποτέλεσμα που έχει ληφθεί από την από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $p(y_1,...,y_T)$. Ομοίως, μια μελλοντική τιμή y_{T+1} μπορεί να θεωρηθεί πως έχει παραχθεί από τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $p(y_{T+1}| y_1,...,y_T)$, τέτοια ώστε η κατανομή πιθανότητας για y_{T+1} να δίνεται με βάση τις παρελθοντικές παρατηρήσεις $y_1,...,y_T$. Κατά συνέπεια, μια στάσιμη σειρά θα ορίζεται ως μια διαδικασία, της οποίας η από κοινού κατανομή και η δεσμευμένη κατανομή αντίστοιχα θα παραμένουν αμετάβλητες σε σχέση με την τοποθέτησή τους στο χρόνο. Έτσι, για να είναι μια σειρά στάσιμη, πρέπει να ισχύει $p(y_t,...,y_{t+k}) = p(y_{t+m},...,y_{t+k+m})$ και $p(y_t) = p(y_{t+m})$ για κάθε t,k και m (Pindyck and Rubinfeld, 1998).

Εφόσον μια σειρά είναι στάσιμη, ο μέσος όρος της, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\mu_y = \mathrm{E}(y_t)$$

θα πρέπει να είναι στάσιμος, έτσι ώστε να ισχύει $\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(y_{t+m})$.

Επίσης, η διακύμανση της σειράς, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_y^2 = \mathrm{E}[(y_t - \mu_y)^2]$$

θα πρέπει να είναι επίσης στάσιμη, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{E}[(y_t - \mu_y)^2] = \mathrm{E}[(y_{t+m} - \mu_y)^2]$$

και ομοίως για κάθε υστέρηση k, η συνδιακύμανση της σειράς, η οποία ορίζεται ως:

$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t+k}) = \mathrm{E}[(y_t - \mu_y)(y_{t+k} - \mu_y)]$$

θα πρέπει να είναι στάσιμη, έτσι ώστε να ισχύει:

$$Cov(y_t, y_{t+k}) = Cov(y_{t+m}, y_{t+m+k})$$

Συνεπώς, στάσιμη καλείται μια χρονοσειρά της οποίας οι στατιστικές της ιδιότητες, όπως ο μέσος της, η διακύμανση και η αυτοσυσχέτιση θα παραμένουν σταθερές στο πέρασμα του χρόνου.

Η Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

Ο συντελεστής συσχέτισης, ορίζεται ως ο λόγος της συνδιακύμανσης προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διακυμάνσεων δύο μεταβλητών. Η μελέτη της ύπαρξης συσχέτισης ανάμεσα στην y_t και στην y_{t+k}, ονομάζεται συντελεστής αυτοσυσχέτισης (*autocorrelation coefficient*).

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t+k})}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} \sigma^2_{y_{t+k}}}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{4.1}$$

Ένας άλλος συμβολισμός που μπορεί να πάρει ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης είναι ο εξής:

$$\rho_k = \varphi_k$$

Όπως γίνεται αντιληπτό από την σχέση (4.1), η αυτοσυνδιακύμανση όπως και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης δεν εξαρτώνται από το t αλλά από το k. Κατά συνέπεια, $\rho_k = \rho_{-k}$, αφού $\gamma_k = \gamma_{-k}$. Η σχέση που έχουν ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ_k και το k ονομάζεται συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (*autocorrelation function*) και η γραφική απεικόνισή της διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (*correlogram*).

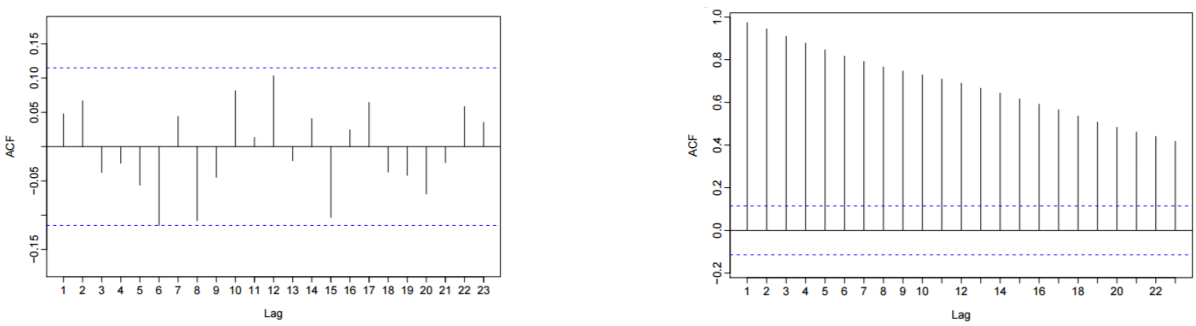
Με άλλα λόγια, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης παρέχει πληροφορία τόσο για το βαθμό όσο και για το χρονικό ορίζοντα της μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας. Στην περίπτωση για την οποία ο μέσος (μ), η διακύμανση (σ^2), οι αυτοδιακυμάνσεις (γ_k) και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης (ρ_k) της υπό μελέτη σειράς είναι άγνωστοι, η εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων του πληθυσμού θα γίνεται με τη χρήση των δειγματικών ροπών, όπως αναφέρει ο Κιντής (2010). Έτσι, δίνονται τα παρακάτω:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{n}, \text{ για το } \mu$$

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})}{n}, \text{ για το } \sigma^2$$

$$c_k = \frac{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{n}, \text{ για το } \gamma_k$$

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2}, \text{ για το } \rho_k$$



(α) **(β)**

Διάγραμμα 4.2

Διαγράμματα αυτοσυσχετίσεων μιας στάσιμης και μιας μη στάσιμης χρονοσειράς

Στο Διάγραμμα 4.2, παρατίθεται η απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης για μια στάσιμη και μια μη στάσιμη σειρά αντίστοιχα. Η μορφή που παίρνουν τα εν λόγω διαγράμματα, μαρτυρά την ύπαρξη ή μη στασιμότητας της υπό μελέτης χρονοσειράς. Ειδικότερα, στο Διάγραμμα (4.2α), παρατηρείται πως οι αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων βρίσκονται μέσα στα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης που έχει αρχικά οριστεί, γεγονός το οποίο υποδεικνύει την ύπαρξη στασιμότητας της εν λόγω χρονοσειράς. Εν αντιθέσει, στο Διάγραμμα (4.2β), οι αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων «σβήνουν» με αρκετά αργό ρυθμό, πράγμα το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η σειρά δεν είναι στάσιμη.

Η Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης

Με τον όρο μερική αυτοσυσχέτιση, προσδιορίζεται η συσχέτιση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές, y_t και y_{t-k}, εφόσον έχουν αφαιρεθεί οι όποιες γραμμικές επιδράσεις των ενδιάμεσων μεταβλητών $y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-(k-1)}$. Αν παρασταθεί με ρ_{kk} ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης k τάξης, δηλαδή ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών y_t και y_{t-k} για $k = 1, 2, ...,$ τότε σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ο ρ_{kk} είναι ο μερικός συντελεστής παλινδρόμησης της y_{t-k} στο υπόδειγμα:

$$y_t = \rho_{1k} y_{t-1} + \rho_{2k} y_{t-2} + ... + \rho_{kk} y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Έτσι, για να προσδιοριστεί ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης ρ_{11} θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμησή του το υπόδειγμα:

$$y_t = \rho_{11} y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Συνεπώς, για $k = 1$ ο μερικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ_{11} συμπίπτει με το συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_1.

Κατά τον ίδιο τρόπο, προκύπτει και ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης δεύτερης τάξης, ο οποίος εκτιμάται με τη βοήθεια του παρακάτω υποδείγματος:

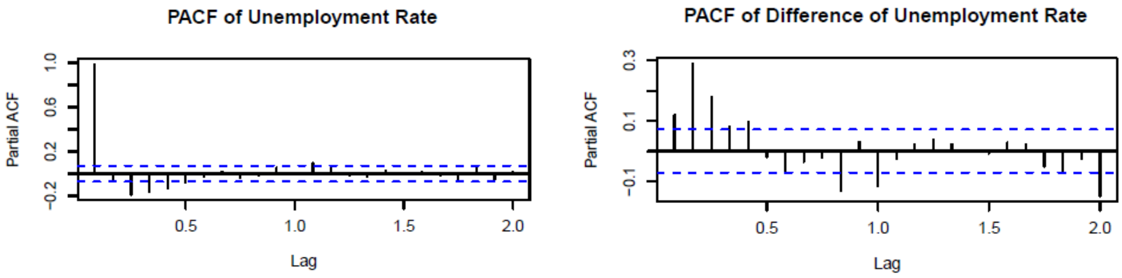
$$y_t = \rho_{12} y_{t-1} + \rho_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Ομοίως, προκύπτει και συντελεστής τρίτης τάξης με τη χρησιμοποίηση του ακόλουθου υποδείγματος:

$$y_t = \rho_{13} y_{t-1} + \rho_{23} y_{t-2} + \rho_{33} y_{t-3} + \varepsilon_t$$

Οι μερικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης $\rho_{11}, \rho_{22}, ..., \rho_{kk}$ προκύπτουν από τις παλινδρομήσεις που διεξάγονται επαναλαμβανόμενα μεταξύ της y_t και της y_{t-k} για $k = 1, 2, \ldots$, αρχής γενομένης της y_{t-1} και προσθέτοντας κάθε φορά μια υστέρηση.

Επίσης, οι μερικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_{kk} μπορούν να εκφραστούν και συναρτήσει των συντελεστών αυτοσυσχέτισης ρ_k, με βάση τις εξισώσεις *Yule-Walker* (Wooldridge, 2006).



(α) **(β)**

Πηγή: Jing Li (2012)

Διάγραμμα 4.3

Διαγράμματα μερικών αυτοσυσχετίσεων μιας στάσιμης και μιας μη στάσιμης χρονοσειράς

Στο Διάγραμμα 4.3, δίνεται η απεικόνιση των συναρτήσεων μερικής αυτοσυσχέτισης για μια στάσιμη και μια μη στάσιμη σειρά αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, στο Διάγραμμα (4.3α), παρατηρείται πως οι μερικές αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων πολύ γρήγορα καθίστανται στατιστικά μη σημαντικές δοθέντος ενός επιπέδου σημαντικότητας που έχει αρχικά οριστεί, γεγονός που υποδεικνύει τη στασιμότητα της εν λόγω χρονοσειράς. Εν αντιθέσει, στο Διάγραμμα (4.3β), οι μερικές αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων είναι στατιστικά σημαντικές, πράγμα το οποίο οδηγεί στο χαρακτηρισμό της σειράς ως μη στάσιμης.

Λευκός Θόρυβος

Με τον όρο λευκό θόρυβο καλείται μια διαδικασία, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια σειρά από διαταραχές, της οποίας το κάθε στοιχείο έχει μια όμοια, ανεξάρτητη και με μέσο μηδέν κατανομή. Επιπλέον, τα παρελθοντικά στοιχεία της σειράς δε μαρτυρούν απολύτως τίποτε, σχετικά με το εάν η νέα τιμή της μεταβλητής θα είναι θετική ή αρνητική, μεγάλη ή μικρή, όπως αναφέρει ο Parker (2008).

Συνεπώς, μια σειρά ε είναι λευκός θόρυβος αν έχει τις εξής ιδιότητες:

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, \forall t$$

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, \forall t$$

Μια σημαντική επισήμανση σε αυτό το σημείο, είναι το γεγονός ότι οι διακυμάνσεις στις περισσότερες οικονομικές χρονοσειρές, τείνουν να παραμένουν σταθερές με το χρόνο και συνεπώς τα στοιχεία τους που βρίσκονται κοντά χρονικά είναι συσχετισμένα. Οι σειρές αυτές, λέγεται ότι είναι σειριακά συσχετισμένες και συνεπώς δε μπορεί να αποτελούν λευκό θόρυβο.

Ο Έλεγχος Καταλοίπων

Στην περίπτωση για την οποία το υπό μελέτη υπόδειγμα ταιριάζει με τα υπό μελέτη δεδομένα τότε τα κατάλοιπα θα πρέπει να αποτελούν μια διαδικασία λευκού θορύβου. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως δε θα πρέπει τα κατάλοιπα να είναι αυτοσυσχετισμένα. Προκειμένου να ελεγχθούν αν οι μερικές αυτοσυσχετίσεις της y_t είναι στατιστικά σημαντικές γίνεται χρήση του ελέγχου *Box-Pierce*. Μέσω του συγκεκριμένου τεστ, το οποίο και αποτελεί ένα στατιστικό τεστ, ελέγχεται η σημαντικότητα από κοινού ενός αριθμού συντελεστών αυτοσυσχετίσεων. Με άλλα λόγια ελέγχεται η μηδενική υπόθεση:

$$H_0: r_1 = r_2 = ... = r_h$$

Η στατιστική των *Box-Pierce* ορίζεται ως:

$$Q_{BP} = n \sum_{k=1}^{h} r_k^2$$

όπου r_k είναι οι δειγματικές αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων και n ο αριθμός των παρατηρήσεων. Η παραπάνω σχέση που περιγράφηκε, ακολουθεί προσεγγιστικά την κατανομή χ^2 με $h - p - q$ βαθμούς ελευθερίας. Για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας a, αν η τιμή της Q_{BP} ξεπερνά την κριτική τιμή της χ^2, δηλαδή αν ισχύει $Q_{BP} > \chi_a^2$, τότε η μηδενική υπόθεση ότι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν, απορρίπτεται. Μια εναλλακτική μορφή της στατιστικής συνάρτησης πάνω στην οποία βασίζεται το εν λόγω τεστ, πρότειναν οι *Ljung-Box* και η οποία ορίζεται ως εξής:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{h} \frac{r_k^{\ 2}}{n-k}$$

όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος, r_k είναι η δειγματική αυτοσυσχέτιση με υστέρηση k και h ο αριθμός των υστερήσεων που εξετάζονται. Κάτω από τη μηδενική υπόθεση η Q ακολουθεί μια $\chi^2_{\ (h)}$ κατανομή. Για επίπεδο σημαντικότητας a, η κριτική περιοχή απόρριψης της υπόθεσης για τυχαιότητα, είναι $Q > \chi^2_{\ 1-a,h}$, όπου $\chi^2_{\ 1-a,h}$ είναι το a-ποσοστημόριο της κατανομής χ^2 με h βαθμούς ελευθερίας (Κιντής, 2010).

4.3 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα

Στη γενική μορφή του, ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα τάξης p ή αλλιώς AR(p) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$y_t = \delta + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + ... + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{4.2}$$

όπου δ =σταθερά και ε_t =λευκός θόρυβος.

Εφόσον η στοχαστική διαδικασία (4.2) είναι στάσιμη, τότε ο μέσος όρος της παραπάνω εξίσωσης θα είναι αριθμός πεπερασμένος και ανεξάρτητος της μονάδας του χρόνου.

Με βάση τα παραπάνω ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu = \mathrm{E}(\delta) + \mathrm{E}(\varphi_1 y_{t-1}) + \mathrm{E}(\varphi_2 y_{t-2}) + ... + \mathrm{E}(\varphi_p y_{t-p}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t) =$$

$$= \delta + \varphi_1 \mu + \varphi_2 \mu + ... + \varphi_p \mu$$

Αναλύοντας περαιτέρω την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι ο μέσος όρος δίνεται από την παρακάτω εξίσωση ως εξής:

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \varphi_1 - \varphi_2 ... - \varphi_p} \tag{4.3}$$

όπου μ είναι ο μέσος όρος. Ωστόσο, στην περίπτωση όπου ο μέσος όρος της χρονοσειράς μ δεν αποτελεί πεπερασμένο αριθμό, τότε η σειρά δεν είναι στάσιμη. Από τη σχέση (4.3) προκύπτει άμεσα πως για να είναι ο μέσος πεπερασμένος αριθμός, θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_p<1$$

Η παραπάνω σχέση, αποτελεί και αναγκαία συνθήκη ώστε να διασφαλίζεται η στασιμότητα της σειράς. Η τάξη p παραπέμπει στο μήκος της υστέρησης, ενώ ο όρος αυτοπαλίνδρομο προέρχεται από το ότι ουσιαστικά πρόκειται για ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης, όπου οι ερμηνευτικές τιμές είναι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y_t με χρονική υστέρηση.

4.3.1 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Πρώτης Τάξης

Όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως, το AR(1) υπόδειγμα είναι της μορφής:

$$y_t=\delta+\varphi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t$$

όπου δ αποτελεί το σταθερό όρο του υποδείγματος, ο οποίος είναι ανεξάρτητος του χρόνου και ε_t είναι λευκός θόρυβος, με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σ_ε^2.

Ο μέσος της σειράς δίνεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση $\mu=\dfrac{\delta}{1-\varphi_1}$, ο οποίος για $\varphi_1<1$ είναι πεπερασμένος αριθμός και εφόσον υποτεθεί ότι $\delta=0$, τότε ο μέσος όρος της προκύπτει να είναι $\mu=0$.

Η διακύμανση της σειράς, η οποία παριστάνεται με γ_0 παρουσιάζεται στην παρακάτω σχέση:

$$\sigma_y^2=\gamma_0=\mathrm{E}[(\varphi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t)^2]$$

$$=\mathrm{E}[(\varphi_1^2 y^2_{t-1}+\varepsilon_t^2+2\varphi_1 y_{t-1}\varepsilon_t)]=\varphi_1^2\mathrm{E}(y^2_{t-1})+\mathrm{E}(\varepsilon^2_t)=\varphi_1^2\gamma_0+\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}$$

Επίσης, η αυτοσυνδιακύμανση της σειράς y_t $1^{ης}$ τάξης συμβολίζεται με γ_1 και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\gamma_1=\mathrm{E}[y_{t-1}(\varphi_1 y_{t-1}+\varepsilon_t)]=\varphi_1\mathrm{E}(y^2_{t-1})+\mathrm{E}(y_{t-1}\varepsilon_t)=\varphi_1\gamma_0=\frac{\varphi_1\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως υπολογίστηκε και προηγούμενα, η αυτοσυνδιακύμανση της y_t 2ης τάξης συμβολίζεται με γ_2 και παριστάνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\gamma_2 = \mathrm{E}[y_{t-2}(\varphi_1^2 y_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)] = \varphi_1^2 \mathrm{E}(y^2_{t-2}) + \varphi_1 \mathrm{E}(y_{t-2}\varepsilon_{t-1}) + \mathrm{E}(y_{t-2}\varepsilon_t) =$$

$$= \varphi_1^2 \gamma_0 = \frac{\varphi_1^2 \sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}$$

Ομοίως, για χρονική υστέρηση k η αυτοσυνδιακύμανση της σειράς y_t θα είναι:

$$\gamma_k = \varphi_1^k \gamma_0 = \varphi_1^k \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2} \right) \tag{4.4}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR(1) προκύπτει αν η σχέση (4.4) διαιρεθεί με γ_0 και συνεπάγεται ότι:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\varphi_1^k \gamma_0}{\gamma_0} = \varphi_1^k$$

4.3.2 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Δεύτερης Τάξης

Ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δεύτερης τάξεως AR(2) αναπαρίσταται με την παρακάτω εξίσωση ως εξής:

$$y_t = \delta + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

όπου $\delta =$ σταθερά και ε_t είναι λευκός θόρυβος.

Υποθέτοντας ως μ το μέσο της σειράς προκύπτει ότι:

$$\mu = \frac{\delta}{1-\varphi_1 - \varphi_2}$$

Επίσης, προκειμένου η σειρά να είναι στάσιμη θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1$$

Η διακύμανση της σειράς τότε, δίνεται ως εξής:

$$\gamma_0 = \mathrm{E}[y_t(\varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$= \varphi_1 \mathrm{E}(y_t y_{t-1}) + \varphi_2 (y_t y_{t-2}) + E(y_t \varepsilon_t)$$

$$= \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \qquad (4.5\alpha)$$

Οι αυτοσυνδιακυμάνσεις της σειράς δίνονται ακολούθως:

$$\gamma_1 = \mathrm{E}[y_{t-1}(\varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$= \varphi_1 \mathrm{E}(y^2{}_{t-1}) + \varphi_2 \mathrm{E}(y_{t-1} y_{t-2}) + \mathrm{E}(y_{t-1} \varepsilon_t)$$

$$= \varphi_1 \gamma_0 + \varphi_2 \gamma_1 \qquad (4.5\beta)$$

και

$$\gamma_2 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_0 \qquad (4.5\gamma)$$

Γενικά, για $k > 2$ προκύπτει ότι

$$\gamma_k = \mathrm{E}[y_{t-k}(\varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$= \varphi_1 \mathrm{E}(y_{t-k} y_{t-1}) + \varphi_2 \mathrm{E}(y_{t-k} y_{t-2}) + \mathrm{E}(y_{t-k} \varepsilon_t)$$

$$= \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} \qquad (4.5\delta)$$

Λύνοντας ταυτόχρονα τις (4.5α), (4.5β) και (4.5γ), προκύπτει η γ_0 εκφρασμένη σε όρους των φ_1, φ_2 και σ_ε^2.

Από τη σχέση (4.5β), προκύπτει ότι:

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_1 \gamma_0}{1 - \varphi_2}$$

και στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την (4.5β) στην (4.5α), έπεται η παρακάτω σχέση:

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

και μέσω συνεχόμενων αντικαταστάσεων, λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$\gamma_0 = \frac{\varphi_1^2 \gamma_0}{1 - \varphi_2} + \frac{\varphi_2 \varphi_1^2 \gamma_0}{1 - \varphi_2} + \varphi_2^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

Και έπειτα από εκτέλεση κάποιων πράξεων, έπεται ότι:

$$\gamma_0 = \frac{(1-\varphi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\varphi_2)[(1-\varphi_2)^2-\varphi_1^2]}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται αν διαιρεθεί η σχέση (4.5δ) με γ_0 και είναι η εξής:

$$\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2}, \text{ για } k > 2$$

Ακόμη, $\rho_0 = 1, \rho_{-1} = \rho_1$

Επίσης, προκύπτει:

$$\rho_1 = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}$$

$$\rho_2 = \varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2^2}$$

Με άλλα λόγια, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης εκφράστηκαν σε όρους των συντελεστών αυτοπαλινδρόμησης φ_1 και φ_2.

4.3.3 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα p Τάξης

Το υπόδειγμα που αποτυπώνεται στη σχέση (4.2) είναι γνωστό ως αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα τάξης p. Οι παράμετροι που καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία είναι ο μέσος, η διακύμανση, οι αυτοσυνδιακυμάνσεις και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης.

Ακολούθως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \ldots + \varphi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 &= \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1 + \ldots + \varphi_p\gamma_{p-1} \\ &\vdots \\ \gamma_p &= \varphi_1\gamma_{p-1} + \varphi_2\gamma_{p-2} + \ldots + \varphi_p\gamma_0 \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Γενικά, οι αυτοσυνδιακυμάνσεις προσδιορίζονται ακολούθως μέσα από τη σχέση:

$$\gamma_k = \varphi_1\gamma_{k-1} + \varphi_2\gamma_{k-2} + \ldots + \varphi_\rho\gamma_{k-\rho}, \text{ για } k > \rho$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων (4.6) με γ_0, προκύπτει ένα σύνολο p εξισώσεων, μέσω του οποίου προσδιορίζονται οι πρώτες p τιμές της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ως εξής:

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \ldots + \varphi_p \rho_{p-1}$$
$$\vdots$$
$$\rho_p = \varphi_1 \rho_{p-1} + \varphi_2 \rho_{p-2} + \ldots + \varphi_p$$

Γενικά για $k > \rho$, ισχύει ότι:

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \varphi_p \rho_{k-p}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

Πληροφοριακά Κριτήρια

Προκειμένου να προσδιοριστεί η τάξη p ενός AR υποδείγματος, γίνεται χρήση δύο κριτηρίων τα οποία είναι βασισμένα στη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Αυτά είναι το κριτήριο του Akaike και το κριτήριο του Schwarz (AIC και SBC αντίστοιχα). Ο ορισμός των συγκεκριμένων κριτηρίων, παρουσιάζεται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$AIC = \ln(SSE / n) + 2k$$

$$SBC = \ln(SSE / n) + (k / n)\ln(n)$$

όπου SSE =άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, n =ο αριθμός των παρατηρήσεων και k =ο αριθμός των παρατηρήσεων που εκτιμώνται.

Για τις διάφορες τιμές του k επιλέγεται ένας θετικός ακέραιος, ο οποίος ελαχιστοποιεί την τιμή του πληροφοριακού κριτηρίου που χρησιμοποιείται κάθε φορά. Η διαφορά ανάμεσα στα δύο κριτήρια έγκειται στο γεγονός, ότι με βάση το κριτήριο του Schwarz επιλέγονται κατά κανόνα υποδείγματα με μικρό αριθμό παραμέτρων. Εν αντιθέσει, με βάση το κριτήριο του Akaike επιλέγονται υποδείγματα με μεγάλο αριθμό παραμέτρων.

4.4 Υποδείγματα Κινητού Μέσου

Το παρακάτω υπόδειγμα ονομάζεται υπόδειγμα κινητού μέσου (*moving average*) τάξης q και συμβολίζεται με MA(q). Η σειρά $\{\varepsilon_t\}$ αποτελεί λευκό θόρυβο και η σειρά $\{y_t\}$ ορίζεται από την επόμενη σχέση:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Στο παραπάνω υπόδειγμα, οι τιμές της y_t διαμορφώνονται από τον μέσο, τη διακύμανση και τις παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$. Επίσης ισχύει $\theta_0 = 1$. Βασική προϋπόθεση αποτελεί να είναι η υπό μελέτη σειρά y_t στάσιμη, το οποίο συνεπώς σημαίνει πως πρέπει να ισχύουν τρεις βασικές υποθέσεις. Ο μέσος της σειράς θα πρέπει να είναι σταθερός και ανεξάρτητος του χρόνου, η διακύμανση της σειράς να είναι και αυτή σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο και όλες οι συνδιακυμάνσεις να είναι μηδενικές. Πιο συγκεκριμένα ο μέσος, η διακύμανση και οι συνδιακυμάνσεις θα παίρνουν τις παρακάτω μορφές:

Μέσος: $\mu_y = \mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}) = \mu$

Διακύμανση: $\gamma_0 = Var(y_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2 + \theta_1 \varepsilon^2_{t-1} + \ldots + \theta_q^2 \varepsilon^2_{t-q} - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \ldots)$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \theta_q^2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)$$

Αυτοσυνδιακύμανση: $\gamma_k = \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0$, για $k \neq 0$

4.4.1 Υποδείγματα Κινητού Μέσου Πρώτης Τάξης

Το υπόδειγμα κινητού μέσου πρώτης τάξης MA(1) εκφράζεται ως ακολούθως:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{4.7}$$

Η σχέση (4.7) μπορεί να αποτυπωθεί και με την εξής μορφή:

$$y_t = (1 + \theta_1 B)\varepsilon_t$$

και για $|\theta_1| < 1$, η σχέση μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$(1+\theta_1 B)^{-1} y_t = \varepsilon_t$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια AR(∞) διαδικασία η οποία προήλθε από μια MA(1) διαδικασία, έχοντας αντιστρέψει τον όρο $(1+\theta_1 B)$ και αυτό συνεπάγεται ότι η MA(1) είναι αντιστρέψιμη. Διατυπώνοντας διαφορετικά τη συγκεκριμένη πρόταση, επισημαίνεται πως αντιστρέψιμη θεωρείται μια MA(1) διαδικασία αν μπορεί να διατυπωθεί ως μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία απείρων όρων (Κιντής, 2010).

Από το παραπάνω υπόδειγμα, προκύπτουν τα εξής:

Μέσος: $\mu_y = \mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = \mu$

Διακύμανση: $\sigma_y^2 = Var(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 (1+\theta_1^2) = \gamma_0$

Αυτοσυνδιακυμάνσεις: $\gamma_1 = \mathrm{E}[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)]$

$$= \mathrm{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})]$$

$$= -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_k = \mathrm{E}[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)]$$

$$= \mathrm{E}[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})] = 0, \quad \text{για } k > 1$$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, k = 1 \\ 0, k > 1 \end{cases}$

Η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία MA(1) έχει μνήμη μιας περιόδου, δηλαδή με άλλα λόγια η μνήμη της περιορίζεται αυστηρά μόνο σε αυτό που συνέβει την προηγούμενη περίοδο, χωρίς να λαμβάνει υπόψη την αρχή της σειράς και έχει ως ιδιότητα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της να φθίνει καθώς το k μεγαλώνει.

4.4.2 Υποδείγματα Κινητού Μέσου Δεύτερης Τάξης

Το υπόδειγμα κινητού μέσου δεύτερης τάξης MA(2) εκφράζεται ως ακολούθως:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

Από το συγκεκριμένο υπόδειγμα μπορεί εξαχθεί ο μέσος, η διακύμανση και η συνδιακύμανση με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκαν και για το υπόδειγμα 1ης τάξης.

Μέσος: $\mu_y = \mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = \mu$

Διακύμανση: $\sigma_y^2 = Var(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = \gamma_0$

Αυτοσυνδιακυμάνσεις: $\gamma_1 = \mathrm{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3})]$

$$= -\theta_1 (1 - \theta_2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \mathrm{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \varepsilon_{t-4})]$$

$$= -\theta_2 \sigma_\varepsilon^2$$

και $\gamma_k = 0$ για $k > 2$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: $\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-\theta_1 (1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_2 = \dfrac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_3 = 0 \end{cases}$

και $\rho_k = 0$ για $k > 2$.

Με βάση τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, οι τρέχουσες τιμές της y_t έχουν μνήμη μόνο δύο περιόδων πριν. Με άλλα λόγια, η μνήμη της σειράς MA(2) περιορίζεται αυστηρά μόνο σε αυτά που συνέβησαν δύο περιόδους πριν.

Προκειμένου η σειρά MA(2) να είναι αντιστρέψιμη, πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

4.4.3 Υποδείγματα Κινητού Μέσου q Τάξης

Το υπόδειγμα κινητού μέσου q τάξης MA(q) εκφράζεται ως ακολούθως:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Για το συγκεκριμένο υπόδειγμα, ισχύουν τα παρακάτω:

Μέσος: $\mathrm{E}(y_t) = \mu$

Διακύμανση: $\gamma_0 = Var(y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2$

Αυτοσυνδιακυμάνσεις: $\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k}) = (\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q)\sigma_\varepsilon^2$, για

$k = 1, 2, \ldots, q$

$= 0$, για $k > q$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: $\rho_k = \dfrac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2}$, για

$k = 1, 2, \ldots, q$

$= 0$, για $k > q$

Αντιστρεψιμότητα

Αντιστρεψιμότητα (*invertibility*) μιας σειράς ορίζεται η δυνατότητα που έχει μια σειρά MA να μετατρέπεται σε ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα απείρων όρων. Αντίστροφα, θα λέγεται ότι ένα υπόδειγμα AR(p) είναι αντιστρέψιμο, αν αυτό μπορεί να μετατραπεί σε ένα υπόδειγμα MA απείρων όρων.

4.5 Μεικτά Υποδείγματα

Για τη μελέτη περισσότερο σύνθετων στοχαστικών διαδικασιών, κρίνεται σκόπιμη η εφαρμογή μεικτών υποδειγμάτων (*mixed models*), τα οποία αποτελούν συνδυασμό των αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων AR(p) και των κινητών μέσων MA(q) υποδειγμάτων. Τα συγκεκριμένα υποδείγματα συμβολίζονται ως ARMA(p,q) και ορίζονται ως αυτοπαλίνδρομα-κινητού μέσου υποδείγματα. Ένα υπόδειγμα ARMA(p,q) ορίζεται με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης:

$$y_t = \delta + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Προϋπόθεση ώστε η σειρά να είναι στάσιμη, απαιτείται ο μέσος της να είναι αριθμός πεπερασμένος και ανεξάρτητος του χρόνου.

Έτσι λαμβάνοντας τη μέση τιμή του y_t, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\delta) + \varphi_1 \mathrm{E}(y_{t-1}) + \varphi_2 \mathrm{E}(y_{t-2}) + \ldots + \varphi_p \mathrm{E}(y_{t-p}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t) - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \mathrm{E}(\varepsilon_{t-q})$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι: $\mu = \delta + \varphi_1 \mu + \varphi_2 \mu + \ldots + \varphi_p \mu$

και συνεπάγεται ότι: $\mu = \dfrac{\delta}{1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_p}$

Προκειμένου η υπό μελέτη σειρά να είναι στάσιμη, θα πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_p < 1$$

Σε αυτό το σημείο επισημαίνεται, πως το υπόδειγμα το οποίο περιγράφηκε μπορεί επίσης να αποτυπωθεί και με τη χρησιμοποίηση του τελεστή ολίσθησης B ως εξής:

$$(1 - \varphi_1 \mathrm{B} - \varphi_2 \mathrm{B}^2 - \ldots - \varphi_p \mathrm{B}^p) y_t = \delta + (1 - \theta_1 \mathrm{B} - \theta_2 \mathrm{B}^2 - \ldots - \theta_q \mathrm{B}^q) \varepsilon_t$$

Κατά συνέπεια, το παραπάνω υπόδειγμα μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης:

$$\Phi(\mathrm{B}) y_t = \delta + \Theta(\mathrm{B}) \varepsilon_t \qquad (4.8)$$

όπου: $\Phi(\mathrm{B}) = 1 - \varphi_1 \mathrm{B} - \varphi_2 \mathrm{B}^2 - \ldots - \varphi_p \mathrm{B}^p$

$$\Theta(\mathrm{B}) = 1 - \theta_1 \mathrm{B} - \theta_2 \mathrm{B}^2 - \ldots - \theta_q \mathrm{B}^q$$

Υποθέτοντας πως το υπόδειγμα (4.8) εκφράζεται από σειρές οι οποίες είναι στάσιμες, λαμβάνεται η παρακάτω σχέση:

$$y_t = \varphi^{-1}(B)\delta + \varphi^{-1}(B)\theta(B)\varepsilon_t$$

Προκειμένου ένα υπόδειγμα ARMA(p,q) να είναι στάσιμο, οι ρίζες του πολυωνύμου $\Phi(B)$ πρέπει να βρίσκονται όλες εκτός του κύκλου με ακτίνα τη μονάδα και την ίδια στιγμή για είναι επίσης αντιστρέψιμο, πρέπει οι ρίζες του πολυωνύμου $\Theta(B)$ να βρίσκονται όλες εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Προκύπτει κατά συνέπεια, ότι από τη μια μεριά η στασιμότητα του ARMA(p,q) υποδείγματος θα προσδιορίζεται από την AR(p) συνιστώσα, ενώ η αντιστρεψιμότητά του από την MA(q) συνιστώσα.

Ιδιότητες του Υποδείγματος ARMA(1,1)

Η εξίσωση του ARMA(1,1) υποδείγματος δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Οι ιδιότητες του παραπάνω υποδείγματος, συνοψίζονται παρακάτω:

Μέσος: $\mu = E(y_t) = \delta + \varphi_1 E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) = \delta + \varphi_1 \mu$

Δηλαδή, προκύπτει ότι: $\mu = \dfrac{\delta}{1-\varphi_1}$=σταθερή, για $\varphi_1 < 1$

Διακύμανση: $\gamma_0 = Var(y_t) = E[y_t(\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})]$

$$= E[(\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2]$$

$$= \varphi_1^2 \gamma_0 - 2\varphi_1 \theta_1 E[y_{t-1}\varepsilon_{t-1}] + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \varphi_1^2 \gamma_0 + [1 - 2\varphi_1 \theta_1 + \theta_1^2]\sigma_\varepsilon^2$$

Κι επειδή ισχύει: $E(y_{t-1}\varepsilon_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2$

Έπεται ότι:

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\varphi_1 \theta_1)\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1^2}$$

Αυτοσυνδιακυμάνσεις: $\gamma_1 = E[y_{t-1}(\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = \varphi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$

$$\gamma_2 = E[y_{t-2}(\varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = \varphi_1 \gamma_1$$

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} \text{ , για } k \geq 2$$

Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης: $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{(1-\varphi_1\theta_1)(\varphi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\varphi_1\theta_1}$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} \quad k \geq 2$$

Προκειμένου η σειρά που εκφράζεται μέσα από την εξίσωση να είναι στάσιμη, θα πρέπει να ισχύουν $|\varphi_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$. Επιπλέον, καθώς το μήκος της υστέρησης αυξάνεται, οι αυτοσυσχετίσεις φθίνουν γεωμετρικά.

4.6 Μεικτά Ολοκληρωμένα Υποδείγματα

Οι χρονοσειρές αποτελούν κατά κύρια βάση μη στάσιμες σειρές. Προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα της μη στασιμότητας, λαμβάνονται οι διαφορές τους, είτε αυτές αφορούν πρώτες διαφορές, είτε δεύτερες και έπειτα από το συγκεκριμένο αυτόν μετασχηματισμό καλούνται ολοκληρωμένες. Κατά συνέπεια, μια σειρά y_t θα καλείται ολοκληρωμένη μη στάσιμη σειρά τάξης d, όταν η x_t που ορίζεται από την παρακάτω μορφή είναι εξίσου στάσιμη:

$$x_t = \Delta^d y_t$$

Το Δ δηλώνει τη διαφορά και το d την τάξη της διαφοράς και η προηγούμενη έκφραση μπορεί να παίρνει τις ακόλουθες μορφές:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$$

Κατά συνέπεια, έπειτα από d διαφορές, η υπό μελέτη μη στάσιμη σειρά ονομάζεται ολοκληρωμένη τάξης d και παίρνει το συμβολισμό $\mathrm{I}(d)$.

Εναλλακτική διατύπωση ενός μεικτού ολοκληρωμένου υποδείγματος μπορεί να δοθεί, αν υποτεθεί ότι η σειρά η οποία μελετάται ακολουθεί ένα υπόδειγμα ARMA(p,q). Λαμβάνοντας υπ'όψιν, ότι η στασιμότητα της σειράς επήλθε έπειτα από d διαφορές, η σειρά y_t καλείται ολοκληρωμένη αυτοπαλίνδρομη διαδικασία κινητού μέσου τάξης (p,d,q) και συμβολίζεται με ARIMA(p,d,q). Στην περίπτωση κατά την οποία στη σειρά x_t εμπεριέχεται και σταθερός όρος, τότε η ολοκληρωμένη σειρά y_t θα έχει προσδιοριστική τάση. Λόγου χάριν, αν $d = 1$ και $\delta > 0$ η σειρά y_t θα αυξάνεται γραμμικά διαχρονικά.

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σκόπιμο να διευκρινιστεί ότι η στάσιμη σειρά x_t ενδέχεται να μην ακολουθεί μεικτό σχήμα με αποτέλεσμα να παίρνει τις παρακάτω μορφές. Έτσι, μπορεί είτε να αποτελείται μόνο από τις αυτοπαλίνδρομες συνιστώσες ή μόνο από τις συνιστώσες κινητού μέσου και να αποτυπώνεται σύμφωνα με τις σχέσεις ARI(p,d,0) και IMA(0,d,q) αντίστοιχα (Wooldridge, 2006). Στην περίπτωση κατά την οποία το υπό μελέτη υπόδειγμα αποτελείται εξίσου και από τις δύο συνιστώσες και με τη βοήθεια του τελεστή ολίσθησης (*Backshift Operator*) ένα υπόδειγμα της μορφής ARIMA(1,1,2), θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$(1 - \mathrm{B})(1 - \varphi_1 \mathrm{B})x_t = \delta + (1 - \theta_1 \mathrm{B} - \theta_2 \mathrm{B}^2)\varepsilon_t$$

Αντίστοιχα ένα ARIMA(2,1,1) υπόδειγμα θα δίνεται ως ακολούθως:

$$(1 - \mathrm{B})(1 - \varphi_1 \mathrm{B} - \varphi_2 \mathrm{B}^2)x_t = \delta + (1 - \theta_1 \mathrm{B})\varepsilon_t$$

4.6.1 Στάδια Ανάλυσης Μεικτών Ολοκληρωμένων Υποδειγμάτων με τη Μέθοδο Box-Jenkins

Τα υποδείγματα ARIMA κατασκευάζονται και εκτιμώνται με σκοπό τη διενέργεια προβλέψεων. Πράγματι, έχει αποδειχθεί πως μέσω της χρησιμοποίησης των εν λόγω υποδειγμάτων, προσφέρονται αξιόπιστες προβλέψεις αναφορικά με τη χρήση πολλών οικονομικών μεταβλητών. Ωστόσο, δεν πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι για να παραχθούν σωστές προβλέψεις, θα πρέπει να επιλέγεται με προσοχή το καταλληλότερο υπόδειγμα. Η διαδικασία εν μέσω της οποίας επιλέγεται το σωστό υπόδειγμα, είναι γνωστή και ως μεθοδολογία Box-Jenkins και περιλαμβάνει τρία στάδια μεταξύ των οποίων είναι η ταυτοποίηση, η εκτίμηση και ο διαγνωστικός έλεγχος του εκάστοτε υποδείγματος.

Ταυτοποίηση

Η ταυτοποίηση του υποδείγματος, περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των τιμών των παραμέτρων ενός υποδείγματος ARIMA(p,d,q) και για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να γίνει χρήση τόσο των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης ρ_k όσο και των συναρτήσεων μερικής αυτοσυσχέτισης ρ_{kk}. Το d όπως έχει ήδη αναφερθεί, αφορά τον αριθμό των διαφορών και αποτελεί ίσως το πιο δύσκολο βήμα της ταυτοποίησης ενός υποδείγματος ARIMA από τον ερευνητή. Για τον προσδιορισμό του, εφαρμόζεται η παρακάτω διαδικασία.

Αρχικά εξετάζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της αρχικής σειράς y_t. Στην περίπτωση κατά την οποία αυτή διαπιστωθεί πως δεν είναι στάσιμη, τότε εξετάζεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της Δy_t και αν με τη σειρά της διαπιστωθεί πως και αυτή δεν είναι στάσιμη τότε ελέγχεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $\Delta^2 y_t$ κ.ο.κ. (Wooldridge, 2006).

Έχοντας ανιχνεύσει την τιμή του d, έπειτα μελετώνται οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης προκειμένου να προσδιοριστούν τα p και q.

Εκτίμηση υποδείγματος

Αφότου επιλεγεί το υπόδειγμα, εν συνεχεία εκτιμώνται οι παράμετροι $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ της αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας και των q παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ της διαδικασίας κινητού μέσου. Στο στάδιο της ταυτοποίησης της σειράς και είτε πρόκειται μόνο για αυτοπαλίνδρομες συνιστώσες είτε για συνιστώσες κινητού μέσου ή και τα δύο, σε κάθε περίπτωση οι συντελεστές εκτιμώνται με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Διαγνωστικός έλεγχος υποδείγματος

Ο διαγνωστικός έλεγχος του υποδείγματος απαρτίζεται από τέσσερα στάδια: α) την προσαρμοστικότητα του υποδείγματος, β) τον έλεγχο συμπεριφοράς των καταλοίπων, γ) τον έλεγχο σημαντικότητας των συντελεστών του και δ) τον καθορισμό της τάξης του εν λόγω υποδείγματος.

4.6.2 Προβλέψεις με Μεικτά Ολοκληρωμένα Υποδείγματα

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, το ενδιαφέρον για τη μελέτη των εν λόγω υποδειγμάτων, εδράζεται στο γεγονός ότι προσφέρονται για αξιόπιστες βραχυχρόνιες προβλέψεις. Με τον όρο αξιόπιστη, καλείται μια πρόβλεψη μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής του σφάλματος πρόβλεψης (MSE=Mean Square Error).

Η έρευνα επικεντρώνεται γύρω από το σφάλμα πρόβλεψης, το οποίο περιγράφεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_{T+k} = (\hat{y}_{T+k} - y_{T+k}) \text{, όπου } k \geq 1$$

Μετά από ελαχιστοποίηση της παρακάτω σχέσης, βρίσκεται το ελάχιστο MSE.

$$MSE = \sum(\varepsilon^2{}_{T+k}) = \mathrm{E}(\hat{y}_{T+k} - y_{T+k})^2$$

Αποδεικνύεται πως η καλυτερη πρόβλεψη που αναζητείται αντιστοιχεί στην υπό συνθήκη (*conditional*) αναμενόμενη τιμή της y_{T+k}, δηλαδή:

$$\hat{y}_{T+k} = \mathrm{E}(y_{\mathrm{T}+1} / y_T, Y_{T-1}, ..., y_1)$$

Ιδιότητες Προβλέψεων ARIMA Υποδειγμάτων

Σε όλες τις περιπτώσεις όπου ζητείται η διενέργεια προβλέψεων μέσω των υποδειγμάτων ARIMA, πρέπει προηγουμένως να θεωρείται πως οι παράμετροι των συγκεκριμένων υπό μελέτη υποδειγμάτων είναι γνωστές με βεβαιότητα.

Υπόδειγμα AR(1)

Ας υποτεθεί μια στάσιμη σειρά, η οποία ακολουθεί το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα πρώτης τάξης:

$$y_t = \delta + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Για τη συγκεκριμένη διαδικασία, οι προβλέψεις για τις περιόδους $\mathrm{T}+1, \mathrm{T}+2, \mathrm{T}+l$ θα υπολογίζονται ως ακολούθως:

Για $\mathrm{T}+1$: $\hat{y}_T(1) = \mathrm{E}(y_{T+1} / y_T, ..., y_1) = \varphi_1 y_T + \delta$

Για $\mathrm{T}+2$: $\hat{y}_T(2) = \varphi_1 \hat{y}_T(1) + \delta = \varphi_1{}^2 y_T + (\varphi_1 + 1)\delta$

Για $\mathrm{T}+l$: $\hat{y}_T(l) = \varphi_1{}^l y_T + (\varphi_1{}^{l-1} + \varphi_1{}^{l-2} + ... + \varphi_1 + 1)\delta$

Από την τελευταία εξίσωση, καθώς το μήκος της περιόδου αυξάνεται το όριο της τιμής της πρόβλεψης συγκλίνει στο μέσο της σειράς.

Επιπλέον το σφάλμα πρόβλεψης, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\varepsilon}_T(l) = \varepsilon_{T+l} + \varphi_1 \varepsilon_{T+l-1} + ... + \varphi_1^{l-1} \varepsilon_{T+1}$$

και η διακύμανση του θα υπολογίζεται ως εξής:

$$Var(\hat{\varepsilon}_T(l)) = \mathrm{E}[\varepsilon^2{}_T(l)] = (1 + \varphi_1^2 + \varphi_1^4 + ... + \varphi_1^{2l-2})\sigma_\varepsilon^2$$

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημανθεί πως η διακύμανση της πρόβλεψης του σφάλματος αυξάνεται μη-γραμμικά, καθώς το l αυξάνει.

Υπόδειγμα MA(1)

Ένα MA(1) υπόδειγμα δίνεται από τη σχέση:

$$y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Για τη συγκεκριμένη διαδικασία, οι προβλέψεις για τις περιόδους $\mathrm{T}+1, \mathrm{T}+2, \mathrm{T}+l$ θα υπολογίζονται ως ακολούθως:

Για $\mathrm{T}+1$: $\hat{y}_T(1) = \mathrm{E}(y_{T+1} | y_T, ..., y_1) = \delta - \theta_1 \hat{\varepsilon}_T$

Για $\mathrm{T}+2$: $\hat{y}_T(2) = \mathrm{E}(y_{T+2} | y_T, ..., y_1) = \mathrm{E}(\delta + \varepsilon_{T+2} - \theta_1 \varepsilon_{T+2-1})$

Για $\mathrm{T}+l$: $\hat{y}_T(l) = \mathrm{E}(y_{T+l} | y_T, ..., y_1) = \mathrm{E}(\delta + \varepsilon_{T+l} - \theta_1 \varepsilon_{T+l-1}) = \delta$

Επιπλέον, το σφάλμα πρόβλεψης στη γενική μορφή του υποδείγματος θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\varepsilon}_{T+l} = y_{T+l} - \hat{y}_{T+l}$$

και η διακύμανση του θα υπολογίζεται ως εξής:

$$Var(\varepsilon_{T+l}) = E(\varepsilon^2{}_{T+l}) = \mathrm{E}[(y_{T+l} - \hat{y}_T(l))^2]$$

$$= \mathrm{E}[(\varepsilon_{T+l} - \theta_1 \varepsilon_{T+l-1})^2] = (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

Προκύπτει, ότι μετά από την $T+2$ περίοδο η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης, θα παραμένει ίδια για όλες τις μετέπειτα περιόδους.

Υπόδειγμα ARMA(1,1)

Ένα ARMA(1,1) υπόδειγμα δίνεται από τη σχέση:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Για τη συγκεκριμένη διαδικασία, οι προβλέψεις για τις περιόδους $\mathrm{T}+1, \mathrm{T}+2, \mathrm{T}+l$ θα υπολογίζονται ως ακολούθως:

Για $\mathrm{T}+1$: $\hat{y}_T(1) = \mathrm{E}(\varphi_1 y_T + \delta + \varepsilon_{T+1} - \theta_1 \varepsilon_T) = \varphi_1 y_T + \delta - \theta_1 \hat{\varepsilon}_T$

Για $\mathrm{T}+2$: $\hat{y}_T(2) = \mathrm{E}(\varphi_1 y_{T+1} + \delta + \varepsilon_{T+2} - \theta_1 \varepsilon_{\mathrm{T}+1}) = \varphi_1 \hat{y}_T(1) + \delta$

$$= \varphi_1^2 y_T + (\varphi_1 + 1)\delta - \varphi_1 \theta_1 \hat{\varepsilon}_T$$

Για $\mathrm{T}+l$: $\hat{y}_T(l) = \varphi_1 \hat{y}_T(l-1) + \delta$

$$= \varphi_1^l y_T + (\varphi_1^{l-1} + \ldots + \varphi_1 + 1)\delta - \varphi_1^{l-1} \theta_1 \hat{\varepsilon}_T$$

Οι διακυμάνσεις των σφαλμάτων πρόβλεψης που αντιστοιχούν στις προβλέψεις $T+1$, $T+2$ $T+l$ θα δίνονται ως εξής:

$$Var(\hat{\varepsilon}_{T+1}) = \mathrm{E}(\varepsilon^2{}_{T+1}) = \sigma_\varepsilon{}^2$$

$$Var(\hat{\varepsilon}_{T+2}) = \mathrm{E}(\varepsilon^2{}_{T+2}) = (\varphi_1 - \theta_1)^2 \sigma_\varepsilon{}^2 + 1$$

$$Var(\hat{\varepsilon}_{T+l}) = \mathrm{E}(\varepsilon^2{}_{T+l}) = l\sigma_\varepsilon{}^2$$

Διενεργώντας προβλέψεις για διαφορετικές περιόδους, προκύπτει ότι τα σφάλματα της τωρινής περιόδου βοηθούν στον καθορισμό της πρόβλεψης της επόμενης περιόδου και αυτή με τη σειρά της λειτουργεί σαν ένα σημείο εκκίνησης, από το οποίο τα κατάλοιπα που λαμβάνονται από την πρόβλεψη, τα οποία αποτελούν αυτοπαλίνδρομες συνιστώσες, φθίνουν παράλληλα με το μέσο $\delta/(1-\varphi_1)$.

Υπόδειγμα ARI(1,1,0)

Ένα ARI(1,1,0) υπόδειγμα, αποτελεί μια μη στάσιμη διαδικασία και δίνεται από τη σχέση:

$$w_t = \varphi_1 w_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

όπου
$$w_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Οι προβλέψεις για τη σειρά y_t, σχετίζονται με τις προβλέψεις των σειρών w_t ως ακολούθως:

$$\hat{y}_T(1) = y_T + \hat{w}_T(1)$$

και
$$\hat{y}_T(l) = y_T + \hat{w}_T(1) + \ldots + \hat{w}_T(l)$$

Καθώς η σειρά w_t είναι AR(1), οι προβλέψεις της θα δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{w}_T(l) = \varphi_1^{\,l} w_T + (\varphi_1^{\,l-1} + \varphi_1^{\,l-2} + \ldots + \varphi_1 + 1)\delta$$

$$= \varphi_1^{\,l} y_T - \varphi_1^{\,l} y_{T-1} + (\varphi_1^{\,l-1} + \ldots + \varphi_1 + 1)\delta$$

Τότε, η πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο για την y_t θα είναι:

$$\hat{y}_T(1) = y_T + \varphi_1(y_T - y_{T-1}) + \delta = (1+\varphi_1)y_T - \varphi_1 y_{T-1} + \delta$$

Ενώ, η πρόβλεψη για δύο περιόδους μετά για την y_t θα είναι:

$$\hat{y}_T(2) = y_T + \hat{w}_T(1) + \hat{w}_T(2) = \hat{y}_T(1) + \hat{w}_T(2)$$

$$= \hat{y}_T(1) + \varphi_1^{\,2} w_T + (\varphi_1 + 1)\delta$$

$$= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^{\,2})y_T - (\varphi_1 + \varphi_1^{\,2})y_{T-1} + (\varphi_1 + 1)\delta + \delta$$

Γενικά για l περιόδους μπροστά η πρόβλεψη της y_t, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{y}_{T+l} = y_T + \hat{w}_{T+1} + \hat{w}_{T+2} + \ldots + \hat{w}_{T+l}$$

Αξιολόγηση της Αξιοπιστίας των Προβλέψεων

Προκειμένου να αξιολογηθεί η ακρίβεια των προβλέψεων ενός υποδείγματος, έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια. Τα πλέον σημαντικότερα κριτήρια αξιολόγησης, είναι το κριτήριο της ρίζας του μέσου του τετραγώνου του σφάλματος (*Root Mean Square Error*) και το κριτήριο του συντελεστή ανισότητας του Theil (*Theil's Inequality Coefficient*).

Αναφορικά με το πρώτο κριτήριο, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{l}\sum_{t=1}^{l}(y_t{}^f - y_t{}^a)^2}$$

όπου $y_t{}^f =$ η προβλεπόμενη τιμή της y, $y_t{}^a =$ η παρατηρούμενη τιμή της y, $t = 1,2,3..,l$

Το δεύτερο κριτήριο, το οποίο αφορά το κριτήριο του Theil, ο συντελεστής ανισότητας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{t=1}^{l}(y_t{}^f - y_t{}^a)^2}}{\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{t=1}^{l}(y_t{}^a)^2}}$$

όπου $U =$ συντελεστής ανισότητας του Theil, $y_t{}^f =$ η προβλεπόμενη τιμή της y, $y_t{}^a =$ η παρατηρούμενη τιμή της y, $t = 1,2,3..,l$.

Ως συμπέρασμα, προκύπτει ότι όσο πιο μικρές τιμές λαμβάνονται από τον υπολογισμό των παραπάνω δεικτών, τόσο καλύτερη η προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος. Αναφορικά με το συντελεστή του Theil U γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι αυτός είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών, σε αντίθεση με το RMSE το οποίο εξαρτάται από τις μονάδες στις οποίες μετράται η y_t (Wooldridge, 2006).

4.7 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό, έγινε μια εκτενής ανάλυση των χρονοσειρών στο πεδίο του χρόνου και παρουσιάστηκε το θεωρητικό υπόβαθρο, με βάση το οποίο διενεργούνται προβλέψεις μέσω κατάλληλων υποδειγμάτων. Αρχικά, περιγράφηκαν κάποια στοιχεία των χρονοσειρών και παράλληλα δόθηκαν κάποιοι ορισμοί σημαντικών εννοιών, όπως η στασιμότητα και η αντιστρεψιμότητα. Έπειτα, αναπτύχθηκαν τόσο τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα όσο και τα υποδείγματα κινητού μέσου και παράλληλα παρουσιάστηκε το υπόδειγμα ARMA, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί μίξη αυτοπαλίνδρομων και κινητών μέσων συνιστωσών. Το κεφάλαιο ολοκληρώθηκε, με αναφορές στα μεικτά ολοκληρωμένα υποδείγματα τύπου ARIMA, τα οποία αποτελούν τα πιο σημαντικά υποδείγματα, μέσω των οποίων διενεργούνται βραχυχρόνιες προβλέψεις στην ανάλυση χρονοσειρών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΞΙΑΣ ΣΕ ΚΙΝΔΥΝΟ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ GARCH ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΕ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟΥΣ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΥΣ ΔΕΙΚΤΕΣ

5.1 Εισαγωγή

Ο υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR), όπως είναι γνωστό αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο μέτρησης του κινδύνου και της αποτύπωσής του, με σκοπό εν τέλει τη διαχείριση αυτού από διάφορους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς. Για το λόγο αυτό, το VaR πολύ συχνά βρίσκει πεδίο εφαρμογής τόσο σε ιδρύματα που εμπλέκονται με χρηματοπιστωτικές εμπορικές συναλλαγές (*trading*), όπως τράπεζες και μεγάλα επενδυτικά κεφάλαια (*hedge funds*), όπως επίσης και σε εταιρείες και πολυεθνικούς ομίλους, οι οποίοι και αυτοί με τη σειρά τους, εκτίθενται καθημερινά σε χρηματοοικονομικούς κινδύνους.

Τα τελευταία χρόνια η μέτρηση του VaR πραγματοποιείται κατά κόρον από τα εν λόγω ιδρύματα. Ωστόσο, απαραίτητη προϋπόθεση για να καταστεί αυτό εφικτό είναι ο υπολογισμός της διακύμανσης ή της τυπικής απόκλισης. Έχει παρατηρηθεί και έχει αποδειχθεί, βάση εμπειρικών μελετών που διεξήχθησαν από τον Mandelbrot (1963), πως η μεταβλητότητα των αποδόσεων χρηματοικονομικών περουσιακών στοιχείων τείνει να εμφανίζεται με τη μορφή όπου περίοδοι υψηλής μεταβλητότητας ακολουθούνται από περιόδους υψηλής μεταβλητότητας ίδιου μεγέθους και περίοδοι χαμηλής μεταβλητότητας ακολουθούνται από περιόδους χαμηλής μεταβλητότητας ίδιου μεγέθους. Σε μια τέτοια περίπτωση, η μεταβλητότητα-αστάθεια παρουσιάζεται στο χρόνο με τη μορφή συστάδων-ομάδων (*volatility clustering*). Με τη σειρά τους, οι διακυμάνσεις αυτές έχουν σημαντικές επιπτώσεις τόσο στη μέτρηση του κινδύνου, όσο και στην τιμολόγηση και αντιστάθμισή του μέσω χρηματοοικονομικών παραγώγων. Συχνά μια μεγάλη αστάθεια (*shock*) που μπορεί να προκληθεί στην αγορά, ακολουθείται από σημαντικά αυξημένη πιθανότητα να ξανασυμβεί μια παρόμοια σε μέγεθος διαταραχή στο εγγύς μέλλον.

Στην ανάλυση χρονοσειρών, η μελέτη αυτής της υπό συνθήκης μεταβλητότητας (*conditional volatility*) όπως αποκαλείται, αποτελεί αντικείμενο μελέτης των αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας (ARCH) που πρωτοεισήχθησαν από τον Engle (1982) και γενικεύτηκαν (GARCH) λίγα χρόνια αργότερα, από τον Bollerslev (1986). Κύριος σκοπός τους, είναι να αποτυπώσουν τη μεταβλητότητα των αποδόσεων οι οποίες μάλιστα εμφανίζονται σε συστάδες. Οι προβλέψεις που γίνονται μέσω των υποδειγμάτων αυτών δεν είναι ίσες με τις τωρινές εκτιμήσεις που λαμβάνονται. Αντ' αυτού, η μεταβλητότητα μπορεί να είναι είτε υψηλότερη, είτε χαμηλότερη από τον μέσο όρο βραχυπρόθεσμα. Ωστόσο, καθώς ο χρονικός ορίζοντας μεγαλώνει, οι προβλέψεις για τη μεταβλητότητα συγκλίνουν στην μακροχρόνια μεταβλητότητα (*long term volatility*) (Alexander, 2008).

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξεταστούν τα Γενικευμένα Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας τα οποία αποτελούν γενίκευση των Αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας που προτάθηκαν από τον Engle (1982). Αφού αυτά προσδιοριστούν, επιπλέον αναφορές θα γίνουν και σε πιο εξειδικευμένα υποδείγματα της οικογένειας ARCH όπως είναι τα υποδείγματα με εμμονή στη μεταβλητότητα, τα υποδείγματα ασυμμετρίας καθώς και τα υποδείγματα με μακρά μνήμη. Το παρόν κεφάλαιο, θα κλείσει με τον υπολογισμό της Αξίας σε Κίνδυνο σε βασικούς Ευρωπαϊκούς χρηματιστηριακούς δείκτες με τη χρήση ARIMA-GARCH υποδειγμάτων με σκοπό να διερευνηθεί ο κίνδυνος όπως αυτός αποτυπώνεται στους υποκείμενους δείκτες και να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς το συνολικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει κάθε χώρα με βάση τη μεταβλητότητα που παρατηρείται στο βασικό δείκτη της. Κατόπιν, θα διενεργηθεί ο επανέλεγχος του VaR ούτως ώστε να επαληθευτεί η εγκυρότητα των εν λόγω υποδειγμάτων VaR.

5.2 Αυτοπαλίνδρομα υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας Υποδείγματα

Τα υποδείγματα ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) τα οποία εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Engle (1982), αποτελούν αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα όπου ο διαταρακτικός όρος τους ε_t, μπορεί να εκφραστεί ως μια διαδικασία ARCH η οποία μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

όπου z_t είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, με μέσο μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα. Η υπό συνθήκη διακύμανση των ε_t συμβολίζεται με σ_t, είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη, θετική και μετρήσιμη συνάρτηση του σετ δεδομένων, κατά τη χρονική στιγμή $t-1$. Ωστόσο, θα πρέπει να επισημανθεί πως για την εν λόγω διαδικασία, ο υπό συνθήκη μέσος της είναι σειριακά μη συσχετισμένος και δεν είναι χρονικά ανεξάρτητος, όπως τονίζουν οι Angelidis et al. (2003) .
Η τελική μορφή που παίρνει ένα υπόδειγμα ARCH, εκφράζοντας την υπό συνθήκη διακύμανση ως γραμμική συνάρτηση των m τετραγωνικών σφαλμάτων του παρελθόντος παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-i}$$

Για να είναι η υπό συνθήκη διακύμανση θετική, θα πρέπει να ισχύουν $a_0 \geq 0$ και $a_i \geq 0$ για $i = 1,...,m$. Μάλιστα, εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει πως πρέπει να επιλέγεται μεγάλο m, προκειμένου να προσδιορίζεται με ακρίβεια η διακύμανση.

Υπόδειγμα ARCH (1)

Το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας πρώτης τάξης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon^2_{t-1}$$

Ο μέσος της εν λόγω διαδικασίας δίνεται ακολούθως:

$\mathrm{E}[\mathrm{E}(\varepsilon_t | F_{t-1})] = \mathrm{E}(0) = 0$, όπου F_{t-1} το σετ δεδομένων κατά τη χρονική στιγμή $t-1$

Έχοντας γνώση ότι ο διαταρακτικός όρος ε_t είναι υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικός (*conditional heteroscedastic*) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mathrm{E}[\mathrm{E}(\varepsilon_t | F_{t-1})] = 0$, η αδέσμευτη διακύμανση του ε_t (*unconditional variance*), θα δίνεται από την παρακάτω σχέση ως εξής:

$$Var(\varepsilon_t) = Var\left[\mathrm{E}(\varepsilon_t | F_{t-1})\right] + \mathrm{E}\left[Var(\varepsilon_t | F_{t-1})\right]$$

$$= 0 + a_0 + a_1 \mathrm{E}(\varepsilon^2_{t-1})$$

Όταν η διαδικασία μέσω της οποίας προκύπτουν τα τετραγωνικά κατάλοιπα ε_t^2 είναι στάσιμη σε όρους συνδιακύμανσης (*covariance stationary*), δηλαδή όταν η ρίζα της παράστασης $1 - a_1 z = 0$ βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η αδέσμευτη διακύμανση δε θα αλλάζει στο χρόνο και θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = \frac{a_0}{1 - a_1}$$

Για την παραπάνω παράσταση, θα πρέπει ο λόγος να είναι πεπερασμένος και θετικός. Κατά συνέπεια, απαιτείται να ισχύουν $a_0 > 0$, $a_1 < 1$. Επιπλέον, αφού $\mathrm{E}(\varepsilon_t | F_{t-1}) = 0$, τότε πρέπει να ισχύει $\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, έτσι ώστε ο διαταρακτικός όρος ε_t να αποτελεί μια διαδικασία λευκού θορύβου (Chingnun, 2008).

Το υπόδειγμα ARCH(2) υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκε το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας πρώτης τάξης.

Υπόδειγμα ARCH (m)

Γενικεύοντας τον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκε ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα πρώτης τάξης ARCH(1), μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας τάξης m. Το εν λόγω υπόδειγμα, παίρνει την εξής μορφή:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-i}$$

Ο μέσος της διαδικασίας δίνεται ως εξής:

$E[E(\varepsilon_t | F_{t-1})] = E(0) = 0$, όπου F_{t-1} το σετ δεδομένων κατά τη χρονική στιγμή $t-1$

Γνωρίζοντας ότι ο διαταρακτικός όρος ε_t είναι υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικός (*conditional heteroscedastic*) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $E[E(\varepsilon_t | F_{t-1})] = 0$, η αδέσμευτη διακύμανση του ε_t (*unconditional variance*), θα δίνεται από την παρακάτω σχέση ως εξής:

$$Var(\varepsilon_t) = Var[E(\varepsilon_t | F_{t-1})] + E[Var(\varepsilon_t | F_{t-1})]$$

$$= 0 + a_0 + a_1 E(\varepsilon^2_{t-1}) + a_2 E(\varepsilon^2_{t-2}) + ... + a_m E(\varepsilon^2_{t-m})$$

$$= a_0 + a_1 Var(\varepsilon_{t-1}) + a_2 Var(\varepsilon_{t-2}) + ... + a_m Var(\varepsilon_{t-m})$$

Στην περίπτωση όπου η διαδικασία μέσω της οποίας προκύπτουν τα τετραγωνικά κατάλοιπα ε_t^2 είναι στάσιμη σε όρους συνδιακύμανσης (*covariance stationary*), δηλαδή όταν η ρίζα της παράστασης $1 - a_1 z - a_2 z^2 - ... a_m z^m = 0$ θα βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, τότε η αδέσμευτη διακύμανση δε θα αλλάζει στο χρόνο και θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = Var(\varepsilon_{t-2}) = ...Var(\varepsilon_{t-m}) = \frac{a_0}{1 - a_1 - ... - a_m}$$

Για την παραπάνω παράσταση, απαιτείται ο λόγος να είναι πεπερασμένος και θετικός. Κατά συνέπεια, πρέπει να ισχύουν $a_0 > 0$, $a_1 + a_2 + ... + a_m < 1$. Επιπλέον, αφού $E(\varepsilon_t | F_{t-1}) = 0$, τότε πρέπει να ισχύει $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$, έτσι ώστε ο διαταρακτικός όρος ε_t να αποτελεί μια διαδικασία λευκού θορύβου.

5.3 Γενικευμένα Αυτοπαλίνδρομα υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας Υποδείγματα

Τα Γενικευμένα Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας αποτελούν γενίκευση των αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων τα οποία εισήχθησαν από τον Engle (1982). Προτάθηκαν δε ως πιο αξιόπιστα στη μελέτη χρονοσειρών που εφαρμόζονται στα χρηματοοικονομικά ύστερα από εμπειρική μελέτη η οποία απέδειξε πως η υπό συνθήκη διακύμανση των σφαλμάτων μιας χρονοσειράς είναι συνάρτηση τόσο των χρονικών υστερήσεων των σφαλμάτων όσο και των χρονικών υστερήσεων της διακύμανσής τους.

Υπόδειγμα GARCH(m,s)

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, εμπειρικές μελέτες έχουν δείξει πως για να εκτιμηθεί σωστά η υπό συνθήκη διακύμανση θα πρέπει να επιλέγεται κάθε φορά ένας μεγάλος αριθμός m. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, προτάθηκε από τον Bollerslev το 1986 μια γενίκευση του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας, γνωστό και ως GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity).

Το εν λόγω GARCH υπόδειγμα, υποθέτει πως η δυναμική συμπεριφορά της υπό συνθήκη διακύμανσης εκφράζεται από την παρακάτω σχέση ως εξής:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^2_{t-j}$$

όπου $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ για $i = 1,...,q$ και $b_j \geq 0$ για $j = 1,..., p$. Αν ισχύει $\Sigma^m a_i + \Sigma^s b_j < 1$, τότε η διαδικασία ε_t είναι στάσιμη και η υπό συνθήκη διακύμανση είναι ίση με την παρακάτω παράσταση:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - \Sigma^m a_i - \Sigma^s b_j}$$

Μια ειδική περίπτωση της οικογένειας των υποδειγμάτων GARCH αποτελεί και το υπόδειγμα εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), το οποίο χρησιμοποιήθηκε από την εταιρεία RiskMetrics^{TM} και το οποίο παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma^2_{t-1} + (1-\lambda)\varepsilon^2_{t-1}$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί, πως το υπόδειγμα που περιγράφηκε είναι μια ειδική περίπτωση του υποδείγματος GARCH(1,1), με σταθερό όρο ίσο με μηδέν και το άθροισμα των υπολοίπων παραμέτρων να αθροίζει στη μονάδα.

Το υπόδειγμα GARCH(m,s) καταφέρνει να αποτυπώσει αρκετά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών που εφαρμόζονται στα χρηματοοικονομικά, μερικά από τα οποία είναι οι παχιές ουρές των αποδόσεων και η συσταδοποίηση της μεταβλητότητας. Ωστόσο, η δομή του εν λόγω υποδείγματος παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα ως προς την εφαρμογή του, καθώς απαιτεί μεγάλα δείγματα προκειμένου να παραχθούν αξιόπιστες εκτιμήσεις και σε αρκετές περιπτώσεις το συγκεκριμένο υπόδειγμα παρουσιάζει αστάθεια στη διενέργεια προβλέψεων (*out-of-sample forecasts*).

Επίσης, η δομή του υποδείγματος επιβάλει σημαντικούς περιορισμούς, καθώς η διακύμανση εξαρτάται από το μέγεθος του διαταρακτικού όρου ε_t και όχι από το σήμα του, πράγμα το οποίο είναι αντίθετο με αυτό που παρατηρείται στη συμπεριφορά των τιμών των μετοχών, όπου το φαινόμενο της μόχλευσης (*leverage effect*) συναντάται σε πολλές των περιπτώσεων. Ο συγκεκριμένος όρος εισήχθει από τον Black (1976) και αφορούσε την τάση για αλλαγή στις αποδόσεις, η οποία μάλιστα είναι αρνητικά συσχετισμένη με την αλλαγή που επέρχεται στην ίδια τη μεταβλητότητα των αποδόσεων. Έτσι, η μεταβλητότητα τείνει να αυξάνεται με την εισαγωγή «κακών ειδήσεων» (*bad news*), δηλαδή όταν $\varepsilon_t < 0$ και να μειώνεται με την ανακοίνωση «καλών ειδήσεων» (*good news*) (Alexander, 2008).

Προβλέψεις με GARCH (m,s) Υποδείγματα

Σε κάθε υπόδειγμα GARCH, η εκτίμηση της μεταβλητότητας στο τέλος της περιόδου αναφοράς (*sample period*) αποτελεί ταυτόχρονα την πρόβλεψη της μεταβλητότητας της επόμενης περιόδου. Ωστόσο, πρέπει να διευκρινιστεί, πως η μακροχρόνια μεταβλητότητα (*long term volatility*) σε ένα υπόδειγμα GARCH είναι εντελώς διαφορετική και δε θα πρέπει να συγχέεται με τη βραχυχρόνια μεταβλητότητα (*short term volatility*) (Alexander, 2008).

Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να διενεργηθούν βραχυπρόθεσμες προβλέψεις για τη μεταβλητότητα, απαιτείται η χρήση των εκτιμήσεων των παραμέτρων ενός GARCH υποδείγματος. Επίσης, όλες οι προβλέψεις γίνονται με βάση την τελευταία ημέρα του δείγματος. Κατά συνέπεια, το εκτιμώμενο υπόδειγμα που κατασκευάζεται είναι της μορφής:

$$\hat{\sigma}^2{}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}\hat{\varepsilon}^2{}_{t-1} + \hat{b}\hat{\sigma}^2{}_{t-1}, \quad t = 1,...,T$$

όπου T είναι η τελευταία ημέρα του δείγματος. Στην περίπτωση όπου έχουμε ημερήσια δεδομένα, η πρόβλεψη της διακύμανσης για την επόμενη περιόδο θα δίνεται ως εξής:

$$\hat{\sigma}^2{}_{T+1} = \hat{a}_0 + \hat{a}\hat{\varepsilon}^2{}_T + \hat{b}\hat{\sigma}^2{}_T$$

Τα $\hat{\varepsilon}_T$ δύναται να παρατηρηθούν, διότι είναι τα τελευταία κατάλοιπα που εμφανίζονται στο υπό μελέτη υπόδειγμα. Ωστόσο, για τα κατάλοιπα $\hat{\varepsilon}_{T+1}$ στο χρόνο T δεν υπάρχει καμία πληροφορία.

Η πρόβλεψη της διακύμανσης από τη χρονική στιγμή $T+1$ έως τη χρονική στιγμή $T+2$, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\sigma}^2_{T+2} = \hat{a}_0 + \hat{a} E_T \hat{\varepsilon}^2_{T+1} + \hat{b}\hat{\sigma}^2_{T+1} = \hat{a}_0 + (\hat{a}+\hat{b})\hat{\sigma}^2_{T+1},$$

ισχύει ότι $E_T(\varepsilon^2_{T+1}) = \sigma^2_{T+1}$.

Γενικά, η πρόβλεψη της διακύμανσης από τη χρονική στιγμή $T+S$ έως τη χρονική στιγμή $T+S+1$, θα δίνεται από την παρακάτω παράσταση:

$$\hat{\sigma}^2_{T+S+1} = \hat{a}_0 + (\hat{a}+\hat{b})\hat{\sigma}^2_{T+S}$$

TARCH

Ο αριθμός των πιθανών μορφών που μπορεί να πάρει η διακύμανση ποικίλουν. Ένα επίσης χρήσιμο υπόδειγμα που έχει προταθεί και λαμβάνει υπόψη του τη μοντελοποίηση της διακύμανσης, είναι το υπόδειγμα TARCH ή Threshold GARCH, το οποίο προτάθηκε από τον Jakoian (1994) και το οποίο παίρνει την κάτωθι μορφή:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-i} + \gamma_1 \varepsilon^2_{t-1} d_{t-1} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^2_{t-j}$$

όπου $d_t = 1$, αν $\varepsilon_t < 0$, αλλιώς $d_t = 0$ και συνεπώς επιτρέπει η μεταβλητότητα που προκύπτει εξαιτίας κάποιας είδησης, να λαμβάνει διαφορετικούς συντελεστές ανάλογα με το αν η είδηση είναι καλή ή κακή (Angelidis et al., 2003).

GARCH-*in-mean*

Το υπόδειγμα GARCH-*in-mean*, το οποίο προτάθηκε από τους Engle, Lilien and Robins (1987), αποτελείται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_t + \gamma_2 g(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-1} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^2_{t-1}$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

όπου το y_t είναι η απόδοση ενός περουσιακού στοιχείου. Μέσω του εν λόγω υποδείγματος, δίνεται σημασία στο μέσο και τη διακύμανση της χρονοσειράς ταυτόχρονα. Η διαδικασία που χαρακτηρίζει την υπό συνθήκη διακύμανση είναι μια διαδικασία GARCH(1,1). Το συγκεκριμένο υπόδειγμα, επιτρέπει η υπό συνθήκη διακύμανση να είναι καθοριστικός παράγοντας στη μεταβολή του υπό συνθήκη μέσου της διαδικασίας. Συνεπώς, επιτρέπει την ανάλυση της πιθανότητας ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μέσου της διαδικασίας.

Επιπλέον, η σχέση μεταξύ του μέσου και της διακύμανσης της απόδοσης του εν λόγω περουσιακού στοιχείου, παραμένει θετική αλλά όχι και σταθερή στο χρόνο. Έτσι, όταν $y_t \equiv (r_t - r_f)$, όπου $r_t - r_f$ είναι το ασφάλιστρο κινδύνου του διακρατούντος περουσιακού στοιχείου, τότε το υπόδειγμα GARCH-M αναπαριστά έναν απλοϊκό τρόπο μοντελοποίησης της σχέσης μεταξύ ασφαλίστρου κινδύνου και υπό συνθήκη διακύμανσης, τέτοιον ώστε να ισχύουν οι σχέσεις που περιγράφηκαν παραπάνω (Rossi, 2004).

Υποδείγματα με Εμμονή στη Μεταβλητότητα

IGARCH

Ένα υπόδειγμα GARCH(m,s) το οποίο προτάθηκε από τους Engle και Bollerslev (1986) χαρακτηρίζεται από τις εξής συνθήκες:

$$E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$$

$$\sigma_t^2 \equiv E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^2_{t-j}$$

όπου $a_0 \geq 0$, $a_i \geq 0$ και $b_j \geq 0$ για όλα τα i και j. Επίσης, το πολυώνυμο

$$1 - a(x) - b(x) = 0$$

έχει $d > 0$ μοναδιαίες ρίζες (*unit root(s)*) και η ποσότητα $\max\{m, s\} - d$ $root(s)$ που βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου, λογίζεται ως:

- Ολοκληρωμένη στη διακύμανση τάξης d, αν $a_0 = 0$
- Ολοκληρωμένη στη διακύμανση τάξης d, με παρουσία τάσης, αν $a_0 > 0$

Τα ολοκληρωμένα GARCH(m,s) υποδείγματα, με ή χωρίς τάση, αποτελούν μια κατηγορία υποδειγμάτων μιας ευρύτερης οικογένειας υποδειγμάτων που παρουσιάζουν εμμονή στη διακύμανση, για την οποία η τωρινή πληροφορία που λαμβάνεται, παραμένει σημαντική για τις προβλέψεις των υπό συνθήκη διακυμάνσεων, για όλους τους χρονικούς ορίζοντες (Rossi, 2004).

Υποδείγματα Ασυμμετρίας

A-GARCH

Στο υπόδειγμα Asymmetric GARCH ή A-GARCH, προστίθεται μια ακόμη παράμετρος ώστε να ενσωματτώνεται ένας μηχανισμός, ο οποίος θα συλλαμβάνει την ασυμμετρία και κατ' επέκταση θα αποτυπώνει τη ασύμμετρη μεταβλητότητα. Το εν λόγω υπόδειγμα, προτάθηκε από τον Engle (1990) και παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_i(\varepsilon_{t-1} - \lambda)^2 + b_j \sigma^2_{t-1}$$

όπου η επιπλέον παράμετρος λ, αποτυπώνει το φαινόμενο της ασυμμετρίας. Επίσης, για το λ δεν υπάρχει κανένας περιορισμός. Ωστόσο αν το $\lambda > 0$, τότε η ακόλουθη παράσταση $(\varepsilon_{t-1} - \lambda)^2$ θα είναι μεγαλύτερη όταν μια αναταραχή στην αγορά είναι αρνητική παρά όταν είναι θετική. Το αντίθετο θα συμβαίνει, αν $\lambda < 0$. Εκτιμώντας ένα υπόδειγμα της παραπάνω μορφής σε αποδόσεις μετοχών (*equities*) παράγεται μια θετική τιμή για το λ, ενώ μια αρνητική τιμή του λ είναι περισσότερο πιθανή όταν πρόκειται για αποδόσεις εμπορευμάτων (*commodities*) (Alexander, 2008).

EGARCH

Για να αποτυπωθεί το φαινόμενο της ασυμμετρίας που μόλις προαναφέρθηκε, έχουν προταθεί μια σειρά υποδειγμάτων τα οποία ονομάζονται ασύμμετρα ARCH υποδείγματα (asymmetric ARCH models). Το πιο δημοφιλές υπόδειγμα αυτής της κατηγορίας, είναι το υπόδειγμα EGARCH (Exponential GARCH) το οποίο προτάθηκε από τον Nelson (1991) και το οποίο παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^{m}\left(a_i \left|\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right| + \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{j=1}^{s}(b_j \ln(\sigma^2_{t-j}))$$

Σε αντίθεση με το υπόδειγμα GARCH, δεν επιβάλεται κανένας περιορισμός στην εκτίμηση του υποδείγματος, καθώς ο λογαριθμικός μετασχηματισμός διασφαλίζει τη μη αρνητικότητα των προβλέψεων της διακύμανσης. Επιπλέον, οι παράμετροι γ_i επιτρέπουν ώστε να υπάρχει ασυμμετρία. Κατά συνέπεια, αν $\gamma_i = 0$ τότε μια καλή είδηση (δηλαδή όταν ο διαταρακτικός όρος είναι θετικός), ισχύει δηλαδή $\varepsilon_t > 0$, έχει την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα όπως όταν μια κακή είδηση λαμβάνει χώρα, δηλαδή όταν $\varepsilon_t < 0$ (Angelidis et al., 2003).

GJR-GARCH

Μια εναλλακτική μορφή του υποδείγματος ασυμμετρίας που προτάθηκε από τον Engle (1990), αποτελεί το υπόδειγμα GJR-GARCH των Glosten et al. (1993). Στο εν λόγω υπόδειγμα συναντάται επίσης η επιπλέον παράμετρος της ασυμμετρίας, ωστόσο αυτή τη φορά, η ασυμμετρία συλλαμβάνει τη μεταβλητότητα που προκύπτει μόνο από τις αρνητικές ειδήσεις στην αγορά. Η τελική μορφή του υποδείγματος παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_i \varepsilon^2_{t-1} + \lambda \mathrm{I}_{\{\varepsilon_{t-1}<0\}} \varepsilon^2_{t-1} + b_j \sigma^2_{t-1}$$

όπου ο δείκτης $\mathrm{I}_{\{\varepsilon_{t-1}<0\}} = 1$ αν $\varepsilon_t < 0$, αλλιώς είναι 0.

Το εν λόγω υπόδειγμα, αποτελεί ένα μετασχηματισμό του A-GARCH το οποίο αναφέρθηκε προηγούμενα. Στην πράξη, δεν υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στα δύο υποδείγματα, και παρά το ότι και τα δύο είναι εξίσου κατάλληλα, για το λόγο αυτό δεν κρίνεται απαραίτητο να εκτιμώνται ταυτόχρονα. Ωστόσο, προτιμάται η χρήση του υποδείγματος A-GARCH, διότι η εκτίμηση του είναι γενικά ευκολότερη (Alexander, 2008).

Υποδείγματα με Μακρά Μνήμη

APARCH

Το υπόδειγμα Asymmetric power ARCH (APARCH), προτάθηκε από τους Ding, Engle και Granger (1993) και περιλαμβάνει 7 υποδείγματα της οικογένειας ARCH ως ειδικές περιπτώσεις του (ARCH, GARCH, AGARCH, GJR-GARCH, TARCH, NARCH και logARCH). Η μορφή που παίρνει το εν λόγω υπόδειγμα, παρουσιάζεται ακολούθως:

$$\sigma_t^{\delta} = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i} \right)^{\delta} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^{\delta}_{t-j}$$

όπου $a_0 > 0$, $\delta \geq 0$, $b_j \geq 0$, $j = 1,...,p$, $a_i \geq 0$, $-1 < \gamma_i < 1$, $i = 1,...,q$. Μέσω του εν λόγω υποδείγματος, επιβάλλεται ένας δυναμικός μετασχηματισμός τόσο της υπό συνθήκης τυπικής απόκλισης όσο και των ασύμμετρων απόλυτων καταλοίπων στα πρότυπα των μετασχηματισμών που έχουν προταθεί από τους Box-Cox, όπως τονίζουν οι Degiannakis and Xekalaki (2004). Αυτή η ασύμμετρη αντίδραση της μεταβλητότητας στις θετικές και αρνητικές αναταραχές που συμβαίνουν στην αγορά είναι γνωστή και ως φαινόμενο της μόχλευσης (*leverage effect*).

5.4 Εμπειρική Ανάλυση

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι ο υπολογισμός του κινδύνου μέσω της μεθόδου αποτίμησης κινδύνου (Value at Risk) με τη χρήση γενικευμένων αυτοπαλίνδρομων υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας υποδειγμάτων. Η παρούσα μελέτη θα διεξαχθεί σε 6 ξεχωριστές χρονοσειρές που αφορούν ημερήσιες τιμές κλεισίματος βασικών Ευρωπαϊκών χρηματιστηριακών δεικτών έξι Ευρωπαικών χωρών. Οι χώρες αυτές είναι η Γερμανία, η Γαλλία, η Ισπανία, η Ολλανδία, η Σουηδία και η Ιρλανδία. Μέσω της εν λόγω εφαρμογής, θα μελετηθεί ο κίνδυνος στις προαναφερθείσες χώρες όπως αυτός αποτυπώνεται στους χρηματιστηριακούς δείκτες κάθε χώρας ξεχωριστά. Επιπλέον, θα γίνει προσπάθεια να διερευνηθεί ο συνολικός κίνδυνος που αντιμετωπίζει μια χώρα με βάση τη μεταβλητότητα που παρατηρείται στο βασικό χρηματιστηριακό δείκτη της.

Η απόδοση της τιμής ενός δείκτη υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

όπου P_t, είναι η τιμή του δείκτη στο χρόνο t.

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του δείκτη μεταξύ δύο χρονικών περιόδων.

Η λογαριθμική απόδοση της τιμής ενός δείκτη δίνεται από την παρακάτω σχέση ως ακολούθως:

$$x_t = \log(R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

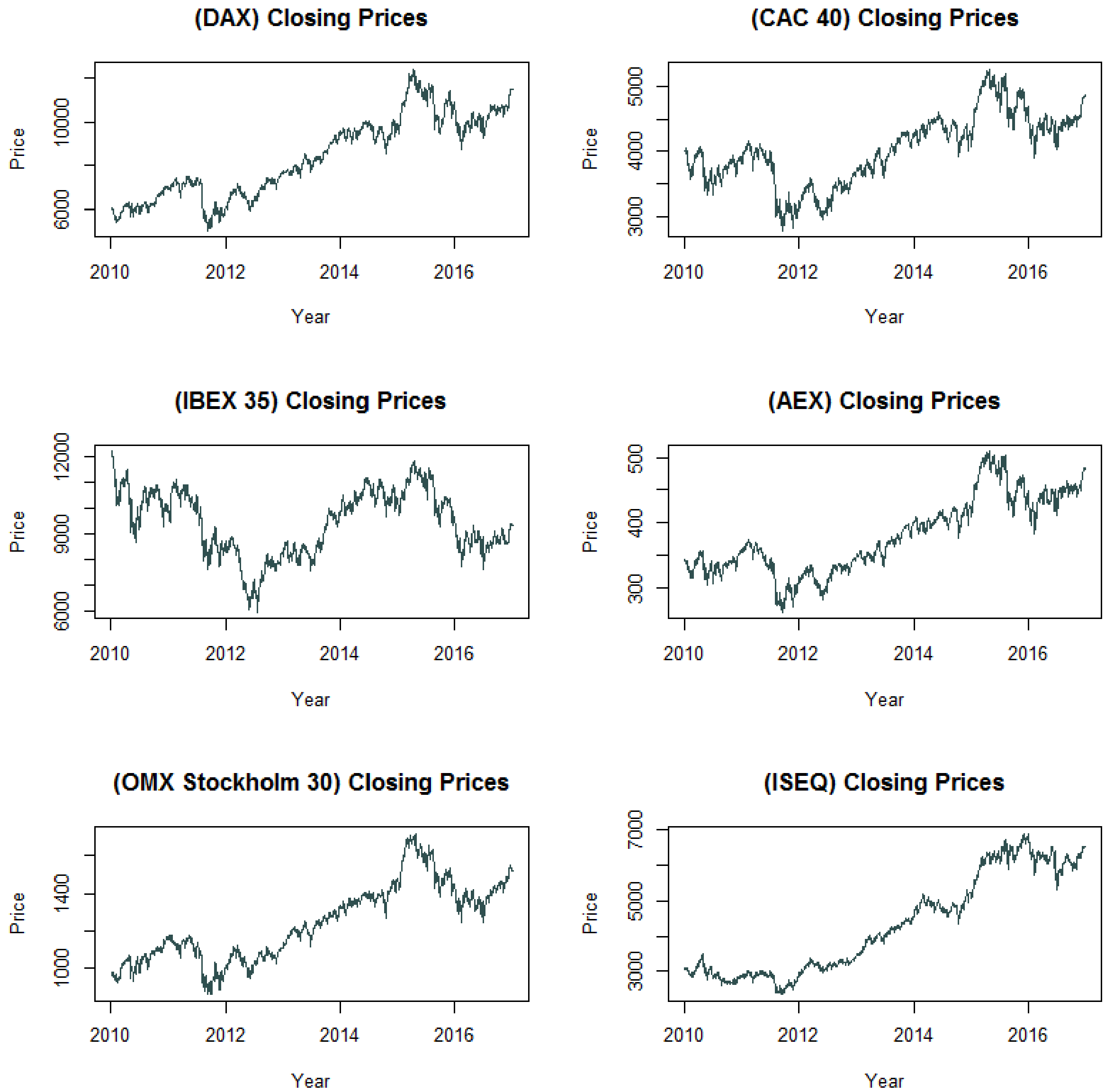
όπου x_t, είναι μια προσεγγιστική μεταβλητή της R_t.

Για τις ανάγκες της παρούσας μελέτης, επισημαίνεται ότι η ανάλυση θα διεξαχθεί χρησιμοποιώντας χρονοσειρές που αφορούν την εξέλιξη της λογαριθμικής απόδοσης του κάθε δείκτη στο χρόνο και όχι της τιμής του, καθώς με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η επίλυση προβλημάτων μη στασιμότητας, μη κανονικότητας, ετεροσκεδαστικότητας αλλά και αυτοσυσχέτισης και έτσι διευκολύνεται περαιτέρω η μελέτη της χρονοσειράς. Επιπλέον, μέσω της χρήσης χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι αριθμοί απαλλαγμένοι από μονάδες μέτρησης.

5.4.1 Παρουσίαση Δεδομένων

Για τον σκοπό της μελέτης, χρησιμοποιήθηκαν δείγματα ημερήσιων τιμών κλεισίματος βασικών δεικτών Ευρωπαϊκών χρηματιστηρίων από τον Ιανουάριο του 2010 έως το Δεκέμβριο του 2016. Κατόπιν, με τη χρήση των τιμών κλεισίματος, υπολογίστηκαν οι αντίστοιχες λογαριθμικές αποδόσεις των δεικτών. Οι υπό μελέτη χώρες που επιλέχθηκαν, αποτελούν κράτη - μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης και κριτήριο επιλογής τους αποτέλεσε το μέγεθος των οικονομιών τους.

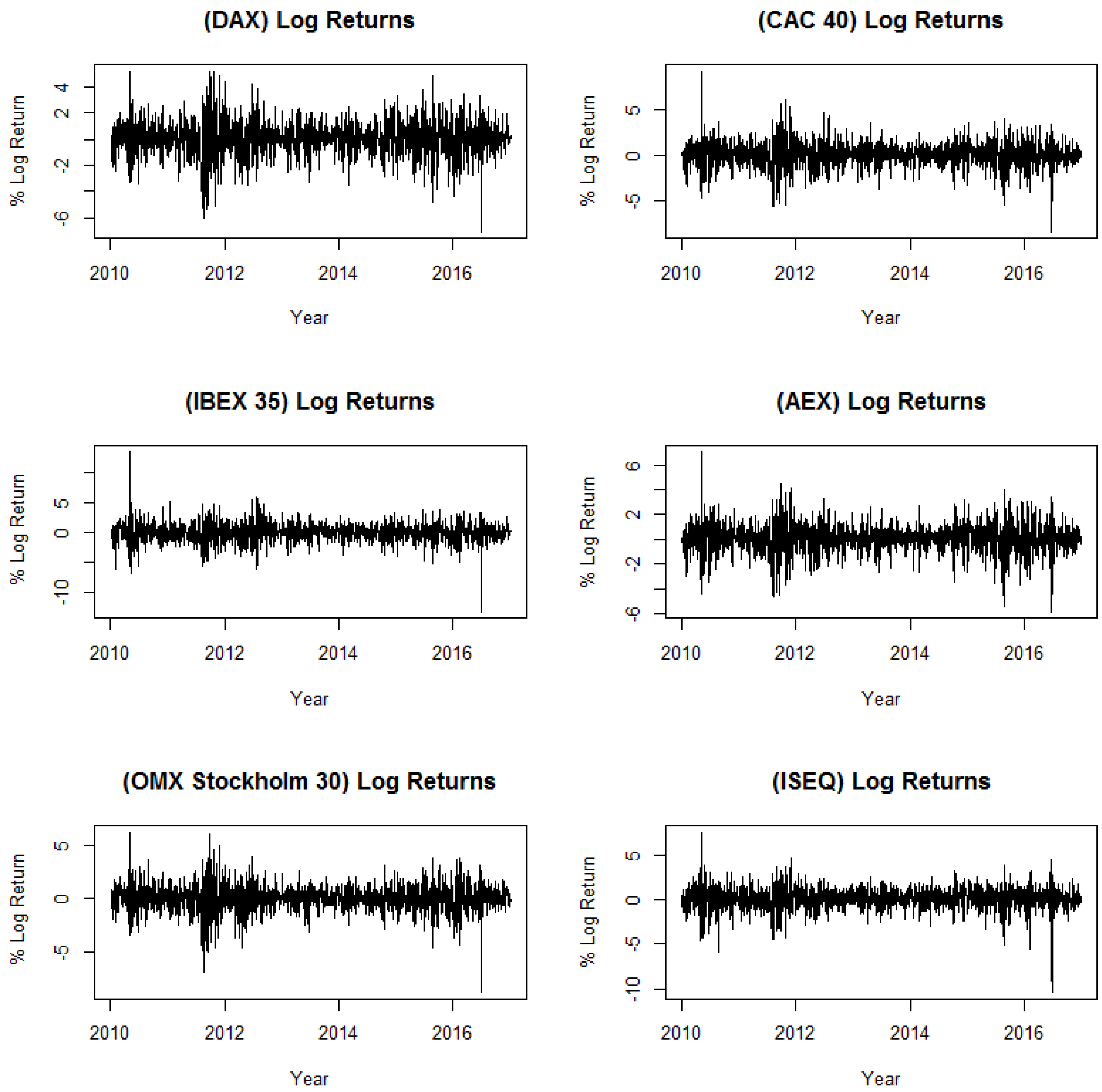
Στο Διάγραμμα 5.1 απεικονίζεται η εξέλιξη των ημερήσιων τιμών κλεισίματος βασικών χρηματιστηριακών δεικτών έξι χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης από το 2010 έως το 2016. Παρουσιάζονται με τη σειρά οι δείκτες της Γερμανίας, της Γαλλίας, της Ισπανίας, της Ολλανδίας, της Σουηδίας και της Ιρλανδίας.



Διάγραμμα 5.1

Διαγράμματα των ημερήσιων τιμών κλεισίματος

Αυτό που προκύπτει από την απεικόνιση των τιμών κλεισίματος των εν λόγω δεικτών είναι η απουσία σταθερού μέσου όρου, το οποίο αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση προκειμένου να εφαρμοστούν τα υποδείγματα χρονοσειρών που έχουν αναφερθεί. Για το σκοπό αυτό και για να ξεπεραστεί το πρόβλημα της μη στασιμότητας, όπως έχει ήδη τονιστεί, θα γίνει χρήση των λογαριθμικών αποδόσεων των δεικτών.



Διάγραμμα 5.2

Διαγράμματα χρονοσειρών λογαριθμικών αποδόσεων

Στο Διάγραμμα 5.2 απεικονίζονται οι λογαριθμικές αποδόσεις των έξι υπό μελέτη βασικών χρηματιστηριακών δεικτών από το 2010 έως το 2016. Αυτό που εξάγεται από μια πρώτη παρατήρηση των εν λόγω διαγραμμάτων είναι η διόρθωση της μη στασιμότητας των χρονοσειρών των τιμών κλεισίματος των δεικτών αφού ο μέσος τους τώρα είναι σταθερός και βρίσκεται γύρω από την περιοχή του μηδενός. Επιπρόσθετα, αξίζει να αναφερθεί η έντονη μεταβλητότητα - αστάθεια που παρατηρείται προς τα τέλη του 2011 στην πλειονότητα των δεικτών, γεγονός το οποίο ενδεχομένως να οφείλεται στην έντονη αβεβαιότητα που επικρατούσε εκείνη την περίοδο, λόγω της κρίσης χρέους σε ορισμένες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

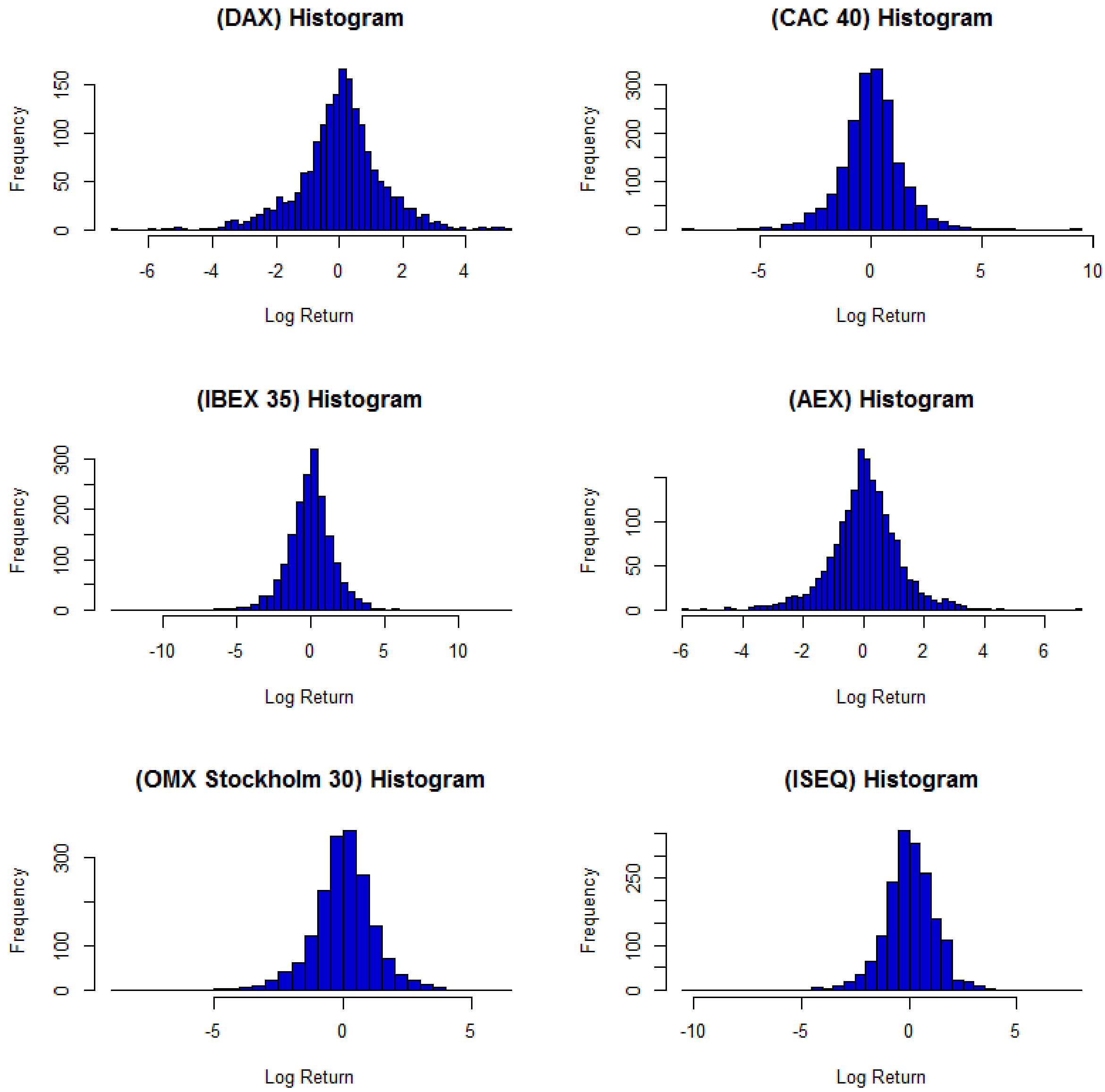
Πίνακας 5.1

Περιγραφικά Στατιστικά στοιχεία των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων

Descriptive Statistics	DAX	CAC 40	IBEX 35	AEX	OMX Stockholm 30	ISEQ
Observations	1786	1793	1792	1793	1780	1784
Min	-0.07673	-0.083844	-0.131852	-0.058731	-0.088003	-0.104164
Max	0.052104	0.092208	0.134836	-0.070722	0.062351	0.075701
Quartile 1	-0.006072	-0.006786	-0.008342	-0.005651	-0.005898	-0.005939
Quartile 3	0.006072	0.007423	0.008118	0.006561	0.006832	0.007569
Mean	0.000359	0.000107	-0.000146	0.000191	0.000255	0.000417
Median	0.000885	0.000421	0.0000515	0.000448	0.00047	0.000424
Variance	0.00017	0.000184	0.000242	0.000133	0.000153	0.000152
Stdev	0.013023	0.01356	0.01556	0.01152	0.012388	0.012327
Skewness	-0.267818	-0.154893	-0.140709	-0.174503	-0.355048	-0.681318
Kurtosis	2.26359	3.473758	6.872177	2.556072	3.803229	5.830271

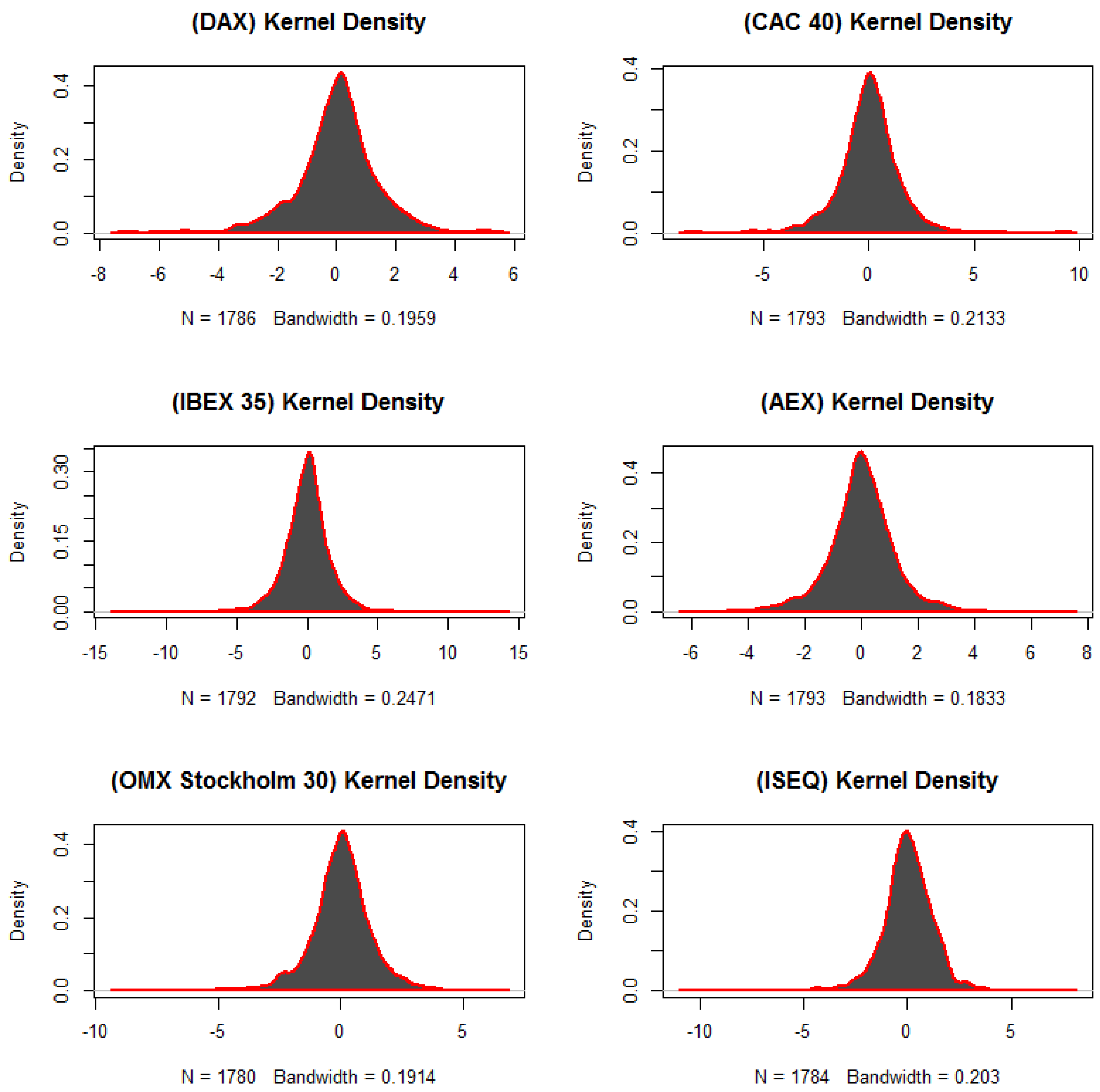
Στον Πίνακα 5.1 παρουσιάζονται κάποια σημαντικά περιγραφικά στατιστικά στοιχεία των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων που αναφέρονται στους υπό μελέτη δείκτες, δίνοντας μια πρώτη εικόνα σχετικά με τα χαρακτηριστικά των κατανομών που ακολουθούν οι αποδόσεις. Μια σημαντική επισήμανση που μπορεί να γίνει με βάση τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα είναι αναφορικά με το μέσο όρο των χρονοσειρών, ο οποίος φαίνεται να κυμαίνεται γύρω από την περιοχή του μηδενός. Επίσης, παρατηρείται αριστερή ασυμμετρία και έντονη κύρτωση σε όλους τους υπό εξέταση δείκτες.

Στο Διάγραμμα 5.3 απεικονίζονται τα ιστογράμματα των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων των δεικτών, προκειμένου να δοθεί μια πρώτη εικόνα τόσο για την κατανομή που αυτές ακολουθούν, όσο και για την ανίχνευση φαινομένων ασυμμετρίας και κύρτωσης που ενδεχομένως να παρουσιάζουν. Μελετώντας το Διάγραμμα 5.3, προκύπτει ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις δεν προσεγγίζουν την κανονική κατανομή. Επίσης, τόσο η αρνητική ασυμμετρία όσο και η έντονη κυρτότητα που έδωσαν τα αποτελέσματα των περιγραφικών στατιστικών στοιχείων δεν είναι εμφανής στην πλειονότητα των ιστογραμμάτων και είναι σχετικά δύσκολο κάποιος να αποφανθεί για αυτό αποκλειστικά και μόνο από την εικόνα τους.



Διάγραμμα 5.3

Ιστογράμματα των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων

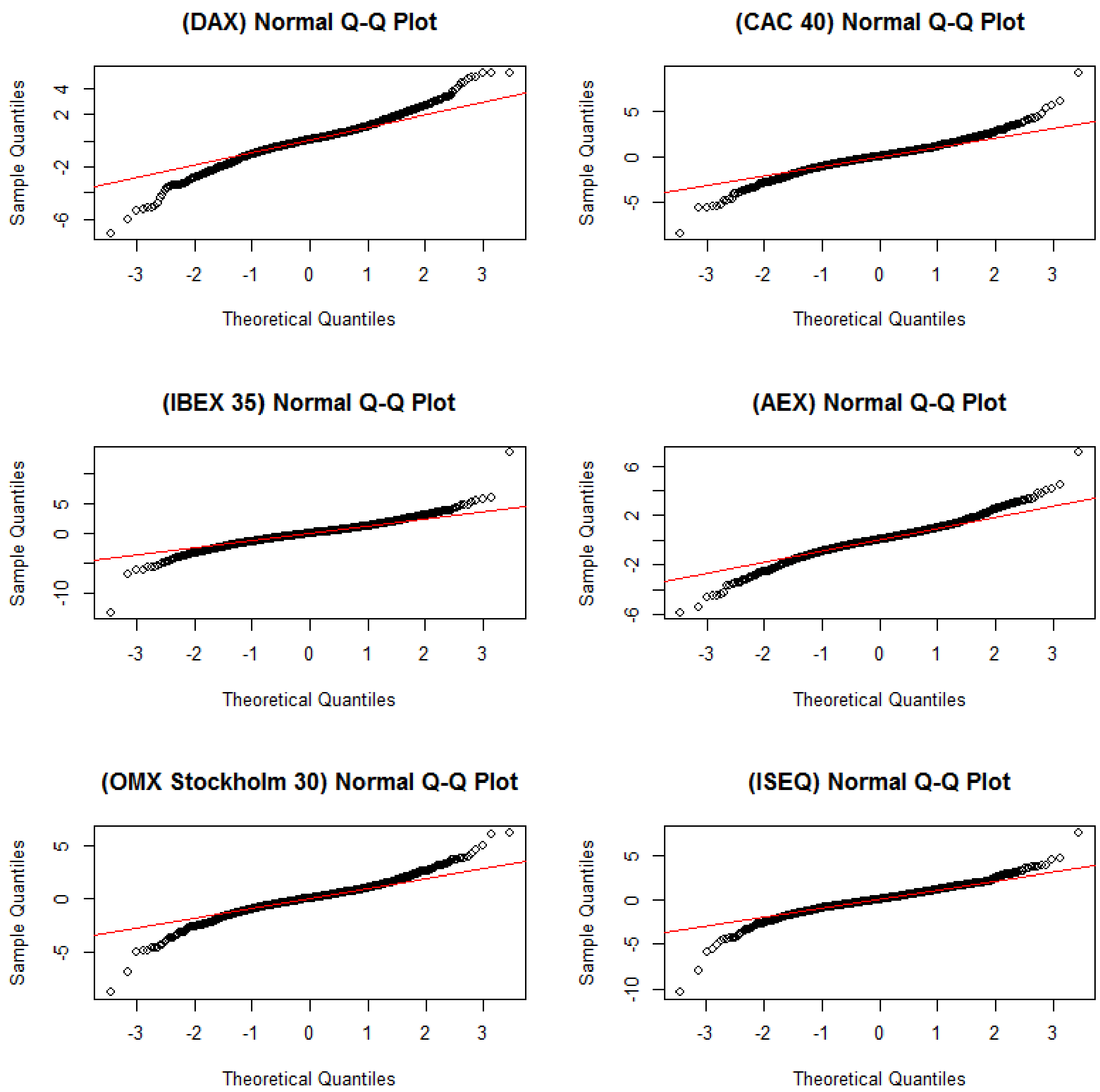


Διάγραμμα 5.4

Διαγράμματα πυκνότητας με πυρήνες (Kernel density)

των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων

Από το Διάγραμμα 5.4 φαίνεται ότι οι κατανομές των λογαριθμικών αποδόσεων των δεικτών είναι λεπτόκυρτες κατανομές οι οποίες εμφανίζουν παχιές ουρές. Μέσω της αναπαράστασης των κατανομών των σειρών με εκτιμήσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που βασίζονται στις μεθόδους (*Kernel*) καθίσταται ευκολότερη η εξαγωγή συμπερασμάτων αναφορικά με την κυρτότητα, την ασυμμετρία καθώς και τις ουρές των κατανομών. Αξίζει να σημειωθεί, πως τα εν λόγω φαινόμενα είναι συνήθη στην περίπτωση μελέτης χρονοσειρών που εφαρμόζονται στα χρηματοοικονομικά.



Διάγραμμα 5.5

QQ-plots των κατανομών των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων

Από το Διάγραμμα 5.5 συνεπάγεται ότι για το σύνολο των δεικτών, οι κατανομές των ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεών τους δε μπορούν να προσεγγιστούν από την κανονική κατανομή, καθώς στο σύνολό τους υπάρχουν παρατηρήσεις που αποκλίνουν σημαντικά από τη γραμμή της κανονικής κατανομής. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα επαληθεύθηκε και από ελέγχους κανονικότητας που πραγματοποιήθηκαν για το σκοπό αυτό στις ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις των δεικτών, όπου σε όλες τις περιπτώσεις η υπόθεση περί κανονικότητας απορρίφθηκε. Επιπλέον, στο σύνολο των γραφημάτων παρατηρείται η ύπαρξη είτε θετικών είτε αρνητικών ακραίων τιμών, γεγονός που επίσης ενισχύει την άποψη περί μη κανονικότητας των υπό μελέτη αποδόσεων.

5.4.2 Προσδιορισμός ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s) Υποδειγμάτων

Για να καταστεί εφικτός ο υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk) είναι αναγκαίος ο καθορισμός του καταλληλότερου υποδείγματος ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s) το οποίο να περιγράφει την υπό μελέτη χρονοσειρά των αποδόσεων. Μιας και η ανάλυση πραγματοποιείται με τη χρήση ημερήσιων λογαριθμικών αποδόσεων, αυτό που απαιτείται σε πρώτο στάδιο, είναι ο καθορισμός ενός ARMA(p,q) για το $\log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι με τη λογαριθμοποίηση που εφαρμόζεται επιλύεται άμεσα το πρόβλημα της μη στασιμότητας και ως εκ τούτου οι χρονοσειρές που μελετώνται καθίστανται πλέον στάσιμες.

Για να προσδιοριστεί το καταλληλότερο ARMA(p,q) υπόδειγμα εκτιμήθηκαν όλα τα υποδείγματα για $p+q \leq 3$ εφαρμόζοντας τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και η επιλογή του υποδείγματος βασίστηκε στην ελαχιστοποίηση της τιμής του κριτηρίου SBC. Εν συνεχεία, έχοντας καθορίσει το καταλληλότερο ARMA(p,q) υπόδειγμα, επόμενο βήμα της ανάλυσης αποτέλεσε ο προσδιορισμός του καταλληλότερου GARCH(m,s) υποδείγματος, όπου εκτιμήθηκαν όλα τα υποδείγματα για $m+s \leq 2$ προκειμένου να αποτυπωθεί η υπό συνθήκη διακύμανση των σφαλμάτων της χρονοσειράς. Με τον ίδιο τρόπο όπως πραγματοποιήθηκε και προηγούμενα, η επιλογή του καταλληλότερου υποδείγματος έγινε μέσω της ελαχιστοποίησης της τιμής του κριτηρίου SBC. Τέλος, εφόσον προέκυψε το καταλληλότερο ARMA(p,q) - GARCH(m,s) υπόδειγμα, επόμενο στάδιο της μελέτης αποτέλεσε η πρόβλεψη του μέσου και της υπό συνθήκη διακύμανσης, μέσω των υποδειγμάτων που εκτιμήθηκαν.

Πίνακας 5.2

Εκτιμήσεις παραμέτρων

των ARMA υποδειγμάτων

INDEX	ARMA Model	phi 1 estimate	phi 2 estimate	theta 1 estimate
DAX	ARMA (1,0)	0.0105	-	-
CAC 40	ARMA (0,1)	-	-	-0.0178
IBEX 35	ARMA (2,1)	-0.7402	-0.025	0.79
AEX	ARMA (1,0)	0.0298	-	-
OMX Stockholm 30	ARMA (1,0)	-0.0735	-	-
ISEQ	ARMA (2,1)	-0.6522	-0.1143	0.655

Πίνακας 5.3

Εκτιμήσεις και τυπικά σφάλματα παραμέτρων

των GARCH υποδειγμάτων

INDEX	GARCH Model	alpha 1 estimate	alpha 1 std.error	beta 1 estimate	beta 1 std.error
DAX	GARCH (1,1)	0.091942	0.01457	0.887983	0.017392
CAC 40	GARCH (1,1)	0.113141	0.018576	0.857262	0.022941
IBEX 35	GARCH (1,1)	0.106926	0.015737	0.867183	0.018747
AEX	GARCH (1,1)	0.11462	0.018092	0.857643	0.022083
OMX Stockholm 30	GARCH (1,1)	0.099877	0.014677	0.879137	0.017523
ISEQ	GARCH (1,1)	0.139592	0.021136	0.800874	0.03134

Στους Πίνακες 5.2 και 5.3 αντίστοιχα παρουσιάζονται τα καταλληλότερα ARMA(p,q) - GARCH(m,s) υποδείγματα και παράλληλα δίνονται τόσο οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των ARMA υποδειγμάτων όσο και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των GARCH υποδειγμάτων και τα τυπικά σφάλματα αυτών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που ελήφθησαν και παρατίθενται στον Πίνακα 5.2, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των ARMA υποδειγμάτων είναι πολύ κοντά στο μηδέν, κάτι το οποίο συνεπάγεται ότι η συνεισφορά του μέσου στην εκτίμηση του VaR δεν είναι σημαντική. Επιπρόσθετα, αναφορικά με τα υποδείγματα GARCH, σε όλες τις περιπτώσεις, όπως εύκολα διακρίνεται, η τιμή του αθροίσματος των παραμέτρων είναι $a+b<1$, το οποίο αποτελεί αναγκαία συνθήκη προκειμένου να διασφαλίζεται ότι η αδέσμευτη (*unconditional*) διακύμανση είναι πεπερασμένη και θετική. Τονίζεται, ότι το εν λόγω άθροισμα είναι αυτό που καθορίζει το ρυθμό με τον οποίο η υπό συνθήκη μεταβλητότητα συγκλίνει στο μακροχρόνιο μέσο επίπεδο. Επισημαίνεται δε, πως το συγκεκριμένο άθροισμα μαζί με το σταθερό όρο της υπό συνθήκη μεταβλητότητας της χρονοσειράς καθορίζουν το μέγεθος της μακροχρόνιας μεταβλητότητας. Έτσι, μια σχετικά αυξημένη τιμή της ποσότητας $a_0/(1-a-b)$, μαρτυρά μια εξίσου υψηλή τιμή για τη μακροχρόνια μεταβλητότητα.

Επίσης, από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα αναφορικά με την υπό συνθήκη μεταβλητότητα. Πιο συγκεκριμένα, για τους δείκτες CAC 40, IBEX 35, AEX και ISEQ, η παράμετρος a η οποία μετρά την αντίδραση της υπό συνθήκη μεταβλητότητας στις αιφνίδιες μεταβολές της αγοράς παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 0.1, πράγμα το οποίο φανερώνει τη μεγάλη ευαισθησία της υπό συνθήκη μεταβλητότητας στις αιφνίδιες μεταβολές της αγοράς όταν αυτές συμβαίνουν. Μικρότερη ευαισθησία εντοπίζεται για την υπό συνθήκη μεταβλητότητα των δεικτών DAX και OMX Stockholm 30 αντίστοιχα.

Αναφορικά με την παράμετρο b, η οποία είναι αυτή που μετρά την εμμονή στην υπό συνθήκη μεταβλητότητα ανεξάρτητα με το τι συμβαίνει στην αγορά προκύπτουν τα εξής. Για το σύνολο των δεικτών, η τιμή της παραμέτρου b δεν ξεπερνά την τιμή 0.9, γεγονός το οποίο φανερώνει ότι η μεταβλητότητα δε διατηρείται για μεγάλο χρονικό διάστημα έπειτα από μια έντονη αστάθεια που εμφανίζεται στην αγορά.

5.4.3 Υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο

Ο υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk) θα πραγματοποιηθεί με τη χρήση υποδειγμάτων ARMA(p,q) μέσω των οποίων θα προσδιοριστεί ο μέσος όρος της χρονοσειράς και υποδειγμάτων GARCH(m,s) μέσω των οποίων θα προσδιοριστεί η υπό συνθήκη διακύμανση των σφαλμάτων. Για την τελική μέτρηση του VaR θα υπολογιστεί το κάτω όριο ενός διαστήματος εμπιστοσύνης όπου η πρόβλεψη του μέσου της επόμενης περιόδου θα προέλθει μέσω μιας διαδικασίας ARMA ενώ αντίστοιχα η πρόβλεψη της υπό συνθήκη διακύμανσης της επόμενης περιόδου θα προέλθει διαμέσου μιας διαδικασίας GARCH. Έστω η σειρά η οποία μελετάται ορίζεται ως x_t. Τότε θα ισχύουν τα εξής:

$$x_t = \delta + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i x_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

όπου

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^2_{t-j}$$

Η πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο θα δίνεται ως ακολούθως:

$$\hat{x}_t(1) = \delta + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i x_{t+1-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+1-j}$$

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t+1-i} + \sum_{j=1}^{s} b_j \sigma^2_{t+1-j}$$

Είναι γνωστό ότι η z_t αποτελεί τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή ίση με το μηδέν και διακύμανση ίση με τη μονάδα. Κατά συνέπεια, η μεταβλητή x_{t+1} θα κατανέμεται και αυτή κανονικά με μέσο $\hat{x}_t(1)$ και διακύμανση $\hat{\sigma}_t^2(1)$. Έτσι το VaR της επόμενης περιόδου θα προκύπτει μέσα από την ακόλουθη σχέση:

$$VaR_{t+1} = \hat{x}_t(1) - F(a)\hat{\sigma}_t(1)$$

όπου a το επίπεδο σημαντικότητας το οποίο έχει αρχικά καθοριστεί και $F(a)$ μια ποσότητα η οποία εξαρτάται από την κατανομή και από το εκάστοτε επίπεδο σημαντικότητας που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του VaR. Η κριτική τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής που αντιστοιχεί σε $1-a$ επίπεδο εμπιστοσύνης (η οποία για 5% και 1% επίπεδο σημαντικότητας είναι 1.65 και 2.33 αντίστοιχα).

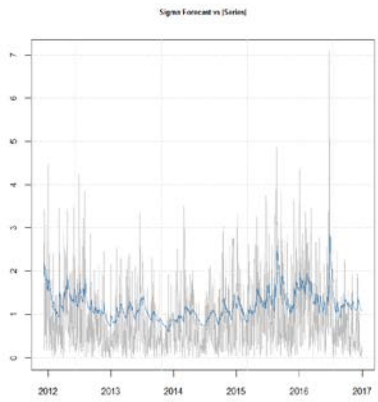
Πίνακας 5.4

Εκτίμηση του VaR των δεικτών σε επίπεδο 5% και 1%

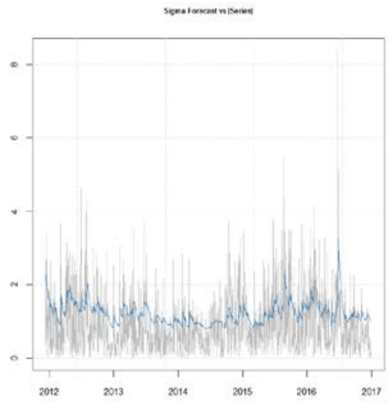
EUROPEAN COUNTRY	INDEX	5% VaR	1% VaR
GERMANY	DAX	-1.13%	-1.63%
FRANCE	CAC 40	-1.19%	-1.70%
SPAIN	IBEX 35	-1.57%	-2.22%
NETHERLANDS	AEX	-1%	-1.43%
SWEDEN	OMX Stockholm 30	-1.12%	-1.61%
IRELAND	ISEQ	-1.21%	-1.74%

Στον Πίνακα 5.4 δίνονται οι εκτιμήσεις του VaR για τους βασικούς χρηματιστηριακούς δείκτες κάθε χώρας σε επίπεδο 5% και 1% αντίστοιχα. Από τα παραπάνω στοιχεία προκύπτει ότι ο μεγαλύτερος κίνδυνος αποτυπώνεται στον Ισπανικό δείκτη IBEX 35 τόσο σε επίπεδο 5% όσο και σε 1%. Αντίθετα, στο σύνολο των δεικτών, ο μικρότερος κίνδυνος αντικατοπτρίζεται στον Ολλανδικό δείκτη AEX τόσο σε επίπεδο 5% όσο και σε 1%. Κατά συνέπεια, η χώρα στην οποία εντοπίζεται ο μεγαλύτερος κίνδυνος είναι η Ισπανία, ενώ η χώρα με τον μικρότερο κίνδυνο είναι η Ολλανδία. Στις υπόλοιπες χώρες εμφανίζονται μεικτές τάσεις χωρίς ιδιαίτερα σημαντικές διαφοροποιήσεις. Επιπρόσθετα, στο Διάγραμμα 5.6 παρουσιάζονται οι προβλέψεις της τυπικής απόκλισης σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% για κάθε δείκτη, παρέχοντας με τον τρόπο αυτό μια πρόγνωση της μεταβλητότητας που αναμένεται μελλοντικά (αρχές του έτους 2017) να αποτυπωθεί στους εν λόγω δείκτες.

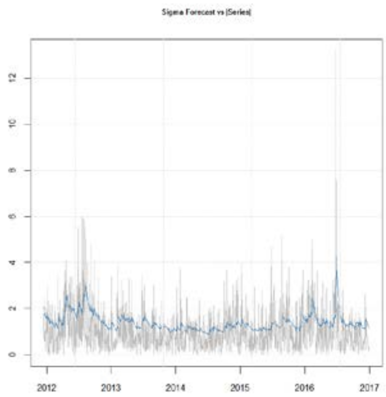
DAX



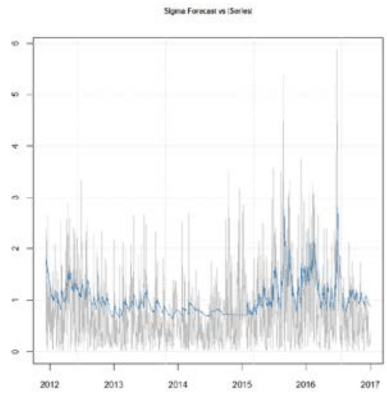
CAC 40



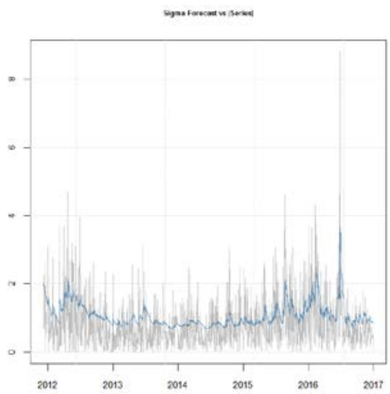
IBEX 35



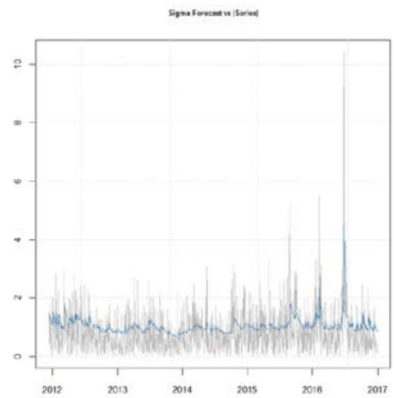
AEX



OMX Stockholm 30



ISEQ



Διάγραμμα 5.6

Προβλέψεις τυπικών αποκλίσεων σε επίπεδο 5%

5.4.4 Επανέλεγχος της Αξίας σε Κίνδυνο

Ο επανέλεγχος της Αξίας σε Κίνδυνο (*backtesting*) όπως έχει ήδη προαναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιείται για την επαλήθευση της εγκυρότητας ενός υποδείγματος VaR. Η εγκυρότητα ενός υποδείγματος VaR βασίζεται στο εάν οι πραγματικές απώλειες βρίσκονται κοντά στις αναμενόμενες απώλειες. Στην πραγματικότητα, ο συγκεκριμένος έλεγχος πραγματοποιεί τη σύγκριση των εκτιμώμενων απωλειών που δίνονται μέσω των υποδειγμάτων VaR και των πραγματικών απωλειών και αξιολογεί τη συνέπεια μεταξύ των συγκρινόμενων απωλειών και εν τέλει την αξιοπιστία του εν λόγω υποδείγματος.

Η διαδικασία του επανελέγχου επετεύχθει, διενεργώντας τον έλεγχο του Kupiec σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και 1% αντίστοιχα. Στον Πίνακα 5.5 δίνονται οι τιμές που ελήφθησαν από τον εν λόγω έλεγχο. Αυτό που παρατηρείται είναι ότι η μηδενική υπόθεση περί σωστών υπερβάσεων δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Αντίθετα, σε επίπεδο σημαντικότητας 1% η μηδενική υπόθεση περί σωστών υπερβάσεων απορρίπτεται και συνεπώς τα εν λόγω υποδείγματα δεν κρίνονται αξιόπιστα.

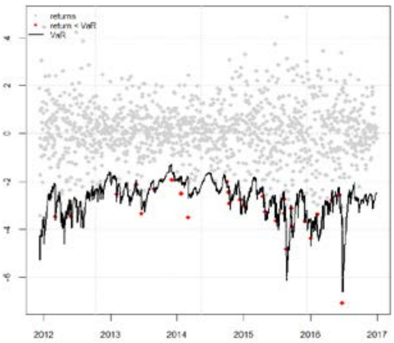
Πίνακας 5.5

Επανέλεγχος του VaR των δεικτών σε επίπεδο 5% και 1%

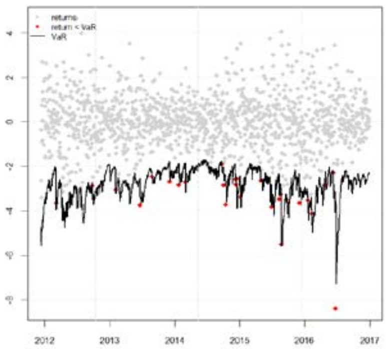
	Unconditional Coverage (Kupiec)				
	5% daily VaR				
INDEX	Backtest Length	Model	Actual %	Critical value = 3.841	p-value
DAX	1286	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	5.9%	Accept H0	0.145
CAC 40	1293	ARMA(0,1)-GARCH(1,1)	5.7%	Accept H0	0.243
IBEX 35	1292	ARMA(2,1)-GARCH(1,1)	5.4%	Accept H0	0.496
AEX	1293	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	5.5%	Accept H0	0.425
OMX Stockholm 30	1280	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	6%	Accept H0	0.106
ISEQ	1284	ARMA(2,1)-GARCH(1,1)	5.3%	Accept H0	0.63
	1% daily VaR				
INDEX	Backtest Length	Model	Actual %	Critical value = 6.635	p-value
DAX	1286	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	2.3%	Reject H0	0
CAC 40	1293	ARMA(0,1)-GARCH(1,1)	2.2%	Reject H0	0
IBEX 35	1292	ARMA(2,1)-GARCH(1,1)	1.9%	Reject H0	0.003
AEX	1293	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	2.3%	Reject H0	0
OMX Stockholm 30	1280	ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	2.2%	Reject H0	0
ISEQ	1284	ARMA(2,1)-GARCH(1,1)	1.9%	Reject H0	0.003

Στο Διάγραμμα 5.7 απεικονίζεται διαγραμματικά ο επανελέγχος του VaR που διεξήχθει με τη χρήση του ελέγχου του Kupiec για τους υπό μελέτη δείκτες στα δεδομένα των δειγμάτων που έχουν ληφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Από τα παρακάτω διαγράμματα επιβεβαιώνονται και γραφικά τα αποτελέσματα των επανελέγχων που διενεργήθηκαν.

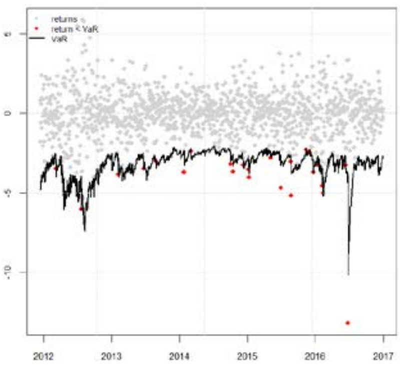
DAX



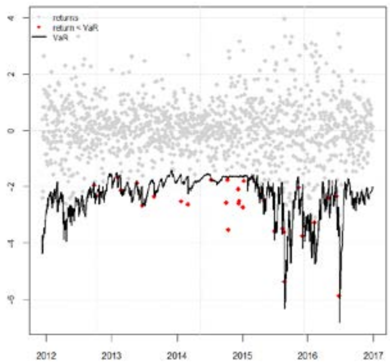
CAC 40



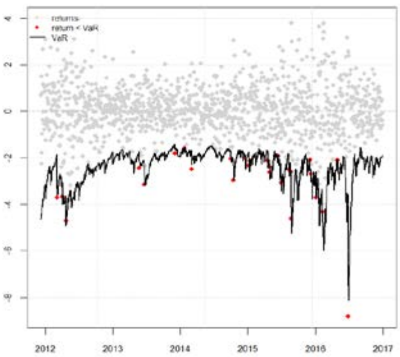
IBEX 35



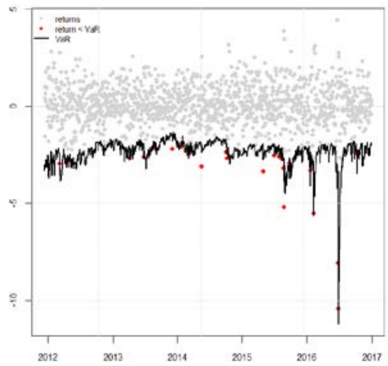
AEX



OMX Stockholm 30



ISEQ



Διάγραμμα 5.7

Ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις και υπερβάσεις VaR σε επίπεδο 5%

5.5 Ανακεφαλαίωση

Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν τα Γενικευμένα Αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας (GARCH) υποδείγματα, τα οποία αποτελούν γενίκευση των Αυτοπαλίνδρομων υπό συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας (ARCH) υποδειγμάτων. Επιπρόσθετα, έγιναν αναφορές σε διάφορα είδη Γενικευμένων υποδειγμάτων όπως υποδείγματα με εμμονή στη μεταβλητότητα, υποδείγματα ασυμμετρίας καθώς και υποδείγματα με μακρά μνήμη. Παράλληλα, προσδιορίστηκαν τα καταλληλότερα υποδείγματα ARIMA τα οποία σε συνδυασμό με τα υποδείγματα GARCH εφαρμόστηκαν σε λογαριθμικές αποδόσεις βασικών Ευρωπαϊκών χρηματιστηριακών δεικτών προκειμένου να εκτιμηθεί το VaR τους. Το κεφάλαιο αυτό, έκλεισε με τη διενέργεια επανελέγχου του VaR ώστε να επαληθευτεί η εγκυρότητα των εν λόγω VaR υποδειγμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Αγιακλόγλου, Ν. Χ. και Οικονόμου, Σ. Γ. (2004). *Μέθοδοι Προβλέψεων και Ανάλυσης Αποφάσεων*, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

Αγιακλόγλου, Ν. Χ. και Μπένος, Ε. Θ. (2007). *Εισαγωγή στην Οικονομετρική Ανάλυση*, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα.

Γκλεζάκος, Μ. (2007). *Θεωρία Επενδύσεων και Διοίκησης Χαρτοφυλακίου*, Σημειώσεις για επιμέρους θέματα ανάλυσης επενδύσεων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Γκλεζάκος, Μ. (2014). *Διαχείριση Χαρτοφυλακίου Επενδύσεων*, Συνοπτικές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Κιντής, Α. (2010). *Σύγχρονη Οικονομετρική Ανάλυση*, Εκδόσεις Gutenberg.

Παπαχρήστου, Α. Γ. (2009). *Ελληνική Κεφαλαιαγορά*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Johnston, J. and Dinardo, J. (2004). *Οικονομετρικές Μέθοδοι*, Μετάφραση Παπαϊωάννου Τ., 4η έκδοση, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

Wooldridge, J. (2006). *Εισαγωγή στην Οικονομετρία. Μια νέα προσέγγιση*, Μετάφραση Σοκοδήμος Α., 1η έκδοση, Εκδόσεις Παπαζήση.

Ξένη

Alexander, C. (2008). *Market Risk Analysis Volume II. Practical Financial Econometrics,* John Wiley & Sons.

Angelidis, T., Benos, A. and Degiannakis, S. (2003). *The use of GARCH Models in VaR Estimation, Statistical Methodology*, **1**, 105-128.

Bohdalová, M. (2007). *A comparison of Value-at-Risk methods for measurement of the financial risk*, *E-Leader*, Prague.

Bollerslev, T. (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.

Box, E. P. G and Jenkins, M. G. (1970). *Time Series Analysis forecasting and control*, Holden-Day, San Francisco.

Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance*, 2nd edition, Cambridge University Press.

Chingnun, Lee (2008). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH),* Chapter 26, Lecture Notes, Institute of Economics, National Sun Yat-sen University.

Da Silva, R. A. C., Da Silveira Barbedo, H. C., Araújo, S. G. and Das Neves, E. M. B. (2006), *Internal Models Validation in Brazil: Analysis of VaR Backtesting Methodologies*. *Revista Brasileira de Finanças* **4**, 1, 363-384, Brasil.

Damodaran, A. (2008). *Strategic Risk Taking: A Framework for risk Management*, Pearson Education Inc., New Jersey.

Degiannakis, S. and Xekalaki, E. (2004). *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models, Quality Technology & Quantitative Management*, **1**, 2, 271-324.

Drakos, K. (2010). *Risk Management*, Lecture Notes, Department of Accounting and Finance, Athens University of Economics and Business.

Enders, W. A. (1995). *Applied Econometric Time* Series, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Engle, F. R. (1982). *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflations*, *Econometrica*, **50**, 987-1008.

Hamilton, D. J. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.

Holton, A. G. (2003). *Value-at-Risk*, 1st edition, Academic Press.

Holton, A. G. (2004). *Defining Risk, Financial Analysts Journal*, **60**, 6.

Horcher, A. K. (2005). *Essentials of Financial risk Management*, John Wiley & Sons, New Jersey.

Hull, J. (2002). *Options, Futures and other Derivatives*, 5th edition, Prentice Hall, New Jersey.

International Monetary Fund (2009). *Export and Import Price Index Manual. Theory and Practice,* Washington DC.

Jing, Li. (2012). *Lecture Notes of Applied Time Series Analysis*, Department of Economics, Miami University.

Jorion, P. (2007). *Value at Risk. The new benchmark for managing financial risk,* 3nd edition, Mc Graw-Hill.

Parker, J. (2008). *Fundamental Concepts of Time-Series Econometrics*, Chapter 1, Lecture Notes, Economics Department, Reed College.

Pindyck, S. R. and Rubinfeld, L. D. (1998). *Econometric Models and Economic Forecasting*, 4th edition, Mc Graw-Hill.

Rossi, E. (2004). *Lecture Notes on GARCH Models*, University of Pavia.

Saunders, A. and Allen, L. (1999). *Credit Risk measurement. New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*, 2nd edition, JohnWiley & Sons, New York.

Shumway, H. R. and Stoffer, S. D. (2011). *Time Series Analysis and its Applications*, 3rd edition, Springer.

Tsay, R. (2010). Analysis of Financial Time Series, 3rd edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Tsay, R. (2013). An Introduction to Analysis of Financial Data with R, 1st edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Zivot, E. and Wang, J. (2006). *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*, 2nd edition, Washington.

Διαδικτυακοί Τόποι

www.athex.gr