2017

Αναλογιστική Διοικητική

Κινδύνου Επιστήμη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Π.Μ.Σ. «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

Μοντελοποίηση του Λειτουργικού Κινδύνου μέσω της Οικονομικής Αντασφάλισης από Δικαιώματα Προαίρεσης

ΜΑΡΑΓΚΟΥ ΕΛΕΝΗ

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς, Μάρτιος 2017

Επιβλέπων Καθηγητής

Σεβρόγλου Βασίλειος

2017

Actuarial

Risk

Management

Science

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTEMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MSc in «Actuarial Science and Risk Management"

Operational Risk Of Option Pricing

MARAGOU ELENI

Dissertation Thesis

Piraeus, March 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σεβρόγλου Βασίλειο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθειά του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας καθώς και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Μαχαιρά Νικόλαο Καθηγητή του Τμήματος και τον κ. Ψαρράκο Γεώργιο Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και την οικογένειά μου για τη ψυχολογική και οικονομική στήριξη που μου προσέφερε απλόχερα.

Στον Νίνο

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του λειτουργικού κινδύνου και η μοντελοποίησή του όπως αυτός προκύπτει στην αντιστάθμιση δικαιωμάτων προαίρεσης. Μέσα από διαφορετικές μελέτες και εφαρμογές θα γίνει σαφές ότι ο κίνδυνος αυτός αναπαριστά έναν σημαντικό παράγοντα στην αντιστάθμιση κινδύνων μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης, ο οποίος και θα παρουσιαστεί με τη βοήθεια κατάλληλου μοντέλου. Ιδιαίτερα, στην αρχή θα θεωρήσουμε έναν δείκτη έκθεσης για την αντιστάθμιση του λειτουργικού κινδύνου μέσω δικαιωμάτων για να μοντελοποιήσουμε την κατανομή που προκύπτει γι' αυτόν. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τα διάφορα μέτρα κινδύνου συμπεριλαμβανομένης της εξίσωσης *Value at Risk* (VaR). Ως συνέπεια των παραπάνω, θα καταλήξουμε σε ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά συναρτήσεις πιθανότητας για ημικανονικές κατανομές (*half-normal*). Επιπλέον, θα προσδιορίσουμε μια αναλυτική λύση για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης στα πλαίσια του λειτουργικού κινδύνου. Τέλος, θα εξάγουμε αριθμητικά παραδείγματα πάνω σε εμπειρικά δεδομένα δικαιωμάτων, δείχνοντας την αποτελεσματικότητα του μοντέλου και θα εκτιμήσουμε τη λειτουργικότητα τουVaR για την αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων.

ABSTRACT

Purpose of this work is the study of operational risk and the effort to model it through option hedging. Using various studies and examples, we will indicate that operational risk represents an essential factor in option hedging, which will be displayed using an appropriate model. Especially at the beginning, we will consider an exposure indicator for the operational risk of option hedging, and the resulting distribution for operational risk modeling. Moreover, we will prove analytical results for various risk measures including the equation of Value at Risk (VaR). Subsequently, we will be led to a new and very important result related to the quantile function of the half-normal distributions. In addition, we will define an analytical solution for option pricing under operational risk. Finally, we will derive analytical results based on empirical option data, so as to assess the effectiveness of the model but also to evaluate the value of VaR for option hedging.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Λίστα Γραφημάτων-Πινάκων-Εικόνων

Πίνακες

Εικόνες

Γραφήματα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σ΄ αυτήν την εργασία γίνεται αναφορά στη σημαντικότητα του λειτουργικού κινδύνου γενικά αλλά κυρίως στο πλαίσιο της αντιστάθμισής μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης. Με τη βοήθεια ενός θεωρητικού μοντέλου, προτείνεται μια μέθοδος μοντελοποίησης για την αντιστάθμιση, ένας δείκτης έκθεσης, η κατανομή για την αντιστάθμιση και αναλυτικές εκφράσεις για τα μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται πιο πολύ όπως η Value at Risk. Επίσης, αναφέρονται μέθοδοι για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων.

Τα γεγονότα της παγκόσμιας πιστωτικής κρίσης και παλαιότερες οικονομικές κρίσεις έχουν επιδείξει την αναγκαιότητα για επαρκή μέτρηση και διαχείριση κινδύνου [14],[22],[23]. Ο λειτουργικός κίνδυνος γίνεται σιγά σιγά όλο και πιο σημαντικός καθώς οι τράπεζες και οι ρυθμιστικές αρχές αναγνωρίζουν ότι η επαρκής διαχείριση κινδύνου πρέπει να ενσωματώσει και τον λειτουργικό κίνδυνο. Η Βασιλεία ΙΙ απαιτεί τη διαχείριση και του λειτουργικού κινδύνου στα πλαίσια ρύθμισης των συνολικών κινδύνων. Μέχρι στιγμής είχε δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στον πιστωτικό κίνδυνο. Τώρα οι κεφαλαιακές απαιτήσεις των ιδρυμάτων έχουν ταξινομηθεί σε κατηγορίες από οργανισμούς αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας όπως οι Standard and Poor's. Τόσο η Βασιλεία ΙΙ όσο και η ΙΙΙ εισάγουν έναν νέο κανονισμό δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στον πιστωτικό κίνδυνο και στον κίνδυνο αγοράς. Παρόλα αυτά υπάρχει ακόμα η αναγκαιότητα να διαχειριστούμε και να ρυθμίσουμε το λειτουργικό κίνδυνο. Επί του παρόντος, η Βασιλεία ΙΙΙ επικεντρώνεται στην προστασία έναντι των σφαλμάτων που προκύπτουν κατά τη διαχείριση κινδύνων. Κάποιοι ειδικοί θεωρούν ότι η παγκόσμια οικονομική κρίση και άλλες σημαντικές απώλειες στη βιομηχανία (η μακροπρόθεσμη διαχείριση κεφαλαίων) έχουν συμβάλλει μερικώς στη εμφάνιση του λειτουργικού κινδύνου. Ιδιαίτερα, τα ιδρύματα θεωρούν ότι από μόνα τους τα μοντέλα δεν περιείχαν κάποιο εγγενή μοντέλο κινδύνου ή ότι τα επαρκή συστήματα και οι έλεγχοι δεν ήταν σε θέση να περιορίσουν τις ζημιές. Παρόλη τη σημαντικότητα του λειτουργικού κινδύνου η ερευνητική βιβλιογραφία είναι περιορισμένη και τείνει να εστιάζει στην μοντελοποίηση της επίδρασης που έχει σ' ένα ολόκληρο τμήμα ή οργανισμό (κεφάλαιο 1) παρά στις πηγές και στις αιτίες. Αυτό δυσκολεύει σημαντικά την ικανότητά μας να κατανοήσουμε τον λειτουργικό κίνδυνο και επίσης περιορίζει τους ειδικούς στο να τον διαχειριστούν αποτελεσματικά.

Μία περιοχή του λειτουργικού κινδύνου που ακόμα δεν έχει ερευνηθεί τόσο πολύ είναι η αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων. Αυτή χρησιμοποιείται κυρίως για να περιορίσει τους κινδύνους που προκύπτουν από διάφορες οικονομικές θέσεις (κεφάλαιο 3). Ο λειτουργικός κίνδυνος έχει αυξηθεί με την πάροδο του χρόνου καθώς οι αγορές απορυθμίζονται ραγδαία και έχουν γίνει πιο πολύπλοκες. Αυτό έχει οδηγήσει σε μια αύξηση στο μέγεθος και στην αξιοπιστία των διάφορων λειτουργικών δραστηριοτήτων, οδηγώντας σε πιθανώς υψηλότερες ζημίες. Για παράδειγμα, οι περισσότερες τράπεζες στις μέρες μας χρησιμοποιούν προχωρημένα συστήματα τα οποία λειτουργούν σε παγκόσμια βάση και χρησιμοποιούν οικονομικά μοντέλα. Ένας απλός λειτουργικός κίνδυνος όπως το λάθος στην καταχώρηση δεδομένων, μπορεί να διαδοθεί μέσω ενός ολόκληρου συστήματος επηρεάζοντας έτσι πολλές επενδύσεις.

Η αντιστάθμιση δικαιωμάτων περιλαμβάνει σημαντικό λειτουργικό κίνδυνο, αφού σε μεγάλο όγκο δραστηριοτήτων μπορεί να ελλοχεύουν πολλοί κίνδυνοι εξαιτίας της καταχώρησης δεδομένων και αποτυχημένων αναφορών που αυξάνουν την πιθανότητα πραγματοποίησης λαθών στη διαδικασία. Θα δείξουμε ότι η αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων περιλαμβάνει σημαντικό λειτουργικό κίνδυνο και ότι είναι θεμελιωδώς δύσκολο να μειωθεί χωρίς να δημιουργηθούν σφάλματα αντιστάθμισης. Επιπλέον, ο λειτουργικός κίνδυνος που προκύπτει κατά την αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων μπορεί να ενισχυθεί λόγω των χαμηλών απαιτήσεων περιθωρίου στις συναλλαγές των δικαιωμάτων.

Η παρούσα εργασία έχει την παρακάτω δομή: στο 1ο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του λειτουργικού κινδύνου και γίνεται αναφορά των μεθόδων μέτρησης κινδύνου που υπάρχουν ενώ στη συνέχεια προτείνεται ένας δείκτης έκθεσης, βρίσκοντας την κατανομή του λειτουργικού κινδύνου και τα μέτρα κινδύνου (όπως το Value at Risk), στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των παραγώγων γενικά και εστιάζουμε στα δικαιώματα προαίρεσης. Στη συνέχεια, ξεκινάμε παρουσιάζοντας το διωνυμικό μοντέλο και καταλήγουμε στο μοντέλο τιμολόγησης συνεχούς χρόνου των Black and Scholes φυσικά με τη χρήση της θεωρίας πιθανοτήτων αλλά και στοχαστικών ανελίξεων όπως η Γεωμετρική Κίνηση Brown. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την κατανομή του λειτουργικού κινδύνου στην αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης και θα ολοκληρώσουμε με κάποια αριθμητικές εφαρμογές χρησιμοποιώντας εμπειρικά δεδομένα δικαιωμάτων πάνω στον δείκτη S&P 500 και την εκτίμηση του λειτουργικού Value at Risk για μια σειρά από τιμές παραμέτρων.

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟ ΚΙΝΔΥΝΟ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια του λειτουργικού κινδύνου δίνοντας βασικές έννοιες και ορισμούς γύρω από αυτόν. Ειδικότερα, θα παρουσιάσουμε σε ποιες κατηγορίες αυτός χωρίζεται και θα δώσουμε παραδείγματα όπου εμφανίζεται μέσα από καταστάσεις της πραγματικής αγοράς. Τέλος, θα κάνουμε ποσοτική διαχείριση του λειτουργικού κινδύνου αναφέροντας διάφορα μέτρα μέτρησης αυτού.

1.1 Λειτουργικός Κίνδυνος – Βασικές Έννοιες

Ο λειτουργικός κίνδυνος είναι σχετικά μία νέα έννοια, η μελέτη του οποίου έχει ξεκινήσει τα τελευταία χρόνια, και διάφοροι ορισμοί και προσεγγίσεις έχουν παρουσιαστεί για αυτόν.

Ένας ορισμός για τον λειτουργικό κίνδυνο είναι ότι αποτελεί τον κίνδυνο που απομένει θεωρώντας ότι έχουν συμπεριληφθεί και αφαιρεθεί τόσο ο *πιστωτικός κίνδυνος* όσο και ο *κίνδυνος αγοράς*. Ένας άλλος ορισμός, αναφέρεται ως *ο κίνδυνος που συνδέεται με την εκκαθάριση των συναλλαγών και τις διαδικασίες διευθέτησης που εκτελεί κάθε εταιρεία* [17]. Έτσι λοιπόν, παραδείγματα λειτουργικού κινδύνου περιλαμβάνουν αποτυχία (φυσική ή ηλεκτρονική), ζημία σε φυσικά περιουσιακά στοιχεία (π.χ. λόγω φυσικών καταστροφών) και λάθη διαχείρισης (π.χ. λανθασμένα στοιχεία καταχώρησης). Με βάση τα παραπάνω, και για θέματα που θα πραγματευτούν σε αυτήν την εργασία, θα πρέπει να εισάγουμε έναν σαφή ορισμό για τον λειτουργικό κίνδυνο. Ο ορισμός τον οποίο και θα ακολουθήσουμε, σύμφωνα με την επιτροπή της Βασιλείας (οργανισμός που διατυπώνει εποπτικά πρότυπα και προτείνει θέματα καλύτερης πρακτικής σχετικά με την τραπεζική εποπτεία) είναι ο εξής:

"*Ο λειτουργικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος των ζημιών που προέρχεται από ανεπαρκείς ή αποτυχημένες εσωτερικές διαδικασίες, από εργαζομένους και συστήματα ή από εξωτερικούς παράγοντες*".

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η μελέτη του λειτουργικού κινδύνου είναι περιορισμένη γεγονός για το οποίο ευθύνεται η ελάχιστη βιβλιογραφία που διαθέτουμε τόσο για τη διαχείριση όσο και για τη μέτρησή του.

Οι τρεις (3) κύριες μέθοδοι μέτρησης λειτουργικού κινδύνου είναι:

- Η *Μέθοδος του Βασικού Δείκτη* (Basic Indicator Approach, ***BIA***)
- Η Τυποποιημένη Προσέγγιση (Standard Approach, ***SA***)
- Οι Εξελιγμένες Προσεγγίσεις Μέτρησης(Advanced Measurement approach,***AMA***)

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε καθεμιά από τις παραπάνω μεθόδους ξεχωριστά. Στις δύο πρώτες μεθόδους, το ποσό του κεφαλαίου Κ (που λέγεται και *κεφαλαιακή επιβάρυνση*) αποτελεί το ποσό που απαιτείται να κρατάει κάθε οργανισμός για να απορροφήσει πιθανές ζημιές από λειτουργικούς κινδύνους.

Η βασική μέθοδος εξασφάλισης του Κ είναι:

1) η αναγνώριση ενός δείκτη έκθεσης λειτουργικού κινδύνου και υπολογισμός της αξίας του, και

2) η ποσοστιαία αύξηση του παραπάνω δείκτη για να εξασφαλιστεί το Κ.

Τα κίνητρα για μια τέτοια προσέγγιση είναι πρώτον ότι είναι εύκολα διαχειρίσιμη καθώς η μοντελοποίηση του λειτουργικού κινδύνου μπορεί να γίνει ιδιαίτερα πολύπλοκη και δεύτερον ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας δεδομένα που είναι εύκολα διαθέσιμα. Για παράδειγμα, ως δείκτη έκθεσης θα μπορούσαμε να πάρουμε το ακαθάριστο εισόδημα. Έτσι εμείς υποθέτουμε ότι ο λειτουργικός μας κίνδυνος είναι μόνο μια αναλογία της αξίας του δείκτη.

Το κεφάλαιο $\mathrm{K_{BIA}}$ της μεθόδου του βασικού δείκτη δίνεται από [6]:

$$\mathrm{K_{BIA}} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{E}$$

όπου a είναι μία σταθερά και Ε είναι ο δείκτης έκθεσης για έναν ολόκληρο οργανισμό. Η σταθερά a είναι ένα σταθερό ποσοστό (ορισμένο από τη Βασιλεία στο 15%). Το ακαθάριστο εισόδημα επιλέγεται σαν ένας δείκτης έκθεσης για τον λειτουργικό κίνδυνο επειδή είναι ένας κατά προσέγγιση δείκτης της κλίμακας των λειτουργιών των επιχειρήσεων, ο οποίος με τη σειρά του αντικατοπτρίζει την έκταση της έκθεσης του λειτουργικού κινδύνου.

Για την υιοθέτηση της Τυποποιημένης Προσέγγισης (SA) τα πιστωτικά ιδρύματα οφείλουν να παρέχουν στην Τράπεζα της Ελλάδος ειδική βεβαίωση όπου θα αναφέρουν ότι τα απαιτούμενα στοιχεία πληρούν όλα τα κριτήρια και τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή της προσέγγισης. Η SA μετρά τον λειτουργικό κίνδυνο χωρίζοντας κάθε οικονομικό οργανισμό σε 8 επιχειρηματικούς τομείς (εταιρική χρηματοδότηση, συναλλαγές και πωλήσεις, λιανική τραπεζική, εμπορική τραπεζική, πληρωμές και διακανονισμοί, υπηρεσίες αντιπροσώπευσης, διαχείριση περιουσιακών στοιχείων και λιανική χρηματομεσιτεία).

Το απαιτούμενο κεφάλαιο K_{SA} της SA δίνεται από μια παρόμοια προσέγγιση με αυτήν του K_{BIA}:

$$K_{SA=}\sum_{i=1}^{8}\beta iEi$$

όπου Ei είναι ο δείκτης έκθεσής μας για κάθε επιχειρηματικό τομέα i για i=1,...8 και βi είναι μία σταθερά ανάλογη του a αλλά για κάθε επιχειρηματικό τομέα i. Έτσι το βi παριστάνει ένα σταθερό ποσοστό και η Βασιλεία έχει θέσει ένα φάσμα από 12 έως 18% [14]. Ο όρος Ei θα μπορούσε να αναπαριστά το ακαθάριστο εισόδημα για κάθε επιχειρηματικό τομέα.

Για να εφαρμόσει ένα πιστωτικό ίδρυμα τις Εξελιγμένες Προσεγγίσεις Μέτρησης (AMA) βάσει των δικών του συστημάτων μέτρησης λειτουργικού κινδύνου, θα πρέπει να λάβει την προηγούμενη έγκριση της Τράπεζας της Ελλάδος, διαβεβαιώνοντάς την ότι πληροί τα ζητούμενα κριτήρια. Τα κριτήρια αυτά είναι τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά. Τα ποιοτικά κριτήρια αφορούν το εσωτερικό σύστημα μέτρησης λειτουργικού κινδύνου το οποίο θα πρέπει να είναι ενσωματωμένο στην καθημερινή διαδικασία διαχείρισης κινδύνων του πιστωτικού ιδρύματος. Το σύστημα αυτό θα πρέπει να καλύπτει την αναγνώριση, αξιολόγηση, μέτρηση, παρακολούθηση, έλεγχο και μείωση του λειτουργικού κινδύνου, τη συλλογή δεδομένων ζημιών και το σύστημα αναφορών όπως επίσης και μεθοδολογίες κατανομής κεφαλαίων για την κάλυψη του λειτουργικού κινδύνου, καθώς και κίνητρα για τη μείωσή του [4]. Η διαδικασία διαχείρισης και τα συστήματα μέτρησης λειτουργικού κινδύνου, θα υπόκεινται σε τακτική επανεξέταση από εσωτερικούς ή / και εξωτερικούς ελεγκτές. Τα ποσοτικά κριτήρια αναφέρονται στην καταλληλότητα του συστήματος μέτρησης και είναι τα εξής: διαδικασίες, εσωτερικά αλλά και εξωτερικά δεδομένα ζημιών, ανάλυση σεναρίων, παράγοντες επιχειρηματικού περιβάλλοντος και εξωτερικού ελέγχου. Τα πιστωτικά ιδρύματα θα υπολογίζουν τις κεφαλαιακές τους απαιτήσεις κατά τρόπο ώστε να καλύπτεται τόσο η αναμενόμενη ζημία (EL) όσο και η μη αναμενόμενη (UL) εκτός και αν είναι σε θέση να τεκμηριώσουν ότι η αναμενόμενη ζημία λαμβάνεται ικανοποιητικά υπόψη από τις εσωτερικές επιχειρηματικές πρακτικές. Σε αυτή την περίπτωση, δύναται να μην λάβει υπόψη την αναμενόμενη ζημία. Η μέτρηση θα καλύπτει δυνητικά σοβαρά ακραία γεγονότα με 99,9% διάστημα εμπιστοσύνης σε χρονική περίοδο ενός έτους.

Η AMA είναι η πιο πολύπλοκη μέθοδος από όλες. Επί του παρόντος δεν υπάρχει σαφές μέτρο για την AMA. Παρόλα αυτά υπάρχουν τρεις υποκατηγορίες:

- scenarios, χρησιμοποιεί what if scenarios

- loss distribution approach (LD), που στηρίζεται σε ιστορικά δεδομένα
- Scorecard, στηρίζεται σε ένα σύνολο ερωτήσεων διαφορετικής βαρύτητας των οποίων οι απαντήσεις βοηθούν στην κατανομή του συνολικού κεφαλαίου στις επιμέρους επιχειρηματικές μονάδες.

Στην LD προσέγγιση, στόχος είναι να αποκτήσουμε μια κατανομή πιθανότητας ζημιών για τον λειτουργικό κίνδυνο ενός ολόκληρου οργανισμού [26]. Αυτό απαιτεί την αναγνώριση της κατανομής ζημιών και τον συνδυασμό τους σε μια συνολική κατανομή λειτουργικού κινδύνου. Τα μέτρα scorecard είναι ποιοτικά μέτρα: για έναν συγκεκριμένο παράγοντα λειτουργικού κινδύνου προσδιορίζουμε μια πιθανότητα και αυθαίρετα εκχωρούμε μια βαθμολογία σε κάθε οργανισμό.

Σαν συμπέρασμα, η BIA είναι η πιο εύχρηστη μέθοδος και η πιο εύκολη στην εφαρμογή από όλα τα λειτουργικά μέτρα κινδύνου. Η SA είναι αναλυτική και λαμβάνει υπόψη παραλλαγές του λειτουργικού κινδύνου σε διάφορους επιχειρηματικούς τομείς αλλά είναι πιο δύσκολη στην εφαρμογή της καθώς θέλει περισσότερα δεδομένα. Η AMA είναι γενικά πιο δύσκολη στην εφαρμογή εξαιτίας των απαιτήσεων των δεδομένων και των θεμάτων μοντελοποίησης. Για παράδειγμα στην LD μέθοδο θα χρειαστούμε να μοντελοποιήσουμε και την κατανομή κάθε λειτουργικής δραστηριότητας και τον συνδυασμό τους σε μια συνολική κατανομή. Αυτό θεωρείται μια πιο δύσκολη και μη τετριμμένη διαδικασία. Παρόλα αυτά, αποτελέσματα δείχνουν ότι είναι πιθανώς η καλύτερη μέθοδος υπολογισμού για την κεφαλαιακή επάρκεια των τραπεζικών ιδρυμάτων αφού μειώνει σημαντικά το κόστος του κεφαλαίου, δεσμεύοντας λιγότερο κεφαλαιακό απόθεμα, το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μελλοντικά και για άλλους σκοπούς όπως σε μία επικείμενη αύξηση μετοχικού κεφαλαίου [16].

1.2 Παραδείγματα Λειτουργικού Κινδύνου

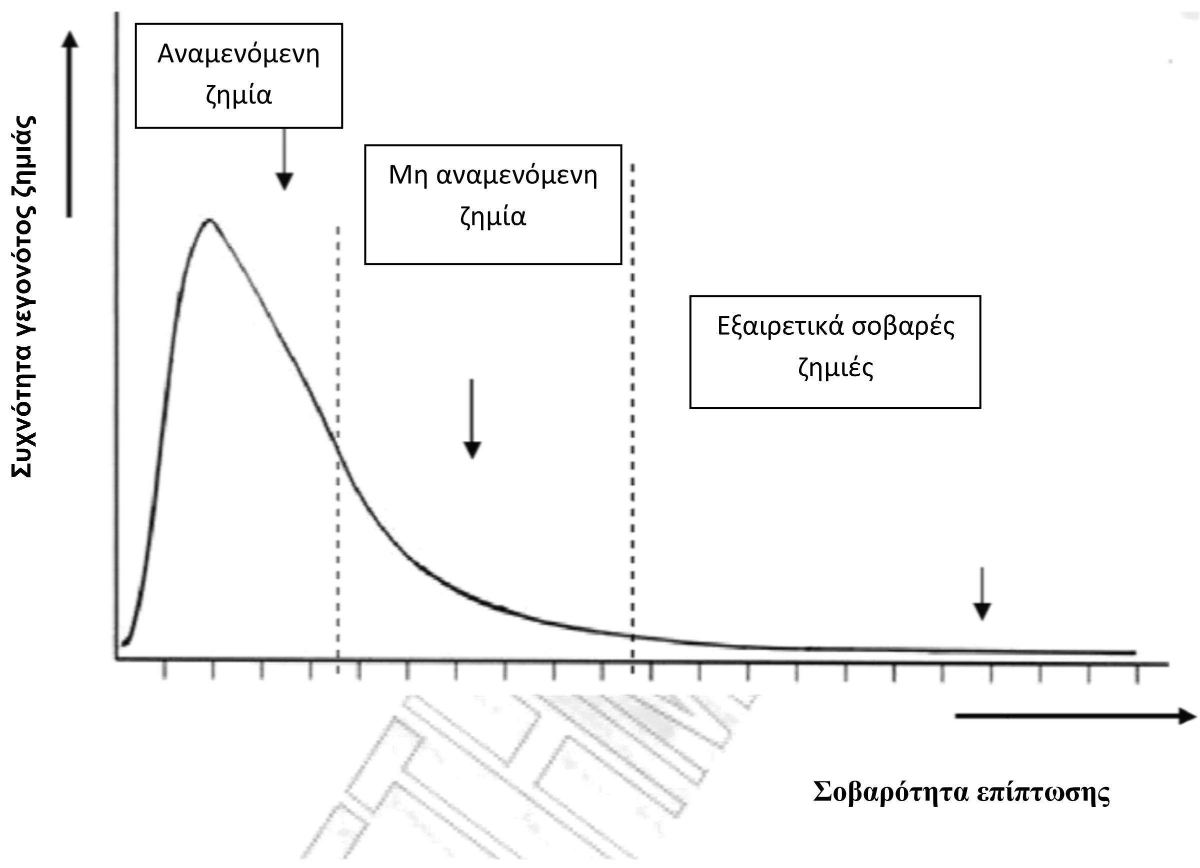
Στην ενότητα αυτή θα καταστήσουμε σαφές πόσο σημαντική είναι η συγκέντρωση πληροφοριών και η επίδραση που έχουν στην λήψη ορισμένων αποφάσεων στα πλαίσια εμφάνισης γεγονότων που εμπεριέχουν λειτουργικό κίνδυνο.

Ανάλογα με τη συχνότητα εμφάνισης αλλά και το μέγεθος των ζημιών μπορούμε να διαχωρίσουμε τρεις τύπους λειτουργικού κινδύνου οι οποίοι διαθέτουν διαφορετικά εμφανή χαρακτηριστικά.

- <u>Ο ονομαστικός (nominal) λειτουργικός κίνδυνος</u>: είναι ο κίνδυνος των ζημιών που εμφανίζονται πολύ συχνά και συνδέονται με μία τρέχουσα δραστηριότητα, για παράδειγμα κάποιο ανθρώπινο λάθος κατά την διάρκεια μιας διαδικασίας. Αν και η διαχείριση αυτού του είδους κινδύνου είναι αρκετά δαπανηρή, παρόλα αυτά τα οφέλη που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα σημαντικά καθώς συμβάλλουν στη βελτίωση της φήμης και της αξιοπιστίας του χρηματοπιστωτικού οργανισμού και για αυτό έχουν και μακροπρόθεσμο χαρακτήρα.

- Ο συνηθισμένος (ordinary) λειτουργικός κίνδυνος: είναι ο κίνδυνος γεγονότων μικρότερης συχνότητας αλλά μεγαλύτερων ζημιών, όχι όμως τόσο μεγάλων ώστε να απειλούν την έκρυθμη λειτουργία της επιχείρησης. Αποτελούν συνέπεια μιας στρατηγικής επιλογής που έχει επιλέξει η εκάστοτε εταιρία και πρέπει να αναλύονται μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο αυτής της επιλογής και για αυτό το λόγο πρέπει να κατανοηθούν και να διαχωριστούν πλήρως από τους υπόλοιπους κινδύνους.

- Ο εξαιρετικός (exceptional) λειτουργικός κίνδυνος: αναφέρεται σε γεγονότα με πολύ μικρή συχνότητα εμφάνισης αλλά με πολύ μεγάλες ζημιές. Τέτοιοι κίνδυνοι χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής καθώς απειλούν σε μεγάλο βαθμό την ύπαρξη της επιχείρησης όπου θα εμφανιστούν [24,σελ.18], [32,σελ 17-18].



Γράφημα 1: Τυπική κατανομή ζημιών των Γεγονότων Λειτουργικού Κινδύνου [2,σελ.14]

Στο σημείο αυτό, για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του λειτουργικού κινδύνου θα ήταν απαραίτητο να αναφέρουμε τις κύριες αιτίες εμφάνισής του σε μία επιχείρηση. Η κατηγοριοποίηση των περιπτώσεων, ανάλογα με τον τύπο του γεγονότος που προκαλεί κάθε φορά τη δημιουργία κινδύνου, είναι σύμφωνα με την ΟΔΗΓΙΑ Ε.Ε. 2006/48/EC της Ευρωπαϊκής Ένωσης η εξής:

- Εσωτερική απάτη: σε αυτήν την περίπτωση οι ζημίες προκύπτουν από πράξεις που διαπράττονται με κύριο σκοπό τον δόλο, την υπεξαίρεση περιουσιακών στοιχείων ή την παράβαση πολιτικών της επιχείρησης στις οποίες εμπλέκεται κάποιο μέλος της επιχείρησης. Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις δωροδοκίας, πλαστογραφίας και εκβιασμού.

- Εξωτερική απάτη: οι ζημίες οφείλονται σε ενέργειες που διαπράττονται από κάποιον με πρόθεση δόλου, υπεξαίρεσης περιουσιακών στοιχείων ή παραβίασης της ισχύουσας νομοθεσίας.

- Πρακτικές σε θέματα απασχόλησης και ασφάλειας στο χώρο εργασίας: οι ζημίες προέρχονται από ενέργειες που είναι αντίθετες με την εργατική νομοθεσία και τις συμβάσεις για ασφάλεια του προσωπικού, από πληρωμές αποζημιώσεων σε περιπτώσεις πρόκλησης σωματικής βλάβης ή από άλλες πρακτικές που εναντιώνονται στους κανόνες περί σωστής μεταχείρισης.

- Πελάτες, προϊόντα και επιχειρηματικές πρακτικές: οι ζημίες προκύπτουν από την εκούσια ή τυχαία πρόθεση του εργαζόμενου της επιχείρησης να μην εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του έναντι του πελάτη (συμπεριλαμβανομένων των απαιτήσεων εμπιστοσύνης και εντιμότητας) ή ακόμα λόγω προβλήματος στη φύση ή τα χαρακτηριστικά του προϊόντος της επιχείρησης (ελλατωματικά προϊόντα). Σε αυτήν την κατηγορία περιλαμβάνεται και το ξέπλυμα χρήματος.

- Βλάβη σε περιουσιακά στοιχεία: ζημίες από οφείλονται σε απώλεια ή βλάβη των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης λόγω φυσικών καταστροφών ή άλλων αιτιών (π.χ. τρομοκρατικές ενέργειες).

- Διακοπή δραστηριότητας και δυσλειτουργίας συστημάτων: οι ζημιές που μπορεί να προκύψουν σε μια επιχείρηση λόγω δυσλειτουργίας των συστημάτων που οδηγούν σε διακοπή της επιχειρηματικής δραστηριότητας.

- Εκτέλεση, παράδοση και διαχείριση διαδικασιών: οι ζημίες προκύπτουν από ανεπάρκειες κατά τη διάρκεια των συναλλαγών ή των επιχειρηματικών διαδικασιών και οφείλονται κυρίως σε ανθρώπινα λάθη (απώλεια ή καταστροφή στοιχείων πελατών, ανακριβή εξωτερικά reports, χαμένες διορίες).

ΓΕΓΟΝΌΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΦΟΔΡΟΤΗΤΑ
Εσωτερική απάτη	χαμηλή	υψηλή
Εξωτερική απάτη	υψηλή, μεσαία	χαμηλή, μεσαία
Πρακτικές σε θέματα απασχόλησης και ασφάλειας στο χώρο εργασίας	χαμηλή	χαμηλή
Πελάτες, προϊόντα και επιχειρηματικές πρακτικές	χαμηλή, μεσαία	υψηλή, μεσαία
Βλάβη σε περιουσιακά στοιχεία	χαμηλή	χαμηλή
Διακοπή δραστηριότητας και δυσλειτουργίας συστημάτων	χαμηλή	χαμηλή
Εκτέλεση, παράδοση και διαχείριση διαδικασιών	υψηλή	χαμηλή

μεσαία χαμηλή υψηλή

Πίνακας 1:Συχνότητα και Σφοδρότητα λειτουργικών γεγονότων, σύμφωνα με την Επιτροπή Βασιλείας.

Επιπροσθέτως, πρέπει να αναφερθεί ότι άλλα γεγονότα που μπορούν να δημιουργήσουν ζημίες λόγω του λειτουργικού κινδύνου είναι:

- οι μεγάλες συγχωνεύσεις,
- οι ενοποιήσεις,
- οι διασπάσεις εταιριών,
- η χρήση αυτοματοποιημένης τεχνολογίας κ.τ.λ

(Τράπεζα της Ελλάδος: http://www.bankofgreece.gr/BoGDocuments/ΠΔ.ΤΕ_2590 20.8.2007) [29].

1.3 Μέτρα μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου

Όπως ήδη αναφέραμε στην πρώτη ενότητα, αν και οι απώλειες που αντιμετωπίζουν οι διάφορες επιχειρήσεις λόγω του λειτουργικού κινδύνου είναι ιδιαίτερα σημαντικές, μόλις τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει μία οργανωμένη προσπάθεια διαχείρισης και μέτρησής του. Μια θεμελιώδης διαφορά του λειτουργικού από τους υπόλοιπους κινδύνους είναι ότι δεν δημιουργείται εξαιτίας της προσπάθειας επίτευξης κέρδους.

Οι παράγοντες κινδύνου που λαμβάνονται υπόψη από τους αρμόδιους που ασχολούνται με τη διαχείριση του κινδύνου είναι τόσο ποιοτικά στοιχεία όπως ο εσωτερικός έλεγχος και οι αναθεωρήσεις συστημάτων και διαδικασιών όσο και ποσοτικά στοιχεία όπως η συλλογή δεδομένων που θα συμβάλλουν στην ανάπτυξη μεθόδων και τεχνικών διαχείρισης. Ένα πρωταρχικό και ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό είναι η εκτίμηση της πιθανότητας εμφάνισης ζημίας αλλά και οι πιθανές απώλειες που θα προκύψουν. Μέχρι σήμερα, υπάρχει περιορισμένος ερευνητικός κύκλος που συνδέει τους λειτουργικούς παράγοντες κινδύνου με τις λειτουργικές απώλειες.

Μερικοί υποστηρίζουν ότι το κόστος της έρευνας για τη συλλογή αυτών των πληροφοριών και της διόρθωσης ενός προβλήματος από ένα γεγονός λειτουργικής απώλειας ή έστω του περιορισμού του είναι πολύ σημαντικό, όμως σε κάποιες περιπτώσεις η διαδικασία αυτή ξεπερνά το ίδιο το κόστος της λειτουργικής απώλειας.

Όπως φαίνεται στην πράξη υπάρχουν δύο ευρείες κατηγορίες λειτουργικών ζημιών, οι μικρότερες λειτουργικές απώλειες που έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες εμφάνισης και δημιουργούνται από περιστασιακά ανθρώπινα λάθη και οι πιο σημαντικές λειτουργικές απώλειες, που αν και με μικρές πιθανότητες να πραγματοποιηθούν, οι συνέπειες που αποφέρουν στο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα που θα εμφανιστούν θα είναι ιδιαίτερα επιβλαβείς.

Όπως ήδη αναφέραμε λοιπόν, η μέτρηση του λειτουργικού κινδύνου απαιτεί δύο παραμέτρους, αυτές που υπολογίζουν την πιθανότητα να συμβεί μία ζημία από ένα λειτουργικό γεγονός και το πιθανό μέγεθος της ζημιάς

Τα μοντέλα για τον υπολογισμό του λειτουργικού κινδύνου είναι ιδιαίτερα χρήσιμα γιατί συμβάλλουν στην εξάλειψη ή έστω στον περιορισμό ενός πολύ σημαντικού και πολύπλευρου κινδύνου που προκαλεί σημαντικές απώλειες. Όπως είδαμε εξάλλου ο λειτουργικός κίνδυνος αποτελεί έναν κίνδυνο ανθρώπινης προέλευσης, για αυτό το λόγο δεν μπορεί απλά να προσδιοριστεί μέσω ενός απλού οικονομικού μοντέλου όπως οι άλλοι κίνδυνοι αλλά από ένα συνολικό πρότυπο προγραμματισμού [11].

Αυτό σημαίνει ότι δεν θα υπάρξει μόνο ένας τρόπος μέτρησης του. Μάλλον είναι απαραίτητο να βρεθεί ένας συνδυασμός των μεθόδων που είναι κατάλληλες για κάθε περίπτωση. Μερικές από αυτές τις μεθόδους είναι:

- Η αξία σε κίνδυνο (VaR) ενός χαρτοφυλακίου αποτελεί τη μέγιστη ζημία που μπορεί να υποστεί το χαρτοφυλάκιο σε μία δεδομένη χρονική περίοδο κάτω από κανονικές συνθήκες αγοράς και για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Στα πλαίσια μιας συγκεκριμένης λειτουργικής δραστηριότητας ενός οργανισμού η VaR ισούται με το άθροισμα των αναμενόμενων και των μη αναμενόμενων ζημιών της δραστηριότητας αυτής και η VaR για το σύνολο του οργανισμού είναι το άθροισμα των VaR όλων των δραστηριοτήτων αυτών.

- Η υπό όρους αξία σε κίνδυνο (CVAR) είναι *η αναμενόμενη απόδοση πέραν από την VaR* με δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης [7,σελ.6]. Η μέθοδος αυτή λαμβάνει υπόψη όλες τις τιμές κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο για να υπολογίσει την αναμενόμενη αξία και για αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως η μέση μέγιστη απώλεια περιπτώσεων που ξεπερνούν το επίπεδο εμπιστοσύνης.

- Η θεωρία ακραίων τιμών (extreme value theory- EVT) στο πλαίσιο του λειτουργικού κινδύνου εστιάζει το ενδιαφέρον της στις ζημιές (stress losses) για των οποίων η κατανομή με την προσέγγιση της αξίας σε κίνδυνο δεν παρέχει καμία πληροφορία. Χρησιμοποιώντας την αποκαλούμενη μέθοδο (POT), αιχμή πέρα των κατώτατων ορίων, οι ακραίες παρατηρήσεις μέσα σε ένα δείγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γίνουν κατανοητές οι ιδιότητες από τις ακραίες περιοχές μιας κατανομής που δεν καλύπτεται από το δείγμα. Κατά συνέπεια, αυτή η τεχνική εκτίμησης καθιστά πιθανό να διαμορφώσει την κατανομή των ακραίων σημείων επάνω από το μέγιστο κατώτατο όριο [2,σελ34].

- Μια άλλη στατιστική μέθοδος που χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις χαμηλής διαθεσιμότητας στοιχείων είναι η «bootstrapping», που αποτελεί μια τεχνική λήψης δείγματος για τις εκτιμήσεις σε περιπτώσεις που ο αριθμός των δεδομένων είναι μικρός. Η συνεχής τροποποίηση των στοιχείων επιτρέπει την αξιολόγηση του στατιστικού λάθους μιας υπόθεσης [2,σελ.34].

- Τέλος μία νέα προσέγγιση, βασισμένη στα Μπεϋζιανά δίκτυα (Bayesian Networks), έχει προταθεί για την ποσοτική διαχείριση του λειτουργικού κινδύνου. Το κύριο πλεονέκτημα της είναι, πέρα από κάθε άλλη προσέγγιση, η δυνατότητα να «συλλαμβάνει» τους συσχετισμούς μεταξύ διαφορετικών διαδικασιών ενός οργανισμού [1].

Παρόλα αυτά μελλοντική έρευνα απαιτείται σε σχέση με την αξιοπιστία των κατανομών αυτών λόγω ελλιπών ιστορικών στοιχείων ζημιών από τον λειτουργικό κίνδυνο, των καθυστερήσεων στην υποβολή των εκθέσεων, λαθών στην μέτρηση των στοιχείων και παρατεταμένων γεγονότων απωλειών που εμφανίζονται στα πλαίσια λειτουργίας των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων [5].

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΙΟΝΤΑ- ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ.

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μια γενική περιγραφή των παράγωγων χρηματιστηριακών προϊόντων δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα δικαιώματα προαίρεσης. Επίσης, αναπτύσσονται περιληπτικά τα είδη των επενδυτών ανάλογα με τη στρατηγική τους θέση στην αγορά.

2.1 Βασικοί ορισμοί και έννοιες

Παράγωγο προϊόν ονομάζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου πιο βασικού προϊόντος (υποκείμενο προϊόν). Ουσιαστικά, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται άμεσα από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που διαπραγματεύονται σε μία οργανωμένη δευτερογενή αγορά, όπως ένα χρηματιστήριο, είτε όχι. Σε γενικές γραμμές, η διμερής αυτή σύμβαση μπορεί να αναφέρεται σε εμπορεύσιμες μετοχές, ομόλογα ακόμα και αγροτικά προϊόντα. Τα παράγωγα μέσα χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση οποιουδήποτε οικονομικού κινδύνου ή την επίτευξη κέρδους μέσω των μεταβολών στις τιμές των εμπορευμάτων, των επιτοκίων κλπ. Τα παράγωγα χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

- Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)
- Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)
- Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων (Stock Repo και Stock Reverse Repo)
- Δικαιώματα προαίρεσης (Options)

Στο σημείο αυτό, θα ασχοληθούμε επιγραμματικά με τον ορισμό των τριών πρώτων παραγώγων, καθώς δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας εργασίας, και θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα στα δικαιώματα προαίρεσης ώστε να γίνουν κατανοητές οι απαραίτητες έννοιες.

i. Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Η σύμβαση γίνεται μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών οργανισμών που δεν διαπραγματεύονται στην χρηματιστηριακή αγορά και αφορά μια σημερινή συμφωνία για να γίνει η συναλλαγή σε μια προκαθορισμένη στιγμή στο μέλλον και σε προκαθορισμένη τιμή. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω η επιχείρηση ABC που συμφωνεί να αγοράσει σε 5 μήνες από τη σημερινή ημερομηνία 1000 μετοχές της Eurobank από μια επιχείρηση KLM στην τιμή K= 20 ευρώ ανά μετοχή. Έστω S_O η σημερινή αξία του υποκείμενου αγαθού, δηλαδή η τιμή της μετοχής της Eurobank την ημέρα υπογραφής του συμβολαίου, r το επιτόκιο σύμφωνα με το επιτόκιο των κρατικών ομολόγων την ίδια χρονική περίοδο και T η ημερομηνία εξάσκησης. Πέντε μήνες μετά η επιχείρηση ABC (ανεξάρτητα από τη τιμή της μετοχής εκείνη τη χρονική στιγμή) θα καταβάλλει το ποσό των 20.000 ευρώ (1000×20) στην KLM η οποία με τη σειρά της θα της παραδώσει τις 1000 μετοχές της Eurobank.

Αν την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου η τιμή της μετοχής στο χρηματιστήριο είναι $S_T = 25$ ευρώ, τότε η επιχείρηση ABC έχει κερδίσει 5 ευρώ ανά μετοχή (5000 ευρώ, αφού απέκτησε τις μετοχές δίνοντας 1000×20=20.000 ευρώ) και μπορεί να τις πουλήσει στην τιμή των 1000×25=25.000 ευρώ. Αντίθετά, αν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από 20 ευρώ, όπως είναι λογικό κερδισμένη βγαίνει η επιχείρηση KLM.

ii. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης(Future Contracts)

Τα χαρακτηριστικά της συναλλαγής είναι τα ίδια με αυτά των προθεσμιακών συμβολαίων, η μόνη διαφορά είναι ότι διαθέτουν κάποια τυποποιημένα χαρακτηριστικά καθώς συναλλάσσονται στο Χρηματιστήριο Παραγώγων και κατά συνέπεια δεν είναι απαραίτητο οι δύο συμβαλλόμενοι να γνωρίζονται μεταξύ τους. Στο σημείο αυτό, θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα ακόμα για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας. Ένας επενδυτής πουλάει ένα ΣΜΕ πάνω σε 100 μετοχές με τιμή συναλλαγής K=50 ευρώ (ανά μετοχή) και ημερομηνία λήξης 5 μήνες μετά, ενώ παράλληλα ένας επενδυτής B αγοράζει το ίδιο ΣΜΕ. Και οι δύο επενδυτές καταθέτουν το 12% του 50×100=5000 σε ένα λογαριασμό περιθωρίων που ανοίγουν. Στο τέλος της ημέρας ελέγχουμε τις τιμές και διαπιστώνουμε ότι έχουμε αλλαγή στην τιμή του K. Έστω ότι έχει αυξηθεί στα 55 ευρώ. Αν ο αγοραστής κλείσει τη θέση του (δηλ πάρει μία short position σε ΣΜΕ πάνω στο ίδιο προϊόν και με ίδια ημερομηνία λήξης) τότε θα έχει κέρδος τη διαφορά (55-50)×100=500 ευρώ. Τότε, ο αγοραστής χωρίς να χρειάζεται να κάνει αυτή τη κίνηση πιστώνεται τη διαφορά των 500 ευρώ η οποία χρεώνεται στον πωλητή μέσω του λογαριασμού περιθωρίων. Το ίδιο επαναλαμβάνεται στο τέλος κάθε ημερήσιας συνεδρίασης. Αν μια θέση παραμένει ανοιχτή μέχρι και την ημέρα λήξης την επόμενη μέρα θα γίνει για τελευταία φορά διακανονισμός του κέρδους ή της ζημίας και μετά η θέση θα πάψει να υφίσταται. Το περιθώριο ασφάλισης αποδεσμεύεται όταν ο επενδυτής κλείσει την ανοιχτή θέση του.

iii. Προϊόντα Δανεισμού Τίτλων (Stock Repo και Stock Reverse Repo)

Αυτή η περίπτωση παραγώγων περιέχει τις εξής δύο διαδικασίες:

1. Παραχώρηση μετοχών ως «δάνειο» (stocklending-Repo). Ένας επενδυτής που δεν επιθυμεί να εξαργυρώσει μέσα σε σύντονο χρονικό διάστημα τις μετοχές του, μπορεί να τις «δανείσει» προσωρινά στο χρηματιστήριο παραγώγων. Ως αντάλλαγμα εισπράττει μηνιαίως ένα ποσό χωρίς κίνδυνο και έχει επιπλέον τη δυνατότητα να λάβει τεχνητό μέρισμα από τις μετοχές του repos.
2. Απόκτηση μετοχών από «δάνειο» (stockborrowing- Reverse Repo). Ένας επενδυτής δανείζεται τις μετοχές εκείνες που έχει «δανείσει» κάποιος άλλος επενδυτής (όπως αναφέραμε προηγουμένως) μέσω repo για ένα χρονικό διάστημα έναντι συγκεκριμένου ημερήσιου κόστους.
   Αξίζει να σημειωθεί ότι ο επενδυτής σε repo δε εισπράττει χρήματα αν δεν υπάρχει ζήτηση για συμβόλαια Reverse Repo επί της μετοχής αυτής [30, σελ 2-5].

2.2 Δικαιώματα Προαίρεσης

Δικαίωμα προαίρεσης (Options) είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων που λαμβάνει μέρος στο Χρηματιστήριο Παραγώγων. Σε κάθε τέτοια συμφωνία ο αγοραστής έχει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει (ή να πωλήσει) από τον πωλητή του δικαιώματος μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μια προκαθορισμένη τιμή K, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία T στο μέλλον. Το υποκείμενο προϊόν μπορεί να είναι μετοχή, χρηματιστηριακός δείκτης, συνάλλαγμα ακόμα και εμπόρευμα. Ο πωλητής του δικαιώματος, σε αντίθεση με τον αγοραστή, είναι υποχρεωμένος να πουλήσει (ή να αγοράσει ανάλογα με το δικαίωμα) τη συγκεκριμένη προκαθορισμένη ποσότητα του αγαθού, στη προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, στη προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Το γεγονός αυτό δίνει πλεονεκτική θέση στον αγοραστή και για αυτό ο τελευταίος πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο C (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος-option price,option premium) στον πωλητή (ο οποίος ουσιαστικά αναλαμβάνει ένα ρίσκο) για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Ανάλογα με το πότε μπορεί να ασκηθεί το δικαίωμα έχουμε τον εξής διαχωρισμό:

i. Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Προαίρεσης: μπορούν να ασκηθούν μόνο κατά την ημερομηνία λήξης και όχι νωρίτερα,
ii. Αμερικάνικα Δικαιώματα Προαίρεσης: μπορούν να ασκηθούν οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και την λήξη του.

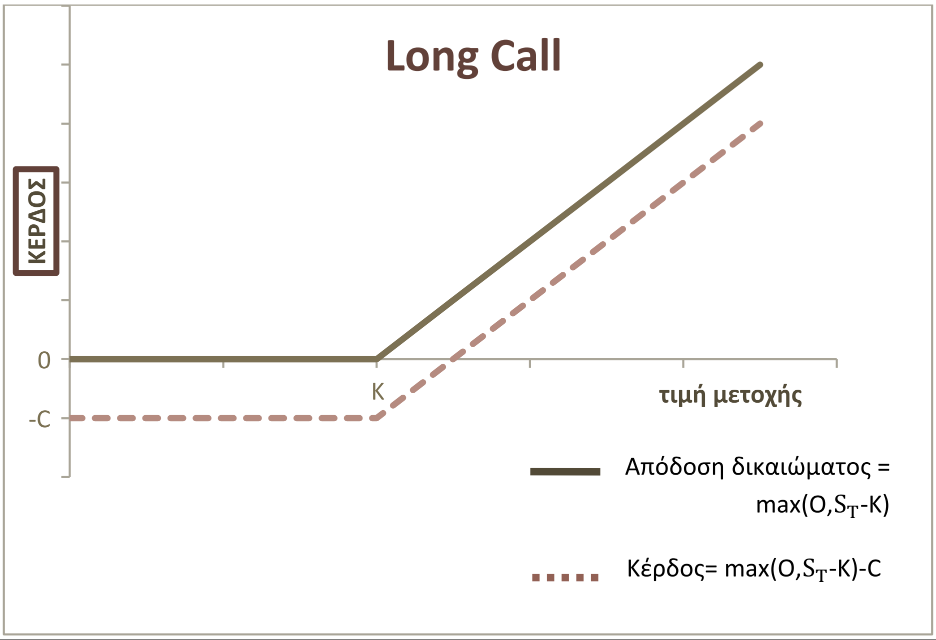
Υπάρχουν τέσσερις βασικές θέσεις στην αγορά δικαιωμάτων:

- **Long call:** κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη τιμή, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον,
- **Short call**: κάποιος πωλεί το δικαίωμα αγοράς. Σε αυτή τη θέση ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να πωλήσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής,
- **Long put**: κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να πουλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής,
- **Short put**: κάποιος πουλάει το δικαίωμα να πωλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Σε αυτή τη θέση ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να αγοράσει τη προκαθορισμένη ποσότητα του αγαθού σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

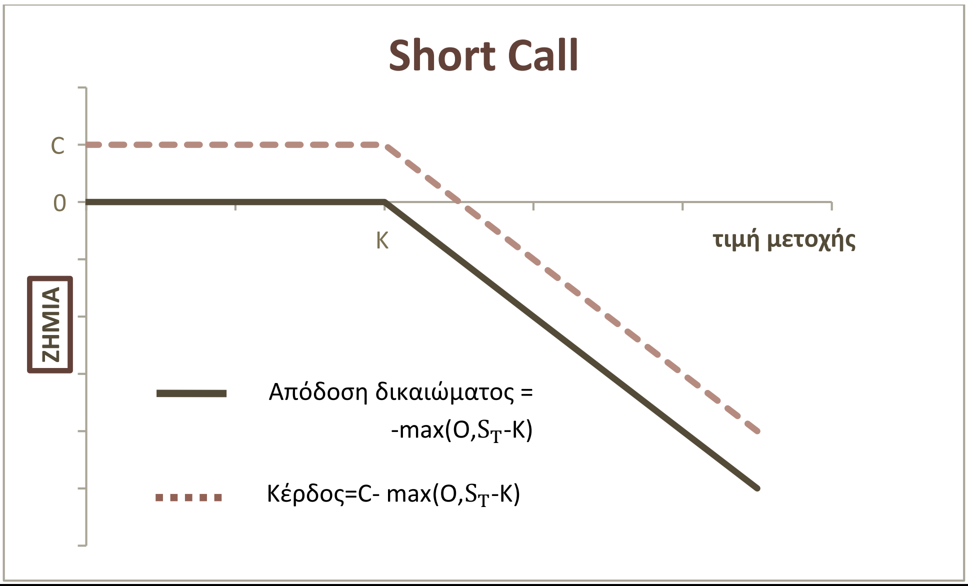
Θεωρούμε την 1/1/2016 μετοχή ABC με αξία 100 ευρώ, το μέγεθος του συμβολαίου μας είναι 70, ημερομηνία λήξης του δικαιώματος τον Μάρτιο του 2016 και τιμή εξάσκησης K=200 ευρώ για εκείνη την ημερομηνία.

- **Αγορά Δικαιώματος Αγοράς – Long call):** Έστω ότι ο επενδυτής A προβλέπει άνοδο στη τιμή της μετοχής ABC τους επόμενους μήνες. Επειδή δεν επιθυμεί να πάρει κάποιο ρίσκο όμως, αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής. Έτσι την 1/3/16 αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς (call option) που λήγει τον Ιούνιο με τιμή εξάσκησης (strike price) K=200. Έτσι λοιπόν του δίνεται η δυνατότητα, αν τον συμφέρει, τον Ιούνιο του 2016 να αγοράσει 70 μετοχές ABC στην τιμή των 200 ευρώ ανά μετοχή. Αν τώρα η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ABC την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος φτάσει τα 220 ευρώ τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα του, θα αγοράσει δηλαδή τις μετοχές στη τιμή των 200 ευρώ και θα μπορεί επίσης να τις πουλήσει αμέσως με κέρδος (220-200)×70=1.400 ευρώ μείον το ασφάλιστρο C που είχε πληρώσει αρχικά. Αντίθετα, αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής μειωθεί στα 180 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του, χωρίς να έχει κανένα κέρδος και με μοναδική ζημία απλά το ασφάλιστρο C.



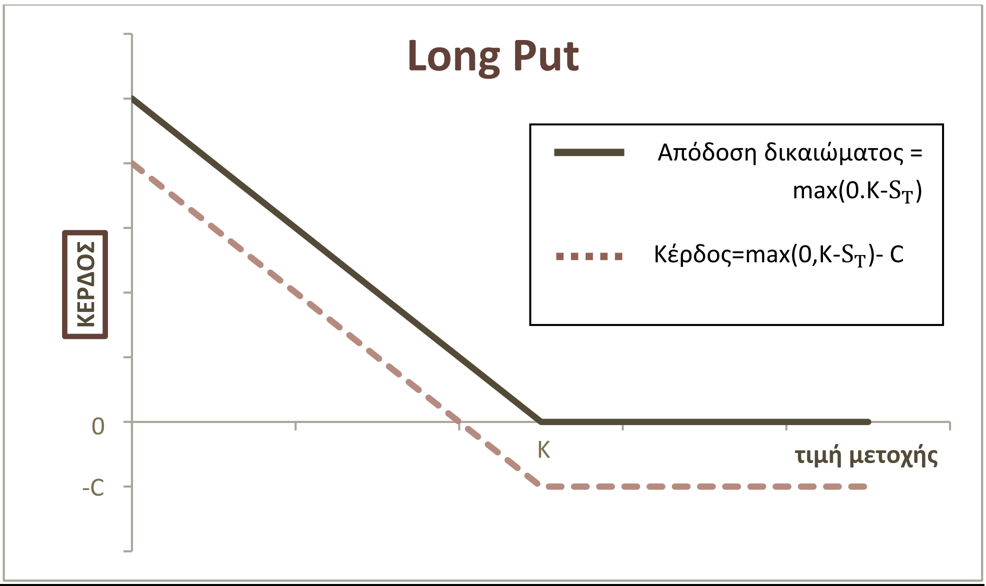
Εικόνα 2.2.1: Απόδοση/Κέρδος Long Call

- **<u>Πώληση Δικαιώματος Αγοράς – Short call:</u>** Ο επενδυτής B προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά καθοδική τάση στις μετοχές ABC που κατέχει. Για να δημιουργήσει θετική αλλαγή στην απόδοση του χαρτοφυλακίου του πουλά ένα δικαίωμα αγοράς με λήξη τον Ιουνίου 2016 επί της μετοχής ABC με τιμή εξάσκησης K=200 ευρώ εισπράττοντας το ασφάλιστρο C. Αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής παραμείνει στάσιμη κάτω από 200 ευρώ ο αγοραστής του δικαιώματος δεν εξασκεί το δικαίωμα του και άρα ο πωλητής θα έχει κερδίσει μόνο το ασφάλιστρο C. Σε αντίθετη περίπτωση, αν η τιμή αυξηθεί στα 220 ευρώ ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής θα πρέπει να πουλήσει στα 200 ευρώ βγαίνοντας ζημιωμένος ουσιαστικά κατά 1.400 ευρώ $[(220-200)\times 70]$, αφού θα μπορούσε να χει πουλήσει στην αγορά στην τιμή των 220 αντί 200.



Εικόνα 2.2.2: Απόδοση/Κέρδος Short Call

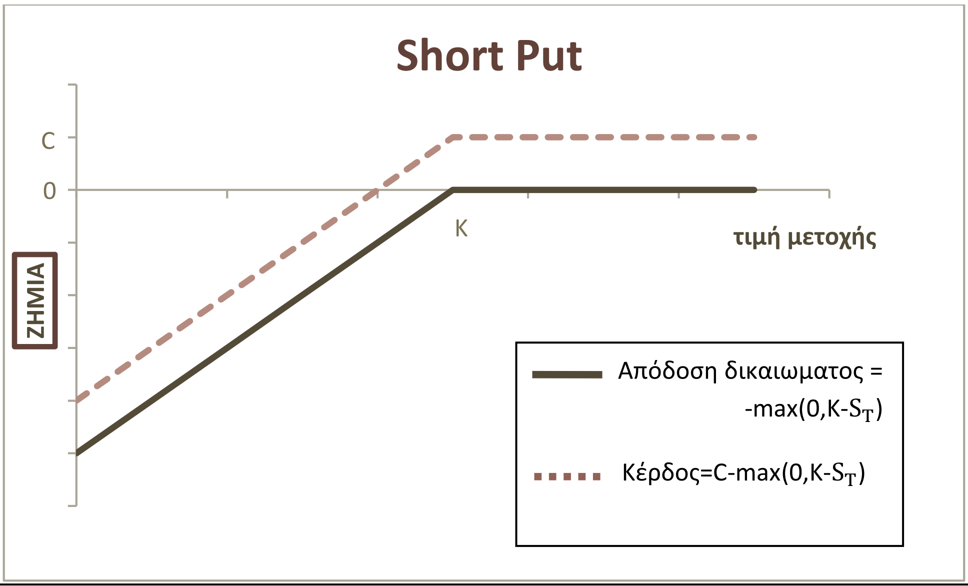
- **<u>Αγορά Δικαιώματος Πώλησης-Long put):</u>** Ο επενδυτής Γ κατέχει 70 μετοχές ABC και προβλέπει καθοδική τάση στη τιμή της μετοχής τους επόμενους μήνες. Δεν επιδιώκει όμως να πουλήσει άμεσα τις μετοχές και γι΄ αυτό αγοράζει ένα δικαίωμα πώλησης που λήγει το Ιούνιο με τιμή εξάσκησης K=200 ευρώ καταβάλλοντας αντίτιμο C. Αν τον Ιούνιο η τιμή της μετοχής πέσει στα 180 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης θα εξασκήσει το δικαίωμα του και θα πωλήσει (στον πωλητή του δικαιώματος) στην τιμή των 200. Ο αγοραστής θα έχει κέρδος (200-180)×70 =1.400 ευρώ μείον το ασφάλιστρο διότι θεωρητικά μπορεί να αγοράσει αμέσως τις μετοχές που πούλησε στη τιμή των 200 ευρώ πληρώνοντας μόνο 180 ευρώ. Στην αντίθετη περίπτωση, αν η τιμή της μετοχής ABC φτάσει στα 220 ευρώ τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης δε θα εξασκήσει το δικαίωμα του αφού μπορεί να πουλήσει τις μετοχές στην αγορά στη τιμή των 220 ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση, δεν έχει κανένα κέρδος και μοναδική ζημία το ασφάλιστρο C.



Εικόνα 2.2.3: Απόδοση/Κέρδος Long Put

- **<u>Πώληση δικαιώματος πώλησης –Short put):</u>** Ο επενδυτής Δ προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά ανοδική τάση στη τιμή της μετοχής ABC. Πουλάει ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης 200 ευρώ και λήξη τον Ιούνιο, εισπράττοντας ασφάλιστρο C’. Αν η τιμή της μετοχής πάει στα 220 ευρώ τότε ο αγοραστής δικαιώματος δε θα εξασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής θα κερδίσει απλά το ασφάλιστρο C’. Αντίστροφα, δηλαδή αν τιμή πάει στα 180 ευρώ τότε ο αγοραστής εξασκεί το δικαίωμα και ο επενδυτής Δ είναι υποχρεωμένος να αγοράσει στην τιμή των 200 ευρώ χάνοντας (200-180)×70=1.400 ευρώ.

.



Εικόνα 2.2.4: Απόδοση/Κέρδος Short Put

2.2.1 Τύποι Επενδυτών

Σε μια χρηματιστηριακή αγορά, ανάλογα με τη στρατηγική που ακολουθεί ο κάθε επενδυτής διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

i. Hedgers

Είναι οι επενδυτές που παίρνουν μια συγκεκριμένη θέση στην αγορά παραγώγων με σκοπό την αντιστάθμιση και την εξισορρόπηση έναντι του κινδύνου που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν (Hedging). Για παράδειγμα έστω μια εταιρία επίπλων που έχει τις επιχειρήσεις της στην Ελλάδα και πρέπει να καταβάλει σε 6 μήνες από τώρα 100.000 δολάρια σε εταιρία των Η.Π.Α που την προμηθεύει με πρώτες ύλες. Η σημερινή ισοτιμία δολαρίου-ευρώ είναι 1 δολάριο=0.850 ευρώ. Άρα η εταιρία επίπλων έχει την υποχρέωση να πληρώσει σε 6 μήνες το ποσό των 85.000 ευρώ, χωρίς να υπολογίσουμε τη χρονική αξία του χρήματος. Ο κίνδυνος που αντιμετωπίζει η εταιρία είναι ο συναλλαγματικός κίνδυνος καθώς δε ξέρουμε τι εξέλιξη θα υπάρξει στην ισοτιμία των δύο νομισμάτων. Για να προστατευθεί από αυτόν τον κίνδυνο η εταιρία μπορεί να αγοράσει ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο ή ένα δικαίωμα αγοράς. Στην πρώτη περίπτωση, συμφωνεί να αγοράσει σε 6 μήνες από τώρα 100.000 δολάρια προς 85.000 ευρώ, ανεξάρτητα από το ποια θα είναι η τιμή της ισοτιμίας, «κλειδώνοντας» ουσιαστικά το ποσό που θα κληθεί να πληρώσει ανεξαρτήτως αν χάσει ή αν θα κερδίσει τελικά. Στη δεύτερη περίπτωση, αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς επί του δολαρίου έχοντας έτσι το δικαίωμα να αγοράσει δολάρια μετά από 6 μήνες στην τιμή των 0.850 ευρώ το ένα. Αν τελικά μετά από 6 μήνες η τιμή του δολαρίου ανέβει θα αγοράσει στην ίδια τιμή δηλ. στα 0.850 ευρώ ενώ αν πέσει δε θα εξασκήσει το δικαίωμα του, καθώς μπορεί να το αγοράσει φθηνότερα στην αγορά, με μοναδική ζημία απλά το ασφάλιστρο [30].

ii. Speculators (κερδοσκόποι)

Από την άλλη πλευρά των hedgers, έχουμε τους κερδοσκόπους οι οποίοι παίρνουν την αντίθετη πλευρά. Με άλλα λόγια, εάν ένας hedger χρειάζεται να πουλήσει ο κερδοσκόπος θα αγοράσει και το αντίστροφο. Οι κερδοσκόποι αναλαμβάνουν ρίσκα που πιστεύουν ότι θα οδηγήσουν σε κέρδη. Ουσιαστικά, κάνουν κινήσεις για να επιφέρουν αύξηση της διασποράς του τυχαίου κέρδους τους. Από τις κινήσεις τους μπορούν να θεωρηθούν ότι «στοιχηματίζουν» σε κάποια μεταβολή της τιμής μιας μετοχής. Ας δούμε τι γίνεται στο παράδειγμα που αναφέραμε και προηγουμένως. Έστω ένας κερδοσκόπος που πιστεύει ότι η τιμή του δολαρίου έναντι του ευρώ θα ανέβει τότε μπορεί να αγοράσει ένα ΣΜΕ όπου σε 6 μήνες από τώρα θα αγοράσει 100.000 δολάρια ως προς 85.000 ευρώ το ένα. Αν η τιμή του δολαρίου όντως ανέβει τότε ο επενδυτής θα έχει κέρδος. Σε αντίθετη περίπτωση, θα έχει ζημία. Η σημαντική διαφορά είναι απλώς ότι αν αγόραζε στη σημερινή ισοτιμία θα έπρεπε να πληρώσει τώρα ενώ με το ΣΜΕ θα πληρώσει σε 6 μήνες και ουσιαστικά μόνο αν έχει ζημία.

iii. Arbitrageurs

Η συγκεκριμένη κατηγορία επενδυτών δε επιζητά το κέρδος αλλά προσπαθεί να εντοπίσει πρόσκαιρες συνθήκες ανισορροπίας στην αγορά και με κατάλληλη στρατηγική να επιτύχει σίγουρο κέρδος χωρίς ρίσκο. Ο όρος arbitrage μπορεί να ερμηνευθεί και ως εξισορροποιητική κερδοσκοπία. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του όρου. Έστω μια μετοχή που είναι διαθέσιμη ταυτόχρονα σε δύο χρηματιστήρια Α και Β με τιμή 150 δολάρια και 100 ευρώ αντίστοιχα, ενώ η τρέχουσα ισοτιμία των δύο νομισμάτων είναι 1 ευρώ= 1.8 δολάρια. Ένας arbitrageur μπορεί να αγοράσει 100 μετοχές από το χρηματιστήριο Α και να τις πουλήσει στο Β με κέρδος 100×(-150+1.8*100)=3.000 δολάρια, χωρίς να υπολογίζονται τα έξοδα συναλλαγών. Με αυτόν τον τρόπο έχει σίγουρο κέρδος χωρίς ρίσκο. Βέβαια όπως γίνεται εύκολα κατανοητό αυτό δε θα μπορούσε να συμβαίνει για μεγάλο χρονικό διάστημα καθώς πολλοί θα ήταν εκείνοι που θα έσπευδαν να κάνουν ακριβώς το ίδιο με αποτέλεσμα την αύξηση της τιμής της μετοχής στο χρηματιστήριο Α και τη μείωσή της στο Β οδηγώντας έτσι σε ένα σημείο ισορροπίας την αγορά που δε θα επέτρεπε πια σίγουρο κέρδος. Επομένως, οι ευκαιρίες για arbitrage που είχαν εμφανιστεί στην αγορά πολύ γρήγορα θα εξαφανίζονταν [30, σελ10-11].

Εν κατακλείδι, θα μπορούσαμε να επισημάνουμε ότι η αγορά των παραγώγων έχει δύο βασικούς στόχους: την αντιστάθμιση κινδύνων σε χαρτοφυλάκια έτσι ώστε να είναι εφικτή η αποτελεσματική αντιμετώπιση ενός επικείμενου κινδύνου αλλά και η κερδοσκοπία που βασίζεται στην αβεβαιότητα της αγοράς όπου κύριος στόχος του κάθε επενδυτή είναι να εκμεταλλευτεί μια πιθανή άνοδο της αγοράς.

2.3 Στρατηγικές που αφορούν συνδυασμό δικαιωμάτων προαίρεσης και αγοραπωλησία μετοχών

Σε ολόκληρη την ενότητα 2.2, αναφέραμε τις πιθανές θέσεις που μπορεί να λάβει ένας επενδυτής σύμφωνα με τη στρατηγική που θέλει να ακολουθήσει χρησιμοποιώντας δικαιώματα προαίρεσης αλλά και το κέρδος που μπορεί να του επιφέρει αυτό, ανάλογα με τη φύση αλλά και τις προβλέψεις που κάνει. Στην ενότητα που ακολουθεί θα επισημάνουμε πιο σύνθετες θέσεις που μπορεί να λάβει κάποιος χρησιμοποιώντας περισσότερα από ένα δικαίωμα προαίρεσης κάθε φορά.

2.3.1Συνδυασμός μιας μετοχής κι ενός δικαιώματος προαίρεσης επί αυτής της μετοχής

Υπάρχουν τέσσερις στρατηγικές που αφορούν αυτόν τον συνδυασμό:

- <u>Καλυμμένο δικαίωμα αγοράς</u>: έχει να κάνει με την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς επί μιας μετοχής ABC και την ταυτόχρονη αγορά της μετοχής αυτής στην τρέχουσα τιμή της. Χρησιμοποιείται από τους επενδυτές για να καλυφθούν σε περίπτωση απότομης αύξησης της τιμής της μετοχής. Αυτό συμβαίνει διότι το ρίσκο του επενδυτή περιορίζεται αρκετά όταν θα πουλήσει το καλυμμένο δικαίωμα αγοράς καθώς διαθέτει ήδη τη μετοχή ABC για να καλύψει το δικαίωμα εάν τελικά το καλυμμένο δικαίωμα αγοράς εξασκηθεί. Έτσι λοιπόν, αν τελικά η τιμή της μετοχής πέσει και το καλυμμένο δικαίωμα δεν εξασκηθεί ο επενδυτής κερδίζει απλά το ασφάλιστρο από την πώληση. Το μέγιστο κέρδος σε μια τέτοια στρατηγική είναι ίσο με τη τιμή του δικαιώματος αγοράς (συμβαίνει όταν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης), η δε ζημιά είναι φραγμένη (στη περίπτωση μεγάλης καθόδου της τιμής της μετοχής).

- <u>Καλυμμένο δικαίωμα πώλησης</u>: πρόκειται για τον συνδυασμό πώλησης ενός δικαιώματος πώλησης επί μιας μετοχής ABC και την ταυτόχρονη πώληση της μετοχής αυτής. Ουσιαστικά χρησιμοποιείται από τον επενδυτή για να καλυφθεί στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής κινηθεί σε χαμηλά επίπεδα και πρέπει το συμβόλαιο το οποίο πούλησε να εξασκηθεί. Ο πωλητής του δικαιώματος πώλησης πουλάει εκ των προτέρων τις μετοχές που αντιστοιχούν στο συμβόλαιο του για να είναι καλυμμένος, έχει ωστόσο την υποχρέωση να αγοράσει στην τιμή εξάσκησης. Ο αγοραστής από την άλλη έχει την επιλογή και όχι την υποχρέωση να πουλήσει στην τιμή εξάσκησης.

- <u>Προστατευτικό δικαίωμα αγοράς</u>: πρόκειται για τη στρατηγική που έχει να κάνει με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και την παράλληλη πώληση της μετοχής στην τρέχουσα τιμή. Στόχος είναι ο περιορισμός της (πιθανής) ζημιάς σε περίπτωση ανόδου της τιμής της μετοχής.

- <u>Προστατευτικό δικαίωμα πώλησης</u>: αφορά την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης μαζί με την ταυτόχρονη αγορά της μετοχής ABC. Κύριος στόχος της στρατηγικής αυτής είναι ο περιορισμός της πιθανής ζημιάς σε περίπτωση πτώσης της τιμής της μετοχής. Αν τελικά η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, τότε το δικαίωμα δίνει τη δυνατότητα στον επενδυτή να το πουλήσει σε αυτήν και ανάλογα με την τιμή απόκτησης της μετοχής έχει κάποιο κέρδος ή έστω περιορισμένη ζημία. Αντίθετα, αν η τιμή της μετοχής ανέβει τότε το δικαίωμα δε θα εξασκηθεί και ο επενδυτής θα χάσει μόνο το αντίτιμο του δικαιώματος πώλησης.

2.3.2 Συνδυασμός ενός δικαιώματος προαίρεσης ίδιου τύπου επί της ίδιας μετοχής

Με τον όρο «spread» αναφερόμαστε στην έννοια της διασπορά τιμών ή πραγμάτων. Ουσιαστικά εννοούμε την *μονάδα μέτρησης της διασποράς - διαφοράς δύο τιμών*. Η διαφορά αυτή μπορεί να αναφέρεται στις τιμές των αποδόσεων δυο ομολόγων. Οι στρατηγικές των spreads είναι συνδυασμός *δικαιωμάτων πάνω στον ίδιο υποκείμενο τίτλο*, έχουμε δηλαδή *αγορά και πώληση του ίδιου δικαιώματος*.
Τα δικαιώματα πώλησης και αγοράς, πάνω στα οποία εφαρμόζεται το spread, μπορεί να έχουν διαφορετική τιμή εξάσκησης ή διαφορετική ημερομηνία λήξεως ή και τα δύο. Τα spreads διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

- Bull spread – Ανοδικό άνοιγμα: η στρατηγική αυτή που χρησιμοποιείται κυρίως στην περίπτωση που ο επενδυτής αναμένει άνοδο της τιμής της μετοχής αφορά την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1 και ημερομηνία λήξης T και την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2>K_1 και την ίδια ημερομηνία λήξης T. Το μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην ημερομηνία λήξης είναι μεγαλύτερη από το K_2 και η μέγιστη ζημία όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην ημερομηνία λήξης είναι μικρότερη από το K_1.

- Bear spread – Καθοδικό άνοιγμα: η θέση αυτή που χρησιμοποιείται στην περίπτωση προσμονής πτώσης της τιμής της μετοχής και αφορά πάλι την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1 και ημερομηνία λήξης T και την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2 με τη διαφορά οτι τώρα επιλέγουμε K_2<K_1. Το μέγιστο κέρδος επιτυγχάνεται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην ημερομηνία λήξης είναι μικρότερη από το K_2. Η μέγιστη ζημία επιτυγχάνεται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από το K_1.

- Butterfly spread: η στρατηγική αυτή χρησιμοποιείται όταν οι επενδυτές δεν προσδοκούν μεγάλες διακυμάνσεις της τιμής της υποκείμενης μετοχής και έτσι τόσο το κέρδος όσο και η ζημία είναι περιορισμένες. Στη περίπτωση αυτή μιλάμε για τρία διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης με διαφορετικές τιμές εξάσκησης K_1, K_2, K_3. Πιο συγκεκριμένα, συνδέεται με την αγορά δύο δικαιωμάτων αγοράς με τιμές εξάσκησης K_1, K_3 αντίστοιχα όπου K_1<K_3 και την ταυτόχρονη πώληση δύο δικαιωμάτων αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2. Τα δικαιώματα είναι επί της ίδιας μετοχής και έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης. Το K_2 επιλέγεται να είναι συνήθως το $\frac{K_1+K_3}{2}$ και βρίσκεται κοντά στην τρέχουσα τιμή της μετοχής. Η μέγιστη ζημιά επιτυγχάνεται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην ημερομηνία λήξης είναι ίση με την τιμή K_2. Αντίθετα η μέγιστη ζημία επιτυγχάνεται όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την K_3 ή μικρότερη από την K_1 [30].

Εν κατακλείδι, θα πρέπει να αναφέρουμε οτι η στρατηγική των spreads προτιμάται από επενδυτές που επιθυμούν μέτρια απόδοση και περιορισμένο κίνδυνο στις συναλλαγές τους.

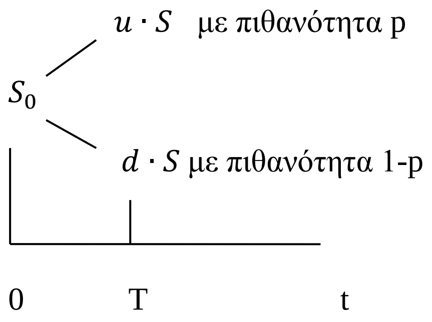
2.4 Διωνυμικό Μοντέλο

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη αξία C ενός δικαιώματος προαίρεσης (αγοράς ή πώλησης, Ευρωπαϊκού τύπου) όπως αυτά που αναφέραμε στην ενότητα 2.2. Η τιμολόγηση αυτή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: το μοντέλο των Black-Scholes (1979) σύμφωνα με το οποίο η τιμή της μετοχής ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown (ενότητα 2.8) και το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης.

Αρχικά, θα μελετήσουμε το διωνυμικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων γνωστό και ως “Binomial Model of European Call-Options”. Το μοντέλο αυτό μπορεί να προσεγγιστεί με δύο μεθόδους, την “Risk-Neutral Approach” και την “Replicating Portfolio Approach” τις οποίες θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

- **Risk-Neutral Approach**

Ξεκινώντας τη μελέτη μας, είναι συνετό να θεωρήσουμε ότι το υπό θεώρηση περιουσιακό στοιχείο του χαρτοφυλακίου μας είναι μια μετοχή η οποία πληρώνει μερίσματα (dividends) και επιπλέον η μετοχή αυτή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου είτε ανεβαίνει (up-state) είτε κατεβαίνει (down-state), ακολουθώντας δηλαδή ένα απλοποιημένο μοντέλο. Επιπλέον, δε θα πρέπει να ξεχνάμε ότι ισχύει η υπόθεση ότι η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και άρα η τιμή C θα είναι τέτοια ώστε να μη προσφέρει ευκαιρία για arbitrage. Έστω S_0 η τιμή της μετοχής σήμερα και T ο χρόνος λήξης του δικαιώματος και $0<d<u$. Αναπαριστώντας στο διωνυμικό δέντρο (binomial tree) τις δύο πιθανές καταστάσεις τις μετοχής στο τέλος της περιόδου προκύπτει:



Εικόνα 2.4.1: Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε τα χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούμε στην ανάπτυξη του διωνυμικού μοντέλου. Αρχικά πρέπει να διευκρινίσουμε ότι το επιτόκιο προεξόφλησης r που χρησιμοποιείται επιλέγεται από το επιτόκιο μιας σίγουρης επένδυσης όπως τα κρατικά ομόλογα. Αν μιλάμε για χρηματικές ροές που αφορούν διακριτό χρόνο τότε αν επενδύσουμε μια νομισματική μονάδα τη στιγμή μηδέν, θα λάβουμε 1+r τη χρονική στιγμή 1, ενώ αν βρισκόμαστε στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου τη χρονική στιγμή ένα θα λάβουμε e^{rh}. Στο μοντέλο που μελετάμε ισχύει η συνθήκη no-arbitrage (για τις αγορές που παρουσιάζουν ευκαιρία για arbitrage αναφερθήκαμε στην ενότητα 2.2.1) $\mathrm{d} < 1 + r < u$ ή $\mathrm{d} < \mathrm{e}^{(\mathrm{r}-\delta)\mathrm{h}} < u$ στη διακριτή ή στη συνεχή περίπτωση χρόνου αντίστοιχα. Αν στο τέλος της περιόδου ίσχυε $\mathrm{d} \geq 1 + \mathrm{r}$ ή $\mathrm{e}^{(\mathrm{r}-\delta)\mathrm{h}} \leq \mathrm{d}$ τότε ο επενδυτής που στο χρόνο μηδέν είχε αγοράσει την μετοχή εκδίδοντας για παράδειγμα ομόλογα για να καλύψει την αγορά του, τη χρονική στιγμή ένα πουλάει τη μετοχή για να επιστρέψει στον ιδιοκτήτη το ποσό που χρειάζεται, έχοντας σαν βέβαιο κέρδος τη διαφορά. Σε αντίθετη περίπτωση, ο επενδυτής θα λάβει τις αντίθετες θέσεις (ανοιχτή αγορά ομολόγων, ανοιχτή πώληση μετοχής) πάλι θα έχει σίγουρο κέρδος. Γεγονός που δε γίνεται, γιατί κάτι τέτοιο θα συμβεί για μικρό χρονικό διάστημα μέχρι οι τιμές των τίτλων μας να μεταβληθούν και η αγορά να επέλθει σε κατάσταση ισορροπίας και πάλι. Οι ευκαιρίες για arbitrage εμφανίζονται κυρίως όταν τα δικαιώματα προαίρεσης είναι mispriced δηλαδή όταν η actual price είναι διαφορετική από την theoretical price του δικαιώματος.

Όπως είναι φανερό το διωνυμικό μοντέλο δεν είναι το καταλληλότερο μοντέλο για να περιγράψει επαρκώς τη κίνηση της τιμής της μετοχής στην περίπτωση της μιας περιόδου. Όταν όμως αφορά πολλές περιόδους αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση στη περίπτωση του συνεχούς χρόνου για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων. Στο σημείο αυτό, θα συνεχίσουμε με την ανάλυση του μοντέλου μας.

- Έστω K η τιμή άσκησης του δικαιώματος,
- $\mathrm{C_u} = \max\{0. \mathrm{u} \cdot \mathrm{S} - \mathrm{K}\}$ η τιμή του δικαιώματος όταν η μετοχή είναι σε up-state

- $C_d = \max\{0, d \cdot S - K\}$ η τιμή του δικαιώματος όταν η μετοχή είναι σε down-state

  Το παραπάνω απλοποιημένο μοντέλο είναι το **διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου**. Στόχος είναι να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο C ενός δικαιώματος αγοράς, δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή έτσι ώστε να αποκτήσει το δικαίωμα να αγοράσει μετά από χρόνο T το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, που στην περίπτωσή μας είμαι μια μετοχή, σε προκαθορισμένη τιμή K. Χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες ουδέτερου ρίσκου (risk-neutral probabilities):

- $p_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d}$ και $p_d = \frac{u-e^{(r-\delta)h}}{u-d}$ όπου r το επιτόκιο risk-free ανατοκιζόμενο συνεχώς και δ η απόδοση (field) του μερίσματος της μετοχής το οποίο επενδύεται ξανά, συσσωρεύοντας $e^{\delta h}$ μερίσματα στο τέλος της περιόδου.

  Στην risk neutral approach που μελετάμε στο σημείο αυτό η αναμενόμενη τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι της μορφής:

  $C = p_u \cdot C_u + p_d \cdot C_d.$

  Υπολογίζοντας τη present value της τελευταίας εξίσωσης προκύπτει τελικά ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς (price of call option) είναι η:

$$\mathbf{C = e^{-rh}[p_u \cdot C_u + p_d \cdot C_d]}$$

Στο σημείο αυτό, θα αναφέρουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα όσα αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για μια μετοχή Ναυτιλιακής εταιρίας με τιμή άσκησης K=95 ευρώ και διάρκεια 6 μήνες μέχρι τη λήξη του (h=$1/2$). Η μετοχή δεν πληρώνει μερίσματα (δ=0). Η σημερινή αξία της μετοχής είναι S=100 ευρώ και ετήσιο risk free επιτόκιο r=8% ανατοκιζόμενο συνεχώς. Σε έξι μήνες από τώρα η μετοχή αναμένεται είτε να ανέβει σε 130 ευρώ (up-state) είτε να πέσει στα 80 ευρώ (down-state). Να βρεθεί η τιμή C του call option θεωρώντας το διωνυμικό μοντέλο (risk-neutral approach).

Λύση:

Η τιμή C του call option δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{C = e^{-rh}[p_u \cdot C_u + \ p_d \cdot C_d]}$$

όπου, οι C_u, C_d, p_u, p_d δίνονται από τους τύπους που αναφέραμε προηγουμένως.

$$C_u = \max\{0, 1.3 \cdot 100 - 95\} = 35$$
$$C_d = \max\{0, 0.8 \cdot 100 - 95\} = 0$$

$p_u = \frac{e^{0.08*0.5} - 0.8}{1.3 - 0.8} = 0.4816$ και

$p_d = 1 - p_u = 0{,}5184.$ Τελικά η τιμή του δικαιώματος είναι:

$C = e^{0.08*0.5}[0.4816 * 35 + 0.5184 * 0] = 16.20$ ευρώ

Με αυτό τον τρόπο γίνεται εμφανές ότι η risk-neutral πιθανότητα να ανέβει η τιμή της μετοχής από 100 σε 130 ευρώ είναι 48,16%, ενώ η risk-neutral πιθανότητα να πέσει στα 80 ευρώ είναι 51,84%. Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες p_u, p_d βρίσκονται κοντά στο 50% γεγονός που σημαίνει ότι το μοντέλο μας έκανε σωστή εκτίμηση της τιμής του call option.

Στη συνέχεια, όπως αναφέραμε προηγουμένως θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο ανασυγκρότησης χαρτοφυλακίου όπου στόχος είναι η χρήση ενός δανείου και ενός υποκείμενου τίτλου, στην περίπτωση μας μια μετοχή, για τη δημιουργία τέτοιων ταμειακών ροών όμοιων με αυτών της αποτίμησης του δικαιώματος. Η τιμή του replicating portfolio και της no-arbitrage αξίας του δικαιώματος είναι ίσες.

- ## Replicating Portfolio approach

Αυτή η μέθοδος αποτελεί μια προσέγγιση για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων με σκοπό την εύρεση της τιμής του δικαιώματος την χρονική στιγμή μηδέν και αφορά τη δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αντικαθιστά τη τιμή του δικαιώματος αγοράς ή πώλησης ή τη τιμή του actual option. Η ιδέα του Replicating portfolio στηρίζεται στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου με Δ το πλήθος μεριδίων μιας μετοχής και ενός δανείου Β τα οποία εξασφαλίζουν τον πωλητή του δικαιώματος από τον κίνδυνο που μπορεί να επιφέρει η πώλησή του. Τέτοια Δ,Β ορίζονται ώστε τη χρονική στιγμή της λήξης ενός δικαιώματος οι πληρωμές να ταιριάζουν. Η αξία του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης κάθε χρονική στιγμή ισούται με την no-arbitrage αξία του δικαιώματος ανεξάρτητα αν η τιμή της μετοχής ήταν ανοδική ή καθοδική. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι το μέγεθος της ανόδου ή της πτώσης δηλαδή πολύ σημαντικό ρόλο παίζουν τα μεγέθη u,d. Αυτό συνεπάγεται ότι η τιμή του replicating portfolio θα ισούται με την no-arbitrage τιμή του δικαιώματος. Το σημερινό κόστος για το call optionτου χαρτοφυλακίου A είναι ισοδύναμο με το πλήθος των μεριδίων του χαρτοφυλακίου B συν το δανεισμό/ομολογία, δηλαδή ισχύει:

$$\mathrm{C} = \Delta \cdot \mathrm{S} + \mathrm{B}.$$

Επίσης, στο τέλος της περιόδου ισχύει ότι

$$\mathrm{C_u} = \Delta \cdot \mathrm{u} \cdot \mathrm{S}e^{\delta \mathrm{h}} + \mathrm{B}e^{\mathrm{rh}} \quad \text{και}$$

$$\mathrm{C_d} = \Delta \cdot \mathrm{d} \cdot \mathrm{S}e^{\delta \mathrm{h}} + \mathrm{B}e^{\mathrm{rh}}$$

αν η τιμή της μετοχής ανέβει ή πέσει αντίστοιχα. Λύνοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\Delta = e^{-\delta \mathrm{h}} \frac{\mathrm{C_u} - \mathrm{C_d}}{(\mathrm{u}-\mathrm{d}) \cdot \mathrm{S}} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{B} = e^{-\mathrm{rh}} \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{C_d} - \mathrm{d} \cdot \mathrm{C_u}}{(\mathrm{u}-\mathrm{d})}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επειδή λοιπόν όπως αναφέραμε ήδη η τιμολόγηση ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος ισοδυναμεί με αυτήν ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου εξασφάλισης όπως περιγράψαμε προηγουμένως θα μελετήσουμε πάλι το παράδειγμα που αναφέραμε στο διωνυμικό μοντέλου μιας περιόδου αυτή τη φορά όμως στα πλαίσια του χαρτοφυλακίου ανασυγκρότησης που θα κατασκευάσουμε. Για τον λόγο αυτό τα δεδομένα παραμένουν και έτσι ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση:

$$\mathrm{C_u} = \max\{0, 1.3 \cdot 100 - 95\} = 35$$
$$\mathrm{C_d} = \max\{0, 0.8 \cdot 100 - 95\} = 0$$

Επιπλέον,

$$\Delta = e^{-\delta \mathrm{h}} \frac{\mathrm{C_u} - \mathrm{C_d}}{(\mathrm{u}-\mathrm{d}) \cdot \mathrm{S}} = \frac{35-0}{(1.3-0.8)100} = 0.7 \quad \text{και}$$

$$\mathrm{B} = e^{-\mathrm{rh}} \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{C_d} - \mathrm{d} \cdot \mathrm{C_u}}{(\mathrm{u}-\mathrm{d})} = \frac{e^{-0.04}(-0.8 \cdot 35)}{0.5} = -53.82$$

Άρα τελικά, $C = \Delta \cdot S + B = 0{,}7 \cdot 100 + (-53.82) = 70 - 53.82 = 16.20€$

Όπως γίνεται κατανοητό ο επενδυτής αυτού του χαρτοφυλακίου ουσιαστικά δανείζεται το ποσό των 53.82€ με ετήσιο επιτόκιο 8% για ένα μήνα και στο τέλος της περιόδου μαζί με το ποσό που θα εισπράξει από την πώληση του δικαιώματος θα αγοράσει το 70% της μετοχής. Όπως είναι αναμενόμενο η τιμή του δικαιώματος είναι ίδια και ίση με 16.2€ και στις δύο περιπτώσεις δεδομένου οτι τα Δ,Β είναι τέτοια έτσι ώστε οι πληρωμές να ταιριάζουν στη λήξη του δικαιώματος.

2.5 **Δέλτα** (“Delta”)

Προκειμένου να αντισταθμίσουμε τις θέσεις των options είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε αλλά και να μελετήσουμε την ευαισθησία των τιμών τους σε ποικίλους παράγοντες της αγοράς. Αυτοί οι παράγοντες είναι οι παραδοσιακοί δείκτες ευαισθησίας ή “Greeks”.

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας θα αναφερθούμε στον δείκτη ευαισθησίας Δέλτα. Ο όρος «δέλτα» αποτελεί μια συνηθισμένη ορολογία που χρησιμοποιείται στις αγορές δικαιωμάτων προαίρεσης για τον αριθμό των μονάδων του υποκείμενου προϊόντος (στη περίπτωσή μας είναι η μετοχή) που χρησιμοποιούνται στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Το δέλτα ουσιαστικά μετράει την ευαισθησία του δικαιώματος σε σχέση με την αλλαγή της τιμής της μετοχής, όταν δηλαδή η τιμή της μετοχής αυξηθεί κατά 1 ευρώ δηλαδή $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$.

Επιπλέον, το δέλτα μπορεί μέσω του μοντέλου τιμολόγησης των Black and Scholes να είναι ίσο με $N(d_1)$ για ένα call option. Με άλλα λόγια ισούται με τη συνάρτηση κατανομής για το d_1 και αφού παριστάνει πιθανότητα είναι οτι το δέλτα δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

Γίνεται εύκολα κατανοητή η σημαντικότητα της μελέτης αυτού του δείκτη ευαισθησίας που χρησιμοποιείται στην αντιστάθμιση κινδύνων δεδομένου οτι μετρά την αλλαγή της τιμής των δικαιωμάτων όταν αλλάζει και η τιμή του υποκείμενου τίτλου.

Άλλοι τέτοιοι δείκτες ευαισθησίας είναι:

- Δέλτα (Delta)
- Γάμα (Gamma)
- Βέγκα (Vega)
- Θήτα (Theta)

Στον παρακάτω πίνακα, παρουσιάζουμε τους υπόλοιπους δείκτες ευαισθησίας που χρησιμοποιούνται στην αγορά και δίνεται η σημασία τους σε σχέση με τις αλλαγές που προκύπτουν στα χαρακτηριστικά της αγοράς.

GREEK	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ	ΣΗΜΑΣΙΑ
Delta	$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$	Όταν αυξάνεται η τιμή της μετοχής αυξάνεται και το C.
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	Ως 2η παράγωγος του C, αλλαγή του delta επιφέρει αλλαγή στη τιμή της μετοχής.
Theta	$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$	Όταν αυξάνεται ο χρόνος t, η τιμή του C μειώνεται.
Rho	$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$	Μέτρο ευαισθησίας της τιμής του C ως προς πιθανές αλλαγές του επιτοκίου της αγοράς. Αύξηση του επιτοκίου συνεπάγεται αύξηση του C.
Vega	$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$	Αύξηση της μεταβλητότητας σ σημαίνει και αύξηση του C.

Πίνακας 2: Δείκτες ευαισθησίας της αγοράς.

Στο σημείο αυτό, θα μελετήσουμε ένα πολύ σημαντικό κομμάτι της Μαθηματικής επιστήμης που αφορά τις στοχαστικές διαδικασίες με κύριο σκοπό την τιμολόγηση των παράγωγων χρηματοοικονομικών παραγώγων γενικά αλλά και των δικαιωμάτων προαίρεσης ειδικότερα.

2.6 Στοχαστικές διαδικασίες - Βασικοί ορισμοί και έννοιες

Έστω ότι διεξάγουμε ένα τυχαίο πείραμα όπως για παράδειγμα η ρίψη ενός ζαριού. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτό το πείραμα είναι ένας αριθμός που ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών άρα μπορεί να εκφραστεί με μια τυχαία μεταβλητή που κι αυτή θα ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς. Σε πιο σύνθετα πειράματα όμως, όπως ο χρόνος ζωής σε ώρες ενός μηχανήματος ή η κίνηση της τιμής μιας μετοχής στις οποίες θέλουμε να γνωρίζουμε την τιμή περισσότερων ποσοτήτων σε κάθε χρονική στιγμή t, αυτό δε μπορεί να επιτευχθεί μέσω τυχαίων μεταβλητών αλλά μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t, t \geq 0\}$. Όπως γίνεται κατανοητό αυτή η αναγκαιότητα για τη μελέτη και την μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων μέσω της μαθηματικής επιστήμης τα οποία εξελίσσονται στο χρόνο κατά τυχαίο τρόπο και όχι κατά τρόπο προσδιοριστικό οδήγησε στην ανάπτυξη της Θεωρίας των Στοχαστικών Διαδικασιών.

Ας υποθέσουμε ότι η ισοτιμία συναλλάγματος Δολαρίου/Ευρώ στιγμιαία κάθε χρονική στιγμή t μεταξύ 10:00 π.μ. και 11:00 π.μ. στις 12-5-2016 δίνεται τυχαία.

Επομένως, μπορούμε να την ερμηνεύσουμε σαν μια πραγματοποίηση $X_t(\omega)$ της τυχαίας μεταβλητής X_t και έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε τις τιμές της $X_t(\omega)$ για κάθε $10 \leq t \leq 11$. Αν θέλουμε στις 11:00 π.μ. να μαντέψουμε την τιμή της ισοτιμίας $X_{12}(\omega)$ στις 12:00 μ.μ. είναι λογικό να πρέπει να παρατηρήσουμε και να μελετήσουμε την εξέλιξη των τιμών που πήρε η $X_t(\omega)$ μεταξύ 10:00 π.μ. και 11:00 π.μ. Το μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να περιγράψει μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται στοχαστική διαδικασία [27, σελ.23-24].

Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$ *σε κάποιο δειγματικό χώρο Ω.*

Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή tθεωρείται ως μια τυχαία μεταβλητή:

$X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega$.

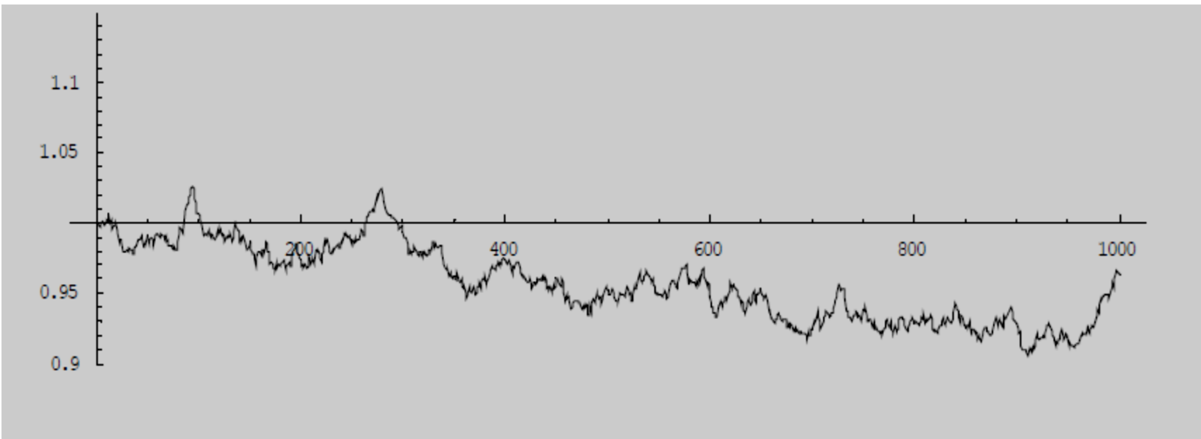
Για μια συγκεκριμένη τυχαία μεταβλητή θεωρείται ως μία συνάρτηση του χρόνου:

$X_t = X_t(\omega), t \in T$.

Αυτή η συνάρτηση καλείται **τροχιά (path) της διαδικασίας X**.

Παράδειγμα

Έστω ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής στο χρόνο: Θεωρούμε ότι η τιμή της μετοχής είναι συνεχής συνάρτηση και δεν παρουσιάζει άλματα, τότε μια πραγματοποίησή της $\{X(t,\omega), t \geq 0\}$ για συγκεκριμένο ω έχει τη μορφή:



Σχήμα 2.5.1: Πραγματοποίηση της X(t), σε συνεχή χρόνο [31, σελ.48].

2.7 Κίνηση Brown

Σε προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε το διωνυμικό μοντέλο έχοντας κάνει την παραδοχή ότι η τιμή της μετοχής κινείται σε διακριτό χρόνο με συγκεκριμένες πιθανότητες. Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την κίνηση Brown που αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες και συντελεί στη βασική θεμελίωση των χρηματοοικονομικών μαθηματικών με τη διαφορά όμως ότι τώρα αναφερόμαστε σε μοντέλα συνεχούς χρόνου.

Η κίνηση Brown μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας τυχαίος περίπατος όπου ένα νόμισμα ρίχνεται απείρως γρήγορα και με απειροελάχιστα μικρά βήματα σε κάθε βήμα. Αυτό λοιπόν είναι και η κίνηση Brown, ένας τυχαίος περίπατος που λαμβάνει χώρα σε συνεχή χρόνο με κινήσεις που είναι περισσότερο συνεχείς παρά διακριτές. Η κίνηση αυτή χαρακτηρίζεται από μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών Z=$\{Z(t)\}$ σε χρόνο t όπου η $Z(t)$ αναπαριστά το τυχαίο περίπατο - το συνολικό άθροισμα όλων των κινήσεων - μετά από t-περιόδους. Μια τέτοια οικογένεια καλείται στοχαστική διαδικασία.

Για μια κίνηση Brown η οποία ξεκινά από το z, η διαδικασία $Z(t)$ έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- $Z(0) = z$.
- Η διαφορά $Z_t - Z_s$ για κάθε $0 \leq s < t$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 0 και τυπική απόκλιση t-s.
- Η $\{Z(t), t \in R_+\}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- Οι τροχιές $\{Z(t), t \in R_+\}$ είναι συνεχείς.

Αν $z = 0$ τότε η κίνηση Brown καλείται **κίνηση Wiener** [33, σελ.63].

Μια στοχαστική διαδικασία $\{Z_t, t \in T, T \neq 0\}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις, αν για κάθε s,t ∈ T η συνάρτηση κατανομής της $Z_{t+h} - Z_{s+h}$ είναι ίδια για κάθε h ώστε t+h, s+h ∈ R [34, σελ.170].

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι μια κίνηση Brown Z μπορεί να προσεγγιστεί από ένα σύνολο (άθροισμα) ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών. Έχοντας ως δεδομένο ότι η Z είναι συνεχής, για μια μικρή χρονική περίοδο h μπορούμε να εκτιμήσουμε την μεταβολή της Z από το χρόνο t στο χρόνο t+h μέσω της εξίσωσης:

$$Z(t+h) - Z(t) = Y(t+h)\sqrt{h}$$

Όπου $Y(t) = \pm 1$ με πιθανότητα 0.5 με $\mathrm{E}\big(\mathrm{Y(t)}\big) = 0$ και $\mathrm{Var}\big(\mathrm{Y(t)}\big) = 1$, δηλαδή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή. Θεωρούμε το διάστημα $[0, \mathrm{T}]$ το οποίο και χωρίζουμε σε n μικρότερα υποδιαστήματα μήκους $\mathrm{h} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{n}}$ το καθένα. Τότε έχουμε:

$$\mathrm{Z(T)} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \big[\mathrm{Z(ih)} - \mathrm{Z}\big((\mathrm{i}-1)\mathrm{h}\big)\big] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y(ih)}\sqrt{\mathrm{h}} = \sqrt{\mathrm{T}}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y\,(ih)}\right]$$

Εφόσον $\mathrm{E}\big(\mathrm{Y(t)}\big) = 0$ έχουμε ότι

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y\,(ih)}\right] = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{E}\big(\mathrm{Y\,(ih)}\big) = 0$$

Με τον ίδιο τρόπο αφού $Var\big(Y(t)\big) = 1$ έχουμε ότι

$$\mathrm{Var}\left[\tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y\,(ih)}\right] = \tfrac{1}{\mathrm{n}}\textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Var}\big(\mathrm{Y\,(ih)}\big) = \tfrac{1}{\mathrm{n}}\textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} 1 = 1$$

Όπως γίνεται αντιληπτό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κανονική κίνηση Brown ουσιαστικά δημιουργείται από το άθροισμα ανεξάρτητων διωνυμικών δοκιμών με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση h.

Κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ) προκύπτει ότι το όριο $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y(ih)}$ προσεγγίζει μια κανονική κατανομή W.

Επομένως, $\mathrm{Z(T)} = \sqrt{\mathrm{T}}\,\mathrm{W}(T)$. Κατά συνέπεια, η $\mathrm{Z(T)}$ προσεγγίζεται από μια κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση T.

Το $\mathrm{Z(T)} = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{dZ(t)}$ καλείται στοχαστικό ολοκλήρωμα.

Αν θεωρήσουμε το διάστημα h σαν dt και τη μεταβολή της Z σε $\mathrm{dZ(t)}$ τότε προκύπτει η ακόλουθη η διαφορική εξίσωση:

$$\mathrm{dZ(t)} = \mathrm{W(t)}\sqrt{\mathrm{dt}}.$$

Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι σε μικρές χρονικές περιόδους αλλαγές στην αξία της διαδικασίας κατανέμονται με βάση την κανονικά κατανομή και με διασπορά που είναι ανάλογη του μήκους του χρονικού διαστήματος.

Επιπλέον, για τη διακύμανση της κανονικής κίνησης Brown ισχύει ότι:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |\mathrm{Z(t_i)} - \mathrm{Z(t_{i-1})}| = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |\mathrm{Y_{ih}}|\sqrt{\mathrm{h}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{h}$$

$$=\sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n}\quad=\infty$$

Με άλλα λόγια, αυτό μπορούμε να το ερμηνεύσουμε με λόγια ως το γεγονός ότι το μονοπάτι που ακολουθεί η κίνηση Brown κινείται πολύ γρήγορα με ανοδικές και καθοδικές κινήσεις στο διάστημα $[0,\mathrm{T}]$. *Αυτό σημαίνει ότι το μονοπάτι θα περάσει από το σημείο εκκίνησης άπειρες φορές σε αυτό το χρονικό διάστημα* [31, σελ.58-61].

2.8 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown που αποτελεί το καταλληλότερο μοντέλο για την περιγραφή της εξέλιξης των τιμών των αγαθών ή των χρηματιστηριακών προϊόντων όπως δείκτες μετοχών.

Οι δύο σημαντικότεροι λόγοι για τους οποίους δεν χρησιμοποιούμε την κίνηση Brown, με την οποία ασχοληθήκαμε και στην προηγούμενη ενότητα, είναι ότι πρώτον η συγκεκριμένη ανέλιξη λαμβάνει και αρνητικές τιμές γεγονός που στη περίπτωση της τιμής μιας μετοχής για παράδειγμα δεν είναι λογικό και δεύτερον η αύξηση ή η μείωση μιας τιμής από τον χρόνο t σε χρόνο t+h δεν εξαρτάται από τη σημερινή τιμή, κάτι που δε ταιριάζει σε πραγματικά δεδομένα. Αντίθετα, στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής $\frac{\mathrm{S(i)}}{\mathrm{S(i-1)}}$ είναι ανεξάρτητη της τιμής και θα λαμβάνει είτε την τιμή $\mathrm{S(i-1)\cdot u}$ με πιθανότητα p είτε την τιμή $\mathrm{S(i-1)}\cdot$d με πιθανότητα 1-p.

Έστω $\mathrm{S(t)}$ η τιμή μιας μετοχής σε χρόνο t και $\mathrm{S(0)}$ η σημερινή τιμή της στο χρόνο 0. Στη περίπτωση της γεωμετρικής κίνησης Brown όπου αναφερόμαστε σε συνεχή χρόνο, *η ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής σε κάθε απειροστό διάστημα χρόνου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το παρελθόν,* γεγονός που συνάδει με τη «συμπεριφορά» μιας τιμής στην πράξη.

Ας χωρίσουμε το διάστημα [0,T] σε n απειροελάχιστα υποδιαστήματα πλάτους $\Delta\mathrm{t}=\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{n}}$ το καθένα. Στο i-οστό διάστημα χρόνου (t_i, t_i+Δt) θεωρούμε ότι η ποσοστιαία αλλαγή της S ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά ανάλογη του Δt και ανεξάρτητη από το παρελθόν της διαδικασίας. Με άλλα λόγια ισχύει:

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_{i,})}{S(t_{i,})} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_i, \qquad (*)$$

όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, συνεπώς το $\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_i$ ακολουθεί την $N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ όπου μ, σ^2 σταθερές με το μ να καλείται ***τάση*** (drift) και το σ ***μεταβλητότητα*** (volatility).

Οι τυχαίες μεταβλητές $\sqrt{\Delta t} Z_{1,} \sqrt{\Delta t} Z_{2,}, \ldots, \sqrt{\Delta t} Z_n$ θεωρούνται προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown κατά συνέπεια γνωρίζουμε ότι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την κανονική κατανομή. Άρα, η $(*)$ μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_{i,})}{S(t_{i,})} = \mu\Delta t + \sigma\left(Z(t_i + \Delta t) - Z(t_{i,})\right),$$

Όπου, $\left(Z(t_i + \Delta t) - Z(t_{i,})\right) \sim N(0, \Delta t)$. Πιο απλά η παραπάνω σχέση γράφεται:

$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu\, \Delta t + \sigma \Delta Z(t)$.Έστω τώρα ότι Δt ➔ 0 τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu\, dt + \sigma dZ(t). \qquad (**)$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε) της S, όπου η S περιγράφει την εξέλιξη στην τιμή της μετοχής [31,σελ.84-85].

Με άλλα λόγια, η εξίσωση αυτή υποδεικνύει ότι η ποσοστιαία αύξηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2.

2.9 Black -Scholes

Στο σημείο αυτό, θα μελετήσουμε τον δεύτερο τρόπο για την εύρεση της αξίας ενός παραγώγου χρηματιστηριακού προϊόντος σε χρόνο $t \in [0, T]$.

Το περίφημο έργο των τριών οικονομολόγων Fischer Black and Myron Scholes και του Robert Merton που ενώ αρχικά αποτέλεσε έναυσμα πολλών αντιδράσεων, εκδόθηκε εν τέλει το 1973 στο περιοδικό “Journal of Political Economy” (Black F., Scholes M., 1973), εισήγαγε την πρωτοποριακή για την εποχή ιδέα της χρήσης στοχαστικών υπολογισμών για τη δημιουργία ενός μοντέλου τιμολόγησης των περιουσιακών στοιχείων που θέλουμε να εκτιμήσουμε, όπως οι τιμές των μετοχών, οι τιμές διάφορων χρηματιστηριακών δεικτών όπως ο Dow Jones, οι τιμές συναλλαγματικής ισοτιμίας και άλλα. Πριν αναφερθούμε αναλυτικότερα στον μαθηματικό τύπο θα ήταν φρόνιμο να αναφέρουμε κάποιες υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίχθηκαν οι Black –Scholes.

- Αρχικά, το μοντέλο αναφέρεται στην εύρεση της θεωρητικής τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης, το οποίο όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να εξασκηθεί μόνο στη λήξη του.
- Η τιμή της μετοχής S_t στον χρόνο t ακολουθεί, όπως είπαμε και στην προηγούμενη ενότητα, μια γεωμετρική κίνηση Brown $\{S(t), t \in [0, T]\}$. Αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι η $\{S(t), t \in R_+\}$ είναι η μοναδική λύση της ΣΔΕ (**):

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu\, dt + \sigma dZ(t) \Rightarrow dS(t) = \mu\, S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t)$$ [34, σελ.98-99].

- Υποθέτουμε ότι έχουμε έναν τίτλο χωρίς κίνδυνο. Άρα τόσο το risk-free επιτόκιο όσο και η μεταβλητότητα (volatility) των αποδόσεων είναι ποσά γνωστά και σταθερά.
- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και φόρων.
- Δεν πληρώνονται μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος. Παρόλα αυτά τα μερίσματα που θα δοθούν μελλοντικά από την μετοχή είναι γνωστά σαν ένα ποσό σε ευρώ ή σαν ένα σταθερό μέρισμα με επιτόκιο (dividend yield).
- Οι κινήσεις της αγοράς δεν μπορούν να προβλεφθούν.

Γενικά είναι δύσκολο να λύσουμε μια Διαφορική Εξίσωση με τη βοήθεια μερικών παραγώγων, όμως στο συγκεκριμένο μοντέλο τιμολόγησης υπάρχει συγκεκριμένη λύση της Σ.Δ.Ε γι αυτό τον λόγο και το μοντέλο των Black-Scholes-Merton χρησιμοποιείται έως και σήμερα.

Ο μαθηματικός τύπος που δίνει τη τιμή του δικαιώματος C:

$$\mathbf{C = S_t N(d_1) - K e^{-(T-t)} N(d_2)}$$

με $$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

και $$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

με $N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \ \ \forall\ d \in R$: η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$ [34,σελ.105].

όπου, S_t: η τιμή της μετοχής

K: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

r: το risk-free επιτόκιο

σ^2: η τυπική απόκλιση της απόδοσης της μετοχής

T: ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος

t: θέτουμε t=0 για την σημερινή ημερομηνία

Με βάση την ισοδυναμία της σχέσης αγοράς-πώλησης (put-call parity) ο μαθηματικός τύπος για την αποτίμηση ενός δικαιώματος πώλησης είναι:

$$\mathbf{P = Ke^{-(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)}$$

$$\text{με } N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

Παράδειγμα

Έστω ότι στις 31 Ιανουάριο 2017, οι μετοχές της Eurobank διαπραγματεύονται στο Χ.Α στη τιμή των 12 ευρώ. Στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς που θα λήγει τον Μάιο του 2017 με τιμή εξάσκησης 15 ευρώ, το οποίο διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο παραγώγων. Οι υπόλοιπες παράμετροι που είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό του call option είναι οι εξής:

- Η ετήσια τυπική απόκλιση για την μετοχή της Eurobank για το 2016 ήταν 77%. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τις τιμές της μετοχής ανά εβδομάδα καθώς υπολογίζοντας την εβδομαδιαία τυπική απόκλιση και πολλαπλασιάζοντας την με το 52 (ο αριθμός των εβδομάδων ανά έτος) έχουμε την ετήσια τυπική απόκλιση που επιθυμούμε.
- Το δικαίωμα λήγει στις 19 Μάιου 2017 ($3^{η}$ Παρασκευή του μήνα). άρα το δικαίωμα έχει ακόμα 108 μέρες μέχρι τη λήξη του, $\mathrm{T} = \frac{108}{365} = 0.2959$.
- Το risk free επιτόκιο που αντιστοιχεί στο call είναι 5,5%.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο που αναφέραμε πριν για τον υπολογισμό του call option βρίσκουμε πρώτα τα d_1, d_2

$$\mathrm{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{12}{15}\right)+\left(\left(0.055+\frac{(0.77)^2}{2}\right)(0.2959)\right)}{0.77\sqrt{0.2959}} = -0{,}28447$$

Και $$\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}} = -0{,}70332$$

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες κανονικής κατανομής βρίσκουμε τα N(d1) , N(d2)

N(d1)= 0,3897 και N(d2)=0,242.

Άρα τελικά η τιμή του call θα είναι:

$\mathrm{C} = (12)(0.3897) - 15e^{-(0.055)(0.2959)}(0.242) = 1{,}104$€.

3^{o} Κεφάλαιο

ΜΟΝΤΕΛΟ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΣΕ ΠΕΡΊΠΤΩΣΗ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΜΕΣΩ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εξηγήσουμε τις θεμελιώδεις και θεωρητικές αιτίες του λειτουργικού κινδύνου στην αντιστάθμιση δικαιωμάτων και μετά θα αναπτύξουμε το μοντέλο κινδύνου μας. Θα προτείνουμε ένα δείκτη έκθεσης για την αντιστάθμιση ο οποίος θα μας επιτρέπει να βρούμε την κατανομή του λειτουργικού κινδύνου και τα μέτρα κινδύνου. Ακόμη, θα αναπτύξουμε το μοντέλο που θα υπολογίσει την τιμολόγηση των δικαιωμάτων στις περιπτώσεις που έχουμε ήδη λάβει υπόψη μας και υπολογίσει τον λειτουργικό κίνδυνο.

3.1 Ο λειτουργικός κίνδυνος στην αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι πολύ σημαντικά είδη παραγώγων [18],[19]. Η βιβλιογραφία πάνω στον λειτουργικό κίνδυνο που προκύπτει κατά την αντιστάθμιση δικαιωμάτων είναι πολύ περιορισμένη, παρόλα αυτά πράγματι η αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης περιέχει σημαντικό λειτουργικό κίνδυνο. Για να καταλάβουμε τον λειτουργικό κίνδυνο που περιέχεται εκεί πρέπει να κατανοήσουμε πρώτα τις αιτίες του στη διαδικασία αντιστάθμισης το οποίο και θα εξηγήσουμε αμέσως.

Για να αντισταθμίσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς "Call option" C(t) χρησιμοποιούμε ένα χαρτοφυλάκιο V(t) [21] και πρέπει να ισχύει:

$$V(t) = C(t), \quad \text{για κάθε } t \leq T \tag{1}$$

όπου T είναι η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης V(t) που έχουμε θα αποδώσει την ίδια αμοιβή όπως και το C(t) σε χρόνο T έτσι ώστε:

$$V(t) = \max(S(T) - K, 0)$$

όπου S(t) είναι η υποκείμενη τιμή του δικαιώματος σε χρόνο t και K είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Επίσης θέλουμε να ισχύει:

$$\delta V(t) = \delta C(t), \qquad (2)$$

έτσι ώστε να αντισταθμίσουμε αλλαγές την τιμή του δικαιώματος C(t) σε κάθε χρονική στιγμή. Επιπλέον, από δω και στο εξής αν υποθέσουμε ότι το υποκείμενο προϊόν είναι μια μετοχή, αυτό δεν επηρεάζει τη γενικότητα των αποτελεσμάτων αλλά παρέχει άνεση στη διαδικασία μελέτης. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι τιμές των μετοχών δεν αλλάζουν σε συνεχή χρόνο αλλά σε διακριτό χρόνο δt το οποίο και αντανακλά τις πραγματικές αλλαγές στις τιμές των μετοχών. Έτσι, μπορούμε να αντισταθμίσουμε τη τιμή του C(t) σε διακριτό χρόνο (δC).

Από τη θεωρία για το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης των Black-Scholes είναι γνωστό ότι μπορούμε να αντισταθμίσουμε ένα "Call option" C(t) με ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών Δ και ομολογιών Φ χωρίς κίνδυνο. Έτσι κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης που αποτελείται από:

$$V(t) = \Delta(t)S(t) + \varphi(t)B(t), \qquad (3)$$

Όπου $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$

$$\Phi(t) = \frac{V(t) - \Delta(t)S(t)}{B(t)} \qquad (4)$$

B(t) είναι η τιμή ενός χωρίς κίνδυνο ομολόγου σε χρόνο t [3]

$$B(t) = B(0) \cdot e^{\int_0^t r dt}$$

$$dB = rB(t)dt$$

όπου r είναι το ακίνδυνο επιτόκιο. Επίσης, από τη θεωρία χαρτοφυλακίου γνωρίζουμε ότι το V(t) είναι αυτοχρηματοδοτούμενο. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε διακριτό χρονικό διάστημα δt έχουμε ότι:

$$\delta V = \Delta(t)\delta S(t) + \Phi(t) r B(t)\delta t \qquad (5)$$

Για να κατασκευάσουμε το V(t) πρέπει να κρατήσουμε Δ(t) μερίδια μετοχών και Φ(t) ομολογιών σε κάθε χρονική στιγμή t, επομένως η σύνθεση του V(t) συνδέεται συνεχώς με το χρόνο t. Το Δ(t) εξαρτάται από τα t και S(t). Έτσι, το Δ(t) είναι μη ντετερμινιστικό και γι' αυτό δεν μπορούμε να υπολογίσουμε εξ΄ αρχής τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να κρατήσουμε στην αρχή του χρόνου t. Κατά συνέπεια, είναι απαραίτητο να είμαστε ικανοί να διατηρήσουμε το V(t). Πρέπει να καταγράψουμε το S(t), να υπολογίσουμε τον αριθμό των μετοχών και των ομολογιών που απαιτούνται για το V(t), να εμπορευτούμε το σωστό αριθμό των μετοχών και των ομολογιών και να ρυθμίσουμε τις συναλλαγές αυτές. Όλες αυτές οι λειτουργικές δραστηριότητες συνδέονται με λειτουργικούς κινδύνους και αυτές οι δραστηριότητες πρέπει να γίνουν σε κάθε διακριτό διάστημα δt. Καθώς όλες αυτές οι δραστηριότητες πρέπει να επαναλαμβάνονται σε κάθε διακριτό διάστημα, το δt γίνεται ένας παράγοντας-κλειδί για την αντιστάθμιση του λειτουργικού κινδύνου. Καθώς το $\delta t \rightarrow 0$ αυξάνουμε όλες τις λειτουργικές δραστηριότητες και τους κινδύνους για να αναπροσαρμόσουμε το χαρτοφυλάκιο V(t) (για παράδειγμα εισαγωγή δεδομένων, έλεγχος για νέα δεδομένα αγοράς και άλλους λειτουργικούς κινδύνους που συνδέονται με συναλλαγές περιουσιακών στοιχείων). Εναλλακτικά, αν αυξήσουμε το δt μειώνουμε τους λειτουργικούς κινδύνους και τις δραστηριότητες. Παρόλα αυτά, είναι γνωστό στη θεωρία αντιστάθμισης ότι αυξάνοντας το δt αυξάνονται και τα σφάλματα (η διαφορά στην αξία μεταξύ του V(t) και του δικαιώματος). Επομένως, δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τον λειτουργικό κίνδυνο χωρίς να συμβούν λειτουργικά σφάλματα και δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τα λειτουργικά σφάλματα χωρίς να προκύψουν λειτουργικοί κίνδυνοι. Άρα, ο λειτουργικός κίνδυνος είναι θεμελιώδης πηγή κινδύνου στην αντιστάθμιση δικαιωμάτων.

Λήμμα 1 (Λειτουργικός κίνδυνος και σφάλματα αντιστάθμισης)

Ο λειτουργικός κίνδυνος που συνδέεται με την αντιστάθμιση ενός δικαιώματος είναι αντιστρόφως ανάλογος των σφαλμάτων που προκύπτουν. Επιπλέον, ο λειτουργικός κίνδυνος αυξάνεται καθώς το διάστημα αντιστάθμισης μειώνεται και το ανάποδο.

Απόδειξη: Ορίζουμε με A(t) τη λειτουργική δραστηριότητα της αντιστάθμισης ενός δικαιώματος και με Z(t) τον λειτουργικό κίνδυνο που συνδέεται με το A(t). Τότε το Z(t) είναι ανάλογο του A(t):

$$A(t) \infty Z(t)$$

Αυτή η σχέση είναι αναμενόμενη επειδή αυξάνοντας τις λειτουργικές δραστηριότητες αυξάνεται και ο κίνδυνος από λειτουργικές ζημίες. Ας υποθέσουμε ότι η A(t) είναι αντιστρόφως ανάλογη του σφάλματος H(t) με

$$H(t) = \left| V(t) - C(t) \right|$$

όπου V(t) είναι το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης.

Περιμένουμε ότι το A(t) είναι αντιστρόφως ανάλογο του H(t) καθώς αυξάνοντας την αντιστάθμιση θα πρέπει να μειωθεί το σφάλμα. Επομένως, ο λειτουργικός κίνδυνος της αντιστάθμισης Z(t) είναι αντιστρόφως ανάλογος του σφάλματος H(t):

$$\mathrm{H(t)} \propto \frac{1}{\mathrm{Z(t)}}$$

Δεύτερον, η λειτουργία της αντιστάθμισης A(t) είναι αντιστρόφως ανάλογη του δt ∀ t καθώς η συχνότητα της αντιστάθμισης πρέπει να αυξάνεται καθώς το δt μειώνεται. Αφού A(t)∞Z(t) ⇨Z(t) είναι αντιστρόφως ανάλογο του δt [20,σελ.196].●

Πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι ο λειτουργικός κίνδυνος της αντιστάθμισης αυξάνεται περαιτέρω από το μοντέλο κινδύνου των δικαιωμάτων. Τα μοντέλα δικαιωμάτων θεωρούνται γενικά αρκετά πολύπλοκα (αυτό περιλαμβάνει και το μοντέλο Black-Scholes) γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην μοντελοποίηση και στην εκτέλεση λαθών. Επιπροσθέτως, τα μοντέλα των δικαιωμάτων είναι δύσκολα να εκτιμηθούν λόγω θεμάτων σε δεδομένα, έτσι όλα τα προαναφερθέντα θέματα μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικούς λειτουργικούς κινδύνους και ζημίες.

3.2 Δείκτης έκθεσης για το λειτουργικό κίνδυνο στην αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης

Για την καλύτερη κατανόηση του λειτουργικού κινδύνου άλλα και για τη γενικότερη λειτουργία της αντιστάθμισης μέσω δικαιωμάτων χρειαζόμαστε έναν δείκτη έκθεσης. Σε προηγούμενες διαδικασίες ένας συχνά επιλεγμένος δείκτης ήταν το ακαθάριστο εισόδημα με την έννοια ότι ήταν ο δείκτης για την κλίμακα της λειτουργικής δραστηριότητας. Παρόλα αυτά, για αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων δεν υπάρχει ακαθάριστο εισόδημα άρα δεν μπορούμε να βασιστούμε σε αυτό. Επιπλέον, στόχος της αντιστάθμισης δικαιωμάτων προαίρεσης είναι να μειώσουμε τα σφάλματα αντιστάθμισης στο μηδέν. Έτσι, οποιοδήποτε «κέρδος» προκύψει από την αντιστάθμιση δε θα ήταν απαραίτητα ένας καλός δείκτης για τη λειτουργική δραστηριότητα και μπορεί ακόμα και να υποδείκνυε χαμηλή λειτουργική δραστηριότητα εξαιτίας της κακής αντιστάθμισης. Διαλέγουμε τα λειτουργικά κόστη ώστε να έρθουμε σε ισορροπία με το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Ο δείκτης έκθεσής μας επιλέγεται στην ίδια βάση με τους άλλους δείκτες που επιλέχθηκαν, δηλαδή ότι τα λειτουργικά κόστη αντανακλούν καλύτερα την κλίμακα της λειτουργικής δραστηριότητας και των κινδύνων. Καθώς ο αριθμός των μετοχών που εμπορεύονται αυξάνεται, αυξάνονται και τα λειτουργικά κόστη (π.χ. κόστη διακανονισμού) τα οποία με τη σειρά τους συνδέονται με αυξημένες λειτουργικές δραστηριότητες (οι ελεγχόμενες συναλλαγές που εκτελούνται) και λειτουργικούς κινδύνους (π.χ. αποτυχημένες συναλλαγές). Η μοντελοποίηση των λειτουργικών κοστών γίνεται μέσω του δV. Αυτό μας επιτρέπει να λάβουμε υπόψη μας έναν θεμελιώδη παράγοντα της αντιστάθμισης του λειτουργικού κινδύνου: τη διάρκεια του διαστήματος αντιστάθμισης δt. Όσο αυξάνεται το δt θα πρέπει να μειώνεται ο λειτουργικός κίνδυνος και το αντίστροφο. Για να καθορίσουμε τα λειτουργικά κόστη μέσω του δV πρέπει να καθορίσουμε τη συνολική αξία των μετοχών που εμπορεύονται σε χρόνο t του χαρτοφυλακίου εξισορρόπησης. Μοντελοποιούμε τα λειτουργικά κόστη ως εξής:

$$kQ(t)S(t) \qquad (6)$$

Όπου Q(t) είναι η ποσότητα των μεριδίων και k μια κλιμακούμενη σταθερά. Περιμένουμε τα λειτουργικά κόστη να ακολουθούν την εξίσωση (6), αφού κάνουμε συναλλαγές με περισσότερες μετοχές καθώς η Q(t) αυξάνεται δημιουργώντας περισσότερες λειτουργικές δραστηριότητες.

Επίσης καθώς το S(t) ή (το Q(t)S(t)) αυξάνεται διαχειριζόμαστε μεγαλύτερα ποσά το οποίο απαιτεί να γίνονται περισσότεροι έλεγχοι και διαδικασίες. Αυτό συμβαίνει γιατί σε περίπτωση προβλήματος η τράπεζα θα είναι σε δυσκολότερη θέση και θα βρεθεί υπεύθυνη για μεγαλύτερες ζημίες εάν αυτά δεν ελεχθούν (π.χ. η περίπτωση της κατάρρευσης της Barings Bank από τον Nick Leeson).

Από την εξίσωση (3) γνωρίζουμε ότι σε χρόνο t έχουμε Δ(t) μερίδια μετοχών άρα σε χρόνο t+δt έχουμε Δ(t+δt) μερίδια μετοχών. Επομένως για να αποκτήσουμε Δ(t+δt) μερίδια μετοχών από το χρόνο t πρέπει να κάνουμε συναλλαγές με τον εξής αριθμό μετοχών:

$$\Delta(t+\delta t) - \Delta(t)$$

Για τα λειτουργικά κόστη παίρνουμε την απόλυτη τιμή της παραπάνω εξίσωσης. Αυτό ισχύει γιατί τα λειτουργικά κόστη και οι κίνδυνοι είναι ανάλογοι με τον αριθμό των συναλλαγών παρά με τον αριθμών των μετοχών που κρατήθηκαν. Για παράδειγμα, το να κρατήσει κάποιος μηδέν μετοχές δεν έχει τον ίδιο λειτουργικό κίνδυνο όπως το να αγοράσεις κανείς 10 μετοχές και μετά να πουλήσει 10 μετοχές ακόμα κι αν το καθαρό μερίδιο μετοχών είναι μηδενικό.

Μπορούμε να εκφράσουμε ξανά την παραπάνω εξίσωση πιο περιεκτικά καθώς μεταβάλλεται το Δ(t):

$$|\delta\Delta(t)| = |\Delta(t+\delta t) - \Delta(t)|$$

Έτσι η συνολική αξία των μετοχών που διαπραγματεύτηκαν είναι $S(t)|\delta\Delta(t)|$. Αν υποθέσουμε ότι τα λειτουργικά κόστη είναι ανάλογα με το $S(t)|\delta\Delta(t)|$ πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε και με μία σταθερά k:

$$k \cdot S(t) \cdot |\delta\Delta(t)|$$

Τώρα, η εξίσωση (5) δεν περιλαμβάνει κανένα λειτουργικό κόστος (δηλ. η διαδικασία εξισορρόπησης απαλλάσσεται από λειτουργικά κόστη). Για να λάβουμε υπόψη μας τα λειτουργικά κόστη κατά τη διάρκεια του δV πρέπει να γράψουμε:

$$\delta V = \Delta\delta S(t) + \Phi(t) r B(t)\delta t - k|\delta\Delta|S(t) \qquad (7)$$

Όπου ο τελευταίος όρος αναπαριστά τα λειτουργικά μας κόστη.

Τα λειτουργικά κόστη του χαρτοφυλακίου μετοχών Φ(t)B(t) του V(t) συμπεριλαμβάνονται στον όρο $k|\delta\Delta|S(t)$. Αυτό θα γίνει κατανοητό αν καταλάβουμε τη σχέση που συνδέει τα λειτουργικά κόστη με το Φ(t)B(t) το οποίο θα συμβολίζεται με P_B. Αν υποθέσουμε ότι το P_B είναι ανάλογο με τη συνολική αξία της συναλλαγής (όπως κάναμε και με τις μετοχές), σύμφωνα με την εξίσωση (4) το P_B θα είναι συνάρτηση των V(t), S(t), B(t), Δ(t). Τώρα από την εξίσωση (1) ισχύει $V(t) = C(t)$ και είναι γνωστό οτι η C(t) είναι ανάλογη της S(t). Επομένως, η P_B θα είναι συνάρτηση των S(t), B(t), Δ(t). Το B(t) δεν θα επηρεάσει τα λειτουργικά κόστη επειδή αποτελεί την τιμή ομολόγου χωρίς κίνδυνο, έτσι η τιμή του είναι γνωστή με βεβαιότητα και θεωρείται ότι έχει ιδιαίτερα υψηλή ρευστότητα. Κατά συνέπεια, θα υπάρχει μηδαμινή λειτουργική δραστηριότητα που θα συνδέεται με το B(t) π.χ. οι τιμές των μετοχών θα είναι πάντα γνωστές πριν από τη χρονική στιγμή t και έτσι δεν θα υπάρχουν απαιτήσεις συνδιαλλαγών. Επομένως, το λειτουργικό κόστος P_B θα είναι συνάρτηση των S(t), Δ(t), έτσι θα είναι σύμφωνη με την εξίσωση (6) και συμπεριλαμβάνεται σε αυτή την εξίσωση η οποία με τη σειρά της δίνει την $k|\delta\Delta|S(t)$. Το μοντέλο λειτουργικού κόστους για το δV (εξίσωση (7)) παρέχει μια θεωρητική προσέγγιση της αντιστάθμισης του λειτουργικού κινδύνου και μας βοηθά θα αναπτύξουμε μοντέλα κινδύνου. Επιπλέον, αυτό το μοντέλο λαμβάνει υπόψη την επιρροή του διαστήματος αντιστάθμισης δt, που είναι θεμελιώδης παράγοντας λειτουργικού κινδύνου. Μια θεωρητική προσέγγιση είναι ακόμα πιο σημαντική για την αντιστάθμιση αφού πολύ λίγα δεδομένα υπάρχουν που συνδέονται απευθείας με το λειτουργικό κίνδυνο. Έτσι ο μόνος τρόπος για να αποκτήσουμε εικόνα είναι η θεωρητική προσέγγιση. Ένα άλλο πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι δεν χρησιμοποιεί άλλη μια πηγή τυχαιότητας (π.χ. μια άλλη διαδικασία Wiener) για τη μοντελοποίηση των κοστών. Κατά συνέπεια, μπορούμε να διατηρήσουμε την ισορροπία της αγοράς γεγονός πολύ σημαντικό για τα δικαιώματα προαίρεσης. Επιπλέον, μπορούμε να παράγουμε μοναδικές τιμές για τα δικαιώματα (υποθέτοντας μια αγορά με no arbitrage) αν η αγορά είναι πλήρης.

Είναι αξιοσημείωτο ότι η μοντελοποίηση της αντιστάθμισης δικαιωμάτων που αφορά τα λειτουργικά κόστη σαν σταθερά ή εφάπαξ κόστη παρά σαν στοχαστικά ή μεταβλητά θα ήταν ένα απραγματοποίητο μοντέλο λειτουργικού κινδύνου και κοστών. Πρώτον, σταθερά και εφάπαξ λειτουργικά κόστη δε θα αντικατόπτριζαν αυξανόμενα λειτουργικά κόστη καθώς το διάστημα αντιστάθμισης δt μειώνεται, το οποίο και είναι βασική αιτία κινδύνου. Δεύτερον, τα λειτουργικά κόστη δεν είναι ντετερμινιστικά δηλαδή εξαρτώνται από τις κινήσεις στη τιμή των μετοχών και στον όγκο των περιουσιακών στοιχείων που συναλλάσσονται στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης που και τα δύο δεν είναι ντετερμινιστικά [20,σελ.197].

3.3 Η κατανομή του λειτουργικού κινδύνου

Στην ενότητα αυτή, θα βρούμε την κατανομή του λειτουργικού κινδύνου που προκύπτει στην αντιστάθμιση. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί συγκρίνοντας με άλλες μεθόδους μέτρησης λειτουργικού κινδύνου καταλαβαίνει κανείς ότι οι περισσότερες μέθοδοι δε χρησιμοποιούν κάποια κατανομή για την μέτρηση π.χ. η μέθοδος SA. Παρόλα αυτά, εκτός επιστημονικής βιβλιογραφίας, οι περισσότερες μέθοδοι διαχείρισης και μέτρησης κινδύνων απαιτούν μια κατανομή, επομένως το να παράγει κανείς μια τέτοια κατανομή είναι απαραίτητο για την εφαρμογή των μεθόδων αυτών στη διαχείριση του λειτουργικού κινδύνου π.χ. VaR. Επιπλέον, θα ήταν ουτοπικό στην αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων να υποθέσουμε ότι ένας ενιαίος τρόπος (όπως στην μέθοδο SA) αναπαριστά τον λειτουργικό μας κίνδυνο καθώς ο λειτουργικός μας κίνδυνος αλλάζει συνεχώς σε χρόνο t π.χ. ο αριθμός των μετοχών που συναλλάσουμε στο χαρτοφυλάκιο V(t).

Ο λειτουργικός μας κίνδυνος αναπαρίσταται από τον όρο $k|\delta\Delta|S(t)$, έτσι πρέπει να θεωρήσουμε ότι η κατανομή του συνδέεται με αυτόν τον όρο. Από τη θεωρία τιμολόγησης των Black-Scholes είναι γνωστό ότι:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad \text{επομένως,}$$

$$\delta\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(S + \delta S, t + \delta t) - \frac{\partial C}{\partial S}(S, t)$$

Και εφαρμόζοντας το πολυώνυμο Taylor έχουμε:

$$\frac{\partial C}{\partial S}(S + \delta S, t + \delta t) = \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) + \delta S \frac{\partial^2 C^2}{\partial S^2}(S, t) + \delta t \frac{\partial^2 C^2}{\partial S\, \partial t}(S, t) \qquad (8)$$

$$\delta\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(S + \delta S, t + \delta t) - \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) = \delta S \frac{\partial^2 C^2}{\partial S^2}(S, t) + \delta t \frac{\partial^2 C^2}{\partial S\, \partial t}(S, t) \qquad (9)$$

Τώρα, υποθέτουμε ότι το dS ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown

$$\mathrm{dS} = \mu\mathrm{Sdt} + \sigma\mathrm{SdW}$$

όπου μ είναι η τάση, σ η μεταβλητότητα και dW μια διαδικασία Wiener έτσι σε διακριτό χρόνο έχουμε:

$$\delta\mathrm{S} = \mu\mathrm{S}\delta\mathrm{t} + \sigma\mathrm{S}\delta\mathrm{W}$$

$$= \mu\mathrm{S}\delta\mathrm{t} + \sigma\mathrm{S}\mathcal{E}\sqrt{\delta\mathrm{t}}$$

Όπου είναι το $\mathcal{E}$ είναι ένα δείγμα τυχαίων αριθμών από την Κανονική Κατανομή N(0,1) [14] και η N (υ,θ) αναπαριστά την Κανονική Κατανομή με μέσο υ και τυπική απόκλιση θ. Επομένως, η εξίσωση (9) γίνεται:

$$\delta\Delta = \left(\mu\mathrm{S}\delta\mathrm{t} + \sigma\mathrm{S}\mathcal{E}\sqrt{\delta\mathrm{t}}\right)\frac{\partial^2\mathrm{C}^2}{\partial\mathrm{S}^2}(\mathrm{S},\mathrm{t}) + \delta\mathrm{t}\frac{\partial^2\mathrm{C}^2}{\partial\mathrm{S}\,\partial\mathrm{t}}(\mathrm{S},\mathrm{t})$$

$$= \sigma\mathrm{S}\mathcal{E}\sqrt{\delta\mathrm{t}}\frac{\partial^2\mathrm{C}^2}{\partial\mathrm{S}^2}(\mathrm{S},\mathrm{t}) + \mathrm{O}(\delta\mathrm{t})$$

Όπου το O(.) δίνει τους όρους της τάξης των δt. Η εξίσωση μπορεί να προσεγγιστεί από την:

$$\delta\Delta \approx \sigma\mathrm{S}\mathcal{E}\sqrt{\delta\mathrm{t}}\,\frac{\partial^2\mathrm{C}^2}{\partial\mathrm{S}^2}(\mathrm{S},\mathrm{t})$$

$$\approx \frac{\partial^2\mathrm{C}^2}{\partial\mathrm{S}^2}(\mathrm{S},\mathrm{t})\sigma\mathrm{S}\delta\mathrm{W}$$

$$\approx \Gamma\sigma\mathrm{S}\delta\mathrm{W}.$$

Όπου το Γ είναι γνωστό ως συντελεστής ευαισθησίας Gamma και

$$\Gamma = \frac{\partial^2\mathrm{C}}{\partial\mathrm{S}^2}(\mathrm{S},\mathrm{t}) \quad \text{και } \Gamma \geq 0 \quad \text{επομένως,}$$

$$|\delta\Delta| \approx |\sigma\mathrm{S}\Gamma\delta\mathrm{W}|, \qquad \text{έτσι,}$$

$$\mathrm{k}|\delta\Delta|\mathrm{S} \approx \mathrm{k}|\sigma\Gamma\mathrm{S}\delta\mathrm{W}|\mathrm{S}, \tag{10}$$

$$\approx \mathrm{k}|\sigma\Gamma\mathrm{S}^2\delta\mathrm{W}|, \quad \text{με } \mathrm{S}(\mathrm{t}), \mathrm{k} \geq 0 \tag{11}$$

Καθώς το λειτουργικό μας κόστος αποτελεί τον δείκτη έκθεσής μας, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον λειτουργικό μας κίνδυνο πολλαπλασιάζοντας απλά την κατανομή του λειτουργικού κόστους με μία σταθερά (όπως έγινε και για άλλους δείκτες έκθεσης στο κεφάλαιο 1). Επομένως, η κατανομή του λειτουργικού κινδύνου D(t) δίνεται από:

$$\mathrm{D(t)} \sim \mathrm{k}'|\sigma\Gamma \mathrm{S}^2 \delta \mathrm{W}|,$$

Όπου το k′ είναι ανάλογο και περιέχει τη σταθερά k. Τώρα,

$$\delta \mathrm{W} \sim \mathrm{N}(0, \sqrt{\delta \mathrm{t}}) \tag{12}$$

Επομένως, από τις ιδιότητες των Κανονικών Κατανομών προκύπτει

$$\mathrm{k}'\sigma\Gamma \mathrm{S}^2 \delta \mathrm{W} \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{k}'\sigma\Gamma \mathrm{S}^2 \sqrt{\delta \mathrm{t}}) \tag{13}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το Γ είναι μια σταθερά και η S(t) είναι γνωστή σε κάθε χρονική στιγμή t.

Η κατανομή που ακολουθεί η D είναι η εξίσωση (13) και είναι γνωστή ως η *half-normal κατανομή*. Μια τυχαία μεταβλητή Y είναι μια **half-normal κατανομή** αν $Y = |X|$ ή ισοδύναμα $Y = \max(X, -X)$) όπου X~N(0,θ). Αν X~N(0,θ) τότε η Y έχει μέση τιμή [15, σελ.14].

$$\mathrm{E(Y)} = \theta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{14}$$

Και διασπορά [15, σελ.14]

$$\mathrm{Var(Y)} = \theta^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \tag{15}$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η Y είναι πάντα θετική. Επομένως, $\mathrm{D(t)} = |\mathrm{X}|$, όπου $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{k}\sigma\Gamma \mathrm{S}^2 \sqrt{\delta \mathrm{t}})$, προκύπτει ότι:

$$\mathrm{E[D(t)]} = \mathrm{k}'\sigma\Gamma \mathrm{S}^2 \sqrt{\delta \mathrm{t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{16}$$

Και

$$\mathrm{Var[D(t)]} = \left(\mathrm{k}'\sigma\Gamma \mathrm{S}^2 \sqrt{\delta \mathrm{t}}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \tag{17}$$

$$= \delta t(k'\sigma\Gamma S^2)^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \tag{18}$$

Τώρα για το call option μέσω Black-Scholes έχουμε

$$\Gamma(t) = \frac{N'\left(\sqrt{d_1(t)}\right)}{\sigma S\sqrt{T-t}} \tag{19}$$

Όπου $$d_1(t) = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Και $N'\left(\sqrt{d_1(t)}\right)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Τυπικής Κανονικής Κατανομής $N\left(0, \sqrt{d_1(t)}\right)$. Άρα, οι εξισώσεις (16) και (18) γίνονται:

$$E[D(t)] = \frac{k'S\sqrt{\delta t}\, N'\left(\sqrt{d_1(t)}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{T-t}}$$

Και $$Var[D(t)] = \frac{\delta t\left(k'SN'\left(\sqrt{d_1(t)}\right)\right)^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}{T-t} \tag{20}$$

Η κατανομή D(t) του λειτουργικού κινδύνου είναι μια συνάρτηση των δt, σ, Γ,S και προσδιορίζεται πλήρως από τις εξισώσεις (16) και (18). Η κατανομή αυτή μας βοηθά αρκετά στην αντιστάθμιση του λειτουργικού κινδύνου που δεν θα ήταν εφικτό με την μέθοδο του Βασικού Δείκτη ή πιθανώς και την SA [20,σελ.197-198].

3.4 Ερμηνεία της κατανομής του λειτουργικού κινδύνου

Η halfnormal κατανομή D(t) παρέχει μια σημαντική και θεωρητικά ικανοποιητική ερμηνεία για τον λειτουργικό κίνδυνο. Καθώς η κατανομή αυτή παίρνει μόνο θετικές τιμές αυτό συνεπάγεται ότι οι ζημιές από τον λειτουργικό κίνδυνο δεν μπορούν ποτέ να είναι αρνητικές, δηλαδή δε μπορούμε να “βγάλουμε κέρδος” από τις λειτουργικές δραστηριότητες της αντιστάθμισης. Αυτό θα έπρεπε έτσι κι αλλιώς να το περιμένουμε δεδομένου ότι οι λειτουργικές δραστηριότητες που συνδέονται με την αντιστάθμιση δεν είναι κερδοφόρες λειτουργίες. Αυτό διαφέρει από άλλες αιτίες κινδύνου όπου θετικές και αρνητικές τιμές είναι αποδεκτές και πιθανώς να δημιουργούν κέρδος (π.χ. όπως συμβαίνει στον πιστωτικό κίνδυνο). Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι το γεγονός ότι η halfnormal κατανομή έχει χρησιμοποιηθεί ήδη και σε άλλα πεδία εφαρμογών που ασχολούνται με τα λειτουργικά σφάλματα όπως λ.χ. τα σφάλματα μέτρησης και οι εφαρμογές διαδικασιών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μονόπλευρες κατανομές είναι πολύ συνηθισμένο φαινόμενο στην μελέτη του λειτουργικού κινδύνου. Στην πραγματικότητα, οι δύο πιο συχνές κατανομές που χρησιμοποιούνται στο λειτουργικό κίνδυνο είναι τέτοιου είδους κατανομές (π.χ. η Gamma και η Pareto). Παρόλα αυτά, είναι εξίσου πιθανό να μοντελοποιήσουμε τον λειτουργικό κίνδυνο και με κατανομές δύο πλευρών δεδομένου ότι οι επιχειρήσεις πρέπει να περιορίσουν τον λειτουργικό κίνδυνο για να βγάλουν κέρδος.

Η μέση τιμή $\mathrm{E}[\mathrm{D}(\mathrm{t})]$ και η διασπορά $\mathrm{Var}[\mathrm{D}(\mathrm{t})]$ μειώνονται με το δt. Επομένως, η κατανομή του λειτουργικού κινδύνου προσδιορίζεται καλύτερα καθώς το δt $\rightarrow 0$ και μπορούμε να εκτιμήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τους λειτουργικούς κινδύνους. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς ο κίνδυνος συνήθως αυξάνεται σε σχέση με το χρόνο και οι δραστηριότητες έχουν μικρότερη πιθανότητα να αποτύχουν καθώς το δt μειώνεται. Επιπλέον, αν και τόσο η $\mathrm{E}[\mathrm{D}(\mathrm{t})]$ όσο και η $\mathrm{Var}[\mathrm{D}(\mathrm{t})]$ μειώνονται με το δt, ο συνολικός λειτουργικός κίνδυνος της αντιστάθμισης ενός δικαιώματος προαίρεσης καθ' όλη τη διάρκεια της "ζωής" του δεν μειώνεται με το δt.

Ο λειτουργικός κίνδυνος αυξάνεται με το σ, άρα μετοχές με μεγάλη μεταβλητότητα έχουν και υψηλότερο λειτουργικό κίνδυνο. Αυτό είναι αναμενόμενο εφόσον μεγαλύτερες διακυμάνσεις στις τιμές είναι πιο πιθανό να προκαλέσουν σφάλματα καθώς οι τιμές αλλάζουν πιο συχνά και σε μεγαλύτερο βαθμό. Για παράδειγμα, μια μετοχή με μεγάλη μεταβλητότητα μπορεί να προκαλέσει αύξηση στη συχνότητα και στο μέγεθος των λαθών μεταξύ των πραγματικών τιμών κι αυτών που εισήχθησαν με ανθρώπινη παρέμβαση σε μια βάση δεδομένων. Επίσης, στην εμπειρική χρηματοοικονομική έχει καταγραφεί ότι η υψηλότερη μεταβλητότητα τείνει να συνδέεται με αγορές που βρίσκονται σε σύγχυση. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, θεωρείται αυτονόητο ότι οι άνθρωποι θα κάνουν περισσότερα σφάλματα π.χ. στην εισαγωγή δεδομένων.

Η κατανομή είναι μια συνάρτηση του Γ και λαμβάνει ακραίες τιμές καθώς το Γ αυξάνεται. Αυτό είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό αποτέλεσμα επειδή το $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$, αντανακλά το ρυθμό μεταβολής του Δ. Εφόσον το Δ είναι ο αριθμός των μετοχών που έχουμε αγοράσει για το χαρτοφυλάκιο μας V(t), ένα μεγαλύτερο Γ θα προκαλούσε μια αύξηση στην ποσότητα των συναλλαγών και κατ΄ επέκταση περισσότερους λειτουργικούς κινδύνους. Όπως γίνεται φανερό, είναι πιο δύσκολο και ριψοκίνδυνο να διαχειριστεί κανείς υψηλούς δείκτες ευαισθησίας Γ και έτσι οι διάφοροι οργανισμοί εύχονται να μπορούν να αποφεύγουν αντιστάθμιση τέτοιου είδους δικαιωμάτων αν έχουν περιορισμένη διαχείριση λειτουργικού κινδύνου.

Η κατανομή D(t) του λειτουργικού κινδύνου είναι μία συνάρτηση του S(t) και αυτό είναι ιδιαίτερα ευνοϊκό για τους λόγους που αναφέραμε προηγουμένως. Με άλλα λόγια, καθώς το S(t) αυξάνεται η ποσότητα των χρημάτων που απαιτείται για τις επιχειρησιακές συναλλαγές θα αυξηθεί, το οποίο με τη σειρά του θα οδηγήσει σε αύξηση των λειτουργικών ελέγχων και διαδικασιών αλλά και πιθανών λειτουργικών κινδύνων και ζημιών.

3.5 Μέτρα λειτουργικού κινδύνου

Στο σημείο αυτό έχοντας βρει ήδη την κατανομή του λειτουργικού κινδύνου θα ασχοληθούμε με τα μέτρα κινδύνου για την αντιστάθμιση δικαιωμάτων προαίρεσης, τα οποία αποτελούν τα βασικά εργαλεία για τη διαχείριση των κινδύνων στον τομέα των Οικονομικών. Αυτό δε θα ήταν εφικτό να γίνει με άλλες μεθοδολογίες που αναφέραμε στο κεφάλαιο 1, όπως η τυποποιημένη μέθοδος (SA).

3.5.1 Value at Risk (VaR) και Conditional Value at Risk (CVaR)

Το VaR είναι ένα από τα πιο σημαντικά μέτρα κινδύνου τόσο στο τομέα των επιχειρήσεων όσο και στην έρευνα και στόχος του είναι να υπολογίσει πόσο περιμένει κανείς να χάσει, με μια δεδομένη πιθανότητα λ, για έναν συγκεκριμένο χρονικό διάστημα T, το VaR ορίζεται λοιπόν ως εξής:

$$F(Z(T) \leq \mathrm{VaR}) = \lambda$$

- F(.) είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής
- λZ είναι η πιθανότητα για το ελάχιστο ανώτατο όριο της κατανομής των ζημιών Z΄ που υπολογίζεται στο VaR.

Τυπικά το λ είναι συνήθως 90 ή 95 ή 99%.

Για να υπολογίσουμε το VaR πρέπει να υπολογίσουμε την quantile κατανομή για την halfnormal κατανομή.

Λήμμα 2

Ας υποθέσουμε ότι η Y είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την halfnormal κατανομή της X όπου $X \sim N(0, \theta)$, έτσι ώστε $Y = |X|$, $Y \geq 0$ και $-\infty \leq X \leq \infty$. H quantile κατανομή $P(Y \leq L)$, όπου $L \geq 0$ είναι μία σταθερά, δίνεται από τη σχέση:

$$P(Y \leq L) = 2\Phi_{0,\theta}\ (L) - 1$$

Και

$$L = {\Phi^{-1}}_{0,\theta}\ \left(\frac{P(Y \leq L)}{2} + 0.5\right)$$

Όπου $\Phi_{0,\theta}$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X~N(0,θ) (δηλ. $\Phi_{0,\theta}\ (L) = P(X \leq L)$, ${\Phi^{-1}}_{0,\theta}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής για την X~N(0,θ)).

Απόδειξη

Αφού $Y = |X|$, η ανίσωση $Y \leq L$ γράφεται ισοδύναμα $-L \leq X \leq L$. Έτσι,

$$P(Y \leq L) = P(-L \leq X \leq L) \tag{21}$$

Αφού η $X \sim N(0, \theta)$ έπεται ότι E[X]=0 και έτσι η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν. Άρα το γράφημα της συνάρτησης πρέπει να είναι ίσο και στις δύο πλευρές του άξονα y. Καθώς το γράφημα συμβολίζει την αθροιστική κατανομή έχουμε ότι

$$P(0 \leq X \leq L) = P(-L \leq X \leq 0) \tag{22}$$

Επομένως, $$P(-L \leq X \leq L) = P(-L \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq L) \tag{23}$$

[από εξίσωση (22)] $$= P(0 \leq X \leq L) + P(0 \leq X \leq L) \tag{24}$$

$$= 2P(0 \leq X \leq L) \tag{25}$$

Εξ ορισμού ισχύει $$P(0 \leq X \leq L) = P(X \leq L) - P(-\infty \leq X \leq 0) \tag{26}$$

Επιπλέον, για την $X \sim N(0, \theta)$ ισχύει $P(-\infty \leq X \leq 0) = 0.5$ και μέσω της (26) έχουμε:

$$P(0 \leq X \leq L) = P(X \leq L) - 0.5$$

Άρα η (25) γίνεται $P(-L \leq X \leq L) = 2(P(X \leq L) - 0.5)$ και η (21)

$$P(Y \leq L) = P(-L \leq X \leq L) = 2(P(X \leq L) - 0.5)$$

$$= 2\Phi_{0,\theta}\ (L) - 1$$

Για να προσδιορίσουμε το L ξαναγράφουμε την προηγούμενη εξίσωση ως εξής

$$\frac{P(Y \leq L)}{2} + 0.5 = \Phi_{0,\theta}(L)$$

$$L = {\Phi^{-1}}_{0,\theta}\ \left(\frac{P(Y \leq L)}{2} + 0.5\right) \bullet$$

Έτσι λοιπόν, από το Λήμμα 2 βάζοντας όπου L=VaR μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του VaR για μια συγκεκριμένη πιθανότητα. Το VaR για το 99% διάστημα εμπιστοσύνης είναι :

$$VaR = {\Phi^{-1}}_{0,\theta}\ \left(\frac{0.99}{2} + 0.5\right)$$

$$= {\Phi^{-1}}_{0,\theta}\ (0.995)$$

Όπου $\theta = k'\sigma\Gamma S^2\sqrt{\delta t}$. Όπως είναι φανερό το VaR αποτελεί συνάρτηση των k', σ, Γ,S, δt.

Το CVaR έχει εξελιχθεί σε ένα ιδιαίτερα δημοφιλές μέτρο κινδύνου. Εκτιμά την αναμενόμενη υπό συνθήκη ζημία της υπέρβασης της Αξίας σε Κίνδυνο. Το CVaR είναι οι αναμενόμενες ζημιές δεδομένου ότι οι απώλειες ξεπερνούν το VaR:

$$CVaR = E[Z(T')|Z(T') > VaR]$$

Αθροίζοντας το VaR προκύπτει το CVaR [9].

Για ένα VaR με $\overline{\omega}$ διάστημα εμπιστοσύνης το CVaR υπολογίζεται ως εξής

$$\mathrm{CVaR} = \frac{1}{1-\overline{\omega}} \sum_{i=o}^{i-\overline{\omega}} i\mathrm{VaR}_i \tag{27}$$

Όπου i είναι η αθροιστική πιθανότητα και VaR_i είναι το VaR που αντιστοιχεί κάθε αθροιστική πιθανότητα i. Έτσι το CVaR μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας πολλές τιμές του VaR και πολλαπλασιάζοντάς το ύστερα με την αθροιστική του πιθανότητα [20,σελ.199].

3.5.2 Δείκτης Sharpe (sharpe ratio)

Ο δείκτης Sharpe είναι ένα άλλο δημοφιλές μέτρο κινδύνου και μπορεί να ερμηνευτεί ως η υπερβάλλουσα απόδοση πάνω από το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για κάθε μέρος του κινδύνου [25] όταν ο κίνδυνος υπολογίζεται με την τυπική απόκλιση. Ο δείκτης Sharpe (SR) παρέχει επίσης μια μέτρηση για την ποιότητα της απόδοσης μιας μετοχής A για ένα συγκεκριμένο επίπεδο κινδύνου:

$$\mathrm{SR} = \frac{E[A]-r}{\sqrt{\mathrm{Var}[A]}}$$

Όπου r το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Για το δικό μας μοντέλο λειτουργικού κινδύνου γίνεται:

$$\mathrm{SR} = \frac{k'\sigma\Gamma S^2\sqrt{\delta t}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - r}{\sqrt{\delta t(k'\sigma\Gamma S^2)\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1-\frac{2}{\pi}}\right) - \frac{r}{\sqrt{\delta t\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(k'\sigma\Gamma S^2)}}$$

3.5.3 Θεωρία Ακραίων Τιμών

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών συμβάλλει στον υπολογισμό των ζημιών και των πιθανοτήτων για τις ακραίες τιμές μιας κατανομής. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στη διαχείριση κινδύνου επειδή οι ακραίες τιμές γενικά εμφανίζονται σπάνια. Έτσι. το να αποκτήσει κανείς αξιόπιστα δεδομένα για αυτές είναι μια μη τετριμμένη εργασία. Στην GEV (generalized extreme value theory) αν η X προέρχεται από μια άγνωστη κατανομή τότε από το θεώρημα των Fisher-Tippett προκύπτει ότι οι ακραίες τιμές της X συγκλίνουν στην κατανομή της GEV [8, σελ.104-105]:

$$F(X \leq x) = e^{-\left(1+\xi\left(\frac{x-m}{\theta}\right)\right)^{-1/\xi}}, \xi \neq 0,$$

$$= e^{-e^{-\frac{x-m}{\theta}}}, \qquad \xi = 0$$

Όπου η x ικανοποιεί τη σχέση $1 + \xi\left(\frac{x-m}{\theta}\right) > 0$, με m το μέσο, θ την τυπική απόκλιση και ξ είναι ο δείκτης της ουράς. Το VaR με $\overline{\omega}$ διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από τον [8, σελ.105]:

$$\mathrm{VaR} = m - \frac{\theta}{\xi}\left[1 - (-\log(\overline{\omega}))^{-\xi}\right], \qquad \xi > 0,$$

$$= m - \theta \log\left(\log\left(\overline{\omega}^{-1}\right)\right), \qquad \xi = 0$$

Άρα, το VaR για ακραίες τιμές μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά όπου

$$m = k'\sigma\Gamma S^2 \sqrt{\delta t}\sqrt{2/\pi}$$

Και $$\theta = \sqrt{\delta t\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}\,(k'\sigma\Gamma S^2).$$

Θεώρημα Fisher-Tippett

Έστω $X_1X_2,\ldots$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Αν υπάρχουν ακολουθίες cn>0, dn ∈ R και μια μη εκφυλισμένη κατανομή G ώστε:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} = \frac{\max\{X1,\ldots Xn\} - d_n}{c_n} \longrightarrow dG$$

Τότε η G θα είναι του ίδιου τύπου με μια από τις τρεις ακόλουθες κατανομές:

- Frechet: $= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha>0$

- Weilbull: $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & , x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha>0$

- Gumbel: $\Lambda(x) = e^{-x^{-x}} \qquad x \in R.$

Οι κατανομές $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda$ καλούνται τυπικές κατανομές ακροτάτων.

3.5.4 Ροπές

Οι ροπές αποτελούν ένα εξίσου συχνό μέτρο κινδύνου, όπου η ν-οστή ροπή της X προσδιορίζεται από την $E[X^n]$. Συγκεκριμένα, για τον λειτουργικό κίνδυνο η ν-οστή ροπή μπορεί να υπολογιστεί υψώνοντας την εξίσωση (16) είς την n.

$$E[(D(t))^n] = \left[k'\sigma\Gamma S^2\sqrt{\delta t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]^n$$

3.6 Τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης υπό το πρίσμα του λειτουργικού κινδύνου

Η παρουσία του λειτουργικού κινδύνου στην αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων κάνει επιτακτική την ανάγκη τόσο οι τιμές των δικαιωμάτων όσο και το κόστος της αντιστάθμισης να διαφέρουν σε σχέση με το αν δεν υπήρχε καθόλου λειτουργικός κίνδυνος. Η επίδραση κάποιων παραγόντων κινδύνου στην τιμολόγηση δικαιωμάτων είναι ένα θέμα που απευθύνεται σε άλλου είδους διαχείριση κινδύνου (π.χ. πιστωτικός κίνδυνος) και όχι τόσο στη βιβλιογραφία του λειτουργικού κινδύνου. Από τις εξισώσεις (11), (13) είναι φανερό ότι τα λειτουργικά κόστη και οι κίνδυνοι δίνονται με στοχαστικό τρόπο και έτσι η λύση τους δεν είναι τετριμμένη.

Για να γίνει η τιμολόγηση των δικαιωμάτων κάτω από την παρουσία του λειτουργικού κινδύνου δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο Black-Scholes, γιατί δε λαμβάνει υπόψη του καθόλου το λειτουργικό κίνδυνο. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε μια μέθοδο που εμπνεύστηκε ο Tan [28]. Ο Tan βρήκε μια λύση για την τιμολόγηση δικαιωμάτων χρησιμοποιώντας στοχαστική μεταβλητότητα κατασκευάζοντας μια μερική διαφορική εξίσωση με μια γνωστή λύση που μας βοηθά να υπολογίσουμε την τιμή του δικαιώματος στην περίπτωση του λειτουργικού κινδύνου.

Αν υποθέσουμε ότι χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης λαμβάνει υπόψη το λειτουργικό κίνδυνο τότε από την εξίσωση (7) έχουμε:

$$\delta V = \Delta\delta S(t) + \Phi(t) r B(t)\delta t - k|\delta\Delta| S(t)$$

Καθώς ο λειτουργικός κίνδυνος είναι ανάλογος με τα λειτουργικά κόστη μπορούμε να συμπεριλάβουμε στο χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης τους λειτουργικούς κινδύνους έτσι ώστε:

$$\delta V = \Delta\delta S(t) + \Phi(t) r B(t)\delta t - k'|\delta\Delta| S(t) \qquad (28)$$

Όπου οι δύο τελευταίοι όροι αναπαριστούν το λειτουργικό κίνδυνο. Υποθέτοντας ότι η S(t) ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown από το λήμμα του Ito το δC δίνεται από τον τύπο [27]:

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial S}\delta S + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\delta t \qquad (29)$$

$$= \Delta\delta S + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\delta t \qquad (30)$$

Εφόσον, το V(t) είναι ακόμα ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης έχουμε ακόμα και την εξίσωση (2) $[\delta V(t) = \delta C(t)]$, εξισώνοντας τις (28), (30) παίρνουμε:

$$\Delta\delta S + r\Phi(t)B(t)\delta t - k'|\delta\Delta|S(t) = \Delta\delta S + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\delta t \quad (31)$$

$$0 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\delta t - r\Phi(t)B(t)\delta t \quad (32)$$

$$+k|\delta\Delta|S(t) \quad (33)$$

Από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι:

$$C(t) = \Delta S(t) + \Phi(t)B(t) \quad (34)$$

$$\Phi(t)B(t) = C(t) - \Delta S(t) \quad (35)$$

Αντικαθιστώντας στην (32) έχουμε:

$$0 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\delta t - r(C(t) - \Delta S(t))\delta t + k'|\delta\Delta|S(t)$$

$$0 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t) + r\Delta S(t)\right)\delta t + k'|\delta\Delta|S(t) \quad (36)$$

$$0 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t) + r\Delta S(t)\right)\delta t + \sigma\Gamma|\delta W|k'S^2 \quad (37)$$

Η διακύμανση του δW δίνεται από την εξίσωση (12) καθώς το δt τείνει σε μικρές τιμές για πραγματικά διαστήματα αντιστάθμισης. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας της halfnormal κατανομής [10] αποδεικνύεται ότι το $|\delta W|$ μπορεί να προσεγγιστεί από την μέση τιμή του καθώς το δt πλησιάζει σε πολύ μικρές τιμές. Επομένως,

$$|\delta W| \approx E[|\delta W|],$$

Από εξίσωση (14) έχουμε $\approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\delta t}$

Άρα η εξίσωση (37) γίνεται :

$$0 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t) + r\Delta S(t)\right)\delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \sigma k' \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\delta t} \qquad (38)$$

Όπου $\sigma k' \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\delta t} = \frac{\sigma^2}{2} \chi \delta t$ με $\chi = \frac{2}{\sigma} k' \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}}$. Η εξίσωση (38) γίνεται:

$$0 = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t) + r\Delta S(t)\right)\delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S^2 \frac{\sigma^2}{2} \chi \delta t \qquad (39)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2(1+\chi)}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t) + r\Delta S(t) \qquad (40)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\widehat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t) + r\Delta S(t) \qquad (41)$$

με $\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2(1+\chi)$. Η Μ.Δ.Ε (41) είναι στην πραγματικότητα η Μ.Δ.Ε Black-Scholesαλλά με διασποράσ$\widehat{\sigma}$ αντί για σ. Έτσι η λύση της εξίσωσης (41) δίνεται από την εξίσωση των Black-Scholes για την τιμολόγηση δικαιωμάτων με διασπορά $\widehat{\sigma}$ η οποία και συμβολίζεται με $C(\widehat{\sigma})$. Αυτή δίνει και την τιμή του δικαιώματος (επομένως και το κόστος της αντιστάθμισης) όταν λαμβάνεται υπόψη και ο λειτουργικός κίνδυνος [20,σελ.201].

Το μοντέλο μας για την τιμολόγηση δικαιωμάτων με λειτουργικό κίνδυνο $C(\widehat{\sigma})$ δίνει ικανοποιητικά και χρήσιμα αποτελέσματα για τον λειτουργικό κίνδυνο. Πρώτον, το μοντέλο δίνει αποτελέσματα σύμφωνα με τις απαιτήσεις μας για το λειτουργικό κίνδυνο και τα κόστη. Καθώς το διάστημα αντιστάθμισης δt μειώνεται τότε το χ αυξάνεται και έτσι η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται καθώς οι τιμές των δικαιωμάτων είναι ανάλογες με τη νέα διασπορά $\widehat{\sigma}$. Αναμένουμε ότι τα λειτουργικά κόστη και οι κίνδυνοι θα αυξηθούν καθώς το δt μειώνεται αφού πιο συχνές διαδικασίες εξισορρόπησης αυξάνουν τη λειτουργική δραστηριότητα.

Δεύτερον, εφόσον $\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2(1+\chi)$ και $\chi > 0$ η παρουσία του λειτουργικού κινδύνου αυξάνει τις τιμές των δικαιωμάτων αλλά και την τεκμαρτή μεταβλητότητα των δικαιωμάτων. Αυτό αποτελεί ένα θεωρητικά ικανοποιητικό αποτέλεσμα αφού η τεκμαρτή μεταβλητότητα συχνά θεωρείται ως μέτρο κινδύνου, έτσι ο αυξημένος κίνδυνος ή η μεταβλητότητα αυτή μπορούν να αποδοθούν στον λειτουργικό κίνδυνο.

Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τους συναλλασσόμενους οι οποίοι χρησιμοποιούν την μεταβλητότητα του μοντέλου των Black-Scholes σαν ένα δεδομένο στην τιμολόγηση δικαιωμάτων.

3.7 Αριθμητικές αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή θα εξάγουμε αριθμητικά πειράματα για να υπολογίσουμε το VaR του λειτουργικού κινδύνου (Op VaR) για την αντιστάθμιση call options που προέρχονται από τον δείκτη S&P 500 για διαφορετικά ποσοστημόρια και για ένα εύρος παραμετρικών τιμών. Στο πλαίσιο αυτών των πειραμάτων διαλέξαμε τα δικαιώματα προαίρεσης από τον δείκτη S&P 500 γιατί αποτελούν τα πιο δημοφιλή και χρήσιμα δικαιώματα (π.χ. χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα στην αντιστάθμιση του κινδύνου αγοράς). Επιπλέον, τα δικαιώματα προαίρεσης από τον δείκτη S&P 500 είναι αυτά που γίνονται πιο συχνά αντικείμενο διαπραγμάτευσης, οπότε έχουν τις λιγότερες διαστρεβλώσεις στις τιμές συγκρινόμενα με άλλα δικαιώματα όπως π.χ. προβλήματα ρευστότητας.

3.7.1 Μέθοδος

Για να υπολογίσουμε το Op VaR για την αντιστάθμιση των δικαιωμάτων του δείκτη χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2 και τις εξισώσεις (20),(13)

$$\mathrm{Op\ VaR} = {\Phi_{0,\Theta}}^{-1}\left(\frac{\c{S}}{2} + 0.5\right)$$

Όπου $\theta = k'\sigma\Gamma S^2\sqrt{\delta t}$ και Ş είναι το επιθυμητό ποσοστημόριο για το υπολογισμό του VaR. Η τιμή της μετοχής S είναι πάντα διαθέσιμη σύμφωνα με την ημερομηνία εισαγωγής του δικαιώματος και το Γ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (19), υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε το σ. Μπορούμε να εκτιμήσουμε το σ από εμπειρικά δεδομένα του δείκτη S&P 500. Αυτό έχει ήδη γίνει [19] και γνωρίζουμε ότι το σ δίνεται να είναι ίσο με 12.8%/χρόνο [13]. Το επιτόκιο r για το συγκεκριμένη ημερομηνία εισαγωγής του δικαιώματος (29/4/03) είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα της Ομοσπονδιακής Τράπεζας των Η.Π.Α και υπολογίζεται r=1.26%. Το διάστημα αντιστάθμισης μπορεί να επιλεχθεί ανάμεσα σε ένα πλήθος χρονικών επιλογών (π.χ. καθημερινά, εβδομαδιαία) αλλά εμείς ορίζουμε ως dt = μία ημέρα [12].

Για να υπολογίσουμε το Op VaR απαιτούμε να ξέρουμε το k΄, δηλαδή μια εκτίμηση του k. Για να εκτιμήσουμε το k΄ χρειαζόμαστε δεδομένα για τη λειτουργική δραστηριότητα. Παρόλα αυτά, μπορούμε να εκτιμήσουμε το k΄ χρησιμοποιώντας δεδομένα που είναι πιο εύκολα διαθέσιμα, όπως π.χ. το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Από τη δημιουργία αυτού του μοντέλου έγινε περισσότερο κατανοητό ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα των δικαιωμάτων επηρεάζει άμεσα το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης και οφείλεται στον λειτουργικό κίνδυνο. Επομένως, μπορούμε να εξισώσουμε αυτή την μεταβλητότητα με την $\widehat{\sigma}^2$ και να εκτιμήσουμε το χ χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2(1+\chi) \tag{42}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις:

$$\chi = \frac{2}{\sigma} k' \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \tag{43}$$

Και

$$k' = \frac{\chi}{\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}}} \tag{44}$$

μπορούμε να εκτιμήσουμε το k' [23].

Επίσης, διαλέξαμε δεδομένα για δικαιώματα με λήξεις τουλάχιστον τριών εβδομάδων αφού τα δικαιώματα που είναι κοντά στη λήξη τείνουν να επηρεάζονται περισσότερο από απρόβλεπτες και μη αναμενόμενες μεταβολές.

Επί προσθέτως, για να υπολογίσουμε το Op VaR από εμπειρικά δεδομένα και για ένα εύρος τιμών για τα K,T αλλάζουμε τις τιμές των παραμέτρων T και r για να αναλύσουμε την επίδρασή τους στο Op VaR. Συγκεκριμένα, διπλασιάζουμε το T για κάθε δικαίωμα και το r (από 1.26% σε 2.5%) ενώ κρατάμε σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

3.7.2 Αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αριθμητικών εφαρμογών. Για τον λόγο αυτό, θα παραθέσουμε πρώτα τους πίνακες με τις εφαρμογές και τα γραφήματα και θα συνεχίσουμε με την επεξήγηση και των σχολιασμό των αποτελεσμάτων μας.

Πιο συγκεκριμένα:

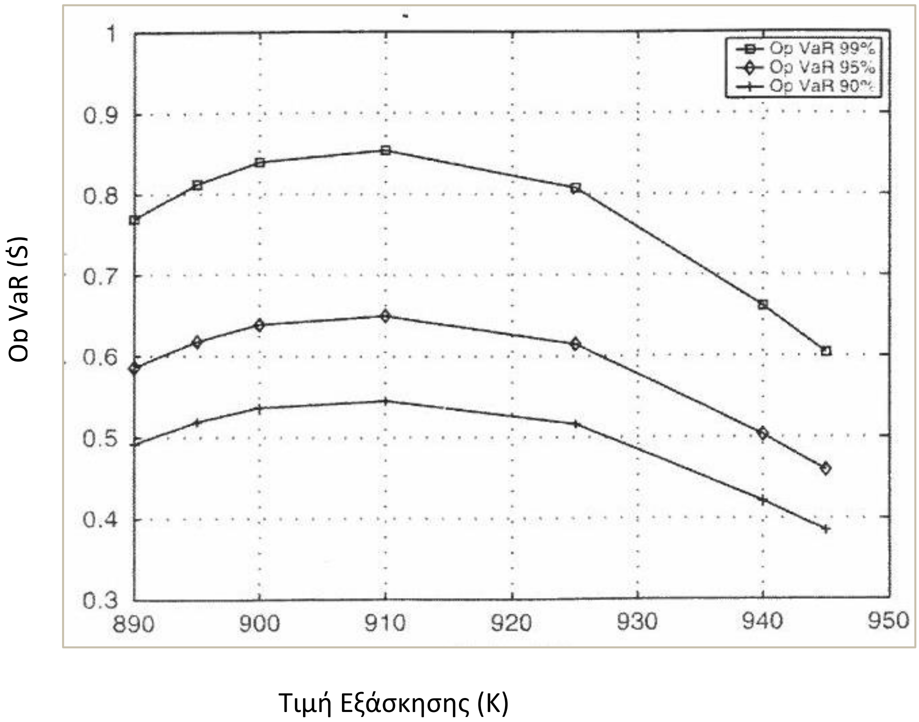
Πίνακας 3

Operational VaR για options πάνω στον δείκτη S&P 500 για διαφορετικά K και T.

Empirical option price ($)	K ($)	T (years)	Implied volatility (%)	k'	Γ	Operational VaR ($)		
						99%	95%	90%
43.3	890	0.14	19.07	0.0062	0.0071	0.7700	0.5860	0.4920
39.9	895	0.14	18.95	0.0060	0.0077	0.8120	0.6180	0.5187
36.6	900	0.14	18.80	0.0058	0.0082	0.8393	0.6387	0.5360
30.4	910	0.14	18.47	0.0055	0.0089	0.8540	0.6500	0.5453
22.4	925	0.14	18.10	0.0050	0.0092	0.8073	0.6147	0.5160
15.7	940	0.14	17.64	0.0045	0.0083	0.6613	0.5033	0.4220
13.8	945	0.14	17.49	0.0044	0.0079	0.6033	0.4593	0.3853
43.2	900	0.21	18.81	0.0059	0.0068	0.6933	0.5273	0.4427
29.1	925	0.21	18.20	0.0052	0.0074	0.6620	0.5040	0.4227
54.4	900	0.38	18.55	0.0056	0.0052	0.5013	0.3813	0.3200
40.8	925	0.38	18.22	0.0052	0.0055	0.4973	0.3780	0.3173
52.9	925	0.63	17.81	0.0047	0.0043	0.3527	0.2687	0.2253

Γράφημα 3

Γραφική αναπαράσταση του Operational VaR (Op VaR) του πίνακα 3 για options σε χρόνο T=0.14.



- <u>Ο πίνακας 3</u> υπολογίζει το Op VaR σε 3 διαφορετικά ποσοστημόρια (90,95,99%) για εμπειρικά δεδομένα για τα δικαιώματα, για διαφορετικά K και T και χωρίς τροποποιημένες παραμέτρους. Ένα γράφημα για τα αποτελέσματα του πίνακα 3 δίνεται για δικαιώματα σε χρόνο T=0.14 για κάθε ποσοστημόριο.

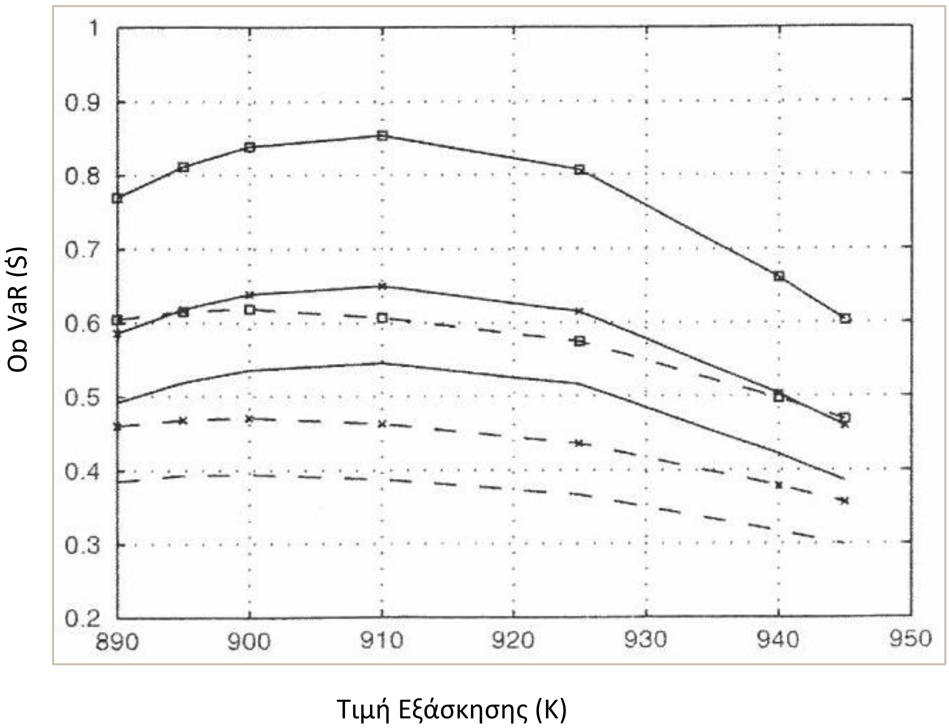
Πίνακας 4

Operational VaR για options πάνω στον δείκτη S&P 500 με διπλάσιο χρόνο λήξης του δικαιώματος σε σχέση με τον πίνακα 3.

Empirical option price ($)	K ($)	T (years)	Implied volatility (%)	k′	Γ	Operational VaR ($)		
						99%	95%	90%
43.3	890	0.27	19.07	0.0062	0.0056	0.6047	0.4600	0.3860
39.9	895	0.27	18.95	0.0060	0.0058	0.6153	0.4680	0.3933
36.6	900	0.27	18.80	0.0058	0.0060	0.6187	0.4707	0.3947
30.4	910	0.27	18.47	0.0055	0.0064	0.6073	0.4627	0.3880
22.4	925	0.27	18.10	0.0050	0.0065	0.5740	0.4367	0.3667
15.7	940	0.27	17.64	0.0045	0.0063	0.4973	0.3787	0.3173
13.8	945	0.27	17.49	0.0044	0.0061	0.4687	0.3567	0.2993
43.2	900	0.43	18.81	0.0059	0.0049	0.5020	0.3820	0.3207
29.1	925	0.43	18.20	0.0052	0.0052	0.4687	0.3567	0.2993
54.4	900	0.77	18.55	0.0056	0.0037	0.3580	0.2727	0.2287
40.8	925	0.77	18.22	0.0052	0.0039	0.3507	0.2667	0.2240
52.9	925	1.27	17.81	0.0047	0.0030	0.2480	0.1887	0.1580

Γράφημα 4

Γραφική αναπαράσταση του Operational VaR (Op VaR) του πίνακα 3 και 4 για διαφορετικά Τ.



- <u>Στον πίνακα 4</u> διπλασιάζουμε τη λήξη T κάθε δικαιώματος του πίνακα 3, ενώ κρατάμε σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους. Κατά συνέπεια, k', Γ και το Op VaR για κάθε ποσοστημόριο υπολογίζονται ξανά. Στο γράφημα για τον πίνακα 4 έχουμε τις τιμές του Op VaR για διαφορετικά ποσοστημόρια, για δικαιώματα σε χρόνο T=0.14 (ή 0.137) και για δικαιώματα με διπλασιασμένη λήξη σε χρόνο T= 0.27. Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν το Op VaR για τον διπλασιασμένο χρόνο T=0.27 και οι συνεχείς γραμμές το Op VaR για T= 0.14. Τα τετράγωνα σημάδια και αυτά σε σχήμα σταυρού δείχνουν το Op VaR για 99% και 95% ποσοστημόρια αντίστοιχα.

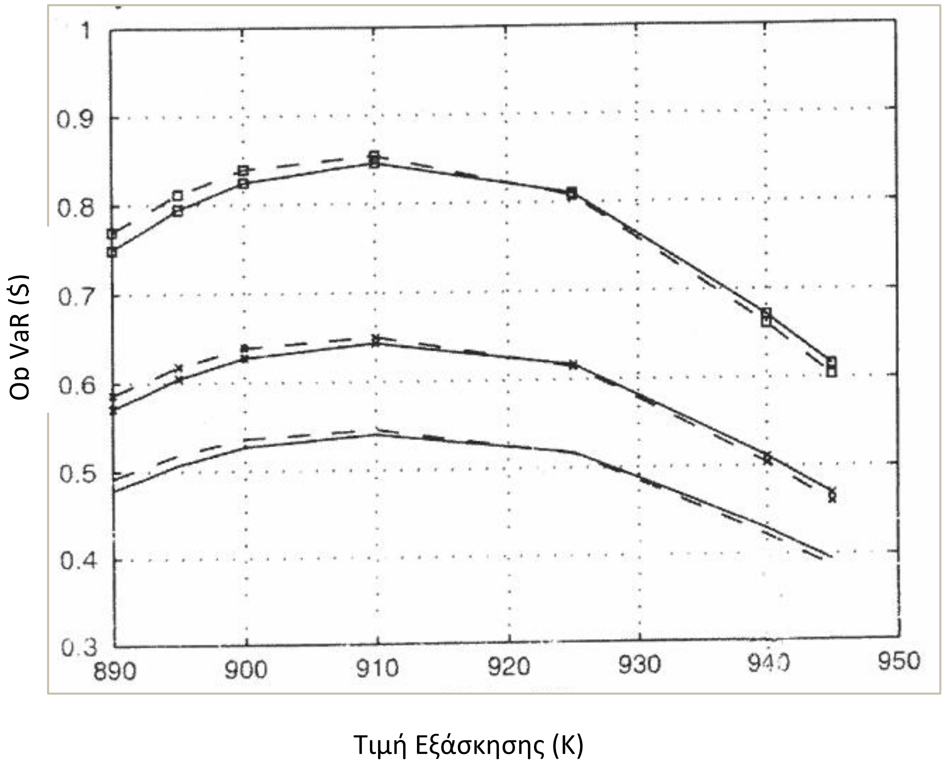
Πίνακας 5

Operational VaR για options πάνω στον δείκτη S&P 500 με επιτόκιο r=2.5%.

Empirical option price ($)	K ($)	T (years)	Implied volatility (%)	k'	Γ	Operational VaR ($)		
						99%	95%	90%
43.3	890	0.14	19.07	0.0062	0.0069	0.7500	0.5707	0.4787
39.9	895	0.14	18.95	0.0060	0.0075	0.7947	0.6047	0.5073
36.6	900	0.14	18.80	0.0058	0.0081	0.8247	0.6273	0.5267
30.4	910	0.14	18.47	0.0055	0.0088	0.8460	0.6433	0.5400
22.4	925	0.14	18.10	0.0050	0.0092	0.8100	0.6167	0.5173
15.7	940	0.14	17.64	0.0045	0.0085	0.6713	0.5107	0.4287
13.8	945	0.14	17.49	0.0044	0.0080	0.6153	0.4687	0.3933
43.2	900	0.21	18.81	0.0059	0.0066	0.6793	0.5167	0.4340
29.1	925	0.21	18.20	0.0052	0.0073	0.6627	0.5040	0.4233
54.4	900	0.38	18.55	0.0056	0.0050	0.4900	0.3727	0.3127
40.8	925	0.38	18.22	0.0052	0.0055	0.4960	0.3773	0.3167
52.9	925	0.63	17.81	0.0047	0.0042	0.3500	0.2667	0.2240

Γράφημα 5

Γραφική αναπαράσταση του Operational VaR (Op VaR) για διαφορετικές τιμές του επιτοκίου r των πινάκων 3 και 5 για δικαιώματα σε χρόνο T=0.14.



- Στον πίνακα 5 διπλασιάζουμε το r από 1.26% σε 2.5% ενώ κρατάμε όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές. Κατά συνέπεια, k', Γ και το Op VaR για κάθε ποσοστημόριο υπολογίζονται ξανά. Το γράφημα του πίνακα 5 περιλαμβάνει τιμές του Op VaR για δικαιώματα σε χρόνο T=0.14 με τιμές του r 1.26% και 2.5% όπου οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν τις τιμές του Op VaR για r=1.26%. Τα τετράγωνα σημάδια και αυτά σε σχήμα σταυρού δείχνουν το OpVaR για 99% και 95% ποσοστημόρια αντίστοιχα.

3.7.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα δίνουν το OpVaR για διαφορετικά ποσοστημόρια και για ένα εύρος δικαιωμάτων. Αυτά είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά καθώς οι τιμές του Op VaR είναι σχετικά μικρές αν συγκριθούν με εμπειρικές τιμές για τα δικαιώματα. Αυτό πρέπει να ισχύει ώστε να είναι εφικτό για τους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς να προσφέρουν δικαιώματα και να αντισταθμίζουν την έκθεσή τους, ενώ βγάζουν κέρδος παρά τις λειτουργικές ζημίες.

Αυτό υποδηλώνει ότι το μοντέλο μας είναι μια σημαντική μέθοδος για την εκτίμηση του λειτουργικού κινδύνου και των ζημιών. Παρόλα αυτά, πρέπει να σημειωθεί ότι 1 συμβόλαιο με δικαιώματα προαίρεσης είναι ισοδύναμο κατά μέσο όρο με 100 μετοχές και τα δικαιώματα διαπραγματεύονται συνήθως σε μια βάση μόχλευσης π.χ. 10%. Έτσι το Op VaR μπορεί να πολλαπλασιαστεί με το 1000 σε ένα ενιαίο συμβόλαιο και ο λειτουργικός κίνδυνος μπορεί να αναπαραστήσει μια σημαντική ζημία για κάθε συμβόλαιο δικαιωμάτων.

Γενικότερα, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το Op VaR αυξάνεται καθώς το $|K - S|$ μειώνεται, όπου S=917$ για τα δεδομένα των δικαιωμάτων μας. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό μέσω του Γ. Γνωρίζουμε ότι το Γ αυξάνεται καθώς το $|K - S|$ μειώνεται [14] και αυτό αντικατοπτρίζεται και στα αποτελέσματα των πινάκων μας. Εφόσον, $\theta = k'\sigma\Gamma S^2\sqrt{\delta t}$ το Op VaR είναι ανάλογο του Γ και έτσι το Op VaR θα πιάσει την μέγιστη τιμή του για «at the money» options (K=S). Αν και το k' μειώνεται με το K (και έτσι θα έπρεπε να μειωθεί και το Op VaR) η τιμή του Γ έχει μια πιο σημαντική επίδραση στο Op VaR.

Στον πίνακα 3 παρατηρούμε ότι το Op VaR μειώνεται καθώς το T αυξάνεται. Για παράδειγμα, το δικαίωμα με τιμή 36.6$ έχει σχεδόν την ίδια μεταβλητότητα και το ίδιο K με το δικαίωμα με τιμή 43.2$ αλλά το Op VaR του είναι χαμηλότερο. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς όπως φαίνεται και από τον πίνακα 3 το Γ είναι χαμηλότερο για το δικαίωμα με τιμή 43.2$, επομένως μειώνεται και το Op VaR. Όπως αναφέραμε ήδη καθώς το Γ αντανακλά το ρυθμό μεταβολής του Δ (τον αριθμό των μετοχών που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης V(t)) ένα μικρότερο Γ θα προκαλούσε λιγότερες συναλλαγές και κατ΄επέκταση λιγότερο λειτουργικό κίνδυνο. Για να αναλύσουμε καλύτερα αυτά τα αποτελέσματα διπλασιάσαμε το T για κάθε δικαίωμα, δεδομένων των αποτελεσμάτων του πίνακα 4 και του γραφήματός του. Όπως γίνεται φανερό σε όλες τις περιπτώσεις, αν διπλασιάσουμε το T μειώνουμε το Op VaR. Όπως φαίνεται και από το γράφημα 4 διπλασιάζοντας το T μειώνεται η κυρτότητα του Op VaR για όλα τα ποσοστημόρια σε σχέση με το K.

Στον πίνακα 5 διπλασιάσαμε το r για να εξετάσουμε την επίδραση που έχει στο Op VaR σε σχέση με τον πίνακα 3. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο γράφημα 5 για δικαιώματα με χρόνο T=0.14. Προκύπτει ότι το επιτόκιο r έχει μια οριακή επίδραση στο Op VaR για όλα τα ποσοστημόρια. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε ότι στο γράφημα 5 το r επηρεάζει το Op VaR ανάλογα με τη σχέση $|K - S|$. Για K<S παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το r μειώνεται το Op VaR και για $K > S$ αυξάνοντας το r αυξάνεται και το Op VaR. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το Γ. Από τους πίνακες 3 και 5 παρατηρούμε ότι το Γ αυξάνεται ή μειώνεται με το r ανάλογα με τη σχέση της τρέχουσας τιμής του δικαιώματος και της τιμής εξάσκησής του. Όπως αναφέραμε και πριν, μια μεταβολή στο Γ επηρεάζει το Δ το οποίο με τη σειρά του επηρεάζει τον λειτουργικό κίνδυνο.

3.8 Επίλογος

Στην εργασία αυτή, ερευνήσαμε τον λειτουργικό κίνδυνο την αντιστάθμισης μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης. Αποδείξαμε ότι ο λειτουργικός κίνδυνος αποτελεί έναν θεμελιώδη και πολύ ουσιαστικό κίνδυνο και δεν μπορεί να αντισταθμιστεί αν δεν προκύψουν σφάλματα αντιστάθμισης και το αντίστροφο. Αρχικά, προτείναμε έναν δείκτη έκθεσης και ένα μοντέλο για να προσδιορίσουμε επακριβώς τον λειτουργικό κίνδυνο στην αντιστάθμιση μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης που αποτελεί και μια πολύ σημαντική λειτουργία της διαχείρισης κινδύνων. Μέσα από μια θεωρητική προσέγγιση καταφέραμε να δημιουργήσουμε το μοντέλο μας δίνοντάς μας μια καλύτερη οπτική για τον λειτουργικό κίνδυνο σε σχέση με άλλες μεθοδολογίες όπως η AMA και η SA. Στη συνέχεια, κάναμε εκτίμηση του μοντέλου μας μέσω αριθμητικών εφαρμογών πάνω σε εμπειρικά δεδομένα για τιμολόγηση call options για ένα εύρος τιμών για τα K,T.

Ένα άλλο σημαντικό κομμάτι της παρούσας εργασίας ήταν η εύρεση της κατανομής των ζημιών του λειτουργικού κινδύνου που μας επέτρεψε να βρούμε διάφορα μέτρα μέτρησης κινδύνου, όπου όλα είναι πολύ σημαντικά για την ανάπτυξη τεχνικών διαχείρισης κινδύνου. Επιπλέον, μέσω της quantile function για τη halfnormal κατανομή υπολογίσαμε το VaR (βλέπε Λήμμα 2). Στη συνέχεια, υπολογίσαμε την τιμή των δικαιωμάτων κάτω από το πρίσμα του λειτουργικού κινδύνου και πραγματοποιήσαμε αριθμητικές εφαρμογές για να εκτιμήσουμε τον λειτουργικό κίνδυνο στα πλαίσια της αντιστάθμισης μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης. Αυτές οι αριθμητικές εφαρμογές συνέβαλλαν ιδιαίτερα στην μελέτη της αντιστάθμισης του λειτουργικού κινδύνου, γεγονός που θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολο χωρίς αυτό το μοντέλο. Εν κατακλείδι, συμπεράναμε ότι ο λειτουργικός κίνδυνος αυξάνεται με το Γ και επηρεάζεται με τις αλλαγές του επιτοκίου r.

Βιβλιογραφία

[1]Aquaro V.- Bardoscia M.- Bellotti R.- Consiglio A.- De Carlo F.- Ferri G. (2010) "A Bayesian Networks approach to Operational Risk", Physica A, volume 389, pages 1721-1728, January 5.

[2] Austrian Central Bank (OeNB), (2006) "Guidelines on Operational Risk Management", August.

[3] Björk T., (2004) "Arbitrage Theory in Continuous Time", Oxford University Press.

[4] Bonston E.-Escobar T.- Flores F., (2008) "Operational Risk Measurement in Banking Institutions and Investments Firms: New European Evidences", Financial Markets, Institutions & Instruments, Vol. 17, Issue 4, pages 287-307, November.

[5] Chaudhury M, (2010) "A review of the key issues in operational risk capital modelling", Journal of Operational Risk, Volume 5, number 3, pages 37-66, September.

[6] Chorafas D., (2004) "Operational Risk Control with Basel II: Basic Principles and Capital Requirements", Butterworth-Heinemann.

[7] Consigli G., (2004) "Estimation of Tail Risk and Portfolio Optimisation with Respect to Extreme Measures.Risk measures for the 21th Century", John Wiley & Sons, West Sussex, ISBN 0-470-86154-1.

[8] Dowd K., (2011) " An Introduction to Market Risk Measurement", Wiley Finance.

[9] Dowd K.,Blake D., (2006) "After VaR: the theory, estimation and insurance applications of quantile-based risk measures", Journal of Risk & Insurance, vol. 73. Blackwell Synergy, pp. 193-229.

[10] Elandt R., (1961) "The folded normal distribution: two methods of estimating parameters from moments", Technometrics, vol. 3. JSTOR, pp. 551-562.

[11] Fragniere E.- Gondzio J.- Yang X., (2010) "Operations risk management by optimally planning the qualified workforce capacity", European Journal of Operational Research, Volume 202, Issue 2, pages 518-527, April 16.

[12] Hubalek F., Kallsen J., Krawczyk L., (2006) "Variance-optimal hedging for processes with stationary independent increments". The Annals of Applied Probability, vol.16. JSTOR, pp. 853-885.

[13] Hull J., (2000) " Options, Futures and Other Derivatives", Prentice Hall, New Jersey.

[14] Kabir M., Hassan M., (2005) "The near-collapse of LTCM, US financial stock returns and the Fed" Journal of Banking and Finance, vol. 29. Elsevier, pp. 441-460.

[15] Leone F., Nelson L., Nottingham R., (1961) "The folded normal distribution" Technometrics, vol.3. JSTOR, pp. 543-550.

[16] Lin T.T. - Lee C.C.- Kuan Y.C., (2011) "The optimal operational risk capital requirement by applying the advanced measurement approach", Springer, May 22.

[17] Loader D., (2002) "Controls, Procedures and Risk", Butterworth-Heinemann.

[18] Mitra S., (2010a) "Multifactor option pricing: pricing bounds and option relations", International Journal of Applied Decision Sciences, vol. 3. Inderscience, pp. 15-33.

[19] Mitra S., (2010b) "Regime switching stochastic volatility option pricing", International Journal of Financial Markets and Derivatives, vol. 1. Inderscience, pp. 213-242.

[20] Mitra S.,(2013) "Operational risk of option hedging" Economic Modelling vol.33, pp.194-203.

[21] Mitra S., (2011) "Energy-based assets: modelling, option pricing and delta hedging with transaction costs" ", International Journal of Sustainable Economy, vol.3. Inderscience, pp 20-43.

[22] Mitra S., Date P., (2010) "Regime switching volatility calibration by the Baum-Welch method", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234. Elsevier, pp. 2367-2616.

[23] Mitra S., Ji T., (2010) "Risk measures in quantitative finance", International Journal of Business Continuity and Risk Management, vol. 1.Inderscience, pp. 125-135.

[24] Pezier J., (2002) "Operational Risk Management", ISMA CENTRE at Henley Business School, September.

[25] Sharpe W., (1966) "Mutual fund performance", The Journal of Business,vol 39,JSTOR, pp. 119-138.

[26] Shevchenko P., Wuthrich, M., (2006) "The structural modelling of operational risk via Bayesian inference: combining loss data with expert opinions". Journal of Operational Risk 1, 3-26.

[27] Shreve S., (2004) "Stochastic Calculus for Finance II (Continuous-Time Models). Springer, New York.

[28] Tan A., (2006) "Long-memory volatility in derivative hedging." Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol.370. Elsevier, pp. 689-696.

[29] Τράπεζα της Ελλάδος, (2007) "ΠΡΑΞΗ ΔΙΟΙΚΗΤΗ ΑΡΙΘΜ. 2590/20.8.2007, Θέμα: Ελάχιστες Κεφαλαιακές Απαιτήσεις των Πιστωτικών Ιδρυμάτων για το Λειτουργικό Κίνδυνο", 20 Αυγούστου 2007

[30] Μπούτσικας Μ. (2005-7) "Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα" Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[31] Μπούτσικας Μ. (2004) " Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές" Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[32] Τράκας Π. (2011) "Διαχείριση Λειτουργικού Κινδύνου Τραπεζών", Τμήμα Οικονομικών και Κοινωνικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

[33] Μαχαριάς Ν.Δ.¨Σημειώσεις Στοχαστικών Διαδικασιών στα Χρηματοοικονομικά και τον Αναλογισμό".

[34] Μαχαιράς Ν.Δ. (2006) ¨Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης" σελ. 1-198.