ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

«Αλγοριθμικά παίγνια και στρατηγικές με έμφαση στις διαπραγματεύσεις».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΠΑΝ. ΖΑΧΑΡΑΚΗΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Πειραιάς, 2017

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Πληροφορικής

Διατριβή

για την απόκτηση Διδακτορικού Διπλώματος του τμήματος Πληροφορικής

Ευάγγελου Ζαχαράκη

«Αλγοριθμικά Παίγνια και στρατηγικές με έμφαση στις διαπραγματεύσεις»

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Επιβλέπων:

Ευάγγελος Φούντας
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Μέλη:

Θεόδωρος Παπαηλίας
Καθηγητής ΤΕΙ Πειραιώς

Νικόλαος Μιχελακάκης
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Εξεταστική Επιτροπή

Ευάγγελος Φούντας
Ομ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Γεώργιος Τσιχριντζής
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Θεόδωρος Παπαηλίας
Καθηγητής ΤΕΙ Πειραιώς

Δημήτριος Αποστόλου
Αν.Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Μιλτιάδης Χαλικιάς
Αν. Καθηγητής ΤΕΙ Πειραιώς

Νικόλαος Μιχελακάκης
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πειραιώς

Δημήτριος Βαρουτάς
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ευχαριστίες

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στον εξέχοντα επιστήμονα και εξαιρετικού ήθους άνθρωπο, Καθηγητή κ. Ευάγγελο Φούντα, για την καθοδήγηση του και την αμέριστη συμπαράσταση του στην εκπόνηση αυτής της διατριβής. Σε όλη τη διάρκεια αυτής της πολυετούς διαδρομής υπήρξε γι' εμένα φωτεινός φάρος που με οδήγησε μέχρι το τέλος.

Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Θεόδωρο Παπαηλία και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Μιχελακάκη, για την εξαιρετική συνεργασία που είχα μαζί τους.

Τέλος, βαθιά ευγνωμοσύνη οφείλω στους γονείς μου, στα παιδιά μου και κυρίως, στη σύζυγό μου. Χωρίς τη βοήθειά της δεν θα τα είχα καταφέρει. Ως ελάχιστη ανταπόδοση της στήριξής της, η παρούσα διατριβή αφιερώνεται σ΄αυτήν.

Ευάγγελος Ζαχαράκης

Περίληψη

Η διατριβή «*Αλγοριθμικά παίγνια και στρατηγικές με έμφαση στις διαπραγματεύσεις*», πραγματεύεται την εφαρμογή της θεωρίας των παιγνίων στις διαπραγματεύσεις και στην επίλυση συγκρούσεων. Αφού κάνουμε μια συνολική επισκόπηση της θεωρίας παιγνίων και εξηγήσουμε την έννοια της ισορροπίας κατά Nash, και τον τρόπο σχηματισμού συλλογικής γνώμης, εξετάζουμε τη λύση του διαπραγματευτικού προβλήματος κατά Nash, και ακολουθώντας την μοντελοποίηση των διαπραγματεύσεων από τον Rubinstein, παρουσιάζουμε εφαρμογές του μοντέλου στις διεθνείς σχέσεις. Τέλος, αναλύουμε μέσα από την οπτική της θεωρίας παιγνίων τις διαπραγματεύσεις μεταξύ Η.Π.Α. και Ηνωμένου Βασιλείου τη δεκαετία του 1960, σχετικά με τη δυνατότητα του Η.Β. για πυρηνική αποτροπή.

Η δομή των κεφαλαίων της διατριβής έχει ως ακολούθως :

Κεφάλαιο 1^{ο}: Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή και σύντομη περιγραφή των δομικών στοιχείων της θεωρίας παιγνίων καθώς και του ρόλου της σε σύγχρονες επιχειρησιακές εφαρμογές. Δίνονται γενικά παραδείγματα σε μια προσπάθεια ολοκλήρωσης του πλαισίου κατηγοριοποίησης και περιγραφής της διαδικασίας που ανά περίπτωση ακολουθεί. Τέλος, αναλύουμε παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Κεφάλαιο 2^{ο}: Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρώνουμε στα παίγνια δύο προσώπων μη μηδενικού αθροίσματος και αναλύουμε γι' αυτα την έννοια της ισορροπίας Nash. Αναφερόμαστε στα παίγνια μικτής στρατηγικής και παρουσιάζουμε εφαρμογές και τρόπους υπολογισμού των μικτών στρατηγικών για λύση παιγνίου μη μηδενικού αθροίσματος.

Κεφάλαιο 3^{ο}: Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στο πώς συντίθεται οι γνώμες ομάδας ώστε να προκύψει συλλογική γνώμη. Αναλύονται οι μέθοδοι Borda και Condorcet, ενώ παρουσιάζεται και το σχετικό θεωρητικό πλαίσιο. Οι μέθοδοι αυτοί σχετίζονται με τον τρόπο λήψης απόφασης σχετικά με την προτεραιοποίηση εναλλακτικών επιλογών / παραμέτρων.

Κεφάλαιο 4^{ο}: Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε την έννοια της διαπραγμάτευσης κατά τη θεωρία παιγνίων. Παρουσιάζονται μοντέλα διαπραγμάτευσης και εξηγούνται οι έννοιες των διαπραγματευτικών συνόλων, τα διαπραγματευτικά αξιώματα, η διαπραγματευτική λύση Nash, το σημείο απειλής και το γινόμενο Nash.

Κεφάλαιο 5ο : Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το πλαίσιο για την επιστημολογική αναπαράσταση παιγνίου. Παρουσιάζονται οι πεποιθήσεις (beleifs) των παικτών σχετικά με τα χαρακτηριστικά του αντίπαλου τους (αποφασιστικότητα, ορθολογισμός) σε περιβάλλον απροσδιοριστίας και περιγράφονται παίγνια διεθνών συγκρούσεων και διαπραγμάτευσης.

Κεφάλαιο 6ο : Στο κεφάλαιο 6 εξηγούμε ιστορικά γεγονότα που αφορούν σε σχέσεις κρατών μέσα από το πρίσμα της θεωρίας παιγνίων.

Abstract

This thesis, titled “Algorithmic games and strategies emphasizing on bargaining” delves into the application of game theory to bargaining. After an extensive review of game theory, we investigate on how to aggregate individual opinions and preferences, we present the Nash bargaining solution and we implement Rubinstein bargaining model and bargaining under uncertainty models to interstate relations. Finally we use game bargaining theory to analyze the negotiations between USA and UK in the sixties, concerning UK’s nuclear deterrence capability.

Structure of the thesis' chapters:

In the first chapter there is an introduction and a short description of the basic elements of game theory, as well as its role in modern business applications. We present minmax theorem and we solve zero – sum games.

In the second chapter we focus on two persons – non zero sum games, we elaborate on mixed strategies and we analyze Nash equilibrium. Finally we present different methods to solve a two person – non zero sum games and their implications.

In the third chapter we concentrate on different mechanisms to aggregate individual opinions and preferences, and shape a single decision. We analyze Bodra and Condorcet methods. These methods are related to decision making since they can be used to prioritize different options (e.g. during bargaining).

In the fourth chapter we use game theory’s tools to analyze bargaining. We present the notions of bargaining sets and axioms status quo and utility functions. We explore different ways to reach the Nash bargaining solution.

In fifth chapter we turn to epistemic game theory in order to present rationality and beliefs of the players in a formal language. We investigate the bargaining under uncertainty and we describe methods to model international conflicts between states.

In sixth chapter we use game theory’s tools to study real incidents in interstate relations.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων

1.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

1838: Ο Γάλλος οικονομολόγος Augustin Cournot ανέλυσε ολιγοπωλιακές καταστάσεις με τρόπο παρόμοιο με τις σύγχρονες μεθόδους της θεωρίας παιγνίων (μοντέλο Cournot).

1881: Ο Άγγλος οικονομολόγος Francis Edgeworth ασχολήθηκε με την εφαρμογή των μαθηματικών στις κοινωνικές επιστήμες.

1913: Ο Γερμανός μαθηματικός Ernest Zermelo απέδειξε ότι το σκάκι έχει λύση από οποιαδήποτε κατάσταση.

1928: Ο John von Neumann απέδειξε ότι μια σημαντική κατηγορία παιχνιδιών, τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, έχουν πάντα λύση.

1944: Οι John von Neumann και Oskar Morgenstern εξέδωσαν το βιβλίο "Theory of Games & Economic Behavior", όπου:

- Όρισαν αξιωματικά την θεωρία της χρησιμότητας (utility theory)
- Ανέλυσαν διεξοδικά τις βέλτιστες λύσεις στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος.
- Εισήγαγαν μια νέα κατηγορία παιχνιδιών, τα συνεργατικά παίγνια (cooperative games).

1950: Ο John Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας, η οποία είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια στη σύγχρονη θεωρία των παιγνίων. Η έννοια της ισορροπίας Nash εφαρμόζεται και στα παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος. Η εργασία του Nash μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί επέκταση της εργασίας του Cournot.

1965, 1975: Ο Reinhard Selten γενίκευσε τις ιδέες του Nash στα δυναμικά παίγνια, δηλαδή σε παίγνια που εξελίσσονται στην πορεία του χρόνου.

1967-1968: Ο John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του Nash σε παίγνια μη-πλήρους πληροφόρησης σχετικά με τις προτιμήσεις και τις αποφάσεις των άλλων παικτών. Οι Selten και Harsanyi μοιράστηκαν, μαζί με τον John Nash, το βραβείο Nobel στα οικονομικά το 1994.

1.2 Ορισμοί

Η Θεωρία Παιγνίων συνδέεται με όλους τους επιστημονικούς χώρους σε θεωρητικό επίπεδο αλλά και σε επίπεδο εφαρμογών. Μπορούμε να την συνδυάσουμε εύκολα με τον κλάδος της θεωρίας των αποφάσεων που ασχολείται με τις αλληλένδετες αποφάσεις. Επειδή η θεωρία παιγνίων προέκυψε από την ανάλυση σεναρίων ανταγωνισμού, τα προβλήματα ονομάζονται *παίγνια* και οι συμμετέχοντες ονομάζονται *παίκτες*. Συνοπτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η θεωρία παιγνίων ασχολείται με προβλήματα στα οποία η στρατηγική του κάθε παίκτη εξαρτάται από το τι κάνουν οι άλλοι παίκτες. Πολλές φορές παρουσιάζονται καταστάσεις σε κοινωνικά στρώματα τα οποία αφορούν αλληλοεξαρτώμενες αποφάσεις.

Η θεωρία παιγνίων εφαρμόζεται στις επόμενες καταστάσεις:

- Φίλοι που επιλέγουν πού να πάνε για δείπνο
- Συνάδελφοι που αποφασίζουν πώς θα πάνε στη δουλειά
- Οι επιχειρήσεις που ανταγωνίζονται στην αγορά
- Διπλωμάτες που διαπραγματεύονται μια συνθήκη
- Οι παίκτες που ποντάρουν σε ένα παίγνιο καρτών

Όλες οι καταστάσεις αυτές απαιτούν στρατηγική σκέψη - κάνοντας χρήση των διαθέσιμων πληροφοριών και όχι μόνο για την εκπόνηση του καλύτερου σχεδίου για την επίτευξη των στόχων τους. Οι κατάλληλες τεχνικές για την ανάλυση των αλληλεξαρτώμενων αποφάσεων διαφέρουν σημαντικά από εκείνες για τις μεμονωμένες αποφάσεις.. Ακόμη και για αυστηρά ανταγωνιστικά παίγνια, ο στόχος είναι απλώς να εντοπίζεται η βέλτιστη τακτική (στρατηγική) του καθενός, το οποίο είναι μια σημαντική διάκριση. Ο κύριος στόχος μας είναι το αν έχουμε χρησιμοποιήσει τη βέλτιστη τακτική μας.

Στα παίγνια, οι ενέργειες των παικτών αναφέρονται ως *κινήσεις*. Μια σειρά από συνδυασμό κινήσεων ονομάζεται *τακτική (στρατηγική)*. Βέλτιστη στρατηγική ονομάζεται μια ακολουθία κινήσεων η οποία οδηγεί στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Η Θεωρία Παιγνίων στοχεύει στην αλληλεξάρτηση των αποφάσεων ομάδας ανθρώπων, η οποία επηρεάζει τους υπόλοιπους. Μερικά από τα ερωτήματα που τίθενται σε τέτοιες καταστάσεις είναι τα ακόλουθα:

- Τι ενέργειες μπορεί να εκτελέσει κάθε άνθρωπος;

- Ποια είναι τα αποτελέσματα αυτών των ενεργειών. Είναι τα αποτελέσματα θετικά για όλους τους ανθρώπους;
- Τι μπορεί να "εικάσει" κάθε άνθρωπος για τις ενέργειες των υπολοίπων;
- Παίζει ρόλο εάν οι άνθρωποι αλληλεπιδρούν περισσότερες από μία φορές;
- Πώς επηρεάζει την στρατηγική η γνώση για τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά άλλων ανθρώπων;

Με τη θεωρία των παιγνίων επιτυγχάνεται η μελέτη, η ανάλυση και η λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις συγκρούσεως συμφερόντων.

Έτσι, στην περίπτωση των οικονομικών συμφερόντων, η θεωρία των παιγνίων αποτέλεσε την βάση για την μελέτη προβλημάτων ολιγοπωλίου, διμερούς μονοπωλίου, γενικής ισορροπίας, οικονομικών διακυμάνσεων κ.λπ.

Εκτός των εφαρμογών στην Οικονομική, τα παίγνια προσέφεραν και στην μελέτη των πολιτικών και στρατηγικών προβλημάτων, αφού έννοιες όπως χρησιμότητα, προτίμηση, συνεργασία, συμμαχία, συνασπισμός, επικράτηση, διαιτησία, απειλή, διαπραγματεύσεις, καταδίωξη, πόλωση κ.λπ. μπορούν να περιγραφούν με την γλώσσα των μαθηματικών και να δώσουν κριτήρια στους ηγήτορες για την λήψη των αποφάσεων.

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους τα παίγνια διακρίνονται σε παίγνια *τύχης, στρατηγικής, συνεργασίας, πεπερασμένα, απέραντα, με* $2, 3, \ldots, \mathrm{n}$ *πρόσωπα, με άθροισμα κερδών μηδέν ή διάφορο του μηδενός, με πληροφορίες ή χωρίς πληροφορίες, με ποινές, εναντίον της φύσεως κ.λπ.*

Στα παίγνια τύχης το αποτέλεσμα εξαρτάται από την τύχη (π.χ. ζάρια, νομίσματα, ρουλέτα κ.λπ.), χωρίς να μπορούν να επέμβουν οι παίκτες. Αντίθετα, στα παίγνια στρατηγικής το αποτέλεσμα δεν είναι αποκλειστικό προϊόν της τύχης, αλλά διαμορφώνεται από την επέμβαση των παικτών. Σ' αυτά οι κινήσεις των παικτών γίνονται σύμφωνα με κανόνες που καθορίζονται ή/και προϋπάρχουν.

Οι δυνατότητες επεμβάσεως, που προσφέρουν σε κάθε παίκτη οι κανόνες του παιγνίου, ονομάζονται *στρατηγικές* του. Από τον τρόπο δε που επιλέγονται προσδιορίζεται και το αποτέλεσμα κάθε παρτίδας του παιγνίου για κάθε παίκτη.

Τα παίγνια στρατηγικής έχουν νόημα, όταν κανένας παίκτης δεν ελέγχει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα, το οποίο είναι ευνοϊκό (αντίστοιχα δυσμενές) όταν το δικαίωμα συμμετοχής στο παίγνιο είναι μικρότερο (αντίστοιχα μεγαλύτερο) από το αναμενόμενο κέρδος.

Δίνονται οι παρακάτω ορισμοί:

- Ομάδα (group): Σε κάθε παίγνιο υπάρχουν περισσότερα από ένα άτομα που παίρνουν αποφάσεις (decision makers). Κάθε τέτοιο άτομο ονομάζεται παίκτης (player).
- Αλληλεπίδραση (Interaction): Οι κινήσεις κάθε παίκτη επηρεάζουν τους υπόλοιπους.
- Στρατηγική σκοπιμότητα (strategic): Κάθε παίκτης επιλέγει τις ενέργειές του με βάση την ερμηνεία των αλληλεπιδράσεων.
- Ορθολογικότητα (rationality): Ονομάζεται η ενέργεια που επιλέγει να εκτελέσει κάθε παίκτης και η οποία είναι η καλύτερη δυνατή γι' αυτόν.
- Γράφημα : Γράφημα ονομάζουμε κάθε δυάδα (X,V), όπου X ένα μη κενό σύνολο και V σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x,y) με $x, y \in X$ και σημειώνεται με $G \equiv (X, V)$.
- Ο πληθάριθμος |X| του X ονομάζεται <u>τάξη</u> του γραφήματος, ενώ τα στοιχεία του ονομάζονται <u>σημεία ή κορυφές ή κόμβοι</u> του γραφήματος. Τα στοιχεία του V δηλαδή τα διατεταγμένα ζεύγη $(x, y) \in XxX$ ονομάζεται <u>τόξα</u> του γραφήματος, ενώ <u>οι κορυφές x,y αντίστοιχα αρχή και πέρας τους.</u> Όταν η αρχή και το πέρας συμπίπτουν, τότε ονομάζεται <u>βρόχος.</u>
- Οι κορυφές παρίστανται στο επίπεδο με σημεία του, ενώ τα τόξα (x,y) με τμήματα συνεχών γραμμών τα οποία συνδέουν τα άκρα τους νε φορά από το x προς το y, που σημειώνεται με την ένδειξη αιχμής.
- Τέλος, πολλοί συγγραφείς αντί των X και V χρησιμοποιούν αντίστοιχα τα V(G) και A(G) από τα αρχικά γράμματα των όρων vertices (κορυφές) και arcs (τόξα).
- <u>Ευσταθές σύνολο</u> ενός γραφήματος $G \equiv (X, \Gamma)$ ονομάζεται κάθε σύνολο $S \subset X$ όταν:
- $x \in S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S = \varnothing$
- δηλαδή όταν δύο οποιεσδήποτε κορυφές του δεν συνδέονται με τόξο.
- Απορροφητικά Σύνολα : <u>Απορροφητικό σύνολο</u> ενός γραφήματος $G = (X, \Gamma)$ ονομάζεται κάθε σύνολο $A \subset X$ όταν $x \in A \Rightarrow \Gamma(x) \cap A \neq \varnothing$

- δηλαδή όταν κάθε κορυφή του συνόλου X \ A συνδέεται με τόξο με μια τουλάχιστον κορυφή του A.
- Πυρήνες : Πυρήνας ενός γραφήματος $G \equiv (X,\Gamma)$ ονομάζεται κάθε σύνολο $N \subset X$ το οποίο είναι ευσταθές και απορροφητικό.

1.3 Στρατηγικές

Υπάρχουν παίγνια στα οποία ο παίκτης μπορεί να προσδιορίζει αποτελεσματικά την στρατηγική που θ' ακολουθήσει πριν αρχίσει η παρτίδα τους. Έτσι στο παίγνιο της «κούρσας στα 20» νικητής αναδεικνύεται εκείνος που θ' ανακοινώσει πρώτος τους αριθμούς 2,5,8,11,14,17 (που είναι ισοϋπόλοιποι ως προς 3). Υπενθυμίζεται ότι στο παίγνιο αυτό οι δυο παίκτες ανακοινώνουν διαδοχικά αριθμούς που διαφέρουν κατά μία ή δυο μονάδες και νικητής ανακηρύσσεται εκείνος που θ' ανακοινώσει πρώτος τον αριθμό 20.

Στο παίγνιο αυτό, που είναι παραλλαγή του παιγνίου Nim ή Fan Tan, η επιλογή του πρώτου αριθμού είναι καθοριστική για την έκβαση του αποτελέσματος. Αντίθετα στο παίγνιο της *τρίλιζας ή tic-tac-toe* όπου οι δυο παίκτες σημειώνουν διαδοχικά O ή X σε εννέα φατνία και νικητής ανακηρύσσεται εκείνος που θα σχηματίσει πρώτος οριζόντια, κάθετα ή διαγώνια τρία σημεία του, δεν υπάρχει απλό σχέδιο δράσης των αντιπάλων, γιατί υπάρχουν συνολικά $9! = 362.880$ διαφορετικοί τρόποι. Αντίστοιχα συμβαίνει και στο σκάκι.

X	O	
	X	O
		X

Τα προβλήματα όπου η εξέλιξη των καταστάσεων εξαρτάται από δύο διαφορετικά σύνολα τελεστών μετάβασης που εφαρμόζονται εναλλάξ αναφέρονται και ως ανταγωνιστικά παίγνια ή παίγνια δύο αντιπάλων (adversary / two-person games).

Ο όρος "παίγνιο" αφορά την περιγραφή του τρόπου με τον οποίο παίζεται το παιχνίδι και περιλαμβάνει:

- τα αντικείμενα που υπάρχουν (για παράδειγμα, τα πούλια, το ταμπλώ, κτλ.) καθως και
- το σύνολο των κανόνων που το διέπουν.

Αντίθετα με τον όρο “παιχνίδι” χαρακτηρίζεται μία συγκεκριμένη παρτίδα του παιγνίου.

Το πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

- Μια κατάσταση παριστάνει τη διάταξη των πιονιών σε κάποια στιγμή.
- Ο χώρος καταστάσεων αποτελείται από όλες τις πιθανές καταστάσεις.
- Οι τελεστές μετάβασης είναι οι επιτρεπτές κινήσεις (κανόνες του παιχνιδιού).
- Οι τελικές καταστάσεις έχουν γνωστά χαρακτηριστικά (π.χ. Ματ στο σκάκι ή μια στήλη συμπληρωμένη με το ίδιο σύμβολο στην τρίλιζα).

Έστω ότι κάποιος είναι η σειρά του να κάνει μια κίνηση:

- Αν θέλει να κερδίσει, θα επιδιώξει να κάνει την καλύτερη κίνηση για αυτόν, η οποία αντίστοιχα θα είναι και η χειρότερη για τον αντίπαλο.
- Ο τρόπος που θα σκέφτεται είναι ο εξής: “Άν κάνω αυτή την κίνηση, τότε ο αντίπαλος θα κάνει εκείνη, άν όμως κάνω την άλλη, τότε θα κάνει αυτήν,...”κ.ο.κ.
- Ο συλλογισμός αυτός αντιστοιχεί στη δημιουργία ενός δένδρου (δένδρο του παιχνιδιού game).

Το χαρακτηριστικό του είναι ότι οι κινήσεις δύο διαδοχικών επιπέδων ανήκουν σε διαφορετικό παίκτη, γιατί οι παίκτες παίζουν εναλλάξ.

1.3.1 Ο Αλγόριθμος minmax

Δεδομένης μίας κατάστασης του παιχνιδιού, ο αλγόριθμος *αναζήτησης μεγίστου-ελαχίστου (MiniMax)* καλείται να αποφασίσει ποια θα είναι η επόμενη κίνηση του αντιπάλου.

Η εξαντλητική αναζήτηση των δένδρων αναζήτησης είναι ανέφικτη. Το ζητούμενο ωστόσο είναι:

- Να χτιστεί το δένδρο μέχρι κάποιο βάθος
- Να βρεθεί η καλύτερη κίνηση από την παρούσα κατάσταση.

Το μέτρο της υπεροχής του ενός ή του άλλου αντιπάλου δίνεται από μια συνάρτηση αξιολόγησης (evaluation function) και η οποία εφαρμόζεται στα φύλλα του δένδρου του παιχνιδιού.

Ο ένας παίκτης (πρόγραμμα) ονομάζεται max και ο άλλος (άλλο πρόγραμμα ή άνθρωπος) ονομάζεται min.

Ψευδογλώσσα

Εφάρμοσε τη συνάρτηση αξιολόγησης σε όλους τους κόμβους-φύλλα του δένδρου.

Έως ότου ρίζα του δένδρου αποκτήσει τιμή, επανέλαβε:

Αρχίζοντας από τα φύλλα του δένδρου και προχωρώντας προς τη ρίζα, μετέφερε τις τιμές προς τους ενδιάμεσους κόμβους του δένδρου ώς εξής:

Η τιμή κάθε κόμβου Max είναι η μέγιστη των τιμών των κόμβων-παιδιών του.

Η τιμή κάθε κόμβου Min είναι η ελάχιστη των τιμών των κόμβων-παιδιών του.

Καλύτερη κίνηση είναι η κίνηση που οφηγεί στον κόμβο που έδωσε την πιο συμφέρουσα στη ρίζα τιμή (μέγιστη για το Max, ελάχιστη για το Min).

Ο αλγόριθμος εγγυάται την πιο συμφέρουσα εξέλιξη μετά από κάποιες κινήσεις, έστω και άν ο αντίπαλος διαλέγει τις καλύτερες για αυτόν κινήσεις.

Κατά σύμβαση, ο παίκτης που βρίσκεται στη ρίζα θεωρείται πως είναι ο Max. Οι καταστάσεις-φύλλα ονομάζονται τερματικές καταστάσεις, όμως δεν είναι απαραίτητα τελικές καταστάσεις, ενώ οι τιμές των τερματικών καταστάσεων υπολογίζονται από τη συνάρτηση αξιολόγησης, ενώ οι άλλες προκύπτουν από τη διάδοση αυτών. Κατά σύμβαση, ο παίκτης που βρίσκεται στη ρίζα θεωρείται πως είναι ο Max. Οι καταστάσεις-φύλλα ονομάζονται τερματικές καταστάσεις, όμως δεν είναι απαραίτητα τελικές καταστάσεις, ενώ οι τιμές των τερματικών καταστάσεων υπολογίζονται από την τιμή της συνάρτησης αξιολόγησης για την κατάσταση.

Ας δούμε αναλυτικότερα την εφαρμογή του αλγόριθμου minmax στο παίγνιο της τρίλιζας. Το πρώτο βήμα είναι να οριστεί συνάρτηση αξιολόγησης. Ορίζουμε συνάρτηση αξιολόγησης τη συνάρτηση:

$$10 * X2 + X1 - (10 * O2 + O1), \text{ όπου}$$

- X2 ο αριθμός γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με δύο X και χωρίς κανένα O.
- X1 ο αριθμός γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με ένα X και χωρίς κανένα O.
- O2 ο αριθμός γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με δύο O και χωρίς κανένα X.
- O1 ο αριθμός γραμμών, στηλών ή διαγωνίων με ένα O και χωρίς κανένα X.

Η δομή της συνάρτησης δείχνει ότι λαμβάνονται υπόψη και οι ευκαιρίες του παίκτη, αλλά και οι ευκαιρίες του αντιπάλου (που εμφανίζονται με -) κάτι που προκύπτει από την συμμετρική φύση του παιγνίου.

Σημειώνουμε ότι παίγνια όπως η τρίλιζα είναι δυναμικά, με την έννοια ότι οι παίκτες απαντούν ο ένας στις επιλογές του άλλου με πολλές διαδοχικές κινήσεις. Σε κάθε κίνηση ο παίκτης γνωρίζει όλες τις κινήσεις που έχουν γίνει έως τότε.

Αντιθέτως, σε άλλα παίγνια, οι παίκτες επιλέγουν πρακτικά ταυτόχρονα τις κινήσεις τους, χωρίς ο ένας να έχει εικόνα για την απόφαση του άλλου, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στα business games – παίγνια λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων.

1.4 Παραδείγματα παιγνίων

Business games

Τα παίγνια λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων (business games) πρωτοεμφανίσθηκαν το 1965 με το top management decision game της American Management Association. Στη συνέχεια εμφανίσθηκαν παίγνια του M.I.T., του Harvard, της Rand Corporation, του Carnegie Institute of Technology, της General Electric, κλπ. Στην Ευρώπη η αγγλική International Computers Limited και η γαλλική Compagnie Française d’ Organisation, έδωσαν τα πρώτα παίγνια λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων.

Από τότε εκατοντάδες τέτοια παίγνια έχουν αναπτυχθεί από Πανεπιστήμια και Ερευνητικά Κέντρα, για σκοπούς ερευνητικούς και εκπαιδευτικούς.

Τα παίγνια αυτά ποικίλουν ανάλογα με τις συνθέσεις τους από απλά ανταγωνιστικά μέχρι υπερβολικά πολύπλοκα. Ο βαθμός πραγματικότητας και το επίπεδο σφαλμάτων εξαρτάται από τα υπολογιστικά μέσα και τον βαθμό προσέγγισης στην αναπαράσταση της πραγματικότητας .

Στην Α.Β.Σ.Π (από την οποία προέρχεται το Πανεπιστήμιο Πειραιώς) πρωτοπαίχθηκε το 1973 παίγνιο λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων.

Πολιτικοστρατιωτικά παίγνια

Τα παίγνια της κατηγορίας αυτής αποτελούν και αυτά αντικείμενο έρευνας και μελέτης πολλών Πανεπιστημίων και Ερευνητικών Κέντρων, λόγω της σημασίας που έχουν.

Η επιτυχία τους εξαρτάται από τον βαθμό αντικειμενικότητας που χαρακτηρίζει τα δεδομένα τους και τις υποθέσεις τους. Στο σημείο αυτό μειονεκτούν σε σχέση με τα παίγνια λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων, γιατί στα δεύτερα οι τιμές των μεταβλητών και οι εξισώσεις των μοντέλων τους στηρίζονται σε παραδεκτές θεωρίες της Οικονομικής και έχουν καταξιωθεί από την πρακτική.

Ο χώρος των παιγνίων πολιτικών καταστάσεων είναι πολύ ευρύς, αφού αναφέρεται σε θέματα πολιτικών αναμετρήσεων, συνδικαλιστικών αγώνων, κρίσεων , επαναστάσεων, διεθνών συγκρούσεων, κλπ, τα δε σενάριά τους βοηθούν τους ηγήτορες στη λήψη των αποφάσεων.

Έτσι από την απλή ανάλυση του ψυχροπολεμικού παιγνίου που περιγράφει ο πίνακας:

	B	
	K	P
A	ΕΙΡΗΝΗ I	ΕΙΡΗΝΗ-ΠΟΛΕΜΟΣ II
	ΕΙΡΗΝΗ-ΠΟΛΕΜΟΣ III	ΚΡΙΣΗ IV

όπου με K, P σημειώνονται οι τακτικές του “καρότου” (ύφεσης) και της “ράβδου” (απειλής) των δύο πρωταγωνιστών. Εύκολα προκύπτει ότι, εφόσον για λόγους πολιτικής δεν προωθούν την ειρήνη και για λόγους στρατηγικής δεν καταφεύγουν στον πόλεμο είναι αναγκασμένοι να εναλλάσσουν την κατάσταση II με την III.

Τηλεοπτικό παίγνιο γνώσεων

Έστω ένα τηλεοπτικό παίγνιο γνώσεων. Λίγο πριν από το τέλος του παιχνιδιού έχουμε κερδίσει ένα ποσό A_1 και πρέπει να στοιχηματίσουμε ένα ποσό $B_1 < A_1$ για μια τελευταία ερώτηση (την οποία δεν γνωρίζουμε ακόμη). Εάν απαντήσουμε σωστά, το ποσό B_1 προστίθεται στο A_1, αλλιώς αφαιρείται. Έστω N συνολικά οι παίκτες, κάθε ένας από τους οποίους κερδίζει μέχρι στιγμής ποσό A_1 και ονομάζεται να στοιχηματίσει ποσό $B_1 < A_1$. Μετά την ολοκλήρωση των ερωτήσεων, ο παίκτης που έχει συγκεντρώσει το μεγαλύτερο ποσό $A_i + B_i$ κερδίζει και παίρνει τα χρήματά του, ενώ οι υπόλοιποι δεν παίρνουν τίποτα.

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Ποιο πρέπει να είναι το ποσό B_i για κάθε παίκτη i, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να φύγει νικητής και μάλιστα με όσο το δυνατόν περισσότερα χρήματα;

Το πρόβλημα έχει όλα τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων που εξετάσει η θεωρία παιγνίων: Υπάρχει μια ομάδα ανθρώπων. Οι επιμέρους αποφάσεις τους επηρεάζουν ολόκληρη την ομάδα. Για κάθε παίκτη υπάρχουν αποφάσεις που δεν έχουν ειδικό νόημα, οπότε δεν χρειάζεται να τις εξετάσει καν. Προφανώς κάθε παίκτης θα αποφασίσει με τέτοιον τρόπο, ώστε να μεγιστοποιήσει (κατά την εκτίμησή του) την πιθανότητα να κερδίσει το παίγνιο. Για παράδειγμα, έστω ότι εμείς κερδίζουμε μέχρι στιγμής 10.000€ και ο μοναδικός μας αντίπαλος 7.500€. Εάν στοιχηματίσουμε 5.001€ εξασφαλίζουμε ότι, στην περίπτωση που απαντήσουμε σωστά, θα είμαστε σίγουρα οι νικητές, ανεξαρτήτως τι θα απαντήσει ο αντίπαλος.

Ωστόσο, το ίδιο στοίχημα μας οδηγεί στο να χάσουμε, εάν ο αντίπαλος στοιχηματίσει λιγότερα από 2.500 € (ακόμη και αν απαντήσει λάθος). Θα μπορούσαμε να μην στοιχηματίσουμε τίποτα, οπότε σε αυτή την περίπτωση εξασφαλίζουμε ότι θα κερδίσουμε στη περίπτωση που ο αντίπαλος στοιχηματίσει λιγότερα από 2.500€, ακόμη και αν απαντήσει σωστά. Φυσικά πάντα υπάρχει το ενδεχόμενο και για τους δύο παίκτες να στοιχηματίσουν όλα τα κέρδη τους, ελπίζοντας ταυτόχρονα να τα διπλασιάσουν και να κερδίσουν το παίγνιο. Οι παραπάνω είναι μερικές από τις κινήσεις που έχουν ιδιαίτερη στρατηγική σκοπιμότητα στο συγκεκριμένο παίγνιο. Το τι θα πράξει ο κάθε παίκτης εξαρτάται από τη γνώση που έχει για τις δυνατότητές του και τις δυνατότητες του αντιπάλου. Με άλλα λόγια, κάθε παίκτης προσπαθεί να μαντέψει την απόφαση και τις δυνατότητες του αντιπάλου του και, λαμβάνοντας υπόψη και τις δικές του ικανότητες, αποφασίζει τη δική του βέλτιστη κίνηση (ορθολογικότητα).

Τα παίγνια σαλονιού Nim και Marienbad

Σενάριο: Υπάρχουν δύο σωροί από σπίρτα και δύο παίκτες, Α και Β, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ (ξεκινά ο Α). Σε μια "κίνηση", κάθε παίκτης μπορεί να αφαιρέσει όσα σπίρτα θέλει από έναν από τους σωρούς. Στο παίγνιο Nim, ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο σπίρτο κερδίζει. Στο παίγνιο Marienbad, ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο σπίρτο χάνει. Μας ενδιαφέρει να βρούμε αν υπάρχει μια στρατηγική για κάθε παίκτη, η οποία να κερδίζει πάντα.

Ανάλυση του Nim : Έστω ότι οι δύο σωροί είναι ισορροπημένοι (έχουν τον ίδιο αριθμό σπίρτων). Σε αυτή την περίπτωση ο παίκτης Β μπορεί να κερδίζει πάντα, αρκεί να "αντιγράφει" τις κινήσεις του παίκτη Α σε διαφορετικό όμως σωρό. Παρόμοια, αν οι δύο σωροί δεν είναι ισορροπημένοι, τότε ο παίκτης Α έχει την εξής νικηφόρα στρατηγική:

Πρώτα αφαιρεί μερικά σπίρτα από τον σωρό που έχει τα περισσότερα, ώστε οι δύο σωροί να ισορροπήσουν. Στη συνέχεια εφαρμόζει την στρατηγική για ισορροπημένους σωρούς, όντας τώρα δεύτερος παίκτης!

Ψηφοφορία σε επιτροπή

Σενάριο: Έστω ότι υπάρχουν 2 εναλλακτικές προτάσεις, Α και Β, και τρεις ψηφοφόροι. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις: Ή να εγκριθεί η πρόταση Α, ή η πρόταση Β ή τέλος καμία από τις δύο (περίπτωση Ν). Η ψηφοφορία οργανώνεται ως εξής: Πρώτα γίνεται ψηφοφορία μεταξύ των προτάσεων Α και Β . Στη συνέχεια, η πρόταση που θα προκριθεί τίθεται σε ψηφοφορία με την περίπτωση Ν. Έστω ότι οι προτιμήσεις των τριών ψηφοφόρων είναι οι εξής:

Ψηφοφόρος 1: $A \succ N \succ B$ (δηλαδή, η πρώτη προτίμηση είναι η Α, μετά η Ν και μετά η Β)

Ψηφοφόρος 2: $B \succ A \succ N$

Ψηφοφόρος 3: $N \succ A \succ B$

Εάν ψηφίσουν όλοι βάσει των προτιμήσεών τους, τότε θα κερδίσει και στις δύο ψηφοφορίες η πρόταση Α.

Ανάλυση: Το αποτέλεσμα Α όμως δεν ευχαριστεί τον ψηφοφόρο 3, ο οποίος θα προτιμούσε να μην ψηφιστεί καμία πρόταση. Θα μπορούσε όμως να επιτύχει το δικό του επιθυμητό αποτέλεσμα, απλά ψηφίζοντας Β στην πρώτη ψηφοφορία. Συνειδητοποιώντας όμως αυτό το ενδεχόμενο ο ψηφοφόρος 2, θα μπορούσε και αυτός με τη σειρά του να ψηφίσει Α στην πρώτη ψηφοφορία, ώστε τελικά να περάσει η πρόταση Α στον δεύτερο γύρο! Μια πιο συστηματική ανάλυση ξεκινά από το δεύτερο γύρο, όπου όλοι ψηφίζουν ειλικρινά. Εάν στον δεύτερο γύρο έχει περάσει η πρόταση Α, τότε αυτή κερδίζει την πρόταση Ν. Εάν στον δεύτερο γύρο περάσει η πρόταση Β, τότε κερδίζει η πρόταση Ν. Άρα ουσιαστικά στον πρώτο γύρο η ψηφοφορία είναι μεταξύ Α και Ν (αντί για Β) και με βάση αυτή τη λογική ψηφίζουν οι ψηφοφόροι.

Συμπέρασμα: Το παράδειγμα της ψηφοφορίας κάνει φανερή την ανάγκη για "στρατηγικές" επιλογές, δηλαδή επιλογές οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τις πιθανές επιλογές των αντιπάλων παικτών. Το σενάριο έχει ομοιότητες (μεταξύ άλλων) με την ψηφοφορία στις δημοτικές/περιφερειακές εκλογές, η οποία γίνεται σε δύο γύρους.

Παραδείγματα καθημερινότητας

Τυχαίος έλεγχος για αναβολικά: Κάθε αθλητής πρέπει να αν θα χρησιμοποιήσει ή όχι αναβολικές ουσίες. Εάν χρησιμοποιήσει, αυξάνει τις πιθανότητές του να κερδίσει, ταυτόχρονα όμως ρισκάρει να ανιχνευθεί και να αποβληθεί από σχετικές διοργανώσεις για μεγάλο χρονικό διάστημα, καθώς επίσης και να θέσει σε κίνδυνο την υγεία του. Εάν δεν χρησιμοποιήσει, μειώνει τις πιθανότητές του να διακριθεί, εφόσον άλλοι αθλητές χρησιμοποιήσουν και δεν ανακαλυφθούν.

Επένδυση σε έρευνα και ανάπτυξη για τις φαρμακευτικές εταιρίες : Κάθε φαρμακευτική εταιρεία επενδύει ένα ποσό στην ανάπτυξη νέων φαρμάκων. Η πρώτη εταιρεία που αναπτύσσει ένα φάρμακο έχει το δικαίωμα να το εκμεταλλεύεται αποκλειστικά για κάποια χρόνια (αλληλεπίδραση). Οι εταιρείες λοιπόν πρέπει να αποφασίσουν πού θα διοχετεύσουν τους πόρους τους για έρευνα, πώς θα τιμολογήσουν τα νέα φάρμακα, πώς θα μειώσουν το ρίσκο κατά την ανάπτυξη ενός νέου φαρμάκου κλπ. Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται βάσει συμπερασμάτων για τις αντίστοιχες αποφάσεις των ανταγωνιστριών εταιρειών.

Δημοπρασίες κρατικών ομολόγων: Ανά τακτά χρονικά διαστήματα οι διάφορες κυβερνήσεις εκδίδουν κρατικά ομόλογα. Οι συμμετέχοντες είναι οι μεγάλες τράπεζες, οι οποίες στη συνέχεια μεταπωλούν τα ομόλογα στους πελάτες τους (π.χ. ομολογιακά αμοιβαία κεφάλαια). Η αλληλεπίδραση έχει να κάνει με το ότι ο μεγάλος ανταγωνισμός ανεβάζει τις τιμές. Η ορθολογικότητα έχει να κάνει με την εξισορρόπηση του ποσού που προσφέρει κάθε τράπεζα για να πάρει κάποια ομόλογα και της πιθανότητας να μην πάρει

Νόμος για την πτώχευση: Στις ΗΠΑ, και όχι μόνο, όταν μια εταιρεία κηρύξει πτώχευση, τα περιουσιακά της στοιχεία δεν μπορούν πλέον να δεσμευθούν από ανεξάρτητους πιστωτές, αλλά προστατεύονται από το νόμο μέχρι η εταιρεία και οι πιστωτές να καταλήξουν σε κάποια συμφωνία διαμοιρασμού των. Φυσικά οι πιστωτές μπορούν να διεκδικήσουν τα χρέη τους δικαστικά πριν η εταιρεία κηρύξει πτώχευση, ωστόσο σε αυτή την περίπτωση διακινδυνεύουν να κηρύξει τελικά η εταιρεία πτώχευση και να χάσουν τα χρήματά τους. Κάθε πιστωτής πρέπει να εκτιμήσει τη μελλοντική πορεία της εταιρείας καθώς και το πόσο υπομονετικοί μπορεί να είναι οι υπόλοιποι πιστωτές, ώστε να αποφασίσει αν θα διεκδικήσει τα χρήματά του δικαστικά ή αν θα περιμένει.

1.5 Κανονική (στρατηγική) μορφή αναπαράστασης παιγνίου.

Ορισμός: Η **κανονική** ή **στρατηγική** (**normal** ή **strategic**) μορφή αναπαράστασης ενός παιγνίου n παιχτών προσδιορίζει τους χώρους στρατηγικής των παικτών $S_1, S_2, ..., S_n$ και τις συναρτήσεις οφέλους τους $u_1, u_2, ..., u_n$ και συμβολίζεται με $G \equiv \{S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$. Έναν τυχαίο παίκτη τον συμβολίζουμε με i ενώ μια τυχαία στρατηγική του παίκτη i την συμβολίζουμε με S_i. Η μορφή αναπαράστασης των παιγνίων χρησιμοποιεί πίνακες όπου οι επικεφαλίδες των γραμμών και των στηλών του πίνακα ονομάζονται "στρατηγικές" (strategies) των παικτών. Στα κελιά των πινάκων υπάρχουν αριθμοί που δηλώνουν το όφελος (ή κέρδος) κάθε παίκτη για κάθε συνδυασμό στρατηγικών.

Εάν θέλουμε να αναφερθούμε σε περισσότερες στρατηγικές του παίκτη i, χρησιμοποιούμε συμβολισμούς όπως s^*_1 s'_i , κλπ.

Ένα σύνολο στρατηγικών για όλους τους άλλους παίκτες εκτός του i το συμβολίζουμε με s_{-i}.

Η συνάρτηση απολαβής (payoff function) του παίκτη I συμβολίζεται με u_i. π.χ. $u_i(S_1, S_2, ..., S_n)$ ή $u_i(S_i, S_{-i})$.

Κατά σύμβαση, οι μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης απολαβής θεωρούνται καλύτερες.

Παίγνια με περισσότερους από δύο παίκτες

Όταν σε ένα παίγνιο υπάρχουν περισσότεροι από δύο παίκτες, η αναπαράσταση του παιχνιδιού με έναν πίνακα καθίσταται προβληματική. Έστω ότι τρεις εταιρείες, A, B και Γ, πρέπει να επιλέξουν να αναπτύξουν ένα από δύο ενδεχόμενα προϊόντα, X και Y. Η διαθέσιμη αγορά για κάθε προϊόν είναι 6 μονάδες και αυτή κατανέμεται ισόποσα στις εταιρείες που αποφασίζουν να αναπτύξουν το προϊόν. Η κανονική μορφή αναπαράστασης του παιχνιδιού χρειάζεται δύο πίνακες, έναν για κάθε στρατηγική της εταιρείας Γ.

1.6 Κυριαρχία στρατηγικών

Κυριαρχία: Μια στρατηγική s_i* ονομάζεται ότι κυριαρχεί (dominates) μιας στρατηγικής s_i #, όταν ισχύει:

- ∀ s-i: u_i (si*, s-i) > u_i (si #,s-i)

Δηλαδή, μια στρατηγική si* κυριαρχεί μιας στρατηγικής si #, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική si* έχει μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με την si#.

Η στρατηγική s_i # χαρακτηρίζεται ως κυριαρχούμενη στρατηγική (dominated strategy).

Κυρίαρχη στρατηγική : Μια στρατηγική s_i* για τον παίκτη i ονομάζεται <u>κυρίαρχη στρατηγική</u> (dominant strategy), εάν ισχύει:

- ∀ si≠si*, ∀ s-i: u_i (si*, s-i)> u_i (si,s-i)

Συνεπώς, μια στρατηγική s_i* είναι κυρίαρχη στρατηγική, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική αυτή έχει τη μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i.

Παράδειγμα (Ι) Έστω ένα παίγνιο με τον παρακάτω πίνακα απολαβών: Το παίγνιο αυτό είναι παραλλαγή του παιγνίου «Δίλημμα του Κρατούμενου». Αν κάποιος από τους δύο παίκτες ομολογήσει ότι συμμετείχε σε μια κλοπή και ο άλλος όχι, τότε αυτός που ομολόγησε αθωώνεται από όλες τις κατηγορίες και ο άλλος καταδικάζεται σε φυλάκιση 12 μηνών. Αν και οι δύο ομολογήσουν ότι συμμετείχαν τότε οι δυο καταδικάζονται σε φυλάκιση 8 μηνών, ενώ εάν και οι δύο δεν ομολογήσουν, τότε καταδικάζονται σε φυλάκιση 2 μηνών για ένα μικρότερης σημασίας αδίκημα (π.χ. κλεπταποδοχή).

Ruth \ Charlie	Ο	ΔΟ
Ο	-8,-8	0,-12
ΔΟ	-12,0	-2,-2

Η στρατηγική Ο είναι κυρίαρχη για τον παίκτη R γιατί:

$$u_R(\text{O,O}) > u_R(\Delta\text{O,O})$$

$$u_R(\text{O},\Delta\text{O}) > u_R(\Delta\text{O},\Delta\text{O})$$

Προφανώς όταν ένας παίκτης i έχει κυρίαρχη στρατηγική, την ακολουθεί, ώστε να έχει πάντα τη μεγαλύτερη ωφέλεια. Σε αυτή την περίπτωση το παίγνιο έχει **λύση κυρίαρχης στρατηγικής** για τον παίκτη i. Δεν υπάρχουν πάντα κυρίαρχες στρατηγικές για κάθε παίκτη. Είναι δυνατόν να μην έχει κανένας παίκτης κυρίαρχη στρατηγική, να έχουν μερικοί μόνο παίκτες ή τέλος να έχουν όλοι οι παίκτες.

Παράδειγμα (ΙΙ) Η μάχη των φύλων : Ένας άνδρας και μια γυναίκα που είναι ζευγάρι πρέπει να αποφασίσουν αν θα πάνε στο γήπεδο ή στην όπερα.

Ο άνδρας προτιμά το γήπεδο ενώ η γυναίκα την όπερα, ωστόσο και οι δύο προτιμούν να πάνε κάπου μαζί αντί για χώρια.

Το παίγνιο, που αναπαρίσταται στην κανονική μορφή με τον παρακάτω πίνακα δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική:

Α \ Γ	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	3,1	0,0
Όπερα	0,0	1,3

Ασθενής κυριαρχία

Μια στρατηγική s_i* για τον παίκτη i κυριαρχεί ασθενώς (weakly dominates) μιας στρατηγικής $s_{i\#}$ (του παίκτη i), όταν ισχύει:

- ∀ s-i: u_i (si*, s-i)≥ u_i (si #,s-i) και
- ∃ s-i': u_i (si*, s-i ')> u_i (si#,s-i ')

Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* κυριαρχεί ασθενώς μιας στρατηγικής $s_{i\#}$, εάν για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των άλλων παικτών η στρατηγική s_i* έχει ίση ή μεγαλύτερη απολαβή σε σχέση με την $s_{i\#}$, ενώ υπάρχει τουλάχιστον ένας συνδυασμός στρατηγικών των άλλων παικτών s_{-i}', για τον οποίο η s_i* αποφέρει μεγαλύτερη απολαβή από την $s_{i\#}$.

Η στρατηγική $s_{i\#}$ χαρακτηρίζεται ως ασθενώς κυριαρχούμενη στρατηγική (weakly dominated strategy).

Ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική

Μια στρατηγική s_i* για τον παίκτη i ονομάζεται ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική (weakly dominant strategy), εάν ισχύει:

- ∀ si≠si*, ∀ s-i, : ui(si*, s-i)≥ui(si,s-i) και
- ∀ si≠si*, ∃ s-i', ui(si*, s-i ')>ui(si,s-i ')

Με άλλα λόγια, μια στρατηγική s_i* είναι ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική, εάν για κάθε μία από τις εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i η s_i* έχει τουλάχιστον ίση απολαβή για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των υπολοίπων παικτών και καλύτερη απολαβή για τουλάχιστον έναν συνδυασμό στρατηγικών των υπολοίπων παικτών.

- Σε μια τέτοια περίπτωση, όλες οι εναλλακτικές στρατηγικές του παίκτη i είναι ασθενώς κυριαρχούμενες.

1.6 Επιλυσιμότητα κυριαρχίας

Γενικά: Εάν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για κάποιον παίκτη, τότε :

- Εάν υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές, αυτές αγνοούνται.
- Η επιλογή θα γίνει μεταξύ των μη-κυριαρχούμενων στρατηγικών.
- Πάντα υπάρχει τουλάχιστον μία μη-κυριαρχούμενη στρατηγική.

Επαναλαμβανόμενη απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών

Εάν δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική, τότε μια καλή αρχή είναι να απαλείψουμε τις κυριαρχούμενες στρατηγικές. Η απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία νέων κυριαρχούμενων στρατηγικών, οι οποίες με τη σειρά τους θα απαλειφθούν και αυτές. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επαναλαμβανόμενη απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Συμπεράσματα:

Η απαλοιφή ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με τη σειρά με την οποία γίνονται οι απαλοιφές για κάθε παίκτη. Παρακάτω θα διευκρινίσουμε αυτό το συμπέρασμα με ένα παράδειγμα.

- Ως σωστή σειρά θεωρείται η ταυτόχρονη απαλοιφή για όλους τους παίκτες σε κάθε γύρο.

Εάν εκτελέσουμε απαλοιφή μόνο των ισχυρώς κυριαρχούμενων στρατηγικών, η σειρά της απαλοιφής δεν παίζει ρόλο.

Ύπαρξη λύσης

- Δεν καταλήγουμε πάντα σε μοναδική λύση.
- Πολλά προβλήματα δεν έχουν καθόλου κυριαρχούμενες στρατηγικές (π.χ. η μάχη των φύλων). Άλλα προβλήματα έχουν μερικές μόνο κυριαρχούμενες στρατηγικές, μετά την απαλοιφή των οποίων απομένουν αρκετές άλλες στρατηγικές που δεν απαλείφονται.

1.8 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Τα απλούστερα παίγνια στρατηγικής με δυο πρόσωπα είναι τα παίγνια *μηδενικού αθροίσματος* (two persons zero-sum games). Σ’ αυτά τα κέρδη (απολαβή) του ενός ισούνται με τις ζημιές του άλλου, ενώ πρόσωπα μπορεί να είναι και ολόκληρες ομάδες, των οποίων τα μέλη έχουν μόνο σκοπό, την αριστοποίηση του κοινού κέρδους. Συνεπώς, κάθε παίκτης προσπαθεί αφενός να μεγιστοποιήσει το κέρδος του και αφετέρου να ελαχιστοποιήσει το κέρδος του αντιπάλου.

1.9 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος καθαρής στρατηγικής

Έστω ότι σ’ ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μεταξύ των Α, Β ισχύει ο ακόλουθος πίνακας απολαβών του Α:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & (\sigma_1) & (\sigma_2) & \cdots & (\sigma_j) & \cdots & (\sigma_n) \\
\hline
(s_1) & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\
(s_2) & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(s_i) & \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(s_m) & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mn}
\end{array}
$$

όπου α_{ij} είναι η απολαβή του Α όταν ακολουθεί την στρατηγική i και ο Β την στρατηγική j.

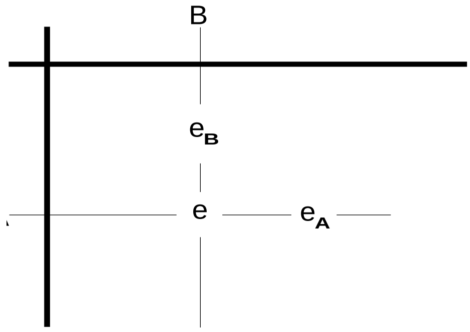
Αν ο πίνακας αυτός, που στην περίπτωση των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος ονομάζεται και *μήτρα πληρωμών* του παιγνίου, είναι γνωστός και στους δυο παίκτες, τότε σκοπός του Α είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, ενώ σκοπός του Β είναι να ελαχιστοποιήσει το αποτέλεσμα αυτό.

Ο Α ενεργώντας με σύνεση και εφαρμόζοντας την τακτική i θα πρέπει να δεχθεί ότι ο Β είναι σε θέση να του περιορίσει το κέρδος, δηλαδή να του επιτρέψει κέρδος ίσο προς $\min\limits_{j} \alpha_{ij}$. Επομένως θα πρέπει να εκλέξει εκείνη την στρατηγική i για την οποία το αντίστοιχο $\min\limits_{j} \alpha_{ij}$ είναι μέγιστο, δηλαδή να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο προς $e_A = \max\limits_{i} \min\limits_{j} \alpha_{ij}$. Η απολαβή e_A είναι μια τιμή που επιτρέπει στον παίκτη Α να μην μετανιώνει (no regrets strategy) για την επιλογή της στρατηγικής, αφού είναι η καλύτερη δυνατή απάντηση στην προσπάθεια του Β να μειώσει το όφελος του Α.

Αντίστοιχα, ο Β ενεργώντας με σύνεση και αυτός και εφαρμόζοντας την τακτική j θα πρέπει να δεχθεί ότι ο Α μπορεί να του αυξήσει την ζημιά, δηλαδή να του προξενήσει ζημιά ίση προς $\max\limits_{i} \alpha_{ij}$. Επομένως θα πρέπει να εκλέξει εκείνη την τακτική j για την οποία το αντίστοιχο $\max\limits_{i} \alpha_{ij}$ είναι ελάχιστο, δηλαδή να έχει ζημιά το πολύ ίση προς $e_B = \min\limits_{j} \max\limits_{i} \alpha_{ij}$.

Για τις τιμές e_A και e_B γενικά ισχύει $e_A \le e_B$.

Πράγματι αν e είναι το στοιχείο που ανήκει στην στήλη του e_B και στην γραμμή του e_A, τότε ισχύουν



αντίστοιχα $e \le e_B$ και $e_A \le e$, οπότε $e_A \le e_B$.

Όταν σ' ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με δύο πρόσωπα ισχύει η ισότητα $e_A = e_B$, τότε αυτό ονομάζεται παίγνιο *καθαρής στρατηγικής*. Η λύση του παίγνιου ορίζεται από το ζεύγος στρατηγικών (i, j) για το οποίο ισχύει: $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \upsilon$.

Το ζεύγος αυτό ονομάζεται *σαγματικό σημείο ή* ***σημείο ισορροπίας*** του παιγνίου, υπό την έννοια ότι κανείς από τους δύο παίκτες δεν έχει ορθολογικό κίνητρο να αλλάξει από μόνος του τη στρατηγική του. Η αντίστοιχη τιμή απολαβής υ ονομάζεται *τιμή του παιγνίου* και αντιπροσωπεύει την μικρότερη της γραμμής της και την μεγαλύτερη της στήλης της.

Παραδείγματα

Το παίγνιο με πίνακα κερδών του Α τον κατωτέρω:

		B				
		(1)	(2)	(3)	(4)	min
	(1)	1	0	0	2	0
	(2)	4	2	1	–6	–6
A	(3)	2	4	–1	0	–1
	(4)	4	6	2	8	2^*
	(5)	3	5	1	5	1
	max	4	6	2^*	8	

είναι ένα παίγνιο καθαρής στρατηγικής με σημείο ισορροπίας με (4,3) και τιμή $\upsilon = 2$.

Το παίγνιο με πίνακα κερδών του Α τον κατωτέρω:

B

		(1)	(2)	(3)	(4)	min
A	(1)	0	2	5	-1	-1
	(2)	6	8	4	3	3^*
	(3)	9	8	5	3	3^*
	max	9	8	5	3^*	

είναι ένα παίγνιο καθαρής στρατηγικής με δυο σημεία ισορροπίας τα $(2,4),(3,4)$ και τιμή $\upsilon = 3$.

Το παίγνιο με πίνακα κερδών του A :

B

		(1)	(2)	(3)	min
A	(1)	5	-1	2	-1^*
	(2)	-2	3	1	-2
	max	5	3	2^*	

δεν είναι παίγνιο καθαρής στρατηγικής γιατί $e_A \neq e_B$.

1.9.1 Αλγόριθμος για λύση παιγνίου καθαρής στρατηγικής.

Περιγράφουμε εφαρμογή που δέχεται ως είσοδο τις τιμές των τακτικών δύο παικτών και δίνει ως έξοδο τα σαγματικά σημεία του παιγνίου. Το παίγνιο αφορά σε δύο πρόσωπα που το καθένα έχει από 2 έως 10 καθαρές στρατηγικές.

Στην αρχή, ζητούνται από τον χρήστη το πλήθος των τακτικών για τον παίκτη 1 και τον παίκτη 2 (μεταβλητές n και s αντιστοίχως). Έπειτα, ο χρήστης εισάγει τις τιμές ωφέλειας και στη συνέχεια διατρέχεται ο πίνακας P, ο οποίος είναι δισδιάστατος (10X10), αλλά μόνο μέχρι την γραμμή n και τη στήλη s, τα οποία κυμαίνονται από 2 έως 10.

Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα ελάχιστα των γραμμών και τα αποθηκεύει στον πίνακα MinMax(10). Μετά, υπολογίζει το μέγιστο στοιχείο από τα ελάχιστα των γραμμών και αποθηκεύεται στη μεταβλητή Max1. Κατόπιν, με τη βοήθεια του πίνακα I(10), αποθηκεύει το πρόγραμμα τις θέσεις όλων των μεγίστων, καθώς μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα και συνεπώς να υπάρχουν πάνω από ένα σαγματικά σημεία.

Στο δεύτερο μισό του κώδικα, υπολογίζουμε τα μέγιστα των στηλών και τα αποθηκεύουμε στον πίνακα MaxMin(10) και στη συνέχεια το ελάχιστο εξ’ αυτών. Με τη βοήθεια του πίνακα J(10), αποθηκεύουμε τις θέσεις των πιθανών πολλαπλών ελαχίστων, ώστε να μη χάσουμε κανένα σαγματικό σημείο.

Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιείται είναι η C.

```
#include <iostream>
#include <limits>
#include <time.h>
#include <math.h>
using namespace std;

int main()
{
 int i,j;//Ορισμός μετρητών.
 int P[10][10];//Ορισμός πίνακα,που περιέχει τις τιμές απολαβής για τις
στρατηγικές
 int n,s;//Το πλήθος των τακτικών των δύο παικτών.
 //Ο χρήστης δίνει το πλήθος των τακτικών για τον παίκτη 1.
 //Μπορούν να κυμαίνονται από 2 εώς 10.
 do
 {
  cout << "Doste arithmo taktikon gia ton paixti 1: ";
  cin >> n;
  if ((n<2)|(n>10))
   {
    cout << endl;
    cout << "Oi taktikes mporoun na einai apo 2 mexri 10!";
    cout << endl;
   }

 }while ((n<2)|(n>10));
 // Ο χρήστης δίνει το πλήθος των τακτικών για τον παίκτη 2.
 // Μπορούν να κυμαίνονται από 2 εώς 10.
 do
 {
  cout << "Doste arithmo taktikon gia ton paixti 2: ";
  cin >> s;
  if ((s<2)|(s>10))
   {
    cout << endl;
    cout << "Oi taktikes mporoun na einai apo 2 mexri 10!";
    cout << endl;
   }


 }while ((s<2)|(s>10));
```

```
//Ο χρήστης εισάγει τις τιμές των τακτικών.

for (i=1; i<n+1; i++)
   for (j=1; j<s+1; j++)
      {
         cout << "Doste thn timi tis "<<i<<","<<j<<" taktikis: ";
         cin >> P[i][j];
         cout << endl;
      }
```

//Ορισμός και αρχικοποίηση του πίνακα, που περιέχει τα ελάχιστα των γραμμών.

```
int MinMax[10];
for (i=1; i<11; i++)
{
   MinMax[i]=0;
}
//Θέτω τα πρώτα στοιχεία κάθε γραμμής ως ελάχιστα.
for (i=1; i<n+1; i++)
   for (j=1; j<2; j++)
      {
       MinMax[i]=P[i][j];

      }
```

//Εύρεση του ελαχίστου στοιχείου κάθε γραμμής κι αποθήκευσή τους στον πίνακα MinMax.

```
for (i=1; i<n+1; i++)
   for (j=2; j<s+1; j++)
      {
        if (P[i][j]<MinMax[i])
        {
          MinMax[i]=P[i][j];
        }

      }
//Ορισμός μεγίστου κι εύρεσή του από τα ελάχιστα των γραμμών.
int Max1=MinMax[1];
for (i=2; i<n+1; i++)
   {
       if (MinMax[i]>Max1)
       {
         Max1=MinMax[i];
```

```
        }
    }
//Ορισμός βοηθητικού πίνακα μεγίστων σε περίπτωση που είναι πάνω από 1.
int Max[10];
for (i=1; i<11; i++)
    {
        Max[i]=-1000000;
    }
```

//Ορισμός κι αρχικοποίηση του πίνακα I, που χρησιμεύει στην αποθήκευση των θέσεων των μεγίστων.

```
int I[10];
for (i=1; i<11; i++)
    {
        I[i]=-1;
    }

//Αν υπάρχουν πάνω από ένα μέγιστα, τότε αποθηκεύεται η θέση τους.
for (i=1; i<n+1; i++)
    {
        if (Max1==MinMax[i])
          {
            Max[i]=MinMax[i];
            I[i]=i;

          }

     }
```

//Εύρεση μεγίστων-ελαχίστων στηλών.

//Ακολουθείται παρόμοια διαδικασία, αλλά πρώτα βρίσκουμε τα μέγιστα των στηλών και μετά τα ελάχιστα εξ' αυτών.

```
int MaxMin[10];
for (j=1; j<11; j++)
{
    MaxMin[j]=0;
}
for (j=1; j<s+1; j++)
    for (i=1; i<2; i++)
       {
        MaxMin[j]=P[i][j];

       }
```

```
for (j=1; j<s+1; j++)
   for (i=2; i<n+1; i++)
      {
        if (P[i][j]>MaxMin[j])
        {
          MaxMin[j]=P[i][j];
        }

      }


int Min1;
Min1=MaxMin[1];
for (j=2; j<s+1; j++)
   {
      if (MaxMin[j]<Min1)
      {
        Min1=MaxMin[j];
      }
   }

int Min[10];
for (j=1; j<11; j++)
   {
      Min[j]=-1000000;
   }
int J[10];
for (j=1; j<11; j++)
   {
      J[j]=-1;
   }


for (j=1; j<s+1; j++)
   {
      if (Min1==MaxMin[j])
        {
          Min[j]=MaxMin[j];
          J[j]=j;

        }
     }
```

```
//Αν δεν ισούται το ελάχιστο των μεγίστων με το μέγιστο των ελαχίστων,
//τότε δεν υπάρχει σαγματικό σημείο.
//Διαφορετικά, υπολογίζει όλα τα σαγματικά σημεία του παιγνίου.
if (Min1!=Max1)
  {
    cout << endl;
    cout << "To paignio den exei sagmatika simeia!";
  }
else
  {
    cout << endl;
    cout << "Ta sagmatika simeia einai ta: ";
    cout << endl;

       for (i=1; i<n+1; i++)
          for (j=1; j<s+1; j++)
          {


                  if ((I[i]==i)&(J[j]==j))
                  {
                    cout << "Stin grammi: "<< i<<" kai stili: "<<j<< " kai h timi
einai: "<<Min1;
                    cout << endl;

                  }

          }

  }

std::cout << "\n " << std::endl;
cin.ignore(1000000);

//return 0;
}
```

1.10. Παίγνια μηδενικού αθροίσματος μικτής στρατηγικής

Τα παίγνια με δυο πρόσωπα (ή και περισσότερα), στα οποία δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας καθαρών στρατηγικών, ονομάζονται παίγνια *μικτής στρατηγικής*.

Για παράδειγμα το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος του παρακάτω πίνακα :

		B		
		(1)	(2)	(3)
A	(1)	5	−1	2
	(2)	−2	3	1

Στο παίγνιο αυτό, αν ο παίκτης Α ακολουθήσει την πρώτη τακτική του με πιθανότητα 80% και την δεύτερη με πιθανότητα 20%, τότε το αντίστοιχο μέσο κέρδος του θα είναι:

$5 \cdot 0{,}80 + (-2) \cdot 0{,}20 = 3{,}6$ όταν ο Β ακολουθεί την πρώτη στρατηγική του

$(-1) \cdot 0{,}80 + 3 \cdot 0{,}20 = -0{,}2$ όταν ο Β ακολουθεί την δεύτερη στρατηγική του

$2 \cdot 0{,}80 + 1 \cdot 0{,}20 = 1{,}8$ όταν ο Β ακολουθεί την τρίτη στρατηγική του

Το διατεταγμένο ζεύγος $(0{,}80,\ 0{,}20)$ ονομάζεται *μικτή στρατηγική του παίκτη Α*. Είναι φανερό ότι υπάρχει μια απειρία μικτών στρατηγικών για τον παίκτη Α.

Πριν συνεχίσουμε την ανάλυση θα πρέπει να εξηγήσουμε τι σημαίνει ότι ένας παίκτης ακολουθεί μια στρατηγική i με πιθανότητα p_i. Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα η μέθοδος που μελετάμε και αναπαριστούμε τα παίγνια βασίζεται στην παραδοχή ότι οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα την στρατηγική τους χωρίς ο ένας να μοιράζεται πληροφορίες με τον άλλο. Συνεπώς, κάθε φορά που παίζεται το παίγνιο επιλέγεται μια συγκεκριμένη (καθαρή) στρατηγική. Ως εκ τούτου, η έννοια της πιθανότητας εισάγεται στη βάση ότι το συγκεκριμένο παίγνιο επαναλαμβάνεται πολλές φορές από τους ίδιους παίκτες. Κάθε φορά οι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές με τυχαίο τρόπο (π.χ. με τη χρήση λογισμικού κληρώσεων) και αφού το παίγνιο παίζεται ν φορές έχει νόημα να μιλήσουμε για την πιθανότητα επιλογής στρατηγικής από κάθε παίκτη ώστε τελικά να προκύψει η έννοια της μικτής στρατηγικής. Βέβαια δημιουργείται το ερώτημα γιατί ένας άνθρωπος να το κάνει αυτό ευθύς εξαρχής. Μια απάντηση που έχει δοθεί [R. Aumann, A. Brundenburger] είναι ότι οι διαφορετικές επιλογές στρατηγικών προκύπτουν από τις διαφορετικές πεποιθήσεις (beliefs) που έχει ο ένας παίκτης για την επιλογή του άλλου, κάθε φορά που παίζεται το παιχνίδι. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα παίγνιο παίζεται από διαφορετικούς παίκτες, συνεπώς έχουμε ένα σύνολο $\{(A_1, B_1), \ldots, (A_i, B_i), \ldots, (A_n, B_n)\}$ δυάδων παικτών που παίζουν το παίγνιο και ο καθένας επιλέγει την καθαρή στρατηγική του. Οι μικτές στρατηγικές του παίγνιου προκύπτουν από τις συχνότητες εμφάνισης των επιμέρους καθαρών στρατηγικών των παικτών A_i και B_i. Παράδειγμα αυτής της προσέγγισης είναι το παίγνιο που περιγράφει τον τρόπο που εκτελούνται τα πέναλτι σε ένα ποδοσφαιρικό αγώνα. Με βάση τα στοιχεία από πολλούς αγώνες προκύπτουν οι μικτές στρατηγικές που επιλέγουν οι εκτελεστές και οι τερματοφύλακες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Επανερχόμενοι στο παράδειγμά μας, θα προσεγγίσουμε τη λύση του παιγνίου, δηλαδή να υπολογίσουμε τις μικτές στρατηγικές των δύο παικτών για τις οποίες το παίγνιο ισορροπεί, δηλαδή, οι δύο παίκτες δεν έχουν να κερδίσουν από την μονομερή αλλαγή της στρατηγικής τους. Στο παίγνιο αυτό, αν ο παίκτης Α ακολουθήσει την πρώτη στρατηγική του με πιθανότητα 80% και την δεύτερη με πιθανότητα 20%, τότε το αντίστοιχο μέσο κέρδος του θα είναι:

$5\cdot 0,80+(-2)\cdot 0,20=3,6$ όταν ο Β ακολουθεί την πρώτη τακτική του

$(-1)\cdot 0,80+3\cdot 0,20=-0,2$ όταν ο Β ακολουθεί την δεύτερη τακτική του

$2\cdot 0,80+1\cdot 0,20=1,8$ όταν ο Β ακολουθεί την τρίτη τακτική του

Το διατεταγμένο ζεύγος (0.8,0.2) ονομάζεται *μικτή στρατηγική του παίκτη Α*.

Αντίστοιχα, αν ο παίκτης Β ακολουθήσει την πρώτη τακτική του με πιθανότητα 30%, την δεύτερη με πιθανότητα 30% και την τρίτη με πιθανότητα 40%, τότε η αντίστοιχη μέση ζημιά του θα είναι:

$5\cdot 0,30+(-1)\cdot 0,30+2\cdot 0,40=2$ όταν ο Α ακολουθεί την πρώτη στρατηγική του

$(-2)\cdot 0,30+3\cdot 0,30+1\cdot 0,40=0,70$ όταν ο Α ακολουθεί την δεύτερη στρατηγική του

Η διατεταγμένη τριάδα (0.3,0.3,0.4) ονομάζεται *μικτή στρατηγική του Β*.

Έτσι αν (x_1,x_2) είναι η μικτή στρατηγική του παίκτη Α (με $0\le x_1,x_2\le 1$ και $x_1+x_2=1$) και (y_1,y_2,y_3) είναι η μικτή στρατηγική του παίκτη Β (με $0\le y_1,y_2,y_3\le 1$ και $y_1+y_2+y_3=1$), τότε το προσδκώμενο όφελος (προσδοκώμενη απολαβή) για τον παίκτη Α αντιστοιχεί στη μαθηματική ελπίδα:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i\alpha_{ij}y_j=\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}x_i\alpha_{ij}\right)y_i=\sum_{i=1}^{2}x_i\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}y_j\right)=$$
$$=(5x_1-2x_2)y_1+(-x_1+3x_2)y_2+(2x_1+x_2)y_3=$$
$$=x_1(5y_1-y_2+2y_3)+x_2(-2y_1+3y_2+y_3)$$

Αφού το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος, ο σκοπός του παίκτη Α είναι να μεγιστοποιήσει το αποτέλεσμα αυτό, ενώ του παίκτη Β να το ελαχιστοποιήσει.

Στη γενική περίπτωση του παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με m τακτικές για τον παίκτη Α και n τακτικές για τον παίκτη Β, η μαθηματική ελπίδα είναι αντίστοιχα

$$E(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j = XAY$$

όπου:

$X=[x_1,x_2,\ldots,x_m]$: η μήτρα-γραμμή της μικτής στρατηγικής του παίκτη Α $\left(0\le x_i,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\right)$

$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$: η μήτρα – στήλη της μικτής στρατηγικής του παίκτη Β $\left(0\le y_i,\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1\right)$

$A=\left[\alpha_{ij}\right]$: η μήτρα $m\times n$ των κερδών του παίκτη Α[1]

Ο σκοπός του παίκτη Α είναι να μεγιστοποιήσει το αποτέλεσμα αυτό, ενώ του παίκτη Β να το ελαχιστοποιήσει.

Το Θεώρημα του John von Neumann για παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο προσώπων.

Έστω ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με m στρατηγικές για τον παίκτη Α, n στρατηγικές για τον παίκτη Β και $A=\left[\alpha_{ij}\right]$ μήτρα κερδών του παίκτη Α.

Αν το παίγνιο είναι καθαρής στρατηγικής δηλ. υπάρχει ζεύγος (i,j) για το οποίο ισχύει $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_{ij}$ τότε με $\alpha_i=\left[0,0,\ldots,\frac{1}{i},\ldots,0\right]$ σημειώνεται η μήτρα – γραμμή της i τακτικής ή καθαρής στρατηγικής του παίκτη Α και με $\beta_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ j η μήτρα – στήλη της j τακτικής ή καθαρής στρατηγικής του παίκτη

B

ενώ
$$\alpha_i \cdot A \cdot \beta_j = [0,0,\ldots,1,\ldots,0] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_{ij} = \upsilon$$

είναι η τιμή του παιγνίου.

Αν το παίγνιο είναι μικτής στρατηγικής (δηλαδή $\max_i \min_j \alpha_{ij} \neq \min_j \max_i \alpha_{ij}$) και X, Y είναι οι αντίστοιχες στρατηγικές των παικτών A, B τότε η τιμή του υ καθορίζεται από το

$$E(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_{ij} y_j = XAY$$

δηλαδή, τη μαθηματική ελπίδα της δισδιάστατης κατανομής τους.

Επειδή δε ισχύουν:

$$\alpha_{ij} AY = [0,0,\ldots,1,\ldots 0] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \ldots + \alpha_{in} y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j$$

$$X.A.\beta_j = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_{1j} x_1 + \alpha_{2j} x_2 + \ldots + \alpha_{mj} x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_i$$

εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις της ανωτέρω μαθηματικής ελπίδας:

$$X.A.Y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i AY$$

$$X.A.Y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_{ij} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_i \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_{ij}\right) y_i = \sum_{j=1}^{n} XA\beta_j y_j$$

που συνδέουν τις καθαρές με τις μικτές στρατηγικές.

Η μέθοδος ανάλυση του παιγνίου που ακολουθήσαμε για τα παίγνια καθαρής στρατηγικής (pure strategy) ισχύει και στην περίπτωση των παιγνίων που η λύση τους προκύπτει από την επιλογή μικτών στρατηγικών.

Ο παίκτης Α ενεργώντας με σύνεση δέχεται ότι ο αντίπαλός του είναι σε θέση, με τις μικτές στρατηγικές του, να του περιορίσει το κέρδος στο ελάχιστο, δηλαδή να του επιτρέψει κέρδος ίσο προς min XAY. Επομένως, θα πρέπει να εκλέξει εκείνη την μικτή στρατηγική X για την οποία το αντίστοιχο min XAY είναι μέγιστο, δηλαδή, να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο προς $e_A = \max_x \min_y XAY$

Αντίστοιχα ο παίκτης Β ενεργώντας και αυτός με σύνεση θα πρέπει να δεχθεί ότι ο αντίπαλός του είναι σε θέση με τις δικές του μικτές στρατηγικές να του αυξήσει την ζημιά στο μέγιστο, δηλαδή, να του προξενήσει ζημιά ίση προς $\max_x XAY$.

Επομένως θα πρέπει να εκλέξει εκείνη την μικτή στρατηγική Y για την οποία το αντίστοιχο $\max_x XAY$ είναι ελάχιστο, δηλ. να έχει ζημία το πολύ ίση προς $e_B = \min_x \max_y XAY$.

Άρα, αν X^0, Y^0 είναι οι αντίστοιχες ορθολογικές μικτές στρατηγικές των παικτών Α, Β τότε θα είναι:

$$e_A = \max_x \min_y XAY = \min_y X^0 AY$$

$$e_B = \min_y \max_x XAY = \max_x XAY^0$$

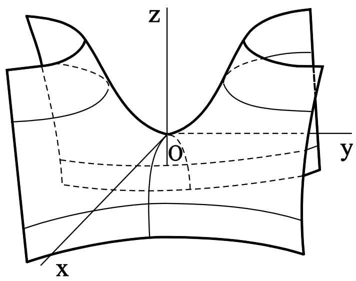
οπότε $e_A \leq X^0 AY^0 \leq e_B$

Ένα ζεύγος $\overline{X}, \overline{Y}$ μικτών στρατηγικών ονομάζεται σαγματικό σημείο (saddle point) ή σημείο ισορροπίας του παιγνίου (μικτής στρατηγικής) όταν:

$$e_A = e_B$$

$$\overline{X}A\overline{Y} = \max_x \min_y XAY = \min_y \max_x XAY$$

ενώ η αντίστοιχη κοινή τιμή ονομάζεται τιμή του παιγνίου.



Οι ορθολογικές μικτές στρατηγικές του σημείου ισορροπίας αποτελούν και τις άριστες μικτές στρατηγικές των παικτών. Έτσι, ο παίκτης Α ακολουθώντας τη μικτή στρατηγική του σημείου ισορροπίας έχει εξασφαλίσει τη μεγιστοποίηση του κέρδους του ανεξάρτητα από τη στρατηγική του παίκτη Β, δηλαδή, έχει διασφαλίσει ότι δεν θα μετανιώσει για την επιλογή του (no regrets strategy).

Την ύπαρξη ενός (τουλάχιστον) ζεύγους αρίστων μικτών στρατηγικών σε κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος απέδειξε πρώτος ο Von Neumann στο θεώρημά του, με βάση το οποίο: '***Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο προσώπων για τον παίκτη Α υπάρχει μια άριστη μικτή στρατηγική, με την οποία το μέσο κέρδος του είναι μεγαλύτερο ή ίσο μιας τιμής u . Για τον παίκτη Β υπάρχει μια άριστη μικτή στρατηγική, με την οποία η μέση ζημιά του είναι μικρότερη ή ίση της τιμής u. Η τιμή u είναι η λύση του παιγνίου.'***

1.11 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος με απέραντες στρατηγικές

Η ανάπτυξη των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, των προηγούμενων παραγράφων, στηρίζονταν στη μήτρα πληρωμών τους. Ο δε πεπερασμένος χαρακτήρας αυτής επέτρεπε τον προσδιορισμό των στρατηγικών (καθαρών ή μικτών) των παικτών τους.

Έστω τώρα παίγνια στα οποία τα κέρδη του παίκτη Α προσδιορίζονται με την βοήθεια μιας πραγματικής συνάρτησης f δύο πραγματικών μεταβλητών x, y εκ των οποίων η πρώτη εκφράζει τις επιλογές του παίκτη Α από ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και η δεύτερη τις επιλογές του παίκτη Β από ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$.

Ο παίκτης Α ενεργώντας με σύνεση και επιλέγοντας την τιμή x θα πρέπει να δεχτεί ότι ο Β είναι σε θέση να του περιορίσει το κέρδος δηλ. να του επιτρέψει κέρδος ίσο προς $\min_{y \in B} f(x, y)$. Επομένως θα πρέπει να επιλέξει εκείνη την τιμή x για την οποία το αντίστοιχο $\min_{y\in B} f(x,y)$ είναι μέγιστο δηλ. να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο προς $e_A = \max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x,y)$.

Αντίστοιχα ο Β ενεργώντας και αυτός με σύνεση και επιλέγοντας την τιμή y θα πρέπει να δεχθεί ότι ο Α μπορεί να του αυξήσει την ζημιά δηλ. να του προξενήσει ζημιά ίση προς $\max_{x\in A} f(x,y)$.

Επομένως θα πρέπει να επιλέξει εκείνη την τιμή y για την οποία το αντίστοιχο $\max_{x\in A} f(x,y)$ είναι ελάχιστο δηλ. να έχει ζημιά το πολύ ίση προς $e_B = \min_{y\in B}\max_{x\in A} f(x,y)$.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυσή μας, αν υπάρχει ζεύγος $(x_0, y_0) \in A\times B$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0,y_0) = \max_{x\in A}\min_{y\in B} f(x,y) = \min_{y\in B} f \max_{x\in A}(x,y)$$

τότε το σημείο αυτό ονομάζεται *<u>σαγματικό σημείο</u>* ή *<u>σημείο ισορροπίας</u>* του παιγνίου, ενώ η αντίστοιχη τιμή $f(x_0,y_0)$ ονομάζεται *τιμή* του παιγνίου.

Παράδειγμα

Το παίγνιο με συνάρτηση κερδών του Α την $f(x,y) = 3x^2 - y^2 / [0,1]\times[0,1]$ έχει σημείο ισορροπίας το $(1,1)$ και τιμή $\upsilon = 2$.

Πραγματικά για τον παίκτη Α η μέγιστη τιμή της συνάρτησης πληρωμής προκύπτει για $x=1$, ενώ για τον παίκτη Β η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης πληρωμής προκύπτει για $y=1$.

Στην περίπτωση που υπάρχουν οι τιμές υ_A, υ_B, αλλά είναι διάφορες μεταξύ τους, τότε ο προσδιορισμός του σημείου ισορροπίας γίνεται με την βοήθεια του λογισμού πιθανοτήτων.

Έτσι αν $A = B = [0,1]$, $A(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των πιθανοτήτων του Α και $B(y)$ η συνάρτηση κατανομής των πιθανοτήτων του Β, τότε η μαθηματική ελπίδα της δισδιάστατης κατανομής που προκύπτει είναι η:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dA(x)\,dB(y)$$

Ο σκοπός του παίκτη Α είναι να μεγιστοποιήσει το αποτέλεσμα αυτό, ενώ ο σκοπός του παίκτη Β είναι να το ελαχιστοποιήσει.

Είναι φανερό ότι η μελέτη και επίλυση παιγνίων με απέραντες στρατηγικές παρουσιάζει δυσκολίες στο λογισμό τους. Γι’ αυτό, στις εφαρμογές, γίνεται συνήθως μια απλοποιημένη προσέγγισή τους από τις αντίστοιχες πεπερασμένες μορφές τους.

Παράδειγμα

Στο παίγνιο με συνάρτηση κερδών του Α την

$$f(x,y)=4|x-y|\,/\,[0,1]\times[0,1]$$

αντιστοιχεί το ακόλουθο πεπερασμένο παίγνιο με πίνακα κερδών του Α τον:

B

	x \ y	0	0,25	0,50	0,75	1
	0	0	1	2	3	4
A	0,25	1	0	1	2	3
	0,50	2	1	0	1	2
	0,75	3	2	1	0	1
	1	4	3	2	1	0

που προκύπτει για τις τιμές 0, 0,25, 0,50, 0,75 και 1 των x, y. Το παίγνιο αυτό έχει τιμή υ = 2 και άριστες μικτές στρατηγικές

$$\overline{x}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5\end{bmatrix} \text{ και } \overline{y}=\begin{bmatrix}0{,}5\\0\\0\\0\\0{,}5\end{bmatrix}$$

1.12 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος n προσώπων

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη παιγνίων μηδενικού αθροίσματος με σύντομη αναφορά στα παίγνια n προσώπων, n>2.

Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος με n παίκτες (n – persons zero – sum games) οι Neumann και Morgenstern κάνουν την παραδοχή ότι οι παίκτες δύνανται να σχηματίζουν συνασπισμούς. Δηλαδή, 2 ή περισσότεροι παίκτες, συνεργάζονται, ανταλλάσσουν μεταξύ τους πληροφορίες, συμφωνούν σε ένα σύνολο στρατηγικών και τελικά, ενεργούν σας ένας παίκτης. Η μέθοδος με την οποία οι επιμέρους επιλογές των παικτών του συνασπισμού συντίθεται σε μία στρατηγική θα μας απασχολήσει στο επόμενο κεφάλαιο. Αφού έχουν γίνει τα παραπάνω, τα μέλη του συνασπισμού μοιράζονται μεταξύ τους την απολαβή – όφελος. Στην περίπτωση που οι σχηματίζονται 2 συνασπισμοί, το παίγνιο μπορεί να αναλυθεί με τις τεχνικές των παιγνίων δύο προσώπων.

Έτσι, αν $\mathrm{N}=\{1,2,\ldots,\mathrm{n}\}$ είναι το σύνολο των παικτών τότε $\mathrm{T}\subset\mathrm{N}$ είναι ένας συνασπισμός παικτών. Η χειρότερη περίπτωση γι΄ αυτό το συνασπισμό είναι να συνασπιστούν εναντίον του όλα τα υπόλοιπα μέλη του Ν. Ο συνασπισμός αυτός δηλώνεται με $\overline{\mathrm{T}}=\mathrm{N}-\mathrm{T}$. Άρα Τ και $\overline{\mathrm{T}}$ είναι δύο συνασπισμοί τους, που ενεργούν όπως οι παίκτες ενός μηδενικού αθροίσματος παιγνίου δύο προσώπων. Συνεπώς, το παίγνιο μετατρέπεται σε μη συνεργατικό παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο προσώπων. Το μέγιστο όφελος που μπορεί να εξασφαλίσει ο συνασπισμός Τ καθώς ο $\overline{\mathrm{T}}$ προσπαθεί να του μειώσει το όφελος είναι η *maximin* τιμή του παιγνίου δύο προσώπων. Με βάση τα παραπάνω η συνάρτηση υ(Τ) που σε κάθε δυνατό συνασπισμό Τ με $\mathrm{T}\subset\mathrm{N}$ αντιστοιχεί την τιμή:

$$\upsilon(\mathrm{T}) = \max_{x\in X_T}\min_{Y\in Y_{N-T}}\sum_{k\in T} e_k(x,y)$$

ονομάζεται <u>*χαρακτηριστική συνάρτηση*</u> (*characteristic function*). Στην παραπάνω σχέση X_T είναι το σύνολο των στρατηγικών των παικτών που βρίσκονται στο συνασπισμό Τ, $\mathrm{Y}_{\mathrm{N-T}}$ είναι οι στρατηγικές των παικτών που είναι στον αντίπαλο συνασπισμό και $e_k(x,y)$ είναι το όφελος που αντιστοιχεί στον παίκτη *k* του συνασπισμού Τ αν ακολουθούνται οι στρατηγικές x, y.

Για την χαρακτηριστική συνάρτηση υ ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με n πρόσωπα ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $\upsilon(\mathrm{N})=0$
ii. $\upsilon(\overline{\mathrm{T}})=-\upsilon(\mathrm{T})$
iii. $\upsilon(\mathrm{T}\cup\mathrm{P})\geq\upsilon(\mathrm{T})+\upsilon(\mathrm{P})$ αν $\mathrm{T}\cap\mathrm{P}=\varnothing$

Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι άμεση συνέπεια του ότι το άθροισμα των κερδών είναι μηδέν και ότι τα κέρδη του ενός συνασπισμού ισούνται με τις ζημιές του συμπληρωματικού του συνασπισμού. Ο δε συνδυασμός τους δίδει $\upsilon(\varnothing)=0$ αφού $\upsilon(\varnothing)=-\upsilon(N)=0$.

Για παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος ισχύει, εξ ορισμού, ότι $\upsilon(\varnothing)=0$.

Η τρίτη ιδιότητα, που αναφέρεται σε δύο συνασπισμούς Τ και Ρ ξένους μεταξύ τους και όχι κατ' ανάγκη συμπληρωματικούς, ερμηνεύει ότι η ένωσή τους έχει έννοια μόνον όταν δεν τους ζημιώνει.

Ειδικά όταν ισχύει $\upsilon(T \cup P)=\upsilon(T)+\upsilon(P)$ δηλ. όταν οι συνασπισμοί Τ και Ρ συνεργαζόμενοι δεν κερδίζουν περισσότερα από εκείνα που κερδίζουν μόνοι τους, τότε το παίγνιο ονομάζεται *μη ουσιώδες (inessential)*.

Αντίθετα, όταν $\upsilon(T \cup P)>\upsilon(T)+\upsilon(P)$ δηλ. όταν οι συνασπισμοί Τ και Ρ συνεργαζόμενοι κερδίζουν περισσότερα από εκείνα που κερδίζουν μόνοι τους, τότε το παίγνιο ονομάζεται *ουσιώδες (essential)*.

Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με n παίκτες, κάθε παίκτης λαμβάνει ή δίδει ένα ποσό που σημειώνεται με x_i, $i \in \mathbb{N}$.

Το διάνυσμα $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ονομάζεται *επιμερισμός.*

Για κάθε επιμερισμό ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$x_i \geq \upsilon(i),\ \text{για } i=1,2,\ldots,n$$

Η πρώτη ιδιότητα εκφράζει το μηδενικό άθροισμα των κερδών, ενώ η δεύτερη ότι το ποσό κάθε παίκτη δεν μπορεί να είναι μικρότερο από εκείνο που λαμβάνει όταν είναι μόνος του.

Έτσι κάθε επιμερισμός του παιγνίου ικανοποιεί τις ιδιότητές του pareto optimum.

Ο επιμερισμός $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ κυριαρχεί του επιμερισμού $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ για τους παίκτες ενός συνασπισμού $P \subset N$, όταν:

$$x_i > y_i,\ i \in P$$

$$\upsilon(P) \geq \sum_{i \in P} y_i$$

και σημειώνεται $x \succ_P y$.

Η πρώτη ανισότητα εκφράζει ότι τα ποσά του επιμερισμού x είναι μεγαλύτερα από εκείνα του επιμερισμού y, όσον αφορά τους παίκτες του συνασπισμού P, ενώ η δεύτερη ότι τα κέρδη τους δεν υπερβαίνουν το ποσό που αντιστοιχεί στον συνασπισμό τους.

Οι Neumann και Morgenstern όρισαν ως λύση ενός ουσιώδους παιγνίου το σύνολο V (stable set) των επιμερισμών που ικανοποιούν τις ιδιότητες:

i. κανένας επιμερισμός του V δεν κυριαρχείται από άλλο επιμερισμό του.

ii. κάθε εκτός του V επιμερισμός κυριαρχείται τουλάχιστον από ένα επιμερισμό του.

Η έννοια αυτής της λύσης, που "περιγράφει μαθηματικά μια κοινωνική κατάσταση", αντιστοιχεί στους δυνατούς τρόπους διανομής των κερδών στο τέλος του παιγνίου.

1.12.1 Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος τριών προσώπων

Από τα παίγνια n προσώπων τα πιο ανεπτυγμένα είναι εκείνα των τριών προσώπων. Τέτοιο είναι το παράδειγμα που ακολουθεί.

Τρείς παίκτες ανακοινώνουν συγχρόνως "άσπρο" ή "μαύρο". Αν και οι τρεις ανακοινώνουν το ίδιο χρώμα τότε κανένας δεν κερδίζει. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις πληρώνει από μία χρηματική μονάδα στους δύο, εκείνος που ανακοινώνει χρώμα διαφορετικό από αυτούς.

Με βάση τους κανόνες αυτούς προκύπτει ο επόμενος πίνακας κερδών και ζημιών των τριών παικτών για τα οκτώ δυνατά αποτελέσματα του παιγνίου:

	A_1	A_2	A_3
(α, α, α)	0	0	0
(α, α, μ)	1	1	-2
(α, μ, α)	1	-2	1
(α, μ, μ)	-2	1	1
(μ, α, α)	-2	1	1

(μ, μ, α)	1	1	-2
(μ, α, μ)	1	-2	1
(μ, μ, μ)	0	0	0

Αν ο πρώτος και ο δεύτερος παίκτης συνασπισθούν εναντίον του τρίτου, τότε προκύπτει ένα μηδενικού αθροίσματος παίγνιο με δύο πρόσωπα τα $T=\{1,2\}$ και $\bar{T}=\{3\}$ και πίνακα κερδών του Τ τον ακόλουθο:

$\bar{T}$

	α	μ
(α, α)	0	2
(α, μ)	-1	-1
(μ, α)	-1	-1
(μ, μ)	2	0

Η τιμή του παιγνίου αυτού είναι $\upsilon=1$, ενώ οι στρατηγικές του:

$$\bar{X}=\left[\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right] \text{ και } \bar{Y}=\begin{bmatrix}0,5\\0,5\end{bmatrix}$$

Από την λύση αυτή προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης του παιγνίου των τριών προσώπων:

$$\upsilon(\{1,2\})=1 \qquad \upsilon(\{3\})=-1$$

όμοια προκύπτουν και οι τιμές:

$$\upsilon(\{1,3\})=1, \qquad \upsilon(\{2\})=-1$$

$$\upsilon(\{2,3\})=1, \qquad \upsilon(\{1\})=-1$$

Κεφάλαιο 2

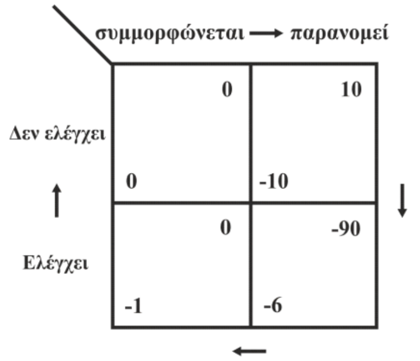
Παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος

2.1 Γενικά

Προκειμένου να εισαγάγουμε την έννοια της ισορροπίας σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη ενός παραδείγματος. Το παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος που θα μελετήσουμε είναι γνωστό και ως «inspection game» (παίγνιο επιθεώρησης ή ελέγχου) και είναι μεταξύ ενός παίκτη II που λέγεται inspectee (ελεγχόμενος) και του παίκτη I που λέγεται inspector (ελεγκτής).

Στο σχήμα 2.1 απεικονίζεται ο πίνακας απολαβών για ένα τέτοιο παίγνιο inspection (επιθεώρησης). Εδώ, κάθε κελί του πίνακα απολαβών έχει δύο τιμές, μία που είναι η απολαβή του παίκτη I και μία του παίκτη II.

Ας δούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τον πίνακα απολαβών. Όφελος μηδέν για τον παίκτη I και τον παίκτη II είναι το αποτέλεσμα των επιλογών «δεν ελέγχει» για τον ελεγκτή (παίκτης I) και «συμμόρφωση» για τον ελεγχόμενο (παίκτης II) αντίστοιχα. Χωρίς έλεγχο, ο ελεγχόμενος προτιμά να παρανομήσει διότι έτσι κερδίζει όφελος 10 και παράλληλα ο ελεγκτής χάνει παίρνοντας αρνητικό όφελος -10. Ο ελεγκτής μπορεί επίσης να επιλέξει να επιθεωρήσει. Αν ο ελεγχόμενος συμμορφώνεται (δηλαδή δεν παρανομεί), τότε ο έλεγχος δεν του μεταβάλλει το όφελος, το οποίο παραμένει μηδέν. Από την άλλη για τον ελεγκτή που κάνει τον έλεγχο και βρίσκει ότι ο ελεγχόμενος δεν έχει παρανομήσει, το όφελος είναι -1. Εάν ο ελεγχόμενος παρανομεί, ο έλεγχος θα έχει ως συνέπεια για αυτόν ένα πρόστιμο που ισοδυναμεί με όφελος -90 (για τον ελεγχόμενο-παίκτη II). Από την πλευρά του ο ελεγκτής (παίκτης I) που θα τον συλλάβει, λόγω της προσπάθειας που καταβάλλει για την επιβολή και είσπραξη του προστίμου, βγαίνει κι αυτός χαμένος με όφελος -6.



Σχήμα 2.1 Το παίγνιο inspection (επιθεώρησης) μεταξύ ενός ελεγκτή (παίκτης I) και ενός ελεγχόμενου (παίκτης II).

Οι τακτικές σε μία ισορροπία Nash πρέπει να είναι βέλτιστες απαντήσεις η μία έναντι της άλλης, (ώστε να μην μετανιώνει κάθε παίκτης για την επιλογή του), κάτι που στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν ισχύει για καμία κατανομή καθαρής τακτικής. Δεν υπάρχει συνδυασμός καθαρών στρατηγικών για τους δύο παίκτες που να είναι σταθερός, δηλαδή να μην μπορεί ένας από τους δύο παίκτες να βελτιώσει τη θέση του αλλάζοντας στρατηγική.

Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι οι παίκτες προετοιμάζονται για το χειρότερο, συνεπώς επιλέγουν μία max-min τακτική. Η max-min τακτική (ως καθαρή τακτική) του παίκτη I είναι το να ελέγξει (ώστε να εξασφαλίσει στον εαυτό του όφελος -6) και του παίκτη II είναι το να συμμορφωθεί (ώστε να εξασφαλίσει στον εαυτό του όφελος 0). Παρόλα αυτά, αυτή δεν είναι μία ισορροπία Nash, και κατά συνέπεια, δεν αποτελεί μία σίγουρη πρόταση για κανέναν από τους δύο παίκτες διότι ο παίκτης I θα μπορούσε για παράδειγμα να αλλάξει την τακτική του βελτιώνοντας το όφελός του.

Μία μεικτή τακτική για τον παίκτη I (ελεγκτής) σε αυτό το παίγνιο, είναι να ελέγχει με μία συγκεκριμένη πιθανότητα. Στα πλαίσια των ελέγχων, η τυχαιοποίηση είναι επίσης μία πρακτική προσέγγιση που μειώνει το κόστος τους. Ακόμα κι αν δεν είναι βέβαιο ότι θα γίνει κάποιος έλεγχος, η πιθανότητα να γίνει και να συλληφθεί ο παραβάτης λειτουργεί αποτρεπτικά για αυτόν που σκέφτεται να παρανομήσει.

Αν η πιθανότητα ελέγχου είναι μικρή, (π.χ. 1%), τότε ο παίκτης II λαμβάνει (ανεξάρτητα από αυτή την πιθανότητα) όφελος 0 όταν συμμορφώνεται και όφελος $0.99\times 10+0.01\times(-90)=9$, που είναι μεγαλύτερο του μηδέν, όταν παρανομεί. Έτσι, είναι λογικό ο παίκτης II να συνεχίσει να παρανομεί όπως θα έκανε αν δεν υπήρχε καθόλου έλεγχος (αφού όπως βλέπουμε από τα οφέλη τουλάχιστον δεν έχει τίποτα να χάσει).

Εάν τώρα η πιθανότητα ελέγχου είναι μεγαλύτερη, (π.χ. 2%), τότε το προσδοκώμενο όφελος της παρανομίας είναι $0.8 \times 10 + 0.2 \times (-90) = -10$, το οποίο είναι μικρότερο του μηδενός, με αποτέλεσμα ο παίκτης ΙΙ να προτιμάει να συμμορφώνεται. Εάν η πιθανότητα ελέγχου είναι είτε πολύ χαμηλή είτε πολύ υψηλή, τότε και στις δύο περιπτώσεις ο παίκτης ΙΙ έχει μία μοναδική βέλτιστη απάντηση. Όπως δείξαμε παραπάνω, μία τέτοια καθαρή τακτική δε μπορεί να αποτελεί τμήμα μία ισορροπίας. Επομένως, η μόνη περίπτωση στην οποία ο παίκτης ΙΙ από μόνος του θα μπορούσε πιθανόν να τυχαιοποιήσει τις τακτικές του είναι αν και οι δύο τακτικές δίνουν ίδιο όφελος.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο παίκτης ΙΙ είναι αδιάφορος αν και μόνο αν ο παίκτης Ι ελέγχει με πιθανότητα 0.1 διότι τότε το προσδοκώμενο όφελος για την παρανομία είναι $0.9 \times 10 + 0.1 \times (-90) = 0$, το οποίο είναι ίδιο με το όφελος της συμμόρφωσης.

Με αυτή τη μεικτή τακτική του παίκτη Ι, ο παίκτης ΙΙ είναι αδιάφορος στην επιλογή μιας εκ των στρατηγικών. Επομένως, μπορεί να τις αναμείξει χωρίς να χάσει όφελος. Συνεπώς, μπορεί να αναμείξει τις στρατηγικές του ώστε να ο παίκτης Ι να μην έχει λόγο να αλλάξει τη δική του στρατηγική. Σύμφωνα με τα οφέλη του σχήματος 3.3.1, για να γίνει αυτό απαιτείται από τον παίκτη ΙΙ να συμμορφωθεί με πιθανότητα 0.8 και να παρανομήσει με πιθανότητα 0.2 . Τα προσδοκώμενα οφέλη του παίκτη Ι είναι τότε για το «δεν ελέγχει» $0.8 \times 0 + 0.2 \times (-10) = -2$, και για «ελέγχει» $0.8 \times (-1) + 0.2 \times (-6) = -2$, έτσι ώστε ο παίκτης Ι να είναι τελικά αδιάφορος και η μεικτή τακτική του να είναι η βέλτιστη απάντηση στη μεικτή τακτική του παίκτη ΙΙ.

Το ζεύγος των μικτών στρατηγικών των δύο παικτών (σε παίγνιο δύο προσώπων) ονομάζεται μεικτή ισορροπία αν κανένας παίκτης δε μπορεί να κερδίσει κατά μέσο όρο με μονομερή απόκλιση. Ο Nash απέδειξε (1951) ότι σε κάθε παίγνιο (δύο ή περισσοτέρων προσώπων) υπάρχει μία τουλάχιστον ισορροπία που ονομάζεται ισορροπία Nash.

Η ισορροπία Nash, αποτελεί και δυνητική λύση του παιγνίου καθώς από τη στιγμή που επιτευχθεί κανένας από τους παίκτες του παιγνίου δεν έχει λόγο να αλλάξει τη στρατηγική του. Συνεπώς, η ισορροπία Nash λειτουργεί σαν ένα «βαρυτικό σημείο» στο οποίο σταδιακά «έλκονται» οι παίκτες, καθώς το παίγνιο επαναλαμβάνεται, και σε αυτό προσαρμόζονται σταδιακά οι μεικτές στρατηγικές τους. Στο παράδειγμά μας, τα τελικά προσδοκώμενα οφέλη είναι -2 για τον παίκτη I και 0 για τον παίκτη II. Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι το παίγνιο του σχήματος 3.3.1 έχει μία μεικτή ισορροπία στην οποία οι παίκτες επιλέγουν τις καθαρές τακτικές τους σύμφωνα με συγκεκριμένες πιθανότητες.

2.2 Φορμαλισμός παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος

Υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης έχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος δεδομένων καθαρών τακτικών. Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση δύο παικτών κατά την οποία οι ορισμοί και αποτελέσματα ισχύουν και στις περιπτώσεις άνω των δύο παικτών.

Ένα παίγνιο σε μορφή πίνακα ωφελειών – απολαβών, προσδιορίζεται από ένα πεπερασμένο σύνολο «καθαρών» στρατηγικών για κάθε παίκτη, και από ένα όφελος για κάθε παίκτη σε κάθε κατανομή στρατηγικών, οι οποίες όλες μαζί συγκροτούν μία πλειάδα από στρατηγικές για κάθε παίκτη. Το παίγνιο παίζεται από κάθε παίκτη ανεξάρτητα και ταυτόχρονα, επιλέγοντας μία στρατηγική η οποία στη συνέχεια τους αποφέρει τα αντίστοιχα οφέλη.

Για δύο παίκτες, ένα παίγνιο αυτής της μορφής ονομάζεται επίσης και bimatrix παίγνιο (*A, B*). Εδώ, τα *A* και *B* είναι οι δύο μήτρες οφελών $m \times n$,δηλαδή, με *m* γραμμές και *n* στήλες. Οι *m* γραμμές είναι οι καθαρές στρατηγικές *i* του παίκτη I και οι n στήλες είναι οι καθαρές στρατηγικές *j* του παίκτη II. Για μία γραμμή *i*, όπου $1 \le i \le m$, και μία στήλη *j*, όπου $1 \le j \le n$, το στοιχείο της μήτρας *A* συμβολίζεται ως a_{ij} και είναι το όφελος του παίκτη I, και το στοιχείο της μήτρας *B* ως b_{ij} και είναι το όφελος του παίκτη II. Συνήθως, παριστάνουμε ένα τέτοιο παίγνιο ως ένα πίνακα με *m* γραμμές και *n* στήλες ώστε κάθε κελί του πίνακα να αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος καθαρής τακτικής (i, j). Σε αυτό το κελί (i, j) εισάγουμε τα οφέλη a_{ij} και b_{ij}. Το a_{ij} τοποθετείται στην κάτω αριστερή γωνία του κελιού. Το b_{ij} τοποθετείται στην άνω δεξιά γωνία του.

Μία μικτή στρατηγική ορίζεται ως μία κατανομή πιθανότητας επί του συνόλου των καθαρών στρατηγικών του παίκτη. Αυτό παίζεται σαν «ενεργή τυχαιοποίηση»: Με χρήση μίας συσκευής κληρώσεων που λειτουργεί με τις δοθείσες πιθανότητες, ο παίκτης διαλέγει κάθε καθαρή τακτική βάσει κλήρωσης. Όταν ένας παίκτης παίζει σύμφωνα με μία μεικτή τακτική, ο άλλος παίκτης θεωρείται ότι δε γνωρίζει το αποτέλεσμα της κλήρωσης. Υποτίθεται ότι ο αντίπαλος γνωρίζει πως η στρατηγική που επιλέχθηκε από τον παίκτη είναι ένα τυχαίο γεγονός και βασίζει ο καθένας την απόφασή του στην κατανομή των οφελών που προκύψει. Τα οφέλη τότε «σταθμίζονται με τις πιθανότητές τους» ώστε να καθορίσουν το προσδοκώμενο όφελος, το οποίο αντιπροσωπεύει την προτίμηση του παίκτη.

Μία καθαρή στρατηγική είναι μία ειδική μεικτή στρατηγική. Ειδικότερα, έστω μία καθαρή τακτική i του παίκτη Ι. Η μεικτή στρατηγική x που επιλέγει i με πιθανότητα ένα, και κάθε άλλη καθαρή στρατηγική με πιθανότητα μηδέν, είναι το ίδιο με την καθαρή στρατηγική i, διότι η x επιλέγει το i με βεβαιότητα.

2.2 Σημειογραφία μήτρας για προσδοκώμενα οφέλη

Υποθέτουμε ότι στο συγκεκριμένο παίγνιο δύο παικτών, ο παίκτης Ι έχει m καθαρέ στρατηγικές και ο παίκτης ΙΙ έχει n. Οι καθαρές στρατηγικές του παίκτη Ι, οι οποίες είναι οι m γραμμές του παιγνίου bimatrix, δηλώνονται με $i = 1,\dots,m$, και εκείνες του παίκτη ΙΙ, οι οποίες είναι οι n στήλες του bimatrix δηλώνονται με $j = 1,\dots,n$.

Για τον παίκτη Ι, μία μεικτή στρατηγική x περιγράφεται με την m-πλειάδα των πιθανοτήτων $(x_1, x_2,\dots, x_m)$ που τίθενται επί των καθαρών τακτικών $1,2,\dots,m$ του παίκτη Ι. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε το x ως ένα στοιχείο της m-διάστασης R^m. Το διάνυσμα x με m συνιστώσες είναι ένα γραμμικό διάνυσμα, δηλαδή μία $1\times m$ μήτρα με μία γραμμή και m στήλες. Κατ' αντιστοιχία μία μεικτή στρατηγική y του παίκτη ΙΙ είναι μία n-πλειάδα από πιθανότητες y_j ,δηλαδή, το y είναι ένα στοιχείο του R^n. Γράφουμε το y σαν διάνυσμα στήλη, δηλαδή ως $(y_1, y_2,\dots, y_n)^{\mathrm{T}}$ που είναι το διάνυσμα γραμμή $(y_1, y_2,\dots, y_n)$ αντιμετατιθέμενο.

Έστω ότι ο παίκτης Ι χρησιμοποιεί τη μεικτή στρατηγική x και ότι ο παίκτης ΙΙ χρησιμοποιεί την μεικτή στρατηγική y. Με αυτές τις υποθέσεις, μπορούμε τώρα να εκφράσουμε συνοπτικά το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη Ι ως xAy και το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη ΙΙ ως xBy. Για τις μεικτές στρατηγικές x και y, διαβάζουμε τα xAy και xBy ως γινόμενα πινάκων. Αυτή η αναπαράσταση λειτουργεί διότι η x εκλαμβάνεται ως ένας πίνακας διαστάσεων $1 \times m$, αμφότερα τα A και B είναι διαστάσεων $m \times n$ και η y είναι διαστάσεων $n \times 1$.

Το αποτέλεσμα είναι ένας 1×1 πίνακας , δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει το όφελος του κάθε παίκτη. Είναι καλύτερα για το xAy να υπολογίζεται ως $x(Ay)$, δηλαδή ως το γινόμενο ενός διανύσματος γραμμή x με m στοιχεία επί ενός διανύσματος στήλη Ay με m στοιχεία. Το διάνυσμα στήλη Ay έχει m γραμμές. Δηλώνουμε την τιμή του Ay στην γραμμή i με $(Ay)_i$ για κάθε γραμμή i από τη σχέση:

$$(Ay)_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j \quad \text{για} \quad 1 \le i \le m.$$

Δηλαδή, οι τιμές a_{ij} της γραμμής i του πίνακα οφελών A για τον παίκτη Ι πολλαπλασιάζονται με τις πιθανότητες y_j των στηλών, άρα το $(Ay)_i$ είναι το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη Ι όταν παίζει τη γραμμή i. Μπορεί κανείς να σκεφθεί επίσης το y_j σαν μία γραμμική συνιστώσα της j-ιοστής στήλης του πίνακα A. Αυτό σημαίνει, ότι το Ay είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων-στήλης του A, όπου κάθε ένα πολλαπλασιάζεται με την πιθανότητά του υπό το y. Αυτός ο γραμμικός συνδυασμός Ay είναι ένα διάνυσμα από προσδοκώμενα οφέλη, με ένα προσδοκώμενο όφελος $(Ay)_i$ για κάθε γραμμή i. Επιπλέον, το xAy είναι το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη Ι όταν οι παίκτες χρησιμοποιούν τις x και y, επειδή

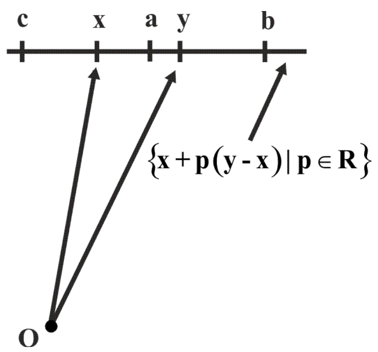
$$x(Ay) = \sum_{i=1}^{m} x_i (Ay)_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j) a_{ij}.$$

Αντίστοιχα το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη ΙΙ είναι:

$$(xB)y = \sum_{j=1}^{n} (xB)_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i b_{ij} \right) y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i y_j) b_{ij}.$$

2.4 Κυρτοί συνδυασμοί και σύνολα μεικτών στρατηγικών

Είναι χρήσιμο να εκλαμβάνουμε τα διανύσματα τακτικής ως γεωμετρικά αντικείμενα. Μία μεικτή τακτική *x* του παίκτη I εκχωρεί πιθανότητες x_i στις καθαρές τακτικές *i*. Οι καθαρές τακτικές με τη σειρά τους, είναι ειδικές μεικτές τακτικές. Για παράδειγμα τα μοναδιαία διανύσματα στο R^m είναι τα $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ όταν το $m=3$. Η μεικτή τακτική (x_1,x_2,x_3) είναι λοιπόν ένας γραμμικός συνδυασμός των καθαρών τακτικών, ήτοι $x_1\cdot(1,0,0)+x_2\cdot(0,1,0)+x_3\cdot(0,0,1)$, όπου οι γραμμικοί συντελεστές είναι απλά οι πιθανότητες. Ένας τέτοιος γραμμικός συνδυασμός ονομάζεται κυρτός συνδυασμός διότι το άθροισμα των συντελεστών ισούται με ένα και κανένας συντελεστής δεν είναι αρνητικός.



Σχήμα 2.2 Η γραμμή μεταξύ των σημεία *x* και *y* δίδεται από τα σημεία $x+p(y-x)$ όπου το $p\in\mathrm{R}$. Σαν παραδείγματα έχουμε το σημείο *α* για $p=0.6$, το σημείο *b* για $p=1.5$, και το σημείο *c* όταν $p=-0.4$. Το τμήμα της γραμμής που ενώνει τα *x* και *y* προκύπτει όταν το *p* περιορίζεται στο διάστημα $0\le p\le 1$.

Το σχήμα 3.6.1 δείχνει δύο σημεία *x* και *y*, στο επίπεδο, θα μπορούσε επίσης να αφορά και περιπτώσεις άνω των δύο διαστάσεων. Η ευθεία γραμμή που περνάει από τα σημεία *x* και *y* προκύπτει από το άθροισμα του σημείου *x* (που θεωρούμε ως διάνυσμα) με κάποιο πολλαπλάσιο της διαφοράς $y-x$. Το διάνυσμα που παίρνουμε από την πράξη $x+p(y-x)$, για $p\in\mathrm{R}$, δίδει *x* όταν το $p=0$ και *y* όταν $p=1$. Το παραπάνω σχήμα έχει κάποια παραδείγματα *α*, *b*, *c* άλλων σημείων. Όταν $0\le p\le 1$, όπως συμβαίνει για το σημείο *α*, τα σημεία του αποτελέσματος δίνουν το κομμάτι της γραμμής που ενώνει τα *x* και *y*. Εάν $p>1$, τότε παίρνουμε τη γραμμή που ενώνει τα *x* και *y* αλλά πάει και πέρα από το σημείο *y*, δηλαδή προς το σημείο *b* . Για $p<0$, το αντίστοιχο σημείο εκτείνεται πέρα από την πλευρά του *x*, εκεί που βρίσκεται το σημείο *c*.

Η έκφραση $x + p(y - x)$ μπορεί να γραφεί και σαν $(1 - p)x + py$ όπου τα δοθέντα σημεία x και y εμφανίζονται μόνο μία φορά. Η έκφραση αυτή (με το $1 - p$ ως συντελεστή του πρώτου διανύσματος και με p για το δεύτερο) δείχνει πώς ανταποκρίνεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x και y στο πραγματικό διάστημα [0, 1] για τις πιθανές τιμές που παίρνει το p. Τα άκρα του διαστήματος 0 και 1 αντιστοιχούν στα άκρα x και y του ευθύγραμμου τμήματος.

Γενικά, ένας κυρτός συνδυασμός από σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_k$ σε κάποια διάσταση γράφεται και σαν γραμμικός συνδυασμός $p_1 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 + \cdots + p_k \cdot z_k$ όπου οι γραμμικοί συντελεστές $p_1, p_2, \ldots, p_k$ είναι μη αρνητικοί και έχουν άθροισμα ένα. Στην περίπτωση που αναφέραμε προηγουμένως αντιστοιχούν οι τιμές $z_1 = x, z_2 = y, p_1 = 1 - p$ και $p_2 = p \in [0,1]$.

Ένα σύνολο από σημεία ονομάζεται κυρτό εάν περιέχει μαζί με τα σημεία του $z_1, z_2, \ldots, z_k$ και κάθε κυρτό συνδυασμό των σημείων αυτών. Ισοδύναμα, μπορεί κάποιος να δείξει ότι ένα σύνολο είναι κυρτό, εάν το σύνολο αυτό περιέχει εκτός από δύο τυχαία σημεία του και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο αυτά σημεία.

Οι συντελεστές σε ένα κυρτό συνδυασμό μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως πιθανότητες, και μία κατανομή πιθανότητας σε πεπερασμένο σύνολο μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κυρτός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων.

Σε ένα παίγνιο δύο παικτών με m καθαρές τακτικές για τον παίκτη I και n καθαρές τακτικές για τον παίκτη II, δηλώνουμε τα σύνολα μεικτών τακτικών των δύο παικτών με X και Y αντιστοίχως[2]:

$$X = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \geq 0 \ \gamma\iota\alpha\ 1 \leq i \leq m,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$

$$Y = \left\{ (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} \mid y_j \geq 0 \, \gamma\iota\alpha 1 \leq j \leq n,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}$$

2.5 Η συνθήκη βέλτιστης απάντησης

Μία ισορροπία μεικτής στρατηγικής είναι μία κατανομή από μεικτές στραγηγικές ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να βελτιώσει το προσδοκώμενο όφελος με

[2] **Υποθέτουμε ότι το *X* περιέχει διανύσματα γραμμές και το *Y* διανύσματα στήλες.**

μονομερή αλλαγή της τακτικής του. Για να διακρίνουμε εάν μια στρατηγική *x* είναι βέλτιστη απάντηση έναντι στρατηγικής *y* χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.I: Συνθήκη βέλτιστης απάντησης. Έστω οι μεικτές τακτικές *x* και *y* του παίκτη I και του παίκτη II αντίστοιχα. Το *x* είναι μία βέλτιστη απάντηση στο *y* αν και μόνο αν για κάθε καθαρή τακτική *i* του παίκτη I ισχύει,

$$x_i > 0 \Rightarrow (Ay)_i = \max\{(Ay)_k \mid 1 \le k \le m\}.$$

Απόδειξη θεωρήματος Το $(Ay)_i$ είναι το *i*-ιοστό στοιχείο του Ay το οποίο είναι το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη I όταν παίζει τη γραμμή *i*, σύμφωνα και με την παραπάνω σχέση. Έστω το $u = \max\{(Ay)_k \mid 1 \le k \le m\}$, το οποίο είναι το μέγιστο εκ των προσδοκώμενων οφελών για τις καθαρές τακτικές του παίκτη I. Τότε είναι:

$$xAy = \sum_{i=1}^{m} x_i (Ay)_i = \sum_{i=1}^{m} x_i (u - (u - (Ay)_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i u - \sum_{i=1}^{m} x_i (u - (Ay)_i)$$
$$= u - \sum_{i=1}^{m} x_i (u - (Ay)_i).$$

Για κάθε τακτική *i*, αμφότερα το x_i και η διαφορά του μέγιστού οφέλους *u* με του οφέλους $(Ay)_i$ για τη γραμμή *i* είναι μη-αρνητικοί, το άθροισμα $\sum_{i=1}^{m} x_i (u - (Ay)_i)$ είναι επίσης μη-αρνητικό, οπότε το $xAy \le u$. Το προσδοκώμενο όφελος επιτυγχάνει το μέγιστο *u* αν και μόνο αν το άθροισμα αυτό είναι μηδέν, δηλαδή, εάν το $x_i > 0$ συνεπάγεται ότι $(Ay)_i = u$.

Με τη φράση «η *x* είναι βέλτιστη απάντηση έναντι της *y*» του προηγούμενου θεωρήματος, εννοούμε ότι μεταξύ όλων των μεικτών στρατηγικών στο *X* του παίκτη I, το *x* δίδει το μέγιστο προσδοκώμενο όφελος στον παίκτη I. Παρόλα αυτά, οι καθαρές βέλτιστες απαντήσεις στην *y* της παραπάνω σχέσης αντιμετωπίζουν μόνο τις καθαρές τακτικές του παίκτη I. Κάθε τέτοια καθαρή τακτική αντιστοιχεί σε μία γραμμή *i* του πίνακα οφελών. Σε αυτή τη γραμμή, τα οφέλη a_{ij} πολλαπλασιάζονται με τις πιθανότητες-στήλες y_j, και το άθροισμα όλων των στηλών δίνει το προσδοκώμενο όφελος $(Ay)_i$ για την καθαρή στρατηγική *i* σύμφωνα με την σχέση $(Ay)_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j$ για $1 \le i \le m$. Αυτή η καθαρή τακτική είναι μία βέλτιστη απάντηση αν και μόνο αν καμιά άλλη γραμμή δε δίνει υψηλότερο όφελος. Το πρώτο κομμάτι του θεωρήματος είναι η συνθήκη που εκφράζει κατά πόσο μία καθαρή τακτική είναι μία βέλτιστη απάντηση, κάτι που είναι εύκολο να ελεγχθεί. Η ευκολία έγκειται στο γεγονός ότι χρειάζεται μόνο ένας να υπολογίσει τα m προσδοκώμενα οφέλη $(Ay)_i$ για $i=1,...,m$.

Αν για παράδειγμα ο παίκτης Ι έχει τρεις καθαρές τακτικές $(m=3)$ και τα προσδοκώμενα οφέλη της $(Ay)_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j$ για $1 \le i \le m$ είναι $(Ay)_1 = 4, (Ay)_2 = 4,$ και $(Ay)_3 = 3$, τότε μόνο οι πρώτες δύο τακτικές είναι βέλτιστες καθαρές τακτικές. Αν αυτά τα προσδοκώμενα οφέλη ήταν 3, 5, και 3, τότε μόνο η δεύτερη τακτική θα ήταν βέλτιστη απάντηση. Είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχει τουλάχιστον μία καθαρή βέλτιστη απάντηση, διότι οι αριθμοί $(Ay)_k$ στην παραπάνω σχέση[3] έχουν το μέγιστό τους *u* για τουλάχιστον ένα *k*. Το θεώρημα 2.I δηλώνει ότι μόνο οι καθαρές βέλτιστες απαντήσεις *i* μπορούν να έχουν θετική πιθανότητα x_i αν το x θεωρείται πως είναι μία βέλτιστη απάντηση στην *y*.

2.6 Μεικτές ισορροπίες

Ύπαρξη μεικτών ισορροπιών

Κάθε παίγνιο με ένα πεπερασμένο πλήθος παικτών, και πεπερασμένες στρατηγικές ανά παίκτη, έχει μία τουλάχιστον μεικτή ισορροπία.

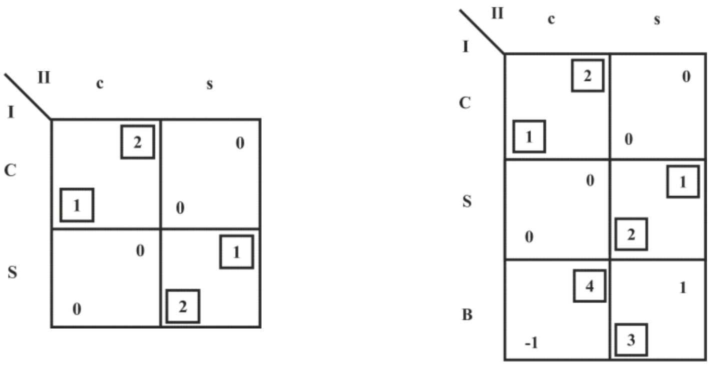
Εύρεση μεικτών ισορροπιών

Είναι εύκολο να καθοριστούν οι ισορροπίες Nash όταν και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν καθαρή τακτική διότι τα κελιά του πίνακα οφελών στα οποία αμφότερα τα οφέλη είναι οφέλη βέλτιστης απάντησης, εμφανίζονται με σημείωση. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη βέλτιστης απάντησης μπορούμε βρούμε τις ισορροπίες μεικτής τακτικής.

Παράδειγμα: Εξετάζουμε παίγνια 2×2, όπως το παίγνιο inspection του σχήματος 3.3.1 το οποίο δεν έχει καμία ισορροπία καθαρής τακτικής. Σε αυτό το παίγνιο έχουν υπολογιστεί οι πιθανότητες της μεικτής τακτικής ενός παίκτη, που αποσκοπούν στο να κάνουν τον άλλο παίκτη αδιάφορο για τις καθαρές στρατηγικές

[3] $x_i > 0 \Rightarrow (Ay)_i = \max\{(Ay)_k \mid 1 \le k \le m\}$.

του. Μόνο όταν ένας παίκτης γίνεται αδιάφορος δέχεται να κάνει μίξη μεταξύ των στρατηγικών του, ώστε η μεικτή στρατηγική που προκύπτει να δημιουργεί αδιαφορία και για τον άλλο παίκτη, οπότε τελικά να προκύψει ισορροπία. Αυτή είναι μία συνέπεια του θεωρήματος βέλτιστης απάντησης απ' όπου γνωρίζουμε ότι μόνο καθαρές στρατηγικές που παίρνουν μέγιστο όφελος, δηλαδή ίσο με το προσδοκώμενο, είναι δυνατό να παιχτούν με θετική πιθανότητα σε ισορροπία.



Σχήμα 2.3 Η μάχη των φύλων (αριστερά) και ένα 3Χ2 παίγνιο (δεξιά) που είναι το ίδιο παίγνιο με μία επιπλέον στρατηγική *B* για τον παίκτη Ι.

Η ισορροπία μεικτής τακτικής μπορεί επίσης να υπάρξει και σε 2×2 παίγνια που εμφανίζουν ισορροπίες καθαρής τακτικής.

Παράδειγμα Έστω το παίγνιο όπως παρουσιάζεται στα αριστερά του σχήματος 2.3 που έχει τις ισορροπίες καθαρής τακτικής (*C*, *c*) και (*S*, *s*). Όπως σημειώνεται με τα μικρά τετράγωνα, η βέλτιστη απάντηση του άλλου παίκτη (αντιπάλου) εξαρτάται από την τακτική που ακολουθεί ο ίδιος ο παίκτης. Αν ο παίκτης Ι παίζει *C*, τότε η βέλτιστη απάντηση του παίκτη ΙΙ είναι *c*, και όταν παίζει *S* είναι *s*. Υποθέτουμε ότι ο παίκτης Ι παίζει μία μεικτή τακτική. Έστω δηλαδή, ότι παίζει *C* με πιθανότητα $1-p$ και *S* με πιθανότητα p. Όπως φαίνεται, όταν το *p* έχει τιμή κοντά στο μηδέν, είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο παίκτης Ι επιλέγει *C*, και η βέλτιστη απάντηση ενάντια στη *C* εξακολουθεί να είναι η *c*, ενώ από την άλλη, εάν το *p* έχει τιμή κοντά στο ένα, τότε η βέλτιστη απάντηση θα είναι s. Συνεπώς, υπάρχει κάποια πιθανότητα η οποία κάνει τον παίκτη ΙΙ αδιάφορο μεταξύ των επιλογών *c*, *s*. Με δεδομένη την *p*, η οποία ορίζει τη μεικτή τακτική του παίκτη Ι, το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη ΙΙ όταν παίζει *c* είναι $2(1-p)$, και όταν παίζει *s* το προσδοκώμενο όφελος είναι απλά *p*. Ο παίκτης ΙΙ, είναι λοιπόν αδιάφορος μεταξύ των *c* και *s*, αν και μόνο αν τα προσδοκώμενα οφέλη του είναι ίσα[4]. Αυτή η μεικτή τακτική του παίκτη Ι, κατά την οποία παίζει *C* και *S* με πιθανότητες 1/3 και 2/3, αντίστοιχα, δίδει στον παίκτη ΙΙ, και στις δύο περιπτώσεις, το ίδιο προσδοκώμενο όφελος 2/3. Οπότε ο παίκτης ΙΙ μπορεί να κάνει μίξη μεταξύ των *c* και *s*.

Έτσι, ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι ο παίκτης Ι είναι αδιάφορος για τις δύο τακτικές του, αν ο παίκτης ΙΙ χρησιμοποιεί τη μεικτή τακτική (2/3,1/3). Η (2/3,1/3) είναι το διάνυσμα των πιθανοτήτων για τις δύο τακτικές *c, s* του παίκτη ΙΙ. Άρα, τότε και μόνο τότε ο παίκτης Ι παίρνει το ίδιο προσδοκώμενο όφελος και για τις δύο γραμμές, το οποίο είναι 2/3.

Περιγράψαμε λοιπόν τη μεικτή τακτική του παιγνίου, η οποία γράφεται $((1/3,2/3),(2/3,1/3))$ και είναι ένα ζεύγος (*x, y*) από μεικτές τακτικές *x* και *y*, οι οποίες είναι διανύσματα πιθανότητας. Οι πιθανότητες της μεικτής τακτικής στο παραπάνω παίγνιο μπορούν να βρεθούν σχετικά γρήγορα κοιτάζοντας τα οφέλη του πίνακα. Για παράδειγμα, ο παίκτης ΙΙ πρέπει να δώσει δύο φορές περισσότερο βάρος στην τακτική *c*, σε σύγκριση με την *s*, διότι η τακτική *C* του παίκτη Ι παίρνει μόνο μία μονάδα οφέλους από τη *c* · ενώ η τακτική *S* του παίκτη Ι παίρνει δύο μονάδες οφέλους όταν ο παίκτης ΙΙ επιλέγει *s*. Λόγω του ότι τα ζεύγη τακτικών (*C, c*) και (*S, s*) δίνουν όφελος μηδέν, οι δύο γραμμές των *C* και *S* δίνουν το ίδιο προσδοκώμενο όφελος μόνο όταν η *c* έχει πιθανότητα 2/3 και η *s* έχει πιθανότητα 1/3.

2.6.1 Η μέθοδος της άνω περιβάλλουσας

Το διάγραμμα της «άνω περιβάλλουσας» απλοποιεί την εύρεση μεικτών στρατηγικών, παιγνίων στα οποία ο παίκτης έχει μόνο δύο καθαρές στρατηγικές.

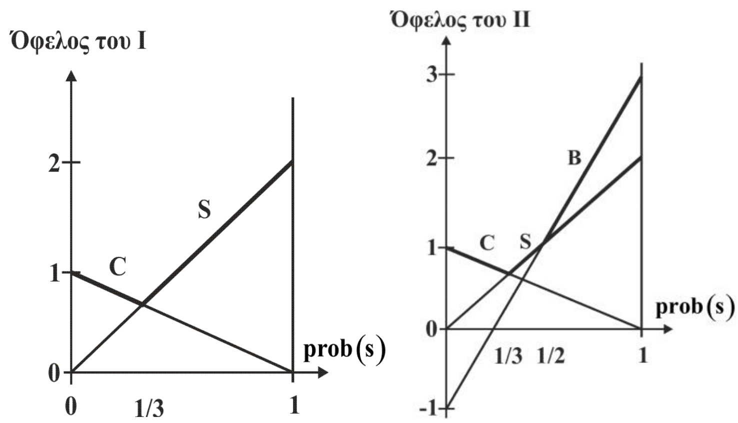
Η αριστερή γραφική παράσταση του σχήματος 2.4 δείχνει το διάγραμμα της άνω περιβάλλουσας για το αριστερό παίγνιο του σχήματος 2.3. Το διάγραμμα αυτό, είναι μία καταγραφή του προσδοκώμενου οφέλους ενός παίκτη, έναντι στη μεικτή στρατηγική του άλλου παίκτη. Δηλαδή, παίρνουμε ένα παίκτη που έχει μόνο δύο καθαρές στρατηγικές, στο παράδειγμά μας είναι ο παίκτης ΙΙ. Ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει την πιθανότητα q να παιχτεί η δεύτερη καθαρή στρατηγική *s* του παίκτη ΙΙ. Στον κάθετο άξονα, καταχωρούνται τα προσδοκώμενα οφέλη που προκύπτουν για τον άλλο παίκτη, παίκτη Ι, από τις καθαρές του τακτικές. Σε αυτό το

[4] **Δηλαδή, αν** $2(1-p)=p \Leftrightarrow 2=3p \Leftrightarrow p=2/3$.

παίγνιο, έχουμε προσδοκώμενο όφελος $1-q$ όταν παίζει τη γραμμή C και $2q$ όταν παίζει τη γραμμή S (αναφερόμαστε στον παίκτη Ι). Τα σχέδια είναι γραμμές διότι τα προσδοκώμενα οφέλη είναι γραμμικές συναρτήσεις των πιθανοτήτων .

Έστω η γραμμή C του παίκτη Ι. Όταν ο παίκτης ΙΙ παίζει την αριστερή του τακτική c (όπου q = 0), η γραμμή C δίδει όφελος 1 (σύμφωνα με τον πίνακα οφελών του παίκτη Ι). Όταν ο παίκτης ΙΙ παίζει την δεξιά του τακτική s (όπου q = 1), η γραμμή C δίδει όφελος 0. Οι πιθανότητες q = 0 ή q = 1 και τα αντίστοιχα οφέλη τους, ορίζουν τα δύο άκρα με συντεταγμένες (0, 1) και (1, 0) της γραμμής που περιγράφει το προσδοκώμενο όφελος $1-q$ συναρτήσει του q, το οποίο αποτελείται από τα σημεία $(q,1-q)$ για $q \in [0,1]$.

Η γραμμή αυτή, είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών $(1-q)\cdot(0,1)+q\cdot(1,0)$ των δύο άκρων. Το πρώτο στοιχείο ενός τέτοιου κυρτού συνδυασμού είναι ίσο πάντα με q και το δεύτερο στοιχείο $(1-q)\cdot 1+q\cdot 0$ είναι το προσδοκώμενο όφελος. Για τη γραμμή S, το προσδοκώμενο όφελος είναι $(1-q)\cdot 0+q\cdot 2$, άρα η γραμμή των προσδοκώμενων οφελών για την S συνδέει το αριστερό άκρο (0, 0) με το δεξί άκρο (1, 2).



Σχήμα 2.4 Η άνω περιβάλλουσα των προσδοκώμενων οφελών του παίκτη Ι για τα δύο παίγνια της εικόνας 2.3

Στο αριστερό διάγραμμα του σχήματος 2.4 οι δύο γραμμές προσδοκώμενων οφελών των C και S τέμνονται ακριβώς στο σημείο εκείνο όπου ο παίκτης Ι είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο τακτικών. Αυτό συμβαίνει όταν q = 1/3[5]. Παρόλα αυτά, το

[5] **Στο συγκεκριμένο παράδειγμα.**

διάγραμμα δεν δίνει μόνο πληροφορία για την αδιαφορία, αλλά και γενικότερα για τις προτιμήσεις του παίκτη I.

Κάθε καθαρή τακτική που αποτελεί βέλτιστη απάντηση του παίκτη I, προφανώς είναι το ανώτερο ευθύγραμμο τμήμα από όλες τις γραμμές που περιγράφουν τα προσδοκώμενα οφέλη. Εδώ, η γραμμή C είναι βέλτιστη απάντηση όταν το $0 \leq q \leq 1/3$, και η γραμμή S είναι βέλτιστη απάντηση όταν το $1/3 \leq q \leq 1$, με την αδιαφορία μεταξύ των C και S να είναι ακριβώς όταν το q = 1/3. Η άνω περιβάλλουσα των προσδοκώμενων οφελών είναι το μέγιστο των γραμμών που περιγράφουν τα προσδοκώμενα οφέλη των διάφορων καθαρών τακτικών, και δηλώνεται με τα έντονα τονισμένα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος.

Η άνω περιβάλλουσα χρησιμοποιείται ιδιαιτέρως όταν ο παίκτης έχει πάνω από δύο καθαρές τακτικές, διότι οι μεικτές ισορροπίες ενός 2×2 παιγνίου καθορίζονται έτσι κι αλλιώς γρήγορα με το «κόλπο της διαφοράς». Το διάγραμμα της άνω περιβάλλουσας στα δεξιά του σχήματος 2.4 για το 3×2 παίγνιο του σχήματος 2.3. Η επιπρόσθετη τακτική B του παίκτη I δίνει τη γραμμή που ενώνει το ύψος -1 του αριστερού σημείου με το ύψος 3 του δεξιού σημείου. Όπως φαίνεται από τη γραμμή, η B είναι η βέλτιστη απάντηση για όλα τα q όπου $1/2 \leq q \leq 1$, με την αδιαφορία μεταξύ των S και B να έρχεται όταν q = 1/2. Η άνω περιβάλλουσα αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα για τις τρεις καθαρές τακτικές C, S, και B του παίκτη I. Επιπλέον, υπάρχουν μόνο δύο σημεία στα οποία ο παίκτης I είναι αδιάφορος μεταξύ δύο τακτικών, και συγκεκριμένα μεταξύ των C και S όταν q = 1/2. Τα δύο αυτά σημεία, που σημειώνονται πάνω στην άνω περιβάλλουσα, δίδουν τις δύο μοναδικές πιθανότητες μεικτής τακτικής του παίκτη II με τις οποίες ο παίκτης I μπορεί να κάνει μίξη μεταξύ των δύο καθαρών τακτικών[6].

Υπάρχει και μία τρίτη αδιαφορία μεταξύ των C και B για q = 2/5, όπου οι δύο γραμμές για τα C και B τέμνονται, αλλά το σημείο τομής τους είναι κάτω από τη γραμμή S, άρα δεν ανήκει στην άνω περιβάλλουσα. Κατά συνέπεια, δε χρειάζεται να εξετάζεται ως πιθανή μεικτή ισορροπία τακτικής, η περίπτωση που ο παίκτης I κάνει μίξη μεταξύ των γραμμών C και B διότι δεν είναι βέλτιστες απαντήσεις. Με δεδομένες τις υποψήφιες μίξεις του παίκτη I, μπορούμε να δούμε αν και με ποιο τρόπο οι δύο αντίστοιχες καθαρές τακτικές μπορούν να συνδυαστούν με σκοπό να

[6] **Το σημείο της άνω περιβάλλουσας για q = 0 αντιστοιχεί στην ισορροπία καθαρής τακτικής c.**

κάνουν τον παίκτη II αδιάφορο. Αυτό το κάνουμε με τη χρήση του κόλπου της διαφοράς. Επομένως, η άνω περιβάλλουσα περιορίζει τα ζεύγη τακτικών που έχουμε να ελέγξουμε ως πιθανές τακτικές που συνδυάζονται σε ισορροπία. Το διάγραμμα της άνω περιβάλλουσας ορίζεται επίσης για τα προσδοκώμενα οφέλη ενάντια σε μεικτή τακτική που κάνει μίξη μεταξύ άνω των δύο καθαρών τακτικών.

2.7 Εκφυλισμένα παίγνια

Ας μελετήσουμε τη στρατηγική μορφή του παιγνίου «threat game», που απεικονίζεται στο σχήμα 2.5. Προκειμένου να δώσουμε εννοιολογικό περιεχόμενο στο παίγνιο, μελετούμε περίπτωση στην οποία υπάρχουν δύο ανταγωνιστικές εταιρίες I και II. Η εταιρία II είναι ο κύριος παίκτης σε μία αγορά και η εταιρία I σκέφτεται να μπει στην ίδια αγορά. Η εταιρία I μπορεί είτε να μπει στην αγορά, είτε να απέχει. Η εταιρία II μπορεί είτε να συνεργαστεί με την εταιρία I, είτε να την ανταγωνιστεί.

Όσο η εταιρία I μένει εκτός αγοράς (Out) η εταιρία II απολαμβάνει όφελος 3, ενώ η I έχει όφελος 1. Εάν η I μπει στην αγορά (In), τότε αν η II ξεκινήσει εμπορικό πόλεμο (Fight) θα έχουν και οι δύο απολαβή 0, λόγω του ανταγωνισμού. Αν η II συνεργαστεί (Cooperate) με την I θα έχουν όφελος 2.

II / I	**F**	**C**
O	1,3	1,3
I	0	2,2

Σχήμα 2.5 – Threat game

Υπάρχουν δύο καθαρές ισορροπίες Nash, οι (*O,F*) και η πιο ορθολογική (*I,C*). Καταρχάς πριν αναζητήσουμε μεικτές στρατηγικές που οδηγούν σε ισορροπία έχει ενδιαφέρον να απαντήσουμε στο γιατί είναι πιο «φυσιολογική» η ισορροπία (*I,C*). Η εταιρία I γνωρίζει ότι αν δεν μπει στην αγορά θα έχει σε κάθε περίπτωση απολαβή 1, ενώ αν μπει θα έχει απολαβή 2, καθώς από τη στιγμή που μπαίνει στην αγορά, η εταιρία II έχει συμφέρον να συνεργαστεί, να επιλέξει δηλαδή στρατηγική C.

Άρα η ορθολογική κίνηση της εταιρίας I είναι να μπει στην αγορά. Συνεπώς, η διαδοχική σειρά κινήσεων του παιγνίου, όπως συμβαίνει στην πραγματική ζωή, επιβάλλει μόνο μια κατάσταση ισορροπίας καθαρών στρατηγικών, την (*I,C*). Από την άλλη, αν η εταιρία II έχει γνωστοποιήσει εκ των προτέρων την απειλή ότι θα απαντήσει με εμπορικό πόλεμο σε κάθε προσπάθεια άλλης εταιρίας να εισέλθει στην αγορά, τότε η εταιρία I θα προτιμήσει να μείνει εκτός αγοράς και να έχει απολαβή 1, παρά να εισέλθει στην αγορά για να πάρει απολαβή 0.

Συνεπώς, η επιλογή της εταιρίας I εξαρτάται από το πόσο αξιόπιστη θεωρεί την απειλή της εταιρίας II για εμπορικό πόλεμο. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, το παίγνιο αυτό ονομάζεται και παίγνιο απειλής, αφού η ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής στην οποία θα καταλήξει εξαρτάται από το πόσο αξιόπιστη πιστεύει η εταιρία I ότι είναι η απειλή της εταιρίας II.

Επανερχόμενοι στην αναζήτηση ισορροπιών Nash, εξετάζουμε εάν υπάρχει ισορροπία μεικτών στρατηγικών. Υποθέτουμε ότι αυτή η ισορροπία δίδεται από τη μεικτή στρατηγική $(1-p, p)$ για τον παίκτη I και $(1-q, q)$ για τον παίκτη II. Αν q = 1/2 τότε ο παίκτης I να είναι αδιάφορος μεταξύ των I και O , και έτσι μπορεί να κάνει μίξη των καθαρών στρατηγικών του. Για τον παίκτη I, αν p = 0 τότε ο παίκτης II είναι αδιάφορος μεταξύ των F και C.

Αναλυτικότερα, εάν ο παίκτης I παίζει O και I με πιθανότητες $1-p$ και p, τότε το προσδοκώμενο όφελος του παίκτη II είναι $3(1-p)$ για τη στρατηγική F, και $3(1-p)+2p$ για την C. Έτσι, είναι αδιάφορος μεταξύ των επιλογών του μόνο όταν p = 0.

Συνεπώς, μία ισορροπία μεικτής τακτικής του παιγνίου είναι η ((1, 0), (1/2, 1/2)). Παρόλα αυτά, μόνο ο παίκτης II χρησιμοποιεί κατάλληλη μεικτή τακτική σε αυτή την ισορροπία, ενώ η τακτική του παίκτη I είναι η καθαρή τακτική O. Για τον παίκτη I, η συνθήκη βέλτιστης απάντησης απαιτεί η O να έχει μέγιστο προσδοκώμενο όφελος, το οποίο δεν είναι ανάγκη να είναι το ίδιο με το προσδοκώμενο όφελος για την I, Η επιλογή O είναι η βέλτιστη εφόσον το όφελος της καθαρής στρατηγικής O είναι τουλάχιστον όσο μεγάλο είναι το προσδοκώμενο όφελος $2q$ όταν παίζει I, δηλαδή, όταν $1 \geq 2q$. Με άλλα λόγια, η εξίσωση $1 = 2q$ πρέπει να αντικατασταθεί από μία ανισότητα. Η ανισότητα $1 \geq 2q$ είναι ισοδύναμη με $0 \leq q \leq 1/2$. Με αυτές τις πιθανές τιμές για την q, παίρνουμε ένα άπειρο σύνολο ισορροπιών ((1, 0), $(1-q, q)$). Οι δύο ακραίες περιπτώσεις για του q, που είναι οι $q = 0$ και $q = 1/2$, δίδουν την ισορροπία καθαρής τακτικής (T, l) και τη μεικτή ισορροπία ((1, 0), (1/2, 1/2)) που βρήκαμε νωρίτερα.

Το σύνολο ισορροπιών που περιγράφηκε, στο οποίο ο παίκτης II χρησιμοποιεί μία πιθανότητα μεικτής τακτικής q κάποιου διαστήματος, έχει μία διαίσθηση της πιθανής απειλής "threat" που υπάρχει στο παίγνιο, δηλαδή της περίπτωσης που παίκτης II παίζει F.

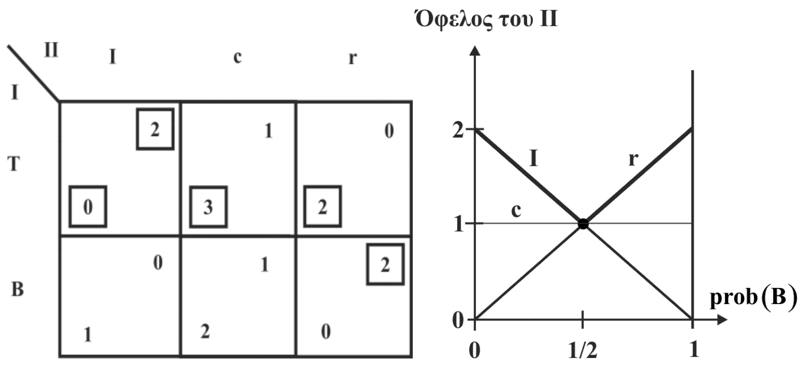
Με βάση αυτή την ανάλυση μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε το πώς θα παίξει ο παίκτης I. Εάν η εταιρία I πιστεύει ότι η πιθανότητα q να επιλέξει η εταιρία II τη στρατηγική F είναι $q \geq \frac{1}{2}$ τότε θα επιλέξει *O* και δεν θα μπει στην αγορά, οδηγώντας έτσι στην ισορροπία (*O,F*).

Οι επιπλοκές σε αυτό το παίγνιο προκύπτουν επειδή το παίγνιο είναι «εκφυλισμένο» σύμφωνα με τον ορισμό που ακολουθεί.

Ορισμός 2.I Ένα 2×2 παίγνιο ονομάζεται *εκφυλισμένο* αν κάποιος παίκτης έχει μία καθαρή τακτική με δύο καθαρές βέλτιστες απαντήσεις από τον άλλο παίκτη.

Ένα εκφυλισμένο παίγνιο είναι πολύπλοκο να αναλυθεί διότι ένας παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μία καθαρή τακτική έτσι ώστε ο άλλος παίκτης να μπορεί να κάνει μίξη μεταξύ των δύο βέλτιστων απαντήσεών του, αλλά οι πιθανότητες της μεικτής τακτικής δεν περιορίζονται από την εξίσωση στην οποία ο άλλος παίκτης πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ των τακτικών του. Αντίθετα από αυτή την εξίσωση, αρκεί να ικανοποιείται η ανισότητα που λέει ότι η καθαρή τακτική του πρώτου παίκτη είναι μία βέλτιστη απάντηση.

Η εκφυλιστικότητα συμβαίνει και σε μεγαλύτερα παίγνια και απαιτεί ένα γενικότερο ορισμό. Έστω το 2×3 παίγνιο στο σχήμα 2.3 Κάθε καθαρή τακτική έχει μία μοναδική βέλτιστη απάντηση, άρα ο όρος στον ορισμό του εκφυλισμένου παιγνίου δεν ισχύει. Το παίγνιο αυτό δεν έχει ισορροπία καθαρής τακτικής, οπότε αμφότεροι οι παίκτες πρέπει να χρησιμοποιήσουν μεικτές τακτικές. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της άνω περιβάλλουσας, σχεδιάζοντας το όφελος του παίκτη II συναρτήσει της πιθανότητας ο παίκτης I να παίξει *B*, όπως φαίνεται στα δεξιά του σχήματος 3.11.4. Οι γραμμές των προσδοκώμενων οφελών διασταυρώνονται σε ένα σημείο, και όλες οι τρεις καθαρές τακτικές του παίκτη II είναι βέλτιστες απαντήσεις όταν ο παίκτης I χρησιμοποιεί τη μεικτή τακτική (1/2, 1/2).



Σχήμα 2.6 Εκφυλισμένο 2×3 παίγνιο και η άνω περιβάλλουσα των προσδοκώμενων οφελών του παίκτη

Είναι εμφανές, ότι υπάρχει μόνο μία ισορροπία εάν και οι δύο παίκτες κάνουν μίξη. Αυτό απαιτεί τη μεικτή τακτική (1/2, 1/2) για τον παίκτη Ι. Ύστερα ο παίκτης Ι πρέπει να γίνει αδιάφορος, και προκειμένου να το καταφέρουμε αυτό, ο παίκτης ΙΙ μπορεί να κάνει μίξη μεταξύ κάποιων από τις τρεις βέλτιστες απαντήσεις *l*, *c*, και *r*. Τώρα έχουμε το ίδιο πρόβλημα που είχαμε νωρίτερα στο παίγνιο «threat», το οποίο είναι η υπερβολική ελευθερία: Οι τρεις πιθανότητες για τον παίκτη ΙΙ, που γράφονται $y_l, y_c,$ και y_r, πρέπει να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε $y_l + y_c + y_r = 1$, με αποτέλεσμα ο παίκτης Ι να είναι αδιάφορος μεταξύ των καθαρών τακτικών του *T* και *B*, που δίδει την εξίσωση $3y_c + 2y_r = y_l + 2y_c$.

Έχουμε λοιπόν, δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους και άγνωστη λύση. Ταξινομούμε όλους τους συντελεστές των πιθανοτήτων της εξίσωσης $3y_c + 2y_r = y_l + 2y_c$, η οποία περιγράφει την αδιαφορία των προσδοκώμενων οφελών του άλλου παίκτη, ώστε κάθε πιθανότητα να εμφανίζεται μόνο μία φορά και έτσι ο συντελεστής της να είναι θετικός, όπου εδώ δίδει σαν αποτέλεσμα την εξίσωση $y_c + 2y_r = y_l$.

Από τις τρεις πιθανότητες, κανονικά οι δύο εμφανίζονται στη μία πλευρά της εξίσωσης και μία στην άλλη πλευρά. Οι «ακραίες» λύσεις της εξίσωσης (corner solutions) με δύο πιθανότητες να είναι μηδέν, είναι είτε $y_c = 0$ ή $y_r = 0$. Στην προηγούμενη περίπτωση, παίρνουμε τη λύση (2/3, 0 1/3) για (y_l, y_c, y_r). Στην τελευταία περίπτωση παίρνουμε τη λύση (1/2, 1/2, 0). Γενικά, έχουμε $0 \le y_c \le 1/2$ που καθορίζει τις εναπομένουσες πιθανότητες ως

$$y_l = y_c + 2y_r = y_c + 2(1 - y_l - y_c) = 2 - 2y_l - y_c \text{ ή } y_l = 2/3 - y_c/3,$$

και $y_r = 1 - y_l - y_c = 1 - (2/3 - y_c/3) - y_c = 1/3 - 2y_c/3$.

Ορισμός 2.ΙΙ Εκφυλισμένο παίγνιο δύο παικτών. Ένα παίγνιο δύο παικτών ονομάζεται *εκφυλισμένο*, αν κάποιος παίκτης έχει μία μεικτή τακτική η οποία δίνει θετική πιθανότητα σε ακριβώς k καθαρές τακτικές έτσι ώστε ο άλλος παίκτης να έχει περισσότερες από k καθαρές βέλτιστες απαντήσεις για αυτή τη μεικτή τακτική.

Πρόταση 2.Ι Σε κάθε ισορροπία παιγνίου δύο παικτών που δεν είναι εκφυλισμένο, αμφότεροι οι παίκτες χρησιμοποιούν μεικτές στρατηγικές που συνδυάζουν ίσο πλήθος καθαρών τακτικών.

Σε ένα μη-εκφυλισμένο παίγνιο έχουμε ισορροπίες καθαρής στρατηγικής[7], ή ισορροπίες μεικτής στρατηγικής στις οποίες και οι δύο παίκτες κάνουν μίξη μεταξύ δύο τακτικών, ή ισορροπίες στις οποίες και οι δύο παίκτες κάνουν μίξη μεταξύ ακριβώς τριών τακτικών και τα λοιπά. Γενικά, και οι δύο παίκτες κάνουν μίξη μεταξύ k καθαρών τακτικών. Κάθε μία από αυτές τις τακτικές έχει μία πιθανότητα, και αυτές οι πιθανότητες υπόκεινται σε k εξισώσεις έτσι ώστε να κάνουν τον άλλο παίκτη αδιάφορο μεταξύ των καθαρών τακτικών του: Μία από αυτές τις εξισώσεις δηλώνει ότι οι πιθανότητες έχουν άθροισμα ένα, και οι υπόλοιπες $k-1$ εξισώσεις δηλώνουν την ισότητα μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης, της δεύτερης και της τρίτης, κτλ., μέχρι και της $(k-1)$-οστής και της k-οστής τακτικής του άλλου παίκτη.

Οι εξισώσεις αυτές έχουν μοναδικές λύσεις. Οι λύσεις αυτές πρέπει να ελεγχθούν ως προς την ιδιότητα ισορροπίας: Οι πιθανότητες που προκύπτουν πρέπει να είναι μη-αρνητικές, και οι αχρησιμοποίητες καθαρές τακτικές του άλλου παίκτη απαγορεύεται να έχουν υψηλότερο όφελος. Όπως έχουμε ήδη δείξει, όταν βρίσκουμε τις πιθανότητες της μεικτής τακτικής, εξισώνοντας αυτές με τα προσδοκώμενα οφέλη του άλλου παίκτη, παύουμε να έχουμε μοναδικές λύσεις όταν το παίγνιο είναι εκφυλισμένο.

Στο παίγνιο threat του σχήματος 2.5, υπάρχουν οι δύο ισορροπίες ((1, 0), (1, 0)) και ((1, 0), (1/2, 1/2)) που ουσιαστικά προκύπτουν «αγνοώντας» τον εκφυλισμό. Οι δύο αυτές ισορροπίες έχουν την ίδια τακτική (1, 0) του παίκτη Ι.

Πρόταση 2.ΙΙ Έστω ένα bimatrix παίγνιο (A,B) με X το σύνολο των μεικτών τακτικών του παίκτη Ι, και Y το σύνολο των μεικτών τακτικών του παίκτη ΙΙ.

[7] **Και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν ακριβώς μία καθαρή στρατηγική.**

Υποθέστε ότι τα (x, y) και (x', y) είναι ισορροπίες του παιγνίου, όπου τα $x, x' \in X$ και το $y \in Y$. Τότε, το $((1-p)x + px'), y)$ είναι επίσης μία ισορροπία του παιγνίου για κάθε $p \in [0,1]$.

Απόδειξη Έχουμε $\bar{x} = (1-p)x + px'$. Προφανώς, το $\bar{x} \in X$ διότι το $\bar{x}_i \geq 0$ για όλες τις τακτικές i του παίκτη Ι, και

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{m} ((1-p)x_i + px_i') = (1-p)\sum_{i=1}^{m} x_i + p\sum_{i=1}^{m} x_i' = (1-p) + p = 1.$$

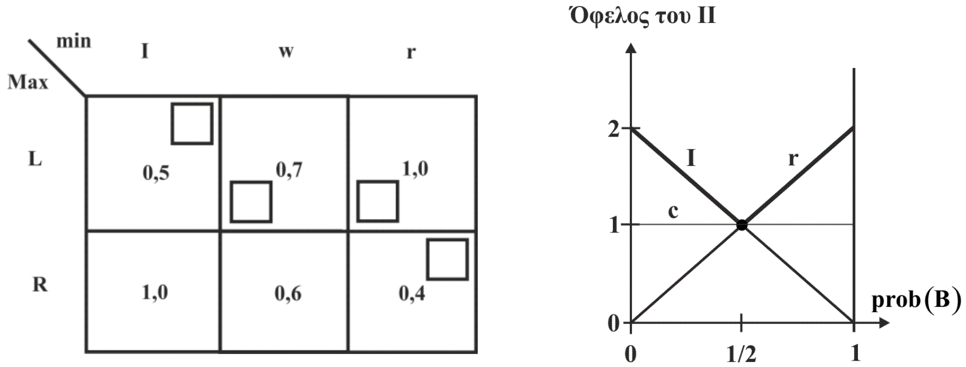
Το ζεύγος $(\bar{x}, y)$ είναι μία ισορροπία εάν το $\bar{x}$ είναι μία βέλτιστη απάντηση στο y και αντιστρόφως. Για κάθε μεικτή τακτική $\bar{x}$ του παίκτη Ι, έχουμε $xAy \geq \bar{x}Ay$, και $x'Ay \geq \bar{x}Ay$, επομένως $\bar{x}Ay = ((1-p)x + px')Ay = (1-p)xAy + px'Ay \geq (1-p)\bar{x}Ay + p\bar{x}Ay = \bar{x}Ay$ που δείχνει ότι το $\bar{x}$ είναι μία βέλτιστη απάντηση στο y. Δηλαδή, αυτές οι δύο ανισότητες ισχύουν διότι διατηρούνται υπό μορφή κυρτών συνδυασμών. Με ανάλογο τρόπο, το y είναι βέλτιστη απάντηση στα x και $\bar{x}$, δηλαδή, για κάθε $\bar{y} \in Y$ έχουμε $xBy \geq xB\bar{y}$ και $x'By \geq x'B\bar{y}$. Ξανά, με κυρτούς συνδυασμούς καταλήγουμε στη $x'By \geq x'B\bar{y}$.

Με το παράδειγμα του σχήματος 2.6 μπορούμε να επεξηγήσουμε την πρόταση 2.ΙΙ. Το παίγνιο αυτό έχει δύο ισορροπίες (x, y) και (x', y) όπου $x = (1/2, 1/2)$, $y = (1/2, 1/2, 0)$, και $y' = (2/3, 0, 1/3)$, άρα αυτή είναι η κατάσταση της πρότασης 3.11.4, με τη διαφορά ότι οι δύο ισορροπίες έχουν την ίδια μεικτή τακτική του παίκτη Ι αντί του παίκτη ΙΙ. Συνεπώς, για κάθε $\bar{y}$ που είναι κυρτός συνδυασμός των y και y' έχουμε μία ισορροπία Nash $(x, \bar{y})$. Οι ισορροπίες (x, y) και (x, y') είναι «ακραίες» υπό την έννοια ότι τα y και y' έχουν τις περισσότερες δυνατές μηδενικές πιθανότητες, που σημαίνει ότι τα y και y' είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος που αποτελείται από τις τακτικές ισορροπίας $\bar{y}$ (δηλαδή, η $(x, \bar{y})$ είναι μία ισορροπία), όπου $\bar{y} = (1-p)y + py'$.

2.8 Παράδειγμα παιγνίου μήτρας 2Χ3

Το χτύπημα πέναλτι στο ποδόσφαιρο είναι ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μεταξύ του εκτελεστή και του τερματοφύλακα. Για λόγους απλοποίησης, υποθέτουμε ότι οι πιθανές τακτικές του εκτελεστή του πέναλτι είναι οι L και R, που αντιστοιχούν σε χτύπημα στην αριστερή ή στη δεξιά γωνία του τέρματος, και οι πιθανές στρατηγικές *l* και *r* του τερματοφύλακα που σημαίνουν ότι εκτινάσσεται στην αριστερή ή στη δεξιά γωνία του τέρματος αντίστοιχα. Ο τερματοφύλακας έχει και άλλη μία στρατηγική, την *w* στην οποία περιμένει να δει προς τα που θα πάει η μπάλα ώστε να κινηθεί μετά. Στα αριστερά του σχήματος 2.7, δίνουμε ένα παράδειγμα των πιθανοτήτων που προκύπτουν για την περίπτωση που ο εκτελεστής βάλει γκολ. Οι τιμές των πιθανοτήτων αυτών, εξαρτώνται από τις επιλογές που θα κάνουν οι δύο παίκτες. Προφανώς, ο εκτελεστής (παίκτης Ι) προσπαθεί να μεγιστοποιήσει και ο τερματοφύλακας (παίκτης ΙΙ) να ελαχιστοποιήσει αυτή την πιθανότητα. Επίσης, αρκεί μόνο αυτό το όφελος-πιθανότητα του παίκτη Ι, για να καθορίσουμε όλο το παίγνιο. Οι δύο παίκτες ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος, συχνά καλούνται και «Max» και «min» αντίστοιχα.

Στην πραγματικότητα, θα περίμενε κανείς υψηλότερες πιθανότητες σκοραρίσματος όταν ο τερματοφύλακας επιλέγει *w*[8], αλλά οι αριθμοί που δίδονται μας οδηγούν σε μία πιο ενδιαφέρουσα ισορροπία.



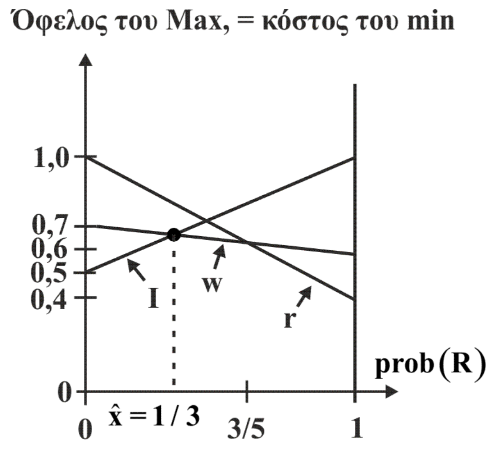
Σχήμα 2.7 Αριστερά το χτύπημα του πέναλτι ως παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με τις σκοραρίσματος ως οφέλη του εκτελεστή του πέναλτι, τα οποία ο τερματοφύλακας προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει. Δεξιά η κάτω περιβάλλουσα του κόστους των βέλτιστων απαντήσεων του τερματοφύλακα.

Στον πίνακα οφελών του σχήματος 2.7 είναι σημειωμένες οι καθαρές βέλτιστες τακτικές με ένθετα τετράγωνα. Τα τετράγωνα τα οποία είναι κάτω αριστερά είναι οι βέλτιστες καθαρές τακτικές του εκτελεστή και αυτά που είναι πάνω δεξιά είναι οι βέλτιστες καθαρές τακτικές του τερματοφύλακα. Οι βέλτιστες τακτικές, δείχνουν ότι το παίγνιο δεν έχει καμιά ισορροπία καθαρής τακτικής. Προφανώς, η βέλτιστη απάντηση του τερματοφύλακα σε ένα σουτ προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, είναι

[8] **Να μην κινηθεί και να παραμείνει στη μέση του τέρματος.**

το να κινηθεί προς τη σωστή γωνία, ενώ για τον εκτελεστή είναι το να σουτάρει στην αντίθετη γωνία από αυτή που θα κινηθεί ο τερματοφύλακας. Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε μεικτή ισορροπία. Η ενεργή τυχαία επιλογή είναι προφανώς βοηθητική και για τους δύο παίκτες. Η προσδοκώμενη πιθανότητα σκοραρίσματος που προκύπτει, είναι απλά μία πιθανότητα, άρα οι παίκτες είναι ουδέτεροι έναντι του κινδύνου όσον αφορά τα νούμερα του πίνακα του παιγνίου.

Πρώτα βρίσκουμε τις ισορροπίες του παιγνίου όπως θα κάναμε για ένα 2×3 παίγνιο, με τη διαφορά ότι εδώ χρησιμοποιούμε μόνο τα οφέλη του παίκτη I. Στο σχήμα 2.7 έχουμε τα προσδοκώμενα οφέλη του εκτελεστή συναρτήσει της πιθανότητας, ας πούμε *x*, για την επιλογή *R*, που εξαρτάται από τις απαντήσεις *l, w*, ή *r* του παίκτη II. Αυτά τα οφέλη εκτελεστή αποτελούν αντίστοιχα κόστος για τον τερματοφύλακα, άρα οι τιμές κόστους των βέλτιστων απαντήσεων του τερματοφύλακα δίδονται από το ελάχιστο των γραμμών αυτών, οι οποίες ορίζουν την κάτω περιβάλλουσα που φαίνεται με έντονα τονισμένα ευθύγραμμα τμήματα. Υπάρχουν δύο σημεία τομής στην κάτω περιβάλλουσα. Το ένα είναι το σημείο τομής των γραμμών *l* και *w* όταν $x=1/3$, και το άλλο το σημείο τομής των γραμμών *w* και *r* όταν $x=3/5$.



Σχήμα 2.8

Άρα η βέλτιστη απάντηση του παίκτη II στη μεικτή τακτική $(1-x,x)$ είναι η *l* για $0\le x\le1/3$, και η *w* για $1/3\le x\le3/5$, και η *r* για $3/5\le x\le1$. Μόνο για $x=1/3$ και για $x=3/5$ μπορεί ο τερματοφύλακας να κάνει μίξη, και μόνο στην πρώτη περίπτωση, όταν δηλαδή τα *l* και *w* είναι βέλτιστες απαντήσεις, μπορεί ο εκτελεστής με τη σειρά του να είναι αδιάφορος. Αυτό δίνει τη μοναδική μεικτή ισορροπία του παιγνίου, που είναι η $((2/3,1/3),(1/6,5/6,0))$. Οι προσδοκώμενες τιμές κόστους που προκύπτουν για τις τρεις στήλες *l, w, r* είναι 2/3, 2/3, 4/5, όπου πραγματικά ο τερματοφύλακας θέτει θετική πιθανότητα μόνο στις στήλες *l* και *w* με τις μικρότερες τιμές κόστους. Τα προσδοκώμενα οφέλη και των δύο γραμμών είναι 2/3.

Εξετάζοντας την κάτω περιβάλλουσα των προσδοκώμενων οφελών του παίκτη Ι, παρατηρούμε ότι αντιπροσωπεύει το μικρότερο πιθανό προσδοκώμενο όφελος του εκτελεστή που προκύπτει από τις πιθανές απαντήσεις του τερματοφύλακα. Εάν ο παίκτης Ι θέλει να «εξασφαλίσει» το μέγιστο από αυτό το ελάχιστο πιθανό όφελος, πρέπει να μεγιστοποιήσει πάνω στη συνάρτηση της κάτω περιβάλλουσας το οποίο προκύπτει για $\hat{x}=1/3$ όπως φαίνεται από τη διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 2.8.

Ολοκληρώνοντας το παράδειγμα του παιγνίου μεταξύ εκτελεστή πέναλτι και τερματοφύλακα, θα αναφερθούμε σε μία μελέτη που έγινε το 2002 σχετικά με την εκτέλεση των πέναλτι. [Pal. Huerta, 2002]. Με βάση το παίγνιο ο εκτελεστής έχει δύο επιλογές, να σημαδέψει αριστερά ή δεξιά και ο τερματοφύλακας να πέσει δεξιά ή αριστερά. Με βάση την ανάλυση εμπειρικών δεδομένων από τα πρωταθλήματα της Ισπανίας και της Αγγλίας προέκυψε ο πίνακας του σχήματος 2.9:

Εκτ/στης Τερμ/κας	Αριστερά	Δεξιά
Αριστερά	0,58	0,95
Δεξιά	0,93	0,70

Σχήμα 2.9 Παίγνιο εκτέλεσης πέναλτι με παρατηρηθέντα δεδομένα

Ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός γιατί οι ποδοσφαιριστές συνήθως δεν χρησιμοποιούν εξίσου αποτελεσματικά και τα δύο πόδια τους. Το παίγνιο δεν έχει ισορροπία με καθαρή στρατηγική και γι' αυτό υπολογίζουμε την μεικτή στρατηγική.

Αν q είναι η πιθανότητα να επιλέξει την αριστερή πλευρά ο τερματοφύλακας, τότε η πιθανότητα να επιλέξει τη δεξιά πλευρά είναι $1\text{-}q$. Προκειμένου ο ποδοσφαιριστής να είναι αδιάφορος για το πού θα σημαδέψει θα ισχύει:

$$(0{,}58)\, q + (0{,}95)\,(1 - q) = (0{,}93)\, q + (0{,}7)\,(1 - q)$$

Λύνοντας την εξίσωση καταλήγουμε στο ότι q=0,42. Αντίστοιχα, η πιθανότητα p ο εκτελεστής να επιλέξει την αριστερή πλευρά είναι p=0,39. Συνεπώς, η ισορροπία στο παίνγιο επέρχεται με το συνδυασμό μεικτών στρατηγικών (0.39, 0.61) για τον εκτελεστή και (0.42, 0.58) για τον τερματοφύλακα.

Με βάση τα εμπειρικά δεδομένα, οι τερματοφύλακες επιλέγουν την αριστερή γωνία με συχνότητα 0,42 και οι εκτελεστές την αριστερή γωνία με συχνότητα 0,4. Δηλαδή, οι συχνότητες των επιλογών των εκτελεστών και των τερματοφυλάκων πλησιάζουν πολύ στις θεωρητικά υπολογισμένες τιμές των μικτών στρατηγικών της ισορροπίας Nash.

2.9 Παίγνια εναντίον της φύσης

Ένα παίγνιο εναντίον της φύσης είναι ένα παίγνιο με έναν μονάχα παίκτη, ο οποίος και σχηματίζει τον πίνακα κερδών. Ο παίκτης θεωρείται λογικός και επιθυμεί να αποκομίσει το μέγιστο δυνατό κέρδος, ενώ η φύση (δηλαδή το εξωτερικό περιβάλλον) είναι εντελώς αδιάφορη για την έκβαση. Στα παίγνια αυτά οι υποθέσεις και οι εκτιμήσεις του παίκτη για τον αντίπαλο του (την φύση) αντικαθιστούν τους κανόνες. Ο παίκτης λειτουργεί σε συνθήκες αβεβαιότητας, δηλαδή δεν έχει ντετερμινιστικές πληροφορίες για τα διάφορα αποτελέσματα ή τις καταστάσεις της φύσης. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι οι συνθήκες αβεβαιότητας διαφέρουν από τις συνθήκες ρίσκου, όπου ο παίκτης έχει κάποια γνώση (ποσοτικοποιημένη) σχετικά με την πιθανότητα εμφάνισης κάθε έκβασης. Όπως είναι προφανές, η έκβαση του παιγνίου εξαρτάται από την στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης καθώς και την «επιλογή» που κάνει η φύση.

- Τα δύο σημαντικότερα σημεία όσον αφορά τα παίγνια εναντίον της φύσης είναι:

Α) Η εύρεση αξιόπιστου τρόπου εκτιμήσεως της κατάστασης.

Β) Η εύρεση ικανού κριτηρίου λήψης απόφασης για την στρατηγική που πρέπει να ακολουθηθεί από τον παίκτη. Τα πιο γνωστά κριτήρια αποφάσεων παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

Κριτήρια αποφάσεων

Τα τέσσερα πιο διαδεδομένα κριτήρια λήψης απόφασης είναι:

1. Κριτήριο Laplace
2. Κριτήριο Wald

3. Κριτήριο max-max (η maximax)
4. Κριτήριο Hurwicz

Η διαφοροποίηση τους έγκειται, ουσιαστικά, στην εκτίμηση που κάνει ο παίκτης για το πια στρατηγική θα «επιλέξει» η φύση.

2.9.1 Κριτήριο Laplace (ή κριτήριο της ίσης πιθανότητας)

Βάσει αυτού του κριτηρίου, εάν οι πιθανότητες των καταστάσεων δεν είναι γνωστές στον παίκτη, τότε αυτές θεωρούνται ισοπίθανες καθώς δεν υπάρχει λόγος να υποθέσει κανείς ότι κάποια κατάσταση είναι πιθανότερο να συμβεί σε σχέση με κάποια άλλη.

Έτσι, αν n οι δυνατές καταστάσεις τότε η πιθανότητα εμφανίσεως κάποιας εξ αυτών είναι 1/n και η μαθηματική ελπίδα για τον i τρόπο απόφασης είναι $\frac{a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}}{n}$ και κατά συνέπεια ο παίκτης πρέπει να επιλέξει την απόφαση με την μέγιστη μαθηματική ελπίδα, δηλαδή:

$$max_i \frac{a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}}{n}$$

Για παράδειγμα αν δίνεται η μήτρα κερδών:

1	5	7
3	2	6
5	4	3

Τότε:

1	5	7	13/3
3	2	6	11/3
5	4	3	12/3

και ο παίκτης επιλέγει την πρώτη επιλογή με max = 13/3.

Κώδικας υλοποίησης του κριτηρίου σε C.

```
void laplaceCriterion(int rows, int columns)
{
    cout<<endl<<endl<<"Laplace Criterion"<<endl<<endl;

    float sum = 0, max, temp, temp2;
    int choice = 0;
    for(int j=0; j<columns; ++j)
    {
            cout<<"?- A[0]["<<j<<"] = ";
            cin>>temp;
            sum += temp;
            cout<<endl;
    }
```

```
    max = sum/columns;
    sum = 0;

    for(int i=1; i<rows; ++i)
    {
        for(int j=0; j<columns; ++j)
        {
            cout<<"?- A["<<i<<"]["<<j<<"] = ";
            cin>>temp;
            sum += temp;
            cout<<endl;
        }

        temp2 = sum/columns;

        if(temp2>sum/columns)
        {
            max = temp2;
            choice = i;
        }
        sum = 0;
    }

    cout<<"Player chooses the "<<choice+1<<" choice "<<endl
        <<"max = "<<max<<endl;
}
```

2.9.2 Κριτήριο Wald

Το κριτήριο αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν «απαισιόδοξο» επί της ουσίας πρόκειται για το maxmin του παίκτη Α. Είναι ιδανικό όταν επικρατούν συνθήκες μεγάλης αβεβαιότητας γιατί υποθέτει ότι η κατάσταση της φύσης θα είναι η χειρότερη δυνατή.

Για παράδειγμα αν δίνεται η μήτρα κερδών:

1	**5**	**7**
3	**2**	**6**
5	**4**	**3**

Τότε:

1	**5**	**7**	**1**
3	**2**	**6**	**2**
5	**4**	**3**	**3**

και ο παίκτης επιλέγει την τρίτη επιλογή με maxmin = 3.

Κώδικας σε C

```
cout<<endl<<endl<<"Wald Criterion"<<endl<<endl;
```

```
float max, temp, rowMin;
int choice = 0;

for(int i=0; i<rows; ++i)
{
        cout<<"?- A["<<i<<"][0] = ";
        cin>>rowMin;
        cout<<endl;

        for(int j=1; j<columns; ++j)
        {
                cout<<"?- A["<<i<<"]["<<j<<"] = ";
                cin>>temp;

                if(rowMin>temp)
                        rowMin = temp;

                cout<<endl;
        }

        //cout<<"Line "<<i<<" rowMin = "<<rowMin<<endl;

        if(rowMin>max)
        {
                max = rowMin;
                choice = i;
        }
}

cout<<"Player chooses the "<<choice+1<<" choice "<<endl
   <<"maxmin = "<<max<<endl;
```

2.9.3 Κριτήριο max-max

Είναι το αντίστροφο του κριτηρίου Wald και μπορεί να χαρακτηριστεί σαν «αισιόδοξο» κριτήριο. Εδώ ο παίκτης υποθέτει ότι σε κάθε περίπτωση η κατάσταση της φύσης θα είναι η καλύτερη δυνατή.

Για παράδειγμα αν δίνεται η μήτρα κερδών:

1	**5**	**7**
3	**2**	**6**
5	**4**	**3**

Τότε:

1	**5**	**7**	**7**
3	**2**	**6**	**6**
5	**4**	**3**	**5**

και ο παίκτης επιλέγει την πρώτη επιλογή με maxmax= 7.

Κώδικας σε C++

```
cout<<endl<<endl<<"maxmax Criterion"<<endl<<endl;

    float max, temp, rowMax;
    int choice = 0;

    for(int i=0; i<rows; ++i)
    {
            cout<<"?- A["<<i<<"][0] = ";
            cin>>rowMax;
            cout<<endl;

            for(int j=1; j<columns; ++j)
            {
                    cout<<"?- A["<<i<<"]["<<j<<"] = ";
                    cin>>temp;

                    if(rowMax<temp)
                            rowMax = temp;

                    cout<<endl;
            }

            //cout<<"Line "<<i<<" rowMax = "<<rowMax<<endl;

            if(rowMax>max)
            {
                    max = rowMax;
                    choice = i;
            }

    }

    cout<<"Player chooses the "<<choice+1<<" choice "<<endl
       <<"maxmax = "<<max<<endl;
```

2.9.4 Κριτήριο Hurwicz

Το κριτήριο αυτό είναι ενδιαφέρον γιατί εισάγει την έννοια του «δείκτη αισιοδοξίας», μιας πραγματικής τιμής ανάμεσα στο 0 και το 1. Έτσι εκτός από τις δυνατές καταστάσεις της φύσης ο παίκτης μπορεί να προσαρμόσει το προσδοκώμενο αποτέλεσμα βάσει των εκτιμήσεων του. Αυτή είναι σημαντική διαφορά σε σχέση με τα τρία προηγούμενα κριτήρια, όπου το πρώτο (κρ. Laplace) είναι εντελώς ουδέτερο, το δεύτερο (κρ. Wald) είναι απαισιόδοξο, καθώς υποθέτει ότι πάντα θα συμβαίνει το χειρότερο και το τρίτο (κρ. maxmax) υποθέτει ότι πάντα θα συμβαίνει το καλύτερο.

Αν ξ ο δείκτης αισιοδοξίας, τότε το κέρδος του παίκτη εάν ακολουθήσει την i στρατηγική θα είναι:

$$u_i = \xi A_\iota + (1-\xi)a_i$$

Όπου $A_\iota = \max\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}$

και $\alpha_\iota = \max\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}$

Για παράδειγμα αν δίνεται η μήτρα κερδών:

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{matrix}$$

Τότε:

(έστω ξ = 0,5)

$u_1 = 0{,}50 \cdot 7 - 0{,}50 \cdot 1 = 3$

$u_2 = 0{,}50 \cdot 6 - 0{,}50 \cdot 2 = 2$

$u_3 = 0{,}50 \cdot 5 - 0{,}50 \cdot 3 = 1$

και ο παίκτης διαλέγει την πρώτη επιλογή με maxu = 3.

Κώδικας σε C++

```
void hurwiczCriterion(int rows, int columns)
{
    cout<<endl<<endl<<"Hurwicz Criterion"<<endl<<endl;

    float sum = 0, temp, rowMax, rowMin, optimism, rowu, maxu;
    int choice = 0;

    cout<<endl;

    while((cout<<"Set optimism [0, 1]: ")&&(!(cin>>optimism)||(optimism<0 ||
optimism>1)))
    {
            cout<<"?-Invalid input!"<<endl;
            cin.clear();
            cin.ignore(numeric_limits<streamsize>::max(),'\n');
    }

    cout<<endl<<"?- A[0][0] = ";
    cin>>rowMax;
    rowMin = rowMax;
    cout<<endl;

    for(int j=1; j<columns; ++j)
    {
            cout<<"?- A[0]["<<j<<"] = ";
            cin>>temp;

      if(rowMin>temp)
```

```
                    rowMin = temp;

            if(rowMax<temp)
                    rowMax = temp;

                    cout<<endl;
    }

    maxu = optimism*rowMax + (1 - optimism)*rowMin;

    for(int i=1; i<rows; ++i)
    {
            cout<<"?- A["<<i<<"][0] = ";
            cin>>rowMax;
            rowMin = rowMax;
            cout<<endl;

            for(int j=1; j<columns; ++j)
            {
                    cout<<"?- A["<<i<<"]["<<j<<"] = ";
                    cin>>temp;

              if(rowMin>temp)
                            rowMin = temp;

                    if(rowMax<temp)
                            rowMax = temp;

                    cout<<endl;
            }

            //cout<<"Line "<<i<<" rowMin = "<<rowMin<<endl;
            //cout<<"Line "<<i<<" rowMax = "<<rowMax<<endl;

            rowu = optimism*(rowMax + rowMin);
            //cout<<"Line "<<i<<" u = "<<rowu<<endl;

            if(rowu>maxu)
            {
                    maxu = rowu;
                    choice = i;
            }
    }

    cout<<"Player chooses the "<<choice+1<<" choice "<<endl
      <<"maxu = "<<maxu<<endl;
}
```

2.10 Παίγνια n προσώπων μη μηδενικού αθροίσματος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε σε παίγνια n προσώπων και τα προσεγγίσαμε στη λογική των συνασπισμών μεταξύ των παικτών. Επίσης, ορίσαμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του παιγνίου απλοποιώντας το παίγνιο πολλών προσώπων σε παίγνιο δύο προσώπων και υπολογίζοντας την maximin τιμή του. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα παίγνιου n προσώπων μη μηδενικού αθροίσματος το οποίο περιγράφει μια ψηφοφορία (Thomas, 1986).

Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα 5 κρατών σε ένα διεθνή οργανισμό έχουν να αποφασίσουν επί ενός ζητήματος. Από τα 5 κράτη τα δύο πρώτα έχουν δικαίωμα αρνησικυρίας (veto) και μπορούν να μπλοκάρουν μια απόφαση. Τα άλλα τρία κράτη όχι. Για να παρθεί μια απόφαση θα πρέπει να έχει τρεις θετικές ψήφους και να μην έχει ασκηθεί veto από τα 2 κράτη που έχουν τη δυνατότητα να το πράξουν. Η χαρακτηριστική συνάρτηση παίρνει 2 τιμές. Αν το ψήφισμα που υποστηρίζει ο συνασπισμός περάσει, η χαρακτηριστική συνάρτηση παίρνει την τιμή 1, διαφορετικά 0. Συνεπώς:

υ(1,2,3) = υ(1,2,4) = υ(1,2,5) = (1,2,3,4) = υ(1,2,3,5) = υ(1,2,4,5) = υ(1,2,3,4,5)= 1

υ(T)=0, για κάθε άλλο σύνολο $T \subset N$.

Ο τρόπος που τα κέρδη μοιράζονται μεταξύ των μελών μιας συμμαχίας είναι ο επιμερισμός. Ο επιμερισμός που αντιστοιχεί σε συμμαχία όλων των παικτών πρέπει να δίνει όφελος ίσο με υ(N), δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} x_i = \upsilon(\mathrm{N})$. Επίσης, $x_i \geq \upsilon(i)$, δηλαδή το όφελος που αποκομίζει ο παίκτης i από τη συμμετοχή του στο συνασπισμό T πρέπει να είναι τουλάχιστον το ίδιο με εκείνο που θα αποκτούσε αν δεν συμμετείχε στο συνασπισμό.

Στο παράδειγμά μας το σύνολο των δυνατών επιμερισμών είναι το:

$E(v)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): x_i \geq 0,\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\ i=1,\ldots,5\}$

Με βάση τον ορισμό για την κυριαρχία επιμερισμών, ορίζουμε τον πυρήνα του παιγνίου ως το σύνολο των επιμερισμών που δεν κυριαρχούνται σε κανένα συνασπισμό. Ισοδύναμα, ο πυρήνας του παιγνίου είναι το σύνολο των εμπιμερισμών x που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \upsilon(T), \text{για κάθε}\ T \subset N$$

Επιπρόσθετα, για κάθε επιμερισμό στον πυρήνα (όπως και για κάθε άλλο) ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \upsilon(N)$$

Ο πυρήνας ενός παιγνίου n προσώπων μπορεί να είναι κενός. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι ο πυρήνας παιγνίου σταθερού αθροίσματος – άρα και των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος – είναι το κενό σύνολο. Αυτός είναι ο λόγος που στην προηγούμενη αναφορά μας στα παίγνια n προσώπων μηδενικού αθροίσματος δεν ασχοληθήκαμε με τον ορισμό του πυρήνα και ασχοληθήκαμε απευθείας με την έννοια του σταθερού συνόλου που περιέχει τους «βέλτιστους» επιμερισμούς, δηλαδή εκείνους που κυριαρχούν έναντι των υπολοίπων που είναι εκτός του συνόλου.

Επανερχόμενοι στο παράδειγμα του παιγνίου της ψηφοφορίας των πέντε κρατών, θα υπολογίσουμε τον πυρήνα του παιγνίου.

Από τις τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης του παιγνίου για τους διάφορους συνδυασμούς συνασπισμών και τις σχέσεις (3.10) και (3.11) προκύπτουν οι εξής ανισο-ισότητες: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$, $x_1+x_2+x_3 \geq 1$, $x_1+x_2+x_4 \geq 1$ $x_1+x_2+x_5 \geq 1$ ενώ ισχύει $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι ο πυρήνας είναι το σύνολο των επιμερισμών: $\{(x,1\text{-}x,0,0,0);\ 0 \leq x \leq 1\}$

Το ενδιαφέρον στην περιγραφή του πυρήνα είναι ότι όλο το όφελος, δηλαδή όλη η δύναμη στην ψηφοφορία μοιράζονται τα δύο κράτη που έχουν τη δυνατότητα veto ενώ τα υπόλοιπα κράτη δεν έχουν καμία επιρροή. Συνεπώς, η ψηφοφορία είναι ουσιαστικά μια διαπραγμάτευση μεταξύ των δύο κρατών που έχουν veto. Ισχύει, λοιπόν η εξής πρόταση [*Winter, 1996*]: Σε κάθε ισορροπία οι παίκτες που δεν έχουν βέτο λαμβάνουν ωφέλεια 0 και η ωφέλεια διανέμεται αποκλειστικά μεταξύ των παικτών που έχουν βέτο και οι οποίοι βρίσκονται (εκ των πραγμάτων) στον ίδιο συνασπισμό.

Αυτή η λεόντειος διανομή των κερδών (δηλαδή της επιρροής στην ψηφοφορία) φαίνεται εκ πρώτης όψεως ακατανόητη, καθώς για να περάσει οποιαδήποτε απόφαση χρειάζονται τρεις ψήφοι, ενώ τα κράτη που έχουν δυνατότητα veto είναι δύο.

Προκειμένου να το αναλύσουμε, ας υποθέσουμε ότι αποφασίζεται πως στο εξής οι ψηφοφορίες θα γίνονται με βάση ένα ποσοστό ψήφων που έχει η κάθε χώρα και δεν θα υπάρχει η δυνατότητα veto. Όμως η κατανομή των ψήφων θα γίνει με βάση το υπάρχον σύστημα λήψης απόφασης στο οποίο οι δύο χώρες έχουν δικαίωμα veto.

Ας υποθέσουμε ότι στην αρχή οι χώρες 1 και 2 συμφωνούν με τη χώρα 3 για να μοιράσουν τις ψήφους σε ποσοστό 1/3 η κάθεμία, ενώ οι υπόλοιπες χώρες παίρνουν 0 ψήφους. Αυτή είναι μια λογική συμφωνία για τη χώρα 3 την οποία θα δεχτεί, άλλωστε χωρίς τη συμμετοχή των 1 και 2 δεν μπορεί να προκύψει συμφωνία. Στη συνέχεια, οι χώρες 1 και 2 έχοντας πλέον την πλειοψηφία, πλησιάζουν τη χώρα 4 και της προτείνουν να της δώσουν, το 10% των ψήφων και αυτές να μοιραστούν το υπόλοιπο 90%. Η χώρα 4 θα δεχτεί καθώς σε αυτή τη φάση δεν έχει καμία ψήφο, και έτσι θα περάσει αυτή η κατανομή (ακόμη ακολουθείται το σύστημα που χρειάζονται τρεις ψήφοι για να περάσει μία απόφαση). Στη συνέχεια οι δύο χώρες πλησιάζουν τη χώρα 5 και της προτείνουν να πάρει το 5% των ψήφων, η οποία το δέχεται καθώς έτσι βελτιώνει τη θέση της σε σχέση με την τωρινή της κατάσταση.

Καθώς οι γύροι των διαπραγματεύσεων επαναλαμβάνονται, σε κάθε γύρο τα κράτη 1 και 2 αυξάνουν το ποσοστό των αθροιστικών του ψήφων, το οποίο τείνει στο 100%, δηλαδή στη μονάδα όπως προβλέπεται από τους επιμερισμούς του πυρήνα.

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση γνωμών – Σύνθεση συλλογικής γνώμης

3.1 Μεθοδολογία ανάλυσης γνωμών κατά Condorcet

Σύμφωνα με την μέθοδο του Condorcet: όταν, για παράδειγμα, έχουμε τρία κόμματα και θέλουμε να δούμε πιο κόμμα απ' αυτά τα τρία θα κερδίσει τις εκλογές τότε συγκρίνουμε ανά δύο όλα τα κόμματα και:

Φτιάχνουμε ένα πίνακα στον οποίο έχουμε τρεις στήλες. Στην πρώτη στήλη τοποθετούμε όλες τις διαφορετικές γνώμες των ψηφοφόρων (π.χ. το κόμμα α θα προηγηθεί του β, κ.λπ.) συγκρίνοντας ανά δύο όλα τα κόμματα, ενώ στη δεύτερη και τρίτη στήλη αντίστοιχα τοποθετούμε τον αριθμό των ατόμων που συμφωνούν και που διαφωνούν με την κάθε γνώμη.

Διαλέγουμε τις πιο ισχυρές γνώμες, δηλαδή τις γνώμες αυτές που υποστηρίζουν τα περισσότερα άτομα και συγκρίνοντας τελικά όλες τις γνώμες μεταξύ τους καταλήγουμε σε μία τελική κατάταξη, η οποία μας δείχνει την τελική κατάταξη των κομμάτων σύμφωνα με τις προτιμήσεις των ψηφοφόρων.

Την τελική κατάταξη των κομμάτων ο Condorcet την ονομάζει <u>*Οριστική Σειρά.*</u> Την ομάδα των ατόμων που προτίμησε τη σειρά αυτή την ονόμασε <u>*Αποφασιστική Ομάδα*</u> και κρίνει το τελικό αποτέλεσμα.

Με βάση τα παραπάνω, για την σύνθεση της συλλογικής γνώμης ακολουθούμε τον κανόνα της πλειοψηφίας, με βάση τον οποίο όταν μια γνώμη (μια επιλογή, ένας υποψήφιος) είναι προτιμόμενος έναντι κάθε άλλου υποψηφίου, τότε αυτή καθίσταται και η συλλογική γνώμη. Αυτή όμως η μέθοδος, αν και ορθολογική, μπορεί να οδηγήσει στην εξής «παράδοξη» κατάσταση. Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα τριών ατόμων – 1,2,3 και τρεις εναλλακτικές επιλογές X,Y,Z.

Το άτομο 1 έχει τις προτιμήσεις: $X \succ_1 Y \succ_i Z$

Το άτομο 2 έχει τις προτιμήσεις: $Y \succ_2 Z \succ_2 X$

Το άτομο 3 έχει τις προτιμήσεις: $Z \succ_3 X \succ_3 Y$

Με βάση την αρχή της πλειοψηφίας όταν σχηματίζουμε τη συλλογική γνώμη έχουμε: $X \succ Y$ αφού η επιλογή X προτιμάται από 2 υποψήφιους. Παρόμοια $Y \succ Z$. Με βάση τη μεταβατική ιδιότητα θα περιμέναμε ότι $X \succ Z$, όμως, με βαση τον κανόνα της πλειοψηφίας ισχύει ότι $Z \succ X$. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να οριστεί συλλογική γνώμη των εκλογέων και η εκλογή επαναλαμβάνεται.

Το φαινόμενο αυτό μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Condorcet (1785) και γι' αυτό ονομάζεται *παράδοξο του Condorcet*.

Το παράδοξο του Condorcet προκύπτει από τον τρόπο που έχουν γίνει οι επιλογές από τους εκλογείς. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό με το εξής παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι οι επιλογές των ατόμων 1,2,3 αντιστοιχούν σε επιλογές κομμάτων που βρίσκονται τοποθετημένα στο πολιτικό φάσμα ως εξής: Το κόμμα Χ είναι στα δεξιά του φάσματος, το κόμμα Υ στο κέντρο, και το κόμμα Ζ στα αριστερά. Οι 1 και 2 έχουν επιλέξει με τρόπο εύκολα εξηγήσιμο, όμως το άτομο 3 έχει επιλέξει πρώτα το αριστερό κόμμα, μετά το δεξιό κόμμα και τέλος το κεντρώο κόμμα, κάτι «μη αναμενόμενο» με την τοποθέτηση των κομμάτων στο πολιτικό φάσμα.

Ο συνήθης τρόπος κατάταξης των κομμάτων από τους εκλογείς είναι να προτιμούν μια θέση στο πολιτικό φάσμα (π.χ. αριστερά), και καθώς απομακρύνονται οι επιλογές από αυτή τη θέση να μειώνουν αντίστοιχα και τη θέση κατάταξής τους. Δηλαδή, αναμένουμε *οι επιλογές «πέφτουν» μονότονα στη σειρά κατάταξης* καθώς απομακρυνόμαστε από την επιλογή – κορυφή στις προτιμήσεις τους. Με βάση αυτή την παρατήρηση θα προχωρήσουμε αργότερα στην περαιτέρω ανάλυση του «παράδοξου Condorcet».[9]

3.2 Τα σχήματα των ίσων αποστάσεων

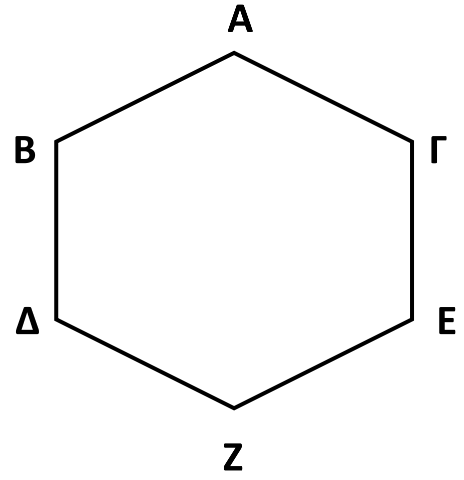
Τα σχήματα ίσων αποστάσεων, τα οποία μας βοηθούν να εκφράσουμε σχηματικά όλες τις διαφορετικές n-άδες στοιχείων που αποτελούν μία γνώμη και που εκφράζονται από κάποια άτομα κάθε φορά είναι διαφόρων ειδών και μπορούν να παρασταθούν είτε στο επίπεδο είτε στο χώρο.

Σ' αυτή την εισαγωγή των σχημάτων ίσων αποστάσεων δεν στοχεύουμε στο να αναφέρουμε και να παραστήσουμε όλα τα δυνατά σχηματιζόμενα σχήματα, αλλά σκοπός μας είναι να αναφέρουμε και να αναλύσουμε ορισμένα τέτοια σχήματα.

Αρχικά αν έχουμε τρεις επιλογές που σχηματίζουν ως γνωστόν έξι (δηλαδή 3! τριάδες) γνώμες, οι οποίες τριάδες (ή γνώμες) για παράδειγμα έστω ότι είναι οι διαφορετικοί τρόποι που έχουν κατατάξει κάποια άτομα τρεις εξέχουσες προσωπικότητες. Τότε σχηματικά μπορούμε να δούμε τις διαφορές, δηλαδή τις ασυμφωνίες μεταξύ των απόψεων (δηλαδή των τριάδων) των διαφόρων ατόμων με τα ακόλουθα σχήματα:

[9] Ο Arrow απέδειξε ότι δεν υπάρχει σύστημα ψηφοφορίας, με τουλάχιστον τρεις υποψήφιους, που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τα χαρακτηριστικά της καθολικότητας, της μεταβατικότητας, της ομοφωνίας, της ανεξαρτησίας από άλλες υποψηφιότητες και της μη δικτατορικής επιβολής γνώμης.

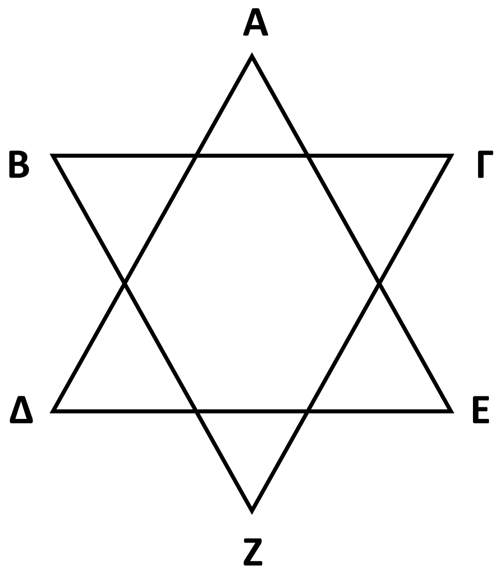
1. Αν θέλουμε να δούμε μεταξύ ποιών τριάδων (δηλαδή ποιών γνωμών) υπάρχει μία διαφορά τότε κάνουμε το εξής σχήμα:



όπου Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ είναι οι 6 γνώμες των ατόμων, ενώ μεταξύ των γνωμών ισχύουν:

$$
\begin{array}{lcl}
A \rightarrow B & , & \Gamma \rightarrow E \\
A \rightarrow \Gamma & , & \Delta \rightarrow Z \\
B \rightarrow \Delta & , & E \rightarrow Z
\end{array}
$$

2. Αν θέλουμε να δούμε μεταξύ ποιών τριάδων (δηλαδή ποιών γνωμών) υπάρχουν δύο διαφορές (ή διαφωνίες) τότε κάνουμε το εξής σχήμα:

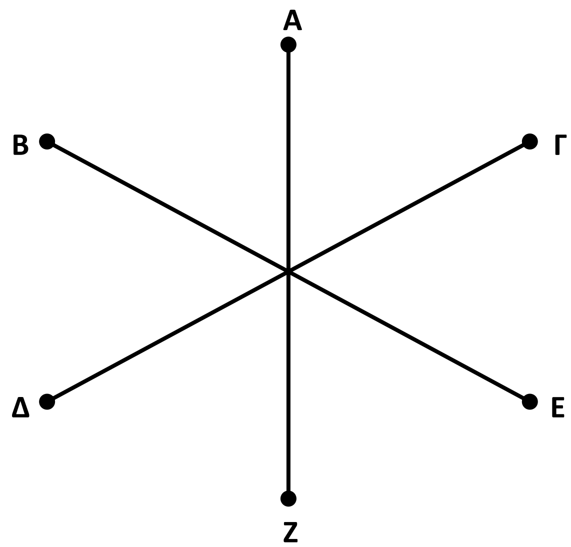


όπου εδώ έχουμε ότι μεταξύ των γνωμών

$$
\begin{array}{ll}
A \rightarrow \Delta & B \rightarrow Z \\
B \rightarrow \Gamma & \Delta \rightarrow E \\
A \rightarrow E & \Gamma \rightarrow Z
\end{array}
$$

υπάρχουν δύο διαφορές (διαφωνίες).

3. Αν θέλουμε να δούμε μεταξύ ποιών τριάδων υπάρχουν <u>τρεις διαφορές</u> τότε κάνουμε το εξής σχήμα:



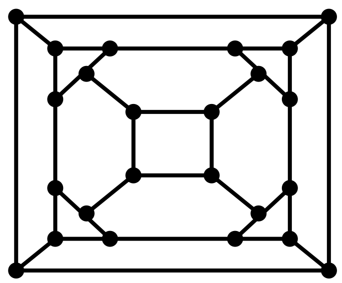
όπου έχουμε ότι μεταξύ των γνωμών

$$\mathrm{A} \to \mathrm{Z} \quad , \quad \mathrm{B} \to \mathrm{E} \quad , \quad \Gamma \to \Delta$$

υπάρχουν τρεις διαφορές.

Σε περίπτωση τώρα που έχουμε 4 επιλογές τότε όλες οι διαφορετικές απόψεις (γνώμες) που μπορούν να σχηματιστούν από κάποια άτομα είναι $4! = 24$ γνώμες.

Εδώ το σχήμα που θα σχηματιστεί θα είναι βέβαια πολύ πιο περίπλοκο αφού θα περιέχει 24 σημεία (απόψεις) και θα έχει περίπου την εξής μορφή:



Όπου όπως παρατηρούμε στο προηγούμενο σχήμα σχηματίζονται στο εσωτερικό του 6 τετράπλευρα και 8 εξάπλευρα.

Ομοίως, αν υπάρχουν πέντε (ή και περισσότερες) επιλογές μπορούν να σχηματιστούν $5! = 120$ (ή και περισσότερες) γνώμες (δηλαδή σημεία)

3.3 Η μέθοδος του Borda

Η μέθοδος Borda ανήκει σε μια κατηγορία συστημάτων σύνθεσης συλλογικής γνώμης στα οποία οι εναλλακτικές επιλογές κατατάσσονται από τους συμμετέχοντες σε σειρά κατάταξης (ranking). Συνήθως, όταν υπάρχουν n επιλογές διαθέσιμες στην πρώτη επιλογή του ψηφοφόρου δίνεται βαρύτητα n-1 στη δεύτερη n-2 και στην τελευταία βαρύτητα 0. Αν ένας ψηφοφόρος έχει επιλέξει λιγότερες από n επιλογές, οι υπόλοιπες λαμβάνουν βαρύτητα 0. Η βαρύτητα της κάθε επιλογής εξαρτάται από τη θέση της στον πίνακα κατάταξης του ψηφοφόρου, γι΄αυτό τα συστήματα αυτά ονομάζονται συστήματα ψηφοφορίας «θέσης» (positional).

Για παράδειγμα, σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο όταν έχουμε ψηφοφορία μεταξύ τριών κομμάτων, για να βρούμε ποιο κόμμα θα κερδίσει τις εκλογές κάνουμε τα εξής βήματα:

1.Βρίσκουμε τη θέση που έχει το κάθε κόμμα στη γνώμη που έχει σχηματίσει για την τελική κατάταξη των κομμάτων ο κάθε ψηφοφόρος.

2.Γράφουμε σε κάθε πίνακα με δύο στήλες, για κάθε κόμμα ξεχωριστά τον αριθμό των ψηφοφόρων που το επέλεξαν ως πρώτο και τον αριθμό αυτών που το επέλεξαν τελευταίο.

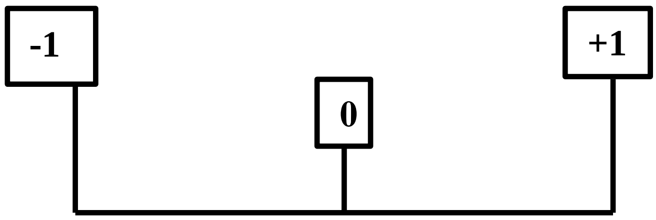
Έτσι, σύμφωνα με τον Borda μέσα από αυτόν τον πίνακα θα βρούμε το κόμμα που θα κερδίσει τις εκλογές και το οποίο θα είναι αυτό που θα έχει είτε τον μεγαλύτερο αριθμό ψηφοφόρων που το επέλεξαν πρώτο, είτε, αν έχει τις ίδιες ψήφους για την πρώτη θέση με τα υπόλοιπα, τον μικρότερο αριθμό των ψηφοφόρων που το επέλεξαν τελευταίο στις εκλογές. Η μέθοδος διαφέρει από τη μέθοδο Condorcet στο ότι δεν γίνονται συγκρίσεις ανά ζεύγος μεταξύ των n διαφορετικών απόψεων (επιλογών), αλλά σε κάθε άποψη αθροίζονται όλες οι ψήφοι που έχουν δοθεί από τους εκλογείς, με βαρύτητα ανάλογη με την κατάταξη που έχει λάβει από τον κάθε εκλογέα.

Η μέθοδος Borda έχει το πλεονέκτημα σε σχέση με τη μέθοδο Condorcet ότι δεν οδηγεί σε κυκλικά «φαινόμενα», και έτσι δεν εμφανίζεται το παράδοξο. Από την άλλη μεριά, δίνει κίνητρο για μη ειλικρινή ψήφο. Ο κάθε συμμετέχοντας που προτιμά μια επιλογή i θα δώσει τη μικρότερη βαρύτητα σε εκείνη την επιλογή j που θεωρεί ότι είναι ο πιο επικίνδυνος αντίπαλος της επιλογής i.

3.4 Σύγκριση γνωμών.

Όταν έχουμε n αίτια (π.χ. n υποψήφια κόμματα) δημιουργούνται n! απόψεις και θέλουμε να βρούμε την πλήρως σύμφωνη και την πλήρως αντίθετη άποψη στην επικρατούσα άποψη του συνόλου των απόψεων τότε χρησιμοποιούμε το t του Kendall.

Σύμφωνα με τον Kendall έχουμε στο διάστημα $\left[-1,1\right]$:



$$d: \quad 0 \qquad \frac{n\cdot(n-1)}{4} \qquad \frac{n\cdot(n-1)}{2}=D$$

Αν d οι διαφωνίες που υπάρχουν μεταξύ δύο απόψεων, τότε ισχύει:

$$0 \le d \le \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

t = το t του Kendall που έχει τον τύπο:

$$t = 1-\frac{2d}{D} \quad \text{με}\ t \in \left[-1,1\right]$$

$$\text{όπου} \frac{n\cdot(n-1)}{2}=D$$

- **<u>Ο μέγιστος αυτός αριθμός διαφωνιών που μπορεί να υπάρχει μεταξύ δύο απόψεων προκύπτει ως εξής:</u>**

Για παράδειγμα αν έχουμε τα άτομα α, β, γ, ... τα οποία κατατάσσονται σε σειρά από κάποιους κριτές, τότε με βάση τα παραπάνω οι μέγιστες διαφωνίες που μπορεί να υπάρξουν μεταξύ δύο απόψεων κριτών, οι οποίοι κατατάσσουν ο καθένας με τον δικό του τρόπο τα άτομα αυτά, θα μας τις δώσει ο τύπος $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, όπου n είναι ο αριθμός των ατόμων, διότι:

Μία ασυμφωνία έχουμε όταν γράφουμε σε μία άποψη αντίθετα ένα ζευγάρι μίας άλλης άποψης (π.χ. οι απόψεις αβγδ... και αγβδ... έχουν μία διαφωνία).

Στο κάθε ζεύγος διαφωνίας (π.χ. στο βγ) το πρώτο στοιχείο μπορεί να επιλεγεί από το πλήθος των n στοιχείων που μπορούμε να έχουμε σε μία άποψη, ενώ το δεύτερο στοιχείο μπορεί να επιλεγεί από το πλήθος (n-1) των υπολοίπων στοιχείων (δεν επιλέγεται και αυτό από n στοιχεία διότι δεν μπορούμε να έχουμε π.χ. το ζευγάρι αα, δηλαδή $\alpha \succ \alpha$, διότι αυτό δεν είναι διαφωνία).

Τέλος πρέπει να πούμε ότι το σύνολο των ζευγαριών (ή διαφωνιών) $n\cdot(n-1)$ θα μας δίδει όλες τις ασυμφωνίες διπλές (δηλαδή θα έχουμε και το βγ και το γβ, που είναι 1 ασυμφωνία, δηλαδή η ίδια ασυμφωνία) οπότε για αυτό τον λόγο διαιρούμε με το 2 τις δυάδες (ασυμφωνίες) $n\cdot(n-1)$ που σχηματίζονται, δηλαδή έχουμε $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ και έτσι βρίσκουμε τον μέγιστο αριθμό ασυμφωνιών που μπορεί να έχουν δύο απόψεις.

Πιο απλά, ο μέγιστος αριθμός των ζευγαριών (διαφωνιών) που μπορούν να υπάρξουν ανάμεσα σε δύο απόψεις δίδεται από τον τύπο:

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

όπου n είναι ο αριθμός των στοιχείων (γνωμών) που αποτελούν μία άποψη.

Τέλος, το $\frac{D}{2}=\frac{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{4}$ είναι ο αριθμός των μισών ασυμφωνιών του συνόλου (δηλαδή απλά οι μισές διαφωνίες) που μπορούν να υπάρχουν μεταξύ δύο απόψεων.

Επίσης ισχύουν τα εξής:

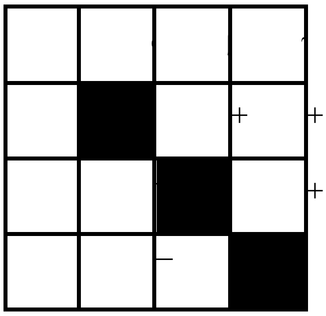
όταν $t=1$, τότε υπάρχει πλήρης συμφωνία δύο απόψεων και

όταν $t=-1$, τότε υπάρχει πλήρης αντίθεση μεταξύ δύο απόψεων

3.5 Μέθοδος εύρεσης της σύνθεσης μιας γνώμης

Όταν έχουμε μία γνώμη, π.χ. την $P_1=\alpha\beta\gamma$ και θέλουμε να βρούμε την σύνθεσή της, δηλαδή κάποια στοιχεία για το περιεχόμενο και τη δομή της τότε κάνουμε τα εξής:

Φτιάχνουμε έναν πίνακα που δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των στοιχείων (π.χ. των αιτιών ενός προβλήματος) που αποτελούν ή καλύτερα που συγκροτούν μία γνώμη και στη συγκεκριμένη περίπτωση ο πίνακας αυτός θα έχει τη μορφή:



για την άποψη $P_1 = \alpha\beta\gamma$

όπου + : σημαίνει π.χ. $\alpha \succ \beta$

και $-$: σημαίνει π.χ. $\beta \succ \alpha$

και η άποψη (γνώμη) P_1 διαφορετικά γράφεται:

$$P_1 = \alpha\beta\gamma = \left|K^{+}_{(1)}, K^{-}_{(1)}\right| = \{\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \beta\alpha, \gamma\alpha, \gamma\beta\}$$

όπου: $K^{+}_{(1)} = \{\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma\}$

δηλαδή περιέχει τα: $\alpha \succ \beta$, $\alpha \succ \gamma$, $\beta \succ \gamma$

και $K^{-}_{(1)} = \{\beta\alpha, \gamma\alpha, \gamma\beta\}$

δηλαδή περιέχει τα: $\beta \succ \alpha$, $\gamma \succ \alpha$, $\gamma \succ \beta$

3.6 Μέθοδος δημιουργίας μιας γνώμης, από δύο άλλες που προέκυψαν από μία αρχική γνώμη

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο αν έχουμε μία γνώμη και με βάση αυτήν δημιουργούνται δύο άλλες (διαφορετικές) γνώμες τότε με διάφορους τρόπους μπορούμε μέσα από αυτές τις δύο γνώμες να δημιουργούμε μία νέα γνώμη. Οι διάφοροι τρόποι που μπορούμε να δημιουργήσουμε μια νέα γνώμη είναι οι εξής:

1. Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία νέα γνώμη, η οποία να έχει *όλες τις συμφωνίες* των δύο γνωμών με την αρχική γνώμη, από την οποία προέκυψαν αυτές οι δύο γνώμες.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η αρχική γνώμη είναι $P_0 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$. Επίσης, έχουμε τις γνώμες οι $P_1 = \gamma\varepsilon\delta\beta\alpha\zeta$ και $P_2 = \zeta\varepsilon\delta\gamma\alpha\beta$. Για την γνώμη P_1 οι συμφωνίες της με την γνώμη P_0 είναι το σύνολο των ζευγών $K^{+}_{(1)} = \{\alpha\zeta, \beta\zeta, \gamma\delta, \gamma\varepsilon, \gamma\zeta, \delta\zeta, \varepsilon\zeta\}$, ενώ για την γνώμη P_2 είναι το σύνολο: $K^{+}_{(2)} = \{\alpha\beta\}$. Η νέα γνώμη η οποία περιέχει όλα τα κοινά ζευγάρια (συμφωνίες δηλαδή στην κατάταξη των αιτίων) με την αρχική γνώμη και των δύο γνωμών θα είναι η:

$$\mathrm{P}_{(1v2)},\text{με } \mathrm{K}^{+}_{(1v2)} = \overbrace{\mathrm{K}^{+}_{(1)} \cup \mathrm{K}^{+}_{(2)}} = \{\alpha\zeta, \beta\zeta, \gamma\delta, \gamma\varepsilon, \gamma\zeta, \delta\zeta, \varepsilon\zeta, \alpha\beta\}$$

2. <u>Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία νέα γνώμη, που να περιλαμβάνει *όλες τις διαφωνίες* δύο γνωμών με την αρχική τους γνώμη, από την οποία προέκυψαν.</u>

Παρόμοια με το παραπάνω, αν η αρχική γνώμη είναι η $\mathrm{P}_0 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ και οι δύο γνώμες που προκύπτουν, ως διαφωνίες, από αυτή είναι οι:

$$\mathrm{P}_1 = \varepsilon\delta\alpha\beta\gamma \text{ με } \mathrm{K}^{-}_{(1)} = \{\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma, \varepsilon\delta\}$$

και

$$\mathrm{P}_2 = \delta\alpha\gamma\varepsilon\beta \text{ με } \mathrm{K}^{-}_{(2)} = \{\gamma\beta, \delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \varepsilon\beta\}$$

τότε η νέα γνώμη που θα προκύψει θα είναι η:

$$\mathrm{P}_{(1\vee 2)} \text{ με } = \mathrm{K}^{-}_{(1)} \cup \mathrm{K}^{-}_{(2)} = \{\gamma\beta, \delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma, \varepsilon\delta\}$$

3. <u>Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία νέα γνώμη, που να περιλαμβάνει τις *κοινές διαφωνίες* δύο γνωμών με την αρχική γνώμη, από την οποία προέκυψαν,</u> η οποία θα είναι (αν P_0 η αρχική γνώμη και $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ οι δύο άλλες γνώμες) η:

$$\mathrm{I} = \mathrm{K}^{-}_{(1)} \cap \mathrm{K}^{-}_{(2)}$$

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία νέα γνώμη, που θα περιλαμβάνει τις κοινές συμφωνίες δύο γνωμών με την αρχική γνώμη τους από την οποία προέκυψαν, όπου (αν P_0 η αρχική γνώμη και $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ οι δύο άλλες γνώμες) θα είναι η

$$\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{K}^{+}_{(1)} \cap \mathrm{K}^{+}_{(2)}$$

3.7 Δημιουργία συλλογικής γνώμης ως διαδικασία ως συνάθροιση πληροφορίας

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι οι συμμετέχοντες σε μια διαδικασία συλλογικής απόφασης είχαν διαφορετικές απόψεις για ένα ζήτημα, αν και όλοι είχαν κοινό σκοπό, να εξηγήσουν μια κατάσταση με βάση τις πληροφορίες που έχουν διαθέσιμες. Το όφελος κάθε μέλους της ομάδας είναι ευθυγραμμισμένο με το όφελος κάποιου άλλου μέλους της ομάδας, ή διαφορετικά, όλοι έχουν την ίδια προτίμηση.

Όμως, αποφασίζουν διαφορετικά διότι είτε ο καθένας κρίνει τις πληροφορίες που έχει με διαφορετικό τρόπο, με βάση τον τύπο του και την προηγούμενη άποψη (belief) είτε γιατί υπάρχει ιδιωτική πληροφόρηση που δεν είναι ορατή στους υπόλοιπους. Συχνά, ένα συλλογικό όργανο καλείται να λάβει απόφαση πάνω σε ένα ζήτημα και να επιλέξει μεταξύ δύο καταστάσεων. Για παράδειγμα, το διοικητικό συμβούλιο μιας εταιρίας πρέπει να επιλέξει αν θα προχωρήσει ή όχι σε μια εξαγορά με βάση συγκεκριμένους όρους, μια ομάδα ενός κράτους που διαπραγματεύεται μια συμφωνία με άλλο κράτος πρέπει να απορρίψει ή να αποδεχτεί μια πρόταση, ή τέλος, οι ένορκοι ενός δικαστηρίου πρέπει να αποφανθούν επί της αθωότητας ή της ενοχής του κατηγορούμενου. Το ζητούμενο της σύνθεσης συλλογικής γνώμης είναι να προκύψει η καλύτερη από δύο εναλλακτικές επιλογές.

Θα θέσουμε λοιπόν το θεωρητικό πλαίσιο για τη σύνθεση συλλογικής γνώμης με βάση πληροφορίες που έχει στη διάθεσή του ο κάθε συμμετέχων στη διαδικασία.10

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ομάδα n ατόμων που αναπαριστώνται με το σύνολο $N = \{1, 2, ..., n\}$. Όλα τα άτομα έχουν την ίδια προτίμηση μεταξύ δύο επιλογών {A,B}, εφόσον γνωρίζουν την πραγματική κατάσταση των πραγμάτων. Για παράδειγμα, αν όλοι οι ένορκοι ενός δικαστηρίου γνωρίζουν ότι ο κατηγορούμενος είναι ένοχος, τότε όλοι θα επιλέξουν να καταδικαστεί. Όμως υπάρχει αβεβαιότητα για το εάν ισχύει η κατάσταση A ή η κατάσταση B. Για κάθε άτομο υπάρχει εκ των προτέρων πιθανότητα p να ισχύει η κατάσταση A και 1 – p να ισχύει η κατάσταση B. Σε ένα σώμα ενόρκων, αν όλοι οι ένορκοι είναι αμερόληπτοι, $p = 1/2$

Τα άτομα έχουν ιδιωτική πληροφόρηση για την πραγματική κατάσταση, Έτσι, το άτομο i πριν αποφασίσει λαμβάνει ένα σήμα s_i που του μεταφέρει πληροφόρηση σχετικά με το αν ισχύει η A (οπότε s_i=0) ή η B (οπότε s_i=1). Ανάλογα με το είδος του σήματος που λαμβάνει το άτομο συγκροτείται η άποψη του ως εξής:

Pr [s_i=0| A] $= q_A$, $\in \left(1/2, 1\right)$ δηλαδή q είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να παρατηρήσει σήμα 0 ενώ η κατάσταση είναι A. Αντίστοιχα, Pr [s_i=1| B] $= q_B$.

[10] Το θεωρητικό πλαίσιο για τα παίγνια σε περιβάλλον αβεβαιότητας θα το αναλύσουμε στο κεφάλαιο 5.

Με βάση τον κανόνα του Bayes η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ισχύει η κατάσταση Α(Β) όταν το άτομο έχει δεχτεί σήμα s_i προκύπτει από:

Pr [A| s_i =0] = $\frac{\Pr[A]*\Pr[s_i=0\,|\,A]}{\Pr[s_i=0]}$, όπου Pr [A] = p και Pr [s_i =0|A] = q_A από τον ορισμό της πιθανότητας q. Μένει να υπολογιστεί η πιθανότητα να εμφανιστεί σήμα s_i =0. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις να εμφανιστεί σήμα s_i =0 , είτε εάν η κατάσταση είναι Α, είτε εάν η κατάσταση είναι Β. Άρα,

Pr [s_i =0] = Pr[A] * Pr[s_i =0|A] + Pr[B] * Pr [s_i =1 | B] =

Συνεπώς, Pr [A| s_i =0] = $\frac{pq_A}{pq_A+(1-p)(1-q_B)}$ (3.1.A)

Στην ειδική περίπτωση που $p = 1/2$ και $q_A = q_B = q$ τότε: Pr [A| s_i =0] = q, δηλαδή η πιθανότητα να ισχύει η κατάσταση Α έχει αυξηθεί από $1/2$ που ήταν πριν την παρατήρηση του σήματος σε q > $1/2$, όπως είναι το αναμενόμενο.

Παρόμοια με τη σχέση (1) υπολογίζουμε τα κάτωθι:

Pr [B| s_i =1] = $\frac{(1-p)q_B}{p(1-q_A)+(1-p)(1-q_B)}$ (3.1.B)

Pr [A| s_i =1] = $\frac{p(1-q_A)}{p(1-q_A)+(1-p)q_B}$ (3.1.C)

Pr [B| s_i =0] = $\frac{(1-p)(1-q_B)}{pq_A+(1-p)(1-q_B)}$ (3.1.D)

Συνεχίζοντας την περιγραφή του μοντέλου, θεωρούμε ότι όλα τα άτομα ψηφίζουν ταυτόχρονα, το καθένα επιλέγει Α ή Β με βάση την πληροφορία που του μεταφέρει το σήμα s. Συνεπώς η στρατηγική στην ψηφοφορία του ατόμου j είναι η απεικόνιση του $\{0,1\} \rightarrow \{A,B\}$, που περιγράφει την επιλογή που κάνει σε σχέση με το σήμα που λαμβάνει. Ορίζουμε σαν προφίλ ψηφοφόρων του συνόλου των n ατόμων, την απεικόνιση $\{0,1\}^n \rightarrow \{A,B\}^n$ με v(s) = (v1(s1), v2(s2),…. vn(sn)).

Αν ισχύει η κατάσταση Α (ή Β) και ένα άτομο επιλέξει την επιλογή Α (ή Β), τότε λαμβάνει όφελος +1, διαφορετικά λαμβάνει όφελος 0.

Συνεπώς η ωφέλεια ορίζεται ως εξής:

$$\forall i \in N, u_i(A,A) = u_i(B,B) = 1 \; \kappa\alpha\iota \; u_i(A,\mathrm{B}) = u_i(\mathrm{B},\mathrm{A}) = 0$$

Η μέθοδος που ακολουθείται για την λήψη της συλλογικής απόφασης είναι η πλειοψηφική, δηλαδή, ορίζεται kf ώστε αν ο αριθμός των ατόμων k που έχουν επιλέξει την επιλογή Β είναι $k \geq k_f$ τότε η συλλογική απόφαση είναι η Β.

Η στρατηγική ψηφοφορίας του ατόμου i είναι ειλικρινής εάν το μόνο κριτήριο για την ψήφο του είναι η ωφέλεια του, δηλαδή η εκτίμησή του όπως διαμορφώνεται από τα σήματα που λαμβάνει για το εάν ισχύει η κατάσταση Α ή Β. Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις (1) που υπολογίζουν τις δεσμευμένες πιθανότητες, και επειδή η ωφέλεια είναι 1, η συνθήκη διατυπώνεται ως εξής:

Η στρατηγική vi(si) είναι ειλικρινής εφόσον η ισότητα vi(si)=A ισχύει εάν και μόνο εάν: $\mathrm{E}[u_i(A,\bullet) \mid s_i] > \mathrm{E}[u_i(B,\bullet) \mid s_i]$ (3.2)

δηλαδή, ο i επιλέγει την κατάσταση A με ειλικρίνεια εφόσον η μαθηματική ελπίδα της ωφέλειας του με την στρατηγική Α είναι μεγαλύτερη από μεγαλύτερη από αυτή που αντιστοιχεί στην Β, όταν έχει λάβει το σήμα si

Πέρα από την ειλικρινή στρατηγική, ορίζουμε και την πληροφοριακή στρατηγική με βάση την οποία $v_i(0)$=A και $v_i(1)$=B, δηλαδή το άτομο επιλέγει με βάση μόνο το σήμα που δέχεται.

Για τα σήματα s_i που λαμβάνουν οι ένορκοι ορίζουμε: $k(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i$

Το κάθε άτομο λοιπόν ψηφίζει ειλικρινά εφόσον λαμβάνει υπόψη του μόνο τα σήματα που δέχεται το ίδιο και όχι των υπολοίπων. Όμως, σε μια διαδικασία λήψης απόφασης αυτό δεν ισχύει πάντα καθώς το άτομο μπορεί να εικάσει το πώς διερμηνεύουν τα σήματα τους τα υπόλοιπα άτομα της ομάδας, και τείνουν να ψηφίσουν ώστε να δημιουργηθεί ισορροπία κατά Nash.

Ας υποθέσουμε ότι η ομάδα ατόμων που καλούνται να αποφασίσουν συλλογικά είναι το σώμα ενόρκων σε δικαστήριο. Η σύνθεση της συλλογικής γνώμης βασίζεται στην ομοφωνία όσον αφορά στην καταδίκη του κατηγορούμενου, δηλαδή στην περίπτωση αυτή k_f=n.

Επίσης, για να είναι δύσκολη η καταδίκη αθώου κατηγορούμενου έχει υποδειχθεί στους ενόρκους να ψηφίζουν για καταδίκη εφόσον:

Pr [ένοχος | διαθέσιμη πληροφορία] > y, y κοντά στο 1. (3.3)

Το y δρα ως το κατώφλι αμφιβολίας για να καταδικαστεί κάποιος. Είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερο είναι το y τόσο σημαντικότερο θεωρείται να καταδικαστεί ένας αθώος, παρά να αθωωθεί ένας ένοχος.

Η ψήφος του ενόρκου έχει σημασία μόνο όταν όλοι οι υπόλοιποι έχουν ψηφίσει την καταδίκη του ενόρκου, διαφορετικά ό,τι και να ψηφίσει ο ίδιος, ο κατηγορούμενος αθωώνεται. Σε αυτή την περίπτωση, αν p=$\frac{1}{2}$, οι n-1 ένορκοι έχουν λάβει σήματα ενοχής του κατηγορούμενου και έχουν αποφασίσει ότι είναι ένοχος. (η υπόθεση αυτή είναι ακριβής όταν ο ένορκος είναι εξαρχής αμερόληπτος). Ο υπολειπόμενος ένορκος i υπολογίζει την πιθανότητα να είναι ένοχος ο κατηγορούμενος (κατάσταση Β) εάν μόνο ο ίδιος έχει λάβει σήμα αθώωσης, δηλαδή όταν $s_i = 0 \, \kappa\alpha\iota \, k(s) = n-1$

Pr [ένοχος | μόνο ένα σήμα αθώωσης] =

$$\frac{\Pr[\acute{\varepsilon}\nu o\chi o\varsigma]\Pr[\mu\acute{o}\nu o\,\acute{\varepsilon}\nu\alpha\,\sigma\acute{\eta}\mu\alpha\,\alpha\theta\acute{\omega}\omega\sigma\eta\varsigma \mid \acute{\varepsilon}\nu o\chi o\varsigma]}{\Pr[\mu\acute{o}\nu o\,\acute{\varepsilon}\nu\alpha\,\sigma\acute{\eta}\mu\alpha\,\alpha\theta\acute{\omega}\omega\sigma\eta\varsigma]}$$

ή με βάση τον προηγούμενο συμβολισμό

$\Pr[k(s) = n-1 \mid B] = q_B^{n-1}(1-q_A)$, Pr[B]= $\frac{1}{2}$ και

$$\Pr[k(s) = n-1] = \frac{1}{2}q_B^{n-1}(1-q_A) + \frac{1}{2}(1-q_B)^{n-1}q_A$$

Αν $q_A = q_B = q$, τότε $\Pr[B \mid k(s) = n-1] = \dfrac{q^{n-2}}{q^{n-2} + (1-q)^{n-2}}$ (3.4)

Δεδομένου ότι $q > \frac{1}{2}$ βλέπουμε ότι η πιθανότητα να είναι ένοχος ο κατηγορούμενος εάν μόνο ένα σήμα δηλώνει την αθωότητά του, τείνει στο 1 καθώς αυξάνει ο αριθμός των ενόρκων, συνεπώς, η πιθανότητα να είναι ένοχος είναι τέτοια που με βάση την οδηγία που έχει δοθεί στους ενόρκους, ο κατηγορούμενος θα πρέπει να βρεθεί ένοχος. Άρα, ακόμη και αν ο ένορκος έχει λάβει σήμα αθώωσης, αλλά πιστεύει ότι όλοι οι άλλοι ψηφίζουν με ειλικρίνεια, τότε για να υπάρξει ισορροπία κατά Nash θα πρέπει να αγνοήσει το σήμα και να ψηφίσει όχι ειλικρινά.

Αυτό συμβαίνει διότι αν κάποιοι από τους υπόλοιπους ενόρκους έχουν ψηφίσει με αθώωση, τότε η ψήφος του δεν έχει σημασία, συνεπώς, μπορεί να ψηφίσει ενοχή, ανεξάρτητα από το σήμα του. Αν όλοι οι οι υπόλοιποι ένορκοι έχουν ψηφίσει ενοχή, τότε αν $\Pr[B \mid k(s) = n-1]$>y τότε ο ένορκος θα πρέπει να αγνοήσει το προσωπικό του σήμα και να ψηφίσει την ενοχή.

Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυση για την ειλικρινή και ορθολογική (rational) ψήφο, σημειώνουμε ότι όταν ο ένορκος ψηφίζει ανειλικρινά, δρα προς το συμφέρον όλων, όχι μόνο το δικό του. Επίσης, το γεγονός ότι δεν ταυτίζεται η ορθολογική με την ειλικρινή ψήφο, δεν σημαίνει ότι αυτό ισχύει για όλους τους ενόρκους. Κάποιοι ένορκοι ψηφίζουν ειλικρινά και κάποιοι όχι. Συγκεκριμένα, αν το σήμα που λαμβάνει κάποιος δείχνει ενοχή τότε ψηφίζει ενοχή, διαφορετικά, αν λάβει σήμα αθώωσης, με πιθανότητα π ψηφίζει αθώωση και πιθανότητα 1-π ψηφίζει ενοχή. Αποδεικνύεται [Fed, Pes 1998] ότι με αυτή την στρατηγική στην ψηφοφορία στην ισορροπία που προκύπτει υπάρχει πιθανότητα να καταδικαστεί ένας αθώος η οποία μάλιστα δεν τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ενόρκων.

Ολοκληρώνουμε την ανάλυσή μας διερευνώντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η ορθολογική ψήφος ταυτίζεται με την ειλικρινή.

Υπολογίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι ισχύει η κατάσταση Α ή Β όταν έχουμε το διάνυσμα των σημάτων s=(s1, s2,… sn) με βάση τους υπολογισμούς που κάναμε για τις σχέσεις (1.A) – (1.D). Έτσι, $\forall\iota$:

$$E[u_i(A,\bullet) \mid s] > E[u_i(B,\bullet) \mid s] \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} > \left(\frac{q_B}{1-q_B}\right)^{k(s)} \left(\frac{1-q_B}{q_A}\right)^{n-k(s)} \qquad (3.5.A)$$

και,

$$E[u_i(A,\bullet) \mid s] < E[u_i(B,\bullet) \mid s] \Leftrightarrow \frac{p}{1-p} < \left(\frac{q_B}{1-q_B}\right)^{k(s)} \left(\frac{1-q_B}{q_A}\right)^{n-k(s)} \qquad (3.5.B)$$

Οι σχέσεις (5.Α) και (5.Β) δίνουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το κάθε άτομο επιλέγει σωστά, λαμβάνοντας υπόψη όλη τη διαθέσιμη πληροφορία, και συνεπώς, επιλέγει σωστά η ομάδα.

Με βάση τις τιμές των qA , qB και p η (5.Α) πρέπει να ισχύει όταν τα σήματα δείχνουν αθωότητα, δηλαδή k(s)=0 και η (5.Β) όταν τα σήματα δείχνουν ενοχή, δηλαδή, k(s)=n. Συμβολίζουμε το γινόμενο των παρενθέσεων στην (3.5.Α) ως g(k(s)), δηλαδή, ως συνάρτηση του k(s). Όταν υπάρχει μια τιμή του k(s), η k* για την οποία ισχύει: $g(k^*+1) > \frac{p}{1-p} > g(k^*)$, (3.6)

τότε τιμή k* αντιπροσωπεύει την καλύτερη μέθοδο σύνθεσης των σημάτων πληροφόρησης που λαμβάνουν τα άτομα.

Αποδεικνύεται [Austen,Banks 1996] ότι εάν $q_A = q_B = q \in (1/2, 1)$ τότε η ειλικρινής ψηφοφορία είναι και ορθολογική όταν: $k^* = k_f = \frac{n-1}{2}$, δηλαδή όταν ακολουθείται ο κανόνας της απλής πλειοψηφίας.

3.8 Εφαρμογή Ι

Ύστερα από μία μακροχρόνια πτωτική πορεία τους τελευταίους μήνες η τιμή του αργού πετρελαίου έχει πλέον διαμορφωθεί στις διεθνείς αγορές κοντά στα 15$ το βαρέλι. Αναζητώντας, λοιπόν, τα αίτια της μεγάλης πτώσης της τιμής του πετρελαίου οι περισσότεροι αναλυτές σήμερα πιστεύουν τα εξής:

α: η πτώση της τιμής του πετρελαίου οφειλόταν στην αύξηση του πλαφόν (δηλαδή του κατώτερου ορίου παραγωγής πετρελαίου) που αποφασίστηκε από τον OPEC τον Νοέμβριο του 1997 ύστερα από ισχυρές πιέσεις της Σαουδικής Αραβίας.

β: η πτώση της τιμής του πετρελαίου οφειλόταν στο ότι δεν εισακούστηκαν οι εκκλήσεις προς τα μέλη του OPEC που έλεγαν να μην υπερβαίνονται από τα μέλη του οργανισμού οι ποσοστώσεις (δηλαδή οι προκαθορισμένοι ποσοτικοί περιορισμοί), στην παραγωγή του πετρελαίου που είχαν αποδοθεί σε κάθε χώρα – μέλος του OPEC.

γ: η πτώση της τιμής του πετρελαίου οφειλόταν στη χαμηλή ζήτηση πετρελαίου λόγω της Ασιατικής κρίσης (δηλαδή λόγω της κακής οικονομικής κατάστασης στην Ασία).

δ: η πτώση της τιμής του πετρελαίου οφειλόταν στη μειωμένη ζήτηση πετρελαίου λόγω του ήπιου χειμώνα στο βόρειο ημισφαίριο της γης (δηλαδή μειώθηκε η ζήτηση πετρελαίου, δημιουργήθηκε υπερπροσφορά, αυξήθηκαν τα αποθέματα πετρελαίου των εταιρειών και έτσι οι εταιρείες υποχρεώθηκαν να μειώσουν την τιμή του πετρελαίου τους).

δ: η πτώση της τιμής του πετρελαίου οφειλόταν στη συμφωνία που επιτεύχθηκε στα τέλη του Φεβρουαρίου 1998 μεταξύ του Ιράκ και του Γενικού Γραμματέα των Ηνωμένων Εθνών, Κόφι Ανάν, η οποία οδήγησε στην αποκλιμάκωση της έντασης στον Περσικό Κόλπο και η οποία μεταξύ των άλλων υποχρέωνε το Ιράκ να αγοράζει από ξένες χώρες (δηλαδή να εισάγει) τρόφιμα τα οποία τα πλήρωνε σε κατά πολύ πιο αυξημένες ποσότητες πετρελαίου από πριν, γεγονός που ανάγκασε πολλές χώρες στο να μειώσουν την τιμή του πετρελαίου τους.

Υποθετικό παράδειγμα: Σύμφωνα με τα προηγούμενα, λοιπόν, 10 οικονομικοί αναλυτές (που συμβολίζονται με τους αριθμούς από 1 ως 10), λαμβάνοντας υπόψη τους τα αίτια της πτώσης της τιμής του πετρελαίου, δηλαδή τα α, β, γ, δ και ε εξέφρασαν τη γνώμη τους, ο καθένας με το δικό του τρόπο, ιεραρχώντας τα παραπάνω αίτια ξεκινώντας από τα πιο σπουδαία και καταλήγοντας στα λιγότερο σημαντικά.

Οι εκτιμήσεις των αναλυτών ήταν:

1:	α	β	γ	δ	ε
2:	β	γ	α	ε	δ
3:	ε	α	γ	δ	β
4:	γ	α	β	δ	ε
5:	δ	γ	α	β	ε
6:	α	γ	δ	β	ε
7:	ε	δ	γ	α	β
8:	γ	ε	α	β	δ
9:	β	δ	γ	ε	α
10:	δ	α	ε	γ	β

Για να βρούμε, λοιπόν, ποια γνώμη είναι η επικρατέστερη από τις παραπάνω εκτιμήσεις (ή γνώμες) των αναλυτών και για να σχηματίσουμε μία σφαιρικότερη άποψη του αποτελέσματος είναι καλό και αναγκαίο να αναλύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα περισσότερα διεξοδικά.

Με βάση τη μέθοδο Borda:

Αρχικά μπορούμε να βρούμε τη θέση που έδωσε κάθε αναλυτής σε κάθε αίτιο. Δηλαδή έχουμε τα εξής:

Το αίτιο α θεωρήθηκε	1^{o} από τους:	αναλυτές 1 και 6
	2^{o} από τους:	αναλυτές 3, 4 και 10
	3^{o} από τους:	αναλυτές 2, 5 και 8
	4^{o} από τον:	αναλυτή 7
	τελευταίο από	αναλυτή 9
Το αίτιο β θεωρήθηκε	1^{o} από τους:	αναλυτές 2 και 9
	2^{o} από τον:	αναλυτή 1
	3^{o} από τον:	αναλυτή 4
	4^{o} από τους:	αναλυτές 5, 6 και 8
	τελευταίο από	αναλυτές 3, 7 και 10
Το αίτιο γ θεωρήθηκε	1^{o} από τους:	αναλυτές 4 και 8
	2^{o} από τους:	αναλυτές 2, 5 και 6
	3^{o} από τους:	αναλυτές 1, 3, 7 και
	4^{o} από τους:	αναλυτές 3 και 10
	τελευταίο από κανέναν αναλυτή	
Το αίτιο δ θεωρήθηκε	1^{o} από τους:	αναλυτές 5 και 10
	2^{o} από τους:	αναλυτές 7 και 9
	3^{o} από τον:	αναλυτή 6
	4^{o} από τους:	αναλυτές 1, 3 και 4
	τελευταίο από	αναλυτές 2 και 8
Το αίτιο ε θεωρήθηκε	1^{o} από τους:	αναλυτές 3 και 7
	2^{o} από τον:	αναλυτή 8
	3^{o} από τον:	αναλυτή 10
	4^{o} από τους:	αναλυτές 2 και 9
	τελευταίο από	αναλυτές 1,4,5 και 6

Στη συνέχεια μπορούμε να επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε βαρύνουσας σημασίας θέσεις που κατέχει το κάθε αίτιο, όπως είναι η θέση του πρώτου και του τελευταίου.

	Κρίθηκε ως Πρώτο αίτιο από:		Κρίθηκε ως Τελευταίο αίτιο από:		
α:	1	6	9		
β:	2	9	3	7	10
γ:	4	8		(κανένα)	
δ:	5	10	2	8	
ε:	3	7	1	4	5

Με βάση τη μέθοδο του Condorcet:

Μπορούμε να χωρίσουμε σε ζευγάρια τα αίτια της πτώσης της τιμής του πετρελαίου και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους βρίσκοντας έτσι αυτά τα αίτια που θα υπερισχύουν των άλλων:

Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε τη γνώμη «το α είναι πιο σημαντικό από το β», ή αλλιώς το $\alpha \succ \beta$, οπότε θα έχουμε ότι:

$\alpha \succ \beta$ είναι η γνώμη των 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 10 ενώ $\beta \succ \alpha$ είναι η γνώμη των 2 και 9.

Άρα, η γνώμη $\alpha \succ \beta$ υποστηρίζεται από 8 ψήφους έναντι 2 κατά.

Συγκεντρωτικά, λοιπόν, αν εξετάσουμε όλες τις συγκρίσεις των ζευγαριών ανά δύο, συγκρατώντας για το καθένα την γνώμη της πλειοψηφίας θα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Γνώμη της πλειοψηφίας	Αριθμός αναλυτών που συμφωνούν	Αριθμός αναλυτών που διαφωνούν
$\alpha \succ \beta$	8	2
$\gamma \succ \beta$	7	3
$\gamma \succ \varepsilon$	7	3
$\alpha \succ \delta$	6	4
$\alpha \succ \varepsilon$	6	4

$\gamma \succ \alpha$	6	4
$\delta \succ \varepsilon$	6	4
$\gamma \succ \delta$	6	4
$\beta \succ \varepsilon$	6	4
$\beta \succ \delta$	5	5
$\delta \succ \beta$	5	5
$\varepsilon \succ \beta$	4	6
$\delta \succ \gamma$	4	6

Σύμφωνα με τα προηγούμενα μπορούμε να πάρουμε τις πιο ξεκάθαρες δηλωμένες γνώμες των αναλυτών και να έχουμε:

υποστηρίζουν	ότι	$\alpha \succ \beta$
υποστηρίζουν	ότι	$\gamma \succ \beta$
υποστηρίζουν	ότι	$\gamma \succ \varepsilon$
υποστηρίζουν	ότι	$\alpha \succ \delta$
υποστηρίζουν	ότι	$\alpha \succ \varepsilon$
υποστηρίζουν	ότι	$\gamma \succ \alpha$
υποστηρίζουν	ότι	$\gamma \succ \delta$
υποστηρίζουν	ότι	$\delta \succ \varepsilon$
υποστηρίζουν	ότι	$\beta \succ \varepsilon$

από τα οποία προκύπτουν ότι:

$$\gamma \succ \alpha \succ \beta \succ \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.7)$$

$$\gamma \succ \alpha \succ \delta \succ \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.8)$$

Έτσι από τις σχέσεις (3.7) και (3.8) συμπεραίνουμε ότι η γενική γνώμη των αναλυτών για την κατάταξη των αιτίων της πτώσης της τιμής του πετρελαίου είναι:

$$\gamma \succ \alpha \succ \beta \succ \varepsilon$$

Όσο για το αίτιο β (που είναι $\beta \succ \varepsilon$) είναι ειδική περίπτωση γιατί οι μισοί αναλυτές το θεωρούν ως το τρίτο αίτιο της πτώσης της τιμής του πετρελαίου και οι άλλοι μισοί ως το τέταρτο αίτιο.

Άρα η οριστική ιεράρχηση των παραπάνω αιτιών θα είναι:

γαβδε ή γαδβε

3.9 Εφαρμογή ΙΙ

Στις οικονομικά ανεπτυγμένες χώρες και ιδίως στις ΗΠΑ τις τελευταίες δεκαετίες έχουν γνωρίσει μεγάλη άνθηση, και παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη λειτουργία της οικονομίας, διαφόρων ειδών χρηματοδοτικοί οργανισμοί, που έχουν σαν σκοπό τους την επίτευξη του μέγιστου κέρδους.

Οι πιο σημαντικοί χρηματοδοτικοί οργανισμοί είναι:

1. Οι **Εμπορικές Τράπεζες**, στις οποίες άλλοι δανείζονται από αυτές κάποια χρηματικά ποσά καταβάλλοντας κάποιο τόκο και άλλοι καταθέτουν χρήματα έναντι κάποιας αμοιβής (τόκου).

2. Οι **Τράπεζες Αμοιβαίων Κεφαλαίων**, οι οποίες τοποθετούν τις καταθέσεις των ατόμων στην αγορά κυβερνητικών ομολόγων και ομολόγων ανωνύμων εταιρειών.

3. Οι **Πιστωτικές Ενώσεις** που είναι χρηματοδοτικοί οργανισμοί που δημιουργούνται από υπαλλήλους επιχειρήσεων και σαν σκοπό τους έχουν τη χορήγηση χαμηλότοκων δανείων στα μέλη τους.

4. Οι **Ασφαλιστικές Εταιρείες**, οι οποίες πωλούν ασφάλειες ζωής και τις ασφαλιστικές εισφορές των ασφαλιζομένων τους τις τοποθετούν σε μετοχές και σε ομολογίες ανώνυμων εταιρειών.

5. Οι **Εταιρείες Επενδύσεων Κεφαλαίων**, οι οποίες δέχονται τις αποταμιεύσεις των ατόμων δίδοντάς τους ως αντάλλαγμα μετοχές τους, οι οποίες αποφέρουν σταθερές χρηματικές αποδόσεις, αφού οι εταιρείες αυτές επενδύουν τα κεφάλαιά τους σε μεγάλη ποικιλία ομολογιών και μετοχών, ελαχιστοποιώντας έτσι τους κινδύνους.

Παράλληλα, πρέπει να πούμε ότι οι τρεις πιο συνηθισμένοι τρόποι επένδυσης χρηματικών κεφαλαίων που ακολουθούνται από τους καταναλωτές και από τους χρηματοδοτικούς οργανισμούς είναι:

α: η κατάθεση χρημάτων σε τράπεζες

μ: η αγορά μετοχών

ο: η αγορά ομολόγων (κρατικών ή μη)

Υποθετικό παράδειγμα: Έστω ότι με Κ συμβολίζουμε τους καταναλωτές, με Ε τις Εμπορικές Τράπεζες, με Α τις Τράπεζες Αμοιβαίων Κεφαλαίων, με Π τις Πιστωτικές Ενώσεις, με Τ τις Ασφαλιστικές Εταιρείες, με U τις Εταιρείες Επενδύσεων Κεφαλαίων, ενώ παράλληλα η σειρά προτίμησης των επενδυτικών επιλογών όλων των παραπάνω είναι η ακόλουθη:

$$\alpha \succ \mu \succ o = K$$

$$\alpha \succ o \succ \mu = E$$

$$\mu \succ \alpha \succ o = A$$

$$\mu \succ o \succ \alpha = \Pi$$

$$o \succ \alpha \succ \mu = T$$

$$o \succ \mu \succ \alpha = U$$

Εδώ σκοπός μας είναι να εξετάσουμε τους επενδυτές και όχι τις επενδυτικές τους επιλογές (δηλαδή τις γνώμες τους) και εν συνεχεία να τους απεικονίσουμε σε σχήματα ίσων αποστάσεων.

Με βάση τη μέθοδο Borda:

Η οποία δεν εξετάζει τις γνώμες αλλά τα άτομα που εκφέρουν τις γνώμες, συγκρίνοντας τις σειρές προτιμήσεών τους και με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα που απεικονίζει τις σειρές προτίμησης επενδυτικών επιλογών των K, E, A, Π, T και U θα προσπαθήσουμε να οργανώσουμε το σύνολο των 6 γνωμών τους σε σχήματα ίσων αποστάσεων (οι γνώμες των επενδυτών αναγκαστικά είναι $3! = 6$ γιατί μεταθέτουμε τρεις επενδυτικές επιλογές).

Έτσι το K με το U, το E με το Π και το A με το T είναι «διαμετρικά αντίθετα».

Επίσης σύμφωνα με τη μέθοδο του Condorcet έχουμε:

	δηλ	$(\alpha \succ \mu)$ και $(\alpha \succ o)$ και
$\alpha \succ \mu \succ o$	δηλ	$(\alpha \succ o)(\mu \succ o)(\alpha \succ \mu)$ και
$\alpha \succ o \succ \mu$	δηλ	$(\mu \succ \alpha)(o \succ \mu)(\mu \succ o)$ και
$\mu \succ \alpha \succ o$	δηλ	$(\mu \succ o)(\alpha \succ o)(\mu \succ \alpha)$ και
$\mu \succ o \succ \alpha$	δηλ	$(o \succ \alpha)(o \succ \alpha)(\alpha \succ \mu)$ και
$o \succ \alpha \succ \mu$	δηλ	$(o \succ \mu)(o \succ \mu)(\mu \succ \alpha)$ και
$o \succ \mu \succ \alpha$		$(o \succ \alpha)$

Έχοντας, λοιπόν, υπόψη μας όλα τα προηγούμενα μπορούμε να μετρήσουμε τις ασυμφωνίες μεταξύ των 6 επενδυτών (K, E, A, Π, T, U) συμβολίζοντας με $D(x, y)$ τον αριθμών των ασυμφωνιών μεταξύ δύο τυχαίων επενδυτών x και y.

Οπότε θα έχουμε:

$D(K, E) = 1$ αφού $\alpha \succ \mu \succ o = K$ $\alpha \succ o \succ \mu = E$

$D(K, A) = 1$ αφού $\alpha \succ \mu \succ o = K$ $\mu \succ \alpha \succ o = A$

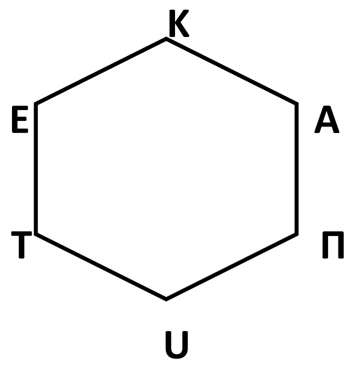
ομοίως:

$D(E, T) = 1$ $D(A, \Pi) = 1$ $D(T, U) = 1$ $D(\Pi, U) = 1$

$D(K, T) = 2$ $D(K, \Pi) = 2$ $D(E, U) = 2$ $D(A, U) = 2$

$D(K,U)=3$, αυτός είναι και ο μέγιστος αριθμός ασυμφωνιών.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να φανούν διαγραμματικά (ή σχηματικά) στα ακόλουθα σχήματα ίσων αποστάσεων:



Δηλαδή

$K \to E$ υπάρχει 1 ασυμφωνία

$K \to A$ υπάρχει 1 ασυμφωνία

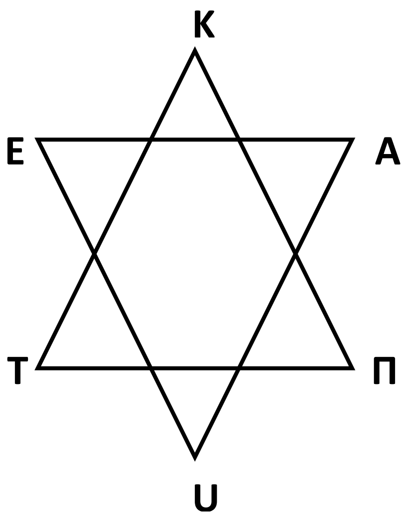
$K \to T$ υπάρχουν 2 ασυμφωνίες

$K \to \Pi$ υπάρχουν 2 ασυμφωνίες

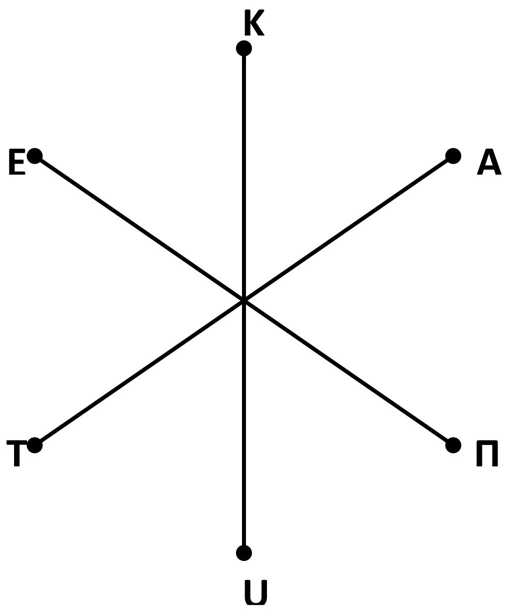
$K \to U$ υπάρχουν 3 ασυμφωνίες

κ.λπ.

Στο προηγούμενο σχήμα μεταξύ των δύο διπλανών επενδυτών (π.χ. μεταξύ των Κ και Ε) υπάρχει απόσταση ένα ή αλλιώς υπάρχει μία ασυμφωνία.



Στο διπλανό σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ των επενδυτών είναι ίσες με 2, δηλαδή αυτό το σχήμα μας δείχνει όλα τα ζευγάρια των επενδυτών που έχουν 2 ασυμφωνίες.

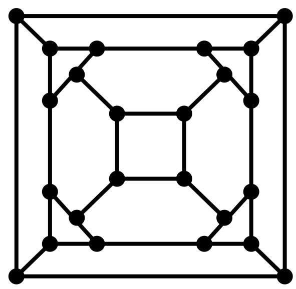


Στο διπλανό σχήμα ίσων αποστάσεων 3 μας δείχνει όλα τα ζευγάρια των επενδυτών που έχουν 3 ασυμφωνίες στις επενδυτικές τους επιλογές.

Αν είχαμε $n = 4$ επενδυτικές επιλογές (ή γενικά γνώμες) τότε θα είχαμε ένα σχήμα παρόμοιο με το διπλανό, στο οποίο παρατηρούμε ότι σχηματίζονται:

6 τετράπλευρα

και 8 εξάγωνα (ή εξάπλευρα)



Η επόμενη εφαρμογή που ακολουθεί αποδεικνύει σχηματικά την κατεύθυνση ενός δικτύου τεσσάρων γνωμών και κάποια επιπλέον στοιχεία που βοηθούν ένα παρατηρητή να έχει μία ολοκληρωμένη εικόνα ενός συμβάντος (γεγονότος).

3.10 Μονοκόρυφες επιλογές.

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.1, η μέθοδος ανάδειξης συλλογικής γνώμης κατά Condorcet πάσχει διότι δεν είναι μεταβατική, δηλαδή δεν ισχύει πάντα η πρόταση: αν $x \succ y \, και \, y \succ z \Rightarrow x \succ z$. Σε πολλές περιπτώσεις είναι δυνατό οι επιλογές να διαταχθούν ακολουθώντας μια «φυσική σειρά». Για παράδειγμα αν οι επιλογές είναι τα ποσά που θα διατεθούν σε μια δραστηριότητα, μπορούν να διαταχθούν από το μεγαλύτερο στο μικρότερο, αν οι επιλογές είναι μεταξύ κομμάτων, μπορούν να διαταχθούν με βάση τη θέση τους στο πολιτικό φάσμα από το δεξιότερο στο αριστερότερο, αν οι επιλογές είναι μεταξύ διαφορετικών επενδύσεων μπορούν να διαταχθούν από την περισσότερο στη λιγότερο ασφαλή, κλπ.

Έστω το σύνολο $X=\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ οι δυνατές επιλογές οι οποίες είναι διατεταγμένες με αυτή τη σειρά, δηλαδή, υπάρχει σχέση διάταξης $\succ_o$ βάσει της οποίας, $X_1 \succ_o X_2 \succ_o \ldots \succ_o X_k$. Από το σύνολο Χ επιλέγουν τις προτιμήσεις τους N ψηφοφόροι. Για κάθε ψηφοφόρο i ορίζεται συνάρτηση $u_i : X \to \{1, 2, \ldots K\}$ που απεικονίζει την σειρά κατάταξης του κάθε ψηφοφόρου. Η προτίμηση του ψηφοφόρου i είναι η X_i^* και $X^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_N^*\}$ είναι το σύνολο των προτιμήσεων των ψηφοφόρων.

Τότε, ο ψηφοφόρος i έχει μονοκόρυφες επιλογές (με άνω κορυφή) αν δεν υπάρχει επιλογή X_j για την οποία να ισχύει: $X_{j-1} \succ_i X_j \; και \; X_{j+1} \succ_i X_j$.

Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται [Black,1958] ότι η μέθοδος σύνθεσης συλλογικής γνώμης του Condorcet, δηλαδή ο κανόνας πλειοψηφίας ανά κάθε ζεύγος επιλογών είναι μεταβατική, συνεπώς, δεν εμφανίζεται ο κύκλος που οδηγεί στο παράδοξο. Η μεταβατικότητα στη σύνθεση της συλλογικής γνώμης στηρίζεται στο **θεώρημα του διάμεσου**, σύμφωνα με το οποίο, όταν οι σειρές κατάταξης όλων των ψηφοφόρων είναι μονοκόρυφες, η προτίμηση του μέσου ψηφοφόρου είναι η προτίμηση της ομάδας. Με τον όρο «μέσος ψηφοφόρος» νοείται εκείνος ο ψηφοφόρος που η προτίμησή του είναι η διάμεσος της κατανομής των προτιμήσεων όλων των ψηφοφόρων.

Έστω X_m^* η διάμεσος των προτιμήσεων X^* , δηλαδή, ισχύει ότι αν:

$$N_R \; ο \; αριθμός \; των \; X_i^* \; με \; X_i^* \geq X_m^* \; και \; N_L \; ο \; αριθμός \; των \; X_i^* \; με \; X_i^* \leq X_m^*,$$

τότε $N_R \geq \dfrac{N}{2} \; και \; N_L \geq \dfrac{N}{2}$

Σε αυτή την περίπτωση η δημιουργία της σειράς κατάταξης κατά Condorcet δημιουργείται ως εξής:

Προτίμηση των N ψηφοφόρων είναι η προτίμηση του μέσου ψηφοφόρου, δηλαδή η διάμεσος των προτιμήσεων. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της διαμέσου, αφού είτε το X_m συγκρίνεται με προτίμηση X_i που βρίσκεται είτε 'δεξιά του', είτε 'αριστερά του', πάντα υπάρχουν $\dfrac{N}{2}+1$ ψηφοφόροι που προτιμούν την τιμή X_m . Έτσι, η πρώτη προτίμηση στην κατάταξη είναι η X_m . Στη συνέχεια, από το σύνολο X

απομακρύνουμε την επιλογή X_m . Στο νέο σύνολο προτιμήσεων $X^{/^*}$ η διάμεσος $X_m^/$ είναι κυριαρχούσα προτίμηση και συνεπώς, η δεύτερη στην κατάταξη. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθούν οι προτιμήσεις και έτσι να προκύψει η συνολική σειρά προτιμήσεων στην οποία ισχύει η μεταβατική ιδιότητα.

3.11 Αλγοριθμική Διάταξη Προτεραιότητας

Στις μέρες μας ένα από τα πιο βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν αυτοί που παίρνουν αποφάσεις είναι να παίρνουν αποφάσεις στηριζόμενοι σε ακριβή δεδομένα. Η διαδικασία είναι παρόμοια

Εμείς θα ασχοληθούμε συγκεκριμένα με δεδομένα διάταξης και θα δείξουμε πως αυτοί που παίρνουν αποφάσεις μπορούν να πάρουν καλύτερες σε περιπτώσεις μιας ομάδας-παρατηρητών που έχουν διάφορες προτιμήσεις ανάμεσα σε ένα σύνολο πιθανών συνδυασμών.

Η έρευνα απηχεί σε μεγάλο εύρος εφαρμογών, αφού οι «μεταθέσεις» βρίσκουν εφαρμογή σε αρκετές περιπτώσεις όπως σε εκλογικές αναμετρήσεις, επιλογές αγαθών, επενδύσεων, διάταξη μηχανημάτων κ.α.

Τα δεδομένα διάταξης αντιπροσωπεύονται με τις ακόλουθες μορφές

- Με αριθμητική κλίμακα (1….10 ή 1…..100).
- Με ποσοτική κλίμακα (υπέροχο, πολύ καλό, καλό, μέτριο, άσχημο).
- Με ειδική κλίμακα (εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του αντικειμένου που εκτιμάται, π.χ. ψηλό, κοντό, παχύ, λεπτό).

Στις ανωτέρω κατηγορίες οι μόνες επιτρεπόμενες σχέσεις είναι «το πολύ» $\precsim$ και «τουλάχιστον» $\succsim$. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε γίνονται πιο περίπλοκα όσο ο αριθμός των ατόμων και των επιλογών αυξάνονται. Πολλές θεωρίες έχουν αναπτυχθεί σ' αυτό το θέμα και οι πιο σημαντικές από αυτές παρουσιάζονται παρακάτω :

- **Το κριτήριο του Kaldor :** σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, εάν έχουμε δύο καταστάσεις (states) A, B και δύο πρόσωπα X, Y (όπου το X πρόσωπο προτιμά την A κατάσταση ενώ το πρόσωπο Y προτιμά την B) μπορούμε να πούμε ότι $A \succ B$ εάν το πρόσωπο X μπορεί να αποζημιώσει το πρόσωπο Y επικερδώς.

- **Το κριτήριο του Hicks :** σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, εάν έχουμε δύο καταστάσεις A, B και δύο πρόσωπα X, Y (όπου το X πρόσωπο προτιμά την A κατάσταση ενώ το πρόσωπο Y προτιμά την B) μπορούμε να πούμε ότι $A \succ B$ εάν το πρόσωπο Y δεν μπορεί να δωροδοκήσει το πρόσωπο X επικερδώς.
- **Το κριτήριο του Scitovski :** για να συμβεί αυτό το κριτήριο πρέπει το κριτήριο του Kaldor και το κριτήριο του Hicks να πληρούνται ταυτόχρονα.

Επιπλέον, έχουμε την μέθοδο της ψήφου για να πάρουμε αποφάσεις βασιζόμενοι στα δεδομένα διάταξης. Σ' αυτή την μέθοδο έχουμε το παράδοξο της πλειοψηφίας των ψήφων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις κοινωνικοοικονομικές τάξεις X, Y, Z και το εκλογικό σώμα αποτελείται από τρία άτομα A, B και Γ. Ο πίνακας 1 δείχνει τις ταξινομήσεις των τάξεων X, Y, Z σύμφωνα με τις προτιμήσεις των A, B, Γ. Για παράδειγμα το άτομο A προτιμά να επιλέξει την τάξη X από την Y, ενώ ταυτόχρονα προτιμά την τάξη Y από την Z. Είναι φανερό ότι η ταυτόχρονη ψήφος και για τις τρεις κοινωνικοοικονομικές τάξεις δεν οδηγεί σε κανένα συμπέρασμα. Πράγματι το άτομο A προτιμά την τάξη X, το άτομο B προτιμά την τάξη Y και το άτομο Γ την τάξη Z. Συνεπώς, για να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα θα πρέπει να συγκρίνουμε τις κοινωνικοοικονομικές τάξεις σε ζευγάρια των δύο.

ΕΚΛΕΚΤΟΡΕΣ / **ΚΑΤΑΤΑΞΗ**	**A**	**B**	**Γ**
Πρώτος	**X**	**Y**	**Z**
Δεύτερος	**Y**	**Z**	**X**
Τρίτος	**Z**	**X**	**Y**

Πίνακας 1

Ανάμεσα στις κοινωνικοοικονομικές τάξεις X και Y, αυτή που υπερέχει στους ψήφους είναι η X, επειδή:

$X \succ Y$ για το A, $X \prec Y$ για το B, $X \succ Y$ για το Γ.

Είναι προφανές ότι η κοινωνικοοικονομική τάξη X παίρνει δύο ψήφους από τους τρεις. Επιπλέον, ανάμεσα στις τάξεις Y και Z παρατηρούμε ότι η τάξη Y συγκεντρώνει την πλειοψηφία των ψήφων γιατί :

$$Y \succ Z \text{ για το Α}, \quad Y \succ Z \text{ για το Β}, \quad Y \prec Z \text{ για το Γ}.$$

Τέλος, ανάμεσα στο X και Z, η κατάσταση Z ψηφίστηκε από τα άτομα Β, Γ και έχει την πλειοψηφία των ψήφων.

$$X \succ Z \text{ για το Α}, \quad X \prec Z \text{ για το Β}, \quad X \prec Z \text{ για το Γ}.$$

Από τις τρεις παραπάνω διαδοχικές ψηφοφορίες, έχουμε τις ακόλουθες συγκεντρωτικές προτιμήσεις.

$$X \succ Y, \quad Y \succ Z, \quad X \prec Z .$$

Οι ανωτέρω συγκεντρωτικές προτιμήσεις δεν έχουν συνέπεια.

Θα παρουσιάσουμε μεθοδολογίες υποστηρίζοντας την ordinal scale data. Πρωτίστως πρέπει να κάνουμε έναν διαχωρισμό ανάμεσα σε δύο κατηγορίες σύμφωνα με τον αριθμό των σχέσεων που δίνονται. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει την περίπτωση όπου ο αριθμός των διατάξεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των πιθανών συνδυασμών (σ΄αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται δύο μεθοδολογίες). Στη δεύτερη κατηγορία είναι ισάριθμες οι διατάξεις και οι πιθανοί συνδυασμοί (αυτή η μεθοδολογία βασίζεται στην Black’s permutation [E. Foundas, D. Derpanis, 2006]

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε έξι διαφορετικές καταστάσεις και δύο πρόσωπα. Σ΄ αυτή την περίπτωση οι πιθανοί συνδυασμοί είναι $\frac{6!}{2!*(6-2)!}$, δηλαδή δεκαπέντε. Έτσι, εάν έχουμε 15 order relationships είμαστε στην δεύτερη κατηγορία, ενώ αν έχουμε λιγότερες είμαστε στην πρώτη κατηγορία.

3.11.1 Αλγόριθμος προτεραιοποίησης

Παραθέτουμε αλγόριθμο για το σχηματισμό συλλογικής σειρά κατάταξης προτεραιοτήτων που αναφέρονται σε καταστάσεις ενός προβλήματος με βάση ατομικές προτιμήσεις. [Ε. Φούντας, Α. Βλάχος, Μαθηματικά Αποφάσεων].

Βήμα 1: Τοποθετούμε στη σειρά τις προτεραιότητες κατάστασης του προβλήματος.

Βήμα 2: Ξεκινώντας από την πρώτη προτεραιότητα, ελέγχουμε ότι κάθε προτεραιότητα ικανοποιείται. Εάν είναι έτσι, μετά προχωράμε στην επόμενη προτεραιότητα, διαφορετικά βλέπουμε ότι ικανοποιείται προσθέτοντας ένα πόντο στον συντελεστή που προηγείται της προτεραιότητας που εξετάζουμε.

Βήμα 3: Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία που περιγράφεται στο βήμα 2 μέχρι να πληρούνται όλες οι απαιτήσεις.

Βήμα 4: Φτιάχνουμε ένα γράφημα σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουν προκύψει, όπου κάθε καταχώρηση αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον αλγόριθμο θα αναλύσουμε ένα παράδειγμα. Έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις προτεραιότητας :

$$Α \succ Β,\ Α \succ Γ,\ Α \succ Ε,$$

$$Β \succ Ε,$$

$$Γ \succ Β,$$

$$Δ \succ Α,\ Δ \succ Ε,\ Δ \succ Ζ,$$

$$Ζ \succ Γ,\ Ζ \succ Ε.$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις κατασκευάζουμε πίνακα με στοιχεία 0,1. Το στοιχείο 1 εκφράζει τη σύνδεση των κόμβων, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση προτεραιότητας. Όταν δύο κόμβοι δεν συνδέονται, με την ικανοποίηση της αντίστοιχης σχέσης προτεραιότητας, τότε στην αντίστοιχη θέση του πίνακα τοποθετείται το 0.

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
Α	0	1	1	0	1	0
Β	0	0	0	0	1	0
Γ	0	1	0	0	0	0
Δ	1	0	0	0	1	1
Ε	0	0	0	0	0	0
Ζ	0	0	1	0	1	0

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε τις στήλες S, S_1, S_2, S_3, S_4 ως εξής:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	S	S1	S2	S3	S4
Α	0	1	1	0	1	0	3	2	1	0	x
Β	0	0	0	0	1	0	1	0	x	x	x
Γ	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	x
Δ	1	0	0	0	1	1	3	2	2	2	0
Ε	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x
Ζ	0	0	1	0	1	0	2	1	1	0	x
							Ε	Β	Γ	Α,Ζ	Δ

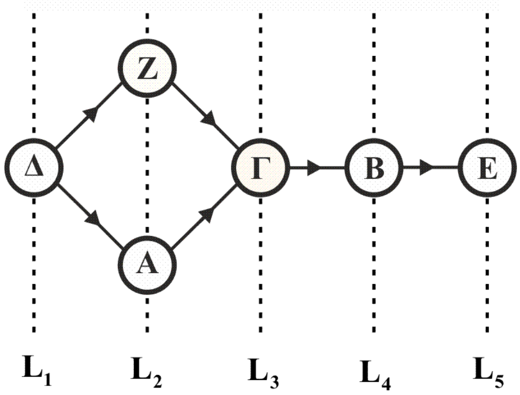
- Η στήλη S περιλαμβάνει το άθροισμα των στοιχείων όλων των στηλών του πίνακα. Η ύπαρξη του μηδενικού στη στήλη S το οποίο αντιστοιχεί στον κόμβο Ε σημαίνει ότι αυτός ο κόμβος δεν προηγείται άλλων, οπότε ανήκει στην τελευταία στάθμη.

- Η στήλη S_1 περιέχει τις διαφορές των στοιχείων της στήλης Ε από τα αθροίσματα S. Η ύπαρξη του μηδενικού στη στήλη S_1 το οποίο αντιστοιχεί στον κόμβο Β σημαίνει ότι αυτός ο κόμβος δεν προηγείται άλλων, οπότε ανήκει στην προτελευταία στάθμη.
- Η στήλη S_2 περιέχει τις διαφορές των στοιχείων της στήλης Β από τα αθροίσματα S_1. Η ύπαρξη του μηδενικού στη στήλη S_2 το οποίο αντιστοιχεί στον κόμβο Γ σημαίνει ότι αυτός ο κόμβος δεν προηγείται άλλων, οπότε ανήκει στην προηγούμενη της προτελευταίας στάθμης.
- Η στήλη S_3 περιέχει τις διαφορές των στοιχείων της στήλης Γ από τα αθροίσματα S_2. Η ύπαρξη του μηδενικού στη στήλη S_3 τα οποία αντιστοιχούν στους κόμβους Α, Ζ σημαίνει ότι αυτοί οι κόμβοι ανήκουν στην προηγούμενη στάθμη από τη στάθμη του κόμβου Γ.
- Η στήλη S_4 περιέχει τις διαφορές των στοιχείων της στήλης Α και Ζ από τα στοιχεία της στήλης S_3. Η ύπαρξη του μηδενικού στη στήλη S_4 το οποίο αντιστοιχεί στον κόμβο Δ σημαίνει ότι ο κόμβος Δ ανήκει στην πρώτη στάθμη.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο :

Α = 3, Β = 1, Γ = 2, Δ = 4, Ε = 0, Ζ = 3.

Το παρακάτω, γράφημα (1) απεικονίζει το αποτέλεσμα βασισμένο στις προτεραιότητες που έχουμε δώσει:



Γράφημα 1

Κατά συνέπεια οι επιλογές προτεραιοποιούνται ως εξής :

1. ΔΑΓΒΕ
2. ΔΖΓΒΕ

Κεφάλαιο 4

Λύση διαπραγματευτικού προβλήματος - Nash

4.1 Γενικά

Οι καταστάσεις διαπραγμάτευσης είναι ένα πρακτικό παιγνιο-θεωρητικό πρόβλημα το οποίο, για παράδειγμα, αγοραστές και πωλητές συναντούν την πραγματική ζωή.

Ένα βασικό διαπραγματευτικό μοντέλο, είναι το «μοίρασμα της πίτας», το οποίο πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι αποδεκτός και από τους δύο παίκτες, αλλά εντός αυτού του πλαισίου, ο παίκτης να μπορεί μόνο να ωφελείται εις βάρος του άλλου. Το ερώτημα είναι, με ποιο τρόπο μπορεί να μοιραστεί η πίτα δίκαια. Στην προπτυχιακή του διατριβή, ο John Nash πρότεινε ένα σύστημα «αξιωμάτων», ή φυσικών συνθηκών, τα οποία θα επέτρεπαν μία αμερόληπτη κρίση που να καταλήγει σε μία δίκαιη «διαπραγματευτική λύση». Ο Nash έδειξε, ότι αυτά τα αξιώματα συνεπάγονται πάντα μία μοναδική λύση, η οποία είναι εύκολο να υπολογιστεί.

Τα παιγνιο-θεωρητικά μοντέλα, τα οποία σε αντίθεση με τη διαπραγματευτική λύση Nash, είναι μη συνεργάσιμα (non-co-operative), υπό την έννοια ότι οι παίκτες δεν έχουν δυνατότητα ορθολογικής κρίσης. Η βασική ιδεά που ανήκει στον Rubinstein είναι ότι η διαπραγμάτευση μοντελοποιείται με παίκτες, οι οποίοι κάνουν εναλλάξ προσφορές, τις οποίες ο άλλος παίκτης καλείται να αποδεχθεί ή να απορρίψει. Η ανάλυση αυτού του παιγνίου, χρησιμοποιεί τη μελέτη για τα παίγνια δέσμευσης, όπου ο κάθε παίκτης δεσμεύεται από την προσφορά του μέχρι τον επομενο γύρο. Η βασικότερη μορφή είναι αυτή του «τελεσιγραφικού παιγνίου» που αποτελείται από μία απλή προσφορά η οποία μπορεί αποκλειστικά είτε να γίνει αποδεκτή, είτε να απορριφθεί (take it or leave it offer).

Με εναλλάξ προσφορές για πολλούς γύρους, υπάρχει πιθανότητα σε κάθε επίπεδο, το παίγνιο να μην προχωράει στον επόμενο γύρο, με αποτέλεσμα οι παίκτες να μην καταλήγουν πουθενά, διότι δε μπορούν να συμφωνήσουν. Το αποτέλεσμα αυτού του φαινομένου, είναι ο «εκπτωτικός παράγοντας» ο οποίος ποσοτικοποιεί το εύρος κατά το οποίο μία προηγούμενη συμφωνία είναι καλύτερη από μία μεταγενέστερη.

Σκεπτόμενοι μελλοντικά, οι βέλτιστες τακτικές των παικτών, ορίζουν ακολουθίες εναλλάξ προσφορών, με συμφωνία από τον πρώτο γύρο. Αυτό μπορεί να γίνει μέσα σε ένα σταθερό πλήθος γύρων ή με «στάσιμες τακτικές» για ένα άπειρο πλήθος διαπραγματευτικών γύρων, όπου ουσιαστικά, το παίγνιο επαναλαμβάνεται κάθε δύο γύρους, όταν επιστρέφει στον ίδιο παίκτη για να κάνει προσφορά.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναλύσουμε το παίγνιο της διαπραγμάτευσης κατά Rubinstein.

4.2 Διαπραγματευτικά σύνολα

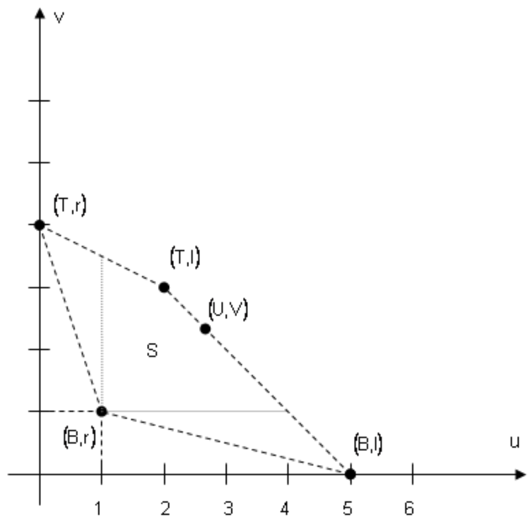
Ας εξετάσουμε την παραλλαγή του παιγνίου του διλήμματος του φυλακισμένου που φαίνεται στο σχήμα 4.1. Η στρατηγική B του παίκτη I κυριαρχεί της T, και η r κυριαρχεί της l, έτσι ώστε η μοναδική ισορροπία Nash του παιγνίου να είναι η (B,r) με όφελος 1 και για τους δύο παίκτες. Το αποτέλεσμα (T,l) θα έδινε οφέλη 2 και 3 στους παίκτες I και II, τα οποία είναι εμφανώς καλύτερα.

$$G = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l & r \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} (2,3) & (0,4) \\ (5,0) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Σχήμα 4.1

Υποθέτουμε ότι οι παίκτες μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους και ότι έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν μία συμφωνία η οποία τους δεσμεύει, για παράδειγμα, με την θέσπιση μιας νομικής σύμβασης την οποία θα είναι εξαιρετικά δαπανηρή να την σπάσουν.

Το πρώτο βήμα, είναι να μοντελοποιήσουμε αυτά που μπορούν οι παίκτες να κατορθώσουν με μία συμφωνία, περιγράφοντας ένα «διαπραγματευτικό σύνολο» από πιθανά ζεύγη διαπραγματεύσιμων οφελών. Υποθέτουμε ότι οι παίκτες συμφωνούν να παίξουν με οποιοδήποτε από τα κελιά του πίνακα οφελών. Τα ζεύγη ωφέλειας (u,v) που προκύπτουν είναι κουκίδες ενός δισδιάστατου διαγράμματος με οριζόντια συντεταγμένη την *u* (ωφέλεια του παίκτη I) και κάθετη συντεταγμένη τη *v* (ωφέλεια του παίκτη II). Αυτές οι κουκίδες παρουσιάζονται στο σχήμα με τα αντίστοιχα ζεύγη τακτικής να σημειώνονται από πάνω (π.χ. *T, l* σημειώνεται στο ζεύγος ωφέλειας (2, 3)).



Σχήμα 4.2 Διαπραγματευτικό σύνολο «S», και διαπραγματευτική λύση (u,v)

Η κυρτή επιφάνεια αυτών των ζευγαριών ωφέλειας παρουσιάζεται με ανοιχτό και σκούρο γκρι στο σχήμα. Κάθε τέτοιος κυρτός συνδυασμός, προκύπτει από μία κλήρωση (lottery) ενώσεων, τις οποίες οι παίκτες έχουν αποφασίσει να παίξουν, ως πιθανό αποτέλεσμα της συμφωνίας τους. Για παράδειγμα, το ζεύγος ωφέλειας (1.5, 2) θα ήταν η προσδοκώμενη ωφέλεια, εάν οι παίκτες είχαν αποφασίσει να ρίξουν ένα δίκαιο κέρμα, και, αναλόγως το αποτέλεσμα, να έπαιζαν είτε την ένωση (T,l) ή την (B,r). Υποθέτουμε, ότι το παίξιμο αυτό, είναι τμήμα της σύμβασης των παικτών την οποία είναι υποχρεωμένοι να τηρήσουν.

Για παράδειγμα, ο παίκτης I δε θα συμφωνούσε να επιλέξουν και οι δύο παίκτες μόνο το στρατηγικό ζεύγος (T,r) στο οποίο (ο παίκτης I) παίρνει όφελος μηδέν. Η εξήγηση είναι, ότι χωρίς κάποια συμφωνία, ο παίκτης I μπορεί να επιλέξει τη max-min στρατηγική *B* η οποία του εξασφαλίζει όφελος 1, ανεξάρτητα από το τι κάνει ο άλλος παίκτης. Για τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, μία max-min στρατηγική μπορεί να είναι μία μεικτή στρατηγική. Στο παίγνιο του διλήμματος του φυλακισμένου, έχουμε μία καθαρή στρατηγική που ουσιαστικά είναι η κυρίαρχη στρατηγική. Έτσι, ζητάμε κάθε συμφωνηθέν αποτέλεσμα της διαπραγματευτικής κατάστασης να δίδει τουλάχιστον σε κάθε παίκτη το max-min όφελός του (το οποίο, ως συνήθως, ορίζεται μέσω των οφελών κάθε παίκτη).

Το διαπραγματευτικό σύνολο *S* που προκύπτει από ένα παίγνιο δύο παικτών σε στρατηγική μορφή, ορίζεται ως η κυρτή επιφάνεια των ζευγαριών ωφέλειας, με τον επιπρόσθετο περιορισμό $u \geq u_0$ και $v \geq v_0$ για όλα τα $(u,v) \in S$, όπου u_0 είναι το max-min όφελος του παίκτη I και v_0 είναι το max-min όφελος του παίκτη II. Το σημείο (u_0, v_0) αντιπροσωπεύει τις ωφέλειες των παικτών σε περίπτωση διαφωνίας. Το σύνολο *S* που προκύπτει, φαίνεται στο σχήμα 4.2. Δηλαδή, στην περίπτωσή μας το σύνολο S είναι το [1,3]x[1,5]

4.3 Διαπραγματευτικά αξιώματα κατά Nash

Η αξιωματική προσέγγιση που ακολούθησε ο Nash για την ανάλυση της διαπραγμάτευσης μεταξύ δύο παικτών συνίσταται στο να αγνοήσει τις λεπτομέρειες μιας πραγματικής διαπραγμάτευσης και να έχει σαν σημείο εκκίνησης το σύνολο των πιθανών ωφελειών, καθώς και το σημείο διαφωνίας – απειλής. Σε αυτό το πλαίσιο, θεωρούμε τις διαπραγματευτικές καταστάσεις μοντελοποιημένες ως διαπραγματευτικά σύνολα και προσπαθούμε να βρούμε μία «λύση» για κάθε τέτοια κατάσταση. Στα παρακάτω ορίζουμε την έννοια του διαπραγματευτικού προβλήματος και περιγράφουμε τη λύση που έδωσε ο Nash τη δεκαετία του 50, και η οποία έκτοτε έχει αποτυπωθεί σε πολλά βιβλία της θεωρίας παιγνίων.

Ορισμός 1: Διαπραγματευτικό πρόβλημα είναι ένα ζεύγος $\langle S, d \rangle$ όπου $S \subset R^2$ είναι μη κενό, συμπαγές και φραγμένο σύνολο, το σημείο $d = (u_0, v_0) \in S$ και υπάρχει $(u,v) \in S : u > u_0,\ v > v_0$. Το σύνολο των διαπραγματευτικών προβλημάτων είναι το σύνολο B.

Το διαπραγματευτικό πρόβλημα προκύπτει βέβαια από διαπραγμάτευση στην πραγματική ζωή. Οι διαπραγματεύσεις μεταξύ δύο παικτών που απεικονίζονται με το ίδιο διαπραγματευτικό πρόβλημα αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο, ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες της πραγματικής διαπραγμάτευσης.

Όσον αφορά τις ιδιότητες του συνόλου *S*, το ότι το σύνολο είναι φραγμένο και συμπαγές σημαίνει ότι οι ωφέλειες που μπορούν να προκύψουν ως αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης είναι περιορισμένες και ότι μπορεί να υπάρξει λύση από κάποιου είδους μεγιστοποίηση.

Οι συνθήκες σχετικά με αυτό το μοντέλο, ονομάζονται αξιώματα και αφορούν το ίδιο το διαπραγματευτικό σύνολο, καθώς και τη λύση που επιθυμεί κάποιος να πάρει για κάθε τέτοιο σύνολο. Η κυρτότητα σημαίνει ότι οι παίκτες έχουν τη δυνατότητα να κάνουν κληρώσεις ενώσεων. Το σημείο απειλής *d*, (u_0, v_0) είναι το ζεύγος ωφελειών το οποίο εξασφαλίζει ο κάθε παίκτης αν προκύψει διαφωνία και αφού υπάρχει $(u,v)\in S: u > u_0,\ v > v_0$ σημαίνει ότι υπάρχει μια τουλάχιστον συμφωνία που εξασφαλίζει καλύτερες ωφέλειες στους παίκτες από τη διαφωνία, συνεπώς, οι παίκτες έχουν κίνητρο να φθάσουν σε συμφωνία αν και βέβαια υπάρχει σύγκρουση συμφερόντων όσον αφορά το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης.

Το διαπραγματευτικό σύνολο S που έχει κατασκευαστεί από το παίγνιο bimatrix του σχήματος 4.1 ικανοποιεί τα αξιώματα του ορισμού.

Ορισμός 2: Διαπραγματευτική λύση είναι συνάρτηση $f : \mathrm{B} \to R^2$ που αντιστοιχίζει σε κάθε διαπραγματευτικό πρόβλημα $\langle S, d \rangle$ ένα σημείο του *S*. Τέτοιες συναρτήσεις *f* μπορούν να θεωρηθούν σαν διαδικασία διαιτησίας ή σαν συναρτήσεις ωφέλειας που απεικονίζουν το αναμενόμενο όφελος της διαπραγμάτευσης [Roth, 1978].

Παραδείγματα διαπραγματευτικής λύσης:

- Η διαφωνία: Σε κάθε διαπραγματευτικό πρόβλημα αντιστοιχίζεται το σημείο απειλής – status quo.
- Η «διδακτορική λύση». Σε κάθε διαπραγματευτικό πρόβλημα αντιστοιχίζεται το σημείο μέγιστης ωφέλειας ενός παίκτη.
- Η λύση της ίσης απόστασης. Σε κάθε διαπραγματευτικό πρόβλημα αντιστοιχίζεται το σημείο $(s_1^*, s_2^*) : s_1^* - d_1 = s_2^* - d_2$

- Η λύση κατά Nash N(S) που προκύπτει ως η μοναδική λύση που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

Αξιώματα κατά Nash της διαπραγματευτικής λύσης. Για δεδομένο διαπραγματευτικό σύνολο *S*, με σημείο απειλής (u_0, v_0), μία διαπραγματευτική λύση *N*(*S*) είναι ένα ζεύγος τέτοιο $(U,V) \in S$ ώστε:

1. η λύση (U,V) είναι βέλτιστη κατά Pareto, δηλαδή, για κάθε $(u,v) \in S$, αν $u \geq U$ και $v \geq V$, τότε $(u,v) = (U,V)$,
2. είναι αμετάβλητο στις μεταβολές της κλίμακας ωφέλειας, δηλαδή, αν $a, c > 0, b, d \in \mathrm{R}$ και S' είναι το διαπραγματευτικό σύνολο $\{(au+b,\ cv+d) \mid (u,v) \in S\}$ με σημείο απειλής το $(au_0+b,\ cv_0+d)$, τότε $N(S') = (aU+b,\ cV+d)$,
3. διατηρεί τη συμμετρία, δηλαδή, εάν $u_0 = v_0$ και εάν για κάθε $(u,v) \in S$ ισχύει ότι και $(v,u) \in S$, τότε $U = V$,
4. είναι ανεξάρτητο από άσχετες (irrelevant) εναλλακτικές: Εάν *S*, *T* είναι διαπραγματευτικά σύνολα με το ίδιο σημείο απειλής και \` $S \subset T$, τότε είτε $N(T) \notin S$ ή $N(T) = N(S)$.

Η σημειογραφία $N(S)$, είναι ένας σύντομος τρόπος γραφής για την «διαπραγματευτική λύση Nash». Η λύση είναι ένα ζεύγος (U,V) από ωφέλειες των δύο παικτών το οποίο ανήκει στο διαπραγματευτικό σύνολο *S* βάσει του αξιώματος.

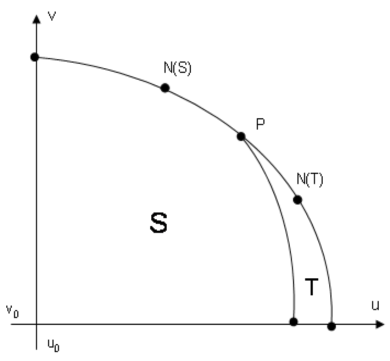
Το βέλτιστο κατά Pareto που δηλώθηκε στο (1), σημαίνει ότι δε είναι δυνατό να βελτιωθεί η λύση για τον ένα παίκτη δίχως να ζημιωθεί ο άλλος. Γραφικά, η λύση βρίσκεται στο άνω-δεξιά (ή βορειοανατολικό) σύνορο του διαπραγματευτικού συνόλου, το οποίο ονομάζεται και «σύνορο-Pareto» του συνόλου.

Η αδιαφορία, στις γραμμικές μεταβολές της ωφέλειας, όπως δηλώνει το (2) σημαίνει ότι η συνάρτηση ωφέλειας ενός παίκτη, μπορεί να αλλάξει, αλλάζοντας το «μέγεθός» της και το «σημείο βάσης» της, χωρίς να αλλάξει το νόημά της. Κάτι τέτοιο είναι ακριβές αντίστοιχο με την αλλαγή της κλίμακας μέτρησης της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ. Μια τέτοια αλλαγή για τον παίκτη I, σημαίνει ότι αντί του *u* παίρνουμε $au+b$, όπου τα *α* και *b* είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και $a > 0$. Όμοια, για τον παίκτη II, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το v με το $cv+d$ με τις σταθερές c, d και $c>0$. Κατά το σχεδιασμό του διαπραγματευτικού σύνολο S, όλα αυτά σημαίνουν ότι (με την πρόσθεση του b), η πρώτη συντεταγμένη οποιουδήποτε σημείου του συνόλου αυτού, μετακινείται κατά την ποσότητα b (προς τα δεξιά ή αριστερά ανάλογα με το αν το b είναι θετικός ή αρνητικός), και εκτίνεται σύμφωνα με τον παράγοντα α. Έτσι, το διαπραγματευτικό σύνολο S, αν $a>1$ επεκτείνεται, ενώ συρρικνώνεται, αν $a<1$.

Επειδή αυτή η μεταβολή κλίμακας, δεν αλλάζει το νόημα των τιμών ωφέλειας, η διαπραγματευτική λύση δεν θα πρέπει επίσης να επηρεάζεται.

Η διατήρηση της συμμετρίας, όπως δηλώθηκε στο (ζ), σημαίνει ότι ένα συμμετρικό διαπραγματευτικό σύνολο S, στο οποίο για κάθε (u,v) έχουμε $(u,v)\in S \Leftrightarrow (v,u)\in S$, και με σημείο απειλής της μορφής (u_0,v_0), θα έπρεπε να έχει επίσης μία διαπραγματευτική λύση της μορφής $N(S)=(U,V)$.

Η ανεξαρτησία από άσχετες εναλλακτικές (Indepedence of Irrelevant Alternatives – IIA) είναι το πιο πολύπλοκο αξίωμα. Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα, αυτό σημαίνει ότι: αν ένα διαπραγματευτικό σύνολο S, μεγεθύνεται και γίνεται ένα μεγαλύτερο σύνολο T που περιέχει τα επιπλέον σημεία (u,v), χωρίς όμως να αλλάζει το σημείο απειλής του, τότε είτε το T έχει μία διαπραγματευτική λύση $N(T)$ που είναι ένα από αυτά τα νέα σημεία, ή διαφορετικά είναι η ίδια λύση με την λύση $N(S)$. Δεν επιτρέπεται μία λύση T να μετακινείται σε ένα διαφορετικό σημείο, όπως είναι το P (σχήμα 4.3), το οποίο ανήκει ακόμα στην S.



Σχήμα 4.3 Τα διαπραγματευτικά σύνολα S, T.

Συνεπώς, με βάση το αξίωμα IIA η επιλογή του σημείου συμφωνίας της διαπραγμάτευσης δεν εξαρτάται από άλλα σημεία, παρά μόνο από το σημείο απειλής.

Τα αξιώματα (a)-(h) για ένα διαπραγματευτικό σύνολο και μία πιθανή διαπραγματευτική λύση, αποτελούν λογικές απαιτήσεις τις οποίες κάποιος πρέπει να χρησιμοποιεί σαν γενικές αρχές.

4.5 Η διαπραγματευτική λύση Nash

Θεώρημα Διαπραγματευτικά αξιώματα Nash. Κάθε διαπραγματευτικό σύνολο *S* που περιέχει ένα σημείο (u,v) με $u>u_0$ και $v>v_0$, έχει μία μοναδική λύση $N(S)=(U,V)$, η οποία λαμβάνεται ως το σημείο (u,v) και μεγιστοποιεί το γινόμενο γνωστό και ως γινόμενο Nash: $(u-u_0)(v-v_0)$ για $(u,v)\in S$

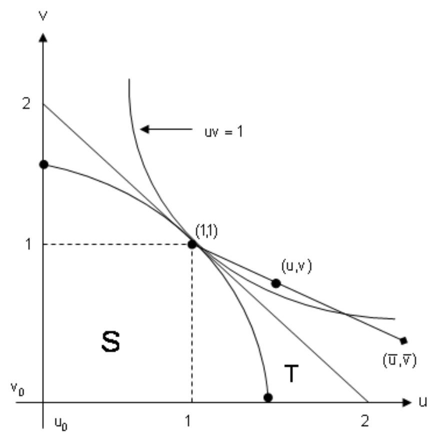
Απόδειξη Έστω ένα σύνολο $S'=\{(u-u_0,v-v_0)\,|\,(u,v)\in S\}$, το οποίο είναι το σύνολο *S* μεταφρασμένο, έτσι, ώστε το σημείο απειλής (u_0,v_0) να είναι απλά η αρχή των αξόνων $(0,0)$. Μεγιστοποιώντας τώρα το γινόμενο Nash, οδηγούμαστε στη μεγιστοποίηση του γινομένου $u\cdot v$ για $(u,v)\in S$. Έστω επίσης, ότι το (U,V), είναι το ζεύγος ωφέλειας (u,v) κάτι που συμβαίνει, όπου εξ' υποθέσεως $UV>0$. Επανακαθορίζουμε τις ωφέλειες ώστε $(U,V)=(1,1)$ με αντικατάσταση του *S* με το σύνολο $S'=\{(u/U,v/V)\,|\,(u,v)\in S\}$.

Εξετάζουμε το σύνολο $T=\{(u,v)\,|\,u\geq 0,\ v\geq 0,\ u+v\leq 2\}$. Για το διαπραγματευτικό σύνολο *T*, η λύση είναι $N(T)=(1,1)$, διότι το *T* είναι ένα συμμετρικό σύνολο, και το (1,1) είναι το μόνο συμμετρικό σημείο στο σύνορο Pareto του *T*. Ισχυριζόμαστε, ότι $S\subseteq T$. Τότε, από την ανεξαρτησία των άσχετων εναλλακτικών, η $N(S)$ πρέπει να είναι ίση με τη $N(T)$ διότι το συγκεκριμένο σημείο (1,1), είναι στοιχείο του *S*, άρα αφού δεν υπάρχει περίπτωση $N(T)\notin S$, θα πρέπει να είναι $N(S)=N(T)$.

Για να αποδείξουμε ότι $S\subseteq T$, χρησιμοποιούμε την κυρτότητα του *S*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $(\bar{u},\bar{v})$ στο *S* το οποίο δεν υπάρχει στο *T*. Επειδή $\bar{u}\geq 0$, $\bar{v}\geq 0$, αυτό σημαίνει ότι $\bar{u}+\bar{v}>2$. Η ιδέα τώρα είναι, ότι ακόμα και αν το γινόμενο Nash $\bar{u}\cdot\bar{v}$ δεν είναι μεγαλύτερο του 1 (το οποίο είναι το γινόμενο Nash

UV), τότε το γινόμενο Nash *uv* ενός κατάλληλου κυρτού συνδυασμού $(uv)=(1-\varepsilon)(U,V)+\varepsilon(\bar{u},\bar{v}), \varepsilon \in (0,1)$ θα είναι μεγαλύτερο του 1.

Αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 4.4. Οι υπερβολή $\{(u,v) \mid uv=1\}$ εφάπτεται με το σύνολο *T* στο σημείο (1,1). Η εφαπτομένη της υπερβολής, είναι η γραμμή που διέρχεται από τα σημεία (2,0) και (0,2), η οποία είναι το σύνορο Pareto του *T*. Επειδή το σημείο $(\bar{u},\bar{v})$, είναι δεξιά από την εφαπτομένη, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία (1,1) και $(\bar{u},\bar{v})$ τέμνει την υπερβολή, και επομένως, περιέχει τα σημεία (u,v) δεξιά της υπερβολής, όπου $uv>1$. Αυτό όμως είναι μία αντίφαση, διότι το $(u,v) \in S$ αφού το *S* είναι κυρτό, αλλά το μέγιστο γινόμενο Nash ενός σημείου του *S* είναι 1.



Σχήμα 4.4 Απόδειξη ότι το σημείο $(\bar{u},\bar{v})$, που βρίσκεται εκτός του τριγώνου *T*, δεν είναι δυνατόν να ανήκει στο *S*, που δείχνει ότι το $S \subseteq T$.

Άρα θεωρούμε το γινόμενο Nash για τον κυρτό συνδυασμό (u,v) των (1,1) και $(\bar{u},\bar{v})$:

$$\begin{aligned} uv &= [(1-\varepsilon)U+\varepsilon\bar{u}][(1-\varepsilon)V+\varepsilon\bar{v}] \\ &= [U+\varepsilon(\bar{u}-U)][V+\varepsilon(\bar{v}-V)] \\ &= UV+\varepsilon[\bar{u}+\bar{v}-(U+V)+\varepsilon(\bar{u}-U)(\bar{v}-V)]. \end{aligned}$$

Επειδή $\bar{u}+\bar{v}>2$ και $U+V=2$, ο όρος $\bar{u}+\bar{v}-(U+V)$ είναι θετικός, και ο $\varepsilon(\bar{u}-U)(\bar{v}-V)$ μπορεί να γίνει μικρότερος από αυτόν τον όρο σε απόλυτη τιμή, για κατάλληλα μικρό $\varepsilon>0$, ακόμα κι αν $(\bar{u}-U)(\bar{v}-V)$ είναι αρνητικός αριθμός. Συνεπώς, $uv>1=UV$ για κάποιο πολύ μικρό θετικό ε, που δείχνει ότι το *UV* δεν ήταν το μέγιστο γινόμενο Nash του S, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την κατασκευή του (U,V). Αυτό αποδεικνύει ότι, όντως, $S \subseteq T$, και ότι $N(S) = N(T)$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι το σημείο $(U,V) = (1,1)$ είναι μοναδικό, κοιτάμε πάλι την υπερβολή και δρούμε όμοια με πριν. Δηλαδή, έστω ότι $(\overline{u},\overline{v})$ είναι ένα σημείο του S, διάφορο από το (1,1), τέτοιο ώστε $\overline{u}\cdot\overline{v} = 1$. Τότε, το σημείο αυτό και το (1,1), είναι δύο σημεία της υπερβολής, και τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει αυτά τα δύο σημεία, ανήκουν στο S, διότι το S είναι κυρτό. Παρόλα αυτά, έχουν μεγαλύτερο γινόμενο Nash.

Για παράδειγμα, το μέσο-σημείο $1/2\cdot(1,1)+1/2\cdot(\overline{u},\overline{v})$ έχει το γινόμενο Nash $(1/2+\overline{u}/2)(1/2+\overline{v}/2) = 1/4+\overline{u}/4+\overline{v}/4+\overline{u}\cdot\overline{v}/4$. Επειδή $\overline{u}\cdot\overline{v} = 1$, αυτό ισούται με $1/2+(\overline{u}+\overline{v})/4$, το οποίο είναι μεγαλύτερο από 1 αν και μόνο αν $(\overline{u}+\overline{v})/4 > 1/2$ ή $\overline{u}+\overline{v} > 2$. Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με $\overline{u}+1/\overline{u} > 2$ ή, επειδή $\overline{u} > 0$, ισοδύναμη με $\overline{u}^2+1 > 2\overline{u}$ ή $\overline{u}^2 - 2\overline{u}+1 > 0$, που είναι, $(\overline{u}-1)^2 > 0$, το οποίο αληθεύει, διότι το $\overline{u} \neq 1$. Άρα, ξανά, επειδή το S είναι κυρτό, το γινόμενο Nash έχει ένα μοναδικό μέγιστο στο S. Η υπόθεση ότι το S έχει ένα σημείο (u,v) με $u > u_0$ και $v > v_0$ εξυπηρετεί τον ακόλουθο σκοπό: Διαφορετικά, για $(u,v) \in S$, όλες οι ωφέλειες u του παίκτη I ή v του παίκτη II (ή και των δύο) ικανοποιούν $u = u_0$ ή $v = v_0$, αντίστοιχα. Τότε, το γινόμενο Nash $(U-u_0)(V-v_0)$ για $(U,V) \in S$ θα είναι πάντα μηδέν, άρα δεν έχει μέγιστο. Σε αυτή την περίπτωση, το διαπραγματευτικό σύνολο S είναι είτε το μονοσύνολο $\{(u_0,v_0)\}$ ή ένα ευθύγραμμο τμήμα $\{u_0\}\times[v_0,V]$ ή $[u_0,U]\times\{v_0\}$. Και στις δύο περιπτώσεις, το σύνορο Pareto αποτελείται από ένα απλό σημείο (U,V), το οποίο ορίζει τη μοναδική λύση Nash $N(S)$.

4.5.1 Παράδειγμα λύσης

Επανερχόμενοι στο σχήμα 4.2, το σημείο απειλής (u_0,v_0) είναι (1,1).

Το σύνορο Pareto αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα, ένα πρώτο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το (1, 3.5) με το (2, 3), και ένα δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το (2, 3) με το (4, 1). Το γινόμενο Nash $(u-u_0)*(v-v_0)$ για ένα σημείο (u,v) του συνόρου Pareto είναι το μέγεθος της επιφάνειας του ορθογωνίου μεταξύ του σημείου απειλής (u_0, v_0) και του σημείου (u, v). Ένα σημείο πάνω στο δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα είναι της μορφής $(1-p)(2,3)+p(4,1)$ για $0 \le p \le 1$, δηλαδή, $(2+2p, 3-2p)$.

Επειδή $(u_0, v_0) = (1,1)$, το γινόμενο Nash που προκύπτει, είναι $(1+2p)(2-2p)$ ή $2+2p-4p^2$. Το μοναδικό μέγιστο, βάσει του *p*, του τριωνύμου, λαμβάνεται για $p = -\frac{2}{2*(-4)} = 1/4$ και άρα το σημείο που μεγιστοποιεί το $(u-u_0)*(v-v_0)$ είναι το (2.5,2.5) με τιμή $(u-u_0)*(v-v_0) = (2.5-1)*(2.5-1) \; = 1.5*1.5 = 2.25$. Αντίστοιχα για το ευθύγραμμο τμήμα της μορφής

(1-*p*)(1,3.5)+*p*(2,3) προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή του τριωνύμου $-\frac{1}{2}p^2 - p$ είναι μικρότερη (άλλωστε αφού το γινόμενο Nash $(u-u_0)(v-v_0)$ για ένα σημείο (u,v) του συνόρου Pareto είναι το μέγεθος της επιφάνειας του ορθογωνίου μεταξύ του σημείου απειλής (u_0, v_0) και του σημείου (u,v), το διάγραμμα δείχνει ότι το δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα δημιουργεί το μεγαλύτερο ορθογώνιο).

Συνεπώς, το σημείο (U, V) είναι το (2.5, 2.5).

Αυτό το προσδοκώμενο ζεύγος οφελών, είναι ένας κυρτός συνδυασμός των ζευγαριών ωφέλειας (2, 3) και (5, 0). Επιτυγχάνεται από μία κλήρωση (λοταρία) ένωσης στην οποία παίζονται η *T, l* με πιθανότητα 5/6 και η *B, l* με πιθανότητα 1/6. Όμως, δεν είναι μία «μεικτή στρατηγική» παρά μία κλήρωση που πραγματοποιείται από κάποιον τρίτο, με αποτέλεσμα που αμφότεροι οι παίκτες έχουν αποφασίσει να αποδεχθούν.

Εναλλακτικές προσεγγίσεις του σχήματος διαιτησίας Nash[11]

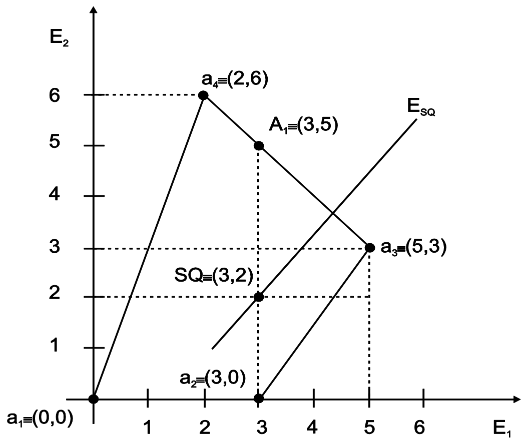
Στα παρακάτω παρουσιάζουμε εναλλακτικές προσεγγίσεις στο σχήμα διαιτησίας Nash, βασιζόμενοι στα γνωστά τέσσερα αξιώματα. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange και τη μέθοδο (ανισο-ισότητα) Cauchy, καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τη λύση Nash.

[11] Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε, ως έχει, το μεγαλύτερο μέρος της δημοσίευσης των E. Fountas, P. Kampisioulis, E. Zacharakis, C. Fountas, "Certain thougths on Nash arbitration scheme", Journal of Interdisciplinary Mathematics Vol 17(2014), No.1 pp. 11- 25.

Υποθέτουμε ότι η διαπραγμάτευση των δύο ανταγωνιστικών εταιρειών A και B, έχει οδηγηθεί σε αδιέξοδο και πρέπει να συμφωνήσουν σε ένα από τα ακόλουθα αποτελέσματα ή σε ένα συνδυασμό αυτών. $\alpha_1 \equiv (0,0)$, $\alpha_2 \equiv (3,0)$, $\alpha_3 \equiv (5,3)$, $\alpha_4 \equiv (2,6)$. Στην περίπτωση κατά την οποία φαίνεται ότι δεν μπορούν να συμφωνήσουν, το αποτέλεσμα θα είναι η λύση Nash, δηλαδή το σημείο, $SQ \equiv (3,2)$. Συνεπώς, σε μια διαπραγμάτευση η οποία έχει οδηγηθεί σε αδιέξοδο είναι δυνατόν να βρεθεί η βέλτιστη λύση, χρησιμοποιώντας το σύστημα διαιτησίας Nash, έτσι ώστε το απ[12]οτέλεσμα είναι δίκαιο και λογικό.

4.5.1 Αλγεβρική προσέγγιση βελτιστοποίησης

Με βάση τα δεδομένα κατασκευάζουμε το πολύπλευρο απολαβών που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο Nash πρέπει να βρίσκεται εντός του συνόλου των διαπραγματεύσεων, το οποίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα από (3,5),(5,3).



Σχήμα 4.5 Πολύπλευρο απολαβών

Σύμφωνα με την ισορροπία Nash, έχουμε το σημείο που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$f \equiv (x - x_0)(y - y_0) \qquad (4.1)$$

$$\text{όπου: } (x_0, y_0) \equiv (3,2) \qquad (4.2)$$

δηλαδή την $f \equiv (x - 3)(y - 2)$, η οποία όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2, βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $A_1 \equiv (3,5)$, $\alpha_3 \equiv (5,3)$,

[12] Σχετική εφαρμογή της λύσης Nash σε συλλογικές διαπραγματεύσεις στο [Allen L.,1956]

και έχει εξίσωση: $$y \equiv -x + 8,\ 3 \leq x \leq 5 \qquad (4.3)$$

Με αντικατάσταση στο γινόμενο που πρέπει να μεγιστοποιηθεί, $y \equiv -x + 8$, έχουμε:

$$(x - 3)(-x + 8 - 2) = -x^2 + 9x - 18 \qquad (4.4)$$

Το μέγιστο του τριωνύμου $g(x) = -x^2 + 9x - 18$, με $\alpha = -1 \leq 0$, είναι:

$$x = -\frac{b}{2a} = 4.5 \text{ και } y = 3.5 \qquad (4.5)$$

Οπότε η βέλτιστη λύση κατά Nash είναι $N \equiv (x, y) \equiv (4.5, 3.5)$. Οι παίκτες οφείλουν να επιλέξουν το πλησιέστερο προς το σημείο ισορροπίας κατά Nash, δυνατό αποτέλεσμα δηλαδή το $a_3 \equiv (5{,}3)$.

4.5.2 Διανυσματική προσέγγιση βελτιστοποίησης

Γνωρίζουμε ότι ∇f είναι κάθετο στην καμπύλη $f(x, y) = c_1$ στο σημείο A. Ομοίως, ∇g είναι κάθετο στην καμπύλη $g(x, y) = c_2$ στο σημείο A. Επειδή η καμπύλη $f(x, y) = c_1$ εφάπτεται με την καμπύλη $g(x, y) = c_2$, συμπεραίνουμε ότι τα ∇f και ∇g, έχουν την ίδια ή αντίθετη κατεύθυνση. (βλ. Σχήμα 4.6). Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το ∇f πρέπει να είναι παράλληλο ∇g ($\nabla f // \nabla g$) στο σημείο (x, y) και γι'αυτό έχουμε:

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0$$

για συντελεστή λ έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση που εξετάζουμε έχουμε:

$$f(x) \equiv (x - x_0)(y - y_0),\ x \geq x_0 \text{ και } y \geq y_0$$

και, $x + y - a = 0$, έχουμε ότι:

$$y - y_0 + \lambda = 0$$

$$x - x_0 + \lambda = 0$$

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$y - x + x_0 - y_0 = 0$$

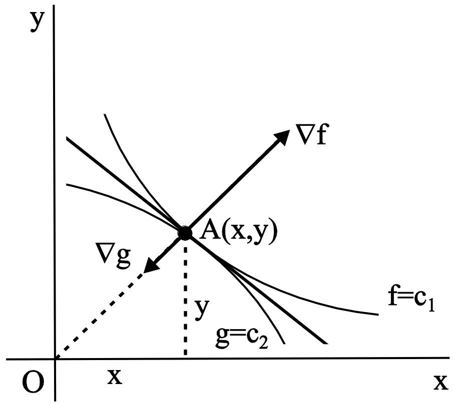
Επιλύοντας τις εξισώσεις,

$$y - x + x_0 - y_0 = 0$$
$$x + y = a$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} X_N \equiv x = \dfrac{a + (x_0 - y_0)}{2} \\ Y_N \equiv y = \dfrac{a - (x_0 - y_0)}{2} \end{cases} \tag{4.6}$$

Η μέθοδος Lagrange, την οποία περιγράφουμε στη συνέχεια είναι μια γενίκευση της τεχνικής αυτής.



Σχήμα 4.6

4.5.3 Προσέγγιση Lagrange

Πρόταση: Μια γενικευμένη απόδειξη της ισορροπίας Nash με τη μέθοδο Lagrange. Σύμφωνα με το σύστημα διαιτησίας κατά Nash, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x) \equiv (x - x_0)(y - y_0)$$
$$x + y = a, \text{ για } x \geq x_0, \text{ και } y \geq y_0 \tag{4.7}$$

Έτσι μπορούμε να έχουμε τη μορφή (Binmore K., Davies J., 2007):

$$maxf = (x - x_0)(y - y_0)$$

υπό τον περιορισμό, $g_1 \equiv g_1(x, y) = x + y - a = 0$

ή στην κανονική μορφή: $maximize\ f = (x - x_0)(y - y_0)$

υπό τον περιορισμό, $C \equiv \mathbb{R}^2 \cap \{x, y \in \mathbb{R} : x + y - a = 0\}$

Γεωμετρικά, το σύνολο των περιορισμών φαίνεται να είναι η συμπαγής και μη κενή περιοχή η οποία οριοθετείται από τις γραμμές, $x = 0$, $y = 0$ και $y = x - a$. Έτσι είναι εμφανές αν υποθέσουμε ένα απλό παράδειγμα ενός σημείου στο συμπαγές σύνολο C, έστω το $(a, 0)$.

Επίσης η f, είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με δύο μεταβλητές, και ως εκ τούτου είναι συνεχής. Η f ως συνεχής εντός του συμπαγούς συνόλου C, με βάση το θεώρημα του Weierstrass έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή εντός του C.

Η συνάρτηση κατά Lagrange είναι:

$$\mathcal{L} = F + \lambda g_1 \tag{4.8}$$

όπου f η αντικειμενική συνάρτηση, λ ο πολλαπλασιαστής του Lagrange, g_1 η περιοριστική συνάρτηση και $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \equiv (x - x_0)(y - y_0) + \lambda(x + y - \alpha) \tag{4.9}$$

Από τη σχέση (3.9) οι αναγκαίες συνθήκες κατά Lagrange είναι:

Οι συνθήκες πρώτης τάσης είναι (3.9):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \qquad \begin{cases} y - y_0 + \lambda = 0 \\ x - x_0 + \lambda = 0 \\ x + y = a \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Έτσι έχουμε ένα κρίσιμο σημείο για: $\begin{cases} x_N = \frac{a + (x_0 - y_0)}{2} \\ y_N = \frac{a - (x_0 - y_0)}{2} \end{cases}$

Η Hessian μήτρα:

$$D(x,y,z) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Επειδή:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \tag{4.11}$$

Η λύση που έχουμε βρει x_N και y_N, αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο το οποίο είναι:

$$maxf = \frac{(a - (x_0 - y_0))^2}{4} \tag{4.12}$$

Από τη λύση, $N \equiv (x_N, y_N)$, αφού $x_N = x_0$ και $y_N = y_0$, έχουμε:

$$\alpha \geq x_0 - y_0 \tag{4.13}$$

Παράδειγμα: Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης (3.14) υπό τους περιορισμούς είναι:

$$\begin{gathered} f = (x-3)(y-2) \\ x + y = 8, \text{για } x \geq 3, y \geq 2 \end{gathered} \tag{4.14}$$

Έχουμε την κανονική μορφή:

$$maxf = (x-3)(y-2)$$

υπό περιορισμούς, $g_1 \equiv g_1(x,y) = x + y - 8 = 0$

ή συνοπτικά: $maximizef = (x-3)(y-2)$

υπό περιορισμούς, $C \equiv \mathbb{R}^2 \cap \{x, y \in \mathbb{R} : x + y - a = 0\}$

Γεωμετρικά, το σύνολο των περιορισμών φαίνεται να είναι η συμπαγής και μη κενή περιοχή η οποία οριοθετείται από τις γραμμές, $x = 0$, $y = 0$ και $y = x - 8$.

Έτσι είναι εμφανές αν υποθέσουμε ένα σημείο στο συμπαγές σύνολο C, έστω το (8,0).

Όπως αναφέραμε η f, είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με δύο μεταβλητές και ως εκ τούτου είναι συνεχής εντός του συμπαγούς συνόλου C. Με βάση το θεώρημα του Weierstrass έχει μέγιστη τιμή εντός του C.

Η συνάρτηση κατά Lagrange είναι:

$$\mathcal{L} = \mathrm{f} + \lambda \mathrm{g}_1 \equiv (\mathrm{x} - 3)(\mathrm{y} - 2) + \lambda(\mathrm{x} + \mathrm{y} - 8) \tag{4.15}$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 3 + \lambda = 0 \tag{4.16}$$

$$g_1 = x + y - 8 = 0 \tag{4.17}$$

Από τα παραπάνω:

$$y = x - 1,\ y = -x + 8 \tag{4.18}$$

$$x = 4.5, y = 3.5 \text{ και } \lambda = 1.5 \tag{4.19}$$

Έχουμε λοιπόν ένα μοναδικό σημείο, το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι ένα τοπικό ελάχιστο.

Προσέγγιση Cauchy

Από την ανισο-ισότητα Cauchy[13] έχουμε:

$$\frac{(x - x_0) + (y - y_0)}{2} \geq \sqrt{(x - x_0)(y - y_0)} \tag{4.20}$$

$$(x - x_0)(y - y_0) \leq \left(\frac{x + y - (x_0 + y_0)}{2}\right)^2 \tag{4.21}$$

Έτσι,

[13] Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ τότε, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n}$

$$\max f = \frac{(a - (x_0 + y_0))^2}{2} \tag{4.22}$$

με, $x - x_0 = y - y_0$ ή $y = x - (x_0 - y_0)$

Για παράδειγμα, από την ανισο-ισότητα Cauchy (5.21), έχουμε τη συνάρτηση $f = (x-3)(y-2)$ υπό τον περιορισμό $x + y = 8$:

$$(x-3)(y-2) \leq \left(\frac{(x+y)-5}{2}\right)^2 \tag{4.23}$$

Έτσι,

$$\max f = 2.25 \tag{4.24}$$

για

$$x - 3 = y - 2 \rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases} \tag{4.25}$$

$$x = 4.5, y = 3.5 \tag{4.26}$$

Θεώρημα Weierstrass. Έστω, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό και συμπαγές σύνολο και $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο D.

Για να βρούμε το μέγιστο της f σύμφωνα με το θεώρημα Weierstrass, χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέθοδος Lagrange, ενσωματώνοντας τους περιορισμούς σε μια νέα αντικειμενική συνάρτηση.

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i\,(x)$$

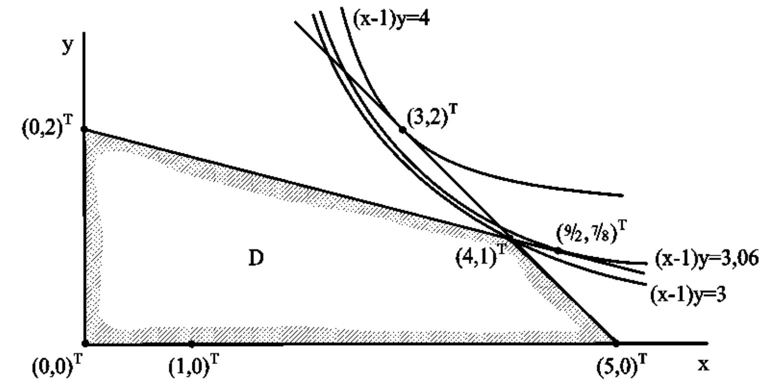
Οι συνθήκες πρώτης τάξης αυτής της συνάρτησης κατά Lagrange είναι:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Παράδειγμα: Για παράδειγμα (Binmore K., Davies J., 2007) υποθέτουμε μια τετράπλευρη περιοχή D με κορυφές $(0,0)^T$, $(0,2)^T$, $(4,1)^T$, $(5,0)^T$ και $SQ = (1,0)^T$.

Δίνοντας μια άλλη προσέγγιση, ξεκινάμε με την εύρεση του σημείου στο οποίο η $(x-1)y$ μεγιστοποιείται υπό τους περιορισμούς $x+4y=8$ και $x+y=5$.



Σχήμα 4.7 Πολύπλευρο απολαβών (Binmore K., Davie, J., 2007)

Γεωμετρικά, το σύνολο των περιορισμών είναι η συμπαγής και μη-κενή περιοχή που οριοθετείται από τις γραμμές, $x=0, y=0, y=-\frac{1}{2}x+2$ και $y=5-x$.

Επίσης, η f είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με δύο μεταβλητές και συνεχής. Το γεγονός ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές σύνολο D ικανοποιεί το θεώρημα του Weierstrass, το οποίο ορίζει ότι πρέπει να υπάρχει μέγιστο και ελάχιστο για τη συνάρτηση αυτή στο D. Ως εκ τούτου από το θεώρημα Weierstrass έχουμε ότι το πρόβλημα έχει μια μέγιστη τιμή.

Από τον Lagrange έχουμε:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2) \equiv (x-1)\cdot y + \lambda_1(x+4y-8) + \lambda_2(x+y-5)$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= y+\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 1 = 0 \\ \mathcal{L}_y &= x-1+4\cdot\lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda_1} &= x+4y-8=0 \\ \mathcal{L}_{\lambda_2} &= x+y-5=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x&=4 \\ y&=1 \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{2}{3} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε το αποτέλεσμα κατά Nash, $(x,y)=(4,1)$.

Κεφάλαιο 5

Παίγνια με αβεβαιότητα και διαπραγματεύσεις

5.1 Παίγνια με μη πλήρη πληροφόρηση.

Σε πολλές περιπτώσεις, και ειδικά σε διαπραγματεύσεις, οι παίκτες έχουν αβεβαιότητα σχετικά με χαρακτηριστικά του παιγνίου. Εν γένει, υπάρχουν δύο είδη αβεβαιότητας: εκείνη που έχει να κάνει με την τωρινή κατάσταση ενός δυναμικού παιγνίου, δεν είναι ξεκάθαρο στους παίκτες οι προηγούμενες κινήσεις που τους έφεραν στο συγκεκριμένο σημείο του παιγνίου. Υπάρχει όμως και ένα δεύτερο είδος αβεβαιότητας, που σχετίζεται με το πώς αντιλαμβάνεται ο αντίπαλος παίκτης τις ωφέλειες που προκύπτουν από τις επιλογές του.

Με βάση την βιβλιογραφία, (π.χ. [D. Fudenberg, J. Tirole, 1991] η ορολογία που χρησιμοποιείται στην πρώτη περίπτωση για να περιγράψει την αβεβαιότητα είναι παίγνιο ατελούς πληροφόρησης, ενώ στη δεύτερη περίπτωση παίγνιο ελλιπούς πληροφόρησης. Ο J. Harsanyi ενοποίησε το μοντέλο περιγραφής των δύο περιπτώσεων αβεβαιότητας εισάγοντας έναν επιπρόσθετο παίκτη, τη Φύση.

Το μοντέλο για την περιγραφή παιγνίου με ατελή πληροφόρηση σε κανονική μορφή ακολουθεί τον φορμαλισμό των Aumann, Rubinstein κ.α.

Ένα **Bayesian παίγνιο** G^* αποτελείται από:

Σύνολο $N \equiv \{k_1,...,k_i,...,k_n\}$, το σύνολο των παικτών του παιγνίου.

Πεπερασμένο σύνολο σύνολο Ω με όλες τις πιθανές «καταστάσεις της Φύσης», κάθε μία από τις οποίες περιγράφει χαρακτηριστικά των παικτών.

Γα κάθε παίκτη $k_i \in N$ το παίγνιο G^* περιλαμβάνει:

- Το σύνολο A_i των ενεργειών – αποφάσεων (actions) που δύναται να επιλέξει ο παίκτης κατά το παίγνιο.
- Το σύνολο T_i με $t_i \in T_i$, των σημάτων με τα οποία ο παίκτης λαμβάνει πληροφορία για για το ποια κατάσταση της Φύσης απεικονίζει την πραγματικότητα.

Ονομάζουμε τα t_i *τύπους* (types) του παίκτη k_ι και το σύνολο T_i σύνολο τύπων του παίκτη.

- Συνάρτηση $\tau_\iota : \Omega \to T_\iota$ *με* $\tau_\iota(\omega) \in T_i$ το σήμα που λαμβάνει ο παίκτης k_ι για την κατάσταση της Φύσης *ω*.

- Συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων $p_i : \Omega \to [0,1]$ που την ονομάζουμε *εκ των προτέρων πεποίθηση (prior belief)* του παίκτη k_ι και για την οποία θεωρούμε ότι: $p_i(\tau_i^{-1}(t_i)) > 0, \forall t_i \in T_i$, δηλαδή ο παίκτης k_ι αντιστοιχεί εκ των προτέρων θετική πιθανότητα στην κατάσταση της Φύσης που αντιστοιχεί σε κάθε τύπο του.

- Σχέση προτίμησης $(\succsim_\iota)$ πάνω στο σύνολο των πιθανοτήτων του $A \times \Omega$, όπου $\mathrm{A} = \times_{j \in N} A_j$, δηλαδή είναι η σχέση προτίμησης με την οποία ο παίκτης επιλέγει τη δράση που πραγματοποιεί.

Τα παραπάνω ορίζουν ένα Bayesian παίγνιο:

$$G = \langle N, \Omega, (A_i), (T_i), (t_i), (p_i), (\succsim_i) \rangle$$

Δύο παρατηρήσεις για τον ορισμό που δώσαμε:

- Ακόμη και όταν ένας παίκτης γνωρίζει τις δράσεις όλων των άλλων παικτών σε κάθε κατάσταση της Φύσης, έχει αβεβαιότητα για το αποτέλεσμα του παιγνίου, καθώς δεν γνωρίζει με βεβαιότητα την κατάσταση της Φύσης.

- Μόνο ο παίκτης k_ι παρατηρεί το σήμα t_i. Αφού οι άλλοι παίκτες δεν γνωρίζουν τον τύπο του k_ι η βέλτιστη τακτική τους εξαρτάται από την το σύνολο των μελών της σχέσης $t_{i \in Ti} \times A_\iota$. Υπό αυτή την έννοια, μπορεί να αντιμετωπίσει τους διαφορετικούς τύπους ως διαφορετικούς παίκτες, π.χ για τους τύπους $t_i^{/}, t_i^{//}$ έχουμε τους παίκτες $(k_i, t_i^{/})$ *και* $(k_i, t_i^{//})$

Η χρησιμότητα της εισαγωγής της έννοιας των σημάτων έγκειται στο ότι ο πάικτης αναπροσαρμόζει την πεποίθησή του p_i όταν λάβει ένα σήμα $t_i \in T_i$. Έτσι με βάση τον κανόνα του Bayes ο παίκτης k_i, αφού έχει λάβει το σήμα t_i, σε κάθε κατάσταση $\omega \in \Omega$ επανεκχωρεί πιθανότητα εμφάνισης που υπολογίζεται από τη σχέση $\dfrac{p_i(\omega)}{p_i(\tau_i^{-1}(t_i))}$, $\alpha\nu\, \omega \in \tau_\iota^{-1}(t_i)$, διαφορετικά είναι μηδέν.

Σε κάθε κατάσταση της Φύσης, προκειμένου ένας παίκτης να αποφασίσει ποια είναι η βέλτιστη ενέργεια που θα επιλέξει, θα πρέπει να λάβει υπόψη του την πεποίθηση που έχει σχηματίσει για τις ενέργειες των άλλων παικτών σε κάθε κατάσταση. Αυτό διότι αν και έχει πληροφόρηση από το σήμα που έχει λάβει για τον τύπο του, μπορεί να έχει αβεβαιότητα για την πραγματική κατάσταση της Φύσης.

Για να αντιμετωπίσουμε αυτή την πολυπλοκότητα, θεωρούμε κάθε συνδυασμό (k_i, t_i) ως ξεχωριστό παίκτη. Τότε, το σύνολο των δυνατών επιλογών των ενεργειών όλων των παικτών είναι το: $\times_{j\in N}(t_{j\in T_j} \times A_j)$.

Σε κατάσταση ισορροπίας Nash του παιγνίου, G^* η σχέση προτίμησης του κάθε «παίκτη» (k_i, t_i) είναι η $\succsim^*{}_{(k_i,t_i)}$ που ορίζεται ως:

$a^* \succsim^*_{(k_i,t_i)} b^*$ Αν και μόνο Αν $L_i(a^*, t_i) \succsim L_i(b^*, t_i)$, όπου:

$L_i(a^*, t_i)$ είναι η εκ των υστέρων κατανομή πιθανοτήτων για τον παίκτη k_i, αφού έχει λάβει το σήμα t_i, η οποία αντιστοιχίζει στα μέλη του συνόλου $\Omega \times A$, δηλαδή στα $(\alpha^*(j, \tau_j(\omega))_{j\in N}, \omega)$ τις εκ των υστέρων πιθανότητες: $\dfrac{p_i(\omega)}{p_i(\tau_i^{-1}(t_i))}$, $\alpha\nu\ \omega \in \tau_\iota^{-1}(t_i)$, διαφορετικά 0.

5.2 Επισκόπηση όρων του επιστημολογικού μοντέλου περιγραφής παιγνίων.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην ανάλυση μοντέλων διαπραγματεύσεων θα εξειδικεύσουμε όρους που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Ο ορισμός του παιγνίου με αβεβαιότητα στηρίχθηκε σε ένα επιπρόσθετο παίκτη – τη Φύση και ένα μη κενό – πεπερασμένο σύνολο δυνατών καταστάσεων Ω. Ο κάθε παίκτης προσδίδει πιθανότητες στην εμφάνιση όλων των δυνατών καταστάσεων. Όπως αναφέραμε και παραπάνω για κάθε παίκτη i δημιουργούνται επιπρόσθετοι παίκτες στο παίγνιο οι (i, t_i) Για κάθε κατάσταση, ο παίκτης δημιουργεί (μέσω της σχέσης προτίμησης) πεποίθηση αναφορικά με τις επιλογές των αντιπάλων του σε αυτή τη δυνατή κατάσταση.

Επιπλέον, αφού σε κάθε κατάσταση ορίζονται οι πεποιθήσεις των αντιπάλων για τις δικές του επιλογές, ουσιαστικά ορίζεται η πεποίθηση δεύτερης τάξης κ.τ.λ.

Εν γένει, το ίδιο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την αβεβαιότητα είτε για τις επιλογές των παικτών, είτε για τις ωφέλειες του παιγνίου.

Τέτοιου είδους ιεραρχίες ονομάζονται state of mind, αφού σχετίζονται με το πώς: (α) σχηματίζει πεποίθηση ένας παίκτης για τις απόψεις των άλλων παικτών στο παίγνιο (είτε τις επιλογές τους, είτε τις ωφέλειες του παιγνίου), (β) πώς οι αντίπαλοί του σχηματίζουν πεποιθήσεις σχετικά με την δική του πεποίθηση κλπ. Είναι φανερό ότι η ιεραρχία αυτή έχει μη πεπερασμένο πλήθος από μέλη, δηλαδή από σχέσεις που εκχωρούν πιθανότητες στις επιλογές των άλλων παικτών, ή στις δικές του επιλογές (ανάλογα αν είναι πεποιθήσεις άρτιας ή περιττής τάξης).

Στα παίγνια που μελετάμε θεωρούμε ότι οι παίκτες είναι ορθολογιστές, και έχουν κοινή πίστη στην ορθολογικότητα (common belief in rationality). Αυτός ο ορισμός μας οδηγεί επίσης σε μη πεπερασμένη ιεραρχία ως εξής: Ο παίκτης επιλέγει ορθολογικά, πιστεύει ότι ο αντίπαλός του επιλέγει ορθολογικά, πιστεύει ότι ο αντίπαλός του πιστεύει ότι ο ίδιος επιλέγει ορθολογικά, κ.ο.κ. Αντίστοιχα με τον όρο κοινή γνώση ενός γεγονότος (common knowledge of event) εννούμε ότι όλοι οι παίκτες γνωρίζουν το γεγονός, όλοι οι παίκτες γνωρίζουν ότι όλοι οι παίκες γνωρίζουν το γεγονός, κ.ο.κ.

Τέλος, στα μοντέλα του κεφαλαίου αναφέρουμε ότι στην αρχή του παιγνίου οι πεποιθήσεις των παικτών για τους τύπους των αντιπάλων τους προκύπτουν από συνάρτηση f που είναι γνωστή στους δύο παίκτες (common prior). Συνεπώς, υπάρχει μια μοναδική εκ των προτέρων κατανομή πιθανοτήτων f για τους τύπους των παικτών $(t_{\mathrm{A}i}, t_{\mathrm{B}j})$ τέτοια ώστε η πεποίθηση του τύπου t_i σχετικά με την πιθανότητα εμφάνισης του τύπου $t_{\mathrm{B}j}$ του αντιπάλου προκύπτει ως δεσμευμένη πιθανότητα πάνω στην εμφάνιση του δικού του τύπου.

5.3 Διαδικασία της διαπραγμάτευσης

Η διαδικασία της διαπραγμάτευσης διακρίνεται στα ακόλουθα βήματα:

- Προετοιμασία τακτικής
- Ανταλλαγή πληροφοριών
- Κατάθεση προτάσεων και αντιπροτάσεων – αμοιβαίες υποχωρήσεις
- Κλείσιμο και τήρηση συμφωνιών

Σε κάθε διαπραγμάτευση, ο στόχος της καλής προετοιμασίας είναι να σχεδιαστεί ένα συγκεκριμένο πλάνο δράσης που να βασίζεται σε επαρκή πληροφόρηση για τις παραμέτρους της. Για παράδειγμα, όταν ο πωλητής ενός προϊόντος διαπραγματεύεται με τον αγοραστή, ο αγοραστής θα ήθελε να έχει ακριβή εικόνα για το κόστος παραγωγής του πωλητή.

5.3.1 Βασικές έννοιες διαπραγμάτευσης.

Βασική έννοια της διαπραγμάτευσης είναι η τιμή επιφύλαξης (reservation price) ή “τιμή εξόδου” (walk-away price). Πρόκειται για το κατώτατο ή ανώτατο νούμερο που έχει ο κάθε διαπραγματευτής στο μυαλό του προκειμένου να συμφωνήσει. Για να γίνει καλύτερα κατανοητό, παραθέτουμε το εξής παράδειγμα. Έστω δύο άτομα Α, Β με τον Α να θέλει να αγοράσει ένα μεταχειρισμένο αυτοκίνητο. Το ανώτατο ποσό που είναι διατεθειμένος να δώσει είναι 9.000 €. Αυτή είναι η τιμή επιφύλαξης του Α. Ο Β θέλει να πουλήσει το αυτοκίνητο και ως ελάχιστη τιμή πώλησης έχει καθορίσει τις 7.5000 € που είναι η τιμή επιφύλαξης για τον Β.

Η ζώνη πιθανής συμφωνίας σχηματίζεται από τις τιμές επιφύλαξης των δύο μερών. Δηλαδή, στο κάθε άκρο της ζώνης πιθανής συμφωνίας βρίσκεται η τιμή επιφύλαξης της κάθε πλευράς. Στο προηγούμενο παράδειγμα λοιπόν, η ζώνη συμφωνίας θα ήταν 7.500€ – 9.000€.

5.3.2 Κατηγορίες διαπραγματεύσεων και οι τεχνικές τους

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις διαπραγματεύσεις σε δύο μεγάλες κατηγορίες: Διανεμητικές διαπραγματεύσεις (Distributive Negotiation) και τις Ενοποιητικές διαπραγματεύσεις (Integrative bargaining).

Στις διανεμητικές διαπραγματεύσεις, υπάρχει μια προσδιορισμένη – σταθερή ποσότητα από ένα συγκεκριμένο αγαθό και τα μέρη πρέπει να αποφασίσουν «αν» και «πώς» θα το μοιράσουν. Για παράδειγμα, μια αμφισβητούμενη περιοχή που πρέπει να διαμοιραστεί μεταξύ δύο κρατών, ένα μερίδιο της αγοράς όταν πρόκειται για κατάσταση δυοπωλίου, κ.τ.λ. Το πρόταγμα κάθε μέρους είναι η αύξηση του μεριδίου στο υπό διαπραγμάτευση αγαθό. Ο κάθε εμπλεκόμενος προσπαθεί να το επιτύχει χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές, όπως το να παραπλανήσει τον άλλο, να καθυστερήσει στη διαπραγμάτευση ελπίζοντας ότι ο άλλος είναι λιγότερος υπομονετικός από τον ίδιο, κ.α. Όταν ο αγοραστής δεν έχει σαφή εικόνα για το κόστος του αγαθού που θέλει να αγοράσει υιοθετεί μια πεποίθηση για το κόστος. Είναι προς συμφέρον του πωλητή να καλλιεργήσει στον αγοραστή την πεποίθηση ότι το κόστος κατασκευής του προϊόντος είναι υψηλό [Banks, Hutchinson, Meyer, 2002]. Η διανεμητική διαπραγμάτευση είναι ανταγωνιστικό παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.

Αντίθετα, στην κατηγορία των ενοποιητικών διαπραγματεύσεων, τα μέρη συνεργάζονται προκειμένου να βρουν τρόπους να “ενοποιήσουν”, ουσιαστικά να συνδυάσουν, τα συμφέροντά τους και να εντοπίσουν από κοινού αμοιβαία επωφελείς εναλλακτικές λύσεις που θα αποτελέσουν τη βάση της συμφωνίας τους. Η Αύξηση της Αξίας μέσω Ανταλλαγών, είναι μια βασική τεχνική των ενοποιητικών διαπραγματεύσεων. Η κάθε πλευρά παίρνει κάτι που θέλει κι έχει γι’ αυτήν μεγαλύτερη αξία, ανταλλάσσοντάς το με κάτι άλλο μικρότερης αξίας για την ίδια (αλλά μεγάλης αξίας για την άλλη πλευρά). Δηλαδή, γίνονται ανταλλαγές σε ζητήματα που είναι ταυτόχρονα χαμηλού κόστους για την μία πλευρά και υψηλού οφέλους για την άλλη.

Στη συνέχεια, κι εφόσον και τα δύο μέρη μεγιστοποιήσουν τα οφέλη τους κατά τη διάρκεια των διαπραγματεύσεων, διεκδικούν ο καθένας για τον εαυτό του το μεγαλύτερο κομμάτι της πίτας, βάσει των μεθόδων της διανεμητικής διαπραγμάτευσης. Έτσι τελικά, το όφελος είναι και για τους δύο διαπραγματευτές μεγαλύτερο. Οι ενοποιητικές διαπραγματεύσεις στις οποίες οι δύο πλευρές αναζητούν μια επίλυση της διαφοράς τους στο πλαίσιο της κοινής ωφέλειας είναι η συνήθης προσέγγιση στον κόσμο των επιχειρήσεων.

Βασική προϋπόθεση για να καταστεί εφικτή η ενοποιητική διαπραγμάτευση είναι να πιστεύουν οι διαπραγματευτές ότι υπάρχει δυναμικό ενοποιητικής διαπραγμάτευσης. Δηλαδή, να ακολουθούν την προσέγγιση ότι είναι δυνατό να προκύψει «αύξηση της πίτας». Προϋπόθεση επίσης είναι η μεταξύ τους εμπιστοσύνη, ώστε να μοιραστούν την ιδιωτική πληροφόρηση που ο καθένας κατέχει. Η διαδικασία που τελικά ακολουθείται ανάλογα με τη συμπεριφορά των διαπραγματευτών απεικονίζεται στον πίνακα:

A \ B	Διανεμητική Τακτική	Ενοποιητική Τακτική
Διανεμητική Τακτική	Διανεμητική Διαδικασία	Διανεμητική Διαδικασία
Ενοποιητική Τακτική	Διανεμητική Διαδικασία	Ενοποιητική Διαδικασία

Ο πίνακας δεν αποτυπώνει μια σημαντική παράμετρο της διαδικασίας, την αβεβαιότητα ως προς τη στρατηγική που θα ακολουθήσει ο άλλος παίκτης. Δηλαδή, την πεποίθηση που έχει ο κάθε παίκτης για τον τρόπο που βλέπει ο άλλος τη διαπραγμάτευση.

Έτσι, αν ένας παίκτης εκτιμά ότι υπάρχει δυναμικό ενοποιητικής διαπραγμάτευσης και την πεποίθηση ότι ο άλλος παίκτης θα κινηθεί ενοποιητικά, τότε θα ακολουθηθεί η ενοποιητική διαδικασία. Σε κάθε άλλη περίπτωση, ακολουθείται η διανεμητική. Αν οι δύο διαπραγματευτές δεν επικοινωνούν μεταξύ τους πριν τη διαπραγμάτευση ή αν κυριαρχεί η κακοπιστία μεταξύ τους, τότε η κατάσταση θυμίζει το γνωστό από το πρώτο κεφάλαιο παίγνιο «δίλημμα του κρατούμενου», όπου οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα και χωρίς προηγουμένως να έχουν επικοινωνήσει μεταξύ τους [L. Haber, 2006], με ενδεικτικό πίνακα ωφέλειας για διαπραγμάτευση με ενοποιητικό δυναμικό:

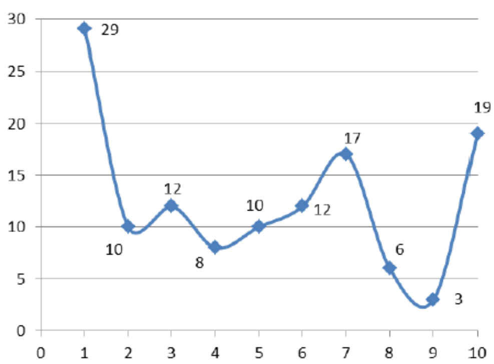
A \ B	Διανεμητική τακτική	Ενοποιητική τακτική
Διανεμητική τακτική	(x,y)	(x+k,x-k)
Ενοποιητική τακτική	(x-k,y+k)	(m+x,m+y)

, $x,y,m,k>0$ και $m<k$.

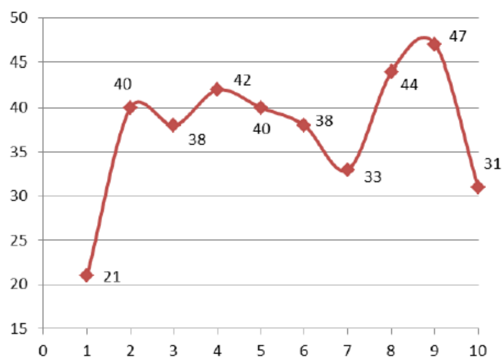
Πίνακας 1

Αν υπάρχει κακοπιστία μεταξύ των διαπραγματευτών, θα οδηγηθούμε στη μη βέλτιστη κατά Pareto ισορροπία (x,y) και θα επικρατήσει η επιθετική διανεμητική τακτική σε σχέση με συνεργατική – ενοποιητική τακτική. Πείραμα που έλαβε χώρα στο Πανεπιστήμιο του Πειραιά από το 2010 έως το 2013, κατέδειξε τη δυσκολία συνεργασίας όταν δεν υπάρχει εμπιστοσύνη μεταξύ των παικτών [Καμπισιούλης, Κυριακίδης, Ζαχαράκης, 2015].

Στο πείραμα αυτό πενήντα (50) ομάδες φοιτητών έπαιζαν παίγνιο με πίνακα ωφέλειας αντίστοιχο του Πίνακα 1. Το παίγνιο επαναλαμβανόταν δέκα (10) φορές για κάθε ζεύγος ομάδων φοιτητών. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η τάση σύγκρουσης υπερίσχυε της τάσης συνεργασίας.



Τάση συνεργασίας



Τάση σύγκρουσης

Σχήμα 5.1

Αν και το πείραμα περιλαμβάνει επανάληψη του ιδίου παιγνίου από τους ίδιους παίκτες σε μικρό χρονικό διάστημα (το κάθε τρέξιμο διαρκεί 1 λεπτό), και συνεπώς, δεν είναι ανάλογο με την επιλογή της προσέγγισης στη διαπραγμάτευση που ακολουθούν δύο παίκτες που για πρώτη φορά διαπραγματεύονται, εντούτοις απεικονίζει την επίπτωση της έλλειψης εμπιστοσύνης στη συμπεριφορά των παικτών και στην επιλογή τους ανάμεσα στη στρατηγική συνεργασίας και επίθεσης.

5.3.3 Πώς γίνεται η διεκδίκηση αξίας από την άλλη πλευρά στις διανεμητικές διαπραγματεύσεις.

Στις διανεμητικές διαπραγματεύσεις, η κάθε πλευρά διεκδικεί για τον εαυτό της το μεγαλύτερο κομμάτι της πίτας (claiming value), μέσα από μια διαδικασία συνεχών προτάσεων και αντιπροτάσεων. Σημαντική παράμετρος στις διανεμητικές διαπραγματεύσεις είναι το αν λαμβάνουν χώρα σε καθεστώς πλήρους ή ατελούς πληροφόρησης. Εάν τα δύο μέρη γνωρίζονται μεταξύ τους και η διαπραγμάτευσή τους επαναλαμβάνεται περιοδικά, όπως συμβαίνει στις διαπραγματεύσεις για τη συμφωνία συλλογικών συμβάσεων εργασίας, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διαδικασία ως παίγνιο πλήρους πληροφόρησης.

Σε άλλες περιπτώσεις, οι διαπραγματεύσεις γίνονται σε καθεστώς αβεβαιότητας, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε διαπραγματεύσεις μεταξύ των κρατών σε περιόδους κρίσεων. Υπάρχουν κάποιες βασικές τεχνικές (competitive tactics) για την απόκτηση πλεονεκτήματος στην διαπραγμάτευση, όπως η εκμαίευση κρίσιμων πληροφοριών από την άλλη πλευρά, απόκρυψη πληροφοριών της δικής μας πλευράς, μπλοφάρισμα, η διατύπωση αξιόπιστων απειλών, κ.τ.λ. Οι τεχνικές αυτές αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμες για τις δύο πλευρές όταν υπάρχει μόνο ένα βασικό αντικείμενο στην εν λόγω διαπραγμάτευση, όπως για παράδειγμα η αγοραπωλησία ενός ακινήτου, η κατανομή των υπουργών από κάθε κόμμα σε μια κυβέρνηση συνεργασίας, κ.τ.λ.

5.4 Μοντελοποίηση της διανεμητικής διαπραγμάτευσης ως δυναμικό παίγνιο.

Η λύση κατά Nash που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προέκυψε ως η μοναδική μαθηματική λύση που ικανοποιεί τέσσερις συνθήκες σε ένα πρόβλημα διανεμητικής διαπραγμάτευσης. Η προσέγγιση του Nash, αν και μαθηματικά άρτια δεν συλλαμβάνει τη διαδικασία της διαπραγμάτευσης, όπως λαμβάνει χώρα στην πραγματική ζωή. Δηλαδή, μια σειρά από προτάσεις και αντιπροτάσεις μεταξύ των δύο μερών, σε ένα καθαρά ανταγωνιστικό περιβάλλον. Ο Rubinstein [A. Rubinstein, 1982] μοντελοποίησε την διαπραγμάτευση σαν ένα ανταγωνιστικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης, όπου οι παίκτες υποβάλλουν σε διαδοχικούς γύρους τις προσφορές τους ο ένας στον άλλο. Οι παίκτες είτε συμφωνούν σε διαμοιρασμό (x,y) της πίτας μεγέθους 1, είτε δεν δεν συμφωνούν και λαμβάνουν 0.

Με εναλλάξ προσφορές για πολλούς γύρους, υπάρχει πιθανότητα σε κάθε επίπεδο, το παίγνιο να μην προχωρήσει στον επόμενο γύρο και να καταρρεύσει η διαπραγμάτευση. Συνεπώς, η καθυστέρηση κοστίζει. Αν σε κάθε γύρο, p είναι η εξωγενής πιθανότητα να τερματιστούν οι διαπραγματεύσεις, τότε μετά τον πρώτο γύρο της διαπραγμάτευσης η αξία της πίτας είναι $1*p+0*(1-p)=p$, μετά από δύο γύρους p^2 κ.ο.κ. Συνεπώς, στη διαπραγμάτευση εισάγεται ένας εκπτωτικός παράγοντας, που πιέζει τους παίκτες να ολοκληρώσουν γρήγορα τη διαπραγμάτευση. Εναλλακτικά, ο εκπτωτικός παράγοντας μπορεί να σχετίζεται με χρηματοοικονομικά δεδομένα, ένα ευρώ σήμερα έχει μεγαλύτερη αξία, απ΄ ότι ένα ευρώ αύριο.

Οι ορθολογικοί παίκτς αυτό το γνωρίζουν. Σκεπτόμενοι λοιπόν μελλοντικά και κάνοντας επαγωγή προς τα πίσω, οι βέλτιστες τακτικές των παικτών, ορίζουν ακολουθίες εναλλάξ προσφορών, με συμφωνία από τον πρώτο γύρο. Αυτό μπορεί να γίνει μέσα σε ένα σταθερό πλήθος γύρων (ορίζοντας ένας σημείο από το οποίο ξεκινά η προς τα πίσω επαγωγή) ή με «στάσιμες τακτικές» για ένα άπειρο πλήθος διαπραγματευτικών γύρων, όπου ουσιαστικά, το παίγνιο επαναλαμβάνεται κάθε δύο γύρους, όταν επιστρέφει στον ίδιο παίκτη για να κάνει προσφορά.

Μετά τα εισαγωγικά σχόλια παραθέτουμε το φορμαλισμό του μοντέλου διαπραγμάτευσης του Rubinstein ως δυναμικό παίγνιο με εναλλάξ προσφορές.

Έστω ότι δύο παίκτες Α,Β διαπραγματεύονται για να διαμοιράσουν μια πίτα μεγέθους 1.Αν δεν συμφωνήσουν και οι δύο λαμβάνουν 0. Το παίγνιο αποτελείται από περιόδους στην καθεμία από τις οποίες ο κάθε παίκτης κάνει πρόταση στον άλλο. Ο Α κάνει προτάσεις τις περιόδους 0,2,4,… και ο Β τις περιόδους 1,3,5,…

Ο Α κάθε φορά που προτείνει, προτείνει διαμοιρασμό $(x_1,x_2)\in[0,1]^2, x_1+x_2\le 1$

Αντίστοιχα, ο Β κάθε φορά που προτείνει, προτείνει διαμοιρασμό: $(y_1,y_2)\in[0,1]^2, y_1+y_2\le 1$. Αν επικεντρωθούμε στις βέλτιστες λύσεις στις οποίες όλη η πίτα διανέμεται, ισχύει: $y_1+y_2=1, x_1+x_2=1$.

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι γραμμικές, π.χ. $u_1(x)=x, u_2(y)=y$ Επίσης, θεωρούμε ότι υπάρχει εκπτωτικός παράγοντας δ. Ο εκτπωτικός παράγοντας είναι τέτοιος ώστε η κατανομή (x,y) μεταξύ των δύο παικτών μετά από t περιόδους να έχει αξία $(\delta^t x, \delta^t y)$.

Τότε, υπάρχει μια τέλεια υποπαιγνιακή ισορροπία Nash η οποία περιγράφεται από τις εξής στρατηγικές των δύο παικτών:

Ο παίκτης Α προτείνει: $\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ και δέχεται προσφορά του Β αν και μόνο αν το μερίδιο *x* που του αναλογεί είναι: $x \geq \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ **(Ι)**

Ο παίκτης Β προτείνει $\left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ και δέχεται προσφορά του Α αν και μόνο αν το μερίδιο *y* που του αναλογεί είναι $y \geq \left(\frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ **(ΙΙ)**

Η απόδειξη του Rubinstein βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Ο χρόνος είναι πολύτιμος και για τους δύο παίκτες, όπως εκφράζεται από τον εκπτωτικό παράγοντα δ_i
- Οι προτιμήσεις των παικτών είναι σταθερές σε όλη τη διάρκεια του παιγνίου.
- Ο κάθε παίκτης έχει πλήρη γνώση των προτιμήσεων του άλλου παίκτη σε όλη τη διάρκεια της διαπραγμάτευσης.

Με αυτές τις προϋποθέσεις, φτάνουμε σε ένα σημείο διαμοιρασμού της πίτας στα μερίδια (*x,y*) για τα οποία ισχύει στην ισορροπία. Ο Α είναι αδιάφορος μεταξύ των επιλογών να πάρει μερίδιο *y* τώρα ή μερίδιο *x* την επόμενη περίοδο. Αντίστοιχα, ο Β είναι αδιάφορος να

πάρει μερίδιο *x* τώρα ή *y* την επόμενη περίοδο. Έτσι, με επαγωγή προς τα πίσω, οι ορθολογικοί παίκτες καταλήγουν από την πρώτη περίοδο σε συμφωνία. Ο Α προτείνει το διαμοιρασμό: $\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ και ο Β δέχεται.

Από το διαμοιρασμό προκύπτουν τα συμπεράσματα: α) Ο πιο υπομονετικός παίκτης κερδίζει, αν και όπως αναφέραμε η διαπραγμάτευση λήγει την πρώτη περίοδο. β) ο παίκτης που αποστρέφεται λιγότερο τον κίνδυνο έχει πλεονέκτημα, όπως στη λύση Nash. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, ότι ο εκπτωτικός παράγοντας μπορεί να ερμηνευθεί ως πιθανότητα *p* διακοπής των διαπραγματεύσεων, ο παίκτης που αποστρέφεται τον κίνδυνο αντιλαμβάνεται την πιθανότητα αυτή μεγαλύτερη από τον αντίπαλο, συνεπώς ο εκπτωτικός παράγοντας γι' αυτόν είναι μικρότερος απ΄ ότι για τον πιο ριψοκίνδυνο αντίπαλό του. γ) Αν

$\delta_1 = \delta_2 = \delta$ τότε τα μερίδια γίνονται: $\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}$, δηλαδή το πλεονέκτημα έχει αυτός που κάνει πρώτος προσφορά. Αν $\delta \to 1$ τότε οι δύο παίκτες λαμβάνουν από $\frac{1}{2}$ ο καθένας, όπως προβλέπει η διαπραγματευτική λύση του Nash.

Διαπραγματευτικό παίγνιο, κατά Rubinstein, με μονόπλευρη αβεβαιότητα.

Τα παίγνια όπου οι παίκτες έχουν αβεβαιότητα λόγω ατελούς πληροφόρησης έχουν εφαρμογής στα θέματα διεθνών διαπραγματεύσεων και ιδιαίτερα στη διαχείριση των κρίσεων μεταξύ των κρατών. Σε αυτά θα αναφερθούμε στο υπόλοιπο του κεφαλαίου. Προκειμένου να αποκτήσουμε εικόνα για το ρόλο που παίζουν τα μοντέλα παιγνίων ατελούς πληροφόρησης στις διαπραγματεύσεις, θα αναφέρουμε πώς τροποποιείται το ανταγωνιστικό παίγνιο του Rubinstein που μοντελοποιεί τη διανεμητική διαπραγμάτευση όταν το τοποθετήσουμε σε περιβάλλον ατελούς πληροφόρησης.

Μια κρίσιμη παράμετρος αυτού του μοντέλου είναι ότι ο κάθε ορθολογικός παίκτης έχει πλήρη πληροφόρηση για τις προτιμήσεις του άλλου. Αυτή η παράμετρος δίνει τη δυνατότητα να τελειώσει η διαπραγμάτευση από τον πρώτο γύρο. Αντίθετα, σε περιβάλλον αβεβαιότητας είναι δυνατό ένας παίκτης να εξαπατήσει τον άλλο, διαστρεβλώνοντας την προσωπική πληροφορία που κατέχει (θα δούμε στη συνέχεια σχετικές τακτικές) και προσπαθώντας να πείσει τον άλλο ότι είναι πιο αποφασισμένος απ΄ όσο πραγματικά είναι.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια διαπραγμάτευση ο παίκτης Α έχει αβεβαιότητα για την αποφασιστικότητα του παίκτη Β. Για να περιγράψουμε μια τέτοια κατάσταση θεωρούμε δύο τύπους του παίκτη Β, τους $t_B, t_B^{/}, \mu\varepsilon\ t_B > t_B^{/}$, δηλαδή, ο t_B είναι πιο αποφασισμένος στη διαπραγμάτευση από τον $t_B^{/}$. Ο παίκτης Α θα ήθελε να *ξεκαθαρίσει* – *screen* (περάσει από κόσκινο) ποιος τύπος αντιστοιχεί στην πραγματική κατάσταση της Φύσης. Ο Β γνωρίζει τον τύπο του έχοντας λάβει σχετικό σήμα. Κατά τα γνωστά οι δύο παίκτες έχουν εκπτωτικούς παράγοντες δ_i. Σ’ αυτές τις συνθήκες, ο Rubinstein [Rub. 1985] απέδειξε το εξής:

Έστω $p(\omega_{t^{/}})$ η αρχική πεποίθηση του Α ότι η κατάσταση της Φύσης αντιστοιχεί στον τύπο $t_B^{/}$. Τότε υπάρχει ένα σημείο αποκοπής (cut-off point) $p_c(\omega)$ τέτοιο ώστε, εάν

$p(\omega_{t^{/}}) < p_c(\omega)$ ο παίκτης Α σταματά τη διαπραγμάτευση. Προσφέρει εκείνο το μερίδιο που θα έδινε εάν πίστευε ότι απέναντί του έχει τον τύπο t_B και ο παίκτης Β δέχεται την πρόταση ανεξάρτητα από τον τύπο του. Εάν $p(\omega_{t^{/}}) \geq p_c(\omega)$ τότε είναι δυνατή η συνέχιση της διαπραγμάτευσης.

Στην Bayesian ισορροπία ο παίκτης Α προσφέρει μερίδιο M_A^* και ο παίκτης $(\mathrm{B}, t_B^{/})$ το αποδέχεται, ενώ ο παίκτης (B, t_B) το απορρίπτει. Στη συνέχεια ο παίκτης (B, t_B) προτείνει μερίδιο M_B^* στον παίκτη Α και ο οποίος το αποδέχεται. Οι διαμοιρασμοί M_A^* και M_B^* είναι οι μοναδικοί που ικανοποιούν τις συνθήκες:

i. Ο παίκτης Α είναι αδιάφορος μεταξύ του να δεχτεί το μερίδιο M_B^* σήμερα ή να κερδίσει το μερίδιο M_{A}^* με πιθανότητα $p(\omega_{t^{/}})$ την επόμενη χρονική περίοδο, ή το μερίδιο M_B^* με πιθανότητα 1- $p(\omega_{t^{/}})$ την μεθεπόμενη χρονική περίοδο.

ii. Ο παίκτης (B, t_B) είναι αδιάφορος μεταξύ του να δεχτεί το μερίδιο M_{A}^* ή το μερίδιο M_B^* την επόμενη χρονική περίοδο.

5.6 Αβεβαιότητα στις διαπραγματεύσεις για την επίλυση διεθνών κρίσεων.

Στα παρακάτω θα εξετάσουμε το πώς μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία παιγνίων για να περιγράψει τις διαπραγματεύσεις μεταξύ των κρατών σε συνθήκες κρίσης.

Με τον όρο συνθήκες κρίσης νοείται η διαπραγμάτευση που γίνεται σε έκτακτες περιπτώσεις, όταν κρατικές οντότητες και μορφώματα (ανεξάρτητα από το εάν έχουν αναγνώριση από τον ΟΗΕ και την διεθνή κοινότητα) βρίσκονται σε προστριβές που μπορεί να οδηγήσουν σε πολεμική σύρραξη ή όταν τα κράτη ήδη πολεμούν και προσπαθούν να συνάψουν ειρήνη. Σε αυτό το πλαίσιο μπορούν να ενταχθούν οι σχέσεις μεταξύ Ινδίας και Κίνας τις δεκαετίες του 50 και του 60, που κατέληξαν σε Ινδο – Κινεζικό πόλεμο τη δεκαετία του 60, η διένεξη δεκαετιών μεταξύ των

Παλαιστινίων και των Ισραηλινών και οι μεταξύ τους διαπραγματεύσεις στο Camp David το 2000.

Συνεπώς, η κρίση ξεκινά όταν ένα από τα δύο κράτη εγείρει απαιτήσεις έναντι άλλου, π.χ. την απόκτηση μιας περιοχής. Η έκβαση της διαπραγμάτευσης μπορεί να είναι είτε η υποχώρηση του κράτους που πρόβαλε την αρχική απαίτηση, οπότε προκύπτει η κατάσταση SQ σαν τιμή εξόδου από τη διαπραγμάτευση, δηλαδή το ζεύγος $x^*=(x_1,x_2)$, τα μερίδια του επίδικου αγαθού που κατείχαν τα κράτη πριν την κρίση. Σε κάθε άλλη περίπτωση διευθέτησης, το ένα κράτος θα χάσει κάτι, ενώ το άλλο θα κερδίσει. Η διαφοροποίηση σε σχέση με την προηγούμενη θεώρηση των ανταγωνιστικών διαπραγματεύσεων, είναι ότι στην περίπτωση που εξετάζουμε υπάρχει το ενδεχόμενο της πολεμικής σύρραξης, η οποία αναπαρίσταται σε μια κατάσταση {w}. Στη σύρραξη δημιουργείται κόστος για τα δύο κράτη, και τελικά, από τη σύρραξη προκύπτει μια αναδιανομή του επίδικου αγαθού που μπορεί να είναι της μορφής (1,0) (ή αντίστοιχα (0,1)), δηλαδή ο νικητής λαμβάνει το σύνολο του επίμαχου αγαθού, ή μπορεί να προκύψει διανομή της μορφής $(x_1^{/}, x_2^{/})$ με $x_1^{/} \succ x_1$ αν το κράτος 1 είναι ο νικητής της αναμέτρησης. Το όφελος από την πολεμική αναμέτρηση w_1 εξαρτάται από την τελική συμφωνία που θα επιτευχθεί και το κόστος που καταβάλλει η κάθε χώρα. Η συνήθης προσέγγιση στην ανάλυση των διαπραγματεύσεων σε κρίση, είναι ότι το κράτος όταν αποφασίζει να οδηγηθεί σε σύρραξη, υπολογίζει ότι λαμβάνει όλη την ωφέλεια από το επίμαχο αγαθό, δηλαδή μετά τη σύρραξη προκύπτει διανομή (1,0).

Σημειώνουμε ότι διαπραγμάτευση σε συνθήκες κρίσης δεν λαμβάνει χώρα μόνο μεταξύ των κρατών στο πλαίσιο των διεθνών σχέσεων. Η διαπραγμάτευση ενός σωματείου εργαζομένων με τη διοίκηση της επιχείρησης παρουσιάζει παρόμοια χαρακτηριστικά, όπου η κατάσταση του πολέμου ομοιάζει με την απεργία ή με lock out από την πλευρά των εργοδοτών. Στον 'πόλεμο' απεργία – lock out και τα δύο μέρη καταβάλλουν κόστος, με το αποτέλεσμα του 'πολέμου' να είναι αβέβαιο.[L. J. Haber 2006].

Το θεμελιώδες ερώτημα που θα μελετήσουμε είναι το γιατί γίνονται πόλεμοι, αφού ο πόλεμος δημιουργεί κόστος, και συνεπώς, δεν φαίνεται να είναι η βέλτιστη λύση του διαπραγματευτικού προβλήματος. Η εφαρμογή των αρχών της θεωρίας παιγνίων για την εξήγηση κρίσεων στις σχέσεις μεταξύ κρατών που μπορεί να οδηγήσουν σε πολεμική σύγκρουση, προϋποθέτει ότι οι παίκτες, δηλαδή τα πρόσωπα στην ηγεσία των κρατών που λαμβάνουν τις αποφάσεις, είναι ορθολογιστές. Συνεπώς, επικεντρωνώμαστε στο εάν η πολεμική σύρραξη μπορεί να προκύψει ως απόφαση μετά από ορθολογική ανάλυση των δεδομένων και των εναλλακτικών επιλογών, λαμβάνοντας υπόψη το προφανές κόστος που αναλαμβάνει ένα κράτος από την διεξαγωγή του πολέμου.

Σαφώς και υπάρχουν παράγοντες μη ορθολογικοί που επηρεάζουν τις αποφάσεις των ηγετών, π,χ., η αδυναμία κατανόησης των επιπτώσεων του πολέμου, ή απλά η αδιαφορία των ηγετών των κρατών για τις επιπτώσεις του πολέμου, αφού οι ίδιοι και ο στενός τους περίγυρος επηρεάζονται πολύ λιγότερο σε σχέση με τους πολίτες της χώρας. Όμως, υπάρχουν και περιπτώσεις που οι ηγέτες αντιλαμβάνονται πλήρως το κόστος της πολεμικής σύρραξης, και όπως αναφέραμε παραπάνω, επιλέγουν μετά από ορθολογική ανάλυση των επιλογών τους, να εμπλακούν σε πόλεμο.

Η μοντελοποίηση που θα ακολουθήσουμε οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη δουλειά των J. D. Fearon, J. Morrow και J.S. Banks, πάνω στην οποία στηρίχθηκαν και άλλοι ερευνητές. Θα επιχειρήσουμε να εξηγήσουμε μηχανισμούς που υπεισέρχονται στο μοντέλο της επίλυσης κρίσης μεταξύ των κρατών αξιοποιώντας έννοιες από την επιστημολογική θεωρία των παιγνίων. Σε αυτό το πλαίσιο, θα μας απασχολήσει ο ρόλος που παίζουν οι πεποιθήσεις πρώτης και δεύτερης τάξης, δηλαδή η εκτίμησή του παίκτη A για τη συμπεριφορά του αντιπάλου B, αλλά και η εκτίμησή του A για τον τρόπο που αναλύει τις προθέσεις του ο B. Θα εκτιμήσουμε την επίπτωση που μπορεί να έχει στην έκβαση μιας διαπραγμάτευσης η αισιοδοξία, πρώτης και δεύτερης τάξης. Επίσης, θα διερευνήσουμε το ρόλο του διαμεσολαβητή στην επίλυση συγκρούσεων και τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ο ρόλος του διαμεσολαβητή μπορεί να αποβεί παραγωγικός.

Ακολουθώντας την προσέγγιση του B.B. de Mesquita (1985), ας θεωρήσουμε δύο κράτη A και B που έχουν προτίμηση πάνω σε μια σειρά από ζητήματα που απεικονίζονται στο διάστημα $X = [0,1]$. Το κράτος A προτιμά η έκβαση της διαπραγμάτευσης να είναι κοντά στο 1, ενώ το B προτιμά να είναι στο 0. Χωρίς απώλεια της γενικότητας οι συναρτήσεις ωφέλειας των δύο κρατών είναι $u_A(x), u_b(x) : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις, μονότονες και κοίλες, δηλαδή τα κράτη δεν επιθυμούν τον κίνδυνο. Για παράδειγμα θα μπορούσαν να αντιστοιχούν στο ποσοστό μιας επίδικης περιοχής ή στο ποσοστό της συμμετοχής εκπροσώπων της εθνικής μειονότητας προερχόμενη από το ένα κράτος, στο κοινοβούλιο του άλλου.

Για να δούμε εάν στο σύνολο X^2 υπάρχουν σημεία (x,1-x) στα οποία και οι δύο παίκτες προτιμούν τη σύρραξη, θα πρέπει να υπολογίσουμε την ωφέλεια των δύο παικτών σε περίπτωση πολέμου. Με $p \in [0,1]$ συμβολίζουμε την πιθανότητα να νικήσει το κράτος Α. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι το Α παίρνει όλο το μερίδιο, δηλαδή $u_A(x) = u_A(1) = 1$, ενώ 1 – p είναι η πιθανότητα να χάσει, οπότε $u_A(x) = u_A(0) = 0$ Έτσι, η αναμενόμενη ωφέλεια του Α είναι: $p - c_A$, με το c_A να απεικονίζει το κόστος του πολέμου για το κράτος Α.

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη ωφέλεια του Β είναι $1 - p - c_B$. Η αναγωγή των ποσοτήτων στην μονάδα, δίνει καλύτερη εικόνα της σημασίας των c_A, c_B. Έτσι, τα c_A, c_B δείχνουν το κόστος του κάθε κράτους σε σχέση με τα οφέλη που αναμένει. Συνεπώς, αν τα κράτη έχουν την πεποίθηση ότι τα οφέλη από τη σύρραξη είναι μικρά, τότε θα προτιμήσουν την ειρήνη ακόμα και εάν οι ζημιές που αναμένουν να πάθουν είναι μικρές. [J. Fearon 1995].

Με βάση τα παραπάνω, και αφού οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι μονότονες και κοίλες (τα κράτη είτε είναι ουδέτερα είτε αποστρέφονται το ρίσκο) πάντα θα υπάρχει ένα υποσύνολο του $X^2 \, \mu\varepsilon \, (x, 1-x) : u_A(x) > p - c_A \, \kappa\alpha\iota \, u_B(1-x) > 1 - p - c_B$

Στην περίπτωση της γραμμικής συνάρτησης ωφέλειας $u_j(x) = x, j = 1,2$ κάθε κατάληξη της διαπραγμάτευσης με τιμές στο διάστημα

$$(p - c_A, p + c_B) \tag{5.1}$$

είναι καλύτερη από σύρραξη, με τις δύο ακραίες τιμές να είναι οι τιμές επιφύλαξης. Άρα, μπορεί να βρεθεί λύση που να είναι καλύτερη από τη σύρραξη ή από τη συνέχεια μιας σύρραξης. Το ερώτημα λοιπόν παραμένει: τι είναι αυτό που οδηγεί σε σύρραξη δύο ορθολογικούς ηγέτες;

Ένα αίτιο που προβάλλεται ότι μπορεί να οδηγήσει σε σύρραξη είναι η μελλοντική απειλή. Αν ένα ισχυρό κράτος, το οποίο όμως βρίσκεται σε παρακμή αναμένει στο μέλλον ότι θα δεχτεί επίθεση από μία ανερχόμενη δύναμη, τότε μπορεί να αποφασίσει να οδηγηθεί σήμερα σε σύρραξη, δηλαδή, σε προληπτικό πόλεμο, ώστε το κόστος της σύρραξης που θα πληρώσει σήμερα, να είναι μικρότερο από το κόστος της σύρραξης που θα πληρώσει αύριο. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αναφορές (π.χ. [J. Snyder 2014]) ότι ένας από τους λόγους που ξεκίνησε ο Α’ Παγκόσμιος Πόλεμος ήταν η πεποίθηση της Γερμανίας ότι κάποια στιγμή θα ερχόταν αντιμέτωπη με την ολοένα αυξανόμενη στρατιωτική ισχύ της Ρωσίας. Βέβαια, το ερώτημα παραμένει σε κάθε περίπτωση: Γιατί ένας ορθολογικός ηγέτης πιστεύει ότι ο ορθολογικά σκεπτόμενος αντίπαλος του στο μέλλον θα προτιμήσει τη σύρραξη από έναν διακανονισμό;

Επανερχόμενοι στο μοντέλο που μόλις περιγράψαμε υποθέτουμε ότι οι τιμές κόστους της σύρραξης είναι γνωστά στα δύο κράτη. Όμως αυτό δεν συμβαίνει, στην πραγματικότητα υπάρχουν παράμετροι της διαπραγμάτευσης που είναι άγνωστες στα εμπλεκόμενα μέρη, με αποτέλεσμα το διαπραγματευτικό παίγνιο να λαμβάνει χώρα σε περιβάλλον ατελούς πληροφόρησης. Βασικές παράμετροι που δεν γνωρίζουν τα κράτη στις μεταξύ τους διαπραγματεύσεις είναι η σχετική δύναμη του αντιπάλου, που σχετίζεται με την πιθανότητα να κερδίσει τη σύρραξη, η αποφασιστικότητα του αντιπάλου, που σχετίζεται με τη διάθεση του να απορρίψει προσφορά και να προτιμήσει τη σύρραξη. Η μοντελοποίηση της αποφασιστικότητας του αντιπάλου μπορεί να γίνει είτε μέσω του κόστους της σύρραξης, είτε μέσω της αξίας με την οποία αντιλαμβάνονται το επίμαχο αγαθό τα δύο κράτη εξαιτίας «εσωτερικών συμφερόντων» (intrinsic interests), [Jervis 1978].

Έτσι, βασικό αίτιο που οδηγεί στη ρήξη δύο κράτη είναι οι λανθασμένες εκτιμήσεις όσον αφορά είτε την πιθανότητα επικράτησης, είτε την πιθανότητα να αντιδράσει το αντίπαλο κράτος και να μην αποδεχτεί την κατάσταση που διαμορφώνεται με βάση τη βούληση του «επιτιθέμενου» κράτους. Τα δύο κράτη έχουν ασύμμετρη πληροφόρηση για τα πραγματικά δεδομένα, που οδηγούν σε διαφορετικές εκτιμήσεις όσον αφορά στο αναμενόμενο όφελος τους, αλλά και στην αποφασιστικότητα του αντίπαλου κράτους να μην υποχωρήσει.

Η διαφορετική (ιδιωτική) πληροφόρηση που έχουν τα κράτη οδηγεί στη διαμόρφωση διαφορετικών πεποιθήσεων και συνεπώς, στην υιοθέτηση μη συμβατών στρατηγικών, υπό την έννοια ότι ο κάθε παίκτης επιλέγει στρατηγική που με βάση τις πεποιθήσεις του θα οδηγήσει σε νέα ισορροπία, όμως το κοινό παίγνιο δεν μπορεί να οδηγηθεί σε ισορροπία ειρήνης. Η κατάσταση είναι αντίστοιχη (αλλά όχι παρόμοια) με πειράματα στο εργαστήριο. Εκεί άτομα που δεν έχουν τη δυνατότητα μεταξύ τους επικοινωνίας παίζουν 2Χ2 παίγνιο, Οι παίκτες δεν μπορούν να οδηγήσουν το κοινό παίγνιο σε ισορροπία, καθώς δεν αντιλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο το παίγνιο που παίζουν [P. J. Healy 2011]. Άλλωστε, αν οι δύο ορθολογικοί παίκτες είχαν την ίδια – έστω ελλιπή, αλλά την ίδια – πληροφόρηση για ένα γεγονός, θα οδηγούνταν στις ίδιες εκτιμήσεις, και συνεπώς, σε στρατηγικές που εν τέλει θα οδηγούσαν σε ισορροπία [J. Harsanyi, 1968]. Η ατελής πληροφόρηση μας οδηγεί στο να βασίσουμε την ανάλυση αυτών των διαπραγματεύσεων στο έργο του J. Harsanyi για την Bayesian ισορροπία και την εφαρμογή της από τον Rubinstein.

Ασυμμετρία στην πληροφόρηση σχετικά με την ισχύ.

Επανερχόμενοι στη σχέση (5.1) η οποία δίνει εύρος αποδεκτών τιμών του «μοιράσματος της πίτας» ανάμεσα στα δύο κράτη ως έκβαση της διαπραγμάτευσης, θυμίζουμε ότι η σχέση προέκυψε από το γεγονός ότι οι πιθανότητες του να κερδίσουν τον πόλεμο το κράτος A και το κράτος B, αθροίζουν στη μονάδα, δηλαδή, $p_A + p_B = 1$. Εύκολα προκύπτει ότι αν τα δύο κράτη έχουν υπερεκτιμήσει τη δυνατότητά τους να κερδίσουν τη σύρραξη, δηλαδή, αν $p_A + p_B > 1$, τότε μπορεί να μην υπάρχει αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης που να δέχονται τα δύο κράτη. Σ' αυτή την περίπτωση, η σύρραξη δρα ως «μέσο αποκάλυψης» της ιδιωτικής πληροφορίας που κατέχουν τα κράτη.

Όμως, επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα του Fearon, ένας ορθολογικός ηγέτης ο οποίος έχει ιδιωτική πληροφόρηση για την στρατιωτική ισχύ της χώρας του θα έπρεπε να σκεφτεί ότι αντίστοιχη ιδιωτική πληροφόρηση έχει και ο ηγέτης του αντίπαλου κράτους και συνεπώς, η δική του εκτίμηση για την επιτυχία στη σύρραξη πιθανότατα να μην είναι έγκυρη. Συνεπώς, οι δύο ηγέτες, θα είχαν να κερδίσουν από την εθελοντική αποκάλυψη των στρατιωτικών τους δυνατοτήτων, ώστε τελικά να προκύψει διαπραγματευτική λύση που και για τα δύο κράτη θα είναι προτιμότερη από τη σύρραξη. Σε αυτό το πλαίσιο, άξιο διερεύνησης είναι η αιτία που αποτρέπει τα εμπλεκόμενα κράτη να επικοινωνήσουν την ιδιωτική πληροφόρηση που κατέχουν, ώστε τελικά να αποτραπεί η σύρραξη και να φθάσουν σε αμοιβαία επωφελή λύση.

Ασυμμετρία στην πληροφόρηση σχετικά με το κόστος του πολέμου.

Η σχέση (5.1) που καθορίζει το πεδίο των αποδεκτών τιμών της διαπραγμάτευσης, περιλαμβάνει επίσης τις τιμές κόστους που καταβάλλει το κάθε κράτος λόγω της σύρραξης. Αν τα κράτη γνωρίζουν μόνο το δικό τους κόστος, τότε είναι δυνατό ορθολογικός ηγέτης να οδηγηθεί στον πόλεμο. Αν το κόστος c_A είναι μικρό, τότε το κράτος Α έχει κίνητρο να ξεκινήσει την σύγκρουση εφόσον έχει την πεποίθηση ότι το κόστος c_B είναι μεγάλο για να το αναλάβει το κράτος Β. Τότε, θα προσέφερε σαν λύση στη διαπραγμάτευση την τιμή $p+c_B$ που είναι η τιμή επιφύλαξης του Β και θα κατέληγε σε διαπραγματευτική λύση που είναι καλύτερη γι΄ αυτό από το status quo.

Βέβαια, επειδή δεν έχει ακριβή πληροφόρηση για το κόστος c_B και συνεπώς, δεν μπορεί να υπολογίσει με ακρίβεια την τιμή επιφύλαξης του Β, θα πρέπει να ισορροπήσει ανάμεσα στο μεγαλύτερο μερίδιο του επίδικου αγαθού και στον κίνδυνο σύρραξης. Συνεπώς, το περιβάλλον ασύμμετρης πληροφόρησης μπορεί να οδηγήσει σε λάθος εκτίμηση της αποφασιστικότητας του αντιπάλου να προχωρήσει σε σύρραξη. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται (π.χ. [G. Jukes 2002]) ότι η σύρραξη μεταξύ της Ρωσίας και της Ιαπωνίας (1904-1905) σχετίζεται με τη λανθασμένη εκτίμηση της Ρωσίας για την αποφασιστικότητα της Ιαπωνίας να πολεμήσει.

Και εδώ προκύπτει αντίστοιχα το ερώτημα: γιατί δυο ορθολογιστές ηγέτες προτιμούν να διατηρήσουν ιδιωτική την πληροφόρησή τους και δεν ανταλλάσσουν πληροφορίες ώστε να αποφευχθεί η σύρραξη.

5.7 Ανταλλαγή μηνυμάτων μεταξύ των κρατών για την αξιόπιστη μεταβίβαση ιδιωτικής πληροφορίας.

Η απάντηση στο ερώτημα της προηγούμενης παραγράφου σχετίζεται με την έλλειψη εμπιστοσύνης μεταξύ των κρατών. Τα κράτη συνήθως έχουν κίνητρα είτε για να αποκρύψουν ιδιωτική πληροφορία, είτε να στείλουν μηνύματα ώστε να παρουσιάσουν διαστρεβλωμένη εικόνα της πληροφορίας που κατέχουν για την στρατιωτική τους ισχύ για παράδειγμα.

Για παράδειγμα, όπως αναφέρει ο Fearon, τα κράτη δεν θέλουν να αποκαλύψουν ιδιωτική πληροφόρηση, π.χ. τη στρατιωτική τους ισχύ, καθώς αυτό σε περίπτωση σύρραξης θα τους στερούσε το πλεονέκτημα του αιφνιδιασμού.

Επιπρόσθετα, τα κράτη επιδιώκουν να επηρεάσουν την πεποίθηση που έχουν οι αντίπαλοί τους, προσπαθώντας να επιτύχουν καλύτερο αποτέλεσμα στη διαπραγμάτευση, επηρεάζοντας τις πεποιθήσεις τους πρώτης τάξης. Δηλαδή, το κράτος Α στέλνει ψευδή μηνύματα για το πόσο αποφασισμένο είναι να υπερασπισθεί μία θέση του, προσπαθεί να επηρεάσουν την πεποίθηση του κράτους Β για τις επιλογές του κράτους Α. Έτσι, δημιουργεί λανθασμένη εικόνα για το παιχνίδι που παίζεται (π.χ. για τις αναμενόμενες ωφέλειες) προς όφελός του. Το κράτος Β υπερεκτιμά τον τύπο αποφασιστικότητας του κράτους Α και «μετατοπίζεται» η συνάρτηση f κατανομής των τύπων του Α προς υψηλότερες τιμές, που δεν ανταποκρίνονται στην ιδιωτική πληροφόρηση που κατέχει το Α. Η αλλαγή αυτή ευνοεί το Α, αφού έτσι το κράτος Β οδηγείται σε διαφορετική Bayesian ισορροπία καθώς έχουν διαφοροποιηθεί (υπέρ του Α) το πεδίο τιμών των διαπραγματευτικών λύσεων.

Είναι φανερό ότι ένα κράτος, αντιλαμβάνονται τα κίνητρα που έχει το αντίπαλο κράτος να διαστρεβλώσει την πληροφορία ή να την αποκρύψει. Συνεπώς, ένα βασικό ζήτημα είναι με ποιο τρόπο είναι δυνατό ένα κράτος να αποστείλει αξιόπιστο μήνυμα που θα ληφθεί από το κράτος Β.

Το ερώτημα είναι με ποιον τρόπο μπορεί το κράτος Α να στείλει αξιόπιστο μήνυμα στον αντίπαλό τους σχετικά με την αποφασιστικότητά του; Όπως θα φανεί στη συνέχεια της ανάλυσής μας η αποφασιστικότητα ενός κράτους είναι βασικός παράγοντας για την τελική έκβαση της διαπραγμάτευσης. Προκειμένου ένα κράτος να δεχθεί να απολέσει τη θέση που κατέχει στο SQ θα πρέπει να πιστεύει ότι υπάρχει σημαντική πιθανότητα το αντίπαλο κράτος να οδηγήσει την κρίση σε σύρραξη. Αν δεν το πίστευε αυτό, τότε δεν θα υποχωρούσε ποτέ από το SQ. Γι' αυτό και η διαπραγμάτευση σε συνθήκες κρίσης, παρομοιάζεται με διαγωνισμό αποφασιστικότητας [J.D. Morrow, 1999]. Υπό αυτή την έννοια, οι κρίσεις είναι μια ευκαιρία για τα κράτη να επιδείξουν την αποφασιστικότητά τους. Μετά από κάθε κρίση η common prior κατανομή πιθανοτήτων έχει μεταβληθεί. [14]

[14] Η όρος κοινή γνώση στην ανάλυσή μας έχει το περιεχόμενο που δίνεται από τον Aumann.

Προκειμένου να πείσει ένα κράτος για την αποφασιστικότητά του θα πρέπει το μήνυμα που θα στείλει να δημιουργεί κόστος, διαφορετικά εκλαμβάνεται σαν «λόγια του αέρα» (cheap talk). Για παράδειγμα, μηνύματα που στέλνονται μέσω της συνήθους διπλωματικής οδού ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Η αποστολή τους δεν δημιουργεί κόστος, άρα θα μπορούσαν να σταλούν από τον οποιοδήποτε ανεξάρτητα από την αποφασιστικότητά του, συνεπώς, δεν προσφέρουν νέα πληροφορία. Μηνύματα που έχουν κόστος για να σταλούν και συνεπώς, μεταφέρουν πληροφορία για την αποφασιστικότητα του αποστολέα είναι π.χ. η αποστολή στρατιωτικών δυνάμεων κοντά στην επίμαχη περιοχή και η δημόσια δέσμευση του ηγέτη για το ελάχιστα αποδεκτό αποτέλεσμα της κρίσης, η αθέτηση της οποίας δημιουργεί πολιτικό κόστος για τον ηγέτη.

Παρακάτω, θα αναλύσουμε περισσότερο την έννοια του πολιτικού κόστους, παρουσιάζοντας διαφορετικά μοντέλα για το πώς δύναται να επηρεάσει την εξέλιξη της διαπραγμάτευσης σε συνθήκες κρίσης, ακόμη και σε περιβάλλον με πλήρη πληροφόρηση. Στη βιβλιογραφία υπάρχει σειρά αναφορών για τη μελέτη του πολιτικού κόστους (*audience costs*) καθώς και δεδομένα από έρευνες που το καταδεικνύουν, π.χ. [M. Tomz, 2007].

Ανακεφαλαιώνοντας, βασική αιτία που οδηγούν σε σύρραξη αντί στην αποδοτικότερη διαπραγματευτική λύση είναι οι ιδιωτικές πληροφορίες που κατέχουν τα κράτη και τα κίνητρά τους να παρουσιάσουν διαστρεβλωμένη εικόνα της ιδιωτικής πληροφορίας που κατέχουν προκειμένου να μετατοπίσουν (προς όφελός τους) τις πεποιθήσεις των αντίπαλων κρατών.

5.8 Ένα γενικό μοντέλο διαπραγμάτευσης μεταξύ κρατών σε καθεστώς κρίσης.

Προκειμένου να προχωρήσουμε περαιτέρω στην ανάλυσή μας, θα στηριχθούμε στο θεωρητικό μοντέλο του J. Banks, το οποίο παρουσιάζουμε για λόγους πληρότητας. Το βασικό σημείο του μοντέλου είναι ότι δεν ασχολείται με τη διαδικασία της διαπραγμάτευσης. Έτσι, χαρακτηριστικά της διαπραγμάτευσης, όπως ενδεικτικά:

- εάν η διαπραγμάτευση στηρίζεται στην ανταλλαγή προσφορών και αντιπροσφορών και έχει από την αρχή καθορισμένο χρονικό ορίζοντα,

- εάν από την αρχή είναι τελεσιγραφικό παίγνιο της μορφής “take it or leave it”, που εξελίσσεται σε δύο μόνο περιόδους,
- εάν υπάρχει διαμεσολάβηση στη διαπραγμάτευση και το είδος αυτής

δεν είναι ανάγκη να είναι καθορισμένα για την ανάλυση του διαπραγματευτικού παιγνίου. Μπορούν λοιπόν να προκύψουν γενικά συμπεράσματα, ανεξάρτητα από τις (μη πεπερασμένες) διαφοροποιήσεις στην αναπαράσταση του κάθε παιγνίου διαπραγμάτευσης σε εκτεταμένη μορφή. Συγκεκριμένα, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τους δύο βασικούς μηχανισμούς που οδηγούν στην αποτυχία των διαπραγματεύσεων μεταξύ κρατών, δηλαδή, την ιδιωτική πληροφόρηση και την διαστρέβλωση (misrepresentation) των πραγματικών μεγεθών της διαπραγμάτευσης που προσπαθούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους τα αντίπαλα κράτη προς ίδιον όφελος. Επίσης, από την ανάλυση θα αντιληφθούμε τις επιπτώσεις που έχουν τα διαφορετικά είδη αβεβαιότητας (αναφορικά με την πιθανότητα νίκης, ή αναφορικά με το κόστος του πολέμου) στην έκβαση της διαπραγμάτευσης.

Η προσέγγιση που ακολουθείται στηρίζεται στον ορθολογισμό και στη «συμβατότητα των κινήτρων» (*incentive compatibility*) η οποία σχετίζεται με περιορισμούς στη βέλτιστη στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης ώστε να οδηγηθεί το παίγνιο σε Bayesian ισορροπία. Στην ανάλυση μας θα εξηγήσουμε την έννοια της συμβατότητας των κινήτρων.

Έστω δύο κράτη Α, Β που διαπραγματεύονται σε κατάσταση κρίσης, δηλαδή, η ρήξη οδηγεί σε πολεμική σύρραξη, δηλαδή στο αποτέλεσμα $\{w\}$. X είναι το σύνολο [0,1] των δυνατών αποτελεσμάτων της διαπραγμάτευσης εάν δεν επιλέξει ρήξη. Το status quo είναι το σημείο $s \in X$. Συνεπώς, τα πιθανά αποτελέσματα της διαδικασίας είναι το σύνολο: $\mathrm{R} = X \cup \{w\}$

Αν οι συναρτήσεις ωφέλειες είναι γραμμικές, δηλαδή τα δύο κράτη είναι ουδέτερα στον κίνδυνο, τότε οι ωφέλειες του από τη διαπραγματευτική λύση είναι: $x \in X$ για το Α και $1-x$ για το Β. Σε περίπτωση πολέμου τα οφέλη είναι (u,v) αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι στο μοντέλο του Banks τα οφέλη της πολεμικής σύρραξης απεικονίζονται στις τιμές *u,v* οι οποίες ενσωματώνουν την εκτίμηση των κρατών για τα οφέλη του πολέμου. Προφανώς το όφελος του πόλεμου έχει να κάνει με το κόστος του πολέμου, κάτι που συνήθως μεταφράζεται στη βιβλιογραφία (π.χ. [Schultz, 2001]) σαν την αποφασιστικότητα του κράτους να εμπλακεί σε σύρραξη.

Τονίζουμε ότι στο μοντέλο θεωρούμε ότι ιδιωτική πληροφόρηση κατέχει μόνο ένα κράτος.

Ακολουθώντας το πλαίσιο του Bayesian παιγνίου, θεωρούμε το σύνολο $T=[\underline{t},\bar{t}]\subset R^{+}$ ως το σύνολο των διαφορετικών τύπων του κράτους Α που δηλώνουν την ιδιωτική του πληροφόρηση για την τιμή *u*. Το κράτος Β έχει αβεβαιότητα για την τιμή του *u*. Σε κάθε τύπο $t\in T$ αντιστοιχίζεται ζεύγος τιμών (*u*,*v*) της ωφέλειας από την πολεμική σύρραξη μέσω της συνάρτησης *u* την οποία θεωρούμε παραγωγίσιμη και γνήσια αύξουσα στο *T*, δηλαδή οι μεγαλύτεροι τύποι έχουν μεγαλύτερα αναμενόμενα οφέλη από τη σύρραξη. Τέλος, όπως ισχύει στο μοντέλο του Harsanyi, το κράτος Β γνωρίζει την αρχική κατανομή της πιθανότητας f στο σύνολο *T* με f(t)>0, $\forall t\in T$ και $\int_T f(t)=1$.

Με βάση την συμβατική προσέγγιση, θα έπρεπε στο σημείο αυτό να ορίσουμε την ακριβή μορφή του παιγνίου $\widehat{G}=\{G,(C_1,C_2)\}$ με τη συνάρτηση *G* να καθορίζει την αναμενόμενη έκβαση του παιγνίου στο σύνολο R, έχοντας σαν ορίσματα τα $\{a_1\}$ και $\{a_2\}$, τις δράσεις (actions) των δύο κρατών, κατά το παίγνιο. Χωρίς να χάνουμε τη γενικότητα, θέτουμε (s_1,s_2) τις στρατηγικές των δύο κρατών. Έτσι, κάθε ζεύγος στρατηγικών οδηγεί στην πιθανότητα p για πόλεμο και σε μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στο σύνολο [0,1] των πιθανών διαπραγματευτικών λύσεων: x, 1-x . Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση *G* ότι αντιστοιχίζεται σε δύο απεικονίσεις:

$$g_s : C_1\times C_2 \longrightarrow [0,1] \quad \text{και} \quad g_w : C_1\times C_2 \longrightarrow [0,1],$$

Όπου $g_s(a_1,a_2)$ είναι το ζεύγος τιμών (x,1-x) της διαπραγματευτικής λύσης και $g_w(a_1,a_2)$ είναι η πιθανότητα να ξεσπάσει σύρραξη. Αφού το κράτος Α κατέχει ιδιωτική πληροφόρηση, η απόφασή του προκύπτει γνωρίζοντας τον τύπο του t. Συνεπώς η καθαρή στρατηγική για τον παίκτη Α μπορεί να εκφραστεί σαν απεικόνιση $\sigma_1(t){:}T\to C_1$ ενώ για το κράτος Β είναι απλώς μια επιλογή $\sigma_2\in C_2$.[15]

[15] Στην ανάλυσή μας δεν έχουμε αναφερθεί σε δομή δυναμικού παιγνίου. Προσπαθώντας να απλοποιήσουμε την παρουσίαση δεν χρησιμοποιούμε την ορολογία των δυναμικών παιγνίων για σύνολα πληροφοριών (information sets) και δεν ορίζουμε τη στρατηγική σαν συνάρτηση που απεικονίζει τις επιλογές των παικτών σε κάθε δυνατό information set. Άλλωστε, η ανάλυση που παρουσιάζουμε σε αυτή την απλοποίηση στοχεύει.

Με βάση τα ανωτέρω, γράφουμε τις απεικονίσεις ως $g_s(\sigma_1(t),\sigma_2)$ και $g_w(\sigma_1(t),\sigma_2)$. Με βάση την κατά Nash Bayesian ισορροπία, ο συνδυασμός των στρατηγικών (σ_1,σ_2) οδηγεί σε ισορροπία εάν για κάθε $t\in T$ η στρατηγική σ_1 είναι η καλύτερη απάντηση στη στρατηγική σ_2 και αντίστοιχα, η στρατηγική σ_2 είναι η καλύτερη απάντηση στη σ_1 με βάση την εκ των προτέρων γνωστή κατανομή πιθανοτήτων f πάνω στο σύνολο *T*, που έχει το κράτος Β. Η κατανομή αυτή των πιθανοτήτων είναι η πεποίθηση πρώτης τάξης του Β.

Συνεχίζουμε έχοντας κατά νου ότι θέλουμε να καταλήξουμε σε μια σχέση που να περιγράφει την έκβαση της διαπραγμάτευσης (x,*p*), με βάση τα αναμενόμενα οφέλη από τη σύρραξη. Η ακριβής μορφή της συνάρτησης *G* δεν μας απασχολεί.

Στη γενική θεώρηση λοιπόν, έστω Ω ο χώρος των πιθανών αποτελεσμάτων όλων των δυνατών παιγνίων της μορφής που έχουμε περιγράψει, δηλαδή, $\Omega=\{(x,p),\ x:T\to[0,1],\ \ p:T\to[0,1]\}$

Ας δούμε ποια μέλη του συνόλου Ω μπορούν να ανήκουν στην κατηγορία των αποτελεσμάτων Bayesian ισορροπίας. Τότε, $U(t)=p(t)u(t)+[1-p(t)]x(t)$ είναι η αναμενόμενη ωφέλεια του κράτους 1 από την έκβαση (*x*,*p*) για τον τύπο *t*. Ας υποθέσουμε ότι το κράτος Α επιλέγει να υιοθετήσει τη στρατηγική σ($t^{/}$), αν και γνωρίζει ότι ο τύπος του είναι *t*. Σε αυτή την περίπτωση, το όφελος από την πολεμική αναμέτρηση είναι και $u(t)$, (αφού ο πραγματικός τύπος είναι ο *t* και όχι ο $t^{/}$),

Συνεπώς, η νέα αναμενόμενη ωφέλεια του Α είναι: $U(t^{/},t)=p(t^{/})u(t)+[1-p(t^{/})]x(t^{/})$

Εάν ο τύπος *t* και η στρατηγική σ_1 οδηγούν σε Bayesian ισορροπία, θα πρέπει $U(t^{/},t)\le U(t)$, καθώς από τον ορισμό της ισορροπίας ο συνδυασμός του τύπου t και της στρατηγικής *σ* είναι ο βέλτιστος συνδυασμός και να υπερτερεί έναντι των άλλων τύπων του Α που βρίσκονται στο σύνολο *T*. Ως εκ τούτου, για οποιοδήποτε Bayesian παίγνιο, προκειμένου ο συνδυασμός (*x*,*p*) να αντιστοιχεί σε ισορροπία, θα πρέπει $U(t)>U(t^{/},t)$. Δηλαδή, θα πρέπει η στρατηγική του Α, για να είναι βέλτιστη, να αντιστοιχεί στον τύπο του. Συνεπώς, όταν το κράτος Α επιλέγει, το κάνει με βάση την ιδιωτική πληροφόρηση που πραγματικά κατέχει σχετικά με το όφελος της σύρραξης.

(Σημείωση: Η έννοια του incentive compatible μηχανισμού, χρησιμοποιείται στην οικονομική επιστήμη, για παράδειγμα στο σχεδιασμό των δημοπρασιών)

Ορισμός: Μία έκβαση της διαπραγμάτευσης $(x, p) \in \Omega$ είναι συμβατή με τα κίνητρα, αν και μόνο αν, ισχύει: $U(t; x, p) \geq U(t', t; x, p), \forall t', t \in T$

Με βάση τα ανωτέρω ισχύουν οι σχέσεις:

$$p(t)u(t) + [1 - p(t)]x(t) \geq p(t')u(t) + [1 - p(t')]x(t') \tag{5.2}$$

$$p(t')u(t') + [1 - p(t')]x(t') \geq p(t)u(t') + [1 - p(t)]x(t) \tag{5.3}$$

Τελειώνουμε την παρουσίαση του μοντέλου, θέτοντας περιορισμούς που προκύπτουν από την αρχή του ορθολογισμού. Για να αποφασίσει ένα κράτος να μην συγκρουστεί, θα πρέπει το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης να είναι καλύτερο από το όφελος της σύρραξης, θα πρέπει δηλαδή το όφελος που προκύπτει από την έκβαση (*x(t),p(t)*) να είναι μεγαλύτερο από το όφελος *u(t)*. Συνεπώς, από την αρχή του ορθολογισμού προκύπτει ότι $U(t) \geq u(t), \forall t \in T$ ή ισοδύναμα, $x(t) \geq u(t), \forall t \in T_b \equiv \{t \in T : p(t) < 1\}$, δηλαδή το T_b είναι το σύνολο των τύπων για τους οποίους υπάρχει θετική πιθανότητα να μην προκύψει σύρραξη. Τέλος, ορίζουμε ως $T_w \equiv \{t \in T : p(t) > 0\}$, δηλαδή το σύνολο των τύπων *t* με μη μηδενική πιθανότητα να οδηγηθούν σε σύρραξη. Έστω, $\Omega^* \subseteq \Omega$ είναι το σύνολο των ζευγών (*x,p*) που ικανοποιούν την αρχή του ορθολογισμού και είναι συμβατά με τα κίνητρα.

Με βάση την παραπάνω περιγραφή και από τις σχέσεις (2) και (3) καταλήγουμε στις εξής ιδιότητες των ζευγών (*x,p*) $\in \Omega^*$:

- Η πιθανότητα σύρραξης *p(t)* είναι αύξουσα στο *T*
- Το μερίδιο *x(t)* που παίρνει από τη διαπραγμάτευση το κράτος Α είναι αύξουσα συνάρτηση στο *T*.
- Ορίζουμε τη συνάρτηση $\Delta(t; x, p) = U(t; x, p) - u(t)$ ως τη διαφορά μεταξύ της ωφέλειας του κράτους Α από το κέρδος του εάν οδηγηθεί σε σύρραξη. Τότε, η Δ είναι φθίνουσα στο *T*.

Συμπέρασμα (1): Από τα Ι και ΙΙ και με βάση τον ορισμό του συνόλου Τ, συμπεραίνουμε ότι καθώς τα αναμενόμενα οφέλη από τη σύρραξη αυξάνουν για το κράτος που κατέχει την ιδιωτική πληροφόρηση, αυτό πετυχαίνει καλύτερη συμφωνία μέσω διαπραγμάτευσης, αλλά ταυτόχρονα, αυξάνει τον κίνδυνο για ρήξη – σύρραξη.

Συμπέρασμα (2): Το κέρδος του κράτους που κατέχει την ιδιωτική πληροφόρηση από τη διαδικασία διαπραγμάτευσης σε σχέση με το όφελος της σύρραξης μειώνεται καθώς αυξάνονται τα αναμενόμενα οφέλη του πολέμου. Το συμπέρασμα αυτό συνάδει λογικά με την αύξηση της πιθανότητας για πόλεμο στο σύνολο T.

Τα συμπεράσματα (1) και (2) ισχύουν για κάθε Bayesian παίγνιο διαπραγμάτευσης, με τα γενικά χαρακτηριστικά που έχουμε αναφέρει, ανεξάρτητα από τη λειτουργική διαδικασία του, δηλαδή ανεξάρτητα από την αναπαράστασή του σε πινακοειδή ή εκτεταμένη μορφή. Δεν λαμβάνουν υπόψη τους την αρχική κατανομή f, δηλαδή την πεποίθηση πρώτης τάξης του κράτους B και αντίστοιχα την πεποίθηση 2^{ης} τάξης κλπ. Επίσης, δεν λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή της *f* καθώς τα κράτη επιλέγουν στη διάρκεια του παιγνίου.

Η *f* και η μεταβολή της καθώς προχωρά το παίγνιο, εξαρτάται από τη δομή του παιγνίου και τις επιλογές που γίνονται από τα κράτη κατά τη διάρκειά του. Για παράδειγμα, ας κάνουμε λίγο πιο συγκεκριμένο το παράδειγμά μας και ας υποθέσουμε ότι το κράτος που κατέχει την ιδιωτική πληροφόρηση είναι αυτό που ξεκινά την αμφισβήτηση του status quo. Έστω ότι το σημείο SQ είναι το $(x_0, 0)$ - αφού στο είναι σίγουρο ότι δεν γίνεται σύρραξη, *p(t)*=0.

Τότε, η συνάρτηση *f* που απεικονίζει την εκ των προτέρων πεποίθηση του B για τον τύπο του A, εκ των πραγμάτων μεταβάλλεται, αφού θα πρέπει να δοθεί μηδενική πιθανότητα σε εκείνους τους τύπους $t \in T$ για τους οποίους ισχύει: $U(t) < x_0$, αφού οι τύποι αυτοί δεν θα ξεκινούσαν την αμφισβήτηση του SQ.

Ανακεφαλαιώνοντας το μοντέλο του Banks, σημειώνουμε ότι με βάση το μοντέλο μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τη σχέση στο αναμενόμενο όφελος από τη σύρραξη και στο αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης, αλλά και στην πιθανότητα να οδηγηθούν οι χώρες σε σύρραξη. Οι βασικοί παράμετροι του μοντέλου είναι: α) ιδιωτική πληροφόρηση κατέχει το ένα από τα δύο κράτη, β) τα κράτη δεν είναι αναγκασμένα να καταλήξουν σε διαπραγματευτική λύση, δεν υπάρχει δηλαδή κάποιος διαμεσολαβητής για να επιβάλλει λύση, και γ) η ιδιωτική πληροφόρηση (δηλαδή ο τύπος *t*) σχετίζεται μόνο το όφελος της σύρραξης και όχι με τους όρους της ειρηνικής επίλυσης της σύγκρουσης, δηλαδή με τη διαπραγματευτική λύση. Λόγω της γενικότητας του μοντέλου, οι παράμετροι που σχετίζονται με το σχήμα της κάθε διαπραγμάτευσης, π.χ. η αρχική πεποίθηση *f* και οι ωφέλειες που προκύπτουν από τις αποφάσεις των παικτών δεν λαμβάνονται υπόψη.

Επέκταση του μοντέλου:

Οι Fey και Ramsay [M. Fey, K. Ramsay 2011] επέκτειναν το παραπάνω μοντέλο επιτρέποντας και στα δύο κράτη να κατέχουν ιδιωτική πληροφόρηση. Μια δεύτερη επέκταση του μοντέλου είναι ότι πέρα από την ιδιωτική πληροφόρηση των δύο κρατών στο όφελος της σύρραξης (άρα, στο κόστος αυτής, και συνεπώς, στην αποφασιστικότητα του κράτους να εμπλακεί σε σύρραξη) αναλύεται και η αβεβαιότητα για τη σχετική ισχύ των δύο κρατών, όπως αυτή απεικονίζεται στην πιθανότητα επικράτησης.

Εμπλουτίζουμε το συμβολισμό για την περιγραφή του μοντέλου ως εξής:

Προκειμένου να εισαγάγουμε την έννοια του κόστους, θεωρούμε όπως πριν ότι η ωφέλεια από την κατοχή όλου του επίμαχου αγαθού είναι 1. Τότε, αν *p* είναι η πιθανότητα επικράτησης στον πόλεμο του κράτους 1 και είναι γνωστή και για τα δύο κράτη, η ωφέλειά του Α από τον πόλεμο είναι: $p - c_1$ με c_1 το κόστος της σύρραξης.

Η ιδιωτική πληροφόρηση αφορά στις τιμές κόστους της σύρραξης για τα δύο κράτη. Οι τύποι των δύο κρατών που κατέχουν ιδιωτική πληροφόρηση αναπαρίστανται σαν ζεύγος $(c_1, c_2) = c$ που παίρνει τιμές από το σύνολο $C_1 \times C_2$ των τύπων των δύο κρατών, με $C_i = [\underline{C_{i,}}, \overline{C_i}]$

Όπως και στην προηγούμενη ανάλυσή μας, $g_w(a_1, a_2)$ είναι η πιθανότητα να οδηγηθούμε σε πόλεμο, εάν σε κάποιο σημείο (στην πραγματικότητα σετ πληροφοριών του παιγνίου) έχουν επιλεχθεί τα (a_1, a_2) και *s* το προφίλ στρατηγικών των παικτών. Τότε η πιθανότητα σύρραξης $P(c_i)$ (για το κράτος *i* (*i* =1,2) σαν συνάρτηση του κόστους c_i και η αναμενόμενη ωφέλεια $U_i(c_i)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$P(c_i) = \int_{c_j} g_w(s(c_i, c_j))dF_j(c_j) \quad \text{και} \quad U_i(c_i) = \int_{c_j} U_i(s(c_i, c_j), c_i)dF_j(c_j)$$

με την αναμενόμενη ωφέλεια να ενσωματώνει την εξάρτηση του κόστους του πολέμου $w(c_i)$ από το κόστος του i, πέρα από την στρατηγική s.

Με βάση αυτή την επέκταση του μοντέλου του Banks, οι Fey, Ramsay κατέληξαν σε σειρά ανάλογων με τον Banks προτάσεων στην περίπτωση ιδιωτικής πληροφόρησης και στα δύο αντίπαλα κράτη.

Πρόταση I Έστω *G* ένα διαπραγματευτικό παίγνιο σε κατάσταση κρίσης και s^* στρατηγική που οδηγεί σε Bayesian ισορροπία του παιγνίου όπου οι τιμές κόστους c_i των δύο κρατών που βρίσκονται σε διαπραγμάτευση κρίσης αποτελούν ιδιωτική πληροφόρηση τους, η πιθανότητα νίκης στη σύρραξη είναι κοινή γνώση, **τότε ισχύει ότι:**

οι συναρτήσεις $P(c_i)$ *και* $U(c_i)$ είναι φθίνουσες στο C_i και η $U(c_i)$ είναι συνεχής.

Το συμπέρασμα αυτό συνάδει με την κοινή λογική, όσο μεγαλύτερο το κόστος της σύρραξης για μια χώρα, τόσο μικρότερη η πιθανότητα του πολέμου, και όσο μικρότερη η αποφασιστικότητά της, τόσο μικρότερη η αναμενόμενη ωφέλεια από την κρίση.

Πρόταση II Έστω *G* ένα διαπραγματευτικό παίγνιο σε κάτασταση κρίσης και s^* στρατηγική που οδηγεί σε Bayesian ισορροπία του παιγνίου όπου οι τιμές κόστους c_i των δύο κρατών που βρίσκονται σε διαπραγμάτευση κρίσης αποτελούν ιδιωτική πληροφόρηση τους, η πιθανότητα νίκης στη σύρραξη είναι κοινή γνώση, **τότε:** $U_i(c_i) \neq U_i(c_i^{/})$ αν και μόνο αν $P(c_i) > 0$

Δηλαδή, η διαφοροποίηση της αποφασιστικότητας ενός κράτους που βρίσκεται σε κατάσταση διαπραγμάτευσης κρίσης, μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερη ωφέλεια, αν και μόνο αν το κράτος αναλαμβάνει το ρίσκο της σύρραξης.

Με βάση τη δουλειά των Banks, Fay και Ramsay, οδηγούμαστε σε μια βασική παρατήρηση; Υπάρχει ξεκάθαρη σχέση «συμβιβασμού» ανάμεσα στην αναμενόμενη ωφέλεια και την πιθανότητα πολέμου: Οι πιο αποφασισμένες χώρες έχουν μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφέλεια (η μαθηματική ελπίδα της ωφέλειας τους είναι μεγαλύτερη), με κόστος, τη μεγαλύτερη πιθανότητα σύρραξης. Ο μηχανισμός είναι διαισθητικά κατανοητός: οι αποφασισμένες χώρες προτείνουν χειρότερη συμφωνία στο αντίπαλο κράτος, ώστε να «ξεκαθαρίσουν» τους αποφασισμένους από τους λιγότερο αποφασισμένους αντιπάλους. Έτσι απολαμβάνουν καλύτερη συμφωνία, αλλά αυξάνουν και τον κίνδυνο απόρριψης της προσφοράς τους, και συνεπώς, σύρραξης.

5.9 Επίπτωση από το επιπλέον κόστος σε διαπραγμάτευση.

Η ανάλυση που παρουσιάσαμε, όπως έχουμε επισημάνει, δεν εμπεριέχει τη συνάρτηση f των εκ των προτέρων πεποιθήσεων και τον τρόπο που μεταβάλλεται αυτή καθώς τα κράτη παρακολουθούν το ένα τις προσφορές του άλλου. Όπως έχουμε αναφέρει το κάθε κράτος, προσπαθεί να διαμορφώσει την πεποίθηση του αντίπαλου κράτους πριν την έναρξη της διαπραγμάτευσης με τρόπο που να ευνοεί τα συμφέροντά του. Ο συνήθης τρόπος είναι με τη μετάδοση μηνυμάτων των οποίων η εκπομπή εμπεριέχει κόστος.

Όταν δύο κράτη είναι διατηρούν εμπορικές σχέσεις μεταξύ τους, τότε δημιουργείται επιπλέον κόστος σε περίπτωση σύρραξης, αφού παύει το εμπόριο μεταξύ των κρατών. Ταυτόχρονα, οι εμπορικές σχέσεις δίνουν τη δυνατότητα σε ένα κράτος να στείλει αξιόπιστα μηνύματα, που εμπεριέχει κόστος και για το ίδιο. Για παράδειγμα, η επιβολή εμπορικών κυρώσεων είναι ένας τρόπος αφενός να ξεκαθαρίσει ένα κράτος την αποφασιστικότητα του αντιπάλου, καθώς του επιφέρει οικονομική ζημία, και αφετέρου να μεταδώσει μήνυμα υψηλής αξιοπιστίας σχετικά με τη δική του αποφασιστικότητα, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στις κυρώσεις που έχει επιβάλλει η Ευρωπαϊκή Ένωση στη Ρωσική Ομοσπονδία μετά την προσάρτηση της Κριμαίας (Ινστιτούτο Μελετών για την Ασφάλεια της Ε.Ε. – 2015). Ο ηγέτης που παίρνει αυτή την απόφαση καταβάλλει σημαντικό πολιτικό κόστος, καθώς πολίτες της χώρας υπόκεινται σε οικονομική ζημία. Το κόστος αυτό είναι υψηλότερο σε δημοκρατικές χώρες, γεγονός που καθιστά το μήνυμα από αυτές τις χώρες ακόμη πιο ισχυρό.

Με βάση τα παραπάνω, μια πρώτη διαισθητική εκτίμηση είναι ότι η αύξηση του κόστους της σύρραξης λόγω του επιπρόσθετου κόστους (ας υποθέσουμε οικονομικού) θα μείωνε την πιθανότητα ρήξης ή στρατιωτικής σύρραξης. Όπως αναφέρει ο Morrow δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι η αύξηση της εμπορικής δραστηριότητας είναι παράγοντας που πραγματικά επηρεάζει (μειώνει) την πιθανότητα σύγκρουσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσέγγιση των

Spaniel και Malone [W. Spaniel, I. Malone, 2016], σύμφωνα με την οποία το επιπρόσθετο κόστος που προκύπτει από την αύξηση της οικονομικής δραστηριότητας μεταξύ των κρατών, μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της πιθανότητας σύρραξης.

Συγκεκριμένα, η μοντελοποίηση που συνήθως ακολουθείται για να αναπαρασταθεί η αβεβαιότητα στην αποφασιστικότητα του κράτους να εμπλακεί σε σύρραξη είναι το κόστος της σύρραξης. Όμως, αν τα κράτη έχουν καλή πληροφόρηση για τις τιμές κόστους της σύρραξης του άλλου, μπορεί να ακολουθηθεί διαφορετικός τρόπος μοντελοποίησης όπου η αβεβαιότητα έχει να κάνει με την αξία του επίμαχου αγαθού. Έτσι δημιουργείται ασυμμετρία στην πληροφόρηση για την ωφέλεια του κάθε κράτους, ακόμη και στην περίπτωση ειρηνικής διευθέτησης της κρίσης, όπου στον υπολογισμό της ωφέλειας δεν υπεισέρχονται οι τιμές κόστους της σύρραξης και η πιθανότητα επικράτησης του κάθε κράτους.

Οι εμπορικές σχέσεις μεταξύ των κρατών δημιουργούν επιπλέον κόστος για τα δύο κράτη, πέραν του c_i, που συμβολίζεται με $\alpha \Delta_i, \alpha > 0$ συντελεστής στάθμισης.

Τα c_i, Δ_i αποτελούν κοινή γνώση για τα δύο κράτη. Τέλος, θεωρούμε ότι η διαπραγμάτευση παίρνει τη μορφή τελεσιγραφικού παιγνίου, δηλαδή ο A έχει την επιλογή ή να αμφισβητήσει το SQ ή όχι. Ο B έχει την επιλογή ή να αποδεχθεί την πρόταση του A ή να οδηγηθεί σε σύρραξη. Σε αυτές τις συνθήκες οι Spaniel, Malone καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα της σύρραξης δεν είναι πάντα φθίνουσα με την αύξηση του κόστους.

Συγκεκριμένα, εάν $\frac{c_A}{c_B} > \frac{\Delta_A}{\Delta_B}$ τότε η πιθανότητα σύρραξης αυξάνεται με τα Δ_i έως το σημείο που για το επιπρόσθετο κόστος $\alpha \Delta_{\mathrm{B}}$ ισχύει: $\alpha \Delta_{\mathrm{B}} > u_B$, όπου u_B είναι το αναμενόμενο όφελος του B από την πολεμική σύρραξη.

Το αντι-διαισθητικό αυτό συμπέρασμα οφείλεται κυρίως στο ότι το το κράτος A έχει την αντίληψη ότι επειδή το κόστος του B είναι μεγαλύτερο από το δικό του, το B με μεγαλύτερη πιθανότητα θα υποχωρήσει, και συνεπώς οδηγείται στο να διακινδυνεύσει να κάνει πρόταση με μεγάλο όφελος υπέρ του, η οποία με τη σειρά της, αυξάνει τον κίνδυνο απόρριψης και συνεπώς, της σύρραξης.

5.10 Επίπτωση στη διαπραγμάτευση από το πολιτικό κόστος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το πολιτικό κόστος είναι ένας σημαντικός παράγοντας στην εξέλιξη του διαπραγματευτικού παιγνίου μεταξύ των κρατών και στην σταδιακή κλιμάκωση της κρίσης. Η ανάλυσή μας για την Bayesian ισορροπία του διαπραγματευτικού παιγνίου υπό κρίση, ξεκινά με τη σύμβαση ότι ένα από τα δύο κράτη φθάνει στο σημείο να υποβάλλει μια «τελεσιγραφική προσφορά» για το επίμαχο αγαθό. Το άλλο κράτος, είτε θα υποχωρήσει και θα αποδεχτεί την προσφορά, είτε θα εμπλακεί σε σύρραξη. Αν και η ξαφνική και χωρίς προηγούμενες διαπραγματεύσεις υποβολή τελεσιγραφικής προσφοράς, δεν αποκλείεται (π.χ. το τελεσίγραφο της Ιταλίας στην Ελλάδα το 1940 για παράδοση στρατηγικών σημείων της Ελλάδας στον Ιταλικό στρατό), συνήθως η κρίση προκύπτει σταδιακά σε ένα εκτεταμένο χρονικό διάστημα, με ενδιάμεσες συζητήσεις μεταξύ των κρατών για το επίδικο αγαθό. Κατά τη διάρκεια αυτού του διαστήματος κάθε κράτος έχει την ευκαιρία να στείλει αξιόπιστα μηνύματα για να δηλώσει στον αντίπαλο την αποφασιστικότητά του. Δίνεται λοιπόν η δυνατότητα στο κάθε κράτος, να μειώσει την αβεβαιότητά του για την αποφασιστικότητα του αντιπάλου, ώστε να αναπροσαρμόσει τις πεποιθήσεις του, μέσα από μια διαδικασία «μάθησης». Παρόμοιο μηχανισμό έχουμε αξιοποιήσει στη μελέτη του τρόπου σχηματισμού συλλογικής γνώμης στο κεφάλαιο ΙΙ.

Ο J. Fearon [Fearon, 1994] προσαρμόζει το γνωστό παίγνιο του «πολέμου φθοράς» (war of attrition) ώστε να απεικονίσει το εσωτερικό πολιτικό κόστος που αναλαμβάνει ο ηγέτης κάθε κράτους προβαίνοντας σε δημόσιες δεσμεύσεις που οδηγούν στην κλιμάκωση της κρίσης. Καταρχάς, ένας ηγέτης κράτους Α, ορθολογικά σκεπτόμενος, δεσμεύεται δημόσια κατά τη διάρκεια της κρίσης διότι διασφαλίζει την αποστολή αξιόπιστου μηνύματος αποφασιστικότητας στην αντίπαλη πλευρά. Έτσι, δίνει τη δυνατότητα στον ηγέτη του αντίπαλου κράτους Β να εκτιμήσει ξανά την πεποίθησή του για τον τύπο του Α που έχει απέναντί του, όσον αφορά την αποφασιστικότητά του.

Ο Fearon μοντελοποεί τη διαδικασία σαν παίγνιο που παίζεται σε συνεχή χρόνο και ξεκινά από τη στιγμή t=0. Σε κάθε στιγμή ένα κράτος μπορεί είτε να υποχωρήσει, είτε να κλιμακώσει την κρίση, είτε να επιτεθεί. Το παίγνιο συνεχίζεται έως ότου ένα κράτος θα υποχωρήσει, οπότε λαμβάνει την ωφέλεια που του αντιστοιχεί και ο ηγέτης του κράτους καταβάλει το πολιτικό κόστος στο εσωτερικό του κοινό, ή θα επιτεθεί. Τότε, τα δύο κράτη λαμβάνουν τις ωφέλεις του πολέμου. Το μοντέλο του Fearon βασίζεται στην υπόθεση ότι τα πολιτικό κόστος για τους δύο ηγέτες είναι συνάρτηση του χρόνου, a(t), η οποία είναι γνήσια αύξουσα με τον χρόνο. Υποθέτει δηλαδή, ότι όσο ένας ηγέτης κλιμακώνει την κρίση, τόσο μεγαλύτερο πολιτικό κόστος πληρώνει όταν υποχωρήσει.

Ταυτόχρονα, η συνεπακόλουθη κλιμάκωση της κρίσης οδηγεί σε ένα χρονικό σημείο στο οποίο, η κρίση έχει κλιμακωθεί τόσο έντονα, ώστε κανένα κράτος να μην μπορεί να υποχωρήσει. Από ένα σημείο κλιμάκωσης της έντασης και μετά, η σύρραξη καθίσταται αναπόφευκτη. Η μοντελοποίηση έτσι δίνει μια απάντηση στο πότε μπορεί να ξεσπάει πόλεμος στη διάρκεια μιας κρίσης διαρκείας, ουσιαστικά θέτει ενδογενώς ένα πεπερασμένο ορίζοντα στη διαπραγμάτευση, πέρα από τον οποίο δεν υπάρχει επιστροφή.

Συνεπώς, ο ηγέτης θέλοντας να δηλώσει ότι το κράτος του είναι τύπος υψηλής αποφασιστικότητας, ώστε να ενισχύσει τη διαπραγματευτική του θέση, δεσμεύεται δημόσια, κλιμακώνοντας την ένταση. Η κλιμάκωση της έντασης μπορεί να οδηγήσει στο σημείο που το κόστος υποχώρησης είναι πολύ μεγάλο. Η υπόθεση ότι η υποχώρηση από τη δημόσια δέσμευση δημιουργεί δυσβάστακτο πολιτικό κόστος δεν ευσταθεί πάντοτε. Όπως αναφέρει ο Fearon, δεν είναι σπάνιο το φαινόμενο ένα μικρό κράτος να οδηγηθεί σε κρίση στη διένεξη του με ένα πολύ μεγαλύτερο, και η υποχώρηση του ηγέτη όχι μόνο να μην τιμωρηθεί από το λαό, αλλά αντίθετα ο ηγέτης να επιβραβευθεί για την προσπάθειά του να αντιπαρατεθεί στο κράτος – νταή (bully state).

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το ύψος του κόστους που αναλαμβάνει ο ηγέτης με την υποχώρηση και την εγκατάλειψη της κλιμάκωσης, συναρτάται από το είδος του πολιτεύματος του κράτους. Σε δημοκρατικά πολιτεύματα οι επιπτώσεις για τον ηγέτη είναι πιο υψηλές, αφού το πολιτικό κοινό έχει τη δυνατότητα να τους τιμωρήσει στις εκλογές. Αυτή η ευλογοφανής υπόθεση στηρίζεται και σε εμπειρικά δεδομένα που έχουν προκύψει από την ανάλυση διεθνών κρίσεων [B. Prins, 2003]. Στα απολυταρχικά καθεστώτα, ο ηγέτης γενικά, έχει τη δυνατότητα να απορροφήσει το κόστος χωρίς άμεσες επιπτώσεις για τον ίδιο, υπό την προϋπόθεση ότι το καθεστώς είναι ισχυρό. Αν είναι αδύναμο, τότε εσωτερικό πολιτικό κόστος *δύναται να δημιουργηθεί,* και αυτή η προοπτική να σηματοδοτήσει την αποφασιστικότητα του κράτους. Έτσι ο απολυταρχικός ηγέτης αξιοποιεί τη στρατηγική του «εν δυνάμει πλεονεκτήματος», με βάση την ορολογία του Shelling.

Όμως σε περιπτώσεις αστάθειας, οι αυταρχικοί ηγέτες γνωρίζοντας την αδυναμία του καθεστώτος τους και ορθολογικά σκεπτόμενοι, δεν κλιμακώνουν την ένταση, φοβούμενοι την πλήρη αποσταθεροποίησή τους, η οποία έχει για τους ίδιους σαφώς πιο δυσάρεστες επιπτώσεις απ΄ ότι στους δημοκρατικά εκλεγμένους ηγέτες. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Fearon, τα δημοκρατικά κράτη έχουν τη δυνατότητα να στείλουν πιο πειστικό μήνυμα για την αποφασιστικότητά τους από τα απολυταρχικά κράτη, και συνεπώς, να πετύχουν καλύτερη συμφωνία εφόσον αποφευχθεί η σύρραξη.

5.11 Μοντελοποίηση του πολιτικού κόστους σε διαπραγμάτευση κρίσης, σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης.

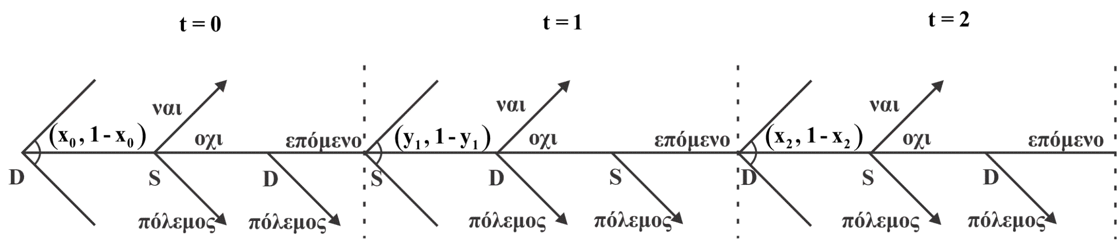
Το ‘war of attrition’ μοντέλο του Fearon βασίστηκε στην υπόθεση ότι το επίμαχο αγαθό δεν μπορεί να διαμοιραστεί και ότι υπάρχει ατελής πληροφόρηση, στο πλαίσιο της οποίας η ανάληψη δημόσιας δέσμευσης παίζει το ρόλο του έγκυρου μηνύματος αποφασιστικότητας. Οι Tarar, Leventoglu [Tarar, Lev. 2009] μοντελοποίησαν το ρόλο που παίζει το εσωτερικό πολιτικό κόστος[16] όταν πληρούνται οι εξής συνθήκες

- Η διαπραγμάτευση γίνεται σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης,
- Το επίμαχο αγαθό να μπορεί να διαμοιραστεί,
- Η ηγεσία να είναι σε θέση να επιλέξει το βαθμό της έκθεσής της, δηλαδή, για ποιο ποσοστό του διαμοιράσιμου αγαθού θα δεσμευθεί δημόσια πριν από τη διαπραγμάτευση. Το πολιτικό κόστος καθορίζεται μόνο από τη δημόσια δέσμευση του ηγέτη και δεν αυξάνεται γνήσια μονότονα με το χρόνο, ώστε να συμβαδίσει με την κλιμάκωση του μοντέλου του Fearon.

Σημειώνουμε ότι σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης το “war of attrition” μοντέλο του Fearon προβλέπει ότι το λιγότερο αποφασισμένο κράτος θα υποχωρήσει απευθείας από τον πρώτο γύρο, παραχωρώντας το επίμαχο αγαθό στον αντίπαλο.

[16] Τα Μέσα Μαζικής Επικοινωνίας έχουν σημαντική συνεισφορά στη δημιουργία του κόστους πολιτικού κοινού. Σχετική ανάλυση στο Slantchev B., 2006. "Politicians, the Media, and Domestic Audience Costs." International Studies Quarterly, Vol. 50, pp 445 - 477

Το μοντέλο των Tarar, Leventoglu στηρίζεται στην κλασσική προσέγγιση του Rubinstein που μελετά τη διαπραγμάτευση ως ανταγωνιστικό παίγνιο προτάσεων – αντιπροτάσεων. Ο χρονισμός του παιγνίου έχει όπως απεικονίζεται στο σχήμα 5.2



Σχήμα 5.2 Χρονισμός παιγνίου διαπραγμάτευσης

Όπως προκύπτει από το σχήμα, τα κράτη έχουν τη δυνατότητα να επιλέξουν πόλεμο, να αποδεχτούν την πρόταση του αντίπαλου, να επιλέξουν τη σύρραξη ή να υποβάλλουν την αντιπροσφορά τους. Η επιλογή της σύρραξης είναι δυνατή για κάθε κράτος, σε κάθε χρονοθυρίδα του διαπραγματευτικού παιγνίου. Σημειώνουμε ότι αφού η διαπραγμάτευση διεξάγεται σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης για τις τιμές κόστους της σύρραξης και τις πολεμικές δυνατότητες των κρατών, και οι ηγέτες είναι ορθολογικοί και έχουν ισχυρή πεποίθηση στην ορθολογικότητα του αντιπάλου, αναμένουμε ότι στην ισορροπία η πιθανότητα του πολέμου θα είναι μηδενική.

Σ’ αυτές τις συνθήκες, το εσωτερικό πολιτικό κόστος λειτουργεί ως διαπραγματευτικός μοχλός για το κράτος σε διαπραγμάτευση, εάν υφίσταται μόνο γι’ αυτό και όχι για το αντίπαλο κράτος. Εάν το κράτος Α δημιουργήσει εσωτερικό κόστος, μέσω δημόσιας δέσμευσης ηγέτη του για τη μη αποδοχή μικρού μέρους της διαμοιράσιμης «πίτας», τότε εξασφαλίζει μεγαλύτερη τιμή επιφύλαξης, Έτσι, μετατοπίζει τη ζώνη πιθανής συμφωνίας σε ευνοϊκότερη περιοχή για τον ίδιο και τελικά παίρνει καλύτερη συμφωνία.

Στην περίπτωση που εσωτερικό πολιτικό κόστος υφίσταται και για τα δύο κράτη, τότε προκύπτουν σε πεπερασμένο ορίζοντα, δύο ισορροπίες, η διευθέτηση, όπως αναμέναμε, αλλά και η σύρραξη.

Στο μοντέλο διαχωρίζεται το όφελος του κράτους από το όφελος του ηγέτη, αφού ο τελευταίος πέρα από το όφελος της διαπραγμάτευσης, καταβάλλει και πολιτικό κόστος. Στην περίπτωση, που και οι δύο ηγέτες καταβάλλουν πολιτικό κόστος, είναι γι' αυτούς προτιμότερο να μην δεσμευτεί πολιτικά κανένας από τους δύο. Βέβαια, αυτό δεν είναι εύκολο, καθώς εάν η διαπραγμάτευση γίνεται εις γνώση του πολιτικού κοινού, οι πολίτες ασκούν πίεση στους ηγέτες τους να δεσμευτούν πολιτικά, ώστε να έχει καλύτερη έκβαση η διαπραγμάτευση γι΄ αυτούς.

Το γεγονός ότι διαχωρίζεται στο μοντέλο η ωφέλεια του ηγέτη από την ωφέλεια του κράτους, οδηγεί στην ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι η σύρραξη είναι ισορροπία του παιγνίου. Η σύρραξη προκύπτει όταν ο ηγέτης του κράτους π.χ., Α (πιεζόμενος από το πολιτικό κοινό) κάνει στον αντίπαλο πρόταση που κείται εκτός της ζώνης πιθανής συμφωνίας. Έτσι, ο ηγέτης του κράτους Β μπορεί να την δεχτεί, αλλά και ο ηγέτης του κράτους Α δεν μπορεί να υπαναχωρήσει λόγω του πολιτικού κόστους που θα καταβάλλει. Συνεπώς, από την ανάλυση προκύπτει ένας ακόμη λόγος για το ξέσπασμα σύρραξης: Το εσωτερικό πολιτικό κόστος. Το ποια από τις δύο ισορροπίες θα επιλεγεί, δηλαδή, σε ποια από τις δύο ισορροπίες τα πολιτικά κοινά των δύο κρατών θα εστιαστούν, εξαρτάται από το πολιτιστικό και ιστορικό πλαίσιο που έχει διαμορφωθεί σε κάθε κράτος. Όπως άλλωστε συμβαίνει εν γένει με τα παίγνια πολλαπλών ισορροπιών που περιγράφουν κοινωνικά φαινόμενα [T. Schelling, 1960].

5.12 Δημόσια δέσμευση σε διαπραγματεύσεις με αβεβαιότητα

Σε αυτό το σημείο θα επικεντρωθούμε το πώς η δημόσια δέσμευση πριν από μια διεθνή διαπραγμάτευση επηρεάζει το αποτέλεσμα της, σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης, στηριζόμενοι σε μοντέλο των Tarar, Leventoglu. Επισημαίνουμε ότι στην ανάλυσή μας δεν λαμβάνουμε υπόψη την ανάγκη νομιμοποίησης των αποτελεσμάτων της διαπραγμάτευσης από το εσωτερικό κοινό, π.χ. μέσω ενός δημοψηφίσματος, όπως συνέβη το 2005 στη Γαλλία για την επικύρωση της Συνταγματικής Συνθήκης της Ευρωπαϊκής Ένωσης.[17]

Οι ηγέτες των δύο κρατών που διαπραγματεύονται για μια εμπορική ή στρατιωτική συμφωνία (συνεπώς για ένα διαμοιράσιμο αγαθό), δεσμεύονται δημόσια πριν τις μεταξύ τους συνομιλίες, για το ελάχιστο αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης που θα αποδεχθούν.

[17] Η προσέγγιση σε αυτού του είδους τη διαπραγμάτευση οφείλεται στον Putnam και την κλασσική του δημοσίευση για τα παίγνια σε δύο επίπεδα, ως νέο εργαλείο ανάλυσης των διαπραγματεύσεων μεταξύ των κρατών [R. Putnam, 1988].

Έστω ότι οι δύο ηγέτες Α,Β θέλουν να διαμοιράσουν «πίτα» μεγέθους 1. Ο Α δεσμεύεται δημόσια ότι θα λάβει ποσοστό τουλάχιστον *a*, και ο Β τουλάχιστον *b*, με: $0 < a \leq 1,\ 0 < b \leq 1$. Το όφελος των πολιτών του κάθε κράτους είναι ακριβώς το ποσοστό από την πίτα που κερδίζει το κράτος τους, θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι $u_i(x) = x$, *i*=1,2. Η «Φύση» επιλέγει ποιος θα προτείνει πρώτος, με πιθανότητα *p* ο Α και 1-*p* ο Β.

Για τον ηγέτη του κράτους Α αν *a* είναι η τιμή στην οποία δεσμεύθηκε δημόσια και *x* είναι το ποσοστό που τελικά λαμβάνει το κράτος του από τη διαπραγμάτευση, ορίζουμε τη συνάρτηση κόστους ως :

$$C_1(a,x) = \begin{cases} 0\ \alpha\nu\ x \geq a \\ \varphi_1(a-x)\ \alpha\nu\ x < a,\ \varphi_1 \geq 0 \end{cases}$$

Αντίστοιχα για τον ηγέτη του κράτους Β:

$$C_2(b,y) = \begin{cases} 0\ \alpha\nu\ y \geq b \\ \varphi_2(b-y)\ \alpha\nu\ y < a,\ \varphi_2 \geq 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, το κόστος είναι ευθέως ανάλογο της απόκλισης από τον δημόσια διακηρυγμένο στόχο, με φ_i το συντελεστή αναλογίας. Ορίζουμε τον εκπτωτικό παράγοντα *δ* να είναι κοινός για τους δύο διαπραγματευτές, ώστε σε κάθε χρονική περίοδο *t*, η «πίτα» είναι δ^t .

Σε αυτές τις συνθήκες, η ισορροπία του παιγνίου ορίζεται ως εξής[18]:

Ο διαπραγματευτής Α δεσμεύεται για μερίδιο $a^* = \dfrac{1+\varphi_1}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}$, ο Β για μερίδιο $b^* = \dfrac{1+\varphi_2}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}$ και ακολουθούνται οι στρατηγικές:

I. Ο Α προτείνει το διαμοιρασμό

$$(x^*, 1-x^*) = \left(\frac{1+\varphi_1}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}, \frac{\delta+\varphi_2}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2} \right) \tag{5.4}$$

[18] Η επαλήθευση ότι αυτές οι συνθήκες οδηγούν σε ισορροοπία, βρίσκεται στο [B. Leventoglu, A. Tarar, 2005]

και αποδέχεται πρόταση y από τον Β, που του αποδίδει κατ' ελάχιστο μερίδιο

$$1-y \geq \frac{\delta+\varphi_1}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2} \tag{5.5}$$

II. Ο Β προτείνει το διαμοιρασμό:

$$(1-y^*, y^*) = \left(\frac{\delta+\varphi_1}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}, \frac{1+\varphi_2}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}\right) \tag{5.6}$$

και αποδέχεται πρόταση x από τον Α, που του αποδίδει κατ΄ελάχιστο μερίδιο

$$1-x \geq \frac{\delta+\varphi_2}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2} \tag{5.7}$$

Όπως και στο μοντέλο του Rubinstein οι ορθολογικοί διαπραγματευτές συμφωνούν στην πρώτη περίοδο, εφαρμόζοντας την προς τα πίσω επαγωγή.

Καταρχάς εξετάζουμε την περίπτωση που ένας μόνο ηγέτης έχει πολιτικό κόστος: $\varphi_1 > 0, \varphi_2 = 0$, τότε ο Α λαμβάνει $\frac{1+\varphi_1}{1+\delta+\varphi_1}$, αν κάνει πρώτος την προσφορά, δηλαδή όσο και η τιμή δέσμευσης, και $\frac{\delta+\varphi_1}{1+\delta+\varphi_1}$ αν κάνει δεύτερος. Σε κάθε περίπτωση, καλύτερα από το μερίδιο που παίρνει χωρίς πολιτικό κόστος [19].

Συνεπώς, όταν ένας ηγέτης έχει να διαπραγματευτεί με έναν οργανισμό που δεν αναλαμβάνει πολιτικό κόστος, π.χ. το ΔΝΤ, έχει κάθε λόγο να προβεί σε δημόσια δέσμευση, βελτιώνοντας έτσι τη διαπραγματευτική του θέση.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση που και οι δύο ηγέτες έχουν πολιτικό κόστος. Τότε, είναι φανερό ότι επειδή α^*, x^* αυξάνονται με το φ_1, όσο σημαντικότερο είναι το πολιτικό κόστος για τον ηγέτη, τότε στην ισορροπία, τόσο μεγαλύτερη είναι η δέσμευσή του πριν τη διαπραγμάτευση, και τόσο μεγαλύτερο το μερίδιο της πίτας που κερδίζει, αλλά και το προσωπικό του κέρδος που προκύπτει ως: $U_1(\ ^* = a\ )\ \ \varphi^* p - [\ _1\ \alpha x\ ^* - (\ \ ^* + x\ )\ ] - \varphi(\ ^* 1,$ με αντικατάσταση προκύπτει: $U_1(a^*) = \frac{[p(1-\delta)+\delta](1+\varphi_1)}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}$

Αντίστοιχα, $U_2(\beta^*) = \frac{[1-p(1-\delta)](1+\varphi_2)}{1+\delta+\varphi_1+\varphi_2}$

[19] Με βάση τη λύση του Rubinstein τα αντίστοιχα μερίδια είναι: $\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}$

Αν συγκρίνουμε τις τιμές του μεριδίου της ισορροπίας με τις τιμές του μοντέλου Rubinstein, προκύπτει ότι ο ηγέτης A επιτυγχάνει καλύτερο μερίδιο εφόσον $\varphi_1 > \frac{\varphi_2}{\delta}$ και αντίστοιχα, ο ηγέτης B επιτυγχάνει καλύτερο μερίδιο εφόσον $\varphi_2 > \frac{\varphi_1}{\delta}$. Όταν οι συντελεστές του πολιτικού κόστους για τους δύο ηγέτες δεν έχουν μεγάλη διαφορά, τότε και οι δύο ηγέτες λαμβάνουν μικρότερο μερίδιο απ' ότι αν δεν προβούν σε δημόσια δέσμευση.

Συγκεκριμένα, αν $\delta\varphi_2 < \varphi_1 < \frac{\varphi_2}{\delta}$, τότε $x^* < \frac{1}{1+\delta}, 1-y^* < \frac{\delta}{1+\delta}$ (6)

Από τη σχέση (6) προκύπτει ότι αν δύο ηγέτες κρίνουν ότι έχουν αντίστοιχο πολιτικό κόστος, π.χ. αν είναι ηγέτες δημοκρατικών χωρών με παρόμοια πολιτικά χαρακτηριστικά, <u>*τότε προτιμούν να μην προχωρήσουν σε δημόσια δέσμευση, για να επιτύχουν έτσι καλύτερο αποτέλεσμα.*</u>

5.13 Καθυστέρηση στη διαπραγμάτευση

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη των διαπραγματεύσεων με την αναφορά σε αιτίες καθυστέρησης επίτευξης συμφωνίας μεταξύ δύο παικτών. Με βάση το μοντέλο του Rubinstein, η συμφωνία σε μια διαπραγμάτευση έρχεται αμέσως, καθώς οι ορθολογιστές παίκτες, σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης, γνωρίζουν τους εκπτωτικούς παράγοντες δ_1, δ_2. Αντίθετα, σε περιβάλλον ατελούς πληροφόρησης η καθυστέρηση είναι δυνατή αν και επισύρει κόστος στα εμπλεκόμενα μέρη. Στην περίπτωση μάλιστα των κρατών συχνά στοιχίζει και σε ανθρώπινες ζωές (π.χ. η διένεξη μεταξύ Ισραηλινών και Παλαιστινίων). Καθυστέρηση στη διαπραγμάτευση μεταξύ ορθολογιστών παικτών συνήθως αποδίδεται στη βιβλιογραφία στην αδυναμία αποστολής αξιόπιστων μηνυμάτων που μεταφέρουν την ιδιωτική πληροφορία μεταξύ των εμπλεκομένων μερών. Αιτία καθυστέρησης είναι η αισιοδοξία των παικτών. Αν οι δύο παίκτες δεν έχουν κοινή common prior κατανομή πιθανοτήτων, τότε ένας παίκτης – π.χ. A – έχει πεποίθηση ότι η διαπραγματευτική του ισχύς είναι μεγαλύτερη από αυτή που αντιλαμβάνεται ο B. Σε τέτοιες συνθήκες ο A έχει την αισιοδοξία ότι καθώς προχωρά η διαπραγμάτευσης ο B, θα λάβει τέτοια σήματα που θα τον κάνουν να αναπροσαρμόσει την πεποίθησή του για τον Α, να μάθει δηλαδή ότι ο Α έχει ισχυρή διαπραγματευτική θέση και να προσαρμοστεί έτσι σε αυτό που ο Α θεωρεί λογική συμφωνία. Σε συνθήκες μάθησης, η συμφωνία καθυστερεί μέχρι την περίοδο t^* όπου το κόστος της αναμονής είναι μεγαλύτερο από το όφελος της εκμάθησης. [M. Yildiz 2011].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Οι διαπραγματεύσεις μεταξύ Η.Π.Α. και Η.Β. για τη δυνατότητα πυρηνικής αποτροπής

1957 – 1962

6.1 Ιστορικό πλαίσιο

Στις αρχές του έτους 1957 οι ΗΠΑ, η Σοβιετική Ένωση και η Μ. Βρετανία είναι οι μοναδικές χώρες με πυρηνικά όπλα. Στη Μ. Βρετανία είναι πρωθυπουργός ο συντηρητικός Χάρολντ ΜακΜίλλαν (MacMillan) ο οποίος έχει δημόσια δεσμευθεί να διατηρήσει τη Μ. Βρετανία ως μέλος αυτού του ελίτ σχηματισμού. Στις ΗΠΑ πρόεδρος είναι ο Ντουάϊτ Αϊζενχάουερ (Eisenhower). Οι δύο άνδρες γνωρίζονται από χρόνια και έχουν συνεργαστεί στο Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο.

Αντιδράσεις στην εκτόξευση Σπούτνικ

Τόσο οι Ηνωμένες Πολιτείες όσο και η Μ. Βρετανία θεωρούν ότι αντιμετωπίζουν μια ακόμα απειλή από τους Σοβιετικούς. Στις 4 Οκτωβρίου 1957, η Σοβιετική Ένωση έθεσε τον πρώτο τεχνητό δορυφόρο - Σπούτνικ σε τροχιά γύρω από τη γη, ρηγματώνοντας έτσι την ευρέως διαδεδομένη άποψη της αμερικανικής τεχνολογικής υπεροχής. Σε αυτό το σημείο ο Eisenhower και η κυβέρνηση του δέχεται ευρύτατες επικρίσεις από τους πολιτικούς τους αντιπάλους και από τον Τύπο των ΗΠΑ διότι επέτρεψαν στους Σοβιετικούς να είναι η πρώτη χώρα που εξερευνά το διάστημα. Το μήνυμα είναι σαφές: μια χώρα που μπορεί και εκτοξεύει στο διάστημα ένα δορυφόρο μπορεί να εκτοξεύσει και μια πυρηνική κεφαλή. Οι Γερμανοί στο Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο δεν είχαν την ικανότητα να πλήξουν αμερικανικό έδαφος. Οι Σοβιετικοί το 1957 μπορούν να εκμηδενίσουν ολόκληρες πόλεις. Η αμερικανική αισιοδοξία που προερχόταν από την αμυντική υπεροχή δέχεται ένα σοβαρότατο πλήγμα.

Προσωπική Σχέση MacMillan - Eisenhower

Ο πρωθυπουργός της Μ. Βρετανίας και ο πρόεδρος των ΗΠΑ ήταν φίλοι και ένα από τα πλεονεκτήματα της φιλίας η ειλικρίνεια στη μεταξύ τους σχέση. Κάτι που εκφράζεται από τα παρακάτω αποσπάσματα από τις μεταξύ τους επιστολές. Οι επιστολές προέρχονται από το βιβλίο: The Macmillan–Eisenhower correspondence, 1957–1969 [20]

Επιστολή από τον MacMillan στον Eisenhower

10.10.1957

"*Τι θα κάνουμε μ' αυτούς τους Ρώσους; Αυτός ο τεχνητός δορυφόρος μάς κατέστησε σαφές τι τρομεροί άνθρωποι είναι και τι απειλή αποτελούν για τον ελεύθερο κόσμο. Δεν ήρθε η ώρα να ενώσουμε τις δυνάμεις μας και να αποφασίσουμε πώς θα τις χρησιμοποιήσουμε για το κοινό καλό;».*

Στην οποία ο πρόεδρος των ΗΠΑ απαντά ως εξής:

Επιστολή από τον Eisenhower στον MacMillan

11.10.1957

«Όπως γνωρίζεις, είμαι από καιρό ένας ειλικρινής υπέρμαχος των στενότερων δεσμών μεταξύ των δύο χωρών μας. Πιστεύω ότι όλες οι χώρες που φοβούνται ότι απειλούνται από τον κομμουνισμό ή οποιαδήποτε άλλη μορφή δικτατορίας κοιτάζουν κυρίως προς τη χώρα σου και τη δική μας για την ηγεσία που απαιτείται. Νομίζω, λοιπόν, ότι είναι απαραίτητο όχι μόνο οι υψηλότεροι αξιωματούχοι των δύο χωρών μας να βρίσκονται κοντά σε αυτά τα θέματα, αλλά αυτή η κατανόηση και η συμφωνία θα πρέπει, στο μεγαλύτερο δυνατό μέτρο, να επεκταθεί στους δύο λαούς μας και μάλιστα σε όσο το δυνατόν περισσότερους τομείς μπορούμε να φτάσουμε.»

Λίγες ημέρες αργότερα οι συνομιλίες συνεχίζονται.

Επιστολή από τον MacMillan στον Eisenhower

16.10.1957

«Συμφωνώ μαζί σου ότι το καλύτερο δυνατό θα ήταν να συναντηθούμε και να μιλήσουμε πάνω επί της γενικής καταστάσεως και να δούμε αν μπορούμε μαζί

[20] Geelhoed, E.B. Edmonds A.O., The Macmillan–Eisenhower correspondence, 1957–1969. (2005).London,Palgrave Macmillan

ξεκινήσουμε κάποια νέα προσέγγιση σε όλα αυτά τα διασυνδεδεμένα προβλήματα - στρατιωτικά, οικονομικά, και πολιτικά.»

....

«Πώς να εξηγηθεί αυτή η επίσκεψή μου; Έχω σκεφτεί προσεκτικά τη δυνατότητα για κάποιο πρόσχημα, όπως μια διάλεξη ή ένα πτυχίο πανεπιστημίου, αλλά αυτές οι υποθέσεις καθορίζονται συνήθως μερικούς μήνες πριν και φοβάμαι ότι οποιαδήποτε τέτοια κάλυψη δεν θα είναι αρκετά αποτελεσματική.»

«Προκειμένου να μειωθεί οποιαδήποτε εντύπωση ότι πρόκειται για μια έκτακτη συνεδρίαση, σκέφτομαι ότι θα μπορούσαμε να πούμε, είτε στην επίσημη ανακοίνωση ή ανεπίσημα στον Τύπο, ότι ήλπιζα να ,μπορούσα να έρθω στην Ουάσιγκτον κατά την επιστροφή μου από την Αυστραλία τον Φεβρουάριο, αλλά είχα προβληματιστεί ότι αυτό συνεπάγεται μια περαιτέρω απουσία μου σε περίοδο της κοινοβουλευτικής συνόδου και ότι θα ήταν καλύτερο να κάνω αυτή την επίσκεψη τώρα, πριν την επανέναρξη του Κοινοβουλίου.»

Σκοπός τους είναι η επανασύσταση της στενής συνεργασίας μεταξύ των δύο εθνών. Ο Eisenhower γνωρίζει ότι μια πραγματική υπερδύναμη έχει υπεροπλία φίλων και συμμάχων εκτός από κυριολεκτική υπεροπλία. Ο MacMillan όντας πολιτικός άνδρας αισθάνεται την ανατέλλουσα ευκαιρία να χρησιμοποιήσει την αμερικανική κοινή γνώμη προς όφελος της Βρετανίας.

Επανασύσταση Στενής Συνεργασίας

Πράγματι στις 23.10.1957 ο πρωθυπουργός MacMillan προσγειώνεται στις ΗΠΑ. Ο πρώτος σκοπός του είναι η απόκτηση πρόσβασης στην πυρηνική έρευνα των ΗΠΑ. Μέχρι το τέλος του Β΄ Π.Π. η Βρετανία αντιμετωπίζονταν ως ίσος εταίρος στο πυρηνικό πρόγραμμα ερευνών των ΗΠΑ. Αυτό θα αλλάξει από το αμερικανικό Κογκρέσο με την νομοθεσία ΜακΜάχον και έτσι η Βρετανική επιστημονική κοινότητα αναγκάζεται να συνεχίσει μόνη. Παρόλα αυτά η υπεράσπιση του Βασιλείου αποτελεί το πρώτο και ύψιστο καθήκον μιας κυβέρνησης και για αυτό το λόγο η Μ. Βρετανία επενδύει σε στόλο βομβαρδιστικών αεροσκαφών (Vulcan bomber) που το 1957 φέρουν τις βρετανικές πυρηνικές κεφαλές.

Η ανατολή της εποχής των πυραύλων δημιουργεί δημόσια ερωτήματα για την αποτελεσματικότητα των αεροσκαφών ως μέσω αποτροπής πυρηνικής επίθεσης. Γίνεται πλέον σαφές ότι η βρετανική άμυνα χρειάζεται πυραύλους. Κάτι ιδιαίτερα ακριβό, εφικτό για μια υπερδύναμη, όμως πιθανώς εκτός του εφικτού για τη Βρετανία. Η μετάβαση από βομβαρδιστικά σε συστήματα πυραυλικής άμυνας ενέπλεκε ένα άλμα στην τεχνολογία που οι Βρετανοί μόνοι τους δεν μπορούσαν να πραγματοποιήσουν. Είχαν επενδύσει ήδη παρά πολλά χρήματα για να αναπτύξουν και να κατασκευάσουν τα βομβαρδιστικά V bomber και οι οικονομικοί πόροι ήταν περιορισμένοι. Για να κατανοήσουμε την κατάσταση της Βρετανικής οικονομίας αρκεί να αναφέρουμε ότι το έτος της άρσης των πολεμικών περιορισμών στην οικονομία με δελτία συνέβη το 1954. Μόλις πριν τρία χρόνια.

Παρόλα αυτά, επειδή γνώριζαν ότι χρειάζονται ένα νέο όπλο για να διατηρήσουν την ικανότητα τους ως μέσο αποτροπής πυρηνικής επίθεσης, αναπτύσσουν το καθαρά βρετανικό πυραυλικό σύστημα Μπλού Στρικ (Blue Streak). Το σύστημα αυτό απαιτεί περίπου 30 λεπτά για να θερμάνει τις μηχανές του. Στην εποχή του Σπούτνικ ο χρόνος αντίδρασης σε μια σοβιετική επίθεση είναι πλέον 4 λεπτά. Συνεπώς, το σύστημα Blue Streak δύσκολα μπορεί να υπηρετήσει το Δόγμα της Αμοιβαίας Εξασφαλισμένης Καταστροφής (MAD: Mutually Assured Destruction), η ισχύς του οποίου ήταν αδιαμφισβήτητη στη διάρκεια του ψυχρού πολέμου. Επιπρόσθετα, το Blue Streak απαιτεί σταθερές βάσεις εκτόξευσης το οποίο σε μια μικρή νησιωτική χώρα σαν την Μ. Βρετανία δημιουργούσε ανυπέρβλητο πρόβλημα ασφάλειας, καθώς αναμφίβολα θα έθετε την τοποθεσία αυτής της σταθερής βάση στη λίστα των πρώτων στόχων για πυρηνικό πυραυλικό χτύπημα από τους Σοβιετικούς.

Τα μειονεκτήματα του Blue Streak σημαίνουν ότι η Βρετανία δεν θα διαθέτει στα μάτια των εχθρών της, αλλά και της κοινής γνώμης, ένα αξιόπιστο σύστημα αποτροπής πυρηνικής επίθεσης. Μια θέση πολιτικά δύσκολα διαχειρίσιμη σε μια χώρα που μέχρι πρόσφατα έφερε το χαρακτηρισμό “Αυτοκρατορία” .

Από την άλλη, οι ΗΠΑ τη δεκαετία του 1950 χρηματοδοτούν αθρόα μια πληθώρα από οπλικά συστήματα που φέρουν πυρηνικές κεφαλές. Ναυτικό, στρατός και αεροπορία επωφελούνται και αναπτύσσουν συστήματα που πολλές φορές αλληλεπικαλύπτονται ή είναι πολύπλοκα ή εξαιρετικά ακριβά. Οι ΗΠΑ έχουν την τεχνολογική και οικονομική δυνατότητα να κατασκευάσουν εναλλακτικά πυραυλικά συστήματα που θα μπορούσαν να καλύψουν πληθώρα επιχειρησιακών αναγκών.

6.2 Συμφωνία Κάμπ Ντέϊβιντ (Camp David), 1960

Η συνεργασία στον τομέα της άμυνας ήταν στην κορυφή των στόχων του Macmillan απ' όταν έγινε Πρωθυπουργός. Η κυβέρνηση MacMillan είχε δημόσια πάρει θέση σε υψηλότατο επίπεδο υπέρ μιας ανεξάρτητης εθνικής αποτρεπτικής πυρηνικής δύναμης. Η Μ. Βρετανία έπρεπε να έχει δικά της πυρηνικά οπλικά συστήματα.

Αμερικάνικη Αντίληψη των Πραγμάτων: Σύμφωνα με την περιγραφή της ιστορικού Ντ. Μάρρεϊ, ο Πρόεδρος Eisenhower για να διευκολύνει την κατάσταση πρότεινε δύο συστήματα τα οποία θα μπορούσαν να διατεθούν για την άμυνα της Βρετανίας. Το σύστημα Πολάρις (Polaris) και το σύστημα Skybolt (Skybolt).

Το σύστημα Skybolt είναι ένας πύραυλος που εκτοξεύεται από αεροπλάνο και έδειχνε στα πρώτα στάδια της ανάπτυξης του ως ιδανικό για την αεροπορία της Μ. Βρετανίας η οποία ήδη κατείχε στόλο στρατηγικών βομβαρδιστικών Vulcan.

Το σύστημα του αμερικανικού ναυτικού Polaris είναι τεχνικά πολύπλοκο, αλλά έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι ο πύραυλος εκτοξεύεται από πυρηνοκίνητα υποβρύχια. Το υποβρύχιο δεν εντοπίζεται εύκολα και σαν όπλο που φέρει πλέον και πυραύλους με πυρηνικές κεφαλές γίνεται ιδανικό για την εξασφάλιση της καταστροφής της άλλης πλευράς σε περίπτωση αιφνιδιαστικής επίθεσης, το λεγόμενο «δεύτερο χτύπημα».

Αναμφίβολα, η ναυπήγηση ενός στόλου υποβρυχίων είναι ακριβή και η αγορά του πυραυλικού συστήματος είναι ακόμα κάτι υπό αίρεση αλλά εντός του βρετανικού στρατιωτικού κατεστημένου αρχίζει σταδιακά να διαμορφώνεται η άποψη ότι η λύση στο αμυντικό πρόβλημα της Βρετανίας είναι το Polaris.

Αν η Μ. Βρετανία ενδιαφερόταν θα μπορούσε να αποκτήσει ένα από τα δύο αυτά συστήματα. Με αυτή την θέση τω ν ΗΠΑ δημόσια διατυπωμένη, επιστρέφοντας στη Βρετανία ο MacMillan ακύρωσε το σύστημα Μπλού Στρικ. Με αυτή την κίνηση υπήρχε πλέον απόλυτη δημόσια δέσμευση για το σύστημα Skybolt.

Βρετανική Αντίληψη των Πραγμάτων και το Αντάλλαγμα

Η συνάντηση Macmillan και Eisenhower στο Camp David τον Μάρτιο του 1960 ήταν στα πλαίσια μια τυπικής συνάντησης μεταξύ των δύο κυβερνήσεων. Η απόφαση να σταματήσει η εξέλιξη του Μπλού Στρίκ είχε είδη ληφθεί για λόγους κόστους και αναποτελεσματικότητας. Στα πλαίσια της προαναφερθείσας συνάντησης μέλη του πολεμικού ναυτικού των ΗΠΑ προσπάθησαν να πείσουν τους Βρετανούς για το Polaris. Πράγματι η καταλληλότητα του συστήματος ήταν καταφανής καθώς ένα υποβρύχιο ήταν εξαιρετικά δύσκολο να εντοπιστεί συνεπώς ήταν το απόλυτο όπλο «δεύτερου χτυπήματος». Επίσης το σύστημα αναμενόταν να έχει επιχειρησιακό χρόνο ζωής σχεδόν μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 70.

Παρόλα αυτά, τη στιγμή εκείνη η κυβέρνηση MacMillan επιλέγει το σύστημα Skybolt. Αυτό διότι η απόκτηση των Polaris θα άλλαζε τους παραδοσιακούς ρόλους εντός των ενόπλων δυνάμεων καθιστώντας το Πολεμικό Ναυτικό και όχι την Πολεμική Αεροπορία φορέα των πυρηνικών όπλων. Μια τέτοια κίνηση θα είχε σχεδόν σίγουρα ως αποτέλεσμα τη δημιουργία περιττών ερίδων και αντιπαλότητας μεταξύ των της Αεροπορίας και του Ναυτικού.

Επιπρόσθετα, το σύστημα Skybolt ήταν φθηνότερο από το Polaris και επιμήκυνε το χρόνο ζωής των βομβαρδιστικών της Βασιλικής Αεροπορίας (RAF) τα οποία περί τα μέσα της δεκαετίας του 60 θα ήταν παρωχημένα. Οι ΗΠΑ αναλάμβαναν εξ ολοκλήρου το κόστος έρευνας και ανάπτυξης ενώ η Βρετανία θα αγόραζε μονό τον αριθμό των πυραύλων που θα επιθυμούσε. Το Skybolt θα προσέφερε τις υπηρεσίες πυρηνικής αποτροπής που δεν μπορούσε το σύστημα Μπλού Στρικ.

Το σύστημα Polaris υπήρχε στο πεδίο των συζητήσεων, αλλά θεωρήθηκε ότι δεν ήταν το πλέον κατάλληλο για τις άμεσες ανάγκες της Βρετανίας. Όμως επειδή τα οφέλη από ένα τέτοιο όπλο δεν γινόταν να αγνοηθούν, θεωρήθηκε συνετό να διατηρηθεί η δυνατότητα απόκτησης του Polaris σε μεταγενέστερη ημερομηνία, ενδεχομένως για την χρονική περίοδο μετά το 1970.

Η βρετανική θέωρηση των πραγμάτων ήταν[21] ότι το Skybolt και το Polaris θεωρήθηκαν όχι ως εναλλακτικές λύσεις αλλά ως διαδοχικά όπλα τα οποία, θα

[21] Σχετική αναφορά γίνεται σε υπόμνημα του Γενικού Γραμματέα του Υπουργείου Αμύνης της Βρετανίας στον Υπουργό Άμυνας το 1960, I. Clark “Nuclear Diplomacy and the Special Relationship” p.284, 1994

μπορούσαν να συγκροτήσουν ένα αξιόπιστο και αποτελεσματικό εθνικό πυρηνικό οπλοστάσιο μέχρι μέσα της δεκαετίας του 1970 και ενδεχομένως και πέραν αυτής.

Το αντάλλαγμα

Οι ΗΠΑ γι' αυτή τους την γενναία παραχώρηση θα ελάμβαναν μια ναυτική βάση στη Μ. Βρετανία. Δηλαδή εγκαταστάσεις ελλιμενισμού και εξυπηρέτησης για τα υποβρύχια του αμερικανικού στόλου Polaris σε απόσταση βολής από το σοβιετικό έδαφος.

Από το επίσημο κείμενο του μνημονίου του Καμπ Ντειβιντ 29.03.1960:

Scottish Ports – We welcome the assurance that, in the same spirit of cooperation, the UK would be agreeable in principle to making the necessary arrangements for US Polaris tenders in Scottish ports.

Το πρόβλημα της τοποθεσίας της αμερικανικής βάσης των πυρηνοκίνητων υποβρυχίων μπορεί να εξελιχθεί σε σοβαρή πολιτική κρίση. Η τοποθεσία που επιλέγουν οι Αμερικανοί απέχει μόλις 40 χλμ από τη Γλασκώβη την τρίτη μεγαλύτερη πόλη στη Βρετανία. Η βάση καθιστά την πόλη ως στόχο πρώτου χτυπήματος της Σοβιετικής Ένωσης (first strike target). Αντιλαμβανόμενος το υψηλό πολιτικό κόστος ο MacMillan εκφράζει τις επιφυλάξεις του και προτείνει μια άλλη λύση. Περίπου 160 χλμ βορειοδυτικά, πάλι εντός Σκωτίας, σε μια περιοχή που ονομάζεται Λοχ Λίννι (Loch Linnhe).

Επιστολή από τον MacMillan στον Eisenhower

24.06.1960

"*It is true that it has, ready-made, some of the shore facilities and amenities you need; but its proximity to Glasgow is from every other point of view a very serious disadvantage. It would surely be a mistake to put down what will become a major nuclear target so near to the third largest and the most overcrowded city in this country.*"

"*But a more immediate difficulty is that a city of this size inevitably contains large numbers of people who would be quick to take the opportunity of making* *physical demonstrations against us both. Security problems would certainly be much greater here than in some less populated area."*

"……….*For these reasons I believe that Loch Linnhe would be a far better location. Our technical experts have looked at it and they are satisfied that it would meet all the main operational requirements. From a security point of view, a robust population of three or four thousand highlanders at Fort William is much more to my taste than the rather mixed population in the cosmopolitan city of Glasgow."*

Οι Αμερικανοί δεν θέλουν τη βάση τους στη μέση του πουθενά. Για την άνεση και το ηθικό των πληρωμάτων τους, ζητούν μια πόλη σε άμεση γειτνίαση και ένα αεροδρόμιο. Το αεροδρόμιο Prestwick κοντά στη Γλασκώβη είναι ένα τέτοιο γρήγορο σημείο πρόσβασης. Ως εκ τούτου, αρνούνται την προσφορά.

Επιστολή από τον Eisenhower στον MacMillan

30.06.1960

"*We readily agree with you that insofar as your given reasons are concerned, Loch Linnhe would be a better location for the POLARIS submarine tender and drydock than the Clyde. Other factors important to our ballistic missile submarine needs, however, compel us reluctantly to decline your offer of Loch Linnhe. These reasons would include the need for greater shore facilities for logistical support, more immediate access to open seas and international waters, and the need for comparative ease and safety of navigation."*

Μετά από περίπου έξη μήνες κωλυσιεργίας η Βρετανική κυβέρνηση ενδίδει στις αμερικανικές απαιτήσεις για τη βάση των υποβρυχίων, ώστε να λάβει το σύστημα Skybolt. Για τον περιορισμό του πολιτικού κόστους ο MacMillan ζητά από τον Eisenhower κοινό έλεγχο για την εκτόξευση των πυρηνικών πυράυλων στην αιγιαλίτιδα ζώνη της Βρετανίας.

Επιστολή από τον MacMillan στον Eisenhower

24.06.1960

"*With the submarines, all that has been suggested so far is that they should not, without our consent, fire their missiles from within our territorial waters. I am wondering whether this could for presentational purposes be extended to something like a hundred miles. But, in the main, I shall have to rely on our general understanding."*

Επιστολή από τον Eisenhower στον MacMillan

15.07.1960

"*First, on the question of control, we agree that our POLARIS missiles would not be launched within your territorial waters without your consent. To extend any form of dual control beyond territorial waters would, however, present us with a number of problems, some of which I believe might be of concern to you as well."*

Και προσθέτει.

Επιστολή από τον Eisenhower στον MacMillan

27.10.1960

"*With reference to the launching of missiles from US Polaris submarines, I give you the following assurance, which of course is not intended to be used publicly. In the event of an emergency, such as increased tension or threat of war, the US will take every possible step to consult with Britain and other Allies."*

Με τις προαναφερθείσες διαβεβαιώσεις το Νοέμβριο του 1960 γίνεται η δημόσια ανακοίνωση χωρίς καμία διαβούλευση με τους Σκωτσέζους. Καθιστικές διαμαρτυρίες λαμβάνουν χώρα στην είσοδο της βάσης. Αυτή η πεποίθηση ότι το Σκάίμπολτ και το Χόλυ Λοχ ήταν προσφορές ανταποδοτικές, αμοιβαίες και ηθικές, *αν και δεν ήταν νομικά συνδεδεμένες*, οδηγούσαν τη βρετανική σκέψη ότι το Polaris ήταν κάτι που τους είχε σχεδόν υποσχεθεί. Κάτι που θα αποδειχθεί μεγάλης σημασίας όταν οι διαπραγματεύσεις άρχισαν τρία χρόνια αργότερα εν μέσω κρίσης.

6.3 Προεδρία Kennedy

Τον Ιανουάριο του 1961 οι ΗΠΑ έχουν νέο Πρόεδρο. Ο νέος Πρόεδρος Kennedy είναι από μια διαφορετική γενιά και έχει διαφορετικές ιδέες. Ο Eisenhower έχοντας πολεμήσει δίπλα στους Βρετανούς κατά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο δείχνει μεγαλύτερη κατανόηση στις βρετανικές ανάγκες. Η νέα γενιά δεν έχει την πεποίθηση ότι η Μ. Βρετανία είναι μια υπερδύναμη και ότι θα πρέπει να συνεχίσει να διατηρεί αυτή την ψευδαίσθηση.

Η κυβέρνηση Kennedy αποτελούνταν σε μεγάλο βαθμό από μια νέα γενιά στελεχών που δεν έχουν την εμπειρία να είναι συμπολεμιστές με τους Βρεταννούς στο Β ΠΠ. Μερικοί είχαν τέτοια εμπειρία όπως οι Ρασκ (Εξωτερικών) αλλά οι ιδέες τους κρίνονται περισσότερο ως φιλοευρωπαϊκές παρά φιλοβρετανικές. Ο Ντ. Μπρούς (Αμερικανός Πρέσβης στη Βρετανία) για παράδειγμα ήταν υπέρ της ευρωπαϊκής ενοποίησης παρά στην προώθηση της ειδικής σχέσης και πολλοί στην αμερικανική διπλωματία είναι υπέρμαχοι μιας πολύπλευρης θέασης της εξωτερικής πολιτικής όπου όλοι οι σύμμαχοι λαμβάνουν την ίδια υποστήριξη

Μέλη λοιπόν της κυβέρνησης Kennedy κατά την περίοδο 1961-63 θεωρούν ότι η «ειδική σχέση» πρέπει να επανεκτιμηθεί καθώς έχει αρχίσει να βλάπτει κατά την άποψη τους τα συμφέροντα της εξωτερικής πολιτικής της Αμερικής. Η επανασύσταση των στενών αμυντικών σχέσεων από τον πρόεδρο Eisenhower θεωρείται από αυτούς ως λάθος και πρέπει να διορθωθεί. Το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι η διαμόρφωση μια κίβδηλης κατάστασης εντός ΝΑΤΟ καθώς η Βρετανία δε έχει την απαραίτητη ισχύ. Συνέπεια επίσης αυτής της αμυντικής πολιτικής είναι να εμποδίζει κινήσεις εξωτερικής πολιτικής όπως η ευρωπαϊκή ενοποίηση.

Η συζήτηση για την ύπαρξη και την αναγκαιότητα για μιας ειδικής σχέσης με τη Βρετανία είναι θέμα που υπάρχει ακόμα και σήμερα, και έχει επανάλθει στην επικαιρότητα μετά την απόφαση της Μ.Β. για την έξοδό της από την Ευρωπαϊκή Ένωση.

Προσωπική Σχέση Κένενντι-MacMillan

Ο Kennedy βλέπει στον MacMillan ένα έμπιστο πρόσωπο του οποίου την σοφή συμβουλή μπορεί να αναζητήσει σε περίοδο κρίσεως. Πράγματι, κατά τη διάρκεια τη

Κρίσης της Κούβας μιλούν τηλεφωνικά σχεδόν κάθε μέρα. Κάτι που χτίζει την προσωπική τους σχέση. Αυτό μόνο τυχαίο δεν είναι. Κατά τον ιστορικό Ν. Άστον είναι μέρος της στρατηγικής του MacMillan. Η διατύπωση της αγγλο-αμερικανική σχέσης που συναντάμε συχνότερα και συνδέεται με τον MacMillan έχει τις ρίζες της στην διάρκεια του Β ΠΠ και στη θητεία ως υπουργός στο Αρχηγείο Συμμαχικών Δυνάμεων (AFHQ) στη Βόρεια Αφρική. Καταγράφεται περίφημα από τον Richard Crossman στη πρώτη του συνάντηση με τον Macmillan, και την περιγραφή του τελευταίου, σχετικά με τη λειτουργία της αγγλο-αμερικανικής σχέσης με τους ακόλουθους όρους:

«Εμείς, αγαπητέ μου Crossman, είμαστε οι Έλληνες σε αυτή την αμερικανική αυτοκρατορία. Θα βρεις τους Αμερικανούς πολύ – όπως οι Έλληνες βρήκαν τους Ρωμαίους – μεγάλους, χυδαίους, πολύβουους ανθρώπους, με μεγαλύτερο σθένος από εμάς, αλλά και πιο αδρανείς, με πιο ανέγγιχτες αρετές αλλά και πιο διεφθαρμένους. Πρέπει να διοικήσουμε το AFHQ, όπως οι Έλληνες σκλάβοι διοίκησαν τις υποθέσεις του αυτοκράτορα Κλαύδιου.»

Η παρομοίωση ήταν σαφής. Οι Βρετανοί είναι πολιτισμικά και πνευματικά πιο εκλεπτυσμένοι από τους Αμερικανούς. Η υπεροχή αυτή θα τους επιτρέψει να χειραγωγήσουν την αγγλο-αμερικανική σχέση με μακιαβελικό τρόπο, στρέφοντας κρυφά την αμερικανική δύναμη προς τους βρετανικούς σκοπούς.

Μετά την κρίση στην Κούβα, ορισμένα μέλη του εσωτερικού κύκλου του Κέννεντι θέλουν να δουν τη Βρετανία να παραιτείται από το ρόλο της ως ανεξάρτητη πυρηνική δύναμη. Το Στέιτ Ντιπάρτμεντ των ΗΠΑ θεωρεί κάθε αναφορά μιας ανεξάρτητης βρετανικής πυρηνικής δύναμης ως πρόκληση στους Γάλλους και τους Δυτικογερμανούς.

Αρχηγός ενός πυρήνα που αποκαλείται από τον ιστορικό Ν. Άστον[22] ως Ευρωπαϊστές (Europeanists) ήταν ο Τζώρτζ Μπόλλ (Under-Secretary of State for Economic Affairs, George Ball). Δικηγόρος στο επάγγελμα, ο Ball είχε συναντήσει τον Jean Monnet κατά τη διάρκεια του πολέμου, μετά τον οποίο ο ίδιος είχε υπηρετήσει για μικρό διάστημα ως γενικός σύμβουλος του Monnet, ενώ ο Monnet κατείχε τη θέση του προέδρου του Συμβουλίου Προμήθειών της Γαλλίας.

[22] Ashton, N. (2002). Kennedy, Macmillan and the Cold War, The Irony of Interdependence. London. PALGRAVE MACMILLAN. p 135-136.

Γοητευμένος από το όραμα του Monnet της νέας Ευρώπης που θα μπορούσε να εγείρει εαυτήν από τα συντρίμμια του πολέμου, ο Ball είχε προσχωρήσει στις απόψεις του σχετικά με την ανάγκη για στενότερη ευρωπαϊκή ολοκλήρωση. Κατά τη θητεία του στην κυβέρνηση Κέννεντι υποστήριζε την ευρωπαϊκή ενοποίηση με σθένος καθώς και τον περιορισμό της εξάπλωσης των πυρηνικών όπλων. Για τους «ευρωπαϊστές», το πυρηνικό ζήτημα ήταν πάνω απ' όλα ένα μέσο προς το σκοπό της προώθησης της μεγαλύτερης ευρωπαϊκής ολοκλήρωσης μέσω της δημιουργίας της πολύπλευρης δύναμης (Multilateral Force). Μέσα στους πολιτικούς σκοπούς τους, ο στόχος της πρόληψης της διάδοσης των πυρηνικών τον οποίο επιτύγχαναν μέσω της πολύπλευρης δύναμης ήταν δευτερεύον, σε σχέση πρωταρχικό στόχο την προώθηση της ευρωπαϊκής ολοκλήρωσης. Φυσικά, οι δύο στόχοι ήταν συχνά τόσο πολύ δεμένοι μεταξύ τους που ήταν δύσκολο να τους χωρίσει κανείς. Παρ 'όλα αυτά, οποιαδήποτε πρόταση εκ μέρους του Macmillan ότι η βρετανική πλευρά θα μπορούσε να «δωροδοκήσει» τη γαλλική για να την αφήσει να εισέλθουν στην ΕΟΚ, μέσω της παροχής βοήθειας προς τον ανεξάρτητο γαλλικό πυρηνικό οπλοστάσιο, ήταν ανάθεμα για τους ευρωπαϊστές.

Σε αντίθεση με τους ευρωπαϊστές, η θέση του Kennedy για το ρόλο των πυρηνικών θεμάτων στις σχέσεις ΗΠΑ-ευρωπαϊκές ήταν πάρα πολύ ρεαλιστική, ακόμη και κυνική. Το ζήτημα της βοήθειας προς το ανεξάρτητο γαλλικό πυρηνικό πρόγραμμα, όμως, ήταν ένα θέμα στο οποίο θα μπορούσαν να συμφωνήσουν «ευρωπαϊστές» και «πραγματιστές». Αυτό θα μπορούσε να αποδειχθεί διχαστικό σε σχέση με την ευρωπαϊκή ολοκλήρωση, γιατί θα μπορούσε να προωθήσει την αίσθηση στη Δυτική Γερμανία ότι ήταν δεύτερης κατηγορίας κράτος. Η Δυτική Γερμανία, συνέπεια αυτού θα μπορούσε να θελήσει να αναπτύξει πυρηνικά όπλα. Κάτι που θα υπονομεύσει τη συγκέντρωση της διοίκησης και ελέγχου των πυρηνικών όπλων.

6.4 Περιβάλλον πριν τη διάσκεψη στο Nassau

Μια σειρά από κινήσεις από την αμερικανική πλευρά δημιουργούν ανησυχίες στη βρετανική κοινή γνώμη και κυβέρνηση.

Ο Αμερικανός υπουργός άμυνας Ρόμπερτ McNamara δεν ήταν ένας θεωρητικός άνθρωπός, ούτε ιδιαίτερα πολιτικός στη φύση του. Ήταν ένας άνθρωπος εξαιρετικά ορθολογιστής ο οποίος κατά το Β' Π.Π. εφάρμοσε αρχές στατιστικής στη λήψη αποφάσεων της μονάδας του και αργότερα επιτυχημένο ανώτερο στέλεχος στη Φόρντ. Ασχολείτο κυρίως με τον ισολογισμό των εθνικών περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων. Στο πρόσωπο του McNamara βλέπουμε μια εμπορική και "λογιστική" προσέγγιση στον ψυχρό πόλεμο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντιλαμβανόταν τους συμμάχους ως θυγατρικές εταιρίες τη μητρικής αμερικανικής εταιρίας που βοηθούν έναντι της ανταγωνίστριας Σοβιετικής Ένωσης. Με αυτό τον τρόπο σκέψης έβλεπε το Λονδίνο σαν ένα υποκατάστημα που λάμβανε εντολές.

Επιπρόσθετα, απόρροια αυτού του τρόπου σκέψης ήταν η πεποίθηση πως ήταν σπάταλο, αναποτελεσματικό, αλλά και μη ασφαλές, να αναπτυχθούν πολλαπλά κέντρα λήψης πυρηνικών αποφάσεων στη Δύση. Αυτά διαφαίνονται στην ομιλία του στο Ann Arbor στις 16 Ιουνίου 1962 όπου δήλωσε ότι οι μικρές εθνικές αποτρεπτικές πυρηνικές δυνάμεις είναι *επικίνδυνες, στερούνται αξιοπιστίας και εύκολα απαξιώνονται*. Μια ομιλία που δεν πέρασε απαρατήρητη από όλους τους συμμάχους εντός ΝΑΤΟ και από τους τότε αποστάτες Γάλλους.

Αυτή η προσήλωση του στους αριθμούς και στην αλήθεια ήταν κάτι που ανάλογα με την περίσταση οδηγούσε τα πράγματα σε θετικό ή αρνητικό αποτέλεσμα. Εάν είχε αποφασίσει για ένα θέμα, σαν ζηλωτής, δύσκολα θα άλλαζε άποψη εάν δεν υπήρχαν νέα επιστημονικά δεδομένα.

Το Νοέμβριο του 1962, ο υπουργός Άμυνας Robert McNamara ενημερώνεται για την πρόοδο του προγράμματος Skybolt. Του μεταφέρεται η άποψη ότι η τεχνολογία είναι αποτυχημένη και ότι το σύστημα κοστίζει πάρα πολλά χρήματα. Κυρίως για λόγους κόστους, αποφασίζει μονομερώς την ακύρωση του συστήματος. Η ιστορικός Ντ. Μάρρεϊ παραθέτει ότι η ανησυχία του McNamara για την βρετανική αντίδραση ήταν ελάχιστη. Ο McNamara ανησυχούσε περισσότερο για το Κογκρέσο και τις πιθανές αντιδράσεις της αεροπορίας των ΗΠΑ για την ακύρωση του Skybolt.

Το Δεκέμβριο του 1962 ο McNamara επισκέπτεται τη Βρετανία. Η αποτυχία του Skybolt γίνεται δημόσια γνώση στη Βρετανία. Με την άφιξή του στη Μ.Β. δηλώνει κατηγορηματικά ότι και οι πέντε δοκιμές που έχουν γίνει απέτυχαν. Έτσι, στο βρετανικό Τύπο και στη βρετανική κοινή γνώμη ο MacMillan εκτίθεται σχεδόν ανεπανόρθωτα. Έχει επενδύσει το πολιτικό κύρος του σε ένα μόνο συγκεκριμένο πρόγραμμα, το οποίο ναυγαεί. Ο McNamara άρχισε να συνειδητοποιεί την έκταση των προβλημάτων στα οποία είχε κατά λάθος συμβάλλει, όταν μετά τη δήλωσή του συναντήθηκε με τον Βρετανό Υπουργό Thorneycroft στο Λονδίνο.

Σε αυτή τη συνάντηση οι βρετανικές ανησυχίες γίνονται ρητές. Σύμφωνα με την ιστορικό D. Murray ο McNamara θεωρεί ακόμα ότι το πλαίσιο της συμφωνίας με τους Βρετανούς δεν είναι διμερές αλλά εντός ΝΑΤΟ, ενώ ο Βρετανός Υπουργός Άμυνας ομιλεί σκεπτόμενος μια πλήρως ανεξάρτητη πυρηνική δύναμη ως διάδοχο σύστημα του Skybolt.

Πιστεύοντας, εσφαλμένα, ότι οι Βρετανικοί Skybolt θα ανατίθεντο στο ΝΑΤΟ και ότι δεν θα ήταν το αποκλειστικό εθνικό μέσο πυρηνικής αποτροπής της Μ.Β., ο McNamara διαπράττει ένα κρίσιμο λάθος που διαταράσσει την ισορροπία.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι θέσεις των δύο μερών έχουν ως εξής:

Θέση Η.Π.Α.

Ο Αμερικανός Υπουργός Άμυνας, McNamara έχει υπόψη του μια πολυεθνική πυρηνική δύναμη εντός ΝΑΤΟ. Ενδεικτικό της προχειρότητας που χειρίστηκε αρχικά ο McNamara την υπόθεση είναι και η έλλειψη ενημέρωσης του για τη «ρήτρα ακυρώσεως» που είχε συμπεριληφθεί στην αρχική συμφωνία του Camp David με βάση την οποία ήταν δυνατή η ακύρωση του προγράμματους και της συνεπακόλουθης πώλησης των πυραύλων στη Μ.Β. για τεχνικούς λόγους

Κατά τον σύμβουλο του προέδρου Κέννεντυ (Kennedy), Ρ. Νοισταντ, οι Βρετανοί δεν ήταν σε θέση να επικρίνουν τους Αμερικανούς διότι αυτοί ήταν που ζήτησαν να εισαχθεί η προαναφερθείσα ρήτρα στην αρχική συμφωνία. Συνεπώς, οι Βρετανοί πολιτικοί θα μπορούσαν να παραπονεθούν για έλλειψη συντονισμού και ενημέρωσης, ίσως και για την ταχύτητα της λήψης της απόφασης αλλά επουδενί δεν θα μπορούσαν να κατηγορήσουν του Αμερικανούς ως κακόβουλους συνωμότες που δρουν με κακή πίστη για να μην διαθέσουν στη Μ.Β. οπλικά συστήματα πυρηνικής αποτροπής. Αν ο McNamara γνώριζε ότι η ρήτρα ακύρωσης για τεχνικούς λόγους είχε προέλθει από τη βρετανική πλευρά θα είχε πιθανότατα αποφύγει την πολιτική κρίση.

Όσον αφορά τη συσχέτιση της πώλησης του Skybolt στη Μ.Β. με την παραχώρηση της βάσης των υποβρυχίων στη Σκωτία, η αμερικανική πλευρά θεωρεί ότι οι δύο αποφάσεις απλά ελήφθησαν την ίδια στιγμή. Προκειμένου να ξεκαθαρίσει την κατάσταση για τη συμφωνία του Camp David ο Kennedy τηλεφωνεί στον προκάτοχο του, Eisenhower στις 17.12.1962.

Σε καταγεγραμμένη τηλεφωνική επικοινωνία ο Kennedy [1] λέει: :

"*In the agreement we agreed on Holy Loch, they may feel that one is for the other. It does not read that way. It seems they were separate decisions but made at the same time.*"

Θέση της Μ. Βρετανίας

Η θέση της Μ.Β. διαμορφώνεται από το ότι μετά την ακύρωση του πυραυλικού συστήματος Μπλού Στρικ, κατέστη απόλυτα εξαρτημένη από τις ΗΠΑ στο θέμα της πυρηνικής αποτροπής.

Για τους Βρετανούς τίθεται ζήτημα αξιοπιστίας των σχέσεών τους με τις ΗΠΑ καθώς θεωρούν ότι οι τεχνικές δυσκολίες στην ανάπτυξη του Skybolt δίνουν μια καλή δικαιολογία στην αμερικανική ελίτ να σκοτώσει την ιδέα της ανεξάρτητης βρετανικής πυρηνικής δύναμης. Όχι επειδή είναι αντιβρετανοί, αλλά επειδή είναι υπέρ της ενωμένης Ευρώπης. Τα γεγονότα αυτά δηλώνουν μια μεγάλη κρίση εμπιστοσύνης και έτσι, οδηγούμαστε στην έκτακτη σύνοδο κορυφής στο Nassau.

Σημαντική παράμετρος για να αντιληφθούμε τη Βρετανική θέση είναι ότι αν και ο Πρωθυπουργός MacMillan και οι διαδοχικοί Υπουργοί Άμυνας Γουάτκινσον και Θορνεικροφτ γνωρίζουν το πιθανό κόστος αποτυχίας του συστήματος Skybolt, δεν έχουν εκπονήσει κανένα εναλλακτικό σχέδιο γι' αυτή την περίπτωση. Ο Πρωθυπουργός δεν ανησυχεί υπερβολικά για την ακύρωση του Skybolt, πιστεύοντας ότι ο Πρόεδρος Kennedy ήταν εν γνώσει του γεγονότος ότι είχε κληρονομήσει από τον προκάτοχο του μια «*ηθική υποχρέωση*» να παρέχουν οι ΗΠΑ στη Βρετανία μια εναλλακτική διάταξη πυρηνικής αποτροπής. Μια πολιτική υψηλού ρίσκου καθώς αναθέτει το πιο καίριο σημείο της εθνικής άμυνας σε μια ξένη δύναμη.

Οι Βρετανοί έχουν σχηματίσει την πεποίθηση ότι οι συμφωνίες για την αγορά του Skybolt και της παραχώρησης της ναυτικής βάσης στο Χόλυ Λοχ είναι αλληλένδετες. Παρά το γεγονός ότι οι δύο συμφωνίες δεν συνδέονται επισήμως (δεν υπάρχει ρητή σύνδεση των δύο θεμάτων στο κείμενο της συμφωνίας του Camp David), θεωρήθηκε από τον Macmillan ότι ήταν ξεκάθαρη ανταλλαγή – quid pro quo. Βέβαια, αυτό ήταν κάτι που δεν μπορούσε να ειπωθεί δημόσια στο πολιτικό του κοινό.

Η βρετανική πλευρά λοιπόν, θέλει να τηρηθούν τα συμφωνηθέντα. Η Μ. Βρετανία έδωσε το Χόλι Λοχ στη Σκωτία για να έχει ένα αξιόπιστο πυραυλικό σύστημα για τις πυρηνικές κεφαλές της.

Συνολικά, ο MacMillan σε επίπεδο εξωτερικής πολιτικλής επιδιώκει τρεις βασικούς στόχους.

- Ανεξάρτητη Πυρηνική Δύναμη
- Στενές αγγλο-αμερικανικές σχέσεις
- Ένταξη στη Κοινή Αγορά της υπό διαμόρφωση ΕΟΚ

Με την υπόθεση Skybolt οι τρεις αυτοί στόχοι αποκτούν μια μεταξύ τους σύνδεση, που αυξάνει το επίπεδο πολυπλοκότητας.

Διάσκεψη στο Nassau, 19.12.1962

Η παρακάτω περιγραφή των τριών ημερών των διαπραγματεύσεων στο Νασσάου βασίζεται στην περιγραφή του Βρετανού ιστορικού Νάϊτζελ Άστον. Επί της περιγραφής αυτής, αναλύεται από την άποψη της θεωρίας παιγνίων και διαμόρφωσης γνώμης/πεποίθησης το πλαίσιο των διαπραγματεύσεων, τα αποτελέσματα και το περιβάλλον αυτών.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι πριν την συνάντηση στο Νάσσαου, ο MacMillan είχε συναντηθεί με τον Γάλλο πρόεδρο ΝτεΓκώλ στο Ραμπουιγιέ για τις διαπραγματεύσεις εισόδου του Η.Β. στην τότε Ε.Ο.Κ. Οι Γάλλοι εκείνη τη στιγμή ήταν αντίθετοι με την είσοδο στην ΕΟΚ και αντιτίθεντο σθεναρά σε μια τέτοια προοπτική. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την ουσιαστική κατάργηση του προγράμματος Skybolt, τοποθετεί τον Βρετανό πρωθυπουργό σε θέση στην οποία δεν δύναται να οπισθοχωρήσει σε σημαντικά εθνικά θέματα στα μάτια της κοινής γνώμης. Οι αντιπροσωπείες των δύο χωρών έχουν τις εξής συνθέσεις:

Αντιπροσωπεία Μεγάλης Βρετανίας

- Harold MacMillan, Πρωθυπουργός
- Alec Home, Υπουργός Εξωτερικών

- Peter Thorneycroft, Υπουργός Αμύνης
- Philip de Zulueta, Tim Bligh, Harold Evans, Στελέχη του πολιτικού γραφείου του Πρωθυπουργού.
- David Ormsby-Gore, Βρετανός Πρέσβης στις ΗΠΑ

Αντιπροσωπεία Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής

- John Fitzgerald Kennedy, Πρόεδρος
- Robert McNamara, Υπουργός Αμύνης
- McGeorge Bundy, Σύμβουλος Εθνικής Ασφάλειας
- George Ball, Υφυπουργός Εξωτερικών

(Σημαντική απουσία: Dean Rusk, Υπουργός Εξωτερικών)

Ημέρα 1η - 19.12.1962

Αργά το βράδυ της Τρίτης 18 Δεκ 1962, Kennedy και MacMillan θα συναντηθούν για περίπου μία ώρα, από την οποία συνάντηση δεν υπάρχει επίσημη καταγραφή. Το τι ειπώθηκε στη συνάντηση δείχνει να μην επηρέασε τις εναρκτήριες δηλώσεις των δύο πλευρών.

Το πρωί της Τετάρτης, 19 Δεκεμβρίου 1962 θα λάβουν χώρα οι πρώτες προγραμματισμένες συνομιλίες μεταξύ των δυο πλευρών.

Έναρξη της συνόδου.

Ο πρέσβης Όρμσμπι-Γκόρ θεωρεί ότι η πρώτη φάση των συζητήσεων ήταν «σπατάλη χρόνου» (waste of time). Διότι και οι δύο πλευρές κατά τη έναρξη κάνουν δηλώσεις για την επίσημη καταγραφή των θέσεων τους. Κάτι που αργότερα κατά την άποψη του πρέσβη θα δυσκόλευε την εύρεση λύσης μέσω ουδέτερης γλώσσας.

Κατά τον ιστορικό N.J. Ashton εργασίες της συνόδου εκτυλιχθήκαν με ιδιαίτερη ένταση κατά την πρώτη ημέρα της .

Πρωϊνό Σκέλος

Οι συνομιλίες ξεκινούν με τον Πρωθυπουργό MacMillan να έχει το λόγο.

Ο MacMillan ξεκινά με ιστορικές αναφορές σχετικές με τη συνεργασία των δύο χωρών από την εποχή του Β Π.Π. Στη συνέχεια, εξηγεί την θέση που συνδιαμόρφωσαν με τον Πρόεδρο Eisenhower στη συμφωνία του Καμπ Ντέϊβιντ τον Μάρτιο του 1960. Σε αυτή τη συμφωνία σημειώνει ότι ο τότε Πρόεδρος είχε συζητήσει και το σύστημα Polaris, πρίν κάνει την προσφορά προς τη βρετανική πλευρά για το σύστημα Skybolt. Σε μια κίνηση υψηλού συμβολισμού, ο MacMillan δηλώνει ότι ο Πρόεδρος του έδωσε ένα μοντέλο μακέτα ενός υποβρυχίου με το σύστημα Polaris.

Συνεχίζει τα επιχειρήματα του, λέγοντας ότι πιθανή δέσμευση των ΗΠΑ προς βοήθεια της Βρετανίας δεν θα επηρεάσει τις ενταξιακές διαπραγματεύσεις με τους Γάλλους και τους Γερμανούς στην ΕΟΚ. Κατά τον MacMillan αυτό είναι απόρροια των διαφορετικών ιστοριών και δεσμών μεταξύ των εν λόγω κρατών. Επίσης, θεωρεί πώς επειδή και τα δύο συστήματα είναι βαλλιστικά, δεν έχουν ουσιαστικές διαφορές σε πολιτικό επίπεδο. Κλείνοντας, στέλνει μήνυμα επίδειξης αποφασιστικότητας, σχεδόν συγκεκαλυμένη απειλή, πώς «*Οι δυσκολίες που έχουν αναφερθεί μεταξύ των συμμάχων, δεν θα είναι τίποτα έμπροσθεν των δυσκολιών που έπονται, εάν οι ΗΠΑ φαίνονται να χρησιμοποιήσουν την απόφαση για το σύστημα Skybolt ως ένα μέσο για να ωθήσουν την Βρετανία εκτός ικανότητας να έχει ανεξάρτητη πυρηνική αποτροπή/αναχαίτηση.*»

Ο Πρόεδρος Kennedy, οξυδερκής, λαμβάνει το μήνυμα και λέγει εμφατικά ότι η ακύρωση του Skybolt δεν στοχεύει το πυρηνικό οπλοστάσιο της Βρετανίας. Δεν θέλει να αιωρούνται υπόνοιες περί κακής πίστης, mala fides στα Λατινικά. Αναγνωρίζει το Βρετανικό αίσθημα για την ανάγκη της πυρηνικής ικανότητας.

Ο Kennedy εκπλήσσει τον MacMillan προσπαθώντας να του πουλήσει ξανά το «ακυρωμένο» Skybolt κάνοντας προσφορά που είναι οικονομικά γενναιόδωρη. Σύμφωνα με την προσφορά η ΜΒ αποκτά πλήρη πρόσβαση στα σχέδια του οπλικού συστήματος και αναλαμβάνει στη συνέχεια να το αναπτύξει με ιδίες δυνάμεις. Οι ΗΠΑ από τη μεριά τους αναλαμβάνουν να καλύψουν το 50% από το μελλοντικό κόστος έρευνας και ανάπτυξης ώστε το σύστημα να λειτουργεί.

Κατά τον Kennedy: «*Αυτή θα είναι μια καλή απάντηση σε αυτούς που στη Βρετανία νόμιζαν ότι οι ΗΠΑ ελάμβαναν την απόφαση περί του Skybolt λόγω της εναντίωσης τους στο Βρετανικό πυρηνικό οπλοστάσιο.*»

Συνεχίζει για να αντικρούσει τον MacMillan λέγοντας, πώς πράγματι υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο συστημάτων:

«Το Polaris όχι μόνο είναι αλλά και ουσιωδώς εμφανίζεται να είναι διαφορετικό».

Σύνοψη Επιχειρημάτων Kennedy:

- Η προσφορά 50-50 για τη συμμετοχή μας στο κόστος ανάπτυξης του Skybolt δείχνει ότι είμαστε ειλικρινείς και ενδιαφερόμαστε.
- Υπάρχει εμφανής διαφορά ανάμεσα στο Skybolt και στο Polaris.

Ο Πρωθυπουργός MacMillan υπενθυμίζει ότι ο Αμερικάνος υπουργός άμυνας McNamara, πολλάκις έχει δημόσια αναφερθεί στην ανικανότητα του συστήματος Skybolt. Κατά συνέπεια το σύστημα είναι πολιτικά νεκρό.

Υπολογισμένα, ο MacMillan εκφέρει μιας από τις πλέον ασυνήθιστες φράσεις στη ιστορία της βρετανικής διπλωματίας:

"*While the proposed marriage with Skybolt was not exactly a shot-gun wedding, the virginity of the lady must now be regarded as doubtful. There had been too many remarks about the unreliability of Skybolt for anyone to* ***believe*** *in its effectiveness in the future*."

Η φράση αυτή φαίνεται να έχει σαν στόχο τη θρυλούμενη υπερσεξουαλική φύση του Προέδρου.

Σύνοψη Επιχειρημάτων MacMillan:

- Ο αρμόδιος Υπουργός σας δημόσια έχει ανακοινώσει το ότι δεν δουλεύει το σύστημα και το έχει ακυρώσει
- Πλέον δεν είναι αξιόπιστο σαν σύστημα στα μάτια της κοινής γνώμης

Σύμφωνα με τα πρακτικά, οι συζητήσεις αλλάζουν πλαίσιο και γίνεται αναφορά για το πλαίσιο ελέγχου και χρήσης των συστημάτων. Αυτή πρέπει να είναι εντός πολυεθνικού (multinational) και πολυμερούς (multilateral) συμμαχικού σχήματος.

Ο Kennedy δηλώνεις ότι πώς μόνο εντός ενός πολυμερούς πλαισίου, και ακόμα και αυτό μετά από εκτεταμένη μελέτη, είναι διατεθειμένος να συζητήσει το σύστημα Polaris. Δηλαδή εντός του ΝΑΤΟ (assinged) και αυτό ύστερα από μελέτη.

Συνεπώς, το σύστημα Polaris αναφέρεται με πάρα πολλές προϋποθέσεις, κάτι που προφανώς δυσαρεστεί σαν πρώτη προσφορά τη βρετανική πλευρά, δεδομένου ότι πεποίθηση των Βρετανών ήταν πως τα δύο συστήματα (Skybolt, Polaris) τους είχαν προσφερθεί στο Camp David με τους ίδιους διοίκησης και για τα δύο.

Στη συνέχεια, οι συνομιλούντες αναλύουν το θέμα της πολυμερούς συμμαχικής δύναμης. Χαρακτηριστικά ο MacMillan λέει: «*Εαν φανταστούμε μια σκληρή Γερμανία με διάθεση για πυρηνικά όπλα, είναι αμφίβολο ότι θα ικανοποιείτο έχοντας 1 εκ των 16 στο πλήρωμα ενός υποβρυχίου* (εξοπλισμένου με Polaris).»

Επίσης, αναφέρει ότι οι διαπραγματεύσεις για την ένταξη στην ΕΟΚ δεν του έχουν αφήσει χώρο για περαιτέρω παραχωρήσεις. Εάν εγκαταλείψει την ιδέα ανεξάρτητης πυρηνικής δύναμης για μία πολυμερή και πολυεθνική δύναμη, θα δημιουργηθεί η εντύπωση στο βρετανικό λαό ότι παραδίδει μέρος της εθνικής κυριαρχίας.

Ο Kennedy προτείνει να εκδοθεί διακοίνωση τριών σημείων.

1. Οι ΗΠΑ συμφώνησαν να πουλήσουν στη Μ. Βρετανία το σύστημα Hound Dog[23].
2. Οι ΗΠΑ προσφέρθηκαν να συνεισφέρουν 50% του ποσού για το μελλοντικό κόστος ανάπτυξης που απαιτείται για την ολοκλήρωση του Skybolt.
3. Το σύστημα Polaris βρίσκεται υπό μελέτη εντός ενός πολυμερούς στρατηγικού σχεδιασμού.

Οι τρεις αυτές προτάσεις κατά την αμερικάνικη πλευρά επαρκούν για να καθησυχάσουν τις αιτιάσεις περί κακής πίστης από πλευράς τους.

[23] Το Hound Dog ήταν πύραυλος τύπου cruise, όχι βαλιστικός. Έτσι η ακτίνα δράσης του περιοριζόταν μεταξύ 650 – 1.200 Km, ανάλογα με το προφίλ της πτήσης, πολύ μικρότερη δηλαδή από την αντίστοιχη του Skybolt ή του Polaris. Η διαφορά αυτή ήταν ουσιώδους σημασίας αν ληφθεί υπόψη η έκταση της Σοβιετικής Ένωσης. [R. Dorr, L. Peacock 2000]

Το πρωϊνό σκέλος των διαπραγματεύσεων ολοκληρώθηκε με τους Αμερικανούς να εμμένουν στην 50-50 προσφορά τους και τελικά, την απόσυρση της ανακοίνωσης των τριών σημείων για περαιτέρω επεξεργασία.

Το πρωινό σκέλος των διαπραγματεύσεων ολοκληρώθηκε στις 11:45 και η έναρξη του δεύτερου ήταν προγραμματισμένη για τις 16:30. Σε αυτό το διάστημα ο MacMillan και ο Kennedy γευμάτισαν για 90 λεπτά. Η εξαιρετική μεταξύ τους σχέση, παρόλες τις περιστάσεις, επέτρεψε να γίνουν κινήσεις και από τις δυο πλευρές για βελτιωθεί το κλίμα.

Πράγματι, με την έναρξη του δεύτερου σκέλους και η αμερικανική και η βρετανική πλευρά φέρνουν στο τραπέζι έγγραφες θέσεις που είναι σύμφωνες με τα λεχθέντα του πρωινού. Η αμερικανική πλευρά έχει τρία έγγραφα:

1. Περιέχει τις θέσεις της ανακοίνωσης των τριών σημείων που περιέγραψε ο Kennedy το πρωί. Επιπρόσθετα, περιέχει μια πρόταση που τονίζει την ανάγκη να ανέλθουν οι συμβατικές δυνάμεις στα επίπεδα που έχουν συμφωνηθεί εντός του ΝΑΤΟ.

2. Περιέχει τις ιδέες σχετικά με την προτεινόμενη πυραυλική δύναμη εντός ΝΑΤΟ.

3. Περιέχει με σαφήνεια την ακριβή γλώσσα που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ο MacMillan για να απαντά στα ερωτήματα σχετικά με τις περιστάσεις στις οποίες δύναται η Βρετανία να χρησιμοποιήσει την πυρηνική της συνιστώσα εντός ΝΑΤΟ για ιδία άμυνα.

Επί λέξει:

«Μόνο σε περίπτωση **δεινής εθνικής ανάγκης (dire national emergency**) – μια κατάσταση έκτακτης ανάγκης στην οποία ενδέχεται να είναι απαραίτητο να δράσει μόνη της – μια κατάσταση έκτακτης ανάγκης που δεν μπορεί να προβλεφθεί και η οποία καλή τη πίστη δεν πρέπει ποτέ να συμβεί – θα δύναται η Κυβέρνηση της Αυτής Μεγαλειότητας να βρεθεί αντιμέτωπη με μια απόφαση της αξιοποίησης αυτών των δυνάμεων από μόνη της – φυσικά μετά από επαρκή ειδοποίηση προς όλους τους εταίρους της»

Η βρετανική πλευρά παρουσιάζει έγγραφο το οποίο εξιστορεί το θέμα Skybolt και μετά περιγράφει αναλυτικά την προσφορά 50-50 του Kennedy. Επίσης αναφέρει την μη δέσμευση του πρωθυπουργού σε αυτή την πρόταση. Στη συνέχεια, αναφέρει το σύστημα Χάουννт Ντόγκ και το σύστημα Polaris. Στο προς συζήτηση βρετανικό κείμενο αναφέρεται ότι οι ΗΠΑ θα πωλήσουν στη Βρετανία το σύστημα Polaris, ενώ η βρετανική κυβέρνηση εννοεί και δηλώνει ότι η βασική χρήση του συστήματος είναι για συνεισφορά σε αμυντικούς σκοπούς εντός ΝΑΤΟ. Επίσης αναφέρει και τη δημιουργία της πολυμερούς νατοϊκής στρατιωτικής δύναμης.

Ένα σημαντικό σημείο τριβής εμφανίζεται στο δεύτερο αμερικανικό έγγραφο όπου παρουσιάζεται η έννοια της ανάθεσης (assignment) των βρετανικών πυρηνικών δυνάμεων στο ΝΑΤΟ. Για τον MacMillan η αναφορά ερμηνευόταν ως: «υπό συμμαχική διοίκηση υπό φυσιολογικές συνθήκες, αλλά διαθέσιμες για εθνική χρήση σε καιρό κρίσης». Είναι προφανές ότι γύρω από την λέξη και την έννοια ¨*ανάθεση*¨ αναπτύχθηκαν οι δυο απόψεις των δύο πλευρών, με την βρετανική να προσβλέπει στη χαλαρότερη δυνατή ερμηνεία.

Στη συνέχεια, οι συνομιλούντες και από τις δύο πλευρές αναπτύσσουν πιθανά σενάρια για την διευκρίνηση της υπό διαμόρφωση κατάστασης.

Το 1940 η Βρετανία ανακάλεσε τις στρατιωτικές της δυνάμεις από την Γαλλία μπροστά στην απειλή των Γερμανικών στρατευμάτων, με σκοπό την εθνική άμυνα. Σε μια τέτοια περίπτωση που απειλείται υπαρξιακά το έθνος είναι δυνατή η χρήση των πυρηνικών δυνάμεων. Κάτι αποδεκτό και από τις δύο πλευρές.

Ο υπουργός Εξωτερικών της Βρετανίας, Home, αναφέρει την περίπτωση της κρίσης στο Κουβέιτ και της υπεράσπισης των βρετανικών πετρελαϊκών συμφερόντων ως μια τέτοια περίπτωση, κάτι που δεν γίνεται αποδεκτό από τους Αμερικανούς. Στη συνέχεια ο MacMillan φέρνει ως παράδειγμα τη Σιγκαπούρη η οποία ανήκει στα «*πιο υψηλά εθνικά συμφέροντα της Βρετανίας* (Britain’s supreme national interests)». Μια φράση που θα αποδειχθεί κλειδί στο τελικό κείμενο της συμφωνίας.

Άξια αναφοράς κατά τον ιστορικό **Nigel Ashton** είναι η στιχομυθία μεταξύ MacMillan, Kennedy και McNamara. Ο Πρωθυπουργός MacMillan στρέφεται προς τον Υπουργό Εξωτερικών McNamara και τον ερωτά αν λαμβάνοντας υπόψη ό,τι έχει λεχθεί για το σύστημα Skybolt από αμερικάνικης πλευράς (αποτυχία δοκιμών), θα ήταν διατεθειμένος να το αγόραζε ο ίδιος για την εθνική άμυνα των ΗΠΑ.

Η ανταπόκριση του McNamara ήταν απλή και άμεση. «Δεν υπήρχε καμία αξία σε αυτό». Προσπαθώντας να διασώσει τη ζημιά που γίνεται στο σχέδιο 50-50 ο πρόεδρος Kennedy άμεσα ερωτά τον McNamara αν θα αγόραζε το Skybolt αν οι Αμερικανοί δεν είχαν άλλο αποτρεπτικό σύστημα. Η ανταπόκριση McNamara ήταν και πάλι βάναυσα ειλικρινής: «Σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να γίνει μια προσπάθεια να κάνουμε το Skybolt να δουλέψει αλλά θα κοστίσει ένα τεράστιο ποσό χρόνου και χρήματος.»

Ο υπουργός Άμυνας δεν ήταν διατεθειμένος να προσποιηθεί ότι υπήρχε αξία στη προσφορά του Kennedy για το σχέδιο 50-50 του Skybolt, ώστε να εξυπηρετήσει πολιτικούς σκοπούς του Ρροέδρου. Μετά από αυτή τη στιχομυθία ο πρόεδρος Kennedy δεν προσπάθησε να πιέσει περαιτέρω για το σχέδιο 50-50 στις συναντήσεις του με τον MacMillan, αν και παρέμεινε ως αναφορά στα διάφορα κείμενα συμφωνιών. Συνεπώς η στάση του McNamara μετέβαλε τις διαθέσιμες στρατηγικές στη διαπραγμάτευση.

Κατά την πρώτη ημέρα των διαπραγματεύσεων και οι δύο πλευρές ήθελαν να έχουν στα πρακτικά (on the record) τις θέσεις τους. Σκοπός αυτής της καταγραφής ήταν η δημόσια υπεράσπιση των θέσεων τους στα μάτια της κοινής γνώμης σε περίπτωση κατάρρευσης των διαπραγματεύσεων.

Η ανταλλαγή απόψεων εκείνο το βράδυ ήταν τεταμένη.

Ο υπουργός άμυνας Θορνεϊκρόφτ θεωρούσε ότι οι Αμερικανοί τους είχαν ξεγελάσει και ότι αν υιοθετούσαν τις Αμερικανικές προτάσεις ουσιαστικά δεν υπήρχε πλέον ανεξάρτητη πυρηνική δύναμη. Κατ' αυτόν η διάσκεψη πρέπει να λυθεί με ένα ανακοινωθέν τονίζοντας ότι οι Αμερικανοί απέσυραν την υποστήριξη τους από Skybolt, και ότι δεν ήταν δυνατόν να συμφωνήσουν σε μια εναλλακτική λύση.

Κατά τον ιστορικό, η παρέμβαση εκείνο το βράδυ του Σάντυ (Secretary of State for the Colonies, Duncan Sandys) στο γεύμα υπέρ της συνέχισης των διαπραγματεύσεων φαίνεται να είναι αποφασιστική.

Τελικά ο MacMillan επιλέγει τη συνέχιση της διαδικασίας. Η επίγνωση της πιθανής κατάρρευσης στα μάτια της κοινής γνώμης δηλώνεται από τον MacMillan ως:

«*Εάν διακόψουμε, τόσο οι δικές μας όσο και οι δικές τους θέσεις θα δημοσιευθούν, κατά συνέπεια θα πρέπει να υπερασπιστούμε τις δικές μας θέσεις και τις συνέπειες τους.*»

Οι ελπίδες του MacMillan εδράζονταν στο γεγονός ότι Kennedy είναι πάνω από όλα πολιτικός. Πολιτική διαφωνία επί του σκοπού δεν υπάρχει, καθώς κοινός στόχος είναι η συμμαχία ενάντια στη Σοβιετική Ένωση. Συνεπώς ο MacMillan λέει: «*σε αντίθεση με τους διανοούμενος συμβούλους του, ο Πρόεδρος είναι ένα πολιτικό ζώο και διαισθάνεται τους κινδύνους έμπροσθεν*». Συνεπώς και η λογική του MacMillan και το συναίσθημα στην παρέμβαση στο γεύμα, κράτησαν τους Βρετανούς ακόμα μια μέρα εκεί για να διαπραγματευθούν.

Στο τέλος της πρώτης ημέρας οι Αμερικανοί με όρους που είχαν θέσει, αρνούνται να παράσχουν το Polaris εκτός πλαισίου ΝΑΤΟ ή να του επιτρέψουν να διαδραματίσει ρόλο στην ενίσχυση της εξωτερικής πολιτικής της Βρετανίας. Μια δύσκολη θέση για τους Βρετανούς και τις επιδιώξεις τους.

Ημέρα 2η - 20.12.19

Ο Πρωθυπουργός MacMillan ξεκινά το πρωϊνό σκέλος της δεύτερης ημέρας των διαπραγματεύσεων με σκοπό τη δημιουργία κλίματος συμβιβασμού. Ευχαριστεί τον Πρόεδρο Kennedy για τις προσφορές του ως προς τα συστήματα Χάουννt Ντόγκ και Skybolt.

Συνεχίζοντας το λόγο του, παραδέχεται ότι έσφαλε ως προς τον ισχυρισμό του ότι δεν υπήρχε διαφορά σε είδος μεταξύ αυτών των προανφερθέντων όπλων και του συστήματος Polaris. Πράγματι υπάρχει διαφορά και η αγορά ενός τέτοιου συστήματος θα σηματοδοτήσει την έναρξη μιας νέας φάσης στις αγγλο-αμερικανικές πυρηνικές σχέσεις.

Ο ίδιος προσπαθεί να εξηγήσει στους συνομιλητές του γιατί η Μ. Βρετανία θέλει αυτά τα όπλα.

Επί λέξει:[24]

"*Actually the whole thing is ridiculous. What do 7-8 UK units add to the existing nuclear strength, which is enough to blow up the world? So why does the UK want it? It is partly a question of keeping up with the Joneses. Countries which have played a great role in history must retain their dignity. The UK does not want to be just a*

[24] Meyer C. Getting Our Way, 500 years of adventure and intrigue: the inside story of British diplomacy, (2010). London. Phoenix Publishing . p 134

clown or a satellite. The UK wants a nuclear force not only for defence, but in the event of menace of its existence."

Ο MacMillan χρησιμοποιεί την ειλικρίνεια ως τακτική. Η Βρετανία βρίσκεται σε κατάσταση παρακμής, αλλά προσπαθεί απεγνωσμένα να διατηρήσει την θέση της ως μεγάλη δύναμη στον κόσμο. Κάτι που οι Αμερικανοί γνωρίζουν και άλλες φορές χειρίζονται με σεβασμό και προσοχή και άλλες απρόσεκτα, ανάλογα με την πολιτική τους και τους ασκούντες αυτή την εκάστοτε στιγμή.

Η Βρετανία έχει συμφέροντα που απαιτούν υποστήριξη από την υπέρτατη πολεμική ισχύ που προσφέρουν τέτοια όπλα. Δηλαδή πολιτική σε διεθνές επίπεδο που υποστηρίζεται από ανεξάρτητη αμυντική δύναμη. Ο Macmillan δίνει σαν παράδειγμα την προειδοποίηση του Χρουστσόφ για μια πυραυλική επίθεση στο Λονδίνο, κατά τη διάρκεια της κρίσης του Σουέζ. Σαν ένα άλλο παράδειγμα τέτοιας διεθνούς κρίσης που μπορούν να επικαλεστούν τη χρήση τέτοιων όπλων, προτάσσει μια πιθανή επιθετική ενέργεια του Ιράκ έναντι του Κουβέιτ, κάτι που συνέβη σχεδόν 30 χρόνια αργότερα.

Αυτά τα παραδείγματα πράγματι εστιάζουν στο πραγματικό πρόβλημα που βλέπουν οι Αμερικανοί δίνοντας τέτοια όπλα στους Βρετανούς.

Κατά τη Βρετανική άποψη μια συμμαχία πυρηνικής αποτροπής έναντι της Σοβιετικής Ένωσης σημαίνει ότι οι σύμμαχοι έχουν ίδιες ικανότητες και ο ένας δεν είναι επιχειρησιακά ανώτερος του άλλου. Συνεπώς, αν σε μια διεθνή κρίση όπου εμπλέκονται η Βρετανία και οι ΗΠΑ, οι ΗΠΑ δεν είναι υπέρ την ανάληψης δράσης, θεωρητικά, αυτή η ασυμφωνία θα οφείλεται στη διαφορά απόψεων μεταξύ των δύο κυβερνήσεων.

Προφανώς όχι και το πλέον επιτυχημένο επιχείρημα τη στιγμή που συζητούν ακριβώς αυτή την περίπτωση με τους Αμερικανούς ώστε να τους παραχωρήσουν τα ζητούμενα. Ο MacMillan εμφανίζεται να λέει, δώστε μας το Polaris έτσι ώστε αν ποτέ διαφωνούμε μεταξύ μας, όπως έγινε με την κρίση του Σουέζ, να μπορούμε να ενεργούμε ανεξάρτητα και να αγνοήσουμε τις απόψεις σας.

Ήταν μια ειλικρινής προσέγγιση που δήλωνε τη σκοπιμότητα απόκτησης ανεξάρτητης πυρηνικής ισχύος.

Η απάντηση του Kennedy δείχνει ότι οι Αμερικανοί στα θέματα της Μέσης Ανατολής δεν θα ανεχθούν την παλιά κυριαρχία των Βρετανών. Η πρωτοβουλία πολιτικής σε αυτή την περιοχή του κόσμου πλέον ανήκει σε αυτούς. Χαρακτηριστικά λέει ο Kennedy:

«*Ο Πρωθυπουργός ανέφερε την άμυνα του Κουβέιτ. Υπέθεσε ότι το Ηνωμένο Βασίλειο δεν προτίθεται να χρησιμοποιήσει πυρηνικά όπλα εναντίον του Ιράκ, αλλά αν κατά τη διάρκεια της υπεράσπισης του Κουβέιτ, το Ηνωμένο Βασίλειο είχε απειληθεί με βομβαρδισμό από τον κ. Χρουστσόφ τότε φυσικά η Κυβέρνηση του Ηνωμένου Βασιλείου θα έλεγε ότι αυτό ήταν περίπτωση* ***«δεινής» εθνικής ανάγκης (dire national emergency)*** *και θα αναλάμβανε τον έλεγχο των υποβρυχίων της, αλλά βέβαια αυτά τα όπλα δεν θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για επιχειρήσεις του τύπου Σουέζ για να εκφοβίσει τον Πρόεδρο Νάσερ.*»

Στη συνέχεα η συζήτηση στρέφεται γύρω από το ζήτημα της έννοιας της «*ανάθεσης*» (assignment) των βρετανικών πυρηνικών δυνάμεων στο ΝΑΤΟ. Οι συνομιλίες αναβλήθηκαν για λίγο, ενώ τέθηκαν υπό μελέτη νέα βρετανικά και αμερικανικά σχέδια κειμένων.

Με την επάνοδο των συνομιλιών, φαίνεται ότι ο Πρωθυπουργός MacMillan ήταν αποφασισμένος. Το κείμενο που έθεσαν οι Αμερικανοί ήταν πλήρως μη αποδεκτό από τον MacMillan, συνεπώς αποφασίζει να κάνει τη ύστατη διαπραγματευτική του κίνηση. Αυτή ήταν η απειλή μιας αποχώρισης και η ευρύτερη ρήξη της αγγλο-αμερικανικής συμμαχίας.

«*Είτε η (πυρηνική) δύναμη είναι δεσμευμένη (committed) ή ανατεθεί (assigned) ή την περιγράψουμε κάτω από κάποια άλλη φράση, στην πραγματικότητα πρέπει να εξακολουθεί να μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν το θελήσει η βρετανική κυβέρνηση*», υποστήριξε χωρίς περιστροφές.

«*Αυτή τη στιγμή αν κανείς διαβάσει την επαναδιατύπωση των Ηνωμένων Πολιτειών θα έλεγε ότι έχει υπαγορευτεί με βάση τις απόψεις των ΗΠΑ ... Αυτό είναι πολύ σημαντικό θέμα για να αφεθεί αμφίσημο και δεν είναι δυνατό με νομικίστικα κόλπα να καλύπτουμε μια διαφωνία που είναι σοβαρή.*»

Κλείνοντας λέγει με σαφήνεια τι θα χαθεί από μια πιθανή ρήξη: «*όσο και αν ο ίδιος δεν το θέλω, εάν μια συμφωνία είναι αδύνατη, η βρετανική κυβέρνηση θα πρέπει να κάνει μια επανεκτίμηση της αμυντικής της πολιτικής σε όλο τον κόσμο.*»

Αυτό το μήνυμα, έχοντας ακουστεί από τους εμπλεκόμενους, έβαλε όλους σε εγρήγορση και ξεκαθάρισε το διακύβευμα.

Από την βρετανική πλευρά συνεργάζονται οι Θόρνεϊκροφτ και Ormsby-Γκορ και από την αμερικανική πλευρά οι McNamara, Μπόλ, και Μπάντι με σκοπό την εύρεση λύσης. Στη συνάντηση αυτή συμφωνήθηκαν μια σειρά από σημαντικές τροποποιήσεις στο «Σχέδιο Κειμένου επί Πυρηνικών Αμυντικών Συστημάτων» των ΗΠΑ. Οι παράγραφοι του κειμένου που όριζαν τους όρους πώλησης του συστήματος Polaris και της ανάπτυξης μιας πολυμερούς δύναμης εντός ΝΑΤΟ τροποποιήθηκαν με σκοπό την ασάφεια και την ελευθερία δράσης. Συνεπώς, η πώληση του συστήματος και ο συσχετισμός αυτού με την πολυμερή δύναμη έγινε ασαφής και χαλαρός.

Οι τροποποιήσεις στις σχετικές παραγράφους ήταν μια βασική παραχώρηση των ΗΠΑ. Επίσης η διατύπωση σχετικά με τους όρους ανάθεσης των υποβρυχίων στο ΝΑΤΟ έγινε με σεβασμό στις βρετανικές αιτιάσεις. «Ο Πρωθυπουργός κατέστησε σαφές ότι αυτές οι βρετανικές δυνάμεις θα χρησιμοποιηθούν για τους σκοπούς της διεθνούς άμυνας της δυτικής συμμαχίας σε όλες τις περιστάσεις, εκτός εάν η Κυβέρνηση της Αυτής Μεγαλειότητας μπορούσε να αποφασίσει ότι τα υπέρτατα εθνικά συμφέροντα διακυβεύονται».

Στις 20 Δεκεμβρίου 1962 το μεσημέρι, οι βασικές παραχωρήσεις είχαν συμφωνηθεί. Ο MacMillan όμως έπρεπε να εξασφαλίσει τη συγκατάθεση του Υπουργικού Συμβουλίου από το Λονδίνο. Εν όψει της σημαντικής αλλαγής στην πολιτική άμυνας που πρότεινε, αυτό δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια τυπική διαδικασία. Έχοντας μαζί του όμως τον υπουργό εξωτερικών και άμυνας μπορούσε να προβάλει την θέση του ως κοινή και των τριών.

Η «Δήλωση σχετικά με τα Συστήματα Πυρηνικής Άμυνας» έγινε από κοινού και συντάχθηκε ως μέρος της γενικής διακοίνωσης. Προκειμένου να δοθεί χώρος εναλλακτικών πολιτικών αναγνώσεων και ερμηνειών εφαρμογής της συμφωνίας, το τελικό κείμενο χαρακτηρίζεται από ασάφεια. Ενδεικτικά:

Η παράγραφος 6 αναφέρεται στην ενοποίηση των εθνικών πυρηνικών δυνάμεων υπό ενιαία την διοίκηση του ΝΑΤΟ. Αυτή θα αποτελέσει τη βάση μιας πολυεθνικής δύναμης (multinational force) και θα περιλαμβάνει κυρίως βρετανικές και αμερικανικές δυνάμεις. Η Γαλλία θα μπορούσε επίσης να συμβάλλει σε αυτή τη δύναμη σε περίπτωση που μπορούσε να πεισθεί ο Ντε Γκωλ.

Η παράγραφος 7 δεσμεύει τόσο τη Βρετανία και τις Ηνωμένες Πολιτείες να εργαστούν προς την κατεύθυνση της δημιουργίας μια πολυμερούς πυρηνικής δύναμης (multilateral force) που θα συνίστατο από μικτά επανδρωμένα πληρώματα χειρισμού των οπλικά συστημάτων. Σκοπός ήταν να καταστεί δυσδιάκριτη η συνεισφορά από κάθε χώρα ώστε να αποφευχθεί ένα έθνος να κυριαρχεί ή να επιχειρήσει να αναλάβει τον έλεγχο των όπλων.

Η παράγραφος 8, ωστόσο, δεν έκανε σαφές σε ποια από τις δύο αυτές δυνάμεις, την πολυμερή ή την πολυεθνική, θα ανατεθεί η διοίκηση των βρετανικών Polaris. Επιπλέον, πουθενά στο έγγραφο δεν υπάρχει χρονοδιάγραμμα από το οποίο να προκύπτει πότε αναμένεται αυτές οι δυνάμεις να είναι επιχειρησιακές.

Από το κείμενο δεν προκύπτει ότι δεσμεύεται ρητά η Βρετανία σε μια πολυμερή δύναμη. Στην κοινή δήλωση αναφέρεται ότι ο «σκοπός των δύο κυβερνήσεων, σε σχέση με την παροχή των πυραύλων Polaris πρέπει να είναι η ανάπτυξη μιας πολυμερούς πυρηνικής δύναμης του ΝΑΤΟ σε εγγύς διαβούλευση με άλλους συμμάχους του ΝΑΤΟ», και ότι «θα καταβάλουν κάθε δυνατή προσπάθεια για το σκοπό αυτό».

Η επιτηδευμένη ασάφεια αυτής της διατύπωσης επιτρέπει μεγάλα περιθώρια κινήσεων στη Βρετανική πλευρά. Χαρακτηριστικά, εάν οι Βρετανοί και οι Αμερικανοί, εντός της συμμαχίας του ΝΑΤΟ αποτύχουν να καταλήξουν σε συμφωνία ή αποφασίσουν να μην αξιοποιήσουν τη δυνατότητα που παρέχει η συμφωνία για τη δημιουργία πολυμερούς/πολυεθνικής δύναμης, τότε αυτή δεν θα συνίστατο. *Σε αυτή την περίπτωση δεν θα υπήρχε κανένας στρατιωτικός σχηματισμός ώστε η Βρετανία να εκχωρήσει ή να δεσμεύσει τις δυνάμεις της.*

Ο MacMillan γνωρίζοντας τα όρια της βρετανικής δύναμης παίζει με τις λέξεις και χρησιμοποιεί την ασάφεια προς όφελός του. Αφήνει τα πράγματα διφορούμενα όχι γιατί δεν είχε γνώση της αγγλικής γλώσσας, αλλά ακριβώς επειδή είχε πολύ καλή γνώση της αγγλικής γλώσσας.

Ενώ το κείμενο ήταν σχεδόν σε τελική μορφή, ο Macmillan ζήτησε να του δοθεί χρόνος να επικοινωνήσει με το Υπουργικό Συμβούλιο ώστε να το συμβουλευτεί, καθώς ο ίδιος θα μπορούσε να δράσει μόνο με την έγκρισή τους. Ο Πρωθυπουργός έχοντας μαζί του τα σημαντικότερα στελέχη του Υπουργικού Συμβουλίου, δεν χρειαζόταν την άποψη των υπολοίπων. Είχε όμως έναν πολύ καλό λόγο για επιμείνει σε αυτή τη διαδικασία. Αυτό που ήθελε ήταν να εξασφαλιστεί εναντίον οποιασδήποτε κατηγορίας ότι έδρασε αυθαίρετα. Έχοντας κληθεί, το Υπουργικό Συμβούλιο αναλαμβάνει τη συλλογική ευθύνη για την υπεράσπιση της συμφωνίας εντός της Βρετανίας. Κάπως απρόθυμα, ο Kennedy συμφώνησε να περιμένει μια ημέρα για την απάντηση του Λονδίνου.

Ως πολιτική επιλογή, ο MacMillan επέλεξε να αναδείξει τη πρόταση από την παράγραφο οκτώ του προαναφερθέντος εγγράφου ως βασική διάταξη που εξασφαλίζει για τη βρετανική κυβέρνηση «το αποκλειστικό δικαίωμα της απόφασης σχετικά με τη χρήση των Polaris υποβρυχίων μας ως ανεξάρτητη δύναμη».

Ημέρα 3η - 21.12.1962

Το πρωί της 21ης Δεκεμβρίου ελήφθη η απάντηση του Υπουργικού Συμβουλίου από το Λονδίνο. Εκ μέρους του Υπουργικού Συμβουλίου, ο Υπουργός Εσωτερικών, Μπάτλερ συνεχάρη τον Macmillan για τη συμφωνία και εξέφρασε ανησυχίες για το βαθμό της βρετανικής δέσμευσης για την πολυμερή δύναμη που ο MacMillan είχε αναγκαστεί να παραχωρήσει στο Νασσάου. Για να τονίσει την ανεξαρτησία της πυρηνικής βρετανικής δύναμης, ο Μπάτλερ πρότεινε για λογαριασμό του Υπουργικού Συμβουλίου ότι η κρίσιμη φράση της παραγράφου οκτώ να ενισχυθεί ακόμη περισσότερο μέσω μιας αλλαγής στη σύνταξη.

Η αναφορά στην απόσυρση των δυνάμεων για την υπεράσπιση του εθνικού συμφέροντος πρέπει να τοποθετηθεί πριν από τη δέσμευση για την διεθνή άμυνα της Δυτικής συμμαχίας, καθιστώντας τη φράση ως εξής:

«Ο Πρωθυπουργός κατέστησε σαφές ότι εκτός από την περίπτωση κυβέρνησης της Αυτής Μεγαλειότητας μπορεί να αποφασίσει ότι τα ανώτατα εθνικά συμφέροντα διακυβεύονται αυτά βρετανικές δυνάμεις θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο για τους σκοπούς της διεθνούς άμυνα της Δυτικής Συμμαχίας».

Αν και το Υπουργικό Συμβούλιο έδειξε πρόθεση να υποστηρίξει ό,τι ο MacMillan είχε διαπραγματευθεί στο Nassau, υπήρχε μια διάχυτη έλλειψη ενθουσιασμού για τις προτεινόμενες διατάξεις της συμφωνίας. Όπως ανέφερε ο

Μπάτλερ, «*το Υπουργικό Συμβούλιο έδειξε κάποια ανησυχία ότι είχαμε δώσει πάρα πολλά για να αποκτήσουμε την μία παραχώρηση στο τέλος της παραγράφου 8*».

Οι αμφιβολίες που εκφράστηκαν από το Υπουργικό Συμβούλιο, εμφανίστηκαν ακόμη πιο δυναμικά από τον Γραμματέα του Κόμματος (Chief Whip), Μάρτιν Ρέντμεϊν. Οι απόψεις του Ρέντμεϊν είχαν μεταφερθεί στον Macmillan σε ξεχωριστό τηλεγράφημα που απέστειλε Μπάτλερ. Κατά την άποψη του Γραμματέα του Κόμματος, το Υπουργικό Συμβούλιο δεν είχε «επαρκώς λάβει υπόψη τις πολιτικές επιπτώσεις της απόφασης Polaris». Σχεδόν ενώ δεν είχε στεγνώσει το μελάνι για την υπογραφή, ο Ρέντμεϊν υποστήριξε ότι αν και ο MacMillan είχε πολεμήσει σκληρά για να κερδίσει στη διαπραγμάτευση, ό,τι είχε κερδίσει θα μπορούσε να θεωρηθεί ως όχι περισσότερο από «ένα δωράκι για την υπερηφάνεια μας». Συνέχισε, «φοβάμαι ότι εσείς προσωπικά οδηγήστε από την ανάγκη να επανέλθετε στη Βρετανία με κάτι στα χέρια με οποιοδήποτε κόστος».

Ο MacMillan δεν φαίνεται να δίνει βάρος στις επιφυλάξεις που εκφράστηκαν είτε από το Υπουργικό Συμβούλιο ή τον Γραμματέα του Κόμματος, άλλωστε ο ίδιος γνώριζε καλά το περιθώριο ερμηνειών που έδιναν οι διατυπώσεις. Σε μια νέα συνάντηση με τον Πρόεδρο Kennedy το πρωί της Παρασκευής 21ης Δεκεμβρίου, πρότεινε την ακριβή τροπολογία για τη σύνταξη της τελικής πρότασης της παραγράφου οκτώ, και μια σειρά μικρότερων αλλαγών. Μετά από διαβούλευση με τους συμβούλους του, ο Kennedy συμφωνήσε με όλες τις προτάσεις MacMillan. Κατά την άποψή του, βάσει του τι είχε ήδη παραχωρηθεί στον πρωθυπουργό την προηγούμενη ημέρα, οι περαιτέρω αλλαγές φαίνονταν μικρές.

6.6 Επισκόπηση των Διαπραγματεύσεων – κίνητρα και φόβοι

Ο MacMillan πέτυχε να αποκτήσει ένα πυρηνικό σύστημα με ελάχιστο χρηματικό κόστος το οποίο επέκτεινε την ανεξάρτητη πυρηνική δύναμη της Βρετανίας σχεδόν μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 70. Σύμφωνα με την ιστορικό D. Murray η θέση της Βρετανίας και του MacMillan μπορεί να διερευνηθεί αν θέσουμε τα κατάλληλα ερωτήματα σχετικά με το περιβάλλον πριν τις διαπραγματεύσεις.

Διαπραγματευτική Θέση Μεγάλης Βρετανίας

Είναι απαραίτητο να θέσουμε μια σειρά από ερωτήματα που προκύπτουν από τα πρόσωπα και τις καταστάσεις, ώστε να κατανοήσουμε τη θέση της Βρετανίας και του Πρωθυπουργού MacMillan στις διαπραγματεύσεις στο Νασσάου.

1. Πόσο σημαντικό ήταν για τον Πρωθυπουργό MacMillan να κλείσει μια συμφωνία στο Nassau;
2. Ισχύει ότι η κυβέρνησή του θα είχε πέσει ή αναγκαστεί να ακολουθήσει μια αντι-αμερικανική θέση εάν δεν είχε επιλυθεί η κρίση με ευνοϊκό τρόπο για τη Βρετανία;

Ερώτημα 1

Σχετικά με το ερώτημα (1) , πρέπει να αναλογιστούμε ότι ο ΜακΜιλαν προσωπικά και εθνικά έδειξε απόλυτη εμπιστοσύνη στις ΗΠΑ και τις τεχνολογικές ικανότητες τους. Η απόλυτη εμπιστοσύνη μπορεί να είναι κάτι προσωπικά επιζήμιο και εθνικά ανεύθυνο για έναν πολιτικό. Μέσω της ακύρωσης του προγράμματος Μπλού Στρικ (Blue Streak) που ήταν το βρετανικό πυραυλικό πρόγραμμα προς όφελος του προγράμματος Skybolt η Βρετανία μένει δίχως ουσιαστικά πυρηνικά όπλα και χωρίς εναλλακτική επιλογή για αρκετό καιρό.

Προφανώς, όλοι στη Βρετανική πλευρά γνώριζαν ότι οι Αμερικανοί έχουν κάθε δικαίωμα να ακυρώσουν ένα για εκείνους δευτερεύον και πολύ ακριβό αμυντικό πρόγραμμα. Αυτό που έκανε το θέμα ιδιαίτερα σημαντικό σε πολιτικό επίπεδο ήταν ο τρόπος χειρισμού του στη δημόσια σφαίρα και η διάδοχη κατάσταση. Η κοινή γνώμη μετά τη συνάντηση του Βρετανού υπουργού άμυνας (Θόρνκροφτ) με τον Αμερικανό ομόλογο του (McNamara) είχε την εντύπωση ότι η χώρα βρέθηκε εκτεθειμένη. Συνεπώς η συζήτηση έπρεπε να μεταφερθεί στο ανώτατο και να επιλυθεί από τον Πρωθυπουργό (MacMillan) και τον Πρόεδρο (Κένναντι).

Έχοντας ανακοινώσει μαζί με τον Αιζενχαουερ την συμφωνία στο Καμπ Ντειβιντ, ο MacMillan είναι πολιτικά δεμένος με αυτή. Η τροπή που έχουν πάρει τα πράγματα φθείρει άμεσα και προσωπικά τον ίδιο. Οι προτάσεις για επιμερισμό του κόστους του Skybolt 50-50, το σύστημα Χάουντ Ντόγκ και ο σχηματισμός ομάδας μελέτης του Προέδρου Κένναντι, δεν μπορούν να καλύψουν τις πολιτικές ανάγκες του MacMillan. Δημόσια το σύστημα Skybolt είναι τεχνικά νεκρό βάσει των δηλώσεων McNamara.

Αλλά κυρίως πολιτικά είναι νεκρό καθώς κανείς μέσα ή έξω από τη Βρετανία δεν πιστεύει πλέον στην αποτρεπτική ισχύ του. Το Χάουντ Ντόγκ και η ομάδα μελέτης δεν δίνουν κάτι ουσιαστικό. Συνεπώς, η μόνη λύση είναι το σύστημα Polaris. Επίσης, σημαντικό για το βρετανικό σύνολο πληροφοριών είναι ότι ο MacMillan γνωρίζει την θέση του Αμερικανικού υπουργείου εξωτερικών και την πίεση που ασκεί στον Πρόεδρο Κέννεντι.

Η θέση του Βρετανού πρωθυπουργού είναι ότι αν γύριζε πίσω χωρίς *κάτι ιδιαίτερα επιτυχημένο, δεν υπάρχει κανένα μέλλον για αυτόν σε αυτή τη θέση*. Επίσης, η Βρετανία θα βρισκόταν δίχως ανεξάρτητο πυρηνικό οπλοστάσιο.

Ο τρόπος που εκτιμά την κατάσταση ο MacMillan εύγλωτα περιγράφεται σε λόγο του στη Βουλή των Κοινοτήτων, ένα μήνα περίπου μετά τη συμφωνία στο Nassau. «*Αυτό είναι ίσως το πιο σημαντικό επιχείρημα από όλα, ίσως να υπάρχουν περιοχές όπου τα συμφέροντα ορισμένων χωρών μπορεί να φαίνονται σε αυτές ζωτικότερης σημασίας από ό,τι φαίνονται σε άλλες. Είναι σωστό και σωτήριο ότι μια βρετανική κυβέρνηση, όποιες κι αν είναι οι ιδιαίτερες συνθήκες της συγκεκριμένης διαφοράς, πρέπει να είναι σε θέση να λάβει τη δική της απόφαση, χωρίς το φόβο του πυρηνικού εκβιασμού.*»

Συνεπώς για τον MacMillan είναι μέγιστης σημασίας, σε πολιτικό και εθνικό επίπεδο, η επίτευξης συμφωνίας που θα εξασφαλίσει τη ανεξάρτητη δυνατότητα πυρηνικής αποτροπής. Έτσι προσέρχεται στο διαπραγματευτικό παίγνιο με υψηλή αποφασιστικότητα.

Ερώτημα (2)

Η βρετανική ρήτρα για την αυτόνομη χρήση των πυρηνικών όπλων που διαπραγματεύτηκε ο MacMillan ήταν τεράστιας σημασίας για το βρετανικό λαό. Κατάφερε να διατηρήσει την αντίληψη της ανεξαρτησίας του πυραυλικού συστήματος και μέσω αυτής, να μπορεί να επιτρέψει στη Βρετανία να διατηρήσει την εθνική κυριαρχία και τον έλεγχο επί της άμυνας της.

Οι ιστορικοί θεωρούν ότι η κυβέρνηση θα επιβίωνε αλλά σαφώς θα έπρεπε να μεταβάλλει την πολιτική της έναντι των ΗΠΑ. Ποια άλλη θα μπορούσε να είναι μια τέτοια πολιτική που θα μπορούσε να θεωρηθεί και αντι-αμερικανική;

Κατά τους Αμερικανούς μια συμμαχία της αποξενωμένης Βρετανίας με τη Γαλλία του ΝτεΓκωλ ήταν κάτι πολύ πιθανό. Ιδιαίτερα, αφού σκοπός τής έως τώρα πολιτικής των Αμερικανών ήταν ενίσχυση των θεσμών της Ευρώπης σε οικονομικό επίπεδο μέσω της ΕΟΚ. Εύκολα αυτή η σχέση συνεργασίας θα μπορούσε να επεκταθεί και σε αμυντικό επίπεδο. Μια Αγγλο-γαλλική συνεργασία θα αποδυνάμωνε ουσιαστικά το ΝΑΤΟ και θα επηρέαζε σοβαρά τη Δυτική Γερμανία καθώς η διάδοση των πυρηνικών όπλων στην ευρωπαϊκή ήπειρο θα είχε πλέον ξεφύγει από την αμερικανική εποπτεία. Τα αποτελέσματα λοιπόν της αποτυχίας των διαπραγματεύσεων δεν θα περιορίζονταν στην απώλεια της ναυτικής βάσης των αμερικανικών υποβρυχίων στη Σκωτία, (που είχε ανταλλαχθεί – κατά τους Βρετανούς – με το σύστημα Skybolt). αλλά θα είχε ευρύτερες επιπτώσεις στην αμυνντική πολιτική των ΗΠΑ.

Συνεπώς, το πιθανό κόστος της αποτυχίας των διαπραγματεύσεων αν ο MacMillan ήταν συνεπής και αξιόπιστος, που πράγματι έτσι εθεωρείτο από τους Αμερικανούς, θα ήταν μεγάλο για την εξωτερική πολιιτκή των ΗΠΑ.

Διαπραγματευτική θέση των ΗΠΑ.

Α. Αρχική στάση των ΗΠΑ

Η αρχική στάση των ΗΠΑ στη διαπραγμάτευση στηρίχθηκε, μεταξύ άλλων, στην διαφορετική έννοια που έδινε η Ουάσιγκτον, και ειδικά το Υπουργείο Εξωτερικών, στον όρο «ειδική σχέση» απ΄ότι το Λονδίνο. Ενώ η βρετανική κυβέρνηση συνέχισε να τονίζει τη σημασία της σχέσης, η Ουάσιγκτον κινείται σε διαφορετική κατεύθυνση. Το Υπουργείο Εξωτερικών των ΗΠΑ ήταν ανήσυχο ότι η πολιτική της βοήθειας των Βρετανών σε θέματα πυρηνικής άμυνας είχε μια καταστρεπτική επίδραση στις σχέσεις με τους άλλους συμμάχους του ΝΑΤΟ. Ένα σημαντικό, και με επιρροή, τμήμα της κυβέρνησης Kennedy υποστηρίζει πλέον την αναθεώρηση της σχέσης και αυτό δημιουργεί μια τάση πολιτικής εντός της αμερικανικής κυβέρνησης.

Όλο και περισσότερο, από την αμερικανική άποψη, η «ειδική σχέση» είχε γίνει κάτι μονομερές. Η πραγματικότητα της κατάστασης ήταν ότι η Βρετανία χρειάζεται την Αμερική περισσότερο απ' ότι η Αμερική τη Βρετανία. Αυτή η διαφορά στην προοπτική δεν ήταν εύκολα κατανοητή στο Λονδίνο. Στην βρετανική κοινή γνώμη η συμφωνία Skybolt έγινε αντιληπτή ως σύμβολο της ειδικής αγγλο-αμερικανικής σχέσης - ένα παράδειγμα της εγγύτητας στον τομέα της άμυνας. Για τη διοίκηση του Eisenhower ήταν μια συμφωνία όπλων η οποία αν και γενναιόδωρη, δεν ήταν κάτι πολύ παραπάνω από μια τεχνική συμφωνία.

Ταυτόχρονα, η αμερικανική πλευρά ανησυχεί για τις επιπτώσεις που ενδέχεται να είχε μια συμφωνία για το Polaris σε άλλους συμμάχους του ΝΑΤΟ. Ιδίως στη Γαλλία και τη Γερμανία. Η κυβέρνηση Κένενντυ πίστευε ότι υπήρχε πραγματικός κίνδυνος ότι η Γερμανία δεν θα ανεχόταν την έλλειψη πυρηνικού οπλοστασίου για την άμυνά της και θα αναλάμβανε δράση για να το αποκτήσει. Αυτή η ανησυχία ενισχύεται από το παράδειγμα της Γαλλίας και την απροθυμία του Προέδρου de Gaulle να εμπλέξει την άμυνα της χώρας του στο ΝΑΤΟ. Όπως είπε ο Πρόεδρος Kennedy, οι Polaris είναι διαφορετικοί και φαίνονται διαφορετικοί, σε όλους, όχι μόνο στη Σοβιετική Ένωση.

Επιπρόσθετα, οι Αμερικανοί, όπως φάνηκε και από τους διαλόγους της πρώτης ημέρας της συνόδου, ανησυχούν για μια επανάληψη της κρίσης του Σουέζ. Με τα δικά του πυρηνικά όπλα το Λονδίνο θα αισθανόταν ασφαλές να δρα ανεξάρτητα. Αλλά δεν είναι σε θέση να αποτρέψει τις σοβιετικές επιθέσεις, καθώς η Βρετανία από μόνη της δεν είναι τόσο ισχυρή όσο η Σοβιετική Ένωση. Συνεπώς, σε μια κατάσταση κρίσης στην οποία θα είχε εμπλακεί το Λονδίνο, οι ΗΠΑ θα αναγκάζονταν να παρέμβουν για να προστατεύσουν τη Βρετανία.

Πράγματι λοιπόν υπήρχε τάση στην Κυβέρνηση Kennedy να μην δοθούν στη Βρετανία βαλιστικοί πύραλοι ικανοί να φέρνουν πυρηνικές κεφαλές και των οποίων η επιχειρησιακή χρήση να αποφασίζεται αποκλειστικά η Μ. Βρετανία. Αυτή είναι διαφορετική προσέγγιση στις Αμερικανο-Βρετανικές αμυντικές σχέσεις από τη συμφωνία του Camp David, με βάση την οποία η Μ. Βρετανία αγόραζε τους Skybolt και τους χρησιμοποιούσε κατά το δοκούν.

Οι Βρετανοί γνώριζαν ότι αυτές οι απόψεις υπήρχαν μέσα στη αμερικανική κυβέρνηση. Ήταν λοιπόν λογικό να εκτιμήσουν ως σημαντική την πιθανότητα οι

Αμερικανοί να επικαλούνται τα τεχνικά προβλήματα στο Skybolt για να υπαναχωρήσουν από τη συμφωνία του Camp David. Όμως, με βάση τους ιστορικούς δεν είναι έτσι η πραγματικότητα. Ο McNamara πήρε την απόφαση για τη διακοπή του προγράμματος με καθαρά ορθολογικά – οικονομικά κριτήρια. Η καριέρα του στην εταιρία Φόρντ όπου αναδιοργάνωσε τις εσωτερικές λειτουργίες της καταδείκνυε ότι η σπατάλη πόρων ήταν για αυτόν θανάσιμο αμάρτημα. Κατά την θητεία του στο υπουργείο άμυνας των ΗΠΑ προώθησε προγράμματα ανάλυσης αποφάσεων βασισμένα πάνω σε ποσοτικά και ποιοτικά στοιχεία εκλογικεύοντας τις εσωτερικές διαδικασίες του στρατεύματος, πράγμα που τον έκανε ιδιαίτερα αντιδημοφιλή στους αξιωματικούς.

Βλέποντας λοιπόν το κόστος και το όφελος του συστήματος Skybolt αποφασίζει να το καταργήσει. Η ακεραιότητα του όμως αποδεικνύεται όταν κατά την πρώτη ημέρα των διαπραγματεύσεων, μετά από ερώτηση του MacMillan αν ο ίδιος θα αγόραζε το σύστημα Skybolt, δίνει την ειλικρινή απάντηση. Το σημείο αυτό είναι σημαντικό στη διαπραγμάτευση διότι: α) εμπεδώνει κλίμα εμπιστοσύνης της Βρετανικής αντιπροσωπείας απέναντι στη Αμερικάνικη και β) βοηθά τον Kennedy να αντιληφθεί το πολιτικό κόστος που θα κατέβαλε ο ΜακΜιλαν στο εσωτερικό κοινό της Βρετανίας αν γύριζε στη χώρα του με συμφωνία για να συνεχιστεί η ανάπτυξη ενός οπλικού συστήματος που η κοινή γνώμη το είχε πλήρως απαξιώσει. Άλλωστε ο MacMillan είχε την ευκαιρία να μιλήσει λίγες ημέρες νωρίτερα στο Λονδίνο με τον Βρετανό Υπουργό Αμύνης και να αποκτήσει ιδία εικόνα της πολιτικής σημασίας για τη Μ. Βρετανία του να έχει διαθέσιμο πυρηνικό οπλοστάσιο ικανό να αποτρέψει πυρηνική απειλή.

Επιπρόσθετα, ο McNamara γνώριζε ότι με τεχνοκρατικούς όρους – κόστους / ωφέλειας τα υποβρύχια με τα Polaris είναι η καλύτερη απάντηση στο αίτημα της Μ. Βρετανίας, μιας μικρής νησιωτικής χώρας, για πυρηνική αποτροπή. Ένας σύμμαχος στον αγώνα κατά της Σοβιετικής Ένωσης άριστα εξοπλισμένος με το ελάχιστο κόστος και με διατήρηση του ηθικού πλεονεκτήματος εντός και εκτός ΗΠΑ. Το ερώτημα που έμενε να απαντηθεί ήταν ο βαθμός ελέγχου των Polaris από τη Μ. Βρετανία.

Κόστος από την πιθανή ρήξη:

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην Κυβέρνηση των ΗΠΑ υπάρχαν θα μπορούσε να αποταθεί στη Γαλλία με κάποια μορφής αγγλο-γαλλική πυρηνική συνεργασία, αν δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί μια αποδεκτή συμφωνία.

Ο Πρόεδρος Kennedy θεώρησε αξιόπιστη την απειλή της βρετανικής πλευράς για πολιτικό σχίσμα. Ο Αμερικανός πρόεδρος είχε πειστεί ότι υπήρχε σημαντική πιθανότητα *η μη συμφωνία να κοστίσει έναν πολύτιμο σύμμαχο*. Ο Πρόεδρος Kennedy έβλεπε μια πραγματική και λειτουργούσα σχέση - συμμαχία με τη Μ. Βρετανία στον παρόντα χρόνο, έναντι μιας νεφελώδους μελλοντικής προοπτικής της ενωμένης Ευρώπης. Η απτή πραγματική σχέση που υπήρχε έως τότε ήταν ένα σχετικά σίγουρο στοίχημα για το εδώ και το τώρα.

Επίσης, κίνητρο ήταν το γεγονός ότι είχε κληρονομήσει μια δέσμευση από τον προκάτοχό του, τον πρόεδρο Eisenhower, και ότι η όλη υπόθεση είχε φαινομενικά εκτροχιαστεί, *όταν τα νέα σχέδια της κυβέρνησης του είχαν διαρρεύσει στον τύπο των ΗΠΑ*, πριν ο MacNamara κάνει τις δηλώσεις στο Λονδίνο περί αποτυχίας του προγράμματος Skybolt.

Εσωτερικό πολιτικό κόστος για τον Kennedy (Audience cost)

Μια άλλη ανησυχία για Kennedy ήταν το πώς η ακύρωση του Skybolt απεικονίζεται στις Ηνωμένες Πολιτείες. Προς μεγάλη του έκπληξη, ένα μεγάλο ποσοστό του αμερικανικού Τύπου ήταν ιδιαίτερα επικριτικό για το χειρισμό της κυβέρνησής του σχετικά με την υπόθεση. Άρθρα σε αρκετές μεγάλες εφημερίδες υποστήριξαν ότι ο πρόεδρος φερόταν με περιφρόνηση στον πιο κοντινό και πιο παλιό σύμμαχο της Αμερικής.

Πολιτικά ο Kennedy δεν ήθελε να κατηγορηθεί για την κατάρρευση της συντηρητικής κυβέρνησης Macmillan ή για μια κατάσταση όπου ο Βρετανός ηγέτης μπορεί να αναγκαστεί να υιοθετήσει μια αντι-αμερικανική πλατφόρμα, προκειμένου να παραμείνει στην εξουσία. Επιπλέον, ο πρόεδρος ανησυχούσε για την απώλεια της υποστήριξης της αμερικανικής «ελίτ» για την ευρωπαϊκή πολιτική του, η οποία είχε επιμελώς καλλιεργηθεί από τους δημοκρατικούς προέδρους από τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο. Αμερικανικά μέσα ενημέρωσης όπως η Washington Post, Time-

Life, το Newsweek, οι New York Times, το CBS και άλλοι είχαν τη δυνατότητα να επηρεάσουν τις απόψεις των εκατομμυρίων Αμερικανών. Άρα η ρήξη με την Μ. Βρετανία θα δημιουργούσε σημαντικό πολιτικό κόστος για τον Kennedy στο εσωτερικό των ΗΠΑ.

6.8 Ανάλυση της διαπραγμάτευσης με όρους θεωρίας παιγνίων

Οι ΗΠΑ και η Μ. Βρετανία βρίσκονται σε μια κατάσταση Status Quo μετά τη συμφωνία του Camp David. Η διαταραχή από το σημείο SQ οφείλεται στις ΗΠΑ οι οποίες ακυρώνουν το πρόγραμμα Skybolt και με μια σειρά δηλώσεων του MacMillan αυξάνουν, χωρίς να είναι η πρόθεσή τους, την πολιτική πίεση του MacMillan που λογοδοτεί απέναντι στο Βρετανικό πολιτικό κοινό.

Οι Βρετανοί προσέρχονται σε μια διαπραγμάτευση με την «πλάτη στον τοίχο» καθώς ο MacMillan γνώριζε ότι εάν έπαιρνε κάτι λιγότερο από αυτό που είχε πετύχει στο Camp David και για το οποίο είχε δημόσια δεσμευθεί απέναντι στο πολιτικό του κοινό θα αντιμετώπιζε βαριές επιπτώσεις στο εσωτερικό πολιτικό μέτωπο. Ο MacMillan πιεζόταν από δύο γεγονότα α) τη δημόσια δήλωση του Maknamara με την οποία απαξιώνονταν πλήρως το σύστημα SkyBolt στο Βρετανικό κοινό και β) το γεγονός ότι επί προεδρίας Αιζενχάουερ είχαν ήδη προσφερθεί οι Polaris στη Μ. Βρετανία, κάτι που το γνώριζε η υπηρεσιακή και στρατιωτική ηγεσία του Υπουργείου Αμύνης της Μ. Βρετανίας. Για τον ίδιο, το κόστος τού να γυρίσει στο Λονδίνο με το σύστημα Skybolt θα ήταν δυσβάσταχτο. Επίσης, η μη λύση και η παράταση της εκκρεμότητας, θα δημιουργούσε επίσης πολιτική φθορά, μεγαλύτερο κόστος όσο περισσότερο διαρκούσε η εκκρεμότητα – λάμβανε δηλαδή το χαρακτήρα εκπτωτικού παράγοντα δ στη διαπραγμάτευση.

Όσον αφορά στις ΗΠΑ, για τον Kennedy η διαπραγμάτευση μπορούσε να οδηγήσει στα εξής αποτελέσματα:

- Είτε να γίνει αποδεκτή η πρότασή του από τους Βρετανούς, οπότε λάμβανε τη μέγιστη ωφέλεια
- Είτε να μείνει το θέμα σε εκρεμμότητα, οπότε η ωφέλειά του θα μειωνόταν εξαιτίας του πολιτικού κόστους που θα πλήρωνε στο εσωτερικό των ΗΠΑ από μέρος της αμερικάνικης ελίτ που ήθελε να μην διαταραχθεί η ειδική σχέση των ΗΠΑ με τη Μ. Βρετανία. Κόστος επίσης θα προέκυπτε και

από την υποβάθμιση των σχέσεων των ΗΠΑ με τη Μ. Βρετανία. Το συνολικό κόστος θα ήταν για το Kennedy, μεγαλύτερο όσο περισσότερο διαρκούσε η εκκρεμότητα – λάμβανε δηλαδή το χαρακτήρα εκτπωτικού παράγοντα δ στη διαπραγμάτευση.

- Είτε η Βρετανία να αρνηθεί την πρόταση ολοκληρωτικά και να προσπαθούσε στη συνέχεια να αναπτύξει μόνη της πυραυλικό σύστημα. Με βάση τα στοιχεία που έχουμε αναφέρει παραπάνω ο Kennedy είχε αβεβαιότητα για την αποφασιστικότητα της Βρετανίας. Γνώριζε ότι ο MacMillan θα πλήρωνε πολιτικό κόστος αν οι Βρετανοί δεν έπαιρναν ένα οπλικό σύστημα ιδίων ή μεγαλύτερων επιχειρησιακών δυνατοτήτων από το Skybolt, αλλά δεν γνώριζε πόσο υψηλό ήταν αυτό. Γεγονός είναι ότι η ενημέρωση που είχε ήταν ατελής. Για παράδειγμα, δεν γνώριζε εάν η βάση των υποβρυχίων στη Σκωτία άμεσα συνδεόταν με το σύστημα Skybolt. Άρα δεν ήταν σίγουρος για το ότι άμεση επίπτωση της αποτυχίας στη διαπραγμάτευση θα ήταν η απώλεια της ναυτικής βάσης στη Σκωτία. Επίσης, δεν ήταν ξεκάθαρο στην αμερικανική διαπραγματευτική ομάδα εάν με τη συμφωνία του Camp David η Μ. Βρετανία θα είχε τον πλήρη έλεγχο των πυρηνικών όπλων που θα αγόραζε από τις ΗΠΑ ή αυτά θα εντάσσονταν σε πολυεθνική δύναμη.

Κάνει λοιπόν μια προσφορά, η οποία δημιουργεί στην πραγματικότητα ελάχιστο κόστος για τις ΗΠΑ.

Ο MacMillan προσέρχεται στη διαπραγμάτευση έχοντας εμπιστοσύνη στις καλές προθέσεις του Προέδρου Kennedy. Γι’ αυτόν είναι σημαντικό να αποστείλει αξιόπιστο μήνυμα στο Kennedy σχετικά με τη δέσμευση που έχει αναλάβει έναντι στο Βρετανικό πολιτικό κοινό και το συνεπαγόμενο κόστος από την αθέτηση της. Για τον MacMillan το προσωπικό του κόστος (κατ’ αντιστοιχία με το μοντέλο Tarar, Leventoglu), υπολογίζεται σαν:

$$C_2(y,t)=\begin{cases}0\ \alpha\nu\ y\geq b\\ \varphi_2(t)(b-y)\ \alpha\nu\ y<a,\ \varphi_2(t)\geq 0\end{cases}\tag{6.1}$$

Η τιμή b είναι σταθερή και αντιστοιχεί στην κατάσταση SQ για την οποία είχε δημόσια δεσμευθεί ο ΜακΜιλαν. Ο συντελεστής φ_2 εξαρτάται από τον «τύπο» του

MacMillan, δηλαδή την αποφασιστικότητά του. Η συνάρτηση φ_2 είναι γνήσια αύξουσα στο σύνολο Τ των τύπων, δηλαδή, αν $t^{/} > t^{//}$, *τότε* $\varphi_2(t^{/}) > \varphi_2(t^{//})$

Στις δεδομένες πολιτικές συνθήκες το φ_2 έχει υψηλή τιμή, ενώ η τιμή $(b-y)$, δείχνει την «απόσταση» της πρότασης που δέχεται από τον Kennedy, σε σχέση με τη δημόσια δέσμευσή του. Η διαπραγματευτική πίτα στην περίπτωσή μας σχετίζεται με τη δυνατότητα πυρηνικής αποτροπής.

Όπως προκύπτει από την προηγούμενη ανάλυση δύο είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που καθορίζουν το προφίλ της διαπραγματευτικής λύσης για τον MacMillan σε σχέση με τη δημόσια δέσμευσή του: η αποτελεσματικότητα του οπλικού συστήματος[25] και ο βαθμός ελέγχου του συστήματος από τη Μ. Βρετανία.

Κατά τη διάρκεια της πρώτης ημέρας ο MacMillan αποστέλει σειρά μηνυμάτων στον Kennedy σχετικά με το κόστος απέναντι στο κοινό του αν δεν πάρει μια λύση που να μην περιλαμβάνει το Skybolt.

Ο Kennedy, προφανώς αναμένει μια πρώτη άρνηση του MacMillan για το Skybolt και βελτιώνει την πρώτη του πρόταση παρουσιάζοντας κείμενο συμφωνίας στην οποία προσθέτει το σύστημα Hound Dog και κυρίως, αφήνει ανοικτό το θέμα των Polaris το οποίο θα εξετάζοταν στο πλαίσιο πολυμερούς σχεδιασμού. Η άμεση αντίδραση του Kennedy προδιαθέτει στο ότι ήταν σχεδιασμένη η νέα πρόταση εξ αρχής.

Το απόγευμα ξεκινά νέος γύρος διαπραγματεύσεων με βάση την πρωινή πρόταση Kennedy. Αν και η προωσπική σχέση με τον Kennedy του δίνει ένα πλεονέκτημα, ώστε να μην θεωρήσει η αμερικάνικη πλευρά σαν φθηνά λόγια (cheap talk) τις θέσεις του, αξιοποιεί την ειλικρίνεια του McNamara για να εκπέμψει το ξεκάθαρο μήνυμα ότι το σύστημα SkyBolt είναι πολτικά νεκρό. Το μήνυμα λαμβάνεται καθαρά από τον Kennedy, ο οποίος στη συνέχεια δεν αναφέρεται ξανά στο Skybolt. Η πρώτη ημέρα τελειώνει χωρίς να έχει καταλήξει η διαπραγμάτευση, αλλά έχοντας η Μ. Βρετανία κερδίσει κάτι σημαντικό: Να αντιληφθεί ο Kennedy το μεγάλο πολιτικό κόστος που θα είχε ο MacMillan αν γύριζε στο Λονδίνο με το

[25] με βασικές παραμέτρους να είναι ο χρόνος αντίδρασης, η δυνατότητα εντοπισμού από τον εχθρό, και η ακτίνα επιχειρησιακής δράσης.

Skybolt. O MacMillan κατάφερε και χρησιμοποίησε το κόστος του εσωτερικού κοινού του ως μοχλό για να βελτιώσει τη διαπραγματευτική του θέση.

O Kennedy από την πλευρά του είχε αναπροσαρμόσει την πεποίθησή του για την αποφασιστικότητα του MacMillan με βάση το σήμα που έλαβε. Το ερώτημα που έπρεπε να απαντηθεί την επόμενη ημέρα ήταν πόσο μερίδιο από την «πίτα» του πυρηνικού οπλοστασίου έπρεπε να δώσει, ώστε να κλείσει η διαπραγμάτευση.

Ημέρα 2η

Προκειμένου να προχωρήσουμε στη μελέτη της δεύτερης ημέρα, θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε θέση των ΗΠΑ. Οι ΗΠΑ από τη συμφωνία του Camp David έχουν ήδη συμφωνήσει στην πώληση πυρηνικών όπλων. Συνεπώς, οι προτάσεις της πρώτης ημέρας έχουν γι' αυτούς ελάχιστο κόστος. Οι περαιτέρω παραχωρήσεις θα δημιουργούσαν κόστος, προερχόμενο από τις αντιδράσεις των άλλων Ευρωπαϊκών Κρατών, κυρίως Γαλλίας και Γερμανίας, και δευτερευόντως από το εσωτερικό μέτωπο της διοίκησης των ΗΠΑ. Αποτυχία των συνομιλιών θα οδηγούσε, είτε σε συνέχιση των συνομιλιών σε χαμηλότερο επίπεδο ή στη χειρότερη περίπτωση[26], στην απώλεια της ναυτικής βάσης στη Σκωτία. Η διαπραγμάτευση λοιπόν από εδώ και πέρα γινόταν ξεκάθαρα διανεμητική, καθώς ό,τι έδινε στους Βρετανούς θα οδηγούσε σε μείωση της δικής του ωφέλειας.

Αντιθέτως, για τους Βρετανούς, και κυρίως για τον Πρωθυπουργό προσωπικά το διακύβευμα της διαπραγμάτευσης είναι πολύ μεγαλύτερο. Αρνητική κατάληξη μπορεί να οδηγήσει σε πτώση της κυβέρνησής του και σε κάθε περίπτωση, σε μεγάλο πολιτικό πλήγμα.

Έτσι, ο MacMillan επιλέγει τη 2η ημέρα να «μετασχηματίσει» το διαπραγματευτικό παίγνιο, αλλάζοντας το outside option του Kennedy. Το κάνει αυτό απειλώντας με συνολικό σχίσμα στις αμυντικές σχέσεις ΗΒ και ΗΠΑ. Πλέον, η αποτυχία της διαπραγμάτευσης θα οδηγούσε σε μια νέα κατάσταση {s} με σημαντικό κόστος και για τον Kennedy (audience cost), όσο και για τις ΗΠΑ (γεωστρατηγικό).

Από στρατηγικής σκοπιάς η κίνηση αυτή του MacMillan είναι ορθολογική, διότι γνωρίζει ότι ο Kennedy είναι πολιτικό όν. Το σχίσμα, θα αύξανε τόσο πολύ το

[26] Ως προς αυτό ο Kennedy ήταν αβέβαιος.

διεθνές και κυρίως, το εσωτερικό πολιτικό κόστος του Kennedy, από τη μη συμφωνία, που θα καθιστούσε δευτερευούσης σημασίας τις αντιδράσεις των υπόλοιπων Ευρωπαϊκών Κρατών από τη συμφωνία ΗΠΑ – Μ. Βρετανίας. Βέβαια στο σχίσμα και η Μ. Βρετανία θα πλήρωνε κόστος. Για τον MacMillan – σε αντίθεση με τον Kennedy – όμως αυτό το κόστος δεν ήταν σημαντικά υψηλότερο από εκείνο που θα πλήρωνε γυρίζοντας στο Λονδίνο με το Skybolt. Η λύση Skybolt ήταν δεδομένο ότι δεν αποτελούσε για τη Βρετανία απάντηση στο μέγιστης εθνικής σημασίας ζήτημα της αξιόπιστης πυρηνικής αποτροπής.

Η συνάρτηση κόστους του Kennedy στη διαπραγμάτευση είχε τη μορφή:

$$C_1(x) = \begin{cases} 0 \; \alpha\nu \; x \geq 1-b \\ \varphi_1 (1-b-x) \; \alpha\nu \; x < 1-b, \; \varphi_1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{εκτός σχίσματος} \qquad (6.2)$$

και C_s αν είχαμε σχίσμα, με $C_s > C_1(x,t)$ για $x \in [1-b,1]$.

Αντίστοιχα και ο MacMillan θα πλήρωνε κόστος K_s χωρίς όμως ο Kennedy να γνωρίζει το πόσο θα ήταν αυτό το κόστος σε σχέση με το κόστος C_1.

Μιλώντας με όρους της θεωρίας παιγνίων, ο Kennedy δεν γνωρίζει πόσο αποφασισμένος είναι ο ΜακΜιλαν τύπος , ποιον τύπο $t^{/}$ ή $t^{//}$ με $t^{//} > t^{/}$, έχει επιλέξει η Φύση, δηλαδή, δεν γνωρίζει ακριβώς τον συντελεστή φ_2 της σχέσης (6.1) από τον οποίο προκύπτει το κόστος του MacMillan.

Άρα, αν p(t) είναι η πιθανότητα να πραγματοποιήσει ο MacMillan την απειλή του, ο Kennedy αναλάμβανε κόστος $C_1(x)*(1-p(t))+C_s*p(t)$ και αντίστοιχο ο MacMillan. Το ερώτημα λοιπόν είναι πόσο πιθανό θεωρούσε ο Κένετυ να πραγματοποιήσει την απειλή του ο MacMillan.

Εδώ ρόλο παίζει η προσωπική σχέση των δύο ηγετών. Ο Κένενντυ, με βάση τις ιστορικές αναφορές, εκτιμούσε σε μεγάλο βαθμό τις καλές σχέσεις που είχε καταφέρει να δημιουργήσει μαζί του και έχει πλήρη επίγνωση του γεγονότος ότι MacMillan ήταν η μόνος ομόλογός του που έχει μια τέτοια εύκολη και στενή σχέση συνεργασίας. Ήταν λοιπόν ένας αξιόπιστος συνομιλητής.

Η πεποίθηση του Kennedy ότι η απειλή του MacMillan ήταν αξιόπιστη, τον οδήγησε να υποχωρήσει και να προσφέρει, τους Polaris πάνω στους οποίους οι

Βρετανοί θα είχαν τον πρώτο λόγο, όπως επιδέξια μπορούσε να υποστηρίξει από τη διατύπωση της συμφωνίας ο ΜακΜιλαν.

Τελική έκβαση, μετά το Nassau.

Στις εκλογές του 1964 ο MacMillan χάνει την εξουσία. Ο διάδοχος του, Χάρολντ Γουίλσον, του Κόμματος των Εργατικών είχε υποσχεθεί να ακυρώσει τη συμφωνία για το Polaris. Μετά την εκλογή του όμως υπαναχώρησε της προεκλογικής υπόσχεσης, ενδεικτικό του γεγονότος ότι η συμφωνία των MacMillan – Kennedy ήταν ευνοϊκή για τα Βρετανικά συμφέροντα.

Τελικά, κατασκευάστηκαν 4 πυρηνικά υποβρύχια από τη Μ. Βρετανία στα οποία εγκαταστάθηκαν οι πύραυλοι Polaris. Οι πύραυλοι εξοπλίστηκαν με βρετανικές πυρηνικές κεφαλές.. Τα συστήματα ήταν έτοιμα το 1969. Έτσι, η Μ. Βρετανία αποκτά ένα πυρηνικό σύστημα που την καθιστά ανεξάρτητη στον τομέα της άμυνας σχεδόν μέχρι το τέλος της δεκαετίας του 70. Η Βρετανική δύναμη θα σταθμεύει στο Φασλέϊν της Σκωτίας, σε ελάχιστη απόσταση από την αμερικανική βάση στο Χόλυ Λοχ. Επιβεβαιώνεται έτσι ότι η αρχική απαίτηση των Αμερικανών γι' αυτή την τοποθεσία ήταν ορθή καθώς κοντά βρίσκονται καλές εγκαταστάσεις στην ξηρά και πρόσβαση σε ανοικτή θάλασσα.

Η βάση στο Χόλυ Λόχ έκλεισε το 1992 ενώ η βάση στο Φασλέϊν λειτουργεί ακόμα και σήμερα ως βάση του συστήματος Trident που αντικατέστησε το Polaris. Η τωρινή Πρώτη Υπουργός της Σκωτίας, Νίκολας Στέρτζεον, έχει δηλώσει δημόσια ότι είναι εναντίον της ανανέωσης του συστήματος Trident.

Συμπεράσματα

Στη διατριβή μελετήσαμε το πώς η θεωρία παιγνίων μπορεί να εφαρμοστεί για να κατανοήσουμε καλύτερα τις διαπραγματεύσεις και τις συγκρούσεις, ιδιαίτερα εκείνες μεταξύ των κρατών. Κεντρικό σημείο για να προβλέψουμε τη συμπεριφορά των παικτών στα ανταγωνιστικά παίγνια είναι η έννοια της ισορροπίας κατά Nash. Με την έννοια της ισορροπίας εισάγεται ένας βασικός τρόπος σκέψης: Το παίγνιο ισορροπεί όταν οι παίκτες δεν μπορούν να βελτιώσουν το όφελός τους με μονομερείς κινήσεις, συνεπώς είναι αδιάφοροι μεταξύ της κατάστασης στη οποία βρίσκονται τώρα και εκείνης που θα βρίσκονται αν ακολουθήσουν μια διαφορετική επιλογή. Εκ πρώτης όψεως η ισορροπία Nash φαίνεται να εγγυάται τη στασιμότητα σε ευρείας κλίμακας κοινωνικά φαινόμενα, ένα αποτέλεσμα μάλλον απαισιόδοξο. Υπάρχουν όμως κάποιες βασικές παράμετροι που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη:

- Η θεωρία παιγνίων στηρίζεται στη θεμελιώδη αρχή της ορθολογικότητας. Οι παίκτες επιλέγουν ορθολογικά με βάση το ώφελός τους το οποίο με τη σειρά του προσδιορίζεται από συναρτήσεις ωφέλειας. Οι παίκτες επίσης επιδεικνύουν ισχυρή πίστη στην οθρολογικότητα του άλλου παίκτη, και αυτό αποτελεί κοινή γνώση και για τους δύο. Είναι κάτι που πάντα ισχύει; Μπορούμε να αποκλείσουμε ότι ψυχολογικοί παράγοντες ή τυχαίες συνθήκες επιδρούν στις αποφάσεις των παικτών; Η ίδια η φύση του ανθρώπου δίνει την απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα. Άλλωστε, οι κοινωνίες υπάρχουν πριν υπάρξει η θεωρία παιγνίων. Οι άνθρωποι δεν γνώριζαν πώς να επιλέξουν στρατηγικές ισορροπίες ώστε να οδηγηθεί το παίγνιο σε ισορροπία. Όμως σε επίπεδο κοινωνίας, τελικά τα σημεία ισορροπίας των παιγνίων λειτουργούν σαν ελκυστές και μέσα από την επανάληψη του παιγνίου πολλές φορές, από πολλούς «παίκτες», διαμορφώνονται θεσμοί που οδηγούν τους επόμενους σε συμπεριφορές που να συνάδουν με κάποια ισορροπία.
- Ένα παίγνιο δεν είναι απαραίτητο να έχει μόνο μία ισορροπία, συνεπώς τίθεται το ζήτημα του ποια ισορροπία θα επιλεγεί τελικά. Σε πολλά παίγνια συντονισμού ή ανταγωνισμού προκύπτει το ερώτημα: Θα επιλεγεί η «*καλή*» ισορροπία του συντονισμού ή η «*κακή»* ισορροπία του ανταγωνισμού, που πιθανώς να αποδίδει στους παίκτες μικρότερη ωφέλεια. Τα αποτελέσματα δεν είναι μονοσήμαντα. Εξαρτώνται από την κουλτούρα της κοινωνίας και τις αξίες που σε κάθε περίοδο επικρατούν. Είναι εύλογο να υποθέσει κάποιος ότι αν το παίγνιο που

παίχτηκε μεταξύ ομάδων φοιτητών στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς (και παρουσιάστηκε σο πλαίσιο της έρευνας μας), είχε παιχτεί στο τέλος της δεκαετίας του 40 μεταξύ βετεράνων του 2ου Παγκοσμίου Πολέμου θα έδινε διαφορετικά αποτελέσματα. Μια τέτοιου είδους αναλογική σύγκριση εξηγεί γιατί στις πρώτες δεκαετίες μετά τον 2ο Π.Π. υπήρχε μεταξύ των Ευρωπαίων πολιτών και ηγετών τόσο μεγάλη προσπάθεια ώστε να επιτευχθούν συνεργασίες και να αποφευχθούν άσκοποι ανταγωνισμοί. Συνεπώς, το σε ποια από τις δυνατές ισορροπίες Nash θα εστιάσει η κοινωνία εξαρτάται από την κουλτούρα και τις ιδιαίτερες συνθήκες που διαμορφώνονται σε κάθε ιστορική περίοδο.

Στη διατριβή καταστήσαμε ξεκάθαρη τη διαφορά ανάμεσα στη λύση Nash του διαπραγματευτικού προβλήματος και στην ισορροπία Nash. Η λύση του διαπραγματευτικού προβλήματος είναι ουσιαστικά ένα σχήμα διαιτησίας. Μία «δίκαιη» λύση σε ένα πρόβλημα διανομής μεριδίων βασισμένη σε παραδοχές – αξιώματα που όντως ταιριάζουν με τη λογική συνάρμοση των προβλημάτων διαπραγμάτευσης. Μια λύση που βασίζεται στη βελτιστοποίηση αλγεβρικής παράστασης η οποία συμπεριλαμβάνει τις προσδοκίες των δύο παικτών, και που διαμέσου των συναρτήσεων ωφέλειας απεικονίζει την έλξη ή την αποστροφή των παικτών έναντι του κινδύνου. Στη μελέτη μας για το σχήμα διαιτησίας Nash, διερευνήσαμε εναλλακτικούς τρόπους εύρεσης της λύσης, αναδεικνύοντας τη δυνατότητα να φθάσουμε στο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας βασικές μεθόδους της ανάλυσης.

Όμως η ισορροπία κατά Nash μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη μελέτη των διαπραγματεύσεων, ειδικά μεταξύ των κρατών, εφόσον αναπαρασταθεί η διαπραγμάτευση όπως στην πραγματική ζωή είναι. Ένα παίγνιο ανταλλαγής προσφορών μεταξύ των παικτών οι οποίοι γνωρίζουν ότι δεν τους συμφέρει η αργοπορία στη συμφωνία γιατί η «πίτα» μειώνεται στο πέρασμα του χρόνου. Η ισορροπία Nash του διαπραγματευτικού παιγνίου στηρίζεται στην μέθοδο της αδιαφορίας. Οι παίκτες είναι αδιάφοροι μεταξύ του να κλείσουν συμφωνία σήμερα, ή να περιμένουν αύριο για κάτι καλύτερο. Το ενδιαφέρον σ’ αυτή τη μοντελοποίηση της διαπραγμάτευσης είναι ότι σε οριακές συνθήκες τα μερίδια των παικτών που προβλέπει η ισορροπία Nash του παιγνίου ταυτίζονται με εκείνα του σχήματος διαιτησίας Nash.

Η μοντελοποίηση της διαπραγμάτευσης ως δυναμικού παιγνίου είναι εξαιρετικά χρήσιμη στη μελέτη της διαχείρισης των συγκρούσεων ανάμεσα στα κράτη. Εκεί, υπεισέρχεται ένας ακόμη παράγοντας. Η αβεβαιότητα του ενός κράτους για κάποια χαρακτηριστικά του άλλου, κυρίως για την αποφασιστικότητά του. Τα κράτη βέβαια έχουν κάθε λόγο να προσπαθούν να κρύψουν στοιχεία που αφορούν το εκτιμώμενο κόστος της αποτυχίας μιας διαπραγμάτευση, ή το κόστος μιας σύρραξης. Αυτό, τους οδηγεί στο να μπλοφάρουν και να διαστρεβλώνουν την πραγματικότητα ως προς αυτά τα μεγέθη, ελπίζοντας σε καλύτερα αποτελέσματα στη διαπραγμάτευση.

Μελετήσαμε τον τρόπο με τον οποίο το εσωτερικό πολιτικό κόστος του κάθε ηγέτη που προκύπτει από δημόσια δέσμευσή του, πριν ή κατά τη διάρκεια της διαπραγμάτευσης, επηρεάζει το αποτέλεσμα αυτής. Συμπεράναμε ότι η δημόσια δέσμευση μπορεί να αποδειχθεί μοχλός αύξηση του μεριδίου του κράτους στη διαπραγμάτευση. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατό να οδηγήσει σε αποτέλεσμα διαφορετικό από εκείνο που ωφελεί το κράτος. Δηλαδή, είναι δυνατό να προκύψει μια κατάσταση στη διαπραγμάτευση στην οποία ο ηγέτης παίρνει αποφάσεις που δεν είναι ορθολογικά βάσιμες για το κράτος του, αλλά είναι βάσιμες για την προσωπική του ωφέλεια, καθώς δεν επιθυμεί να υπαναχωρήσει από τη δημόσια δέσμευσή του και να καταβάλλει έτσι το αντίστοιχο πολιτικό κόστος στο εσωτερικό του κοινό.

Τέλος, βάσει των μοντέλων για την επίλυση συγκρούσεων μεταξύ κρατών μελετήσαμε ένα ιστορικό γεγονός που αφορά στις διαπραγματεύσεις μεταξύ ΗΠΑ και Μ. Βρετανίας στις αρχές της δεκαετίας του 60 για τον καθορισμό της δυνατότητας πυρηνικής αποτροπής της Μ. Βρετανίας. Επελέγη ένα περιστατικό για το οποίο το ιστορικό πλαίσιο αναφοράς είναι καλά τεκμηριωμένο από το έργο ιστορικών που έχουν ασχοληθεί με την περίοδο. Από τη μελέτη των διαπραγματεύσεων προέκυψε η συσχέτιση του εσωτερικού πολιτικού κόστους ηγέτη με την αποφασιστικότητα που επιδεικνύει στις διαπραγματεύσεις.

Μελλοντική εργασία

Θεωρούμε ότι ενδιαφέρον για μελλοντική έρευνα έχει ο τρόπος που οι διαπραγματεύσεις μεταξύ των κρατών διαμορφώνονται από την εσωτερική πολιτική σκηνή. Ιδιαίτερα, μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις που μια συνθήκη η οποία έχει προκύψει ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης πρέπει να επικυρωθεί από το εκλογικό σώμα μέσω δημοψηφίσματος.

Σ’ αυτή την περίπτωση, έχουμε ουσιαστικά δύο ξεχωριστά, αλλά αλληλεπιδρόντα παίγνια, ένα μεταξύ των δύο κρατών και ένα μεταξύ του ηγέτη του κράτους και των πολιτών. Τα παίγνια είναι αλληλένδετα, καθώς το δεύτερο παίγνιο διαμορφώνει τη στάση του ηγέτη, ο οποίος γνωρίζει ότι για τη συμφωνία στην οποία θα καταλήξει θα πρέπει να αποσπάσει την έγκριση του εκλογικού σώματος. Ταυτόχρονα, η ανάγκη δημοκρατικής νομιμοποίησης αποτελεί ένα βασικό στοιχείο της διεθνούς διαπραγμάτευσης που διενεργεί ο ηγέτης, καθώς εκ των πραγμάτων περιορίζει την ελευθερία χειρισμών σε εκείνες τις λύσεις που έχουν βιώσιμο πολιτικό προφίλ με βάση τις προσδοκίες του εκλογικού σώματος.

Μια τέτοια περίπτωση με ξεχωριστό ενδιαφέρον για την Ελλάδα είναι οι διαπραγματεύσεις για το Κυπριακό ζήτημα που έλαβαν χώρα στο Μπούργκενστοκ της Ελβετίας μεταξύ Ελλάδας – Κυπριακής Δημοκρατίας – Τουρκίας και Τουρκοκυπριακής Κοινότητας. Η διαπραγμάτευση ήταν εξαιρετικά περίπλοκη διότι αφορούσε ουσιαστικά τη δημιουργία ενός νέου κράτους και σε αυτήν είχαν ρόλο οι δύο ηγεσίες του νησιού, τρεις εγγυήτριες δυνάμεις (Ελλάδα, Τουρκία, Μ. Βρετανία), και δύο διεθνείς Οργανισμοί, η Ευρωπαϊκή Ένωση και ο ΟΗΕ. Ο ΟΗΕ είχε αναλάβει τη θέση του επιδιαιτητή, και συνέταξε το τελικό κείμενο της συνθήκης. Το σχέδιο της συνθήκης κρίθηκε σε ξεχωριστά ταυτόχρονα δημοψηφίσματα στην Κυπριακή Δημοκρατία και στην Τουρκοκυπριακή Κοινότητα.

Θεωρούμε εξαιρετικά ενδιαφέρον, και καινοτόμο, να μελετήσουμε αυτή τη διαδικασία, με τα εργαλεία της θεωρίας παιγνίων, διερευνώντας το ρόλο του διαμεσολαβητή – επιδιαιτητή ΟΗΕ και την επίδραση της μεθόδου της διαπραγμάτευσης, καθώς και της ειλημμένης απόφασης για την ένταξη της Κυπριακής Δημοκρατίας στην Ε.Ε, στο αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης και των δημοψηφισμάτων. Ελπίζουμε ότι θα έχουμε προσωπικές μαρτυρίες από την Ελληνική και Κυπριακή διαπραγματευτική ομάδα εκείνης της εποχής, στο ανώτατο επίπεδο, ώστε να διαμορφώσουμε καλύτερη κατανόηση της διαπραγμάτευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Abreu D., Gul F., 2000, “Bargaining and Reputation,” Econometrica, Vol.68, No.1, pp. 85-117.

2. Arrow K., 1950, "A Difficulty in the Concept of Social Welfare", Journal of Political Economy, Vol. 58, pp. 328 –346.

3. Ashton N., 2002, “Kennedy, Macmillan and the Cold War, The Irony of Interdependence”, London: Palgrave Macmillan.

4. Aumann R., 1976, "Agreeing to Disagree", The Annals of Statistics, Vol. 4, No. 6, pp. 1236 –1239.

5. Aumann R., Brandenburger A., 1995, “Epistemic Conditions for Nash Equilibrium,” Econometrica, Vol.63, pp.1161 – 1180.

6. Austen-Smith D., Banks J., 1996, "Information Aggregation, Rationality and the Condorcet Jury Theorem", The American Political Science Review, Vol. 90, No. 1, pp. 34 – 45.

7. Axelrod R., 1984, "The Evolution of Cooperation", Basic Books, Inc. Publishers, New York.

8. Axelrod R., Hamilton W.,1981, "The Evolution of Cooperation", Science, New Series, Vol. 211, No. 4489, pp. 1390 – 1396.

9. Banks J., 1990, "Equilibrium Behavior in Crisis Bargaining Games", American Journal of Political Science, Vol. 34, No. 3, pp. 599 – 614.

10. Banks D. T., Hutchinson J. W., Meyer R., 2002, “Reputation in marketing channels. Repeated-transactions bargaining with two sided uncertainty”, Marketing Science, Vol 21, pp. 251 – 272.

11. Binmore K., 1985, “Bargaining and Coalitions”, in A.E. Roth (Ed.), Game-Theoretic Models of Bargaining, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

12. Binmore K., Davies J., 2007, “Calculus”, Cambridge University, pp.223 – 224.

13. Binmore K., Rubinstein A., Wolinsky A., 1986, “The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling,” Rand Journal of Economics, Vol.17, pp.176 – 185.

14. Black, D., 1948. "On the Rationale of Group Decision-making". Journal of Political Economy, vol. 56, pp. 23–34.

15. Bordes G., Tideman N., 1991, "Independence of Irrelevant Alternatives in the Theory of Voting", Theory and Decision, Vol. 40, pp. 163 – 186.

16. Bueno de Mesquita B.,Smith A., Siverson R., Morrow J., 2005, "The Logic of Political Survival", MIT Press.

17. Chatterjee K., Lee C. C., 1998, “Bargaining with Incomplete Information about Outside Options”, Games and Economic Behavior, Vol.22, pp. 203 – 237.

18. Chatterjee K., Samuelson F. W., 1987, “Bargaining with Two-Sided Incomplete Information: An Infinite Horizon Model with Alternating Offers”, Review of Economic Studies, Vol.54, pp.175 – 192.

19. Coleman R., Fraser C., 1979, “Integrative Versus Distributive Bargaining: Choosing a Problem Resolution Process” Industrial Relations, Vol. 34 , pp. 546 –562.

20. Debs, A., Weiss J.C., 2014, “Circumstances, Domestic Audiences, and Reputational Incentives in International Crisis Bargaining”, Journal of Conflict Resolution, vol. 60, 3: pp. 403 – 433.

21. Dorr F., Peacock L., “B-52 Stratofortress”, Osprey publishing, 1995.

22. Dreyer I.,Luengo - Cabrera J., 2015, "On target? EU sanctions as security policy tools", European Union Institute for Security Studies.

23. Easley D., Kleinberg J., 2010, "Networks, Corwds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World", Cambridge University Press.

24. Eddie D., Fudenberg D., Levine, D., 2004 Learning to play Bayesian games. Games and Economic Behavior Vol. 46, no. 2, pp. 282 – 303.

25. Emerson M., Aydin S., 2005, "Tureky in Europe Monitor", Nos 1 - 14, Centre for European Policy Studies.

26. Farrell J., Gibbons R., 1989, “Cheap Talk with Two Audiences”, The American Economic Review, Vol. 79, No. 5., pp.1214 – 1223.

27. Fearon J., 1994, "Domestic Political Audiences and the Escalation of International Disputes", The American Political Science Review, Vol. 88, Issue 3, pp. 577 – 592.

28. Fearon J., 1995, "Rationalist Explenations for War", International Organization, Vol. 49, Issue 3, pp. 379 – 414.

29. Fedderson T., Pesendorfer W., 1998, "Convicting the Innocent: The Inferiority of Unanimus Jury Verdicts Under Strategic Voting", The American Political Science Revirew, Vol. 92, No. 1, pp. 23 – 35.

30. Fey M., Ramsay K., 2010, "When Is Shuttle Diplomacy Worth The Commute?", World Politics, Vol. 62, No. 4, pp. 529 – 560.

31. Fisburn P., 1974, "Social Choice Functions", SIAM Review, Vol 16, No.1, pp. 63 – 90.

32. Φούντας Ε. , Α. Βλάχος, 2010, “Μαθηματικά Αποφάσεων”, Varmar Publications.

33. Foundas E., Derpanis D., 2006, “Taking decision with the help of black's permutation for imprecise ordinal data”, Journal of Interdisciplinary Mathematics, Vol. 9 , No. 1, pp. 169 – 178.

34. Foundas E., Kampisioulis P., Zacharakis E., Fountas Ch., 2013, “Certain thoughts on Nash arbitration scheme”, Journal of Interdisciplinary Mathematics, Vol. 17, No.1, pp.11-25.

35. Fudenberg D., J. Tirole, 1991, “Game Theory”, MIT Press.

36. Fudenberg D., Levine D., Tirole J., 1985, “Infinite Horizon Models of Bargaining with One-Sided Incomplete Information”, in A. E. Roth (Ed.), Game Theoretic Models of Bargaining, Cambridge University Press, Cambridge UK.

37. Geelhoed, E.B., Edmonds A.O., 2005, “The Macmillan–Eisenhower correspondence, 1957–1969”, London,Palgrave Macmillan.

38. Guy T ,V, Kárný M, Wolpert DH, 2012, “Decision Making with Imperfect Decision Makers”, Intelligent Systems Reference Library, Volume 28.

39. Haber L., 2006, "LABOR NEGOTIATIONS AND GAME THEORY: THE CASE OF ASYMMETRIC BARGAINING POWER", J. Collective Negotiations, Vol. 31(1), pp. 21–32.

40. Harsanyi C. J., 1967, “Games with Incomplete Information played by ‘Bayesian’ Players, I – III”, Management Science, Vol 14, No. 3, pp. 159 – 182.

41. Iida K., 1993. “When and how do domestic constraints matter? Two-level games with uncertainty”. Journal of Conflict Resolution, Vol. 37, pp. 403-26.

42. Jervis, Robert., 1978, “Cooperation under the Security Dilemma”, World Politics, Vol. 30, issue 2, pp. 167-214.

43. Kampisioulis P., Kyriakides S., Evangelos Zacharakis, 2015, “Conflict and cooperation in a behavioural game, an experiment”, International Journal of Computational Intelligence Studies (IJCISTUDIES), Vol. 4, No. 3/4.

44. Levenotoglu B., A Tarar, 2005, “Prenegotiation public commitment in domestic and international bargaining”, American Political Science Review, Vol. 99 (3), pp. 419 – 433.

45. Luce D. R., Raiffa H., 1964, “Games and Decisions”, NY John Wiley and Sons.

46. McCarty N, A. Meirowitz, 2007, “Political game theory”, Cambridge University Press.

47. Meyer C., 2010, “Getting Our Way: 500 years of adventure and intrigue: the inside story of British diplomacy”, London. Phoenix Publishing.

48. Moon C., Souva M., 2014, “Audience Costs, Information, and Credible Commitment Problems”, Journal of Conflict Resolution, vol. 60, 3: pp. 434 – 458.
49. Morrow, J. 1999, How Could Trade Affect Conflict? Journal of Peace Research Vol. 36, No. 4, pp. 481– 489.
50. Murray, D. Kennedy, 2000, “Macmillan and nuclear weapons”. London: Palgrave Macmillan.
51. Myerson R., 1979, Incentive Compatibility and the Bargaining Problem, Econometrica, Vol. 47, Issue 1, pp. 61 – 74.
52. Nash F. J., 1950, “The Bargaining Problem”, Econometrica, Vol. 18, No2, pp.155–162.
53. Nash F. J., 1953, “Two-Person Cooperative Games,” Econometrica, vol.21, pp.128-140.
54. Osborne M. J., Rubinstein A., 1994, “A Course in Game theory”, MIT Press.
55. Palacios-Huerta I., 2003, “Professionals play minimax”, Review of Economic Studies, Vol. 70, pp. 395–415.
56. Perea A., 2012, "Epistemic Game Theory Reasoning and Choice", Cambridge University Press.
57. Peters H., Wakker P., 1991, "Indepedence of Irrelevant Alternatives and Revealed Group Preferences", Econometrica, Vol. 59, No. 6, pp. 1787 – 1801.
58. Powell R., 2002, "Bargaining Theory and International Conflict", Annual Review of Political Science, Vol. 5 pp. 1 – 30.
59. Prins, Brandon C. 2003. ‘‘Institutional Instability and the Credibility of Audience Costs: Political Participation and Interstate Crisis Bargaining, 1816-1992.’’ Journal of Peace Research, Vol. 40 (1), pp. 67–84.
60. Putnam R., 1988, "Diplomacy and domestic politics: the logic of two - level games, International Organization, Vol. 42, pp. 427 – 460.
61. Raiffa H., 1982, “The Art and Science of Negotiation”, Harvard University Press, Cambridge, MA.
62. Roth A.E, 1977, “Independence of Irrelevant Alternatives and Solutions to Nash's Bargaining Problem” , Journal of Economic Theory, Vol 16, No. 2, pp. 247 – 251.
63. Rubinstein A., 1982, “Perfect Equilibrium in a Bargaining Model”, Econometrica, Vol.50, No.1, pp. 97 – 109.
64. Rubinstein A., 1985, "A bargaining model with Incomplete Information About Time Preferences", Econometrica, Vol. 53, No. 5, pp. 1151 – 1172.

65. Rubinstein A., 1991, "Comments on the Interpretation of Game Theory", Econometrica, Vol. 51, No. 4, pp. 909 – 924.

66. Schelling T., 1960, “The Strategy of Conflict”, Harvard University Press, Cambridge, MA.

67. Slantchev B., 2006. "Politicians, the Media, and Domestic Audience Costs.", International Studies Quarterly, Vol. 50, pp. 445 – 477.

68. Smith A., Stam A., 2004, "Bargaining and the nature of war", Journal of Conflict Resolution, Vol. 48, pp. 783 – 813.

69. Snyder J. 2014, “Better now than later, The Paradox of 1914 as Everyone's favored Year for War”, Intenrational Security, Vol 39, No 1, pp. 71 – 94.

70. Spaniel W., Malone I , 2016, “Uncertainty, Resolve, and the Growing Costs of War”, Working Paper.

71. Stahl, S.,2010, “A gentle introduction to game theory”, Mathematical World, Vol. 13.

72. Tarar A., Leventoğlu B., 2012, “Limited Audience Costs in International Crises”, Journal of Conflict Resolution, vol. 57, 6: pp. 1065-1089.

73. Tarar A., Leventoğlu B., 2009, Public Commitment in Crisis Bargaining, International Studies Quarterly, Vol. 53, pp. 817–839.

74. Tarar A., 2001, “International Bargaining with Two-Sided Domestic Constraints”, Journal of Conflict Resolution, Vol. 44, No. 3 pp. 320 – 340.

75. Thomas, L.C. "Games, Theory And Applications", 1986, Ellis Horwood Series, Mathematics and its applications.

76. Tomz M., 2007, “Domestic Audience Costs in International Relations: An Experimental Approach”, International Organization 61, pp. 821-840.

77. Turocy T.,Von Stengel B., 2001 “Game Theory”, London School of Economics, CDAM Reserarch Report.

78. Winter E., 1996, "Voting and Vetoing", The American Political Science Review, Vol. 90, No. 4, pp. 813 – 823.

79. Yildiz M., 2011, “Bargaining with optimism”, Annual Review of Economics, Vol, 3.1, pp. 451 – 478.

80. Yildiz M., 2004, “Waiting to Persuade”, “The Quarterly Journal of Economics” 119, pp. 223 –249.