

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
&
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ
ΓΙΑ
ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΑ ΡΑΝΤΩΝ ΖΩΗΣ**

Σουρίλας Δημήτριος

Διπλωματική Εργασία
Πειραιάς,
Ιανουάριος 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS



SCHOOL OF FINANCE & STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
&
INSURANCE SCIENCE

M.SC. IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

RISKINESS ANALYSIS FOR A LARGE PORTFOLIO
OF LIFE ANNUITIES

Sourilas Dimitrios

Dissertation Thesis
Piraeus,
January 2016

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την υποστήριξη, καθοδήγηση και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της εργασίας αυτής.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Νικόλαο Μαχαιρά Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και την κυρία Γεωργία Βερροπούλου, Επίκουρη Καθηγήτρια του ίδιου Τμήματος για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδερφό μου Θανάση για όλη την στήριξη που μου έδωσαν σε όλη την διάρκεια της ακαδημαϊκής μου πορείας.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε δυο στοχαστικές προσεγγίσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της τυχαιότητας του επιτοκίου. Ιδιαίτερα οι δυο αυτές προσεγγίσεις μοντελοποιούν πρωτίστως την ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης και στην συνέχεια μοντελοποιούν την ένταση ανατοκισμού. Για τον παραπάνω σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε την στοχαστική διαδικασία Wiener, και την Ornstein-Uhlenbeck. Η έμμεση συμπεριφορά της έντασης ανατοκισμού θα διερευνηθεί μελετώντας την αναμενόμενη τιμή της έντασης ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης. Επιπλέον θα κατασκευάσουμε άνω και κάτω φράγματα της παρούσας αξίας μιας σειράς χρηματοροών όπου η προεξόφληση πραγματοποιείται στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης στοχαστικής προεξοφλητικής διαδικασίας. Τέλος, θα δώσουμε εφαρμογή όσον αφορά χαρτοφυλάκιο προσωρινής ράντας ζώης ασφαλισμένου ηλικίας x , χρησιμοποιώντας τη στοχαστική διαδικασία Wiener και Ornstein-Uhlenbeck.

Abstract

In this paper we will present two stochastic approaches which are used for modeling interest randomness. In particular, we will be modeling the force of interest and the force of interest accumulation function. For the above purpose, we will use the stochastic Wiener process and the Ornstein-Uhlenbeck one. The implicit behavior of the force of interest will be investigated by studying the expected value of the force of interest accumulation function. Further, we will provide upper and lower bounds of the present value of a series of cash flows where the discount is within a specific stochastic discount process. Finally, we will present an application for a temporary life annuity which concerns an individual aged x , showing the applicability of the above Wiener and Ornstein-Uhlenbeck stochastic process.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρηματοοικονομική είναι μια επιστήμη η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον διότι μπορεί να περιγράψει κάποια θεμελιώδη οικονομικά στοιχεία όπως για παράδειγμα την πορεία μιας μετοχής εισηγμένη στο χρηματιστήριο, την βιωσιμότητα μιας επιχείρησης ακόμα και την οικονομική κατάσταση μιας χώρας. Η χρηματοοικονομική επιστήμη εκτός από πραγματικά οικονομικά στοιχεία χρησιμοποιεί και την θεωρία πιθανοτήτων και πιο πολύ το στοχαστικό κομμάτι της θεωρίας πιθανοτήτων. Η στοχαστική θεωρία ειδικεύεται στο λεγόμενο “*τυχαίο*” δηλαδή σε κάτι που δεν μπορεί να προβλεφθεί. Θα αναρωτηθεί κανείς γιατί μια τόσο σημαντική επιστήμη σαν την χρηματοοικονομική χρησιμοποιεί στοιχεία από την στοχαστική θεωρία. Η απάντηση είναι πολύ απλή. Η τυχαιότητα σε αρκετό βαθμό επηρεάζει την πορεία των πραγμάτων ακόμα και στην οικονομία. Για παράδειγμα η τιμή μιας μετοχής σε μια μελλοντική στιγμή δεν είναι 100% προβλέψιμη με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλά σενάρια για το τι μπορεί να συμβεί. Η τιμή της μετοχής μπορεί να φτάσει σε ένα σημείο τέτοιο ώστε να αγοραστεί από περισσότερους ενδιαφερόμενους, να πουληθεί μαζικά ακόμα και να υποβαθμιστεί η αποδοτικότητα. Άλλο παράδειγμα είναι ότι μια χώρα μπορεί να επηρεαστεί από ένα τυχαίο γεγονός και να έχει αντίκτυπο στην οικονομία της ανεξαρτήτου των χειρισμών που είχαν γίνει πριν το γεγονός. Ένα επίκαιρο παράδειγμα είναι το μεταναστευτικό που δυσχεραίνει ακόμα πιο πολύ την ήδη δύσκολη κατάσταση της Ελλάδας. Όπως φαίνεται η τυχαιότητα συνδέεται αρκετά με την χρηματοοικονομική και αυτός ο λόγος που χρησιμοποιείται η στοχαστική θεωρία.

Το ενδιαφέρον για τη στοχαστική θεωρία που εμπλέκεται στην χρηματοοικονομική αυξήθηκε με την έναρξη της παγκόσμιας κρίσης του 2008. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κρίση που άλλαξε όλο τον κόσμο δεν είχε προβλεφτεί. Με λίγα λόγια ένα τυχαίο γεγονός άλλαξε το επίπεδο βιωσιμότητας αρκετών χωρών, άλλαξε τα δεδομένα για το πότε μια επιχείρηση αντιμετωπίζει κίνδυνο πτώχευσης (Βασιλεία II) με αποτέλεσμα να υπάρξει μια κινητοποίηση στο να μελετηθεί παραπάνω η χρηματοοικονομική επιστήμη ώστε στο μέλλον να προβλεφθούν παρόμοιες ή καινούριες καταστάσεις και να καταπολεμηθούν με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα. Παρόλα αυτά και την εποχή πριν την κρίση ο κλάδος της χρηματοοικονομικής παρουσίαζε μια άνθηση. Πολλοί οικονομολόγοι και ακαδημαϊκοί μελέτησαν και έκαναν διατριβές και παρουσίασαν σημαντικά αποτελέσματα. Οι Panjer & Bellhouse [18]

για παράδειγμα στις αρχές του 1980 παρουσίασαν τα ευρήματά τους για την τυχαία μεταβολή του τόκου και πως με την χρήση κάποιων μοντέλων μπορεί να προβλεφθεί η μεταβολή αυτή με μεγαλύτερη ακρίβεια. Άλλα ονόματα της χρηματοοικονομικής επιστήμης που συνέβαλαν σε αυτήν είναι οι Beekman & Fuelling το 1993 [6], ο Parker [19] το 1994, οι DeSchepper & Goonaerts το 1992 [11], ο Denuit το 1999 [10], ο Dufresne το 1990 [13] και οι Aitchison & Brown το 1963 [4].

Η εργασία δομείται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται ορισμοί και μαθηματικές έννοιες στην χρηματοοικονομική ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να καταλάβει καλύτερα την βασική δομή καθώς και τις εφαρμογές της. Συγκεκριμένα θα γίνει μια εισαγωγή στην παρούσα και μελλοντική αξία των παραγώγων και στην συνέχεια θα επεκταθούμε σε μερικά βασικά είδη ραντών. Μια σύντομη αναφορά γίνεται στα μεταβαλλόμενα επιτόκια και πιο μετά εισάγουμε την έννοια της έντασης ανατοκισμού. Τέλος θα κλείσουμε το πρώτο κεφάλαιο με θεωρία πιθανοτήτων και πιο συγκεκριμένα με την συνάρτηση κατανομής και την έννοια του δειγματικού χώρου και υποσυνόλου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας και θα μελετήσουμε μια ειδική περίπτωση αυτής, γνωστής ως “κίνηση Brown”. Με την χρήση αρκετών μαθηματικών παραδειγμάτων ο αναγνώστης θα αποκτήσει μια οικειότητα με την κίνηση Brown και θα καταλάβει καλύτερα την σημασία της στην χρηματοοικονομική. Το θεώρημα του Girsanov στο οποίο θα αναφερθούμε μετά θα μας δώσει την έννοια του ουδετέρου κινδύνου και ποια η σημασία του στην χρηματοοικονομική.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας αυτής θα χρησιμοποιήσουμε στοχαστικές μεθόδους για την μοντελοποίηση του επιτοκίου. Ποιοι συγκεκριμένα θα γίνει σύγκριση μεταξύ τριών στοχαστικών διαδικασιών (Wiener, Ornstein-Uhlenbeck, White Noise) για να αποφανθούμε ποια ή ποιες από αυτές δίνουν καλύτερα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν με την μορφή πινάκων και διαγραμμάτων ώστε να υπάρχει μια πιο άμεση σύγκριση μεταξύ τους. Τέλος, θα δώσουμε εφαρμογή όσον αφορά χαρτοφυλάκιο ράντας ζωής ασφαλισμένου ηλικίας x , εφαρμόζοντας τις παραπάνω στοχαστικές διαδικασίες στον υπολογισμό του ασφαλιστρού.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	4
Εισαγωγή.....	6

1 Βασικές Μαθηματικές Έννοιες στην Χρηματοοικονομική

1.1 Παρούσα Αξία – Συσσωρευμένη Αξία.....	10
1.2 Η Ένταση Ανατοκισμού δ_t	11
1.3 Μεταβαλλόμενα Επιτόκια.....	13
1.4 Ράντες πληρωμών.....	14
1.5 Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων στην Χρηματοοικονομική.....	18
1.5.1 Δειγματικός Χώρος Ω	18
1.5.2 Κατανομή μιας Τυχαίας Μεταβλητής.....	19

2 Στοχαστικές Διαδικασίες – Βασικές Έννοιες

2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες – Εισαγωγή & Ορισμός.....	21
2.2 Χαρακτηριστικά των Στοχαστικών Διαδικασιών.....	23
2.2.1 Μέση Τιμή και Συνδιακύμανση.....	24
2.2.2 Στασιμότητα.....	24
2.3 Στοχαστική Προεξοφλητική αξία.....	25
2.4 Κίνηση Brown.....	26
2.4.1 Ιδιότητες της κίνησης Brown $W(t)$	29
2.5 Αριθμητική Κίνηση Brown.....	31
2.5.1 Παρατηρήσεις.....	33
2.6 Η Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.....	33
2.7 Γεωμετρική Κίνηση Brown.....	34
2.8 Το μέτρο του Ουδετέρου Κινδύνου και το Θεώρημα του Girsanov.....	36

3 Εφαρμογή Στοχαστικών Μεθόδων στις Αναλογιστικές Συναρτήσεις

3.1	Εισαγωγή.....	39
3.2	Παρούσα Αξία.....	41
3.3	Μοντελοποίηση της Συσσωρευμένης Συνάρτησης της Έντασης Ανατοκισμού.....	42
3.3.1	Στοχαστική Διαδικασία Wiener.....	42
3.3.2	Στοχαστική Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.....	42
3.4	Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού.....	43
3.4.1	Διαδικασία White Noise (Λευκός Θόρυβος).....	43
3.4.2	Διαδικασία Wiener.....	44
3.4.3	Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.....	45
3.5	Ληξιπρόθεσμες Ράντες.....	45
3.6	Παραδείγματα.....	47
3.7	Συμπεριφορά της Έντασης Ανατοκισμού.....	50
3.7.1	Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού Συσσωρευμένης Συνάρτησης μέσω της Διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck.....	50
3.7.2	Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού μέσω της Διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck	51
3.8	Άνω Και Κάτω Όρια Στοχαστικής Προεξοφλημένης Αξίας \tilde{Z}_n	54
3.9	Εφαρμογή σε Χαρτοφυλάκιο Ράντας Ζωής.....	61
3.10	Συμπεράσματα.....	63

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες στην Χρηματοοικονομική

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αρχίσουμε με κάποιες βασικές έννοιες όπως η παρούσα και συσσωρευμένη αξία και η ένταση ανατοκισμού, οι οποίες θα βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση εννοιών των επόμενων κεφαλαίων. Στην συνέχεια θα επεκταθούμε στην έννοια της ράντας καθώς και του μεταβαλλόμενου επιτοκίου. Τέλος θα παρουσιάσουμε γνωστές έννοιες που αφορούν πιθανότητες όπως την έννοια του δειγματικού χώρου, της συνάρτησης κατανομής κτλ.

1.1 Παρούσα Αξία – Συσσωρευμένη Αξία

Μια ταμειακή ροή σήμερα δεν έχει την ίδια αξία με μια ισόποση ταμειακή ροή στο μέλλον. Ο λόγος για την διαφορά αυτή είναι τα επιτόκια. Για παράδειγμα αν βάλουμε τα χρήματά μας στην τράπεζα και τα βγάλουμε αργότερα θα σημειώσουμε ένα κέρδος από τους τόκους. Επομένως, οι μελλοντικές ταμειακές ροές έχουν μικρότερη αξία από τις άμεσες ταμειακές ροές.

Η άμεση αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών ονομάζεται **παρούσα αξία (Present Value (PV))**. Για να υπολογίσουμε τη παρούσα αξία ταμειακών ροών πρέπει να γνωρίζουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο που αντιστοιχεί στην συναλλαγή. Στο παράδειγμά μας αυτό το επιτόκιο είναι το επιτόκιο που προσφέρει η τράπεζα για τις καταθέσεις. Συνεπώς η παρούσα αξία υπολογίζεται με βάση την σχέση:

$$PV = \frac{S}{(1+r)^t} \quad (1.1)$$

όπου PV η παρούσα αξία της ταμειακής ροής

S το ποσό της ταμειακής ροής

r το προεξοφλητικό επιτόκιο

t ο χρόνος

Δηλαδή με άλλα λόγια η παρούσα αξία είναι το ποσό που πρέπει να επενδυθεί σήμερα με επιτόκιο r για να αποδώσει S μετά από t έτη.

Για παράδειγμα η αξία μιας πληρωμής 2000€ σε 3 χρόνια με προεξοφλητικό επιτόκιο 3% είναι:

$$PV = \frac{2000}{(1 + 0.03)^4} = 1830.28$$

Δηλαδή αν βάλουμε στη τράπεζα σήμερα 1830.28€ με επιτόκιο 3% τότε σε 3 χρόνια θα έχουμε 2000€. Επομένως τα 2000€ σε 3 χρόνια έχουν την σημερινή παρούσα αξία 1830.28.

Η **συσσωρευμένη αξία (Accumulated Value (AV))** είναι το ποσό το οποίο θα συγκεντρωθεί στο τέλος του χρονικού διαστήματος t μετά την κατάθεση στην τράπεζα. Στην πραγματικότητα η συσσωρευμένη αξία είναι η ταμειακή ροή S που είδαμε στην σχέση (1.1). Συνεπώς η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως:

$$PV = \frac{AV}{(1 + r)^t} \quad (1.2)$$

Η παραπάνω σχέση συνδέει την παρούσα αξία με την συσσωρευμένη αξία.

Στην περίπτωση των ραντών η παρούσα αξία συμβολίζεται με $a_{n|}$ ενώ η συσσωρευμένη με $s_{n|}$.

1.2 Η Ένταση Ανατοκισμού δ_t

Αν επενδύσουμε κάποιο ποσό (έστω Q) σε μια τράπεζα για κάποια t χρόνια τότε στο τέλος των t χρόνων θα έχουμε μια συσσωρευμένη αξία AV (Accumulative Value) και ο τόκος που θα έχουμε κερδίσει θα είναι ίσος με $AV - Q$. Θέλουμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $\alpha(t)$, $t \geq 0$ η οποία να αφορά επένδυση κεφαλαίου ύψους μίας νομισματικής μονάδας. Αυτή η συνάρτηση θα πρέπει να είναι ικανή να μας δώσει την συσσωρευμένη αξία του κεφαλαίου μετά από κάποια χρόνια. Ο ορισμός της συνάρτησης αυτής θα πρέπει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις:

- ✓ $\alpha(0) = 1$ δηλαδή ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ (την στιγμή που πραγματοποιούμε την επένδυση) η συσσωρευμένη αξία της επένδυσης να είναι ίση με το αρχικό ποσό.
- ✓ Η $\alpha(t)$ πρέπει να είναι αύξουσα συνάρτηση διότι δεν γίνεται μετά από κάποια χρόνια η συσσωρευμένη αξία του ποσού που έχουμε επενδύσει στην τράπεζα να είναι μικρότερη από το αρχικό ποσό.
- ✓ Η $\alpha(t)$ πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου t .

Στην περίπτωση που δεν επενδύουμε ποσό μίας νομισματικής μονάδας άλλα Q τότε μπορούμε να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$A(t) = Q \cdot \alpha(t)$$

Είναι προφανές ότι η $A(t)$ ακολουθεί τις ιδιότητες της $\alpha(t)$.

Οι παραπάνω συναρτήσεις αφορούν τον υπολογισμό του ποσού του τόκου που θα κερδίσουμε μετά την επένδυση μας. Εμάς μας ενδιαφέρει όμως να μελετήσουμε το πώς δρα ο τόκος σε κάθε χρονική στιγμή. Για αυτό τον λόγο ζητάμε ένα μέτρο έντασης του τόκου το οποίο δρα στο κεφάλαιο κάθε χρονική στιγμή t . Ένα τέτοιο μέτρο έντασης μπορεί να είναι ο ρυθμός μεταβολής του $A(t)$ δηλαδή η πρώτη παράγωγος:

$$A'(t) = \frac{d(A(t))}{dt}$$

Το ερώτημα όμως που προκύπτει είναι εάν αυτό το μέτρο είναι ικανοποιητικό για την ένταση με την οποία δρα ο τόκος κάθε χρονική στιγμή t . Η απάντηση είναι αρνητική, γιατί στα 200€ η αύξηση του ποσού των 200€ με ένα επιτόκιο i είναι διαφορετική από αυτήν των 500€. Ένα καλύτερο μέτρο είναι το παρακάτω:

Ορισμός 1.1 (ένταση ανατοκισμού)

Η **ένταση ανατοκισμού** δ_t ορίζεται ως το πηλίκο

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)}$$

και μας δείχνει την ένταση με την οποία δρα ο τόκος την χρονική στιγμή t .

Στην πράξη το δ_t είναι σταθερό ($\delta_t = \delta$) όμως γενικά μπορεί να μεταβάλλεται συνεχώς. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\delta_t = (\ln A(t))' = \frac{d}{dt} \ln A(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t \delta_r dr = \int_0^t (\ln A(r))' dr = [\ln A(r)]_0^t = \ln A(t) - \ln A(0) = \ln \frac{A(t)}{A(0)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^t \delta_r dr &= \ln \frac{Qa(t)}{Qa(0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\int_0^r \delta_r dr} &= a(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου $a(t)$ είναι η συνάρτηση συσσώρευσης της έντασης ανατοκισμού την χρονική στιγμή t .

1.3 Μεταβαλλόμενα Επιτόκια

Τα επιτόκια χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες, τα σταθερά επιτόκια (fixed interest rate) και τα μεταβαλλόμενα (variable interest rate). Το μεταβαλλόμενο (ή αλλιώς κυμαινόμενο) επιτόκιο είναι ένα επιτόκιο ενός χρεογράφου (δάνειο, ομολογία, στεγαστικό δάνειο κ.τ.λ.) το οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο, διότι βασίζεται σε ένα υποκείμενο επιτόκιο αναφοράς ή σε έναν δείκτη που αλλάζει περιοδικά. Το προφανές πλεονέκτημα του κυμαινόμενου επιτοκίου είναι ότι αν μειωθεί το επιτόκιο αναφοράς ή πέσει ο δείκτης στον οποίο βασίζεται, τότε θα μειωθούν και οι πληρωμές τόκων του δανειολήπτη. Αντίθετα σε μια αύξηση του επιτοκίου αναφοράς ή του δείκτη, οι πληρωμές τόκων αυξάνονται.

Η ένταση του μεταβαλλόμενου επιτοκίου υπολογίζεται με την χρήση της σχέσης (1.3) δηλαδή με την:

$$a(t) = e^{\int_0^r \delta_r dr}$$

- Αν η δ_r είναι ολοκληρώσιμη τότε παίρνουμε άμεσα αποτελέσματα
- Αν η δ_r δεν είναι ολοκληρώσιμη τότε χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους

1.4 Ράντες πληρωμών

Μερικές φορές στην πράξη έχουμε μια ομαλή σειρά από περιοδικές πληρωμές όπως για παράδειγμα η μηνιαία αποπληρωμή ενός δανείου για ένα σπίτι ή η μηνιαία καταβολή μιας σύνταξης. Αυτές τις σειρές πληρωμών που γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα τις ονομάζουμε **ράντες (annuity)**. Κάθε χρηματικό ποσό λέγεται **όρος** της ράντας. Οι ράντες χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

- **Ληξιπρόθεσμες ράντες (immediate annuity)** είναι εκείνες οι ράντες που οι πληρωμές τους γίνονται στο τέλος της περιόδου όπως για παράδειγμα η πληρωμή ενός δανείου στο τέλος κάθε μήνα.
- **Προκαταβλητές ράντες (due annuity)** είναι εκείνες οι ράντες που οι πληρωμές τους γίνονται στην αρχή της περιόδου όπως για παράδειγμα η καταβολή της σύνταξης στην αρχή κάθε μήνα.
- **Μοναδιαίες ράντες (unit annuity)** είναι εκείνες οι ράντες στις οποίες το ποσό της δόσης είναι ίσο με μια νομισματική μονάδα.
- **Διηνεκείς ράντες (perpetuity)** είναι οι ράντες στις οποίες ο αριθμός των δόσεων είναι άπειρος.

Επίσης οι ράντες διακρίνονται σε **σταθερές** όταν οι όροι τους είναι ίσοι μεταξύ τους, και σε **μη σταθερές**, όταν οι όροι τους δεν είναι ίσοι (π.χ. οι όροι αυξάνουν κατά ένα σταθερό ποσό ή με ένα σταθερό ρυθμό).

Γενικά ισχύει ότι:

$$AV = PV(1+i)^t \xrightarrow{t=1} PV = \frac{AV}{(1+i)} \xrightarrow{AV=1} PV = \frac{1}{(1+i)} \quad (1.4)$$

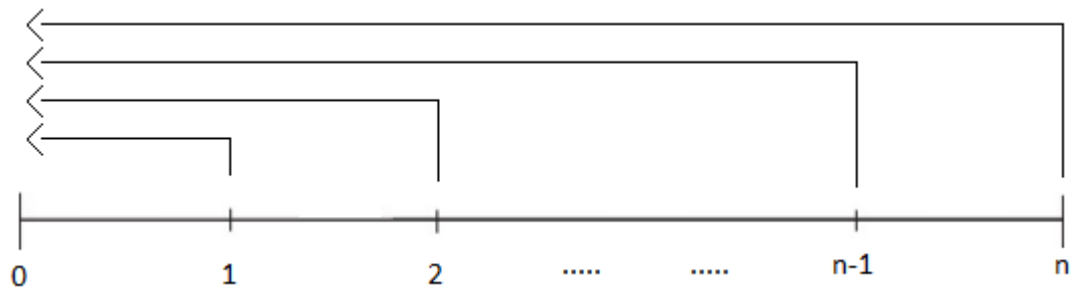
Το δεξί μέλος της (1.4) ονομάζεται **προεξοφλητικός παράγοντας**, αναφέρεται σε πληρωμές που γίνονται στο μέλλον και συμβολίζεται με v .

Παρακάτω θα υπολογίσουμε παρούσες και συσσωρευμένες αξίες για κάποιες από τις κατηγορίες ραντών που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Έστω ότι έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα n πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας στο τέλος του κάθε έτους. Τότε η παρούσα αξία (PV) αυτής της ράντας ισούται με

$$a_{n|} = v^1 + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n \quad (1.5)$$

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι προεξοφλούμε την στιγμή $t = 0$ κάθε μελλοντική πληρωμή μιας νομισματικής μονάδας. Το παρακάτω σχήμα επεξηγεί καλύτερα την σχέση (1.5).

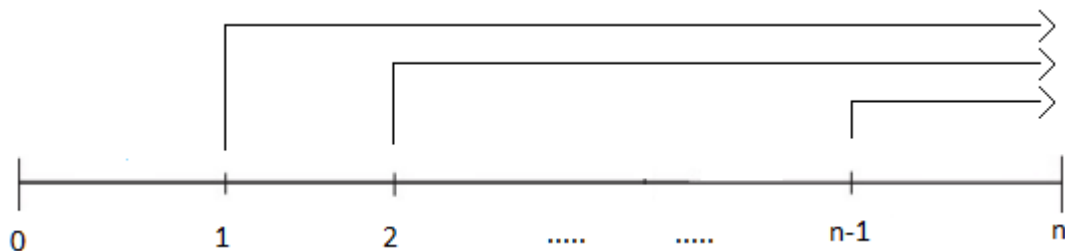


Σχήμα 1.1

Αντίστοιχα η συσσωρευμένη αξία της συγκεκριμένης ράντας ισούται με

$$s_{n\uparrow} = 1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} \quad (1.6)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι για τον υπολογισμό της συσσωρευμένης αξίας βρίσκουμε πόσο αξίζει κάθε πληρωμή μιας νομισματικής μονάδας την χρονική στιγμή $t = n$. Το δε σχήμα για την καλύτερη επεξήγηση της σχέσης (1.6) είναι το παρακάτω.



Σχήμα 1.2

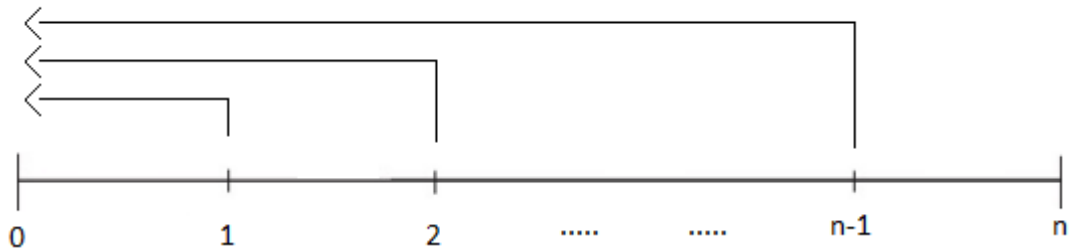
Στην περίπτωση που αντί για πληρωμές μιας νομισματικής μονάδας είχαμε K νομισματικές μονάδες παρούσα και συσσωρευμένη αξία θα υπολογίζονταν ως $PV = K \cdot a_{n\uparrow}$ και $AV = K \cdot s_{n\uparrow}$ αντίστοιχα.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την παρούσα και συσσωρευμένη αξία μιας προκαταβλητέας ράντας. Στην περίπτωση των προκαταβλητέων ραντών η παρούσα αξία συμβολίζεται με $\ddot{a}_{n\uparrow}$ ενώ η συσσωρευμένη με $\ddot{s}_{n\uparrow}$.

Έστω ότι έχουμε μια προκαταβλητέα ράντα n πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας στο τέλος του κάθε έτους. Τότε η παρούσα αξία αυτής της ράντας ισούται με

$$\ddot{a}_{n|} = 1 + v^1 + v^2 + \dots + v^{n-1} \quad (1.7)$$

Το σχήμα 1.3 μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα πως υπολογίστηκε η παρούσα αξία.

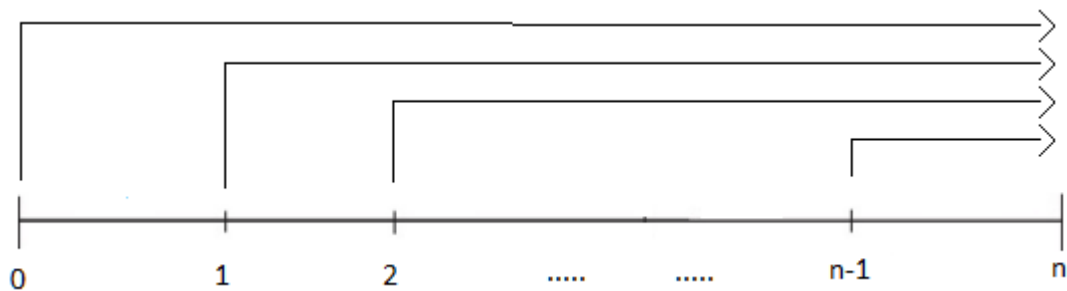


Σχήμα 1.3

Αντίστοιχα η συσσωρευμένη αξία ισούται με:

$$\ddot{s}_{n|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n \quad (1.8)$$

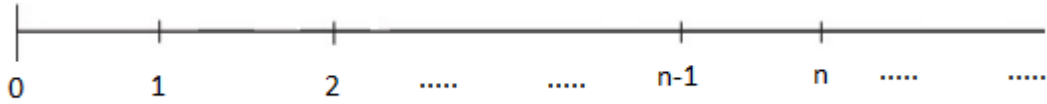
και το σχήμα που αντιστοιχεί στην (1.8) είναι το παρακάτω



Σχήμα 1.4

Στην περίπτωση που είχαμε πληρωμές K νομισματικών μονάδων ο υπολογισμός της παρούσας και συσσωρευμένης αξίας θα ήταν παρόμοιος λογικής με εκείνης των ληξιπρόθεσμων ραντών.

Τέλος θα υπολογίσουμε την παρούσα και συσσωρευμένη αξία μιας διηνεκής ράντας. Όπως αναφέραμε και πιο πριν η διηνεκής ράντα έχει πληρωμές οι οποίες συνεχίζονται επ' άπειρον και για αυτό τον λόγο δεν έχει συσσωρευμένη αξία. Οι διηνεκές ράντες χωρίζονται σε ληξιπρόθεσμες και προκαταβλητέες αναλόγως με το αν οι πληρωμές γίνονται στην αρχή ή στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου. Μια διηνεκής ράντα (ανεξαρτήτως ληξιπρόθεσμη ή προκαταβλητέα) σχηματικά μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής.



Σχήμα 1.5

Η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης διηνεκούς ράντας είναι ίση με

$$PV = v^1 + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n + \dots$$

και συμβολίζεται με $a_{\infty|}$.

Αντίστοιχα η παρούσα αξία μιας προκαταβλητέας διηνεκούς ράντας ισούται με

$$PV = 1 + v^1 + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n + \dots$$

και συμβολίζεται με $\ddot{a}_{\infty|}$.

1.5 Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων στην Χρηματοοικονομική

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε κάποιες στοιχειώδεις έννοιες πιθανοτήτων οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε κάποια θέματα της στοχαστικής ανάλυσης. Θα αρχίσουμε με την έννοια του δειγματικού χώρου Ω .

1.5.1 Δειγματικός Χώρος Ω

Ορισμός 1.2

Έστω ένα πείραμα τύχης. Τότε το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης θα καλείται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται με Ω .

Κάθε δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος (δηλαδή κάθε στοιχείο που ανήκει στον δειγματικό χώρο Ω) καλείται **απλό ενδεχόμενο**.

Από τον παραπάνω ορισμό καταλαβαίνουμε ότι κάθε απλό ενδεχόμενο A είναι ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω . Θα δώσουμε ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση του δειγματικού χώρου και του απλού ενδεχομένου.

Παράδειγμα 1.1

Θα θεωρήσουμε ότι έχουμε το τυχαίο πείραμα μιας ρίψης ενός ζαριού και θα υπολογίσουμε τον δειγματικό χώρο Ω και κάθε πιθανό ενδεχόμενο A .

Είναι προφανές ότι ο δειγματικός χώρος είναι το κάθε δυνατό αποτέλεσμα που μπορεί να φέρει η ρήψη ενός ζαριού άρα $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Τα απλά ενδεχόμενα είναι τα μονοσύνολα του δειγματικού χώρου Ω και είναι τα $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$. Επιπλέον βλέπουμε και τον ισχυρισμό που διατυπώσαμε πιο πάνω ότι κάθε απλό ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .

1.5.2 Κατανομή μιας Τυχαίας Μεταβλητής

Έστω μια τυχαία μεταβλητή X . Τότε μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση κατανομής ως εξής:

Ορισμός 1.3

Η **συνάρτηση κατανομής** μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με F_X και ορίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Η συνάρτηση F_X ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- i. Η F_X είναι αύξουσα
- ii. Η F_X είναι δεξιά συνεχής
- iii. Ισχύουν τα όρια $\lim_{n \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση F_X μπορεί να εκφραστεί με την μορφή ολοκληρώματος έχουμε ότι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

Η $f(x)$ καλείται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**.

Στην περίπτωση που έχουμε παραπάνω από μια τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής. Δίνουμε τον ορισμό της ως εξής:

Ορισμός 1.4

Έστω X_1, X_d τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων. Τότε η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων αυτών μεταβλητών συμβολίζεται με $F(x_1, \dots, x_d)$ και για αυτήν ισχύει ότι

$$F(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_d \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_d) = F_{X_i}(x_i)$$

όπου $F_{X_i}(x_i)$ είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_i .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοχαστικές Διαδικασίες Βασικές Έννοιες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας καθώς και βασικά χαρακτηριστικά της, όπως την μέση τιμή και συνδιακύμανση αυτής. Ιδιαίτερα θα αναφερθούμε στην κίνηση Brown η οποία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί ένα από τα βασικά εργαλεία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο. Επιπλέον θα μελετήσουμε μερικές περιπτώσεις της κίνησης Brown οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Τέλος, θα αναφέρουμε το θεώρημα του Girsanov το οποίο είναι ένα θεμελιώδες και σημαντικό αποτέλεσμα για την στοχαστική ανάλυση.

2.1 Στοχαστικές Διαδικασίες – Εισαγωγή & Ορισμός

Υποθέτουμε ότι η συναλλαγματική ισοτιμία EUR/CHF σε κάθε σταθερή χρονική στιγμή t μεταξύ 5 και 6 το πρωί είναι τυχαία. Η παραπάνω ισοτιμία μπορεί να ερμηνευθεί ως μια υλοποίηση $X_t(\omega)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X_t την οποία θα την παρακολουθήσουμε την για $5 \leq t \leq 6$. Προκειμένου να κάνουμε μια πρόβλεψη την χρονική στιγμή $t = 6$ για την συναλλαγματική ισοτιμία $X_7(\omega)$ στις 7 μ.μ είναι λογικό να κοιτάξουμε ολόκληρη την εξέλιξη της $X_t(\omega)$ μεταξύ 5 και 6 μ.μ. Ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει ένα τέτοιο φαινόμενο καλείται **στοχαστική διαδικασία**. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1 (Στοχαστική διαδικασία)

Μια στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) X είναι μια οικογένεια από τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.)

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

ορισμένες σε έναν χώρο Ω .

Στην ενότητα αυτή το T θα δηλώνεται ως χρόνος και θα θεωρούμε ότι είναι ένα διάστημα $[a, b]$, $[a, b)$ ή $[a, \infty)$ με $a < b$ (εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά) και για αυτό τον λόγο ονομάζουμε την X σ.δ. συνεχούς χρόνου σε αντίθεση με την σ.δ. διακριτού χρόνου όπου το T παίρνει αριθμήσιμες μη πεπερασμένες τιμές.

Μετά από τα παραπάνω δίνουμε έναν εναλλακτικό ορισμό για τη σ.δ.

Ορισμός 2.2

Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών.

- Για σταθερή χρονική στιγμή t , η X είναι μια τυχαία μεταβλητή

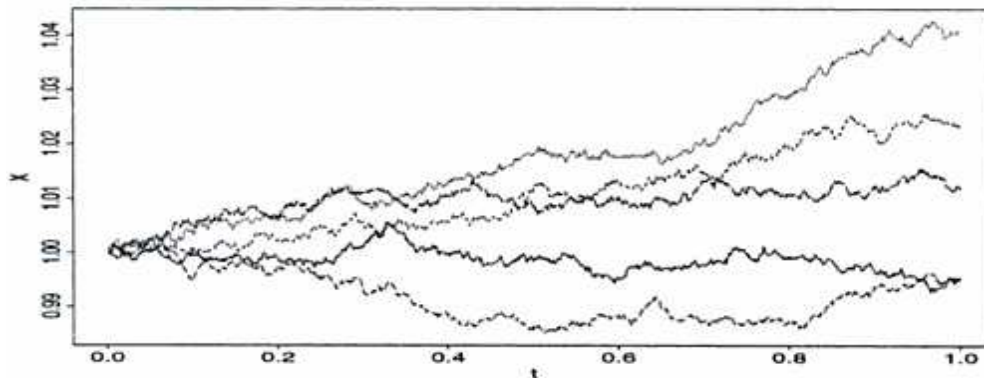
$$X_t = X_t(\omega), \omega \in \Omega$$

- Για ένα τυχαίο αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$, η X είναι συνάρτηση του χρόνου

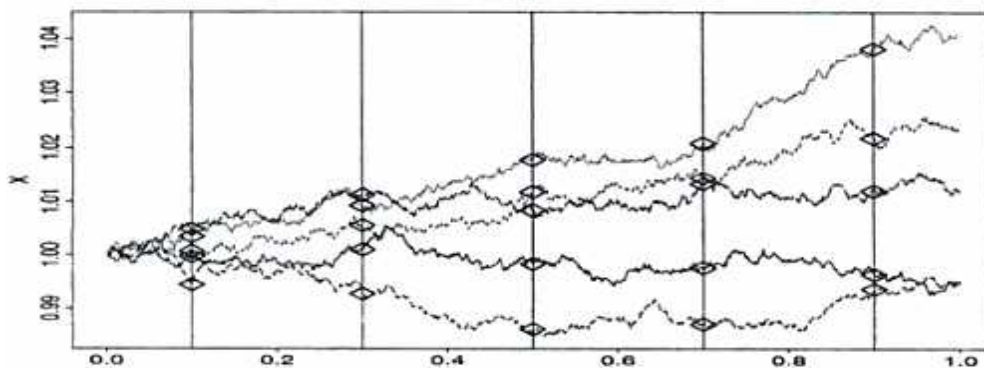
$$X_t = X_t(\omega), t \in T$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **τροχιά (path)** της διαδικασίας X .

Παραδείγματα που αφορούν τον ορισμό 2.2 δίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζονται 5 τροχιές από μια στοχαστική διαδικασία $(X_t, t \in [0,1])$. Κάθε μια από τις 5 τροχιές αντιστοιχεί σε διαφορετικό $\omega \in \Omega$. Στο σχήμα 2 βλέπουμε για $t = 0.1, 0.3, \dots, 0.9$ τις αντίστοιχες τιμές $X_{0.1}, X_{0.3}, \dots, X_{0.9}$ της κάθε τροχιάς.

Βλέπουμε ότι οι έννοιες της τυχαίας μεταβλητής X και της στοχαστικής διαδικασίας $(X_t, t \in T)$ δεν είναι τόσο διαφορετικές. Και οι δυο έχουν τυχαίες υλοποιήσεις αλλά η υλοποίηση $X(\omega)$ από μια τυχαία μεταβλητή είναι ένας αριθμός ενώ η υλοποίηση $X_t, t \in T$ από μια στοχαστική διαδικασία είναι μια συνάρτηση της T .

2.2 Χαρακτηριστικά των Στοχαστικών Διαδικασιών

Σε αναλογία με τις τυχαίες μεταβλητές και τα τυχαία διανύσματα θα παρουσιάσουμε μη τυχαία χαρακτηριστικά από στοχαστικές διαδικασίες όπως η κατανομή που ακολουθούν, μέσες τιμές κ.τ.λ. Αυτό είναι μια διαδικασία πιο πολύπλοκη από την περιγραφή ενός τυχαίου διανύσματος. Πράγματι μια μη τριτομένη στοχαστική διαδικασία $X = (X_t, t \in T)$ με άπειρο σύνολο T είναι ένα “αντικείμενο” απείρων διαστάσεων το οποίο μπορεί να κατανοηθεί ως μια άπειρη συλλογή από τυχαίες μεταβλητές $X_t, t \in T$. Επειδή οι τιμές της X είναι συναρτήσεις της T η κατανομή της X πρέπει να οριστεί σε υποσύνολα ενός ορισμένου λειτουργικού χώρου δηλαδή:

$$P(X \in A), A \in F$$

όπου F είναι μια συλλογή από κατάλληλα υποσύνολα από τον συγκεκριμένο λειτουργικό χώρο. Παρακάτω αναφέρουμε ένα σημαντικό θεώρημα με το οποίο μπορούμε να ερμηνεύσουμε μια στοχαστική διαδικασία με την χρήση τυχαίων διανυσμάτων (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [24]).

Θεώρημα 2.1

Οι πεπερασμένες κατανομές από την στοχαστική διαδικασία X είναι οι κατανομές από τα πεπερασμένα διανύσματα

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), t_1, \dots, t_n \in T$$

για κάθε $t_1, \dots, t_n \in T$ και για κάθε $n \geq 1$.

2.2.1 Μέση Τιμή και Συνδιακύμανση

Για ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \dots, X_n)$ ορίζουμε την μέση τιμή ως $\mu_x = (EX_1, \dots, EX_n)$ και την συνδιακύμανση ως $\Sigma_x = (cov(X_i, X_j), i, j = 1, \dots, n)$. Μια στοχαστική διαδικασία $X = (X_t, t \in T)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια συλλογή από τυχαία διανύσματα $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ για $t_1, \dots, t_n \in T$ και $n \geq 1$. Για το καθένα από αυτά μπορούμε να καθορίσουμε την μέση τιμή και συνδιακύμανση.

Η μέση τιμή της X δίνεται από:

$$\mu_x(t) = \mu_{X_t} = EX_t, \quad t \in T$$

Η συνδιακύμανση της X δίνεται από:

$$c_x(t, s) = cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_x(t))(X_s - \mu_x(s))] , \quad t, s \in T$$

Η διακύμανση της X δίνεται από:

$$\sigma_x^2(t) = c_x(t, t) = var(X_t) , \quad t \in T$$

2.2.2 Στασιμότητα

Έστω ότι για μια διαδικασία X η μέση τιμή της είναι μια σταθερά και ότι η συνάρτηση συνδιακύμανση της εξαρτάται μόνο από την διαφορά $|t - s|$. Τότε η διαδικασία αυτή ονομάζεται **στάσιμη**. Εάν περιγράψουμε μια διαδικασία της πραγματικής ζωής με μια στάσιμη διαδικασία τότε πιστεύουμε ότι οι χαρακτηριστικές ιδιότητες από αυτή την διαδικασία δεν αλλάζουν όσο περνάει ο χρόνος. Η δομή εξάρτησης η οποία περιγράφεται από την συνδιακύμανση παραμένει αμετάβλητη υπό τις οποιεσδήποτε μετατοπίσεις του χρόνου. Αυτός είναι ένας ισχυρός περιορισμός στην υποκείμενη διαδικασία παρόλα αυτά είναι μια τυπική υπόθεση που λαμβάνει χώρα σε πολλούς τομείς όπως στατιστική και χρονοσειρές. Μια διαδικασία από μόνη της δεν είναι απαραίτητη να είναι και στάσιμη.

Ορισμός 2.3

Έστω $X = (X_t, t \in T)$ μια στοχαστική διαδικασία και $T \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Η X λέγεται ότι έχει **στάσιμη προσαύξηση** εάν:

$$X_t - X_s \stackrel{d}{\Leftrightarrow} X_{t+h} - X_{s+h}$$

για όλα τα $t, s \in T$ και h με $t+h, s+h \in T$

Η X θα λέγεται ότι έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** εάν για κάθε $t_i \in T$ με $t_1 < \dots < t_n$ και $n \geq 1$, οι

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

2.3 Στοχαστική Προεξοφλητική Αξία

Έστω V_t η παρούσα αξία την χρονική στιγμή 0 μιας ποσότητας a_t που πληρώνεται την χρονική στιγμή 1. Η στοχαστική προεξοφλημένη αξία την χρονική στιγμή $t=0$ για πληρωμές ίσες με a_t που έγιναν τις χρονικές στιγμές $t=0, 1, 2, \dots, n$ δίνεται από:

$$Z_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Μία ακριβής έκφραση για τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της Z_n απαιτεί την γνώση της από κοινού κατανομής του τυχαίου διανύσματος (V_1, V_2, \dots, V_n) η οποία γενικά δεν είναι διαθέσιμη. Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος γίνεται με την προσέγγιση της Z_n μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής \tilde{Z}_n . Εάν συμβολίσουμε με F_1, F_2, \dots, F_n τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής των V_1, V_2, \dots, V_n τότε η \tilde{Z}_n δίνεται από:

$$\tilde{Z}_n = F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \dots + F_n^{-1}(U)$$

Όπου η U είναι μια τυχαία ομοιόμορφη μεταβλητή και τα F_i^{-1} είναι οι συναρτήσεις ποσοσημορίων που σχετίζονται με τα F_i .

Το παραπάνω πρόβλημα μελετήθηκε εκτενώς από τους Beekman & Fuelling (βλέπε [6]), Parker (βλέπε [19]-[21]), Dufrense (βλέπε [13]) και Goonaerts & De Schepper (βλέπε [11]). Οι τελευταίοι μάλιστα κατασκεύασαν άνω και κάτω φράγματα της Z_n τα οποία θα μελετήσουμε στην ενότητα 3.8. Ο Goonaerts ιδιαίτερα έδειξε ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Z_n και \tilde{Z}_n είναι προσεγγιστικά ίσες.

2.4 Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τυχαίος περίπατος στον οποίο ένα κέρμα ρίχνεται γρήγορα άπειρες φορές και σε κάθε ρίψη πραγματοποιείται ένα πάρα πολύ μικρό βήμα είτε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω (αναλόγως το αποτέλεσμα σε κάθε ρίψη). Πιο συγκεκριμένα η κίνηση Brown είναι ένας τυχαίος περίπατος που πραγματοποιείται σε συνεχή χρόνο με συνεχή βήματα. Η κίνηση αυτή χαρακτηρίζεται από μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $W = \{W(t)\}$ που αναπροσαρμόζεται από τον χρόνο t όπου η $W(t)$ αντιπροσωπεύει τον τυχαίο περίπατο μετά από t περιόδους.

Έστω μια κίνηση Brown που αρχίζει από τη θέση w για $t = 0$. Τότε για την διαδικασία $W(t)$ ισχύουν τα παρακάτω:

- i.* $W(0) = w$.
- ii.* Για κάθε $s, t > 0$ οι διαφορές $W(t + s) - W(t)$ είναι κανονικά κατανοημένες με μέση τιμή 0 και διακύμανση s .
- iii.* Η W έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- iv.* Η $W(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση του t .

Όταν $w = 0$ τότε η κίνηση Brown λέγεται **τυπική κίνηση Brown** ή **κίνηση Wiener**.

Παράδειγμα 2.1

Θα υπολογίσουμε την διακύμανση της διαφοράς $W(t) - W(s)$ με $0 \leq s \leq t$.

Όντως έχουμε ότι $W(t) - W(s) = W(s + (t - s)) - W(s)$ οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) προκύπτει ότι η διακύμανση είναι $t - s$.

Παράδειγμα 2.2

Θα δείξουμε ότι $E[W(t + s) | W(t)] = W(t)$.

Για οποιοδήποτε τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z γνωρίζουμε ότι $E(X + Y | Z) = E(X | Z) + E(Y | Z)$ και $E(X | X) = X$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις έχουμε

$$E[W(t + s) | W(t)] = E[W(t + s) - W(t) + W(t) | W(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= E[W(t + s) - W(t) | W(t)] + E[W(t) | W(t)] \\
&= 0 + W(t) = W(t)
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα (ii) για να υπολογιστεί η $E[W(t + s) - W(t) | W(t)]$. Το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει ότι η διαδικασία $W(t)$ είναι martingale, σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό (βλέπε [16] για περαιτέρω πληροφορίες).

Ορισμός 2.4

Μια στοχαστική διαδικασία $W(t)$ ονομάζεται ***martingale*** όταν ισχύει:

$$E[W(t + s) | W(t)] = W(t).$$

Παράδειγμα 2.3

Ας υπολογίσουμε την $E[W(5) | W(2)]$ όταν ισχύει $W(2) = 4$.

Χρησιμοποιώντας ότι η $W(t)$ είναι martingale έχουμε ότι $E[W(5) | W(2)] = E[W(2 + 3) | W(2)] = W(2) = 4$

Παράδειγμα 2.4

Θα δείξουμε ότι αν η W είναι μια τυπική κίνηση Brown τότε ισχύει $E[W(t)W(s)] = \min\{t, s\}$, όπου $t, s \geq 0$.

Υποθέτουμε ότι $t > s$. Επειδή η $W(t)$ είναι τυπική κίνηση Brown και $W(0) = 0$ τότε με βάση το παράδειγμα 2.1 έχουμε ότι

$$E[W(t)] = E[W(t) - W(0)] = 0 \ \& \ Var[W(t)] = Var[W(t) - W(0)] = t - 0 = t.$$

Επιπλέον:

$$Var[W(t)] = E[(W(t))^2] - (E[W(t)])^2 = E(W(t)W(s)) - 0 = E[W(t)^2] = t.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
E(W(t)W(s)) &= E[(W(s) + W(t) - W(s))W(s)] = E[W(s)^2] \\
&+ E[(W(t) - W(s))W(s)] = s + E[W(t) - W(s)]E[W(s)] = s + 0 = \min\{t, s\}
\end{aligned}$$

Για το παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήθηκε η ανεξαρτησία των $W(t) - W(s)$ και $W(s) = W(s) - W(0)$ (βλέπε ιδιότητα 3).

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η τυπική κίνηση Brown μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών. Από την συνέχεια της W για μια μικρή χρονική στιγμή h μπορούμε να εκτιμήσουμε την αλλαγή του W από την στιγμή t στην $t + h$ με την παρακάτω εξίσωση:

$$W(t + h) - W(t) = Y(t + h)\sqrt{h}$$

όπου $Y(t)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια διωνυμική κατανομή. Θεωρούμε το διάστημα $[0, T]$ το οποίο το χωρίζουμε σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{T}{n}$. Τότε έχουμε:

$$W(t) = \sum_{i=1}^n [W(ih) - W((i-1)h)] = \sum_{i=1}^n Y(ih)\sqrt{h} = \sqrt{T} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y(ih) \right]$$

Ισχύει $E[Y(ih)] = 0$ συνεπώς η μέση τιμή της παραπάνω σχέσης είναι :

$$E \left[\sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y(ih) \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E(Y(ih)) = 0$$

Παρομοίως για την διακύμανση ισχύει $Var[Y(ih)] = 1$ συνεπώς :

$$Var \left[\sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y(ih) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = 1$$

Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι η τυπική κίνηση Brown παράγεται προσεγγιστικά από ένα άθροισμα ανεξαρτήτων διωνυμικών μεταβλητών με μέση τιμή 0 και διακύμανση h . Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Y(ih)$$

προσεγγίζει την κανονική κατανομή, έστω Z . Συνεπώς έχουμε:

$$W(T) = \sqrt{T}Z(T)$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $W(T)$ προσεγγίζεται από μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διακύμανση T . Στον στοχαστικό λογισμό η $W(t)$ μπορεί να γραφτεί με την μορφή ολοκληρώματος ως:

$$W(T) = \int_0^T dW(t) \quad (2.1)$$

όπου το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται **στοχαστικό ολοκλήρωμα**.

Εάν αντικαταστήσουμε το h με dt και το W με $dW(t)$ τότε έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$dW(t) = Z(t)\sqrt{dt}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι σε μικρές χρονικές περιόδους οι αλλαγές της τιμής της διαδικασίας κατανομονται ομοιόμορφα με διακύμανση η οποία είναι ανάλογη της εκάστοτε χρονικής περιόδου.

2.4.1 Ιδιότητες της κίνησης Brown $W(t)$

Χρησιμοποιώντας την διωνυμική προσέγγιση θα μελετήσουμε δυο σημαντικές ιδιότητες της κίνησης Brown. Ιδιαίτερα θα παρουσιάσουμε την **τετραγωνική κύμανση** μιας σ.δ. $\{W(t)\}$ με $a \leq t \leq b$ (βλέπε [16]).

Ορισμός 2.5

Χωρίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Η τετραγωνική κύμανση μιας σ.δ. $\{W(t)\}$ με $a \leq t_i \leq b, i = 1, \dots, n$ ορίζεται ως:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 = \int_a^b [dW(t)]^2$$

με την προϋπόθεση ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Ιδιαίτερα στην περίπτωση μιας κίνησης Brown έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [Z(ih) - Z((i-1)h)]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (Y_{ih}\sqrt{h})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Y_{ih}^2 h = T < \infty$$

Παράδειγμα 2.5

Έχοντας ότι η W είναι μια τυπική κίνηση Brown θα δείξουμε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W(ih) - W((i-1)h)]^4 = 0$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W(ih) - W((i-1)h)]^4 \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (Y_{ih} \sqrt{h})^4 \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n Y_{ih}^4 h^2 \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n h^2 = \frac{T^2}{n^2} \end{aligned}$$

Επομένως ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W(ih) - W((i-1)h)]^4 = 0$$

Η ολική κύμανση είναι ίση με

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |Y_{ih}| \sqrt{h} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{h} = \sqrt{T} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{T} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση Brown μετακινείται ταχύτατα στο διάστημα $[0, T]$ με αποτέλεσμα να περνάει από το αρχικό της σημείο άπειρες φορές.

Στις επόμενες ενότητες θα παρουσιάσουμε ειδικές περιπτώσεις της κίνησης Brown. Ας ξεκινήσουμε με την αριθμητική κίνηση Brown.

2.5 Αριθμητική Κίνηση Brown

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι σε μια τυπική κίνηση Brown η $dW(t)$ έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση ίση με 1. Μπορούμε να το γενικεύσουμε έτσι ώστε η μέση τιμή να μπορεί να είναι και μη-μηδενική και η διακύμανση να παίρνει αυθαίρετες τιμές. Ορίζουμε την $X(t)$ ως εξής:

$$X(t+h) - X(t) = ah + \sigma Y(t+h)\sqrt{h}$$

όπου $Y(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή από μια διωνυμική (binomial) κατανομή. Ο όρος ah ονομάζεται τάση ενώ ο όρος $\sigma\sqrt{h}$ ονομάζεται θόρυβος. Χωρίζουμε το διάστημα $[0, T]$ σε n υποδιαστήματα μεγέθους $h = \frac{T}{n}$. Τότε:

$$X(T) - X(0) = \sum_{i=1}^n \left(a\frac{T}{n} + \sigma Y(ih) \sqrt{\frac{T}{n}} \right) = aT + \sigma \left(\sqrt{T} \sum_{i=1}^n \frac{Y(ih)}{\sqrt{n}} \right)$$

Με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα (κ.ο.θ) η

$$\sqrt{T} \sum_{i=1}^n \frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$$

προσεγγίζει μια κανονική κατανομή (normal) με μέση τιμή 0 και διακύμανση T . Ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε:

$$X(T) - X(0) = aT + \sigma W(t)$$

όπου W είναι η τυπική κίνηση Brown. Η стоχαστική διαφορική μορφή της παραπάνω έκφρασης είναι:

$$dX(t) = adt + \sigma dW(t) \tag{2.2}$$

Οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με $t \geq 0$ ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται **αριθμητική κίνηση Brown**. Παρατηρούμε ότι

$$E(X(t) - X(0)) = at$$

και

$$\text{Var}(X(T) - X(0)) = \text{Var}(at + \sigma Z(t)) = \sigma^2 t.$$

Η μεταβλητή α ονομάζεται **στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου** και η σ^2 **στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου**. Η διαφορά $X(t) - X(0)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή at και διακύμανση $\sigma^2 t$, συνεπώς η $X(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $at + X(0)$ και διακύμανση $\sigma^2 t$. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα όσο αφορά την αριθμητική κίνηση Brown.

Παράδειγμα 2.6

Έστω $X(t)$ με $t \geq 0$ μια αριθμητική κίνηση Brown με τάση α και μεταβλητότητα σ . Θα δείξουμε ότι $X(t) = X(a) + \alpha(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}Z(t)$, όπου Z είναι μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.

Πράγματι χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1) έχουμε ότι

$$X(t) - X(a) = \alpha(t-a) + \sigma\sqrt{t-a}Z(t)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η $X(t)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη με μέση τιμή η οποία ίση με $X(a) + \alpha(t-a)$ και διακύμανση $\sigma^2(t-a)$.

Παράδειγμα 2.7

Έστω $X(t)$ με $t \geq 0$ μια αριθμητική κίνηση Brown έτσι ώστε $X(30) = 2$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X(34)) < 0$ στην περίπτωση που η τάση και η μεταβλητότητα είναι ίση με 0.435 και 0.75 αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός της παραπάνω πιθανότητας θα γίνει με χρήση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οπότε θα υπολογίσουμε την μέση τιμή και διακύμανση της $X(34)$. Έχουμε ότι:

$$E[X(34)] = X(30) + \alpha(34-30) = 2 + 0.435 \times 4 = 3.74$$

και

$$Var[X(34)] = \sigma^2(t-a) = 0.75^2 \sqrt{34-30} = 1.5$$

$$\text{Άρα } P(X(34)) < 0 = P\left(Z < \frac{0-3.74}{1.5}\right) = N(Z < -2.49) = 0.006387$$

Παράδειγμα 2.8

Με βάση την παρακάτω αριθμητική κίνηση Brown θα υπολογίσουμε την τάση α και την μεταβλητότητα σ :

$$dX(t) = 0.4dt + 0.8dW(t)$$

Είναι προφανές ότι η τάση είναι η στιγμιαία μέση τιμή ανά μονάδα χρόνου η οποία είναι ίση με $\alpha = 0.4$ και η μεταβλητότητα είναι η

στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου που ισούται με $\sigma = 0.8^2 = 0.64$

2.5.1 Παρατηρήσεις

Αξιζει να αναφέρουμε μερικές παρατηρήσεις για την (2.2) :

- ✓ Η $X(t)$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη
- ✓ Ο τυχαίος παράγοντας $dW(t)$ πολλαπλασιάζεται με έναν συντελεστή κλίμακας ο οποίος μας επιτρέπει να αλλάξουμε την διακύμανση
- ✓ Ο όρος adt προσθέτει μια μη-τυχαία τάση στην διαδικασία. Η προσθήκη adt στην διαδικασία είναι ισοδύναμη με την προσθήκη μιας τάσης a ανά μονάδα χρόνου στην $X(0)$.

Θα συνεχίσουμε με ένα ακόμα παράδειγμα και στην συνέχεια θα προχωρήσουμε στην διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Παράδειγμα 2.9

Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα η $X(2)$ να είναι ανάμεσα στο 0.1 και 0.5 όταν η $X(t)$ με $t \geq 0$ είναι μια αριθμητική κίνηση Brown η οποία αρχίζει από το 0 με $\alpha = 0.2$ και $\sigma^2 = 0.125$.

Έχουμε ότι η $X(2)$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη (βλέπε πρώτη παρατήρηση) με μέση τιμή $\alpha T = 0.4$ και διακύμανση $\sigma^2 T = 0.125 \times 2 = 0.25$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$\begin{aligned} P(0.1 < X(2) < 0.5) &= N\left(\frac{0.5 - 0.4}{0.5}\right) - N\left(\frac{0.1 - 0.4}{0.5}\right) = 0.57926 - 0.274253 \\ &= 0.305007 \end{aligned}$$

2.6 Η Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Η αξία ενός εμπορεύματος δεν είναι πάντα σταθερή. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι καθώς αλλάζει η αξία του εμπορεύματος υπάρχει μια τάση η αξία αυτή να πλησιάζει στην μέση τιμή. Όταν η αξία αλλάξει προς μια οποιαδήποτε κατεύθυνση τότε μακροπρόθεσμα η αξία αυτή θα επιστρέψει στην μέση τιμή. Συνεπώς ένα μοντέλο μέσης αναστροφής έχει ποιο οικονομική λογική από την αριθμητική κίνηση Brown. Αυτή η αναστροφή μπορεί να ενσωματωθεί στην (2.2) εάν τροποποιήσουμε την τάση a . Έτσι η (2.2) γίνεται:

$$dX(t) = \lambda(a - X(t))dt + \sigma dW(t) \quad (2.3)$$

όπου α είναι το μακροχρόνιο σημείο ισορροπίας (ή αλλιώς η μέση τιμή όπου η $X(t)$ έχει την τάση να επιστρέφει), σ είναι η μεταβλητότητα, λ είναι η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει η $X(t)$ στο σημείο ισορροπίας και $W(t)$ είναι η τυπική κίνηση Brown. Από την εξίσωση (2.3), η λύση της οποίας είναι η (2.3α) (βλέπε αμέσως μετά), προκύπτει η σ.δ ($X(t), t \in \mathbb{R}^+$) γνωστή ως **Ornstein-Uhlenbeck**.

Η λύση της (2.3) έχει ως εξής:

Θέτουμε $Y(t) = X(t) - \alpha$. Έτσι έχουμε:

$$dY(t) = -\lambda Y(t)dt + \sigma dW(t)$$

$$dY(t) + \lambda Y(t)dt = \sigma dW(t)$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί ως:

$$d[e^{\lambda t} Y(t)] = e^{\lambda t} \sigma dW(t)$$

Ολοκληρώνοντας από το 0 έως το t παίρνουμε το παρακάτω:

$$e^{\lambda t} Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dW(s)$$

$$Y(t) = e^{-\lambda t} Y(0) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW(s)$$

Με όρους του X η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + \alpha(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW(s). \quad (2.3\alpha)$$

Μια άλλη ειδική περίπτωση της κίνησης Brown είναι η γεωμετρική κίνηση Brown την οποία θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα.

2.7 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε την αριθμητική κίνηση Brown ή οποία είναι μια επέκταση της κίνησης Brown. Όμως η αριθμητική κίνηση Brown έχει δυο βασικά μειονεκτήματα τα οποία είναι:

- Η $X(t)$ μπορεί να είναι αρνητική συνεπώς είναι ένα φτωχό μοντέλο για τιμές μετοχών.
- Η μέση τιμή και η διακύμανση της μεταβολής σε όρους δολαρίου είναι ανεξάρτητες από την τιμή της μετοχής. Στην πράξη όταν η τιμή μιας μετοχής διπλασιάζεται θα περιμένουμε

τόσο η αναμενόμενη απόδοση του δολαρίου όσο και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων να διπλασιαστεί.

Αυτά τα μειονεκτήματα όπως και άλλα μπορούν να εξαλειφτούν με την γεωμετρική κίνηση Brown. Όταν η τάση και η μεταβλητότητα σε μια αριθμητική κίνηση Brown είναι συναρτήσεις του $X(t)$ τότε η παρακάτω στοχαστική μορφή

$$dX(t) = \alpha(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

ονομάζεται **διαδικασία Itô**. Ποιο συγκεκριμένα εάν $\alpha(X(t)) = \alpha X(t)$ και $\sigma(X(t)) = \sigma X(t)$ τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως **γεωμετρική κίνηση Brown** και μας δείχνει ότι η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας των περιουσιακών στοιχείων είναι ομοιόμορφα κατανομημένη με στιγμιαία μέση τιμή α και στιγμιαία διακύμανση σ^2 .

Παράδειγμα 2.10

Θα υπολογίσουμε την στιγμιαία μέση τιμή και διακύμανση της παρακάτω γεωμετρικής κίνησης Brown:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = 0.215dt + 0.342dW(t)$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι $\alpha = 0.215$ και $\sigma = 0.342$. Συνεπώς η στιγμιαία μέση τιμή ισούται με $\alpha = 0.215$ και η στιγμιαία διακύμανση με $\sigma^2 = 0.342^2 = 0.116964$

Παράδειγμα 2.11

Δίνεται μια γεωμετρική κίνηση Brown με τάση 0.10. Για $h = \frac{1}{365}$ η αναλογία θορύβου προς την τάση είναι 22.926 και θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση σ .

Έχουμε $\frac{\sigma\sqrt{h}}{\alpha h} = 22.926$. Αντικαθιστώντας $\alpha = 0.10$ και $h = \frac{1}{365}$ προκύπτει ότι $\sigma = 0.12$.

2.8 Το Μέτρο του Ουδετέρου Κινδύνου και το Θεώρημα του Girsanov

Θεωρούμε μια μετοχή η οποία πληρώνει μέρισμα στην απόδοση δ . Η πραγματική διαδικασία της τιμής της μετοχής η οποία παρατηρείται στην παγκόσμια αγορά δίνεται από την εξής διαδικασία:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (a - \delta)dt + \sigma dW(t) \quad (2.4)$$

όπου $dW(t)$ είναι το απροσδόκητο μερίδιο από το απόθεμα της μετοχής και $W(t)$ είναι μια martingale υπό την πραγματική κατανομή πιθανότητας.

Για την μέτρηση του μηδενικού κινδύνου θα χρειαστούμε μια διαφορετική εκδοχή της παραπάνω διαδικασίας. Δίνουμε τον εξής ορισμό (βλέπε [24]).

Ορισμός 2.6

Το **μέτρο μηδενικού κινδύνου** Q (ή αλλιώς μέτρο ισορροπίας) είναι ένα μέτρο πιθανότητας έτσι ώστε κάθε τιμή της μετοχής να είναι ακριβώς ίση με την προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή της μετοχής υπό το μέτρο αυτό.

Για να γίνει ποιο κατανοητό το μέτρο μηδενικού κινδύνου θα δώσουμε και έναν μαθηματικό ορισμό (βλέπε [24]).

Ορισμός 2.7

Έστω η διαδικασία

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (a - \delta)dt + \sigma dW(t)$$

Τότε το μέτρο μηδενικού κινδύνου Q είναι η τροποποιημένη κατανομή πιθανότητας υπό την οποία το τυχαίο μέρος της παραπάνω διαδικασίας περιλαμβάνει μια κίνηση Brown \tilde{W} που είναι martingale.

Για να βρούμε την \tilde{W} και την σχετική πιθανότητα Q θεωρούμε ότι

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \frac{a-r}{\sigma}t$$

Ένα αποτέλεσμα γνωστό ως το **θεώρημα του Girsanov** ισχυρίζεται την ύπαρξη ενός μοναδικού μέτρου ουδετέρου κινδύνου Q σύμφωνα με το οποίο η $\tilde{W}(t)$ είναι τυπική κίνηση Brown και η \tilde{W} είναι martingale υπό την Q . Εάν διαφοροποιήσουμε και αναδιατάξουμε την \tilde{W} τότε έχουμε:

$$dW(t) = d\tilde{W}(t) - \frac{a-r}{\sigma}dt$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω εξίσωση στην (2.4) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \delta)dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται ως **διαδικασία της τιμής μηδενικού κινδύνου**. Παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα της διαδικασίας της τιμής μηδενικού κινδύνου είναι ίδια με την μεταβλητότητα της διαδικασίας της πραγματικής τιμής.

Θα συνεχίσουμε με μερικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση του μέτρου μηδενικού κινδύνου.

Παράδειγμα 2.12

Η διαδικασία της πραγματικής τιμής μιας μετοχής η οποία πληρώνει μέρισμα στην απόδοση δ είναι

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = 0.09dt + \sigma dW(t)$$

Η αντίστοιχη διαδικασία της τιμής μηδενικού κινδύνου είναι

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = 0.05dt + \sigma d\tilde{W}(t)$$

Θα υπολογίσουμε την απόδοση δ και την τάση α εάν το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι $r = 0.08$.

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $r - \delta = 0.05$ και $\alpha - \delta = 0.09$. Για $r = 0.08$ έχουμε ότι $\delta = 0.03$ και κατά συνέπεια προκύπτει ότι $\alpha = 0.12$.

Παράδειγμα 2.13

Η διαδικασία της πραγματικής τιμής μιας μετοχής η οποία πληρώνει μέρισμα είναι:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = 0.05dt + 0.12\tilde{W}(t)$$

Γνωρίζοντας ότι το ασφάλιστρο κινδύνου της μετοχής είναι 0.14 θα υπολογίσουμε την τάση της διαδικασίας της πραγματικής τιμής.

Έχουμε ότι $\alpha - r - (\alpha - \delta) = -0.05$ και $\alpha - r = 0.14$. Συνεπώς η τάση ισούται με:

$$\alpha - \delta = 0.14 + 0.05 = 0.19$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογή Στοχαστικών Μεθόδων στις Αναλογιστικές Συναρτήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε δυο στοχαστικές προσεγγίσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της τυχαιότητας του τόκου. Ιδιαίτερα οι δυο αυτές προσεγγίσεις μοντελοποιούν πρώτιστος την ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης και στην συνέχεια μοντελοποιούν την ένταση ανατοκισμού. Βασικές έννοιες όπως η αναμενόμενη τιμή, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής ασυμμετρίας (ή αλλιώς λοξότητα) της παρούσας αξίας μίας ληξιπρόθεσμης ράντας θα παρουσιαστούν με την μορφή παραδειγμάτων και την χρήση πινάκων για την καλύτερη κατανόηση τους. Θα χρησιμοποιήσουμε γνωστές στοχαστικές διαδικασίες ώστε να μπορέσουμε να αποφανθούμε ποια από τις δύο προσεγγίσεις δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Η έμμεση συμπεριφορά της έντασης ανατοκισμού υπό την θεώρηση των δύο προσεγγίσεων θα διερευνηθεί μελετώντας την αναμενόμενη τιμή της έντασης ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης.

3.1 Εισαγωγή - Παρούσα Αξία

Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε πως θα κατασκευάσουμε δύο συναρτήσεις F_{min} και F_{max} έτσι ώστε οι ανισότητες

$$F_{min}(t) \leq P[Z_n \leq t] \leq F_{max} \quad (3.1)$$

$$F_{min}(t) \leq P[\tilde{Z}_n \leq t] \leq F_{max} \quad (3.2)$$

να ισχύουν για κάθε $t \geq 0$

Έστω F_1, F_2, \dots, F_n οι αντίστοιχες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών των V_1, V_2, \dots, V_n . Τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_{Z_n} της $Z_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ με την βοήθεια της (3.1) περιορίζεται στην παρακάτω μορφή:

$$F_{min}(t) = \sup_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{S}(t)} \max \left\{ \sum_{i=0}^n P[V_i < v_i] - (n-1), 0 \right\}$$

και

$$F_{max}(t) = \inf_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Sigma(t)} \min \left\{ \sum_{i=0}^n F_i(v_i), 1 \right\}$$

όπου

$$\Sigma(t) = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_1 + v_2 + \dots + v_n = t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Τα όρια στις σχέσεις (3.1) και (3.2) είναι τα καλύτερα δυνατά όρια των συναρτήσεων κατανομών των Z_n και \tilde{Z}_n όταν δεν έχουμε υποθέσει καμία εξάρτηση μεταξύ των V_1, V_2, \dots, V_n . Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [21].

Στην περίπτωση όμως που υποθέσουμε κάποια μορφή εξάρτησης μεταξύ των V_1, V_2, \dots, V_n τότε τα όρια θα αλλάξουν και πιο συγκεκριμένα θα βελτιωθούν και θα γίνουν πιο ακριβή. Έστω ότι υπάρχει μια πολυμεταβλητή αθροιστική συνάρτηση κατανομής G έτσι ώστε:

$$G(v_1, v_2, \dots, v_n) \leq P[V_1 \leq v_1, V_2 \leq v_2, \dots, V_n \leq v_n] \quad \text{για κάθε } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

και μια από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής \bar{H} έτσι ώστε:

$$P[V_1 > v_1, V_2 > v_2, \dots, V_n > v_n] \geq \bar{H}(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \text{για κάθε } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

Τότε (βλέπε αναλυτικά στο [10]) οι ανισότητες

$$\sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Sigma(t)} G(x_1, \dots, x_n) \leq F_{Z_n}(t) \leq 1 - \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Sigma(t)} \bar{H}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.5)$$

ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Επίσης υποθέτουμε ότι οι σχέσεις (3.3) και (3.4) ικανοποιούνται από τις

$$G(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n F_i(v_i)$$

και

$$\bar{H}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n (1 - F_i(v_i)).$$

Σε αυτήν την περίπτωση τα V_i λέμε ότι είναι **POD (Positive Orthant Dependent)**. Αυτό για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής G σημαίνει ότι η πιθανότητα $V_i \leq v_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι μικρότερη από την αντίστοιχη πιθανότητα υπό την υπόθεση ότι τα V_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ομοίως για την συνάρτηση κατανομής \bar{H} σημαίνει ότι η πιθανότητα $V_i \geq v_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι μικρότερη από την αντίστοιχη πιθανότητα υπό την υπόθεση ότι τα V_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

3.2 Παρούσα Αξία

Έστω δ_s η ένταση ανατοκισμού και $\Psi(t)$ η συσσωρευμένη αξία την χρονική στιγμή t . Τότε

$$\Psi(t) = \int_0^t \delta_s ds \quad (3.6)$$

Η τυχαία παρούσα αξία την χρονική στιγμή $t = 0$ μιας νομισματικής μονάδας που πληρώνει την χρονική στιγμή t υπολογίζεται ως $e^{-\Psi(t)}$. Αν η $\Psi(t)$ ακολουθεί την λογαριθμική κατανομή τότε η παρούσα αξία ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή (Lognormal) με παραμέτρους $E[-\Psi(t)]$ και $V[\Psi(t)]$ και η ροπή m -τάξης ισούται με:

$$E[(e^{-\Psi(t)})^m] = E[e^{-m\Psi(t)}] = e^{\{-m \cdot E[-\Psi(t)] + 5m^2 \cdot V[\Psi(t)]\}} \quad (3.7)$$

Ο υπολογισμός της σχέσης (3.7) δίνεται αναλυτικά στο [4].

Ας θεωρήσουμε ως V_t την παρούσα αξία την χρονική στιγμή 0 μιας ποσότητας α_t που πληρώνεται την χρονική στιγμή 1. Η στοχαστική προεξοφλημένη αξία την χρονική στιγμή $t = 0$ για πληρωμές ίσες με α_t που έγιναν τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, \dots, n$ δίνεται από:

$$Z_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (3.8)$$

Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι μια ασφαλιστική εταιρία πρέπει να πληρώσει ποσά ύψους α_t τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, \dots, n$. Τότε με την βοήθεια της (3.8) μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία αυτών των νετερμινιστικών πληρωμών. Τα V_i που περιέχονται στην (3.8) είναι συσχετισμένα έτσι ώστε η υπόθεση ανεξαρτησίας των αθροισμάτων της Z_n να μην είναι ρεαλιστική. Ως συνέπεια, μία ακριβής έκφραση για τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της Z_n απαιτεί την γνώση της από κοινού κατανομής του τυχαίου διανύσματος (V_1, V_2, \dots, V_n) η οποία γενικά δεν είναι διαθέσιμη. Για να καταστρατηγηθεί αυτό το πρόβλημα η Z_n θα προσεγγιστεί μέσω μια τυχαίας μεταβλητής \tilde{Z}_n . Εάν συμβολίσουμε με F_1, F_2, \dots, F_n τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής των V_1, V_2, \dots, V_n τότε η \tilde{Z}_n δίνεται από :

$$\tilde{Z}_n = F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) + \dots + F_n^{-1}(U) \quad (3.9)$$

όπου η U είναι μια τυχαία ομοιόμορφη μεταβλητή και τα F_i^{-1} είναι οι συναρτήσεις ποσοστημορίων που σχετίζονται με τα F_i . Επίσης ισχύει ότι $EZ_n = E\tilde{Z}_n$ και $E\max\{Z_n - d, 0\} \leq E\max\{\tilde{Z}_n - d, 0\}$, για κάθε $d \geq 0$.

Στην ενότητα 3.3 θα χρησιμοποιήσουμε δυο στοχαστικές διαδικασίες Gaussian για να μοντελοποιήσουμε την ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης ενώ στην ενότητα 3.4 θα χρησιμοποιήσουμε τρεις στοχαστικές Gaussian διαδικασίες για να μοντελοποιήσουμε την συσσωρευμένη συνάρτηση της έντασης ανατοκισμού.

3.3 Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού Συσσωρευμένης Συνάρτησης

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε δύο πολύ γνωστές στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες είναι:

- ❖ Στοχαστική διαδικασία *Wiener* με συντελεστή μετατόπισης δ
- ❖ Στοχαστική διαδικασία *Ornstein-Uhlenbeck* με τον ίδιο συντελεστή μετατόπισης δ

3.3.1 Στοχαστική Διαδικασία Wiener

Έστω $\Psi(t)$ η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από τη σχέση:

$$\Psi(t) = \delta \cdot t + \sigma \cdot W_t \quad (3.10)$$

όπου $\sigma \geq 0$ η μεταβλητότητα, $\delta \in \mathbb{R}$ ο συντελεστής μετατόπισης και W_t μια διαδικασία Wiener. Μπορεί ναδειχθεί ότι η μέση τιμή ισούται με:

$$E[\Psi(t)] = \delta \cdot t \quad (3.11)$$

και η συνδιακύμανση με:

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \sigma^2 \cdot \min(s, t) \quad (3.12)$$

Οι σχέσεις (3.11) και (3.12) υπολογίζονται αναλυτικά στο [15].

3.3.2 Στοχαστική Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Έστω $\Psi(t)$ η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από τη σχέση:

$$\Psi(t) = \delta \cdot t + \sigma \cdot X(t) \quad (3.13)$$

όπου $\delta \in \mathbb{R}$ ο συντελεστής μετατόπισης, $X(t)$ είναι μια διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck με παραμέτρους $\alpha \geq 0$ και $\sigma \geq 0$ και ισχύει $X(0) = 0$. Επιπλέον

$$dX(t) = -\alpha \cdot X(t)dt + \sigma dW_t \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του [5] μπορούμε να πάρουμε την μέση τιμή και την συνδιακύμανση της $\Psi(t)$ όπως ορίστηκε στην (3.13) και δίνονται από:

$$E[\Psi(t)] = \delta \cdot t \quad (3.15)$$

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \cdot (e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)}), \quad s \leq t \quad (3.16)$$

ή αν θέσουμε

$$\rho^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \quad (3.17)$$

τότε η συνδιακύμανση γράφεται ως:

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \rho^2 \cdot (e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)}), \quad s \leq t \quad (3.18)$$

3.4 Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού

Μια δεύτερη προσέγγιση όσο αφορά την μοντελοποίηση της τυχαιότητας του επιτοκίου είναι να μοντελοποιήσουμε την ένταση ανατοκισμού δ_s . Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τρεις διαδικασίες οι οποίες είναι:

- ❖ Στοχαστική διαδικασία *White Noise* με μέση τιμή δ και διακύμανση σ^2
- ❖ Στοχαστική διαδικασία *Wiener* με συντελεστή μετατόπισης δ
- ❖ Στοχαστική διαδικασία *Ornstein-Uhlenbeck* με τον ίδιο συντελεστή μετατόπισης δ .

Οι τρεις αυτές στοχαστικές διαδικασίες έχουν οριστεί έτσι ώστε να αρχίζουν από το σημείο δ και όχι από την αρχή των αξόνων.

3.4.1 Διαδικασία *White Noise* (Λευκός θόρυβος)

Ας υποθέσουμε ότι η ένταση ανατοκισμού δ_t είναι μια τυχαία μεταβλητή ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$ να ισχύει:

$$\delta_t \sim N(\delta, \sigma^2) \quad (3.19)$$

Η σ.δ ($\delta_t, t \in \mathbb{R}^+$) ονομάζεται διαδικασία *White Noise* με μέση τιμή δ και διακύμανση σ^2 . Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι οι εντάσεις ανατοκισμού μοντελοποιούνται από ανεξάρτητες κανονικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η διαδικασία *White Noise* είναι η παράγωγος της διαδικασίας *Wiener*

(βλέπε αναλυτικά [5] και [10]). Τότε η $\Psi(t)$ (βλέπε σχέση (3.6)) είναι διαδικασία Wiener με μέση τιμή

$$E[\Psi(t)] = \delta \cdot t \quad (3.20)$$

και συνδιακύμανση

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \sigma^2 \cdot \min(s, t) \quad (3.21)$$

(Οι σχέσεις (3.20) και (3.21) υπολογίζονται αναλυτικά στο [5]).

3.4.2 Διαδικασία Wiener

Έστω ότι η ένταση ανατοκισμού είναι η τυχαία μεταβλητή μιας διαδικασίας Wiener. Η ένταση ανατοκισμού μπορεί να οριστεί ως:

$$\delta_t = \delta + \sigma \cdot W_t, \quad \sigma \geq 0 \quad (3.22)$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της ενότητας 3.3.1 μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή ως:

$$E[\delta_t] = \delta \quad (3.23)$$

και την συνδιακύμανση ως:

$$Cov[\delta_s, \delta_t] = \sigma^2 \cdot \min(s, t) \quad (3.24)$$

Σύμφωνα όμως με από ορισμό της $\Psi(t)$ (βλέπε σχέση (3.6)) προκύπτει ότι η $\Psi(t)$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη με μέση τιμή:

$$E[\Psi(t)] = \delta \cdot t \quad (3.25)$$

και συνδιακύμανση

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \int_0^s \int_0^t cov[\delta_u, \delta_v] du dv \quad (3.26)$$

Κάνοντας τις πράξεις με τα ολοκληρώματα τελικά καταλήγουμε στην τελική μορφή της συνδιακύμανσης η οποία είναι η:

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \sigma^2 \left(s^2 \cdot \frac{t}{2} - \frac{s^3}{6} \right) \quad s \leq t \quad (3.27)$$

3.4.3 Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Όσο αφορά την τρίτη μοντελοποίηση μας θα θεωρήσουμε ότι η ένταση ανατοκισμού είναι μια διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και την ορίζουμε με την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$d\delta_t = -\alpha(\delta_t - \delta) \cdot dt + \sigma dW_t \quad \alpha > 0 \quad \sigma \geq 0 \quad (3.28)$$

με αρχική τιμή $\delta_0 = 0$ (βλέπε αναλυτικά [5]). Μπορεί να δειχθεί ότι

$$E[\delta_t] = \delta \quad (3.29)$$

και ότι η συνδιακύμανση ισούται με

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \cdot (e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)}), \quad s \leq t \quad (3.30)$$

Πάλι μπορούμε να θέσουμε $\frac{\sigma^2}{2\alpha} = \rho^2$ (βλέπε σχέση (3.16))

Συνεπώς η ένταση ανατοκισμού για την συσσωρευμένη συνάρτηση (δηλαδή η $\Psi(t)$) είναι μια διαδικασία Gaussian με μέση τιμή:

$$E[\Psi(t)] = \delta \cdot t \quad (3.31)$$

και συνδιακύμανση ίση με

$$Cov[\Psi(s), \Psi(t)] = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \min(s, t) + \frac{\sigma^2}{3\alpha^3} [-2 + 2e^{-as} + 2e^{-at} - e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)}] \quad (3.32)$$

Ο υπολογισμός των σχέσεων (3.31) και (3.32) δίνεται αναλυτικά στο [19]

Τα δύο μοντέλα στην ενότητα 3.3 και τα τρία μοντέλα στην ενότητα 3.4 έχουν οριστεί έτσι ώστε η αναμενόμενη τιμή της έντασης ανατοκισμού για την συσσωρευμένη συνάρτηση να είναι ίδια ($E[\Psi(t)] = \delta \cdot t$). Αυτό που αλλάζει στα μοντέλα είναι η διακύμανση της $\Psi(t)$ και το αναμενόμενο αποτέλεσμα σε μια δεδομένη κατάσταση.

3.5 Ληξιπρόθεσμες Ράντες

Έστω μια ληξιπρόθεσμη ράντα n -ετών και $a_{n\uparrow}$ η παρούσα αξία n ίσων πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας που γίνονται στο τέλος των επόμενων n ετών. Τότε ισχύει

$$a_{n\uparrow} = \sum_{t=1}^n e^{-\Psi(t)} \quad (3.33)$$

Για να έχουν όλες οι ροπές την κανονική τους ερμηνεία θεωρούμε ότι οι τρεις πρώτες ροπές έχουν υπολογιστεί με την σωστή κατανομή πιθανότητας. Η αναμενόμενη τιμή όμως θα είναι διαφορετική από την αναμενόμενη τιμή της ράντας στην αγορά που προϋποθέτει ότι η εν λόγω τιμή να είναι σε ισορροπία για οποιαδήποτε αγορά (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [7]).

Η αναμενόμενη τιμή της $a_{n\gamma}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E[a_{n\gamma}] = E[\sum_{t=1}^n e^{-\Psi(t)}] = \sum_{t=1}^n E[e^{-\Psi(t)}] \quad (3.34)$$

όπου με την χρήση της σχέσης (3.2) καταλήγουμε ότι

$$E[e^{-\Psi(t)}] = \exp\{-E[\Psi(t)] + 5 \cdot V[\Psi(t)]\} \quad (3.35)$$

Η δεύτερη ροπή και η τρίτη ροπή υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις αντίστοιχα:

$$E[a_{n\gamma}^2] = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n E[e^{-\Psi(t) - \Psi(s)}] \quad (3.36)$$

$$E[a_{n\gamma}^3] = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n E[e^{-\Psi(t) - \Psi(s) - \Psi(r)}] \quad (3.37)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να απλοποιηθεί αν υποθέσουμε ότι οι εκθετικές τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή δηλαδή ότι:

$$e^{-\Psi(t) - \Psi(s) - \Psi(r)} \sim \text{LogNormal}(\mu, \beta) \quad (3.38)$$

Όπου

$$\mu = -E[\Psi(t)] - E[\Psi(s)] - E[\Psi(r)] \quad (3.39)$$

και

$$\beta = V[\Psi(t)] + V[\Psi(s)] + V[\Psi(r)] + 2\text{cov}[\Psi(t), \Psi(s)] + 2\text{cov}[\Psi(t), \Psi(r)] + 2\text{cov}[\Psi(s), \Psi(r)] \quad (3.40)$$

Συνεπώς από την σχέση (3.2) έχουμε:

$$E[e^{-\Psi(t) - \Psi(s) - \Psi(r)}] = \exp\{\mu + 5\beta\} \quad (3.41)$$

3.6 Παραδείγματα

Για να απεικονίσουμε της διαφορετικές προσεγγίσεις και τις διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία θα αξιολογήσουμε τις μέση τιμή, τυπική απόκλιση και την λοξότητα (βλέπε [15] για περισσότερες λεπτομέρειες) για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται μερικές μέσες τιμές για συγκεκριμένες παραμέτρους. Για κάθε στοχαστική διαδικασία έχουμε θέσει δύο τιμές για την **πaráμετρο** δ ($\delta = 0.06$ και $\delta = 0.1$). Για τις στοχαστικές διαδικασίες Wiener και White Noise η **πaráμετρος** σ θα παίρνει τις τιμές 0.01 και 0.02. Για την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck η **πaráμετρος** α έχει τεθεί ίση με 0.17 (βλέπε [6]) ενώ η **πaráμετρος** ρ θα παίρνει τις τιμές 0.01 και 0.02 το οποίο συνεπάγεται ότι η **πaráμετρος** σ θα παίρνει τις τιμές $0.01 \cdot (0.34)^{0.5}$ και $0.02 \cdot (0.34)^{0.5}$ αντίστοιχα (βλέπε [6]).

Θα πρέπει να τονιστεί ότι μια διαδικασία εκτίμησης τιμών κάποιων παραμέτρων από μια βάση δεδομένων που αφορά παρελθοντικά επιτόκια θα δώσει γενικά διαφορετικά αποτελέσματα όσο αφορά τις τιμές των σ , α και ρ . Αυτό εξαρτάται βέβαια από την προσέγγιση που θα χρησιμοποιήσουμε καθώς και από την στοχαστική διαδικασία που θα επιλέξουμε. Εξαιρέση αποτελεί η παράμετρος δ η οποία αναμένουμε να πάρει περίπου την ίδια τιμή σε όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις. Για να βρεθούν τυχόν διαφορές στις δύο προσεγγίσεις θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες τιμές παραμέτρων για όλες τις στοχαστικές διαδικασίες.

Πίνακας 3.1
Αναμενόμενες τιμές της a_{nT}
Ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης

			n				
			5	10	20	30	40
Wiener:	δ	σ					
	.06	.01	4.1920	7.2983	11.3057	13.5061	14.7143
	.06	.02	4.1938	7.3038	11.3202	13.5289	14.7435
	.10	.01	3.7418	6.0118	8.2246	9.0390	9.3387
	.10	.02	3.7433	6.0161	8.2337	9.0511	9.3524

Ένταση ανατοκισμού

Wiener:	δ	σ					
	.06	.01	4.1943	7.3273	11.5925	14.4863	17.0285
	.06	.02	4.2030	7.4217	12.6140	19.5880	48.6888
	.10	.01	3.7437	6.0327	8.3788	9.4388	10.0567
	.10	.02	3.7510	6.1008	8.9232	11.3948	18.0414

Ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης

				<i>n</i>				
				5	10	20	30	40
O-U:	δ	α	ρ					
	.06	.17	.01	4.1915	7.2967	11.3013	13.4991	14.7052
	.06	.17	.02	4.1919	7.2975	11.3027	13.5008	14.7071
	.10	.17	.01	3.7413	6.0106	8.2218	9.0353	9.3346
	.10	.17	.02	3.7417	6.0113	8.2228	9.0364	9.3357
Ένταση ανατοκισμού								
O-U:	δ	α	ρ					
	.06	.17	.01	4.1920	7.3007	11.3221	13.5410	14.7658
	.06	.17	.02	4.1938	7.3135	11.3862	13.6702	14.9531
	.10	.17	.01	3.7417	6.0135	8.2336	9.0548	9.3586
	.10	.17	.02	3.7432	6.0229	8.2703	9.1151	9.4331

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι η μέση τιμή της a_{nT} δεν εξαρτάται από τις διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν ούτε εξαρτάται και από τις παραμέτρους της κάθε διαδικασίας (με εξαίρεση την **παραμέτρο δ**). Η διαδικασία Wiener όμως για $n \geq 20$ παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση μεταξύ των διαφορετικών παραμέτρων.

Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται οι τυπικές αποκλίσεις για την a_{nT} χρησιμοποιώντας τις ίδιες στοχαστικές διαδικασίες με τις ίδιες παραμέτρους. Εδώ παρατηρούμε αρκετά μεγάλες αποκλίσεις τόσο με τις στοχαστικές διαδικασίες όσο και με τις παραμέτρους. Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι αδύνατο να βρούμε σχετικά ίδιες τυπικές αποκλίσεις με την χρήση διαφορετικών μοντέλων.

Πίνακας 3.2
Τυπικές αποκλίσεις της a_{nT}
Ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης

			<i>n</i>				
			5	10	20	30	40
Wiener:	δ	σ					
	.06	.01	.0605	.1342	.2623	.3503	.4053
	.06	.02	.1211	.2687	.5258	.7028	.8137
	.10	.01	.0530	.1058	.1734	.2037	.2160
	.10	.02	.1061	.2118	.3476	.4085	.4332
Ένταση ανατοκισμού							
Wiener:	δ	σ					
	.06	.01	.1251	.5171	1.9640	4.2762	8.6273
	.06	.02	.2515	1.0710	5.1457	27.4239	1111.8356
	.10	.01	.1073	.3880	1.1483	1.9504	2.9114
	.10	.02	.2157	.8019	2.8968	10.1266	240.2379

Ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης

			<i>n</i>					
			5	10	20	30	40	
O-U:	δ	α	ρ					
	.06	.17	.01	.0258	.0457	.0645	.0705	.0724
	.06	.17	.02	.0517	.0913	.1291	.1411	.1448
	.10	.17	.01	.0228	.0368	.0463	.0479	.0482
	.10	.17	.02	.0456	.0736	.0926	.0959	.0964
Ένταση ανατοκισμού								
O-U:	δ	α	ρ					
	.06	.17	.01	.0576	.1968	.5294	.7975	.9767
	.06	.17	.02	.1152	.3952	1.0736	1.6334	2.0169
	.10	.17	.01	.0495	.1495	.3263	.4202	.4610
	.10	.17	.02	.0991	.3001	.6604	.8563	.9433

Παρόμοια αποτελέσματα βλέπουμε και για την λοξότητα που παρουσιάζεται στον πίνακα 3. Υπάρχουν αποκλίσεις και αυτές ολοένα και μεγαλώνουν καθώς αυξάνει το n οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι είναι αδύνατο να βρούμε δύο μοντέλα που να ταυτίζεται η λοξότητα τους σε ίδιο n .

Πίνακας 3.3

Λοξότητα της a_{nT}

Ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης

			<i>n</i>				
			5	10	20	30	40
Wiener:	δ	σ					
	.06	.01	.0481	.0640	.0841	.0963	.1040
	.06	.02	.0963	.1282	.1686	.1932	.2087
	.10	.01	.0530	.0616	.0772	.0844	.0876
	.10	.02	.0946	.1233	.1547	.1693	.1757
Ένταση ανατοκισμού							
Wiener:	δ	σ					
	.06	.01	.1338	.3488	.9732	2.1347	6.5145
	.06	.02	.2690	.7266	2.8689	56.9320	1.3×10^5
	.10	.01	.1311	.3336	.8718	1.7175	4.0382
	.10	.02	.2636	.6940	2.5013	41.5591	1.2×10^5

Ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης

				n				
				5	10	20	30	40
O-U:	δ	α	ρ					
	.06	.17	.01	.0197	.0202	.0185	.0171	.0165
	.06	.17	.02	.0394	.0404	.0370	.0343	.0330
	.10	.17	.01	.0194	.0198	.0183	.0176	.0175
	.10	.17	.02	.0389	.0395	.0366	.0353	.0349
Ένταση ανατοκισμού								
O-U:	δ	α	ρ					
	.06	.17	.01	.0585	.1205	.2157	.2773	.3166
	.06	.17	.02	.1172	.2421	.4379	.5693	.6564
	.10	.17	.01	.0573	.1154	.1961	.2383	.2580
	.10	.17	.02	.1148	.2318	.3977	.4874	.5311

3.7 Συμπεριφορά της Έντασης Ανατοκισμού

Η μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης έχει διαφορετικές επιπτώσεις στην συνάρτηση της παρούσας αξίας καθώς και σε άλλες αναλογιστικές συναρτήσεις από την μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού. Όταν μοντελοποιούμε την ένταση ανατοκισμού, το δ_s ποικίλει με βάση την επιλεγμένη στοχαστική διαδικασία. Στην μοντελοποίηση του $\Psi(t)$ το δ_s ποικίλει έτσι ώστε το $\Psi(t)$ να ακολουθεί την επιλεγμένη στοχαστική διαδικασία. Αυτές οι διαφορές έχουν απεικονιστεί με την τυπική απόκλιση και την λοξότητα (συντελεστής ασυμμετρίας) της $a_{n\tau}$. Ένας άλλος χρήσιμος τρόπος να απεικονιστούν οι διαφορές των δυο προσεγγίσεων είναι να κοιτάξουμε τις δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές της $\Psi(t)$ δοθέντος $\Psi(s)$ και δ_s για $s < t$.

3.7.1 Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού Συσσωρευμένης Συνάρτησης μέσω της Διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck.

Από την σχέση (3.12) έχουμε

$$\begin{aligned}
 E[\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] &= E[\delta \cdot t + X(t) | \delta \cdot t + X(s) = x, \delta_s = \varepsilon] \\
 &= \delta \cdot t + E[X(t) | X(s) = x - \delta \cdot s, \delta_s = \varepsilon] \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Όμως για $s < t$ η $X(t) | X(s)$ είναι ανεξάρτητη από το δ_s οπότε η (3.41) γράφεται ως:

$$E [\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] = \delta \cdot t + E[X(t) | X(s) = x - \delta \cdot s] \quad (3.42)$$

Ο υπολογισμός της σχέσης (3.42) δίνεται αναλυτικά στο [6].

Οπότε εν τέλει καταλήγουμε στην κάτωθι σχέση

$$E[\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] = \delta \cdot t + (x - \delta \cdot s) \cdot e^{-a(t-s)}, \quad s < t \quad (3.43)$$

3.7.2 Μοντελοποίηση της Έντασης Ανατοκισμού μέσω της Διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck

Από την σχέση (3.1) έχουμε

$$\begin{aligned} E [\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] &= E \left[\int_0^t \delta_r dr \mid \int_0^s \delta_r dr = x, \delta_s = \varepsilon \right] \\ &= E \left[\int_0^s \delta_r dr + \int_s^t \delta_r dr \mid \int_0^s \delta_r dr = x, \delta_s = \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Θεωρώντας ότι $\Psi(s) = x$, η (3.44) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} E [\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] &= x + E \left[\int_s^t \delta_r dr \mid \int_0^s \delta_r dr = x, \delta_s = \varepsilon \right] \\ &= x + \int_s^t E[\delta_r | \int_0^s \delta_r dr = x, \delta_s = \varepsilon] \cdot dr \end{aligned} \quad (3.45)$$

Λόγω ανεξαρτησίας των δ_u για $u < s$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$E [\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] = x + \int_s^t E[\delta_r | \delta_s = \varepsilon] \cdot dr \quad (3.46)$$

Επειδή το δ_s ακολουθεί την στοχαστική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [5]) τότε η σχέση (3.46) γράφεται ως:

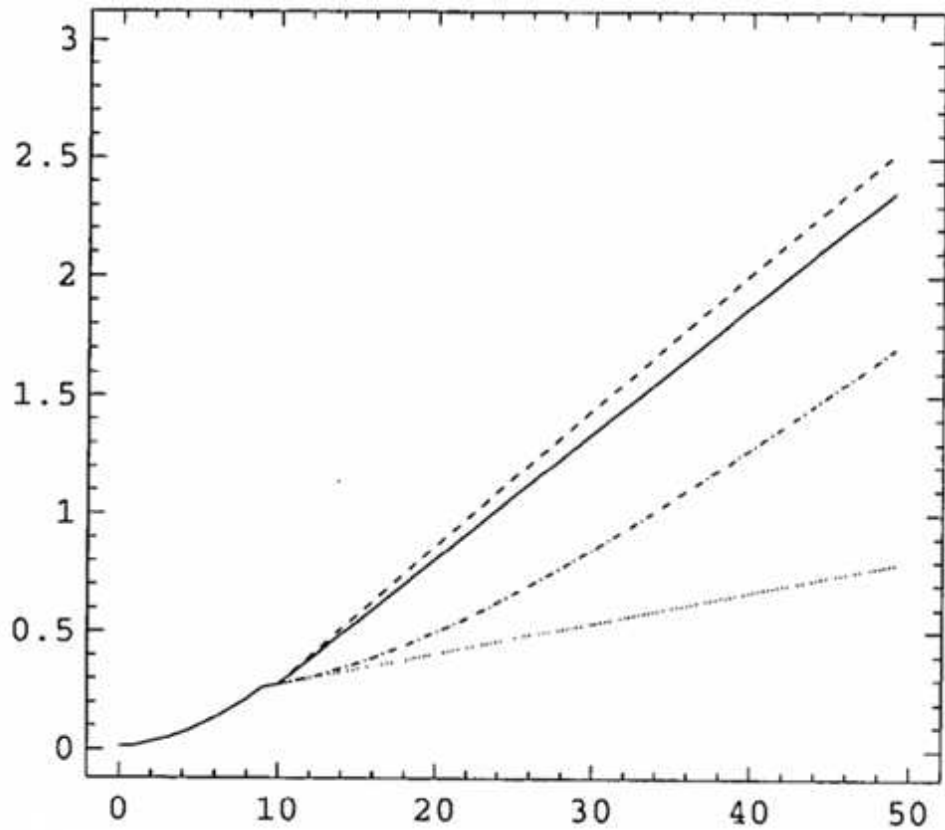
$$\begin{aligned} E [\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon] &= x + \int_s^t \delta + (\varepsilon - \delta) e^{-\alpha(r-s)} dr \\ &= x + \delta(t - s) + (\varepsilon - \delta) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ομοίως βρίσκουμε για την διαδικασία Wiener και Ornstein-Uhlenbeck. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τα παραπάνω αποτελέσματα καθώς και αυτά που παρουσιάστηκαν νωρίτερα.

Process	$E[\Psi(t)]$	$V[\Psi(t)]$	$E[\Psi(t) \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon]$
Ένταση ανατοκισμού για την συσσωρευμένη συνάρτηση			
Wiener	$\delta \cdot t$	$\sigma^2 \cdot t$	$x + \delta(t-s)$
O-U	$\delta \cdot t$	$\rho^2 \cdot (1 - e^{-2\alpha t})$	$\delta \cdot t + (x - \delta \cdot s) \cdot e^{-\alpha(t-s)}$
Ένταση ανατοκισμού			
Wiener	$\delta \cdot t$	$\sigma^2 \cdot t^3/3$	$x + \varepsilon(t-s)$
O-U	$\delta \cdot t$	$\frac{2\rho^2 t}{\alpha} + \frac{\rho^2}{2\alpha} (-3 + 4e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t})$	$x + \delta(t-s) + (\varepsilon - \delta) \left(\frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} \right)$

Στο παραπάνω πίνακα φαίνεται καθαρά και τα αποτελέσματα που αναφέραμε ποιο πάνω δηλαδή ότι οι μέσες τιμές είναι ίδιες για όλα τα διαφορετικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν ενώ οι τυπικές αποκλίσεις διαφέρουν αισθητά. Το εξέχων χαρακτηριστικό του πίνακα 4 είναι το γεγονός ότι όταν μοντελοποιείται η ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης η αναμενόμενη τιμή της $E[\Psi(t)|\Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon]$ δεν εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η δ_s . Αν μοντελοποιηθεί η ένταση ανατοκισμού όμως τότε η αναμενόμενη τιμή της $E[\Psi(t)|\Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon]$ εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η δ_s .

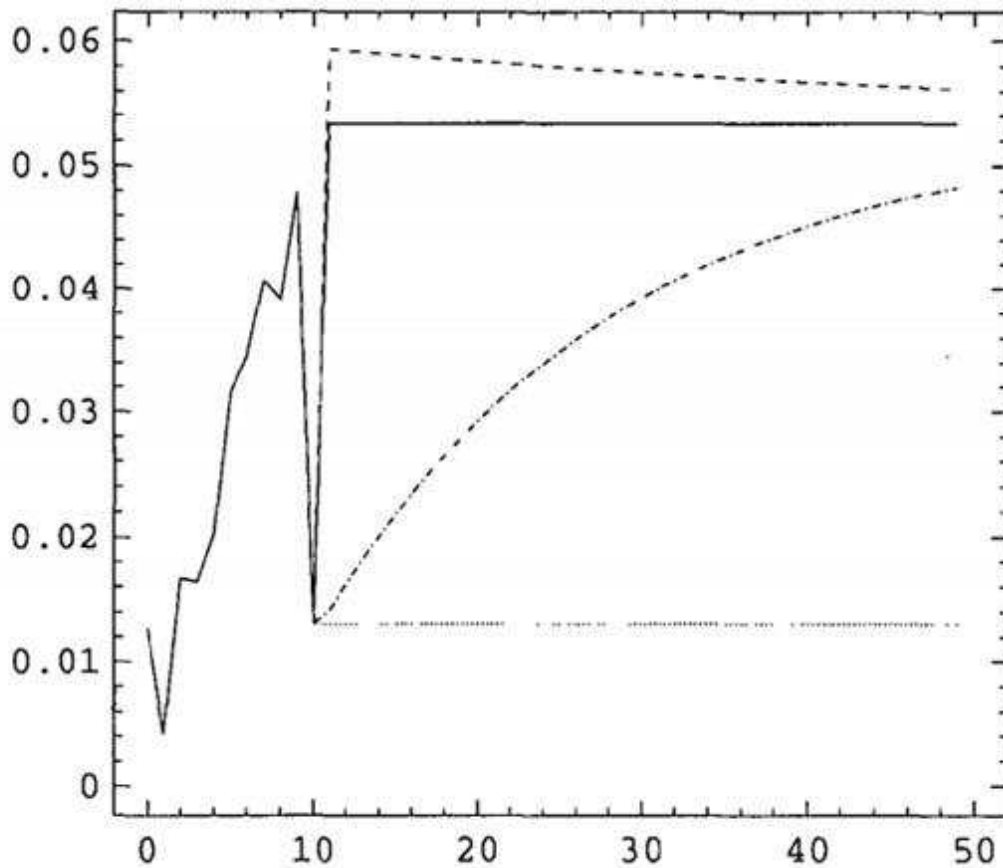
Για να απεικονίσουμε τις πιθανές επιπτώσεις των δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών της $\Psi(t)$ θα εξετάσουμε τον δείκτη τιμών καταναλωτή του Καναδά την περίοδο 1960 – 1992. Ο συγκεκριμένος δείκτης εδώ παίζει τον ρόλο της έντασης ανατοκισμού. Η παράμετρος δ ισούται με 0.05335. Η παράμετρος α όταν μοντελοποιούμε την συσσωρευμένη αξία είναι 0.01955 ενώ όταν μοντελοποιούμε την ένταση ανατοκισμού είναι 0.05389. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές υπολογίστηκαν κάποιες τιμές της $\Psi(t)$, $t > 10$ δοθέντος $y(10) = 0.2771$ και $\delta_{10} = 0.0131$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον διάγραμμα 3.1 όπου η τιμή $t = 0$ αντιστοιχεί στην τιμή 1960. Από αυτό το διάγραμμα είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε αν κάποια μοντέλα που δεν χρησιμοποιούν την τιμή της δ_{10} έχουν σημαντική διαφορά.



Διάγραμμα 3.1

—	$\{\Psi(s)\}_{s=0}^{10}$	with $\Psi(10) = .2771$	$\delta_{10} = .0131$
—	δ_t : W-N	$\delta = .05335$	or $\Psi(t)$: Wiener $\delta = .05335$
- -	$\Psi(t)$: O-U	$\delta = .05335$	$\alpha = .01955$
...	δ_t : Wiener	$\delta = .05335$	
- . -	δ_t : O-U	$\delta = .05335$	$\alpha = .05389$

Το διάγραμμα 3.2 παρουσιάζει τις υπό συνθήκες αναμενόμενες τιμές της δ_t , $t > 10$ δοθέντος $\Psi(10) = 0.2771$ και $\delta_{10} = 0.0131$. Μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια πιθανή επίπτωση η οποία προέρχεται από την μοντελοποίηση της έντασης ανατοκισμού για την συσσωρευμένη συνάρτηση και όχι από την ένταση ανατοκισμού. Ποιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή της έντασης ανατοκισμού στο άμεσο μέλλον διαφέρει αρκετά από την πραγματική της τιμή.



Διάγραμμα 3.2

—	$\{\delta_s\}_{s=0}^{10}$	with $\Psi(10) = .2771$	$\delta_{10} = .0131$	
—	δ_s :	W-N	$\delta = .05335$	or $\Psi(t)$: Wiener $\delta = .05335$
	$\Psi(t)$:	O-U	$\delta = .05335$	$\alpha = .01955$
	δ_s :	Wiener	$\delta = .05335$	
	δ_s :	O-U	$\delta = .05335$	$\alpha = .05389$

3.8 Άνω Και Κάτω Όρια της Στοχαστικής Προεξοφλημένης Αξίας \tilde{Z}_n

Στην ενότητα 3.1 είδαμε ότι η συσσωρευμένη αξία $\Psi(t)$ την χρονική στιγμή t ισούται με

$$\Psi(t) = \int_0^t \delta_s ds.$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη προσέγγιση θεωρούμε ότι $\Psi(t)$ είναι το άθροισμα μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας Wiener με συντελεστή μετατόπισης δ . Όπως είδαμε και πιο πάνω (βλέπε σχέση (3.9)) τότε ισχύει:

$$\Psi(t) = \delta \cdot t + \sigma \cdot W_t$$

Σε αυτή την περίπτωση η V_t είναι λογαριθμοκανονικά κατανομημένη με παραμέτρους $-\delta t$ και $\sigma^2 t$. Αυτό αντιστοιχεί στην προσέγγιση του Goonaerts et al (1999) ο οποίος θεώρησε την προεξοφλημένη ταμειακή ροή Z_n υπό την μορφή

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \exp(-\delta_i - X_i) \quad (3.48)$$

όπου τα X_i ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $i\sigma^2$ και δ είναι η αναμενόμενη συσσωρευμένη αξία. Το άνω όριο της \tilde{Z}_n υπολογίζεται ως:

$$\tilde{Z}_n = \sum_{i=1}^n \exp\{-\delta_i - \sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(U)\} \quad (3.49)$$

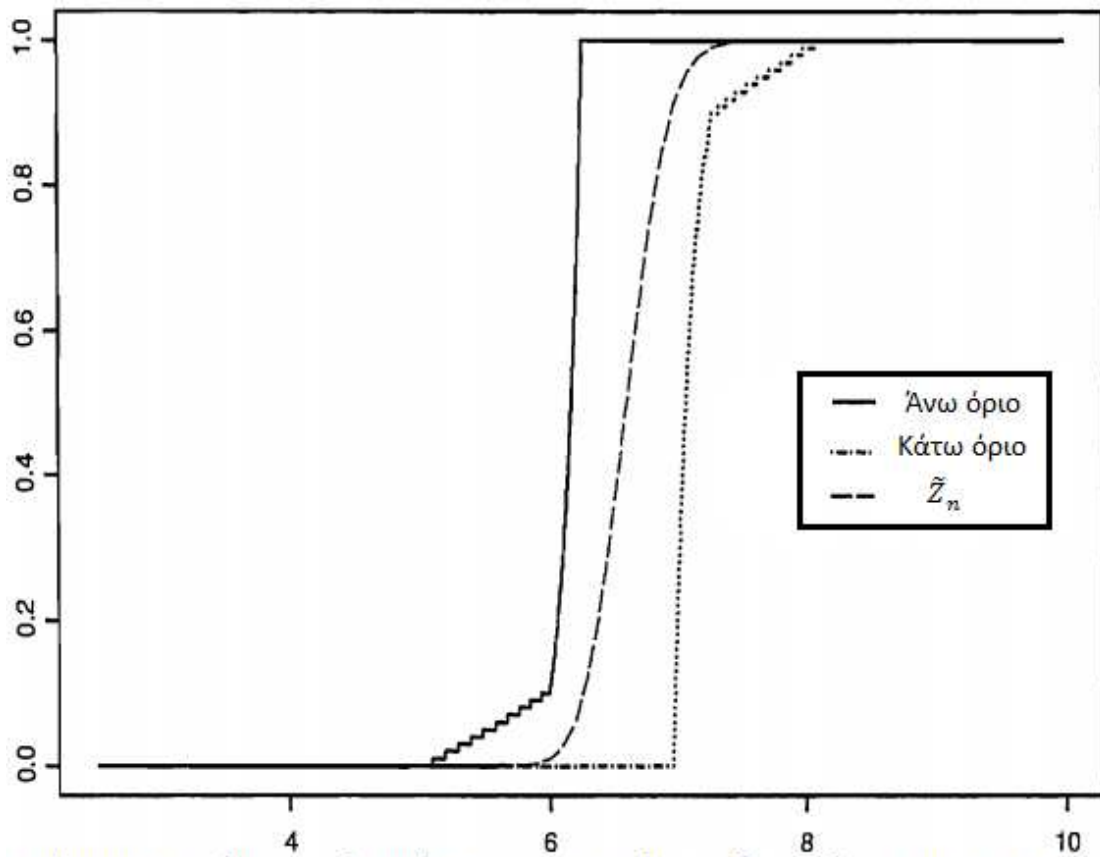
όπου η Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μια τυπικής κανονικής κατανομής και η U είναι μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0,1]$. Συνεπώς η συνάρτηση επιβίωσης της \tilde{Z}_n δίνεται από την:

$$P[\tilde{Z}_n > x] = 1 - F_{\tilde{Z}_n}(x) = \Phi(v_n) \quad (3.50)$$

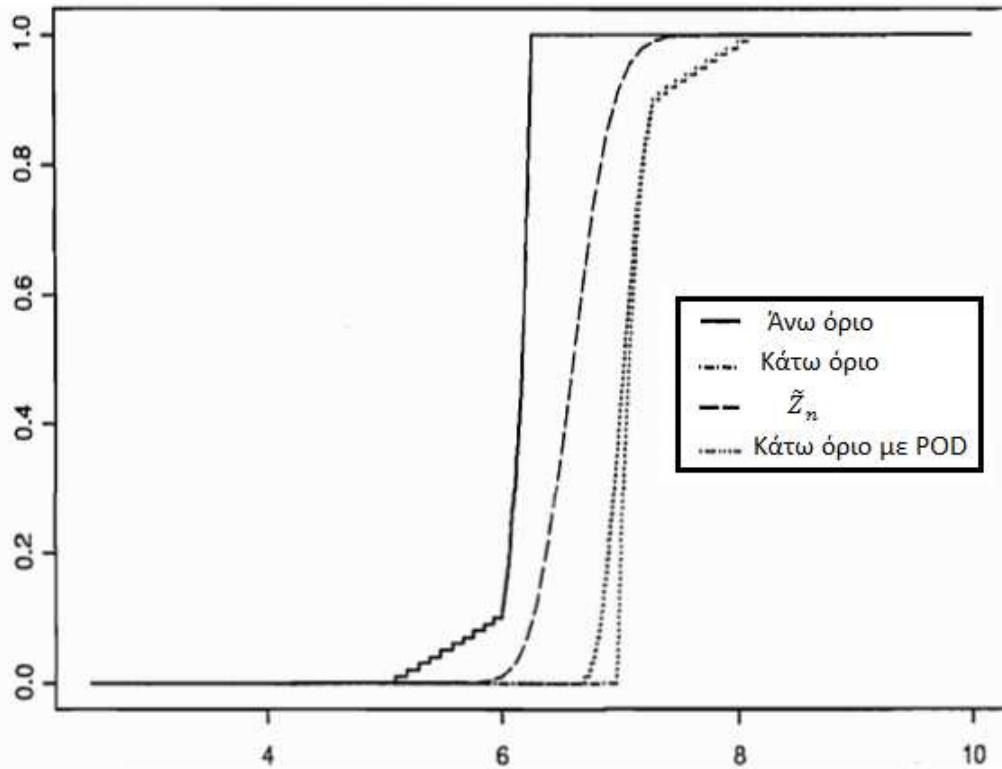
όπου v_n είναι η ρίζα της παρακάτω εξίσωσης:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(-\delta_i - \sqrt{i}\sigma v_x) = x \quad (3.51)$$

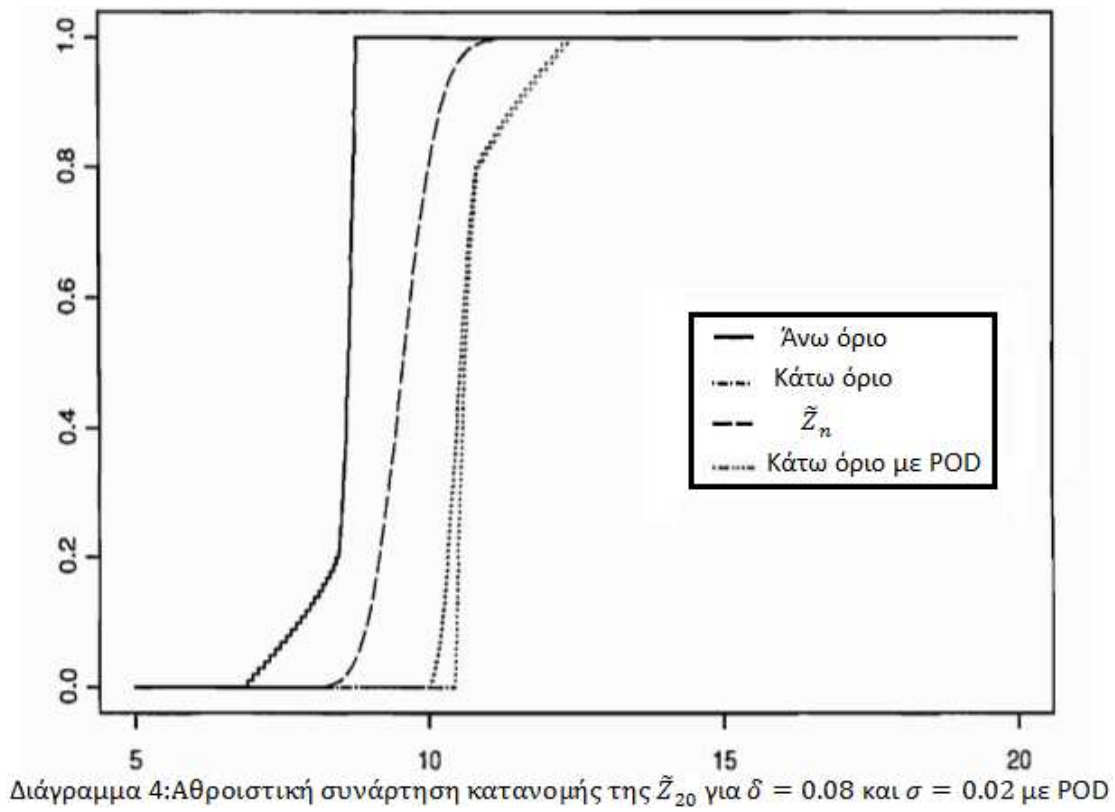
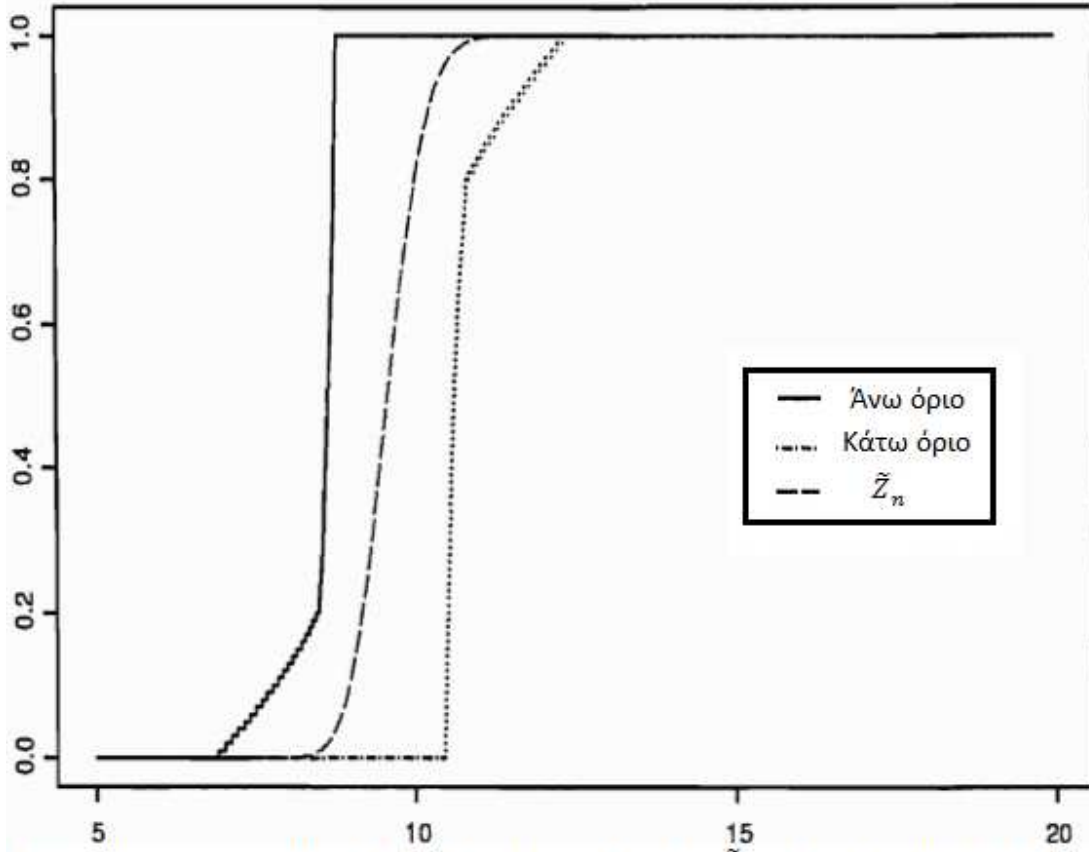
Ας μελετήσουμε τώρα την ακρίβεια των ορίων (3.1) και (3.5) της συνάρτησης κατανομής της Z_n για το μοντέλο (3.9). Στο πρώτο διάγραμμα βλέπουμε τις συναρτήσεις F_{min} και F_{max} που περιέχονται στην (3.5) με βάση την προσέγγιση της F_{Z_n} με την \tilde{F}_{Z_n} για $n = 10$, $\delta = 0.08$ και $\sigma = 0.02$. Το τρίτο διάγραμμα παρουσιάζει τις ίδιες συναρτήσεις αλλά για $n = 20$. Συγκρίνοντας τα δυο αυτά διαγράμματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση (3.49) βρίσκεται στην μέση της περιοχής που ορίζεται από τις συναρτήσεις F_{min} και F_{max} . Στα διαγράμματα 2 και 4 υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές V_i είναι POD συνεπώς τα όρια θα είναι διαφορετικά. Παρατηρώντας τα δυο αυτά διαγράμματα βλέπουμε ότι μόνο το κάτω όριο άλλαξε και συγκεκριμένα βελτιώθηκε. Τα δυο όρια μιας κατανομής ενός αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών βελτιώνονται όταν οι παράμετροι των τυχαίων μεταβλητών είναι της μορφής $[a_i, b_i]$ με $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ (βλέπε [10] για περισσότερες λεπτομέρειες). Εάν $b_i = +\infty$ τότε μόνο το κάτω όριο θα βελτιωθεί υπό την υπόθεση της POD.



Διάγραμμα 1: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της \tilde{Z}_{10} για $\delta = 0.08$ και $\sigma = 0.02$



Διάγραμμα 2: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της \tilde{Z}_{10} για $\delta = 0.08$ και $\sigma = 0.02$ με POD



Στην δεύτερη προσέγγιση η ένταση ανατοκισμού μπορεί να οριστεί σύμφωνα με την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$d\delta_t = -\alpha(\delta_t - \delta)dt - \sigma dW_t \quad (3.52)$$

όπου οι σταθερές α , σ είναι μη-αρνητικές και με αρχική τιμή

$$\delta_0 = \delta \geq 0, \{\delta_t, t \geq 0\} \quad (3.53)$$

Από τα παραπάνω η δ_t είναι μια διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και συνεπώς η ένταση ανατοκισμού $\{\delta_t, t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Gaussian με μέση τιμή:

$$t \mapsto \mu_t = \delta_t + (\delta_0 - \delta) \frac{1 - \exp(-\alpha t)}{\alpha} \quad (3.54)$$

και συνδιακύμανση

$$(s, t) \mapsto \text{Cov}[Y_s, Y_t] \equiv \omega(s, t) \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου} \quad \omega(s, t) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \min(s, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} \{ -2 + 2 \exp(-\alpha s) + 2 \exp(-\alpha t) - \\ \exp(-\alpha(t-s)) - \exp(-\alpha(t+s)) \} \end{aligned} \quad (3.56)$$

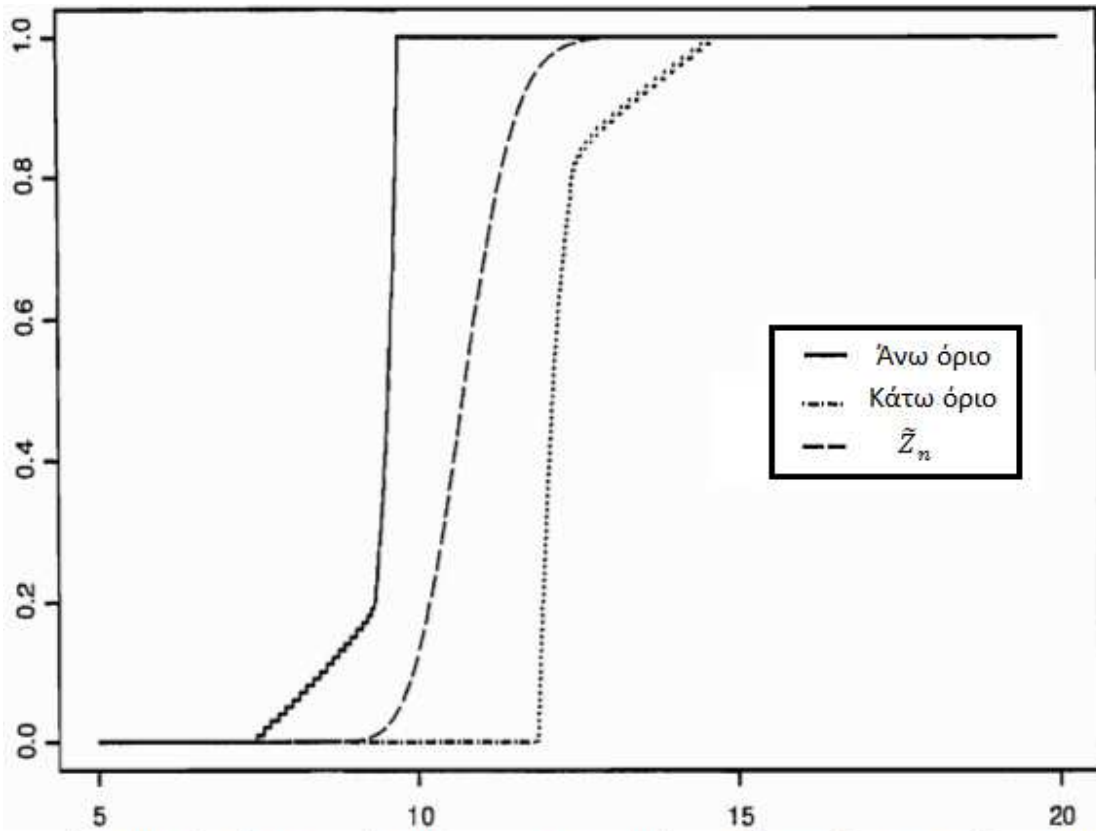
Τότε έχουμε ότι:

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \exp(-Y_i) \quad (3.57)$$

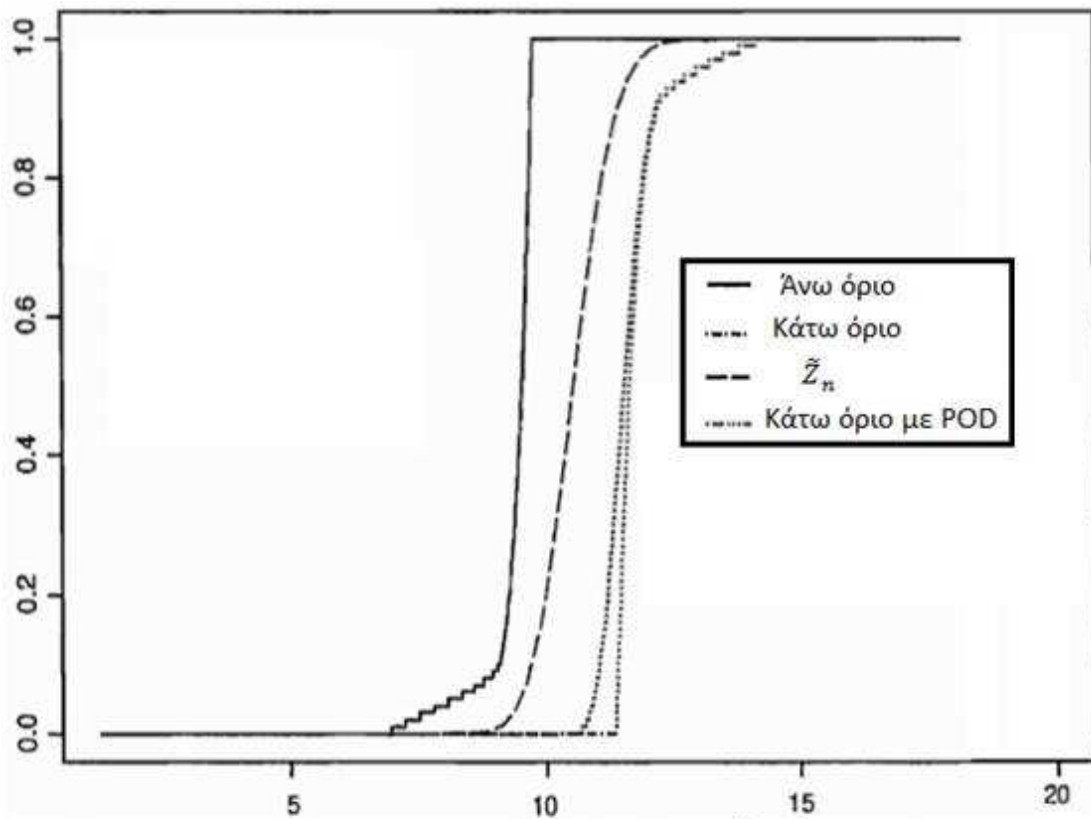
όπου Y_i είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ_i και διακύμανση $\omega(i, i)$. Σε αυτή την περίπτωση το άνω όριο υπολογίζεται (με βάση τον Goovaerts et al (1999)) ως:

$$\tilde{Z}_n = \sum_{i=1}^n \exp\{-\mu_i - \sqrt{\omega(i, i)} \Phi^{-1}(U)\} \quad (3.58)$$

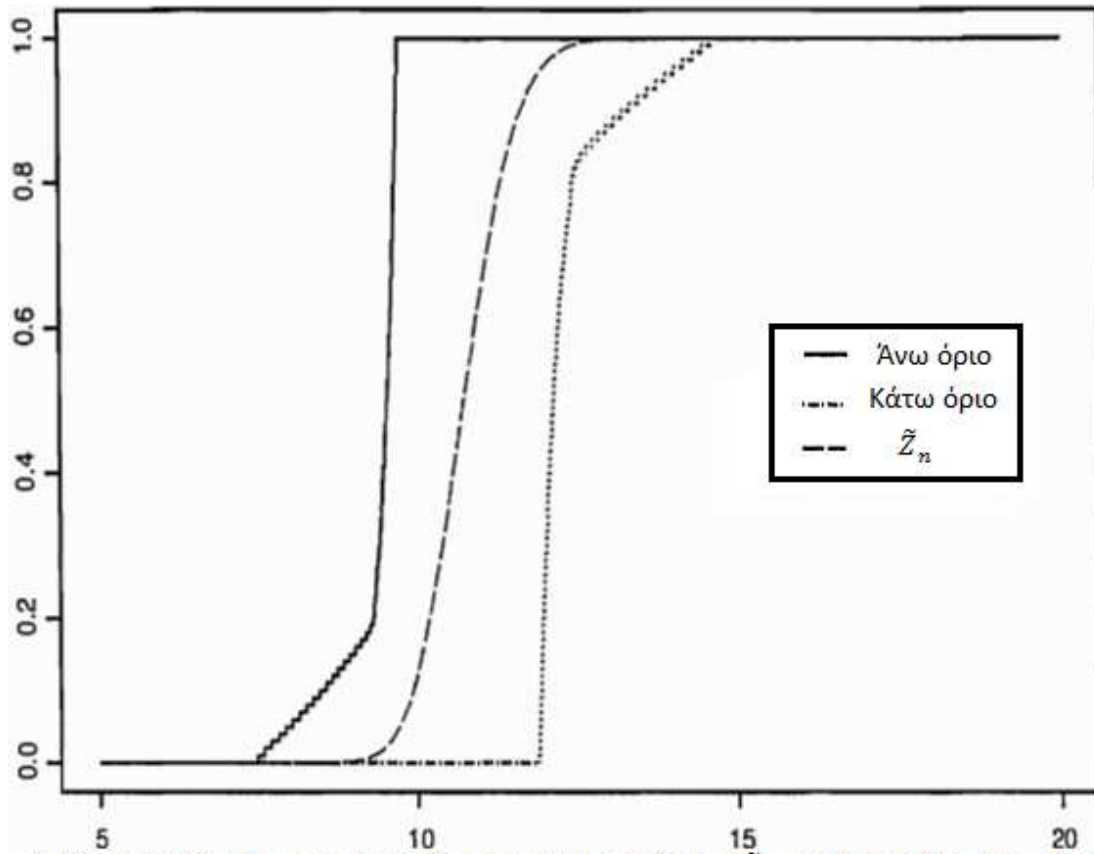
όπου η U είναι μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0,1]$. Στο διάγραμμα 5 βλέπουμε τα όρια της συνεχούς συνάρτησης κατανομής της Z_{10} με $\delta = 0.06, \delta_0 = 0.08, \alpha = 0.3$ και $\sigma = 0.01$ συμπεριλαμβανομένης και της συνάρτησης \tilde{Z}_{10} . Το διάγραμμα 7 παρουσιάζει τα ίδια αποτελέσματα για $n = 20$ και τα συμπεράσματα είναι τα ίδια με εκείνα των διαγραμμάτων 1 και 3. Στα διαγράμματα 6 και 8 υποθέσαμε ότι οι μεταβλητές V_i είναι POD και πάλι παρατηρούμε μια μικρή βελτίωση του κάτω ορίου.



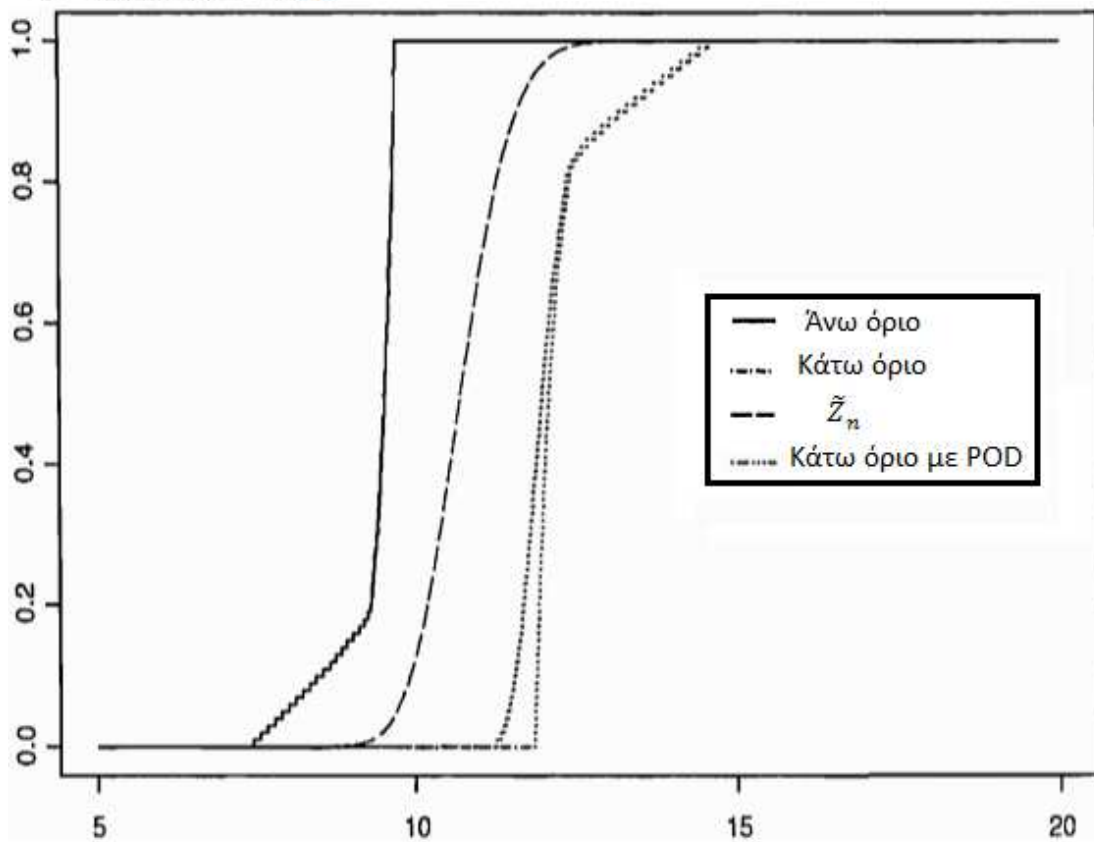
Διάγραμμα 5: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της \tilde{Z}_{10} για $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$
 $\alpha = 0.03$ και $\sigma = 0.01$



Διάγραμμα 6: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της \tilde{Z}_{10} για $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$
 $\alpha = 0.03$ και $\sigma = 0.01$ με POD



Διάγραμμα 7: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της \tilde{Z}_{20} για $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$
 $\alpha = 0.03$ και $\sigma = 0.01$



Διάγραμμα 8: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της \tilde{Z}_{20} για $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$
 $\alpha = 0.03$ και $\sigma = 0.01$ με POD

3.9 Εφαρμογή σε Χαρτοφυλάκιο Προσωρινής Ράντας Ζωής

Θεωρούμε μια προσωρινή ράντα ζωής που εκδίδεται σε ένα άτομο ηλικίας x το οποίο έχει προσδόκιμο όριο ζωής ίσο με K έτη. Επιπλέον θεωρούμε ότι $P[k < K \leq k + 1] = {}_k|q_x$ και $P[K > n] = {}_n p_x$ και ότι το K είναι ανεξάρτητο από τους τυχαίους προεξοφλητικούς παράγοντες V_1, V_2, V_3, \dots , όπου ${}_n p_x$ είναι η πιθανότητα το άτομο ηλικία x να επιζήσει μέχρι την ηλικία $x + n$ και ${}_k|q_x$ η πιθανότητα να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών $x + n$ και $x + n + 1$. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο που αντιστοιχεί σε αυτό το συμβόλαιο δίνεται από:

$$a_{x;\overline{n}|} = E[a_{x;\overline{n}|}^{\circ}]$$

με

$$a_{x;\overline{n}|}^{\circ} = \begin{cases} 0, & K = 0 \\ Z_k, & K = 1, \dots, n - 1 \\ Z_n, & K \geq n \end{cases}$$

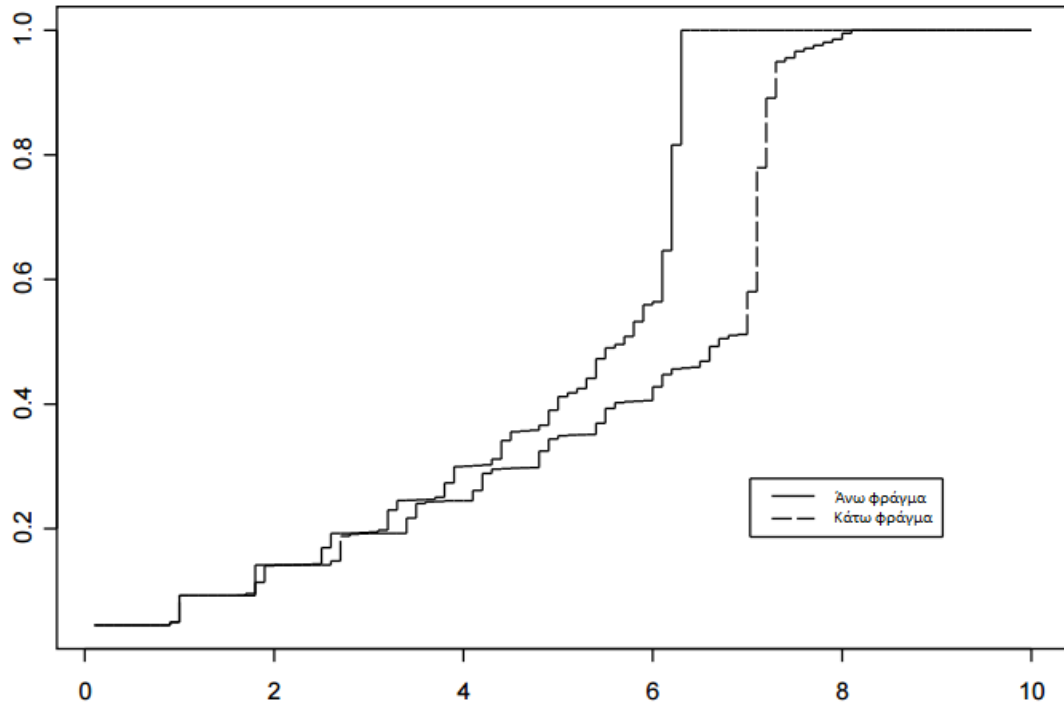
όπου η Z έχει οριστεί στην σχέση (3.8). Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο είναι ένα ασφαλιστικό σχέδιο το οποίο κρατάει μέρος των μετρητών που καταβάλλονται, ως εγγύηση για την καταβολή της αποζημίωσης στους δικαιούχους. Μπορεί κανείς να πει ότι είναι εάν ασφάλιστρο το οποίο καλύπτει παρούσες αξίες μελλοντικών απαιτήσεων. Αν αθροίσουμε για K έτη τότε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο που σχετίζεται με ένα τέτοιο συμβόλαιο ισούται με:

$$a_{x;\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-1} E[Z_k] {}_k|q_x + E[Z_n] {}_n p_x$$

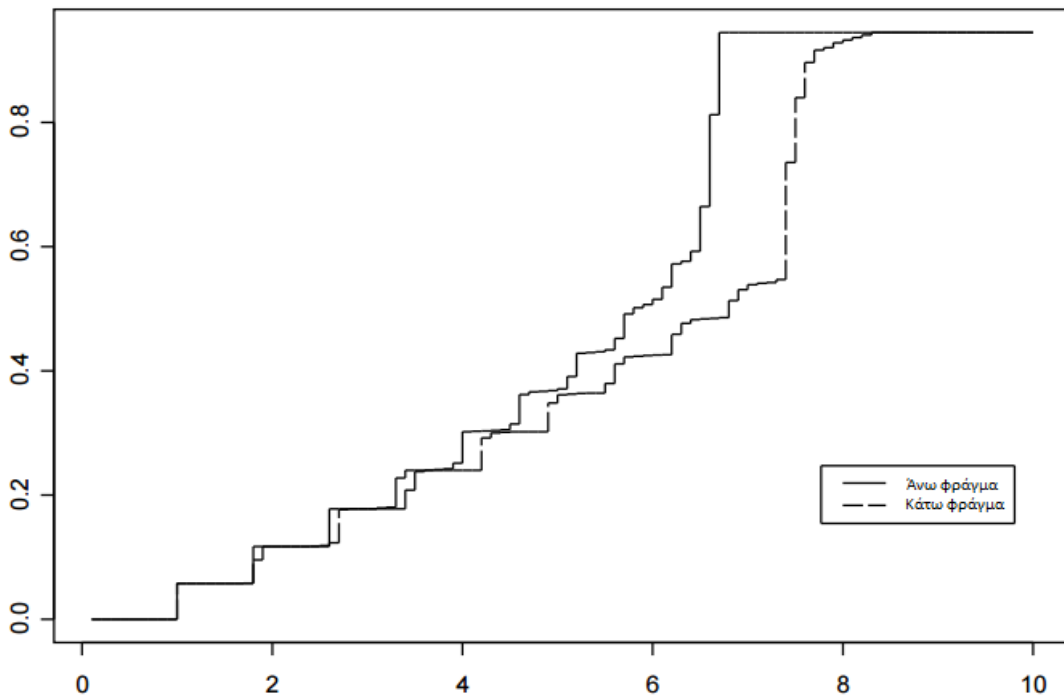
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $a_{x;\overline{n}|}^{\circ}$ η οποία ισούται με:

$$P[a_{x;\overline{n}|}^{\circ} \leq y] = q_x + \sum_{k=1}^{n-1} P[Z_k \leq y] {}_k|q_x + P[Z_n \leq y] {}_n p_x$$

Επειδή δεν υπάρχει σαφής έκφραση για την $P[a_{x;\overline{n}|}^{\circ} \leq y]$ θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω προσέγγιση για να υπολογίσουμε τα στοχαστικά όρια της $a_{x;\overline{n}|}^{\circ}$. Στο διάγραμμα I απεικονίσαμε γραφικά τα όρια της $P[a_{x;\overline{n}|}^{\circ} \leq y]$ που αφορούν άτομο ηλικίας 45 χρησιμοποιώντας το μοντέλο της σχέσης (3.10) με $\delta = 0.08$ και $\sigma = 0.02$. Το διάγραμμα II είναι το αντίστοιχο για το μοντέλο της σχέσης (3.52) με $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ και $\sigma = 0.01$.



Διάγραμμα I: Άνω και κάτω όρια της $P \left[a_{x;n}^{\circ} \leq y \right]$ για το μοντέλο (3.10) με $x = 45$, $\delta = 0.08$ και $\sigma = 0.02$



Διάγραμμα II: Άνω και κάτω όρια της $P \left[a_{x;n}^{\circ} \leq y \right]$ για το μοντέλο (3.52) με $x = 45$, $\delta = 0.06$, $\delta_0 = 0.08$, $\alpha = 0.3$ και $\sigma = 0.01$

Στα παραπάνω διαγράμματα χρησιμοποιήσαμε τον πρότυπο πίνακα θνησιμότητας του Makeham (βλέπε [7]). Τα παραπάνω όρια μας δίνουν μια καλή ιδέα του κινδύνου που ελλοχεύει στο στοχαστικό επιτόκιο σε συνδυασμό με την στοχαστική θνησιμότητα.

3.10 Συμπεράσματα

- Στην εργασία αυτή μελετήσαμε συγκεκριμένες αναλογιστικές συναρτήσεις κάτω από δύο στοχαστικές προσεγγίσεις που αφορούν τη μοντελοποίηση της τυχαιότητας του τόκου. Ειδικότερα οι συναρτήσεις που μοντελοποιήθηκαν υπό την επίδραση των στοχαστικών διαδικασιών Wiener και Ornstein-Uhlenbeck είναι η ένταση ανατοκισμού και η ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης.
- Χρησιμοποιήθηκε μια ληξιπρόθεσμη ράντα πληρωμών ως μέτρο σύγκρισης των στοχαστικών διαδικασιών στις παραπάνω αναλογιστικές συναρτήσεις, υπολογίζοντας μέση τιμή, τυπική απόκλιση και λοξότητα. Αναφέρουμε ότι κανένα από τα παραπάνω μοντέλα δεν μπορεί να θεωρηθούν ισοδύναμα ακόμα και εάν επιλεχθούν συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους. Μόνη εξαίρεση αποτελεί η στοχαστική διαδικασία White Noise, που όταν μοντελοποιεί την ένταση ανατοκισμού, είναι ισοδύναμη με την στοχαστική διαδικασία Wiener που μοντελοποιεί την ένταση ανατοκισμού συσσωρευμένης συνάρτησης.
- Επίσης, αναφέρουμε ότι όταν μοντελοποιείται η ένταση ανατοκισμού για την συσσωρευμένη συνάρτηση, η αναμενόμενη τιμή της $[\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon]$ δεν εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η δ_s . Αν μοντελοποιηθεί η ένταση ανατοκισμού όμως τότε η αναμενόμενη τιμή της $[\Psi(t) | \Psi(s) = x, \delta_s = \varepsilon]$ εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει η δ_s .
- Ένα άλλο πλεονέκτημα της χρήσης ενός από τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν για την ένταση ανατοκισμού είναι ότι είναι ειδικές περιπτώσεις της καμπύλης των επιτοκίων. Αυτό σημαίνει ότι όλη η μελέτη που έχει ήδη γίνει στην χρηματοοικονομική, μπορεί να εκμεταλλευτεί από τους αναλογιστές όσο αφορά την θεωρία τιμολόγησης μη βέβαιου κέρδους. Τέλος, κάναμε εφαρμογή όλων των παραπάνω σε ένα καρτοφυλάκιο ράντας ζωής ασφαλισμένου ηλικίας x και υπολογίσαμε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο και τον

εγγενή κίνδυνο του στοχαστικού επιτοκίου σε συνδυασμό με την στοχαστική θνησιμότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Α. Ν. Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος 1. Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης (2003)
- [2] ΜΑΧΑΙΡΑΣ Ν. Δ. Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης (2006)
- [3] ΜΑΧΑΙΡΑΣ Ν. Δ. Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης (2006)
- [4] AITCHISON, J. and BROWN, J.A.C. the Lognormal Distribution, 176 pp., Cambridge University Press. (1963)
- [5] ARNOLD, L. Stochastic Differential Equations : Theory and Applications, 228 pp., John Wiley & Sons, New York (1974)
- [6] BEEKMAN, J.A. and FUELLING, C.P. Interest and Mortality Randomness in Some Annuities Insurance: Mathematics and Economics 9, 185-196. (1990)
- [7] BOWERS, N.L., GERBER, H.U., HICKMAN, J.C., JONES, O.A. and C.J. NESBITT. Actuarial Mathematics. Society of actuaries, Itasca, Illinois (1996)
- [8] BUEHLMANN, H. Stochastic Discounting Insurance: Mathematics and Economics 1 I, I 13-127. (1992)
- [9] CANADIAN INSTITUTE OF ACTUARIES Rapport sur les Statistiques Economiques Canadiennes, 1924-1992. (1993)
- [10] DENUIT, M., GENEST, C. and E. MARCEAU. Stochastic bounds on sums of dependent risks. Insurance: Mathematics & Economics 25, 85-104. (1999)
- [11] DE SCHEPPER, A. and M.J GOOVAERTS. Some further results on annuities certain with random interest. Insurance: Mathematics & Economics 11, 283-290 (1992)

- [12] DE SCHEPPER, A. TEUNEN, M. and M.J. GOOVAERTS. An analytical inversion of a Laplace transform related to annuity certain. *Insurance: Mathematics & Economics* 14, 33-37 (1994)
- [13] DUFRESNE, D. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scandinavian Actuarial Journal* 33-79. (1990)
- [14] FREES, E.W. Stochastic life contingencies with solvency considerations. *Transactions of the Society of Actuaries* XLII, 91-148. (1990)
- [15] KARLIN, S. and TAYLOR, H. M. *A Second Course in Stochastic Processes*, 542 pp., Academic Press, San Diego. (1981)
- [16] MARCEL B. FINAN *A Discussion of Financial Economics in Actuarial Models*. Arkansas Tech University (2014)
- [17] MOOD, A.M., GRAYBILL, F.A. and BOES, D.C. *Introduction to the Theory of Statistics*, 567 pp., McGraw-Hill. (1974)
- [18] PANJER, H.H and BELLHOUSE, D.R *Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies*. *Journal of Risk and Insurance* 47, 91-110 (1980)
- [19] PARKER, G. Limiting distribution of the present value of a portfolio. *ASTIN Bulletin* 94-1, 47-60. (1994)
- [20] PARKER, G. Two Stochastic approaches for discounting actuarial functions. *ASTIN Bulletin* 24, 167-181. (1994)
- [21] PARKER, G. Stochastic analysis of a portfolio of endowment policies. *Scandinavian Actuarial Journal*, 119-130. (1994)
- [22] STEPHEN G. KELLISON *The Theory of Interest*. University of Central Florida (2009)
- [23] SZEKLI, R. *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*. *Lecture Notes in Statistics* 97. Springer Verlag Berlin. (1995)
- [24] THOMAS MIKOSCH *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific Publishing Company (2009)