

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΚΑΙ ΘΑΝΑΤΟΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Κυριάκος Σ. Στενός

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
του για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Ιούλιος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Ψαρράκος Γεώργιος
- Σεβρόγλου Βασίλειος
- Βερροπούλου Γεωργία

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT**

**On the survival and death function under a family of
generalized age assumptions**

Kyriakos S. Stenos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece

July 2016

Στην οικογένεια μου.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία συνιστά το αποτέλεσμα μιας προσπάθειας στην οποία συνέβαλε εν πολλοίς ο επιβλέπων καθηγητής μου Κύριος Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Ψαρράκος στον οποίο απευθύνω τις θερμότερες ευχαριστίες μου, που με την συμβολή και την καθοδήγηση του με βοήθησε να φέρω εις πέρας την παρούσα διπλωματική εργασία παρ'όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισα στη πορεία της ολοκλήρωσης της. Ευχαριστώ, επίσης, τον Κύριο Επίκουρο Καθηγητή Σεβρόγλου Βασίλειο και την Κυρία Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Βερροπούλου Γεωργία, που απαρτίζουν την τριμελή επιτροπή, για τις χρήσιμες συμβουλές και παρατηρήσεις τους. Τέλος πολλά ευχαριστώ οφείλω στην οικογένεια μου και στους φίλους μου που με τη στήριξη και την δύναμη που μου παρείχαν με έκαναν να πιστεύω πάντα στην επίτευξη των στόχων μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάμε συναρτήσεις επιβίωσης και θανάτου, καθώς και ποσότητες που σχετίζονται με αυτές. Συνήθως οι υποθέσεις που κάνουμε προκειμένου να υπολογίσουμε κάποια αναλογιστικά μέτρα σε πίνακες θνησιμότητας είναι η ομοιόμορφη κατανομή θανάτων, η εκθετική και η υπερβολική. Αρχικά οι Jones και Mereu (2000) εισήγαγαν μία νέα οικογένεια υποθέσεων που γενικεύει και βελτιώνει τις προηγούμενες. Εν συνεχεία (2002) παρουσίασαν νέες γενικευμένες υποθέσεις της ομοιόμορφης και εκθετικής, αλλά και την Power οικογένεια η οποία είναι η γενικευμένη οικογένεια υποθέσεων που είχαν εισαγάγει το 2000. Οι νέες αυτές υποθέσεις επίσης με τη σειρά τους προσφέρουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τις αρχικές. Σκοπός μας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των αναλογιστικών μέτρων κάτω από τις νέες αυτές υποθέσεις. Αριθμητικά παραδείγματα θα παρουσιαστούν προκειμένου να γίνουν πιο κατανοητές οι υποθέσεις και οι ιδιότητες τους.

Abstract

In this dissertation, we study distributions of survival and death, also quantities which arise from them. Usually the assumptions we make to calculate some actuarial measures in mortality tables are the following: (a) Uniform Death Distribution, (b) Constant Force of Mortality and (c) Balducci assumption. Firstly Jones & Meru (2000) introduced a new family of assumptions which unify and improve the last ones. Then (2002) demonstrated new generalized assumptions of Uniform Death Distribution and Constant Force of Mortality, but also the Power family which is the generalized family they introduced at 2000. These new assumptions also provide better results in contrast to the three mentioned in the beginning. Our main priority is to study the properties of actuarial measures under these new assumptions. At the end some numerical examples will be presented in order to make them more understandable.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
Βασικές έννοιες.....	1
1.1 Συναρτήσεις συμβάντων ζωής	1
1.2 Ένταση θνησιμότητας & πίνακας θνησιμότητας	6
1.3 Νόμοι θνησιμότητας Gompertz & Makeham	11
1.4 Ασφαλίσεις Ζωής & Ράντες Ζωής	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	19
Η οικογένεια κλασματικών υποθέσεων και οι υποπεριπτώσεις της.....	19
2.1 Οι τρεις γνωστές υποθέσεις και η γενικευμένη τους μορφή.....	19
2.2 Ειδική περίπτωση της οικογένειας για $\alpha_x = \alpha$	24
2.3 Κατάλληλη επιλογή παραμέτρου α_x	27
2.4 Ο ρόλος των κλασματικών υποθέσεων στην εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας.....	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	40
Γενικευμένες μορφές των τριών υποθέσεων και η σχέση των FAAs με συναρτήσεις στα Συμβάντα Ζωής και τη Δημογραφία	40
3.1 Τρεις γενικευμένες οικογένειες μίας παραμέτρου	40
3.2 Επιλογή παραμέτρων και κριτήριο ποιότητας	43
3.3 Χρήση του κριτηρίου ποιότητας και σύγκριση με άλλους τρόπους	45
3.4 Χρήσιμες ποσότητες των Συμβάντων Ζωής & Δημογραφίας	49
3.4.1 Συναρτήσεις & FAAs	49
3.4.2 Ασφαλίσεις Ζωής & FAAs	52
3.4.3 Ράντες Ζωής & FAAs.....	55
3.4.4 Δημογραφικές Συναρτήσεις	57
Παράρτημα.....	64
Βιβλιογραφία	67

Πρόλογος

Στη παρούσα εργασία μελετάμε συναρτήσεις επιβίωσης και θανάτου αλλά και άλλες ποσότητες που προκύπτουν από αυτές. Οι τρεις πιο διαδεδομένες υποθέσεις κλασματικών ηλικιών είναι της ομοιόμορφης κατανομή θανάτου (UDD), της σταθερής έντασης θνησιμότητας (CFM) και της υπόθεσης Balducci. Οι παραπάνω υποθέσεις έχουν ευρεία χρήση, όμως όταν εφαρμόζεται αποκλειστικά μία σε ολόκληρο το ηλικιακό διάστημα τότε η παραγόμενη ένταση θνησιμότητας παρουσιάζει αρκετά προβλήματα. Για το λόγο αυτό οι Jones & Meru (2000) πρότειναν να υπάρχει η δυνατότητα να διαφέρει η υπόθεση σε κάθε ηλικία, έτσι ώστε η ένταση θνησιμότητας να είναι πιο αξιόλογη. Αυτό θα επιτευχθεί με μία γενικευμένη οικογένεια η οποία περιλαμβάνει τις τρεις οικογένειες που αναφέραμε παραπάνω και μέσω αυτής θα προσδιορίζεται σε κάθε ηλικία η επιθυμητή υπόθεση. Μετέπειτα οι Jones & Meru (2002) παρουσίασαν την τετραγωνική συνάρτηση επιβίωσης (QSF) και την γραμμική ένταση θνησιμότητας (LFM) οι οποίες είναι γενικεύσεις των UDD και CFM αντίστοιχα. Επιπλέον αναφέρθηκαν και στην Power οικογένεια η οποία είναι η γενικευμένη οικογένεια που όρισαν το 2000. Οι τρεις αυτές γενικευμένες μορφές εμφανίζουν πολύ μεγάλη βελτίωση τόσο στην ένταση θνησιμότητας όσο και στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) τους σε σύγκριση με τις αρχικές. Γενικότερα οι υποθέσεις των κλασματικών ηλικιών προσφέρουν πολύ καλά αποτελέσματα σε διάφορους αναλογιστικούς υπολογισμούς αλλά και στην εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας.

Στο Κεφάλαιο 1, θα εισάγουμε βασικές έννοιες των Συμβάντων Ζωής που θα χρειαστούν στην συνέχεια. Ειδικότερα ορίζεται η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, η συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$, ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής $T(x)$, όπως και συναρτήσεις οι οποίες έχουν μεγάλο ενδιαφέρον στη μελέτη τους. Επιπλέον παρουσιάζονται οι έννοιες της έντασης θνησιμότητας, της οποίας η συμπεριφορά αποτελεί κύριο στοιχείο μελέτης στη παρούσα εργασία, αλλά και ο ορισμός του πίνακα θνησιμότητας, που αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για τον υπολογισμό διάφορων αναλογιστικών μέτρων. Στη συνέχεια θα δούμε τους νόμους Θνησιμότητας των Gompertz και Makeham οι οποίοι και αυτοί με τη σειρά τους εφαρμόζονται σε διάφορες περιπτώσεις δίνοντας αξιόλογα αποτελέσματα. Τέλος δίνονται έννοιες και σχέσεις για τις Ασφαλίσεις και Ράντες Ζωής. Παραθέτονται γραφικές απεικονίσεις, πίνακες σχέσεων αλλά και παραδείγματα ώστε να γίνουν πιο κατανοητές οι έννοιες στη χρήση τους.

Το Κεφάλαιο 2 ξεκινά με τις τρεις υποθέσεις: την ομοιόμορφη κατανομή θανάτου (UDD), την σταθερή ένταση θνησιμότητας (CFM) και την υπόθεση Balducci. Έπειτα παρουσιάζεται η γενικευμένη οικογένεια κλασματικών υποθέσεων η οποία είναι γενίκευση των τριών γνωστών που προαναφέρθηκαν, για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου α_x . Θα μελετηθούν διάφορες ιδιότητες της οικογένειας αυτής μέσω των παραγώγων και ορίων που θα τεθούν στην ένταση θνησιμότητας της. Σε επόμενο στάδιο θα ερευνηθεί μία υποπερίπτωση όπου $\alpha_x = \alpha$ για όλα τα x και η ένταση θνησιμότητας είναι συνεχής, δηλαδή για διάφορες τιμές του α θα μελετηθούν τα αποτελέσματα που εμφανίζονται. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω στο Πρόλογο, η

δυνατότητα η υπόθεση να διαφέρει σε κάθε ηλικιακό διάστημα θα επιτευχθεί με τη γενικευμένη οικογένεια και πιο συγκεκριμένα με το σωστό καθορισμό της α_x τιμής της σε κάθε περίπτωση. Επομένως στη συνέχεια θα επεξηγηθούν δύο μέθοδοι σωστής επιλογής του α_x με την καθεμία να έχει τα θετικά και αρνητικά της έναντι της άλλης. Ειδικότερα η πρώτη μέθοδος προϋποθέτει συνεχή ένταση θνησιμότητας και με τη βοήθεια μίας συγκεκριμένης σχέσης γίνεται κατάλληλη επιλογή α_x τιμών, διαδικασία η οποία τελικά παρουσιάζει αρκετά προβλήματα, οπότε σε αυτό το σημείο μία ελαχιστοποίηση των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ της αριστερής και δεξιάς παραγώγου της έντασης θνησιμότητας θα διορθώσει σε αρκετά ικανοποιητικό επίπεδο το πρόβλημα. Ο δεύτερος τρόπος βασίζεται στη διόρθωση της έντασης στην αρχή κάθε ηλικιακού διαστήματος χρησιμοποιώντας τα ποσοστά θνησιμότητας του συγκεκριμένου αλλά και του προηγούμενου διαστήματος. Δίδονται γραφικές παραστάσεις ώστε να γίνεται εύκολα αντιληπτή η συμπεριφορά των εντάσεων θνησιμότητας για κάθε περίπτωση. Στη τελευταία ενότητα επεξηγείται η μεγάλη προσφορά που βρίσκουμε στις υποθέσεις κλασματικών ηλικιών στην εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας. Κλείνοντας υπάρχουν εφαρμογές σε κάποια από αυτά που συζητήθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο.

Στο κεφάλαιο 3, αρχικά θα παρουσιαστούν δύο γενικευμένες υποθέσεις της ομοιόμορφης κατανομής θανάτου και της σταθερής έντασης θνησιμότητας. Έχουμε δηλαδή την τετραγωνική συνάρτηση επιβίωσης (QSF) και την γραμμική ένταση θνησιμότητας (LFM). Επίσης θα οριστεί μία τρίτη γενικευμένη οικογένεια, η Power οικογένεια για την οποία έγινε λόγος στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι γενικευμένες αυτές μορφές οι οποίες συνδυάζονται με πίνακες θνησιμότητας είναι μίας παραμέτρου, δηλαδή όταν προσδιοριστεί αυτή η παράμετρος τότε καθορίζεται η εκάστοτε υπόθεση. Επομένως στο επόμενο βήμα θα δοθούν τρόποι κατάλληλης επιλογής της παραμέτρου. Ουσιαστικά είναι οι διαδικασίες που μελετήθηκαν και στο προηγούμενο κεφάλαιο με τη διαφορά ότι στη πρώτη μέθοδο αντί να χρησιμοποιηθεί η ελαχιστοποίηση των τετραγώνων των διαφορών προτείνεται ένα κριτήριο ποιότητας το οποίο παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με την ελαχιστοποίηση. Επομένως θα δοθεί ένα παράδειγμα με τη χρήση του κριτηρίου συνδυαστικά με γραφικές παραστάσεις διάφορων περιπτώσεων, ώστε να γίνει κατανοητή η προσφορά του. Στην ενότητα που κλείνει το κεφάλαιο παραθέτονται σχέσεις των Ασφαλίσεων και Ραντών Ζωής οι οποίες συνδέονται με τις υποθέσεις των κλασματικών ηλικιών. Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια δίνονται στο τέλος κάποια παραδείγματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες

Στο Κεφάλαιο 1 θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες, που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια. Ειδικότερα στην Ενότητα 1.1 γίνεται μία περιγραφή σε έννοιες, όπως η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, η συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$, ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής $T(x)$ αλλά και σε ποσότητες που σχετίζονται με αυτές τις συναρτήσεις (βλέπε Bowers et.al, 1997). Στην επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζουμε και αναλύουμε την ένταση θνησιμότητας, η οποία θα αποτελέσει βασικό αντικείμενο μελέτης στα επόμενα κεφάλαια. Επίσης αναλύουμε την έννοια και τη χρησιμότητα του πίνακα θνησιμότητας, και εισάγουμε κάποιες συναρτήσεις που προκύπτουν από αυτόν. Στη συνέχεια παραθέτουμε τους ορισμούς δύο σημαντικών κανόνων, τον νόμο θνησιμότητας του Gompertz και τον νόμο θνησιμότητας του Makeham, οι οποίοι έχουν ευρεία χρήση στην αναλογιστική πρακτική. Τέλος στην τελευταία ενότητα παραθέτουμε κάποιους ορισμούς και σχέσεις των Ασφαλίσεων και Ραντών Ζωής, που θα μας απασχολήσουν στο Κεφάλαιο 3.

1.1 Συναρτήσεις συμβάντων ζωής

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο $[0, +\infty)$, η οποία εκφράζει το χρόνο ζωής ενός ατόμου από τη στιγμή της γέννησης του, έως κάποια ηλικία x . Η *συνάρτηση κατανομής* συμβολίζεται με:

$$F(x) = Pr(X \leq x), x \geq 0.$$

Ουσιαστικά εκφράζει την πιθανότητα θνησιμότητας αυτού του ατόμου.

Ως *συνάρτηση επιβίωσης* ορίζεται η πιθανότητα ένα νεογέννητο να φτάσει την ηλικία x και συμβολίζεται με $S(x)$. Δηλαδή εκφράζει μία πιθανότητα επιβίωσης. Αυτή ορίζεται ως:

$$S(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x), x \geq 0.$$

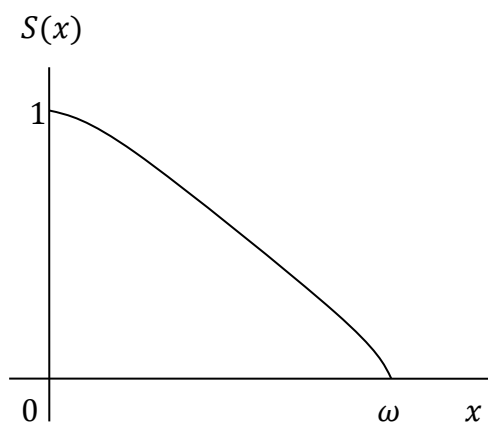
Παρατηρούμε ότι όταν $F(0) = 0$, τότε $S(0) = 1$, όπου $x \geq 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ είναι μία συνεχής και αύξουσα συνάρτηση, ενώ η συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$ είναι συνεχής και φθίνουσα.

Επίσης η μέγιστη ηλικία που ζει κάποιο άτομο συμβολίζεται με ω . Δηλαδή:

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \text{συνεχής και φθίνουσα}, & 0 < x < \omega \\ 0, & x \geq \omega. \end{cases}$$

Στο παρακάτω γράφημα βλέπουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης επιβίωσης $S(x)$, σε σχέση με το χρόνο x .



Γράφημα 1.1: Συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$.

Ενδιαφέρον περιπτώσεις αποτελούν:

Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών x και z , με $x < z$, είναι:

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z) &= F(z) - F(x) \\ &= [1 - S(z)] - [1 - S(x)] \\ &= S(x) - S(z). \end{aligned}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός νεογέννητου να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών x και z , δοθέντος ότι έχει επιζήσει για x έτη, είναι:

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z | X > x) &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}. \end{aligned}$$

Μία από τις σημαντικότερες συναρτήσεις στα Συμβάντα Ζωής είναι η $T(x)$ η οποία εκφράζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής ατόμου ηλικίας X . Ειδικότερα δείχνει την εναπομένουσα ζωή ενός ατόμου που έχει συμπληρωμένα x έτη ζωής. Μαθηματικά αποτυπώνεται ως:

$$T(x) = X - x | X > x.$$

Η συνάρτηση κατανομής της $T(x)$, είναι η πιθανότητα ατόμου ηλικίας x να πεθάνει στα επόμενα t έτη και ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= Pr(T(x) \leq t) \\ &= Pr(X - x \leq t | X > x) \\ &= \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \\ &= 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}, t \geq 0. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση επιβίωσης της $T(x)$, είναι η πιθανότητα ατόμου ηλικίας x να επιβιώσει για t έτη και συμβολίζεται ως:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= Pr(T(x) > t) \\ &= 1 - {}_tq_x \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)}, t \geq 0. \end{aligned}$$

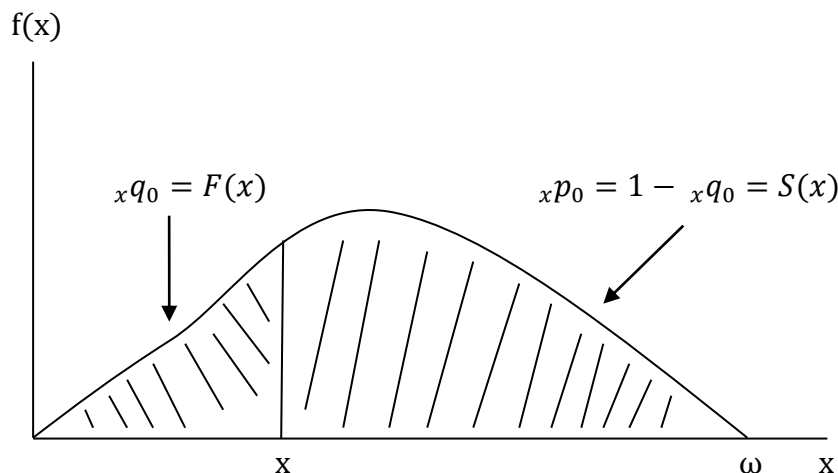
Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι:

Για $x = 0$, λαμβάνουμε: $T(0) = X$ και ${}_tp_0 = S(x)$.

Για $t = 1$ ισχύει ότι :

- $q_x = {}_1q_x = Pr(\text{άτομο ηλικίας } x \text{ θα πεθάνει μέσα στον επόμενο χρόνο}).$
- $p_x = {}_1p_x = Pr(\text{άτομο ηλικίας } x \text{ θα επιζήσει για 1 χρόνο, δηλαδή θα φτάσει στην ηλικία } x + 1).$

Το παρακάτω γράφημα απεικονίζει τις πιθανότητες επιβίωσης και θανάτου νεογέννητου ατόμου, για τα επόμενα x έτη.



Γράφημα 1.2: Πιθανότητα επιβίωσης-θανάτου ενός νεογέννητου με σημείο αναφοράς μία ηλικία x .

Η αναμενόμενη τιμή της $T(x)$ συμβολίζεται με e_x^0 και είναι το πλήρες προσδόκιμο ζωής στην ηλικία x . Μαθηματικά αποτυπώνεται ως εξής:

$$e_x^0 = E(T(x)) = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt.$$

Το πλήρες προσδόκιμο ζωής χρησιμοποιείται συνήθως για τη σύγκριση επιπέδων της δημόσιας υγείας μεταξύ διάφορων πληθυσμών.

Η *περικεκομμένη μελλοντική διάρκεια ζωής* $K(x)$ είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει τον αριθμό των μελλοντικών συμπληρωμένων ετών ατόμου ηλικίας x μέχρι το θάνατο του. Η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} Pr(K(x) = k) &= Pr(k < T(x) \leq k + 1) \\ &= Pr(T(x) > k) - Pr(T(x) > k + 1) \\ &= {}_k p_x - {}_{k+1} p_x \\ &= {}_{k+1} q_x - {}_k q_x \\ &= {}_k | q_x, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής της $K(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} Pr(K(x) \leq k) &= \sum_{i=0}^k Pr(K(x) = i) \\ &= \sum_{i=0}^k ({}_{i+1}q_x - {}_i q_x) \\ &= {}_{k+1}q_x, \end{aligned}$$

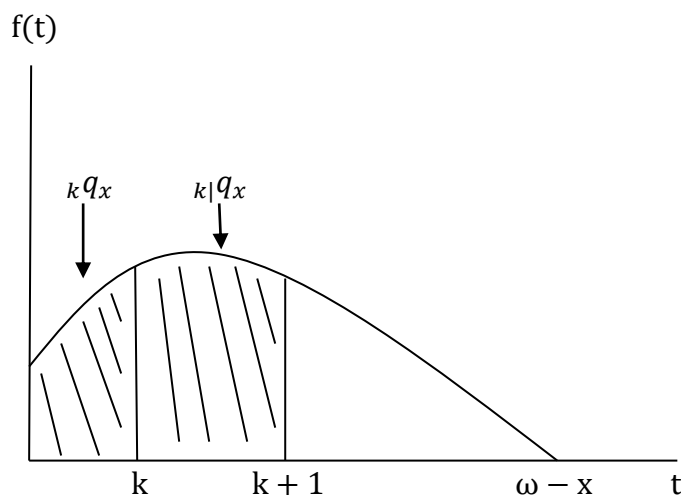
και η συνάρτηση επιβίωσης της είναι:

$$\begin{aligned} Pr(K(x) > k) &= Pr(K(x) \geq k + 1) \\ &= 1 - Pr(K(x) < k + 1) \\ &= 1 - Pr(K(x) \leq k) \\ &= {}_{k+1}p_x. \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη τιμή της $K(x)$ συμβολίζεται με e_x , ονομάζεται *περικεκομμένη αναμενόμενη διάρκεια ζωής*, και δίνεται από τη σχέση:

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k p_x.$$

Το ακόλουθο γράφημα είναι της μελλοντικής διάρκειας ζωής $T(x)$ και της περικεκομμένης μελλοντικής διάρκειας ζωής $K(x)$.



Γράφημα 1.3: Γραφική αναπαράσταση της μελλοντικής διάρκειας ζωής $T(x)$ στο χρόνο t καθώς και το διάστημα της περικεκομμένης μελλοντικής διάρκειας ζωής $K(x)$.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε ένα ευρύτατα γνωστό μοντέλο επιβίωσης, το νόμο *De Moivre*. Είναι ένας νόμος θνησιμότητας ο οποίος βασίζεται σε μία γραμμική συνάρτηση επιβίωσης. Ειδικότερα έχει μία μόνο παράμετρο ω που ονομάζεται ανώτατη ηλικία.

Υπό το νόμο De Moivre ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$S(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad 0 \leq x < \omega.$$

$${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{\omega - (x+t)}{\omega - x}, \quad 0 \leq t < \omega - x.$$

$${}_t q_x = \frac{S(x)}{S(x+t)} = \frac{t}{\omega - x}, \quad 0 \leq t < \omega - x.$$

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - (x+t)}, \quad 0 \leq t < \omega - x.$$

Επίσης ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής $T(x)$ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, \omega - x)$.

1.2 Ένταση θνησιμότητας & πίνακας θνησιμότητας

Μία πολύ σημαντική έννοια η οποία θα οριστεί παρακάτω, είναι η *ένταση θνησιμότητας*. Ειδικότερα γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ένα νεογέννητο να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών x και z , δοθέντος ότι θα επιζήσει για x έτη είναι:

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z | X > x) &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}, x < z. \end{aligned}$$

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα ζωής dx της τυχαίας μεταβλητής X . Επομένως οι τιμές που παίρνει η X στο διάστημα $(x, x + dx)$ δοθέντος ότι έχει επιζήσει για x έτη εκφράζεται με την δεσμευμένη πιθανότητα:

$$\begin{aligned}
Pr(x < X \leq x + dx | X > x) &= \frac{Pr(x < X \leq x + dx)}{Pr(X > x)} \\
&= \frac{F(x) - F(x + dx)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{F(x) - F(x + dx)}{1 - F(x)} \\
&\cong \frac{-f(x)dx}{1 - F(x)}.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα με το dx και παίρνουμε το όριο αυτής με το dx να τείνει στο 0. Έτσι ορίζουμε την ένταση θνησιμότητας. Δηλαδή έχουμε:

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{Pr(x < X \leq x + dx | X > x)}{dx}, x \geq 0.$$

Επιπλέον έχουμε τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$\mu_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{Pr(x < X \leq x + dx)}{Pr(X > x) dx},$$

και

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx} F(x) \\
&= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} \\
&= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx}.
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ποσότητες προκύπτει ότι:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$

Ο αριθμητής της τελευταίας ποσότητας προκύπτει από:

$$f(t) = F'(t) = [1 - S(t)]' = -S'(t).$$

Ουσιαστικά η ένταση θνησιμότητας δίνει τη πιθανότητα άτομο ηλικίας x να πεθάνει εντός του διαστήματος $x + dx$.

Μεγάλη χρησιμότητα σε αναλογιστικές εφαρμογές προσφέρει ο πίνακας θνησιμότητας (ή πίνακας επιβίωσης), ο οποίος αποτελεί ένα τρόπο παρουσίασης των πιθανοτήτων επιβίωσης (ή αποβίωσης) αλλά και του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ενός συνόλου. Αναφορά και μελέτη στους πίνακες θνησιμότητας γίνεται σε πολλά βιβλία, όπως King (1902), Spurgeon (1932), Jordan (1967), Hooker & Longley-Cook (1953) και Neil (1977). Κάποιες βασικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται σε ένα πίνακα θνησιμότητας είναι οι q_x, l_x, d_x . Πιο συγκεκριμένα με l_x συμβολίζεται ο αριθμός των ατόμων που επιζούν στην αρχή του x - οστού έτους (από ένα αρχικό πληθυσμό l_0 ατόμων). Είναι συνεχής και φθίνουσα με $\lim_{x \rightarrow \infty} l_x = 0$. Το d_x υποδηλώνει τον αριθμό των ατόμων που απεβίωσαν σε ένα διάστημα από $(x, x + 1)$. Τέλος το q_x είναι η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να πεθάνει εντός του διαστήματος $[x, x + 1]$.

Κάποιες χρήσιμες σχέσεις που συνδέουν τις συναρτήσεις ενός πίνακα θνησιμότητας είναι οι εξής:

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0} \Rightarrow l_x = l_0 S(x).$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}, {}_1 d_x = d_x = l_x - l_{x+1} \Rightarrow l_x = d_x + l_{x+1}.$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, {}_1 p_x = p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x}, {}_1 q_x = q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Παρακάτω ακολουθούν πίνακες των σχέσεων από τη σύνδεση των παραπάνω ποσοτήτων:

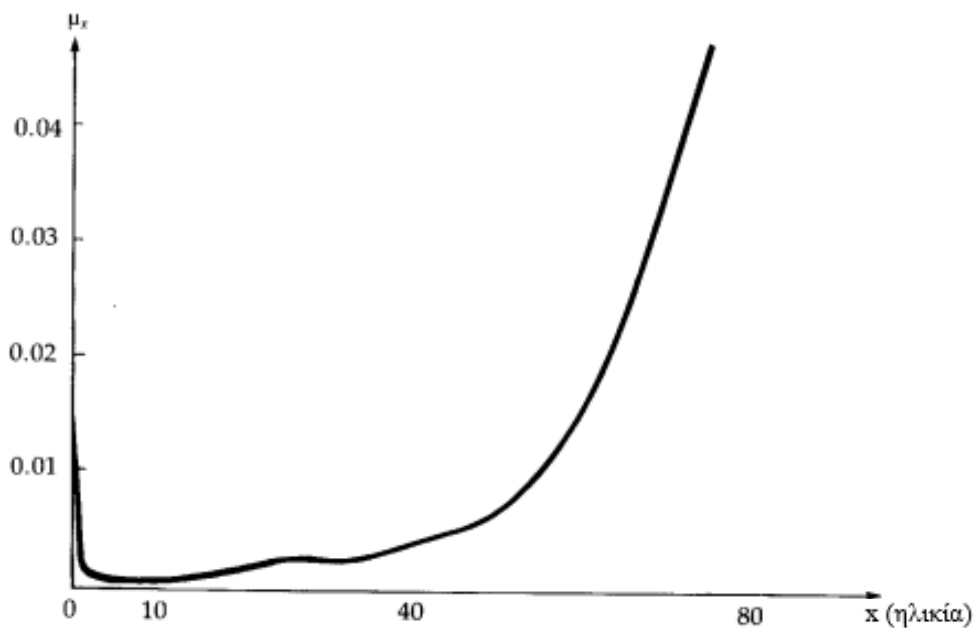
Συνάρτηση	$F(x)$	$f(x)$	$S(x)$	μ_x
$F(x)$	-	$F'(x)$	$1 - F(x)$	$\frac{F'(x)}{1 - F(x)}$
$f(x)$	$\int_0^x f(t)dt$	-	$1 - \int_0^x f(t)dt$	$\frac{f(x)}{1 - \int_0^x f(t)dt}$
$S(x)$	$1 - S(x)$	$-S'(x)$	-	$\frac{-S'(x)}{S(x)}$
μ_x	$1 - e^{-\int_0^x \mu_t dt}$	$\mu_x e^{-\int_0^x \mu_t dt}$	$e^{-\int_0^x \mu_t dt}$	-

Πίνακας 1.1: Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων.

	Συνάρτηση πυκνότητας $F(x)$	Συνάρτηση επιβίωσης $S(x)$	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$	Ένταση θνησιμότητας μ_x
Για	Απαιτήσεις			
$x < 0$	$F(x) = 0$	$S(x) = 1$	$f(x) = 0$	$\mu_x = 0$
$x = 0$	$F(0) = 0$	$S(0) = 1$	-	-
$x \geq 0$	<i>Μη φθίνουσα</i>	<i>Μη αύξουσα</i>	$f(x) \geq 0$	$\mu_x \geq 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty}$	$F(\infty) = 1$	$S(\infty) = 0$	$\int_0^{\infty} f(x) dt = 1$	$\int_0^{\infty} \mu_x dx = \infty$

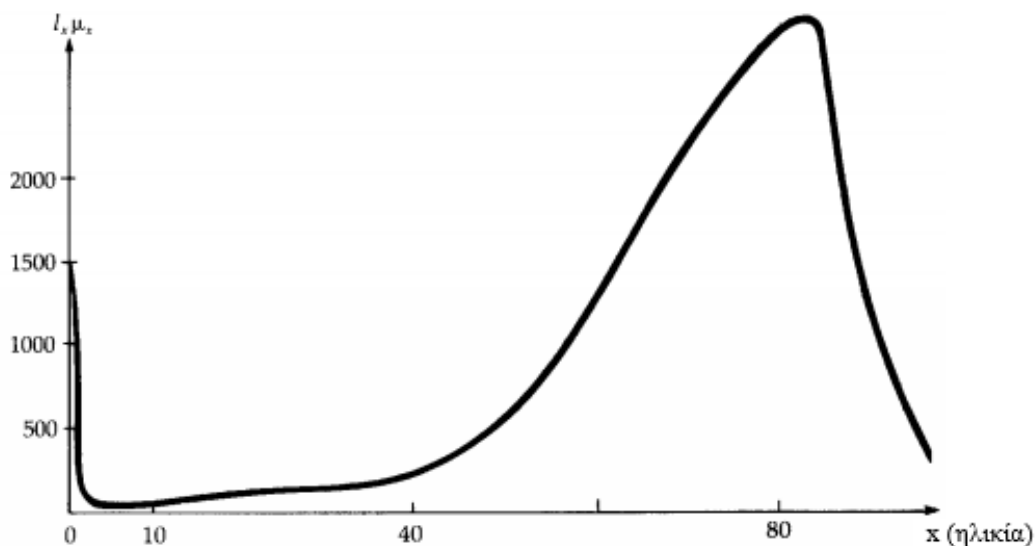
Πίνακας 1.2: Περιπτώσεις των συναρτήσεων της θεωρίας πιθανοτήτων στο χρόνο x .

Στη συνέχεια ακολουθούν οι γραφικές απεικονίσεις της έντασης θνησιμότητας μ_x και της αναμενόμενης πιθανότητας θανάτων $l_x \mu_x$, όπως και του αριθμού επιζώντων l_x .



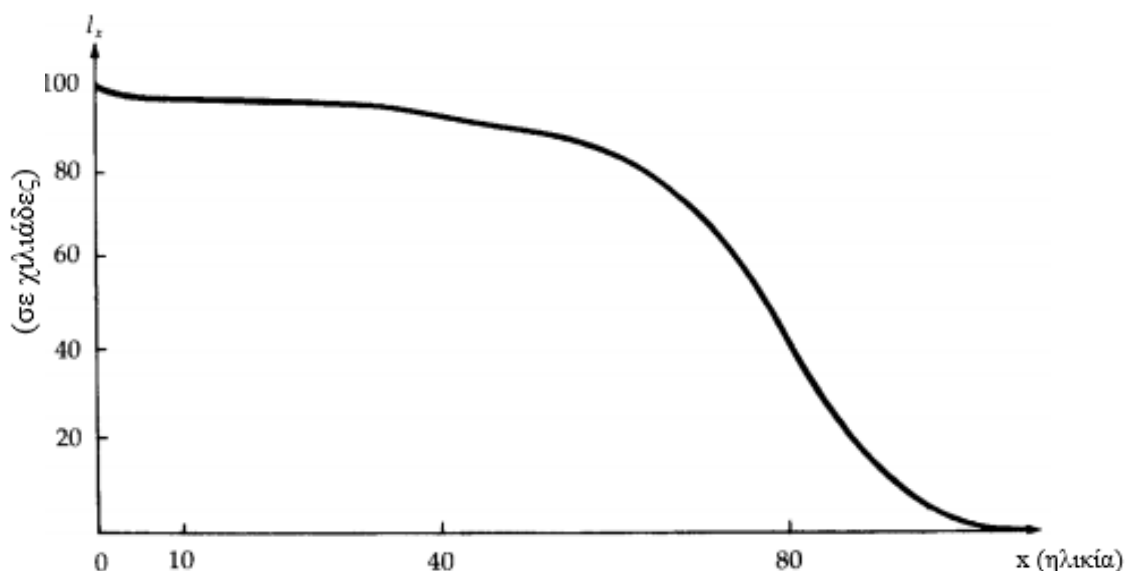
Γράφημα 1.4: Γράφημα της έντασης θνησιμότητας μ_x στην ηλικία x . Πηγή Bowers et.al (1997).

Η ένταση θνησιμότητας για το πρώτο έτος έχει αρκετά υψηλές τιμές, ενώ στη συνέχεια μειώνεται στο ελάχιστο, δηλαδή περίπου στην ηλικία των 10. Παρατηρούμε ότι $\mu_x > 0$ και ότι ικανοποιείται η απαίτηση $\int_0^{\infty} \mu_x dx = \infty$.



Γράφημα 1.5: Η συνάρτηση $l_x \mu_x$ είναι η αναμενόμενη πυκνότητα θανάτων στην ηλικία x , κάτω από την ιδέα της τυχαίας επιβίωσης. Πηγή Bowers et.al (1997).

Η $l_x \mu_x$ είναι ανάλογη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για το έτος θανάτου ενός νεογέννητου. Το συγκεκριμένο γράφημα ονομάζεται καμπύλη των θανάτων.



Γράφημα 1.6: Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης l_x στην ηλικία x . Πηγή Bowers et.al (1997).

Ο αριθμός των επιζώντων είναι ανάλογος της συνάρτησης επιβίωσης $S(x)$. Ερμηνεύεται επίσης και ως αναμενόμενος αριθμός ζώων στην ηλικία x από ένα αρχικό σύνολο l_0 .

1.3 Νόμοι θνησιμότητας Gompertz & Makeham

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε δύο πολύ σημαντικούς κανόνες, οι οποίοι έχουν ευρεία χρήση:

Ο πρώτος είναι εκείνος της *θνησιμότητας Gompertz*, σύμφωνα με τον οποίο η ικανότητα αντίστασης στο θάνατο φθίνει γεωμετρικά, με αποτέλεσμα η ένταση θνησιμότητας να αυξάνεται εκθετικά. Η μαθηματική του αποτύπωση ορίζεται ως:

$$\mu_x = BC^x,$$

όπου B, C σταθερές με $B > 0$ και $C > 1$.

Ο παραπάνω κανόνας παρουσιάζεται αρκετά αξιόπιστος στην περιγραφή δεδομένων θνησιμότητας για ένα αρκετά μεγάλο ηλικιακό εύρος, αλλά δεν είναι τόσο ικανοποιητικός σε μικρές ή μεγάλες ηλικίες. Τέλος το σημαντικότερο μειονέκτημα του είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη ένα θάνατο από τυχαία αίτια, παρά μόνο από φυσιολογικά.

Το παραπάνω γεγονός ήρθε να διορθώσει ο *νόμος θνησιμότητας Makeham* για τις νεότερες ηλικίες. Αυτό επιτεύχθηκε με την προσθήκη ενός σταθερού όρου στην ένταση θνησιμότητας. Στην περίπτωση αυτή η ένταση θνησιμότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\mu_x = A + BC^x.$$

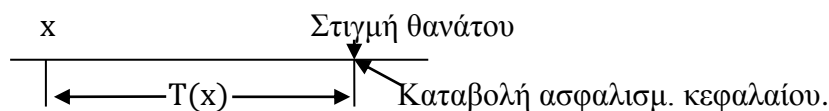
Το A κυμαίνεται συνήθως μεταξύ των τιμών 0.001 και 0.003. Αυτό σημαίνει πως έχει σημαντικότερη επίδραση στην ένταση θνησιμότητας για νεότερες ηλικίες όπου το x έχει μικρή τιμή, δηλαδή η ποσότητα BC^x είναι σχετικά μικρή. Αντιθέτως στις μεγαλύτερες ηλικίες όπου η ποσότητα BC^x παίρνει μεγαλύτερες τιμές, το A έχει μηδαμινή επίδραση στην ένταση θνησιμότητας. Σε αυτή την περίπτωση οι καμπύλες του Makeham και Gompertz είναι σχεδόν πανομοιότυπες.

1.4 Ασφαλίσεις Ζωής & Ράντες Ζωής

Στη παρούσα εργασία ασχολούμαστε με τις Ασφαλίσεις Ζωής στις οποίες γίνεται μία μοναδική πληρωμή τη στιγμή θανάτου του ασφαλισμένου (\bar{A}_x). Γενικότερα το ποσό και η στιγμή της πληρωμής του ασφαλιστικού συμβολαίου (A_x) εξαρτώνται από τη διάρκεια και από το είδος του ασφαλιστικού συμβολαίου.

Ειδικότερα έχουμε τις περιπτώσεις:

- Ισόβια Άμεση

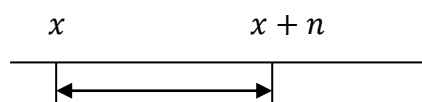


Το ασφαλισμένο κεφάλαιο (αποζημίωση) θα καταβληθεί τη στιγμή του θανάτου του ασφαλισμένου ατόμου ηλικίας x ($x > 0$). Συμβολίζεται με:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (1.4.1)$$

Με $v = \frac{1}{1+i}$ συμβολίζεται ο προεξοφλητικός παράγοντας. Ουσιαστικά είναι η παρούσα αξία μίας μονάδας που θα πληρωθεί στο τέλος της $1^{ης}$ περιόδου. Επίσης με i εκφράζεται το επιτόκιο.

- Πρόσκαιρη άμεση n – ετών

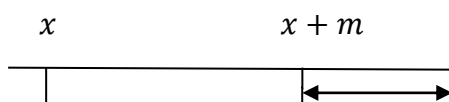


Στη περίπτωση που ο ασφαλισμένος πεθάνει εντός του διαστήματος $[x, x+n]$ τότε υπάρχει καταβολή αποζημίωσης τη στιγμή του θανάτου του. Αντιθέτως αν πεθάνει μετά το διάστημα $x + n$ τότε δεν υπάρχει αποζημίωση.

Η παρακάτω σχέση εκφράζει τα παραπάνω:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (1.4.2)$$

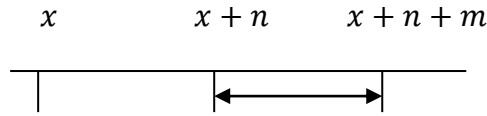
- Ισόβια μέλλουσα m – ετών.



Σε αυτό το ασφαλιστικό συμβόλαιο η πληρωμή της αποζημίωσης γίνεται τη στιγμή του θανάτου του ασφαλισμένου με τη προϋπόθεση ότι ο θάνατος θα συμβεί μετά την ηλικία $x + m$. Αν πεθάνει εντός του διαστήματος $[x, x + m]$, τότε δεν υπάρχει περίπτωση αποζημίωσης. Άρα:

$${}_m\bar{A}_x = \int_m^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (1.4.3)$$

- Μέλλουσα n – ετών και πρόσκαιρη m – ετών.



Αποζημίωση τη στιγμή του θανάτου του υπάρχει μόνο στο διάστημα $[x+n, x+n+m]$. Σε άλλο διάστημα δεν υπάρχει αποζημίωση. Επομένως έχουμε ότι:

$${}_{n|m}\bar{A}_x = \int_n^{n+m} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (1.4.4)$$

Ράντα Ζωής είναι μία σειρά από πληρωμές που γίνονται, από τον ασφαλισμένο, συνεχώς ή σε ίσα χρονικά διαστήματα, όπως ανά μήνα, τρίμηνο, τετράμηνο ή χρόνο. Μπορεί να είναι προσωρινή, δηλαδή να είναι για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο ή να καταβάλλεται για όσο διάστημα είναι εν ζωή ο ασφαλισμένος. Τέλος οι πληρωμές αν γίνονται στην αρχή των διαστημάτων πληρωμών λέγονται *προκαταβλητές ράντες* ($\ddot{\alpha}_x$) ενώ αν γίνονται στο τέλος των διαστημάτων λέγονται *ληξιπρόθεσμες* (α_x).

Παρακάτω παρατίθεται συγκεντρωτικός πίνακας των σχέσεων των παραπάνω ραντών ζωής:

	Προκαταβλητέα	Ληξιπρόθεσμη
Ισόβια Άμεση	$\ddot{\alpha}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x$	$\alpha_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x$
Πρόσκαιρη n-ετών άμεση	$\ddot{\alpha}_{x:\overline{n} } = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x$	$\alpha_{x:\overline{n} } = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x$
Ισόβια μέλλουσα m-ετών	${}_m \ddot{\alpha}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_k p_x$	${}_m \alpha_x = \sum_{k=m+1}^{\infty} v^k {}_k p_x$
Πρόσκαιρη n-ετών μέλλουσα m-ετών	${}_m \ddot{\alpha}_{x:\overline{n} } = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k {}_k p_x$	${}_m \alpha_{x:\overline{n} } = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k {}_k p_x$

Πίνακας 1.3: Σχέσεις Ραντών Ζωής.

Για τη περίπτωση που οι πληρωμές δεν είναι ετήσιες αλλά συχνότερες (μηνιαίες, τριμηνιαίες κλπ), θα έχουμε συνολικές πληρωμές m ανά έτος (δηλαδή η κάθε πληρωμή είναι ίση με $1/m$), επομένως οι αντίστοιχοι τύποι είναι ως εξής:

$$\text{Ισόβια Άμεση:} \begin{cases} \ddot{\alpha}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_x \\ \alpha_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_x. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

$$\text{Πρόσκαιρη } n - \text{ετών Άμεση:} \begin{cases} \ddot{\alpha}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_x \\ \alpha_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{nm} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_x. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

$$\text{Ισόβ. μέλλουσα } n - \text{ετών:} \begin{cases} {}_n|\ddot{\alpha}_x^{(m)} = \frac{1}{m} v^n {}_n p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_{x+n} = v^n {}_n p_x \ddot{\alpha}_{x+n}^{(m)} \\ {}_n|\alpha_x^{(m)} = \frac{1}{m} v^n {}_n p_x \sum_{k=1}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_{x+n} = v^n {}_n p_x \alpha_{x+n}^{(m)}. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Επίσης μία πολύ χρήσιμη σχέση που συνδέει τις Ασφαλίσεις Ζωής με τις Ράντες είναι η εξής:

$$d\ddot{\alpha}_x + A_x = 1, \text{ όπου } d = \frac{i}{1+i}.$$

Επίσης είναι προφανές ότι ισχύει $d = iv$.

Τέλος έχουμε τις *συνεχείς* ράντες ζωής στις οποίες οι πληρωμές καταβάλλονται συνεχώς, δηλαδή:

Ισόβια Άμεση:

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x dt. \quad (1.4.8)$$

Πρόσκαιρη n – ετών Άμεση:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x dt. \quad (1.4.9)$$

Ισόβια μέλλουσα n – ετών:

$${}_n|\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t {}_t p_x dt. \quad (1.4.10)$$

Παρακάτω θα δούμε κάποια παραδείγματα των συναρτήσεων και των ποσοτήτων που αναλύθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο (βλέπε Hassett et.al, 2007).

Παράδειγμα 1.1

Έστω $S(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2$ για $0 \leq x < 100$.

Τότε η συνάρτηση κατανομής για την ηλικία $x = 75$ είναι:

$$F(75) = 1 - S(75) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16},$$

με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(75) = -S'(75) = \frac{2}{100} \left(1 - \frac{75}{100}\right) = \frac{1}{200},$$

και τέλος η ένταση θνησιμότητας ισούται με:

$$\mu_{75} = \frac{f(75)}{S(75)} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{16}} = \frac{8}{100}.$$

Παράδειγμα 1.2

Με βάση το Πίνακα θνησιμότητας του συνολικού πληθυσμού: Ηνωμένων Πολιτειών 1979-1981 (Βλέπε Παράρτημα) η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας 20:

να φτάσει τα 100 χρόνια ζωής είναι:

$$\frac{S(100)}{S(20)} = \frac{l_{100}}{l_{20}} = \frac{1,150}{97,741} = 0,0118.$$

να πεθάνει πριν τα 70:

$$\frac{S(20) - S(70)}{S(20)} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{20}} = 1 - \frac{68,248}{97,741} = 0,3017.$$

να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών 90 και 100:

$$\frac{S(90) - S(100)}{S(20)} = \frac{l_{90} - l_{100}}{l_{20}} = \frac{14,154 - 1,150}{97,741} = 0,1330.$$

Παράδειγμα 1.3

Έστω ότι $l_x = (121 - x)^{\frac{1}{2}}$ για $0 \leq x \leq 121$, και θέλουμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα άτομο ηλικίας 21 ετών να πεθάνει μετά την ηλικία των 40 αλλά πριν φτάσει στα 57. Δηλαδή άτομο ηλικίας 21 ετών να ζήσει για 19 ακόμη χρόνια και να πεθάνει στα επόμενα 17, το οποίο μαθηματικά εκφράζεται με ${}_{19|17}q_{21}$.

Γενικότερα γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} m|nq_x &= m+nq_x - mq_x \\ &= mp_x - m+npx \\ &= \frac{l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_{x+m+n}}{l_x}. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} {}_{19|17}q_{21} &= \frac{l_{40}}{l_{21}} - \frac{l_{57}}{l_{21}} \\ &= \frac{(121 - 40)^{\frac{1}{2}} - (121 - 57)^{\frac{1}{2}}}{(121 - 21)^{\frac{1}{2}}} = 0,1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.4

Γνωρίζουμε ότι $\mu_x = \frac{2}{100-x}$ με $0 \leq x < 100$, οπότε

Η συνάρτηση επιβίωσης της είναι:

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = \left(\frac{100-x}{100}\right)^2,$$

με
$$-\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x -\frac{2}{100-t} dt = 2 \ln(100-t) \Big|_0^x = \ln \left[\left(\frac{100-x}{100}\right)^2 \right].$$

Η συνάρτηση κατανομής ισούται με :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{100-x}{100}\right)^2 = \frac{200x - x^2}{10000},$$

και τέλος η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f(x) = -2 \left(\frac{100-x}{100}\right) \left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{200-2x}{10000}.$$

Παράδειγμα 1.5

Στο παράδειγμα 1.4 βρέθηκαν σχέσεις για τις $S(x)$, $F(x)$ και $f(x)$, με την ένταση θνησιμότητας να έχει γενικότερο τύπο $\mu_x = \frac{r}{\omega-x}$.

Επομένως μία ένταση θνησιμότητας της μορφής $\mu_x = \frac{2}{80-x}$ για $0 \leq x < 80$ έχει συνάρτηση επιβίωσης:

$$S(x) = \left(1 - \frac{x}{80}\right)^2 = \left(\frac{80-x}{80}\right)^2,$$

και γενικότερα γνωρίζουμε ότι:

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{S(x+t)}{S(x)}.$$

Άρα η συνάρτηση επιβίωσης για τη μελλοντική διάρκεια ζωής $x = 20$ θα ισούται με:

$$S(t) = \frac{S(20+t)}{S(20)}$$

$$= \left(\frac{80 - (20 + t)}{80} \right)^2 / \left(\frac{80 - 20}{80} \right)^2$$

$$= \left(\frac{60 - t}{60} \right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{t}{60} \right)^2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η οικογένεια κλασματικών υποθέσεων και οι υποπεριπτώσεις της

Οι υποθέσεις των κλασματικών ηλικιών (*Fractional Age Assumptions*) είναι πολύ σημαντικές, γιατί προσφέρουν μεγάλη βοήθεια σε διάφορους αναλογιστικούς υπολογισμούς, αλλά και στην εκτίμηση ποσοστών θνησιμότητας. Επιπλέον όταν συνδυάζονται με πίνακες θνησιμότητας καθορίζουν την ηλικία στη κατανομή θανάτου. Γενικά γνωρίζουμε ότι συνηθίζεται σε ένα ολόκληρο ηλικιακό διάστημα να εφαρμόζεται μία μόνο υπόθεση κλασματικής ηλικίας (FAA), με αποτέλεσμα η ένταση θνησιμότητας που παράγεται μεταξύ των ακέραιων ηλικιών, να μην είναι σύμφωνη με τα ποσοστά θνησιμότητας στις ηλικίες αυτές.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα βασιστούμε στη μελέτη των Jones & Mereu (2000), οι οποίοι πρότειναν η FAA να διαφέρει σε κάθε ηλικία. Αυτό θα επιτευχθεί με τη βοήθεια μίας γενικευμένης οικογένειας κλασματικών υποθέσεων που θα διευκολύνει την σωστή επιλογή μέλους της ώστε να παράγεται μία καλύτερη ένταση θνησιμότητας.

Αρχικά στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τρεις υποθέσεις, οι οποίες αποτελούν τα πιο γνωστά μέλη της γενικευμένης οικογένειας που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή την ομοιόμορφη κατανομή θανάτου (*Uniform Death Distribution*), την σταθερή ένταση θνησιμότητας (*Constant Force of Mortality*) και την υπόθεση Balducci.

Έπειτα θα αναλύσουμε την γενικευμένη οικογένεια και κάποιες περιπτώσεις της, όπως όταν η ένταση θνησιμότητας είναι συνεχής και με το $a_x = a$ για όλα τα x . Στη συνέχεια θα διερευνηθούν οι μέθοδοι καθορισμού των a_x τιμών, ώστε κάθε φορά να προκύπτει η κατάλληλη υπόθεση από την γενικευμένη οικογένεια.

Στη τελευταία ενότητα θα αναφερθούμε στις μεθόδους εκτίμησης των ποσοστών θνησιμότητας και το ρόλο που έχουν οι FAAs σε αυτές. Τέλος δίνονται κάποια παραδείγματα σε όσα θα παρουσιαστούν και θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 2.

2.1 Οι τρεις γνωστές υποθέσεις και η γενικευμένη τους μορφή

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τις τρεις γνωστές υποθέσεις που αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, οι οποίες έχουν μεγάλη χρησιμότητα στην αναλογιστική επιστήμη. Στη συνέχεια θα εισάγουμε και θα αναλύσουμε την γενικευμένη τους οικογένεια. Ειδικότερα έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- **Ομοιόμορφη κατανομή θανάτων (UDD):** Η συνάρτηση επιβίωσης $S(\cdot)$ της ηλικίας θανάτου είναι τυχαία μεταβλητή και είναι γραμμικός συνδυασμός των ακέραιων ηλικιών. Δηλαδή υπό αυτή την υπόθεση το ${}_t p_x$ είναι γραμμική συνάρτηση. Επομένως έχουμε:

$$S(x+t) = (1-t)S(x) + tS(x+1), \text{ για } x \geq 0 \text{ και } 0 < t < 1.$$

Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$${}_t q_x = tq_x, \quad {}_t p_x = 1 - t(1 - p_x),$$

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x} \text{ και } {}_t p_x \mu_{x+t} = q_x.$$

- **Σταθερής έντασης θνησιμότητας (CFM):** Είναι συνεπής με την υπόθεση ότι η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή μεταξύ των ακέραιων ηλικιών. Υπό αυτή την υπόθεση το ${}_t p_x$ είναι εκθετικό. Οπότε:

$$\mu_{x+t} = \mu_x, \quad \mu_x = -\log p_x \text{ και } {}_t p_x = (p_x)^t.$$

- **Υπόθεση Balducci (Αρμονική Παρεμβολή):** Το αντίστροφο της συνάρτησης επιβίωσης είναι γραμμικός συνδυασμός μεταξύ των ακέραιων ηλικιών. Επομένως υπό αυτή την υπόθεση το ${}_t p_x$ είναι υπερβολική καμπύλη. Ειδικότερα έχουμε ότι:

$$S(x+t)^{-1} = (1-t)S(x)^{-1} + tS(x+1)^{-1}.$$

Επιπλέον

$${}_t p_x = \frac{p_x}{1 - (1-t)q_x} \text{ και } \mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - (1-t)q_x}.$$

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε την *γενικευμένη οικογένεια υποθέσεων* και κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες της, που όπως προαναφέραμε θα έχει σημαντικό ρόλο ώστε να λαμβάνουμε καλύτερη ένταση θνησιμότητας, το οποίο θα αναλυθεί εκτενώς στην Ενότητα 2.3. Ειδικότερα έχουμε ότι:

Η $S(x+t)^{\alpha_x}$ είναι μία γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στις:

$$S(x)^{\alpha_x} \text{ και } S(x+1)^{\alpha_x},$$

με το α_x να είναι πραγματική παράμετρος.

Η οικογένεια των FAAs ορίζεται ως εξής:

$${}_t p_x = \begin{cases} [1 - t + t p_x^{\alpha_x}]^{\frac{1}{\alpha_x}}, & \alpha_x \neq 0 \\ p_x^t, & \alpha_x = 0 \end{cases}, x \geq 0 \text{ και } 0 < t < 1. \quad (2.1.1)$$

Η σχέση (2.1.1) είναι συνεχής συνάρτηση της α_x και παρατηρούμε ότι καταλήγει στην ομοιόμορφη κατανομή θανάτου, σταθερής έντασης θνησιμότητας και την υπόθεση Balducci για $\alpha_x = 1, 0, -1$ αντίστοιχα.

Η ένταση θνησιμότητας αντιστοιχεί στο παρακάτω τύπο:

$$\mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x [1 - t + t p_x^{\alpha_x}]}, & \alpha_x \neq 0 \\ -\log p_x, & \alpha_x = 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιες ιδιότητες της έντασης θνησιμότητας με τη βοήθεια της 1^{ης} και 2^{ης} παράγωγου της.

1^η Παράγωγος:

$$\frac{d}{dt} \mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{[1 - p_x^{\alpha_x}]^2}{\alpha_x [1 - t + t p_x^{\alpha_x}]^2}, & \alpha_x \neq 0 \\ 0, & \alpha_x = 0 \end{cases} = \alpha_x \mu_{x+t}^2. \quad (2.1.3)$$

Από το αποτέλεσμα της 1^η παραγώγου παρατηρούμε ότι η κλίση της έντασης θνησιμότητας διαχωρίζεται ως εξής:

- > 0 όταν $\alpha_x > 0$.
- < 0 όταν $\alpha_x < 0$.
- $= 0$ όταν $\alpha_x = 0$.

2^η Παράγωγος:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{2[1 - p_x^{\alpha_x}]^3}{\alpha_x [1 - t + tp_x^{\alpha_x}]^3}, & \alpha_x \neq 0 \\ 0, & \alpha_x = 0 \end{cases} = 2\alpha_x^2 \mu_{x+t}^3 \geq 0. \quad (2.1.4)$$

Παρατηρούμε λοιπόν από την 2^η παράγωγο ότι η ένταση θνησιμότητας είναι κυρτή συνάρτηση της t για όλα τα α_x .

Οι παρακάτω σχέσεις (2.1.5) και (2.1.6) είναι οριακές περιπτώσεις της έντασης θνησιμότητας στο 0^+ και στο 1^- , οι οποίες θα χρειαστούν στην Ενότητα 2.3.

$$\mu_{x+} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x}, & \alpha_x \neq 0 \\ -\log p_x, & \alpha_x = 0. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

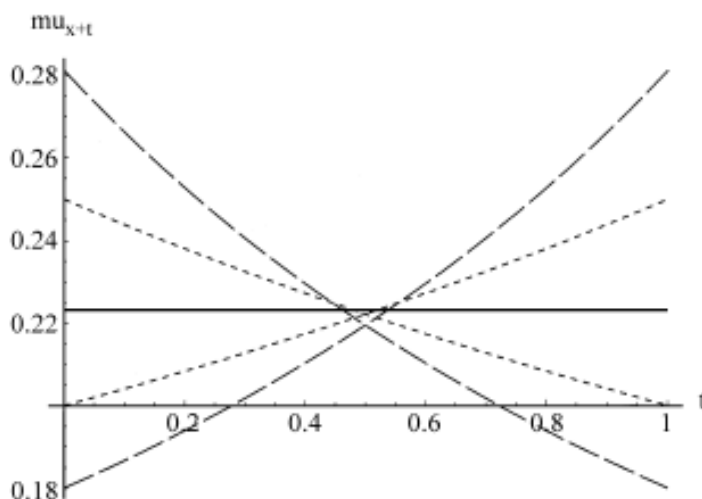
$$\mu_{x+1^-} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x p_x^{\alpha_x}}, & \alpha_x \neq 0 \\ -\log p_x, & \alpha_x = 0. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Το πηλίκο των δύο ορίων θα είναι:

$$\frac{\mu_{x+1^-}}{\mu_{x+}} = p_x^{-\alpha_x} \text{ για } \alpha_x \neq 0.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω πηλίκο μπορούμε να πούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του $|\alpha_x|$ τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η ποσοστιαία μεταβολή της έντασης θνησιμότητας στο ηλικιακό διάστημα $(x, x + 1)$. Όπως και για την περίπτωση του q_x ($p_x = 1 - q_x$) το οποίο όταν αυξάνεται θα αυξάνεται και το ποσοστό μεταβολής της έντασης θνησιμότητας, για οποιαδήποτε τιμή του α_x .

Το επόμενο γράφημα παρουσιάζει την ένταση θνησιμότητας μ_{x+t} στο χρόνο t για $\alpha_x = -2, -1, 0, 1, 2$ και $q_x = 0.2$:



Γράφημα 2.1: Γραφική απεικόνιση της έντασης θνησιμότητας μ_{x+t} στο χρόνο t για $\alpha_x = -2, -1, 0, 1, 2$ και $q_x = 0.2$. Πηγή: Jones & Mereu (2000).

Στο γράφημα οι μικρές διακεκομμένες αντιπροσωπεύουν τις UDD και Balducci για $\alpha_x = 1, -1$ αντίστοιχα και η CFM την συνεχή γραμμή για $\alpha_x = 0$. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη της έντασης στη περίπτωση της UDD είναι αύξουσα σε αντίθεση με της Balducci που είναι φθίνουσα, ενώ γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η περίπτωση της σταθερής έντασης ανταποκρίνεται στην ευθεία καμπύλη. Τέλος οι τιμές $\alpha_x = 2, -2$ αποτελούν πιο ακραίες περιπτώσεις των δύο γνωστών υποθέσεων (UDD, Balducci) και σχηματικά είναι οι μακρά διακεκομμένες.

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης ${}_t p_x \mu_{x+t}$ για ακέραιο x και $0 < t < 1$, η οποία είναι το γινόμενο των σχέσεων (2.1.1) και (2.1.2). Η συνάρτηση αυτή έχει σημαντικό ρόλο στο καθορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου μέχρι το θάνατο ατόμου ηλικίας $y \leq x$. Η σχέση που την προσδιορίζει είναι:

$${}_t p_x \mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x [1 - t + t p_x^{\alpha_x}]^{1 - \frac{1}{\alpha_x}}}, & \alpha_x \neq 0 \\ -p_x^t \log p_x, & \alpha_x = 0. \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Η παράγωγος της ποσότητας ${}_t p_x \mu_{x+t}$ για κάθε $0 < t < 1$ είναι:

$$\frac{d}{dt} {}_t p_x \mu_{x+t} = \begin{cases} \frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha_x}\right) (1 - p_x^{\alpha_x})^2}{\alpha_x [1 - t + t p_x^{\alpha_x}]^{2 - \frac{1}{\alpha_x}}}, & \alpha_x \neq 0 \\ -p_x^t [\log p_x]^2, & \alpha_x = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Σύμφωνα με τον τύπο της παραγώγου συμπεραίνουμε ότι για κάθε $0 < t < 1$ ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt} {}_t p_x \mu_{x+t} = \begin{cases} > 0 & \text{με } \alpha_x > 1. \\ < 0 & \text{με } \alpha_x < 1. \\ = 0 & \text{με } \alpha_x = 1. \end{cases}$$

Όπως αναφέραμε η εφαρμογή μίας οποιαδήποτε υπόθεσης ή μίας εκ των τριών γνωστών που παρουσιάστηκαν παραπάνω, σε διαδοχικά ηλικιακά διαστήματα δίνει εντάσεις θνησιμότητας που είναι ασυνεχείς για ακέραιες ηλικίες. Αντιθέτως η ένταση θνησιμότητας θα έπρεπε να ήταν συνεχής συνάρτηση, το οποίο επιτυγχάνεται με το α_x να διαφέρει από ηλικία σε ηλικία και το q_x να παίρνει διάφορες τιμές.

Για να αποδείξουμε το παραπάνω έχουμε ότι για οποιαδήποτε $\mu_x^- \in (0, \infty)$ και $q_x \in (0, 1)$ υπάρχει α_x τέτοιο ώστε $\mu_x^+ = \mu_x^-$. Ειδικότερα από την σχέση (2.1.5) βρίσκουμε ότι $\lim_{\alpha_x \rightarrow \infty} \mu_x^+ = 0$ και $\lim_{\alpha_x \rightarrow -\infty} \mu_x^+ = \infty$ και η μ_x^+ είναι συνεχής συνάρτηση της α_x . Επομένως από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει α_x τέτοιο ώστε $\mu_x^+ = \mu_x^-$.

2.2 Ειδική περίπτωση της οικογένειας για $\alpha_x = \alpha$

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μια συγκεκριμένη περίπτωση στην οποία $\alpha_x = \alpha$ για όλα τα x και με την ένταση θνησιμότητας να είναι συνεχής. Σε αυτή τη περίπτωση αν το q_x πάρει μία τιμή τότε καθορίζονται και όλες οι υπόλοιπες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά της έντασης θνησιμότητας για διάφορες περιπτώσεις του α .

Έχουμε λοιπόν ότι:

- Για $\alpha = 0$ έχουμε τη γνωστή περίπτωση της σταθερής έντασης θνησιμότητας η οποία ισούται με $-\log p_0$ για όλες τις ηλικίες και η κατανομή της είναι εκθετική.
- Για $\alpha \neq 0$ από τις εξισώσεις (2.1.5) και (2.1.6) έχουμε ότι:

$$\frac{1 - p_x^\alpha}{\alpha p_x^\alpha} = \frac{1 - p_{x+1}^\alpha}{\alpha}$$
$$\Rightarrow p_{x+1}^\alpha = 2 - p_x^{-\alpha}.$$

Από τη παραπάνω σχέση λαμβάνουμε με αναδρομικό τρόπο ότι:

$$p_x^\alpha = \frac{(x+1)p_0^\alpha - x}{x p_0^\alpha - x + 1}. \quad (2.2.1)$$

Επομένως βασιζόμενοι στη σχέση (2.1.1) έχουμε:

$${}_x p_0^\alpha = x p_0^\alpha - x + 1. \quad (2.2.2)$$

- Για $\alpha > 0$ υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε το δεξί μέλος της σχέσης (2.2.1) είναι μικρότερο ή ίσο του μηδέν (≤ 0). Έστω x^* για το οποίο ισχύει ότι $p_{x^*}^\alpha = 0$, και επίσης υπάρχει ηλικία ω της οποίας η πιθανότητα επιβίωσης είναι 0. Τότε η (2.2.1) για $x^* = x$ γίνεται:

$$p_{x^*}^\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \frac{(x^* + 1)p_0^\alpha - x^*}{x^* p_0^\alpha - x^* + 1} = 0$$
$$\Rightarrow (x^* + 1)p_0^\alpha - x^* = 0$$
$$\Rightarrow p_0^\alpha = \frac{x^*}{x^* + 1}.$$

Επομένως:

$$\triangleright \text{Αν } p_0^\alpha = \frac{x^*}{x^*+1} \text{ τότε } \omega = x^* + 1.$$

$$\triangleright \text{Αν } p_0^\alpha < \frac{x^*}{x^*+1} \text{ τότε } x^* < \omega < x^* + 1.$$

Αναλύοντας το παραπάνω περισσότερο, θεωρούμε συνάρτηση επιβίωσης την ${}_t p_0$ για $t \geq 0$ και έστω ότι το x είναι η μεγαλύτερη ακέραια τιμή αλλά μικρότερη ή ίση του t ($x \leq t$). Οπότε θα έχουμε: (βλέπε σχέσεις (2.1.1), (2.2.1) και (2.2.2))

$$\begin{aligned} {}_t p_0 &= {}_x p_0 {}_{t-x} p_x \\ &= {}_x p_0 [1 - (t-x) + (t-x) p_x^\alpha]^\frac{1}{\alpha} \\ &= [x p_0^\alpha - x + 1]^\frac{1}{\alpha} [1 - (t-x) + (t-x) \frac{(x+1) p_0^\alpha - x}{x p_0^\alpha - x + 1}]^\frac{1}{\alpha} \\ \Rightarrow {}_t p_0 &= [1 - t + t p_0^\alpha]^\frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Η τιμή του t δεν περιορίζεται στο διάστημα $(0,1)$ και η σχέση (2.2.3) είναι θετική μόνο για $t < \frac{1}{1-p_0^\alpha}$,

Επομένως:

$$\omega = \frac{1}{1-p_0^\alpha} \text{ με } \frac{t}{\omega} < 1.$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι:

$${}_t p_0 = [1 - \frac{t}{\omega}]^\frac{1}{\alpha} \text{ με } 0 < t < \omega.$$

- Για $\alpha = 1$ έχουμε τη γνωστή συνάρτηση επιβίωσης που ανταποκρίνεται στο νόμο de Moivre's (ομοιόμορφη κατανομή θανάτου).
- Για $\alpha < 0$ η ένταση θνησιμότητας είναι φθίνουσα συνάρτηση και το δεξί μέλος της σχέσης (2.2.1) είναι θετικό για όλα τα x ,

με

$${}_t p_0 = [1 - t + t p_0^\alpha]^\frac{1}{\alpha} \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

- Για $\alpha = -1$ έχουμε τη περίπτωση της υπόθεσης Balducci,

με

$${}_t p_0 = \frac{p_0}{p_0 + tq_0}.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι με σταθερό το α_x σε όλες τις ηλικίες και με συνεχή ένταση θνησιμότητας, καταλήγουμε σε μία οικογένεια κατανομών με δύο παραμέτρους που περιλαμβάνουν την *εκθετική κατανομή*, την *ομοιόμορφη κατανομή* και μία *κατανομή για της οποίας το αντίστροφο της συνάρτησης επιβίωσης είναι γραμμικό*. Τέλος έχουμε τις ειδικές περιπτώσεις όπου για $\alpha > 0$ υπάρχει ηλικία ω της οποίας η πιθανότητα επιβίωσης είναι 0 ενώ για $\alpha \leq 0$ δεν υπάρχει ηλικία ω .

Κλείνοντας αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε επίσης την *αναμενόμενη ηλικία θανάτου* που ανταποκρίνεται σε αυτή την οικογένεια των κατανομών και δίνεται από τον τύπο :

$$e_0^0 = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha + 1)(1 - p_0^\alpha)}, & \alpha > 0 \text{ ή } -1 < \alpha < 0 \\ -\frac{1}{\log p_0}, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

2.3 Κατάλληλη επιλογή παραμέτρου α_x

Η σωστή χρήση της οικογένειας που περιγράψαμε στην Ενότητα 2.1 προϋποθέτει την κατάλληλη επιλογή α_x για κάθε x . Παρακάτω θα παρουσιαστούν δύο τέτοιες μέθοδοι. Έστω ότι έχουμε ένα πίνακα θνησιμότητας, ο οποίος συνδυάζεται με την οικογένεια υποθέσεων, με ποσοστά θνησιμότητας για n συνεχή χρόνια, έστω από y έως $y + n - 1$.

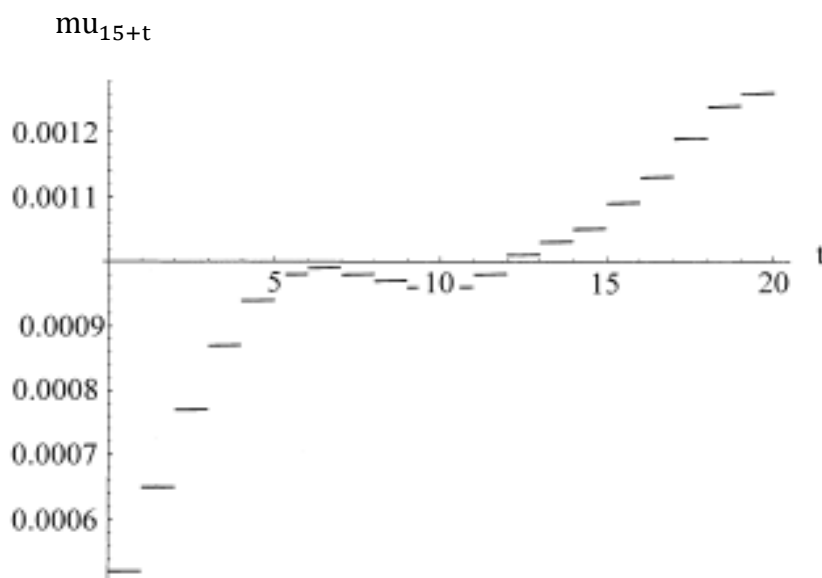
1^η Μέθοδος.

Αρχικά η πρώτη μέθοδος προϋποθέτει η ένταση να είναι συνεχής και εν συνεχεία να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες n τιμές του α_x . Οπότε για $n - 1$ εξισώσεις πρέπει να πληρείται η παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$\frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x p_x^{\alpha_x}} = \frac{1 - p_{x+1}^{\alpha_{x+1}}}{\alpha_{x+1}}, \quad x = y, y + 1, \dots, y + n - 2. \quad (2.3.1)$$

Η επιλογή του a_y είναι σημαντική, αλλά όταν προσδιοριστεί τότε τα υπόλοιπα a_x καθορίζονται από την απαίτηση της συνέχειας.

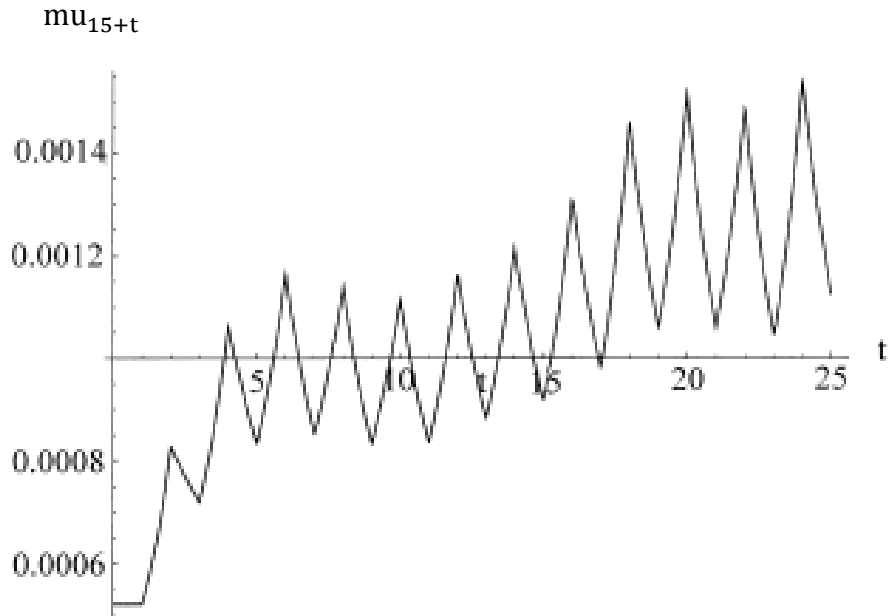
Παρακάτω θα δούμε κάποιες περιπτώσεις εντάσεων θνησιμότητας που προκύπτουν με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής, με κάποιες από αυτές να παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα. Ειδικότερα σύμφωνα με τους Jones & Meru (2000) οι οποίοι βασίστηκαν στον ανδρικό αθροιστικό πίνακα θνησιμότητας (ηλικίες 15-39) του Καναδικού Ινστιτούτου Αναλογιστών (Canadian Institute of Actuaries), παρουσίασαν την απεικόνιση της UDD στο Γράφημα 2.2.



Γράφημα 2.2: Ένταση θνησιμότητας υπό την UDD ($a_x = 1$ για όλα τα x).
Πηγή: Jones & Meru, (2000).

Παρατηρούμε από το γράφημα ότι με αυτή τη μέθοδο, η ένταση θνησιμότητας της UDD παρουσιάζει μεγάλες ασυνέχειες και είναι σταθερή μεταξύ των ακέραιων ηλικιών.

Παρακάτω στο Γράφημα 2.3, η ένταση θνησιμότητας παράχθηκε θέτοντας την πρώτη τιμή a_x του πίνακα ίση με τη μονάδα ($a_{15} = 1$), επίσης με την προϋπόθεση της συνέχειας και λύνοντας την αναδρομική σχέση (2.3.1) καθορίστηκαν οι τιμές για a_{x+1} .



Γράφημα 2.3: Συνεχής ένταση θνησιμότητας με $\alpha_{15}=1$. Πηγή: Jones & Mereu, (2000).

Η προκύπτουσα ένταση θνησιμότητας, μέσω του τρόπου που αναλύθηκε παραπάνω, παρατηρούμε ότι έχει πριονωτή μορφή, η οποία δεν αποτελεί αξιόλογη ένταση.

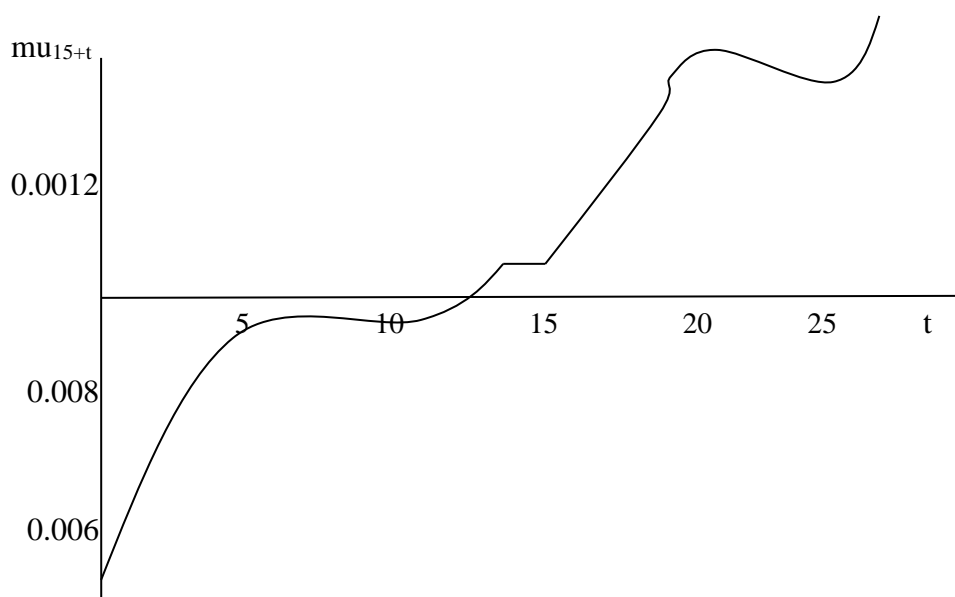
Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος αυτού, είναι να επιλέξουμε τα α_y που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ της αριστερής και δεξιάς παραγώγου της έντασης θνησιμότητας στις ηλικίες $y, y + 1, \dots, y + n - 2$. Στόχος είναι να υπάρχουν μικρές ασυνέχειες στην παράγωγο της έντασης θνησιμότητας. Δηλαδή θα είναι :

$$\sum_{x=y}^{y+n-2} \left(\frac{d}{dt} \mu_{x+t} |_{t=1} - \frac{d}{dt} \mu_{x+1+t} |_{t=0} \right)^2 = \sum_{x=y}^{y+n-2} \left(\frac{[1 - p_x^{\alpha_x}]^2}{\alpha_x p_x^{2\alpha_x}} - \frac{[1 - p_{x+1}^{\alpha_{x+1}}]^2}{\alpha_{x+1}} \right)^2. \quad (2.3.2)$$

Στη περίπτωση που η ένταση είναι απότομη και παρουσιάζει κάποια ασυνέχεια στη παράγωγο της, τότε η ασυνέχεια αυτή θα έχει μικρότερη επίδραση στην ομαλότητα της έντασης σε σύγκριση με μία πιο επίπεδη σε συμπεριφορά ένταση θνησιμότητας. Επιπλέον παρατηρούμε ότι από τα Γραφήματα 2.2. και 2.3, η συμπεριφορά της έντασης δείχνει να αυξάνεται εκθετικά, οπότε ο αντίστοιχος λογάριθμος θα είναι κατά κάποιο τρόπο γραμμικός.

Επομένως για τους δύο παραπάνω λόγους οι Jones & Mereu (2000) πρότειναν να ελαχιστοποιηθούν τα παραπάνω α_x (λογαριθμικά) και με την βοήθεια της σχέσης (2.3.1) να ληφθεί η νέα ένταση θνησιμότητας (Γράφημα 2.4).

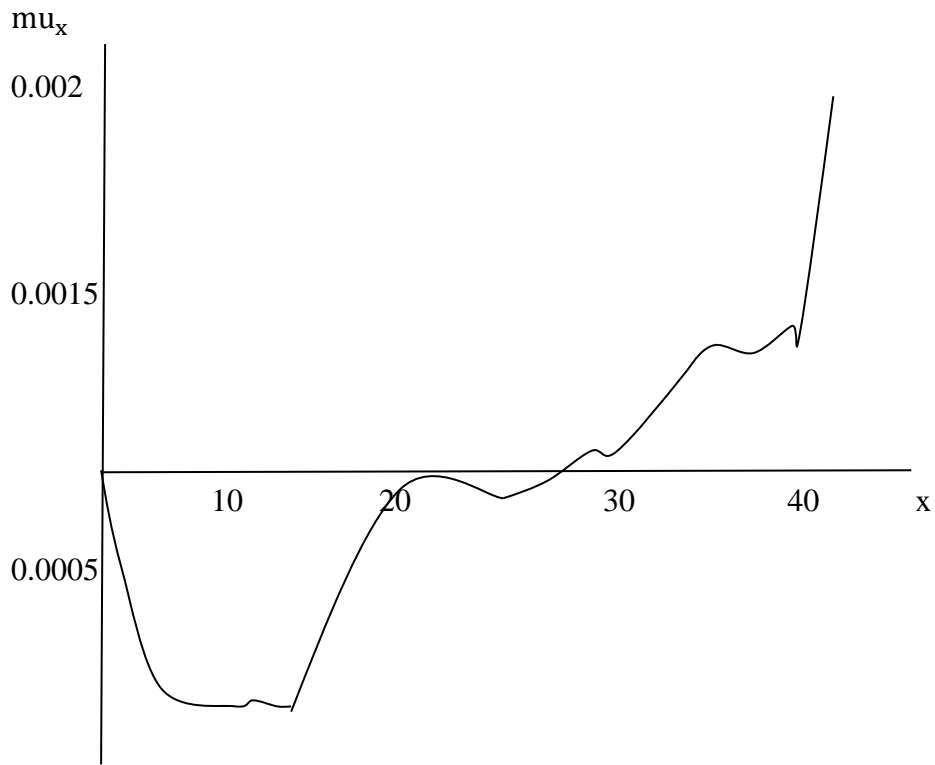
$$\sum_{x=y}^{y+n-2} \left(\frac{d}{dt} \log \mu_{x+t} |_{t=1} - \frac{d}{dt} \log \mu_{x+1+t} |_{t=0} \right)^2 = \sum_{x=y}^{y+n-2} (p_x^{\alpha_x} + p_{x+1}^{\alpha_{x+1}} - 2)^2.$$



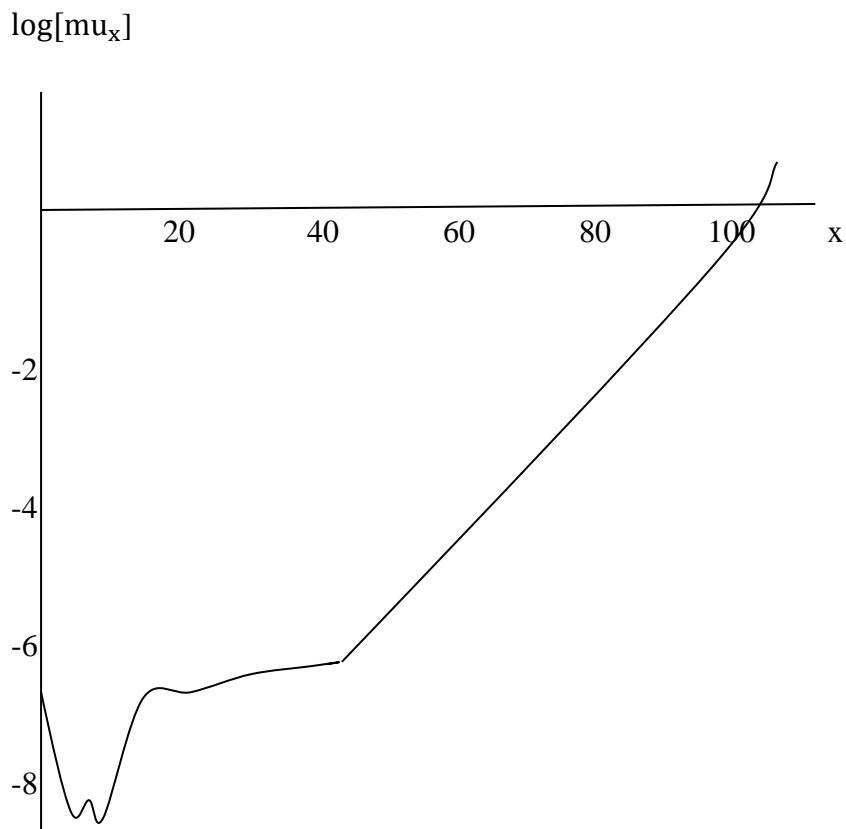
Γράφημα 2.4: Βελτιωμένη ένταση θνησιμότητας με την ελαχιστοποίηση των α_x τιμών.
Πηγή: Jones & Mereu (2000).

Το συγκεκριμένο γράφημα παρουσιάζει μία λεία ένταση θνησιμότητας συγκριτικά με τα Σχήματα 2.2 και 2.3. Επομένως αντιλαμβανόμαστε το μέγεθος της βελτίωσης στην ένταση μέσω του τελευταίου τρόπου.

Γενικά αντιλαμβανόμαστε ότι η επιλογή α_x τιμών για ένα ολόκληρο πίνακα θνησιμότητας δεν προσφέρει λεία ένταση σε ολόκληρο το διάστημα, εκτός και αν επιτραπούν κάποιες ασυνέχειες σε συγκεκριμένες ηλικίες. Οι Jones & Mereu (2000), βασιζόμενοι στον CIA πίνακα έλαβαν τιμές των α_x για $x = 0, 1, \dots, 105$, με μικρές ασυνέχειες στις ηλικίες 15 και 40. Στα γραφήματα 2.5 και 2.6 έχουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.



Γράφημα 2.5: Η ένταση θνησιμότητας με μικρές ασυνέχειες στις ηλικίες 15 και 40.
 Πηγή: Jones & Meru (2000).



Γράφημα 2.6: Η λογαριθμική ένταση θνησιμότητας με μικρές ασυνέχειες στις ηλικίες 15 και 40.
 Πηγή: Jones & Meru (2000).

Γίνεται εύκολα αντιληπτό εάν παρατηρήσουμε τα συγκεκριμένα σχήματα ότι η ένταση εμφανίζεται λεία στο μεγαλύτερο μέρος της, εκτός από τα σημεία που επιτράπηκε να παρουσιάσει ασυνέχειες.

2^η Μέθοδος.

Η δεύτερη προσέγγιση για την επιλογή οικογένειας βασίζεται στη διόρθωση της έντασης στην αρχή κάθε ηλικιακού διαστήματος χρησιμοποιώντας τα ποσοστά θνησιμότητας του συγκεκριμένου αλλά και του προηγούμενου διαστήματος. Σύμφωνα με τον Jordan (1975) μία τέτοια προσέγγιση της έντασης θνησιμότητας στην ηλικία x είναι η εξής:

$$\mu_x \approx \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x} = \frac{q_{x-1}/p_{x-1} + q_x}{2}.$$

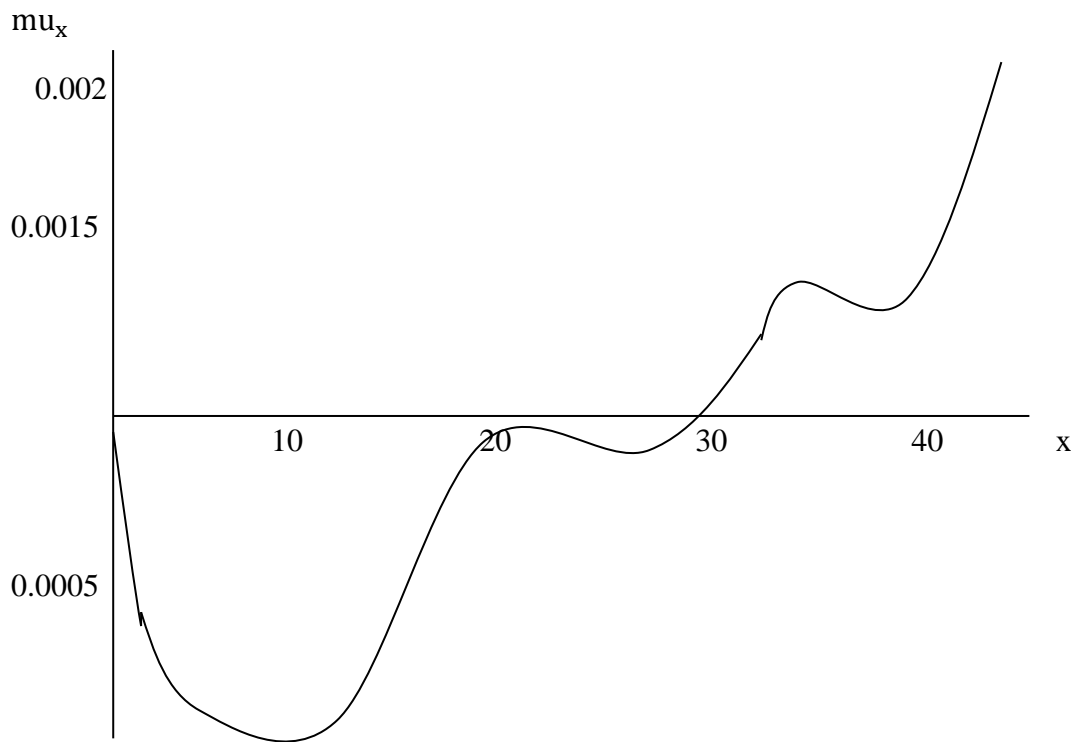
Η προσέγγιση αυτή είναι ακριβής αν το l_z είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς z και η αντίστοιχη τιμή του α_x καθορίζεται από την εξίσωση:

$$\mu_x = \frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x}.$$

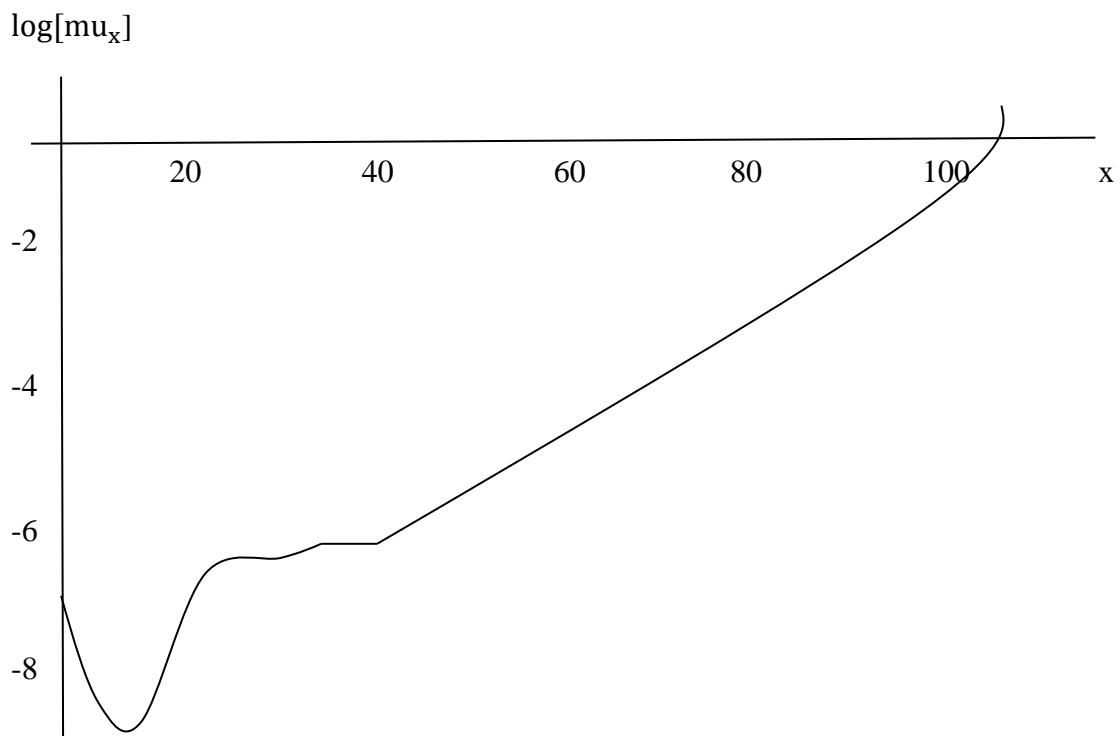
Παρατηρούμε ότι είναι η σχέση (2.1.2) για $t = 0$.

Θα έχουμε βέβαια κάποιες ασυνέχειες της έντασης σε ακέραιες ηλικίες, αλλά θα είναι μικρές. Σε αυτό το σημείο πρέπει να πούμε ότι σε αυτή τη περίπτωση δεν μπορούμε να έχουμε τιμή για το α_0 επειδή δεν υπάρχει q_{-1} . Για να ξεπεραστεί η συγκεκριμένη δυσκολία αρκεί να θέσουμε κάποια τιμή για το α_0 , με τη προϋπόθεση ότι η ένταση θνησιμότητας είναι συνεχής στην ηλικία 1.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι αυτές οι εντάσεις θνησιμότητας είναι αρκετά βελτιωμένες συγκριτικά με τις αντίστοιχες των τριών γνωστών υποθέσεων (UDD, CFM, Balducci).



Γράφημα 2.7: Γραφική αναπαράσταση της έντασης με την προσέγγιση του Jordan(1975).
 Πηγή: Jones & Mereu (2000).



Γράφημα 2.8: Γραφική αναπαράσταση της λογαριθμικής έντασης με την προσέγγιση του Jordan (1975). Πηγή: Jones & Mereu (2000).

2.4 Ο ρόλος των κλασματικών υποθέσεων στην εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, οι FAAs σε αρκετές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των ποσοστών θνησιμότητας. Οι δύο τρόποι εκτίμησης του q_x είναι η μέθοδος των ροπών και η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

Αρχικά για την μέθοδο των ροπών χρησιμοποιούμε δύο κυρίως εξισώσεις για την εκτίμηση των q_x και a_x . Έχουμε λοιπόν ότι:

$$E[D_x] = d_x, \quad (2.4.1)$$

και
$$E[T_x^d] = t_x^d. \quad (2.4.2)$$

Στην εξίσωση (2.4.1) ως D_x εκφράζουμε μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ) που δηλώνει τον αριθμό των θανάτων στο ηλικιακό διάστημα $[x, x + 1]$ ανάμεσα στα άτομα που είναι υπό μελέτη. Με d_x δηλώνεται η παρατηρούμενη τιμή αυτής της ποσότητας. Όσο αφορά τη σχέση (2.4.2), το T_x^d είναι ο συνολικός χρόνος ζωής στο διάστημα $[x, x + 1]$ των ατόμων που πέθαναν εντός του διαστήματος, ενώ το t_x^d είναι η παρατηρούμενη τιμή αυτή της ποσότητας.

Υπάρχει το ενδεχόμενο κάποια άτομα να συμπεριληφθούν στη μελέτη αφότου έχουν συμπληρώσει την ηλικία x ή να αποσυρθούν πριν φτάσουν στην ηλικία $x + 1$. Για παράδειγμα αυτό οφείλεται επειδή κάποιοι ασφαλισμένοι αποφάσισαν να αποζημιωθούν πριν φτάσουν στην απαιτούμενη ηλικία και να αποχωρήσουν. Στη περίπτωση αυτή αν πεθάνουν πριν φτάσουν την ηλικία $x + 1$, τότε είναι μη παρατηρούμενες τιμές και δεν προσμετρούνται στο D . Σε αυτό το σημείο απαιτείται η χρησιμοποίηση μίας FAA, η οποία πρέπει να είναι μέλος της γενικευμένης οικογένειας που παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο, ώστε να εκφραστεί η $E[D_x]$ μέσω της q_x (Βλέπε Hoem, 1984 και London, 1997). Όταν καθοριστούν οι στιγμές θανάτου των ατόμων, τότε εκτιμάται το q_x αλλά και το a_x .

Παρακάτω θα δούμε αναλυτικότερα ότι περιγράψαμε. Ειδικότερα, έστω ότι έχουμε ένα πλήθος n προς μελέτη σε ένα διάστημα $[x, x + 1]$ και έστω ότι:

- $x + r_i$ είναι η ηλικία όπου μεμονωμένα i εισάγονται στο διάστημα $[x, x + 1]$ για παρακολούθηση.
- $x + s_i$ είναι η ηλικία όπου μεμονωμένα i αποσύρονται από την παρακολούθηση, οπότε $0 \leq r_i \leq s_i \leq 1$.
- $x + t_i$ είναι η ηλικία όπου μεμονωμένα i πραγματικά εξέρχονται από παρακολούθηση.

Ο διαχωρισμός στην αιτία αποχώρησης από τη μελέτη γίνεται με το δ . Δηλαδή το $\delta_i = 1$ δηλώνει ότι συνέβη λόγω θανάτου και διαφορετικά $\delta_i = 0$ όπου τότε θα έχουμε και $t_i = s_i$. Οπότε τα δεξιά μέλη των σχέσεων (2.4.1) και (2.4.2) είναι:

$$d_x = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad \text{και} \quad t_x^d = \sum_{i=1}^n \delta_i t_i.$$

Οι σχέσεις (2.4.1) και (2.4.2) που χρειάζονται για την εκτίμηση των δύο παραμέτρων (q_x και α_x) με την μέθοδο των ροπών γίνονται ως εξής:

$$E[D_x] = \sum_{i=1}^n s_i - r_i q_{x+r_i} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i p_x - s_i p_x}{r_i p_x}, \quad (2.4.3)$$

και

$$E[T_x^d] = \sum_{i=1}^n \frac{\int_{r_i}^{s_i} t p_x \mu_{x+t} dt}{r_i p_x}$$

$$= \frac{1}{(1 + \alpha_x)(1 - p_x^{\alpha_x})} \sum_{i=1}^n \left[\alpha_x + r_i - r_i p_x^{\alpha_x} - (\alpha_x + s_i - s_i p_x^{\alpha_x}) \left(\frac{1 - s_i + s_i p_x^{\alpha_x}}{1 - r_i + r_i p_x^{\alpha_x}} \right)^{1/\alpha_x} \right]. \quad (2.4.4)$$

Η σχέση (2.4.3) μπορεί να εκφραστεί με όρους q_x και α_x χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.1.1).

Παρομοίως και στη περίπτωση της εκτίμησης μεγίστης πιθανοφάνειας απαιτείται μία FAA για να εκφραστεί η συνάρτηση πιθανοφάνειας μέσω του q_x (Βλέπε Broffitt, 1984 και London, 1997). Οπότε έχουμε την παρακάτω συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(q_x, \alpha_x) = \prod_{i=1}^n t_i - r_i p_{x+r_i} (\mu_{x+t_i})^{\delta_i} = \prod_{i=1}^n \frac{t_i p_x}{r_i p_x} (\mu_{x+t_i})^{\delta_i}, \quad (2.4.5)$$

με την αντίστοιχη λογαριθμó-πιθανοφάνεια να είναι:

$$l(q_x, \alpha_x) = \sum_{i=1}^n [\log_{t_i} p_x - \log_{r_i} p_x + \delta_i \log \mu_{x+t_i}]. \quad (2.4.6)$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί με q_x και α_x χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1.1) και (2.1.2).

Τέλος για να λάβουμε τον τύπο για την εκτίμηση της μεγίστης πιθανοφάνειας αρκεί να μεγιστοποιήσουμε αριθμητικά τον τύπο (2.4.6) σε σχέση με αυτές τις παραμέτρους.

Παρακάτω ακολουθούν κάποια παραδείγματα των υποθέσεων ώστε να γίνουν πιο κατανοητές στην εφαρμογή τους (βλέπε Hassett et.al, 2007).

Παράδειγμα 2.1

Έστω ότι $q_x = 0.25$ και η ένταση θνησιμότητας σύμφωνα με την υπόθεση της σταθερής έντασης θνησιμότητας είναι $\mu_x^A(s), 0 < s < 1$, με την αντίστοιχη υπό την ομοιόμορφη κατανομή θανάτων να είναι $\mu_x^B(s), 0 < s < 1$. Επομένως το μικρότερο s για το οποίο ισχύει ότι $\mu_x^B(s) \geq \mu_x^A(s)$ θα είναι:

Αρχικά γνωρίζουμε ότι:

$$\mu_{x+s}^{UDD} = \frac{q_x}{(1 - sq_x)}, \quad \text{για } 0 < s < 1$$

και

$$\mu_{x+s}^{CFM} = -\ln p_x \text{ για } 0 < s < 1.$$

Οπότε η σχέση: $\mu_x^B(s) \geq \mu_x^A(s)$,

διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{0.25}{1 - 0.25s} \geq -\ln 0.75$$

Η

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-s} &\geq 0.2877 = \ln \frac{4}{3} \\ \Rightarrow s &\geq \frac{0.1508}{0.2877} = 0.5242. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2

Με τη βοήθεια ενός q_x θα δούμε κάποιες εκφράσεις για το $e_{x:\overline{1}|}^0$ υπό τις τρεις γνωστές υποθέσεις.

Ειδικότερα:

$$\text{UDD: } {}_t p_x = 1 - tq_x, \quad e_{x:\overline{1}|}^{0 \text{ UDD}} = \int_0^1 1 - tq_x dt = 1 - \frac{1}{2}q_x.$$

$$\text{CFM: } {}_t p_x = p_x^t, \quad e_{x:\overline{1}|}^{0 \text{ CFM}} = \int_0^1 p_x^t dt = -\frac{1-p_x}{\ln p_x} = \frac{-q_x}{\ln(1-q_x)}.$$

$$\text{Balducci: } {}_t p_x = \frac{p_x}{p_x + tq_x}, \quad e_{x:\overline{1}|}^{0 \text{ BALD}} = \int_0^1 \frac{p_x}{p_x + tq_x} dt = \frac{-(1-q_x)}{q_x} \ln(1 - q_x).$$

Παράδειγμα 2.3

Έχουμε ότι $q_{70} = 0.040$, $q_{71} = 0.044$ και οι θάνατοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε κάθε ηλικιακό έτος. Θέλουμε να βρούμε τη ποσότητα $e_{70:\overline{1.5}|}^0$.

Έχουμε ότι :

$$e_{70:\overline{1.5}|}^0 = \int_0^{1.5} {}_t p_{70} dt.$$

Από τις σχέσεις $q_{70} = 0.040$, $q_{71} = 0.044$ και την υπόθεση της UDD βρίσκουμε ότι $p_{70} = 0.960$ και ${}_2 p_{70} = (0.960)(0.956) = 0.91584$.

Επομένως η συνάρτηση επιβίωσης διαμορφώνεται ως εξής:

$${}_t p_{70} = \begin{cases} 1 - t(0.040), & 0 \leq t \leq 1 \\ (0.96(1 - (t - 1)0.044)), & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Οπότε

$$e_{70:\overline{1.5}|}^0 = \int_0^{1.5} {}_t p_{70} dt = \int_0^1 {}_t p_{70} dt + \int_1^{1.5} {}_t p_{70} dt = 1.4547.$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω K η πιθανότητα άτομο ηλικίας x να πεθάνει στο πρώτο $\frac{1}{3}$ του χρόνου υπό την Balducci υπόθεση, και έστω L η πιθανότητα άτομο ηλικίας x να πεθάνει στα τελευταία $\frac{2}{3}$ του χρόνου υπό την ομοιόμορφη κατανομή θανάτων. Επίσης $l_x=9$ και $l_{x+1} = 6$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $K + L$.

Γενικότερα γνωρίζουμε ότι υπό την Balducci:

$$\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1-t}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}},$$

οπότε

$$\frac{1}{l_{x+1/3}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{9} + \frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{7}{54} \Rightarrow l_{x+1/3} = \frac{54}{7},$$

και υπό την UDD:

$$l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1},$$

επομένως

$$l_{x+1/3} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)9 + \frac{1}{3}6 = 8.$$

Επομένως οι πιθανότητες K και L υπολογίζονται ως εξής:

$$K = {}_{1/3}q_x = \frac{l_x - l_{x+1/3}^{Bal}}{l_x} = \frac{9 - \frac{54}{7}}{9} = \frac{9}{63},$$

και

$$L = {}_{1/3|2/3}q_x = \frac{l_{x+1/3}^{UDD} - l_{x+1}}{l_x} = \frac{8 - 6}{9} = \frac{2}{9}.$$

Οπότε το άθροισμα είναι:

$$K + L = \frac{9}{63} + \frac{2}{9} = \frac{23}{63}.$$

Παράδειγμα 2.5

Έστω ότι $e_{x:\overline{1}}^0 = F$ υπό την ομοιόμορφη κατανομή θανάτων και $e_{x:\overline{1}}^0 = G$ υπό την Balducci υπόθεση, με $q_x = 0.1$. Θέλουμε να βρούμε τη ποσότητα $1000(F - G)$.

Γνωρίζουμε ότι:

$$e_{x:\overline{1}}^0 = \int_0^1 {}_t p_x dt.$$

Στη περίπτωση της UDD ισχύει ότι:

$${}_t p_x = 1 - tq_x = 1 - 0.1t,$$

Επομένως

$$F = e_{x:\overline{1}}^0 = \int_0^1 (1 - 0.1t) dt = 0.95,$$

ενώ όσο αφορά τη Balducci:

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} = \left(\frac{l_x}{l_{x+t}} \right)^{-1} \\ &= \left[l_x \left(\frac{1-t}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}} \right) \right]^{-1} = \left[(1-t) + \frac{t}{p_x} \right]^{-1} \\ &= \left[1 - t + \frac{10}{9}t \right]^{-1} = 9[9+t]^{-1}. \end{aligned}$$

Οπότε:

$$G = e_{x:\overline{1}}^0 = \int_0^1 9[9+t]^{-1} dt = 9 \ln(9+t) \Big|_0^1 = 0.94825.$$

Άρα το αποτέλεσμα είναι:

$$1000(F - G) = 1.755.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γενικευμένες μορφές των τριών υποθέσεων και η σχέση των FAAs με συναρτήσεις στα Συμβάντα Ζωής και τη Δημογραφία

Στο Κεφάλαιο 2 μελετήσαμε τις τρεις γνωστές υποθέσεις κλασματικών ηλικιών, υπό τις οποίες οι τιμές της παρεμβολής της συνάρτησης επιβίωσης μεταξύ δύο συνεχόμενων ετών εξαρτώνται μόνο από τη συνάρτηση επιβίωσης σε αυτές τις ηλικίες. Παρόλο που είναι απλές στην εφαρμογή τους παρουσιάζουν πολλά προβλήματα τόσο στην ένταση θνησιμότητας όσο και στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) με ασυνέχειες στις ακέραιες ηλικίες.

Επομένως σε αυτό το κεφάλαιο και ειδικότερα στην πρώτη ενότητα θα ασχοληθούμε με οικογένειες μίας παραμέτρου, οι οποίες ουσιαστικά αποτελούν γενίκευση των τριών γνωστών υποθέσεων, με σκοπό να προσφέρουν καλύτερα αποτελέσματα (Jones & Mereu, 2002). Στην επόμενη ενότητα θα δούμε αρχικά πως μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλες παραμέτρους για μία οικογένεια από FAAs, η οποία θα συνδυάζεται με ένα πίνακα θνησιμότητας και εν συνεχεία ένα κριτήριο ποιότητας το οποίο είναι κατάλληλο εργαλείο τόσο στην επιλογή υπόθεσης αλλά όσο και στη σύγκριση αποτελεσμάτων που προέρχονται από διαφορετικές υποθέσεις. Επίσης με τη χρήση του κριτηρίου ποιότητας πραγματοποιείται ένα παράδειγμα και συγκρίνονται τα αποτελέσματα του με βάση δύο διαφορετικούς πίνακες. Τέλος στην τελευταία ενότητα παρουσιάζονται και αναλύονται κάποιες επιπλέον συναρτήσεις που τις συναντάμε στις Ασφαλίσεις Ζωής και στην Δημογραφία αλλά και σχέσεις που τις συνδέουν με τις υποθέσεις των κλασματικών ηλικιών. Δίνονται επιπλέον αριθμητικά παραδείγματα σε αυτά που θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 3.

3.1 Τρεις γενικευμένες οικογένειες μίας παραμέτρου

Οι τρεις οικογένειες που θα οριστούν σε αυτή την ενότητα είναι μίας παραμέτρου για κάθε ηλικία και όπως προαναφέρθηκε οι δύο είναι γενικεύσεις των UDD και CFM ενώ η τρίτη είναι η γενικευμένη οικογένεια που έγινε εκτενής αναφορά στο δεύτερο κεφάλαιο. Σημαντικό πλεονέκτημα τους είναι ότι όταν καθοριστεί η μοναδική τους παράμετρος για κάθε ηλικία τότε προσδιορίζονται και οι αντίστοιχες υποθέσεις.

Ειδικότερα οι τρεις γενικευμένες μορφές είναι:

- Η 1^η οικογένεια είναι η *QSF* (*Quadratic Survival Function*) στην οποία η συνάρτηση επιβίωσης ανάμεσα σε ακέραιες ηλικίες είναι πολυώνυμο.

Δηλαδή αποτελεί γενίκευση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτου στην οποία η συνάρτηση επιβίωσης της ηλικίας στη κατανομή θανάτου είναι γραμμική ανάμεσα στις ακέραιες ηλικίες. Δηλαδή στο ηλικιακό διάστημα $[x, x + 1]$ η συνάρτηση επιβίωσης είναι τετραγωνική. Οπότε για $0 \leq t \leq 1$ έχουμε :

$${}_t p_x = 1 - \mu_{x+0}t + (\mu_{x+0} - q_x)t^2. \quad (3.1.1)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι ισχύουν:

$${}_0 p_x = 1 \quad \text{και} \quad {}_1 p_x = 1 - q_x.$$

Επίσης

$$\mu_{x+0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mu_{x+t},$$

με

$$\mu_{x+t} = -\frac{\frac{d}{dt} {}_t p_x}{{}_t p_x}.$$

Από τη στιγμή που η παραπάνω υπόθεση συνδυάζεται με πίνακα θνησιμότητας, τότε υπάρχουν οι κατάλληλες πληροφορίες για τα ποσοστά θνησιμότητας στις ηλικίες που χρειάζονται. Γνωρίζοντας ότι ${}_0 p_x = 1$ και ${}_1 p_x = 1 - q_x$, έχουν καθοριστεί οι δύο από τις τρεις παραμέτρους που απαιτούνται για την QSF.

Η μόνη παράμετρος που μπορεί να επιλεγθεί ελεύθερα είναι η μ_{x+0} και έτσι μπορεί να καθοριστεί η συμπεριφορά της ${}_t p_x$ σε όλο το ηλικιακό διάστημα. Επίσης όταν η ένταση θνησιμότητας δεν υφίσταται σε ακέραιες ηλικίες τότε χρησιμοποιούμε μ_{x+0} αντί για μ_x .

Κάποιες περιπτώσεις που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι οι εξής:

- Αν $\mu_{x+0} = q_x$ τότε έχουμε τη περίπτωση της UDD.
- Αν $0 \leq \mu_{x+0} < q_x$ τότε η ${}_t p_x$ είναι κοίλη για $0 < t < 1$ και τότε το μ_{x+t} αυξάνεται πιο απότομα συγκριτικά με την περίπτωση της UDD.
- Αν $q_x < \mu_{x+0} \leq 2q_x$ τότε η ${}_t p_x$ είναι κυρτή για $0 < t < 1$ και τότε το μ_{x+t} θα μεταβληθεί, είτε θα αυξηθεί είτε θα μειωθεί, σε όλο το ηλικιακό διάστημα.

Επίσης έχουμε ότι:

$${}_t p_x \mu_{x+t} = \mu_{x+0} - 2(\mu_{x+0} - q_x)t. \quad (3.1.2)$$

Η γραμμική συνάρτηση (3.1.2) πρέπει να είναι μη-αρνητική (≥ 0) για όλα τα $0 < t < 1$. Αυτό θα συμβαίνει μόνο όταν είναι μη-αρνητική για $t = 0$ και $t = 1$.

Οπότε πρέπει να είναι:

$$\mu_{x+0} \geq 0,$$

και

$$\mu_{x+0} - 2(\mu_{x+0} - q_x) = 2q_x - \mu_{x+0} \geq 0.$$

Άρα

$$0 \leq \mu_{x+0} \leq 2q_x.$$

Η σχέση (3.1.2) παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί είναι ανάλογη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της ηλικίας στη κατανομή θανάτου. Όταν η $\mu_{x+0} \neq q_x$, η ${}_t p_x \mu_{x+t}$ είναι γραμμική συνάρτηση και ο τρόπος που μεταβάλλεται η μ_{x+0} εξαρτάται αν είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη q_x .

Τέλος ένα πλεονέκτημα της QSF είναι ότι δεν χρειάζονται αριθμητικές ολοκληρώσεις στην περίπτωση υπολογισμών αναλογιστικών παρουσών αξιών για αποζημιώσεις πληρωτέες τη στιγμή θανάτου ή για συνεχείς ράντες ζωής.

- Η 2^η οικογένεια είναι η *LFM* (*Linear Force of Mortality*) η οποία περιλαμβάνει γραμμικές εντάσεις θνησιμότητας ανάμεσα σε ακέραιες ηλικίες και είναι γενίκευση της υπόθεσης της σταθερής έντασης θνησιμότητας. Υποθέτουμε ότι η ένταση θνησιμότητας είναι 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού πολυώνυμο ανάμεσα σε ακέραιες ηλικίες.

Ειδικότερα για $0 < t < 1$ έχουμε ότι:

$$\mu_{x+t} = \mu_{x+0} - 2(\log p_x + \mu_{x+0})t. \quad (3.1.3)$$

Όπως στην QSF οικογένεια έτσι και στην LFM πρέπει να καθοριστεί η παράμετρος μ_{x+0} ώστε να προσδιοριστεί η συνάρτηση.

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt}.$$

Επομένως με τη σχέση (3.1.3) οδηγούμαστε στο εξής:

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \\ &= p_x^t e^{-(\log p_x + \mu_{x+0})(t-t^2)} \quad \text{για } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\mu_{x+t} < (>) - \log p_x \Rightarrow {}_t p_x > (<) p_x^t.$$

Γνωρίζουμε ότι υπό την σταθερή ένταση θνησιμότητας ισχύει ${}_t p_x = p_x^t$.

Για την LFM οικογένεια ισχύει η σχέση (3.1.3) που είδαμε παραπάνω και είναι μη-αρνητική για όλα τα $0 < t < 1$ αν:

$$\mu_{x+t} \geq 0$$

και

$$\mu_{x+t} - 2(\log p_x + \mu_{x+t}) \geq 0,$$

οπότε:

$$0 \leq \mu_{x+t} \leq -2 \log p_x.$$

- Η 3^η οικογένεια είναι η Power οικογένεια την οποία εισήγαγαν οι Jones & Meru (2000) και παρουσιάσαμε στην Ενότητα 2.1. Μέλη της αποτελούν οι τρεις γνωστές υποθέσεις, η UDD, η CFM και η Balducci για $\alpha_x = 1, 0, -1$ αντίστοιχα. Ειδικότερα μέσω των σχέσεων (2.1.1) έως (2.1.8) αναλύθηκε εκτενώς η συγκεκριμένη οικογένεια.

3.2 Επιλογή παραμέτρων και κριτήριο ποιότητας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (Jones & Meru, 2000) υπάρχουν δύο τρόποι επιλογής των παραμέτρων για τον προσδιορισμό υπόθεσης. Είτε η ένταση θνησιμότητας να είναι συνεχής σε όλες τις ηλικίες και με την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών (βλέπε Ενότητα 2.3), είτε να προκαθορίζονται οι τιμές της έντασης στις ακέραιες ηλικίες. Στο σημείο αυτό θα δούμε ένα διαφορετικό τρόπο που αντικαθιστά τη μέθοδο της ελαχιστοποίησης των τετραγώνων, ένα κριτήριο ποιότητας το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί για να συγκρίνει την ηλικία στις κατανομές θανάτου, που προκύπτουν από διαφορετικές οικογένειες και διαφορετικές τιμές στη παράμετρο μέσα σε μία οικογένεια (Jones & Meru, 2002).

Το συγκεκριμένο κριτήριο ποιότητας εφαρμόζεται στη περίπτωση που η ένταση θνησιμότητας παρουσιάζει ασυνέχειες σε ακέραιες ηλικίες σε αντίθεση με το άθροισμα των τετραγώνων. Ειδικότερα βασίζεται στο μήκος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας σε ολόκληρο το πίνακα θνησιμότητας. Η σ.π.π. ορίζεται ως

$f(\cdot)$ και προκύπτει από τις τιμές που δόθηκαν στις παραμέτρους. Θέλουμε να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλή και σύμφωνη με το πίνακα θνησιμότητας. Μπορούμε να αξιολογήσουμε την ομαλότητα της $f(\cdot)$ χρησιμοποιώντας το μήκος της στο ηλικιακό διάστημα $(0, \omega)$. Εάν η σ.π.π. παρουσιάζει ασυνέχειες το μέγεθος των αλμάτων προστίθενται στα μήκη των καμπυλών. Τέλος οι πιο μικρές τιμές από το ολικό μήκος δείχνουν μεγαλύτερη ομαλότητα. Ποσοτικά το κριτήριο ποιότητας δίνεται από τον τύπο :

$$L = \sum_{x=0}^{\omega-1} \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dt}f(x+t)\right]^2} dt + \sum_{x=0}^{\omega-1} [f(x+0) - f(x-0)] - \omega. \quad (3.2.1)$$

Από τη στιγμή που το συνολικό μήκος πρέπει να είναι τουλάχιστον ω και το επιπλέον μήκος τείνει να είναι σχετικά μικρό αφαιρούμε το ω από το μήκος L . Ο παραπάνω ορισμός του L μπορεί να τροποποιηθεί αναλόγως τη περίπτωση.

Οι λόγοι στους οποίους το κριτήριο ποιότητας βασίζεται στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ηλικίας στην κατανομή θανάτου και όχι στην ένταση θνησιμότητας είναι:

- Το μέγεθος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας δεν παρουσιάζει μεγάλη μεταβολή σε όλο το ηλικιακό διάστημα συγκριτικά με το αντίστοιχο της έντασης θνησιμότητας.
- Παρουσιάζεται μία έλλειψη ομαλότητας κυρίως σε ηλικίες που συμβαίνουν οι περισσότεροι θάνατοι.
- Τέλος αν υπάρχει ηλικία ω , η ένταση θνησιμότητας και το μήκος της πλησιάζουν το άπειρο.

Η μέθοδος που αναλύθηκε παραπάνω προσφέρει καλά αποτελέσματα, αλλά υπάρχει πιθανότητα η ένταση θνησιμότητας σε μία επιλεγμένη οικογένεια να μην είναι συνεχής σε όλες τις ηλικίες, τότε θα πρέπει να επαναπροσδιοριστεί η συνέχεια.

Αυτό γνωρίζουμε ότι θα επιτευχθεί με τον καθορισμό της τιμής του μ_{x+0} για κάθε x βασισμένο στο πίνακα θνησιμότητας στην ηλικία x και σε κοντινές ηλικίες.

Οπότε το μ_{x+0} καθορίζεται ως εξής:

$$\mu_{x+0} = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x}. \quad (3.2.2)$$

Ο παραπάνω τύπος δίνει κατάλληλη ένταση θνησιμότητας αν το l_y είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού πολυώνυμο στο Y για $x - 1 \leq y \leq x + 1$ (Jordan 1975). Επιπροσθέτως το

γεγονός ότι έχουμε δώσει τιμές στις εντάσεις θνησιμότητας σε ακέραιες ηλικίες δείχνει ότι η ένταση θνησιμότητας που θα προκύψει θα είναι ομαλή σε όλες τις ηλικίες (Mereu 1961). Στη περίπτωση που έχουμε $x = 0$ τότε :

$$\mu_{0+0} = \frac{3l_0 - 4l_1 + l_2}{2l_0}. \quad (3.2.3)$$

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε το αριστερό ακραίο σημείο της έντασης θνησιμότητας και όχι μία κεντρική τιμή της, για να επιλέξουμε μία υπόθεση της κλασματικής ηλικίας στο ηλικιακό διάστημα $(x, x + 1)$, είναι ότι δεν παρατηρούμε κάποια σημαντική βελτίωση.

3.3 Χρήση του κριτηρίου ποιότητας και σύγκριση με άλλους τρόπους

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε αναλυτικότερα το κριτήριο ποιότητας με τη βοήθεια ενός παραδείγματος (Jones & Mereu, 2002). Ο πίνακας 3.1 περιλαμβάνει τιμές του κριτηρίου ποιότητας (σχέση 3.2.1), για διαφορετικές οικογένειες των FAAs, και διαφορετικούς τρόπους επιλογής μελών των οικογενειών, βασιζόμενοι σε δύο διαφορετικούς πίνακες. Επίσης όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές τόσο χειρότερες σε συμπεριφορά είναι οι εντάσεις. Ο πρώτος πίνακας είναι ο CIA, που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3 και ο δεύτερος προέκυψε από το νόμο του Makeham ($\mu_y = A + Bc^y, y > 0$).

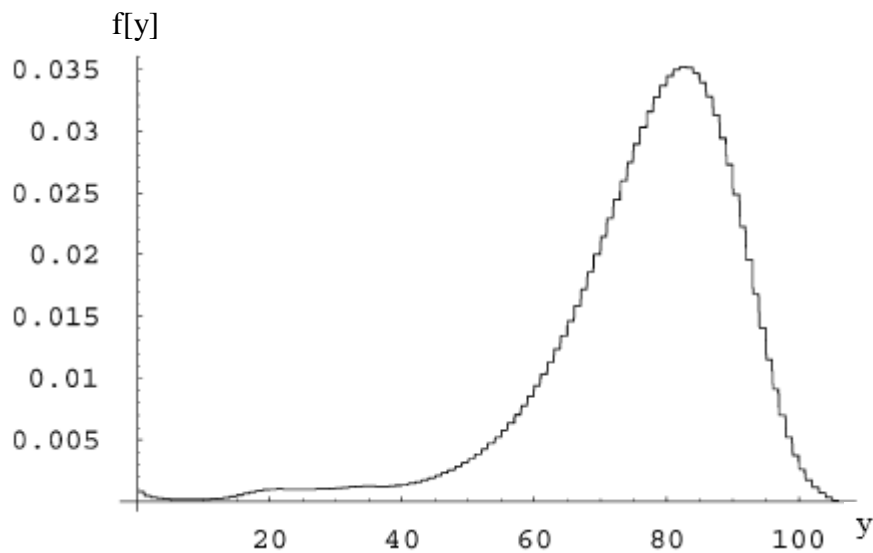
	CIA πίνακας	Makehamized πίνακας
UDD	0.0709082	0.0637537
QSF (συνεχής ένταση)	0.0000552	0.0000435
QSF(προκαθορισμένες εντάσεις)	0.0045873	0.0037825
Σταθερή ένταση	0.0965576	0.08756638
LFM(συνεχής ένταση)	0.0000730	0.0000577
LFM(προκαθορισμένη ένταση)	0.0029897	0.0022539
Power(συνεχής ένταση)	0.0000553	0.0000435
Power(προκαθορισμένες εντάσεις)	0.0037907	0.0030166
Υπερβολική	0.2070482	0.1776622
Αληθής		0.0000375

Πίνακας 3.1: Αποτελέσματα κριτηρίου ποιότητας. Πηγή: Jones & Mereu (2002).

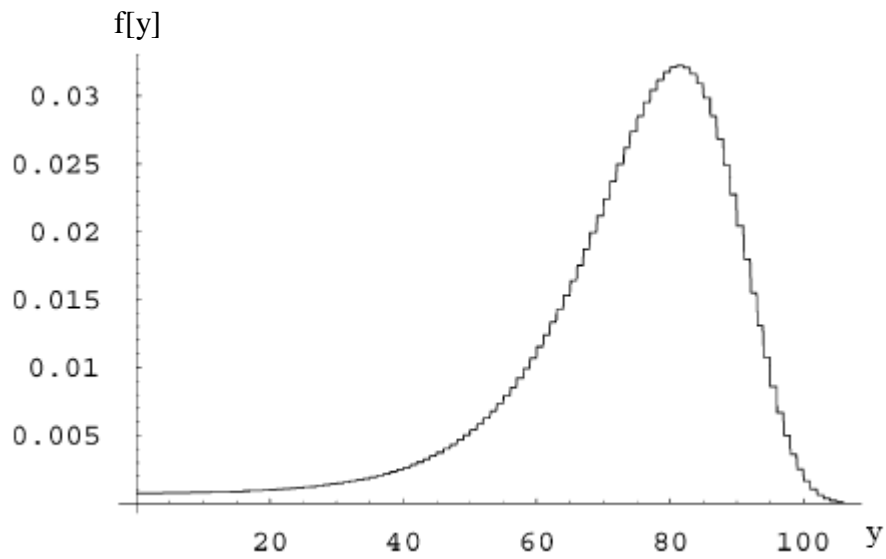
Ειδικότερα παρατηρώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.1 μπορούμε να πούμε ότι οι τιμές του κριτηρίου ποιότητας υπό την UDD, CFM και της Balducci υπόθεσης είναι πολύ μεγαλύτερες σε σύγκριση με αυτές που προέκυψαν μέσω άλλης οικογένειας

FAAs. Επίσης ελήφθησαν τιμές για τις γενικευμένες μορφές τους (QSF, LFM, Power Family) και όπως παρατηρούμε η μέθοδος που το μ_{x+0} είναι προκαθορισμένο για κάθε ακέραιο x δίνει μεγαλύτερες τιμές, επομένως και χειρότερες σε συμπεριφορά, σε σχέση με τη μέθοδο που η ένταση (και η σ.π.π.) είναι συνεχής. Γενικότερα οι γενικευμένες μορφές έχουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα από τις UDD, CFM και Balducci.

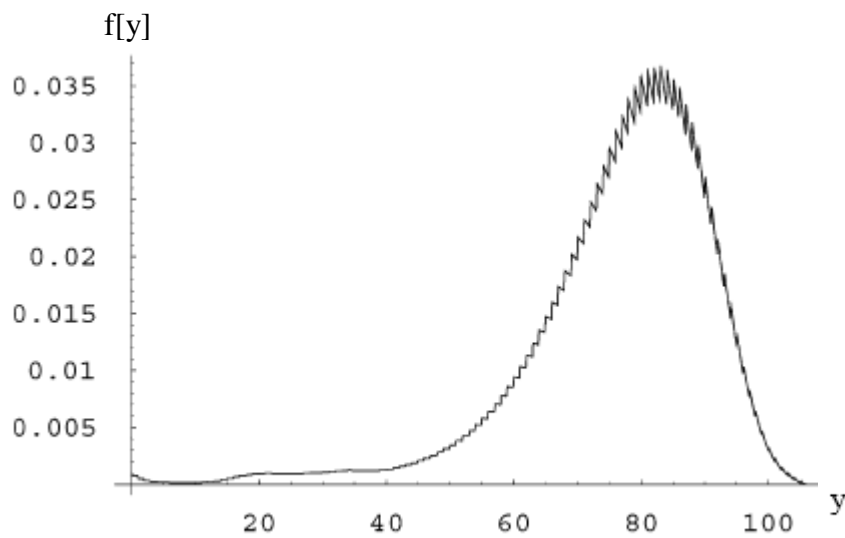
Παρακάτω υπάρχουν γραφικές απεικονίσεις των σ.π.π. των UDD, CFM και QSF (συνεχής ένταση) με τους δύο πίνακες. Βλέπουμε πόσο καλύτερη είναι η σ.π.π. της QSF από τις άλλες, αλλά και της UDD που είναι σχετικά καλύτερη από της CFM.



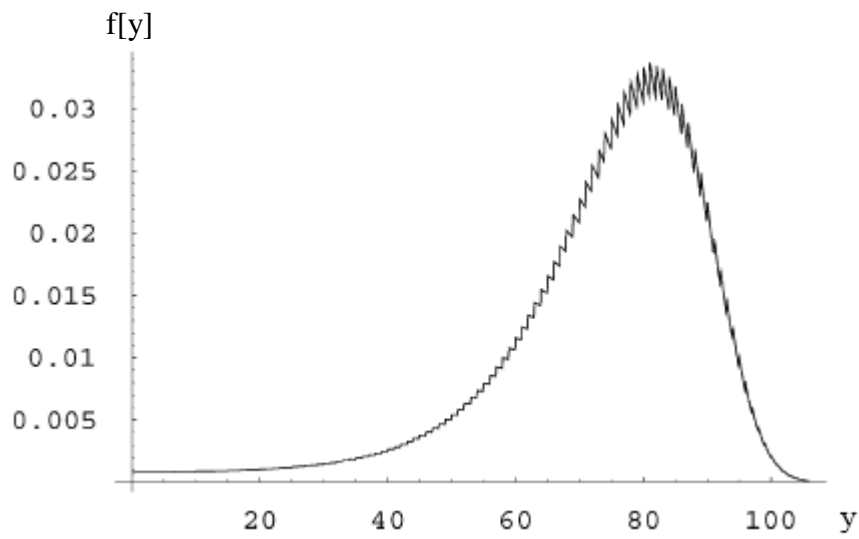
Γράφημα 3.1: Η σ.π.π. για την UDD βασισμένοι στο CIA πίνακα.
Πηγή: Jones & Mereu (2002).



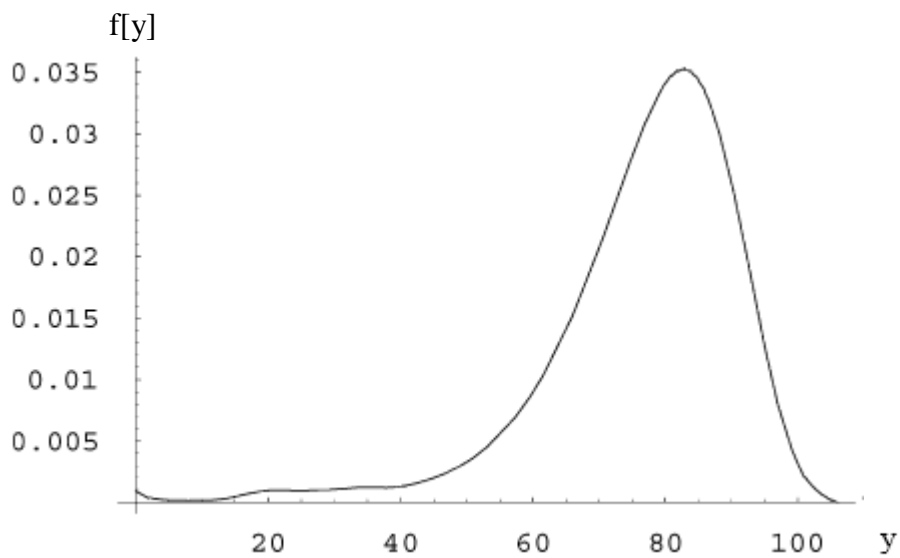
Γράφημα 3.2: Η σ.π.π. για την UDD βασισμένοι στο Makehamized πίνακα.
 Πηγή: Jones & Meru (2002).



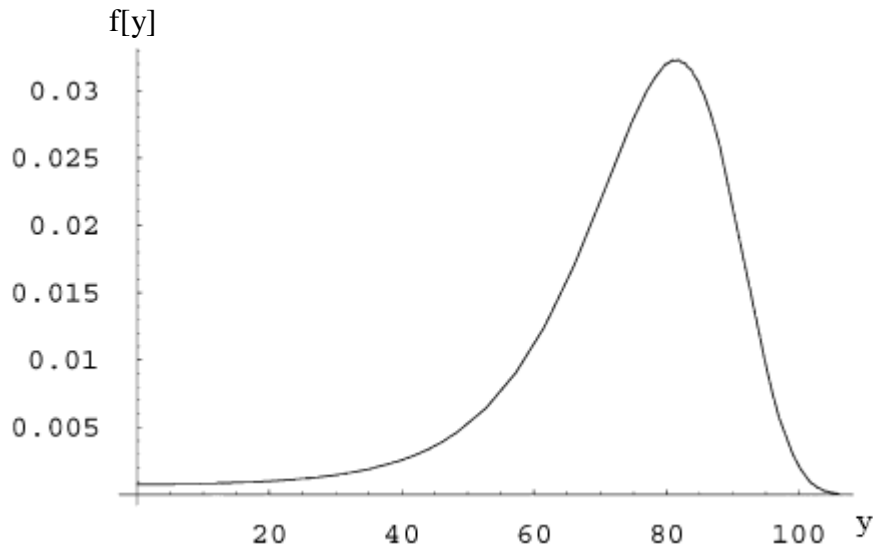
Γράφημα 3.3: Η σ.π.π. για την σταθερή ένταση βασισμένοι στο CIA πίνακα.
 Πηγή: Jones & Meru (2002).



Γράφημα 3.4: Η σ.π.π. για την σταθερή ένταση βασισμένοι στο Makehamized πίνακα.
 Πηγή: Jones & Mereu (2002).



Γράφημα 3.5: Απεικόνιση της σ.π.π. για την QSF (συνεχής ένταση) βασισμένοι στο CIA πίνακα.
 Πηγή: Jones & Mereu (2002).



Γράφημα 3.6: Απεικόνιση της σ.π.π. για την QSF (συνεχής ένταση) βασιζόμενοι στο Makehamized πίνακα. Πηγή: Jones & Mereu (2002).

3.4 Χρήσιμες ποσότητες των Συμβάντων Ζωής & Δημογραφίας

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε ποσότητες των Συμβάντων Ζωής και της Δημογραφίας που είναι άμεσα σχετιζόμενες με τις FAAs που είδαμε αναλυτικά στα Κεφάλαια 2 και 3.

3.4.1 Συναρτήσεις & FAAs

Θυμίζουμε ότι στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι:

- Η K είναι η περικεκομμένη μελλοντική διάρκεια ζωής.
- Η Z είναι το κλασματικό μέρος του έτους που έζησε κατά τη διάρκεια του έτους θανάτου.
- Η e_x^0 είναι η πλήρης προσδοκώμενη διάρκεια ζωής και τέλος
- Η e_x η περικεκομμένη προσδοκώμενη διάρκεια ζωής ενός ατόμου ηλικίας x .

Στη περίπτωση της UDD ($\alpha_x = 1$ για όλα τα x) οι K και Z είναι ανεξάρτητες με την Z να είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $(0,1)$ (Βλέπε Bowers et al., 1997, Willmot, 1997). Επομένως υπό αυτές τις συνθήκες έχουμε ότι:

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}. \quad (3.4.1)$$

Διαφορετικά στη περίπτωση που το α_x παίρνει διάφορες τιμές, η κλασματική ανεξαρτησία δεν ισχύει και το e_x^0 υπολογίζεται αναδρομικά. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} e_x^0 &= \int_0^{\infty} t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^1 t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_1^{\infty} t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= p_x + q_x \alpha(x) + p_x e_{x+1}^0. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Με το $\alpha(x)$ να είναι η δεσμευμένη προσδοκώμενη διάρκεια ζωής στο διάστημα $(x, x+1)$ δοθέντος ότι ο θάνατος συνέβη εντός του διαστήματος. Υπολογίζεται μαθηματικά ως εξής:

$$\alpha(x) = \frac{\int_0^1 z {}_z p_x \mu_{x+z} dz}{q_x}.$$

Με γενικότερο τύπο:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_x [1 - p_x^{\alpha_x + 1}]}{(1 + \alpha_x) q_x (1 - p_x^{\alpha_x})} - \frac{p_x}{q_x}, & \alpha_x \neq 0, \alpha_x \neq -1 \\ -\frac{1}{\log p_x} - \frac{p_x}{q_x}, & \alpha_x = 0 \\ -\frac{p_x \log p_x}{q_x^2} - \frac{p_x}{q_x}, & \alpha_x = -1 \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Επομένως παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η σύγκριση των τιμών του e_x^0 όταν έχουμε σταθερό $\alpha_x = 1$ (UDD) με όταν το α_x παίρνει διάφορες τιμές. Έχουμε ότι:

$$e_x^0 = E[K + \alpha(x + K)] = e_x + E[\alpha(x + K)]. \quad (3.4.4)$$

Οπότε με τη βοήθεια των σχέσεων (3.4.1) και (3.4.3) :

$$e_x^0 - e_x^{UDD} = E[\alpha(x + K)] - \frac{1}{2}.$$

Ουσιαστικά ο τύπος αυτός δείχνει ότι η διαφορά που θα χωρίζει κάθε φορά το e_x^0 από το e_x^{UDD} είναι η διαφορά του $a(x + K)$ από το $\frac{1}{2}$.

α_x	q_x			
	0.001	0.005	0.01	0.05
-100	0.491581	0.457987	0.4168	0.185903
-50	0.495748	0.478719	0.457465	0.302695
-10	0.499083	0.495405	0.490789	0.453188
-1	0.499833	0.499165	0.498325	0.491452
0	0.499917	0.499582	0.499162	0.495726
1	0.5	0.5	0.5	0.5
10	0.50075	0.503759	0.507536	0.538301
50	0.504085	0.520446	0.540867	0.689568
100	0.508253	0.541181	0.581552	0.807877

Πίνακας 3.2: Τιμές του $a(x)$ από τη σχέση (3.4.3) για διάφορα α_x και q_x .

Πηγή: Jones & Meru (2000).

Γίνεται εύκολα αντιληπτό από τον τύπο (3.4.3) αλλά και από το παραπάνω πίνακα ότι:

- Η διαφορά του $a(x)$ από το $\frac{1}{2}$ αυξάνεται με την τιμή του q_x αλλά και με την αύξηση του α_x από το 1.
- Το $a(x)$ αυξάνεται με την αύξηση του α_x .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρακάτω μορφή της $a(x)$, πιο συγκεκριμένα κάνοντας χρήση της σειράς Taylor στην (3.4.3) αποδεικνύεται ότι μία προσέγγιση της είναι (Βλέπε Bowers et.al, 1997):

$$a(x) \cong \frac{1}{2} + \frac{1}{12}(\alpha_x - 1)q_x, \text{ για όλα τα } \alpha_x. \quad (3.4.5)$$

Για τη περίπτωση της σταθερής έντασης θνησιμότητας ($\alpha_x = 0$), ο τύπος (3.4.5) γίνεται:

$$a(x) \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{12}q_x.$$

Ενώ για τη περίπτωση της υπόθεσης Balducci ($\alpha_x = -1$) γίνεται:

$$a(x) \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{6}q_x.$$

3.4.2 Ασφαλίσεις Ζωής & FAAs

Στην Ενότητα 1.4 είδαμε βασικούς τύπους των Ασφαλίσεων Ζωής. Οπότε σε αυτό το σημείο θα δούμε σχέσεις που συνδέουν τις Ασφαλίσεις Ζωής με τις FAAs. Πιο συγκεκριμένα στη περίπτωση της UDD και της κλασματικής ανεξαρτησίας που ισχύει υπό αυτήν, τα ενιαία καθαρά ασφάλιστρα (E.K.A.) μπορούν να εκφραστούν μέσω των E.K.A. για ασφαλιστικές αποζημιώσεις που πληρώνονται στο τέλος του έτους θανάτου (A_x). Δηλαδή:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \quad (3.4.6)$$

Ειδικότερα η σχέση (3.4.6) προκύπτει ως εξής:

Γνωρίζουμε ότι υπό τη UDD ισχύει $T(x) = K(x) + Z(x)$ και η $Z \sim U(0,1)$. Επιπλέον οι K και Z είναι ανεξάρτητες.

Άρα:

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= E[v^{T(x)}] = E[v^{K(x)+Z(x)}] \\ &= E[v^{K(x)+1-(1-Z(x))}] \\ &= E[v^{K(x)+1}]E[v^{-(1-Z(x))}] \\ &= E[v^{-(1-Z(x))}]A_x. \end{aligned} \quad (3.4.6\alpha)$$

Όμως

$$\begin{aligned} E[v^{-(1-Z(x))}] &= \int_0^1 v^{-(1-u)} f_{Z(x)}(u) du \\ &= \int_0^1 v^{-(1-u)} du = v^{-1} \int_0^1 v^u du \\ &= v^{-1} \int_0^1 e^{-\delta u} du = v^{-1} \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} \\ &= v^{-1} \frac{1 - v}{\delta} = \frac{v^{-1} - 1}{\delta} \\ &= \frac{1+i-1}{\delta} = \frac{i}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.4.6\beta).$$

Άρα από τις σχέσεις (3.4.6α) και (3.4.6β) έχουμε: $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$.

Μία αναδρομική σχέση που συνδέει τις \bar{A}_x τιμές με τις επόμενες είναι η παρακάτω:

$$\bar{A}_x = \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 + v p_x \bar{A}_{x+1}. \quad (3.4.7)$$

Ξεκινώντας με $\bar{A}_\omega = 0$, με το ω να είναι η νεότερη ηλικία όπου η πιθανότητα επιβίωσης είναι μηδέν.

Η ποσότητα $\bar{A}_{x:\overline{1}|}^1$ του τύπου (3.4.7) είναι μία Πρόσκαιρη Άμεση Ασφάλιση Ζωής ενός έτους (βλέπε σχέση 1.4.2), οπότε ισούται με:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{1}|}^1 &= \int_0^1 v^z {}_z p_x \mu_{x+z} dz \\ &= v q_x \int_0^1 v^{z-1} \frac{{}_z p_x \mu_{x+z}}{q_x} dz \\ &= A_{x:\overline{1}|}^1 E[v^{Z-1} | K = 0]. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Η τελευταία ποσότητα του τύπου (3.4.8) οφείλεται στο γεγονός ότι η ${}_z p_x \mu_{x+z} / q_x$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου μέχρι το θάνατο ενός ατόμου ηλικίας x δεδομένου ότι ο θάνατος συμβαίνει πριν από την ηλικία $x+1$.

Στη περίπτωση της UDD η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ${}_z p_x \mu_{x+z} / q_x$ ισούται με 1 για όλα τα x και γίνεται $\int_0^1 v^{z-1} dz = \frac{i}{\delta}$. Επομένως η αντίστοιχη σχέση για τη Πρόσκαιρη Άμεση Ασφάλιση Ζωής είναι:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1.$$

Για ένα οποιοδήποτε μέλος της οικογένειας των FAAs ο γενικός τύπος είναι:

$$\begin{aligned} E[v^{Z-1} | K = 0] &= \int_0^1 v^{z-1} \frac{{}_z p_x \mu_{x+z}}{q_x} dz \\ &= \int_0^1 v^{z-1} \frac{1 - p_x^{\alpha_x}}{\alpha_x q_x [1 - z + z p_x^{\alpha_x}]^{1-1/\alpha_x}} dz. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

α_x	q_x			
	0.001	0.005	0.01	0.05
Επιτόκιο 5%				
-100	1.02522	1.0269	1.02896	1.04059
-50	1.02501	1.02586	1.02693	1.0347
-10	1.02484	1.02503	1.02526	1.02714
-1	1.02481	1.02484	1.02488	1.02522
0	1.0248	1.02482	1.02484	1.02501
1	1.0248	1.0248	1.0248	1.0248
10	1.02476	1.02461	1.02442	1.02288
50	1.02459	1.02377	1.02276	1.01535
100	1.02438	1.02274	1.02073	1.00949
Επιτόκιο 10%				
-100	1.05005	1.05341	1.05755	1.08097
-50	1.04963	1.05134	1.05347	1.06908
-10	1.0493	1.04967	1.05013	1.05389
-1	1.04922	1.04929	1.04937	1.05006
0	1.04921	1.04925	1.04929	1.04963
1	1.04921	1.04921	1.04921	1.04921
10	1.04913	1.04883	1.04845	1.04538
50	1.0488	1.04716	1.04513	1.03039
100	1.04838	1.04509	1.04108	1.01877

Πίνακας 3.3: Τιμές της (3.4.9) για διάφορα α_x και q_x . Πηγή: Jones & Meru (2000).

Παρατηρώντας τις τιμές που πήραμε από τη σχέση (3.4.9) για διάφορες τιμές των α_x και q_x και με επιτόκιο $i = 5\%, 10\%$ βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Οι γραμμές του πίνακα για $\alpha_x = 1$ δίνουν τη τιμή του $\frac{i}{\delta}$.
- Όσο αυξάνεται το q_x τόσο μεγαλώνουν και οι αποκλίσεις των τιμών του πίνακα από το $\frac{i}{\delta}$ ($\alpha_x = 1$), αυτό βέβαια συμβαίνει όταν το α_x έχει μικρές τιμές.

Είδαμε στην Ενότητα 1.4 ότι για την περίπτωση της Ισόβιας Μέλλουσας m – ετών Ασφάλισης Ζωής ισχύει ότι:

$${}_m|\bar{A}_x = \int_m^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Στη περίπτωση της UDD έχουμε ότι:

$${}_m|\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} {}_m|A_x.$$

Η αντίστοιχη σχέση για την Μέλλουσα n -ετών και πρόσκαιρη m -ετών Ασφάλιση Ζωής είναι:

$${}_{n|m}\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} {}_{n|m}A_x.$$

3.4.3 Ράντες Ζωής & FAAs

Στη προηγούμενη υποενότητα είδαμε τύπους που συνδέουν τις Ασφαλίσεις Ζωής με τις FAAs, παρομοίως σε αυτό το σημείο θα δούμε σχέσεις που συνδέουν τις Ράντες Ζωής με τις FAAs. Όπως στη περίπτωση των Ασφαλειών Ζωής με τη σχέση (3.4.7) έτσι και στις ράντες οι αναλογιστικές παρούσες αξίες σε μηνιαίες πληρωμές υπολογίζονται αναδρομικά με τον τύπο:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{x:1}^{(m)} + v p_x \ddot{a}_{x+1}^{(m)} \text{ με } \ddot{a}_\omega^{(m)} = 0.$$

Στη περίπτωση της Πρόσκαιρης ενός έτους άμεσης προκαταβλητέας ράντας ζωής (βλέπε σχέση 1.4.6) ο τύπος είναι:

$$\ddot{a}_{x:1}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} v \frac{j}{m} \frac{j}{m} p_x = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} v \frac{j}{m} \left[1 - \frac{j}{m} + \frac{j}{m} p_x^{\alpha_x} \right]^{\frac{1}{\alpha_x}}. \quad (3.4.10)$$

Με τη ποσότητα $\frac{j}{m} p_x$ να αντικαθιστάται από την $\left[1 - \frac{j}{m} + \frac{j}{m} p_x^{\alpha_x} \right]^{1/\alpha_x}$ (βλέπε σχέση 2.1.1).

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι υπό τη UDD ισχύει η σχέση (3.4.6), επομένως με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι (βλέπε Χατζηκωνσταντινίδης 2013):

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x,$$

με $i^{(m)}$ να είναι το επιτόκιο στο αντίστοιχο διάστημα $\frac{1}{m}$.

Όταν έχουμε την οριακή περίπτωση $m \rightarrow \infty$ τότε:

$$A_x^{(m)} \rightarrow \bar{A}_x \quad \text{και} \quad i^{(m)} \rightarrow \delta.$$

Άρα επανερχόμαστε στη γνωστή σχέση (3.4.6). Επιπλέον, ισχύει η αντίστοιχη αναδρομική σχέση που είδαμε και στις προηγούμενες περιπτώσεις, δηλαδή:

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{1}|} + v p_x \bar{a}_{x+1} \text{ με } \bar{a}_\omega = 0.$$

Η πρόσκαιρη ενός έτους ράντα ζωής είναι (βλέπε σχέση 1.4.9 και 2.1.1):

$$\bar{a}_{x:\overline{1}|} = \int_0^1 v^z [1 - z + z p_x^{\alpha_x}]^{1/\alpha_x} dz. \quad (3.4.11)$$

Η εφαρμογή μίας FAAs σε συνδυασμό με πίνακα θνησιμότητας είναι πολύ πιο αξιόπιστος τρόπος και προσφέρει πολύ καλύτερα αποτελέσματα συγκριτικά με μία αυθαίρετη υπόθεση. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι η αληθής ένταση θνησιμότητας ακολουθεί το νόμο Makeham και οι σχετικές τιμές ραντών που ελήφθησαν χρησιμοποιώντας διάφορες υποθέσεις για τις αληθής τιμές (στήλη 2, Πίνακας 3.4). Έστω λοιπόν ότι:

$$\mu_x = A + Bc^x,$$

με $A = 0.0007$, $B = 0.00005$ και $C = 10^{0.04}$.

(Bowers et al. 1997 για ηλικίες 13 και άνω).

Με τη συγκεκριμένη ένταση θνησιμότητας οι τιμές του q_x προσδιορίζονται. Στη συνέχεια τα κατάλληλα α_x (στήλη 3, Πίνακας 3.4) βρίσκονται με τη πρώτη μέθοδο που αναλύθηκε στην ενότητα 2.2. Τέλος οι τιμές του \bar{a}_x υπολογίζονται για τις τιμές του $x = 25, 45, 65, 85$, αλλά τα ίδια α_x χρησιμοποιούνται για τις περιπτώσεις των UDD, σταθερής έντασης και Balducci.

x	\bar{a}_x για $i = 6\%$				
	Αληθής α_x	Κατάλληλο α_x	UDD	Σταθερή Ένταση	Balducci
25	15.7192	15.7192	15.7189	15.7187	15.7184
45	13.6069	13.6069	13.6062	13.6054	13.6046
65	9.3904	9.3904	9.3899	9.3869	9.3840
85	4.1827	4.1827	4.1895	4.1769	4.1643

Πίνακας 3.4: Σύγκριση τιμών ραντών ζωής με διάφορους τρόπους. Πηγή: Jones & Mereu (2000).

Σύμφωνα με το Πίνακα 3.4 παρατηρούμε ότι ένα σύνολο κατάλληλων α_x τιμών προσφέρει σημαντική βελτίωση στις τιμές των ραντών που λάβαμε. Βρήκαμε τιμές

του α_x που αποδίδουν μία πολύ λεία και συνεχής ένταση θνησιμότητας. Επομένως δεν είναι περίεργο που οι τιμές των ραντών αυτών έρχονται σε απόλυτη συμφωνία με τις αληθείς.

3.4.4 Δημογραφικές Συναρτήσεις

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε κάποιες δημογραφικές συναρτήσεις οι οποίες εμφανίζονται στα συμβάντα ζωής και έχουν μεγάλη χρησιμότητα. Ειδικότερα έχουμε ότι:

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt.$$

Με l_x να είναι ο αριθμός των επιζώντων στην αρχή της ηλικίας x , το l_0 δηλώνει τον αριθμό των νεογέννητων κάθε χρόνο. Τέλος, η T_x είναι η συνολική μελλοντική διάρκεια ζωής της l_x ομάδας ή διαφορετικά ο συνολικός αριθμός ανθρώπων ζών ηλικίας x και παραπάνω σε ένα πληθυσμό οποιαδήποτε στιγμή.

Επίσης:

$$Y_x = \int_0^{\infty} T_{x+t} dt$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τη συνολική μελλοντική ζωή ατόμων ηλικίας x και άνω. Γνωρίζουμε γενικά ότι:

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x} \Rightarrow T_x = e_x^0 l_x.$$

Επομένως μπορούμε να λάβουμε μία έκφραση της T_x πολλαπλασιάζοντας το δεξί μέλος της (3.4.2) με l_x . Έχοντας προσδιορίσει τις τιμές της T_x οι τιμές της Y_x υπολογίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
Y_x &= \int_0^1 T_{x+t} dt + Y_{x+1} = \int_0^1 \int_0^\infty l_{x+t+z} dz dt + Y_{x+1} \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-t} l_{x+t+z} dz dt + \int_0^1 \int_{1-t}^\infty l_{x+t+z} dz dt + Y_{x+1} \\
&= l_x \int_0^1 \int_0^{1-t} t+z p_x dz dt + T_{x+1} + Y_{x+1}. \tag{3.4.11}
\end{aligned}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα του τύπου (3.4.11) ισούται με:

$$\int_0^1 \int_0^{1-t} t+z p_x dz dt = \begin{cases} \frac{\alpha_x \{ \alpha_x - (1 + 2\alpha_x) p_x^{\alpha_x+1} + (1 + \alpha_x) p_x^{2\alpha_x+1} \}}{(1 + \alpha_x)(1 + 2\alpha_x)(1 - p_x^\alpha)^2}, & \alpha_x \neq 0, -\frac{1}{2}, -1 \\ \frac{q_x + p_x \log p_x}{\{\log p_x\}^2}, & \alpha_x = 0 \\ -\frac{p_x \{ 1 - p_x^{1/2} + \frac{1}{2} \log p_x \}}{(1 - p_x^{1/2})^2}, & \alpha_x = -\frac{1}{2} \\ \frac{p_x \{ 1 - p_x + p_x \log p_x \}}{q_x^2}, & \alpha_x = -1. \end{cases}$$

Παρακάτω ακολουθούν κάποιες εφαρμογές ώστε να γίνουν πιο κατανοητά όσα παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3 (βλέπε Hassett et.al, 2007).

Παράδειγμα 3.1

Στη παρακάτω εφαρμογή θα δούμε δύο γενικές εκφράσεις του \bar{A}_x υπό τον νόμο de Moivre's, $l_x = \omega - x$ για $0 \leq x \leq \omega$, και υπό την υπόθεση της σταθερής έντασης θνησιμότητας, $\mu(x) = \mu$ για όλα τα $x \geq 0$. (όπου $\omega = \infty$).

Έχουμε λοιπόν για το νόμο de Moivre's ότι:

$$l_x = \omega - x \text{ δηλαδή } \mu(x) = \frac{-l'_x}{l_x},$$

Επίσης

$$\begin{aligned} {}_t p_x \mu_{x+t} &= \frac{l_{x+t}}{l_x} \mu_{x+t} \\ &= \frac{\omega - (x+t)}{\omega - x} \frac{1}{\omega - (x+t)} \\ &= \frac{1}{\omega - x}. \end{aligned}$$

Άρα το ${}_t p_x \mu_{x+t}$ είναι σταθερή συνάρτηση του t .

Επομένως η T είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0, \omega - x]$, οπότε:

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t} \frac{1}{\omega - x} dt \\ &= \frac{1}{\omega - x} \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t} dt \\ &= \frac{1}{\omega - x} \frac{1 - e^{-\delta(\omega-x)}}{\delta}. \end{aligned}$$

Για τη περίπτωση της σταθερής έντασης θνησιμότητας με $\mu(x) = \mu$, έχουμε ότι:

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu ds} \text{ και } f(x) = -S'(x) = -(-\mu e^{-\mu x}) = \mu e^{-\mu x} \text{ για } x > 0,$$

η οποία είναι μία πολύ γνωστή εκθετική πυκνότητα.

Όσο αφορά την πυκνότητα της T έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(t) &= {}_t p_x \mu_{x+t} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \mu_{x+t} \\ &= \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu x}} \mu \\ &= \mu e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

Άρα έχουν ίδιες εκθετικές πυκνότητες, οπότε:

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{\mu}{\mu + \delta}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2

Γνωρίζουμε ότι $A_{76} = 0.8$, $vp_{76} = 0.9$ και $i = 0.03$.

Ξέρουμε ότι $vp_{76} = 0.9 \Rightarrow p_{76} = \frac{0.9}{0.9708} = 0.927$

Οπότε το A_{77} είναι:

$$\begin{aligned}A_{76} &= vq_{76} + vp_{76}A_{77} \Rightarrow \\ 0.8 &= 0.9708(1 - p_{76}) + 0.9A_{77} \Rightarrow \\ 0.8 &= 0.070 + 0.9A_{77} \Rightarrow \\ A_{77} &= 0.81.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3

Μία ολόκληρη ασφάλεια ζωής του 50 εκδίδεται σε άτομο ηλικίας x . Η αποζημίωση πληρώνεται τη στιγμή θανάτου. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μελλοντικής διάρκειας ζωής T του ατόμου αυτού είναι:

$$f(t) = \begin{cases} t/5000, & 0 \leq t \leq 100 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Η ένταση ανατοκισμού δ είναι 0.1. Επομένως το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο είναι:

$$\begin{aligned}50\bar{A}_x &= 50 \int_{t=0}^{100} e^{-\delta t} f(t) dt \\ &= 50 \int_{t=0}^{100} e^{-0.10t} \frac{t}{5000} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{50}{5000} \left(\frac{-te^{-0.10t}}{0.10} - \frac{e^{-0.10t}}{(0.10)^2} \Big|_{t=0}^{100} \right) \\
&= 0.01 \left(\frac{-100e^{-10}}{0.10} - \frac{e^{-10}}{0.01} + 0 + \frac{1}{0.01} \right) \\
&= 1 - 10e^{-10} - e^{-10} = 1 - 11e^{-10}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.4

Έχουμε ότι οι θάνατοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε κάθε ηλικία με $i = 0.05$, $q_{35} = 0.01$ και $\bar{A}_{36} = 0.185$. Επομένως το A_{35} υπολογίζεται με το παρακάτω τρόπο:

Αρχικά γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{36} &= \frac{i}{\delta} A_{36} \\
\Rightarrow 0.185 &= \frac{0.05}{0.04879} A_{36} \\
\Rightarrow A_{36} &= 0.1805.
\end{aligned}$$

Επομένως από την αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned}
A_{35} &= vq_{35} + vp_{35}A_{36} \\
&= \frac{1}{1.05}(0.01) + \frac{1}{1.05}(0.99)(0.1805) \\
&= 0.1797.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5

Έστω ότι οι θάνατοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε κάθε ηλικία με $i = 0.10$, $q_x = 0.05$ και $q_{x+1} = 0.08$. Αναζητούμε να βρούμε το $\bar{A}_{x:\overline{2}|}^1$.

Γενικά γνωρίζουμε ότι υπό τη περίπτωση της UDD ισχύει ότι:

$$\bar{A}_{x:\overline{2}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{2}|}^1,$$

και επίσης έχουμε ότι:

$$A_{x:\overline{2}|}^1 = vq_x + v^2 {}_1|q_x$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{0.05}{1.1}\right) + \frac{(0.95)(0.08)}{1.1^2} \\ &= 0.1083. \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\bar{A}_{x:\overline{2}|}^{-1} = \left[\frac{0.10}{\ln 1.1}\right] (0.1083) = 0.114.$$

Επίλογος

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε αρχικά τις τρεις υποθέσεις των κλασματικών ηλικιών (UDD, CFM και Balducci) με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζονται διάφορα αναλογιστικά μέτρα. Στην συνέχεια παρουσιάσαμε τη γενικευμένη τους οικογένεια, η οποία δίνει τη δυνατότητα να επιλέγεται διαφορετική υπόθεση μεταξύ των ηλικιακών διαστημάτων και να μην εφαρμόζεται μία μόνο σε όλες τις ηλικίες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προσφέρει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα.

Επιπλέον είδαμε δύο νέες υποθέσεις που είναι οι γενικευμένες μορφές των UDD και CFM αλλά και την Power οικογένεια. Ειδικότερα είναι οικογένειες μίας παραμέτρου και περιλαμβάνουν συναρτήσεις επιβίωσης και εντάσεις θνησιμότητας πολυωνυμικής μορφής. Οι συγκεκριμένες δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα και σύμφωνα με έρευνες, μεγαλύτερες σε δύναμη οικογένειες, εμφανίζονται και ελαφρώς βελτιωμένες. Επιπροσθέτως για την επιλογή της κατάλληλης υπόθεσης σε κάθε διάστημα αρκεί να καθοριστεί η μία αυτή παράμετρος. Όπως αναφέρθηκε υπάρχουν δύο συγκεκριμένοι μέθοδοι επιλογής που έχουν τα δικά τους θετικά και αρνητικά χαρακτηριστικά.

Γενικά αντιλαμβανόμαστε ότι οι FAAs όταν ποικίλουν μέσα στις ηλικίες είναι πολύ χρήσιμες γιατί σε συνδυασμό με πίνακες θνησιμότητας πέρα από τον προσδιορισμό αναλογιστικών παρουσών αξιών, είναι χρήσιμες και στις εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας.

Παράρτημα

Age Interval Period of Life between Two Ages x to $x + t$	Proportion Dying		Stationary Population*			Average Remaining Lifetime
	Proportion of Persons Alive at Beginning of Age Interval Dying during Interval ${}_tq_x$	Of 100,000 Born Alive		Years Lived in the Age Interval ${}_tL_x$	Years Lived in This and All Subsequent Age Intervals T_x	Average Number of Years of Life Remaining at Beginning of Age Interval \bar{e}_x
		Number Living at Beginning of Age Interval l_x	Number Dying during Age Interval ${}_td_x$			
Days						
0-1	0.00463	100 000	463	273	7 387 758	73.88
1-7	0.00246	99 537	245	1 635	7 387 485	74.22
7-28	0.00139	99 292	138	5 708	7 385 850	74.38
28-365	0.00418	99 154	414	91 357	7 380 142	74.43
Years						
0-1	0.01260	100 000	1 260	98 973	7 387 758	73.88
1-2	0.00093	98 740	92	98 694	7 288 785	73.82
2-3	0.00065	98 648	64	98 617	7 190 091	72.89
3-4	0.00050	98 584	49	98 560	7 091 474	71.93
4-5	0.00040	98 535	40	98 515	6 992 914	70.97
5-6	0.00037	98 495	36	98 477	6 894 399	70.00
6-7	0.00033	98 459	33	98 442	6 795 922	69.02
7-8	0.00030	98 426	30	98 412	6 697 480	68.05
8-9	0.00027	98 396	26	98 383	6 599 068	67.07
9-10	0.00023	98 370	23	98 358	6 500 685	66.08
10-11	0.00020	98 347	19	98 338	6 402 327	65.10
11-12	0.00019	98 328	19	98 319	6 303 989	64.11
12-13	0.00025	98 309	24	98 297	6 205 670	63.12
13-14	0.00037	98 285	37	98 266	6 107 373	62.14
14-15	0.00053	98 248	52	98 222	6 009 107	61.16
15-16	0.00069	98 196	67	98 163	5 910 885	60.19
16-17	0.00083	98 129	82	98 087	5 812 722	59.24
17-18	0.00095	98 047	94	98 000	5 714 635	58.28
18-19	0.00105	97 953	102	97 902	5 616 635	57.34
19-20	0.00112	97 851	110	97 796	5 518 733	56.40
20-21	0.00120	97 741	118	97 682	5 420 937	55.46
21-22	0.00127	97 623	124	97 561	5 323 255	54.53
22-23	0.00132	97 499	129	97 435	5 225 694	53.60
23-24	0.00134	97 370	130	97 306	5 128 259	52.67
24-25	0.00133	97 240	130	97 175	5 030 953	51.74
25-26	0.00132	97 110	128	97 046	4 933 778	50.81
26-27	0.00131	96 982	126	96 919	4 836 732	49.87
27-28	0.00130	96 856	126	96 793	4 739 813	48.94
28-29	0.00130	96 730	126	96 667	4 643 020	48.00
29-30	0.00131	96 604	127	96 541	4 546 353	47.06

Years						
30-31	0.00133	96 477	127	96 414	4 449 812	46.12
31-32	0.00134	96 350	130	96 284	4 353 398	45.18
32-33	0.00137	96 220	132	96 155	4 257 114	44.24
33-34	0.00142	96 088	137	96 019	4 160 959	43.30
34-35	0.00150	95 951	143	95 880	4 064 940	42.36
35-36	0.00159	95 808	153	95 731	3 969 060	41.43
36-37	0.00170	95 655	163	95 574	3 873 329	40.49
37-38	0.00183	95 492	175	95 404	3 777 755	39.56
38-39	0.00197	95 317	188	95 224	3 682 351	38.63
39-40	0.00213	95 129	203	95 027	3 587 127	37.71
40-41	0.00232	94 926	220	94 817	3 492 100	36.79
41-42	0.00254	94 706	241	94 585	3 397 283	35.87
42-43	0.00279	94 465	264	94 334	3 302 698	34.96
43-44	0.00306	94 201	288	94 057	3 208 364	34.06
44-45	0.00335	93 913	314	93 756	3 114 307	33.16
45-46	0.00366	93 599	343	93 427	3 020 551	32.27
46-47	0.00401	93 256	374	93 069	2 927 124	31.39
47-48	0.00442	92 882	410	92 677	2 834 055	30.51
48-49	0.00488	92 472	451	92 246	2 741 378	29.65
49-50	0.00538	92 021	495	91 773	2 649 132	28.79
50-51	0.00589	91 526	540	91 256	2 557 359	27.94
51-52	0.00642	90 986	584	90 695	2 466 103	27.10
52-53	0.00699	90 402	631	90 086	2 375 408	26.28
53-54	0.00761	89 771	684	89 430	2 285 322	25.46
54-55	0.00830	89 087	739	88 717	2 195 892	24.65
55-56	0.00902	88 348	797	87 950	2 107 175	23.85
56-57	0.00978	87 551	856	87 122	2 019 225	23.06
57-58	0.01059	86 695	919	86 236	1 932 103	22.29
58-59	0.01151	85 776	987	85 283	1 845 867	21.52
59-60	0.01254	84 789	1 063	84 258	1 760 584	20.76
60-61	0.01368	83 726	1 145	83 153	1 676 326	20.02
61-62	0.01493	82 581	1 233	81 965	1 593 173	19.29
62-63	0.01628	81 348	1 324	80 686	1 511 208	18.58
63-64	0.01767	80 024	1 415	79 316	1 430 522	17.88
64-65	0.01911	78 609	1 502	77 859	1 351 206	17.19

Years						
65-66	0.02059	77 107	1 587	76 314	1 273 347	16.51
66-67	0.02216	75 520	1 674	74 683	1 197 033	15.85
67-68	0.02389	73 846	1 764	72 964	1 122 350	15.20
68-69	0.02585	72 082	1 864	71 150	1 049 386	14.56
69-70	0.02806	70 218	1 970	69 233	978 236	13.93
70-71	0.03052	68 248	2 083	67 206	909 003	13.32
71-72	0.03315	66 165	2 193	65 069	841 797	12.72
72-73	0.03593	63 972	2 299	62 823	776 728	12.14
73-74	0.03882	61 673	2 394	60 476	713 905	11.58
74-75	0.04184	59 279	2 480	58 039	653 429	11.02
75-76	0.04507	56 799	2 560	55 520	595 390	10.48
76-77	0.04867	54 239	2 640	52 919	539 870	9.95
77-78	0.05274	51 599	2 721	50 238	486 951	9.44
78-79	0.05742	48 878	2 807	47 475	436 713	8.93
79-80	0.06277	46 071	2 891	44 626	389 238	8.45
80-81	0.06882	43 180	2 972	41 694	344 612	7.98
81-82	0.07552	40 208	3 036	38 689	302 918	7.53
82-83	0.08278	37 172	3 077	35 634	264 229	7.11
83-84	0.09041	34 095	3 083	32 553	228 595	6.70
84-85	0.09842	31 012	3 052	29 486	196 042	6.32
85-86	0.10725	27 960	2 999	26 461	166 556	5.96
86-87	0.11712	24 961	2 923	23 500	140 095	5.61
87-88	0.12717	22 038	2 803	20 636	116 595	5.29
88-89	0.13708	19 235	2 637	17 917	95 959	4.99
89-90	0.14728	16 598	2 444	15 376	78 042	4.70
90-91	0.15868	14 154	2 246	13 031	62 666	4.43
91-92	0.17169	11 908	2 045	10 886	49 635	4.17
92-93	0.18570	9 863	1 831	8 948	38 749	3.93
93-94	0.20023	8 032	1 608	7 228	29 801	3.71
94-95	0.21495	6 424	1 381	5 733	22 573	3.51
95-96	0.22976	5 043	1 159	4 463	16 840	3.34
96-97	0.24338	3 884	945	3 412	12 377	3.19
97-98	0.25637	2 939	754	2 562	8 965	3.05
98-99	0.26868	2 185	587	1 892	6 403	2.93
99-100	0.28030	1 598	448	1 374	4 511	2.82
Years						
100-101	0.29120	1 150	335	983	3 137	2.73
101-102	0.30139	815	245	692	2 154	2.64
102-103	0.31089	570	177	481	1 462	2.57
103-104	0.31970	393	126	330	981	2.50
104-105	0.32786	267	88	223	651	2.44
105-106	0.33539	179	60	150	428	2.38
106-107	0.34233	119	41	99	278	2.33
107-108	0.34870	78	27	64	179	2.29
108-109	0.35453	51	18	42	115	2.24
109-110	0.35988	33	12	27	73	2.20

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2013). *Σημειώσεις στο μάθημα : Συμβάντα Ζωής και Θανάτου I*, Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών : Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική κινδύνου.

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., (1997). *Actuarial Mathematics*, 2nd Edition. Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

Broffitt, J.D., (1984). Maximum likelihood alternatives to actuarial estimators of mortality rates (with discussion). *Transactions of the Society of Actuaries XXXVI*, 77-142.

Hassett, M.J., Stewart, D., Steeby, A., (2007). *Life Contingencies*. Actex study manual SOA Exam MLC, ACTEX Publications.

Hoem, J.M., (1984). A flaw in actuarial exposed-to-risk theory. *Scandinavian Actuarial Journal*, 187-194.

Hooker, P.F., Longley-Cook, L.H., (1953). *Life and other Contingencies*, Vol. I. Cambridge University Press.

Jones, B.L., Mereu, J.A., (2000). A family of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics* 27, 261-276.

Jones, B.L., Mereu, J.A., (2002). A critique of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics* 30, 363-370.

Jordan, C.W., (1975). *Life Contingencies*, 2nd Edition. Society of Actuaries, Chicago, IL.

King, G., (1902). *Institute of Actuaries Textbook*, 2nd Edition, Part II. London: Charles and Edwin Layton.

London, D., (1997). *Survival Models and their Estimation*, 3rd Edition. ACTEX Publications, Winsted, CT.

Mereu, J.A., (1961). Some observations on actuarial approximations (with discussion). *Transactions of the Society of Actuaries Part I XIII*, 87-115.

Neill, A., (1977). *Life Contingencies*. London: Heinemann.

Spurgeon, E.F., (1932). *Life contingencies*, 3rd Edition, Cambridge: Cambridge University Press.

Willmot, G.E., (1997). Statistical independence and fractional age assumptions (with discussion). *North American Actuarial Journal* 1 (1), 84-99.