ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

«ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ»

Αγγελική Α. Μαρίνη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος

Πειραιάς,

Ιούλιος 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

«Portfolio Insurance Strategies»

Angeliki A. Marini

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

July 2016

Ευχαριστίες

Η σύνταξη αυτής της μελέτης έγινε μέσα στα πλαίσια της υποχρέωσής μου για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Από τη θέση αυτή εκφράζω τις ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου από το Πανεπιστήμιο Πειραιά κ.Μιχαήλ Ανθρωπέλο, ο οποίος με υποστήριξε καθ’όλη τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διαχείριση επενδυτικού κινδύνου είναι ένα πολύ βασικό και σημαντικό θέμα στη χρηματοοικονομική τόσο σε θεωρητικό, όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Η σημασία άλλωστε της διαχείρισης των επενδυτικών κινδύνων ή των κινδύνων της αγοράς γενικότερα, τονίστηκε με τον πλέον έντονο τρόπο κατά την διάρκεια της χρηματοοικονομικής κρίσης του 2007-10, όπου και ανεπιτυχείς εφαρμογές στρατηγικών διαχείρισης κινδύνων είχαν σαν αποτέλεσμα πολλά πιστωτικά και ασφαλιστικά ιδρύματα να χρεοκοπήσουν ή να αθετήσουν ένα σημαντικό μέρος των υποχρεώσεών τους. Μια σημαντική πτυχή της διαχείρισης κινδύνου είναι η ασφάλιση χαρτοφυλακίου, η οποία εξετάζει τρόπους προστασίας της αξίας των επενδυτικών χαρτοφυλακίων σε ενδεχόμενη πτώση των τιμών της αγοράς.

Στην διπλωματική αυτή εργασία θα δούμε πως μπορούμε να ασφαλίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με τη χρήση παραγώγων, και συγκριμένα με δικαιώματα προαίρεσης (options), με δύο διαφορετικές στρατηγικές: την **Constant Proportion Portfolio Insurance (ή συντομογραφικά CPPI) και την Option Based Portfolio Insurance (OBPI).**

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να κατανοήσουμε και να συγκρίνουμε τις δύο αυτές στρατηγικές και να δούμε τελικά ποια έχει την καλύτερη συμπεριφορά όταν θέλουμε να αποτιμήσουμε την αξία στην μέση της περιόδου ασφάλισης. Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας και εξηγώντας βασικές έννοιες που σχετίζονται με τα δικαιώματα προαίρεσης (τι είναι, πως κοστολογούνται και τι μπορούμε να πετύχουμε με αυτά) και στη συνέχεια θα περιγράψουμε και θα αναλύσουμε τις στρατηγικές ασφάλισης χαρτοφυλακίου. Κάνοντας μία προσομοίωση Monte Carlo θα γεννήσουμε τυχαίες τιμές (υπό προϋποθέσεις) για τον υποκείμενο τίτλο πάνω στον οποίο θα επενδύαμε και έπειτα θα δούμε πως θα επιδρούσε η ασφάλιση που θα κάναμε στο χαρτοφυλάκιό μας στην μέση της περιόδου εξέτασης.

Θα δημιουργήσουμε κάποια πιθανά σενάρια σχετικά με τη μεταβλητότητα στη τιμή του υποκείμενου τίτλου, την απόδοσή του αλλά και την τιμή εξάσκησης που θα θέσουμε. Τελικά θα δούμε ότι στο τέλος, η OBPI αποδίδει λίγο καλύτερα της CPPI στη μέση της περιόδου μας αν και οι δύο ξεκινήσουν με ίδια αρχική αξία και ίδια τιμή εξάσκησης για το call option, ακόμα κι αν υπάρχει σχετικά μικρή ή λίγο μεγαλύτερη μεταβλητότητα στην αγορά ή αν η απόδοση που αναμένουμε είναι είτε θετική, είτε αρνητική. Επίσης θα δούμε ότι ακόμα κι αν οι δύο στρατηγικές ξεκινήσουν με ίδιο κόστος, αλλά διαφορετική τιμή εξάσκησης, τότε πάλι η OBPI αποδίδει λίγο καλύτερα τις CPPI με μία μόνο εξαίρεση. Αν η μεταβλητότητα είναι σχετικά υψηλή τότε η CPPI υπερισχύει της OBPI.

ABSTRACT

The investment risk management is a very basic and important issue in financial both theoretical and practical level. The importance also of management of investment risks or market risks generally emphasized in the strongest way during the financial crisis of 2007-10, where risk management strategies unsuccessful applications resulted in many credit and insurance institutions to fail or from failing an important part of their obligations. An important aspect of risk management is the portfolio insurance, which examines ways to protect the value of the investment portfolio to a potential drop in market prices.

In this thesis we will see how we can insure a portfolio using derivatives and specifically with options, with two different strategies: the **Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) and Option Based Portfolio Insurance (OBPI)**.

The objective of this work is to understand and to compare these two strategies and see which one has the best behavior when we want to evaluate the value in the middle of the period of insurance. We will start quoting and explaining basic concepts related to stock options (what is it, how we priced them and what we can do with them) and then we will describe and analyze the portfolio insurance strategies. Making one Monte Carlo simulation, we will generate random values (under certain conditions) for underlying instrument upon which we invest and then we will see the impact on the insurance that we would do in our portfolio in the middle of the review period.

We will create some possible scenarios regarding the volatility in price of the underlying security, the return and the strike price to be set. Finally we will see that in the end, OBPI attaches little better the CPPI in the middle of our season if both start with the same initial value and same strike price for the call option, even if there is relatively little or a little more volatility in the market or if the return is expected either positive or negative. We will also see that even though the two strategies start with the same cost, but different strike price, then the OBPI again yields a little better than the CPPI with only one exception. If the volatility is relatively high then the CPPI overrides OBPI.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟΙ ΟΡΟΙ

1.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι στρατηγικές ασφάλισης αξίας χαρτοφυλακίου έχουν σαν κύριο εργαλείο τους τα δικαιώματα προαίρεσης. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε συνοπτικά τα βασικά στοιχεία αυτών των αξιογράφων, όπως ο ακριβής ορισμός τους, οι γενικότερες χρήσεις τους καθώς και ο τρόπος αποτίμησής τους με βάση το διάσημο υπόδειγμα Black Scholes (1973). Κύρια πηγή πληροφόρησης για τα παρακάτω αποτελεί το βιβλίο του John Hull, "Options, futures and other derivatives" και το βιβλίο του Mark Rubinstein "Futures, options and dynamic strategies".

Γενικότερα, ως *παράγωγο προϊόν* στα χρηματοοικονομικά ορίζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου περιουσιακού στοιχείου ή τίτλου (*υποκείμενος τίτλος-underlying asset*).

Ουσιαστικά δηλαδή, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται άμεσα από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (*long position*) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο συνήθως είναι προϊόντα που τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε μία οργανωμένη δευτερογενή αγορά, (π.χ. χρηματιστήριο) όπως εμπορεύσιμες μετοχές, δείκτες μετοχών, ομόλογα ακόμα και αγαθά και πολύτιμα μέταλλα.

Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι: τα προθεσμιακά συμβόλαια (Forward Contracts), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Future Contracts), τα δικαιώματα προαίρεσης (Options) και τα swaps. Εμείς παρακάτω θα ασχοληθούμε με τα options, επομένως ας περιγράψουμε πιο αναλυτικά τι είναι και πως χρησιμεύουν.

1.2 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

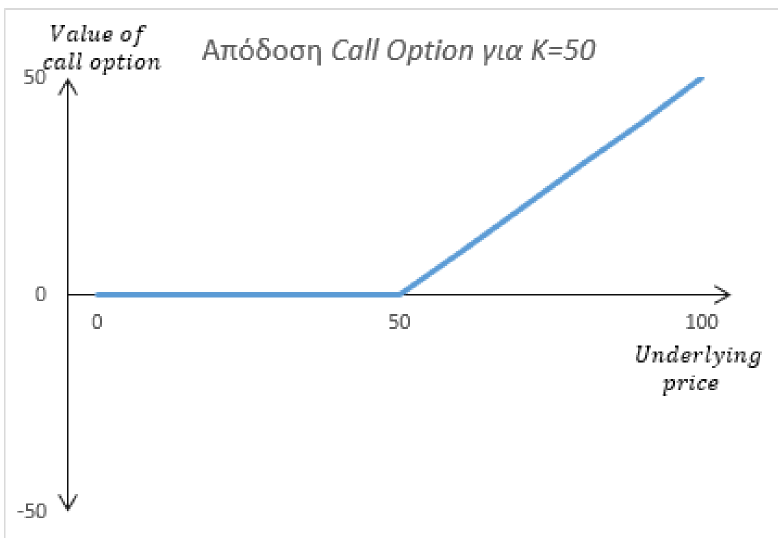
Το *Option (Δικαίωμα Προαίρεσης)* είναι ένα συμβόλαιο που δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον αγοραστή του, να αγοράσει ή να πουλήσει έναν υποκείμενο τίτλο σε μία συγκεκριμένη ή και πριν από αυτή, χρονική στιγμή προς μία συγκεκριμένη τιμή. Η τιμή στην οποία θα μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμά του (είτε αγοράς είτε πώλησης) ονομάζεται *τιμή εξάσκησης (strike price)*. Αν δεν είναι συμφέρουσα η εξάσκηση του option, ο κάτοχος του μπορεί να εγκαταλείψει τη θέση του. Όταν οι κάτοχοι των options κάνουν χρήση των συμβολαίων, λέμε ότι εξασκούν το option (δικαίωμά) τους.

Υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων: *i)* το *call option* (δικαίωμα αγοράς) και *ii)* το *put option* (δικαίωμα πώλησης).

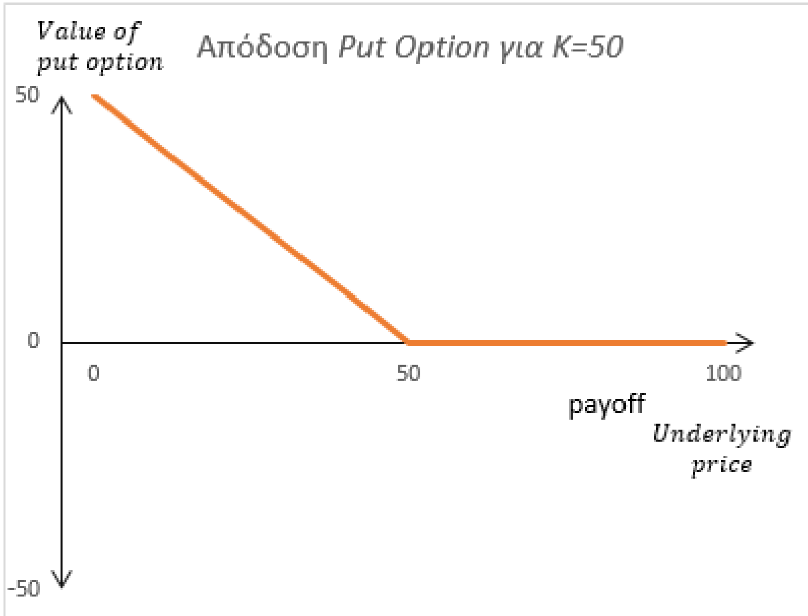
i. Το *call option* (όπως φαίνεται και από την ονομασία του), δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει ένα χρηματιστηριακό τίτλο, στην τιμή εξάσκησης και σε συγκεκριμένο χρόνο.
ii. Το *put option* αντίστοιχα είναι το δικαίωμα να πουλήσει τον χρηματιστηριακό τίτλο, στην τιμή εξάσκησης σε συγκεκριμένο χρόνο.

Ένα ακόμη σημαντικό χαρακτηριστικό του option είναι η ημερομηνία λήξης του. Η ημέρα λήξης του option είναι η τελευταία μέρα που μπορεί να εξασκηθεί ή να ανταλλαχθεί το option. Μετά την ημερομηνία αυτή το option παύει να ισχύει και εξαφανίζεται. Ανάλογα με το αν μπορούν να εξασκηθούν πριν τη λήξη τους, τα options χωρίζονται σε δύο είδη: στα *Αμερικάνικου τύπου* και στα *Ευρωπαϊκού τύπου*.

Τα *Αμερικάνικου τύπου* δικαιώματα μπορούν να εξασκηθούν από τον κάτοχο τους, οποιαδήποτε στιγμή μετά την αγορά τους, μέχρι και την ημερομηνία λήξης τους. Αντίθετα, τα *Ευρωπαϊκού τύπου* μπορούν να εξασκηθούν μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του.



Σχήμα 1.1



Σχήμα 2.2

Τα περισσότερα δικαιώματα που διαπραγματεύονται σήμερα στην αγορά είναι Αμερικανικού τύπου. Ωστόσο, τα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα είναι πιο εύκολα στην ανάλυση καθώς επίσης, αρκετές από τις ιδιότητες των Αμερικάνικων δικαιωμάτων συχνά πηγάζουν από τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκά.

Τα δικαιώματα μπορούν να είναι είτε τυποποιημένα και να διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο, είτε εξωχρηματιστηριακά. Η τυποποίηση ενισχύει την ομαλή διεξαγωγή των συναλλαγών, αλλά συμβάλλει και στην αξιοπιστία του δικαιώματος.

1.3 Κόστος δικαιώματος προαίρεσης

Ως κόστος του δικαιώματος (premium) ορίζεται το χρηματικό ποσό που καλείται να πληρώσει ο αγοραστής του δικαιώματος ώστε να το αποκτήσει. Η πληρωμή πραγματοποιείται στον πωλητή ανεξάρτητα από το αν θα εξασκήσουμε το δικαίωμα.

1.4 Θέσεις δικαιώματος προαίρεσης

Επίσης, υπάρχουν τέσσερις βασικές θέσεις στην αγορά δικαιωμάτων. Μέσα από αυτές μπορεί κάποιος να φτιάξει πολύ περισσότερες και πιο σύνθετες. Οι βασικές θέσεις είναι οι εξής:

α) *Long call (Αγορά ενός call)*, όπου κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός τίτλου, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.

Δηλαδή έχουμε:

• Κίνητρο: η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα ανέβει.

• Ρίσκο: Το ρίσκο του επενδυτή είναι περιορισμένο και ίσο με το premium.

• Απόδοση: Η απόδοση από την αγορά ενός call είναι απεριόριστη.

β) *Short call (Πώληση ενός call),* όπου κάποιος πωλεί το δικαίωμα αγοράς. Σε αυτή τη θέση ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να πωλήσει μια προκαθορισμένη ποσότητα ενός τίτλου, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία συγκεκριμένη τιμή συναλλαγής. Εδώ έχουμε:

• Ρίσκο: Το ρίσκο είναι απεριόριστο, διότι ο πωλητής έχει την υποχρέωση να παραδώσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή που έχει συμφωνηθεί από πριν ανεξαρτήτως της τρέχουσας τιμής.

• Απόδοση: Το μέγιστο κέρδος του πωλητή είναι ίσο με το premium που έχει λάβει.

γ) *Long put (Αγορά ενός Put),* όπου κάποιος αγοράζει το δικαίωμα να πωλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός τίτλου, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.

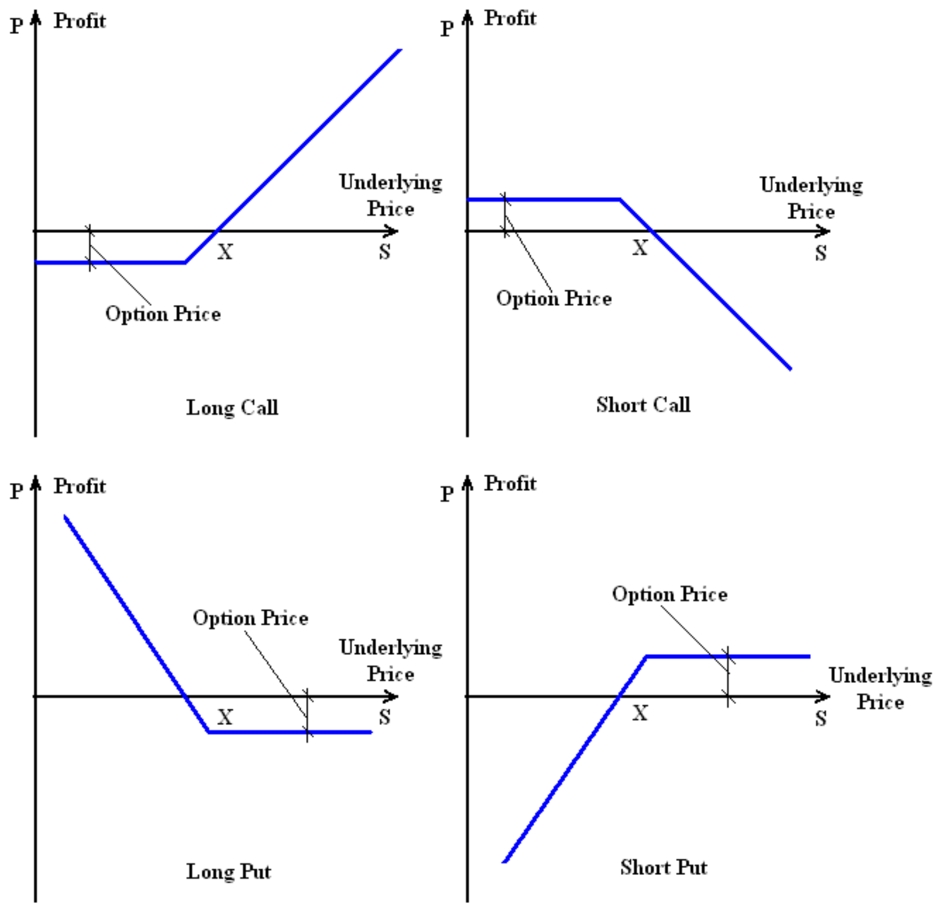
• Ρίσκο: Όπως όταν αγοράζοντας ένα call, έτσι κι εδώ, το ρίσκο είναι περιορισμένο και ίσο με το premium.

• Απόδοση: Το μέγιστο κέρδος που μπορεί να προκύψει από την αγορά ενός put θα επιτευχθεί αν η τιμή του υποκείμενου γίνει ίση με το μηδέν.

δ) Τέλος, *short put (Πώληση ενός Put)* όπου κάποιος πουλάει το δικαίωμα να πωλήσει μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία συγκεκριμένη τιμή συναλλαγής. Σε αυτή τη θέση ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να αγοράσει τη προκαθορισμένη ποσότητα του αγαθού σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου.

• Ρίσκο: Το ρίσκο είναι ίσο με την τιμή εξάσκησης μείον το ληφθέν premium.

• Απόδοση: Η μέγιστη απόδοση είναι ίση με το ληφθέν premium.



Σχήμα 1.3, Πηγή:*Option trading payoff*,*essiridalo.dynu.com*

1.5. Αποτίμηση δικαιωμάτων

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης (σε αντίθεση με άλλα παράγωγα, όπως τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης για παράδειγμα) υιοθετεί, πέρα από βασικές οικονομικές υποθέσεις όπως την απουσία arbitrage, ένα στοχαστικό υπόδειγμα για την εξέλιξη που θα έχει στο μέλλον ο υποκείμενος τίτλος. Η βασική ιδέα είναι ότι για να μπορέσουμε να εξάγουμε έναν κλειστό τύπο για την αξία ενός δικαιώματος, θα πρέπει ο υποκείμενος τίτλος να ακολουθεί μια στοχαστική εξέλιξη που να μας επιτρέπει να κάνουμε αντιστάθμιση του κινδύνου. Επομένως, πριν παραθέσουμε τους τύπους αποτίμησης, θα πρέπει να δώσουμε τα βασικά στοιχεία της μοντελοποίησης της στοχαστικής εξέλιξης του υποκείμενου τίτλου.

1.6. Στοχαστική διαδικασία

Μια *στοχαστική διαδικασία* ή αλλιώς *τυχαία διαδικασία*, είναι η συλλογή τυχαίων μεταβλητών που μας δείχνουν την εξέλιξη ενός συστήματος με τυχαίες τιμές κατά την πάροδο του χρόνου. Αντί να έχουμε μία μέθοδο η οποία εξελίσσεται με έναν μόνο τρόπο, έχουμε μία απροσδιοριστία: ακόμα κι αν είναι γνωστή η αρχική κατάσταση, υπάρχουν διάφορες κατευθύνσεις προς τις οποίες μπορεί να κινηθεί η διαδικασία.

Μαθηματικά, ως στοχαστική διαδικασία $\boldsymbol{X}$ ορίζεται μία παραμετρική συλλογή από τυχαίες μεταβλητές $\{X_t, t \in T\} = \{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ ορισμένη σε κάποιο χώρο πιθανότητας Ω.

Μία στοχαστική διαδικασία $\boldsymbol{X}$ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών έτσι ώστε:

i. Για σταθερό στιγμιαίο χρόνο t, είναι μία τυχαία μεταβλητή: $X_t = X_t(\omega),\ \omega \in \Omega$.
ii. Για σταθερό $\omega \in \Omega$, είναι μία συνάρτηση του χρόνου : $X_t = X_t(\omega), t \in T$.

Οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε *συνεχή* και *διακριτού* χρόνου. Διακριτού χρόνου είναι εκείνη της οποίας οι τιμές μπορεί να αλλάξουν σε συγκριμένες χρονικές στιγμές, ενώ συνεχούς χρόνου όταν η τιμή της μπορεί να μεταβληθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Επίσης, μπορούν να διακριθούν σε συνεχούς και διακριτής μεταβλητής. Στην πρώτη, η μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα συγκριμένο διάστημα, σε αντίθεση με τη διακριτή η οποία λαμβάνει πεπερασμένες ή αριθμήσιμες δυνατές τιμές.

Εμάς θα μας απασχολήσουν οι συνεχούς μεταβλητής, συνεχούς χρόνου στοχαστικές διαδικασίες για τις τιμές των μετοχών. Πρέπει να θυμόμαστε πως στην πράξη δεν παρατηρούμε τιμές μετοχών οι οποίες ακολουθούν διαδικασίες συνεχούς μεταβλητής συνεχούς χρόνου. Οι τιμές τους περιορίζονται σε διακριτές τιμές και οι αλλαγές τους μπορούν να μελετηθούν μόνο όταν η συναλλαγή τους είναι ανοιχτή. Ωστόσο στην πράξη αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα υποδείγματα συνεχούς χρόνου δίνουν πολύ καλές προσεγγίσεις της πραγματικής συμπεριφοράς υποκείμενων τίτλων, ειδικά όταν οι τελευταίοι διαπραγματεύονται σε μεγάλες χρηματοοικονομικές αγορές.

1.7.Κίνηση Brown-Ορισμός

Ο πλέον κλασσικός τρόπος με τον οποίο γίνεται η μοντελοποίηση της τυχαιότητας σε υποδείγματα συνεχούς χρόνου είναι μέσω της κίνησης Brown. Για να θεωρηθεί μία διαδικασία κίνηση Brown πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες (που στην ουσία καθορίζουν και τον ορισμό μιας τυπικής κίνησης Brown):

i. Αρχίζει από το μηδέν: $X_0 = 0$.
ii. Για τις χρονικές στιγμές $t_0, t_1, t_{2,\dots}, t_n$ $\mu\varepsilon\ 0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, ισχύει ότι: οι τυχαίες μεταβλητές $X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάτητες
iii. $\forall\ t > 0$, η X_t ακολουθεί κανονική κατανομή : $X_t \sim N(0, t)$
iv. Η X_t είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου για κάθε ω.

1.8. Διαδικασία για την τιμή του υποκείμενου τίτλου

Εδώ θα μελετήσουμε τη στοχαστική διαδικασία που ακολουθεί η τιμή του υποκείμενου τίτλου που δεν πληρώνει μερίσματα, τουλάχιστον για την περίοδο .

Είναι πολύ δελεαστικό να θεωρήσουμε ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τροποποιημένη διαδικασία Wiener, που μας δείχνει ότι έχει σταθερό αναμενόμενο ρυθμό απόκλισης και σταθερό ρυθμό διακύμανσης. Όμως δε λαμβάνει υπόψη ότι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης που απαιτείται από τους επενδυτές για έναν υποκείμενο τίτλο, είναι ανεξάρτητο από την τιμή του. Αν για παράδειγμα απαιτούμε 12% ετήσια απόδοση όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι 5€, τότε θα εξακολουθήσουμε να απαιτούμε το 12% της ετήσιας απόδοσης αν η τιμή του γίνει 30€.

Προφανώς, η υπόθεση ότι ο αναμενόμενος ρυθμός απόκλισης είναι σταθερός πρέπει να αντικατασταθεί από την υπόθεση ότι η αναμενόμενη απόδοση είναι σταθερή. Αν S_t είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου σε χρόνο t, τότε ο αναμενόμενος ρυθμός απόκλισης στο S_t θα πρέπει να θεωρείται ο $\mu \cdot S_t$, όπου μ είναι μία σταθερή παράμετρος και εκφράζει το ποσοστό της αναμενόμενης απόδοσης (τάση) του τίτλου (στο παραπάνω παράδειγμα $\mu = 12\%$).

Αν η μεταβλητότητα της τιμής είναι πάντα μηδέν (δηλαδή εάν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε καθόλου τυχαιότητα στο υπόδειγμα), τότε θα έχουμε:

$$\Delta S_t = \mu \cdot S_t \cdot \Delta t \tag{1.1}$$

και καθώς $\Delta t \to 0$, $\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt$.

Επομένως θα έχουμε ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου για $\forall\ t$ θα δίνεται από:

$$S_t = S_0 \cdot e^{\mu \cdot t} \tag{1.2}$$

όπου, S_0: η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην αρχή $(t = 0)$.

Η παραπάνω σχέση μας δείχνει πως όταν το ποσοστό της μεταβλητότητας είναι μηδέν, η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται με σύνθετο συνεχές επιτόκιο μ ανά μονάδα χρόνου. Στη πράξη όμως, η τιμή του υποκείμενου τίτλου έχει μεταβλητότητα. Μια υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε ότι η μεταβλητότητα της απόδοσης σε μικρό χρονικό διάστημα Δt , είναι η ίδια ανεξάρτητα από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Δηλαδή, είμαστε το ίδιο αβέβαιοι για την απόδοση είτε η τιμή της μετοχής είναι 10€, είτε 100€.

1.9. Το λήμμα του It$\hat{o}$

Σε αυτό το σημείο, πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της γεωμετρικής κίνησης Brown, θα πρέπει να αναφέρουμε το λήμμα του It$\hat{o}$. Σύμφωνα με τον J. Hull (σελ. 269-270), η τιμή του option είναι συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου S και του χρόνου t. Πιο γενικά μπορούμε να πούμε ότι η τιμή οποιουδήποτε παραγώγου είναι συνάρτηση των στοχαστικών μεταβλητών που διέπουν το παράγωγο και τον χρόνο. Επομένως, κάποιος που θέλει να μελετήσει τα παράγωγα θα πρέπει να κατανοήσει τη συμπεριφορά αυτών των στοχαστικών μεταβλητών.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα σε αυτό τον τομέα ανακαλύφθηκε από το μαθηματικό *K.Itô* 1951[1] και είναι γνωστό ως λήμμα του *Itô.* Υποθέτει ότι η τιμή της μεταβλητής x ακολουθεί διαδικασία *Itô,* δηλαδή:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (1.3)$$

όπου, dz είναι μία διαδικασία Wiener και α, b είναι συναρτήσεις των x και t.

Η μεταβλητή x έχει μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου (*drift rate*) α και διακύμανση ανά μονάδα χρόνου (*variance rate*) b. Το λήμμα μας λέει ότι μία συνάρτηση G των x και t ακολουθεί διαδικασία:

$$dG = \left(a\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \qquad (1.4)$$

όπου, dz είναι η ίδια διαδικασία Wiener με πριν. Έτσι το G ακολουθεί επίσης διαδικασία *Itô* με μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad (1.5)$$

και διακύμανση ανά μονάδα χρόνου:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2 \qquad (1.6)$$

Μία λεπτομερής και αυστηρή απόδειξη του λήμματος είναι πέρα από το σκοπό αυτής της διπλωματικής εργασίας.

1.10. Η γεωμετρική κίνηση Brown για τις τιμές των μετοχών

Το παραπάνω μοντέλο που είδαμε είναι γνωστό ως γεωμετρική κίνηση Brown η οποία μαθηματικά ορίζεται ως εξής:

Μία στοχατική διαδικασία $S_t, t \geq 0$ λέγεται γεωμετρική κίνηση Brown με σταθερές παραμέτρους $\mu \in R$ (μ: $τάση$) και $\sigma > 0$ (σ: $μεταβλητότητα$), όταν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu\, \Delta t + \sigma\, \varepsilon\, \sqrt{\Delta t} \qquad (1.7)$$

$\frac{\Delta S_t}{S_t}$ *:* η απόδοση του υποκείμενου τίτλου στη μονάδα χρόνου (S_t: τρέχουσα τιμή υποκείμενου τίτλου)

μ: η προσδοκώμενη ετήσια απόδοση συνεχούς ανατοκισμού του υποκείμενου τίτλου (σταθερή)

[1] Βλ. K.Itô: "On stochastic differential equations", Memoirs of the American Mathematical Society (1951):1-51

σ: η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του υποκείμενου τίτλου σε ετήσια βάση (σταθερή) ανά μονάδα χρόνου

Δt: η μονάδα του χρόνου εκφρασμένη σε έτη

ε: τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή (κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1)

και $\varepsilon\sqrt{\Delta t}=\Delta z_t$ είναι το βήμα της κίνησης Brown από τον χρόνο t στον χρόνο $t+\Delta t$.

Επίσης, να σημειώσουμε ότι ο όρος $\mu\,\Delta t$ εκφράζει την προσδοκώμενη απόδοση της τιμής του υποκείμενου τίτλου (με μ και Δt σταθερά) και ο όρος $\sigma\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}$, είναι το στοχαστικό κομμάτι της απόδοσης, ενώ η ε παίρνει τυχαίες τιμές από την τυπική κανονική κατανομή.

Σε συνέχεια με τα όσα έχουμε αναφέρει και με τη βοήθεια του λήμματος του $It\hat{o}$, υποθέτουμε ότι η S_t ακολουθεί την παραπάνω σχέση και $C(S_t,t)$ είναι μία διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε θα ισχύει:

$$dC(S_t,t)=\left(\mu S_t\frac{\partial C}{\partial S_t}+\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt+\sigma S_t\left(\frac{\partial C}{\partial S_t}\right)dz_t \qquad (1.8)$$

Σύμφωνα με το λήμμα του It$\hat{o}$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$S_t=S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\,\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \qquad (1.9)$$

και απλοποιώντας τη έχουμε:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\,\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (1.10)$$

Υποθέτουμε ότι οι μεταβολές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου σε μικρή χρονική περίοδο, στο μοντέλο μας, ακολουθούν την κανονική κατανομή, με μ μέση ετήσια απόδοση της μετοχής και σ ετήσια μεταβλητότητα της τιμής.

Η παραπάνω λύση μας δείχνει ότι η S_t ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή

$$S_t \sim LN\left(E(S_t),Var(S_t)\right) \qquad (1.11)$$

όπου, για τη μέση τιμή ισχύει: $E(S_t)=S_0e^{\mu t}$ *(1.12)*

και για τη διακύμανση: $Var(S_t)=S_0^2e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t}-1)$ *(1.13)*

Αν υποθέσουμε ότι η $\ln(S_t)$ είναι μία στοχαστική διαδικασία, σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχυεί ότι:

$$\ln(S_t) \sim N(E(\ln(S_t)), Var(\ln(S_t))) \qquad (1.14)$$

όπου, $E(\ln(S_t)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ *(1.15)*

και $Var(\ln(S_t)) = \sigma^2 t$ *(1.16)*

<u>Παράδειγμα</u>

Για παράδειγμα, έστω ότι έχω αρχική τιμή της ενός υποκείμενου τίτλου $S_0 = 30€$, η αναμενόμενη ετήσια απόδοση του τίτλου είναι $\mu = 0{,}16$ και η τυπική της απόκλιση είναι $\sigma = 0{,}2$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τιμή του σε 8 μήνες θα είναι:

$$\ln(S_t) \sim N\left(\ln(30) + \left(0{,}16 - \frac{0{,}20^2}{2}\right)\frac{8}{12}, 0{,}20^2\frac{8}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(S_t) \sim N(3.495, 0.027)$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι, με 95% πιθανότητα η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα κυμαίνεται:

$$3{,}495 - 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}027} < \ln(S_t) < 3{,}495 + 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}027}$$

$$\Rightarrow 3{,}173 < \ln(S_t) < 3{,}817$$

$$\Rightarrow e^{3.173} < S_t < e^{3.817}$$

$$\Rightarrow 28{,}879 < \ln(S_t) < 45{,}467$$

1.11. Μοντέλο Black-Scholes

Το μοντέλο Black Scholes (1973) είναι ένα μαθηματικό μοντέλο μίας χρηματοπιστωτικής αγοράς που εμπεριέχει παράγωγα επενδυτικά προϊόντα. Από το μοντέλο μπορούμε να αντλήσουμε την Black-Scholes φόρμουλα, η οποία δίνει μια θεωρητική τιμή για ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου για κάθε χρονική στιγμή μέχρι και τη λήξη. Όπως μπορούμε να δούμε και στο βιβλίο του J. Hull (*σελ. 291-292*), ένα Αμερικάνικου τύπου δικαίωμα αγοράς σε υποκείμενους τίτλους χωρίς διανομή μερισμάτων, όμως, δεν μας συμφέρει να το εξασκήσουμε πριν τη λήξη του, οπότε η τιμή του θα είναι ίδια με εκείνη του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού και επομένως, ο τύπος Black-Scholes μπορείς να χρησιμοποιηθεί αυτούσιος.

Οι υποθέσεις πάνω στις οποίες στηρίζεται το μοντέλο των Black and Scholes είναι:

i. η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown
ii. επιτρέπονται οι ανοικτές πωλήσεις στον υποκείμενο τίτλο,
iii. δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών ή φόροι,
iv. ο υποκείμενος τίτλος δεν διανέμει μέρισμα μέχρι την λήξη του δικαιώματος,
v. δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage και
vi. οι συναλλαγές πάνω στον υποκείμενο τίτλο είναι συνεχείς.

Η φόρμουλα των Black Scholes για τιμές του υποκείμενου τίτλου σε χρόνο μηδέν για ένα δικαίωμα αγοράς (Call option) χωρίς μερίσματα είναι:

$$C = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) \qquad (1.17)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon, d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (1.18)$$

$$\kappa\alpha\iota \;\; d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \qquad (1.19)$$

Όπου,

$N\ (\cdot)$: αθροιστική συνάρτηση κατανομής για την τυπική κανονική κατανομή

T: χρόνος έως τη λήξη, r: ένταση ανατοκισμού

S_0: αρχική τιμή υποκείμενου τίτλου, K: τιμή εξάσκησης

σ: μεταβλητότητα

Αντίστοιχα, για ένα δικαίωμα πώλησης (put option) χωρίς μερίσματα έχουμε:

$$P = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) + \ S_0 \cdot N(-d_1) \qquad (1.20)$$

αφού ισχύει το λεγομένο ***call-put parity***, δηλαδή *:*

$$C + PV(K) = P + S \;\; \Rightarrow \;\; C + K \cdot e^{-rt} = P + S \qquad (1.21)$$

Όταν χρησιμοποιούμε στην πράξη τον τύπο Black Scholes, το επιτόκιο r τίθεται ίσο με το r_f επιτόκιο ενός zero-coupon bond με λήξη T. Αυτό είναι θεωρητικά σωστό όταν το r είναι γνωστό συναρτήσει του χρόνου ή όταν είναι στοχαστικό, με την προϋπόθεση ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στο χρόνο T είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένη και η μεταβλητότητα σ επιλέγεται κατάλληλα. Ο χρόνος μετριέται κανονικά ως ο αριθμός των διαπραγματεύσιμων ημερών που έχουν απομείνει στη ζωή του option διαιρούμενος με τον αριθμό των ημερών διαπραγμάτευσης σε 1 χρόνο.

Έστω ότι έχουμε ένα call option ευρωπαϊκού τύπου. Η αναμενόμενη τιμή του option στη λήξη, εάν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε κίνδυνο, θα είναι:

$$\hat{E}\ [\max(\ (S_T - K\ ), 0\ )] \qquad (1.22)$$

όπου, $\hat{E}$ *:* η αναμενόμενη τιμή σε έναν κόσμο χωρίς κίνδυνο. Από αυτή την υπόθεση έχουμε ότι η τιμή ευρωπαϊκού τύπου call option (C) είναι η αναμενόμενη αξία , προεξοφλημένη με επιτόκιο χωρίς κίδυνο (r_f):

$$C = e^{-rT} \cdot\ \hat{E}\ [\max(\ (S_T - K\ ), 0\ )] \qquad (1.23)$$

Πρέπει επίσης να σημειωθεί πως ο τύπος του Black Scholes δεν λειτουργεί «καλά»:

- Όταν η τιμή εξάσκησης K είναι πολύ διαφορετική σε σχέση με την τρέχουσα τιμή S της μετοχής $(K \gg S\ )$,
  Πχ. Καθώς η τιμή της μετοχής S_0 γίνεται πολύ μεγάλη, το call είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα εξασκηθεί. Τότε είναι σα να έχουμε ένα forward συμβόλαιο με τιμή παράδοσης K. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν η S_0 γίνεται πολύ μεγάλη, τότε και τα d_1 και d_2 γίνονται πολύ μεγάλα, και τα $N(d_1)$, $N(d_2)$ πάνε κοντά στο 1. Αντίστοιχα, για ένα ευρωπαϊκό put τα $N(-d_1)$, $N(-d_2)$ είναι κοντά στο μηδέν και η τιμή του προσεγγίζει και αυτή το μηδέν.
- όταν η τυπική απόκλιση είναι μεγάλη ή πολύ μικρή,
  π.χ. Όταν η μεταβλητότητα σ προσεγγίζει το μηδέν, τα d_1 και d_2 τείνουν στο $-\infty$, τα $N(d_1)$, $N(d_2)$ τείνουν στο 0 και επομένως και η τιμή του call προσεγγίζει το μηδέν.
- και όταν η ημερομηνία λήξης άσκησης του δικαιώματος είναι πολύ μακριά στο μέλλον.

Ένα απλό παράδειγμα τιμολόγησεις ενός διακιώματος αγοράς (call option) είναι το παρακάτω:

Θεωρούμε ότι έχουμε αρχική αξία για τον υποκείμενο τίτλο πάνω στον οποίο θέλουμε να τιμολογήσουμε το δικαίωμα, S_0=100, επιτόκιο $r = 5\%$, διάρκεια του δικαιώματος ένα χρόνο ($T = 1$), διακύμανση σ=12% και τιμή εξάσκησης $K = 90$. Η τιμλη του δικαιώματος μας στη λήξη, σύμφωνα με τις σχέσεις *(1.17), (1.18)* και *(1.19)* θα είναι:

$$C = 100 \cdot N(d_1) - 90 \cdot e^{-0.05\cdot 1} \cdot N(d_2)$$

$$όπου, d_1 = \frac{\log\left(\frac{100}{90}\right) + \left(0.05 + \frac{(0.12)^2}{2}\right)\cdot 1}{0{,}12\sqrt{1}} = 1{,}355\ και\ \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 1{,}235$$

$$άρα,\ N(d_1) = 0{,}912\ και\ N(d_2) = 0{,}892$$

$$και\ τελικά,\ \ C = 100 \cdot 0{,}912 - 90 \cdot e^{-0.05\cdot 1} \cdot 0{,}892$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

2.1 Εισαγωγή

Η ασφάλιση χαρτοφυλακίου είναι μέθοδος αντιστάθμισης κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου έναντι του κινδύνου αγοράς. Αναφέρεται σε τεχνικές διαχείρισης χαρτοφυλακίου που έχουν ως σκοπό να εξασφαλίσουν ότι η αξία του χαρτοφυλακίου κατά τη λήξη ή μέχρι τη λήξη θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από ένα δεδομένο κατώτερο όριο που ορίζει από την αρχή ο επενδυτής . Οι στρατηγικές αυτές επιτρέπουν στον επενδυτή να περιορίσει τον κίνδυνο που προκαλεί στην αξία του χαρτοφυλακίου του μια πτώση της αγοράς, αλλά ταυτόχρονα σε περίπτωση ανόδου να μπορεί να επωφεληθεί κατά ένα ποσό, το οποίο όμως θα είναι σχετικά μικρότερο σε σύγκριση με ένα «ανασφάλιστο» χαρτοφυλάκιο.

Οι δυο πιο γνωστές στρατηγικές ασφάλισης είναι η CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance-Σταθερής Αναλογίας) και η OBPI (Option Based Portfolio Insurance-Βασιζόμενη σε put options), με τις οποίες και θα ασχοληθούμε παρακάτω. Η πρώτη καθιερώθηκε από τον Perold (1986), ενώ η δεύτερη από τους Leland και Rubinstein (1976).

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία θα βασιστούμε στις παρακάτω πηγές, ώστε να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε τις δύο αυτές στρατηγικές.

- Bertrand, P., & Prigent, J-L. (2002). Portfolio insurance: the extreme value approach to the CPPI method, Finance, 23, 69-86.
- Black, F. & Jones, R. (1987). Simplifying portfolio insurance. The Journal of Portfolio Management, 48-51.
- Black, F., & Rouhani, R. (1989). Constant proportion portfolio insurance and the synthetic put option: a comparison, in Institutional Investor focus on Investment Management, edited by Frank J. Fabozzi. Cambridge, Mass: Ballinger, pp 695-708.
- Black, F. & Perold, A.R. (1992). Theory of constant proportion portfolio insurance. The Journal of Economics, Dynamics and Control, 16, 403-426.
- Bookstaber, R. & Langsam, J.A. (2000). Portfolio insurance trading rules. The Journal of Futures Markets, 8, 15-31.
- Leland, H.E. & Rubinstein, M. (1976). The evolution of portfolio insurance, in: D.L. Luskin, ed., Portfolio insurance: a guide to dynamic hedging, Wiley.
- Perold, A. (1986). Constant portfolio insurance. Harvard Business School. Unpublished manuscript.
- Perold, A. & Sharpe, W. (1988). Dynamic strategies for asset allocation. Financial Analyst Journal, January-February, 16-27.
- Scott L.O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, 419-438.

2.2. Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)

Η *πρώτη στρατηγική* που θα μελετήσουμε είναι *η CPPI (Σταθερής αναλογίας)*. Είναι μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική της οποίας στόχος είναι η όσο το δυνατόν καλύτερη αξιοποίηση της απόδοσης μιας επένδυσης που ενέχει κίνδυνο (risky asset) (συνήθως είναι διαπραγματεύσιμα αμοιβαία κεφάλαια, ETFS ή δείκτες), διασφαλίζοντας ένα ποσό στη λήξη.

Με τον όρο *αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική* εννοούμε μία στρατηγική κατά την οποία μπορεί να αλλάξει η σύνθεση του χαρτοφυλακίου μας χωρίς όμως να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κάποια χρηματική αξία. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για παράδειγμα τα χρήματα που εισπράττουμε από μία ενδεχόμενη πώληση μετοχών, τα επενδύουμε όλα σε άλλους τίτλους του χαρτοφυλακίου, π.χ. ομόλογα κ.ο.κ.

Αρχικά, ανάλογα με το πόσο κίνδυνο είμαστε διατεθειμένοι να αναλάβουμε, θέτουμε ένα κατώτατο αποδεκτό όριο στην αξία του χαρτοφυλακίου. Αυτό το όριο ονομάζεται ***floor.***

Η εφαρμογή της στρατηγικής αυτής είναι σχετικά απλή:

Δανειζόμαστε την παρούσα αξία του *floor* $(K \cdot e^{-rt})$ και δεδομένου ότι το χαρτοφυλάκιό μας έχει συμπεριφορά παρόμοια με έναν δείκτη, αγοράζουμε ή παράγουμε (με τη χρήση ενός δείκτη και μετρητών) α δικαιώματα αγοράς πάνω στο δείκτη με τιμή εξάσκησης $K/_{a}$ και χρόνο *t* μέχρι τη λήξη.

Θυμίζουμε ότι η τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς με βάση την φόρμουλα Black-Scholes δίνεται από τον τύπο:

$$C = S_t \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \qquad (2.1)$$

$$όπου, d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (2.2)$$

$$και \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t} \qquad (2.3)$$

Ο πρώτος όρος ($S_0 \cdot N(d_1)$) είναι το ποσό που επενδύεται στο δείκτη και ο δεύτερος όρος ($K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$) είναι το ποσό του δανεισμού.

Τροποποιώντας τον παραπάνω τύπο, βρίσκουμε ότι η παρούσα αξία (κόστος) της ασφάλισης του χαρτοφυλακίου (δείκτη) είναι:

$$V_0^{CPPI} = K \cdot e^{-rT} + a \cdot \Big(S_0 \cdot N(d_1') - \left({}^{K}\!/_{a}\right) \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2') \Big) \qquad (2.4)$$

$$\acute{o}\pi o \upsilon \; d_1' = \frac{\log\left(\frac{S_0 \cdot T}{K/a}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad (2.5)$$

$$\text{και } d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{T} \qquad (2.6)$$

Σύμφωνα με τη φόρμουλα των Black-Scholes πρέπει να βρούμε το ***upside capture*** που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση, όταν οι υπόλοιποι παράγοντες παραμένουν σταθεροί.

$$S_0 = K \cdot e^{-rT} + a \cdot \Big(S_0 \cdot N(d_1') - \left({}^{K}\!/_{a}\right) \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2') \Big), \qquad (2.7)$$

με d_1' και d_2' όπως και πριν. *Upside capture* ορίζεται ως ο λόγος της αξίας του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου στη λήξη προς την τιμή του υποκείμενου στη λήξη.

Επομένως, με δεδομένη την τιμή του υποκείμενου τίτλου καθώς και του *floor*, ο επενδυτής αρκεί να βρει ποιο είναι το α που να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Είναι σημαντικό να τονίσουμε εδώ, ότι η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική και για να μπορέσουμε να την λύσουμε θα χρειαστούμε την βοήθεια ενός υπολογιστικού προγράμματος. Εμείς χρησιμοποιήσαμε το excel, όπως θα δούμε παρακάτω ώστε να στήσουμε αυτή τη στρατηγική και να μπορέσουμε να λύσουμε αυτή τη μη γραμμική εξίσωση.

Όμως, η σύνθεση του χαρτοφυλακίου μας αλλάζει καθώς μεταβάλλεται η τιμή του δείκτη (S_t) και ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη (T). Εμείς συνεχίζουμε να απαιτούμε $\alpha \cdot S_t \cdot N(d_1')$ ν.μ. στο δείκτη και $K \cdot e^{-rt}[1 - N(d_2')]$ σε μετρητά, βασιζόμενοι στη νέα αξία των S_t και t.

Επειδή όμως οι ακριβείς υποθέσεις για τη φόρμουλα δεν τηρούνται στην πραγματικότητα, είναι καλύτερο να υπολογίζουμε εκ νέου το α κάθε φορά που θέλουμε να επανεξετάσουμε το χαρτοφυλάκιο.

Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε: $S_0 = 100,\ r = 5\%\ \sigma = 12\%, T = 1$.

Με τη βοήθεια του excel, όπως φαίνεται κ στον *Πίνακα 2.1,* λύνουμε τη μη γραμμική εξίσωση (2.7) και βρίσκουμε το α που ικανοποιεί τη σχέση αυτή, με δεδομένες τις παραπάνω τιμές. Για να λυθεί αυτή η εξίσωση, θέλουμε η παρούσα αρχική αξία της ασφάλισης του χαρτοφυλακίου μας να είναι ίση με 100, δηλαδή ίση με S_0. Ακολουθούμε αυτή τη διαδικασία για τρεις διαφορετικές τιμές για το *floor,* $K = 100, K = 90$ και $K = 80$.

Πίνακας 2.1

S	100						
K	100						
r	0,05						
T	1	ρίζα T	1				
σ	0,12						
α	0,957						
d'1	0,113						
			επένδυση σε δείκτη			52,18	
N(d'1)	0,545		μετρητά			47,82	
N(d'2)	0,497					100,00	
call	5,094						
Vcppi	100						

S	100						
K	90						
r	0,05						
T	1	ρίζα T	1				
σ	0,12						
α	0,994						
d'1	1,308						
			επένδυση σε δείκτη			89,943	
N(d'1)	0,905		μετρητά			10,057	
N(d'2)	0,883					100,000	
call	14,471						
Vcppi	100						

S	100						
K	80						
r	0,05						
T	1	ρίζα T	1				
σ	0,12						
α	1,000						
d'1	2,333						
			επένδυση σε δείκτη			98,976	
N(d'1)	0,990		μετρητά			1,024	
N(d'2)	0,987					100,000	
call	23,912						
Vcppi	100						

Σύμφωνα με τον *Πίνακα 2.1* και *2.2* προκύπτει ότι:

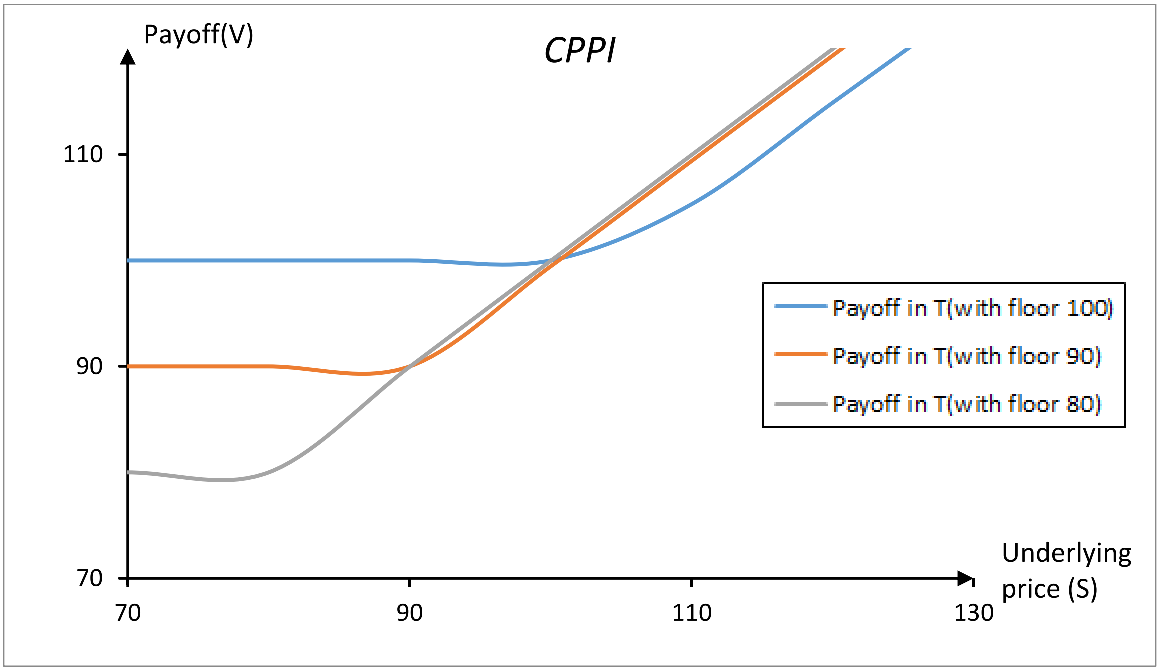
1. Για *floor* $K = 100$, το *upside capture* είναι 0,9573
2. Για *floor* $K = 90$, το *upside capture* είναι 0,9944
3. Για *floor* $K = 80$, το *upside capture* είναι 0,9996
4. Για *floor* $> S$ προφανώς δεν έχει νόημα η στρατηγική γιατί εάν μπορούσαμε να φτιάξουμε κάτι τέτοιο θα είχαμε δημιουργήσει arbitrage!

Πίνακας 2.2

$S_0 = 100$			
K	a	Ποσό σε δείκτη	Ποσό σε μετρητά
80	0,9996	98,98	1,02
90	0,9944	89,94	10,06
100	0,9573	52,18	47,82

Γενικά, το payoff του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$V(S_T; T) = max\ (K, \alpha \cdot S_T; T) \tag{2.8}$$



Σχήμα 2.4

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (2.1), ανάλογα με το *floor* που θα επιλέξουμε διαφοροποιείται και η απόδοση του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου. Παρατηρούμε ότι για χαμηλότερο *floor,* η απόδοση του χαρτοφυλακίου μας για μια δεδομένη τιμή του υποκείμενου τίτλου (π.χ. 120 ν.μ.), είναι μεγαλύτερη. Δηλαδή, όσο αυξάνεται το *floor*, τόσο μεγαλώνει και η αποστροφή μας στον κίνδυνο. Αυτό συμβαίνει για τιμές οι οποίες είναι μεγαλύτερες από το *floor.* Αν η τιμή του υποκείμενου χαρτοφυλακίου όμως κυμαίνεται στο ίδιο ή σε χαμηλότερο επίπεδο από το μέγιστο *floor* (εδώ είναι 100), η στρατηγική που αποδίδει καλύτερα είναι αυτή με το μεγαλύτερο *floor.* Δηλαδή, μεγαλύτερο *floor*, σημαινει μεγαλύτερη κλίση (δηλαδή α) και (ελαφρώς) μικρότερες μελλοντικές αποδόσεις.

Στην πρώτη στρατηγική ($S = 100, K = 100, \alpha = 0{,}9573$) , όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, επενδύουμε 52,18 ν.μ. στο δείκτη και οι υπόλοιπες 47,82 ν.μ. επενδύονται σε μετρητά (ή κάποιο safe asset) . Στη δεύτερη, ($S = 100, K = 90, \alpha = 0{,}994$) επενδύουμε στο δείκτη 85,71 ν.μ. και τα υπόλοιπα 14,286 επενδύονται σε μετρητά. Αντίστοιχα για την τελευταία έχουμε 80,952 ν.μ. στο δείκτη και 19,048 ν.μ. σε μετρητά. Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το *floor*, τόσο μειώνεται και το ποσό που πρέπει να επενδύσουμε στο δείκτη και ταυτόχρονα αυξάνεται το ποσό που επενδύουμε σε μετρητά. Αυτό είναι και λογικό αφού όσο το *floor* προσεγγίζει την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου μας (εδώ είναι 100), τόσο μεγαλύτερη είναι η αποστροφή μας στον κίνδυνο και επομένως θέλουμε μία πιο ασφαλή επένδυση.

Γενικά η CPPI μέθοδος είναι απλή, εύκολη και ευέλικτη στην εφαρμογή της, αφού το *floor* επιλέγεται αυθαίρετα από τον επενδυτή και μπορεί να αλλάξει οποιαδήποτε στιγμή. Πρέπει όμως να αποφεύγεται η συνεχής αλλαγή του για να μην «χαλάσει» η στρατηγική.

Αν όμως υπάρχουν περίοδοι ανοδικής αγοράς, επενδύονται περισσότερα χρήματα σε «επικίνδυνους» τίτλους (αφού δίνουν μεγαλύτερες αποδόσεις) και επομένως σε bull market έχουμε αυξημένο ποσοστό από αυτά. Σε πτωτικές αγορές πωλούνται οι «επικίνδυνοι» τίτλοι ώστε να μειωθεί το ποσοστό τους. Αν η πτώση είναι συνεχής, το ποσοστό που επενδύεται σε αυτούς τους τίτλους είναι σχεδόν μηδέν. Επομένως το χαρτοφυλάκιο δε θα έχει επενδυθεί πλέον σε risky assets. Ο επενδυτικός σύμβουλος Wilfred Ling[2] της CFA μας εξηγεί τα παρακάτω:

- Αγοράζοντας περισσότερα risky assets σε ανοδικές αγορές, αγοράζουμε ακριβά και πουλώντας τα σε περιόδους πτώσεις, πουλάω φτηνά. Αυτό δεν είναι ελκυστικό για έναν επενδυτή. Σε κυμαινόμενες αγορές με μέση απόδοση μηδέν, η CPPI χάνει χρήματα.
- Αν η αγορά καταρρεύσει, όλο το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από safe assets με αποτέλεσμα να μείνει εκτός της αγοράς. Έτσι δε θα υπάρξει πιθανή άνοδος.
- Όταν όλο το χαρτοφυλάκιο αποτελείται μόνο από safe assets, ο επενδυτής θα πρέπει να περιμένει να ωριμάσει το κεφάλαιο, διότι στις ασφαλείς επενδύσεις παίρνει χρόνο να προσεγγίσουν την αρχική αξία του κεφαλαίου, ενώ παράλληλα χάνει την ευκαιρία να επενδύσει σε καλύτερες αποδόσεις.

2.3. Option Based Portfolio Insurance (OBPI)

Η *δεύτερη στρατηγική* είναι *η OBPI*. Είναι μία μέθοδος ασφάλισης του χαρτοφυλακίου με τη χρήση χρηματοοικονομικών παραγώγων (όπως δείχνει και το όνομά της), και κατά βάση put και τα call options, όπως δηλαδή και η CPPI. Για παράδειγμα σε μία πτωτική αγορά ο επενδυτής περιορίζει τις ζημιές του στο χαρτοφυλάκιο με τη χρήση ενός put option.

Βρίσκουμε έναν δείκτη ο οποίος συμπεριφέρεται όπως το χαρτοφυλάκιό μας και αγοράζουμε put option με τιμή εξάσκησης Κ, ώστε να ισχύει στη λήξη του:

$$V_T^{OBPI} = S_T + \max(0, K - S_T) \tag{2.9}$$

ή ισοδύναμα

$$V_T^{OBPI} = K_T + \max(0, S_T - K) \tag{2.10}$$

[2] *Πηγή: https://www.youtube.com/watch?v=G4zSdBKWyZs*

Παρατηρούμε ότι το ασφαλισμένο κεφάλαιο στη λήξη είναι η τιμή εξάσκησης.

Η αξία του χαρτοφυλακίου V_t^{OBPI} σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t κατά την περίοδο [0, T], είναι:

$$V_t^{OBPI} = \left(\mathrm{St} + \mathrm{P(t, St, K)}\right) \qquad (2.11)$$

και λόγω της ισότητας call-put option έχουμε

$$V_t^{OBPI} = (\ \mathrm{K} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{r(T-t)}} + \mathrm{C(t, St, K)} \qquad (2.12)$$

όπου, $\mathrm{P(t, St, K)}$ και $\mathrm{C(t, St, K)}$ είναι οι αντίστοιχες τιμές ευρωπαϊκών put και call option.

Συνήθως η στρατηγική καθορίζει ένα ποσοστό p της αρχικής μας επένδυσης V_0, που θέλουμε να ανακτήσουμε σε περίπτωση πτώσης της αγοράς. Επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε την τιμή άσκησης K ώστε να ισχύει η εξίσωση:

$$p \cdot V_0 = \mathrm{p} \cdot \left(\mathrm{K} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} + \mathrm{C(0, S0, K)}\right) = \mathrm{K} \qquad (2.13)$$

που συνεπάγεται ότι :

$$\frac{C(0,S_0,K)}{K} = \frac{1-pe^{-rT}}{p} \qquad (2.14)$$

Ορίζουμε δηλαδή πόσα λεφτά θα βάλουμε στο χαρτοφυλάκιο, ώστε να το ασφαλίσουμε (ποσοστό αρχικού πλούτου p) και βρίσκουμε την τιμή εξάσκησης συναρτήσει του p ($K(p)$), δεδομένου ότι όλοι οι υπόλοιποι παράγοντες είναι γνωστοί.

Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε :

$S_0 = 100$ $r = 5\%$, $\sigma = 12\%$, $T = 1$ και παίρνουμε περιπτώσεις για το p και βρίσκουμε κάθε φορά την αξία του χαρτοφυλακίου μας.

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, θα πρέπει και σε αυτή τη μέθοδο να λύσουμε μία μη γραμμική εξίσωση (την 2.14) ώστε να βρούμε την τιμή εξάσκησης K για τα p που θέλουμε. Με τη βοήθεια του excel, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.3, λύνουμε την εξίσωση ώστε το p να πάρει την τιμή 1. Αντίστοιχα κάνουμε την΄ίδια διαδικασία ώστε το p να γίνει 0,9 και 0,8. Τα αποτελέσματα για τις τρεις αυτές περιπτώσεις παρατίθενται στον Πίνακα 2.4

Πίνακας 2.3

S	100						
K	104,458						
r	0,05						
T	1	ρίζα T	1				
σ	0,12						
q	1,000			ποσό σε χαρτοφ		99,363	
p	1,000			ποσό σε option		5,094	
d1	0,113					104,457	
N(d1)	0,545						
N(d2)	0,497						
call	5,094						
Vobpi	104,457						

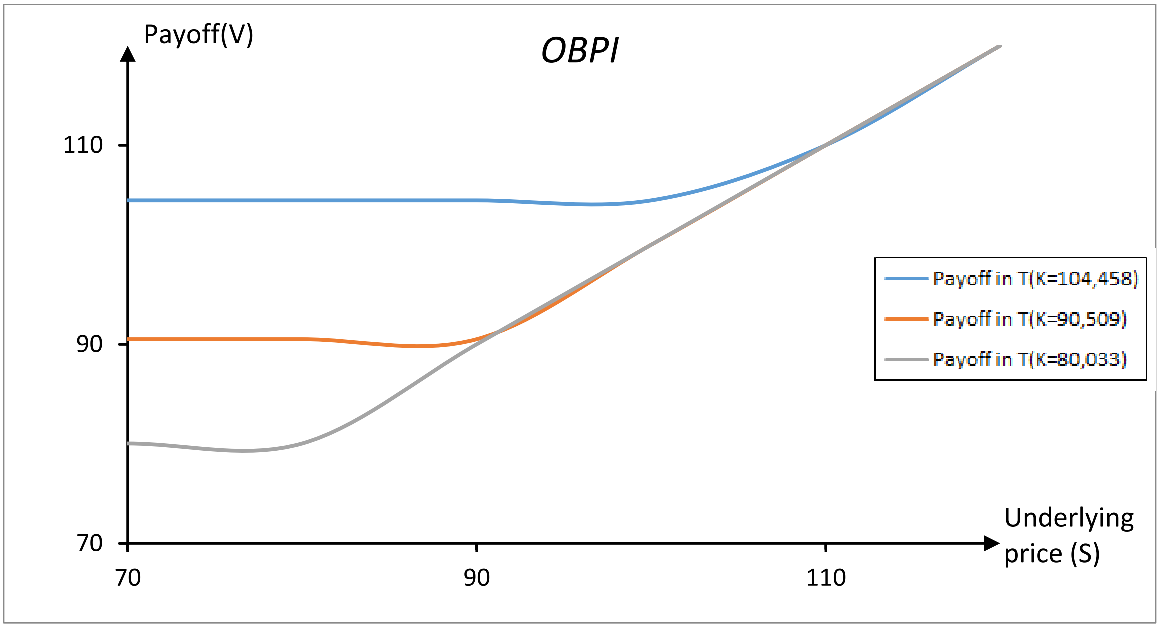
S	100						
K	90,509						
r	0,05						
T	1	ρίζα T	1				
σ	0,12						
q	1,000			ποσό σε χαρτοφ		86,095	
p	0,900			ποσό σε option		14,471	
d1	1,308					100,565	
N(d1)	0,905						
N(d2)	0,883						
call	14,471						
Vobpi	100,565						

S	100						
K	80,033						
r	0,05						
T	1	ρίζα T	1				
σ	0,12						
q	1,000			ποσό σε χαρτοφ		76,130	
p	0,800			ποσό σε option		23,912	
d1	2,333					100,041	
N(d1)	0,990						
N(d2)	0,987						
call	23,912						
Vobpi	100,041						

Πίνακας 2.4

$S_0 = 100$				
p	K	V^{OBPI}	Ποσό που επενδύουμε στο δείκτη	Ποσό σε call option
0,80	80,033	100,041	76,130	23,912
0,90	90,509	100,565	86,095	14,471
1	104,458	104,457	99,363	5,094

Παρατηρούμε ότι όσο πιο υψηλό είναι το p , τόσο αυξάνεται και το K, αλλά και η αξία του χαρτοφυλακίου μας. Αντιθέτως, τα χρήματα που δίνουμε για την αγορά ενός call option μειώνονται και αυξάνουμε τα χρήματα που επενδύουμε στο δείκτη. Είναι πολύ λογικό να συμβαίνει κάτι τέτοιο, αφού όσο πιο υψηλό είναι το ποσοστό p, τόσο μεγαλύτερη είναι και η αποστροφή μας στον κίνδυνο και επομένως θέλουμε να επενδύσουμε χρήματα στο πιο «ασφαλές» προϊόν. Γνωρίζοντας ότι η απόδοση με την OBPI στραηγική δίνεται από τη Σχέση (2.10) προκύπτει το παρακάτω γράφημα.



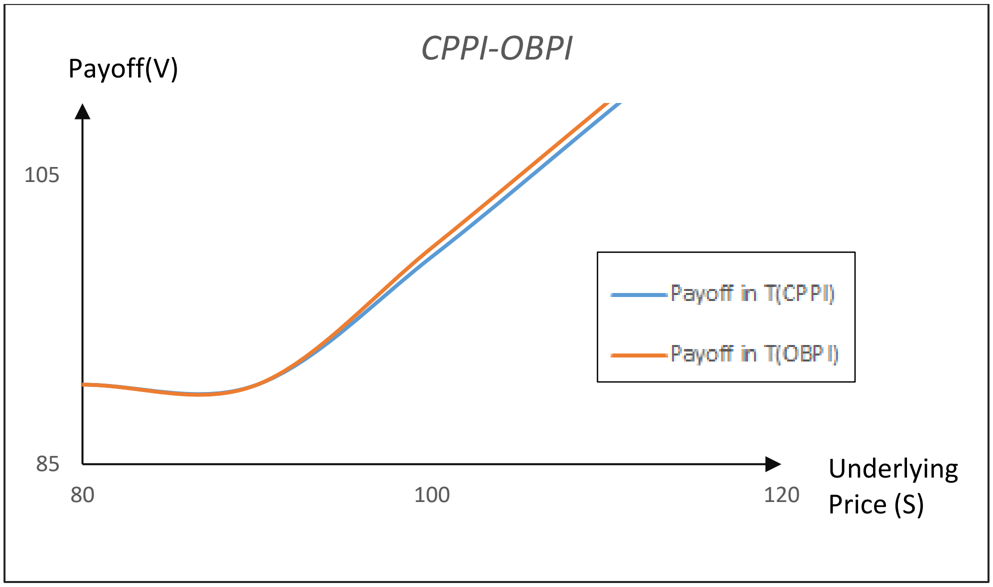
Σχήμα 5.2

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.2, η OBPI στρατηγική είναι παρόμοια με την CPPI. Αν η τιμές του υποκείμενου τίτλου είναι χαμηλότερη της τιμής εξάσκησης, τότε η απόδοση του χαρτοφυλακίου μου είναι ίση με αυτή. Αλλιώς, για υψηλότερες τιμές αποδίδει όπως η τιμή του υποκείμενου. Παρατηρούμε ότι όσο πιο υψηλό είναι το K και κατ' επέκταση το ποσοστό ανάκτησης, τόσο υψηλότερη είναι η απόδοση στο ασφαλισμένο μας χαρτοφυλάκιο για τιμές μικρότερες από αυτή.

2.4. Παράδειγμα CPPI-OBPI

Όπως είδαμε στα δύο προηγούμενα υποκεφάλαια, οι δύο στρατηγικές είναι παρόμοιες. Τα γραφήματά και των δύο μοιάζουμε με ένα call option. Η CPPI φαίνεται να διαφοροποιεί την απόδοσή της και για τιμές μεγαλύτερες του *floor,* ενώ για την OBPI η απόδοση του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου αποδίδει το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις αν η τιμή του υποκείμενου είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης.

Ας δούμε ένα γράφημα με τις δύο στρατηγικές, σύμφωνα με τα παραπάνω. Θεωρούμε ακριβώς τα ίδια δεδομένα, μόνο που εδώ θα πάρουμε την περίπτωση για $K = 90{,}509$ (όπως προκύπτει από τον Πίνακα 2.4 και υπολογίζουμε ένα νέο $\alpha = 0{,}9937$ (με τη βοήθεια του excel και σύμφωνα με όσο έχουμε αναφέρει). Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, προκύπτει το Σχήμα 2.3. Παρόλο που δε μπορεί να γίνει σωστή σύγκριση αφού η OBPI ξεκινάει με ελάχιστα καλύτερη απόδοση, παρατηρούμε ότι στην πορεία αυτή η διαφορά αυξάνεται. Μία πιο αναλυτική σύγκριση θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.


CPPI-OBPI
Payoff(V)
105
85
80
100
120
Underlying Price (S)
Payoff in T(CPPI)
Payoff in T(OBPI)

Σχήμα 2.6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ CPPI- OBPI

3.1. Εισαγωγή

Η ασφάλιση χαρτοφυλακίου σχεδιάστηκε ώστε να δίνει τη δυνατότητα στον επενδυτή να περιορίσει την επιδείνωση του κινδύνου σε πτωτικές αγορές, ενώ επιτρέπει μερική συμμετοχή σε ανοδικές αγορές. Αυτές οι μέθοδοι επιτρέπουν στους επενδυτές να ανακτούν, κατά τη λήξη, ένα ποσοστό του αρχικού τους κεφαλαίου, ιδίως σε πτώση των αγορών. Οι δύο μέθοδοι ασφάλισης που θα χρησιμοποιήσουμε και είδαμε και στο κεφάλαιο 3, είναι η Option based Portfolio Insurance (OBPI) (βασισμένη σε options) και η Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) (σταθερής αναλογίας).

Η OBPI, που θεσπίστηκε από το Leland και Rubinstein (1976), αποτελείται από ένα χαρτοφυλάκιο που έχει επενδυθεί σε ένα «επικίνδυνο» τίτλο S, (συνήθως χρηματοοικονομικός δείκτης όπως ο S&P) που καλύπτεται από ένα εισηγημένο δικαίωμα πώλησης (ή με ένα δικαίωμα αγοράς μέσω της ισότητας που ισχύει, βλ. Κεφάλαιο 2) αναφερόμενο σε αυτόν. Όποια κι αν είναι η τιμή του S στην τερματική ημερομηνία T, η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την τι τιμή άσκησης K του δικαιώματος.

Η CPPI εισήχθη από Perold (1986) (βλέπε επίσης Perold και Sharpe (1988)) για τίτλους σταθερού εισοδήματος και από τους Black και Jones (1987) για μετοχικούς τίτλους. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί μια απλουστευμένη στρατηγική για την κατανομή περιουσιακών στοιχείων δυναμικά την πάροδο του χρόνου.Ο επενδυτής ξεκινά ορίζοντας το floor (K) τη μικρότερη αποδεκτή τιμή του χαρτοφυλάκιο και στη συνέχεια ορίζει το upside capture (α), όπως ορίσαμε παραπάνω.

Οι Black and Rouhani (1989) συγκρίνουν τη CPPI και την OBPI μέθοδο, όταν έχουμε συνθέσει το δικαίωμα πώλησης. Κάτι αντίστοιχο θα κάνουμε κι εμείς σε αυτό το κεφάλαιο.

3.2. Μέθοδος Monte Carlo

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως μπορούμε να ασφαλίσουμε το χαρτοφυλάκιό μας, ώστε να προστατευτούμε από τον κίνδυνο αγοράς στη λήξη. Τί γίνεται όμως μέσα στο χρονικό διάστημα μέχρι την λήξη; Αυτή η ερώτηση είναι ιδιαιτέρως σημαντική γιατί η αξία του χαρτοφυλακίου, ναι μεν είναι διασφαλισμένη στο τέλος της περιόδου, αλλά ο επενδυτής ενδιαφέρεται και για την πορεία της αξίας του χαρτοφυλακίου μέχρι και την λήξη της ασφάλισης. Τα προβλήματα που μπορεί να επιφέρει μία πτώση της αξίας του χαρτοφυλακίου έχουν να κάνουν με θέματα διαχείρισης επενδύσεων, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα της διαχείρισης των λογαριασμών ασφάλειας (margin accounts), αλλά και της απαίτησης αποτίμησης του χαρτοφυλακίου από ελεγκτικούς ή άλλους φορείς.

Η πορεία της αξίας του χαρτοφυλακίου στο μεσοδιάστημα μέχρι την λήξη της ασφάλισης δεν είναι ένα τετριμμένο πρόβλημα, γιατί όχι μόνο δεν μπορούμε να ξέρουμε με σιγουριά ποια θα είναι η εξέλιξη του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου, αλλά και γιατί δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την σταθερότητα ή μη των παραμέτρων του υποδείγματος τιμολόγησης των παραγώγων. Μπορεί να είμαστε κοντά στις αρχικές μας εκτιμήσεις (κατά μέσο όρο) όμως, υπάρχει και το ενδεχόμενο να μην κάναμε σωστή εκτίμηση και να υπάρχει για παράδειγμα, μεγαλύτερη διακύμανση στις τιμές της αγοράς από την αρχική μας εκτίμηση (όπου η διακύμανση της αγοράς μετριέται με την παράμετρο του volatility). Ένας τρόπος για να εξετάσουμε την πορεία της αξίας των ασφαλισμένων χαρτοφυλακίων σε διάφορες αλλαγές των παραμέτρων και για τις δύο μεθόδους ασφάλισης, είναι μέσω της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo.

Η μέθοδος (ή πείραμα) Monte Carlo είναι μία διαδικασία, όπου με τη δειγματοληψία τυχαίων αποτελεσμάτων και απλή στατιστική μπορούμε να προσομοιώσουμε διάφορα στοχαστικά προβλήματα και να εκτιμήσουμε αντίστοιχες τιμές. Δηλαδή, μπορούμε να γεννήσουμε τυχαίες τιμές για το δείκτη μας οι οποίες φυσικά θα ακολουθούν την κατανομή που εμείς θέλουμε.

Όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 2, θεωρούμε ότι οι μεταβολές στις τιμές των υποκείμενων τίτλων (ή δεικτών) που μας ενδιαφέρουν περιγράφονται από μια στοχαστική διαδικασία, τη γεωμετρική κίνηση Brown. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, σε κάθε χρονική στιγμή μέχρι και την λήξη της ασφάλισης, οι αποδόσεις των τιμών των υποκείμενων τίτλων ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή με συγκεκριμένη μέση τιμή και διακύμανση.

Υποθέτουμε για τη δική μας περίπτωση ότι θέλουμε να βρούμε την αξία του χαρτοφυλακίου μας πριν τη λήξη, έστω στη μέση της περιόδου μας ($t = T/2$) ή πιο απλά ($t = 0{,}5$) επιλέγοντας ($T = 1$). 'Ολες οι παράμετροι εκτός απο την τρέχουσα αξία του υποκείμενου δείκτη είναι γνωστές από την αρχική μας εκτίμηση. Όμως, γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\ln(S_t) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right) \qquad (3.1)$$

Επομένως, κάνουμε μία προσομοίωση Monte Carlo ώστε να γεννήσουμε τυχαίες τιμές για το λογάριθμο της τιμής του υποκείμενου δείκτη και στη συνέχεια να εκτιμήσουμε την αξία του ασφαλισμένου μας χαρτοφυλακίου και με τις δύο στρατηγικές. Είναι σημαντικό να τονίσουμε εδώ, ότι τόσο η παράμετρος μ όσο και η παράμετρος σ ενδεχομένως να είναι διαφορετικές στην πραγματικότητα σε σχέση με την αρχική μας εκτίμηση. Αυτό σημαίνει ότι ενδεχομένως ο δείκτης να τρέξει με καλύτερη ή χειρότερη απόδοση από αυτή που νομίζουμε ή η μεταβλητότητά του να είναι υπό ή υπερεκτιμημένη. Η ερώτηση εδώ είναι πως αυτές οι λανθασμένες εκτιμήσεις επηρεάζουν την αξία των ασφαλισμένων χαρτοφυλακίων στην μέση της περιόδου κάτω και από τις δύο στρατηγικές που έχουμε αναπτύξει.

3.3. Εφαρμογή προσομοίωσης για σύγκριση των δύο στρατηγικών με ίδια τιμή εξάσκησης

Θέτουμε αρχικά : $S_0 = 100, r = 5\%$ και $t = {}^{T}/_{2} = 0.5$.

Γεννάμε στο excel 10000 τιμές για την $\ln(S_t)$, που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση που βρίσκουμε από την παραπάνω εξίσωση. Στη συνέχεια, παίρνουμε τις τιμές του δείκτη υψώνοντας εις την e, και τέλος βρίσκουμε την τιμή του call και για τις δύο μεθόδους μας αντικαθιστώντας στο μοντέλο του Black Scholes. Αρχικά υπολογίζουμε τις τιμές για $\mu = 5\%$ και $\sigma = 12\%, 20\%$ και 40%.

Αντίστοιχα, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για $\hat{\mu} = -5\%$ και $\hat{\mu} = 0$ και στη συνέχεα κρατώντας το $\hat{\sigma}$ σταθερό για κάθε μία από αυτές τις τιμές (12%, 20% και 40%) μεταβάλλουμε την απόδοση $\hat{\mu}$ σε 5%, 0 και -5% .

Πριν ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς, για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις δύο στρατηγικές θα πρέπει να έχουν το ίδιο αρχικό κόστος, δηλαδή:

$$V_0^{CPPI} = V_0^{OBPI}$$

Επομένως, θα πρέπει να βρούμε τα κατάλληλα α και K που θα ικανοποιούν αυτή την ισότητα. Θεωρούμε ότι για την OBPI στρατηγική θέλουμε ανάκτηση $p = 0{,}90$ και όπως είχαμε δει και στον Πίνακα 2.4, γι' αυτό το p, αντιστοιχεί $K = 90{,}509$ και η αρχική αξία του ασφαλισμένου χαρτοφυλακίου είναι $V_0^{OBPI} = 100{,}565$. Επομένως, πρέπει να υπολογίσουμε για την CPPI το α που αντιστοιχεί γι΄αυτό το *floor* και αυτή την αξία. Με τη βοήθεια του excel και πάλι, έχουμε $\alpha = 0{,}999997$ όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.1.

<u>Πίνακας 3.1</u>

S	100					
K	90,509					
r	0,05					
T	1	ρίζα T	1			
σ	0,12					
α	0,999997					
d'1	1,308					
			επένδυση σε δείκτη			90,450
N(d'1)	0,905		μετρητά			10,115
N(d'2)	0,883					100,565
call	14,470					
Vcppi	100,565					

Πιο αναλυτικά, τρέχοντας την πρώτη προσομοίωση (με $\mu = 5\%$, $\sigma = 12\%$) τιμολογούμε αρχικά το Call για την πρώτη μας μέθοδο (CPPI) σύμφωνα με την φόρμουλα των Black Scholes που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2, για τιμή εξάσκησης $K/_{\alpha}$, με $\alpha = 0{,}999997$ που αντιστοιχεί στο upside capture που εκτιμήσαμε.

Για την CPPI παίρνουμε το μοντέλο Black Scholes για τιμή εξάσκησης K/α , δηλαδή

$$C^{CPPI} = S_0 \cdot N(d_1') - \left(K/_a\right) \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2') \quad (3.1)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ d_1' = \frac{\log\left(\frac{S_0 \cdot T}{K/_a}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \quad (3.2)$$

$$\text{και}\ d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{T} \quad (3.3)$$

ενώ για την OBPI η τιμή του call θα ισούται ε με:

$$C^{OBPI} = S_0 \cdot N(d_1) - (K) \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) \quad (3.4)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0 \cdot T}{K/_a}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \quad (3.5)$$

$$\text{και}\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (3.6)$$

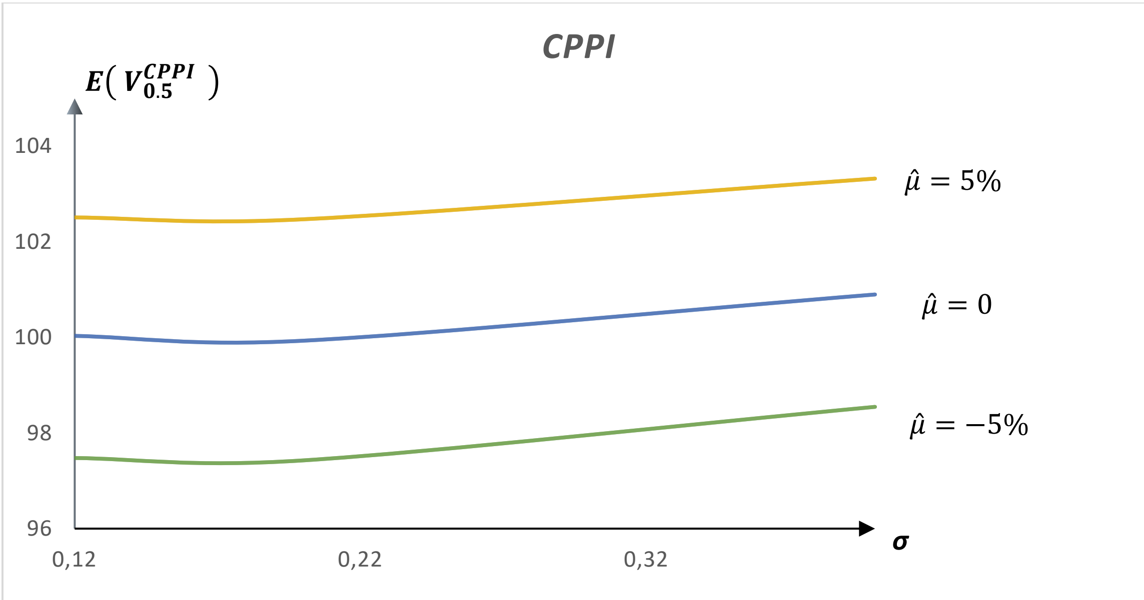
Εν συνεχεία, υπολογίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου μας για κάθε τιμή του δείκτη που έχουμε παράξει και βρίσκουμε τη μέση απόδοση του ασφαλισμένου μας χαρτοφυλακίου για την CPPI μέθοδο. Αντίστοιχα, κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία για την OBPI μέθοδο, μόνο που εδώ χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του call option τη Σχέση (3.4).

- Για την CPPI στρατηγική προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 3.2

Πίνακας 3.2

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$E\left(V_{0.5}^{CPPI}\right)$
-5%	0,12 0,20 0,40	97,4775 97,4279 98,5479
0%	0,12 0,20 0,40	100,0329 99,93161 100,8982
5%	0,12 0,20 0,40	102,5104 102,4722 103,3230

Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε τη μέση αξία του χαρτοφυλακίου μας για την CPPI και παρατηρούμε ότι ενώ έχουμε εκτιμήσει αξία ίση με 100,565 , στη μέση της περιόδου αν το $\hat{\mu}$ είναι θετικό, θα έχουμε μεγαλύτερη απόδοση. Αν το $\hat{\mu}$ κινηθεί αρνητικά ή είναι μηδέν με μεταβλητότητα μικρότερη από 40%, η απόδοση στο ασφαλισμένο χαρτοφυλάκιο θα ειναι μικρότερη.



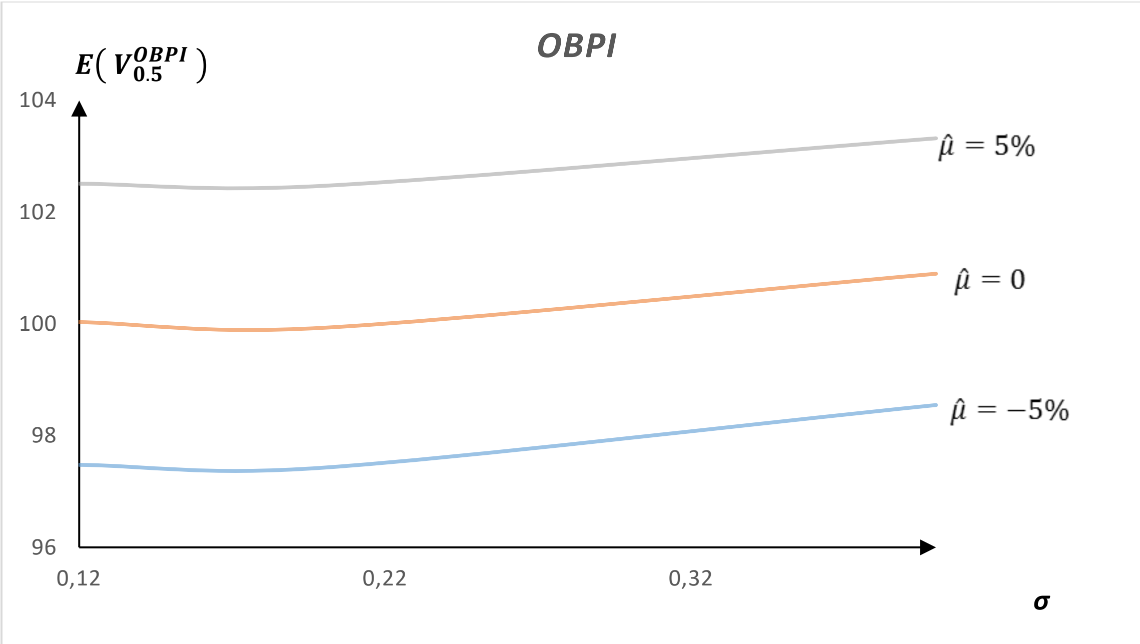
Σχήμα 3.7

- Για την OBPI στρατηγική προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 3.3

Πίνακας 3.3

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$E\left(V_{0.5}^{OBPI}\right)$
-5%	0,12	97,4778
	0,20	97,4282
	0,40	98,5482
0%	0,12	100,0332
	0,20	99,9320
	0,40	100,8986
5%	0,12	102,5108
	0,20	102,4726
	0,40	103,3233

Παρατηρούμε πως και αυτή τη στρατηγική έχει την ίδια συμπεριφορά μόνο που η τελευταία αποδίδει λίγο καλύτερα από την πρώτη.



Σχήμα 3.8

Γενικά παρατηρούμε ότι οι δύο στρατηγικές στη μέση της περιόδου μας είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3.4, αυτή η διαφορά τους μικραίνει όσο αυξάνεται η μεταβλητότα. Αυτό δείχνει ότι η CPPI είναι πιο ευαίσθητη και αποδίδει καλύτερα για μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

Πίνακας 3.4

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$E(V_{0.5}^{CPPI})$	$E(V_{0.5}^{OBPI})$	***Διαφορά υπέρ της OBPI***
-5%	0,12	97,47745	97,47778	0,0000033
	0,20	97,4279	97,42823	0,0000033
	0,40	98,54791	98,54823	0,0000032
0%	0,12	100,0329	100,0332	0,0000034
	0,20	99,93161	99,93195	0,0000034
	0,40	100,8982	100,8986	0,0000032
5%	0,12	102,5104	102,5108	0,0000035
	0,20	102,4722	102,4726	0,0000035
	0,40	103,323	103,3233	0,0000033

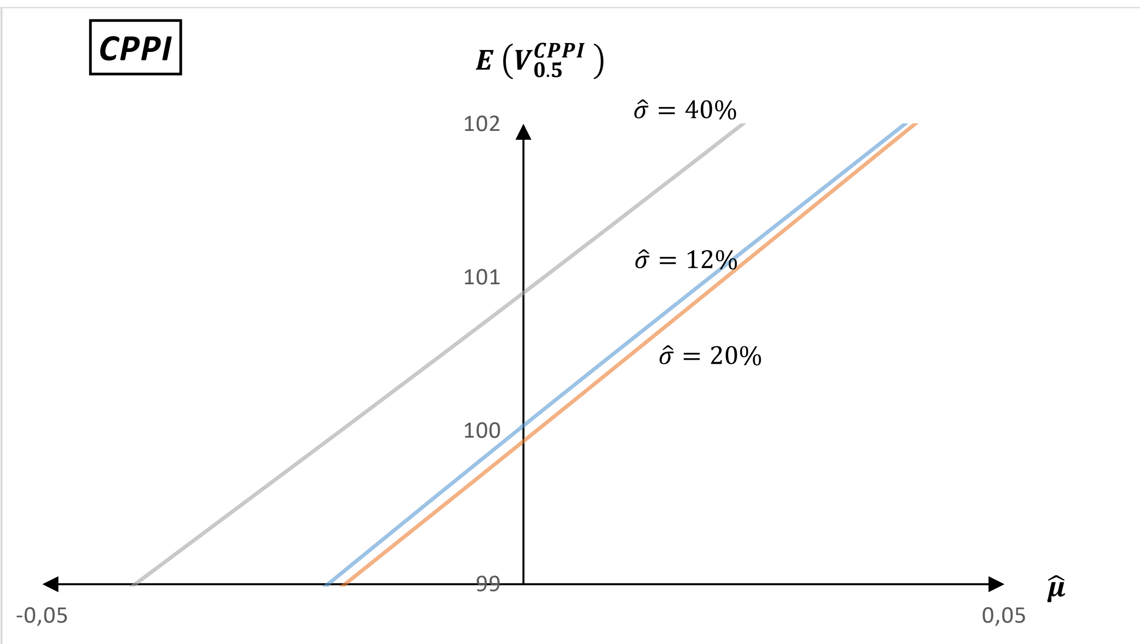
Ας δούμε τώρα τι θα συνέβαινε αν άλλαζε το $\hat{\mu}$ και κρατούσαμε κάθε φορά σταθερή τη μεταβλητότητα.

- Για την CPPI στρατηγική προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 3.5

Πίνακας 3.5

$\widehat{\sigma}$	$\widehat{\mu}$	$E\left(V_{0.5}^{CPPI}\right)$
12%	-0,05	97,4774
	0	100,0329
	0,05	102,5104
20%	-0,05	97,4279
	0	99,9316
	0,05	102,4722
40%	-0,05	98,5479
	0	100,8982
	0,05	103,3230

Εδώ παρατηρούμε ότι η απόδοση $\hat{\mu}$ και η απόδοση της αξίας του ασφαλισμένου μας χαρτοφυλακίου είναι ανάλογη. Όταν δηλαδή αυξάνεται το ένα, αυξάνεται και το άλλο όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.3.



Σχήμα 3.9

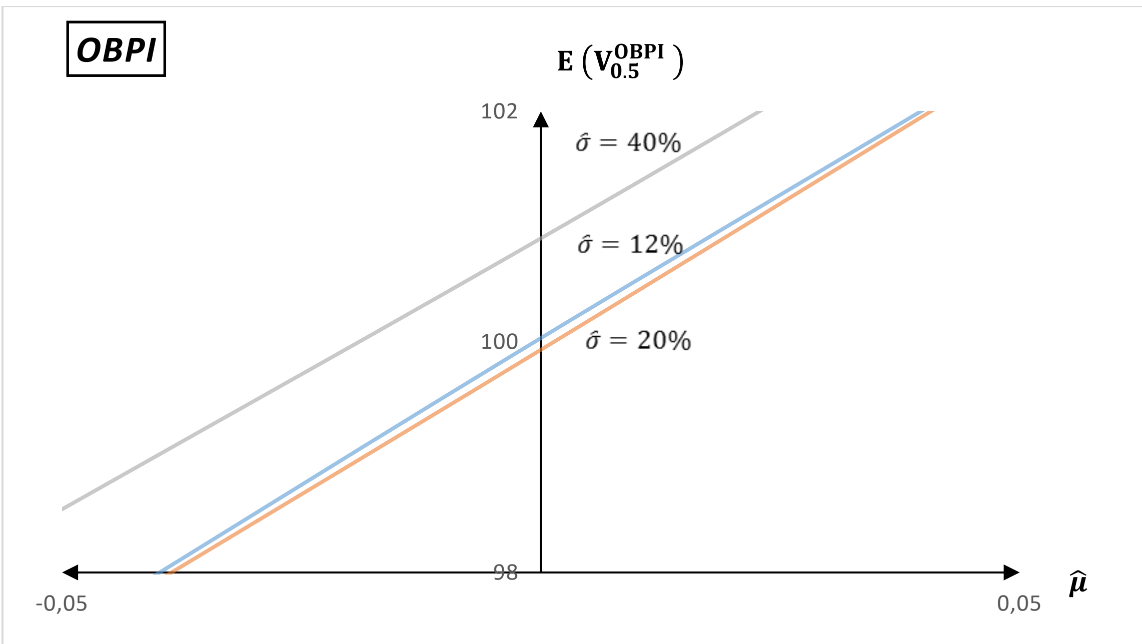
Όμως είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πως αν το $\hat{\sigma}$ αυξηθεί λίγο, δηλαδή από 12% γίνει 20% τότε η αξία του χαρτοφυλακίου μας πέφτει. Ενώ αν αυξηθεί αρκετά (από 12% γίνει 40%), τότε αυξάνεται.

- Αντίστοιχα για την OBPI στρατηγική προκύπτουν οι τιμές του Πίνακα 3.6

Πίνακας 3.6

$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$E\left(V_{0.5}^{CPPI}\right)$
12%	-0,05	97,4778
	0	100,0332
	0,05	102,5108
20%	-0,05	97,4282
	0	99,9319
	0,05	102,4726
40%	-0,05	98,5482
	0	100,8986
	0,05	103,3233

Ομοίως κι εδώ, η απόδοση $\hat{\mu}$ και η απόδοση της αξίας του ασφαλισμένου μας χαρτοφυλακίου είναι ανάλογες.



Σχήμα 3.10

Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 3.4 (αλλά και στον πίνακα 3.6) και στην OBPI μία μικρή αύξηση της μεταβλητότητας (από 12% σε 20%) μειώνει την αξία του χαρτοφυλακίου μας, ενώ μεγαλύτερη αύξηση (40%) την αυξάνει.

Και σε αυτή την περίπτωση, οι τιμές των δύο στρατηγικών είναι πολύ κοντά και η διαφορά τους υπολογίζεται στον Πίνακα 3.7.

Πίνακας 3.7

$\widehat{\sigma}$	$\widehat{\mu}$	$E\left(V_{0.5}^{CPPI}\right)$	$E\left(V_{0.5}^{OBPI}\right)$	***Διαφορά υπέρ της OBPI***
12%	-0,05	97,4774	97,4778	0,0003289
	0	100,0329	100,0332	0,0003375
	0,05	102,5104	102,5108	0,0003459
20%	-0,05	97,4279	97,4282	0,0003283
	0	99,9316	99,9319	0,0003369
	0,05	102,4722	102,4726	0,0003456
40%	-0,05	98,5479	98,5482	0,0003154
	0	100,8982	100,8986	0,0003249
	0,05	103,3230	103,3233	0,0003349

Παρατηρούμε ότι η διαφορά τους αυξάνεται, όσο αυξάνεται και η απόδοση $\hat{\mu}$.

Τελικά, βλέπουμε πως οι δύο στρατηγικές είναι σχεδόν ίσες μεταξύ τους με μία μικρη διαφορά υπέρ της OBPI. Επομένως, στη μέση της περιόδου θα μας συνέφερε καλύτερα η OBPI.

3.4. Εφαρμογή προσομοίωσης για σύγκριση των στρατηγικών με διαφορετικές τιμές εξάσκησης

Είδαμε ότι για ίδια αρχικά κόστη και ίδια τιμή εξάσκησης, η OBPI αποδίδει ελαφρώς καλύτερα στο μεσοδιάστημα από την CPPI. Εμείς θεωρούμε τώρα χαμηλότερο *floor* για την OBPI συγκριτικά με την CPPI. Έχουμε δηλαδή:

- Για την OBPI θέτουμε από τον Πίνακα 3.8:
$$p = 0{,}60\ \ , K = 60,\ V_0^{OBPI} = 100, S_0 = 100$$

- Για την CPPI θέτουμε και πάλι με τη βοήθεια του excel (για τη λύση γης μη γραμμικής εξίσωσης) παίρνουμε:
$$a = 0{,}9991\ \ , K = 70,\ V_0^{CPPI} = 100, S_0 = 100$$

Πίνακας 3.8

S	100					
K	60,000					
r	0,05					
T	1	ρίζα T	1			
σ	0,12					
q	1,000			ποσό σε χαρτοφ		57,074
p	0,600			ποσό σε option		42,926
d1	4,734					100,000
N(d1)	1,000					
N(d2)	1,000					
call	42,926					
Vobpi	100,000					

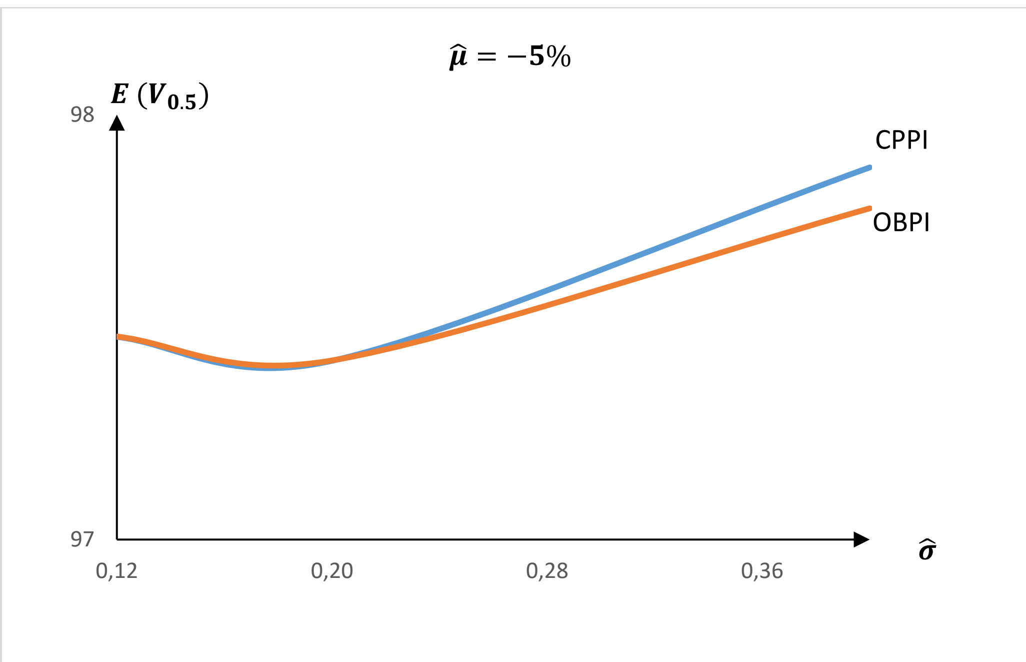
S	100					
K	70					
r	0,05					
T	1	ρίζα T	1			
σ	0,12					
α	0,999991					
d'1	3,449					
			επένδυση σε δείκτη			99,971
N(d'1)	1,000		μετρητά			0,029
N(d'2)	1,000					100,000
call	33,414					
Vcppi	100					

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς στη διαδικασία που αναφέραμε στο υποκεφάλαιο 3.5, βρίσκουμε για τις ίδιες περιπτώσεις την αξία του ασφαλισμένου μας χαρτοφυλακίου για τη μέση της περιόδου μας και προκύπτει ο Πίνακας 3.9.

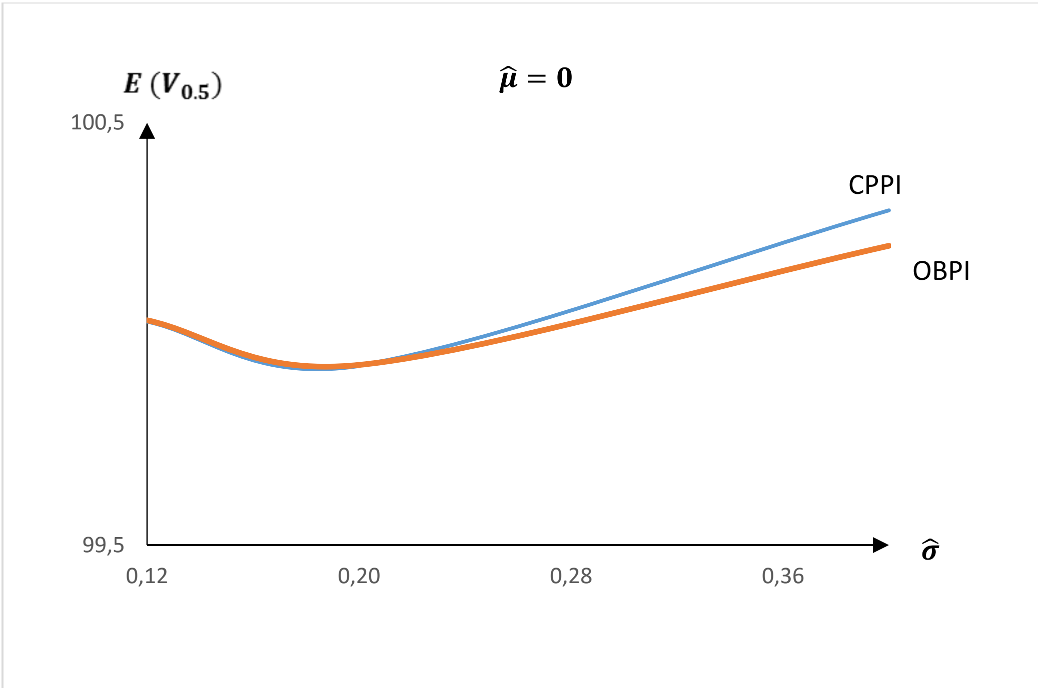
Πίνακας 3.9

$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$E\left(V_{0.5}^{CPPI}\right)$	$E\left(V_{0.5}^{OBPI}\right)$	***Διαφορά υπέρ της OBPI***
-5%	0,12	97,47691	97,47778	0,000862
	0,20	97,42067	97,42150	0,000826
	0,40	97,87582	97,77952	-0,096309
0%	0,12	100,03148	100,03232	0,000842
	0,20	99,92632	99,92660	0,000282
	0,40	100,29271	100,20877	-0,083936
5%	0,12	102,50988	102,51078	0,000907
	0,20	102,46941	102,47031	0,000901
	0,40	102,79893	102,72982	-0,069105

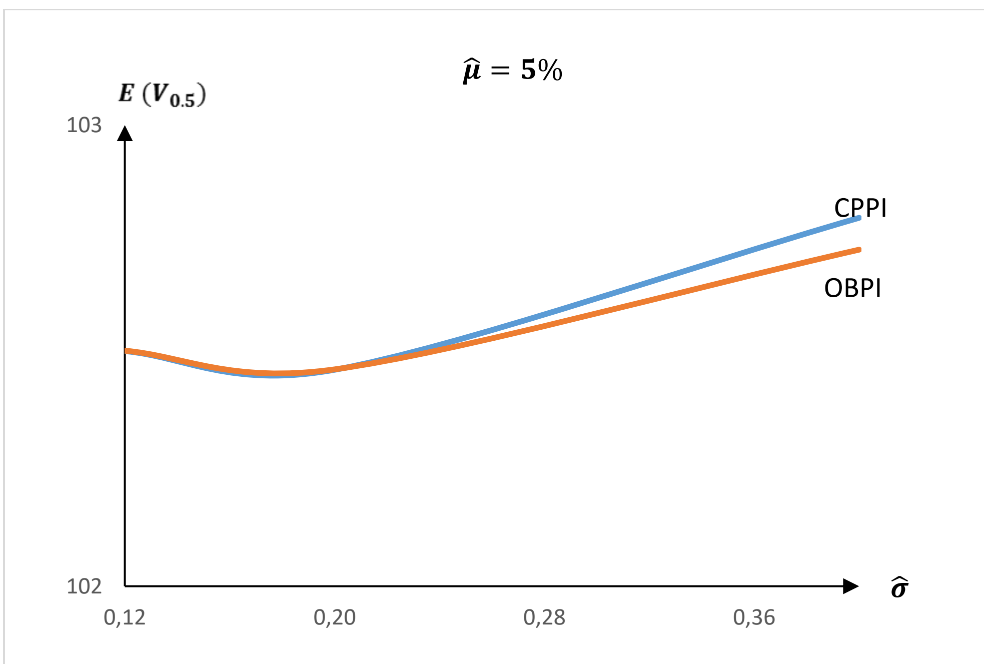
Βλέπουμε ότι ενώ στο τέλος η OBPI αποδίδει το ίδιο με την CPPI, στη μέση της περιόδου η OBPI κερδίζει μία μικρή διαφορά για χαμηλές μεταβλητότητες. Αν η μεταβλητότητα όμως είναι σχετικά υψηλότερη (40%), τότε η CPPI έχει καλύτερη απόδοση.



Σχήμα 3.11



Σχήμα 3.12



Σχήμα 3.13

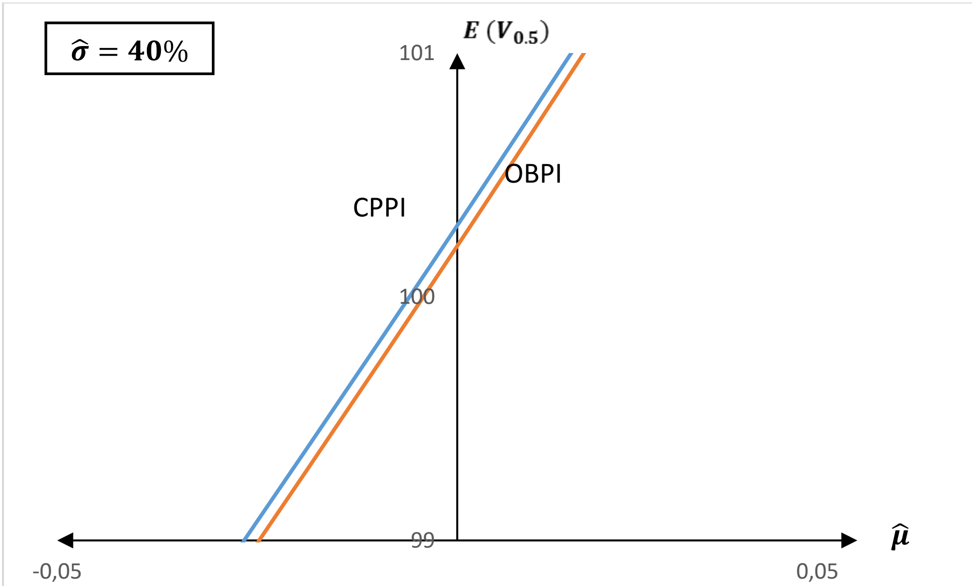
Η μείωση της διαφοράς ανάμεσα στης δύο στραηγικές φαίνεται και στα Σχήματα 3.5 – 3.7. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η μεταβλητότητα, η CPPI αποδίδει καλύτερα έως ότου γίνει καλύτερη από την OBPI. Για μικρές μεταβολές της μεταβλητότητας και οι δύο μειώνουν την αξία του χαρτοφυλακίου μας.

Όμοια, αν κρατάμε σταθερή κάθε φορά τη μεταβλητότητα και αλλάζει η απόδοσης έχουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.10.

Πίνακας 3.100

$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$E\left(V_{0.5}^{CPPI}\right)$	$E\left(V_{0.5}^{OBPI}\right)$	***Διαφορά υπέρ της OBPI***
12%	-0,05	97,4769	97,4778	0,0008623
	0	100,0315	100,0323	0,0008425
	0,05	102,5099	102,5108	0,0009068
20%	-0,05	97,4207	97,4215	0,0008265
	0	99,9263	99,9266	0,0002819
	0,05	102,4694	102,4703	0,0009012
40%	-0,05	97,8758	97,7795	-0,0963091
	0	100,2927	100,2088	-0,0839356
	0,05	102,7989	102,7298	-0,0691053

Παρατηρούμε ότι αν η μεταβλητότητα παραμένει 12% και έχουμε απόδοση 5% , αυξάνεται η διαφορά υπέρ της OBPI, ενώ υπάρχει μία ελαφριά πτώση στη διαφορά αν η απόδοση είναι 0. Σε λίγο μεγαλύτερη διακύμανση (20%) η διαφορά συμπεριφέρεται το ίδιο, ενώ η πτώση για μ=0 είναι μεγαλύτερη σε σχέση με πριν. Τέλος, για μεταβλητότητα αρκετά μεγαλύτερη, $\hat{\sigma} = 40\%$, η CPPI αποδίδει καλύτερα. Όσο πιο χαμηλή η απόδοση μ, όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά τους.



Σχήμα 3.14

3.5. Συμπεράσματα σύγκρισης CPPI-OBPI

Στα υποκεφάλαια 3.3 κα 3.4, με τη βοήθεια της προσομοίωσης Monte Carlo, παράξαμε τυχαίες τιμές για ένα υποκείμενο δείκτη πάνω στον οποίο θα επενδύαμε και το χαρτοφυλάκιο που θα δημιουργούσαμε θα τα ασφαλίζαμε σύμφωνα με τις τιμές που προέκυψαν.

Πιο συγκεριμένα, στο υποκεφάλαιο 3.3, για να συγκρίνουμε τις δύο στρατηγικές θέσαμε ίση την αρχική τους αξία τους αλλά και την τιμή εξάσκησης ίση με το *floor*. Θέλαμε να δούμε πως αυτές συμπεριφέρονται στη μέση της περιόδου. Είδαμε τελικά, ότι είτε κρατήσουμε σταθερή την απόδοση μ και αλλάζουμε τη μεταβλητότητα σ, είτε κρατήσουμε σταθερή τη μεταβλητότητα και αλλάζουμε την απόδοση, στη μέση της περιόδου μας η OBPI αποδίδει λίγο καλύτερα από την CPPI.

Στο υποκεφάλαιο 3.4, πήραμε πάλι ίδιες αρχικές αξίες για τις δύο στρατηγικές, αλλά θέσαμε floor λίγο πάνω από την τιμή εξάσκησης και είδαμε τι συμβαίνει κι εκεί στη μέση της περιόδου μας. Όταν αυξηθεί αρκετά η μεταβλητότητα ενώ η απόδοση μ παραμένει σταθερή , η διαφορά υπέρ της OBPI όχι μόνο μειώνεται αρκετά, αλλά γίνεται αρνητική. Δηλαδή, η CPPI αποδίδει καλύτερα όταν παραμένει σταθερή η απόδοση και αυξάνεται η μεταβλητότητα αρκετά. Αν η αύξηση της μεταβλητότητας είναι μικρή, τότε αποδίδει καλύτερα η OBPI. Αν τώρα παραμένει σταθερή η μεταβλητότητα και αλλάζει το μ, η διαφορά υπέρ της OBPI αυξάνεται καθώς αυξάνεται το μ γίνεται θετικό, για μικρή όμως μεταβλητότητα. Αν το σ γίνει αρκετά μεγάλο, η CPPI αποδίδει καλύτερα.

Τελικά εμείς μπορούμε να πούμε ότι κάποια από τις δύο στρατηγικές αποδίδει καλύτερα; Ποία από τις δύο θα ήταν καλύτερα να υιοθετήσουμε αν θέλαμε να ασφαλίσουμε το χαρτοφυλάκιό μας; Μάλλον αυτό τελικά εξαρτάται από το πως θα κινηθεί η αγορά, αν έχει γίνει σωστή εκτίμηση των παραμέτρων και σε τι ποσοστό θέλουμε να ασφαλίσουμε το χαρτοφυλάκιό μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bertrand, P., & Prigent, J-L. (2002). Portfolio insurance: the extreme value approach to the CPPI method, Finance, 23, 69-86.
- Black, F. & Jones, R. (1987). Simplifying portfolio insurance. The Journal of Portfolio Management, 48-51.
- Black, F., & Rouhani, R. (1989). Constant proportion portfolio insurance and the synthetic put option: a comparison, in Institutional Investor focus on Investment Management, edited by Frank J. Fabozzi. Cambridge, Mass: Ballinger, pp 695-708.
- Black, F. & Perold, A.R. (1992). Theory of constant proportion portfolio insurance. The Journal of Economics, Dynamics and Control, 16, 403-426.
- Bookstaber, R. & Langsam, J.A. (2000). Portfolio insurance trading rules. The Journal of Futures Markets, 8, 15-31.
- Hull, J. and A. White, (1987), The pricing of options on assets with stochastic volatilities, Journal of Finance, June, 281-320.
- Leland, H.E. & Rubinstein, M. (1976). The evolution of portfolio insurance, in: D.L. Luskin, ed., Portfolio insurance: a guide to dynamic hedging, Wiley.
- Perold, A. (1986). Constant portfolio insurance. Harvard Business School. Unpublished manuscript.
- Perold, A. & Sharpe, W. (1988). Dynamic strategies for asset allocation. Financial Analyst Journal, January-February, 16-27.
- Prigent, J-L. (2001). Assurance du portefeuille: analyse et extension de la mιthode du coussin. Banque et Marchιs, 51: 33-39.
- Schweizer, M. (1991). Option hedging for semimartingales, Stochastic Processes and their Applications, 37: 339-363.
- Scott L.O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, 419-438.
- Stein E.M. and J.C. Stein (1991). Stock price distribution with stochastic volatility: an analytic approach, Review of Financial Studies, 4, 727-752.