ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Αναδρομικός υπολογισμός της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων: Μια επισκόπηση

ΕΛΕΝΗ Δ. ΜΑΜΑΝΔΡΑ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς

Νοέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος (Επιβλέπων)
- Πολίτης Κωνσταντίνος
- Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE

AND RISK MANAGEMENT

Recursive evaluation of the distribution of total claims: A review

ELENI D. MAMANDRA

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Actuarial Science and Risk Management

«Μια επένδυση στη γνώση, αποδίδει το καλύτερο επιτόκιο.»

-Βενιαμίν Φραγκλίνος, 1706-1790, Αμερικανός πολιτικός & συγγραφέας.

Στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Αντζουλάκο Δημήτριο για την βοήθειά του στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Οφείλω το μεγαλύτερο ευχαριστώ στην οικογένειά μου, για την στήριξη, υπομονή και βοήθεια καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην μέχρι τώρα εκπαίδευσή μου, καθώς και τους πολυαγαπημένους μου φίλους.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο τη μελέτη αναδρομικών τύπων υπολογισμού της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων. Αποτελεί μια βιβλιογραφική εργασία, όπου συγκεντρώθηκαν αρχικά οι πιο αναγκαίες έννοιες για την κατανόηση της χρήσης των αναδρομικών τύπων και στη συνέχεια έγινε εκτενής και λεπτομερή παρουσίαση του αναδρομικού τύπου του Panjer και των γενικεύσεών του. Οι ανωτέρω τύποι παρουσιάστηκαν εκτενώς στη μονοδιάστατη περίπτωση και περιληπτικά στη πολυδιάστατη περίπτωση. Εν κατακλείδι, αποτελεί ένα περιεκτικό εγχειρίδιο των πιο γνωστών αναδρομικών τύπων, θεωρημάτων και σημαντικών πορισμάτων, έτσι ώστε να δώσει στον αναγνώστη μια σφαιρική εικόνα της χρησιμότητας των αναδρομικών σχέσεων.

ABSTRACT

The purpose of the present study is to analyze recursive formulas for the calculation of the distribution of total claims in an insurance portfolio. In the first place, the most significant definitions, as regards this study, are presented in order to understand the use of recursions. In addition, the reader can find below an analysis of Panjer's recursion and its generalizations, where both types of analysis, one-dimensional and multidimensional case, are presented. In conclusion, this study is a detailed guide of the best known recursive formulas, theorems and important findings, so as to give the reader an overview of the utility of recursions.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γύρω στο 1980, οι αναδρομικοί τύποι για τον υπολογισμό του συνόλου των απαιτήσεων άρχισαν να λαμβάνουν ιδιαίτερη προσοχή στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Δύο συνηθισμένοι τρόποι μοντελοποίησης τέτοιων κατανομών αποτελούν οι σύνθετες κατανομές (compound distributions) και οι συνελίξεις (convolutions).

Αρχικά, μελετήθηκαν οι αναδρομικοί τύποι των σύνθετων κατανομών. Ειδικότερα, ο Panjer (1981) έδωσε ζωτικής σημασίας αποτελέσματα στο πλαίσιο αυτό. Θεώρησε μια κλάση διακριτών κατανομών η οποία εμπεριέχει τις ακόλουθες βασικές κατανομές :

- την Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (Negative Binomial Distribution) ,
- την Κατανομή Poisson, και
- την Διωνυμική Κατανομή (Binomial Distribution).

Οι προαναφερθείσες κατανομές αποτελούν τους τρείς συνηθέστερους τύπους κατανομών που συναντώνται στην αναλογιστική βιβλιογραφία.

Στα μέσα της δεκαετίας του ογδόντα, ο De Pril έστρεψε την προσοχή του σε αναδρομικές σχέσεις για συνελίξεις και δημοσίευσε διάφορες μελέτες σχετικά με το θέμα αυτό. Οι συγκεκριμένες αναδρομικές σχέσεις μπορεί να αναφέρονται είτε ως προς το χρόνο είτε ως προς τον χώρο που καταλαμβάνουν, και ο ίδιος όπως και άλλοι συγγραφείς, ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη προσεγγίσεων που βασίζονται σε τέτοιες αναδρομικές σχέσεις και όρια σφάλματος για αυτές τις προσεγγίσεις.

Με την επέκταση της κλάσης του Panjer, ο Sundt (1992) παρουσίασε ένα πλαίσιο, που καλύπτει επίσης τις αναδρομικές σχέσεις του De Pril όσον αφορά τις συνελίξεις. Αρχικά, αναδρομικές σχέσεις εξήχθησαν για τη συνάρτηση πιθανότητας κατανομών, αλλά αργότερα προσαρμόστηκαν και σε άλλες συναρτήσεις όπως η αθροιστική κατανομή και οι μετασχηματισμοί stop-loss.

Από τα τέλη της προηγούμενης δεκαετίας, η θεωρία έχει επεκταθεί και σε πολυδιάστατες κατανομές (multivariate distributions).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα γίνει εκτενής μελέτη των αναδρομικών τύπων υπολογισμού της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων. Αποτελείται από 4 κεφάλαια, τα οποία στόχο έχουν να μυήσουν τον αναγνώστη, στον αναδρομικό τρόπο υπολογισμού της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων.

Το πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζει ορισμούς και ιδιότητες βασικών μαθηματικών εννοιών όπως συνελίξεις, γεννήτριες συναρτήσεις καθώς επίσης, εισάγει την έννοια των κλάσεων κατανομών. Στη συνέχεια αναλύονται διεξοδικά οι ανωτέρω, οι οποίες αναφέρθηκαν για πρώτη φορά από τον καθηγητή H. Panjer και γενικεύτηκαν από τους Sundt & Jewell.

Το δεύτερο κεφάλαιο σχετίζεται με τον ευθύ υπολογισμό της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων. Συγκεκριμένα αναλύονται διεξοδικά, με παράλληλη χρήση παραδειγμάτων για την καλύτερη κατανόησή τους, τρείς μέθοδοι: η βασική μέθοδος, η εναλλακτική μέθοδος για σύνθετες κατανομές Poisson καθώς και η αναδρομική μέθοδος.

Όσον αφορά την τελευταία μέθοδο, θα μας απασχολήσει στα επόμενα δυο κεφάλαια. Πιο αναλυτικά, στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται διεξοδική παρουσίαση του αναδρομικού τύπου του Panjer δίνοντας παραδείγματα για συνεχείς και διακριτές περιπτώσεις καθώς και ενδιαφέροντα πορίσματα. Επιπλέον, παρατίθενται γενικεύσεις του αναδρομικού αυτού τύπου, όπως αυτή των Sundt και Jewell χωρίς να παραλείπονται σημαντικά πορίσματα, συμπεράσματα και παραδείγματα για την ακριβέστερη και πληρέστερη επισκόπηση της μεθόδου.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις πολυδιάστατες προεκτάσεις του αναδρομικού τύπου του Panjer, όπου δίνονται σχετικά θεωρήματα και πορίσματα που μελετήθηκαν, στην πολυδιάστατη περίπτωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει παράθεση απαραίτητων εισαγωγικών εννοιών και αποτελεσμάτων οι οποίες είναι απαραίτητες στην ανάλυση αποτελεσμάτων και εφαρμογών που αναφέρονται στους αναδρομικούς τύπους υπολογισμού της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων.

1.1. Τυχαία μεταβλητή

1.1.1. Ορισμός

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μια πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \to \mathrm{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή, αν για κάθε υποσύνολο I του R ($I \subseteq R$) το σύνολο (αντίστροφη εικόνα) $X^{-1}(I)$ είναι ενδεχόμενο του Ω, δηλαδή το σύνολο

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \subseteq \Omega$$

είναι ενδεχόμενο του Ω.

Αν στο δειγματικό χώρο Ω έχει οριστεί μια πιθανότητα P_Ω, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι για κάθε $I \subseteq R$

$$P(X \in I) = P_\Omega\big(X^{-1}(I)\big).$$

1.2. Συνάρτηση κατανομής

1.2.1. Ορισμός

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή, που ορίζεται σε κάποιο δ.χ. Ω. Η πραγματική συνάρτηση $F : R \to R$ που δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = P(X \le x) = P_\Omega(X^{-1}\big((-\infty, x]\big) = P_\Omega(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}), \quad x \in R$$

ονομάζεται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της X.

1.2.2. Ιδιότητες

Ισχύουν τα εξής:

- $0 \le F(x) \le 1,$ με $0 = F\,(-\infty\,)$ και $1 = F(\,+\infty\,)$
- Αν $x_1 < x_2$, τότε $F(x_1) \le F(x_2)$

- Η $F(x)$ είναι δεξιά συνεχής συνάρτηση

1.3. Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

1.3.1. Ορισμός

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε ένα δ.χ. Ω. Η συνάρτηση f, που ορίζεται από τη σχέση,

$$f(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}), \quad x \in R$$

ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τυχαία μεταβλητής X.

Η συνάρτηση πιθανότητας f συμβολίζεται από αρκετούς συγγραφείς και ως p.

Οι πιο συνήθεις διακριτές κατανομές είναι η Poisson, η διωνυμική κατανομή, η αρνητική διωνυμική κατανομή, η γεωμετρική κατανομή, κ.ά.

1.3.2. Ιδιότητες

Στην περίπτωση που το σύνολο τιμών της X είναι απείρως αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

I. $f(x) = 0, \quad x \notin R_X$.

II. $f(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots$.

III. $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Στην περίπτωση που το σύνολο τιμών της X είναι πεπερασμένο σύνολο, δηλαδή $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τότε ισχύουν ανάλογες ιδιότητες.

1.4. Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

1.4.1. Ορισμός

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ορίζεται σε κάποιο δ.χ. Ω. Ας υποθέσουμε επίσης, ότι υπάρχει μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση $f: R \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο I του R, το οποίο μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει

$$P(X \in I) = \int_I f(x) dx.$$

Τότε, η τυχαία μεταβλητή X λέγεται **απόλυτα συνεχής** (ή απλά συνεχής) και η συνάρτηση f συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλά συνάρτηση πυκνότητας της X.

1.4.2. Ιδιότητες

Ισχύουν τα εξής:

I. $f(x) \geq 0, \quad x \in R.$

II. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

1.5. Κλάσεις διακριτών κατανομών και συναρτήσεων

Με το συμβολισμό $\mathcal{P}_1$ δηλώνουμε την κλάση των διακριτών κατανομών, που είναι ορισμένες στους ακέραιους αριθμούς (Z). Για κάθε ακέραιο m με το συμβολισμό $\mathcal{P}_{1m}$ δηλώνουμε την κλάση των διακριτών κατανομών p που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{P}_1$ και ικανοποιούν τη σχέση $p(x) = 0$ για κάθε $x < m$. Προφανώς

$\mathcal{P}_{1,m+1} \subset \mathcal{P}_{1m}$.

Με το συμβολισμό $\mathcal{P}_{1\underline{m}}$ δηλώνουμε την υποκλάση των διακριτών κατανομών p που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{P}_{1m}$ για τις οποίες ισχύει ότι $p(m) > 0$. Προφανώς,

$\mathcal{P}_{1m} = \mathcal{P}_{1\underline{m}} \cup \mathcal{P}_{1,m+1}$.

Τέλος, με το συμβολισμό $\mathcal{P}_{1\_}$ δηλώνουμε την υποκλάση των διακριτών κατανομών p που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{P}_1$ και έχουν σύνολο τιμών κάτω φραγμένο. Προφανώς,

$\mathcal{P}_{1-} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{1m} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{1\underline{m}}.$

Με το συμβολισμό $\mathcal{F}_{1,}$ δηλώνουμε όλες τις συναρτήσεις f που είναι ορισμένες στους ακέραιους αριθμούς.

Για κάθε ακέραιο m με το συμβολισμό $\mathcal{F}_{1m}$ δηλώνουμε την κλάση των συναρτήσεων f που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{F}_1$ και ικανοποιούν τη σχέση $f(x) = 0$ για κάθε $x < m$.

Με το συμβολισμό $\mathcal{F}_{1\underline{m}}$ δηλώνουμε την υποκλάση των συναρτήσεων f που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{F}_{1m}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(m) > 0$.

Τέλος, ορίζουμε την κλάση συναρτήσεων $\mathcal{F}_{1-}$ που ορίζεται με τη σχέση

$\mathcal{F}_{1-} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{1\underline{m}}$.

1.6. Γεννήτριες συναρτήσεις

Σ’ αυτή την παράγραφο, θα γίνει αναφορά σε βασικές έννοιες σχετικές με τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις, τις ροπογεννήτριες συναρτήσεις, διάφορες ιδιότητές τους και οτιδήποτε άλλο είναι χρήσιμο στην κατανόηση των επόμενων παραγράφων και κεφαλαίων. Οι γεννήτριες συναρτήσεις αποτελούν πολύτιμα εργαλεία για να εξετάσουμε διάφορες ποσότητες που μας ενδιαφέρουν, καθώς μέσω αυτών των συναρτήσεων (των οποίων εκτενέστατη χρήση θα γίνει στη συνέχεια), μπορούμε να υπολογίσουμε μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και να βρούμε ακριβείς, αναδρομικούς και ασυμπτωτικούς τύπους για τις κατανομές των τυχαίων μεταβλητών με τις οποίες θα ασχοληθούμε.

1.6.1. Πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός (Πιθανογεννήτρια συνάρτηση)

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές με συνάρτηση πιθανότητας f. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση (probability generating function) P_X της τυχαίας μεταβλητής X, ορίζεται ως εξής:

$$P_X(s) = E(s^X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x)s^x = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)s^x .$$

Για $-1 \le s \le 1$, ισχύει ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} |s^x f(x)| = \sum_{x=0}^{\infty} |s^x| f(x) \le \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$$

και επομένως, η πιθανογεννήτρια συγκλίνει πάντοτε και μάλιστα απόλυτα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Με παραγώγιση της πιθανογεννήτριας συνάρτησης προκύπτουν οι παραγοντικές ροπές της X, αφού

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{ds^r} P_X(s)\Big|_{s=1} &= \sum_{r=n}^{\infty} x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)f(x) \\ &= E(X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)), \qquad r \ge 0. \end{aligned}$$

Το δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας καλείται (καθοδική) παραγοντική ροπή $r-$ τάξης της τυχαίας μεταβλητής X. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι

$$E(X) = P_X'(1)$$
$$E[X(X-1)] = P_X''(1)$$
$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = P_X''(1) + P_X'(1) - \left(P_X'(1)\right)^2.$$

Αν $P_X(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μίας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της X, είναι γνωστό ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$f(r) = P(X=r) = \frac{1}{r!} \cdot \frac{d^r}{ds^r} P_X(s)\bigg|_{s=0}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της, δηλαδή αν $X,\ Y$ είναι δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με πιθανογεννήτριες P_X και P_Y αντίστοιχα και ισχύει ότι $P_X(s) = P_Y(s)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή.

Η παραπάνω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη για την εύρεση της κατανομής του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους ανεξάρτητων διακριτών τυχαίων μεταβλητών, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Τέλος, έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια P_X και a, b δύο πραγματικοί αριθμοί. Τότε, η πιθανογεννήτρια του γραμμικού συνδυασμού $Y = aX + b$ δίνεται από τον τύπο

$$P_Y(s) = P_{aX+b}(s) = s^b P_X(s^a).$$

1.6.2. Ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός (Ροπογεννήτρια συνάρτηση)

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση (moment generating function) $M_X(s)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X, δίνεται από τον τύπο

$$M_X(s) = E(e^{sX})$$

υπό την προϋπόθεση ότι η μέση τιμή $E(e^{sX})$ υπάρχει για κάθε s, που ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta),\ \delta > 0$.

Τονίζουμε, όπως φαίνεται και από τον παραπάνω ορισμό, ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής δεν υπάρχει πάντα.

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή, με συνάρτηση πιθανότητας f, τότε η ροπογεννήτριά της δίνεται από τον τύπο

$$M_X(s) = \sum_x e^{sx} f(x).$$

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, με συνάρτηση πυκνότητας f, τότε η ροπογεννήτριά της δίνεται από τον τύπο

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx.$$

Σε αυτή την περίπτωση σημειώνουμε, ότι η ποσότητα

$$L_X(s) = M_X(-s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}(x) dx$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(x)$.

Με παραγώγιση της ροπογεννήτριας συνάρτησης, προκύπτουν οι ροπές r −τάξης, μ_r, της X, αφού

$$\frac{d^r}{ds^r} M_X(s)\bigg|_{s=0} = E(X^r) = \mu_r, \qquad r \geq 0$$

λόγω του ότι

$$\frac{d^r}{ds^r} M_X(s) = E(X^r e^{sX}).$$

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι

$$E(X) = M_X'(0)$$
$$E(X^2) = M_X''(0)$$
$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = M_X''(0) - \big(M_X'(0)\big)^2.$$

Για μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X ισχύει ότι

$$M_X(s) = P_X(e^s)$$

και

$$P_X(s) = M_X(logs).$$

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή, με ροπογεννήτρια M_X και a, b δύο πραγματικοί αριθμοί. Τότε, η ροπογεννήτρια του γραμμικού συνδυασμού $Y = aX + b$ δίνεται από τον τύπο

$$M_Y(s) = M_{aX+b}(s) = e^{bs} M_X(as).$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι όπως η πιθανογεννήτρια συνάρτηση έτσι και η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της. Έτσι, αν X, Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_X(s), M_Y(s)$ αντίστοιχα, και αν για κάποιο $\delta > 0$ ισχύει ότι $M_X(s) = M_Y(s)$, για κάθε $s \in (-\delta, \delta)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή.

Πρέπει να τονισθεί, ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση δεν υπάρχει πάντοτε, δηλαδή δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση όλες οι τυχαίες μεταβλητές. Για παράδειγμα, η κατανομή Pareto, η λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή κ.ά., δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση (ροπές όμως έχουν).

1.7. Συνελίξεις

1.7.1. Ορισμός

Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων f και g συμβολίζεται με $f * g$ και ορίζεται ως εξής:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Εφόσον στην παραπάνω σχέση τα όρια του ολοκληρώματος είναι $-\infty$ και $+\infty$, ο υπολογισμός της συνάρτησης $(f * g)$ μπορεί να είναι δύσκολος σε ορισμένες περιπτώσεις. Ωστόσο, αν τα όρια στην παραπάνω σχέση ήταν πεπερασμένα τότε ο υπολογισμός θα ήταν φυσικά πιο απλός. Ενδεικτική είναι η περίπτωση, που έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y, με αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας $f(x)$ και $g(x)$ που ορίζονται στο διάστημα *[0,∞)*. Τότε

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(t)g(x-t)dt, \quad x \geq 0.$$

Αντίστοιχα, ορίζεται και η συνέλιξη για «διακριτές» συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ (δηλαδή για ακολουθίες). Ειδικά στην περίπτωση που οι f, g ορίζονται στο σύνολο $\{0, 1, 2, \dots\}$, έχουμε

$$(f * g)(x) = \sum_{t=0}^{x} f(x-t)g(t) = \sum_{t=0}^{x} f(t)g(x-t), \quad x = 0, 1, 2, \dots .$$

Τα παραπάνω, μπορούν να γενικευθούν για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Για παράδειγμα,

$$(f * g * h)(x) = ((f * g) * h)(x) = \big(f * (g * h)\big)(x).$$

Ειδικότερα, έχουμε και τον ακόλουθο συμβολισμό

$$\underbrace{(f * f * \dots * f)}_{n}(x) = f^{*n}(x).$$

1.7.2. Κατανομή αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Έστω δύο ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y, με αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ αντίστοιχα. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$ δίνεται από τον τύπο

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t) f_Y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(z-t) dt.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Z, δίνεται από τον τύπο

$$M_Z(s) = M_X(s) M_Y(s).$$

Έστω τώρα, δύο ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y με αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$, και $f_Y(y)$, $y \in R_Y$, αντίστοιχα. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$ δίνεται από τον τύπο

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \sum_{t \in R_Y} f_X(z-t) f_Y(t) = \sum_{t \in R_X} f_X(t) f_Y(z-t).$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Z, δίνεται από τον τύπο

$$M_Z(s) = M_X(s) M_Y(s)$$

ενώ η πιθανογεννήτριά της, δίνεται από τον τύπο

$$P_Z(s) = P_X(s) P_Y(s).$$

Θα εστιάσουμε τώρα, στην περίπτωση του αθροίσματος n ανεξάρτητων και ισόνομων μη αρνητικών, ακέραιων διακριτών τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, …, X_n με κοινή συνάρτηση πιθανότητας f, κοινή συνάρτηση κατανομής F, κοινή ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(s)$, και κοινή πιθανογεννήτρια $P_X(s)$. Θα εστιάσουμε, δηλαδή, στην μη αρνητική ακέραια διακριτή τυχαία μεταβλητή

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Τότε, για $x = 0, 1, \ldots$, έχουμε

$$G_{S_n}(x) = P((S_n \leq x) = F^{*n}(x)$$

$$g_{S_n}(x) = P(S_n = x) = f^{*n}(x)$$

όπου

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \qquad F^{*n}(x) = \begin{cases} F(x), & n = 1 \\ \sum_{t=0}^{x} F^{*(n-1)}(x-t)\, F(t), & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

και

$$f^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \qquad f^{*n}(x) = \begin{cases} f(x), & n = 1 \\ \sum_{t=0}^{x} f^{*(n-1)}(x-t)\, f(t), & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Επίσης

$$M_{S_n}(t) = E(e^{tS_n}) = [M_X(t)]^n$$

$$P_{S_n}(t) = E(t^{S_n}) = [P_X(t)]^n.$$

Στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι συνεχείς, ισχύουν όλες οι παραπάνω σχέσεις, μόνο που τα αθροίσματα θα πρέπει να αντικατασταθούν με ολοκληρώματα στον ορισμό των συνελίξεων $F^{*n}(x)$ και $f^{*n}(x)$ για $n \geq 2$.

1.8. Σύνθετες κατανομές

Οι σύνθετες κατανομές, όπως η σύνθετη κατανομή Poisson, η σύνθετη αρνητική διωνυμική, κ.ά., χρησιμοποιούνται εκτενώς στη Θεωρία Κινδύνου, για να μοντελοποιήσουν, π.χ., την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων, που εμφανίστηκαν σε μία συγκεκριμένη περίοδο. Η συνήθης μέθοδος υπολογισμού της συνάρτησης πιθανότητας/πυκνότητας και της συνάρτησης κατανομής μέσω συνελίξεων, είναι επίπονη. Ειδικότερα, όταν ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων είναι μεγάλος, αυτός ο υπολογισμός είναι ιδιαίτερα χρονοβόρος, ακόμα και με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, οπότε καταφεύγουμε σε άλλες υπολογιστικές μεθόδους.

Στο πρότυπο συλλογικού κινδύνου δίνουμε έμφαση στη διαδικασία των αποζημιώσεων και αντιμετωπίζουμε το χαρτοφυλάκιο των κινδύνων ως ενιαίο σύνολο. Οι τρείς βασικές υποθέσεις-παραδοχές, του παραπάνω προτύπου, είναι οι εξής:

1. Το χαρτοφυλάκιο των κινδύνων είναι «ανοιχτό». Δηλαδή, στη χρονική περίοδο που εξετάζουμε, μπορεί να υπάρχουν προσχωρήσεις και αποχωρήσεις ατόμων.
2. Οι κίνδυνοι είναι «ανεξάρτητοι» και «ισόνομοι». Συνεπώς και οι αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν τους κινδύνους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.
3. Το σύνολο των αποζημιώσεων προκύπτει ως τυχαίο άθροισμα τυχαίων μεταβλητών

Η γενική μορφή το μοντέλου συλλογικού κινδύνου περιγράφεται από τη σύνθετη κατανομή

$$S_N = S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N, & N = 1,2, \ldots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

όπου:

– η τυχαία μεταβλητή $X_{i,}$ παριστάνει το ύψος της i ατομικής ζημιάς (δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές), με συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας f

– η τυχαία μεταβλητή N, παριστάνει το πλήθους των ζημιών (κινδύνων) ή και απαιτήσεων με συνάρτηση πιθανότητας p

– η τυχαία μεταβλητή S, παριστάνει το ύψος της συνολικής ζημιάς με συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας g

Συνήθως, γράφουμε

$$g = p \vee f.$$

Αν η τυχαία μεταβλητή N, ακολουθεί

● την κατανομή **Poisson**, τότε θα λέμε ότι τυχαία μεταβλητή S ακολουθεί τη **σύνθετη Poisson** κατανομή (compound Poisson distribution).

● τη **διωνυμική** κατανομή, τότε θα λέμε ότι τυχαία μεταβλητή S ακολουθεί τη **σύνθετη διωνυμική** κατανομή (compound binomial distribution).

● την **αρνητική διωνυμική** κατανομή, θα λέμε ότι τυχαία μεταβλητή S ακολουθεί τη **σύνθετη αρνητική διωνυμική** κατανομή (compound negative binomial distribution).

● τη **γεωμετρική** κατανομή, τότε θα λέμε ότι τυχαία μεταβλητή S ακολουθεί τη **σύνθετη γεωμετρική** κατανομή (compound geometric distribution).

Στο παραπάνω μοντέλο συλλογικού κινδύνου, είναι σημαντικό να αντιληφθούμε αν η τυχαία μεταβλητή S είναι διακριτή, συνεχής ή μικτού τύπου. Η τυχαία μεταβλητή N, είναι πάντοτε μια μη-αρνητική ακέραια (διακριτή) τυχαία μεταβλητή, με συνάρτηση πιθανότητας $p_n = p(n) = P(N = n), \quad n = 0,1, \ldots .$

Έτσι, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με τη X, για τη τυχαία μεταβλητή S:

I. αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε η S είναι και αυτή διακριτή τυχαία μεταβλητή, επειδή σ' αυτή την περίπτωση η S είναι άθροισμα διακριτών τυχαίων μεταβλητών

II. αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η S μπορεί να είναι είτε μια συνεχής είτε μια μικτού τύπου τυχαία μεταβλητή, ανάλογα με την τιμή της πιθανότητας $p_0 = P(N = 0)$.

- αν $P(N = 0) = 0$, τότε προφανώς η τυχαία μεταβλητή S είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, ως άθροισμα συνεχών τυχαίων μεταβλητών (η S θα είναι ίση είτε με X_1 αν $N = 1$, είτε με $X_1 + X_2$ αν $N = 2$, είτε με $X_1 + X_2 + X_3$ αν $N = 3$, κ.ο.κ.
- αν είναι $P(N = 0) > 0$, τότε η τυχαία μεταβλητή S είναι μικτού τύπου. Η τυχαία μεταβλητή S έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν, με $P(S = 0) = P(N = 0) = p_0$ και είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$. Άρα, για $N = 0$ είναι $S = 0$, για $N = 1$ είναι $S = X_1$, για $N = 2$ είναι $S = X_1 + X_2$, για $N = 3$ είναι $S = X_1 + X_2 + X_3$, κ.ο.κ.

Μια υπόθεση που θα κάνουμε συχνά στη συνέχεια, είναι ότι τα ύψη των ατομικών ζημιών περιγράφονται από διακριτές τυχαίες μεταβλητές, με αποτέλεσμα και η S να είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Φυσικά, τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν σε αυτή την περίπτωση, μπορούν να εφαρμοστούν και σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές για το ύψος των ατομικών ζημιών, αφού πρώτα αυτές διακριτοποιηθούν. Για την τυχαία μεταβλητή S, είναι γνωστά σε αυτή την περίπτωση, τα ακόλουθα βασικά αποτελέσματα:

$$E(S) = E(N)E(X),$$

$$E(S^2) = E(N^2)E^2(X) + E(N)Var(X),$$

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X),$$

$$E(S^3) = E(N^3)E^3(X) + 3E(N^2)E(X)Var(X) + E(N)E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right],$$

$$E\left[\left(S - E(S)\right)^3\right] = E[\left(N - E(N)\right)^3]E^3(X) + E[\left(X - E(X)\right)^3]E(N)$$
$$+3Var(N)E(X)Var(X),$$

$$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(x)\,, \quad x \geq 0,$$

$$\bar{G}(x) = P(S > x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \bar{F}^{*n}(x)\,, \quad x \geq 0,$$

$$g(x) = P(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x)\,, \quad x \geq 0,$$

$$g(0) = P(S = 0) = P_N\big(f(0)\big),$$

$$P_S(t) = P_N\big(P_X(t)\big),$$

$$P_S'(t) = P_X'(t)\, P_N'\big(P_X(t)\big),$$

$$M_S(t) = M_N\big(logM_X(t)\big)$$

$$M_S(t) = P_N\big(M_X(t)\big).$$

Αν τα ύψη των ατομικών ζημιών περιγράφονται από συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, τότε

I. αν $p_0 = P(N = 0) = 0$, τότε

$$g(x) = f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)\,, \quad x \geq 0,$$

II. αν $p_0 = P(N = 0) > 0$, τότε

$$g(x) = f_S(x) = \begin{cases} p_0, & \text{αν } x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)\,, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Προφανώς, και στη συνεχή περίπτωση, ισχύουν οι σχέσεις $M_S(t) = M_N\big(logM_X(t)\big)$ και $M_S(t) = P_N\big(M_X(t)\big)$.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται γενικοί τύποι της ροπογεννήτριας συνάρτησης και της πιθανογεννήτριας συνάρτησης (όπου έχει νόημα), της τυχαίας μεταβλητής S για τις πλέον χρησιμοποιούμενες κατανομές για τη μοντελοποίηση της συχνότητας εμφάνισης των κινδύνων N και για οποιαδήποτε κατανομή του μεγέθους ατομικής απαίτησης X.

Πίνακας 1.1. Γενικοί τύποι

Κατανομή της N	$\boldsymbol{M_S(t)}$	$\boldsymbol{P_S(t)}$
Bernoulli (p)	$1-p+pM_X(t)$	$1-p+pP_X(t)$
B(m,p)	$\left(1-p+pM_X(t)\right)^m$	$\left(1-p+pP_X(t)\right)^m$
P(λ)	$\exp\{\lambda(M_X(t)-1)\}$	$\exp\{\lambda(P_X(t)-1)\}$
G(p)	$\dfrac{p}{1-(1-p)M_X(t)}$	$\dfrac{p}{1-(1-p)P_X(t)}$
NB(r, p)	$\left(\dfrac{p}{1-(1-p)M_X(t)}\right)^r$	$\left(\dfrac{p}{1-(1-p)P_X(t)}\right)^r$

Είναι φανερό ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S, όταν η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την κατανομή $Bernoulli(\theta)$, είναι η διακριτή μείξη της εκφυλισμένης κατανομής στο σημείο μηδέν και της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X με βάρη μείξης $1-\theta$ και θ αντίστοιχα, $0<\theta<1$.

1.9. Κλάσεις κατανομών

1.9.1. Κλάση κατανομών $\boldsymbol{R(a,b,0)}$

1.9.1.1. Ορισμός

Η κλάση των κατανομών $R(a,b,0)$ (ή αλλιώς κλάση του Panjer), αποτελεί υποσύνολο της κλάσης των κατανομών $\mathcal{P}_{1\underline{0}}$. Οι κατανομές, που ανήκουν στην κλάση των κατανομών $R(a,b,0)$, ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1}, \qquad n=1,2,\ldots$$

Όπου, a και b είναι κατάλληλες σταθερές, και προφανώς $p(n)=0$ για $n<0$. Ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός ως αναδρομικός τύπος του Panjer και μελετήθηκε από τον Panjer (1981).

1.9.1.2. Μέλη της κλάσης $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\mathbf{0})$

✓ **Η κατανομή Poisson**

Τα βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής Poisson, με παράμετρο λ , $\lambda > 0$ (συμβολισμός $P(\lambda)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0,1,\dots$.
- Αναδρομική σχέση: $p_n = \left(\frac{\lambda}{n}\right)p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = e^{-\lambda}$.
- Κλάση: $R(0,\ \lambda,\ 0)$.

✓ **Η διωνυμική κατανομή**

Τα βασικά χαρακτηριστικά της διωνυμικής κατανομής, με παραμέτρους m και p, όπου $m = 1,2,\dots$ και $0 < p < 1$ (συμβολισμός $B(m,p)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = \binom{m}{n} p^n(1-p)^{m-n},\ n = 0,1,\dots,m.$
- Αναδρομική σχέση: $p_n = \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{(m+1)p}{n(1-p)}\right) p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = (1-p)^m$.
- Κλάση: $R(-\frac{p}{1-p},\ \frac{(m+1)p}{1-p},\ 0)$.

✓ **Η αρνητική διωνυμική κατανομή**

Τα χαρακτηριστικά της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, με παραμέτρους r και p, όπου $r > 0$ και $0 < p < 1$ (συμβολισμός $NB(r,p)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = \binom{r+n-1}{n}(1-p)^n p^r,\ n = 0,1,\dots$.
- Αναδρομική σχέση: $p_n = \left((1-p) + \frac{(r-1)(1-p)}{n}\right) p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = p^r$.
- Κλάση: $R(1-p,\ (r-1)(1-p),\ 0)$.

✓ **Η γεωμετρική κατανομή**

Τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής κατανομής, με παράμετρο p, όπου $0 < p < 1$ (συμβολισμός $G(p)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = (1-p)^n p,\ n = 0,1,\dots$.
- Αναδρομική σχέση: $p_n = (1-p)\, p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = p$.
- Κλάση: $R(1-p,\ 0,\ 0)$.

Από τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις, λόγω της ιδιαιτερότητάς της, έχει παραλειφθεί η εκφυλισμένη κατανομή στο σημείο μηδέν, για την οποία έχουμε

- $p_n = \begin{cases} 1 \ , & n = 0 \\ 0 \ , & n > 0 \end{cases}$
- $a = -b$

Οι Sundt και Jewell (1981) έδειξαν, ότι οι παραπάνω τέσσερις κατανομές είναι οι μοναδικές που ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο του Panjer, δηλαδή είναι τα μοναδικά μέλη της οικογένειας $R(a, b, 0)$.

1.9.1.3. Ιδιότητες της κλάσης $\boldsymbol{R(a, b, 0)}$

Αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση $R(a, b, 0)$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της $P_N(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$P_N'(t) = \frac{a+b}{1-at} P_N(t).$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι

$$P_N''(t) = \frac{a(a+b)}{(1-at)^2} P_N(t) + \frac{a+b}{1-at} \ P_N'(t).$$

επομένως

$$E(N) = \ P_N'(1) = \frac{a+b}{1-a}$$

$$Var(N) = P_N''(1) + P_N'(1) - \left(P_N'(1)\right)^2 = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Επομένως, αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση $R(a, b, 0)$, τότε για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $S_N = S$ έχουμε

$$E(S) = \frac{a+b}{1-a} E(X)$$

$$Var(S) = \frac{a+b}{1-a} Var(X) + \frac{a+b}{(1-a)^2} E^2(X).$$

Έτσι, προκύπτουν τα ακόλουθα αναλυτικά αποτελέσματα:

✓ Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim P(\lambda)$, δηλαδή $a = 0$ και $b = \lambda$, τότε

$$P_N'(t) = \lambda P_N(t)$$

$$E(N) = Var(N) = \lambda$$
$$E(S) = \lambda E(X)$$
$$Var(S) = \lambda E(X^2)$$

- ✓ Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim B(m, p)$, δηλαδή $a = -\frac{p}{q}$ και $b = \frac{(m+1)p}{q}$, τότε

$$P_N'(t) = \frac{mp}{q + pt} P_N(t)$$
$$E(N) = mp, \quad Var(N) = mpq$$
$$E(S) = mpE(Y)$$
$$Var(S) = mpVar(X) + mpqE^2(X) = mpE(X^2) - mp^2E^2(X).$$

- ✓ Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim NB(r, p)$, δηλαδή $a = q$ και $b = (r-1)q$, τότε

$$P_N'(t) = \frac{rq}{1 - qt} P_N(t)$$
$$E(N) = \frac{rq}{p}, \quad Var(N) = \frac{rq}{p^2},$$
$$E(S) = \frac{rq}{p} E(X),$$
$$Var(S) = \frac{rq}{p} Var(X) + \frac{rq}{p^2} E^2(Y) = \frac{rq}{p} E(X^2) + \frac{rq^2}{p^2} E^2(X).$$

1.9.2. Κλάση κατανομών $\boldsymbol{R(a, b, 1)}$

1.9.2.1. Ορισμός

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή N, με $R_N = \{0,1,2, \dots\}$, ανήκει στην κλάση κατανομών $R(a, b, 1)$, αν η συνάρτηση πιθανότητάς $p_n = \Pr(N = n)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \qquad n = 2,3, \dots$$

Ο παραπάνω τύπος δόθηκε για πρώτη φορά από τους Sundt & Jewell (1981).

1.9.2.2. Μέλη της κλάσης $\boldsymbol{R(a, b, 1)}$

Από τους ορισμούς των δύο κλάσεων κατανομών $R(a, b, 0)$ και $R(a, b, 1)$, παρατηρούμε ότι τα μέλη των οικογενειών, των κατανομών αυτών, έχουν συναρτήσεις πιθανότητας που ικανοποιούν την ίδια αναδρομική σχέση. Όμως, για την κλάση $R(a, b, 0)$ η αναδρομική σχέση ικανοποιείται για $n = 1,2,3, \dots$, ενώ για την κλάση $R(a, b, 1)$ η αναδρομική σχέση ικανοποιείται για $n = 2,3,4, \dots$. Συνεπώς, οι παράμετροι a και b της κλάσης κατανομών $R(a, b, 1)$ δεν καθορίζουν πλήρως την κατανομή της N, αφού τώρα η πιθανότητα p_0 μπορεί να οριστεί ελεύθερα. Επίσης, η κλάση κατανομών $R(a, b, 1)$ περιέχει ως μέλη της όλες τις κατανομές της κλάσης $R(a, b, 0)$, δηλαδή περιέχει ως μέλη της τις κατανομές

- $Poisson$,
- $Διωνυμική$,
- $Αρνητική\ Διωνυμική$,
- $Γεωμετρική$.

Επιπλέον, περιέχει ως μέλη της όλες τις zero-truncated και όλες τις zero-modified κατανομές, που αντιστοιχούν στην κλάση κατανομών $R(a, b, 0)$. Άρα, η κλάση κατανομών $R(a, b, 1)$ περιέχει ως μέλη της και τις ακόλουθες κατανομές:

- $Zero - truncated\ Διωνυμική$,
- $Zero\ - truncated\ Poisson$,
- $Zero\ - truncated\ Αρνητική\ Διωνυμική$,
- $Zero\ - truncated\ Γεωμετρική$.
- $Zero\ - modified\ Διωνυμική$,
- $Zero\ - modified\ Poisson$,
- $Zero\ - modified\ Αρνητική\ Διωνυμική$,
- $Zero - modified\ Γεωμετρική$.

Σημειώνουμε, ότι για μια διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_k = P(X = k),\ \ k = 0, 1, 2, \dots.$$

η αντίστοιχη zero-truncated κατανομή (κατανομή αποκομμένη στο 0), $X^{(T)}$, έχει συνάρτηση πιθανότητας που ικανοποιεί τη σχέση

$$p_k^{(T)} = P\left(X^{(T)} = k\right) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{1}{1 - p_0} p_k, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ενώ, η αντίστοιχη zero-modified κατανομή (κατανομή τροποποιημένη στο 0), $X^{(M)}$, έχει συνάρτηση πιθανότητας, που ικανοποιεί τη σχέση

$$p_k^{(M)} = P\left(X^{(M)} = k\right) = \begin{cases} p_0^{(M)}, & k = 0 \\ \dfrac{1 - p_0^{(M)}}{1 - p_0} p_k = (1 - p_0^{(M)}) p_k^{(T)}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ειδικότερα για την αποκομμένη στο μηδέν αρνητική διωνυμική κατανομή και την τροποποιημένη στο μηδέν αρνητική διωνυμική κατανομή, με την επέκταση του παραμετρικού χώρου της παραμέτρου r από $r > 0$ σε $r > -1$, χρησιμοποιείται ο όρος εκτεταμένη αρνητική διωνυμική κατανομή και τροποποιημένη στο μηδέν εκτεταμένη αρνητική διωνυμική κατανομή.

Αν $P(t)$, $P^{(T)}(t)$ και $P^{(M)}(t)$ είναι η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X, $X^{(T)}$ και $X^{(M)}$, αντίστοιχα, τότε

$$P^{(T)}(t) = \frac{P(t) - p_0}{1 - p_0}$$

και

$$P^{(M)}(t) = \left(1 - \frac{1 - p_0^{(M)}}{1 - p_0}\right) + \frac{1 - p_0^{(M)}}{1 - p_0} P(t).$$

Ακολουθεί ο συνοπτικός πίνακας με τα μέλη της κλάσης $R(a, b, 1)$.

Πίνακας 1.2.:Πίνακας με τις κατανομές που ανήκουν στην κλάση κατανομών $\boldsymbol{R(a,b,1)}$

Κατανομή	$\boldsymbol{p_0}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	*Περιορισμοί*
Geometric $[G(p)]$ $p_n = (1-q)q^n$	$1-q$	$(1-q)q$	q	0	$0 < q < 1$
ZT Geometric	0	$1-q$	q	0	$0 < q < 1$
ZM Geometric	p_0^M	$(1-p_0^M)(1-q)$	q	0	$0 < q < 1$
Negative binomial $[Nb(r,p)]$ $p_n = \binom{n+r-1}{n}$ $\times(1-q)^r q^n$	$(1-q)^r$	$rq(1-q)^r$	q	$(r-1)q$	$r > 0$, $0 < q < 1$

ZT Negative binomial or ETNB	0	$\frac{rq(1-q)^r}{1-(1-q)^r}$	q	$(r-1)q$	$r>-1,$ $0<q<1$
ZM Negative binomial or ZM ETNB	p_0^M	$(1-p_0^M)$ $\frac{rq(1-q)^r}{1-(1-q)^r}$	q	$(r-1)q$	$r>-1,$ $0<q<1$
Poisson $[P(\lambda)]$ $p_n=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	0	λ	$\lambda>0$
ZT Poisson	0	$\frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}$	0	λ	$\lambda>0$
ZM Poisson	p_0^M	$(1-p_0^M)\frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}$	0	λ	$\lambda>0$
Binomial$[B(m,p)]$ $p_n=\binom{m}{n}(1-q)^n q^{m-n}$	q^m	$m(1-q)q^{m-1}$	$-\frac{(1-q)}{q}$	$\frac{(m+1)(1-q)}{q}$	$0<q<1$
ZT Binomial	0	$\frac{m(1-q)q^{m-1}}{1-q^m}$	$-\frac{(1-q)}{q}$	$\frac{(m+1)(1-q)}{q}$	$0<q<1$
ZM Binomial	p_0^M	$(1-p_0^M)\times$ $\times\frac{m(1-q)q^{m-1}}{1-q^m}$	$-\frac{(1-q)}{q}$	$\frac{(m+1)(1-q)}{q}$	$0<q<1$
Logarithmic [LS(q)] $p_n=-\frac{q^n}{n\ln(1-q)}$	0	$-\frac{q}{\ln(1-q)}$	q	$-q$	$0<q<1$
ZM Logarithmic	p_0^M	$-(1-p_0^M)\frac{q}{\ln(1-q)}$	q	$-q$	$0<q<1$

1.9.2.3. Ιδιότητες της κλάσης $\boldsymbol{R(a,b,1)}$

Αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση $R(a,b,1)$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της $P_N(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$P_N'(t) = \frac{(a+b)P_N(t) + p_1 - (a+b)p_0}{1-at}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$E(N) = P_N'(1) = \frac{(a+b)(1-p_0)+p_1}{1-a}$$

και

$$Var(N) = P_N''(1) + P_N'(1) - \left(P_N'(1)\right)^2 = \frac{[1-p_1+(a+b)p_0][a+b+p_1-(a+b)p_0]}{(1-a)^2}.$$

Επομένως, αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση $R(a,b,1)$ τότε για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $S_N = S$, έχουμε

$$E(S) = \frac{(a+b)(1-p_0)+p_1}{1-a}E(X)$$

$$\begin{aligned} Var(S) = {} & \frac{(a+b)(1-p_0)+p_1}{1-a}Var(X) \\ & + \frac{[1-p_1+(a+b)p_0][a+b+p_1-(a+b)p_0]}{(1-a)^2}E^2(X). \end{aligned}$$

1.9.3. Κλάση κατανομών $\boldsymbol{Panjer(a,b;k)}$

1.9.3.1. Ορισμός

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή N, με $R_N = \{0,1,2,\dots\}$, ανήκει στην κλάση κατανομών $Panjer(a,b;k)$, αν $p_n = \Pr(N=n) = 0$ για $n \le k-1$ και

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1}, \qquad n = k+1, k+2, \dots$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$p_{n+1} = p(n+1) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right)p_n, \qquad n = k, k+1, \dots$$

Ο παραπάνω τύπος δόθηκε για πρώτη φορά από τους Hess et al. (2002).

Παρατηρούμε ότι η κλάση κατανομών $Panjer(a,b;0)$, ανάγεται στην κλάση κατανομών $R(a,b,0)$, ωστόσο η κλάση κατανομών $Panjer(a,b;1)$ δεν ανάγεται στην κλάση κατανομών $R(a,b,1)$.

1.9.3.2. Ιδιότητες και βασικά μέλη της κλάσης $\boldsymbol{Panjer(a,b;k)}$

Αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση κατανομών $Panjer(a,b;k)$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της $P_N(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(1-at)\,P_N^{(l)}(t)=(la+b)\,P_N^{(l-1)}(t)+p_k\binom{k}{l}l!\,t^{k-l},\quad l\geq 1$$

με $t\in[0,1)$ και αρχικές συνθήκες $P_N^{(j)}(0)=0$ για $j\leq k-1$.

Για $l=k+1$, προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$(1-at)\,P_N^{(k+1)}(t)=((k+1)a+b)\,P_N^{(k)}(t).$$

Βασικές κατανομές που ανήκουν στην κλάση κατανομών $Panjer(a,b;k)$ είναι οι ακόλουθες:

- Η Διωνυμική κατανομή $B(m,p)$
- Η κατανομή Poisson $P(a)$
- Η αρνητική Διωνυμική κατανομή $NB(r,p)$
- Η Λογαριθμική κατανομή $LS(q)$
- Η εκτεταμένη αρνητική Διωνυμική κατανομή $ENB(m,r,p)$
- Η εκτεταμένη λογαριθμική κατανομή $ELS(m,q)$

Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής $ENB(m,r,q)$, όπου $m\in\{1,2,\dots.\}$ και $r\in(-m,-m+1)$, δίνεται από τον τύπο

$$p_n=\frac{\binom{r+n-1}{n}(1-p)^n}{p^{-r}-\sum_{j=0}^{m-1}\binom{r+j-1}{j}(1-q)^j},\quad n=m,m+1,\dots.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής $ELS(m,q)$ δίνεται από τον τύπο

$$p_n=\frac{\binom{n}{m}^{-1}q^n}{\sum_{j=m}^{\infty}\binom{j}{m}^{-1}q^l},\quad n=m,m+1,\dots.$$

Ενδεικτικός είναι ο ακόλουθος πίνακας.

Πίνακας 1.3.: Συγκεντρωτικός πίνακας με τα βασικά μέλη της κλάσης $Panjer(a,b;k)$

Κατανομή	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{P_N(t)}$
B(m,p) $p_n = \binom{m}{n}(1-q)^n q^{m-n}$	$-\frac{p}{q}$	$\frac{(m+1)p}{q}$	0	$(q+pt)^m$
P(λ) $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$	0	a	0	$e^{-\lambda(1-t)}$
NB(r,p) $p_n = \binom{n+r-1}{n}(1-q)^r q^n$	q	$(r-1)q$	0	$\left(\frac{1-qt}{1-q}\right)^{-r}$
LS(q) $p_n = -\frac{q^n}{nln(1-q)}$	q	$-q$	1	$\frac{\log(1-qt)}{\log(1-q)}$
ENB(m,r,p)	q	$(r-1)q$	m	$\frac{(1-qt)^{-r} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{r+j-1}{j}(qt)^j}{(1-p)^{-r} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{r+j-1}{j}q^j}$
ELS(m,q)	q	$-mq$	m	$\frac{\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}^{-1}(qt)^n}{\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}^{-1}q^n}$

Για περισσότερες ιδιότητες της κλάσης κατανομών $Panjer(a,b;k)$ ο αναγνώστης παραπέμπεται στα αναφέροντα από τους Hess et al. (2002).

1.9.4. Κλάση κατανομών $\boldsymbol{R_k(a,b)}$

1.9.4.1. Ορισμός

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή N, με $R_N = \{0,1,2,\dots\}$, ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, αν η συνάρτηση πιθανότητάς $p_n = Pr(N=n)$ με $p_n = 0$ για $n<0$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1,2, \dots$$

για κάποιο ακέραιο αριθμό k και παραμέτρους a_i και b_i $(i = 1, 2, \dots, k)$.

1.9.4.2. Ιδιότητες και βασικά μέλη της κλάσης $\boldsymbol{R_k}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Έστω N μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή που ανήκει στην κλάση $R_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ και $p_n = Pr(N = n), n = 0,1,2, \dots$. Αν

$$\psi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

τότε

$$\psi(s) = \sum_{i=1}^{k} \left[a_i s^i \psi'(s) + (i a_i + b_i) s^{i-1} \psi(s)\right]$$

και

$$\rho(s) = \frac{d}{ds} ln\psi(s) = \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (i a_i + b_i) s^{i-1}}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i \, s^i}.$$

Επομένως, μια κατανομή μπορεί να ανήκει στην κλάση $R_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, αν και μόνο αν η παράγωγος του φυσικού λογαρίθμου της πιθανογεννήτριας συνάρτησής της μπορεί να εκφραστεί ως ένας λόγος μεταξύ ενός πολυωνύμου βαθμού το πολύ $k - 1$ και ενός πολυωνύμου βαθμού το πολύ k, με μη μηδενικό σταθερό όρο.

Αφού

$$\rho(1) = E(N)$$

$$\rho'(1) = Var(N) - E(N)$$

παίρνουμε

$$EN = \frac{\sum_{i=1}^{k} (i a_i + b_i)}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i}$$

και

$$Var(N) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(ia_i + b_i)}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i} + \frac{\sum_{i=1}^{k}(ia_i + b_i)\sum_{j=1}^{k} ja_j}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\ \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i[(i + EN)a_i + b_i]}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια κατανομή $\{p_n\}_{n=0}^{k}$ στο διάστημα $\{0,1,\dots,k\}$ με θετική πιθανότητα στο μηδέν ανήκει στην κλάση $R_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ με $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k)$ και $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_k)$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$a_i = -\frac{p_i}{p_0}, \quad b_i = -2i\frac{p_i}{p_0}, \quad i = 1,\dots,k.$$

Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνέλιξη, μιας κατανομής που ανήκει στην κλάση R_k και μιας που ανήκει στην κλάση R_l, αποτελεί μια κατανομή που ανήκει στην κλάση R_{k+l}.

Ακόμη, η συνέλιξη των κατανομών $R_k[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}^{(j)}]$, με

$$\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k), \quad \boldsymbol{b} = (b_1^{(j)},\dots,b_k^{(j)}) \text{ για } j = 1,2,\dots,m$$

είναι κατανομή που ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta}]$, όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_k)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\beta_i = (m-1)ia_i + \sum_{j=1}^{m} b_i^{(j)}, \quad i = 1,2,\dots,k.$$

Ως πόρισμα του παραπάνω αποτελέσματος λαμβάνουμε ότι, η *m*-οστή συνέλιξη της κλάσης κατανομών $R_k[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, είναι κατανομή που ανήκει στην κλάση $R_k[\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta}]$, όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_k)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\beta_i = (m-1)ia_i + mb_i, \quad i = 1,2,\dots,k.$$

Επίσης, η *m*-οστή συνέλιξη μιας διακριτής κατανομής $\{p_n\}_{n=0}^{k}$ με πεπερασμένο σύνολο τιμών $\{0,1,\dots,k\}$ και με θετική πιθανότητα στο μηδέν, ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{a},\boldsymbol{\beta}]$ με $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_k)$ και $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_k)$ που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$a_i = -\frac{p_i}{p_0}, \qquad b_i = (m+1)i\frac{p_i}{p_0}, \qquad i = 1,2,\dots,k.$$

Περισσότερα αποτελέσματα για την κλάση κατανομών $R_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, δίνονται στο άρθρο του Sundt (1992).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΥΘΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

2.1. Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 1, ορίστηκε η σύνθετη κατανομή

$$S_N = S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N, & N = 1,2, \ldots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

(οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N) όπου:

– η τυχαία μεταβλητή X_i, παριστάνει το ύψος της i ατομικής ζημιάς (δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές) με συνάρτηση πιθανότητας / πυκνότητας f

– η τυχαία μεταβλητή N, παριστάνει το πλήθος των ζημιών (κινδύνων) ή και απαιτήσεων με συνάρτηση πιθανότητας p

– η τυχαία μεταβλητή S, παριστάνει το ύψος της συνολικής ζημιάς με συνάρτηση πιθανότητας / πυκνότητας g.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα επιδείξουμε άμεσους τρόπους υπολογισμού της συνάρτησης πιθανότητας/πυκνότητας $g(x)$ της κατανομής της S και εν συνεχεία, στο επόμενο κεφάλαιο, θα δώσουμε αναδρομικούς τύπους υπολογισμού της.

2.2. Ευθύς υπολογισμός της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής της S, ισχύει ο γενικός τύπος

$$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x \geq 0.$$

Στην περίπτωση που τα ύψη των ατομικών ζημιών περιγράφονται από διακριτές τυχαίες μεταβλητές, για τη συνάρτηση πιθανότητας της S ισχύει ο γενικός τύπος:

$$g(x) = P(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x \geq 0,$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που τα ύψη των ατομικών ζημιών περιγράφονται από συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $p_0 = P(N = 0) = 0$, τότε για τη συνάρτηση πυκνότητας της S ισχύει ο γενικός τύπος

$$g(x) = f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)\,, \quad x \geq 0.$$

- Αν $p_0 = P(N = 0) > 0$, τότε

$$g(x) = f_S(x) = \begin{cases} p_0, & \text{αν } x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x)\,, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ανωτέρω δυο περιπτώσεις, εξασφαλίζεται μια γενική μέθοδος υπολογισμού της κατανομής των συνολικών ζημιών S. Γίνεται φανερός, ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να συνδυασθούν η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ή η συνάρτηση πιθανότητας) της τυχαίας μεταβλητής X, ώστε να βρεθεί ένας ακριβής τύπος υπολογισμού της $g(x)$ (ή και των $G(x)$, $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$). Η παραπάνω μέθοδος είναι γνωστή και ως βασική μέθοδος υπολογισμού της $g(x)$. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος είναι αρκετά δύσκολη στην πράξη, καθώς συνήθως (για πάρα πολλές κατανομές), είναι αρκετά επίπονος ο υπολογισμός των συνελίξεων f^{*n}, F^{*n} και $\bar{F}^{*n}$. Η συνέλιξη F^{*n} δεν υπάρχει σε κλειστή μορφή για αρκετές κατανομές μεγεθών ατομικών ζημιών που χρησιμοποιούνται στην πράξη, όπως:

- η κατανομή Pareto,
- η λογαριθμοκανονική,
- η λογαριθμογάμμα, κ.ά.

Ακόμη και για κατανομές για τις οποίες η συνέλιξη F^{*n} υπάρχει σε κλειστή μορφή, όπως π.χ. για την εκθετική κατανομή, θα πρέπει στη συνέχεια, σε κάποιες περιπτώσεις, να υπολογισθούν αθροίσματα αριθμήσιμου πλήθους όρων (σειρές). Υπάρχουν λοιπόν οι εξής δύο περιπτώσεις:

1. Αν η κατανομή της τυχαία μεταβλητή N είναι φραγμένη (όπως π.χ., η διωνυμική κατανομή), δηλαδή αν $N \in \{0,1,2,\dots,k\}$ όπου k είναι ένας θετικός πεπερασμένος ακέραιος αριθμός, τότε, επειδή $p_n = 0$ για κάθε $n \geq k+1$, τα άνω όρια των αθροισμάτων δεν θα εκτείνονται μέχρι το ∞ αλλά μέχρι το k , δηλαδή τα αθροίσματα θα έχουν ένα πεπερασμένο πλήθος όρων.
2. Αν η κατανομή της τυχαία μεταβλητή N δεν είναι φραγμένη (όπως, π.χ., η κατανομή Poisson, η γεωμετρική κατανομή, η αρνητική διωνυμική κατανομή, κ.α.), τότε για να εφαρμοστεί η παραπάνω μέθοδος αρκεί να υπολογισθεί ένα επαρκές πεπερασμένο πλήθος όρων, θέτοντας κάποιο κριτήριο.

Υπάρχει μια απλή συνδυαστική μέθοδος υπολογισμού, της συνάρτησης πιθανότητας $g(x) = \Pr(S = x)$ για $x = 0,1,2,\dots$, όταν η X είναι μια θετική ακέραια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή όταν $X \in \{1,2,3,\dots\}$, που δεν απαιτεί τον υπολογισμό συνελίξεων. Για παράδειγμα,

- $g(0) = p_0$
- $g(1) = Pr(S = 1, N = 1) = Pr(X_1 = 1, N = 1) = Pr(X_1 = 1)\, Pr(N = 1) = p_1 f(1)$,
- $g(2) = Pr(S = 2, N = 2) + Pr(S = 2, N = 1) = Pr(X_1 + X_2 = 2, N = 2) + Pr(X_1 = 2, N = 1) = Pr(X_1 = 1)\, Pr(X_2 = 1)\, Pr(N = 2) + Pr(X_1 = 2)\, Pr(N = 1) = p_2 f^2(1) + p_1 f(2)$,
- $g(3) = Pr(S = 3, N = 3) + Pr(S = 3, N = 2) + Pr(S = 3, N = 1) = Pr(X_1 + X_2 + X_3 = 3, N = 3) + Pr(X_1 + X_2 = 3, N = 2) + Pr(X_1 = 3, N = 1) = Pr(X_1 = 1)\, Pr(X_2 = 1)\, Pr(X_3 = 1)\, Pr(N = 3) + Pr(X_1 = 1)\, Pr(X_2 = 2)\, Pr(N = 2) + Pr(X_1 = 2)\, Pr(X_1 = 1)\, Pr(N = 2) + Pr(X_1 = 3)\, Pr(N = 1) = p_3 f^3(1) + 2p_2 f(1) f(2) + p_1 f(3)$,   κ.ο.κ.

Παραδείγματα 2.1

Παράδειγμα 1: Η βασική μέθοδος

Για ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων, μια ασφαλιστική εταιρεία αναμένει να εμφανισθούν 0.9 απαιτήσεις σ’ ένα έτος. Έστω ότι γνωρίζει πως οι απαιτήσεις εμφανίζονται σύμφωνα με το μοντέλο της διαδικασίας Poisson. Για κάθε απαίτηση, υπάρχει:

- 45% πιθανότητα ότι μια ζημιά θα είναι ίση 1000 ευρώ,
- 35% πιθανότητα ότι μια ζημιά θα είναι ίση με 2000 ευρώ
- 10% πιθανότητα ότι μια ζημιά θα είναι ίση με 3000 ευρώ.

Να υπολογισθεί η g(x)=Pr(S=x) για x=0,1,2,3,4,5,6 (σε χιλιάδες ευρώ) όπου S, είναι οι συνολικές ζημιές του χαρτοφυλακίου, θεωρώντας ότι το πλήθος και το ύψος των απαιτήσεων είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.

Επίδειξη της μεθόδου

Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές:

-$N =$ το πλήθος απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου σ’ ένα έτος, και

-$X =$ το ύψος της ατομικής απαίτησης σε χιλιάδες ευρώ.

Τότε, είναι $N \sim P(\lambda)$ με $E(N) = 0{,}9$, οπότε $\lambda = 0{,}9$. Επιπλέον, η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = Pr(X = x)$ της τ.μ. X, είναι

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}55, & x = 1 \\ 0{,}35, & x = 2 \\ 0{,}10, & x = 3 \end{cases}$$

Οι συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου, είναι

$$S_N = S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N, & N = 1{,}2, \ldots \\ \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

με $S \sim CP(\lambda, f)$ (αν στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου, η τ.μ. N έχει την κατανομή Poisson και η τ.μ. X έχει κατανομή f τότε η τ.μ. S ακολουθεί την σύνθετη $Poisson$ κατανομή που συμβολίζεται με $CP(\lambda, f)$).

Θα υπολογίσουμε την $g(x)$ μέσω του βασικού τύπου

$$g(x) = P(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x)\,, \quad x \geq 0,$$

Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε

$$g(x) = \begin{cases} e^{-0,9}, & x = 0 \\ e^{-0,9} \sum_{n=1}^{x} \frac{(0,9)^n}{n!} f^{*n}(x), & x = 1,2,3, \dots . \end{cases}$$

και η $n-$οστή συνέλιξη f^{*n} της συνάρτησης πιθανότητας f της τ.μ. X, θα υπολογισθεί αναδρομικά, μέσω της σχέσης

$$f^{*n}(x) = \sum_{z=0}^{x} f^{*(n-1)}(x - z) f(z), \quad n = 1,2,3, \dots$$

όπου $f^{*1}(x) = f(x)$ και $f^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$

Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε τις $g(1), g(2), \dots, g(6)$ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις $f^{*n}(x)$για κάθε $n \leq 6$ και $x \leq 6$. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

y	$f^{*0}(y)$	$f^{*1}(y)$	$f^{*2}(y)$	$f^{*3}(y)$	$f^{*4}(y)$	$f^{*5}(y)$	$f^{*6}(y)$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0.375	0	0	0	0	0
2	0	0.375	0.3025	0	0	0	0
3	0	0.25	0.3850	0.166375	0	0	0
4	0	0	0.2325	0.317625	0.0915062	0	0
5	0	0	0.0700	0.292875	0.2329250	0.0503284	0
6	0	0	0.0100	0.158375	0.2888875	0.1601359	0.0276806

Επίσης, για $p_n = e^{-0,9}\frac{(0,9)^n}{n!}$, έχουμε

n	0	1	2	3	4	5	6
p_n	0.406570	0.365913	0.164661	0.049398	0.011115	0.002001	0.000300

Συνεπώς

- $g(0) = e^{-9} = 0.406570$
- $g(1) = p_1 f^{*1}(1) = 0.201252$
- $g(2) = p_1 f^{*1}(2) + p_2 f^{*2}(2) = 0.177879$
- $g(3) = p_1 f^{*1}(3) + p_2 f^{*2}(3) + p_3 f^{*3}(3) = 0.108204$
- $g(4) = p_1 f^{*1}(4) + p_2 f^{*2}(4) + p_3 f^{*3}(4) + p_4 f^{*4}(4) = p_2 f^{*2}(4) + p_3 f^{*3}(4) + p_4 f^{*4}(4) = 0.054991$
- $g(5) = p_1 f^{*1}(5) + p_2 f^{*2}(5) + p_3 f^{*3}(5) + p_4 f^{*4}(5) + p_5 f^{*5}(5) = p_2 f^{*2}(5) + p_3 f^{*3}(5) + p_4 f^{*4}(5) + p_5 f^{*5}(5) = 0.028683$
- $g(6) = p_1 f^{*1}(6) + p_2 f^{*2}(6) + p_3 f^{*3}(6) + p_4 f^{*4}(6) + p_5 f^{*5}(6) + p_6 f^{*6}(6) = p_2 f^{*2}(6) + p_3 f^{*3}(6) + p_4 f^{*4}(6) + p_5 f^{*5}(6) + p_6 f^{*6}(6) = 0.013010$

Ένα παρόμοιο παράδειγμα δίνεται από τους Bowers et. al (1997), σελ. 381-382. Στο Παράρτημα δίνεται κώδικας του R για τον υπολογισμό όλων των αριθμητικών υπολογισμών του παραδείγματος.

Παράδειγμα 2: Η εναλλακτική μέθοδος για σύνθετες κατανομές Poisson

Η εναλλακτική μέθοδος κάνει χρήση του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1

Έστω η τ.μ. $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ ακολουθεί την σύνθετη κατανομή Poisson $CP(\lambda, f)$, όπου $f(x_i) = Pr(X = x_i) = \pi_i,\ i = 1,2,\ldots,m$. Αν N_i είναι το πλήθος των ζημιών που έχουν όλες μέγεθος ίσο με $x_i,\ i = 1,2,\ldots,m$, τότε ισχύουν τα εξής:

- Οι τ.μ. $N_1, N_2, \ldots, N_m$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και
- $N_i \sim P(\lambda_i)$, όπου $\lambda_i = \lambda \pi_i = \lambda f(x_i)$, για $i = 1,2, \ldots, m$.

Επειδή $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, τότε η S γράφεται πάντοτε στη μορφή

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_m N_m$$

όπου N_i είναι το πλήθος των ζημιών με μέγεθος x_i.

Έτσι, μπορεί να γίνει χρήση της ανωτέρω μορφής της S, για να υπολογιστεί η κατανομή της. Παρατηρούμε ότι η *S* γράφεται ως συνέλιξη, m το πλήθος (πεπερασμένου πλήθους) ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, οπότε μέσω των αντίστοιχων αναδρομικών τύπων για τις συνελίξεις μπορεί να υπολογιστεί εναλλακτικά η κατανομή της S, αντί της βασικής μεθόδου. Τέλος, βρίσκεται η κατανομή της διακριτής τ.μ. $x_i N_i$, $i = 1,2, \ldots, m$ λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι $N_i \sim P\big(\lambda f(x_i)\big)$.

Θα γίνει επίδειξη της εναλλακτικής μεθόδου χρησιμοποιώντας το παράδειγμα της επίδειξης της βασικής μεθόδου.

Επίδειξη της μεθόδου

Η τ.μ. *S* γράφεται στην μορφή

$$S = N_1 + 2N_2 + 3N_3$$

όπου οι τ.μ. N_1, N_2, N_3 είναι ανεξάρτητες και $N_i \sim P\big(\lambda f(x_i)\big)$ για $i = 1,2,3$.
Άρα,

$$\lambda_1 = \lambda f(x_1) = (0{,}9)(0{,}55) = 0{,}495$$
$$\lambda_2 = \lambda f(x_2) = (0{,}9)(0{,}35) = 0{,}315$$
$$\lambda_3 = \lambda f(x_3) = (0{,}9)(0{,}1) = 0{,}09.$$

Επομένως,

$N_1 \sim P(0{,}495)$. $N_2 \sim P(0{,}315)$. $N_3 \sim P(0{,}09)$.

Για να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $S \sim CP(\lambda, f)$, επειδή $S = N_1 + 2N_2 + 3N_3$, θα βρεθεί πρώτα η κατανομή της συνέλιξης $N_1 + 2N_2$ και στη συνέχεια η κατανομή της συνέλιξης $(N_1 + 2N_2) + 3N_3$ η οποία αποτελεί και την κατανομή της S. Έχουμε

$$Pr(N_1 = x) = e^{-0{,}495} \frac{(0{,}495)^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2, \dots$$

$$Pr(2N_2 = x) = Pr\left(N_2 = \frac{x}{2}\right) = e^{-0{,}315} \frac{0{,}315^{\frac{x}{2}}}{\left(\frac{x}{2}\right)!}, \ \ x = 0,2,4,6,8, \dots$$

και

$$Pr(3N_3 = x) = Pr\left(N_3 = \frac{x}{3}\right) = e^{-0{,}09} \frac{0{,}09^{\frac{x}{3}}}{\left(\frac{x}{3}\right)!}, \ \ x = 0,3,6,9,12, \dots$$

Η κατανομή της συνέλιξης $N_1 + 2N_2$ είναι:

$$Pr(N_1 + 2N_2 = x)$$
$$= \sum_{y=0}^{x} Pr(2N_2 = y)\, Pr(N_1 = x - y) = \sum_{y=0}^{x} Pr(N_2 = \frac{y}{2})\, Pr(N_1 = x - y)$$

όπου το y είναι πολλαπλάσιο του 2.

Έστω $N^* = N_1 + 2N_2$. Τότε η κατανομή της $S = N_1 + 2N_2 + 3N_3$ ή $S = N^* + 3N_3$ είναι η συνέλιξη των N^* και $3N_3$, δηλαδή

$$g(x) = \Pr(S = x) = \Pr(N^* + 3N_3 = x)$$
$$= \sum_{y=0}^{x} Pr(3N_3 = y)\, Pr(N^* = x - y) = \sum_{y=0}^{x} Pr\left(N_3 = \frac{y}{3}\right) Pr(N^* = x - y)$$

Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω σχέσεις, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας στον οποίο δίνονται αναλυτικά τα αποτελέσματα για τον υπολογισμό της σ.π. $g(x) = Pr(S = x)$ για $x = 0,1, \dots, 6$.

x	$Pr(N_1 = x)$	$Pr(2N_2 = x)$	$Pr(3N_3 = x)$	$Pr(N^* = x)$	$g(x)$
0	0.609571	0.729789	0.913931	0.444858	0.406570
1	0.301738	0	0	0.220205	0.201252
2	0.074680	0.229883	0	0.194631	0.177879
3	0.012322	0	0.082254	0.078357	0.108204
4	0.001525	0.036207	0	0.040351	0.054991
5	0.000151	0	0	0.013868	0.028683

6	0.000012	0.003802	0.003701	0.005381	0.013010

Ένα παρόμοιο παράδειγμα δίνεται από τους Bowers et. al (1997), σελ. 381-382.

Παρατήρηση

Τόσο με τη βασική όσο και με την εναλλακτική μέθοδο, χρειάζεται να υπολογισθούν οι απαραίτητες συνελίξεις. Με την εναλλακτική μέθοδο μειώνεται σημαντικά ο υπολογιστικός χρόνος σε σχέση με την βασικά μέθοδο, και προφανώς είναι πιο ικανοποιητική για μικρές τιμές του m. Η αναδρομική μέθοδος, που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, δεν απαιτεί το υπολογισμό συνελίξεων και είναι αρκετά απλή.

Παράδειγμα 3. Η βασική μέθοδος – Γενικά αποτελέσματα

Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να βγάλουμε γενικούς και απλούς τύπους για την κατανομή της S όταν οι κατανομές της N και της X είναι απλές. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η περίπτωση που η $N \sim G(p)$ και η $X \sim Exp(\lambda)$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

και

$$p_n = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Αφού,

$$P_N(t) = \frac{p}{1 - qt}$$

και

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}}, \qquad t < \lambda$$

από τη βασική σχέση

$$M_S(t) = \frac{p}{1 - q\frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}}} = p + \frac{pq\lambda}{\lambda - t - q\lambda} = p + q\frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda p}}$$

προκύπτει ότι η τυχαία S, αποτελεί μια μεικτή κατανομή που εκφράζεται ως μια (διακριτή) μείξη δύο κατανομών, της εκφυλισμένης στο σημείο 0 κατανομής και της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $p\lambda$ με «βάρη» p και q, αντίστοιχα. Έτσι,

$$g(x) = \begin{cases} p, & x = 0 \\ q(p\lambda)e^{-(p\lambda)x}, & x > 0. \end{cases}$$

Μια εναλλακτική εξαγωγή της παραπάνω σχέσης μπορεί να προκύψει με πρώτες αρχές. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το γνωστό αποτέλεσμα ότι το άθροισμα n ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών κατανομών με παράμετρο λ ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους n και λ. Έτσι,

$$f^{*n}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}\lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda \chi}}{(n-1)!}.$$

Επομένως, με $N \sim G(p)$ και $X \sim Erlang(n, \lambda)$ προκύπτει ότι:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^n \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{\lambda x}}{(n-1)!} = qp\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= qp\lambda e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^k}{(k)!}.$$

Στη συνέχεια, θέτοντας $\lambda = e^{q\lambda x}$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}, \quad \lambda > 0$$

παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q\lambda x)^k}{(k)!} = e^{q\lambda x}$$

οπότε,

$$g(x) = qp\lambda e^{-\lambda x} e^{q\lambda x} = qp\lambda e^{-(1-q)\lambda x} = qp\lambda e^{-p\lambda x}, \qquad x > 0$$

Αξίζει να σημειώσουμε, ότι όταν κατανομή της τ.μ. N δίνεται από τον τύπο

$$p_n = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

τότε,

$$P_N(t) = \frac{pt}{1 - qt}$$

οπότε,

$$M_S(t)=\frac{p\dfrac{\lambda}{\lambda-t}}{1-q\dfrac{\lambda}{\lambda-t}}=\frac{p\lambda}{\lambda-t-q\lambda}=\frac{p\lambda}{\lambda(1-q)-t}=\frac{p\lambda}{p\lambda-t}=\frac{1}{1-\dfrac{t}{p\lambda}}.$$

Επομένως σε αυτή την περίπτωση, η τυχαία μεταβλητή S είναι συνεχής και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $p\lambda$.

2.1.1. Συνελίξεις –Αναδρομικοί τύποι

Για τον υπολογισμό συνελίξεων διακριτών κατανομών, πέραν του ακριβούς τύπου υπολογισμού, έχουν δοθεί και αναδρομικοί τύποι. Αυτοί οι τύποι, απλουστεύουν περισσότερο των υπολογισμό των συνελίξεων και ως εκ τούτου και τον υπολογισμό των σύνθετων κατανομών. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα σχετικά αποτελέσματα χωρίς αποδείξεις.

Θεώρημα 2.2

Αν η διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας f ανήκει στην κλάση των κατανομών $\mathcal{P}_{1\underline{0}}$ και $S=X_1+X_2+\cdots+X_n$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας g της S ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=f^{*n}(x)=\frac{1}{f(0)}\sum_{y=1}^{x}\left(\frac{(n+1)y}{x}-1\right)f(y)g(x-y),\qquad x=1,2,\dots.$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0)=f^{*n}(0)=\big(f(0)\big)^n.$$

Παράδειγμα 2.2

Έστω ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με σύνολο τιμών $\{0,1,2,\dots,k\}$, δηλαδή έχει συνάρτηση πιθανότητας f, που δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=\frac{1}{k+1},\quad y=0,1,2,\dots,k.$$

Τότε, από το Θεώρημα 2.2, προκύπτει ότι

$$g(x) = \sum_{y=1}^{k} \left((n+1)\frac{y}{x} - 1 \right) g(x-y), \qquad x = 1,2, \dots$$

και

$$g(0) = (k+1)^{-n}$$

Παράδειγμα 2.3

Έστω ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Bernoulli, με πιθανότητα επιτυχίας p. Τότε,

$$g(x) = \frac{p}{q}\left(\frac{n+1}{x} - 1\right) g(x-1) \; x = 1,2, \dots$$

Ακολούθως δίνουμε δύο ακόμη αποτελέσματα, για τον αναδρομικό υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Θεώρημα 2.3

Αν η διακριτή τυχαία μεταβλητή X, με συνάρτηση πιθανότητας f, ανήκει στην κλάση των κατανομών $\mathcal{P}_1$ και ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη

$$k = \max(x: f(x) > 0) < \infty$$

τότε η συνάρτηση πιθανότητας g, της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = f^{*n}(x) = \frac{1}{f(k)} \sum_{y=1}^{nk-x} \left(\frac{(n+1)y}{nk-x} - 1 \right) f(k-y) g(x+y), \qquad x = 0,1, \dots, nk-1$$

και

$$g(nk) = [f(k)]^n.$$

Θεώρημα 2.4

Αν η διακριτή τυχαία μεταβλητή X, με συνάρτηση πιθανότητας f, ανήκει στην κλάση των κατανομών $\mathcal{P}_{1\underline{l}}$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό l, τότε η συνάρτηση πιθανότητας h της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = f^{*n}(x) = \frac{1}{f(l)} \sum_{y=1}^{x-nl} \left(\frac{(n+1)y}{x-nl} - 1 \right) f(l+y) g(x-y), \quad x = nl+1, nl+2, \dots$$

και

$$f(nl) = [g(l)]^n.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Πρέπει να τονισθεί ότι μέχρι και το 1981 οι Αναλογιστές χρησιμοποιούσαν την ακριβή μέθοδο, για να υπολογίσουν την κατανομή των συνολικών ζημιών $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Το 1981, δημοσιεύτηκε στο διεθνές Αναλογιστικό περιοδικό ASTIN bulletin μια εργασία του καθηγητή Harry Panjer για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας των συνολικών ζημιών, μέσω απλών αναδρομικών σχέσεων, δηλαδή χωρίς να χρειάζεται να υπολογισθούν οι συνελίξεις f^{*n}, όταν η X είναι μια θετική ακέραια τυχαία μεταβλητή και η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N ανήκει σε μια συγκεκριμένη οικογένεια κατανομών που περιλαμβάνει ως μέλη της τις εξής κατανομές:

- την Poisson,
- τη διωνυμική,
- την αρνητική διωνυμική και
- τη γεωμετρική κατανομή.

Έκτοτε, το ενδιαφέρον των ερευνητών που ασχολούνται με την Αναλογιστική Επιστήμη, έχει εστιασθεί σε σημαντικό βαθμό στην εύρεση αναδρομικών σχέσεων για τον υπολογισμό της κατανομής της τυχαίας μεταβλητή S και για άλλες οικογένειες κατανομών της τυχαίας μεταβλητή N, με αρκετές δημοσιεύσεις σε διεθνή αναλογιστικά περιοδικά. Προφανώς, αν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N δεν ανήκει σε οικογένειες κατανομών, για τις οποίες υπάρχουν αναδρομικές σχέσεις ή η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τότε για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών ζημιών θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω μέθοδοι.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, θα γίνει εκτενής αναφορά θεωρημάτων σχετικά με τους αναδρομικούς τύπους υπολογισμού των συνολικών αποζημιώσεων. Συγκεκριμένα, θα παρατεθεί το θεώρημα του Panjer, όπου περιγράφει έναν αναδρομικό τύπο υπολογισμού όταν η N ανήκει σε μια ειδική οικογένεια κατανομών και συγκεκριμένα στην κλάση $R(a, b, 0)$. Η γενίκευση αυτού του θεωρήματος πραγματοποιήθηκε από του Sundt & Jewell, και αφορά στην οικογένεια κατανομών που ανήκουν στην κλάση $R(a, b, 1)$ και παρουσιάζεται ως συνέχεια του θεωρήματος του Panjer. Τέλος, θα παρουσιαστεί η γενίκευση των Sundt & Jewell για την κλάση $R_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Επισημαίνεται πως, για μια πιο ολοκληρωμένη μελέτη των αναδρομικών σχέσεων, ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο *Recursions for Convolutions and Compound Distributions with Insurance Applications* (βλ. Βιβλιογραφία).

3.2 Ο αναδρομικός τύπος του Panjer

Στο ακόλουθο θεώρημα, δίνεται ο αναδρομικός τύπος του Panjer για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας $g(x)$ των συνολικών αποζημιώσεων, στην περίπτωση που το ύψος των αποζημιώσεων περιγράφεται από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, όπως δόθηκε από τον Panjer στο άρθρο του Panjer (1981). Ουσιαστικά, δίνεται αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό της $g(x)$, όταν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση κατανομών $R(a, b, 0)$.

<u>Θεώρημα 3.1</u>

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{1\underline{0}}$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \qquad n = 1,2, \dots$$

για κάποιες σταθερές a και b. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f που ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_1$. Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας g της S ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=\begin{cases} p_0 & x=0, \\ \displaystyle\sum_{y=1}^{x}\left(a+b\frac{y}{x}\right)f(y)g(x-y), & x=1,2,\dots. \end{cases}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 (που θα δοθεί στη συνέχεια) και για αυτό παραλείπεται.

■

Το επόμενο θεώρημα είναι η συνεχής εκδοχή του Θεωρήματος 3.1.

Θεώρημα 3.2

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{\underline{10}}$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n=p(n)=\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1}, \qquad n=1,2,\dots$$

για κάποιες σταθερές a και b. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής και ορισμένη στο διάστημα $(0,\infty)$. Τότε, η S έχει μάζα πιθανότητας p_0 σημείο 0 και στο διάστημα $(0,\infty)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας g, που ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$g(x)=p_1f(x)+\int_0^x\left(a+b\frac{y}{x}\right)f(y)g(x-y)dy\,, \qquad x>0.$$

Απόδειξη

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούν τα τρία κάτωθι αποτελέσματα

$$\int_0^x f(y)f^{*n}(x-y)dy=f^{*(n+1)}(x),\ \ n=1,2,3,\dots \tag{1}$$

$$\int_0^x\frac{yf(y)f^{*n}(x-y)}{f^{*(n+1)}(x)dy}=\frac{x}{n+1}. \quad n=1,2,3,\dots \tag{2}$$

και

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nf^{*n}(x)\,, \qquad x>0. \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3) στην ολοκληρωτική εξίσωση του θεωρήματος προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) g(x-y) dy \\
&= p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x-y) dy \\
&= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) f^{*n}(x-y) dy \\
&= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) f^{*(n+1)}(x) \qquad [\text{από } (1) \text{ και } (2)] \\
&= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} f^{*(n+1)}(x) \\
&= p_1 f(x) + \sum_{n=2}^{\infty} p_n f^{*n}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) \qquad [f^{*1}(x) = f(x)] \\
&= g(x)
\end{aligned}
$$

■

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, θα παρουσιαστούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις, τόσο για συνεχείς όσο και για διακριτές κατανομές.

- <u>**Ειδικές Περιπτώσεις – Συνεχής περίπτωση**</u>

1. Κατανομή Poisson

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, δηλαδή

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \dots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$,ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda} f(x) + \frac{\lambda}{x} \int_0^x y f(y) g(x-y) dy$$

(προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2 για $a = 0, b = \lambda$).

2. Διωνυμική Κατανομή

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim B(m, p)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \qquad n = 0,1, \dots, m$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{p}{1-p}\left[m(1-p)^m f(x) + \int_0^x \left\{(m+1)\frac{y}{x} - 1\right\} f(y) g(x-y) dy\right]$$

(προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2 για $a = -p/(1-p)$, $b = (m + 1)\, p/(1-p)$).

3. Αρνητική διωνυμική Κατανομή

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim NB(r, p)$, $r > 0$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n \ , \qquad n = 0, 1, \dots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = q\left[rp^r f(x) + \int_0^x \left\{1 + (r-1)\frac{y}{x}\right\} f(y) g(x-y) dy\right]$$

(προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2 για $a = q, b = (r-1)q$).

4. Γεωμετρική Κατανομή

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim G(p)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = p(1-p)^n \ , \qquad n = 0, 1, \dots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = p\,[\,(1-p)f(x) + \int_0^x f(y)g(x-y)dy\,]$$

- **<u>Ειδικές Περιπτώσεις – Διακριτή περίπτωση</u>**

1. Κατανομή Poisson

Αν η τυχαία μεταβλητή $N\sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, δηλαδή

$$p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,, \qquad n = 0, 1, \dots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x}\displaystyle\sum_{y=1}^{x} y f(y) g(x-y), & x = 1,2,\dots \\ e^{-\lambda}, & x = 0 \end{cases}$$

(προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1 για $a = 0$, $b = \lambda$).

2. Διωνυμική Κατανομή

Αν η τυχαία μεταβλητή $N\sim B(m,p)$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{m}{n} p^n(1-p)^{m-n}, \qquad n = 0,1,\dots,m$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$,ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{1-p}\displaystyle\sum_{y=1}^{x} \left\{(m+1)\frac{y}{x} - 1\right\} f(y) g(x-y), & x = 1,2,\dots \\ q^m & x = 0. \end{cases}$$

(προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1 για $a = -p/(1-p)$, $b = (m+1)\,p/(1-p)$).

3. Αρνητική διωνυμική Κατανομή

Αν η τυχαία μεταβλητή $N{\sim}NB(r,p), r>0\ ,\ \ 0<p<1\ ,\ \ q=1-p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n \ , \qquad n=0,1,\dots$$

τότε η $g(x)=P(S=x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} q\displaystyle\sum_{y=1}^{x} \left\{(r-1)\frac{y}{x}+1\right\} f(y)g(x-y), & x=1,2,\dots \\ \\ p^r & x=0. \end{cases}$$

(προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1 για $a=q, b=(r-1)q$).

4. Γεωμετρική Κατανομή

Αν η τυχαία μεταβλητή $N{\sim}G(p), 0<p<1\ ,\ \ q=1-p$, δηλαδή

$$p_n = p(1-p)^n \ , \qquad n=0,1,\dots$$

τότε η $g(x)=P(S=x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} q\displaystyle\sum_{y=1}^{x} f(y)g(x-y), & x=1,2,\dots \\ \\ p & x=0. \end{cases}$$

Στο ακόλουθο θεώρημα, δίνεται μια απλή γενίκευση του Θεωρήματος 3.1 έτσι ώστε να καλύψει την περίπτωση που $P(X=0)=f(0)>0$. Ο αναδρομικός τύπος του Θεωρήματος 3.3 είναι και αυτός γνωστός ως αναδρομικός τύπος του Panjer. Αρχικά, δίνουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1

Οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για κάθε $n, x \in N$:

- $f^{*n}(x) = \displaystyle\sum_{y=0}^{x} f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$

- $f^{*n}(x) = \frac{n}{x}\sum_{y=1}^{n} y f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$

Απόδειξη

Για όλα τα j και x τέτοια ώστε $j \in \{1, .., n\}$ και $y \in \{0,1, \dots, x\}$, ισχύει ότι

$$P\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\right\} \cap \{X_j = y\}\right] = P\left[\left\{\sum_{j \neq i=1}^{n} X_i = x - y\right\} \cap \{X_j = y\}\right]$$

$$= P\left[\left\{\sum_{j \neq i=1}^{n} X_i = x - y\right\}\right] P[X_j = y] = f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$$

Επομένως,

$$f^{*n}(x) = P\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} X_\iota = x\right\}\right] = \sum_{y=0}^{x} P\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\right\} \cap \{X_j = y\}\right] = \sum_{y=0}^{x} f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$$

που είναι η πρώτη ταυτότητα.

Επιπλέον,

$$E\left[I_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\}} X_j\right]$$

$$= \sum_{y=0}^{x} E\left[I_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\} \cap \{X_j = y\}} X_j\right]$$

$$= \sum_{y=1}^{x} E\left[I_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\} \cap \{X_j = y\}} y\right]$$

$$= \sum_{y=1}^{x} yP\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\right\} \cap \{X_j = y\}\right] = \sum_{y=1}^{x} y f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$$

για όλα τα $j \in \{1, .., n\}$. Ως εκ τούτου,

$$f^{*n}(x) = P\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\right\}\right] = E\left[I_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\}}\right] = E\left[I_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\}} \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n} X_j\right]$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n} E\left[I_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i = x\}} X_j\right] = \frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n}\sum_{y=1}^{x} y f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$$

$$= \frac{n}{x}\sum_{y=1}^{x} y f^{*(n-1)}(x-y)f(y)$$

■

Θεώρημα 3.3

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{\underline{1}0}$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \qquad n = 1,2,\dots$$

για κάποιες σταθερές a και b. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f, που ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{\underline{1}0}$.Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας g της S ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} P_N(f(0)) & x = 0, \\ \dfrac{1}{1 - af(0)} \displaystyle\sum_{y=1}^{x} \left(a + b\frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y), & x = 1,2,\dots. \end{cases}$$

Εάν $f(0) = 0$, τότε $g(0) = p_0$

Απόδειξη

Για κάποιο $x \in N$, λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} f^{*n}(x) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a\, p_{n-1} f^{*n}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n} p_{n-1} f^{*n}(x) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a\, p_{n-1} \sum_{y=0}^{x} f^{*(n-1)}(x-y)\, f(y) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n} p_{n-1} \; \frac{n}{x} \sum_{y=1}^{x} y f^{*(n-1)}(x-y)\, f(y) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a\, p_{n-1} f^{*(n-1)}(x)\, f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{x} \left(a + b\frac{y}{x}\right) p_{n-1} f^{*(n-1)}(x-y)\, f(y) \\ = af(0) \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x) + \sum_{y=1}^{x} \left(a + b\frac{y}{n}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*(n-1)}(x-y) \right) f(y) \\ = af(0) g(x) + \sum_{y=1}^{x} \left(a + b\frac{y}{x}\right) g(x-y) f(y). \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το ζητούμενο.

■

- **Ειδικές Περιπτώσεις**

Πόρισμα 3.1

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, δηλαδή

$$p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x}\displaystyle\sum_{y=1}^{x} y f(y) g(x-y), & x = 1,2,\dots \\ \\ e^{\lambda[f(0)-1]}, & x = 0 \end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3 για $a = 0$, $b = \lambda$ και το γεγονός ότι $P_N(u) = e^{\lambda[u-1]}$.

■

Πόρισμα 3.2

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim B(m, p)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \quad n = 0,1,\dots,m$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{q - pf(0)}\displaystyle\sum_{y=1}^{x}\left\{(m+1)\frac{y}{x} - 1\right\} f(y) g(x-y), & x = 1,2,\dots \\ \\ \big(q + pf(0)\big)^m & x = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3 για $a = -p/(1-p)$, $b = (m+1)\,p/(1-p)$ και το γεγονός ότι $P_N(u) = (q + pu)^m$.

■

Παρατήρηση

Για $m = 1$, έχουμε την ειδική περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή $N \sim Bernoulli(p)$, $0 < p < 1$, στην οποία αντιστοιχεί $a = -\frac{p}{q}$ και $b = \frac{2q}{p}$. Επομένως, η αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η $g(x)$, όταν η τυχαία μεταβλητή S έχει τη σύνθετη Bernoulli κατανομή, προκύπτει άμεσα από το παραπάνω Πόρισμα 3.2, για $m = 1$.

Πόρισμα 3.3

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim NB(r,p), r > 0$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n \ , \qquad n = 0, 1, \ldots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{q}{1 - qf(0)} \displaystyle\sum_{y=1}^{x} \left\{ (r-1)\frac{y}{x} + 1 \right\} f(y) g(x-y), & x = 1, 2, \ldots \\[2ex] \left(\dfrac{p}{1 - qf(0)} \right)^r & x = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3 για $a = q$, $b = (r-1)q$ και το γεγονός ότι $P_N(u) = \left(\frac{p}{1-qu}\right)^r$.

■

Πόρισμα 3.4

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim G(p)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = p(1-p)^n \ , \qquad n = 0, 1, \dots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{q}{1 - qf(0)} \displaystyle\sum_{y=1}^{x} f(y) g(x-y), & x = 1, 2, \dots \\ \dfrac{p}{1 - qf(0)} & x = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα για $r = 1$. ■

Παρατήρηση

Για $f(0) = 0$ όλα τα παραπάνω πορίσματα ανάγονται σε ειδικές περιπτώσεις, που έδωσε ο Panjer (1981) και παρουσιάστηκαν νωρίτερα.

Θεώρημα 3.4

Έστω ότι η κατανομή p ,της τυχαίας μεταβλητής N, είναι μη εκφυλισμένη και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \qquad n = 1,2, \dots$$

για κάποιες σταθερές a και b. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f που ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{1\underline{0}}$. Τότε

$$E[S^n] = \frac{1}{1-a} \sum_{y=1}^{n} \left\{ \binom{n}{y} \left(a + b\frac{y}{n}\right) \right\} E[S^{n-y}] E[X^y].$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.3, προκύπτει το εξής:

$$\begin{aligned}\left(1-af(0)\right)E[S^n] &= \left(1-af(0)\right)\sum_{m=0}^{\infty} m^x g(m) = \sum_{m=1}^{\infty} m^n\left(1-af(0)\right)g(m)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m^n \sum_{y=1}^{m}\left(a+b\frac{y}{m}\right)g(m-y)f(y)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{m}(am^n+bym^{n-1})g(m-y)f(y)\\ &= \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{m=y}^{\infty}(am^n+bym^{n-1})g(m-y)f(y)\\ &= \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(a(y+l)^n+by(y+l)^{n-1})g(l)f(y),\end{aligned}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned}E[S^n] &= af(0)E[S^n]+\left(1-af(0)\right)E[S^n]\\ &= af(0)\sum_{l=0}^{\infty} l^n g(l)+\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(a(y+l)^n+by(y+l)^{n-1})g(l)f(y)\\ &= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(a(y+l)^n+by(y+l)^{n-1})g(l)f(y)\\ &= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}l^{n-j}y^j+b\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}l^{n-1-j}y^{j+1}\right)g(l)f(y)\\ &= a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}E\left[S^{n-j}\right]E\left[X^j\right]+b\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}E\left[S^{n-1-j}\right]E\left[X^{j+1}\right]\\ &= aE[S^n]+a\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}E\left[S^{n-j}\right]E\left[X^j\right]+b\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}E\left[S^{n-j}\right]E\left[X^j\right]\\ &= aE[S^n]+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(a+b\frac{j}{n}\right)E[S^{n-j}E\left[X^j\right].\end{aligned}$$

Έτσι αποδείχτηκε το ζητούμενο.

■

Πόρισμα 3.5.

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim B(m, p)$ ($m > 0$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$), δηλαδή

$$p_n = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \ , \qquad n = 1,2, \dots$$

τότε οι ροπές της S, ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$E[S^n] = p \sum_{y=1}^{n} \binom{n}{y} \left(\frac{(m+1)y}{n} - 1 \right) E[S^{n-y}] E[X^y]$$

Πόρισμα 3.6.

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim G(p)$ ($0 < p < 1$, $q = 1 - p$), δηλαδή

$$p_n = (1-p)^n p, \qquad n = 1,2, \dots$$

τότε οι ροπές της S, ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$E[S^n] = \frac{q}{p} \sum_{y=1}^{n} \binom{n}{y} E[S^{n-y}] E[X^y].$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ο αναδρομικός τύπος υπολογισμού των ροπών, για τις υπόλοιπες κατανομές.

3.3 Η γενίκευση των Sundt & Jewell (1981)

Οι Sundt και Jewell (1981), θεώρησαν την περίπτωση που η τ.μ. N, με $R_N = \{0,1,2, \dots\}$, ανήκει στην κλάση κατανομών $R(a, b, 1)$, δηλαδή η συνάρτηση πιθανότητας $p_n = \Pr(N = n)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1}, \qquad n = 2,3, \dots$$

Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \qquad n = 2,3,\ldots$$

για κάποιες σταθερές a και b. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f. Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας g της S ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} P_N(f(0)) & x = 0, \\ \dfrac{p_1 - (a+b)p_0}{1 - af(0)} + \dfrac{1}{1 - af(0)} \displaystyle\sum_{y=1}^{x} \left(a + b\frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y), & x = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

<u>Απόδειξη</u>

Στην παράγραφο 1.9.2 παρουσιάστηκαν οι ιδιότητες της κλάσης κατανομών $R(a, b, 1)$. Αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση $R(a, b, 1)$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της $P_N(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$P_N'(t) = \frac{(a+b)P_N(t) + p_1 - (a+b)p_0}{1 - at}.$$

Έτσι

$$P_N'(P_X(t)) = \frac{(a+b)P_N(P_X(t)) + p_1 - (a+b)p_0}{1 - aP_X(t)}.$$

Αφού

$$P_S(t) = P_N(P_X(t))$$

παίρνουμε

$$P_S'(t) = \ P_X'(t) P_N'(P_X(t)).$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$P_S'(t) = \ P_X'(t) \frac{(a+b)P_s(t) + p_1 - (a+b)p_0}{1 - aP_X(t)}$$

ή ισοδύναμα

$$[1 - aP_X(t)]\, P_S'(t) = (a+b)\, P_X'(t) P_s(t) + [p_1 - (a+b)p_0]\, P_X'(t)$$

ή ισοδύναμα

$$P_S'(t) = aP_X(t)\, P_S'(t) + (a+b)\, P_X'(t) P_s(t) + [p_1 - (a+b)p_0]\, P_X'(t)$$

ή ισοδύναμα

$$tP_S'(t) = aP_X(t)[tP_S'(t)] + (a+b)\,[tP_X'(t)]P_s(t) + [p_1 - (a+b)p_0]\,tP_X'(t).$$

Συνεπώς,

$$\sum_{x=1}^{\infty} xg(x)t^x = a\sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=0}^{x-1}(x-y)f(y)g(x-y)\right)t^x + (a + b)\sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y)\right)t^x + [p_1 - (a+b)p_0]\sum_{x=1}^{\infty} xf(x)t^x$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του t^x σε αμφότερα τα μέλη της ανωτέρω σχέσης, προκύπτει ότι για $x = 1,2,\ldots$, ισχύει ότι

$$xg(x) = a\sum_{y=0}^{x-1}(x-y)f(y)g(x-y) + (a+b)\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y) + [p_1 - (a+b)p_0]xf(x).$$

Τελικά, λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $g(x)$ έχουμε

$$xg(x) = axf(0)g(x) + a\sum_{y=1}^{x-1}(x-y)f(y)g(x-y) + (a+b)\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y) + [p_1 - (a+b)p_0]xf(x)$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned}
[1 - af(0)]xg(x) &= a\sum_{y=1}^{x}(x-y)f(y)g(x-y) + (a+b)\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y) + [p_1 - (a+b)p_0]xf(x)\\
&= \sum_{y=1}^{x}[a(x-y) + (a+b)y]\,f(y)g(x-y) + [p_1 - (a+b)p_0]xf(x)\\
&= \sum_{y=1}^{x}(ax+by)f(y)g(x-y) + [p_1 - (a+b)p_0]xf(x)
\end{aligned}$$

που αποτελεί την ζητούμενη αναδρομική σχέση.

■

Στη συνέχεια θα δωθούν εφαρμογές για τις κατανομές που ανήκουν στην κλάση $R(a,b,1)$, και παρουσιάστηκαν στην ενότητα 1.9.2.

Πόρισμα 3.7

Αν η τυχαία μεταβλητή $N\sim NB(r,p), r>0\ ,\ 0<p<1\ ,\ q=1-p$, δηλαδή

$$p_n=\binom{r+n-1}{n}p^r q^n\ ,\qquad n=0,1,\dots$$

τότε η $g(x)=P(S=x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=\frac{\sum_{y=1}^{x}\left(q+(r-1)q\frac{y}{x}\right)f(y)g(x-y)}{1-qf(o)}\qquad x=1,2,3,\dots$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0)=\left(\frac{p}{1-(1-p)f(0)}\right)^r$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a=q, b=(r-1)q$ και για $p_0=p^r$ και $p_1=rqp^r$.

■

Παρατήρηση

Επειδή η κλάση κατανομών $R(a,b,0)$ περιέχεται στην κλάση κατανομών $R(a,b,1)$, έχουμε ότι σε αυτή την περίπτωση $p_1=(a+b)p_0$, οπότε το Θεώρημα 3.5 ανάγεται στο Θεώρημα 3.3. Αυτός είναι ο λόγος που η αναδρομική σχέση του Πορίσματος 3.7, είναι ίδια με αυτή του Πορίσματος 3.3.

Πόρισμα 3.8

Αν η τυχαία μεταβλητή $N\sim ZTNB(r,p)$ $(r>0, 0<p<1, q=1-p)$, δηλαδή

$$p_n = P(N = n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{1}{1-p^r}\dbinom{r+n-1}{n} p^r q^n, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{\left[\frac{rqp^r}{1-p^r}\right] + \sum_{y=1}^{x}\left(q + (r-1)q\frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y)}{1 - qf(o)}, \quad x = 1,2,3, \ldots$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0) = \frac{\left(\frac{p}{1-(1-p)f(0)}\right)^r - p^r}{1-p^r}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a = q, b = (r-1)q$ και για $p_0 = 0$ και $p_1 = \frac{rqp^r}{1-p^r}$.

■

<u>Πόρισμα 3.9</u>

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim ZMNB(r, p)$ ($r > 0$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$), δηλαδή

$$p_n = P(N = n) = \begin{cases} p_0^{(M)}, & n = 0 \\ \dfrac{1-p_0^{(M)}}{1-p^r}\dbinom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{\left[(1-p_0^M) * \frac{rq(1-q)^r}{1-(1-q)^r} - rq * p_0^M\right] f(x) + \sum_{y=1}^{x}\left(q + (r-1)q\frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y)}{1 - qf(o)}$$

για $x = 1,2,3, \ldots$, με

$$g(0) = \left(1 - \frac{1-p_0^{(M)}}{1-p}\right) + \left(\frac{1-p_0^{(M)}}{1-p^r}\right)\left(\frac{p}{1-(1-p)f(0)}\right)^r.$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a = q$, $b = (r-1)q$ και για $p_0 = p_0^{(M)}$ και $p_1 = \left(1 - p_0^{(M)}\right) * \frac{rqp^r}{1-p^r}$.

■

Πόρισμα 3.10

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim LS(q)$ $(0 < p < 1, q = 1-p)$, δηλαδή

$$p_n = -\frac{q^n}{nln(1-q)}, \quad n = 1,2,\ldots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{\left[-\frac{q}{ln(1-q)}\right] f(x) + \sum_{y=1}^{x}\left(q - q\frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y)}{1 - qf(o)}, \qquad x = 1,2,3, \ldots.$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0) = \frac{\ln(1 - qf(0))}{\ln(1-q)}.$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a = q$, $b = -q$ και για $p_0 = 0$ και $p_1 = -\frac{q}{ln(1-q)}$.

■

Πόρισμα 3.11

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim ZMLS(q)$ $(0 < p < 1, q = 1-p)$, δηλαδή

$$p_n = P(N = n) = \begin{cases} p_0^{(M)}, & n = 0 \\ -(1 - p_0^{(M)}) \dfrac{q^n}{nln(1-q)}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{\left[-\left(1-p_0^M\right)\frac{q}{ln(1-q)}\right]f(x) + \sum_{y=1}^{x}\left(q - q\frac{y}{x}\right)f(y)g(x-y)}{1-qf(o)}, \qquad x = 1,2,3, \ldots.$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0) = p_0^{(M)} + \left(1-p_0^{(M)}\right)\frac{\ln(1-qf(0))}{\ln(1-q)}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a = q$, $b = -q$ και για $p_0 = p_0^M$ και $p_1 = -\left(1-p_0^M\right)\frac{q}{ln(1-q)}$. ■

Πόρισμα 3.12

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim P(\lambda)$ ($\lambda > 0$), δηλαδή

$$p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \sum_{y=1}^{x}\left(\lambda\frac{y}{x}\right)f(y)g(x-y) \qquad x = 1,2,3, \ldots$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0) = e^{\lambda(f(0)-1)}.$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a = 0$, $b = \lambda$ και για $p_0 = e^{-\lambda}$ και $p_1 = \lambda e^{-\lambda}$.

■

Πόρισμα 3.13

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim ZTP(\lambda)$ ($\lambda > 0$), δηλαδή

$$p_n = P(N=n) = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \left(\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\right) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, & k=1,2,\dots \end{cases}$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \left[\frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}\right] f(x) + \sum_{y=1}^{x} \left(\lambda \frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y), \quad x = 1,2,3,\dots$$

με αρχική συνθήκη

$$g(0) = \frac{e^{\lambda(f(0)-1)} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

<u>Απόδειξη</u>

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5 για $a = 0, b = \lambda$ και για $p_0 = 0$ και $p_1 = \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}$.

■

3.4 Η γενίκευση του Sundt (1992) – Η κλάση κατανομών $R_k(a, b)$

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει αναφορά στα αποτελέσματα για σύνθετες κατανομές στην περίπτωση που η κατανομή του πλήθους των απαιτήσεων ή και ζημιών ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

<u>Θεώρημα 3.6</u>

Έστω ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, δηλαδή ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1,2,\dots$$

για κάποιο ακέραιο αριθμό k και παραμέτρους a_i και b_i $(i = 1, 2, \dots, k)$. Έστω επίσης, ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ είναι διακριτές, ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N, με κοινή συνάρτηση πιθανότητας f ορισμένη στους μη αρνητικούς ακέραιους. Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας g της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ικανοποιεί το αναδρομικό σχήμα

$$
g(x)=\begin{cases} P_N\big(f(0)\big), & x=0,\\[2ex] \dfrac{1}{1-\sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)}\displaystyle\sum_{y=1}^{x} g(x-y)\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y), & x=1,2,\ldots \end{cases}
$$

<u>Απόδειξη</u>

Για $x>0$ προκύπτει

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{n*}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{n}\right) p_{n-i} f^{n*}(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=i}^{\infty} p_{n-i}\left(a_i+\frac{b_i}{n}\right) f^{n*}(x)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=i}^{\infty} p_{n-i} E\left[a_i+\frac{b_i}{i}\frac{X_i}{x}\ |X_n=x\right] f^{n*}(x)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{x} p_{n-i}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y) f^{(n-i)*}(x+y)\\
&= \sum_{y=0}^{x}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y)\sum_{n=i}^{\infty} p_{n-i} f^{(n-i)*}(x-y)\\
&= \sum_{y=0}^{x}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y) g(x-y) = \sum_{y=0}^{x} g(x-y)\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y).
\end{aligned}
$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το ζητούμενο.

■

<u>Πόρισμα 3.14</u>

Εάν $f(0)=0$, τότε το αναδρομικό σχήμα του Θεωρήματος 3.6, ανάγεται στο ακόλουθο

$$
g(x)=\begin{cases} p_0, & x=0,\\[2ex] \displaystyle\sum_{y=1}^{x} g(x-y)\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+\frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y), & x=1,2,\ldots. \end{cases}
$$

<u>Παρατήρηση</u>

Ο αναδρομικός αλγόριθμος που παρουσίασε ο Panjer (1981), προκύπτει σαν μια υποπερίπτωση του Πορίσματος 3.14 θέτοντας $k=1$.

Το ακόλουθο θεώρημα, αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.6.

Θεώρημα 3.7

Έστω ότι $m = \max\{y\,, f(y) > 0\}$. Τότε,

$$g(x) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)} \sum_{y=1}^{mk} g(x-y) \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right) f^{i*}(y)\,, \qquad x = 1,2,\ldots$$

και επομένως η S ανήκει στην κλάση κατανομών $R_{mk}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ με $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_{mk})$ και $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_{mk)}$, που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$c_y = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i f^{i*}(y)}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)}, \qquad y = 1, \ldots, mk$$

και

$$d_y = \frac{y \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{i} f^{i*}(y)}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)}, \qquad y = 1, \ldots, mk$$

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.6 θέτοντας $f^{\iota*}(y) = 0$ για $y > mi$.

■

Έστω τώρα ότι

$$M = \#\{X_i > 0 : i \leq N\},$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή M, δηλώνει τον αριθμό των μη-μηδενικών απαιτήσεων. Τότε, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για την κατανομή της τυχαία μεταβλητή M.

Θεώρημα 3.8

Η τυχαία μεταβλητή $M = \#\{X_i > 0 : i \leq N\}$ ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ με $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ και $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_{k)}$, που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$c_y = (1 - f(0))^y \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i \binom{i}{y} f^{i-y}(0)}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)}, \qquad y = 1, \ldots, k$$

$$d_y = (1 - f(0))^y \frac{\sum_{i=1}^{k} b_i \binom{i-1}{y-1} f^{i-y}(0)}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)}, \qquad y = 1, \ldots, k.$$

Απόδειξη

Το ανωτέρω προκύπτει από το Θεώρημα 3.7, θέτοντας την f ως μια δίτιμη-{0,1} διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(1) = 1 - f(0)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$f^{i*}(y) = \binom{i}{y}\big(1 - f(0)\big)^{y} f^{i-y}(0), \quad y = 0,1, \dots, i.$$

■

Το ακόλουθο θεώρημα, αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.7 και δίνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.9

Αν η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ και m ένας θετικός ακέραιος, τότε η τυχαία μεταβλητή mN ανήκει στην κλάση κατανομών $R_{mk}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ με $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_{mk})$ και $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_{mk)}$, που δίνονται από τις σχέσεις

$$c_y = a_{y/m}, \quad d_y = mb_{y/m}, \quad y = m, 2m, \dots., km$$

και $c_y = d_y = 0$ για όλες τις άλλες τιμές του y.

Μία γενίκευση της αναδρομικής σχέσης που ικανοποιεί μια κατανομή που ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ είναι η ακόλουθη

$$p_n = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = r + 1, r + 2, \dots .$$

Προφανώς, για $m = 0$ προκύπτει η κλασική αναδρομική σχέση, που ικανοποιεί μια κατανομή που ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Υπό το νέο αυτό πρίσμα το Θεώρημα 3.6. γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 3.10

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = r + 1, r + 2, \dots$$

για κάποιο ακέραιο αριθμό k και παραμέτρους r, a_i και b_i $(i = 1, 2, \dots, k)$. Έστω επίσης, ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ είναι διακριτές, ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N με κοινή συνάρτηση πιθανότητας f ορισμένη στους μη αρνητικούς ακέραιους. Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας g της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ ικανοποιεί το αναδρομικό σχήμα

$$g(x) = \begin{cases} P_N\big(f(0)\big) & x = 0 \\ \dfrac{1}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f^i(0)} \left[\displaystyle\sum_{n=1}^{r} \left(p_n - \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n} \right) p_{n-1} \right) f^{n*}(x) \right. & \\ \qquad \left. + \displaystyle\sum_{y=1}^{x} g(x-y) \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i}\frac{y}{x} \right) f^{i*}(y) \right], & x = 1,2,\dots \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $x > 0$, τότε προκύπτει

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{n*}(x) = \sum_{n=1}^{m} p_n f^{n*}(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i} \right) p_{n-1} f^{n*}(x).$$

Επομένως,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_n - \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i} \right) p_{n-1} \right] f^{n*}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i} \right) p_{n-1} f^{n*}(x).$$

Τέλος, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6, παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i} \right) p_{n-1} f^{n*}(x) = \sum_{y=0}^{x} g(x-y) \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i}\frac{y}{x} \right) f^{i*}(y)$$

και η εισαγωγή της στην πιο πάνω σχέση οδηγεί στη ζητούμενη αναδρομική σχέση.

■

3.5 Η γενίκευση των Hess, Liewald & Schmidt (2002)

Σε αυτήν την παράγραφο, θα εισαχθούν βασικά αποτελέσματα σχετικά με την γενίκευση των Hess, Liewald & Schmidt (2002), όσον αφορά τον αναδρομικό τύπο του $Panjer$ και την αντίστοιχη κλάση $\text{Panjer}(a, b; k)$. Στην παράγραφο 1.9.3 παρουσιάστηκαν ορισμοί και βασικές ιδιότητες της συγκεκριμένης κλάσης κατανομών. Το ακόλουθο θεώρημα, που δίνεται χωρίς απόδειξη, δίνει μια ειδική διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Θεώρημα 3.11

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathrm{Panjer}(a, b; k)$, δηλαδή ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_n, \qquad n = k, k+1, \dots$$

για κάποιο ακέραιο αριθμό k και παραμέτρους a και b. Έστω επίσης, ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ είναι διακριτές, ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N με πιθανογεννήτρια $P_X(t)$. Τότε πιθανογεννήτρια $P_s(t)$ της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\big(1 - aP_X(t)\big) P_S^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^{l} \binom{l}{i} \left(a + b\frac{i}{l}\right) P_S^{(l-i)}(t) P_X^{(i)}(t) + p_k P_{X^{k*}}^{(l)}(t), \quad l \geq 1$$

όπου $P_{X^{k*}}(t) = [P_X(t)]^k$, $t \in [0,1)$, και $P_S^{(j)}(0) = 0$ για $j \leq k-1$.

Από το ανωτέρω θεώρημα και για $t = 0$, προκύπτει μια επέκταση του αναδρομικού τύπου του *Panjer* για τις πιθανότητες σύνθετων κατανομών, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.12

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή N ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathrm{Panjer}(a, b; k)$, δηλαδή ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_n, \qquad n = k, k+1, \dots$$

για κάποιο ακέραιο αριθμό k και παραμέτρους a και b. Έστω επίσης ότι, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots$ είναι διακριτές, ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N που έχει πιθανογεννήτρια $P_N(t)$. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας g της τυχαίας μεταβλητής $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, ικανοποιεί το αναδρομικό σχήμα

$$g(x)=\begin{cases} P_N\big(f(0)\big), & x=0,\\ \dfrac{1}{1-af(0)}\left(\displaystyle\sum_{y=1}^{x}\left(a+b\frac{y}{x}\right)g(x-y)f(y)+p_k f^{k*}(x)\right), & x=1,2,\dots \end{cases}$$

__Πόρισμα 3.15__

Αν η τυχαία μεταβλητή $N{\sim}B(m,p)$ $(m>0,\ 0<p<1,\ q=1-p)$, που ανήκει στην κλάση $Panjer(a,b;0)$, τότε η $g(x)=P(S=x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=\frac{q}{q+pf(0)}\sum_{y=1}^{x}\left\{\frac{(m+1)p}{q}\frac{y}{x}-\frac{p}{q}\right\}f(y)g(x-y),\qquad x=1,2,3,\dots$$

__Πόρισμα 3.16__

Αν η τυχαία μεταβλητή $N{\sim}LS(q)$ $(0<q<1,\ q=1-p)$, που ανήκει στην κλάση του $Panjer(a,b;1)$, τότε η $g(x)=P(S=x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=\frac{1}{1-qf(0)}\left(\sum_{y=1}^{x}\left\{q-q\frac{y}{x}\right\}f(y)g(x-y)-\frac{q}{\ln(1-q)}f(x)\right),\qquad x=1,2,3,\dots$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ PANJER

4.1. Εισαγωγή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα γίνει αναφορά σε αναδρομικούς τύπους που σχετίζονται με πολυδιάστατες κατανομές οι οποίες περιγράφουν το σύνολο των απαιτήσεων. Τέτοιες κατανομές, μπορεί να προκύψουν όταν θέλουμε να μελετήσουμε από κοινού κατανομές των συνολικών απαιτήσεων, από εξαρτημένους κινδύνους ή χαρτοφυλάκια.

Θα ακολουθήσει μια εισαγωγή, στους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιηθούν. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{e}_j$ το $q \times 1$ το j-στο μοναδιαίο διάνυσμα. Συμβολίζουμε με N_q το σύνολο όλων των $q \times 1$ διανυσμάτων με συνιστώσες μη αρνητικούς ακεραίους, και έστω $N_{q+} = N_q - \{\mathbf{0}\}$, με το $\mathbf{0}$ να δηλώνει το διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με το μηδέν. Για $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N_q$ διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- αν $\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}$ τότε $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in N_{q+}$
- αν $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}$ τότε $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in N_q$

Ο συμβολισμός $x_{\bullet}$ δηλώνει το άθροισμα των συνιστωσών του διανύσματος $\boldsymbol{x}$, δηλαδή $x_{\bullet} = \sum_j x_j$. Επίσης

- με $\mathcal{P}_{q0}$ δηλώνουμε το σύνολο των κατανομών στο N_q,
- με $\mathcal{P}_{q\underline{0}}$ δηλώνουμε το υποσύνολο αυτών των κατανομών με θετική μάζα στο $\mathbf{0}$, και
- με $\mathcal{P}_{q1}$ δηλώνουμε το σύνολο των κατανομών στο N_{q+}.

Αντίστοιχα,

- με $\mathcal{F}_{q0}$ δηλώνουμε το σύνολο των συναρτήσεων στο N_q,
- με $\mathcal{F}_{q\underline{0}}$ δηλώνουμε το υποσύνολο αυτών των συναρτήσεων. με μια θετική μάζα στο $\mathbf{0}$, και
- με $\mathcal{F}_{q1}$ δηλώνουμε το σύνολο των συναρτήσεων στο N_{q+}.

4.2. Αναδρομικοί τύποι πολυδιάστατων σύνθετων κατανομών

Αρχικά θα μελετηθούν επεκτάσεις της αναδρομικής σχέσης του Panjer στις q διαστάσεις και θα ασχοληθούμε πρωτίστως με την γενίκευση που πρότεινε ο Sundt (1999). Υποθέτουμε σε αυτή την περίπτωση, ότι ο αριθμός των απαιτήσεων N αποτελεί μια μονοδιάστατη τυχαία μεταβλητή, αλλά ότι η κάθε απαίτηση είναι ένα q-διαστάσεων τυχαίο διάνυσμα, τα οποία είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ισόνομα, και παράλληλα ανεξάρτητα του αριθμού των απαιτήσεων. Το γεγονός αυτό, μπορεί να ερμηνευθεί ωσάν ο αριθμός των απαιτήσεων να αποτελεί τώρα, τον αριθμό των γεγονότων που οδηγούν σε απαιτήσεις, οι οποίες δημιουργούνται μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο q συμβολαίων (claim events). Επιπλέον, το τυχαίο διάνυσμα αντιπροσωπεύει εκείνο των πληρωμών για κάθε συμβόλαιο, που προήλθαν από ένα τέτοιο γεγονός. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι N δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων, και έστω ότι το i γεγονός δημιουργεί στο χαρτοφυλάκιο το διάνυσμα των απαιτήσεων,

$$\mathbf{U}_i = \left(U_{i1}, \dots, U_{iq}\right)', \qquad i = 1, 2, \dots,$$

και

$$\mathbf{X} = \left(X_1, \dots, X_q\right)' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{U}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} U_{i1}\,, \sum_{i=1}^{N} U_{i2}\,, \dots, \sum_{i=1}^{N} U_{iq}\right)'$$

όπου X_i δηλώνει το σύνολο των απαιτήσεων στο συμβόλαιο i $(1 \leq i \leq q)$. Υποθέτουμε, ότι τα $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, …. είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ισόνομα, με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας f, και ανεξάρτητα από το N. Επιπλέον, ότι όλα τα U_{ij} είναι μη αρνητικά.

Έστω, τώρα, ότι p και g δηλώνουν τη συνάρτηση πιθανότητας της N και X αντίστοιχα. Τότε

$$g(\boldsymbol{x}) = P\left(X_1 = x_1, \dots, X_q = x_q\right) = (p \vee f)\,(\boldsymbol{x}) == \sum_{n=0}^{\infty} p(n) f^{n*}(\boldsymbol{x})$$

Το πολυδιάστατο μοντέλο που περιγράψαμε ανωτέρω, έχει ομολογουμένως εφαρμογές στα ακόλουθα παραδείγματα:

1. Σε ένα χαρτοφυλάκιο με q συμβόλαια, ερμηνεύουμε το U_{ij} ως το ποσό της απαίτησης του j συμβολαίου, που προκλήθηκε από το i γεγονός. Ένα ρεαλιστικό παράδειγμα, είναι μία ασφάλεια έναντι σεισμών, όπου ένας σεισμός (το γεγονός) μπορεί να επηρεάσει, περισσότερα από ένα συμβόλαιο. Έτσι η μεταβλητή X_j, αντιπροσωπεύει το σύνολο των απαιτήσεων του *j* συμβολαίου.
2. Αν θεωρήσουμε ότι το U_{ij} είναι
    - ίσο με ένα, στην περίπτωση που το i γεγονός προκαλεί μία πληρωμή στο συμβόλαιο *j*,
    - και μηδέν σε διαφορετική περίπτωση,

τότε η μεταβλητή X_j θα είναι ο αριθμός των απαιτήσεων στο *j* συμβόλαιο.

3. Μία άλλη εφαρμογή του μοντέλου θα μπορούσε περιγράφει μία κατάσταση, όπου το κάθε γεγονός δύναται να επηρεάσει διάφορους τύπους από απαιτήσεις. Οι συγκεκριμένοι τύποι απαιτήσεων, μπορεί να υπάγονται κάτω από διαφορετικές αντασφαλιστικές καλύψεις. Για παράδειγμα, στην ασφάλιση αυτοκινήτων, είναι συχνό φαινόμενο η διαφοροποίηση της αντασφάλισης σχετικά με το εάν η ζημιά αφορά μεμονωμένα το όχημα ή τον προσωπικό τραυματισμό μας. Ανάλογη εφαρμογή είναι η αποζημίωση ενός εργάτη. Μπορεί να υπόκεινται σε άλλη αντασφάλιση για αρρώστια και άλλη για εργατικό ατύχημα.

Έστω τώρα, ότι p ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{10}$ και f ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{q0}$. Τότε, φυσικά

$$(p \vee f)(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{n*}(\boldsymbol{x}).$$

Έτσι,

$$(p \vee f)(\mathbf{0}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n [f(\mathbf{0})]^n.$$

Επιπλέον, εάν $f \in \mathcal{P}_{q1}$, τότε $(p \vee f)(\mathbf{0}) = p_0$.

Θεώρημα 4.1

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{\underline{10}}$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \qquad n = 1,2, \dots$$

για κάποιες σταθερές a και b. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f η οποία ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{q0}$. Τότε, εάν $g = p \vee f$, ισχύει η αναδρομική σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - af(\boldsymbol{0})} \sum_{\boldsymbol{0} < \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}} \left(a + b\frac{y_j}{x_j}\right) f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{e}_j, \ j = 1,2, \dots, q$$

με αρχική συνθήκη

$$g(\boldsymbol{0}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) [f(\boldsymbol{0})]^n.$$

Παρατήρηση

Εάν θέσουμε $q = 1$, τότε ο ανωτέρω αναδρομικός τύπος μετασχηματίζεται σε αυτόν της γενίκευσης του αναδρομικού τύπου του Panjer, που παρουσιάστηκε από τους Sundt and Jewell (1981), και αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3, Παράγραφος 3.3.

Έστω $U_i = U_{i1}$, $V_i = U_{i2}$, $X = X_1 = \sum_{i=1}^{N} U_i$, $Y = X_2 = \sum_{j=1}^{N} V_j$ και $f(0,0) = 0$. Τότε η διδιάστατη εκδοχή του Θεωρήματος 4.1 είναι η ακόλουθη:

Για $x = 1,2, \dots$ και $y = 0,1, \dots$, έχουμε

$$g(x, y) = \sum_{u=0}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) \sum_{v=0}^{y} f(u, v) g(x - u, y - v),$$

για $x = 0,1, \dots$ και $y = 1,2, \dots$, έχουμε

$$g(x, y) = \sum_{v=0}^{y} \left(a + b\frac{v}{y}\right) \sum_{u=0}^{x} f(u, v) g(x - u, y - v),$$

με αρχική συνθήκη την

$$g(0,0) = p_0.$$

Άλλοι αναδρομικοί τύποι μονοδιάστατων σύνθετων κατανομών, κάποιοι από τους οποίους αναλύθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, μπορούν να επεκταθούν και στην πολυδιάστατη περίπτωση. Στη συνέχεια, θα παρατεθούν τέτοια θεωρήματα.

<u>Θεώρημα 4.2</u>

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_1$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = p(n) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-i}\,, \qquad n = r+1, r+2, \ldots$$

για κάποια μη αρνητική σταθερά r. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f η οποία ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{q\underline{0}}$. Τότε, εάν $g = p \vee f$, ισχύει η αναδρομική σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_i f(\boldsymbol{0})^i} \left[\sum_{n=1}^{r} \left(p_n - \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-i} \right) f^{n*}(\boldsymbol{x}) \right.$$
$$\left. + \sum_{\boldsymbol{0} < \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i} \frac{y_\bullet}{x_\bullet}\right) f^{i*}(\boldsymbol{y}) \right], \qquad \boldsymbol{x} \in N_{q+}.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί την πολυδιάστατη περίπτωση της γενίκευσης που παρουσιάστηκε από τον Sundt (1992) και αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3, στο Θεώρημα 3.10.

<u>Θεώρημα 4.3</u>

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $R_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) p_{n-1}\,, \quad n = 1,2, \ldots\ .$$

Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f η οποία ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{q1}$. Τότε, εάν $g = p \vee f$, ισχύει η αναδρομική σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{0}<\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + \frac{b_i}{i}\frac{y_\bullet}{x_\bullet}\right) f^{i*}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{x} \in N_{q+}.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Το παραπάνω θεώρημα, αποτελεί την πολυδιάστατη περίπτωση της γενίκευσης που παρουσιάστηκε από τον Sundt (1992) και αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3, Θεώρημα 3.14.

Για να συνεχίσουμε την παράθεση πολυδιάστατων γενικεύσεων θα συνεχίσουμε με τον μετασχηματισμό του De Pril, που αναφέρεται στο ατομικό μοντέλο. Αρχικά, θα γίνει παρουσίαση του μετασχηματισμού στη μονοδιάστατη περίπτωση και στη συνέχεια, θα τον παρουσιάσουμε στην πολυδιάστατη περίπτωση.

4.2.1 Ο μετασχηματισμός του De Pril (De Pril transform)

4.2.1.1. Η μονοδιάστατη περίπτωση

Ο μετασχηματισμός του De Pril φ_g μιας κατανομής $g \in \mathcal{P}_{1\underline{0}}$, δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_g(x) = \frac{1}{g(0)}\left(xg(x) - \sum_{y=1}^{x-1} \varphi_g(y)g(x-y)\right), \quad x = 1,2,\dots\ .$$

Λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση ως προς $g(x)$ προκύπτει,

$$g(x) = \frac{1}{x}\sum_{y=1}^{x} \varphi_g(y)g(x-y), \qquad x = 1,2,\dots\ .$$

Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε με αναδρομική σχέση τη g από τον De Pril μετασχηματισμό της, αν βεβαίως γνωρίζουμε την πιθανότητα $g\,(0)$. Σημειώνεται, ότι ο μετασχηματισμός του De Pril ορίζει μοναδικά την g καθώς $\sum_{x=0}^{\infty} g(x) = 1$, όντας κατανομή.

<u>Σημείωση</u>

Παρατηρώντας την ανωτέρω μορφή της $g(x)$, βλέπουμε ότι ανήκει στην κλάση κατανομών $R_\infty[0,\ \varphi_g]$.

Για μια συνάρτηση f στους μη αρνητικούς ακεραίους, ορίζουμε τον σωρευτικό δείκτη Γ ως εξής:

$$\Gamma f(x) = \sum_{y=0}^{x} f(y)\,, \quad x = 0,1,2,\dots$$

με $\Gamma^0 f = f$ και $\Gamma^t f = \Gamma(\Gamma^{t-1} f)$, για $t = 1,2,\dots$.

Θεώρημα 4.4

Αν η $g \in \mathcal{P}_{\underline{1}0}$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{c(x)}{x} + \sum_{y=1}^{x} \left(a(y) + \frac{b(y)}{x} \right) g(x-y)\ , \quad x = 1,2,\dots$$

τότε για $t = 0,1,2,\dots$ έχουμε

$$\Gamma^t g(x) = \frac{\Gamma^t c(x)}{x} + \sum_{y=1}^{x} \left(a(y) + \frac{b(y)}{x} + \frac{t}{x}(1 - \Gamma a(y-1) \right) \Gamma^t g(x-y)\ , \quad x = 1,2,\dots$$

όπου $a(0) = c(0) = 0$.

Έχουμε αναφέρει ότι η συνέλιξη των κατανομών $R_k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}^{(j)}]$, με

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k), \quad \boldsymbol{b} = (b_1^{(j)}, \dots, b_k^{(j)}) \text{ για } j = 1,2,\dots,m$$

είναι κατανομή που ανήκει στην κλάση κατανομών $R_k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\beta}]$, όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\beta_i = (m-1) i a_i + \sum_{j=1}^{m} b_i^{(j)}\,, \quad i = 1,2,\dots,k.$$

Έτσι, προκύπτει ότι για το άθροισμα των κατανομών $g_1, \dots g_m$ που ανήκουν στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{\underline{1}0}$ έχουμε

$$\varphi_{*_{i=1}^m g_i} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{g_i}$$

Επίσης, από το Θεώρημα 4.4 προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα 4.5</u>

Αν η $g \in \mathcal{P}_{\underline{1}0}$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \frac{c(x)}{x} + \sum_{y=1}^{x} \left(a(y) + \frac{b(y)}{x} \right) g(x-y) \ , \ \ x = 1,2,\dots$$

τότε

$$\varphi_{\Gamma^t g}(x) = \varphi_g(x) + t, \qquad x = 1,2,\dots$$

4.2.1.2. Η πολυδιάστατη περίπτωση

Ανάγοντας στην πολυδιάστατη περίπτωση, προκύπτουν τα επόμενα αποτελέσματα.

<u>Θεώρημα 4.6</u>

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής N, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{\underline{1}0}$ Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας f, η οποία ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{q1}$. Τότε, εάν $g = p \ \vee \ f$, ισχύει η αναδρομική σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x_{\bullet}} \sum_{\boldsymbol{0}<\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) y_{\bullet} \sum_{i=1}^{y_{\bullet}} \frac{\varphi_p(i)}{i} f^{i*}(\boldsymbol{y}) \, , \ \ \boldsymbol{x} \in N_{q+}.$$

Αυτός ο αναδρομικός τύπος, είναι παρόμοιος με αυτόν της μονοδιάστατης περίπτωσης

$$g(x) = \frac{1}{x} \sum_{y=1}^{x} \varphi_g(y) g(x-y), \qquad x = 1,2,\dots \ .$$

και ως εκ τούτου ορίζεται ο μετασχηματιμός De Pril στην πολυδιάσταστη περίπτωση ως εξής

$$\varphi_g(\boldsymbol{y}) = y_{\bullet} \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi_p(i)}{i} f^{i*}(\boldsymbol{y}) \, , \quad \boldsymbol{y} \in N_{q+}.$$

Εάν στο προηγούμενο θεώρημα, συνδυάσουμε της δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x_{\bullet}} \sum_{\boldsymbol{0}<y\leq x} \varphi_g(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in N_{q+}$$

και στη συνέχεια, επιλύοντας ως προς την $\varphi_g(\boldsymbol{y})$, καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$\varphi_g(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{0})}\left(x_{\bullet} g(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{0}<y\leq x} \varphi_g(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \right), \quad \boldsymbol{x} \in N_{q+}.$$

Για μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}_{q0}$, ορίζουμε τον δείκτη Γ ως εξής:

$$\Gamma^0 f = f,$$

$$\Gamma f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{0}<y\leq x} f(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in N_q,$$

$$\Gamma^t f = \Gamma(\Gamma^{t-1} f), \quad t \in N_{1+}.$$

Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\varphi_{\Gamma^t g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varphi_g(\boldsymbol{x}) + t, & \boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{e}_j, \quad x_j \in N_{1+}, \quad j = 1,2,\dots,q \\ \varphi_g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in N_q \end{cases}$$

Στα προηγούμενα θεωρήματα του συγκεκριμένου κεφαλαίου ορίστηκαν σύνθετες q −διάστατες κατανομές όπου η κατανομή p ήταν μονοδιάστατη και η κατανομή f ήταν q −διάστατη. Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση, είναι η αντίθετη, δηλαδή, να είναι η κατανομή p και η κατανομή f q −διάστατες.

Έστω, ότι η κατανομή p της q −διάστατης τυχαίας μεταβλητής $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \dots N_q)$, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{q0}$ και έστω η q −διάστατη τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_q)$, όπου η τυχαία μεταβλητή X_i έχει κατανομή $f_{,i}$ που ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{10}$. Ορίζουμε την σύνθετη κατανομή $p \vee \boldsymbol{f}$, ως ακολούθως:

$$g(\boldsymbol{x}) = (p \ \vee \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in N_q} p_{\boldsymbol{n}} \prod_{j=1}^{q} f_j^{n_j *}(x_j), \quad \boldsymbol{x} \in N_q.$$

Ειδικότερα, έχουμε ότι

$$(p \ \vee \ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{0}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in N_q} p_{\boldsymbol{n}} \prod_{j=1}^{q} f_j\,(0)^{n_j}$$

Επιπλέον, αν $f_1, \dots, f_q$ ανήκουν στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{10}$ τότε $(p \ \vee \ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{0}) = p_{\boldsymbol{0}}$.

Σε αυτό το πλαίσιο με $q = 2$ η Vernic (2004) εισήγαγε μια διδιάστατη εκδοχή του αναδρομικού τύπου του Panjer υποθέτοντας ότι οι κατανομές f_1 και f_2 ανήκουν στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{11}$. Σχετικό είναι το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 4.7</u>

Έστω ότι η κατανομή p, της τυχαίας μεταβλητής $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{n}} &= p(n_1, n_2) \\ &= \left(a_0 + \frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_{12}}{n_1 n_2}\right) p(n_1 - 1, n_2 - 1) + \left(b_0 + \frac{b_1}{n_1}\right) p(n_1 - 1, n_2) \\ &+ \left(c_0 + \frac{c_2}{n_2}\right) p(n_1, n_2 - 1), \quad n_1, n_2 = 1,2, \dots \end{aligned}$$

για κάποιες μη αρνητικές σταθερές n_1, n_2. Έστω επίσης, ότι η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ όπου η τυχαία μεταβλητή X_i έχει κατανομή f_i που ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{11}$. Τότε,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= p \ \vee \ \boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \\ &= \sum_{y_1=1}^{x_1} \sum_{y_2=1}^{x_2} \left(a_0 + a_1 \frac{y_1}{x_1} + a_2 \frac{y_2}{x_2} + a_{12} \frac{y_{12}}{x_1 x}\right) f_1(y_1) f_2(\,y_2) g(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \\ &+ \sum_{y_1=1}^{x_1} \left(b_0 + b_1 \frac{y_1}{x_1}\right) f_1(y_1) g(\,x_1 - y_1, x_2) \\ &+ \sum_{y_2=1}^{x_2} \left(c_0 + c_2 \frac{y_2}{x_2}\right) f_2(y_2)\, g(x_1, x_2 - y_2), \quad x_1, x_2 = 1,2, \dots \end{aligned}$$

Το προηγούμενο θεώρημα δεν καλύπτει την περίπτωση που x_1 ή $x_2 = 0$. Τότε, έχουμε τα δύο ακόλουθα αποτελέσματα.

<u>Πρόταση 4.1</u>

Αν η κατανομή p της τυχαίας μεταβλητής $\boldsymbol{N}$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p(n_1, 0) = \left(b_0 + \frac{b_1}{n_1}\right) p(n_1 - 1,0)$$

τότε

$$g(x_1, 0) = \sum_{y_1=1}^{x_1} \left(b_0 + b_1 \frac{y_1}{x_1}\right) f_1(y_1) g(x_1 - y_1, 0), \quad x_1 = 1,2, \dots$$

Ομοίως, θα δοθεί και η περίπτωση που $x_2 = 0$.

<u>Πρόταση 4.2</u>

Αν η κατανομή p της τυχαίας μεταβλητής $\boldsymbol{N}$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p(0, n_2) = \left(c_0 + \frac{c_2}{n_2}\right) p(0, n_2 - 1)$$

τότε

$$g(0, x_2) = \sum_{y_2=1}^{x_2} \left(c_0 + c_2 \frac{y_2}{x_2}\right) f_2(y_2) g(0, x_2 - y_2), \quad x_2 = 1,2, \dots$$

<u>Παρατήρηση</u>

Ως παραδείγματα των κατανομών p, της τυχαίας μεταβλητής N, που ικανοποιούν τους αναδρομικούς τύπους που παρουσιάστηκαν παραπάνω, η Vernic (1999) χρησιμοποίησε την τριωνυμική κατανομή, τη διμεταβλητή αρνητική διωνυμική κατανομή, και τη διμεταβλητή κατανομή Poisson.

Η σύνθετη κατανομή $p \vee \boldsymbol{f}$ που ορίστηκε με τη σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = (p \vee \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in N_q} p_{\boldsymbol{n}} \prod_{j=1}^{q} f_j^{n_j *}(x_j), \quad \boldsymbol{x} \in N_q.$$

μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω θεωρώντας ότι κάθε απαριθμήτρια μεταβλητή N_iπαράγει ένα τυχαίο διάνυσμα σφοδροτήτων. Πιο συγκεκριμένα έστω ότι η κατανομή p, της q −διάστατης τυχαίας μεταβλητής $\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \dots N_q)$, ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{q0}$ και έστω η q −διάστατη τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_q)$, όπου η τυχαία μεταβλητή X_i έχει κατανομή f_i, που ανήκει στην κλάση κατανομών $\mathcal{P}_{t_j 0}$. Ορίζουμε την σύνθετη κατανομή $p \vee \boldsymbol{f}$ ως ακολούθως

$$(p \vee \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in N_q} p_{\boldsymbol{n}} \prod_{j=1}^{q} f_j^{n_j *}(\boldsymbol{x}^{(j)}), \quad \boldsymbol{x} \in N_{\sum_{j=1}^{q} t_j}$$

όπου, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^{(1)'}, \boldsymbol{x}^{(2)'}, \dots \boldsymbol{x}^{(q)'})$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{x}^{(j)}$ έχει διάσταση $t_j \times 1$ για $j = 1,2, \dots, q$. Η μελέτη αυτής της περίπτωσης γίνεται από τον Sundt (2002).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

```
########################################################
# ΚΩΔΙΚΑΣ 1   -  ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (n=3)
n <- 3
conv <- c(0, 0.55, 0.35, 0.1)
fx <- c(0, 0.55, 0.35, 0.1)
for (i in 2:n) {
conv <- convolve(fx,rev(conv), type="o")
}

m <- cbind(0:6,conv[1:7])
rownames(m) <- rep("",nrow(m))
colnames(m) <- c("x","f*n(x)")
round(m, digits=7)
```

```
x    f*n(x)
 0 0.000000
 1 0.000000
 2 0.000000
 3 0.166375
 4 0.317625
 5 0.292875
 6 0.158375
```

```
#######################################################
ΚΩΔΙΚΑΣ 2 - ΕΥΡΕΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ POISSON
round(dpois(0:6,0.9), digits=6)
```

```
[1] 0.406570 0.365913 0.164661 0.049398 0.011115 0.002001 0.000300
```

```
#######################################################
ΚΩΔΙΚΑΣ 3 - ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ
Panjer.Poisson <- function (f, lambda)
{ if (sum(f)>1||any(f<0)) stop("f parameter not a density")
  if (lambda * sum(f) > 727) stop("Underflow")
  g <- exp(-lambda * sum(f))
  r <- length(f)
  x <- 0
  repeat { x <- x+1
    m <- min(x, r)
    last <- (lambda/x)*sum(1:m*head(f,m)*rev(tail(g,m)))
    g <- c(g,last)
```

```
    cumul <- sum(g)
    if (cumul > 0.99999999) break
  }
return(g) }
f <- c(0.55,0.35,0.1)
lambda <- 0.9
y <- Panjer.Poisson(f, lambda)
x <- 0:6
m <- cbind(x,y[1:7])
rownames(m) <- rep("",nrow(m))
colnames(m) <- c("x","g(x)")
round(m, digits=6)
```

```
x      g(x)
 0 0.406570
 1 0.201252
 2 0.177879
 3 0.108204
 4 0.054991
 5 0.028683
 6 0.013010
```

Η συνάρτηση Panjer.Poisson στον Κώδικα 3 υπάρχει στο βιβλίο Kaas et. al (2008).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Ζυμπίδης Α. (2008). *Αναλογιστικά Μαθηματικά Γενικών Ασφαλίσεων. Εκδόσεις ΟΠΑ, 31-59.*

Ζυμπίδης Α. (2008). *Θεωρία Κινδύνων. Εκδόσεις ΟΠΑ.*

Κούτρας Μ. (2004). *Εισαγωγή στις πιθανότητες. Σταμούλη Α.Ε. Πειραιάς.*

Πολίτης, Κ. (2012). *Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου*. *Εκδόσεις Σταμούλη*.

Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2016). *Θεωρία Κινδύνου. Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΠΜΣ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*

Ξένη

Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D. & Cecil N. (1997). *Actuarial Mathematics*, *Published by "The Society of Actuaries", Schaumburg, Illinois.*

De Pril, N., (1985). *Recursions for convolutions of arithmetic distributions. ASTIN Bulletin, 15, 135-139.*

De Pril, N., (1986a). *Improved recursions for some compound Poisson distributions. Insurance: Mathematics and Economics 5, 129-132.*

De Pril, N., (1986c). *Moments of a class of compound distribution. Scandinavian Actuarial Journal, 117-120*

Hess K., Liewald A., Schmidt K., (2002). *An Extension of Panjer's recursion. ASTIN Bulletin, 32, 283-297.*

Kaas R., Goovaerts, M., Dhaene J. & Denuit M., (2008). *Modern actuarial risk theory, Second Edition, Springer*.

Panjer H., (1981). *Recursive evaluation of a family of compound distributions. ASTIN Bulletin, 12, 22-26.*

Panjer H., Wang S., (1995). *Computational Aspects of Sundt's generalized class. ASTIN Bulletin, 25, 5–17.*

Schmidt K., (1996). *Lectures on Risk Theory. B. G. Teubner Stuttgart.*

Sundt B., Jewell W., (1981). *Further results on recursive evaluation of compound distributions. ASTIN Bulletin, 12, 27-39.*

Sundt B., (1992). *On some extensions of Panjer's class of counting distributions. ASTIN Bulletin, 22, 61-80.*

Sundt B., (2002). *Review: Recursive evaluation of aggregate claims distributions. Insurance: Mathematics and Economics, 30, 297-322.*

Sundt B., (2002). *Some recursions for moments of compound distributions. University of Waterloo Institute of Insurance and Pension Research Report, 02-08.*

Sundt B., Vernic R., (2009). *Recursions for Convolutions and Compound Distributions with Insurance Applications. Springer.*

Vernic, R. (2004). *On a bivariate generalization of Sundt's class of counting distributions. Math. Rep. 6, 185–201*

Willmot G., (1988). *Sundt and Jewell's family of discrete distributions. ASTIN Bulletin, 18, 17-29.*