ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

ΠΜΣ στη Χρηματοοικονομική και Τραπεζική με Κατεύθυνση στη Χρηματοοικονομική Ανάλυση για Στελέχη

Διπλωματική Εργασία

Θέμα:

« Πρόβλεψη της μακροπρόθεσμης διακύμανσης των μετοχών με ημερήσια δεδομένα»

Επιβλέπων Καθηγητής

Κουρογένης Νικόλαος

Πειραιάς, Αύγουστος 2016

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέπων καθηγητή μου για την συνεργασία και την πολύτιμη καθοδήγησή του.

Την οικογένειά μου και όλους όσους πρόσφεραν απλόχερα τη βοήθεια και τη στήριξή τους για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΕΛΙΔΑ

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Ως μεταβλητότητα ενός αξιογράφου ορίζουμε την τάση που αυτό έχει να προβεί σε ακραίες μεταβολές της αξίας του σε μικρό χρονικό διάστημα. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορα μέτρα υπολογισμού της μεταβλητότητας των αξιογράφων. Το κυριότερο εξ αυτών, το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε είναι η διασπορά των ιστορικών τιμών που ορίζεται ως η τετραγωνική απόκλιση των τιμών από την αναμενόμενη τιμή του αξιογράφου. Όπως γίνεται ξεκάθαρο από τον ορισμό της, η διασπορά έχει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, οι μονάδες μέτρησής της να είναι τα τετράγωνα των αρχικών μονάδων μέτρησης. Παραδείγματος χάριν, αν είχαμε μία μετοχή αποτιμημένη σε ευρώ τότε η διασπορά της θα μετριέται σε ευρώ στο τετράγωνο. Αυτή ακριβώς η ιδιαιτερότητα οδήγησε μεγάλο μέρος του κοινού που ασχολείται με το αντικείμενο να χρησιμοποιήσει την τυπική απόκλιση ως μέτρο μεταβλητότητας. Η επιλογή αυτή είναι ιδιαίτερα λογική από την στιγμή που η τυπική απόκλιση είναι η ρίζα της διασποράς.

Η μεταβλητότητα ενός αξιογράφου (και κατ' επέκταση η διασπορά του) μπορεί να είναι σταθερή στον χρόνο ή και αυτή με την σειρά της να μεταβάλλεται. Η περίπτωση κατά την οποία παραμένει σταθερή στην διάρκεια του χρόνου αποτελεί μία ιδιαίτερα εύκολη περίπτωση, η οποία μάλιστα, σπάνια έως ποτέ δεν συναντάται στα χρηματοοικονομικά. Για τον λόγο αυτό δεν θα την χρησιμοποιήσουμε στην εν λόγω διπλωματική εργασία. Στόχος μας είναι να μπορέσουμε να προβλέψουμε την μελλοντική μεταβλητότητα των αξιογράφων μας και δη αυτή των τιμών τον μετοχών. Για να καταστεί αυτό εφικτό, θα πρέπει να κατανοήσουμε τα αίτια αυτής της μεταβλητότητας, δηλαδή τους παράγοντες που προκαλούν αλλαγή της μεταβλητότητας των τιμών των μετοχών.

Όταν η μεταβλητότητα της αγοράς είναι στοχαστική, τα διαχρονικά (intertemporal) μοντέλα προβλέπουν ότι τα ασφάλιστρα κινδύνου δεν ορίζονται μόνο από τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών με την απόδοση της αγοράς, αλλά και τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών με διάφορα σημαντικά μεγέθη όπως ο πληθωρισμός, η ανεργία, η ανάπτυξη και άλλα, τα οποία και επηρεάζουν την μεταβλητότητα της αγοράς.

Αφού παρουσιάσουμε μια σειρά μοντέλων, ξεκινώντας από το Model Portfolio Theory και δώσουμε τις αδυναμίες καθενός εξ αυτών, θα εξηγήσουμε τους λόγους για τους οποίους κανένα από αυτά δε μπορεί ικανοποιητικά να περιγράψει την πραγματικότητα. Το κύριο μειονέκτημά τους έγκειται στις απαιτήσεις τους, δηλαδή στις μαθηματικές υποθέσεις στις οποίες προχωρούν. Οι υποθέσεις αυτές γίνονται για λόγους απλούστευσης του εκάστοτε μαθηματικού υποδείγματος, είναι όμως στις περισσότερες των περιπτώσεων ιδιαίτερα ακραίες με αποτέλεσμα το τελικό μοντέλο να είναι ακατάλληλο.

Το μοντέλο που θεωρούμε καταλληλότερο για την περιγραφή της πραγματικότητας, είναι το FIGARCH, το οποίο και εν τέλει χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της μελλοντικής μεταβλητότητας.

Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου δημιουργήθηκε από τον οικονομολόγο Harry Markowitz το 1952 για την οποία και κέρδισε το βραβείο Νόμπελ στα οικονομικά. Αποτελεί θεμέλιο της σύγχρονης οικονομικής θεωρίας και πάνω σε αυτή βασίστηκαν πολλά μετέπειτα μοντέλα. Η συγκεκριμένη θεωρία κατακρίθηκε για δύο κυρίως λόγους. Πρώτον για τη συμμετρικότητα του μέτρου κινδύνου της, δεύτερον για τη συμμετρικότητα της κατανομής την οποία υποθέτει.

Η πρώτη προσπάθεια βελτίωσης των παραπάνω αδυναμιών έγινε με την post modern portfolio theory, η οποία χρησιμοποίησε μη συμμετρικά μέτρα κινδύνου καθώς και μη κανονικές κατανομές. Η την post modern portfolio theory παρουσιάστηκε από τους Brian M. Rom Kathleen και Ferguson το 1993. Το κύριο εργαλείο το οποίο εισήγαγαν ήταν το downside risk, ένα μέτρο κινδύνου το οποίο είναι ευρέως αποδεκτό από τη οικονομική κοινότητα τα τελευταία χρόνια.

Σε υπολογιστικό επίπεδο οι Black και Litterman το 1992 παρουσίασαν το δικό τους μοντέλο το οποίο εστιάζει κυρίως στο πώς παρά στο γιατί.
Παράλληλα με τα παραπάνω, μοντέλα όπως τα AR, MA, ARMA, ARIMA, ARCH, GARCH και FIGARCH παρουσιάστηκαν οδηγώντας σε μία συνεχόμενη βελτίωση της προβλεπτικής μας ικανότητας, καθώς εισήγαγαν απαραίτητα χαρακτηριστικά για την σωστή αποτύπωση χρηματοοικονομικών μοντέλων όπως στην περίπτωση των ARCH, GARCH και FIGARCH μοντέλων, τα οποία εμπεριέχουν την έννοια της ετεροσκεδαστικότητας.

Υπάρχει μια μεγάλη συλλογή των ερευνητικών εργασιών, όπου τα μοντέλα FIGARCH φαίνεται να έχουν καλύτερη αποδοτικότητα από ότι πολλά άλλα ετεροσκεδαστικά μοντέλα. Ο Baillie (1996) εφάρμοσε το μοντέλο FIGARCH για να μοντελοποιήσει τη μεταβλητότητα των συναλλαγματικών ισοτιμιών έτσι ώστε οι Bollerslev και Mikkelsen (1996) και Beine, Laurent, και Lecourt (2002) να εξετάσουν τις αποδόσεις των μετοχών.

Οι Banerjee και Sarkar (2006) διαμόρφωσαν την μεταβλητότητα των αποδόσεων από το Εθνικό Χρηματιστήριο. Οι Baillie, Han, Myers, και Song

(2007) εξέτασαν τις ιδιότητες μεγάλης μνήμης της απόδοσης της καθημερινότητας αλλά και αυτής εντός της μέρας για έξι βασικά εμπορεύματα. Οι μελλοντικές αποδόσεις των εμπορευμάτων φάνηκε να περιγράφονται σωστά από μια ακολουθία με έναν πολύ χαμηλό μέσο όρο καθώς και από το μοντέλο FIGARCH για την υπό συνθήκη διακύμανση.

Ο Αντωνακάκης (2007) διενέργησε μια έρευνα για την πρόβλεψη της ημερήσιας μεταβλητότητας της απόδοσης των συναλλαγματικών ισοτιμιών στις βιομηχανικές και τις αναπτυσσόμενες χώρες. Στη μελέτη του ανέφερε ότι μεταξύ όλων των ετεροσκεδαστικών μοντέλων το μοντέλο FIGARCH κατανέμει καλύτερα τα δεδομένα. Επίσης, η απόδοση του μοντέλου FIGARCH σε πρόβλεψη εκτός δείγματος ήταν καλύτερη.

Οι Cheong, Isa, και Nor (2008) μελέτησαν την αστάθεια στις αποδόσεις του Χρηματιστηρίου της Μαλαισίας χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο FIGARCH που επιτρέπει τις απότομες αλλαγές στην μεταβλητότητα. Τα αποτελέσματά τους αποκάλυψαν ότι υπήρχαν διαρθρωτικές αλλαγές στη μεταβλητότητα ειδικότερα στην περίπτωση που συνέβαινε μια νομισματική κρίση.

Οι Goudarzi (2010), Mukherjee, Sen, και Sarkar (2011) και Sawant και Yadav (2011) έχουν εξετάσει την παρουσία μεγάλης μνήμης της απόδοσης σειράς μετοχών στην χρηματιστηριακή αγορά της Βομβάης. Όλοι τους διαπίστωσαν ότι το FIGARCH μοντέλο ήταν το πιο κατάλληλο για αρκετές σειρές αποδόσεων των μετοχών.

Οι Crato και Ray (2000) και Jin και Frechette (2004) έχουν μελετήσει το φαινόμενο της μεγάλης μνήμης στην καθημερινή μεταβλητότητα των προθεσμιακών αποδόσεων των μετοχών βασικών γεωργικών προϊόντων.

Μια τελευταία αξιοσημείωτη εφαρμογή του FIGARCH μοντέλου έγινε από τους Tricaud, Sun, και Chen (2007) οι οποίοι προσπάθησαν να προβλέψουν τη στάθμη της Great Salt Lake στην Γιούτα των Η.Π.Α.

Κεφάλαιο 3: Παρουσίαση υφιστάμενων μοντέλων

3.1 Βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες

Στα οικονομικά, ένα χαρτοφυλάκιο είναι μια συλλογή από επενδύσεις ή αξιόγραφα που κατέχονται από άτομα, επενδυτικές εταιρείες, hedge funds ή και τράπεζες. Τα προαναφερθέντα αξιόγραφα είναι οικονομικοί πόροι που περιλαμβάνουν οποιοδήποτε υλικό ή άυλο αγαθό που μπορεί να κατέχεται ή ελέγχεται και εν δύναμη μπορεί να προσδώσει κέρδος. Γενικότερα οτιδήποτε που διακατέχεται από κάποια επενδυτική μονάδα, με σκοπό να έχει θετική οικονομική συνεισφορά μπορεί να θεωρηθεί ως αξιόγραφο.

Όπως γίνεται ξεκάθαρο ο όρος χαρτοφυλάκιο αναφέρεται σε κάθε συλλογή ή σύνολο από οικονομικά στοιχεία όπως μετοχές, ομόλογα, παράγωγα και νομίσματα. Είναι γενικά αποδεκτή αρχή ότι ένα χαρτοφυλάκιο πρέπει να σχεδιάζεται σύμφωνα με την ανοχή που έχει ο κάθε επενδυτής στον κίνδυνο, τους στόχους του και τέλος με το αν σκοπεύει η επένδυση του να είναι μακροχρόνια ή βραχυχρόνια.

Η θεωρία χαρτοφυλακίου είναι μια επενδυτική στρατηγική που στοχεύει στο να βρεθεί μια ισορροπία μεταξύ ρίσκου και ανταμοιβής, βρίσκοντας τα κατάλληλα ποσοστά από το συνολικό πλούτο που θα πρέπει να επενδυθούν στο κάθε αξιόγραφο ξεχωριστά καθώς και ποια είναι τα περιουσιακά στοιχεία που θα πρέπει να επιλεγούν από το εν δυνάμει σύνολο ολόκληρης της οικονομικής αγοράς. Καθώς καλούμαστε να επιλέξουμε το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο, στόχος θα πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό κέρδος με την ανάληψη του μικρότερου δυνατού κινδύνου. Αυτό είναι ένα τυπικό παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης πολλαπλών στόχων, όπου πολλές αποτελεσματικές βέλτιστες (efficient) λύσεις είναι διαθέσιμες, με αποτέλεσμα η προτιμηθείσα να πρέπει να επιλεγεί λαμβάνοντας υπόψη την αναλογία ρίσκου απόδοσης. Πρακτικά ένα χαρτοφυλάκιο Α είναι κατώτερο από ένα χαρτοφυλάκιο Β αν το Β έχει μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση με μικρότερο ή ίσο ρίσκο.

Η διαδικασία επιλογής των στοιχείων του χαρτοφυλακίου διασπάται σε 2 κύρια μέρη. Η πρώτη φάση αρχίζει με την παρατήρηση των διαθέσιμων αξιογράφων και τελειώνει με την εκτίμηση των μελλοντικών τους τιμών. Η δεύτερη φάση αρχίζει με τις σχετικές εκτιμήσεις που έχουμε κάνει για τα αγαθά αυτά και ολοκληρώνεται με την εύρεση των κατάλληλων ποσοστών με τα οποία καθένα από τα παραπάνω αξιόγραφα θα συμμετέχει στο σύνολο του χαρτοφυλακίου.

Η πλήρης λίστα με τα βήματα που ακολουθούνται στην διαδικασία είναι:

1) Συλλογή δεδομένων
2) Κατανόηση του μηχανισμού τιμολόγησης των αξιογράφων
3) Εκτίμηση των μελλοντικών τιμών
4) Εξαγωγή συμπερασμάτων για το προφίλ του κάθε αξιόγραφου
5) Επιλογή των κατάλληλων περιουσιακών στοιχείων

3.2 Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου

Το πρώτο μοντέλο που προσπάθησε να απαντήσει στις ανάγκες δημιουργίας ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου ήταν η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου (Modern Portfolio Theory). Παρά την τεράστια σημασία που έχει για τον κλάδο των οικονομικών, διάφοροι επιστήμονες αμφισβητούν το κατά πόσο είναι το ιδανικό επενδυτικό εργαλείο, καθώς το μοντέλο της συγκεκριμένης θεωρίας δεν ανταποκρίνεται πλήρως στην πραγματικότητα.
Οι μετρήσεις για το ρίσκο, την απόδοση και την συσχέτιση που χρησιμοποιούνται στην συγκεκριμένη θεωρία είναι βασισμένες στην αναμενόμενη τιμή των αξιογράφων, το οποίο σημαίνει ότι είναι μαθηματικές εκφράσεις για το μέλλον. Στην πράξη, οι επενδυτές πρέπει να αντικαταστήσουν τις προβλέψεις για την απόδοση των αξιογράφων καθώς και για την μεταβλητότητά τους αφού αυτές βασίζονται σε ιστορικές μετρήσεις. Πολύ συχνά οι μετρήσεις για την αναμενόμενη τιμή αποτυγχάνουν να λάβουν υπόψη τις νέες συνθήκες, που δεν υπήρχαν την ώρα που τα ιστορικά δεδομένα δημιουργούνταν.

Πιο συγκεκριμένα, οι επενδυτές είναι προσκολλημένοι στο να εκτιμούν κύριες παραμέτρους από δεδομένα του παρελθόντος, αφού η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου προσπαθεί να μοντελοποιήσει τον κίνδυνο δίνοντας πιθανότητες σε αντίστοιχα ποσά ζημιών, χωρίς να αναφέρουν καθόλου τους λόγους για τους οποίους αυτές οι πτώσεις στην αξία του κάθε αξιόγραφου συμβαίνουν. Καθώς πιθανά λάθη στις εκτιμήσεις είναι καίριας σημασίας, κατάλληλα μοντέλα εκτίμησης πρέπει να εφαρμοστούν. Στην Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου ακριβείς υπολογισμοί της διακύμανσης καθώς επίσης και του πίνακα συνδιακυμάνσεων είναι απαραίτητοι. Επιπλέον, είναι ιδιαίτερα σημαντικό κατά την διάρκεια μοντελοποίησης να λαμβάνονται υπόψη εμπειρικά χαρακτηριστικά για τις αποδόσεις των μετοχών, όπως είναι η αυτοπαλινδρόμηση, η ασύμμετρη μεταβλητότητα, η λοξότητα και η κυρτότητα.

Η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου χρησιμοποιεί το μέγεθος της διακύμανσης για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου, δράση που ίσως δικαιολογείται κάτω από την υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν ελλειπτική κατανομή, όπως είναι η κανονική.

Στην πράξη, η διακύμανση είναι ένα συμμετρικό μέτρο κινδύνου υπό την έννοια πως αντιμετωπίζει τις υψηλές αποδόσεις ως εξίσου ριψοκίνδυνες με αυτές που είναι αντίστοιχα χαμηλές. Δηλαδή δεν υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα στις υψηλές και χαμηλές αποδόσεις.

Μερικοί θα συμφωνήσουν πως στην πραγματικότητα οι επενδυτές ανησυχούν μόνο για τις απώλειες, και δεν γίνεται να αντιμετωπίζουν ως κίνδυνο τις αποδόσεις που είναι πάνω από την μέση απόδοση. Κάτω από αυτή την θεώρηση, ο υπολογισμός του ρίσκου είναι θεμελιωδώς ασύμμετρος από την φύση του. Η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου έχει επίσης σχολιαστεί αρνητικά καθώς υποθέτει ότι οι αποδόσεις ακολουθούν Κανονική κατανομή.

Όπως έχει γίνει ξεκάθαρο από τα προαναφερθέντα, κάποιες από τις υποθέσεις του συγκεκριμένου μοντέλου δεν μπορούν να χαρακτηριστούν λογικές.

Ιστορικά, η πρώτη προσπάθεια να βρεθεί το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο βασίστηκε στην αναλογία ρίσκου/απόδοσης όπως αναλύθηκε και θεμελιώθηκε στην Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου. Η συγκεκριμένη θεωρία είναι ένα μαθηματικό πλαίσιο για την κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου από αξιόγραφα των οποίων η αναμενόμενη απόδοση μεγιστοποιείται για κάθε επίπεδο ρίσκου. Ιδιαίτερα, κύριας σημασίας είναι να αναφερθεί το γεγονός πως δεν πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το ρίσκο ή αλλιώς η διακύμανση του κάθε αξιόγραφου ξεχωριστά αλλά το πώς συνεισφέρει και επηρεάζει την διακύμανση του ευρύτερου χαρτοφυλακίου στο οποίο ανήκει.

Κύρια υπόθεση της Θεωρίας Χαρτοφυλακίου είναι ότι οι επενδυτές έχουν αποστροφή προς τον κίνδυνο καθώς επίσης πως είναι ορθολογιστές, δηλαδή επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους. Αυτό σημαίνει πως αν έχουν στην διάθεσή τους δύο χαρτοφυλάκια που έχουν την ίδια αναμενόμενη μέση απόδοση και το ένα έχει μικρότερη διακύμανση (δηλαδή ρίσκο) από το άλλο αυτοί θα διαλέξουν αυτό με την μικρότερη διακύμανση. Σαν αποτέλεσμα, οι επενδυτές αφού διέπονται από αποστροφή στον κίνδυνο, θα δεχτούν να αναλάβουν επιπλέον κίνδυνο αν και μόνο αν αυτός συνοδεύεται με επιπλέον αναμενόμενο κέρδος. Αντιστρόφως, ένας επενδυτής που θέλει μεγαλύτερες αναμενόμενες αποδόσεις για το χαρτοφυλάκιό του θα δεχτεί να αναλάβει επιπλέον κίνδυνο.

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα είναι ένα μαθηματικό εργαλείο, μέσω του οποίου υπολογίζεται η ανοχή στον κίνδυνο του εκάστοτε επενδυτή. Ένας επενδυτής είναι αποστρέφων τον κίνδυνο (risk-averse) αν προτιμά ένα δίκαιο στοίχημα σε σχέση με ένα του οποίου οι πιθανότητες είναι εναντίον του. Ως δίκαιο παιχνίδι ορίζεται αυτό που έχει αναμενόμενη απόδοση μηδέν. Η αποστροφή στον κίνδυνο μεταφράζεται από μαθηματικής πλευράς μέσω της κοιλότητας (concavity) της συνάρτησης ωφελιμότητας.

Ένας επενδυτής είναι ασθενώς αποστρέφων τον κίνδυνο (weakly risk-averse) αν προτιμά ανάμεσα σε μία ρισκοφόρα επένδυση και μία ακίνδυνη επένδυση με την ίδια αναμενόμενη απόδοση την ακίνδυνη. Αν ο επενδυτής δεν εμφανίζει κάποια συγκεκριμένη προτίμηση ανάμεσα σε αυτές τις δύο επενδύσεις τότε καλείται ουδέτερος ως προς τον κίνδυνο (risk neutral). Τέλος, ένας επενδυτής καλείται κινδυνόφιλος (risk lover) αν προτιμάτε πάντα η επένδυση με τον περισσότερο κίνδυνο.

Με την βοήθεια της Bernoulli συνάρτησης ωφελιμότητας (Bernoulli utility function) η παρουσίαση των παραπάνω προτιμήσεων γίνεται ως εξής. Αν ο επενδυτής είναι risk averse τότε και μόνο τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\mathrm{dF}(x) \leq u(\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{dF}(x)) \quad \text{για κάθε κατανομή F } (\cdot),$$

Η παραπάνω είναι η ανισότητα του Jensen και η καθοριστική της ιδιότητα είναι το ότι είναι κοίλη. Ως αποτέλεσμα η αποστροφή είναι ισοδύναμη με την κοιλότητα της Bernoulli utility function u(x). Έτσι έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

- Αυστηρά κοίλη ↔ ο επενδυτής είναι αυστηρά risk aversion
- Γραμμική ↔ ο επενδυτής είναι αυστηρά risk neutral
- Αυστηρά κυρτή ↔ ο επενδυτής είναι risk loving

Η αναλογία μεταξύ κινδύνου και ανταμοιβής, θα είναι σταθερή για δεδομένα χαρτοφυλάκια, αλλά ο κάθε επενδυτής θα αξιολογήσει την παραπάνω αναλογία διαφορετικά βασιζόμενος στο κατά πόσο πρόθυμος είναι να αναλάβει ρίσκο. Η εφαρμογή του παραπάνω είναι πως ένας λογικός επενδυτής δεν θα επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο αν υπάρχει παράλληλα ένα άλλο που έχει πιο ελκυστικό προφίλ ρίσκου-απόδοσης

Όπως είναι ξεκάθαρο, η μείωση του κινδύνου είναι το κύριο μέλημα της θεωρίας χαρτοφυλακίου. Ο απλούστερος τρόπος να το επιτύχει κανείς αυτό είναι μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Ένας επενδυτής μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο στον οποίο είναι εκτεθειμένο το χαρτοφυλάκιό του, έχοντας στην κατοχή του ζεύγη από αξιόγραφα τα οποία δεν είναι θετικά συσχετισμένα μεταξύ τους. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο επενδυτής να μπορεί να περιορίσει την έκθεση που έχει στον κίνδυνο από το κάθε αξιόγραφο ξεχωριστά, αν έχει ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο στην κτήση του.

Το μοντέλο του Markowitz

Η διαφοροποίηση μειώνει τον κίνδυνο ενώ κρατά την αναμενόμενη απόδοση σταθερή. Για να καταστεί πιο ξεκάθαρο, παρουσιάζουμε το μαθηματικό πλαίσιο το οποίο μας δίνει την αναμενόμενη απόδοση και την διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν N κινδυνοφόρα αξιόγραφα (risky assets), των οποίων τα ποσοστά αποδόσεων δίνονται από τις τυχαίες μεταβλητές $R_1, R_2, \dots, R_N$ όπου:

$$R_i = \frac{S_i(1)-S_i(0)}{S_i(0)}, \quad \text{i}= 1,2,\dots,N.$$

Τότε η αναμενόμενη απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$E\left(R_p\right) = \sum_i w_i E(R_i)$$

Όπου R_p είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, R_i είναι η αναμενόμενη απόδοση του i αξιογράφου και w_i είναι το βάρος του αξιογράφου i (δηλαδή δηλώνει το ποσοστό του κεφαλαίου που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο i) με

$$\sum_i w_i = 1$$

Η Διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_p^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Όπου ρ_{ij} είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων των αξιογράφων i και j.

Μεταβλητότητα των αποδόσεων του αξιογράφου (τυπική απόκλιση): $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$

Αν όλα τα αξιόγραφα είναι πλήρως ασυσχέτιστα τότε η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου:

$$\sigma_p^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2$$

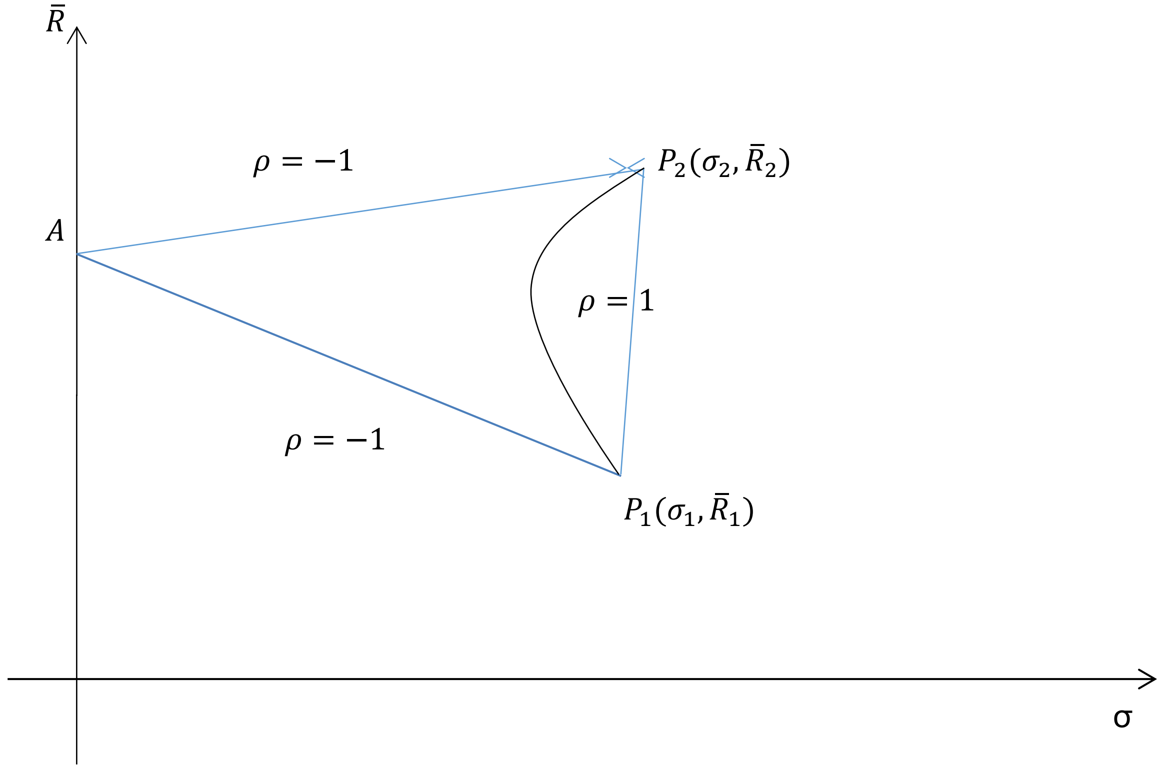
Στην περίπτωση που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από δύο μόνο αξιόγραφα τότε η αναμενόμενη απόδοση δίνεται από τον τύπο:

$$E(R_p) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B) = w_A E(R_A) + (1 - w_A) E(R_B)$$

Ενώ η διακύμανση από: $\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$

Αν τα δύο αξιόγραφα έχουν $\rho_{AB} < 0$ (δηλαδή είναι αρνητικά συσχετισμένα) τότε ο όρος $2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$ είναι αρνητικός και η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι μειωμένη σε σχέση με αυτήν της περίπτωσης $\rho_{AB} = 0$.

Παρουσιάζοντας γραφικά τα παραπάνω έχουμε:



Γράφημα 1

Για διάφορες τιμές του α τα σημεία $(\sigma_P, \bar{R}_P)$ δημιουργούν μια κωνική καμπύλη , όπως φαίνεται παραπάνω, στο πεδίο $\sigma - \bar{R}$. Για $\rho = -1$ είναι πιθανό να έχουμε $\sigma = 0$ για μια κατάλληλη επιλογή βαρών. Σε γενικές γραμμές βάζοντας δύο αξιόγραφα των οποίων οι αποδόσεις είναι αρνητικά συσχετισμένες πετυχαίνουμε μείωση του κινδύνου σε ένα χαρτοφυλάκιο δύο αξιογράφων.

Ειδικότερα:

- όταν $\rho = 1$ ισχύει:

$$\sigma_P(\alpha; \rho = 1) = \sqrt{(1-\alpha)^2\sigma_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2} = (1-\alpha)\sigma_1 + \alpha\sigma_2$$

Η οποία είναι η ευθεία γραμμή που ενώνει τα σημεία $P_1(\sigma_1, \bar{R}_1)$ και $P_2(\sigma_2, \bar{R}_2)$

- όταν $\rho = -1$ ισχύει:

$$\sigma_P(\alpha; \rho = -1) = \sqrt{[(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2]^2} = |(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2|$$

Εάν το α είναι πολύ μικρό και πολύ κοντά στο μηδέν το αντίστοιχο σημείο βρίσκεται πολύ κοντά στο $P_1(\sigma_1, \bar{R}_1)$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\sigma_P(\alpha; \rho = -1) = (1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2$$

Και το σημείο α δίνεται από τη σχέση $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$

Επίσης η ποσότητα $(1-\alpha)\sigma_1 - \alpha\sigma_2$ παραμένει θετική όσο ισχύει η παραπάνω σχέση για το α.

- Όταν $-1 < \rho < 1$ το σημείο ελάχιστης διακύμανσης στην καμπύλη που αντιπροσωπεύει διάφορους συνδυασμούς χαρτοφυλακίου καθορίζεται από την σχέση:

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha} = -2(1-\alpha)\sigma_1^2 + 2\alpha\sigma_2^2 + 2(1-2\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 = 0$$

Και λύνοντας ως προς α έχουμε $\alpha = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$

Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βελτιστωποίησης

Έτσι το πρόβλημα βελτιστωποίησης διατυπώνεται ως εξής:

- Ελαχιστοποίηση του

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i \sigma_{ij} w_j$$

    Κάτω από τους περιορισμούς

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i = \mu_P$$

    Και

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

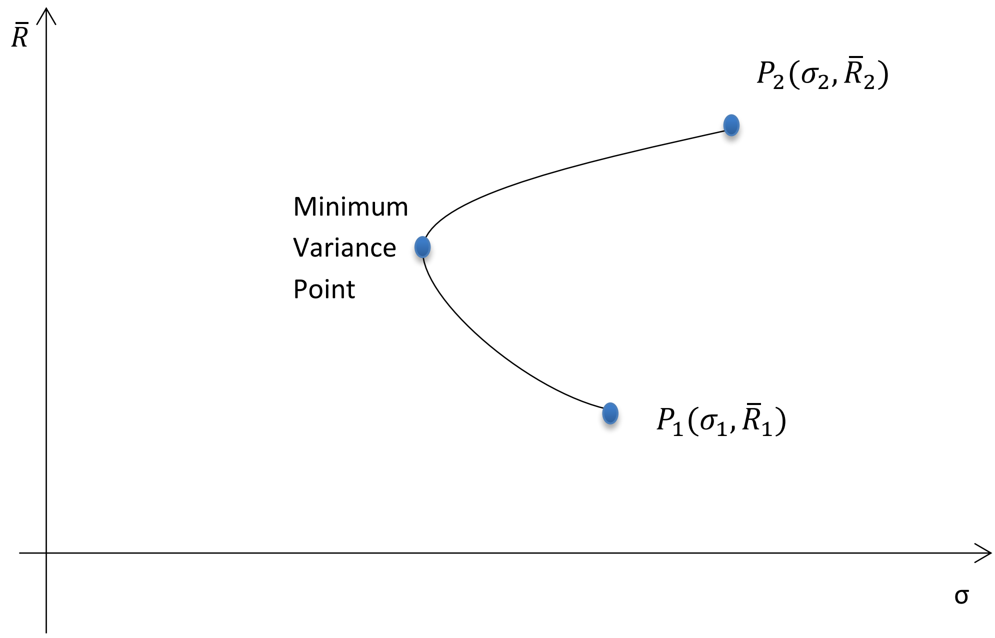
Δεδομένου της απόδοσης – στόχου που αναμένεται να έχει το χαρτοφυλάκιο μ_P βρίσκουμε την στρατηγική αυτή που ελαχιστοποιεί το σ_P^2.

Το παραπάνω γίνεται ως εξής:

- Έχουμε σχηματίσει την εξίσωση Lagrange

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{N} w_i - 1\right) - \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \, \bar{R}_i - \mu_P\right)$$

    όπου λ_1 και λ_2 πολλαπλασιαστές της εξίσωσης Lagrange.



<u>Γράφημα 2</u>

Το αριστερό όριο της εφικτής περιοχής ονομάζεται minimum variance set. Το πιο αριστερό σημείο στο minimum variance set ονομάζεται minimum variance point και τα χαρτοφυλάκια με την ελάχιστη διακύμανση ονομάζονται frontier funds.

Για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου οι επενδυτές προτιμούν μόνο εκείνα τα χαρτοφυλάκια τα οποία είναι στο επάνω μισό των αποδοτικών χαρτοφυλακίων (efficient funds).

Ένα χαρτοφυλάκιο w^* λέγεται αποδοτικό όσον αφορά τη μέση διακύμανση, αν δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο w με $\mu_P \geq \mu_P^*$ και $\sigma_P^2 \leq {\sigma_P^*}^2$ εκτός από το ίδιο το w^*. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει χαρτοφυλάκιο με υψηλότερη απόδοση και χαμηλότερο ρίσκο από ένα «αποδοτικό χαρτοφυλάκιο» (efficient portfolio).

Risk free asset

Υποθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο με βάρος α για ένα risk free asset και $1-\alpha$ για ένα risky asset. Η μέση τιμή του χαρτοφυλακίου δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{R}_P = a\bar{R}_f + (1-a)\bar{R}_j, \quad \text{για } R_f = \bar{R}_f$$

Η συνδιακύμανση σ_{fj} μεταξύ του risk free asset και οποιουδήποτε risky asset είναι ίση με το μηδέν αφού:

$$E\left[\left(R_j - \bar{R}_j\right)\left(R_f - \bar{R}_f\right)\right] = 0$$

μηδέν

Ως εκ τούτου, η διακύμανση του χαρτοφυλακίου σ_P^2 είναι:

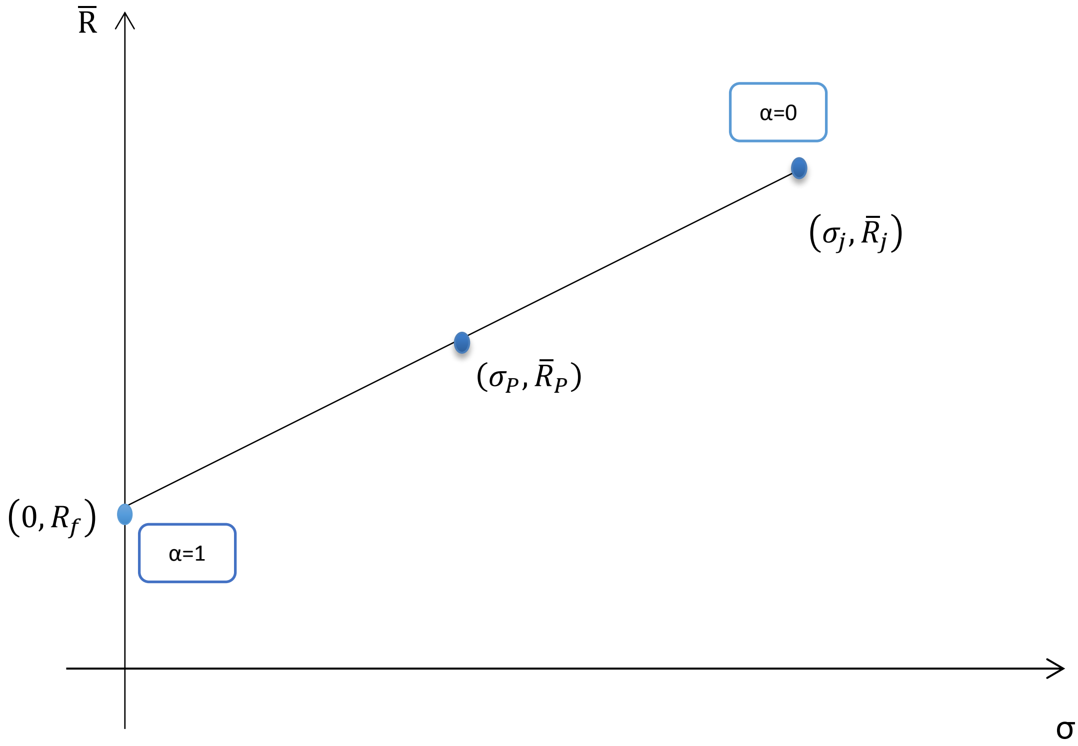
$$\sigma_P^2 = \alpha^2\sigma_f^2 + (1-a)^2\sigma_j^2 + 2a(1-a)\sigma_{fj}$$

μηδέν μηδέν

άρα $\sigma_P = |1-\alpha|\sigma_j$.

Τα σημεία που αντιπροσωπεύουν τα $(\sigma_P, \bar{R}_P)$ για διάφορες τιμές του α βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή που ενώνει τα $\left(0, R_f\right)$ και $(\sigma_j, \bar{R}_j)$.

Παρακάτω φαίνεται το αντίστοιχο γράφημα:



<u>Γράφημα 3</u>

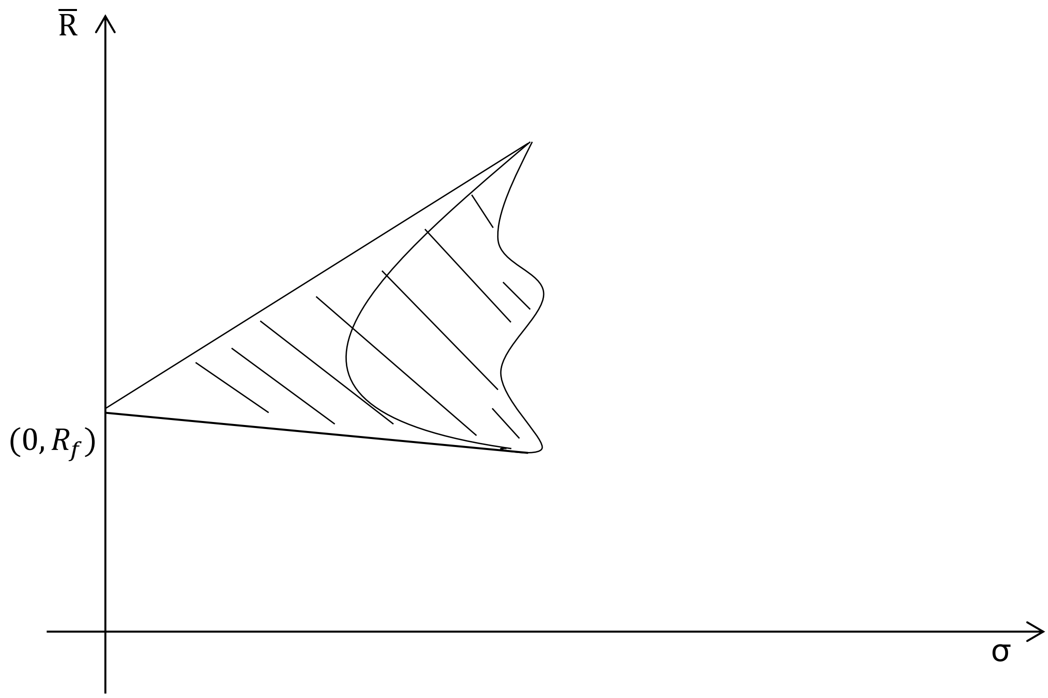
Σε περίπτωση που επιτρέπεται ο δανεισμός του risk free asset, το α μπορεί να είναι αρνητικό και η γραμμή εκτείνεται πέρα από τη δεξιά πλευρά του $(\sigma_j, \bar{R}_j)$ πιθανότατα μέχρι το άπειρο.

<u>Περίπτωση Α: Επιτρέπεται η δανειοδότηση και η δανειοληψία των risk free assets</u>

Για κάθε αρχικό χαρτοφυλάκιο που σχηματίζεται με τη χρήση N risky assets, οι νέοι συνδυασμοί δημιουργούν μια άπειρα εκτεινόμενη ευθεία που προέρχεται από το risk free asset και διέρχεται από το σημείο που αντιπροσωπεύει το αρχικό χαρτοφυλάκιο. Το σύνολο των ευθειών αυτών σχηματίζουν μια άπειρη τριγωνική περιοχή που ορίζεται από τις δύο εφαπτόμενες γραμμές από το risk free point μέχρι την αρχική περιοχή.

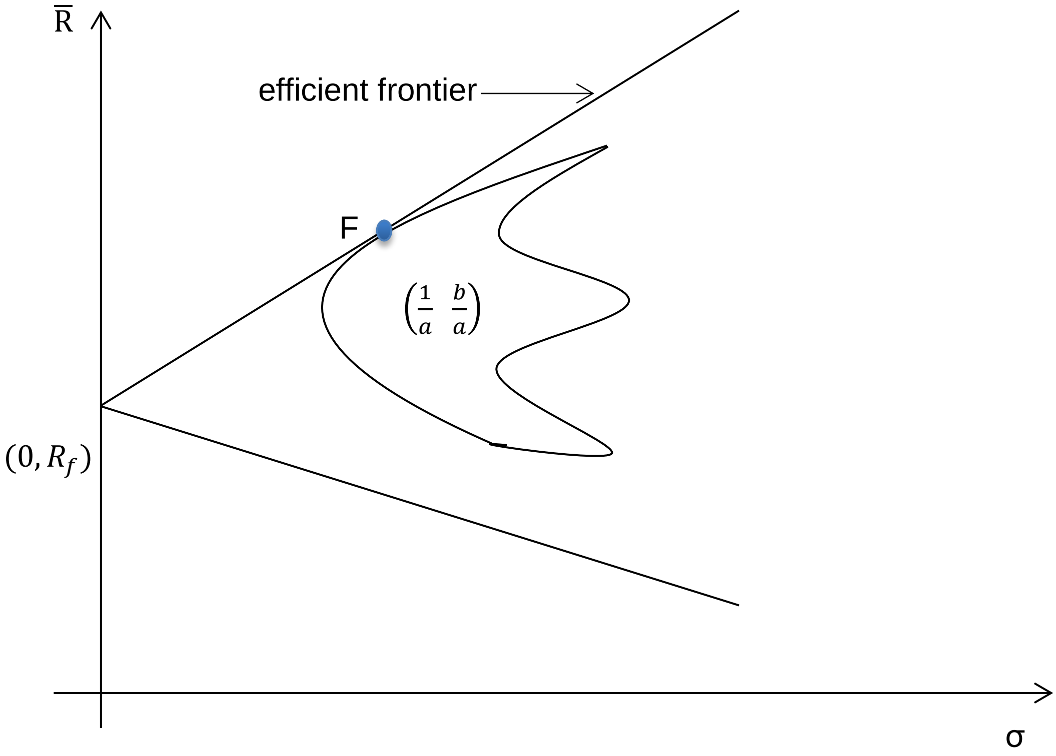
<u>Περίπτωση Β: Μη μείωση του risk free asset</u>

Η γραμμή που διέρχεται από το risk free point δεν μπορεί να επεκταθεί πέρα από τα σημεία της αρχικής περιοχής (αλλιώς συνεπάγεται δανεισμός). Παρακάτω φαίνεται το αντίστοιχο σχήμα:



<u>Γράφημα 4</u>

Το νέο αποτελεσματικό σύνολο είναι η ευθεία γραμμή στην κορυφή της τριγωνικής περιοχής. Αυτή η γραμμή εφάπτεται με την τριγωνική περιοχή σε ένα σημείο F το οποίο έγκειται στα «αποδοτικά σύνορα» (efficient frontier) της αρχικής περιοχής όπως στο παρακάτω σχήμα:



Γράφημα 5

Εδώ $R_f < \frac{b}{a}$. Η υπόθεση αυτή είναι λογική δεδομένου ότι το risk free asset θα κερδίζει ένα ποσοστό απόδοσης μικρότερο από το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του παγκόσμιου χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης. Το efficient frontier παρουσιάζεται αναλυτικότερα παρακάτω.

Η διαφοροποίηση όμως, δεν μπορεί να περιορίσει όλη την διακύμανση. Το χαρτοφυλάκιο με την μέγιστη αναμενόμενη απόδοση δεν είναι απαραίτητα αυτό με την μικρότερη διακύμανση.

Υποθέτουμε γενικά ότι δεν υπάρχει κανένα αξιόγραφο που να είναι συνδυασμός άλλων αξιογράφων του χαρτοφυλακίου. Πρέπει να τονίσουμε ότι ο κίνδυνος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου ποσοτικοποιείται από το σ_P^2 . Στην ανάλυση της μέσης διακύμανσης μόνο το $E[R_P]$ και το $Var(R_P)$ λαμβάνονται υπ' όψη στο χαρτοφυλάκιο, ενώ στις θεωρίες επενδύσεων πριν από τον Markowitz επικεντρώνονταν στην μεγιστοποίηση του $E[R_P]$ χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν το $Var(R_P)$.

Από την στιγμή που ο Harry Markowitz όρισε πλήρως το συγκεκριμένο μοντέλο, δέχτηκε δριμύτατη αμφισβήτηση σχετικά με τις υποθέσεις που έχει δεχτεί και τον υπολογισμό θεμελιωδών μεγεθών όπως η αναμενόμενη απόδοση και η διακύμανση των αξιογράφων. Η μεγαλύτερη συνεισφορά της Σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου ήταν η θεμελίωση της ιδέας της αναλογίας ρίσκου-απόδοσης για τις επενδύσεις. Ορίζοντας το επενδυτικό ρίσκο σε αριθμητικούς όρους, ο Markowitz έδωσε στους επενδυτές ένα μαθηματικό πλαίσιο για να προσεγγίσουν την διαχείριση χαρτοφυλακίων καθώς και για την σωστή επιλογή αξιογράφων.

Όπως όμως ομολογούν και οι Markowitz και William Sharpe (ο οποίος επίσης είχε τεράστια συνεισφορά στην θεμελίωση της θεωρίας χαρτοφυλακίου) είναι φανεροί οι περιορισμοί στην θεωρία. Ως αποτέλεσμα, ο Markowitz προτείνει από μόνος του ένα μοντέλο που θα στηριζόταν πλέον στην ημι-διακύμανση χωρίς εν τέλει ο ίδιος να ακολουθήσει την συγκεκριμένη προσέγγιση. Οι λόγοι που οδήγησαν στα όχι και τόσο ικανοποιητικά αποτελέσματα της Σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίων παραθέτονται παρακάτω:

1) Το αν και κατά πόσο η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι το σωστό μέτρο μέτρησης του επενδυτικού κινδύνου.
2) Καθώς επίσης και το αν οι αποδόσεις των επενδύσεων και των αξιογράφων ακολουθούν κανονική κατανομή.

3.3 Post-Modern Portfolio Theory

Από το 1952 που έκανε την εμφάνισή της η παραπάνω θεωρία, πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για να βελτιώσουν το μοντέλο, ειδικά χρησιμοποιώντας πιο ρεαλιστικές υποθέσεις. Οι πρώτες προσπάθειες γίνανε με την εμφάνιση της Post-Modern Portfolio Theory (PMPT), η οποία επέκτεινε την θεωρία του Markowitz υιοθετώντας ευρύτερες υποθέσεις όπως ότι οι κατανομές των αποδόσεων δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή καθώς και πως τα μέτρα κινδύνου πρέπει να είναι ασύμμετρα. Η Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου ύστερα από τις παραπάνω γενικεύσεις δεν ήταν τίποτα άλλο από μια ειδική (συμμετρική) περίπτωση του Post-Modern Portfolio Theory μοντέλου.

Στο Post-Modern Portfolio Theory μοντέλο το πρώτο εργαλείο που εισήχθη από τους Brian M. Rom και Kathleen Ferguson το 1993 ήταν ένα μέτρο κινδύνου που το ονόμασαν downside risk (DR). Το συγκεκριμένο μέτρο υπολογίζεται βάσει της target semi-deviation (της τετραγωνικής ρίζας της target semi-variance) και καλείται downside deviation. Αυτό το μέτρο είναι εκφρασμένο σε ποσοστά με αποτέλεσμα να επιτρέπει την κατάταξη με τρόπο ανάλογο αυτού της τυπικής απόκλισης.

Ένας διαισθητικός τρόπος να δει κανείς το downside risk είναι η τετραγωνική ρίζα της με βάρη ρίζας των κάτω από τον στόχο αποδόσεων (probability-weighted squared below-target returns). Το τετράγωνο των κάτω από την απόδοση-στόχο έχει την ιδιότητα να δίνει τετραγωνική ποινή στις αποτυχίες και υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$d = \sqrt{\int_{-\infty}^{t} (t-r)^2 * f(r)dr}$$

Όπου

d είναι το downside risk

t είναι ο ετήσιος στόχος απόδοσης, αρχικά αναφερόμενος ως το ελάχιστα αποδεκτό πόσο απόδοσης

r είναι η τυχαία μεταβλητή που παρουσιάζει την απόδοση και

f(r) είναι η κατανομή των ετήσιων αποδόσεων.

Το δεύτερο στατιστικό εργαλείο που χρησιμοποίησαν οι Rom and Ferguson στα πλαίσια του PMPT ήταν η λοξότητα της μεταβλητότητας, η οποία μετράει την αναλογία των ποσοστών της κατανομής της συνολικής διασποράς των αποδόσεων που είναι πάνω από την μέση τιμή, διά τα ποσοστά της κατανομής της συνολικής διασποράς των αποδόσεων κάτω από την μέση τιμή. Επιπλέον αν η κατανομή των αποδόσεων είναι συμμετρική (όπως για παράδειγμα υποθέτει στο μοντέλο του ο Markowitz) η λοξότητα της μεταβλητότητας είναι 1. Τιμές μικρότερες του 1 δηλώνουν αρνητική ασυμμετρία ενώ τιμές μεγαλύτερες δηλώνουν θετική ασυμμετρία.

Η λοξότητα της μεταβλητότητας είναι συσχετισμένη με την παραδοσιακή στατιστική μέτρηση της ασυμμετρίας. Η σημασία της ασυμμετρίας έγκειται στο γεγονός ότι όσο περισσότερο μη κανονική είναι μια κατανομή αποδόσεων, τόσο περισσότερο το πραγματικό της ρίσκο παραποιείται από τα συνηθισμένα μέτρα της Σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου όπως το Sharpe ratio. Επιπλέον με την ύπαρξη της αντιστάθμισης του κινδύνου και των παραγώγων, αξιόγραφα τα οποία ακολουθούν κατανομή ασύμμετρη, εκ φύσεως για αυτά οι μετρήσεις της Σύγχρονης Θεωρίας Χαρτοφυλακίου είναι πλήρως λανθασμένες. Αντιθέτως το PMPT μοντέλο είναι σε θέση να πραγματοποιήσει καλύτερους υπολογισμούς και συνεπώς να προσφέρει ορθότερη πληροφόρηση όσον αφορά τις αποδόσεις των παραπάνω αξιογράφων. Επιπλέον, όπως είναι εύκολα κατανοητό τα περισσότερα από τα οικονομικά αγαθά δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν κατάλληλα από την κανονική κατανομή. Οι λόγοι για την ορθή αυτή μοντελοποίηση είναι τόσο ότι οι τιμές πολλών χρηματοοικονομικών προϊόντων δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες γύρω από το μέσο, καθώς επίσης και το γεγονός πως πολλά ακολουθούν κατανομές με βαριές ουρές.

3.4 Black-Litterman Model

Το επόμενο σημαντικό κεφάλαιο στην θεωρία χαρτοφυλακίου έγινε το 1992 από τους Black και Litterman στοχεύοντας να λύσουνε τα προαναφερθέντα προβλήματα. Ως πρώτο πρόβλημα εντόπισαν το γεγονός πως η εκτίμηση των αναμενόμενων αποδόσεων ήταν δύσκολη. Οι επενδυτές γενικά έχουν μια καλή γνώση σχετικά με τις αποδόσεις μόνο σε μερικές αγορές. Όμως ένα τυπικό μοντέλο βελτιστοποίησης απαιτεί να υπάρχει γνώση και ροή δεδομένων για όλα τα αξιόγραφα και τα νομίσματα. Επιπλέον οι επενδυτές πρέπει να προβούν σε εκτίμηση των μελλοντικών αποδόσεων βασισμένη μόνο σε ιστορικά δεδομένα, που συχνά οδηγούν σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

Οι Black και Litterman συμπερασματικά περιέγραψαν μια προσέγγιση, που παρείχε μια διαισθητική λύση στο πρόβλημα αυτό.

3.5 Market Risk

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να εξηγήσουμε τι είναι το market risk και ποιες είναι οι διαφορές συστημικού και συστηματικού κινδύνου. Στις επενδύσεις υπάρχουν πολλοί τύποι ρίσκου, κάποιοι εκ των οποίων είναι: κίνδυνος επιτοκίου (Interest Rate Risk), επιχειρηματικός κίνδυνος (Business Risk), πιστωτικός κίνδυνος (Credit Risk), φορολογικός κίνδυνος (Taxability Risk), κίνδυνος κλήσης (Call Risk), κίνδυνος πληθωρισμού(Inflationary Risk), κίνδυνος ρευστότητας (Liquidity Risk), κίνδυνος αγοράς (Market Risk), κίνδυνος επανεπένδυσης (Reinvestment Risk), πολιτικός κίνδυνος (Political Risk) και κίνδυνος ισοτιμίας (Currency Risk).

Ο πιο καταστροφικός από αυτούς που αναφέρθηκαν για ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο είναι το Market Risk. Το Market Risk που επίσης ονομάζεται συστηματικός κίνδυνος (Systematic Risk) είναι ένας κίνδυνος μιας επένδυσης που σχετίζεται με αδυναμίες στην δομή της αγοράς. Με άλλα λόγια οι απώλειες στην επένδυσή μας οφείλονται σε παράγοντες που επηρεάζουν την συνολική κατάσταση της αγοράς. Αυτός ο συγκεκριμένος τύπος κινδύνου δεν μπορεί να περιοριστεί μέσω της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου και μπορεί να αντιμετωπιστεί μόνο μέσω hedging (αντιστάθμιση).

Το Market Risk ή αλλιώς Systematic Risk δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον συστημικό κίνδυνο (Systemic Risk) ο οποίος είναι ο κίνδυνος συρρίκνωσης ενός ολόκληρου οικονομικού συστήματος εξ' αιτίας της αδυναμίας ενός μόνο μέρους του, γνωστό και ως Split Over Effect. Η χρεοκοπία μιας επενδυτικής Τράπεζας (όπως για παράδειγμα η Lehman Brothers) που οδήγησε στην οικονομική κρίση του 2008 είναι ένα κλασικό παράδειγμα ενός Systemic Risk ενώ η ύπαρξη έντονης ύφεσης, ενός πολέμου ή μιας φυσικής καταστροφής είναι τυπικά παραδείγματα Market Risk.

Ο μη συστηματικός κίνδυνος (Unsystematic Risk or Specific Risk) είναι ο κίνδυνος που συνδέεται απευθείας με την απόδοση μιας συγκεκριμένης επένδυσης. Το χαρτοφυλάκιο μας σε αυτή την περίπτωση μπορεί να προστατευτεί μέσω της διαφοροποίησης και της επένδυσης σε διάφορα οικονομικά προϊόντα. Η χρεοκοπία μιας εταιρείας (μετοχές της οποίας περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο μας) της οποίας το μέγεθος δεν είναι ικανό να συμπαρασύρει ολόκληρη την αγορά σε πτώση είναι ένα παράδειγμα Specific Risk.

Σε αντίθεση με το Specific Risk το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με ποικίλους τρόπους όπως το VaR και το ES, το Market Risk μπορεί μόνο να υπολογιστεί μέσω του συντελεστή βήτα (beta coefficient).

Έτσι, για την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου ανθεκτικού στο Market Risk θα πρέπει να γίνει συνυπολογισμός του εκτιμητή Βήτα κατά την επιλογή του αξιογράφων που θα προστεθούν σε αυτό. Ο συντελεστής Βήτα υπολογίζεται μέσω του CAPM, κάτι που θα παρουσιάσουμε παρακάτω και αποτελεί ένα από τα κυριότερα επενδυτικά εργαλεία παγκοσμίως.

3.6 Συντελεστής Βήτα

Ο συντελεστής βήτα εκφράζει την τάση των αποδόσεων ενός αξιογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου να ανταποκρίνεται στις αλλαγές προσήμου της αγοράς. Ισοδύναμα, ο συντελεστής βήτα μετράει την μεταβλητότητα (volatility) ενός αξιογράφου (χαρτοφυλακίου) σε σύγκριση με την μεταβλητότητα ολόκληρης της αγοράς.

- Αν ο συντελεστής είναι μεγαλύτερος από την μονάδα ($\beta > 1$) τότε το αντίστοιχο αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) είναι πιο ευαίσθητο από ότι η αγορά και ως εκ τούτου θα έχει μεγαλύτερες ταλαντώσεις σε σχέση με την ίδια την αγορά.
- Αν ο συντελεστής είναι μεγαλύτερος του μηδενός και μικρότερος της μονάδας ($0 < \beta < 1$) τότε το αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) είναι λιγότερο ευμετάβλητο από την αγορά.
- Αν ο συντελεστής είναι ίσος με το μηδέν ($\beta = 0$), τότε το αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) παραμένει ανεπηρέαστο από τις ταλαντώσεις της αγοράς.
- Αν ο συντελεστής είναι μικρότερος του μηδενός ($\beta < 0$), τότε έχουμε ένα αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο), το οποίο κατά κανόνα κινείται αντίθετα με την αγορά, με αποτέλεσμα όταν η αγορά στο σύνολό της πέφτει, το εν λόγω αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) να ανεβαίνει. Αν $\beta < -1$ τότε το αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) χαρακτηρίζεται ως ασταθές, ενώ για $-1 \leq \beta < 0$ το αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) χαρακτηρίζεται σχετικά ευσταθές.
- Αν ο συντελεστής είναι ίσος με τη μονάδα ($\beta = 1$), τότε έχουμε το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο κατά μέσο όρο ακολουθεί τις ταλαντώσεις της αγοράς. Αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου και της αγοράς είναι σε κάθε χρονική στιγμή η ίδια.

Ο συντελεστής βήτα δεν έχει συγκεκριμένο όριο τιμών. Αν ένα αξιόγραφο (χαρτοφυλάκιο) έχει ασθενή αλλά θετική συσχέτιση με την αγορά και υψηλή μεταβλητότητα τότε ενδέχεται το βήτα να παίρνει πολύ υψηλές τιμές.

Γενικά, ο συντελεστής βήτα είναι ένα σημαντικό μέτρο κινδύνου που μετράει το ποσό του επιπλέον κινδύνου που προστίθεται σε ένα ήδη υπάρχον και διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο. Η αξία του έγκειται στο γεγονός ότι μετρά τον κίνδυνο επένδυσης που δεν μπορεί να μειωθεί μέσω της διαφοροποίησης.

Ο συντελεστής βήτα μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας ανάλυση παλινδρόμησης μεταξύ του εκάστοτε αξιογράφου και του γενικού δείκτη του χρηματιστηρίου. Το βήτα είναι μια στατιστική μεταβλητή και πρέπει να εξετάζεται μέσο του συντελεστή προσδιορισμού R^2.

Προφανώς το βήτα της αγοράς θα πρέπει να είναι ίσο με το 1.

3.7 Μοντέλο αποτίμησης αξιογράφων (Capital Asset Pricing Model CAPM)

Το CAPM χρησιμοποιείται για την αποτίμηση αξιογράφων, τόσο για κάθε ένα εξ' αυτών ξεχωριστά όσο και για ένα χαρτοφυλάκιο στο σύνολό του. Η αποτίμηση βασίζεται στην αποζημίωση του επενδυτή για δύο πράγματα, πρώτον για τον χρόνο που θα κρατήσει το αξιόγραφο και δεύτερον για το επιπλέον ρίσκο που θα αναλάβει αγοράζοντάς το. Ως μοντέλο περιγράφει τη σχέση μεταξύ του κινδύνου και της αναμενόμενης απόδοσης.

Στο CAPM η χρονική αξία του χρήματος παρουσιάζεται από ένα ακίνδυνο επιτόκιο που αποζημιώνει τους επενδυτές για τη τοποθέτηση χρημάτων σε κάποια επένδυση κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Η ποσότητα που αναπαριστά την αποζημίωση για τον επιπλέον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής δίνεται από ένα γινόμενο ενός μέτρου κινδύνου (risk measure) και ενός ασφαλίστρου (premium).Ως μοντέλο επιχειρεί να δώσει μία σχέση μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης και του κινδύνου.

Είναι ένα εμπειρικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει ένα θεωρητικά κατάλληλο και αναγκαίο ποσοστό απόδοσης ενός αξιογράφου, ώστε αυτό να κριθεί κατάλληλο για προσθήκη σε ένα ήδη καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο. Το κριτήριο, βάση του οποίου θα αποφασίσουμε για την προσθήκη ή μη του αξιογράφου είναι η συμπεριφορά του έναντι ενός κινδύνου που δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσω διαφοροποίησης, δηλαδή του market risk. Αν η αναμενόμενη απόδοση δεν συναντά ή ξεπερνά την απαιτούμενη απόδοση για την προσθήκη του, τότε δεν θα προχωρήσουμε στην επένδυση.

Το μοντέλο λαμβάνει υπόψη την ευαισθησία κάθε αξιογράφου στο market risk, το οποίο εκφράζεται από το συντελεστή βήτα, καθώς επίσης την αναμενόμενη απόδοση της αγοράς και την αναμενόμενη απόδοση ενός θεωρητικά risk free αξιογράφου.

Το μοντέλο του CAPM είναι:

$$E(R_a) = R_f + \beta_a \left(\mathrm{E}(R_m) - R_f\right)$$

Όπου,

$\boldsymbol{E(R_a)}$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του αξιογράφου (expected return of the asset) ή αλλιώς η απαιτούμενη απόδοση που πρέπει να έχει το αξιόγραφο ώστε να προχωρήσουμε στην αγορά του

$\boldsymbol{R_f}$ είναι το risk free επιτόκιο (risk free rate)

$\boldsymbol{\beta_\alpha}$ είναι ο συντελεστής βήτα του αξιογράφου (beta of the asset), το οποίο καλείται ευαισθησία του αξιογράφου και υπολογίζεται ως $\beta_\alpha = \frac{Cov(R_a, R_m)}{Var(R_m)}$

$\mathbf{E}(\boldsymbol{R_m})$ είναι η αναμενόμενη απόδοση της αγοράς (expected return of the market)

Η παρένθεση $(\mathrm{E}(R_m) - R_f)$ εκφράζει την αναμενόμενη υπεραπόδοση (υποαπόδοση) που προσφέρει η αγορά έναντι του risk free επιτοκίου ως αποζημίωση για την ανάληψη του επιπλέον κινδύνου (risk premium of the market or market premium). Η διαφορά $E(R_a) - R_f$ εκφράζει την αναμενόμενη υπεραπόδοση (υποαπόδοση) που προσφέρει το αξιόγραφο έναντι του risk free επιτοκίου ως αποζημίωση για την ανάληψη του επιπλέον κινδύνου (risk premium), δηλαδή την αποζημίωση μας για τον επιπλέον κίνδυνο που αποδεχόμαστε με την επένδυση μας στο συγκεκριμένο αξιόγραφο. Όμως από την εξίσωση του CAPM έχουμε ότι $E(R_a) - R_f = \beta_a\,(\mathrm{E}(R_m) - R_f)$, το οποίο μας δείχνει ότι το risk premium του αξιογράφου ισούται με το γινόμενο του βήτα και του market premium.

Το risk free επιτόκιο συνήθως ορίζεται να είναι το επιτόκιο του δεκαετούς ομολόγου των Ηνωμένων Πολιτειών ή των δεκαετών Γερμανικών ομολόγων. Τα τελευταία χρόνια έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται το EURIBOR και το LABOR.

Άρα, το CAPM μας λέει ότι η αναμενόμενη απόδοση είναι ίση με τη χρονική αξία του χρήματος συν το risk premium.

Παρά το γεγονός ότι αποτυγχάνει σε πολυάριθμα εμπειρικά τεστ και είναι υποδεέστερο σε σύγκριση με τις περισσότερο μοντέρνες προσεγγίσεις για τη τιμολόγηση αξιογράφων και την επιλογή χαρτοφυλακίου (όπως η arbitrage pricing theory και το Merton's portfolio problem), το CAPM παραμένει ακόμη δημοφιλές χάρη στην απλότητα και στη χρησιμότητά του σε ποικίλες καταστάσεις. Ο υπολογισμός του είναι στην πραγματικότητα μια απλή γραμμική παλινδρόμηση.

3.8 Βέλτιστο σύνορο (efficient frontier)

Το βέλτιστο αποδοτικό σύνορο ή σύνορο χαρτοφυλακίου (Efficient frontier) είναι ένα ακόμη κεφάλαιο της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου. Τυπικά είναι ένα σύνολο από στοιχεία (χαρτοφυλάκια) τα οποία ικανοποιούν την ιδιότητα της μη ύπαρξης άλλου χαρτοφυλακίου με μεγαλύτερη απόδοση δεδομένου της ίδιας ήδη υπάρχουσας διακύμανσης. Η σχέση αυτή η οποία έχει ήδη αναφερθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, με την χρήση κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων τα οποία επίσης έχουν αναπτυχθεί νωρίτερα και με χρήση της σχέσης απόδοση-διακύμανση, ήμαστε πλέον σε θέση να την αναλύσουμε περαιτέρω καθώς και να προβούμε σε μια πιο διαισθητική αλλά και ταυτόχρονα ιδιαίτερα χρήσιμη εξήγησή της.

Σε αυτό το σημείο είναι ανάγκη να τονίσουμε ξανά πως ένας επενδυτής μετράει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου μαθηματικά ως την μέση αναμενόμενη τιμή. Αντίστοιχα το ρίσκο της επένδυσης ως την διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

Τυπικά και θέλοντας να προσεγγίσουμε το θέμα πιο αυστηρά από μαθηματικής πλευράς στον κάθετο άξονα βλέπουμε την μεταβλητή που μετράει την αναμενόμενη απόδοση (Μέση τιμή) και στον οριζόντιο άξονα τον αναμενόμενο κίνδυνο (Διακύμανση). Τα σημεία του χώρου είναι τα διάφορα χαρτοφυλάκια τα οποία έχουν για συντεταγμένες τις αντίστοιχες μετρήσεις για την αναμενόμενη απόδοσή τους καθώς και το ρίσκο. Κατά μήκους της καμπύλης καθώς και στο χωρίο που περικλείει, βλέπουμε τα χαρτοφυλάκια που είναι αποδεκτά με την έννοια ότι μπορούν να δημιουργηθούν με τον τρέχοντα αρχικό πλούτο (εφικτά) ενώ αυτά που βρίσκονται πάνω από την καμπύλη απαιτούν αρχικό κεφάλαιο μεγαλύτερο από το διαθέσιμο.

Αφού έχουμε αναλύσει πλήρως όλες τις σχετικές έννοιες και στα πλαίσια της διαισθητικής ανασκόπησης που αποφασίσαμε να πραγματοποιήσουμε τέλος είναι σκόπιμο να παρουσιάσουμε πλήρως το αποτελεσματικό σύνορο ή Efficient Frontier του Markowitz. Πιο αναλυτικά πλέον, ένας συνδυασμός από περιουσιακά στοιχεία ονομάζεται χαρτοφυλάκιο και χαρακτηρίζεται στην Μοντέρνα Θεωρία Χαρτοφυλακίου του Markowitz ως αποτελεσματικό αν έχει την μέγιστα δυνατή απόδοση δεδομένου ενός συγκεκριμένου επίπεδου ρίσκου. Τα σημεία που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα αποτελούν το αποτελεσματικό σύνορο που προαναφέρθηκε. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό με δεδομένο ότι πρέπει να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση ο κάθε επενδυτής επιλέγει ένα επίπεδο κινδύνου-διακύμανσης που δέχεται και με δεδομένο αυτό επιζητά να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητα δηλαδή το αναμενόμενο κέρδος της επένδυσής του. Πιο συγκεκριμένα ένας επενδυτής χρησιμοποιώντας την παραπάνω θεωρία καταλήγει να διαλέξει κάποιο από τα σημεία της καμπύλης με θετική κλίση καθώς όπως βλέπουμε και στο γράφημα για κάθε διαφορετικό επίπεδο ρίσκου η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση βρίσκεται υποχρεωτικά πάνω στην καμπύλη. Για λόγους πληρότητας και με αφορμή την μορφή της καμπύλης αξίζει να αναφερθεί πως στην διεθνή βιβλιογραφία συχνά η καμπύλη καλείται και υπερβολή του Markowitz.

3.9 AR, MA, ARMA και ARIMA μοντέλα

Τα μοντέλα αυτά είναι μοντέλα χρονοσειρών και για τον λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε αρχικά κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους.

Ως χρονοσειρές (χρονολογικές σειρές) ορίζονται ακολουθίες αριθμών οι οποίες αντιστοιχούν στις παρατηρηθείσες τιμές κάποιου οικονομικού ή φυσικού μεγέθους, σε διαδοχικές ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Δύο χαρακτηριστικά μεγέθη των χρονοσειρών είναι η μέση τιμή και η διασπορά.

- Η μέση τιμή μιας χρονοσειράς υπολογίζεται από το σύνολο των μέχρι τώρα παρατηρηθέντων όρων αυτής, μέσω του τύπου:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(t_i)$$

Τη μέση τιμή μιας χρονοσειράς μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε και σαν συνάρτηση του χρόνου ως εξής:

$$\mu_t = \frac{1}{n}\sum_{t_i \leq t} X(t_i)$$

Όπου n το πλήθος τον παρατηρήσεων έως και την χρονική στιγμή t.

- Η διασπορά σ^2 μιας χρονοσειράς δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X(t_i) - \mu)^2$$

Τη μέση τιμή μιας χρονοσειράς μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε και σαν συνάρτηση του χρόνου ως εξής:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n}\sum_{t_i \le t}(X(t_i) - \mu)^2$$

Όπου n το πλήθος τον παρατηρήσεων έως και την χρονική στιγμή t.

Μια χρονοσειρά X_t, μπορεί να αναλυθεί σε τέσσερεις συνιστώσες:

$$\boldsymbol{X_t = m_t + Z_t + S_t + \varepsilon_t \qquad t=1,...,n}$$

όπου η καθεμία εξ αυτών έχει συγκεκριμένο ερμηνευτικό χαρακτήρα.

- **Τάση (m_t)**: εκφράζει τη μακροχρόνια συμπεριφορά της χρονοσειράς. Αποτελεί συνάρτηση του χρόνου η οποία μπορεί να είναι γραμμική, παραβολική, εκθετική ή γενικότερα μια οποιαδήποτε συνάρτηση. Μέσω αυτής λαμβάνουμε μια γενική εικόνα για την συμπεριφορά της χρονοσειράς.
- **Κυκλική συνιστώσα** (Z_t): εκφράζει μια περιοδική συμπεριφορά η οποία εμφανίζεται μέσα στην χρονοσειρά. Η διάρκεια αυτής της κυκλικής συμπεριφοράς είναι μεγαλύτερη του ενός έτους και συνήθως είναι αρκετά δύσκολο να εντοπιστεί.
- **Εποχικότητα** (S_t): εκφράζει τη βραχυχρόνια συμπεριφορά του υπό μελέτη μεγέθους και περιέχει περιοδικές ταλαντώσεις αυτού. Στην πραγματικότητα ερμηνεύει την περιοδικότητα του υπό μελέτη φαινομένου σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους.
- **Κατάλοιπα** ε_t : εκφράζουν τις βραχυχρόνιες διακυμάνσεις των τιμών του υπό μελέτη μεγέθους. Όλες οι μεταβολές της τιμής της χρονοσειράς οι οποίες δεν οφείλονται στους προηγούμενους παράγοντες υπεισέρχονται στα κατάλοιπα, τα οποία είναι στοχαστικής φύσεως.

Μια χρονοσειρά $\{x_t\}_{t=1}^{n}$ καλείται αυστηρά στάσιμη [strict-sense stationary] αν η από κοινού κατανομή των x_{t_1}, x_{t_2}, … x_{t_n} είναι ίδια με την από κοινού κατανομή των x_{t_1+m}, x_{t_2+m}, … x_{t_n+m} για κάθε t_1, t_2,… t_n και m.

Η χρονοσειρά $\{x_t\}_{t=1}^{n}$ καλείται ασθενώς στάσιμη [weak ή wide-sense stationary] αν οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης είναι σταθερές στο χρόνο, δηλαδή,

i) η μέση τιμή είναι σταθερή: $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left[x_{t_n}\right] = \mu$,

ii) η αυτοδιασπορά ορίζεται μόνο ως προς την υστέρηση και όχι ως προς τις χρονικές στιγμές:

$$\forall t_{n_1}, t_{n_2} \quad Cov\left(x_{t_{n_1}}, x_{t_{n_2}}\right) = \gamma\left(t_{n_1}, t_{n_2}\right) = \gamma(t, t-\tau) = \gamma(\tau) \equiv \gamma_\tau$$

$$\gamma\iota\alpha \ \ \tau = t_{n_2} - t_{n_1}$$

Η ασθενής στασιμότητα καλείται επίσης στασιμότητα δεύτερης τάξης. Έτσι αν σε μια χρονοσειρά ο μέσος μετατοπίζεται διαχρονικά τότε μιλάμε για σειρά μη στάσιμη ως προς το μέσο ενώ αν η διακύμανση της δεν παραμένει σταθερή τότε μιλάμε για μη στασιμότητα ως προς τη διακύμανσή της.

Όπως είναι προφανές η ύπαρξη τάσης οδηγεί σε μη στασιμότητα, και ως εκ τούτου θα πρέπει να την αφαιρέσουμε. Ένας τρόπος για να απαλείψουμε την τάση μιας χρονοσειράς είναι παίρνοντας τις πρώτες διαφορές, ή πιο συχνά σε ≠δεδομένα, τις αποδόσεις. Αν η τάση μας είναι γραμμική, τότε οι πρώτες διαφορές επαρκούν για την αφαίρεσή της. Αν όμως η τάση είναι πολυωνυμική τότε οι πρώτες διαφορές δεν μας προσφέρουν στασιμότητα. Σε αυτή την περίπτωση προχωρούμε σε μεγαλύτερης τάξης διαφορές, έως ότου επιτευχθεί στασιμότητα.

Μια χρονοσειρά καλείται αυτοπαλινδρομούμενη τάξης p και συμβολίζεται με AR(p) όταν $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots + a_p x_{t-p} + w_t$ όπου w_t είναι λευκός θόρυβος, a_i οι παράμετροι του μοντέλου και a_p≠0. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως πολυώνυμο τάξης p ως προς τον τελεστή προς τα πίσω μετατόπισης (backward shift operator).

Μια χρονοσειρά καλείται διαδικασία κινητού μέσου τάξης q και συμβολίζεται MA(q) αν είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του τωρινού όρου λευκού θορύβου και των q πιο πρόσφατων όρων λευκού θορύβου και γράφεται:

$$x_t = w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \cdots + \beta_q w_{t-q}$$

όπου w_t λευκός θόρυβος. Επίσης Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως πολυώνυμο τάξης q ως προς τον τελεστή προς τα πίσω μετατόπισης (backward shift operator).

Η μίξη ενός αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου τάξης p και μιας διαδικασίας κινητού μέσου τάξης q, δηλαδή η μίξη ενός AR(p) και ενός MA(q) καλείται διαδικασία ARMA(p,q) και γράφεται:

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \cdots + a_p x_{t-p} + w_t + \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \cdots + \beta_q w_{t-q}$$

όπου w_t λευκός θόρυβος. Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί επίσης και ως:

$$\Theta_p(B)\, x_t = \Phi_q(B) w_t$$

όπου $\Theta_p(B)$ ένα πολυώνυμο p τάξης του τελεστη B και $\Phi_q(B)$ ένα πολυώνυμο q τάξης του τελεστή B.

Αν θελήσουμε στο μοντέλο μας να συμπεριλάβουμε και την τάξη των διαφορών η οποία απαιτήθηκε ώστε να αποκτήσουμε στάσιμη χρονοσειρά, τότε η καινούργια αυτή διαδικασία καλείται αυτοπαλινδρομούμενη ολοκληρωμένη διαδικασία κινητού μέσου τάξης (p,d,q) και συμβολίζεται ARIMA(p,d,q), όπου d η τάξη των διαφορών που χρειάστηκαν για να εξασφαλίσουμε τη στασιμότητα. Έτσι ένα μοντέλο ARMA(p,q) που εφαρμόζεται σε μια ολοκληρωμένη σειρά d τάξεως, είναι ένα ARIMA(p,d,q).

Η έκφραση της ολοκληρωμένης διαδικασίας κινητού μέσου ARIMA(p,d,q), με την βοήθεια των πολυώνυμων του τελεστή B είναι:

$$\Phi(\mathrm{B})\nabla^{\mathrm{d}} X_t = \Theta(\mathrm{B})\mathrm{e}_{\mathrm{t}}$$

ή

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)e_t \text{ όπου } Y_t = \nabla^d X_t$$

3.10 Μοντέλο ARCH

Το υπόδειγμα ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) δημιουργήθηκε από τον Engle το 1982 και από τότε θεωρείται ένα βασικό εργαλείο χαρακτηρισμού των μεταβαλλόμενων διακυμάνσεων. Αναφέρεται στις στοχαστικές διαδικασίες ε_t που έχουν την μορφή

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

Όπου z_t είναι ένας ανεξάρτητα και αυτόνομα κατανεμημένος (i.i.d) όρος ο οποίος έχει $E(Z_t) = 0$ (αναμενόμενη τιμή), $VAR(Z_t) = 1$ (διακύμανση) και

σ_t είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη, μετρήσιμη συνάρτηση όλης της πληροφορίας έως τη στιγμή $t-1$.

Σε πρώτο επίπεδο θεωρούμε ότι η ε_t είναι μια μονομεταβλητή διαδικασία αλλά άμεσα μπορούν να υπάρξουν επεκτάσεις σε πολυμεταβλητή. Ενώ οι στοχαστικές διαδικασίες ε_t είναι γραμμικά ανεξάρτητες με μέσο ίσο με μηδέν, η δεσμευμένη τους διακύμανση σ_t^2 μπορεί να μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνο.

Θεωρούμε λοιπόν, $f(z_t)$ την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $Z(t)$ και θ το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Εάν λύσουμε τη συνάρτηση $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$ ως προς το z_t στη συνέχεια παίρνουμε το γινόμενο των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας $f(z_t)$ για το δείγμα $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots, \varepsilon_1$ και λογαριθμίζοντας προκύπτει η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} [\log f(\varepsilon_t \sigma_t^{-1}) - \log \sigma_t] \qquad (1)$$

Η μορφή της $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$ είναι αρκετά γενική και μας επιτρέπει την χρήση μια ευρείας ποικιλίας μοντέλων.

ARCH(q) – γραμμικό μοντέλο

Το μοντέλο Arch(q) προκύπτει από μια παραμετροποίηση που μπορούμε να εφαρμόσουμε στο σ_t^2 και να εκφραστεί ως γραμμική συνάρτηση της διαδικασίας

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} a_i \, \varepsilon_t^2 - 1 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 \qquad (2)$$

όπου ω>0, α_i>0 και L είναι ο τελεστής υστέρησης.

Το μοντέλο αυτό εκφράζει το φαινόμενο “volarity clustering” που χαρακτηρίζει τις χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές. Χρονολογικές στιγμές με μεγάλη διακύμανση και μεταβλητότητα στις τιμές, τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες μεταβολές στις τιμές αλλά δεν μπορούμε να προβλέψουμε πάντα το πρόσημο. Αντιστοίχως στιγμές με μικρή διακύμανση και μεταβλητότητα στις τιμές, τείνουν να ακολουθούνται από μικρές μεταβολές στις τιμές.

Σε πολλές από τις αρχικές μορφές του μοντέλου έχει υιοθετηθεί μια γραμμική μορφή για τις υστερήσεις, με στόχο να μειωθούν οι παράμετροι και να εξασφαλισθεί η φθίνουσα μονοτονικότητα των πιο μακρινών διαταραχών. Παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού είναι το εξής:

$$a_i = \frac{a(q+1-i)}{(q(q+1))}$$

Σε περίπτωση που τα z_t στη συνάρτηση $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$ ακολουθούν κανονική κατανομή, μέσω της μεθόδου της μέγιστης πιθανοφάνειας έχουμε ότι η λογαριθμική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που θα χρησιμοποιηθεί στη συνάρτηση (1) (συνάρτηση πιθανοφάνειας), γίνεται:

$$\log(\varepsilon_t \sigma_t^{-1}) = -0{,}5 log 2\pi - 0{,}5 \varepsilon_t^2 \sigma_t^{-2}$$

Τα μοντέλα τύπου ARCH γίνεται να εκτιμηθούν και με την γενικευμένη μέθοδο των ροπών (GMM: Generalized Method of Moments) μία μέθοδο που δεν θα παρουσιάσουμε στην εν λόγο διπλωματική. Μία άλλη σχέση που παρουσιάζει ενδιαφέρον, είναι αυτή του γραμμικού μοντέλου ARCH(q) με το μοντέλο MA(q) (Moving Average) που εκφράζεται από την εξής συνάρτηση:

$$\varepsilon_t = w_t + \sum_{i=1}^{q} a_{ti}\varepsilon_{t-1} \qquad (3)$$

Όπου τα wt,a_{t1},a_{t2},…,a_{iq} είναι i.i.d με μέσο μηδέν και διακύμανση w,a_1 ,a_2,…,a_q αντίστοιχα.

3.11 GARCH(p,q) γραμμικό μοντέλο

Χρησιμοποιώντας το γραμμικό μοντέλο ARCH(q) δημιουργήθηκε η ανάγκη να χρησιμοποιηθεί ένας αρκετά μεγάλος αριθμός υστερήσεων q και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την σημαντική μείωση των βαθμών ελευθερίας των εκτιμώμενων μοντέλων. Έτσι το μοντέλο GARCH(q) (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) δίνει μια πιο ευέλικτη μορφή μοντελοποίησης της διακύμανσης:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-1}^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \qquad (4)$$

Αποδεικνύεται ότι αυτό το μοντέλο αντιστοιχεί σε ένα αυτοπαλίνδρομο σχήμα άπειρων περιόδων:

$$\sigma_t^2 = \varphi(L)\varepsilon_t^2 = \left(1 - \beta(L)\right)^{-1} \alpha(L)\varepsilon_t^2$$

Για να ισχύει η διαδικασία αυτή δεν πρέπει καμία παράμετρος του μοντέλου να είναι αρνητική και πρέπει οι ρίζες του πολυωνύμου β(L)=1 ναι είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Για τη GARCH(1,1) οι συνθήκες αναλογούν στο ότι $\alpha_1 \geq 0$ και $\beta_1 \geq 0$. Πρέπει επιπλέον τα ε_t να είναι στάσιμα ως προς τις συνδιακυμάνσεις εάν και μόνο εάν ισχύει α(1)+β(1) < 1. Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο GARCH(p,q) αντιστοιχεί ακριβώς σε ένα γραμμικό μοντέλο ARCH με άπειρους όρους και γεωμετρικά φθίνουσες παραμέτρους.

Το μοντέλο GARCH(p,q) παρουσιάζει επίσης και ένα άλλο χαρακτηριστικό που αφορά τη χρονική συσχέτιση στα ε_t^2. Με την αναπροσαρμογή των όρων της συνάρτησης (4) προκύπτει ένα ARMA μοντέλο στα ε_t^2 με παραμέτρους AR $\alpha(L) + \beta(L)$, παραμέτρους MA $-\beta(L)$ και γραμμικά ασυσχέτιστα κατάλοιπα {ε_t^2-σ_t^2}.

3.12 Μοντέλο GARCH μη γραμμικό

Στο παραπάνω μοντέλο η διακύμανση εξαρτάται μόνο από το μέγεθος και όχι από το αν το ε_t είναι θετικό ή αρνητικό. Όμως σύμφωνα με το φαινόμενο της μοχλευσής “leverage effect” οι χρηματαγορές έχουν την τάση να αντιδρούν πιο έντονα με αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερη η διακύμανση για την επόμενη περίοδο, σε περίπτωση που παρουσιαστούν αρνητικά γεγονότα και μειωθεί η τιμή της μετοχής. Συνεπώς το μοντέλο GARCH(p,q) δεν καλύπτει το φαινόμενο αυτό. Οι Black και Christie πρότειναν και ανέλυσαν μια οικονομική εξήγηση για την παραπάνω αντίφαση. Υποστήριξαν λοιπόν πως μια ενδεχόμενη μείωση στην τιμή της μετοχής την προηγούμενη περίοδο έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της κεφαλαιακής βάσης της εταιρείας και έτσι αυξάνεται ο λόγος $\frac{\xi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \kappa\varepsilon\varphi\acute{\alpha}\lambda\alpha\iota\alpha}{\acute{\iota}\delta\iota\alpha\ \kappa\varepsilon\varphi\acute{\alpha}\lambda\alpha\iota\alpha}$ άρα και ο κίνδυνος για την μετοχή αυτή, γεγονός που προκαλεί αύξηση της διακύμανσης για την επόμενη περίοδο.

3.13 Πολυμεταβλητά μοντέλα ARCH(q), GARCH(p,q)

Παραπάνω παρουσιάστηκαν μονομεταβλητά μοντέλα, σε πολλά θέματα διαχείρισης χαρτοφυλακίου όμως είναι απαραίτητη η ανάλυση σε πολυμεταβλητό επίπεδο.

Το γραμμικό ARCH(q) που είναι πολυμεταβλητό μοντέλο εκφράζεται από τον εξής τύπο:

$$vech(\Omega_t) = W + \sum_{i=1}^{q} A_i\, vech(\varepsilon_{t-i}\varepsilon'_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p} B_i vech(\Omega_{t-i)} \qquad (5)$$

όπου W είναι ένα $(N(N+1)/2)X1$ διάνυσμα και οι A_i και B_i είναι $(N(N+1)/2)X(N(N+1)/2)$ μήτρες.

Ο αριθμός των παραμέτρων για την παραπάνω συνάρτηση είναι $[\frac{1}{2}N(N+1)[1+N(N+1)\frac{(p+q)}{2}]$ άρα για μετρίου μεγέθους δείγματα πρέπει να υπάρξουν ορισμένοι περιορισμοί.

Έτσι αναπτύχθηκε το μοντέλο GARCH(p,q) στο οποίο οι μήτρες A_i και B_i θεωρούνται διαγώνιες

3.14 Μοντέλο IGARCH (Integrated GARCH)

Σε αντιστοιχία με το ARIMA to 1986 οι Engle και Bollerslev δημιούργησαν μια ιδιαίτερη περίπτωση του GARCH μοντέλου που χαρακτηριστικό της ήταν η ύπαρξη διαρκούς επίδραση νέων πληροφοριών στη διακύμανση:

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \, \sigma_{t-i}^2 \qquad (6)$$

για $\beta_0 > 0, \beta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0$

και το πολυώνυμο $\sum_{i=1}^{q} \beta_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i = 1$ που έχει d>0 μοναδιαίες ρίζες και max(p,q) - d ρίζες εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Το μοντέλο αυτό έχει την ιδιότητα ότι οι προβλέψεις της υπό συνθήκης διακύμανσης αρκετών περιόδων μετά, δεν συγκλίνουν στη μη δεσμευμένη διακύμανση.

Στην περίπτωση IGARCH(1,1)

$$\sigma_{t+1}^2 = \beta_0 + \beta \alpha_t^2 + (1 - \beta)\sigma_t^2$$

Παρατηρούμε ότι εάν δεν υπάρχει σταθερός όρος $\beta_0 = 0$ ισχύει Ε$(\sigma_{t+k}^2) = \sigma_{t+1}^2$

Δηλαδή η υπό συνθήκη διακύμανση μετά από k περιόδους είναι ίδια με την υπό συνθήκη διακύμανση μια περίοδο μετά.

Σε περίπτωση που ο β_0 είναι σταθερός όρος ισχύει Ε$(\sigma_{t+k}^2) = k\beta_0 + \sigma_{t+1}^2$

Παρά το γεγονός ότι με την πάροδο του χρόνου μειώνεται η επίδραση της υπό συνθήκης διακύμανσης μια περίοδο μετά, η επίδρασή της είναι διαρκής.

3.15 Μοντέλο FIGARCH(p,d,q)

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών είναι η ιδιαίτερα ισχυρή μνήμη δηλαδή σε περίπτωση που συμβεί μια ισχυρή αλλαγή επηρεάζει πολύ έντονα και για μεγάλο χρονικό διάστημα την μελλοντική μεταβλητότητα. Μέσω του υποδείγματος FIGARCH(1,d,1) που εισήγαγαν οι Ding Granger και Engle το 1993 προσπαθούμε να εξετάσουμε την μεταβλητότητα αυτή.

$$\sigma_t = \omega + \beta_1 * \sigma_{t-1} + (1 - \beta_1 * L - (1 - \varphi_1 * L) * (1 - L)^d) * \varepsilon_t^2 \qquad (7)$$

Εάν ισχύει d=0 το υπόδειγμα μετατρέπεται στο GARCH(1,1) και εάν ισχύει $0 < d < 1$ η επίδρασης της πρόβλεψης της μεταβλητότητας μειώνεται με εξαιρετικά αργό ρυθμό.

Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου FIGARCH γενικά διεξάγεται με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method) με την παραδοχή ότι ισχύει ομαλότητα για το z_t. Βέβαια η υπόθεση της κανονικότητας μπορεί να αμφισβητηθεί με κάποια εμπειρικά στοιχεία και ως εκ τούτου στις περιπτώσεις αυτές, η χρήση της quasi-maximum likelihood μεθόδου προτιμάται.

Κεφάλαιο 4: Εμπειρική Μελέτη

Για την πρόβλεψη της μακροχρόνιας μεταβλητότητας των τιμών των μετοχών, πράγμα απαραίτητο για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων σχετικά με το ρίσκο που φέρουν στο εκάστοτε χαρτοφυλάκιο, χρησιμοποιήθηκε κώδικας Matlab και το μοντέλο FIGARCH. Μέσω του μοντέλου FIGARCH έγινε πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας των τιμών των μετοχών των δεικτών FTSE100 (UK) και STOXX600 (German). Έχοντας τη μακροχρόνια μεταβλτότητα μπορούν να δημιουργηθούν χαρτοφυλάκια που να καλύπτουν τις ανάγκες του εκάστοτε επενδυτή, βασισμένα στη θεωρία που αναφέραμε παραπάνω.

Η μεταβλητότητα αποτελεί βασικό κριτήριο επιλογής μετοχών για προσθήκη στο χαρτοφυλάκιό μας. Αν ο χρονικός ορίζοντας της επένδυσής μας είναι μικρός τότε θα επιλέξουμε μετοχές με μικρή μεταβλητότητα ενώ αν ο ορίζοντάς μας είναι μεγάλος θα επιλέξουμε μετοχές με μεγαλύτερη μεταβλητότητα. Προφανώς στη μελέτη μας αυτή, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η θεωρία χαρτοφυλακίου για την επιλογή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου. Παρόλα αυτά εμείς θα ασχοληθούμε με την κατασκευή μόνο δύο χαρτοφυλακίων, Αυτά θα είναι το overall χαρτοφυλάκιο και το risky χαρτοφυλάκιο.

Το πρώτο αποτελεί το χαρτοφυλάκιο που περιέχει το risk free asset, έχει δηλαδή διασπορά ίση με το μηδέν, και ως στόχο έχει να μας δώσει μια εικόνα για τη συνολική μεταβλητότητα της αγοράς. Το δεύτερο χαρτοφυλάκιο έχει ως στοχο για τους επενδυτές να ελαχιστοποιήσουν τον κίνδυνο κερδίζοντας παράλληλα την μεγαλύτερη δυνατή απόδοση. Είναι στην ουσία ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που μας δείχνει πώς γίνεται η μεγιστοποίηση της απόδοσης για τα αποδεκτά όρια κινδύνου του κάθε επενδυτή. Πρόκειται για χαρτοφυλάκιο το οποίο όταν ο χρονικός ορίζοντας επένδυσης θα είναι ικανοποιητικά μεγάλος, θα προσφέρει υπεραποδόσεις. Σε αυτό συμμετέχουν οι μετοχές με τη μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

Ως βέλτιστο εργαλείο το οποίο θα μας βοηθούσε να εξάγουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα τα οποία θέλουμε πάνω στο θέμα της πρόβλεψης της μακροπρόθεσμης διακύμανσης των τιμών των μετοχών χρησιμοποιώντας ημερήσια δεδομένα κρίθηκε η Matlab όπως προαναφέρθηκε.. Συνεπώς δημιουργήθηκε κώδικας ο οποίος ως στόχο είχε τον υπολογισμό των αναμενόμενων και στη συνέχεια των πραγματοποιθέντων αποδόσεων καθώς και τη σύγκρισή τους. Μέσω αυτών θα μπορέσουμε να διαπιστώσουμε την προβλεπτική ικανότητα χρησιμοποιώντας ημερήσια δεδομένα. Επιπλέον μέσω του κώδικα μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα δεδομένα μας με συγκεκριμένα κριτήρια τα οποία θα μας βοηθήσουν να προβλέψουμε και να δημιουργήσουμε τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Για το σκοπό αυτό ακολουθήθηκε συγκεκριμένη διαδικασία η οποία περιγράφεται παρακάτω.

Βήμα 1

Αρχικά, ξεκινώντας τη διαδικασία έπρεπε να γίνει η επιλογή του κατάλληλου δείγματος ημερησίων τιμών των μετοχών τι οποίες και συμβολίζουμε (P_t), έτσι ώστε το μέγεθος του δείγματος αυτού που θα επιλέξουμε να είναι το καταλληλότερο και όσο το δυνατόν ακριβέστερο αναφορικά με την διαδικασία πρόβλεψης της μακροχρόνιας διακύμανσης των τιμών των μετοχών με ημερήσια δεδομένα. Συνεπώς καταλήξαμε στην επιλογή δεδομένων από δύο δείκτες. Τον FTSE100 (UK) και τον STOXX600 (German). Ο όγκος των δεδομένων που ήταν αναγκαία ήταν για την εικοσαετία 1994 – 2014. Επιπλέον για τις ίδιες χρονιές καθώς και για τους ίδιους δείκτες χρειαζόμαστε τα risk free rates. Για την εύρεση των προαναφερθέντων δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η βάση δεδομένων της Data Stream.

Βήμα 2

Κατά τη διάρκεια της συλλογής των ημερήσιων τιμών των μετοχών παρουσιάστηκαν όπως ήταν αναμενόμενο κάποιες ημερομηνίες για τις οποίες δεν υπήρχαν αποτελέσματα. Έτσι μετά από την αφαίρεση των ημερομηνιών αυτών προχωρήσαμε σε υπολογισμό των λογαριθμικών αποδόσεων των μετοχών οι οποίες συμβολίζονται ως $\log(P_t)$ και ισχύει:

$$\log(P_t) - \log(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1}$$

Αναφορικά με τις ημερήσιες κανονικές αποδόσεις των τιμών των μετοχών ισχύει:

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Ο ίδιος υπολογισμός έγινε και για τις εξαμηνιαίες και για τις ετήσιες αποδόσεις για τα έτη 1994 – 2014 όπως έχουμε προαναφέρει.

Βήμα 3

Στο σημείο αυτό έγινε η επιλογή του καταλληλότερου οικονομετρικού μοντέλου που θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί ώστε να μας οδηγήσει στα συμπεράσματα που έχουν τεθεί ως στόχοι εξ αρχής. Μέσω διάφορων μελετών που αναλύθηκαν και αξιοποιήθηκαν διαπιστώθηκε ότι η μεταβλητότητα κάποιων χρονολογικών σειρών έχει μοναδιαία ρίζα ενώ άλλες βρίσκουν κάποια μέτρα μεταβλητότητας των καθημερινώς και εντός της ημέρας αποδόσεων να έχουν μια παρουσιάζουν μνήμη ιδιοκτησίας (long memory property). Όσον αφορά προβλέψεις που έγκειται σε χρονικό διάστημα μεγαλύτερο των έξι μηνών, η χρήση χαμηλής συχνότητας ιστορικών δεδομένων, για μια περίοδο τουλάχιστον και για όλο το χρονικό διάστημα, λειτουργεί καλύτερα. Η επιμονή της μεταβλητότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική στα ημερήσια δεδομένα αι αποδυναμώνεται ανάλογα με την αύξηση της συχνότητας των δεδομένων. Το γεγονός αυτό περιπλέκει ακόμα πιο πολύ την προσπάθεια γενίκευσης των προτύπων μεταβλητότητας καθώς και τα αποτελέσματα της πρόβλεψης. Έτσι σε συνέχεια αυτών των σκέψεων και διαπιστώσεων, με οδηγό την μακρά μνήμη της μεταβλητότητας επιλέχθηκε το μοντέλο FIGARCH (p, d, q).

Έχουμε λοιπόν το μοντέλο:

$$y_t = \mu + e_t$$

για τις αποδόσεις των μετοχών και εφαρμόζουμε το FIGARCH (1, d, 1) στα zero mean residuals που ορίζονται ως:

$$e_t = y_t - \mu$$

και εκτιμούμε την άγνωστη παράμετρο d (long memory coefficient) για όλες τις μετοχές και για κάθε χρονιά.

Βήμα 4

Φθάνοντας στο σημείο αυτό, αφού έχουμε εκτιμήσει τα d, τα βάζουμε σε αύξουσα σειρά και καθορίζουμε τρείς κατηγορίες ανάλογα με το μέγεθός τους. Low για όσα d είναι μεταξύ 0 και 0.35 ($0 < d < 0.35$), Medium για όσα d είναι μεταξύ 0.35 και 0.65 ($0.35 < d < 0.65$) και High για όσα d είναι μεταξύ 0.65 και 1 ($0.65 < d < 1$). Έτσι ομαδοποιούμε τις αποδόσεις των μετοχών μας με βάση τα d για κάθε μια χρονιά.

Βήμα 5

Στόχος μας τώρα είναι να δημιουργήσουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο (optimum portfolio). Συνεπώς υπολογίζουμε τα βάρη αυτά των μετοχών που ελαχιστοποιούν τη διασπορά του χαρτοφυλακίου (Mean variance portfolios) για τις ομαδοποιημένες αποδόσεις που αναφέραμε στο προηγούμενο βήμα. Έτσι στο τέλος της κάθε χρονιάς έχουμε τα κατάλληλα βάρη για τις μετοχές που θα κρατήσουμε ώστε να δημιουργήσουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για την επόμενη χρονιά. Επιπροσθέτως υπολογίζουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις καθώς και τις αναμενόμενες τυπικές αποκλίσεις των βέλτιστων χαρτοφυλακίων για κάθε ομάδα ομαδοποιημένων αποδόσεων καθώς και για τις συνολικές αποδόσεις φυσικά για κάθε χρονιά.

Βήμα 6

Στο έκτο βήμα υπολογίζουμε για κάθε ομάδα των ομαδοποιημένων αποδόσεων αλλά και για τις συνολικές, για κάθε χρονιά, την αναμενόμενη απόδοση και την αναμενόμενη τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου.

Βήμα 7

Αφού τώρα έχουμε υπολογίσει τα βάρη των μετοχών που θα κρατήσουμε για την επόμενη χρονιά, πρέπει να υπολογίσουμε τις αποδόσεις των βέλτιστων χαρτοφυλακίων καθώς και του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς για κάθε χρονιά. Στη συνέχεια, βρίσκουμε τις πραγματοποιθείσες αποδόσεις (realized returns) και τις πραγματοποιθείσες τυπικές αποκλίσεις (realized volatilities or stds) των παραπάνω χαρτοφυλακίων.

Βήμα 8

Φθάνοντας λοιπόν στο τελευταίο βήμα μετατρέπουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις, τις αναμενόμενες τυπικές αποκλίσεις, τις πραγματοποιθείσες αποδόσεις και τις πραγματοποιθείσες τυπικές αποκλίσεις σε ετήσια και εξαμηνιαία βάση ώστε να τεθούν προς σύγκριση. Μέσω κατάλληλης επεξεργασίας των δεδομένων καταλήγουμε στους πίνακες που παρουσιάζονται συνοπτικά στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων αλλά και στο παράρτημα.

Κεφάλαιο 5: Αποτελέσματα - Συμπεράσματα

Θέλοντας λοιπόν να παρουσιάσουμε κάποια συγκεντρωτικά αποτελέσματα αναφορικά με τις απόλυτες διαφορές των αναμενόμενων από τις πραγματοποιθείσες τυπικές αποκλίσεις, που προέκυψαν από την ανάλυσή μας για τα Optimal Risky και Optimal Overall Χαρτοφυλάκια, καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Αναφορικά με τα Optimal Risky Portfolios για τον FTSE, όπως βλέπουμε στους παραπάνω πίνακες, συνεχίζει να ισχύει η καλύτερη προβλεπτική ικανότητα μέσω των εξάμηνων δεδομένων. Αλλαγή παρουσιάζεται όμως στην βέλτιστη διαφορά της αναμενόμενης τυπικής απόκλισης από την πραγματοποιθείσα. Εδώ, η μικρότερη απόλυτη διαφορά παρουσιάζεται στο σύνολο των μετοχών συγκριτικά με την κάθε ομαδοποίηση με βάση τα d που έχουμε υπολογίσει. Αντίστοιχα για τον δείκτη STOXX βλέπουμε τη μικρότερη διαφορά να παρουσιάζεται στα medium d. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι παρατηρείται μικρότερη διαφορά ανάμεσα σε εξαμηνιαία και ετήσια δεδομένα. Το Optimal Overall Portfolio του FTSE ακολουθεί την τάση του Optimal Risky Portfolio για τον FTSE, παρουσιάζοντας μικρότερη απόκλιση για το σύνολο των δεδομένων εκτός ομαδοποίησης με κριτήριο τα d. Σαφώς καλύτερη η εικόνα και εδώ αν θέλουμε να συγκρίνουμε ετήσια με εξαμηνιαία οπτική των δεδομένων. Για τον δείκτη STOXX τώρα, στο Optimal Overall Portfolio του φαίνεται να παρουσιάζεται μικρότερη διαφορά της αναμενόμενης τυπικής απόκλισης από την πραγματοποιθείσα για τα Medium d, ταυτόχρονα με την ύπαρξη ελαφρώς μεγαλύτερης διαφοράς από ετήσια δεδομένα σε εξαμηνιαία.

Όπως είναι φανερό από τα παραπάνω, το χαρακτηριστικότερο συμπέρασμα της ανάλυσής μας είναι ότι η ακρίβεια αναφορικά με την μακροχρόνια προβλεψημότητα των τιμών των μετοχών χρησιμοποιώντας τις παραπάνω οικονομετρικές τεχνικές και ημερήσια δεδομένα, μειώνεται στα χαρτοφυλάκια με μεγάλο d.

Παρακάτω φαίνονται συνοπτικά οι πίνακες που μας οδήγησαν στα προαναφερθέντα συμπεράσματα.

Optimal Risky Portfolio FTSE (1y, 6m)

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 1y FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 1				
Year	TOTAL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**3,99%**	**5,49%**	**5,11%**	**7,13%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 6m FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 2				
Year	ALL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**2,81%**	**3,87%**	**3,60%**	**5,02%**

Optimal Risky Portfolio STOXX (1y, 6m)

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 1y STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3				
Year	TOTAL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**5,98%**	**5,32%**	**4,24%**	**7,75%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 6m STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 4				
Year	TOTAL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**4,21%**	**3,75%**	**2,99%**	**5,45%**

Optimal Overall Portfolio FTSE (1y, 6m)

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 1y FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 5				
Year	TOTAL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**4,79%**	**6,59%**	**6,13%**	**8,56%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 6m FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 6				
Year	ALL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**3,37%**	**4,64%**	**4,32%**	**6,02%**

Optimal Overall Portfolio STOXX (1y, 6m)

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 1y STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 7				
Year	TOTAL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**7,18%**	**6,38%**	**5,09%**	**9,29%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 6m STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 8				
Year	TOTAL	LOW	MEDIUM	HIGH
Average	**5,05%**	**4,49%**	**3,58%**	**6,54%**

Κεφάλαιο 6: Βιβλιογραφία

1. ANDERSEN, T. G. and BOLLERSLEV, T. (1997), Heterogeneous Information Arrivals and Return Volatility Dynamics: Uncovering the Long-Run in High Frequency Returns. *The Journal of Finance*, 52: 975–1005. doi: 10.1111/j.1540-6261.1997.tb02722.x

2. ANDERSEN, T. G., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD, F. X. and EBENS, H. (2001), The distribution of realized stock return volatility. *Journal of Financial Economics, 61: 43–76*

3. Antypas, A., Koundouri, P., Kourogenis, N. (2013). Aggregational Gaussianity and Barely Infinite Variance in Financial Returns, *Journal of Empirical Finance 20, 102-108.*

4. Ang, A., Bekaert, G. 2001. Stock Return Predictability: Is it There? *National Bureau of Economic Research, 651-707.*

5. Bossaerts P., Hillion P. 1999. Implementing statistical criteria to select return forecasting models: what do we learn? *Review of Financial Studies, 12, 405-428.*

6. Fama, E. (1965). The Behaviour of Stock Prices. *Journal of Business, 34-106.*

7. Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance, 383-417.*

8. Fama, E. F., French, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance, 47(2), 427-465.*

9. Fama, E. (1995). Random Walks in Stock Market Prices. *Financial Analysts Journal, 75-80.*

10. Guru-Gharana, Kishor Kumar Rahman, Matiur Parayitam 2009. Influences of selected macroeconomic variables on U.S. stock market returns and their predictability over varying time horizons. *Academy of Accounting and Financial Studies Journal, 13-30.*

11. Rapach, D. E., Wohar, M.E., 2006. In-sample vs. out-of-sample tests of stock return predictability in the context of data mining. *Journal of Empirical Finance 13(2), 231–247.*

12. Kim H Jae, Shamsuddin Abul, Lim Kiang-Ping 2011. Stock return predictability and the adapting market hypothesis: Evidence from century-long US data. *Journal of Empirical Finance, 868-879.*

13. Rozeff, M., Kinney Jr., W. (1976). Capital Market Seasonality: The Case of Stock Returns. *Journal of Financial Economics, 379-402.*

14. Bollerslev, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *J. of Econometrics, 31, 307-327.*

15. Bollerslev, T. and H. O. Mikkelsen (1996): "Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility," *J. of Econometrics, 73, 151-184.*

16. Simon, David P., 1989, "Expectations and risk in the treasury bill market: An instrumental variables approach", *Journal of Financial and Quantitative Analysis 24, 357-366.*

17. Engle, Robert F., 1983, "Estimates of the variance of U.S. inflation based on the ARCH model", *Journal of Money, Credit and Banking 15, 286-301.*

18. Engle, Robert F., 1987, "Multivariate GARCH with factor structures - Cointegration in variance", *Unpublished manuscript (Department of Economics, University of California, San Diego, CA).*

19. Engle, Robert F. and Gloria Gonzalez-Rivera, 1991, "Semiparametric ARCH models", *Journal of Business and Economic Statistics 9, 345-360.*

20. Engle, Robert F., David F. Hendry, and David Trumble, 1985, "Small sample properties of ARCH estimators and tests", *Canadian Journal of Economics 18, 66-93.*

21. Antonakakis, N. (2007). Forecasting nominal exchange rate volatility in developing countries. *Department of Economics, University of Strathclyde*

22. Baillie, R. T., Bollerslev, T., and Mikkelsen, H. O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics, 74, 3-30.*

23. Baillie, R. T., and Morana, C. (2009). Modeling long memory and structural breaks in conditional variances: An adaptive FIGARCH approach. *Journal of Econometric Dynamics and Control, 33, 1577-1592*

24. Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics, 31, 307-328.*

25. Bollerslev, T., and Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews, 11, 143-172.*

26. Beine, M., Laurent, S., and Lecourt, C. (2002). Accounting for conditional leptokurtosis and closing days effects in FIGARCH models of daily exchange rates. *Applied Financial Economics, 12, 589-600.*

27. Cheong, C. W., Isa, Z., and Nor, A. H. S. M. (2008). Fractionally integrated time-varying volatility under structural break: Evidence from Kuala Lumpur composite index. *Sains Malaysiana, 37, 405-411.*

28. Goudarzi, H. (2010). Modeling long memory in the Indian stock market using fractionally integrated EGARCH model. *International Journal of Trade, Economics and Finance, 1, 231-237.*

29. Sawant, A., and Yadav, R. (2011). Long Memory Time Series Modelling for BSE Stock Returns. *Department of Statistics, University of Pune, India. (Project report)*

30. Crato, N., and Ray, B. K. (2000). Memory in returns and volatilities of futures contracts. *Journal of Futures Markets, 20, 525-5430.*

31. Jin, H. J., and Frechette, D. (2004). Fractional integration in agricultural futures price volatilities. American Journal of Agricutural Economics, 86, 432-443.

Ηλεκτρονική Βιβλιογραφία

- https://www.math.ust.hk/
- https://www.math.washington.edu/
- http://www.mathworks.com/
- http://www.ssrn.com/en/
- http://www.economist.com/
- http://www.bloomberg.com/europe
- http://www.investopedia.com/
- http://www.econoday.com/
- http://www.tradingeconomics.com/
- https://en.wikipedia.org

Παράρτημα:

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 1y FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 2				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,95%	9,18%	2,98%	0,61%
1996	1,72%	1,91%	0,84%	1,53%
1997	6,17%	2,95%	4,23%	7,36%
1998	5,69%	4,64%	12,03%	4,80%
1999	1,36%	10,19%	8,68%	3,63%
2000	1,32%	0,80%	4,69%	1,98%
2001	2,66%	2,36%	0,18%	0,99%
2002	8,28%	24,03%	0,91%	12,25%
2003	8,44%	5,44%	9,79%	18,37%
2004	0,20%	0,54%	4,30%	1,38%
2005	0,98%	2,81%	2,49%	0,50%
2006	4,44%	0,68%	5,50%	5,79%
2007	11,06%	4,60%	14,94%	2,45%
2008	20,02%	23,28%	14,49%	31,92%
2009	11,54%	16,20%	8,75%	57,63%
2010	6,02%	9,58%	10,19%	6,61%
2011	1,44%	6,62%	12,68%	5,41%
2012	1,04%	1,44%	2,81%	2,52%
2013	2,14%	3,83%	1,35%	3,60%
2014	0,28%	0,70%	0,80%	1,83%
Average	**3,99%**	**5,49%**	**5,11%**	**7,13%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 1y FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 3				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,95%	9,18%	2,98%	0,61%
1996	1,72%	1,91%	0,84%	1,53%
1997	6,17%	2,95%	4,23%	7,36%
1998	5,69%	4,64%	12,03%	4,80%
1999	1,36%	10,19%	8,68%	3,63%
2000	1,32%	0,80%	4,69%	1,98%
2001	2,66%	2,36%	0,18%	0,99%
2002	8,28%	24,03%	0,91%	12,25%
2003	8,44%	5,44%	9,79%	18,37%
2004	0,20%	0,54%	4,30%	1,38%
2005	0,98%	2,81%	2,49%	0,50%
2006	4,44%	0,68%	5,50%	5,79%
2007	11,06%	4,60%	14,94%	2,45%
2008	20,02%	23,28%	14,49%	31,92%
2009	11,54%	16,20%	8,75%	57,63%
2010	6,02%	9,58%	10,19%	6,61%
2011	1,44%	6,62%	12,68%	5,41%
2012	1,04%	1,44%	2,81%	2,52%
2013	2,14%	3,83%	1,35%	3,60%
2014	0,28%	0,70%	0,80%	1,83%
Average	**4,79%**	**6,59%**	**6,13%**	**8,56%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 6m FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 5				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,67%	6,49%	2,10%	0,43%
1996	1,21%	1,34%	0,59%	1,08%
1997	4,34%	2,07%	2,97%	5,17%
1998	4,00%	3,26%	8,46%	3,37%
1999	0,95%	7,17%	6,10%	2,55%
2000	0,94%	0,57%	3,32%	1,40%
2001	1,87%	1,67%	0,13%	0,70%
2002	5,82%	16,90%	0,64%	8,61%
2003	5,93%	3,82%	6,88%	12,92%
2004	0,14%	0,38%	3,03%	0,97%
2005	0,69%	1,98%	1,76%	0,35%
2006	3,14%	0,48%	3,89%	4,09%
2007	7,80%	3,25%	10,55%	1,73%
2008	14,10%	16,40%	10,20%	22,48%
2009	8,11%	11,39%	6,15%	40,51%
2010	4,24%	6,74%	7,16%	4,65%
2011	1,01%	4,66%	8,93%	3,81%
2012	0,73%	1,02%	1,98%	1,78%
2013	1,51%	2,70%	0,95%	2,53%
2014	0,20%	0,49%	0,56%	1,29%
Average	**2,81%**	**3,87%**	**3,60%**	**5,02%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 6m FTSE)

ΠΙΝΑΚΑΣ 6				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,67%	6,49%	2,10%	0,43%
1996	1,21%	1,34%	0,59%	1,08%
1997	4,34%	2,07%	2,97%	5,17%
1998	4,00%	3,26%	8,46%	3,37%
1999	0,95%	7,17%	6,10%	2,55%
2000	0,94%	0,57%	3,32%	1,40%
2001	1,87%	1,67%	0,13%	0,70%
2002	5,82%	16,90%	0,64%	8,61%
2003	5,93%	3,82%	6,88%	12,92%
2004	0,14%	0,38%	3,03%	0,97%
2005	0,69%	1,98%	1,76%	0,35%
2006	3,14%	0,48%	3,89%	4,09%
2007	7,80%	3,25%	10,55%	1,73%
2008	14,10%	16,40%	10,20%	22,48%
2009	8,11%	11,39%	6,15%	40,51%
2010	4,24%	6,74%	7,16%	4,65%
2011	1,01%	4,66%	8,93%	3,81%
2012	0,73%	1,02%	1,98%	1,78%
2013	1,51%	2,70%	0,95%	2,53%
2014	0,20%	0,49%	0,56%	1,29%
Average	**3,37%**	**4,64%**	**4,32%**	**6,02%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 1y STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 8				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,96%	3,75%	1,78%	0,95%
1996	2,70%	3,06%	2,38%	0,97%
1997	9,13%	6,14%	8,82%	8,61%
1998	10,57%	7,01%	4,98%	20,05%
1999	5,86%	5,10%	0,09%	6,36%
2000	8,57%	5,49%	10,90%	1,59%
2001	8,64%	9,15%	7,54%	5,92%
2002	6,57%	6,85%	4,71%	15,52%
2003	15,14%	16,26%	0,23%	16,98%
2004	2,32%	1,53%	1,15%	1,67%
2005	2,50%	3,27%	2,09%	0,04%
2006	7,44%	3,43%	7,11%	6,86%
2007	4,59%	4,25%	3,53%	4,80%
2008	24,15%	20,11%	34,12%	26,15%
2009	6,74%	6,44%	1,13%	45,39%
2010	2,57%	4,59%	4,19%	0,97%
2011	7,07%	5,31%	2,22%	9,49%
2012	2,22%	0,15%	0,93%	6,35%
2013	8,76%	9,07%	2,41%	3,16%
2014	7,03%	6,71%	1,43%	4,05%
Average	**5,98%**	**5,32%**	**4,24%**	**7,75%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 1y STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 9				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,96%	3,75%	1,78%	0,95%
1996	2,70%	3,06%	2,38%	0,97%
1997	9,13%	6,14%	8,82%	8,61%
1998	10,57%	7,01%	4,98%	20,05%
1999	5,86%	5,10%	0,09%	6,36%
2000	8,57%	5,49%	10,90%	1,59%
2001	8,64%	9,15%	7,54%	5,92%
2002	6,57%	6,85%	4,71%	15,52%
2003	15,14%	16,26%	0,23%	16,98%
2004	2,32%	1,53%	1,15%	1,67%
2005	2,50%	3,27%	2,09%	0,04%
2006	7,44%	3,43%	7,11%	6,86%
2007	4,59%	4,25%	3,53%	4,80%
2008	24,15%	20,11%	34,12%	26,15%
2009	6,74%	6,44%	1,13%	45,39%
2010	2,57%	4,59%	4,19%	0,97%
2011	7,07%	5,31%	2,22%	9,49%
2012	2,22%	0,15%	0,93%	6,35%
2013	8,76%	9,07%	2,41%	3,16%
2014	7,03%	6,71%	1,43%	4,05%
Average	**7,18%**	**6,38%**	**5,09%**	**9,29%**

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Risky Portfolio 6m STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 11				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,68%	2,65%	1,26%	0,67%
1996	1,91%	2,15%	1,68%	0,69%
1997	6,42%	4,32%	6,20%	6,06%
1998	7,43%	4,93%	3,50%	14,09%
1999	4,12%	3,59%	0,07%	4,47%
2000	6,06%	3,88%	7,71%	1,13%
2001	6,10%	6,46%	5,32%	4,18%
2002	4,62%	4,82%	3,31%	10,91%
2003	10,64%	11,43%	0,16%	11,94%
2004	1,63%	1,08%	0,81%	1,18%
2005	1,76%	2,30%	1,47%	0,03%
2006	5,26%	2,42%	5,03%	4,85%
2007	3,24%	3,00%	2,49%	3,39%
2008	17,01%	14,16%	24,03%	18,42%
2009	4,74%	4,53%	0,80%	31,91%
2010	1,81%	3,23%	2,95%	0,68%
2011	4,98%	3,74%	1,56%	6,68%
2012	1,57%	0,10%	0,66%	4,48%
2013	6,16%	6,38%	1,69%	2,22%
2014	4,94%	4,72%	1,01%	2,85%
Average	4,21%	3,75%	2,99%	5,45%

Absolute dif: Realized vs Expected std (Optimal Overall Portfolio 6m STOXX)

ΠΙΝΑΚΑΣ 12				
Year	**TOTAL**	**LOW**	**MEDIUM**	**HIGH**
1995	0,68%	2,65%	1,26%	0,67%
1996	1,91%	2,15%	1,68%	0,69%
1997	6,42%	4,32%	6,20%	6,06%
1998	7,43%	4,93%	3,50%	14,09%
1999	4,12%	3,59%	0,07%	4,47%
2000	6,06%	3,88%	7,71%	1,13%
2001	6,10%	6,46%	5,32%	4,18%
2002	4,62%	4,82%	3,31%	10,91%
2003	10,64%	11,43%	0,16%	11,94%
2004	1,63%	1,08%	0,81%	1,18%
2005	1,76%	2,30%	1,47%	0,03%
2006	5,26%	2,42%	5,03%	4,85%
2007	3,24%	3,00%	2,49%	3,39%
2008	17,01%	14,16%	24,03%	18,42%
2009	4,74%	4,53%	0,80%	31,91%
2010	1,81%	3,23%	2,95%	0,68%
2011	4,98%	3,74%	1,56%	6,68%
2012	1,57%	0,10%	0,66%	4,48%
2013	6,16%	6,38%	1,69%	2,22%
2014	4,94%	4,72%	1,01%	2,85%
Average	**5,05%**	**4,49%**	**3,58%**	**6,54%**