ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Υπολογισμός ασφαλίστρων που επηρεάζονται από την κατανομή του κινδύνου

ΚΑΠΠΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Διπλωματική εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2016

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Υπολογισμός ασφαλίστρων που επηρεάζονται από την κατανομή του κινδύνου

ΚΑΠΠΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Διπλωματική εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

……………………………….	……………………………….	………………………….
Γεώργιος Ψαρράκος	**Γεώργιος Πιτσέλης**	**Γεώργιος Τζαβελάς**
Επίκουρος Καθηγητής	**Επίκουρος Καθηγητής**	**Επίκουρος Καθηγητής**

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Πειραιάς 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK
MANAGEMENT**

On the computation of premiums affected by the distribution of risk

KAPPOS KONSTANTINOS

SUPERVISOR
PSARRAKOS GEORGIOS

Msc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

**Piraeus,
September 2016**

Στους γονείς μου,
Σπύρο, Ελένη και τον
αδερφό μου Ανδρέα

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και επιβλέποντα κύριο Ψαρράκο Γεώργιο για την πολύτιμη βοήθεια του, την καθοδήγηση αλλά και την κατανόηση που έδειξε σε όλο το διάστημα εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ θερμά και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Πιτσέλη Γεώργιο και κύριο Τζαβελά Γεώργιο. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη και συμπαράσταση που μου πρόσφερε απλόχερα.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τον υπολογισμό ασφαλίστρων που επηρεάζονται από την κατανομή του κινδύνου. Ιδιαιτέρως, μελετούμε ασφάλιστρα που επηρεάζονται από τη δεξιά ουρά της εκάστοτε κατανομής. Επίσης, ασχολούμαστε με ασφάλιστρα, δοθέντος ότι ο κίνδυνος βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές $x_q = VaR_q[X]$ και $x_p = VaR_p[X]$, με $0<q<p<1$.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μέτρα κινδύνου και βασικές κατανομές. Δίνονται τύποι, βασικοί ορισμοί και παρατηρήσεις που κρίνονται απαραίτητα για τα επόμενα κεφάλαια. Το δεύτερο κεφάλαιο ξεκινά με αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων προσαρμοσμένες στον κίνδυνο. Ακόμα, έχουμε το ασφάλιστρο TSD (*tail standard deviation*) και αρκετά αριθμητικά παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση. Στο τρίτο κεφάλαιο επεκτείνουμε τη μελέτη μας προσθέτοντας και άλλα ασφάλιστρα τέτοιου τύπου.

Abstract

This thesis deals with the calculation of insurance premiums, which are affected by the risk allocation. Particularly, we study premiums affected by the right tail of each distribution. Also, dealing with insurance premiums, when is known thats the risk is between two values $x_q = VaR_q[X]$ and $x_p = VaR_p\,[X]$, with $0 < q < p < 1$.

In the first chapter, risk measures and basic distributions are shown. Given formulas, basic definitions and observations, which are necessary for subsequent chapters. The second chapter begins with premium calculation principles adapted to the risk . Still, we have the premium TSD (*tail standard deviation*) and several numerical examples for better understanding. In the third chapter we extend our study by adding others of this type premiums .

Περιεχόμενα

Κατάλογος Βασικών Συμβολισμών

σ : Πριμοδότηση

$f(x)$: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της x

x_q : Κατώφλι φράγματος

$\mathbb{N}$: Το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbb{R}$: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{Z}$: Το σύνολο των ακεραίων αριθμών

$\mathbb{Q}$: Το σύνολο των ρητών αριθμών

$D[X]$: Η απόκλιση της δεξιάς ουράς της X

$E(X)$: Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X ή μιας κατανομής

$F(x)$: Η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της x

$\overline{F}(x)$: Δεξιά ουρά των κατανομών

LTCE : Περιορισμένο ασφάλιστρο από την προσδοκία υπό όρους της ουράς

LTSD : Περιορισμένο ασφάλιστρο που εξαρτάται από την τυπική απόκλιση της ουράς

TCE : Ασφάλιστρο από την προσδοκία υπό όρους της ουράς

TSD : Ασφάλιστρο που εξαρτάται από την τυπική απόκλιση της ουράς

TCov : Συνδιακύμανση των ουρών των κατανομών

TV : Διακύμανση ουράς

TVP : Ασφάλιστρο με βάση την διακύμανση της ουράς

$Var(X)$: Η διακύμανση της X

Κατάλογος Συντομογραφιών

σ.π. : συνάρτηση πιθανότητας

σ.π.π. : συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Κ.Ο.Θ. : Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

tf : συνάρτηση ουράς

VaR : Αξία σε κίνδυνο

EC : Οικονομικό κεφάλαιο

EDM : Μοντέλο εκθετικής διασποράς

ERAR : Αναμενόμενη προσαρμοσμένη απόδοση κινδύνου

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία καταπιάνεται με ένα αντικείμενο συνεχώς αυξανόμενου ενδιαφέροντος. Ο ορθός υπολογισμός και δίκαιη επιβολή ασφαλίστρων διαδραματίζει κομβικό ρόλο στην επιβίωση και ανταγωνιστικότητα της εκάστοτε εταιρείας. Ο καθορισμός παραγόντων που επηρεάζουν τον υπολογισμό των ασφαλίστρων είναι εξίσου σημαντική απόφαση. Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με τον υπολογισμό ασφαλίστρων που επηρεάζονται από την κατανομή του κινδύνου. Ο κίνδυνος ουσιαστικά περιγράφει μια αβεβαιότητα ως προς την επαλήθευση των προβλεφθέντων αποτελεσμάτων ή εμφάνιση απρόσμενων αρνητικών καταστάσεων. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον κίνδυνο X ως μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με κατανομή F και Y το σύνολο τέτοιων κινδύνων. Σκοπός μας είναι λοιπόν να μελετήσουμε ασφάλιστρα που επηρεάζονται από τη δεξιά ουρά της κατανομής. Ασχολούμαστε με την επίλυση προβλημάτων, που σχετίζονται με την εμφάνιση "πολύ μεγάλων" τιμών και τον ορθό υπολογισμό ασφαλίστρων σε αυτές τις περιπτώσεις. Εφαρμογές υπάρχουν σε πληθώρα ερευνητικών περιοχών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα ακραία καιρικά φαινόμενα (όπως χιονοπτώσεις, μεγάλες πλημμύρες κλπ), σεισμικές δονήσεις, πολύ υψηλή στάθμη των υδάτων και καταστροφικές βλάβες ή αποτυχίες μηχανημάτων. Σύνηθες και αναμενόμενο αποτέλεσμα όλων αυτών είναι να οδηγηθούμε σε απαιτήσεις υπέρογκων αποζημιώσεων ή σε τεράστιες ζημιές χαρτοφυλακίων, τα οποία μπορεί να επηρεάζονται από ακραία και σπάνια συμβάντα. Η παρούσα εργασία διαρθρώνεται με τον εξής τρόπο:

Στο πρώτο κεφάλαιο αρχικά παραθέτουμε βασικούς ορισμούς και παρατηρήσεις για τον κίνδυνο και τις ζημιές. Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τις βασικές κατανομές, που χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη μας. Η Ενότητα 1.4 ασχολείται με το χρόνο και τη συνάρτηση επιβίωσης, ενώ η 1.5 με τα μέτρα κινδύνου. Τέλος ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με τις έννοιες του οικονομικού κεφαλαίου και της αξίας σε κίνδυνο (*Value at Risk*) (βλέπε Ενότητες 1.6 και 1.7 αντίστοιχα).

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται αναλυτικά οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων προσαρμοσμένες στον κίνδυνο. Το κεφάλαιο αρχίζει με τους δείκτες Gini και δεξιάς ουράς, παραθέτοντας βασικούς ορισμούς και παραδείγματα. Ακολουθεί η σύγκριση των κατανομών (συνεχών και διακριτών) με βάση τους προηγούμενους δείκτες. Στην Ενότητα 2.3 έχουμε το αναλογιστικό ασφάλιστρο Tail Conditional Expectation (TCE), ένα από τα σημαντικότερα μέτρα αναλογιστικού κινδύνου και χρήσιμο εργαλείο για την οικονομική αξιολόγηση των κινδύνων. Έπεται το ασφάλιστρο Tail Standard Deviation (TSD) στην Παράγραφο 2.4. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να ανατρέξει κανείς στα Παραδείγματα 2.5 έως 2.13 και στα σχήματα του κεφαλαίου.

Το τελευταίο κεφάλαιο αναλύει το ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς (TVP) και εφαρμογές πάνω σε αυτό. Επιπλέον γίνεται μια αναφορά στην κλάση ελλειπτικών κατανομών (Παράγραφος 3.3) , στα περιορισμένα μέτρα κινδύνου LTCE και LTSD (Παράγραφος 3.4) και στο εκθετικό μοντέλο διασποράς (Παράγραφος 3.5). Η εργασία ολοκληρώνεται με τα τελικά συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 1

Μέτρα Κινδύνου και Βασικές Κατανομές

1.1 Εισαγωγή

Το οικονομικό περιβάλλον αποτελεί ένα δυναμικό περιβάλλον στο οποίο οι μεταβολές είναι ταχύτατες, με επιπτώσεις ραγδαίες και πολυδιάστατες σε επίπεδο κυβερνήσεων, οργανισμών, επιχειρήσεων και ιδιωτών. Λόγω, της μεταβλητότητας αυτής, η έννοια του κινδύνου και της διαχείρισής του κάνουν αισθητή την παρουσία τους όλο και περισσότερο σε σχέση με το παρελθόν, αφού η ταχύτητα των εξελίξεων οδηγεί σε άμεσες συνέπειες ανεξαρτήτως γεωγραφικών ή φυσικών συνόρων. Η χρεοκοπία κολοσσιαίων επιχειρηματικών οργανισμών σε διάφορους κλάδους της οικονομίας, όπως της WorldCom (κλάδος τηλεπικοινωνιών), Abengoa (κλάδος ενέργειας), Barings (χρηματοπιστωτικός κλάδος), Lehman Brothers (τραπεζικός κλάδος), SwissAir (κλάδος αερομεταφορών) είναι μερικά παραδείγματα που για λόγους είτε κοινωνικοπολιτικούς (τρομοκρατικό χτύπημα της 11ης Σεπτεμβρίου) είτε για λόγους κακής διαχείρισης και έλλειψης ολοκληρωμένων εποπτικών μηχανισμών είχαν μεγάλου εύρους αρνητικές συνέπειες όχι μόνο στην περιοχή που εμφανίστηκαν, αλλά παγκόσμια. Με γνώμονα τα παραπάνω, στο χώρο της διαχείρισης των κινδύνων γίνονται συνεχείς προσπάθειες βελτίωσης των υπαρχόντων τεχνικών και εργαλείων καθώς και έρευνες για την ανάπτυξη νέων, που με παράλληλες ενέργειες γνωστοποίησης αυτών έχουν σαν κύριο σκοπό την συγκέντρωση γνώσης γύρω από την αναγνώριση και την όσο γίνεται πιο αποτελεσματική διαχείριση των κινδύνων (για το κεφάλαιο 1 βλέπε Eales (1995), Williams et al. (1999)).

Ορισμός 1.1 (***ορισμός του Κινδύνου***) Όταν τα άτομα ερωτώνται να ορίσουν τον κίνδυνο, τα περισσότερα από αυτά εισηγούνται ότι "κίνδυνος είναι η πιθανότητα της εμφάνισης των δυσμενών συνεπειών". Είναι αρκετά συνηθισμένο να σκεφτόμαστε τον κίνδυνο από την αρνητική του διάσταση και να ορίζουμε αυτόν μόνο με την αναφορά στις δυσμενείς συνέπειες. Αυτή η τοποθέτηση, αποτελεί ωστόσο μια περιορισμένη άποψη, διότι εστιάζει την προσοχή μόνο στις δυνητικές απώλειες και απομακρύνεται από την πιθανότητα ότι μπορεί να επιτευχθούν οφέλη από την ανάληψη του κινδύνου. Επομένως, είναι σημαντικό να αποφύγουμε την περιορισμένη άποψη, καθώς οι επιχειρήσεις βασίζονται κυρίως στην προϋπόθεση ότι χρειάζεται να αναλαμβάνουν κίνδυνο για να επιτύχουν κέρδη. Έχοντας υπόψη μας τα παραπάνω, υιοθετούμε ως κίνδυνο την αβεβαιότητα των μελλοντικών αποτελεσμάτων. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα λοιπόν ότι ο κίνδυνος είναι κάτι το οποίο θα συμβεί στο μέλλον, αλλά δεν μπορεί να προβλεφθεί επ' ακριβώς σήμερα διότι υπάρχει αβεβαιότητα. Ο κίνδυνος και η αβεβαιότητα δεν θα πρέπει να λαμβάνονται ως αρνητικοί παράγοντες και αυτό αποτελεί μια σκέψη-κλειδί που πρέπει να έχουμε πάντα υπόψη μας.

Οι κίνδυνοι εμφανίζονται σε πολλούς τομείς και με πολλές μορφές στην καθημερινότητα. Η στατιστική αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο, όπου το πεδίο εφαρμογής της συγκαταλέγεται σε πλήθος άλλων επιστημών. Η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων έχει γίνει πλέον επιτακτική πριν τη λήψη αποφάσεων. Συγκεκριμένα στον ασφαλιστικό κλάδο η μελέτη και η ορθή μέτρηση κινδύνου είναι απαραίτητος πρόδρομος για τη διαχείρισή του.

1.2 Κίνδυνοι και ζημιές

Υπό μια ευρεία έννοια, οι ασφαλιστικές εταιρείες αναφέρονται στην επιχείρηση μεταφοράς (ολικώς ή μερικώς) των κινδύνων και τις οικονομικές επιπτώσεις των απρόβλεπτων ατυχιών. Η κεντρική ιδέα των αναλογιστικών μαθηματικών είναι η έννοια του κινδύνου. Ο κίνδυνος μπορεί να περιγραφεί ως ένα γεγονός που μπορεί ή δεν μπορεί να λάβει χώρα (ως εκ τούτου, ένα τυχαίο γεγονός) και επιφέρει ορισμένες αρνητικές οικονομικές συνέπειες. Πάντα περιέχεται ένα στοιχείο αβεβαιότητας: είτε τη στιγμή της εμφάνισης (όπως στην ασφάλιση ζωής) ή από το ίδιο το περιστατικό ή τη φύση και τη σοβαρότητα των συνεπειών (όπως στην αυτοκινητο-βιομηχανική ασφάλιση). Τα αναλογιστικά μοντέλα ασχολούνται με ένα ασφαλιστικό κίνδυνο, από μια κλάση που αντιπροσωπεύει το τυχαίο ποσό των χρημάτων που η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να πληρώσει για να αποζημιώσει τον ασφαλιζόμενο και τους τρίτους για τις συνέπειες της εμφάνισης του ασφαλισμένου κινδύνου. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, η μοντελοποίηση των τυχαίων μεταβλητών των ασφαλιστικών κινδύνων μπορεί γενικά να θεωρηθεί ότι είναι μη αρνητική. Αυτό οδηγεί στο ακόλουθο επίσημο ορισμό:

Ορισμός 1.2 Ένας κίνδυνος X είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το τυχαίο χρηματικό ποσό που καταβάλλεται από την ασφαλιστική εταιρεία για να αποζημιώσει τον ασφαλιζόμενο, δικαιούχους ή και τρίτους σε εκτέλεση της ασφαλιστικής σύμβασης.

Σε αντάλλαγμα για την παροχή κάλυψης, ο ασφαλιστής θα λάβει πριμοδοτήσεις. Ο ασφαλιστής συχνά ενδιαφέρεται για το σύνολο των ταμειακών ροών που σχετίζονται με την πολιτική της εταιρείας. Η απώλεια (πάνω από ένα ορισμένο ποσόν αναφοράς περιόδου) ορίζεται ως η παρούσα αξία των πληρωμών που πρέπει να γίνουν από τον ασφαλιστή μείον τη παρούσα αξία των ασφαλίστρων που πρέπει να καταβληθούν από τον ασφαλισμένο.

Ορισμός 1.3 Λαμβάνοντας υπόψη τον κίνδυνο X που καλύπτεται από ασφαλιστική εταιρεία σε αντάλλαγμα ενός ασφαλίστρου P πληρωμής (όπου P είναι η παρούσα αξία των ασφαλίστρων που πρέπει να καταβληθεί). Η σχετική απώλεια L ορίζεται ως

$$L = X - P. \tag{1.1}$$

Παρατήρηση 1.1 Σε πολλά αναλογιστικά εγχειρίδια, η πριμοδότηση σ υποτίθεται ότι είναι ένα γνωστό χρηματικό ποσό, που καθορίζεται από τους όρους της πολιτικής. Έτσι, η ασφάλιση των επιχειρήσεων αποτελείται αντικαθιστώντας τις τυχαίες συνέπειες του ασφαλισμένου κινδύνου από ένα ντετερμινιστικό ποσό πριμοδότησης.

Για ενός έτους πολιτικές με μια εφάπαξ καταβολή ασφαλίστρου (σε ζήτημα πολιτικής), η πριμοδότηση μειώνεται σε ένα σταθερό ποσό. Στην ασφάλιση ζωής, για παράδειγμα, με σ να είναι συχνά ένα μη τετριμμένο τυχαίο διάνυσμα, ανάλογα με την εναπομένουσα διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου. Επίσης, στον τομέα της ασφάλισης αυτοκινήτων , με την εφαρμογή της αξιολογικής διαβάθμισης συστήματα (όπως οι μηχανισμοί *bonus-malus*) κάνει την πριμοδότηση που καταβάλλεται από τον αντισυμβαλλόμενο να εξαρτάται από τις αξιώσεις που έχουν αναφερθεί στο παρελθόν.

1.3 Βασικές Κατανομές

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό όλες οι σοβαρές και αξιόπιστες εταιρίες ανά τον κόσμο οφείλουν να εντοπίσουν την κατανομή ή τον συνδυασμό κατανομών που ακολουθεί ο εκάστοτε κίνδυνος που αναλαμβάνουν. Για παράδειγμα, ο ασφαλιστικός κλάδος δαπανά και επενδύει υπέρογκα ποσά ώστε να εντοπίσει την κατανομή που ακολουθούν οι ζημιές, για να μπορέσει να προσφέρει όσο το δυνατόν “δικαιότερα” και ανταγωνιστικότερα ασφάλιστρα (βλέπε Χαραλαμπίδη (2000), Δαμιανού και Κούτρας (2003)).

1.3.1 Διακριτή ομοιόμορφη κατανομή

• Εμφανίζεται στις περιπτώσεις όπου η υπό εξέταση τ.μ. X παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών (π.χ. $X \in \{1,2,...,n\}$) και όλες οι πιθανότητες $P(X=i)$ είναι ισοπίθανες. Αν X μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τις τιμές $x=1,2,...k$ σταθερή πιθανότητα $\frac{1}{k}$ τότε λέμε ότι η X ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή. Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$f(x)=P(X=x)=1/k \tag{1.2}$$

όπου $x=1,2,...,k.$ με $k \leqslant n.$

Αν X ακολουθεί την διακριτή ομοιόμορφη κατανομή με πιθανότητα που δίνεται από την (1.2), τότε η μέση τιμή προκύπτει από

$$E(X)=(k+1)/2 \tag{1.3}$$

και η διασπορά είναι

$$Var(X)=(k^2-1)/12. \tag{1.4}$$

1.3.2 Διωνυμική κατανομή

Διωνυμικό πείραμα, είναι το πείραμα που αποτελείται από n δοκιμές, η κάθε μια από τις οποίες έχει μόνο δυο δυνατά και αντίθετα αποτελέσματα (Ε και Α) και για το οποίο ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

(i) Οι πιθανότητες των δυο αντίθετων αποτελεσμάτων παραμένουν σταθερές σε όλες τις δοκιμές του πειράματος.

(ii) Οι δοκιμές του πειράματος είναι στατιστικά ανεξάρτητες.

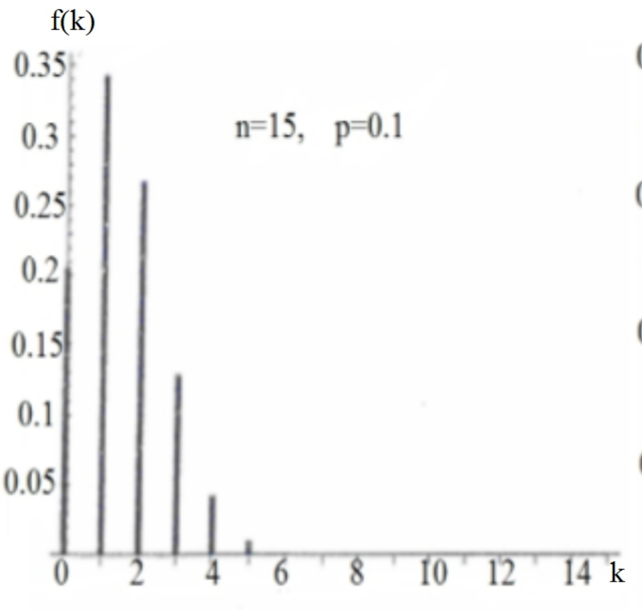
Η διωνυμική κατανομή είναι μια διακριτή συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής. Περιγράφει ένα τυχαίο πείραμα με δυο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία - αποτυχία) και πιθανότητα επιτυχίας p που επαναλαμβάνεται n φορές. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών. Η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες σε n ανεξάρτητα πειράματα με πιθανότητα επιτυχίας p κάθε φορά είναι:

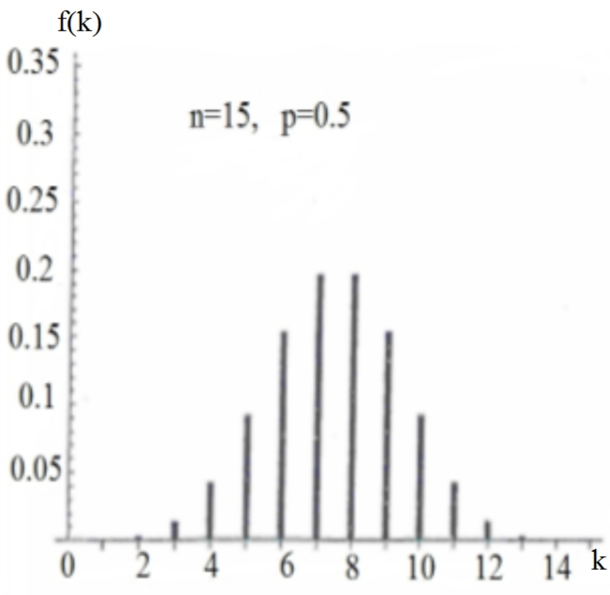
$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \tag{1.5}$$

$0<p<1$ και $k=0,1,2,\ldots,n$.

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διασπορά
$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$p\in(0,1), n\in\mathbb{N}$	np	$np(1-p)$

Κάθε επιμέρους δοκιμή του διωνυμικού πειράματος λέγεται δοκιμή Bernoulli.





1.3.3 Κατανομή Bernoulli

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q=1-p$). Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν – ένα) τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p. Αν συμβολίσουμε με p,q τις πιθανότητες εμφάνισης των στοιχειωδών ενδεχομένων {ε}, {α} (επιτυχίας και αποτυχίας αντίστοιχα) είναι φανερό ότι θα έχουμε

$$p+q=1, 0\leqslant p\leqslant 1, 0\leqslant q\leqslant 1.$$

Για X=1 έχουμε επιτυχία και για X=0 αποτυχία. Η κατανομή Bernoulli παίρνει τις εξής τιμές:

$$P(X=1)=p \tag{1.6}$$

και

$$P(X=0)=q=1-p. \tag{1.7}$$

Ισοδύναμα, η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli είναι η

$$f(x)=p^x q^{(1-x)}, x=0,1. \tag{1.8}$$

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διασπορά
$p^x q^{(1-x)}$	$p\in(0,1)$	p	$p(1-p)$

1.3.4 Κατανομή Poisson

Έστω μια ακολουθία τυχαίων ενδεχομένων για την οποία:

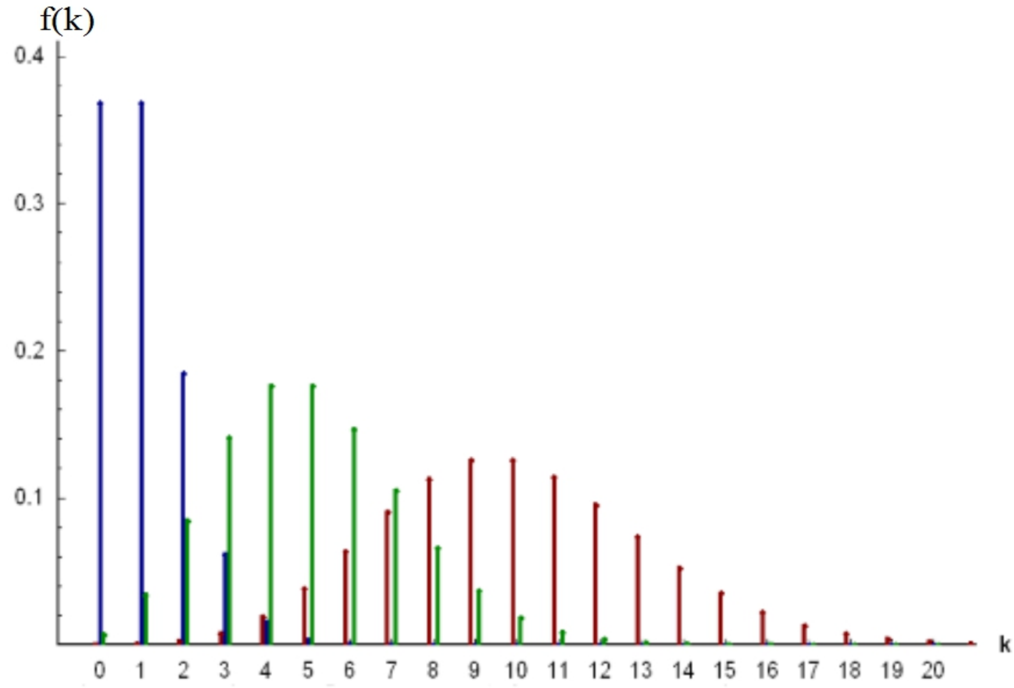
(α) τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα,

(β) τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται με ένα σταθερό μέσο ρυθμό λ ανά μονάδα χρόνου,

(γ) τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και έστω X ο αριθμός των ενδεχομένων που πραγματοποιούνται στη μονάδα του χρόνου.

Στην περίπτωση που πληρούνται όλα τα παραπάνω, τότε τα ενδεχόμενα ακολουθούν κατανομή Poisson.

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διασπορά
$(\lambda^k e^{-\lambda})/k!$	$\lambda>0$	λ	λ



Σχήμα 1.1 Συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson για λ = 1 (μπλε), λ = 5 (πράσινο) και λ = 10 (κόκκινο).

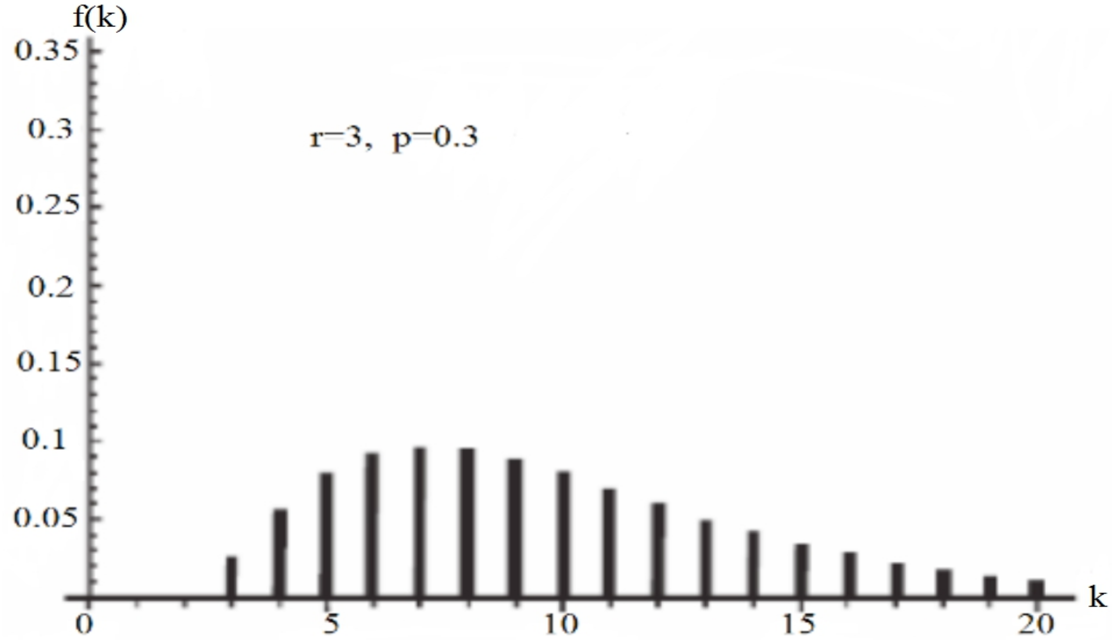
1.3.5 Αρνητική διωνυμική κατανομή

Θεωρούμε μια ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q=1-p$) σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της r επιτυχίας. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p. Η συνάρτηση πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

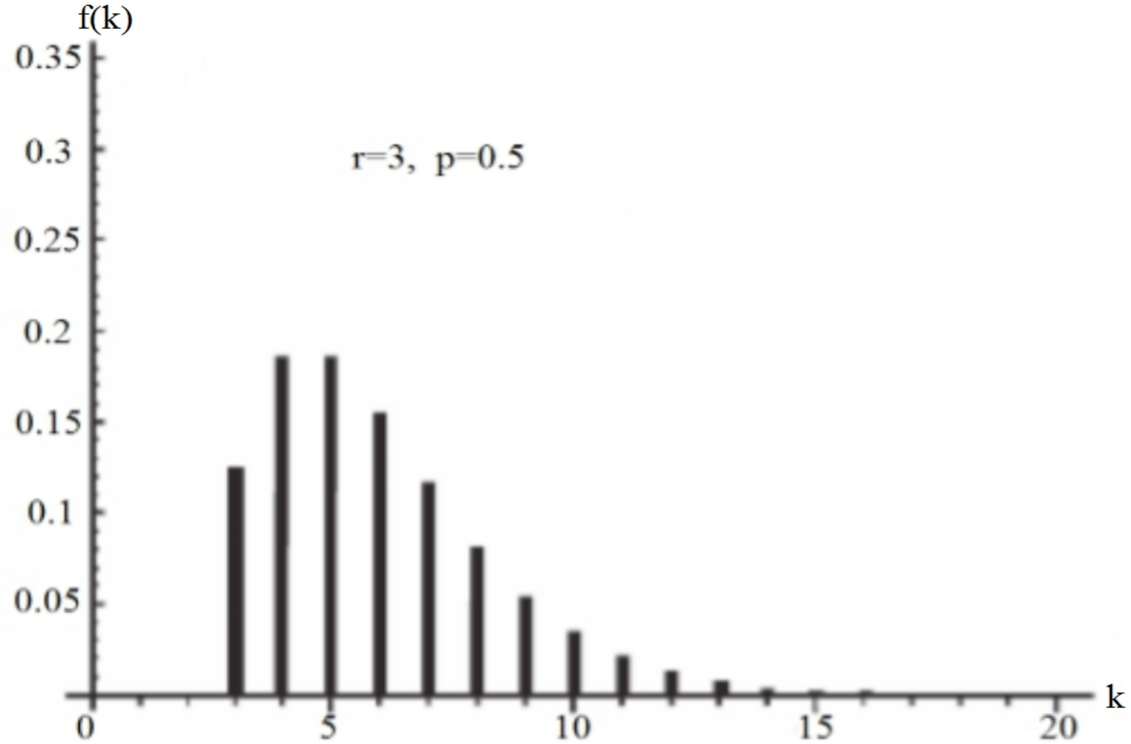
$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{r+k-1}{r-1}p^r(1-p)^k, \tag{1.9}$$

για $k=0,1,2,\ldots$

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετροι	Μέση τιμή	Διακύμανση
$\binom{r+k-1}{r-1}p^r(1-p)^k$	$p\in(0,1), r\in\mathbb{N}$	r/p	$r\frac{1-p}{p^2}$



Σχήμα 1.2 Συνάρτηση πιθανότητας της Αρνητικής διωνυμικής κατανομής για $r = 3, p = 0.3$.



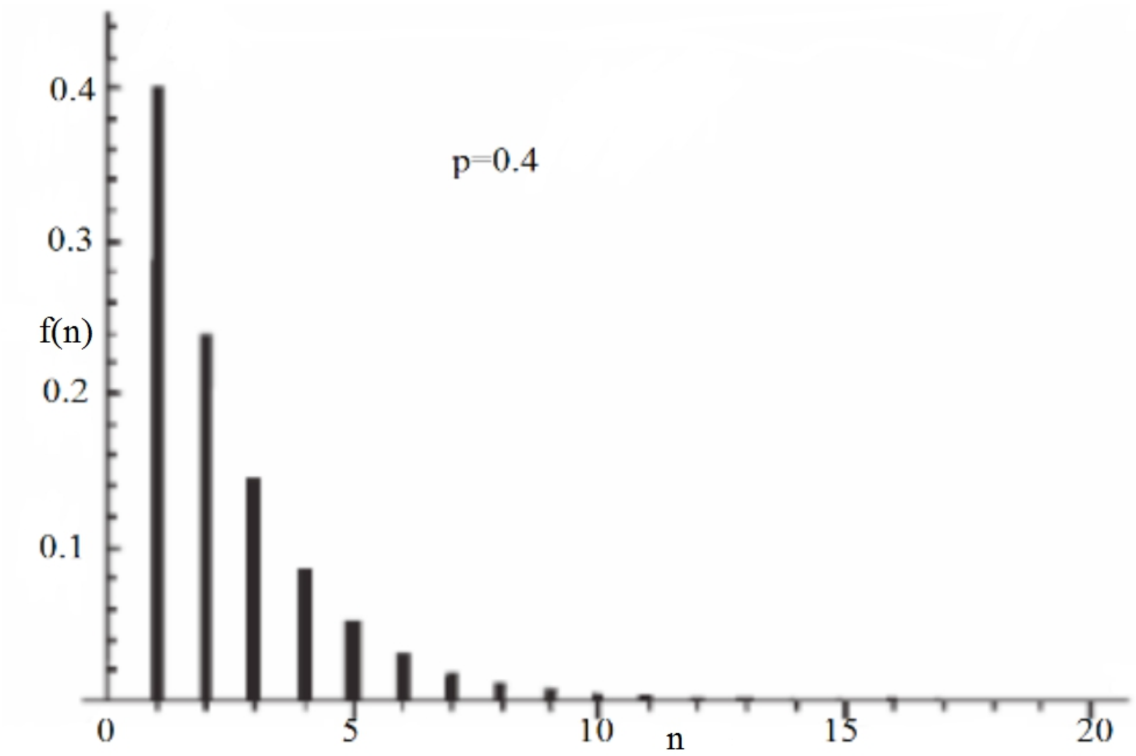
Σχήμα 1.3 Συνάρτηση πιθανότητας της Αρνητικής διωνυμικής κατανομής για $r = 3, p = 0.5$.

1.3.6 Γεωμετρική κατανομή

Θεωρούμε μια ακολουθία (ανεξάρτητων) δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q=1-p$) σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}, \quad n\geqslant 1. \tag{1.10}$$

Συνάρτηση Πιθανότητας	Παράμετρος	Μέση τιμή	Διακύμανση
$p(1-p)^{n-1}$	$p\in(0,1)$, $n\geqslant 1$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$



Σχήμα 1.4 Συνάρτηση πιθανότητας της Γεωμετρικής κατανομής για $p=0.4$.

1.3.7 Κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή (γνωστή και ως *Γκαουσιανή κατανομή*) είναι η σημαντικότερη κατανομή με τις περισσότερες εφαρμογές. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα κάθε φυσική ποσότητα της οποίας η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ότι διαμορφώνεται από ένα μεγάλο αριθμό (ανεξάρτητων) παραγόντων ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή. Χρησιμοποιείται ως μία πρώτη προσέγγιση για να περιγραφούν τυχαίες μεταβλητές πραγματικών τιμών, οι οποίες τείνουν να συγκεντρώνονται γύρω από μια μέση τιμή. Η κανονική κατανομή αποτελεί την πιο σημαντική κατανομή της στατιστικής μεθοδολογίας για τους εξής βασικούς λόγους:

- Την κανονική κατανομή ακολουθούν με πολύ μεγάλη προσέγγιση τα περισσότερα συνεχή φαινόμενα.

- Πολλές ασυνεχείς κατανομές πιθανοτήτων μπορούν να προσεγγιστούν μέσω της κανονικής κατανομής. Για παράδειγμα πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά, όπως το ύψος, το βάρος η βαθμολογία σε διαγώνισμα, κ.τ.λ.

- Η κανονική κατανομή αποτελεί σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα (το άθροισμα ενός ικανοποιητικά μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή) τη βάση της στατιστικής συμπερασματολογίας ή επαγωγικής στατιστικής.

- Τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν κανονική κατανομή. Γι' αυτό το λόγο η Κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως κατανομή σφαλμάτων.

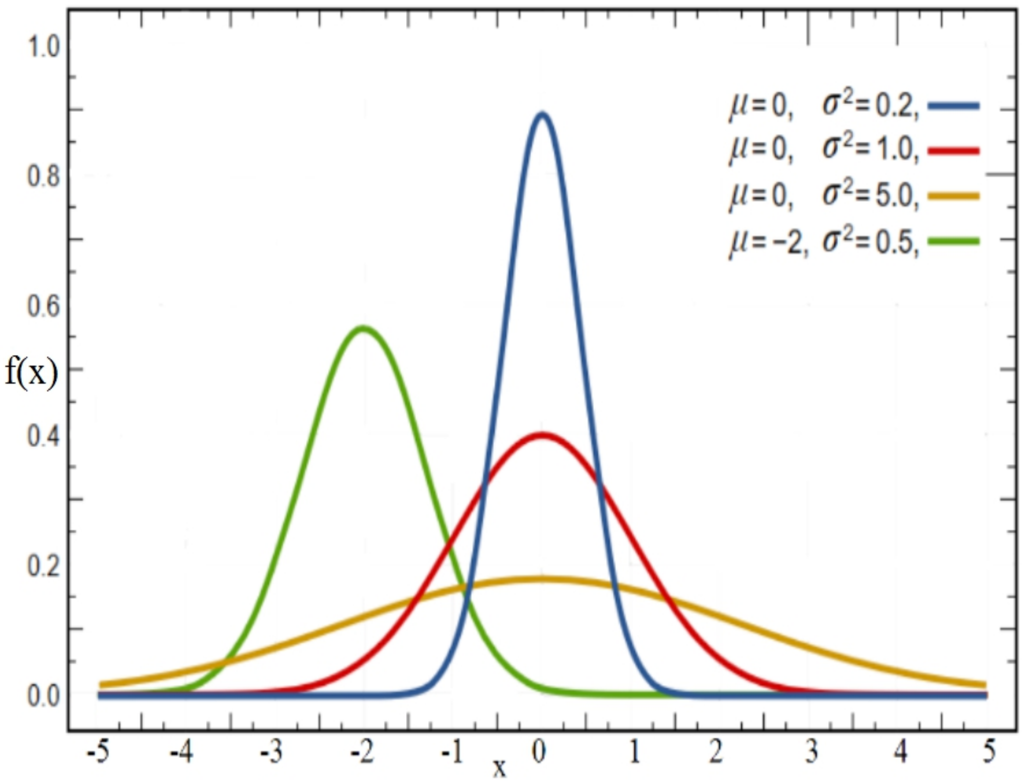
Η γραφική παράσταση της σχετιζόμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχει σχήμα "καμπάνας" και είναι γνωστή ως Γκαουσιανή συνάρτηση ή κωδωνοειδής καμπύλη.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.11)$$

όπου μ= μέση τιμή και σ^2 = διακύμανση.

Ακολουθεί το Κεντρικό οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.), όπως ορίζεται από το βιβλίο Δαμιανού και Κούτρα (2003).

Ορισμός 1.4 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα): Αν από έναν πληθυσμό που ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και υπολογίσουμε τους μέσους τους, τότε για μεγάλα n (θεωρητικά $n \to \infty$) η κατανομή αυτών των μέσων (των δειγματικών) είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή επίσης μ και διασπορά σ^2/n.



1.3.8 Εκθετική κατανομή

Στην θεωρία πιθανοτήτων και στην στατιστική, η εκθετική κατανομή ανήκει στην οικογένεια των συνεχών κατανομών πιθανότητας. Περιγράφει τον χρόνο μεταξύ γεγονότων σε μια διαδικασία Πουασόν (Poisson), δηλαδή μια διαδικασία στην οποία γεγονότα συμβαίνουν συνεχώς και ανεξάρτητα με ένα σταθερό μέσο ρυθμό. Η εκθετική κατανομή ανήκει στην ευρύτερη εκθετική οικογένεια, η οποία είναι μια κλάση κατανομών πιθανότητας που περιλαμβάνει ακόμα την κανονική κατανομή, την διωνυμική κατανομή, την κατανομή γάμμα, την κατανομή Poisson και άλλες. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) μιας εκθετικής κατανομής είναι:

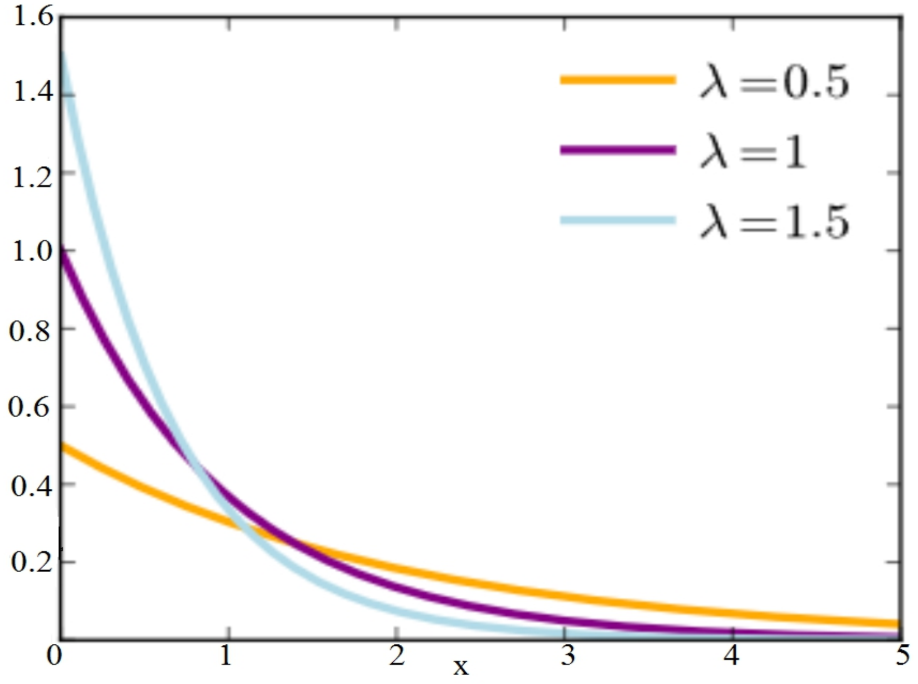
$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Η μέση τιμή της αναμενόμενης τιμής μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής X με παράμετρο ρυθμού $\lambda > 0$ είναι

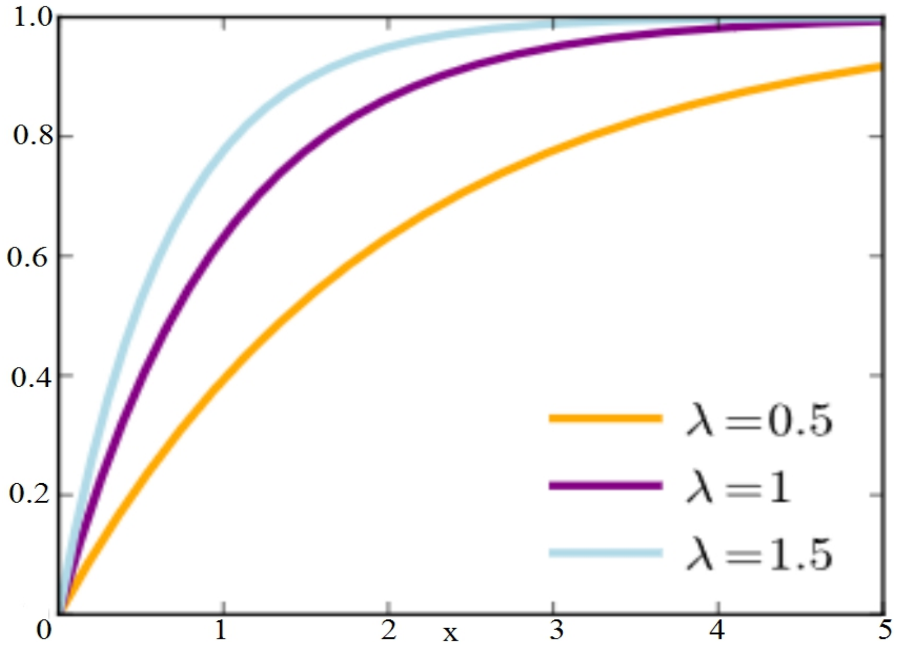
$$E(X) = 1/\lambda.$$

Η διασπορά του X είναι:

$$Var(X)=1/\lambda^2.$$



Σχήμα 1.5 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας εκθετικών κατανομών.



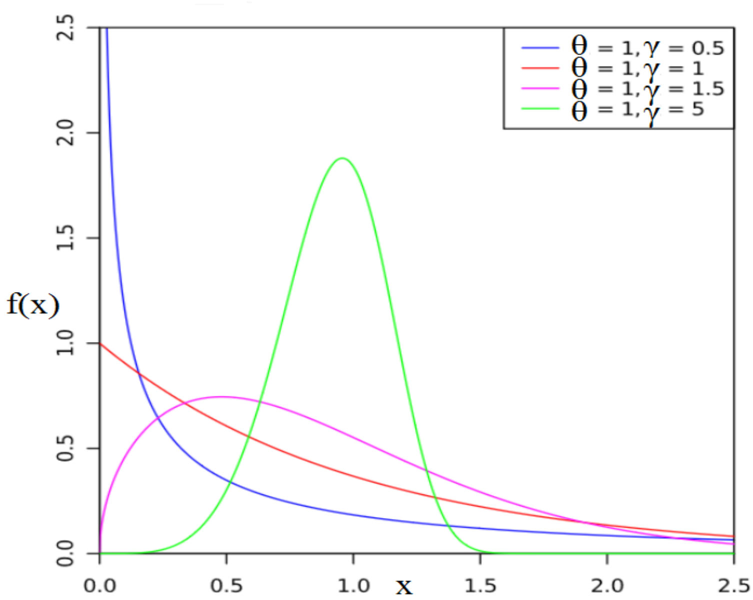
Σχήμα 1.6 Αθροιστική συνάρτηση διαφόρων εκθετικών κατανομών.

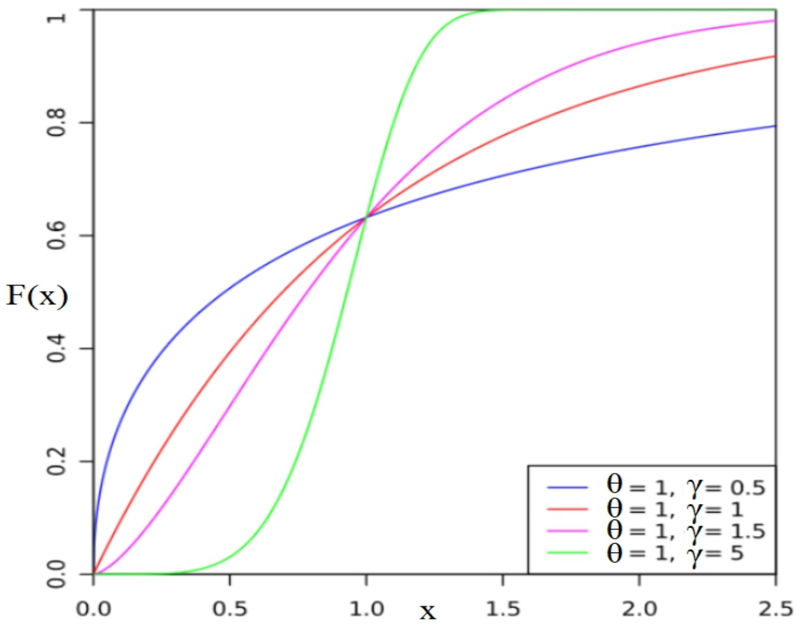
1.3.9 Κατανομή Weibull

Η κατανομή Weibull μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της Weibull κατανομής είναι:

$$f(x) = \theta\gamma x^{(\gamma-1)} e^{-\theta x^{\gamma}}, \tag{1.13}$$

όπου $x > 0, \gamma > 0, \theta > 0$.





1.3.10 Κατανομή Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα, μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της Γάμμα κατανομής είναι:

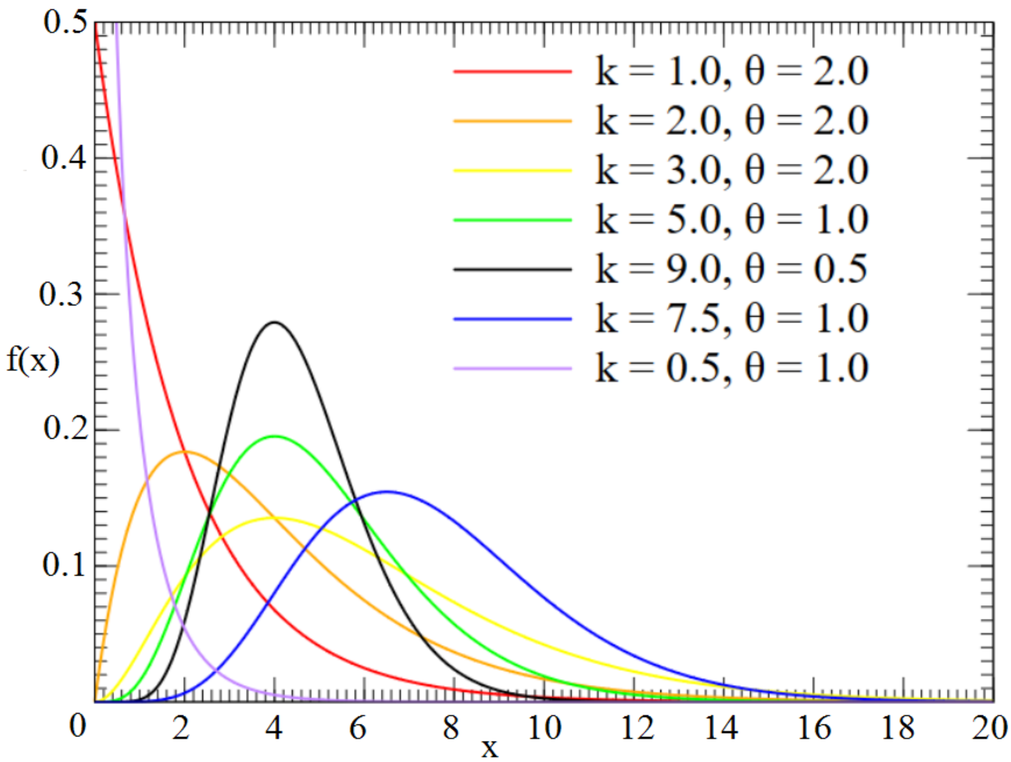
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \tag{1.14}$$

με $k > 0, \quad \theta > 0$.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	Μέση τιμή	Διασπορά
$\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$	$k\theta$	$k\theta^2$

Όπου $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$ η συνάρτηση Γάμμα.

Ακολουθεί το Σχήμα 1.7 που μας δείχνει πως επηρεάζεται η κατανομή Γάμμα για τις διάφορες τιμές των k και θ.



Σχήμα 1.7 Πως επηρεάζεται η κατανομή Γάμμα από τις διαφορετικές τιμές των k και θ.

1.3.11 Κατανομή Pareto

Η κατανομή Pareto χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή γεωφυσικών, κοινωνικών, αναλογιστικών και πολλών άλλων ειδών παρατηρήσιμων φαινομένων. Αξίζει να σημειωθεί ότι στον ασφαλιστικό κλάδο έχει συχνή χρήση στον υπολογισμό αποζημιώσεων που προκύπτουν από πρόκληση πυρκαγιών. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της κατανομής Pareto είναι η εξής:

$$f(x)=(\alpha\theta^{\alpha})/(x+\theta)^{(\alpha+1)} \quad , \tag{1.15}$$

με $\alpha, \theta > 0$.

Επίσης, ισχύει

$$F(x)=1-(\theta/(x+\theta))^{\alpha},$$

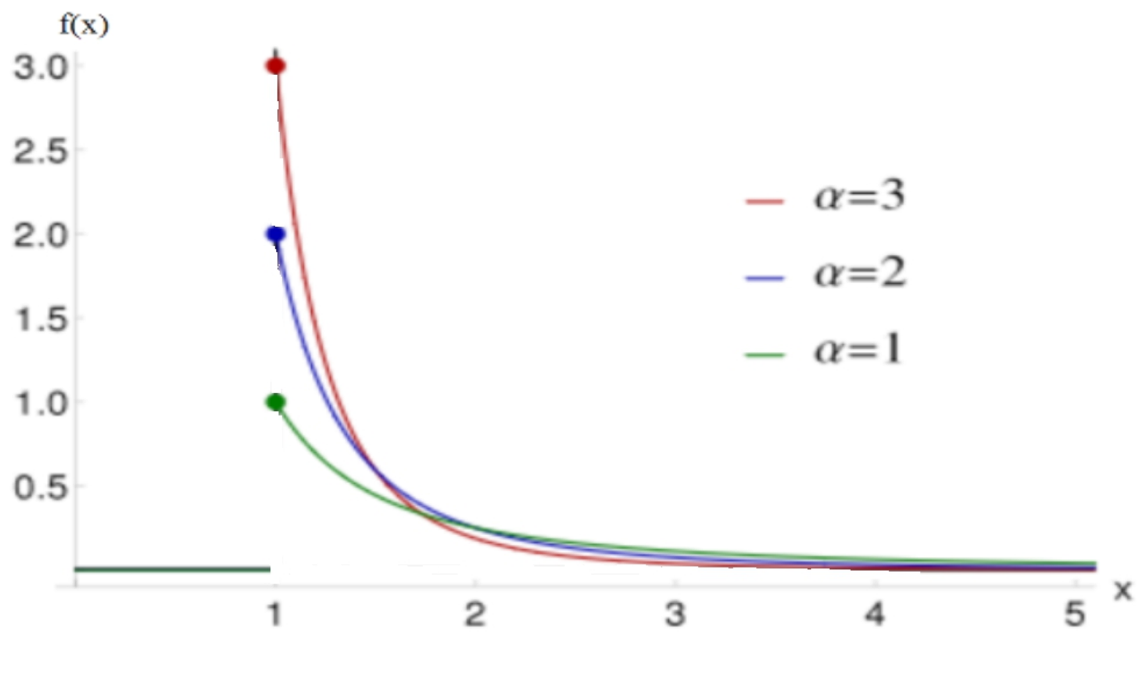
Αν $\alpha>1$ η μέση τιμή δίνεται από

$$E(X)=\theta/(\alpha-1)$$

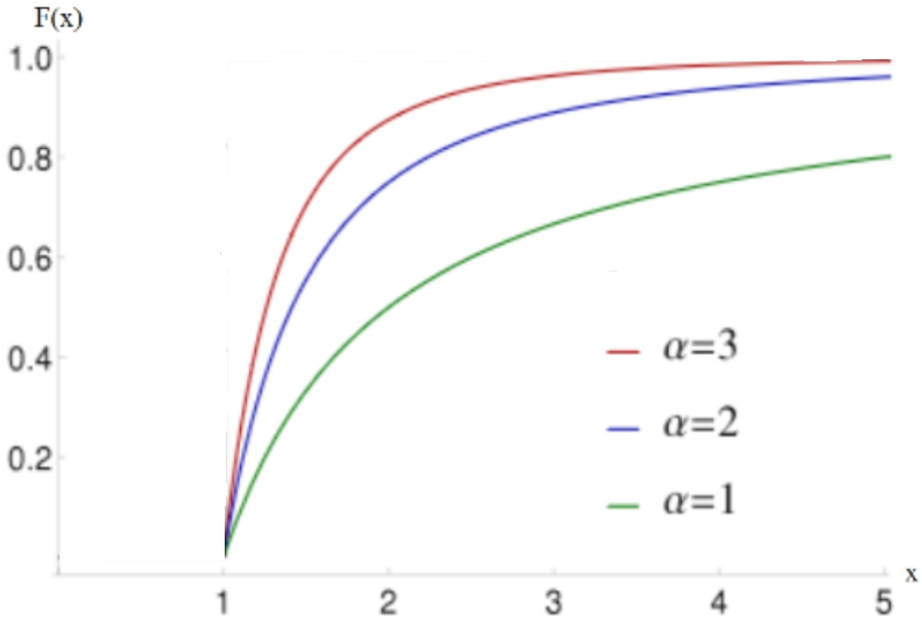
και για $\alpha>2$ η διασπορά είναι

$$Var(X)=(\alpha\theta^{2})/(\alpha-1)^{2}(\alpha-2).$$

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Κατανομής Pareto για τις διαφορετικές τιμές του α (βλέπε Σχήμα 1.8 και 1.9 αντίστοιχα).



Σχήμα 1.8 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κατανομής Pareto για διαφορετικά α.



Σχήμα 1.9 Αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κατανομής Pareto για διάφορες τιμές του *α*.

1.4 Χρόνος Επιβίωσης και Συνάρτηση Επιβίωσης

Ως χρόνος επιβίωσης μπορεί να ορισθεί ο χρόνος μέχρι να συμβεί ένα συγκεκριμένο γεγονός. Το γεγονός μπορεί να είναι η εμφάνιση μιάς ασθένειας, η εξέλιξη ή η επιτυχία μιας θεραπείας σε κάποια ασθένεια, ο θάνατος ενός ασθενή, η παύση λειτουργίας μιας συσκευής κτλ. Ο χρόνος επιβίωσης ονομάζεται και χρόνος ως το "γεγονός" ή την "αποτυχία". Επίσης, μπορούμε να εισαγάγουμε μια συνάρτηση ουράς (*tf*), που συχνά αποκαλείται συνάρτηση επιβίωσης και ορίζεται ως εξής:

$$S(t)=P(T\geqslant t)=1-F(t), \tag{1.16}$$

για $t\geqslant 0$.

Με απλά λόγια, η παραπάνω σχέση αντιπροσωπεύει την πιθανότητα το T να παίρνει μια τιμή μεγαλύτερη από t. Εάν το T είναι η τυχαία μέλλουσα διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου, τότε έχουμε $\overline{F}(t)$ να είναι η πιθανότητα ο ασφαλισμένος να επιβιώσει μέχρι την ηλικία t. Ακόμα, εφόσον T είναι το συνολικό ποσό των απαιτήσεων που παράγεται από ένα συγκεκριμένο αντισυμβαλλόμενο, τότε έχουμε $P(T\geqslant t)$ να είναι η πιθανότητα ότι η αντίστοιχη πολιτική δημιουργεί μια απώλεια μεγαλύτερη από t. Η συνάρτηση επιβίωσης είναι μη αρνητική και φθίνουσα συνάρτηση του t με $S(0)=1$ και S(∞) = 0. Η γραφική παράσταση της $S(t)$ συναρτήσει του t είναι γνωστή ως καμπύλη επιβίωσης και είναι πολύ σημαντική στην ανάλυση δεδομένων χρόνου επιβίωσης (βλέπε Denuit et al. (2001)).

1.4.1 Συνάρτηση Κινδύνου

Η συνάρτηση κινδύνου $h(t)$, ορίζεται ως η πιθανότητα αποβίωσης (ή πραγμάτωσης του γεγονότος που εξετάζεται) τη χρονική στιγμή t, δεδομένου ότι το άτομο έχει επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή t. Οπότε,

$$h(t) = \lim_{s \to 0} \frac{P(t \leq T \leq t + s / T \geq t)}{s} \quad . \tag{1.17}$$

Η συνάρτηση κινδύνου δίνει ένα μέτρο του πόσο πιθανό είναι ένα άτομο να αποβιώσει ως συνάρτηση της ηλικίας του ατόμου, για παράδειγμα ο κίνδυνος θανάτου ανάμεσα σε αυτούς που είναι ζωντανοί τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

1.5 Μέτρα Κινδύνου

Για αιώνες, η λειτουργία των ασφαλιστών και αντασφαλιστών ήταν να πουλήσουν την κάλυψη του κινδύνου. Τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν προσχωρήσει σε αυτή τη δραστηριότητα οι τράπεζες και τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Σήμερα, οι δύο αυτές ομάδες αντιμετωπίζουν την ίδια πρόκληση: να συλλέγουν και να διαχειρίζονται τους κινδύνους. Ως αποτέλεσμα ψάχνουν για αγορές όπου οι κίνδυνοι αυτοί μπορούν να αντισταθμίζονται. Όταν δεν υπάρχουν φράκτες, για παράδειγμα λόγω της δομικής ατέλειας της αντίστοιχης αγοράς, πρέπει να καθιερωθεί ένα προσεκτικό μέτρο κινδύνου και εάν είναι απαραίτητο, να δημιουργηθούν αξιόπιστα αποθεματικά. Οι εταιρείες δείχνουν τεράστιο ενδιαφέρον για τις πρόσφατα αναπτυχθείσες τεχνικές για τη μέτρηση του κινδύνου και την αξιολόγηση κερδοφόρων τομέων της επιχείρησης. Ο τομέας διαχείρισης έρχεται αντιμέτωπος καθημερινά με το δύσκολο έργο της συμφιλίωσης των αντικρουόμενων συμφερόντων μεταξύ των πελατών και ασφαλισμένων, από τη μία και των μετόχων από την άλλη. Οι πρώτοι ενδιαφέρονται για ισχυρή οικονομική ευημερία, ενώ οι δεύτεροι απαιτούν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απόδοση των ιδίων κεφαλαίων τους, ευθυγραμμισμένη με τον κίνδυνο που ενέχουν οι επενδύσεις τους. Στους τομείς ασφάλισης και χρηματοδότησης έχουν προταθεί πολυάριθμα μέτρα κινδύνου, από τα πιο στοιχειώδη ως τα πιο περίτεχνα. Διαφορετικές κατηγορίες των μέτρων κινδύνου αντιπροσωπεύουν διαφορετικές σχολές σκέψης (ουσιαστικά κατάλληλα μέτρα κινδύνου είναι εκείνα που συμμορφώνονται με τα αξιώματα). Παρ 'όλα αυτά, στην πράξη η εύρεση του κατάλληλου μέτρου που θα χρησιμοποιηθεί για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου για την ασφάλιση των χαρτοφυλακίων εξακολουθεί να αποτελεί θέμα για συζήτηση. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετές νέες προσεγγίσεις γύρω από το συγκεκριμένο ζήτημα, ενώ αξίζει να σημειωθούν εμφανίσεις πιο "εκλεπτυσμένων" θεωριών, κυρίως στην οικονομική βιβλιογραφία, όπως η Αναλογιστική Θεωρία Εξαρτημένων Κινδύνων [*].

Μέτρηση του κινδύνου πρακτικά σημαίνει προσδιορισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τους κατόχους επικίνδυνων χαρτοφυλακίων. Ορόσημο σε αυτή την εξέλιξη ήταν η αξιωματική προσέγγιση για τα μέτρα κινδύνου. Οι λειτουργικές μορφές, θεμελιώδεις ιδιότητες και τα μέτρα κινδύνου έχουν μελετηθεί εκτενώς στην αναλογιστική βιβλιογραφία από το 1970, κυρίως με το πρόσχημα των αρχών υπολογισμού πριμ. Υπάρχει ευρύ φάσμα μέτρων κινδύνου και αρκετά συγγράμματα που μελετούν τις αντίστοιχες ιδιότητές τους.

* βλέπε Denuit et al. (2005)

Παίρνοντας ως δεδομένο ότι οι εκάστοτε κίνδυνοι ορίζονται ως μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές (βλέπε Ορισμό 1.2), η μέτρηση κινδύνου είναι εφάμιλη με την εύρεση αντιστοίχισης r μεταξύ αυτών των τυχαίων μεταβλητών και των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ο πραγματικός αριθμός που υποδηλώνει ένα γενικό μέτρο του κινδύνου που συνδέεται με τον κίνδυνο X στο εξής θα συμβολίζεται ως $r[X]$. Επομένως, ένα μέτρο κινδύνου δεν είναι παρά μια συνάρτηση που αντιστοιχεί ένα μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό σε κίνδυνο. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ποιές πτυχές της επικινδυνότητας, που συνδέονται με το αβέβαιο αποτέλεσμα του κινδύνου που εξετάζουμε, έχει ως στόχο να ποσοτικοποιήσει το επιλεγμένο μέτρο κινδύνου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι κανένα μέτρο κινδύνου δεν μπορεί να συμπεριλάβει ολόκληρη την εικόνα του εγγενούς κινδύνου σε κάποια κατάσταση στην πραγματική ζωή, αλλά το καθένα από αυτά θα επικεντρωθεί σε μια συγκεκριμένη πτυχή του κινδύνου.

Υπάρχει ένας παραλληλισμός με τη μαθηματική στατιστική, όπου τα χαρακτηριστικά των κατανομών μπορούν να έχουν αρκετά διαφορετικές σημασίες και χρήσεις. Για παράδειγμα, η μέση τιμή για τη μέτρηση της κεντρικής τάσης, η διακύμανση για τη μέτρηση της εξάπλωσης, η κυρτότητα που αντικατοπτρίζει ασυμμετρία και η μέτρηση του πάχους των ουρών. Σκοπός μας είναι να επικεντρωθούμε σε μέτρα κινδύνου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των διατάξεων και των κεφαλαιακών απαιτήσεων που πρέπει να υιοθετηθούν προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση. Στο πλαίσιο αυτό, θα επικεντρωθούμε στα μέτρα κινδύνου που μετρούν τη "δεξιά" ουρά των κατανομών. Για απλότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε τα μοντέλα της αγοράς χωρίς τα επιτόκια, ωστόσο για την επέκταση όλων των ορισμών πιο κοντά στην «πραγματική» περίπτωση γίνεται χρήση κατάλληλης προεξόφλησης. Είμαστε τώρα έτοιμοι να αναφέρουμε τον ορισμό ενός μέτρου κινδύνου.

Ορισμός 1.5 Μέτρο κινδύνου είναι μια συνάρτηση r που μετατρέπει έναν κίνδυνο X σ' έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $r[X]$, πιθανώς άπειρο και αντιπροσωπεύει το επιπλέον ποσό που πρέπει να προστεθεί στο αναμενόμενο X ώστε να γίνει δεκτό.

Η ιδέα είναι ότι το μέτρο κινδύνου που έχει επιλεγεί ποσοτικοποιεί το βαθμό επικινδυνότητας του X: μεγάλες τιμές του X μας λένε ότι το X είναι "επικίνδυνο". Συγκεκριμένα, εάν το X είναι μια πιθανή απώλεια ενός οικονομικού χαρτοφυλακίου πάνω από ένα χρονικό ορίζοντα, ερμηνεύουμε το $r[X]$ ως το ποσό του κεφαλαίου που θα πρέπει να προστεθεί ώστε το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο να είναι φερέγγυο σε εσωτερικούς και εξωτερικούς ελέγχους. Τέτοια μέτρα κινδύνου, που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των προβλέψεων και των κεφαλαιακών απαιτήσεων, προκειμένου να αποφευχθεί η πτώχευση είναι από πολλές απόψεις παρόμοια με την αναλογιστική αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου.

1.5.1 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Για μια ασφαλιστική εταιρεία εκτεθειμένη σε υποχρέωση X, η αρχή υπολογισμό του ασφαλίστρου P μας δίνει το ελάχιστο ποσό $P[X]$ που ο ασφαλιστής πρέπει να αυξήσει στο συμβόλαιο του ασφαλισμένου, ώστε ο ασφαλιστής να έχει συμφέρον να προχωρήσει με τη σύμβαση. Οι αρχές ασφαλίστρου είναι αξιοπρόσεκτα παραδείγματα πιθανών μέτρων κινδύνου. Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι ο αριθμός που προκύπτει από την εφαρμογή τους σε κάποιο ασφαλιστικό κίνδυνο X είναι υποψήφιος για την πριμοδότηση που συνδέεται με τη σύμβαση που προβλέπει κάλυψη κατά X. Παρεμπιπτόντως, πρόκειται για τα πιο κοινά μέτρα κινδύνου στην αναλογιστική επιστήμη.

Αν και υπάρχει συναίνεση (τουλάχιστον αν όλοι συμφωνούν σχετικά με την κατανομή των κινδύνων) για το καθαρό ασφάλιστρο (το οποίο είναι και το αναμενόμενο ποσό απαίτησης), υπάρχουν πολλοί τρόποι να προστεθεί ένα ποσό στο ακαθάριστο ασφάλιστρο. Ένα ποσό ασφαλείας προστίθεται στο αναμενόμενο κόστος που αξιώνει η εταιρεία και αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο που συνδέεται με το ρίσκο που βαραίνει τον ασφαλιστή. Αυτό το ποσό είναι άλλωστε μια έκφραση σχετικά με τον κίνδυνο που φέρει (μεγαλύτερο ποσό σημαίνει μεγαλύτερο κίνδυνο). Στην πράξη η πριμοδότηση για έναν "λιγότερο ελκυστικό" κίνδυνο πρέπει να υπερβαίνει το ασφάλιστρο για έναν "πιο ελκυστικό" κίνδυνο (με τον όρο "ελκυστικό κίνδυνο" αναφερόμαστε σε κινδύνους που είναι στα πλαίσια της τακτικής που ακολουθεί η εταιρεία και θέλει να τους αναλαμβάνει). Ως εκ τούτου, η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση ενός μέτρου κινδύνου.

Ακολουθούν οι πιό δημοφιλής αρχές για τον τρόπο υπολογισμού ασφαλίστρων (βλέπε Kaas et al. (2001), Goovaerts et al. (1984)).

i) Το καθαρό ασφάλιστρο (*net premium*), γνωστό και ως αρχή της ισοδυναμίας, ισούται απλά με την αναμενόμενη τιμή ενός κινδύνου X,

$$P(X)=E(X).$$

Το συγκεκριμένο ασφάλιστρο χρησιμοποιείται για ουδέτερες τακτικές των ασφαλιστρών ως προς τον κίνδυνο.

ii) Η αρχή "αναμενόμενης τιμής", σύμφωνα με την οποία το ασφάλιστρο ισούται με το καθαρό ασφάλιστρο, συν μια επιβάρυνση $\alpha E(X)$, με $\alpha>0$ μια παράμετρος που δείχνει την συμφωνημένη επιβάρυνση.

$$P(X)=(1+\alpha)E(X).$$

iii) Η αρχή "διακύμανσης" (*variance principle)*, στην οποία η επιβάρυνση του ασφαλίστρου εξαρτάται από τη διακύμανση $Var(X)$.

$$P(X)=E(X)+\alpha Var(X),$$

με $\alpha>0$.

iv) Η αρχή "τυπικής απόκλισης" (*standard deviation principle*), στην οποία η επιβάρυνση του ασφαλίστρου εξαρτάται από την τυπική απόκλιση $\sigma(X)$.

$$P(X)=E(X)+\alpha\sigma(X),$$

με $\alpha>0$.

1.5.2 Επιθυμητές ιδιότητες

Παρόλο που ο Ορισμός 1.5 είναι πολύ γενικός, τα μέτρα κινδύνου πρέπει να ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα. Αρκετοί συγγραφείς πρότειναν διάφορες απαιτήσεις που τα μέτρα κινδύνου θα πρέπει να πληρούν (βλέπε Goovaerts et al. (1984)). Παραθέτουμε τις σημαντικότερες:

- Μη υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας (*Non-excessive loading*).

$$r[X] \le \max[X] = F_X^{-1} \ ,$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X.

Προφανώς, είναι ανώφελο να κρατήσουμε περισσότερα κεφάλαια απ' ότι η μέγιστη τιμή της απώλειας.

- Μη-αρνητική φόρτιση (*Non-negative loading*).

$$r[X] \ge E(X) \ ,$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X.

Το ελάχιστο κεφάλαιο πρέπει να υπερβαίνει την αναμενόμενη ζημία, αλλιώς θα υπάρξουν καταστροφικά αποτελέσματα για την εταιρεία (υπό τις προϋποθέσεις του νόμου των μεγάλων αριθμών).

- Προσθετικότητα ως προς σταθερά (*Translativity*).

$$r[X + c] = r[X] + c \ ,$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X και για κάθε c.

Θυμόμαστε ότι έχουμε προσθέσει ένα ποσό, ώστε να γίνει δεκτός ο κίνδυνος που αναλαμβάνουμε (ποσό ασφάλειας). Είναι πασίδηλο ότι οποιαδήποτε αύξηση της ευθύνης από ένα ντετερμινιστικό ποσό c, θα πρέπει να έχει ως αποτέλεσμα την ίδια αύξηση στο κεφάλαιο,

$$r(X - r[X]) = 0 \ ,$$

όταν προσθέτουμε X στην αρχική $-X$ θέση, παίρνουμε μια «ουδέτερη» θέση.

- Σταθερότητα ή όχι αδικαιολόγητο περιθώριο ασφαλείας (*Constancy or no unjustified loading*).

Όποια και αν είναι η σταθερά c, θα πρέπει να έχουμε

$$r(c) = c.$$

Για να αντιμετωπιστεί η απώλεια του c, είναι σαφές ότι ο ασφαλιστής πρέπει να έχει κεφάλαιο ίδιου ποσού στη διάθεσή του. Ειδικότερα, $r(0)=0$, ενώ η ποσότητα $r(X)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως απαίτηση περιθωρίου και είναι το ελάχιστο ποσό του κεφαλαίου, το οποίο εάν προστεθεί στο X στην αρχή της περιόδου και επενδυθεί σε ένα περιουσιακό στοιχείο άνευ κινδύνου, κάνει το X «αποδεκτό».

- Υποπροσθετικότητα (*Subadditivity*).

$$r[X+Y] \leq r[X] + r[Y] \, ,$$

για κάθε X και Y.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να συνοψιστεί στην έκφραση «μια συγχώνευση δεν δημιουργεί επιπλέον κινδύνους». Αντιλαμβανόμαστε ότι υπάρχει η ιδέα μείωσης του κινδύνου, μέσω του διαχωρισμού. Όταν ισχύει η ισότητα, μιλάμε για προσθετικότητα. Η δομή της εξάρτησης μεταξύ X και Y συχνά καθορίζεται και μιλάμε για προσθετικότητα όταν πρόκειται για ανεξάρτητους κινδύνους.

- Συμμονοτονική προσθετικότητα (*Comonotonic additivity*).

$$r[X+Y] = r[X] + r[Y] ,$$

για κάθε X και Y.

Αυτό ισχύει εξαιτίας του γεγονότος ότι βάζοντας συμμονοτονικούς κινδύνους μαζί δεν μειώνεται η επικινδυνότητα της κατάστασης. Οι συμμονοτονικοί κίνδυνοι αναφέρονται στο ίδιο γεγονός και δεν μπορούν να λειτουργήσουν ο ένας ως εξασφάλιση έναντι του άλλου. Με τη σειρά τους οι ασφαλιστές δεν είναι πρόθυμοι να μειώσουν τον κινδύνου σε περίπτωση πολιτικής συνδυασμού τέτοιων κινδύνων.

- Θετική ομοιογένεια (*Positive homogeneity*).

$$r[cX] = cr[X] ,$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X και για οποιαδήποτε θετική σταθερά c.

Συχνά σχετίζεται με τη νομισματική μονάδα που χρησιμοποιείται. Η θετική ομοιογένεια είναι στενά συνδεδεμένη με την ομοιομονοτονική προσθετικότητα. Πράγματι, υποθέτοντας ότι c είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε η συμμονοτονική προσθετικότητα μας δίνει το εξής:

$$r[cX] = r[X + X + ... + X] = r[X] + r[X] + ... + r[X] = cr[X] .$$

- Μονοτονία (*Monotonicity*).

$$\Pr[X \le Y] = 1 \Rightarrow r[X] \le r[Y],$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X, Y.

Το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται ως μαξιλάρι ασφαλείας για το X είναι πάντα μικρότερο από το αντίστοιχο ποσό για το Y, όταν το Y υπερβαίνει το X. Από αυτή την οπτική γωνία φαίνεται ως μια πολύ φυσική ιδιότητα.

Παρατήρηση 1.2: Οι προϋποθέσεις που αναφέρονται παραπάνω δεν είναι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, εάν το r είναι μονότονο δεν υπάρχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας, καθώς πάντα ισχύει ότι $X \leqslant max(X)$.

Παρατήρηση 1.3: Πρέπει να τονιστεί ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων αποτυγχάνουν να πληρούν όλες τις προαναφερθείσες ιδιότητες (εκτός από την αρχή καθαρών ασφαλίστρων).

Παρατήρηση 1.4: Οι ιδιότητες υποπροσθετικότητας και θετικής ομοιογένειας είναι αντικείμενα προς περαιτέρω συζήτηση. Παρόλο που τίθεται σε αμφισβήτηση το κατά πόσο η υποπροσθετικότητα περιγράφει την πραγματικότητα, καθώς αγνοεί εντελώς την έννοια του υπολειπόμενου κινδύνου, οι Föllmer και Schied (2002) * παρατήρησαν ότι αυτές οι δύο ιδιότητες δεν επηρεάζονται από τον κίνδυνο ρευστότητας. Σύμφωνα με Rootzén και Klüppelberg (1999), η υποπροσθετικότητα είναι μια βολική μαθηματική ιδιότητα, η οποία όμως δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα. Η συμπεριφορά ενός μέτρου κινδύνου σε σχέση με τον συνυπολογισμό των κινδύνων είναι ζωτικής σημασίας. Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό το ουσιαστικό ερώτημα είναι το εξής:

Δίνονται δύο χαρτοφυλάκια X, Y και η από κοινού κατανομή πιθανότητάς τους, πώς ο κίνδυνος του συνολικού $r[X+Y]$ σχετίζεται με τον κίνδυνο των επιμέρους θέσεων $r[X]$ και $r[Y]$; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να σχετίζεται με τον τρόπο που τα X και Y εξαρτώνται στοχαστικά μεταξύ τους. Επίσης, η συμμονοτονική προσθετικότητα είναι σύμφωνη με την προσέγγιση που ακολουθεί: αν τα X και Y είναι απολύτως εξαρτημένα, τότε δεν υπάρχει περιορισμός του κινδύνου. Εκτός από την ακραία περίπτωση να παρουσιαστεί κάποια επίδραση λόγω της συγχώνευσης, με αποτέλεσμα να υπερτερεί η υποπροσθετικότητα. Μια άλλη σκέψη υποστηρίζει ότι η άθροιση «θετικά εξαρτημένων» κινδύνων στην πραγματικότητα αυξάνει την επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου και ότι αυτό θα προκαλέσει υψηλότερες κεφαλαιακές απαιτήσεις. Αυτό οδηγεί στη χρήση υπερπροσθετικότητας για θετικώς εξαρτημένους κινδύνους και της προσθετικότητας για ανεξάρτητους.

1.6 Οικονομικό κεφάλαιο

Οι ασφαλιστικές εταιρείες, καθώς και οι τράπεζες θα πρέπει να κατέχουν κάποια μορφή κεφαλαίου «μαξιλάρι» ώστε να είναι σε θέση ν' αντιμετωπίσουν απροσδόκητες ζημιές. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών κεφαλαίων είναι η έννοια του οικονομικού κεφαλαίου (EC) και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.6: Το οικονομικό κεφάλαιο ορίζεται, σε σχέση με κάποιο μέτρο κινδύνου, από τη σχέση :

$$EC[S] = r[S] - E[S],$$

όπου S είναι η συνολική ζημία της εταιρείας.

Ο λόγος για τη μείωση του μέτρου κινδύνου $r[S]$ από την αναμενόμενη ζημία $E[S]$ οφείλεται στην « καλύτερη πρακτική » της αποσύνθεσης του συνολικού κεφαλαίου $r[S]$ για τον κίνδυνο, σε ένα πρώτο μέρος $E[S]$ κάλυψης των προβλεπόμενων απωλειών και ένα δεύτερο μέρος $EC[S],$ ως μαξιλάρι για την αντιμετώπιση μη αναμενόμενων ζημιών.

1.6.1 Αναμενόμενο προσαρμοσμένο κεφάλαιο

Τα χαρτοφυλάκια πιο συχνά αναλύονται με τη βοήθεια μιας μέτρησης των επιδόσεων προσαρμοσμένου κινδύνου σε αυτό. Ένα καλό μέτρο κέρδους αξιολογεί τις οικονομικές επιδόσεις με τη δέουσα προσοχή στον κίνδυνο έκθεσης: ένα ευρώ που κερδίζεται ή αναμένεται να κερδηθεί όταν υπάρχει "μεγάλος" κίνδυνος "δεν αξίζει τόσο" όσο όταν υπάρχει μικρός κίνδυνος. Προφανώς η εκάστοτε εταιρεία για να κερδίσει κάποιο ποσό θέλει να λάβει όσο το δυνατόν μικρότερο κίνδυνο ή αντίστοιχα για τον κίνδυνο που θα πάρει επιδιώκει να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο όφελος. Συγκεκριμένα, το κέρδος R της εταιρείας, είναι η διαφορά μεταξύ του ασφαλίστρου P και του συνολικού ποσού απαίτησης $S.$ Υπό την προϋπόθεση ότι το $r[S]$ είναι μη μηδενικό, ορίζεται (βλέπε για παράδειγμα Denuit et al.(2005)) η αναμενόμενη προσαρμοσμένη απόδοση κινδύνου $(ERAR)$ για το χαρτοφυλάκιο που μελετάμε ως εξής:

$$ERAR[R,S] = \frac{E[R]}{r[S]} \tag{1.18}$$

Στην πράξη, η εταιρεία στοχεύει να μεγιστοποιήσει την $ERAR$.

1.7 Αξία σε κίνδυνο (*Value at Risk*)

Την τελευταία δεκαετία έχει παρουσιαστεί αυξανόμενο ενδιαφέρον από τη μεριά των επαγγελματιών για τη μελέτη των κατανομών πιθανότητας με τη μέθοδο ποσοστημορίων (για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Jorion (2000). Τα ποσοστημόρια έχουν βρει εφαρμογή σε τρέχουσες πρακτικές διαχείρισης κινδύνου με τη μορφή της έννοιας της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Η έννοια αυτή εισήχθη για να δώσει απάντηση στο εξής ερώτημα:

Τι ποσό μπορούμε να αναμένουμε ότι θα χάσουμε σε μία ημέρα, εβδομάδα, έτος,… με μία δεδομένη πιθανότητα;

Στο σημερινό οικονομικό κόσμο η σημασία του VaR είναι αναντίρρητη, δεδομένου ότι οι ρυθμιστικές αρχές αποδέχονται αυτό το μοντέλο ως βάση για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον κίνδυνο αγοράς .

Ορισμός 1.7 (μαθηματικός ορισμός): Λαμβάνοντας υπόψη ένα επίπεδο εμπιστοσύνης α στο $(0,1)$, το VaR του χαρτοφυλακίου σε επίπεδο εμπιστοσύνης α δίνεται από το μικρότερο αριθμό l, τέτοιο ώστε η πιθανότητα η απώλεια L να υπερβαίνει το l να είναι το πολύ $1-\alpha$. Μαθηματικά, αν L είναι η απώλεια ενός χαρτοφυλακίου, τότε:

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{ l \in \Re : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{ l \in \Re : \overline{F_L}(l) \geq \alpha\} \quad (1.19)$$

Η αριστερή ισότητα είναι ένας ορισμός του VaR. Η δεξιά ισότητα ισχύει μόνο για παραμετρικά VaR. Οι διαχειριστές κινδύνου συνήθως υποθέτουν ότι κάποιο μέρος των άσχημων γεγονότων θα έχουν απροσδιόριστες απώλειες, είτε επειδή οι αγορές είναι κλειστές, είτε λόγω περιορισμένης ρευστοποίησης.

Ορισμός 1.8 Δοθέντος ενός κινδύνου X και ένα επίπεδο πιθανότητας p στο $(0,1)$, το αντίστοιχο VaR, συμβολίζεται με $VaR[X\,;p]$ και ορίζεται ως:

$$VaR[X\,;p] = F^{-1}(p). \quad (1.20)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το VaR πάντα υπάρχει και εκφράζεται στην κατάλληλη μονάδα μέτρησης, δηλαδή σε χαμένα χρήματα. Θα καταφύγουμε συχνά στην ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας , η οποία ισχύει για όλα τα p στο $(0,1)$:

$$VaR[X\,;p] \leqslant x \Leftrightarrow p \leqslant F(x). \quad (1.21)$$

1.7.1 Κυριότερες ιδιότητες του VaR

Οι κυριότερες ιδιότητες του VaR ως μέτρο κινδύνου είναι οι εξής:

1. Το VaR δεν εμφανίζει υπερβολικό περιθώριο κέρδους,

$$X \leqslant max[X] \Rightarrow VaR[X\,;p] \leqslant max[X] \,\forall\, p.$$

Επομένως, είναι μικρότερο από την μέγιστη δυνατή ζημία και δεν έχει υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

2. Το VaR είναι προσθετικό ως προς μία σταθερά c,

$$VaR[X + c\,,p] = VaR[X\,,p] + c.$$

3. Το VaR είναι θετικά ομοιογενές,

$$VaR[cX\,,p] = c\,VaR[X\,,p].$$

4. Το VaR δεν προκαλεί υπερβολικό περιθώριο ασφαλείας.

$$VaR[c\,,p] = c \,\forall\, p > 0.$$

5. Το VaR είναι αύξουσα συνάρτηση.

6. Το VaR είναι μια βέλτιστη κεφαλαιακή απαίτηση για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

1.7.2 Αξία σε κίνδυνο (με βάση το οικονομικό κεφάλαιο)

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για την ποσοτικοποίηση των επιχειρηματικών κεφαλαίων βασίζεται στο VaR. Αν το S δηλώνει το σύνολο των απαιτήσεων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου για μια δεδομένη περίοδο αναφοράς και το P δηλώνει το συνολικό ασφάλιστρο για αυτό το χαρτοφυλάκιο, τότε το $VaR[S;p]-P$ είναι το μικρότερο ποσό πρόσθετων κεφαλαίων που απαιτείται, ώστε η εταιρεία να είναι τεχνικά αφερέγγυα με μια μικρή πιθανότητα, το πολύ $1-p$. Συγκεκριμένα, για ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης p, το VaR με βάση το οικονομικό κεφάλαιο ορίζεται ως:

$$EC[S;p]=VaR[S;p]-E[S]. \tag{1.22}$$

Για παράδειγμα, εάν το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι ρυθμισμένο σε $p=99.98$ % το $EC[S;p]$ θα είναι επαρκές για την κάλυψη μη αναμενόμενων ζημιών στα 9998 από τα 10000 χρόνια.

Κεφάλαιο 2

Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων προσαρμοσμένες στον κίνδυνο

Εισαγωγή

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο ξεκινά με μία αναφορά στο δείκτη δεξιάς ουράς που πρότεινε ο Shaun Wang και τη σύγκρισή του με το δείκτη Gini, έχοντας ως βάση την εργασία του Shaun Wang (1998). Σκοπός μας είναι η ανάδειξη της αναξιοπιστίας σε κάποιες περιπτώσεις του δείκτη Gini ως μέτρο κινδύνου για τη μελέτη δεξιάς ουράς συνεχών κατανομών. Κύριο μέλημα του κεφαλαίου αυτού είναι η διερεύνηση δύο αρχών υπολογισμού που βασίζονται στην ουρά της κατανομής, το ασφάλιστρο με βάση την τυπική απόκλιση της ουράς TSD (*tail standard deviation*) και το ασφάλιστρο από την προσδοκία υπό όρους της ουράς TCE (*tail conditional expectation),* με γνώμονα την εργασία των Furman και Landsman (2006).

2.1 Οι δείκτες Gini και δεξιάς ουράς

Σε ένα ευρύτερο πρίσμα ένας ασφαλιστικός κίνδυνος αναφέρεται στον οικονομικό αντίκτυπο που επιφέρουν απρόβλεπτες ατυχίες σε επιχειρηματικούς, νομικούς ή διαχειριστικούς τομείς. Κοινό χαρακτηριστικό πολλών ασφαλιστικών κινδύνων είναι η εμφάνιση του κινδύνου δεξιάς ουράς που παρουσιάζει εξαιρετικά χαμηλή συχνότητα, αλλά γεγονότα μεγάλης απώλειας. Ο Shaun Wang το 1998 στην εργασία του πρότεινε ένα μέσο μέτρησης αυτών των κινδύνων ορίζοντας την απόκλιση δεξιάς ουράς και το δείκτη δεξιάς ουράς. Στην πράξη σπανίως υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης με ακρίβεια των συναρτήσεων πιθανότητας (σ.π.) και συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) που ακολουθούν οι εξεταζόμενες απώλειες, αντιθέτως υπάρχει σχετική αβεβαιότητα για την επιλογή κατανομής πιθανότητας που αποφέρει την καλύτερη εκτίμηση. Παραδοσιακά, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση είναι τα μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται συχνότερα. Όμως για μεγάλα ασφαλιστικά ποσά που ακολουθούν ασύμμετρες κατανομές δεν είναι κατάλληλη η επιλογή τους (εκτενής εξήγηση δίνεται από πολλούς συγγραφείς, ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Ramsey (1993), Lowe και Stanard (1996)). Οι εταιρείες και ο αναλογιστικός κλάδος για να αντιμετωπίσουν αυτή την παραφωνία ψάχνουν εναλλακτικούς τρόπους μέτρων κινδύνου (βλέπε Philbrick (1994)). Κάποια απο τα σημεία της εργασίας του Philbrick, όσον αφορά το περιθώριο κινδύνου, που χρήζουν ιδιαίτερης μνείας στη μέτρηση κινδύνων δεξιάς ουράς είναι τα παρακάτω:

- Το περιθώριο κινδύνου βασίζεται σε μια ισοδύναμη έννοια δικαίου. Η αβεβαιότητα αντισταθμίζεται με ένα επιπρόσθετο ποσό, ώστε να είναι δίκαιη και από τις δύο πλευρές (ασφαλιστής -ασφαλιζόμενος) η παραχώρηση του κινδύνου. Ουσιαστικά αυτή η ισοδυναμία αντιπροσωπεύει την τιμή της αγοράς για την μεταφορά του κινδύνου. Ιδανικά αυτός ο κίνδυνος ρυθμίζεται από τη δεξιά ουρά.

- Το περιθώριο κινδύνου βασίζεται στα διαστήματα εμπιστοσύνης. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται εφόσον η παράμετρος κινδύνου είναι το κύριο μέλημά μας. Τα μέτρα κινδύνου δεξιάς ουράς πρέπει να μας παρέχουν τη δυνατότητα ποσοτικοποίησης των παραμέτρων αβεβαιότητας.

- Το περιθώριο κινδύνου βασίζεται στη θεωρία καταστροφής. Η πιθανότητα καταστροφής μας δηλώνει το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται για να αποφευχθεί η χρεοκοπία αν εμφανιστεί ένα σπάνιο μέγεθος πολύ ακραίου κινδύνου (η εταιρεία ορίζει το επίπεδο ασφαλείας). Επίσης, αν οριστεί ένα κατώφλι μας δίνει την πιθανότητα οι αναλογιστικές απώλειες να ξεπεράσουν αυτό το κατώφλι.

Ορισμός 2.1 (βλέπε Wang(1998)) Για μία μη αρνητική συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση επιβίωσης $S_X(t) = \Pr\{X > t\}$ ορίζουμε ως απόκλιση δεξιάς ουράς το εξής:

$$D[X] = \int_0^\infty \sqrt{S_X(t)}dt - \int_0^\infty S_X(t)dt \tag{2.1}$$

και δείκτη δεξιάς ουράς:

$$d(X) = \frac{D[X]}{E[X]} = \frac{\int_0^\infty \sqrt{S_X(t)}dt}{\int_0^\infty S_X(t)dt} - 1\ . \tag{2.2}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

i) Εάν $\Pr\{ X=b \}= 1$, τότε $D[X]$.

ii) $D[cX]=cD[X]$, για $c>0$.

iii) $D[X+b]=D[X]$, για οποιοδήποτε πραγματικό b.

iv) $D[X+Y]\leqslant D[X]+D[Y]$.

v) Εάν X και Y είναι συμμονοτονιακά (συμπεριλαμβανομένου ότι έχουν τέλεια συσχέτιση), τότε: $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$.

Πρόταση 2.1 Για ένα πολύ μικρό διάστημα ($t, t+dt$] έχουμε:

1. $D\left[X_{(t,t+dt]}\right] \leq \sigma\left[\mathrm{X}_{(t,t+dt]}\right]$.

2. Η αναλογία $\dfrac{D[X_{t,t+dt]}]}{\sigma[X_{t,t+dt]}]}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t.

3. Εάν X συνεχής μεταβλητή, τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \to \omega} \frac{D[X_{t,t+dt]}]}{\sigma[X_{(t,t+dt]}]} = 1.$$

4.Για μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X, η απόκλιση δεξιάς ουράς $D[X]$ είναι πεπερασμένη εάν και μόνον εάν η τυπική απόκλιση $\sigma(X)$ είναι πεπερασμένη.

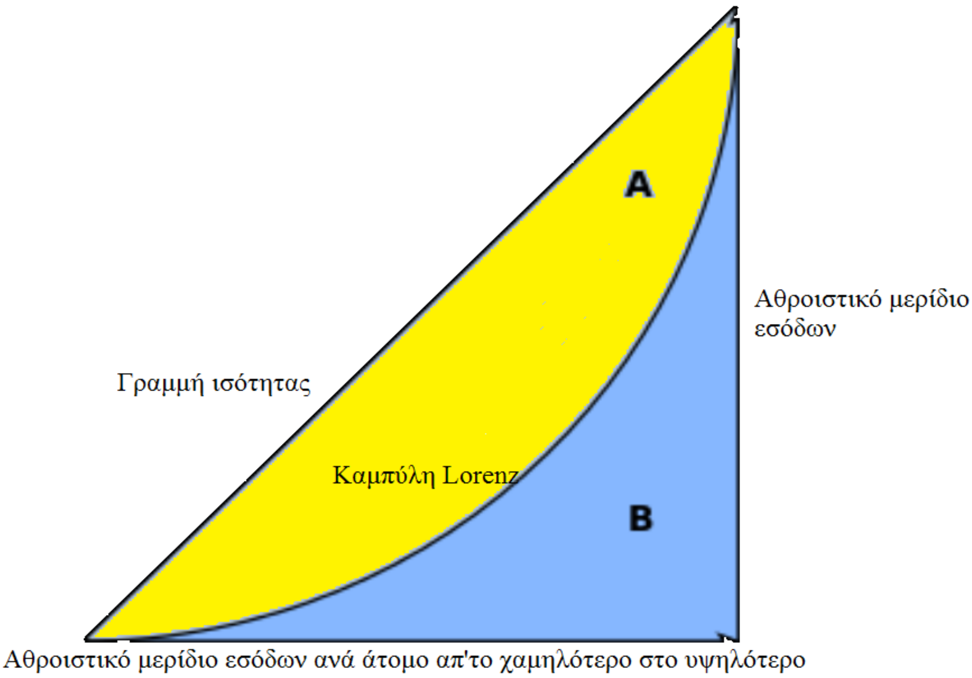
Ακολουθεί μία ενδεικτική σύγκριση σε νούμερα (από Wang (1998)).

Διάστημα απωλειών L	Προσδοκώμενες απώλειες $E[L]$	Τυπική απόκλιση $\sigma[L]$	Απόκλιση δεξιάς ουράς $D[L]$	Ποσοστιαία διαφορά $\sigma[L]/D[L]-1$
(0,1000]	500	369,2	193,1	91,10%
(1000,2000]	166,7	341,3	238,8	42,9
(10000,11000]	7,58	85,43	79,44	7,55
(100000,101000]	0,1	9,84	9,76	0,83
(1000000,1001000]	$9970x10^{-4}$	$9983x10^{-1}$	$9975x10^{-1}$	0,08
(10000000,10001000]	$9997x10^{-6}$	$9998x10^{-2}$	$9998x10^{-2}$	0,01

Πίνακας 2.1: Σύγκριση προσδοκώμενων απωλειών, τυπικής απόκλισης και απόκλισης δεξιάς ουράς ανά διαστήματα απωλειών.

2.1.1 Δείκτης Gini

Ιστορικά, κάποιες κατανομές με βαριά ουρά έχουν ως προέλευση τις κατανομές εισοδήματος, όπως για παράδειγμα η κατανομή Pareto και η λογαριθμοκανονική κατανομή. Ο συντελεστής Gini ορίζεται συνήθως μαθηματικά με βάση την καμπύλη Lorenz, η οποία απεικονίζει την αναλογία του συνολικού εισοδήματος του πληθυσμού (άξονας y) που αθροιστικά έχει κερδηθεί από τον πυθμένα x % του πληθυσμού (ακολουθεί διάγραμμα). Η γραμμή στις 45 μοίρες αποτελεί απόλυτη ισότητα των εισοδημάτων. Ο συντελεστής Gini μπορεί τότε να θεωρηθεί ως ο λόγος της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της γραμμής της ισότητας και της καμπύλης Lorenz (σημειώνεται A στο διάγραμμα) επί του συνολικού εμβαδού κάτω από το όριο της ισότητας (που σημειώνονται A και B στο διάγραμμα), δηλαδή G = A / (A + B). Επίσης ισούται με 2A ή 1 - 2B, λόγω του γεγονότος ότι A + B = 0,5 (αφού οι άξονες κλίμακα κυμαίνονται από 0 έως 1). Αν όλοι οι άνθρωποι έχουν μη-αρνητικό εισόδημα (ή πλούτο, ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζουμε), ο συντελεστής Gini μπορεί θεωρητικά να κυμαίνεται από 0 (πλήρης ισότητα) έως 1 (πλήρης ανισότητα). Σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η έκφραση γίνεται μέσω ποσοστού, που κυμαίνεται μεταξύ 0 και 100. Στην πράξη, αυτές οι δύο ακραίες τιμές δεν είναι επιτεύξιμες. Εάν είναι πιθανές οι αρνητικές τιμές (όπως ο αρνητικός πλούτος, λόγω των ατόμων με χρέη), τότε ο συντελεστής Gini θα μπορούσε θεωρητικά να είναι μεγαλύτερος από 1. Κανονικά ο μέσος (ή ολικός) πλούτος είναι θετικός, όταν η τιμή του συντελεστή Gini είναι μικρότερη από το μηδέν (βλέπε Figari και Paulus (2012)).



Σχήμα 2.1: Απεικόνιση δείκτη Gini με βάση το συνολικό εισόδημα του πληθυσμού

Ορισμός 2.2. Υποθέτοντας ότι το επίπεδο πλούτου για όλα τα άτομα μιάς χώρας μπορούμε να το συνοψίσουμε με μία κατανομή $S_X(u)$, που αντιπροσωπεύει το ποσοστό των ατόμων με πλούτο άνω του u. Ως μέτρο της εισοδηματικής ανισότητας μιας κοινωνίας ο δείκτης Gini ορίζεται ως εξής:

$$gini(X) = \frac{E[|X_1 - X_2|]}{E[|X_1 + X_2|]} = \frac{E[|X_1 - X_2|]}{2E[X]}, \tag{2.3}$$

όπου τα X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή με το X.

Πρόταση 2.2. Ο δείκτης Gini μπορεί επίσης να υπολογιστεί από τον μαθηματικό τύπο:

$$gini(X) = 1 - \frac{\int_0^\infty [S_X(u)]^2 du}{\int_0^\infty S_X(u) du}, \tag{2.4}$$

Η αύξηση της τιμής του δείκτη Gini δείχνει μεγαλύτερη πόλωση της κοινωνίας. Επιπροσθέτως, ο δείκτης Gini ως μέτρο κοινωνικής ανισότητας πληρεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Η μεταφορά κάθε νομισματικής μονάδας από τον πλούσιο (κάποιον με εισόδημα μεγαλύτερο του μέσου όρου της χώρας) σ' έναν φτωχό (εισόδημα μικρότερο του μέσου όρου της χώρας), συνεπάγεται μείωση της τιμής του δείκτη.

- Προσθήκη ίδιου ποσού στο εισόδημα όλων των ατόμων εξίσου επιφέρει μείωση του δείκτη Gini.

Για ευκολία, ορίζουμε το μέσο Gini ως:

$$G[X] = \frac{1}{2} E[|X_1 - X_2|] = \int_0^{\infty} [S_X(t) - S_X(t)^2] dt, \tag{2.5}$$

ή ισοδύναμα

$$G[X] = E[X] - E[\min(X_1, X_2)] = E[\max(X_1, X_2)] - E[X], \tag{2.6}$$

όπου τα X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή με το X.

Με αφορμή τις παραπάνω επισημάνσεις είμαστε σε θέση να δώσουμε μια διαισθητική ερμηνεία της απόκλισης δεξιάς ουράς:

Έχουμε την τυχαία μεταβλητή X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο μεταβλητές Y_1 και Y_2 τέτοιες ώστε $X = \min(Y_1, Y_2)$, τότε η απόκλιση της δεξιάς ουράς του X είναι το μέσο Gini του Y_1. Με άλλα λόγια η απόκλιση της δεξιάς ουράς του X είναι το μισό της απόλυτης προσδοκώμενης διαφοράς των Y_1 και Y_2 ή η προσδοκώμενη διαφορά ανάμεσα στα Y_1 και X. Αποδεικνύεται ότι ο ρόλος του δείκτη της δεξιάς ουράς στη μέτρηση κινδύνων δεξιάς ουράς συνδέεται με το ρόλο του δείκτη Gini στη μέτρηση των εισοδηματικών ανισοτήτων (βλέπε Wang and Young (1998)).

2.1.2. Παραδείγματα

Ακολουθούν παραδείγματα υπολογισμού του δείκτη δεξιάς ουράς και του δείκτη Gini. Στα κάτωθι παραδείγματα γίνεται χρήση των σχέσεων (2.1) και (2.2) για τον δείκτη δεξιάς ουράς, ενώ για τον Gini δείκτη χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (2.3), (2.4), (2.5) και (2.6).

Παράδειγμα 2.1. Έχοντας κίνδυνο που ακολουθεί κατανομή Bernoulli με $\Pr\{X = 0\} = 1 - q$ και $\Pr\{X = 1\} = q$, τότε η απόκλιση της δεξιάς ουράς του είναι $D[X] = \sqrt{q} - q$ και το μέσο Gini $G[X] = q - q^2$. Ακολούθως, έχουμε δείκτη δεξιάς ουράς $d(X) = \frac{1}{\sqrt{q}} - 1$ και δείκτη Gini $gini(X) = 1 - q$.

Παράδειγμα 2.2. Θεωρούμε ότι X ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο λ και

$$S_X(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Με τη χρήση των προηγούμενων σχέσεων (2.1) και (2.2) εύκολα επαληθεύεται ότι ο δείκτης δεξιάς ουράς και η διακύμανση ισούνται με 1, ενώ ο δείκτης Gini $1/2$.

Παράδειγμα 2.3. Υποθέτουμε ότι X ακολουθεί κατανομή Pareto με

$$S_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^{\alpha}, \quad t\geq 0.$$

Οι δείκτες δεξιάς ουράς και Gini είναι αντίστοιχα:

$$d(X)=\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}, \alpha>2 \qquad d(X)=\infty, \alpha\leq 2$$

$$gini(X)=\frac{\alpha}{2\alpha-1}, \alpha>1 \qquad gini(X)=1, \alpha\leq 1.$$

Παράδειγμα 2.4. (σύγκριση με εκθετική κατανομή) Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.2. ο δείκτης δεξιάς ουράς και η διακύμανση για εκθετική κατανομή είναι μονάδα, ενώ ο δείκτης Gini $1/2$. Σε αυτό το σημείο ερευνούμε πως συμπεριφέρεται ο δείκτης δεξιάς ουράς για κατανομές πιθανότητας με πιο βαριά ή λιγότερο βαριά ουρά, από αυτή της εκθετικής κατανομής. Για του λόγου το αληθές ερευνούμε την Γάμμα $(\alpha,1)$ κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x)=\frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, x\geq 0.$$

με μέση τιμή α και τυπική απόκλιση $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

- Όταν $\alpha>1$, η εκθετική κατανομή έχει πιο βαριά ουρά (ασυμπτωτικά).
- Όταν $\alpha=1$, έχει όμοια ουρά με την εκθετική κατανομή.
- Όταν $\alpha<1$, έχει πιο βαριά ουρά από την εκθετική κατανομή.

Εν συνεχεία, παραθέτουμε τη διακύμανση, το δείκτη Gini και το δείκτη δεξιάς ουράς για τις διαφορετικές τιμές του α (για παρόμοιο πίνακα με άλλα α βλέπε Wang (1998)).

Κατανομή Γάμμα (α ,1)	Συντελεστής διακύμανσης	Δείκτης δεξιάς ουράς	Δείκτης Gini
$\alpha=4$	0.498	0.477	0.277
$\alpha=2$	0.707	0.656	0.375
$\alpha=1$	1	1	0.5
$\alpha=1/2$	1.414	1.532	0.637
$\alpha=1/4$	1.992	2.278	0.762

Πίνακας 2.2: Διαφορετικά μέτρα διακύμανσης για την κατανομή Γάμμα.

Βλέπουμε ότι καθώς η δεξιά ουρά γίνεται παχύτερη (λεπτότερη) ο δείκτης δεξιάς ουράς αυξάνει (μειώνεται) με ταχύτερο ρυθμό απ' ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος με τη σειρά του μεταβάλλεται γρηγορότερα απ' το δείκτη Gini.

2.2. Σύγκριση συνεχών κατανομών

Οι παρακάτω κατανομές απωλειών, που παραθέτουμε, θεωρούμε ότι έχουν την ίδια μέση τιμή (ίση με τη μονάδα) και την ίδια διακύμανση (ίση με 3). Για περαιτέρω πληροφορίες βλέπε Wang (1998).

- Κατανομή Pareto με $\lambda=2$ και $\alpha=3$ (Βλέπε Παράδειγμα 2.3).

- Κατανομή Γάμμα με

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, t > 0,$$

  όπου $\alpha=\lambda=1/3$.

- Λογαριθμοκανονική κατανομή με

$$S(t) = \Psi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right),$$

  όπου $\mu=-ln2$, $\sigma = \sqrt{\ln 4}$.

- Κατανομή Weibull με

$$\overline{F}(t) = \exp\{-\alpha t^{b}\},$$

  όπου $\alpha=1.26957, b=0.607248$.

Συνεχείς κατανομές	**Μέση τιμή**	**Συντελεστής διακύμανσης**	**Δείκτης δεξιάς ουράς**	**Δείκτης Gini**
Pareto	1	$\sqrt{3}$	3	0.6
Λογαριθμοκανονική	1	$\sqrt{3}$	2.59	0.595
Weibull	1	$\sqrt{3}$	2.13	0.681
Γάμμα	1	$\sqrt{3}$	1.96	0.713

Πίνακας 2.3: Κατάταξη συνεχών κατανομών πιθανότητας με βάση το δείκτη δεξιάς ουράς (βλέπε Wang (1998)).

Για κάποιες παραμετρικές κατανομές, η κατάταξή τους με βάση το δείκτη δεξιάς ουράς, έρχεται σε συμφωνία με όσα ξέρουμε για το σχετικό βάρος της εκάστοτε ουράς της κατανομής (βλ. Embrechts και Veraverbeke (1982)). Παρ'όλα αυτά αντιλαμβανόμαστε από τον Πίνακα 2.3 ότι η κατάταξη με βάση το δείκτη Gini δεν συμφωνεί με την κοινώς γνωστή και αποδεκτή κατάταξη του πάχους ουράς των παραπάνω κατανομών. Συνοψίζοντας, η απόκλιση δεξιάς ουράς μετράει τον κίνδυνο δεξιάς ουράς σε αντίθεση με την τυπική απόκλιση, η οποία μετράει την απόκλιση από τη μέση τιμή και το δείκτη Gini, που μετράει την πόλωση της κατανομής του πλούτου.

Βλέπουμε ότι ο δείκτης δεξιάς ουράς της κατανομής Pareto έχει μεγαλύτερη τιμή από αυτόν της λογαριθμοκανονικής. Το ίδιο ισχύει και για το δείκτη Gini. Παρ'όλα αυτά, οι κατανομές Weibull και Γάμμα εμφανίζουν μεγααλύτερο δείκτη Gini, αλλά μικρότερο δείκτη δεξιάς ουράς. Σε αυτό το σημείο συμπεραίνουμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν πρέπει να εμπιστευτούμε το δείκτη Gini, καθώς τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι λανθασμένα κάτι το οποίο τονίζει την ανάγκη χρήσης ενός άλλου δείκτη, του δείκτη δεξιάς ουράς.

2.2.1. Σύγκριση διακριτών κατανομών

Σκοπός μας σε αυτό το σημείο είναι να συγκρίνουμε κατανομές με βάση τους δείκτες δεξιάς ουράς $d(X)$ και Gini. Θεωρούμε λοιπόν τις εξής κατανομές (βλέπε Consul(1990)):

- Κατανομή Bernoulli με συναρτήσεις πιθανότητας $f(0)=\frac{3}{4}$ και $f(1)=\frac{1}{4}$.

- Αρνητική διωνυμική με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_n = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n, n = 0,1,2,...$$

όπου $r=0.5$ και $\beta=2$.

- Γενικευμένη Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n = \theta(\theta + n\lambda)^{n-1} \frac{e^{-\theta - n\lambda}}{n!}, n = 0,1,2,...$$

όπου $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\lambda = 1 - 1/\sqrt{3}$.

Οι παράμετροι έχουν επιλεγεί με τέτοιον τρόπο ώστε οι κατανομές να έχουν την ίδια μέση τιμή (=1) και την ίδια διακύμανση (=3). Παραθέτουμε τους δείκτες δεξιάς ουράς και Gini στον Πίνακα 2.4 που ακολουθεί

Κατανομές	**Μέση τιμή**	**Συντελεστής διακύμανσης**	**Δείκτης δεξιάς ουράς**	**Δείκτης Gini**
Bernoulli	1	$\sqrt{3}$	1.00	0.75
Αρνητική διωνυμική	1	$\sqrt{3}$	1.87	0.74
Γενικευμένη Poisson	1	$\sqrt{3}$	1.94	0.73

Πίνακας 2.4: Κατάταξη διακριτών κατανομών με βάση τους δείκτες δεξιάς ουράς και Gini.

Παρατηρούμε ότι η γενικευμένη Poisson έχει πιο βαριά ουρά από την αρνητική διωνυμική και αυτή με τη σειρά της από την Bernoulli. Αυτή η κατάταξη είναι ορθή και συνεπής με την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών των κατανομών (βλέπε Willmot (1987)). Όμως ο δείκτης Gini κατατάσσει τις κατανομές με αντίθετη σειρά. Αυτό μας κάνει να αντιληφθούμε ότι ο δείκτης Gini δεν είναι καλός τρόπος μέτρησης του κινδύνου δεξιάς ουράς.

2.3. Tail Conditional Expectation (TCE)

Το αναλογιστικό ασφάλιστρο tail conditional expectation (TCE) είναι ένα σημαντικό μέτρο αναλογιστικού κινδύνου και ένα χρήσιμο εργαλείο για την οικονομική αξιολόγηση των κινδύνων. Σύμφωνα με την κλασσική παραδοχή ότι η δεύτερη ροπή *(second moment)* για την μεταβλητή απώλειας είναι πεπερασμένη, η ασυμπτωτική κανονικότητα του μη πεπερασμένου εκτιμητή TCE έχει ήδη καθιερωθεί στη βιβλιογραφία. Το σημειωθέν αποτέλεσμα όμως δεν ισχύει όταν η μεταβλητή για την απώλεια ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με δεύτερη πεπερασμένη ροπή, κάτι το οποίο είναι μια συχνή κατάσταση στην πράξη. Με τη βοήθεια της μεθοδολογίας ακραίας δεξιάς ουράς (*extreme value methodology)* προσφέρεται μια λύση στο πρόβλημα, προτείνοντας ένα νέο εκτιμητή TCE που έχει εφαρμογή όταν οι απώλειες έχουν πεπερασμένο μέσο, αλλά άπειρη διακύμανση (βλέπε Zitikis και Furman (2008)). Το TCE είναι το μέσο ποσό της ζημιάς, δεδομένου ότι η ζημιά υπερβαίνει ένα ορισμένο ποσοστημόριο (ή κάποια μέγιστη τιμή). Ως εκ τούτου, το ασφάλιστρο tail conditional expectation παρέχει ένα μέτρο του κεφαλαίου που χρειάζεται λόγω της έκθεσης στον κίνδυνο απωλειών και συνεπώς λειτουργεί ως μέτρο του κινδύνου. Επομένως, δεν αποτελεί έκπληξη που το TCE συνεχίζει να λαμβάνει αυξημένη προσοχή στην αναλογιστική και οικονομική βιβλιογραφία.

Ορισμός 2.3. Ας υποθέσουμε X να είναι μια τυχαία μεταβλητή απώλειας με αθροιστική συνάρτηση κατανομής F. Συνήθως η F υποτίθεται ότι είναι συνεχής και ορίζεται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία, με την αρνητική απώλεια να ερμηνεύεται ως κέρδος. Ο δείκτης TCE του κινδύνου ή απώλειας X ορίζεται για κάθε $t \in (0,1)$ από τη σχέση:

$$TCE_F(t) = E[X|X > Q(t)],$$

όπου $Q(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}$ είναι το ποσοστημόριο που αντιστοιχεί στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Εφόσον η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι συνεχής μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι $TCE_F(t) = \frac{1}{1-t}\int_t^1 Q(s)ds$. Το μέτρο κινδύνου που εξετάζει τις απώλειες σε ένα ποσοστημόριο “ α ” αξιολογεί την απώλεια στη “χειρότερη περίπτωση”, όπου χειρότερη περίπτωση είναι το γεγονός με πιθανότητα εκδήλωσης $1-\alpha$. Ένα πρόβλημα με αυτό το ποσοστημοριακό μέτρο κινδύνου είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη το μέγεθος της απώλειας στη χειρότερη περίπτωση που αυτό το $1-\alpha$ πράγματι συμβαίνει. Η κατανομή της απώλειας πάνω από το ποσοστημόριο δεν επηρεάζει το μέτρο κινδύνου. Η υπό όρους ουράς προσδοκία (ή TCE) επιλέχθηκε για την αντιμετώπιση ορισμένων από τα προβλήματα με ποσοστημοριακό μέτρο κινδύνου. Όπως το μέτρο κινδύνου σε κάποιο ποσοστημόριο, έτσι και το TCE ορίζεται χρησιμοποιώντας κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Οι πιο συνηθισμένες τιμές του α είναι 90%, 95% ή 99%.

(2.7)

Εάν αντί για κάποια τιμή “ α ” έχουμε ένα ποσοστημόριο Q_α και υπάρχει $c>0$, τέτοιο ώστε $Q_{\alpha+c} = Q_\alpha$ τότε η προηγούμενη σχέση δεν είναι ορθή (βλέπε Παράδειγμα 2.8 παρακάτω). Σε αυτή την περίπτωση αν λάβουμε υπόψιν μόνο τις απώλειες αυστηρά μεγαλύτερες από το Q_α χρησιμοποιούμε μικρότερο διάστημα από το προηγούμενο, ενώ αν ασχοληθούμε με τις μεγαλύτερες ή και ίσες παρατηρήσεις τότε θα έχουμε μεγαλύτερο διάστημα της κατανομής. Ορίζοντας $\beta' = \max\{Q_\alpha - Q_\beta\}$ η Σχέση (2.7) γίνεται λοιπόν:

$$TCE_\alpha = \frac{(\beta' - \alpha)Q_\alpha + (1-\beta')E[L/L > Q_\alpha]}{1-\alpha}. \tag{2.8}$$

Το TCE έχει γίνει ένα πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου στην αναλογιστική πρακτική. Είναι έξυπνο, σχετικά εύκολο στην κατανόηση και εφαρμογή του. Ως μέσο, είναι πιο ισχυρό σε σύγκριση με το δειγματοληπτικό σφάλμα από ποσοστημόρια. Χαρακτηριστικό είναι ότι χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό αποθεματικών και τη φερεγγυότητα ιδίων κεφαλαίων που συνδέονται με την ασφάλιση ζωής στον Καναδά και τις ΗΠΑ. Αξίζει να σημειωθεί ότι καθώς το TCE είναι οι μέσες απώλειες του VaR σε ένα επίπεδο “ α ”, το οποίο ας πούμε ότι έχουμε επιλέξει στο 95%, τότε αυτό είναι περισσότερο συντηρητικό από το VaR για το ίδιο επίπεδο απωλειών. Γενικά, εάν οι κατανομές απώλειας είναι συνεχείς(ή τουλάχιστον στο ζητούμενο ποσοστημόριο συνεχείς) με συνάρτηση πιθανότητας $f(y)$, τότε η σχέση (2.7) γίνεται:

$$TCE_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} yf(y)dy .$$

Για $L \geqslant 0$, αυτό έχει σχέση με την περιορισμένη αναμενόμενη τιμή για την απώλεια ως ακολούθως:

$$TCE_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_{Q_\alpha}^{\infty} yf(y)dy = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\int_0^{\infty} yf(y)dy - \int_0^{Q_\alpha} yf(y)dy\right\}.$$

Ακολούθως, γνωρίζουμε από Klugman et al. (2004) ότι η συνάρτηση για την περιορισμένη αναμενόμενη τιμή είναι:

$$E[L \wedge Q_\alpha] = E[\min(L, Q_\alpha)] = \int_0^{Q_\alpha} yf(y)dy + Q_\alpha\left(1 - F(Q_\alpha)\right) =$$

$$= \int_0^{Q_\alpha} yf(y)dy + Q_\alpha(1-\alpha).$$

Οπότε το TCE για τη συνεχή περίπτωση μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

$$TCE_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\{E[L] - \left(E[L \wedge Q_\alpha] - Q_\alpha(1-\alpha)\right)$$

$$= Q_\alpha + \frac{1}{1-\alpha}\{E[L] - \left(E[L \wedge Q_\alpha]\right)\}.$$

Ας ορίσουμε το X να υποδηλώνει έναν χρηματοοικονομικό κίνδυνο (μη αρνητική τυχαία μεταβλητή) και το Y, το σύνολο αυτών των κινδύνων. Το μέτρο κινδύνου H είναι:

$$H : Y \to [0, \infty]$$

και το H παρέχει ένα μέτρο του βαθμού επικινδυνότητας στο $X \in Y$. Η ποσότητα $H(X)$ είναι σημαντική στη διαχείριση κινδύνων, επειδή μπορεί να μας επισημάνει το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται να κρατηθεί ώστε να είμαστε σε θέση να προστατευτούμε από αφερεγγυότητα εξαιτίας της έκθεσης στον κίνδυνο X (για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Landsman και Valdez (2003,2005), Furman και Landsman (2005)). Ακολουθούν παραδείγματα:

Παράδειγμα 2.5 Αν οι απώλειες ακολουθούν την κατανομή Pareto με μέση τιμή 33 και διακυμανση 109^2, θέλουμε να βρεθεί η τιμή για το ποσοστημόριο 95%. Γνωρίζουμε ότι

$$f_L(x) = \frac{\gamma\theta^\gamma}{(\theta + x)^{\gamma+1}}, F_L(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^\gamma .$$

Για $\mu=33\,,\sigma=109^2$, προκύπτει $\theta=39.66$ και $\gamma=2.2018$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}&\Pr[L \le Q_{0.95}] = 0.95 \Leftrightarrow\\ &F_L(Q_{0.95}) = 0.95\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει

$$\begin{aligned}&1-\left(\frac{\theta}{\theta+Q_{0.95}}\right)^{\gamma} = 0.95 \Leftrightarrow\\ &Q_{0.95} = 114.95.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.6 Αν οι απώλειες ακολουθούν την Κανονική κατανομή $(\mu=33,\sigma=109)$, θέλουμε να βρεθεί η τιμή για την οποία έχουμε επίπεδο ασφαλείας 95%. Έχουμε:

$$\begin{aligned}&\Pr\left[L \le Q_{0.95}\right] = 0.95\\ &\Phi\left(\frac{Q_{0.95}-33}{109}\right) = 0.95\\ &\frac{Q_{0.95}-33}{109} = 1.6449\\ &Q_{0.95} = 212.29\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.7 Αν οι απώλειες ακολουθούν την Λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή 33 και διακυμανση 109^2, θέλουμε να βρεθεί η τιμή για το ποσοστημόριο 95%. Έχουμε κατά σειρά

$$\begin{aligned}&\Pr\left[L = 0\right] = \Pr\left[S > 1\right] = 1-\Phi\left(\frac{\log 1 - 10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right) = 0.8749\\ &\Pr\left[L \le Q_{0.95}\right] = 0.95 \Leftrightarrow\\ &\Pr\left[1000(1-S_{10}) \le Q_{0.95}\right] = 0.95 \Leftrightarrow\\ &\Pr\left[S_{10} > \left(1-\frac{Q_{0.95}}{1000}\right)\right] = 0.95 \Leftrightarrow\\ &\Phi\left(\log\left(\frac{1-\frac{Q_{0.95}}{1000}-10\mu}{\sqrt{10}\sigma}\right)\right) = 0.05 \Leftrightarrow\\ &Q_{0.95} = 291.3\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.8. Υποθέτουμε L να είναι η διακριτή τυχαία μεταβλητή των απωλειών με συνάρτηση πιθανότητας:

$$L = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } 0.9 \\ 100, & \text{με πιθανότητα } 0.06 \\ 1000, & \text{με πιθανότητα } 0.04. \end{cases}$$

Θέλουμε αρχικά να υπολογίσουμε το 90% TCE. Έχουμε $Q_{0.9} = 0$ και για οποιοδήποτε $c > 0$, ισχύει $Q_{0.9+c} > Q_{0.9}$. Οπότε από τη Σχέση 2.8 έχουμε:

$$TCE_{0.9} = E[L \mid L > 0] = \frac{(0.06)(100) + (0.04)(100)}{0.01} = 460.$$

Κάτι που σημαίνει ότι οι μέσες απώλειες στο "δεξί" 10% της κατανομής είναι 460. Όσον αφορά το 95% TCE έχουμε $Q_{0.96}$=$Q_{0.95}$=100, οπότε για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή στο ανώτερο 5% με τη βοήθεια της σχέσης (3.8) με β΄=0.96 έχουμε:

$$TCE_{0.95} = \frac{(0.01)(100) + (0.04)(1000)}{0.05} = 820\,.$$

Παράδειγμα 2.9. Θεωρούμε ότι οι απώλειες ακολουθούν την Κανονική κατανομή $(\mu = 33, \sigma = 109)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τα 95% TCE και 99% TCE. Η απώλεια είναι συνεχής μεταβλητή, οπότε το 95% TCE ισούται με $E[L / L > Q_{0.95}]$. Για την Κανονική κατανομή έχουμε:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty.$$

Επομένως,

$$TCE_\alpha = E[L / L > Q_\alpha] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{Q_\alpha}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy\,.$$

Θέτουμε $z = \dfrac{y-\mu}{\sigma}$ και προκύπτει:

$$TCE_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\frac{Q_\alpha - \mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sigma z + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \left\{ \int_{\frac{Q_\alpha - \mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{\sigma z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \mu \int_{\frac{Q_\alpha - \mu}{\sigma}}^{\infty} \phi(z) dz \right\}.$$

Θεωρούμε $u = \frac{z^2}{2}$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και παρατηρούμε στο δεύτερο ολοκλήρωμα ότι $\mu\left(1-\Phi\left(\frac{Q_\alpha - \mu}{\sigma}\right)\right) = \mu(1-\alpha)$. Συνεπώς, για την Κανονική κατανομή το ασφάλιστρο TCE προκύπτει απ' τον εξής τύπο:

$$TCE_\alpha = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\phi\left(\frac{Q_\alpha - \mu}{\sigma}\right).$$

Άρα για την $N(33,109^2)$, έχουμε 95% TCE=257.83 και 99% TCE=323.52.

Παρατήρηση 2.1. Ομοίως για την Pareto έχουμε:

$$95\%TCE = \frac{\theta}{\gamma-1} + Q_\alpha \frac{\gamma}{\gamma-1},$$

με $\theta > 0, \gamma > 0$.

Παράδειγμα 2.10. Θεωρώντας ότι οι απώλειες ακολουθούν την Λογαριθμοκανονική κατανομή έχουμε:

$$TCE_{0.95} = \frac{1}{0.05}\int_0^{Q_{0.05}} 1000(1-y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}dy =$$

$$\frac{1000}{0.05}\left\{\int_0^{Q_{0.05}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dy - \int_0^{Q_{0.05}} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dy\right\}.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα είναι $F(Q_{0.05}) = 0.05$, ενώ στο δεύτερο θέτουμε $z = \frac{\log(y) - \mu - \sigma^2}{\sigma}$ και έχουμε:

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\left(\log(Q_{0.05})-\mu-\sigma^2\right)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = e^{\mu+\sigma^2}\Phi\left(\frac{\log(Q_{0.05})-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right).$$

Οπότε

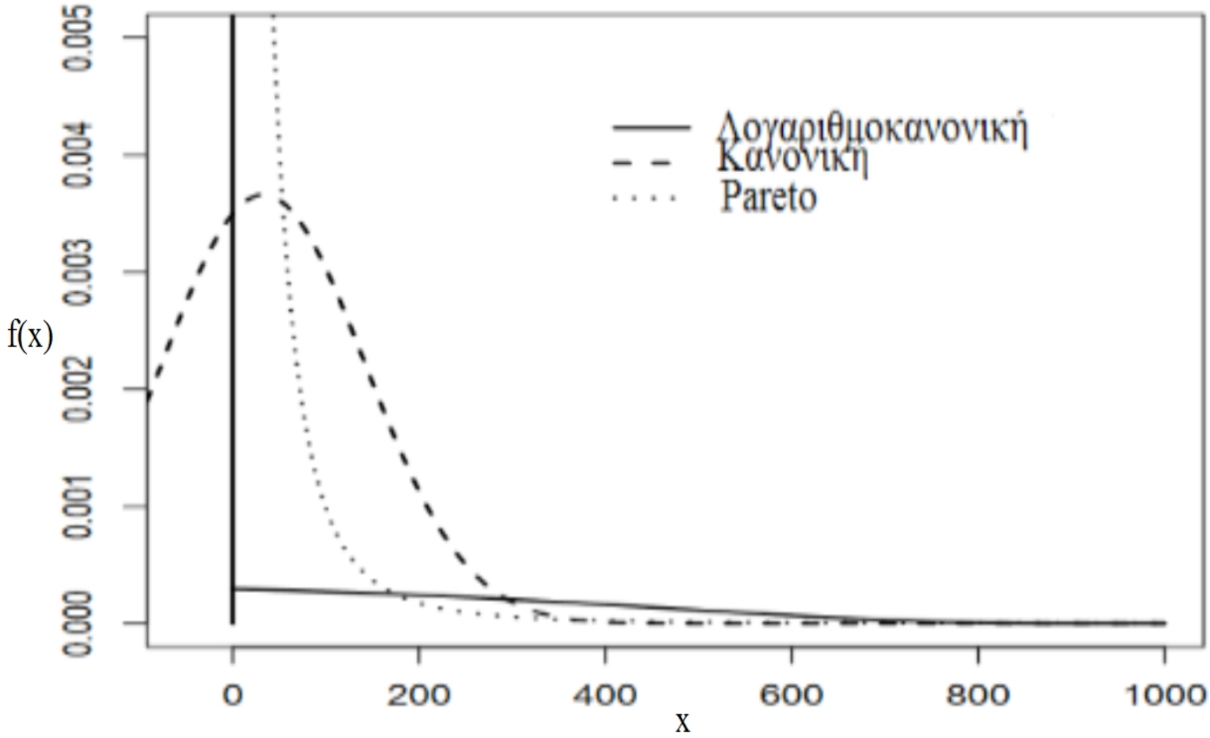
$$TCE_{0.95} = \frac{1000}{0.05}\left\{(0.05) - e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\Phi\left(\frac{\log(Q_{0.05})-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right\} =$$

$$1000\left\{1 - \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{0.05}\Phi\left(\frac{\log(Q_{0.05})-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right\}.$$

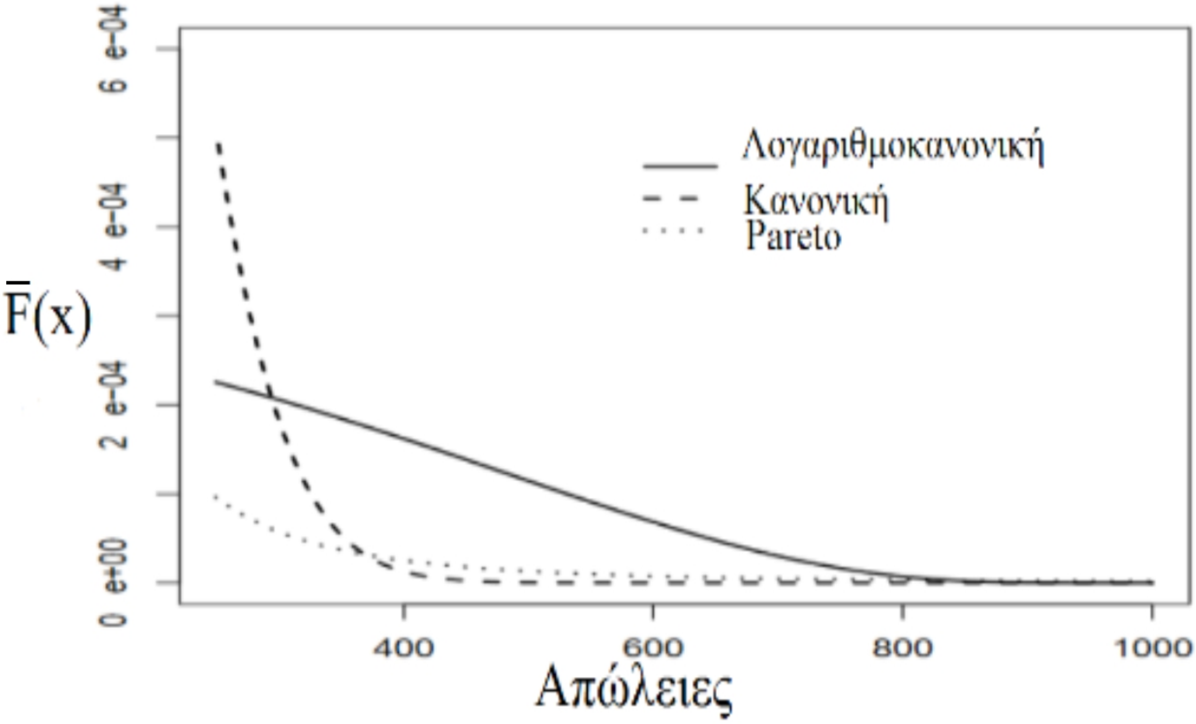
Επίσης ισχύει (από Valdez (2004)):

$$\left(\frac{\left(\log(Q_{0.05})-\mu\right)}{\sigma}\right)=\Phi^{-1}(0.05)=-1.6445\cdot$$

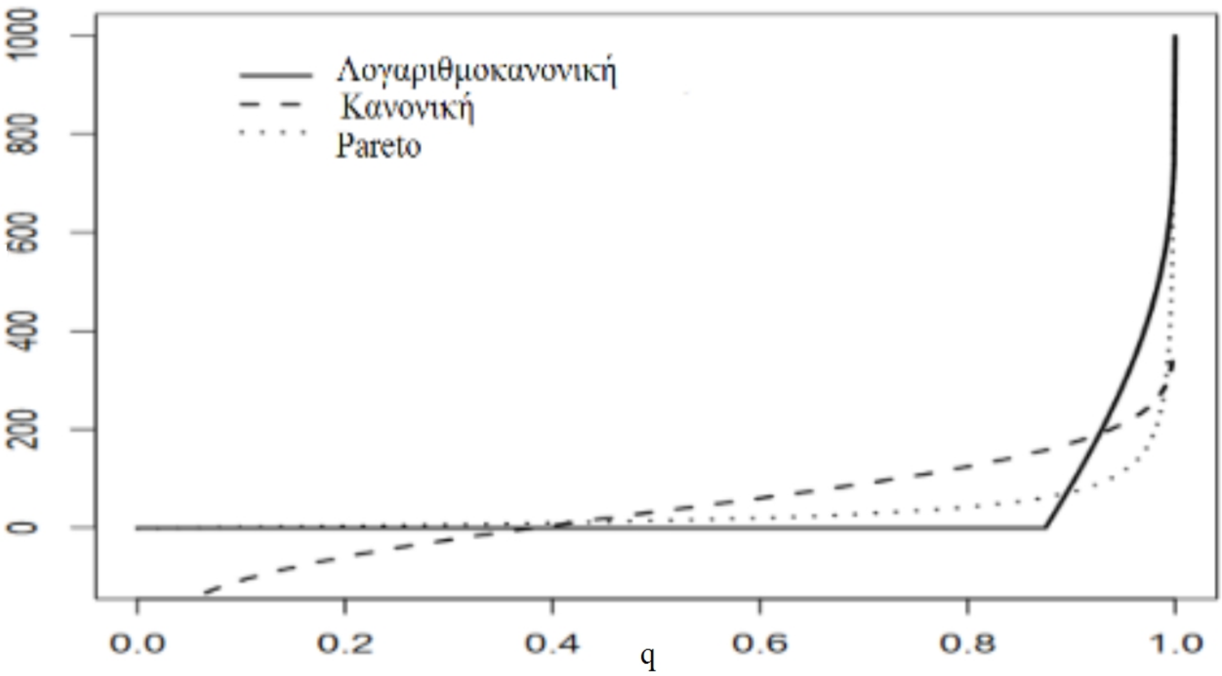
Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση (χωρίς απόδειξη), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το TCE που μας ενδιαφέρει (αν γνωρίζουμε τα μ,σ).



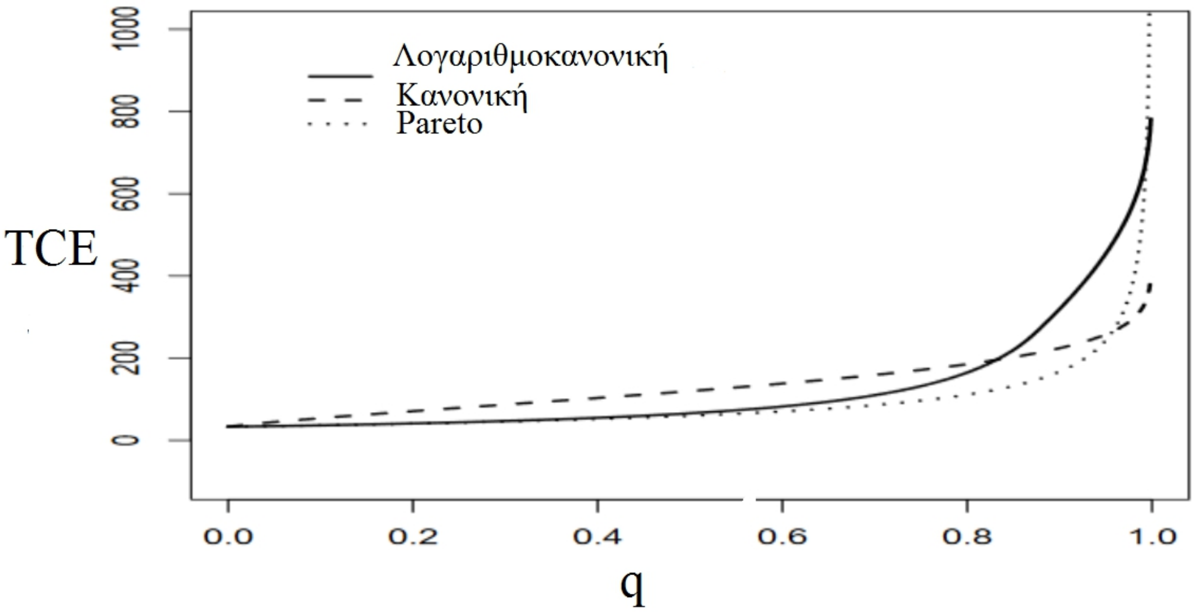
Σχήμα 2.2: Σύγκριση συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητς των κατανομών Pareto, Κανονικής και Λογαριθμοκανονικής.



Σχήμα 2.3: Δεξιά ουρά κατανομών και απώλειες σε κατανομές απωλειών.



Σχήμα 2.4: Τιμές ποσοστημορίου ως μέτρο κινδύνου για διαφορετικά επίπεδα ασφαλείας q (βλέπε Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.5: Τιμές TCE για διαφορετικά επίπεδα ασφαλείας q.

Στο Σχήμα 2.2. βλέπουμε την ουρά των κατανομών Pareto, Κανονική και Λογαριθμική με τις ίδιες μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις (μέση τιμή = 33, τυπική απόκλιση = 109). Επίσης στο Σχήμα 2.3. αντιλαμβανόμαστε πως κινούνται οι απώλειες για τις ίδιες κατανομές. Το Σχήμα 2.4. αποσαφηνίζει τις τιμές για το κάθε ποσοστημόριο ανάλογα με την επιλογή των διαφορετικών επιπέδων ασφαλείας(“q”). Η Λογαριθμοκανονική κατανομή εμφανίζει απότομη άνοδο, ενώ άξιο αναφοράς είναι ότι η Κανονική βρίσκεται “κάτω” από τη Λογαριθμοκανονική, ενώ για για q= 0.41 περνάει “πάνω” και από την Pareto και για q= 0.92 την ξαναπροσπερνούν. Το Σχήμα 2.5 μας δείχνει ένα από τα μειονεκτήματα του TCE, καθώς κάποιες φορές αγνοεί την ουρά της κατανομής. Φαίνεται ότι παρόλο που η κατανομή Pareto έχει βαρύτερη ουρά από την Κανονική και την Λογαριθμοκανονική το κλασσικό TCE ασφάλιστρο μας εμφανίζει την Pareto να είναι λιγότερο επικίνδυνη. Η Κανονική και η Λογαριθμοκανονική εμφανίζουν μεγαλύτερο κίνδυνο για σχετικά χαμηλά q, παρόλο που η Pareto έχει βαρύτερη ουρά (για περαιτέρω πληροφορίες βλέπε Furman και Landsman (2006)).

2.3.1 Παρατηρήσεις πάνω στα ποσοστημόρια και το TCE ως μέτρα κινδύνου

- Η τιμή για το TCE_{α} είναι μεγαλύτερη ή ίση εν συγκρίσει με το Q_{α} με την ισότητα να ισχύει μόνο εάν το Q_{α} παίρνει τη μέγιστη τιμή της τυχαίας μεταβλητής που δείχνει τις απώλειες.

- Η τιμή του Q_0 αντιπροσωπεύει την τιμή ελαχίστων απωλειών, ενώ η τιμή $Q_{0.5}$ την μέση τιμή των απωλειών.

- CTE_0 είναι η μέση απώλεια.

- Στο Σχήμα 2.4 έχουμε τα μέτρα κινδύνου TCE και ποσοστημόρια, για όλες τις τιμές από 0 έως 1. Στο συγκεκριμένο σχήμα η Κανονική κατανομή επιτρέπει όφελος (κέρδος από μη απώλειες ή έσοδα), με αποτέλεσμα το χαμηλότερο ποσοστημόριο να παίρνει αρνητικές τιμές, ενώ για $q < 0.875$ παραμένει μηδέν.

2.4. Tail Standard Deviation (TSD)

Η κεντρική ιδέα στην ασφάλιση είναι η συγκέντρωση του κινδύνου. Υπάρχει η ανάγκη για τον ασφαλιστή να χρεώσει κάποιο ποσό πέραν των προσδοκώμενων απωλειών. Η ανάγκη για τη φόρτωση του κινδύνου μπορεί να απορρέει από τις διεθνείς οικονομικές συνθήκες καθώς και από άλλους παράγοντες που αυξάνουν τη μεταβλητότητα ενός χαρτοφυλακίου. Γι' αυτό το λόγο έχει ορισθεί το ασφάλιστρο TSD (βλέπε Furman και Landsman (2006)). Στη συνέχεια του κεφαλαίου μελετάμε το ασφάλιστρο

$$TSD_X(x_q) = TCE(x_q) + \lambda\left(TV_X\left(x_q\right)\right)^{1/2} \quad . \tag{2.9}$$

Στην πραγματικότητα, το ασφάλιστρο τυπικής απόκλισης (SD) είναι η υποπερίπτωση q=0, άρα:

$$SD\ (X)= E(X) + \lambda(\ Var\ (X))^{1/2}\ .$$

Η παραπάνω σχέση βασίζεται στην αρχή καθαρού ασφαλίστρου, ενώ και το TSD προκύπτει από το TCE, όμως την ίδια στιγμή λαμβάνει υπόψη το φορτίο του κινδύνου και εξαρτάται από την τυπική απόκλιση. Το ασφάλιστρο τυπικής απόκλισης (SD) είναι ένα από τα απλούστερα και ταυτόχρονα πολύ δημοφιλή μέτρα κινδύνου για την αξιολόγηση των κινδύνων (βλέπε Buhlmann (1970)). Η συγκεκριμένη αρχή χρησιμοποιείται ευρέως στην ασφάλιση ακινήτων και ατυχημάτων.

Επιπροσθέτως, παρόλο που η SD χρησιμοποιείται περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη αρχή πριμοδότησης, στην πράξη παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, δεν λαμβάνει υπόψη το σχήμα της κατανομής των κινδύνων. Με άλλα λόγια αποτυγχάνει στη διάταξη δύο διαφορετικών κινδύνων, που έχουν ίσες διακυμάνσεις και προσδοκώμενες απώλειες. Επίσης, έχουμε:

$$TV_X(x_q) = VaR(X \mid X > x_q).$$

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του TSD. Οι πρώτες τρείς έχουν μελετηθεί διεξοδικά από Kaas et al. (2001). Η τέταρτη είναι χρήσιμη στην περίπτωση των αντασφαλιστικών συμβάσεων.

1. Μη αρνητική φόρτιση.

$$TSD_X(x_q) > E(X).$$

Η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου TSD δίνει μεγαλύτερη τιμή από το καθαρό ασφάλιστρο.

2. Αν c είναι κάποιος σταθερός κίνδυνος, τότε:

$$TSD_{X+c}(x_q) = TSD_X(x_q) + c.$$

Αυξάνοντας τον κίνδυνο με κάποια σταθερά c, τότε αυξάνεται και το μέτρο κινδύνου με το ίδιο ποσό.

3. Θετική ομοιογένεια. Για οποιονδήποτε κίνδυνο X και οποιαδήποτε θετική σταθερά β ισχύει

$$TSD_{\beta X}(x_q) = \beta TSD_X(x_q).$$

Εάν η έκθεση σε κίνδυνο της εταιρείας αυξηθεί / μειωθεί αναλογικά, τότε εν συνεχεία το μέτρο του κινδύνου πρέπει επίσης να αυξηθεί / μειωθεί αντίστοιχα.

4. Το TSD εξαρτάται μόνο από την ουρά της κατανομής των κινδύνων. Ισοτιμία αυτών των ουρών συνεπάγεται την ισότητα των αποκλίσεων των τυποποιημένων ουρών.

$$\mathrm{TSD}_X(t) = \mathrm{TSD}_Y(t).$$

Σημειώνουμε ότι η TSD ως μέτρο κινδύνου εξαρτάται από το σχήμα της κατανομής των κινδύνων. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα για να αποσαφηνίσουμε αυτό το φαινόμενο.

Παράδειγμα 2.11. Ένας διαχειριστής κινδύνου αντιμετωπίζει δύο κινδύνους: Ο κίνδυνος X ακολουθεί την Κανονική κατανομή (μ, σ^2) με $\mu=100, \sigma=200$, ενώ ο κίνδυνος Y ακολουθεί την κατανομή Pareto (α, β), με παραμέτρους $\alpha=2.1180$ και $\beta=52.7864$. Για $\lambda \geqslant 0$ έχουμε:

$$SD_X = E(X) + \lambda\sqrt{Var(X)} = 100 + \lambda 200 = E(Y) + \lambda\sqrt{Var(Y)} = SD_Y$$

και ως εκ τούτου, λόγω της SD οι κίνδυνοι X και Y είναι ισοδύναμοι. Όμως, για κάποια σταθερή παράμετρος λ και οποιοδήποτε $q \in (0,1)$, τα $\mathrm{TSD}_X(x_q)$ και $\mathrm{TSD}_Y(y_q)$ παίρνουν διαφορετικές τιμές. Έτσι αν πάρουμε την τιμή $q=0.01$ προκύπτει:

$$\mathrm{TSD}_X(x_q) = 105.3843 + \lambda\, 193.5610,$$

ενώ

$$\mathrm{TSD}_Y(y_q) = 100.4756 + \lambda 200.9513.$$

Ορισμός 2.4. Θεωρώντας $X \geqslant 0$ να είναι ο κίνδυνος με X να ακολουθεί F_X, τότε για $n=1,2,\ldots$ έχουμε:

$$F_X(t) = \frac{E\left(X^n I(X \le t)\right)}{E\left(X^n\right)} = \frac{1}{E\left(X^n\right)} \int_{-\infty}^{t} x^n dF_X.$$

Το ασφάλιστρο TCE του X μπορεί να εκφραστεί ως $X^{(1)}$ (βλέπε Furman και Landsman 2005a).

Θεώρημα 2.1. Θεωρούμε $E(X^2)<\infty$ και για $\lambda\geqslant 0$ ισχύει (βλέπε Furman και Landsman (2005):

$$TSD_X(x_q) = E(X)\frac{\overline{F}_{X^{(1)}}}{\overline{F}_X(x_q)} + \lambda\sqrt{\left(E(X^{(2)})\frac{\overline{F}_{X^{(2)}}}{\overline{F}_X(x_q)} - \left(E(X)\frac{\overline{F}_{X^{(1)}}(x_q)}{\overline{F}_X(x_q)}\right)^2\right)}. \tag{2.10}$$

Όπου, $\overline{F}_{X^{(1)}}(x) = \dfrac{\int_x^{\infty}\overline{F}_X(t)dt}{E(X)}$ και $\overline{F}_{X^{(2)}}(x) = \dfrac{\int_x^{\infty}F_X(t)dt}{E(X^{(1)})}$.

Παράδειγμα 2.12.Υποθέτουμε ότι ο κίνδυνος X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, με παραμέτρους γ και α. Έχουμε:

$$f_X(x) = e^{-ax}\frac{x^{\gamma-1}\alpha^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)},$$

με $x, \alpha, \gamma > 0$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την τυχαία μεταβλητή $X^{(n)}$ να ακολουθεί την κατανομή Γάμμα $(\gamma+n, \alpha)$ και το TSD με τη βοήθεια της (3.9) είναι το εξής:

$$TSD_X(x_q) = E(X)\frac{\overline{G}(x_q|\gamma+1,\alpha)}{\overline{G}_X(x_q|\gamma,\alpha)} + \lambda\sqrt{E(X^2)\frac{\overline{G}_X(x_q|\gamma+2,\alpha)}{\overline{G}_X(x_q|\gamma,\alpha)} - \left(E(X)\frac{\overline{G}_X(x_q|\gamma+1,\alpha)}{\overline{G}_X(x_q|\gamma,\alpha)}\right)^2},$$

όπου $\overline{G}_X(x_q|\gamma,\alpha)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους γ και α. Τέλος, $E(X) = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ και $E(X^2) = \dfrac{\gamma(\gamma+1)}{\alpha^2}$.

Παράδειγμα 2.13. Υποθέτουμε ότι ο κίνδυνος X ακολουθεί Weibull με παραμέτρους α και β. Για οποιοδήποτε θετικό α και β έχουμε:

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}},$$

όπου $x > 0$.

Η τυχαία μεταβλητή $X^{(n)}$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα και έχουμε:

$$\overline{F}_{X^{(n)}}(x_q) = \int_{x_q}^{\infty} f_{X^{(n)}}(x)dx = \int_{x_q}^{\infty} \frac{x^n}{E(X^n)} \alpha\beta^{-\alpha} x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx =$$

$$\int_{x_q}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)} \alpha\beta^{-(\alpha+n)} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx = \int_{x_q}^{\infty} \frac{\alpha}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)} \left(\beta^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha+n}{\alpha}} x^{n+\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} dx$$

Εν συνεχεία θέτουμε $t = x^{\alpha}$ και προκύπτει:

$$\overline{F}_{X^{(n)}}\left(x_q\right) = \int_{t_q}^{\infty} \frac{t^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)} \left(\beta^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha+n}{a}} e^{-\beta^{-\alpha} t} dt =$$

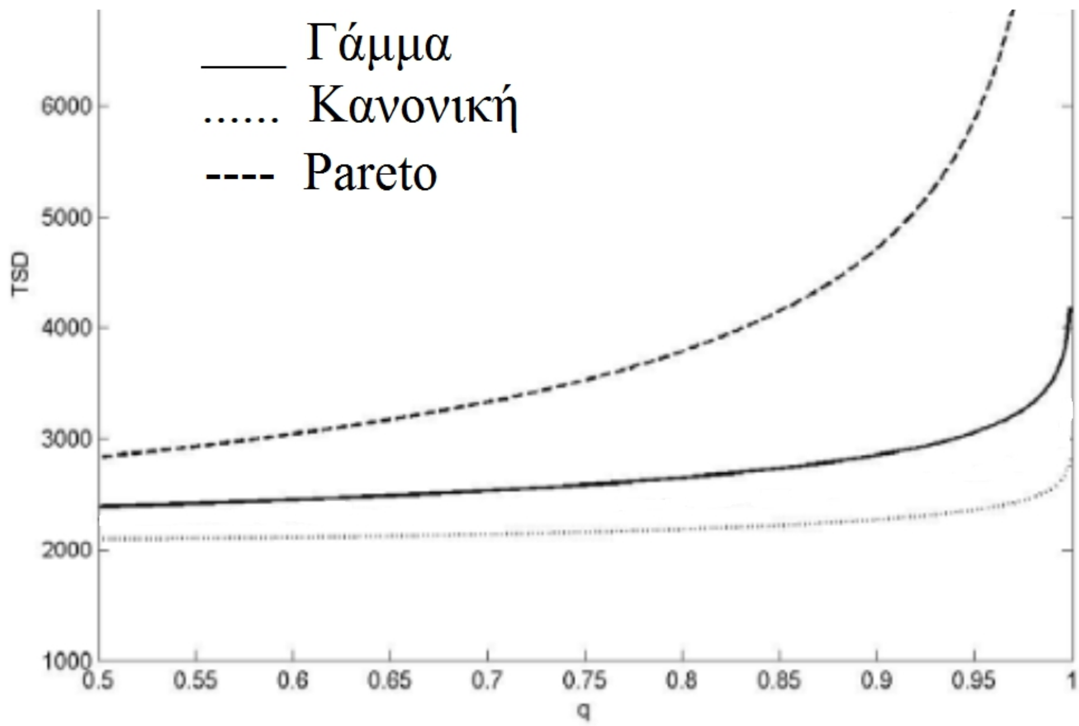
$$\int_{t_q}^{\infty} \frac{t^{\gamma_n - 1}}{\Gamma(\gamma_n)} \overline{\alpha}^{\gamma_n} e^{-\overline{\alpha} t} dt = \overline{G}\left(x_q^{\ a} : \gamma_n, \overline{\alpha}\right) ,$$

όπου $\gamma_n = 1 + \frac{n}{\alpha}$ και $\overline{\alpha} = \beta^{-\alpha}$ είναι οι παράμετροι της κατανομής Γάμμα που ακολουθεί η $X^{(n)}$.

$$TSD_X\left(x_q\right) = E\left(X\right) \frac{\overline{G}\left(x_q^{\ \alpha} / \gamma_1, \overline{\alpha}\right)}{\overline{W}\left(x_q / \alpha, \beta\right)} + \lambda \sqrt{\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) \frac{\overline{G}\left(x_q^{\ \alpha} / \gamma_2, \overline{\alpha}\right)}{\overline{W}\left(x_q / \alpha, \beta\right)} - \left(E(X) \frac{\overline{G}\left(x_q^{\ \alpha} / \gamma_1, \overline{\alpha}\right)}{\overline{W}\left(x_q / \alpha, \beta\right)} \right)^2 \right)},$$

όπου $\overline{W}(x_q / \alpha, \beta) = e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}$, $E\left(X^n\right) = \beta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$.

Από το Σχήμα 2.6 που ακολουθεί, βλέπουμε ότι το ασφάλιστρο TSD θεωρεί την κατανομή Pareto ως την πιό επικίνδυνη, για $q \geqslant 0.5$. Έχουμε δει ότι οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων, που βασίζονται στην τυπική απόκλιση της ουράς (*SD premium*) αποτυγχάνουν να κατατάξουν με σωστή σειρά αυτούς τους κινδύνους. Εν αντιθέσει με τα παραπάνω το Σχήμα 2.6 μας δείχνει ότι το ασφάλιστρο TSD κατατάσσει αυτούς τους κινδύνους σε ορθή σειρά ως προς τον κίνδυνο, βασιζόμενο στη δεξιά ουρά των κατανομών. Τέλος, από το Σχήμα 2.6. γίνεται σαφές ότι ο υπολογισμός ασφαλίστρου βασίζεται στη δεξιά ουρά της κατανομής.



Σχήμα 2.6: Ασφάλιστρο TSD για τις κατανομές Γάμμα, Κανονική και Pareto με $\lambda = 3$.

Κεφάλαιο 3

Το ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς και εφαρμογές του

Εισαγωγή

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετούμε τη σημαντικότητα των περιπτώσεων, κατά τις οποίες οι διαχειριστές κινδύνου ασχολούνται με τους κινδύνους που υπερβαίνουν ένα συγκεκριμένο ποσό. Τέτοιες συνθήκες είναι γνωστές στους επαγγελματίες ασφάλισης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πλαίσιο των πολιτικών που αφορούν αντασφαλιστικές συμβάσεις. Επιπροσθέτως, είμαστε σε θέση να προτείνουμε ένα νέο ασφάλιστρο, που ονομάζεται “ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς” (*tail variance premium*) ή TVP συντομογραφικά, το οποίο μας παρέχει έναν “καλό” τρόπο υπολογισμού απαιτήσεων για την αντιμετώπιση τέτοιων περιπτώσεων. Επιπλέον, προτείνεται μια σειρά μέτρων κινδύνου που συνδέονται με το ασφάλιστρο TVP. Ενώ το γνωστό μας, από το τρίτο κεφάλαιο, μέτρο κινδύνου TCE παρέχει στους διαχειριστές κινδύνου πληροφορίες σχετικά με το μέσο όρο της ουράς μιας κατανομής απωλειών, αντιθέτως το μέτρο κινδύνου διακύμανσης ουράς (*tail variance*) υπολογίζει τη μεταβλητότητα κατά μήκος της ουράς των κατανομών. Βασικός πυλώνας του τετάρτου κεφαλαίου είναι η εργασία των Furman και Landsman (2006). Εν συνεχεία, θα μελετήσουμε ασφάλιστρα, για τα οποία ο κίνδυνος X βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές, βασιζόμενοι στην εργασία των Furman, O. και Furman, E. (2010).

3.1 Η χρησιμότητα των περιορισμένων ασφαλίστρων

Η μέτρηση του κινδύνου είναι ένα απαραίτητο πρωταρχικό βήμα για τη διαχείρισή του. Με την πάροδο των χρόνων όλο και περισσότεροι ρυθμιστές του χρηματοπιστωτικού συστήματος παγκοσμίως έχουν ως κύριο σκοπό να ενθαρρύνουν τις τράπεζες, τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις και τις επιχειρήσεις επενδύσεων να συνειδητοποιήσουν την αυτοαξιολόγηση των κινδύνων που μπορεί να απειλήσουν τη φερεγγυότητά τους. Η συγκεκριμένη τάση ως προς την εποπτεία με βάση τον κίνδυνο εξηγείται καλύτερα σε διεθνές επίπεδο από τη συμφωνία επάρκειας τραπεζικού κεφαλαίου με την Βασιλεία ΙΙ για την Τραπεζική Εποπτεία, το σώμα που στην πραγματικότητα ρυθμίζει τους διεθνείς κανόνες λειτουργίας των τραπεζών. Το ασφάλιστρο TVP διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο σε όλες τις τράπεζες και τις επιχειρήσεις επενδύσεων στην Ευρωπαϊκή Ένωση λόγω της εποπτείας με βάση τους κινδύνους της ΕΕ για τις ασφαλιστικές εταιρείες, γνωστό ως σχέδιο Solvency III. Το TV εκτιμά τη μεταβλητότητα κατά μήκος της ουράς, ενώ το ασφάλιστρο TCE παρέχει πληροφορίες για τις μέσες απώλειες στην ουρά των κατανομών. Σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών υπάρχει μία βέλτιστη τιμή, που επιλέγοντάς τη ελαχιστοποιούμε τον κίνδυνο των ασφαλιστικών εταιρειών. Υπάρχει επίσης η κλάση πολυμεταβλητών ελλειπτικών κατανομών που έχουν βαρύτερη ουρά από τις κανονικές κατανομές, κάτι που τις κάνει πολύ δημοφιλείς στους αναλογιστές και διαχειριστές κινδύνου (βλέπε Landsman et al. (2011)). Θεωρούμε τον κίνδυνο X να είναι μια τυχαία μεταβλητή με αθροιστική κατανομή $F_X(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$. Αυτό μπορεί να αφορά το σύνολο των απαιτήσεων για μια ασφαλιστική εταιρεία ή τις απώλειες σε ένα χαρτοφυλάκιο επενδύσεων για ένα άτομο ή ίδρυμα. Η αρχή πριμοδότησης αναθέτει στον κίνδυνο X ένα πραγματικό αριθμό που χρησιμοποιείται ως χρηματική αποζημίωση προς εκείνον που αναλαμβάνει τον κίνδυνο. Ουσιαστικά ενδιαφερόμαστε για τους κινδύνους που ξεπερνούν μία συγκεκριμένη τιμή x_q. Οι αναλογιστές είναι πολύ εξοικειωμένοι με τέτοιους κινδύνους, δεδομένου ότι πολλά ασφαλιστήρια συμβόλαια και αντασφαλιστικές συμβάσεις αφορούν κάποιο επίπεδο της παρακράτησης από τον αντασφαλιζόμενο. Όταν ασχολούμαστε με τις καταστάσεις που περιγράφονται παραπάνω, το ασφάλιστρο TCE που συμπίπτει με το αναμενόμενο έλλειμμα και η υπό όρους αξία σε κίνδυνο (CVaR) είναι πολύ χρήσιμα στον υπολογισμό των κινδύνων της δεξιάς ουράς των κατανομών απώλειας (βλέπε McNeil et al. (2005) και Παράγραφο 2.3).

$$TCE_q(X) = E\left(X \middle| X > x_q\right).$$

Ερμηνεύεται ως η αναμενόμενη χειρότερη πιθανή απώλεια, δεδομένου ότι αυτή η ζημία υπερβαίνει μια συγκεκριμένη τιμή x_q. Το τελευταίο σε γενικές γραμμές αναφέρεται ως η “αξία σε κίνδυνο” (VaR), έτσι ώστε

$$VaR_q(X) = \inf\{ x_q : F(x_q) \geq q\}. \tag{3.1}$$

Η ουρά υπό όρους προσδοκία (TCE) ως μέτρο κινδύνου παρουσιάζει ιδιότητες που θεωρούνται επιθυμητές σε μια ποικιλία καταστάσεων. Για παράδειγμα, λόγω της ιδιότητας προσθετικότητας των προσδοκιών, το TCE επιτρέπει μια φυσική αποσύνθεση των κεφαλαίων μεταξύ των διαφόρων συστατικών του. Το αναμενόμενο έλλειμμα έχει μελετηθεί διεξοδικά από διάφορους συγγραφείς, όπως οι Panjer (2002), Landsman και Valdez (2005). Παρόλο που το ασφάλιστρο (TCE) παρέχει στους αναλογιστές τις απαραίτητες πληροφορίες σχετικά με το βαθμό επικινδυνότητας της ουράς της εκάστοτε κατανομής ζημιών, πολύ συχνά αυτό δεν είναι αρκετό. Ιδιαίτερα στις σύγχρονες ανταγωνιστικές και προσανατολισμένες στις επενδύσεις αγορές, οι οποίες προϋποθέτουν ότι οι ασφαλιστικοί διευθυντές εκμεταλλεύονται όλα τα πλεονεκτήματα της επένδυσης των κεφαλαίων κινδύνου των επιχειρήσεών τους. Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα (βλέπε Furman και Landsman (2006)).

Παράδειγμα 3.1. Θεωρούμε τους κινδύνους X και Y οι οποίοι ακολουθούν την κατανομή Pareto και Κανονική κατανομή αντίστοιχα, με μέσες τιμές $E(X)=490.5763$ και $E(Y)=200$. Επίσης, οι διασπορές αυτών των δύο κινδύνων είναι $Var(X)=215.123^2$ και $Var(Y)=500^2$. Γνωρίζουμε ότι η Pareto έχει πιο βαριά ουρά από την Κανονική κατανομή, όμως η αρχή υπολογισμού διακύμανσης ασφαλίστρου (*variance premium calculation principle (VP)*) βρίσκει την Κανονική κατανομή να εμφανίζει μεγαλύτερη επικινδυνότητα για $\alpha > 0.0014264$. Πράγματι,

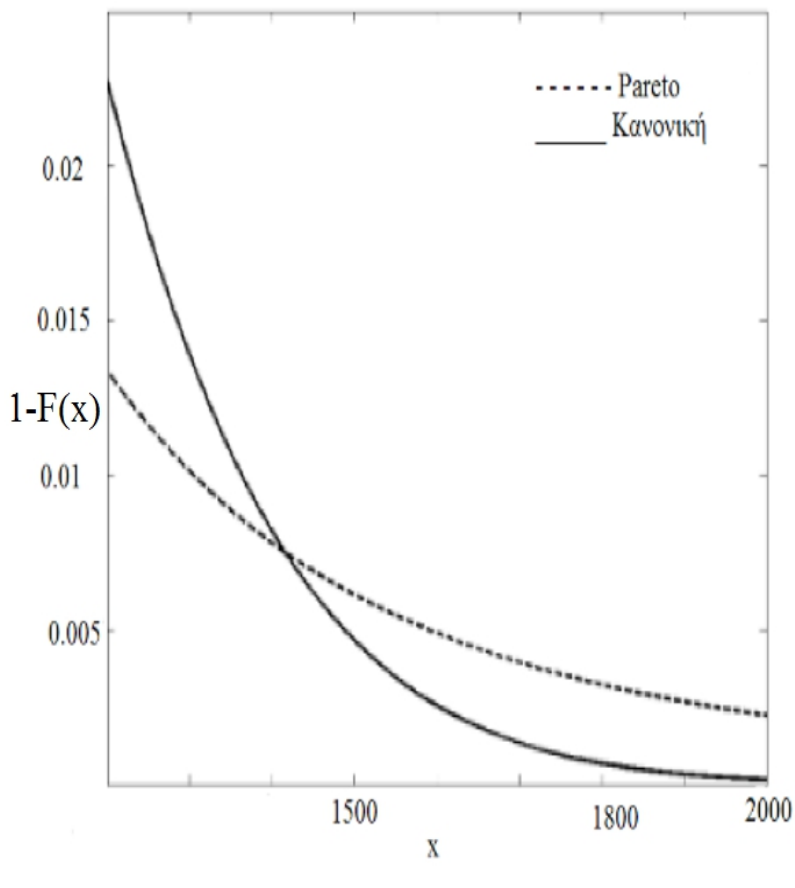
$$VP(Y)=E(Y)+\alpha Var(Y)>E(X)+\alpha Var(X)=VP(X).$$

Το συγκεκριμένο γεγονός χρήζει περαιτέρω εξέτασης. Γι' αυτό το λόγο λοιπόν μελετάμε τους δύο παραπάνω κινδύνους με το μέτρο κινδύνου “Αξία στον κίνδυνο” (*Value-at-Risk*). Για $q=0.97$ στη Σχέση (3.1) έχουμε:

$$VaR_q(Y) = 1140.4 > 995.9505 = VaR_q(X).$$

Βλέπουμε ότι το VaR επίσης εμφανίζει την Κανονική κατανομή να είναι πιο ριψοκίνδυνη από την Pareto χωρίς λόγο. Τέλος, το ασφάλιστρο TCE αποτυγχάνει και αυτό με τη σειρά του να αξιολογήσει σωστά τους κινδύνους X και Y με βάση τις κατανομές απώλειάς τους.

$$TCE_{0.97}(X) = 1334 = TCE_{0.97}(Y).$$



Διάγραμμα 3.1 Δεξιά ουράς κατανομής Pareto και Κανονικής κατανομής.

Για την επίλυση του παράδοξου που εμφανίζεται στο Παράδειγμα 3.1. προτείνεται ένα μέτρο της μεταβλητότητας κατά μήκος της δεξιάς ουράς $\{X > x_q\}$. Το συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου ονομάζεται διακύμανση ουράς (*tail variance (TV)*) και υπολογίζεται ως εξής:

$$TV_q(X) = Var(X | X > x_q) = E\left((X - \tau_q(X))^2 | X > x_q\right), \tag{3.2}$$

όπου $\tau_q(X) = TCE_q(X)$.

Η Σχέση (3.2) πληροί την ακόλουθη ιδιότητα (βλέπε Furman και Furman (2010)):

$$TV_q(X=)\inf_c E\left((X-c)^2 \mid X > x_q\right)$$

και παρουσιάζει ένα φυσικό μέτρο της διασποράς του X κατά μήκος της δεξιάς ουράς. Επιπλέον, προκειμένου να υπολογιστεί η ουρά της διακύμανσης του X απαιτούνται μόνο οι πληροφορίες σχετικά με το $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Valdez (2004) πρότεινε το μέτρο κινδύνου TCV (*tail conditional variance*) μετρώντας την μεταβλητότητα του κινδύνου X κατά μήκος της δεξιάς ουρά της κατανομής του. Όμως, το TCV δίνεται από τον τύπο:

$$TCV_q(X) = E\left((X - E(X))^2 \middle| X > x_q\right) \tag{3.3}$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι από τη Σχέση (3.3) δεν αντλούμε τις απαραίτητες πληροφορίες που θα θέλαμε για την απόκλιση δεξιάς ουράς της κατανομής που εξετάζουμε. Στην πραγματικότητα από την (3.3) απλά προβλέπουμε το τετράγωνο της απόκλισης του X από τη μέση τιμή $E(X)$, στη δεξιά ουρά της κατανομής. Υπό αυτό το πρίσμα, η Εξίσωση (3.3) δεν είναι σε θέση να χρησιμεύσει ως μέτρο μεταβλητότητας της ουράς. Σημειώσουμε (όπως φαίνεται και από τη Σχέση 3.3) ότι είναι πάντα θετική ποσότητα, καθώς

$$TCV_q(X) = TV_q(X) + \left(TCE_q(X) - E(X)\right)^2 > 0,$$

κάτι που δεν συνάδει με τον αυστηρό ορισμό του μέτρου (βλέπε Κεφάλαιο 2). Επιπροσθέτως, για το Παράδειγμα 3.1 έχουμε

$$TCV_{0.97}(X) = 1286100 > 847700 = TV_{0.97}(X).$$

Για άλλη μία φορά οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα ως προς την επικινδυνότητα. Χρησιμοποιώντας όμως την Σχέση (3.2) καταλήγουμε ο κίνδυνος X (ακολουθεί κατανομή Pareto) να έχει πολύ μεγαλύτερη διακύμανση της ουράς, σε σύγκριση με τον κίνδυνο Y (ακολουθεί Κανονική κατανομή).

$$TV_{0.97}(X) = 126400 > 60.8216 = TV_{0.97}(Y).$$

Παρά το γεγονός ότι η εύρεση πρωτότυπων τρόπων για την ποσοτικοποίηση ασφαλιστικών και χρηματοοικονομικών κινδύνων είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα, η μετέπειτα εφαρμογή αυτών των θεωρητικών προσεγγίσεων στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου παρουσιάζει ακόμα μεγαλύτερη αξία και δυσκολία. Η ουρά διακύμανσης για τις μονοπαραγοντικές κανονικές κατανομές είναι ανάλογη με την διακύμανση του κινδύνου X (βλέπε Furman και Landsman (2006)), όπως βλέπουμε από την ακόλουθη σχέση:

$$TV_q(X) = Var(X)\left[1 + h(z_q)(z_q - h(z_q))\right], \tag{3.4}$$

όπου $h(z) = \dfrac{\phi(z)}{1-\phi(z)}$ είναι η συνάρτηση κινδύνου που αντιστοιχεί σε τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0,1)$, με $\phi(z)$ και $\Phi(z)$ να είναι η συνάρτηση κατανομής και αθροιστική συνάρτηση αντίστοιχα της $N(0,1)$.

Σε πιο πολύπλοκες καταστάσεις που αφορούν για παράδειγμα μία ασφαλιστική εταιρεία με n επιχειρηματικούς κλάδους, των οποίων τα αποτελέσματα μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως ένα τυχαίο διάνυσμα n μεταβλητών με $\mathbf{X}=\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^T$, εξαρτώμενους μεταξύ τους, ασχολούμαστε με την κατανομή κάθε επιμέρους κινδύνου $X_\kappa, \kappa = 1,2,\ldots,n$ και συνολικό άθροισμα $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$TV_q\left(X_\kappa | S\right) = Var\left(X_\kappa | S > s_q\right) = E\left(\left(X_\kappa - \tau_q\left(X_\kappa | S\right)\right)^2 | S > s_q\right), \tag{3.5}$$

όπου

$$\tau_q\left(X_\kappa | S\right) = TCE_q\left(X_\kappa | S\right) = E\left(X_\kappa | S > s_q\right). \tag{3.6}$$

Οι Σχέσεις (3.5) και (3.6) βρίσκουν τεράστιο πλήθος εφαρμογών, υπό το πρίσμα πολυμεταβλητών ελλειπτικών κατανομών στις ασφάλειες και στην ανάλυση οικονομικών δεδομένων (Panjer (2002), Wang (2002), Valdez και Chernih (2003)). Ειδικότερα, το $TV_q(X) = Var\left(X | X > x_q\right)$ μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις απαιτήσεις κεφαλαίου, ενώ το $TV_q\left(X_\kappa | S\right) = Var\left(X_\kappa | S > s_q\right)$ είναι μία πολύ χρήσιμη σχέση όταν η αβεβαιότητα προέρχεται από διαφορετικές πηγές. Παράλληλα, οφείλουμε να επισημάνουμε ότι η αποσύνθεση του συνολικού μεγέθους της αβεβαιότητας από αυτές τις πηγές είναι ιδιαιτέρως σημαντική. Το $TV_q\left(X_\kappa | S\right) = Var\left(X_\kappa | S > s_q\right)$ είναι πράγματι μέτρο της μεταβλητότητας, αλλά συναντούμε κάποιες δυσκολίες στον υπολογισμό του συνολικού κινδύνου ως προς την κατανομή κεφαλαίων. Αυτό συμβαίνει επειδή η συγκεκριμένη σχέση δεν είναι προσθετική. Δηλαδή,

$$TV_q(S) \neq TV_q\left(X_1 | S\right) + TV_q\left(X_2 | S\right) + \ldots + TV_q\left(X_\kappa | S\right).$$

Αντιθέτως, ισχύει:

$$\sqrt{TV_q(S)} \leq \sqrt{TV_q\left(X_1 | S\right) + TV_q\left(X_2 | S\right) + \ldots + TV_q\left(X_\kappa | S\right)}.$$

Για την αντιμετώπιση αυτής της ανεπιθύμητης ιδιότητας (για παράδειγμα στον υπολογισμό του ισολογισμού θέλουμε το άθροισμα) οι Furman και Landsman (2006) ορίζουν τη συνδιακύμανση ουράς κατανομής (*tail covariance allocation*) $TCov$ με τον εξής τρόπο:

$$TCov_q\left(X_\kappa | S\right) = Cov\left(X_\kappa, S | S > s_q\right) = E\left(\left(X_\kappa - \tau_q\left(X_\kappa | S\right)\right)\left(S - \tau_q(S)\right) | S > s_q\right), \tag{3.7}$$

όπου το $\tau_q\left(X_\kappa | S\right)$ δίνεται από τη Σχέση (3.6) και $\tau_q(S) = E\left(S | S > s_q\right)$.

Εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι η Σχέση (3.7) είναι πράγματι προσθετική, καθώς

$$\begin{aligned}
& TCov_q\left(X_1 | S\right) + TCov_q\left(X_2 | S\right) + \ldots + TCov_q\left(X_\kappa, S\right) \\
& = Cov\left(X_1, S | S > s_q\right) + Cov_q\left(X_2, S | S > s_q\right) + \ldots + Cov\left(X_\kappa, S | S > s_q\right) \\
& = Cov\left(X_1 + X_2 + \ldots X_\kappa, S | S > s_q\right) = Var\left(S | S > s_q\right) = TV_q(S).
\end{aligned}$$

Εν συνεχεία συνδυάζοντας τις παραπάνω ιδιότητες με το ασφάλιστρο TCE (βλέπε Κεφάλαιο 2) προτάθηκε το ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς (*tail variance premium*) TVP (βλέπε Παράγραφο 3.2 που ακολουθεί). Το TVP στηρίζεται στο ασφάλιστρο TCE, αλλά ταυτόχρονα λαμβάνει υπόψη τον φόρτο κινδύνου. Σημαντική σημείωση ότι το TVP ασφάλιστρο βασίζεται μόνο στις πληροφορίες που υπάρχουν για τη δεξιά ουρά των κατανομών απώλειας και παρέχει μία “δίκαιη” λύση όταν ενδιαφερόμαστε για τους κινδύνους που ξεπερνούν μία συγκεκριμένη τιμή (που έχει οριστεί από την επιχείρηση).

3.2 Το ασφάλιστρο TVP

Προκειμένου να καθοριστεί ένα ασφάλιστρο για τον κίνδυνο είναι απαραίτητο να υπάρξει μετατροπή της τυχαίας απώλειας σε οικονομικούς όρους. Είναι υποχρεωτικές τόσο η κατανομή πιθανότητας των ζημιών όσο και μία αρχή τιμολόγησης. Σε αυτό το σημείο ακολουθεί η παρουσίαση του ασφαλίστρου TVP, που αναφέρθηκε στην Παράγραφο 3.1 και οι σημαντικότερες ιδιότητές του.

Ορισμός 3.1. Το ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς TVP υπολογίζεται ως εξής:

$$TVP_q(X) = TCE_q(X) + \alpha TV_q(X), \tag{3.8}$$

όπου $\alpha \geqslant 0$, το x_q προκύπτει από τη Σχέση (3.1) και το $\mathrm{TCE}_q(X)$ από την (3.2). Επίσης, έχουμε $TCE_q(X) = E(X|X > x_q)$ και $q = F^{-1}(x_q)$.

Το παραπάνω ασφάλιστρο TVP της Σχέσης (3.8) ικανοποιεί κάποιες σημαντικές ιδιότητες. Παρόλο που οι δύο πρώτες ιδιότητες που ακολουθούν έχουν μελετηθεί και εξηγηθεί διεξοδικά από Kaas et al. (2001).

- Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (*non-negative loading*).

$$TVP_q(X) \geq E(X).$$

Το ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς TVP δεν είναι μικρότερο από το γνωστό καθαρό ασφάλιστρο.

- Αναλλοίωτη προσθετικότητα (*Translation invariance*).

Για κάποιο κίνδυνο c που παίρνει πραγματικές τιμές ισχύει:

$$TVP_q(X + c) = TVP_q(X) + c.$$

Αύξηση του κινδύνου κατά κάποιο ποσό c επιφέρει αύξηση της τιμής του ασφαλίστρου με το ίδιο ποσό c. Η συγκεκριμένη ιδιότητα αναφέρεται στη διατριβή των Kaas et al. (2001) ως ιδιότητα συνοχής.

- Ισοτιμία ουράς (*tail parity*).

Καλούμε τις τιμές X και Y ισοδύναμες, εάν υπάρχει κάποιο q, τέτοιο ώστε όταν ισχύει $\overline{F}_X(x_t) = \overline{F}_Y(x_t)$ για κάθε $t \geqslant q$ να συνεπάγεται

$$TVP_t(X) = TVP_t(Y).$$

Το ασφάλιστρο TVP εξαρτάται μόνο από την ουρά της κατανομής απωλειών. Η ισοτιμία αυτών των ουρών συνεπάγεται την ισότητα των τιμών των ασφαλίστρων TVP.

Παρατήρηση 3.1 Στην ειδική περίπτωση που η κατανομή απωλειών είναι η $L(x,P) = x(x-P)^2$, το ασφάλιστρο TVP από τη Σχέση (3.8), με $\alpha = \dfrac{1}{TCE_X(x_q)}$ ελαχιστοποιεί τις προσδοκώμενες απώλειες κατά μήκος της δεξιάς ουράς $\{X > x_q\}$ (βλέπε Furman και Landsman (2006)).

$$TVP_q(X) = TCE_q(X) + \frac{TV_q(X)}{TCE_q(X)} = \arg\inf_P \; E\left(L(X,P) \middle| X > x_q\right).$$

Στην πραγματικότητα, διαφοροποιώντας το P (που συμβολίζει τις αναμενόμενες απώλειες) στο ολοκλήρωμα υπολογίζουμε το TVP ως λύση της εξίσωσης:

$$\int_{x_q}^{\infty} x(x-P)dF_x = 0.$$

Με τη βοήθεια του Ορισμού 3.1 ορίζεται το ασφάλιστρο τυπικής απόκλισης ουράς (*tail standard deviation premium*).

Ορισμός 3.2. Το ασφάλιστρο τυπικής απόκλισης ουράς TSDP υπολογίζεται ως εξής:

$$TSDP_q(X) = TCE_q(X) + \alpha\sqrt{TV_q(X)},$$

όπου $\alpha \geqslant 0$, το x_q προκύπτει από τη Σχέση (3.1) και το $TCE_q(X)$ από την (3.2). Θυμίζουμε ότι έχουμε $TCE_q(X) = E\left(X \middle| X > x_q\right)$ και $q = F^{-1}(x_q)$.

Το ασφάλιστρο TSD ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες του ασφαλίστρου διακύμανσης ουράς TVP. Όμως, σημαντική λεπτομέρεια αποτελεί το γεγονός ότι επιπλέον ικανοποιεί και τη λεγόμενη ιδιότητα θετικής ομοιογένειας.

- Θετική ομοιογένεια (*positive homogeneity*).

Για κάθε κίνδυνο X και οποιαδήποτε θετική σταθερά β έχουμε:

$$TSDP_q(\beta X) = \beta TSDP_q(X).$$

Εάν η έκθεση στον κίνδυνο μίας εταιρείας αναλογικά αυξάνεται / μειώνεται, τότε το μέτρο κινδύνου που χρησιμοποιείται οφείλει να αυξηθεί / μειωθεί αντίστοιχα.

Θεωρώντας ένα τυχαίο διάνυσμα n μεταβλητών $\mathbf{X}=\left(X_1, X_2,\ldots, X_\kappa\right)^T$, όπου κάθε X_κ τυχαία μεταβλητή αντιπροσωπεύει τον κίνδυνο που σχετίζεται με τον κ-οστό επιχειρησιακό τομέα μίας ασφαλιστικής εταιρείας ή τις απώλειες από το κ-οστό περιουσιακό στοιχείο του επενδυτικού χαρτοφυλακίου σε ατομικό επίπεδο ή σε επίπεδο επιχειρήσεων. Σε αυτή την περίπτωση ο συνολικός κίνδυνος (ή συνολικές απώλειες), με $k \leqslant n$, είναι $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Ορισμός 3.3. Το ασφάλιστρο TVP για τον κάθε επιμέρους κίνδυνο X_κ είναι

$$TVP_q\left(X_\kappa \middle| S\right) = TCE_q\left(X_\kappa \middle| S\right) \tag{3.9}$$

και κατά συνέπεια το ασφάλιστρο TSDP υπολογίζεται από

$$TSDP_q\left(X_\kappa \middle| S\right) = TCE_q\left(X_\kappa \middle| S\right) + \alpha\sqrt{TV\left(X_\kappa \middle| S\right)}, \tag{3.10}$$

όπου $\alpha \geqslant 0$, s_q προκύπτει απ' την (3.1), ενώ τα $TCE_q\left(X_\kappa \middle| S\right)$ και $TV_q\left(X_\kappa \middle| S\right)$ από τις Σχέσεις (3.6) και (3.5) αντίστοιχα. Οι Εξισώσεις (3.9) και (3.10) παρουσιάζουν κάποιες πρόσθετες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα ότι η Εξίσωση (3.10) ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

- Υποπροσθετικότητα (Sub-additivity)

Για οποιοδήποτε τυχαίους κινδύνους X, Y και συνολικό ποσό $S = X + Y$ έχουμε

$$TSDP_q(S) \leq TSDP_q\left(X \middle| S\right) + TSDP_q\left(Y \middle| S\right).$$

Επιπροσθέτως, σε περιπτώσεις που η ιδιότητα πλήρους προσθετικότητας (*fully-additivity*) είναι απαραίτητη ορίζεται το ασφάλιστρο συνδιακύμανσης ουράς TCovP (για περαιτέρω πληροφορίες βλέπε Landsman και Furman (2006)).

Ορισμός 3.4. Το ασφάλιστρο TCovP (*tail covariance premium*) δίνεται από τον τύπο

$$TCovP_q\left(X_\kappa \middle| S\right) = TCE\left(X_\kappa \middle| S\right) + \alpha TCov_q\left(X_\kappa \middle| S\right),$$

όπου το α είναι μη αρνητικό, s_q προκύπτει απ' την (3.1), ενώ τα $TCE_q\left(X_\kappa \middle| S\right)$ και $TCov_q\left(X_\kappa \middle| S\right)$ από τις Σχέσεις (3.6) και (3.7) αντίστοιχα.

Οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων που αναπτύξαμε στις τελευταίες δύο παραγράφους (3.1 και 3.2) βρίσκουν μεγάλη χρήση και συμβολή στην κλάση των ελλειπτικών κατανομών.

3.3 Η κλάση ελλειπτικών κατανομών

Η συγκεκριμένη διατριβή δεν αποσκοπεί να ασχοληθεί σε βάθος με τις ελλειπτικές κατανομές, αλλά να παρουσιάσει με λίγα λόγια κάποια βασικά στοιχεία αυτής της οικογένειας κατανομών. Η κατηγορία των ελλειπτικών κατανομών παρέχει μια πλούσια γκάμα συμμετρικών πολυδιάστατων κατανομών, οι οποίες έχουν γίνει ευρέως δημοφιλείς στην αναλογιστική επιστήμη και τα χρηματοοικονομικά. Πολλά μέλη αυτής της κατηγορίας είναι πιο λεπτοκυρτικές από τις κανονικές κατανομές. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει σε κάποιον να διαμορφώσει ουρές που είναι συχνά παρατηρούμενες στην ανάλυση των περισσότερων οικονομικών δεδομένων (βλέπε Embrechts et al. (2001)). Πέραν της διατριβής των Landsman και Furman (2006), περαιτέρω ανάλυση δίνεται από τους Fang et al. (1987) και Muirhead (1982).

Ορισμός 3.5. Το n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα X ακολουθεί πολυδιάστατη κανονική κατανομή (*multivariate normal distribution*) αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^n$ η κατανομή του $\alpha^t X$ είναι η μονοδιάστατη Κανονική.

Ακόμα, από τον Ορισμό 3.5 αν το $\mathrm{X} = \left(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n\right)^t$ ακολουθεί n -διάστατη Κανονική κατανομή, τότε κάθε περιθώρια μεταβλητή X_i, $i = 1,2,\ldots,n$ ακολουθεί μονοδιάστατη Κανονική κατανομή.

Ορισμός 3.6. Έστω ότι έχουμε «Σ», έναν nxn θετικά ορισμένο πίνακα $(\Sigma \geqslant 0)$ και «μ» ένα $nx1$ διάνυσμα. Το n -διάστατο τυχαίο διάνυσμα X ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή «μ» (παράμετρος θέσης) και πίνακα διακυμάνσεων (παράμετρος κλίμακας) «Σ», η ροπογεννήτρια δίνεται από τη σχέση

$$m_x(\omega) = \exp\left(\mu^t \omega + \frac{1}{2}\omega^t \Sigma \omega\right),$$

όπου ω ένα n-διάστατο διάνυσμα.

Ορισμός 3.7. Το τυχαίο n -διάστατο διάνυσμα X ακολουθεί n -διάστατη Κανονική κατανομή με μέσο διάνυσμα «μ» και πίνακα διακυμάνσεων «Σ» (με Σ >0), εάν η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο

$$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)\right). \tag{3.11}$$

Οι πολυδιάστατες κανονικές κατανομές εμφανίζουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες, που χρησιμοποιούνται σε πολλές περιπτώσεις. Όμως ερευνητικές εργασίες και εμπειρικές έρευνες έδειξαν ότι πολλά φαινόμενα δεν δύναται να εξηγηθούν ή να μοντελοποιηθούν από αυτού του είδους τις κατανομές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κανονική κατανομή που δεν μπορεί να μοντελοποιήσει παρατηρήσεις που αφορούν τις κοινές χρηματιστηριακές μετοχές (βλέπε Blattberg και Gonedes (1974)). Η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών έδωσε λύση σε τέτοιου είδους προβλήματα. Επίσης, διατηρούν τις ιδιότητες των κανονικών κατανομών. Ακόμα η ελλειπτική οικογένεια κατανομών περιλαμβάνει τόσο κατανομές με πλατιά ουρά (*long-tailed*), όσο και κατανομές με κοντή ουρά (*short-tailed*). Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο τρόπους ορισμού της οικογένειας ελλειπτικών κατανομών.

Ορισμός 3.8. Ένα n -διάστατο τυχαίο διάνυσμα Χ ακολουθεί μια ελλειπτική κατανομή (*elliptically distribution*) με παράμετρο θέσης «μ» ($nx1$) και κλίμακας «Σ» (nxn) αν η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι της μορφής

$$e^{i\omega^t \mu}\phi(\omega^t \Sigma \omega),$$

με $\omega \in \mathbb{R}^n$ και $\phi(.)$ μια συνάρτηση, η οποία λέγεται γεννήτορας της χαρακτηριστικής συνάρτησης που έχουμε. Όταν το τυχαίο διάνυσμα Χ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.9. Ένα n -διάστατο τυχαίο διάνυσμα Χ ακολουθεί μια ελλειπτική κατανομή με παράμετρο θέσης «μ» και κλίμακας «Σ», με «Σ» έναν θετικά ορισμένο πίνακα τάξης n, εάν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότηταςείναι της μορφής

$$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} f_n\left[(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)\right],$$

με $f_n(.)$ πραγματική συνάρτηση, η οποία καλείται γεννήτοραςτης συνάρτησης πυκνότητας.

Ακολουθεί πίνακας με τη μορφή της συνάρτησης $f_n(\cdot)$, για τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ελλειπτικές κατανομές (για λεπτομέρειες βλέπε Guerrero-Cusumano, Jose-Luis (1998), Laurent (1974) και Μπατσίδη (2005)).

Κανονική, $N_p(\mu,\Sigma)$	$(2\pi)^{-p/2}\exp(-\frac{u}{2}), u \ge 0$
Pearson VII	$\frac{(\pi m)^{-p/2}\Gamma(\mathrm{N})}{\Gamma\left(\mathrm{N}-\frac{p}{2}\right)}\left(1+\frac{u}{m}\right)^{-N}, u \ge 0, N > \frac{p}{2}, m > 0$
Cauchy, $MC_p(\mu,\Sigma)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{p+1}{2}}}(1+u)^{\frac{-p+1}{2}}, u \ge 0$
Logistic, $\mathrm{M}L(\mu,\Sigma)$	$\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\left(\int_0^\infty u^{\frac{p}{2}-1}\frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})}du\right)\frac{\exp(-u)}{(1+\exp(-u))^2}$
Μίξη Κανονικών	$C_p\int t^{-\frac{p}{2}}\exp\left(-\frac{u}{2t}\right)dGt,$ όπου Gt α.σ.κ. στο $(0,\infty)$ και $C_p > 0.$

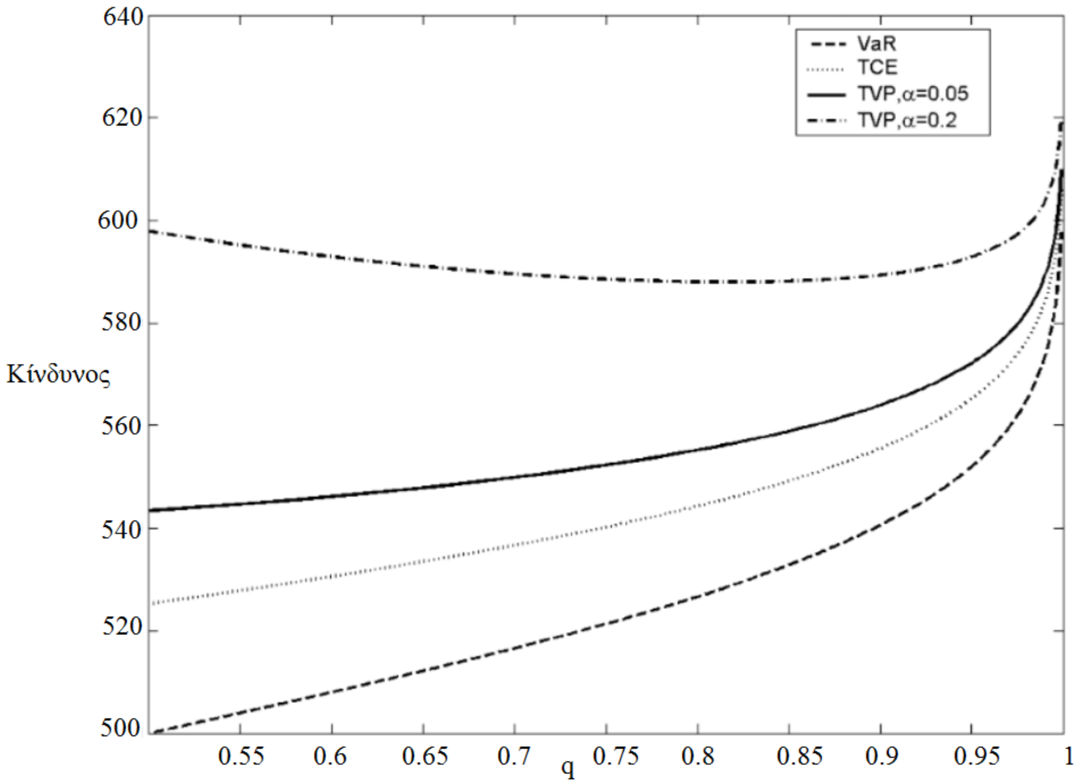
Πίνακας 3.2. Γεννήτορες συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ειδικών ελλειπτικών κατανομών.

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής δεν κρίνεται σκόπιμο να ασχοληθούμε περαιτέρω με την ελλειπτική οικογένεια κατανομών (βλέπε Furman και Landsman (2006).

q	x_q	$TCE_X(x_q)$	$TV_X(x_q)$	$TVP_X(x_q)$
0.5	500	525.2313	363.3802	597.9074
0.75	521.3292	540.1959	241.6370	588.5233
0.9	540.5262	555.4974	169.1352	589.3245
0.95	552.0148	565.2287	138.0765	592.8440
0.975	561.9795	573.9278	116.6874	597.2653
0.999	597.7217	606.4767	67.7949	620.0357

Πίνακας 3.3. Σύγκριση των τιμών TCE, TV και TVP $(\alpha=0.2)$.

Στον Πίνακα 3.3. βλέπουμε τις τιμές των ασφαλίστρων TCE, TV και TVP για κίνδυνο X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu=500$ και $\sigma^2=1000$ (παράμετρος $\alpha=0.2$). Το ασφάλιστρο TCE παρατηρούμε ότι αυξάνεται, ενώ οι τιμές του TV μειώνονται. Συνολικά, το TVP (που επηρεάζεται από τα TCE και TV όπως φαίνεται από την 3.8) αρχικά μειώνεται απότομα, στη συνέχεια η τιμή εμφανίζει αύξηση. Παρατηρούμε ότι η τιμή για $q=0.5$ είναι περίπου ίση με την τιμή για $q=0.975$.



Διάγραμμα 3.4. Σύγκριση των VaR, TCE και TVP (βλέπε Furman, O. και Furman, E. (2010)).

Από τον παραπάνω Πίνακα 3.3, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι για την επιλεγείσα τιμή του α, το ασφάλιστρο TVP δεν είναι μονότονη συνάρτηση με παράμετρο q. Ουσιαστικά, ενώ το γνωστό TCE και οι τιμές του VaR πάντα αυξάνουν, όταν κινούμαστε κατά μήκος της δεξιάς ουράς της κατανομής των κινδύνων, οι τιμές του TVP μειώνονται στην αρχή μιας τέτοιας κίνησης. Αυτό το φαινόμενο εξηγείται εύκολα από τις αντίθετες κατευθύνσεις των $E\left(X \middle| X > x_q\right)$ και $Var\left(X \middle| X > x_q\right)$.

Στην πραγματικότητα, για τις μικρές τιμές q, όταν η επιρροή της υπό συνθήκη διακύμανσης είναι πολύ σημαντική η συνάρτηση TVP κατεβαίνει. Ταυτόχρονα, για σχετικά υψηλές πιθανότητες η υπό όρους προσδοκία αυξάνεται και ως εκ τούτου η τιμή του ασφαλίστρου TVP αρχίζει να ανεβαίνει ραγδαία. Όσον αφορά τον ασφαλιστικό κλάδο, βλέπουμε ότι τα συγκεκριμένα αποτελέσματα μας οδηγούν σε ένα σημαντικό γεγονός. Υποθέτοντας ότι η επιρροή της διακύμανσης της ουρά είναι σημαντική, υπάρχει κάποια βέλτιστη τιμή για το q και ως εκ τούτου ένα ποσοστημόριο X_q που ελαχιστοποιεί την τιμή του TVP. Με άλλα λόγια, μια ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να περιορίσει τον κίνδυνο της στο ελάχιστο επιλέγοντας το παραπάνω X_q ποσοστημόριο. Αυτό συμβαίνει όταν η εταιρεία ακολουθεί την πολιτική κάποιας κατώτατης τιμής (*deductible*) ή θέλει να διατηρήσει τα ίδια ποσοστά στο πλαίσιο των συμβολαίων αντασφάλισης. Το Διάγραμμα 3.4 συγκρίνει TVP για διαφορετικές τιμές του α με άλλα γνωστά μέτρα κινδύνου. Στις σημερινές ανταγωνιστικές και προσανατολίσμένες στις επενδύσεις αγορές κάθε κομμάτι του παρέχει πληροφορίες σχετικά με τον κίνδυνο, στον οποίο η ασφαλιστική εταιρεία είναι εκτεθειμένη μπορεί να είναι κρίσιμης σημασίας για τους φορείς λήψης αποφάσεων. Μία άλλη αρχή πριμοδότησης που έχει προταθεί, ονομάζεται ασφάλιστρο διακύμανσης ουράς TVP, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ένα είδος γενίκευσης του ασφαλίστρου διακύμανσης. Το TVP λαμβάνει υπόψη το φορτίο κινδύνου, καθώς είναι ανάλογο προς την υπό συνθήκη διακύμανση του κινδύνου. Κύριες εφαρμογές αυτού του ασφαλίστρου είναι να παρέχει μια εκτίμηση του κινδύνου σε περιπτώσεις όπου οι διαχειριστές κινδύνου ασχολούνται με τους κινδύνους που υπερβαίνουν ένα ορισμένο όριο (πολιτικές με αντασφαλιστικές συμβάσεις). Οι ασφαλίσεις ζημιών είναι γνωστό ότι έχουν σημαντικές διασπορές. Οπότε, η συγκεκριμένη πριμοδότηση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν η μεταβλητότητα κατά μήκος της δεξιάς ουρά είναι ζωτικής σημασίας. Επιπλέον, σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, σε περιπτώσεις όπου η συμβολή της ουράς διακύμανσης στην TVP είναι σημαντική, υπάρχει κάποιο βέλτιστο όριο, έτσι ώστε με την επιλογή αυτή, μια ασφαλιστική εταιρεία ελαχιστοποιεί τον κίνδυνό της.

3.4 Τα περιορισμένα μέτρα κινδύνου LTCE και LTSD

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με δύο νέα μέτρα κινδύνου, το LTCE και το LTSD. Η μελέτη μας είναι ορμώμενη και βασίζεται στην εργασία των Furman και Furman (2010). Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε με Y το σύνολο των (αναλογιστικών) κινδύνων. Για την τυχαία μεταβλητή X έχουμε $0 \leqslant X \in Y$ με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Η συνάρτηση $H: Y \Rightarrow [0, \infty]$ αναφέρεται ως μέτρο κινδύνου και ορίζεται ως το μετρο του κινδύνου που εμπεριέχεται στο X. Με έναν αρκετά σημαντικό αριθμό μέτρων κινδύνου έχουμε ασχοληθεί στο δεύτερο και στο τρίτο κεφάλαιο. Υποθέτουμε ότι $0 < q < p < 1$ και το $X \in Y$ έχει συνεχή και γνησίως αύξουσα αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις ο βαθμός επικινδυνότητας του στρώματος ($VaR_q[X], VaR_p[X]$) της ασφαλιστικής σύμβασης πρέπει να μετρηθεί (σίγουρα το πλάτος του στρώματος $VaR_p[X] - VaR_q[X]$ είναι θετικό). Πράγματι, ο αριθμός των ορίων των ανώτατων ασφαλισμένων ποσών σε ένα συμβόλαιο είναι συχνά περισσότερα από ένας. Αυτός είναι ο λόγος που μπορεί να υπάρχουν πολλές εταιρείες αντασφάλισης, οι οποίες καλύπτουν το ίδιο ασφαλισμένο αντικείμενο. Επίσης, υπάρχει η επονομαζόμενη “περιορισμένη χωρητικότητα” στην ασφαλιστική βιομηχανία για την απορρόφηση ζημιών που προκύπτουν από, για παράδειγμα, τρομοκρατικές επιθέσεις και καταστροφές. Στο πλαίσιο των ανωτέρω γεγονότων, η απρόβλεπτη φύση της απειλής και το μέγεθος των ζημιών καθιστούν απίθανο η ασφαλιστική βιομηχανία να μπορεί να προσθέσει αρκετή χωρητικότητα για την κάλυψή τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα ασφάλιστρα TCE και TSD δεν μπορούν να δώσουν λύση (περιέχουν μόνο ένα κατώφλι x_q), καθώς το προαναφερθέν ζεύγος των μέτρων κινδύνου είναι άχρηστο όταν, ας πούμε, οι προσδοκίες των υποκείμενων κινδύνων προσεγγίζουν το άπειρο, κάτι το οποίο μπορεί σίγουρα να συμβεί στις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Παρατήρηση 3.2 Το προαναφερθέν μέτρο κινδύνου $H: Y \Rightarrow [0, \infty]$ χρησιμοποιείται συχνά στην τιμολόγηση ασφαλιστικών συμβολαίων. Ως εκ τούτου τα περιορισμένα TCE και TSD χρησιμεύουν για τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων, όταν θέλουμε να τα περιορίσουμε ανάμεσα σε δύο τιμές, έχοντας ουσιαστικά ένα κατώτατο και ένα ανώτατο φράγμα. Ακολουθούν οι ορισμοί αυτών των δύο μέτρων κινδύνου.

Ορισμός 3.10 Θεωρούμε τα $x_q = VaR_q[X]$ και $x_p = VaR_p[X]$, για $0 < q < p < 1$. Τότε τα LTCE και LTSD ορίζονται με τον εξής τρόπο:

$$LTCE_{q,p}[X] = E[X \mid x_q < X < x_p] \tag{3.12}$$

και

$$LTSD_{q,p}[X] = E[X \mid x_q < X < x_p] + \alpha Var^{1/2}[X \mid x_q < X < x_p] \tag{3.13}$$

αντίστοιχα.

Τα TCE και TSD αποτελούν ειδική περίπτωση των περιορισμένων LTCE και LTSD. Από αυτή την οπτική γωνία τα ασφάλιστρα των Σχέσεων (3.12) και (3.13) είναι περισσότερο χρήσιμα σε κατανομές με βαριά ουρά, στις οποίες δεν έχουν εφαρμογή τα TCE και TSD. Για $k = 1, 2, \ldots$, έχουμε

$$E[X^\kappa \mid x_q < X < x_p] = \frac{F(x_p)E[X^\kappa \mid X \le x_p] - F(x_q)E[X^\kappa \mid X \le x_q]}{F(x_p) - F(x_q)} < \infty, \tag{3.14}$$

ανεξαρτήτως της κατανομής του X.

Παραθέτουμε κάποιες ιδιότητες που ικανοποιεί το ασφάλιστρο LTSD.

1. Προσθετικότητα ως προς σταθερά (*Translativity*). Για κάθε πραγματικό αριθμό $c > 0$, ισχύει:

$$LTSD_{q,p}[X + c] = LTSD_{q,p}[X] + c.$$

2. Θετική ομοιογένεια (*Positive homogeneity*). Για κάθε πραγματικό αριθμό $c>0$, έχουμε το εξής:

$$LTSD_{q,p}[cX] = cLTSD_{q,p}[X].$$

3. Στρώμα ισοτιμίας (*Layer Parity*). Καλούμε τα $X \in Y$ και $\Omega \in Y$ στρώματα ισοδυναμίας, εάν για κάποια $0<q<p<1$, τέτοια ώστε $x_q = \omega_q, x_p = \omega_p$ και για κάθε ζεύγος $\{(t_1,t_2): q < t_1 < t_2 < p\}$ ισχύει ότι $P[x_{t_1} < X < x_{t_2} = P[\omega_{t_1} < \Omega < \omega_{t_2}]$.. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$LTSD_{t_1,t_2}[X] = LTSD_{t_1,t_2}[Y].$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι ίσως η σημαντικότερη, καθώς μας δείχνει ότι το LTSD ως μέτρο κινδύνου εξαρτάται μόνο απο την αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Παρατήρηση 3.3 Παρόλο που η αναζήτηση πρωτότυπων μεθόδων υπολογισμού του βαθμού επικινδυνότητας ενός αναλογιστικού κινδύνου είναι πολύ σημαντική διαδικασία, η θεωρητική προσέγγιση των πραγματικών δεδομένων δεν είναι λιγότερο σημαντική. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούμε να αντλήσουμε από τις διατριβές των Landsman και Valdez (2005), Chiragiev και Landsman (2007).

Το μέτρο κινδύνου TSD βρίσκει μεγάλη χρήση στις ελλειπτικές κατανομές (Furman και Landsman (2006)). Δυστυχώς όμως, όλα τα μέλη των ελλειπτικών κατανομών είναι συμμετρικά. Αντίθετα, οι ασφαλιζόμενοι κίνδυνοι είναι μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με θετική λοξότητα. Η ανάγκη ύπαρξης ενός άλλου είδους κατανομών οδήγησε στο μοντέλο της εκθετικής διασποράς, αποτελούμενο από πολλές γνωστές κατανομές, όπως η κατανομή Γάμμα και η κανον ική. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν κατάλληλα μοντέλα για την περιγραφή της συμπεριφπράς των ασφαλιστικών κινδύνων. Η καλύτερη τακτική πάντως είναι να λαμβάνουμε υπόψη τόσο το TSD, όσο και το LTSD για την ορθή διανομή των κινδύνων. Παρακάτω παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για να αποσαφηνίσουμε τα TSD και TCE με τα περιορισμένα TSD και TCE.

Παράδειγμα 3.2 Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει εμφανίσει χίλιες απώλειες. Για τον υπολογισμό του 90% TCE χρειαζόμαστε τις εκατό μεγαλύτερες τιμές. Στον πίνακα που ακολουθεί έχουμε κατατάξει σε αύξουσα σειρά τις εκατό μεγαλύτερες τιμές των απωλειών. Πρέπει να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό των 90% TCE και 90% TSD λαμβάνουμε υπόψιν μας αυτές τις εκατό μεγαλύτερες παρατηρήσεις. Αντίθετα, για τα περιορισμένα TCE και TSD με $q=0.9$ και $p=0.99$ λαμβάνουμε υπόψιν μας τις τιμές από την 900ή έως την 990ή (τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω της μεθόδου Monte Carlo για Κανονική κατανομή με μέση τιμή 33 και διακύμανση 109^2).

Σημείωση: Η μέθοδος Monte Carlo δίνει κάποιες ενδεικτικές τιμές (για διαφορετικές τιμές από μέθοδο Monte Carlo βλέπε Hardy (2006). Όπως ήταν αναμενόμενο όμως, βλέπουμε ότι η μέση τιμή, διακύμανση, διασπορά και τυπική απόκλιση μας δίνουν σχεδόν τις ίδιες τιμές τις δύο αυτές φορές. Φυσικά όσο περισσότερο αυξάνουμε το πλήθος των παρατηρήσεων, τόσο περισσότερο τείνουν να ταυτιστούν τα αποτελέσματα. Επίσης αύξηση της τιμής των παρατηρήσεων οδηγεί σε αρτιότερα συμπεράσματα. Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι τα δεδομένα στην πραγματικότητα δεν ακολουθούν στο ακέραιο μια κατανομή, αλλά βλέπουμε απλά μια τάση για κάποια κατανομή. Αυτό έχει ως επακόλουθο να υπάρχει μια σχετική αβεβαιότητα στις εμφανιζόμενες απώλειες και κάποιος κίνδυνος, ο οποίος δεν δύναται να εξαλειφθεί, αλλά οι εταιρείες προσπαθούν να τον περιορίσουν.

$L_{(901)}$ to $L_{(910)}$									
168.2	169.5	170.1	170.7	171.9	172.3	172.7	173.6	174.4	175.8
$L_{(911)}$ to $L_{(920)}$									
176.4	176.7	177.3	178.9	179.4	179.6	180.8	181.5	181.9	182.6
$L_{(921)}$ to $L_{(930)}$									
183.3	185.6	186.3	188.1	189.2	190.3	191.1	191.7	192.5	193.8
$L_{(931)}$ to $L_{(940)}$									
194.1	194.6	195.9	196.8	198.2	199.1	199.8	200.7	201.8	202.6
$L_{(941)}$ to $L_{(950)}$									
203.8	204.7	204.9	206.2	206.9	207.3	207.7	208.4	208.9	209.2
$L_{(951)}$ to $L_{(960)}$									
209.7	211.3	212.9	214.6	216.9	218.7	219.3	222.3	224.7	228
$L_{(961)}$ to $L_{(970)}$									
229.7	231.3	233.7	234.8	235.7	236.1	237.9	238.3	239.4	240
$L_{(971)}$ to $L_{(980)}$									
242.6	244.8	249.7	251.6	253.7	256.7	258.9	260.3	263.4	264.5
$L_{(981)}$ to $L_{(990)}$									
267.2	269.1	271.4	273.8	275.6	277.9	279.3	281	283.4	285.9
$L_{(991)}$ to $L_{(1000)}$									
287.6	295.2	298.7	305.6	311.5	319.6	329.7	334.1	342.9	359.4

Πίνακας 3.5. Οι 100 μεγαλύτερες τιμές , προερχόμενες από μέθοδο Monte Carlo με 1000 παρατηρήσεις για Κανονική κατανομή $N(33, 109^2)$.

3.5 Το εκθετικό μοντέλο διασποράς

Η ανάπτυξη μοντέλων εκθετικής διασποράς (*Exponential Dispersion Models*) έγινε μέσω της διατριβής Jorgensen (1997). Σήμερα, τα EDMs (*Exponential Dispersion Models*) διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην αναλογιστική επιστήμη και στα οικονομικά μαθηματικά. Η ιδιαιτερότητα που χαρακτηρίζει τη στατιστική μοντελοποίηση των αναλογιστικών θεμάτων είναι ότι οι υποκείμενες κατανομές έχουν ως επί το πλείστον μη αρνητικό στήριγμα και πολλά μέλη της EDM παρουσιάζουν αυτό το σημαντικό φαινόμενο. Είμαστε τώρα σε θέση να αξιολογήσουμε το περιορισμένο μέτρο κινδύνου LTSD στο πλαίσιο των EDMs. Για $0<q<p<1$, δηλώνουμε με (x_q, x_p) ένα αυθαίρετο στρώμα που έχει σημείο προσάρτησης x_q. Επίσης,

$$h(x_q, x_p; \theta, \lambda) = \frac{d}{d\theta}\log\left(F(x_p; \theta, \lambda) - F(x_q; \theta, \lambda)\right).$$

Έχουμε

$$h(x_q, x_1; \theta, \lambda) = \frac{d}{d\theta}\log\left(\overline{F}(x_q; \theta.\lambda)\right) = h(x_q; \theta, \lambda)$$

και

$$h(x_0, x_p; \theta, \lambda) = -\frac{d}{d\theta}\log\left(\overline{F}(x_p;\theta,\lambda)\right) = -h(x_p;\theta,\lambda).$$

Έτσι,

$$h(x_q, x_p; \theta, \lambda) = \frac{\overline{F}(x_q;\theta,\lambda)}{\overline{F}(x_q;\theta,\lambda) - \overline{F}(x_p;\theta,\lambda)} h(x_q;\theta,\lambda)$$
$$- \frac{\overline{F}(x_p;\theta,\lambda)}{\overline{F}(x_q;\theta,\lambda) - \overline{F}(x_p;\theta,\lambda)} h(x_p;\theta,\lambda).$$

Περισσότερες πληροφορίες και απόδειξη των παραπάνω τύπων δίνονται στη διατριβή Furman και Furman (2010).

Θεώρημα 3.1 (βλέπε Furman και Furman (2010)). Υποθέτοντας ότι έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών, που παράγει EDM (Εκθετικό Μοντέλο Διασποράς), τότε ο υπολογισμός του μέτρου κινδύνου LTCE γίνεται με τον εξής τρόπο:

Για EDMY που ακολουθεί $ED(\mu, \sigma^2)$, έχουμε

$$LTCE_{q,p}[Y] = \mu + \sigma^2 h(x_q, x_p; \theta, \lambda).$$

Σημείωση: Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι αν το p τείνει στο 1 για τον υπολογισμό του LTCE προκύπτει το TCE.

$$\lim_{p\to 1} LTCE_{q,p}[Y] = \mu + \sigma^2 h(y_q;\theta,\lambda) = TCE_q[Y],$$

υπό την προϋπόθεση ύπαρξης του ορίου.

Θεώρημα 3.2 (βλέπε Furman και Furman (2010)). Υποθέτοντας ότι έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών, που παράγει EDM, τότε ο υπολογισμός του μέτρου κινδύνου LTSD γίνεται με τον εξής τρόπο:

Για EDMY που ακολουθεί $ED(\mu, \sigma^2)$, έχουμε

$$LTSD_{q,p}[Y] = LTCE_{q,p} + \alpha\sqrt{\sigma^2 \frac{d}{d\theta} LTCE_{q,p}[Y;\theta,\lambda]}.$$

Παράδειγμα 3.3 Για Y να είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ έχουμε

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}y^2\right)\exp\left(\frac{1}{\sigma^2}\left(\mu y - \frac{1}{2}\mu^2\right)\right),$$

όπου $y \in \mathbb{R}$.

Θέτοντας $\theta = \mu$ και $\lambda = 1/\sigma^2$ και παρατηρούμε ότι είναι μια EDM με $\kappa(\theta) = \theta^2/2$. Έστω ότι με $\phi(.)$ και $\Phi(.)$ δηλώνουμε την συνάρτηση πυκνότητας και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 μπορούμε να υπολογίσουμε το περιορισμένο TCE για τον κίνδυνο Y μέσω της σχέσης:

$$LTCE_{q,p}[Y] = \mu + \sigma\frac{\phi(\sigma^{-1}(y_q-\mu)) - \phi(\sigma^{-1}(y_p-\mu))}{\Phi(\sigma^{-1}(y_p-\mu)) - \Phi(\sigma^{-1}(y_q-\mu))}.$$

Όταν το p τείνει στο 1, έχουμε

$$\lim_{p\to 1} LTCE_{p,q}[Y] = \mu + \sigma\frac{\phi(\sigma^{-1}(y_q-\mu))}{1-\Phi(\sigma^{-1}(y_q-\mu))} = TCE_q[Y].$$

Επιπλέον, θέτοντας $z_q = \dfrac{y_q-\mu}{\sigma}$ και $z_p = \dfrac{y_p-\mu}{\sigma}$ προκύπτει

$$\sigma^2\frac{d}{d\theta}LTCE_{q,p}[Y;\theta,\lambda] = \sigma^2\left(1 + \frac{\phi(z_q)z_q - \phi(z_p)z_p}{\Phi(z_p)-\Phi(z_q)} - \left(\frac{\phi(z_q)-\phi(z_p)}{\Phi(z_p)-\Phi(z_q)}\right)^2\right).$$

Οπότε το μέτρο κινδύνου LTSD είναι το εξής:

$$LTSD_{q,p}[Y] = \mu + \sigma\frac{\phi(z_q)-\phi(z_p)}{\Phi(z_p)-\Phi(z_q)} + \alpha\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{\phi(z_q)z_q - \phi(z_p)z_p}{\Phi(z_p)-\Phi(z_q)} - \left(\frac{\phi(z_q)-\phi(z_p)}{\Phi(z_p)-\Phi(z_q)}\right)^2\right)}.$$

Στη συνέχεια προχωρούμε με τις κατανομές Γάμμα, που έχουν εφαρμοστεί ευρέως σε διάφορους τομείς της αναλογιστικής επιστήμης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτές οι συναρτήσεις κατανομής έχουν θετικό στήριγμα και θετική λοξότητα, κάτι πολύ σημαντικό στη μοντελοποίηση ασφαλιστικών απωλειών. Τέτοιες συναρτήσεις έχουν καλά μελετηθεί και μοιράζονται πολλές μαθηματικές ιδιότητες που διευκολύνουν τη χρήση τους. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών σε κατανομές Γάμμα για τη μοντελοποίηση ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων (βλέπε Hürlimann (2001), Furman και Landsman (2005)).

Παράδειγμα 3.4 Υποθέτοντας ότι ο κίνδυνος X ακολουθεί κατανομή Γάμμα μα παραμέτρους γ και β έχουμε

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}e^{-\beta x}x^{\gamma-1}\beta^{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1}\exp(-\beta x+\gamma\log(\beta)),$$

με $x>0$.

Η κατανομή Γάμμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια προσθετική EDM με τον ακόλουθο τρόπο:

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}\exp(\theta x+\lambda\log(-\theta)),$$

όπου $x>0$ και $\theta<0$.

Για το X έχουμε $E(X)=-\dfrac{\lambda}{\theta}$ και $Var(X)=\lambda/\theta^2$. Επίσης, θέτουμε $\theta=-\beta$, $\lambda=\gamma$ και $\kappa(\theta)=-\log(-\theta)$. Με χρήση του Θεωρήματος 3.1 είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την τιμή του LTCE.

$$LTCE_{q,p}[X]=-\frac{\lambda}{\theta}\frac{F(x_p;\theta,\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}.$$

Όταν το p τείνει στο 1 έχουμε

$$\lim_{p\to 1}\left(-\frac{\lambda}{\theta}\right)\frac{F(x_p;\theta,\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}=-\frac{\lambda}{\theta}\frac{\overline{F}(x_q;\theta,\lambda+1)}{\overline{F}(x_q;\theta,\lambda)}=TCE_q[X].$$

Με χρήση του Θεωρήματος 3.2 προκύπτει

$$\frac{d}{d\theta}LTCE_{q,p}[X;\theta,\lambda]=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\lambda}{\theta}\frac{F(x_p;\theta,\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{\theta^2}\frac{F(x_p;\theta.\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}$$

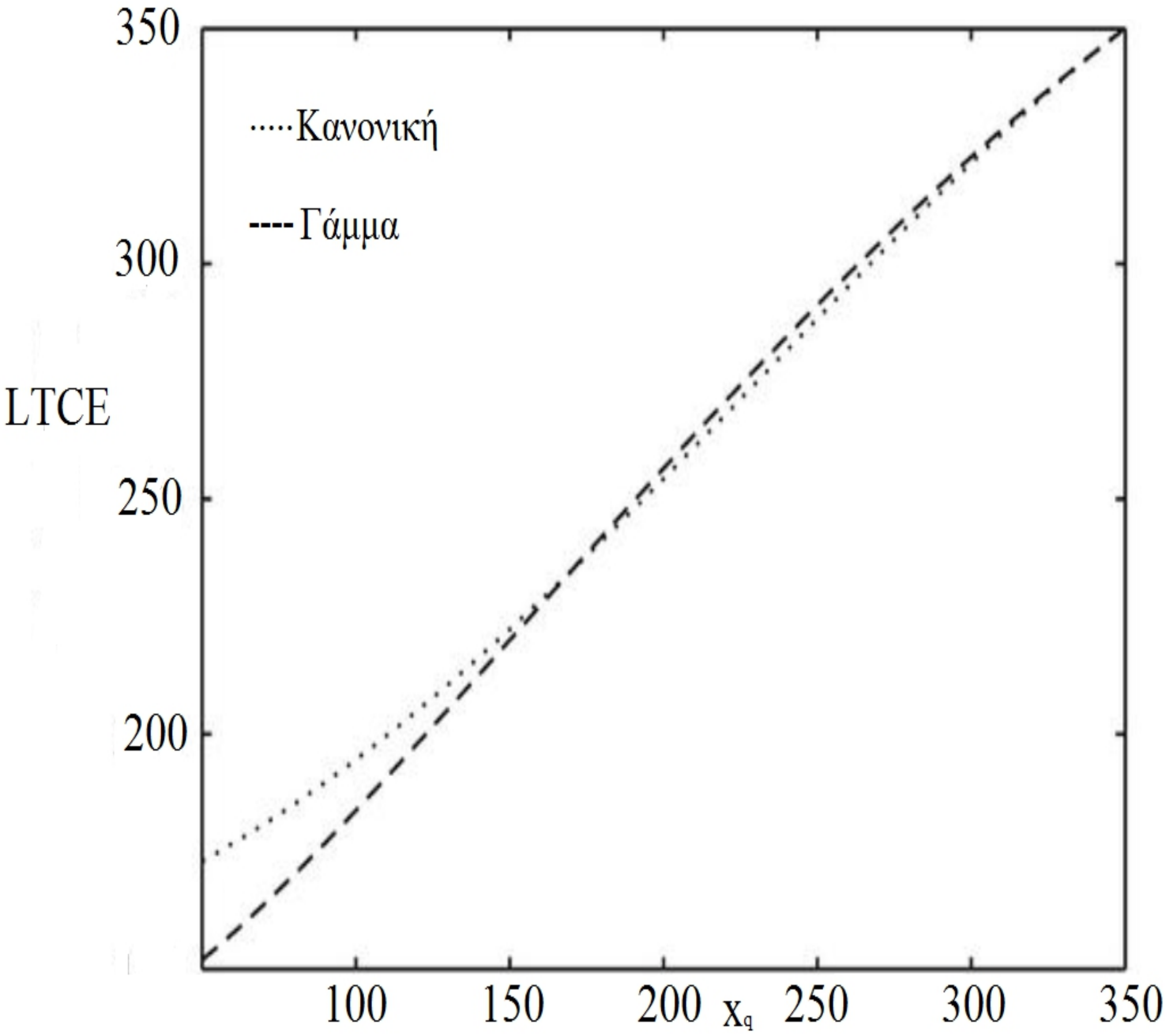
$$-\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\frac{F(x_p;\theta,\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}\right).$$

Τέλος, το μέτρο κινδύνου LTSD δίνεται ως εξής:

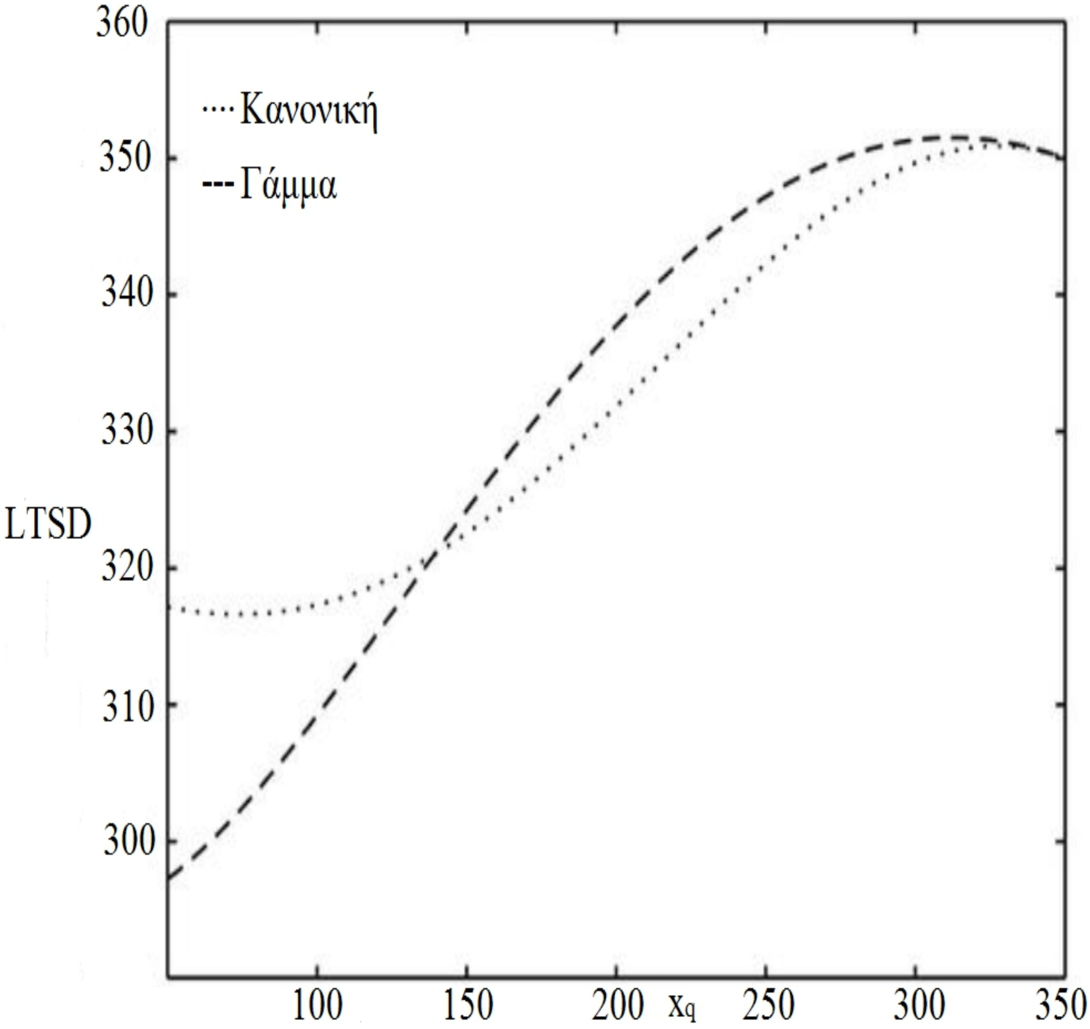
$$LTSD_{q,p}[X]=\left(-\frac{\lambda}{\theta}\right)\frac{F(x_p;\theta,\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}$$

$$+\alpha\sqrt{\frac{\lambda}{\theta}\left((\lambda+1)\frac{F(x_p;\theta,\lambda+2)-F(x;\theta,\lambda+2)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}-\lambda\left(\frac{F(x_p;\theta,\lambda+1)-F(x_q;\theta,\lambda+1)}{F(x_p;\theta,\lambda)-F(x_q;\theta,\lambda)}\right)^2\right)}.$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε κινδύνους που ακολουθούν την Κανονική κατανομή και κινδύνους που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα, με την ίδια μέση τιμή και διακύμανση. Διερευνάμε τη συμπεριφορά τους στο διάστημα (t,350], με $50<t<350$. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στα σχήματα που ακολουθούν (επίσης βλέπε Furman και Furman (2010)).



Πίνακας 3.6. Διάγραμμα που απεικονίζει τη συμπεριφορά του LTCE για κινδύνους που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα και την Κανονική κατανομή.



Πίνακας 3.7. Διάγραμμα που απεικονίζει τη συμπεριφορά του LTSD για κινδύνους που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα και την Κανονική κατανομή.

3.6 Συμπεράσματα

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία απορρέει το συμπέρασμα ότι η σωστή επιλογή των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται ο υπολογισμός των ασφαλίστρων που θα απαιτηθούν είναι κομβικής σημασίας. Ακόμα, η τακτική της εταιρείας για την αντιμετώπιση του κινδύνου εξαρτάται από αυτόν τον υπολογισμό. Είδαμε ότι τα ασφάλιστρα που επηρεάζονται από τη δεξιά ουρά της κατανομής οδηγούν τις περισσότερες φορές σε καλύτερα συμπεράσματα και αποτελέσματα, σε σύγκριση με πιό "παραδοσιακούς" τρόπους υπολογισμού ασφαλίστρων.

Παρατηρούμε ότι η επιλογή του σωστού ασφαλίστρου και σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αρκετά πολύπλοκη και χρονοβόρα. Απαιτείται μεγάλη προσοχή στην επιλογή των ασφαλίστρων με βάση την συμπεριφορά της δεξιάς ουράς της κατανομής. Η μέση τιμή της κατανομής πολλές φορές, όπως είδαμε δεν μας βοηθάει. Ένας τρόπος αντιμετώπισης αυτής της περίπτωσης, είδαμε πως είναι να λάβουμε υπόψιν μας την περιορισμένη μέση τιμή (ουσιαστικά απλουστεύοντας θα λέγαμε τη μέση τιμή της ουράς της κατανομής που έχουμε (ασφάλιστρο TCE). Κάποιες φορές είδαμε όμως ότι ούτε με το συγκεκριμένο ασφάλιστρο λύνεται το πρόβλημα. Όπως είδαμε μπορεί δύο κατανομές να έχουν την ίδια μέση τιμή στις ουρές τους. Τότε έχουμε ασφάλιστρα όπως για παράδειγμα το TSD που επηρεάζεται από την τυπική απόκλιση της ουράς της εκάστοτε κατανομής. Μπορούμε επίσης να περιορίσουμε τα ασφάλιστρα ανάμεσα σε δύο κατώφλια, σε περιπτώσεις που δεν επιθυμούμε να λάβουμε υπόψιν μας πάρα πολύ μεγάλες ακραίες τιμές. Είναι σαφές ότι η επιλογή για το επιθυμητό κατώφλι είναι κρίσιμη διαδικασία. Βέβαια πρέπει να έχουμε πάντα κατά νου το γεγονός ότι καμία κατανομή δεν προσεγγίζει επ'ακριβώς τα πραγματικά δεδομένα, όπως και την τυχαιότητα που επικρατεί σε κάθε κίνδυνο.

Παράρτημα

Κατανομή Pareto

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}},$$

$$F(x) = 1-\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha},$$

$$VaR_p(X) = \theta\left[(1-p)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right],$$

$$E[X^k] = \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \text{για } -1<k<\alpha,$$

$$E[X^k] = \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}, \qquad \text{για } k \text{ θετικός ακέραιος},$$

$$TVaR_p(X) = VaR_p(X)+\frac{\theta(1-p)^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha-1}, \qquad \alpha>1.$$

Κατανομή Γάμμα

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{x}{\theta}}}{x\Gamma(\alpha)},$$

$$F(x) = \Gamma(\alpha; x/\theta),$$

$$E[X^k] = \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \text{για } k>-\alpha,$$

$$E[X^k] = \theta^k(\alpha + k - 1)...a, \qquad \text{για } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Κατανομή Weibull

$$f(x) = \frac{t(x/\theta)^t e^{-(x/\theta)^t}}{x},$$

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^t},$$

$$VaR_p(X) = \theta[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{t}},$$

$$E[X^k] = \theta^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{t}\right), \qquad \text{για } k > -t.$$

Εκθετική κατανομή

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta},$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}},$$

$$VaR_p(X) = -\theta \ln(1-p),$$

$$E[X^k] = \theta^k \Gamma(k+1), \qquad \text{για } k > -1,$$

$$TVaR_p(X) = -\theta \ln(1-p) + \theta.$$

Λογαριθμοκανονική κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = \frac{\phi(z)}{\sigma x}, \qquad \text{όπου } z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma},$$

$$F(x) = \Phi(z),$$

$$E[X^k] = \exp\left(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2\right).$$

Κατανομή Βήτα

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a} (1-u)^{b-1} \frac{1}{x}, \qquad \text{για } 0 < x < \theta, \quad u = \frac{x}{\theta},$$

$$F(x) = \beta(a,b;u),$$

$$E[X^{k}] = \frac{\theta^{k}\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(a+b+k)}, \qquad \text{για } k > -\alpha,$$

$$E[X^{k}] = \frac{\theta^{k}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+k-1)}, \qquad \text{για } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Δαμιανού, Χ. και Κούτρας, Μ. (2003). *Εισαγωγή στη Στατιστική*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Μπατσίδης, Α. (2005). *Θέματα Πολυδιάστατης Ανάλυσης με Ελλειπτικές Κατανομές και Μονότονα Ελλιπή Δεδομένα*, Διδακτορική διατριβή.

Χαραλαμπίδης, Χ. (2000). *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Ξενόγλωσση

Blattberg, R. and Gonedes, N. (1974). "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stick Prices", *Journal of Business*, Volume 47, Issue 2.

Chiragiev, A. and Landsman, Z. (2007). "Multivariate Pareto portfolios: TCE-based capital allocation and divided differences", *Scandinavian Actuarial Journal*, 261-280.

Consul, P.C. (1990). "A Model for Distributions of Injuries in Auto-Accidents", *Journal of the Swiss Association of Actuaries*, 161-68.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks*, John Wiley and Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chiechester, West Sussex, England.

Eales, B. (1995). *Financial Risk Management*, McGraw-Hill, London.

Embrechts, P. and Veraverbeke, N. (1982). "Estimates for the Probability of Ruin with Special Emphasis on the Possibility of Large Claims", *Insurance: Mathematics and Economics*, 1: 55-72.

Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (2001). *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, Risk Management: Value at Risk and Beyond*, edited by Dempster, M. and Moffatt, H.K., Cambridge University Press.

Fang, K.T., Kotz, S. and NG, K.W. (1987). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, London: Chapman and Hall.

Figari, F. and Paulus, A. (2012). “The impact of indirect taxes and imputed rent on inequality: a comparison with cash transfers and direct taxes in five EU countries”, Amsterdam, AIAS, GINI Discussion Paper 28.

Follmer, H. and Schied, A. (2002). *Convex measures of risk and trading constrains. Finance and Stochastics*, 6, 429-447.

Furman, O. and Furman, E. (2010). “On some layer-based risk measures with applications to exponential dispersion models”, *Journal of Probability and Statistics*, Article ID 357321, 1-19.

Furman, E. and Landsman, Z. (2005). “Risk Capital Decomposition for a Multivariate Dependent Gamma Portfolio”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 37, 635-649.

Furman, E. and Landsman, Z. (2006). “Tail variance premium with applications for elliptical portfolio of risks”, *ASTIN Bulletin*, 36, 433-462.

Furman, E. and Landsman, Z. (2006). “On some risk-adjusted tail-based premium calculations principples”, *Journal of Actuarial Practice* 13, 5-20.

Goovaerts, M.J., De Vijlder, F.E. and Haezendonck, J. (1984). *Insurance Premiums: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam.

Guerrero-Cusumano, Jose, L. (1998). “Measures of dependence for the multivariable t distribution with applications to the stock market”, *Communications in Statistics- Theory and Methods*, 27, 2985-3006.

Hardy, M. (2006). “An Introduction to risk measures for actuarial applications”, reproduced by the casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries with permission of the author.

Hurlimann, W. (2001). “Analytical evaluation of economic risk capital for portfolios of gamma risks”, *Astin Bulletin*, vol. 36, no.2, 433-462.

Jorgensen, B. (1997). *The Theory of Dispersion Models, vol. 76 of Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman and Hall, London, UK.

Jorion, P. (2000). *Value at Risk*. McGraw-Hill, New York.

Kaas, R., Goovaerts, M.J., Dhaene, J. and Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Landman, Z. and Valdez, E. (2003). “Tail Conditional Expectation for Elliptical Distributions”, *North American Actuarial Journal*, 7(4).

Landman, Z. and Valdez, E. (2005). “Tail Conditional Expectation for Exponential Dispersion Models”, *ASTIN Bulletin*, 35(1), 189-209.

Laurent, A.G. (1974). “The interesection of random spheres and the non-central radial error distribution for spherical models”, *Annals of Statistics*, 2, 182-189.

Lowe, S.P. and Stanard, J.N. (1996). “An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer”, *Transactions of the XXVII, ASTIN Colloquium*, Copenhagen, Denmark.

McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.

Panjer, H. (2002). “Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates”, *Institute of Insurance and Pension Research*, University of Waterloo Research Report 01-15.

Philbrick, S.W. (1994). “Accounting for Risk Margins”, *Casualty Actuarial Society*, Forum 1 (Spring): 4-87.

Ramsey, C.M. (1993). “Loading Gross Premiums for Risk without Using Utility Theory”, *Transactions of the society of Actuaries XLV*, 305-349.

Rootzen, H. and Kluppelberg, C. (1999). “A single number cannot hedge against economic catastrophs”. *Ambio-Royal Swedish Academy of Science* 8, 550-555.

Valdez, E. and Chernich, A. (2003). “Wang's Capital Allocation Formula for Elliptically Contoured Distributions”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 517-532.

Valdez, E. (2004). *Tail Conditional Variance for Ellirtically Contoured Distributions*, working paper, University of New South Wales, Sydney, Australia.

Wang, S. (1998). “An actuarial Index of the right-tail risk”, *North American Actuarial Journal* 2, 88-101.

Wang, S. and Young, V.R. (1998). “Ordering of Risks: Utility Theory Versus Yaari's Dual Theory of Risk”, *Insurance: Mathematics and Economics*.

Wang, S. (2002). “A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks”, *ASTIN Bulletin*, 32, 213-234.

Williams, A., Smith, M. and Young, P. (1999). *Risk management and insurance*, McGraw-Hill International Editions.

Willmot, G. (1987). “The Poisson-Inverse Gaussian as an Alternative to the Negative Binomial”, *Scandinavian Actuarial Journal*, 113-127.

Zitikis, R. and Furman, E. “Weighted Premium Calculation Principles”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(1): 459-465.