ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Π.Μ.Σ. στην "Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου "

"Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος σε Επενδυτικές Στρατηγικές Συνταξιοδοτικών Σχημάτων"

Παρασκευή Γ. Λώλου

Πειραιάς,
Φεβρουάριος 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

Department of Statistics and Insurance Science

M.Sc. in "Actuarial Science and Risk Management"

"An optimal policy of a pension fund using stochastic optimal control of annuity contracts"

Paraskevi G. Lolou

Piraeus,

February 2016

Στους γονείς μου,
Γιώργο και Γεωργία
και,
στην αδερφή μου Ευαγγελία

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μαχαιρά Νικόλαο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και την κυρία Βερροπούλου Γεωργία, Επίκουρη Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή διαπραγματεύεται διάφορα συνταξιοδοτικά σχήματα υπολογισμού των συντάξεων με τη βοήθεια στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου. Ιδιαίτερα, δείχνουμε πως η παραπάνω θεωρία ελέγχου εφαρμόζεται σε επενδυτικές στρατηγικές πριν και μετά τη συνταξιοδότηση. Η ανάλυση των παραπάνω γίνεται μέσω μαθηματικής προσέγγισης, παρουσιάζοντας αρχικά βασική θεωρία βέβαιων ραντών πληρωμής καθώς και μη βέβαιων ραντών ζωής. Αναλύονται βασικές έννοιες μη βέβαιων ραντών, όπως ο υπολογισμός της αναλογιστικής παρούσας αξίας που αποτελεί βασικότατη έννοια στο χώρο των συνταξιοδοτικών σχημάτων. Επίσης, παρουσιάζεται η θεωρία στοχαστικών διαδικασιών καθώς και αυτή των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, αφού είναι άμεσα συνυφασμένες με την τυχαιότητα των συνταξιοδοτικών καταβολών. Εξετάζεται η στοχαστική προσέγγιση στις καταβολές συντάξεων και μελετάται η στοχαστική βέλτιστη πολιτική πριν και μετά τη συνταξιοδότηση. Τέλος, παρουσιάζονται συγκεκριμένα συνταξιοδοτικά σχήματα και αναλύονται μέσω παραδειγμάτων.

Abstract

This dissertation is about various plans of pension calculation by the use of stochastic optimal control. Specifically, we demonstrate how the above theory of control is applied in investment strategies before and after retirement. The analysis of these issues is carried out via mathematical approach, after firstly introducing the basic theories of certain payment annuities and random life annuities. Basic principles of random annuities are described, as the calculation of the actuarial present value which is one of the most important measures for a pension plan. Moreover, the theory of stochastic processes is presented together with the stochastic differential equations, since those theories are directly connected with the randomness of pension payments. The stochastic approach in the annuity payments is examined, as well as the stochastic best practice before and after retirement. Finally, the most widely used pension schemes are described and some useful examples of them are given.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βασική ιδέα της σύνταξης στηρίζεται στην αποταμίευση και την επένδυση των εισφορών κατά τη διάρκεια του εργασιακού βίου, έτσι ώστε το άτομο να εξασφαλίσει οικονομικούς πόρους για την περίοδο κατά την οποία θα αποσυρθεί από την εργασία του, διατηρώντας το πρότερο επίπεδο διαβίωσης του.

Κάθε συνταξιοδοτικό ταμείο έχει ως βασικό σκοπό να εξασφαλίσει για τα μέλη του κάλυψη εναντίον των κινδύνων γήρατος, αναπηρίας και θανάτου, εξασφαλίζοντας παροχές και υπηρεσίες που αναπληρώνουν τη μείωση ή την απώλεια εισοδήματος από τη μη απασχόληση. Τα συνταξιοδοτικά ταμεία επιτυγχάνουν το σκοπό τους με την καταβολή συντάξεων γήρατος καθώς και άλλων συμπληρωματικών παροχών στα μέλη του ταμείου. Σε ό,τι αφορά τα περιουσιακά στοιχεία του συνταξιοδοτικού ταμείου, μεταβάλλονται διαρκώς λόγω των εκροών και των εισροών. Οι εισροές προέρχονται από εισφορές των μελών του ταμείου, τις εισφορές των εργοδοτών καθώς και τις επιπλέον προσόδους από τις επενδύσεις των περιουσιακών στοιχείων που έχουν σχηματιστεί από τις προηγούμενες εισφορές. Επιπρόσθετα στα έσοδα του ταμείου δύναται να συνεισφέρουν κοινωνικοί πόροι και κρατικές επιχορηγήσεις. Οι εκροές τέλος αποτελούνται κυρίως από τις συντάξεις των μελών του ταμείου αλλά και τα έξοδα λειτουργίας του.

Τα συνταξιοδοτικά ταμεία αποτελούν μια ιδιαίτερη μορφή της βασικής έννοιας και ασφάλισης φυσικών προσώπων. Μετά το Β’ παγκόσμιο πόλεμο παρουσιάστηκε μια ραγδαία ανάπτυξη των εν λόγω ταμείων στην Ευρώπη. Οι σημαντικές δημογραφικές αλλαγές όπως η αύξηση της αναμενόμενης ζωής των ανθρώπων, απόρροια και των σπουδαίων ιατρικών ανακαλύψεων, οδήγησε στην ευαισθητοποίηση της κοινωνίας για τις πολυπληθείς ομάδες ηλικιωμένων ατόμων. Στο τέλος του 20^{ου} αιώνα η ανάγκη για την ύπαρξη συνταξιοδοτικών ταμείων (δημόσιων και ιδιωτικών) θεωρούνταν δεδομένη σε όλες τις αναπτυγμένες χώρες του κόσμου.

Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχουν δύο τύποι συνταξιοδοτικών προγραμμάτων με βάση την προτεραιότητα ως προς τον καθορισμό των εισφορών ή των παροχών. Τα Προγράμματα Καθορισμένων Εισφορών (Defined Contribution Plans) και τα Προγράμματα Καθορισμένων Παροχών (Defined Payment Plans). Βέβαια συχνά υπάρχουν προγράμματα που συνδυάζουν τους δύο παραπάνω τύπους.

Το πρόβλημα επιλογής της καλύτερης επενδυτικής στρατηγικής για τους διαχειριστές των συνταξιοδοτικών ταμείων γίνεται ολοένα και πιο σημαντικό, ιδιαίτερα για καθορισμένες εισφορές [18] και ράντες ζωής [12]. Όσον αφορά την μεθοδολογία ο διαχειριστής μπορεί να χρησιμοποιήσει κλασσικά μαθηματικά εργαλεία όπως τη θεωρία χαρτοφυλακίου ή τον βέλτιστο έλεγχο [7], [26], [27] και [16], να λάβει υπόψη του τις συγκεκριμένες αναλογιστικές υποχρεώσεις και δικαιώματα που ενσωματώνονται σε ένα συνταξιοδοτικό κεφάλαιο, καθώς επίσης και τις επιπτώσεις ενός στοχαστικού περιβάλλοντος [19], [30]. Ένα σημαντικό παράδειγμα μιας τέτοιας υποχρέωσης είναι οι εγγυήσεις που δίνονται στους ασφαλισμένους μετά την συνταξιοδότησή τους.

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι να μελετήσει την επίδραση της εισαγωγής αυτού του είδους της εγγύησης στη βέλτιστη πολιτική ενός συνταξιοδοτικού κεφαλαίου, χρησιμοποιώντας το κλασσικό εργαλείο του στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου [31]. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ακριβείς λύσεις και να εξετάσουμε την επίδραση των εγγυήσεων μετά τη συνταξιοδότηση για δύο σημαντικές συναρτήσεις [31]. Ταυτόχρονα θα εξετάσουμε τις συνθήκες αξιοπιστίας της λεγόμενης ‘’life style strategy’’ [5]. Ειδικότερα η εργασία έχει την παρακάτω δομή:

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας αναλύονται οι ράντες πληρωμών στα συνταξιοδοτικά σχήματα. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται και επεξηγούνται βασικές έννοιες της στοχαστικής θεωρίας και ο τρόπος που αυτές ενσωματώνονται στα διάφορα συνταξιοδοτικά σχήματα. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικότερα συνταξιοδοτικά σχήματα και αναλύονται μέσω παραδειγμάτων. Εξετάζεται η στοχαστική προσέγγιση στις καταβολές συντάξεων και μελετάται η στοχαστική βέλτιστη πολιτική πριν και μετά τη συνταξιοδότηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Ράντες Πληρωμών σε Συνταξιοδοτικά Σχήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε στο πρώτο μέρος τις σίγουρες ράντες πληρωμών και στο δεύτερο μέρος τις ράντες πληρωμών ζωής. Μια ράντα είναι μια σειρά ισόποσων πληρωμών σε τακτά χρονικά διαστήματα. Παραδείγματα τέτοιων ραντών είναι για παράδειγμα οι τακτικές καταθέσεις σε λογαριασμό ταμιευτηρίου, οι μηνιαίες πληρωμές ασφαλιστικών και συνταξιοδοτικών πληρωμών. Οι ράντες ταξινομούνται από τη συχνότητα των ημερομηνιών πληρωμής. Οι πληρωμές (καταθέσεις) μπορεί να γίνουν εβδομαδιαία, μηνιαία, τριμηνιαία, ετήσια ή σε οποιοδήποτε άλλο χρονικό διάστημα. Η ετήσια δόση όπου οι πληρωμές της είναι εγγυημένες ότι θα γίνουν για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα ονομάζεται βέβαιη ράντα. Με τον όρο <<σταθερή ράντα>> εννοούμε την ράντα με σταθερές πληρωμές. Στις ενότητες που ακολουθούν θα δώσουμε τους ορισμούς των βασικών ραντών πληρωμών και ραντών ζωής.

I. Σίγουρες Ράντες Πληρωμών (Certain annuities)

1.1 ΛΗΞΙΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΡΑΝΤΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ

Μια ράντα σύμφωνα με την οποία οι πληρωμές γίνονται στο τέλος των χρονικών περιόδων ονομάζεται ληξιπρόθεσμη ράντα ή ράντα τακτικών πληρωμών [33].

Οι χρηματοροές που αντιπροσωπεύονται από την ράντα μπορεί να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα χρόνου, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1 παρακάτω:

$$\begin{array}{cccccl} & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \text{πληρωμές} \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n & \text{περίοδοι} \end{array}$$

(1.1)

Το πρώτο βέλος δείχνει την έναρξη της πρώτης περιόδου, στο τέλος της οποίας γίνεται η πρώτη πληρωμή. Το τελευταίο βέλος δείχνει την τελευταία περίοδο, αμέσως μετά την πληρωμή. Η παρούσα αξία της ράντας την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{1-v^n}{i}, \tag{1.2}$$

όπου $n,\ n \geq 1$, είναι οι περίοδοι, v ο συντελεστής προεξόφλησης και i το επιτόκιο.

Δηλαδή, η παρούσα αξία της ράντας είναι το άθροισμα των σημερινών τιμών κάθε μιας από τις n πληρωμές.

Παράδειγμα 1.1.1

Υπολογίζουμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας του ποσού των 100€ που καταβάλλεται ετησίως για 5 χρόνια με επιτόκιο 9%.

Η απάντηση είναι $100a_{\overline{5|}} = 100\frac{1-(1.09)^{-5}}{0.09} \approx 388.97$■

Υπάρχει και η μελλοντική αξία μιας ράντας η οποία είναι η συσσωρευμένη αξία. Για τις συντάξεις ληξιπρόθεσμων άμεσων καταβολών, αυτή είναι η αξία αμέσως μετά την n-οστή πληρωμή. Η μελλοντική αξία δίνεται από το τύπο:

$$s_{\overline{n|}} = (1 - \mathrm{i}^{\mathrm{n}})a_{\overline{n|}} = \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}} \tag{1.3}$$

Παράδειγμα 1.1.2

Θα υπολογίσουμε την μελλοντική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας για το ποσό των 100€ που καταβάλλεται ετησίως για 5 χρόνια με επιτόκιο 9%.

Χρησιμοποιώντας το τύπο (1.3) έχουμε

$$100 s_{\overline{5}|} = 100 * \frac{(1.09)^5 - 1}{0.09} \approx 598.47 \text{ €} \blacksquare$$

Με $a_{\overline{n}|}$ και $s_{\overline{n}|}$ όπως ορίζεται παραπάνω καταλήγουμε στο ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i, \tag{1.4}$$

όπου $*$ από δω και στο εξής θα συμβολίζει τον συνήθη πολλαπλασιασμό.

1.2 ΠΡΟΚΑΤΑΒΛΗΤΕΕΣ ΡΑΝΤΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ

Μια προκαταβλητέα ράντα είναι μια ράντα για την οποία οι πληρωμές, πραγματοποιούνται στην αρχή των περιόδων πληρωμής [34]. Οι χρηματοροές που αντιπροσωπεύουν αυτή την ράντα μπορούν να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα χρόνου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

↓ ↓ ↓ … ↓ πληρωμές

______ ______ ______ ______ __

0 1 2 … n-1 N περίοδοι

(1.5)

Το πρώτο βέλος δείχνει την έναρξη της πρώτης περιόδου, κατά την οποία γίνεται η πρώτη πληρωμή της ετήσιας ράντας. Το τελευταίο βέλος δείχνει την τελευταία πληρωμή.

Η παρούσα αξία αυτής της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d} \tag{1.6}$$

όπου d το προεξοφλητικό επιτόκιο.

Παράδειγμα 1.2.1

Θα υπολογίσουμε το $\ddot{a}_{\overline{8|}}$ αν το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10%.

Δεδομένου ότι $d = 0.10$ έχουμε ότι $u = 1 - d = 0.9$. Οπότε προκύπτει

$$\ddot{a}_{\overline{8|}} = \frac{1-(0.9)^8}{0.1} = 5.6953279 \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.2.2

Θα βρούμε τι ποσό πρέπει να επενδύσουμε σήμερα με επιτόκιο 6% ετησίως ανατοκισμένο, έτσι ώστε να μπορείτε να πάρουμε € 5,000 στην αρχή του κάθε έτους για τα επόμενα 5 χρόνια.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.6) έχουμε

$$5000\ddot{a}_{\overline{5|}} = 5000\frac{1-(1.06)^{-5}}{0.06(1.06)^{-1}} = € \, 22{,}325.53 \blacksquare$$

Και η συσσωρευμένη αξία στη χρονική περίοδο n της προκαταβλητέας ράντας, δίνεται από την σχέση:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{iv} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \tag{1.7}$$

Παράδειγμα 1.2.3

Θα βρούμε πιο ποσό θα συσσωρευτεί αν καταθέσουμε 5,000 € στην αρχή του κάθε έτους για τα επόμενα 5 χρόνια. Θα υποθέσουμε πως το επιτόκιο είναι 6% με ετήσιο ανατοκισμό.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα χρησιμοποιώντας την ανάλογη σχέση (σ αυτή την περίπτωση την (1.7) έχουμε:

$$5000\ddot{s}_{\overline{5|}} = 5000\frac{(1.06)^5 - 1}{0.06(1.06)^{-1}} = 29{,}876.59 \, € \blacksquare$$

Βλέποντας πως ορίζονται το $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ και το $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ παραπάνω έχουμε ότι προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις [22]:

- $\ddot{a}_{\overline{n|}} = (1+i)a_{\overline{n|}}$
- $a_{\overline{n|}} = v\ddot{a}_{\overline{n|}}$
- $\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)s_{\overline{n|}}$
- $s_{\overline{n|}} = v\ddot{s}_{\overline{n|}}$
- $\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} + d$

1.3 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΡΑΝΤΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα και μια άπειρη συχνότητα των πληρωμών. Ο τύπος που αντιστοιχεί στα εν λόγω επιδόματα είναι χρήσιμος για τις προσεγγίσεις που αντιστοιχούν σε ράντες πληρωμών οι οποίες καταβάλλονται με μεγάλη συχνότητα, είτε καθημερινά, είτε κάθε ώρα, κάθε λεπτό, κ.τ.λ.

Αν σκεφτούμε μια ράντα σε διασκορπισμένες πολύ μικρές dt πληρωμές που γίνονται σε χρόνο t και σε αυτές τις μικρές πληρωμές καταβάλλονται συνεχώς για τις περιόδους μετατροπής n ενδιαφέροντος. Έστω ότι το i χαρακτηρίζει το περιοδικό επιτόκιο. Στη συνέχεια, το συνολικό ποσό που καταβλήθηκε κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου είναι:

$$\int_{k-1}^{k} dt = [t]_{k-1}^{k} \tag{1.8}$$

Ορίζουμε το $\bar{a}_{\overline{n|}}$ ως την παρούσα αξία του ποσού μιας ράντας συνεχών πληρωμών για n περιόδους μετατροπής επιτοκίου, έτσι ώστε 1 είναι το συνολικό ποσό που καταβλήθηκε κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου μετατροπής επιτοκίου. Τότε, η παρούσα αξία μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n v^t\, dt = \left.\frac{v^t}{lnv}\right|_0^n = \frac{1-v^n}{\delta} \tag{1.9}$$

δ: συνεχής ένταση ανατοκισμού (βλ. παράρτημα)

με $\bar{a}_{\overline{n|}}$ να ορίζεται παραπάνω, έχουμε:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}} = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-e^{-n\delta}}{\delta} \tag{1.10}$$

Παράδειγμα 1.3.1

Αρχίζοντας τέσσερα έτη από σήμερα, θα πάρουμε την πληρωμή σε επιτόκιο των 1.000 € ετησίως, πληρωτέο συνεχώς, με την πληρωμή για την περάτωση δώδεκα έτη από σήμερα. Θα βρούμε την παρούσα αξία της αυτής της συνεχούς ράντας αν $\delta = 5\%$.

Η παρούσα αξία είναι $PV = 1000v^4\bar{a}_{\overline{8|}} = 1000e^{-0.20} * \frac{1-e^{-0.40}}{0.05} = 5{,}398.38$€ ■

Στη συνέχεια, εάν το $\bar{s}_{\overline{n|}}$ υποδηλώνει τη συσσωρευμένη αξία στο τέλος της θητείας της οφειλομένης συνεχώς για τις περιόδους μετατροπής n ενδιαφέροντος, έτσι ώστε 1 είναι το συνολικό ποσό που καταβλήθηκε κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου μετατροπής ενδιαφέρον.

Έπεται ότι $\bar{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n \bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n (1+i)^{n-t}\, dt = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}$ (1.11)

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\bar{s}_{\overline{n|}} = \frac{e^{n\delta}-1}{\delta} = \frac{i}{\delta} s_{\overline{n|}} = \frac{d}{\delta} \ddot{s}_{\overline{n|}}$ (1.12)

Παράδειγμα 1.3.2

Θα βρούμε την ένταση τόκου κατά την οποία η συσσωρευμένη αξία της συνεχούς καταβολής του 1 κάθε χρόνο για 8 χρόνια θα είναι ίση με τέσσερις φορές την συσσωρευμένη αξία της συνεχούς καταβολής του 1 κάθε έτος για τέσσερα χρόνια,

έχουμε

$$\bar{s}_{\overline{8|}} = 4\bar{s}_{\overline{4|}}$$

$$\frac{e^{8\delta}-1}{\delta} = 4\frac{e^{4\delta}-1}{\delta}$$

$$e^{8\delta} - 4e^{4\delta} + 3 = 0$$

$$(e^{4\delta} - 3)(e^{4\delta} - 1) = 0$$

Εάν $e^{4\delta} = 3$, $\delta = \frac{ln3}{4} \approx 0.0275 = 2.75\%$. Αν $e^{4\delta} = 1$, $\delta = 0$ τότε έχουμε μια πλεονάζον λύση ■

Επίσης με το $\bar{a}_{\overline{n|}}$ και το $\bar{s}_{\overline{n|}}$ που έχουμε παραπάνω προκύπτει:

$$\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}}} = \frac{1}{\bar{s}_{\overline{n|}}} + \delta \tag{1.13}$$

Παράδειγμα 1.3.3

Μια διηνεκής ράντα καταβάλλεται συνεχώς με ρυθμό 100 ανά έτος και έχει μια παρούσα αξία των 800.

Θα υπολογίσουμε το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας.

Η εξίσωση της τιμής στο χρόνο $t = 0$ είναι $800 = \frac{100}{\delta} = \frac{100}{\ln(1+i)}$

τότε, $i = e^{\frac{1}{8}} - 1 = 13.3\%$ ■

II. Ράντες Πληρωμών Ζωής

1.4 ΡΑΝΤΕΣ ΖΩΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΟΥΣΕΣ ΑΞΙΕΣ

Οι ράντες που μελετήσαμε παραπάνω ήταν βέβαιες ράντες πληρωμών, δηλαδή, όλες οι πληρωμές της ράντας ήταν εγγυημένο ότι θα γίνουν. Η σύνταξή είναι μια τυχαία ράντα πληρωμών. Κάνει μηνιαίες πληρωμές, αλλά θα σταματήσει στη περίπτωση θανάτου. Ο θάνατος θα αποτελεί επομένως ένα πιθανό λόγο διακοπής της σύνταξης.

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιάσουμε τις αναλογιστικές παρούσες αξίες για τυχαίες ράντες. Αρχικά θα εξετάσουμε τις συνεχείς ράντες, θα συνεχίσουμε με τις διακριτές και τέλος θα κλείσουμε με την τροποποίηση τους σε m-οστές πληρωμές (π.χ. σε τακτικά διαστήματα μέσα στο χρόνο).

Στη θεωρία επιτοκίου, εξετάζουμε τις πληρωμές που πρέπει να γίνουν στο μέλλον και τη παρούσα τους αξία. Αν εγγυόμαστε την καταβολή πληρωμής του ποσού $100000\,€$ σε δέκα χρόνια, η παρούσα αξία της εν λόγω πληρωμής με επιτόκιο 6% είναι

$$\frac{100{,}000}{1.06^{10}} = 55{,}839.48\blacksquare$$

Οι ασφαλιστικές πληρωμές εξαρτώνται από κάποιο άλλο γεγονός στο μέλλον, και η πιθανότητα της πραγματοποίησης αυτού του γεγονότος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό της παρούσας αξίας.

Ας υποθέσουμε ότι μια εταιρεία υπόσχεται σε μια εργαζόμενη ηλικίας 55 ετών ότι θα την πληρώσει $100{,}000\,€$ όταν συνταξιοδοτηθεί σε 10 χρόνια και αν είναι ακόμα ζωντανή εκείνη την εποχή.

Αυτή είναι μια εξαρτώμενη πληρωμή (δηλαδή, εξαρτάται από το αν η υπάλληλος θα ζήσει ως τη στιγμή της συνταξιοδότησης) και οι αναλογιστές εξετάζουν την αναμενόμενη τιμή της. Για παράδειγμα, αν η πιθανότητα η εργαζόμενη να είναι ζωντανή σε 10 χρόνια είναι ${}_{10}p_{55} = 0.87$ τότε η αναμενόμενη αξία της εξαρτώμενης πληρωμής είναι:

$$\frac{100{,}000}{1.06^{10}}(0.87) = 48{,}580.35\blacksquare$$

Αυτή η αναμενόμενη παρούσα αξία της τυχαίας εξαρτώμενης μεταβλητής πληρωμής ονομάζεται αναλογιστική παρούσα αξία [APV]. Είναι η αξία μελλοντικών καταβολών προσαρμοσμένη κατά την ανάλογη πιθανότητα πραγματοποίησης αυτών των καταβολών. Αυτό σημαίνει ότι :

(ποσό των παροχών) (v^t) P(παροχή)

όπου P (παροχή) είναι η πιθανότητα ότι η πληρωμή γίνεται.

Αν συμβολίσουμε το όφελος σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t με b_t , η παρούσα αξία αυτών των παροχών κατά τη στιγμή t είναι:

$$z_t = b_t v^t = b_t e^{-\delta t} \tag{1.14}$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία της συγκεκριμένης παροχής σε χρόνο t είναι:

$$P(παροχής) b_t v^t = P(παροχής) b_t e^{-\delta t} \tag{1.15}$$

Ο συμβολισμός αυτός θα χρησιμοποιηθεί και στις παρακάτω ενότητες του παρόντος κεφαλαίου.

Το γενικό σύστημα είναι ότι:

$$Αναλογιστική\ Παρούσα\ Αξία\ των\ παροχών\ κατά\ τη\ χρονική\ στιγμή\ t$$

$$= ποσό\ (b_t) * πιθανότητα\big(P(παροχής)\big) * προεξόφληση\ του\ t\ (v^t) = 0$$

Παραπάνω είδαμε περιληπτικά την αναλογιστική παρούσα αξία μιας παροχής σε μια συγκεκριμένη στιγμή. Οι αναλογιστές καθορίζουν την αναλογιστική παρούσα αξία του μιας πιθανής παροχής ως η αναμενόμενη τιμή $E(Z) = E(b_T v^T)$. Η στιγμή θανάτου είναι τυχαία.

1.5 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΡΑΝΤΕΣ ΖΩΗΣ

Ξεκινάμε με τις ράντες που καταβάλλουν πληρωμές συνεχώς για 1 χρόνο και σταματάνε τη στιγμή ενός απρόοπτου γεγονότος (ο θάνατος σε αυτήν την περίπτωση). Αυτές ονομάζονται ράντες ζωής, δεδομένου ότι οι πληρωμές γίνονται όσο ο ασφαλισμένος βρίσκεται εν ζωή.

Αρχικά θα μελετήσουμε τις ισόβιες ράντες ζωής, έπειτα τις πρόσκαιρες ράντες, και στη συνέχεια τις αναβαλλόμενες ράντες.

1.5.1 Συνεχείς Ισόβιες Ράντες Ζωής

Πριν ξεκινήσουμε με τις τυχαίες ράντες, θα ξαναδούμε την βέβαιη ράντα πληρωμών. Εάν μια βέβαιη ράντα πληρωμών με συνεχείς πληρωμές μιας μονάδας έχει διάρκεια n περιόδων, η παρούσα αξία του είναι:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{\delta} \tag{1.16}$$

Για μια ράντα ζωής με συνεχείς πληρωμές μιας μονάδας, το χρονικό διάστημα κατά το οποίο γίνονται οι πληρωμές είναι μια τυχαία μεταβλητή T, το οποίο αναπαριστά το υπόλοιπο της ζωής τους ασφαλισμένου. Έτσι, η παρούσα αξία της ράντας ζωής είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1-v^T}{\delta} \tag{1.17}$$

1.5.2 Η Αναλογιστική Παρούσα Αξία του $\bar{a}_{\overline{T|}}$

Η αναλογιστική παρούσα αξία του $\bar{a}_{\overline{T|}}$ συμβολίζεται με $\bar{a}_x$, όπου x είναι η ηλικία του ασφαλισμένου, όταν ξεκινάει η καταβολή της σύνταξης (ο ασφαλισμένος είναι το πρόσωπο στου οποίου τη ζωή βασίζονται οι πληρωμές παροχών της ράντας).

$$E(Y) = \bar{a}_x = E\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} f(t)dt = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt \tag{1.18}$$

όπου $f(t)$ η συνάρτηση θνησιμότητας, ${}_tp_x$ η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να ζήσει t χρόνια και μ_{x+t} η ένταση θνησιμότητας στην ηλικία $x+t$.

Η εξίσωση (1.18) ορίζει το $\bar{a}_x$, αλλά μπορεί να μην είναι ο καλύτερος τρόπος για να υπολογιστεί. Υπάρχει ένας εναλλακτικός τύπος για τον υπολογισμό αυτό, ο οποίος χρησιμοποιεί μια ράντα μικτής ασφάλισης ${}_nE_x$, όπου συμβολίζεται επίσης $A_{x:\overline{n|}}$.

Υπενθυμίζουμε ότι η ${}_nE_x$ είναι η αναλογιστική παρούσα αξία των πληρωμών μιας μονάδας που γίνεται ακριβώς τη χρονική στιγμή n, αν ο ασφαλισμένος είναι ζωντανός εκείνη τη στιγμή.

$$A_{x:\overline{n|}} = {}_nE_x = v^n\ {}_np_x = e^{-n\delta}\ {}_np_x \tag{1.19}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_tE_x\, dt \tag{1.20}$$

Η εξίσωση (1.20) έχει μια φυσική ερμηνεία που μπορεί να βοηθάει στην κατανόηση της. Μια συνεχής ράντα πληρωμών μιας μονάδας πληρώνει $1dt$ στο διάστημα $[t, t + dt]$ αν ο ασφαλισμένος είναι ζωντανός σε αυτό το διάστημα. Η αναλογιστική παρούσα αξία του εν λόγω $1dt$ είναι ${}_tE_x\, dt$. Το ολοκλήρωμα προσθέτει συνεχώς όλες αυτές τις παρούσες αξίες για να δώσουν τη συνολική αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας.

Εάν χρησιμοποιήσουμε την (1.18) ή την (1.20) θα πρέπει να γίνει κάποια ολοκλήρωση. Ευτυχώς, υπάρχει ένας ευκολότερος τρόπος για να βρούμε το $\bar{a}_x$ αν έχουμε ήδη βρει το $\bar{A}_x$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω εξίσωση για να λύσουμε το $\bar{a}_x$ ως προς το $\bar{A}_x$.

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \tag{1.21}$$

Θα κάνουμε τώρα μια σύντομη απόδειξη της (1.21). Για την απόδειξη αυτή, είναι σημαντικό να θυμηθούμε ότι $E(v^T) = \bar{A}_x$. Έχουμε ήδη επισημάνει ότι:

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί επίσης ως:

$$v^T + \delta\bar{a}_{\overline{T|}} = 1$$

Αν πάρουμε την αναμενόμενη τιμή της κάθε πλευράς αυτής της εξίσωσης, το αποτέλεσμα είναι:

$$E(v^T) + \delta E(\bar{a}_{\overline{T|}}) = 1$$

αφού $E(v^T) = \bar{A}_x$ και $E(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \bar{a}_x$ βλέπουμε ότι:

$$\bar{A}_x + \delta\bar{a}_x = 1 \tag{1.22}$$

1.5.3 Εύρεση του $\bar{a}_x$ για το Εκθετικό Μοντέλο Επιβίωσης (Σταθερή Ένταση)

Υπάρχει μια πολύ απλή φόρμουλα για το $\bar{A}_x$ όταν η υπολειπόμενη διάρκεια ζωής T είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με τη δύναμη της θνησιμότητας μ, και μια σταθερή ένταση επιτοκίου δ:

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta}$$

Μπορούμε άμεσα να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1.21) για να βρούμε το $\bar{a}_x$.

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \delta}\right)}{\delta} = \frac{1}{\mu + \delta} \tag{1.23}$$

1.5.4 Η Διασπορά του $\bar{a}_{\overline{T|}}$

Μπορούμε να πάμε απευθείας στην διασπορά του $\bar{a}_{\overline{T|}}$ χωρίς να χρειαστεί να βρούμε τη δεύτερη ροπή εκ των προτέρων.

Ο τύπος που χρησιμοποιείται σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$V(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x{}^2}{\delta^2} \tag{1.24}$$

(όπου, ${}^2\bar{A}_x$ είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία που υπολογίζεται για επιτόκιο $(1+i)^2$).

Για να καταλήξουμε στον παραπάνω τύπο, μπορούμε απλά να πάρουμε τη διασπορά της κάθε πλευράς της εξίσωσης (1.17), την οποία επαναλαμβάνουμε εδώ για διευκόλυνση

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διασποράς

$$V\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = V\left(\frac{1}{\delta} + \frac{-v^T}{\delta}\right) = V\left(\frac{-v^T}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2} V(v^T)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$V(v^T) = \quad {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x{}^2$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό,

$$V\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \frac{V(v^T\ )}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x{}^2}{\delta^2}$$

Παράδειγμα 1.5.1

Για μια συνεχή ισόβια ράντα μιας μονάδας ατόμου ηλικίας x:

i) το $T(x)$ είναι η τυχαία μεταβλητή για άτομο ηλικίας x που συμβολίζει τη μέλλουσα διάρκεια ζωής
ii) Η ένταση του επιτοκίου και η ένταση θνησιμότητας είναι ίσες και συνεχείς
iii) $\bar{a}_x = 12.50.$

Θα υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση του $\bar{a}_{\overline{T(x)|}}$.

Μας δίνεται ότι $\mu = \delta$. Επομένως

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\mu + \delta} = \frac{1}{2\mu} = 12.5 \ \rightsquigarrow \mu = 0.04$$

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta} = \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

$${}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = \frac{\mu}{3\mu} = \frac{1}{3}$$

$$V\left(\bar{a}_{\overline{T|}}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x{}^2}{\delta^2} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{(0.04)^2} = 52.083$$

Επομένως η τυπική απόκλιση είναι $\sqrt{52.083} = 7.217$■

1.5.5 Η Κατανομή του $\bar{a}_{\overline{T|}}$

Δείξαμε πώς να βρούμε την αθροιστική κατανομή της ισόβιας ασφάλισης της τυχαίας μεταβλητής $Z = v^T$ όταν η T είναι ομοιόμορφη. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς για να κάνουμε κάτι παρόμοιο για την τυχαία μεταβλητή $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ όταν το T είναι η σταθερή ένταση. Αυτή τη φορά θα βρούμε τη συνάρτηση επιβίωσης $S_y(y)$.

Παράδειγμα 1.5.2

Ορίζουμε το υπόλοιπο της ζωής της τυχαίας μεταβλητής T ως εκθετική με σταθερή ένταση μ. Θα βρούμε τη συνάρτηση επιβίωσης $S_y(y)$ για $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ αν η σταθερή ένταση του επιτοκίου είναι δ.

$$S_y(y) = P(Y > y)$$

$$= P\left(\frac{1 - v^T}{\delta} > y\right)$$

$$= P(1 - v^T > \delta y)$$

$$= P(1 - \delta y > v^T)$$

$$= P\left(1 - \delta y > e^{-\delta T}\right)$$

$$= P(\ln(1 - \delta y) > \delta T)$$

$$= P\left(-\frac{\ln(1 - \delta y)}{\delta} < T\right)$$

$$= S_T\left(-\frac{\ln(1 - \delta y)}{\delta}\right)$$

$$= e^{\left(\frac{\mu}{\delta}\ln(1-\delta y)\right)}$$

$$= (1 - \delta y)^{\frac{\mu}{\delta}} \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.5.3

Για την τυχαία μεταβλητή $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ στο παράδειγμα 1.5.2 θα βρούμε την πιθανότητα $P(\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x)$.

$$P(\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x) = S_Y(\bar{a}_x) = (1 - \delta\bar{a}_x)^{\frac{\mu}{\delta}} = \left[1 - \delta\frac{1}{\mu + \delta}\right]^{\frac{\mu}{\delta}} = \left[\frac{\mu}{\mu + \delta}\right]^{\frac{\mu}{\delta}} \blacksquare$$

1.6 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΠΡΟΣΚΑΙΡΕΣ ΡΑΝΤΕΣ ΖΩΗΣ

Μια πρόσκαιρη ράντα ζωής $n - ετών$ λειτουργεί σαν $n - έτη$ μικτή ασφάλιση. Ο ασφαλισμένος λαμβάνει πληρωμές κατά τα επόμενα n έτη εφ 'όσον αυτός είναι ζωντανός. Αν είναι ζωντανός τη χρονική στιγμή n, οι πληρωμές σταματάνε, και το συνολικό συσσωρευμένο ποσό, είναι $\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{\delta}$

Αυτό σημαίνει ότι οι πληρωμές παύουν σε περίπτωση θανάτου ή σε $n\ έτη$, όποιο από τα δύο, συμβεί πρώτο.

Η τυχαία μεταβλητή Y για μια συνεχή ράντα $n - ετών$ μιας μονάδας είναι

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} & , \quad T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & , \quad T \leq n \end{cases}$$

Η εξίσωση για μια $n - ετών$ είναι πρόσκαιρη ράντα ζωής και είναι παρόμοια με αυτή μιας ισόβιας ράντας με μικρές τροποποιήσεις.

Η αναμενόμενη τιμή της Y συμβολίζεται με $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$. Μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t|}}(\ {}_tp_x\mu_{x+t})dt + \ \bar{a}_{\overline{n|}}(\ {}_np_x) \qquad (1.25)$$

Όπως και με την ισόβια ράντα, μπορεί να γίνει μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες για να πάρουμε την εναλλακτική μορφή

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \ {}_tE_x\ dt$$

(1.26)

Όπως με την ισόβια ράντα, υπάρχει μια απλή φόρμουλα για το $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ συναρτήσει του $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$. Να σημειωθεί ότι αυτή είναι μια μικτή ασφάλιση και υπενθυμίζουμε ότι:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta} \tag{1.27}$$

Η διασπορά της $n - ετών$ πρόσκαιρης ράντας, τυχαίας μεταβλητής Y λειτουργεί όπως και η διασπορά της ισόβιας ράντας.

$$V(Y) = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - \bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\,2}}{\delta^2} \tag{1.28}$$

1.7 ΑΝΑΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΡΑΝΤΕΣ ΖΩΗΣ

Μια $n - έτη$ αναβαλλόμενη ράντα [1] είναι μια ράντα ζωής κατά την οποία οι πληρωμές θα αρχίσουν σε n έτη, εάν ο ασφαλισμένος είναι ακόμα ζωντανός την χρονική στιγμή n. Αν T είναι η τυχαία μεταβλητή που δείχνει την υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου, η τυχαία μεταβλητή Y για το $n - έτος$ της αναβαλλομένης ράντας είναι:

$$Y = \begin{cases} 0\,, & T < n \\ v^n \bar{a}_{\overline{T-n|}}\,, & T \geq n \end{cases}$$

Η παρούσα αξία μιας $n - έτης$ αναβαλλόμενης ράντας πληρωμών μιας μονάδας για άτομο ηλικίας x συμβολίζεται με ${}_{n|}\bar{a}_x$. Στην πραγματικότητα είναι απλά η αναλογιστική παρούσα αξία στην ηλικία x μιας ισόβιας ράντας που ξεκινάει στην ηλικία $x + n$, προεξοφλημένη στην ημερομηνία αγοράς.

$${}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x\,\bar{a}_{x+n} = \mathrm{v}^{\mathrm{n}}(\,{}_np_x\,)\bar{a}_{x+n} \tag{1.29}$$

Αφού ξέρουμε πως να υπολογίσουμε τόσο την αναλογιστική ποσότητα ${}_nE_x$ και την ισόβια ράντα $\bar{a}_{x+n}$, ο υπολογισμός της παρούσας αξίας της αναβαλλομένης ράντας είναι απλός όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.7.1

Το υπόλοιπο της ζωής κατά τη γέννηση τυχαίας μεταβλητής X που είναι εκθετική με $\mu = 0.05$. Θα βρούμε ${}_{10|}\bar{a}_{30}$ αν η ένταση του επιτοκίου είναι $\delta = 0.10$.

Αφού το υπόλοιπο της ζωής της τυχαίας μεταβλητής T είναι εκθετική με $\mu = 0.05$. Γνωρίζουμε ότι για εκθετικής μορφής διάρκεια ζωής έχουμε:

$$ {}_{n}E_x = e^{-n(\mu+\delta)} \rightarrow {}_{10}E_x = e^{-10(0.05+0.10)} = e^{-1.5} $$

Το υπόλοιπο της ζωής στην ηλικία $x = 40$ είναι επίσης εκθετικά κατανεμημένο με $\mu = 0.05$. Οπότε,

$$ \bar{a}_{40} = \frac{1}{\mu + \delta} = \frac{1}{0.15} = 6.66\bar{6} $$

Άρα έπεται ότι:

$$ {}_{10|}\bar{a}_{30} = {}_{10}E_{30}\, \bar{a}_{40} = e^{-1.5} 6.66\bar{6} = 1.4875 \blacksquare $$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}

Στοχαστική Θεωρία

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μερικές βασικές έννοιες από την στοχαστική θεωρία. Θα παρουσιάσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες, ιδιαίτερα την κίνηση Brown, το ολοκλήρωμα και το Λήμμα του Itô και θα ολοκληρώσουμε την ενότητα με μια αναφορά στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις [2]. Όλα τα παραπάνω παίζουν σημαντικό ρόλο στην στοχαστική ανάλυση και στην σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων με πολύ σημαντικές εφαρμογές στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά.

Η θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών αρχικά συνδέθηκε με την μελέτη των διακυμάνσεων και του θορύβου σε φυσικά συστήματα. Μια στοχαστική διαδικασία είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που συνήθως εξελίσσεται στο χρόνο βάσει πιθανοθεωρητικών νόμων.

Η θεωρία τυχαίων μεταβλητών δεν παρέχει τα μέσα για την εξέταση φαινομένων που είναι τυχαία και εξελίσσονται στο χρόνο, όπως συμβαίνει σε πολλά φυσικά συστήματα. Αυτό είναι το κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών.

2.1 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Υποθέτουμε ότι η συναλλαγματική ισοτιμία €/$ σε κάθε χρονική στιγμή t είναι τυχαία. Ως εκ τούτου, μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως μια πραγματοποίηση $X_t(\omega)$ της τυχαίας μεταβλητής X_t, και έτσι παρατηρούμε τη $X_t(\omega)$ σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Προκειμένου να κάνουμε μια πρόβλεψη για το που θα βρίσκεται η συναλλαγματική ισοτιμία την επόμενη ώρα, είναι χρήσιμο να δούμε την πορεία της ως τώρα, και να προσέξουμε την εξέλιξη της. Η όλη πορεία της συναλλαγματικής ισοτιμίας που έχει καταγραφεί είναι στην ουσία μια στοχαστική διαδικασία και υπάρχει συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τέτοια φαινόμενα.

Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T\,, \omega \in \Omega),$$

όπου ορίζεται σε κάποιο χώρο Ω.

Για τους σκοπούς μας, T είναι συχνά ένα χρονικό διάστημα, για παράδειγμα $T = [a, b], [a, b)$ ή $[a, \infty)$ για $a < b$ οπότε καλούμε X μια διαδικασία συνεχούς χρόνου σε αντίθεση με τις διαδικασίες διακριτού χρόνου. Στην δεύτερη περίπτωση το T είναι ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο άπειρο σύνολο. Για προφανείς λόγους, ο δείκτης t της τυχαίας μεταβλητής X_t συχνά αναφέρεται ως χρόνος, και θα ακολουθήσει την εν λόγω παραδοχή.

Μια στοχαστική διαδικασία X μπορεί να θεωρηθεί και ως μία συνάρτηση δύο μεταβλητών. Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t είναι μια τυχαία μεταβλητή:

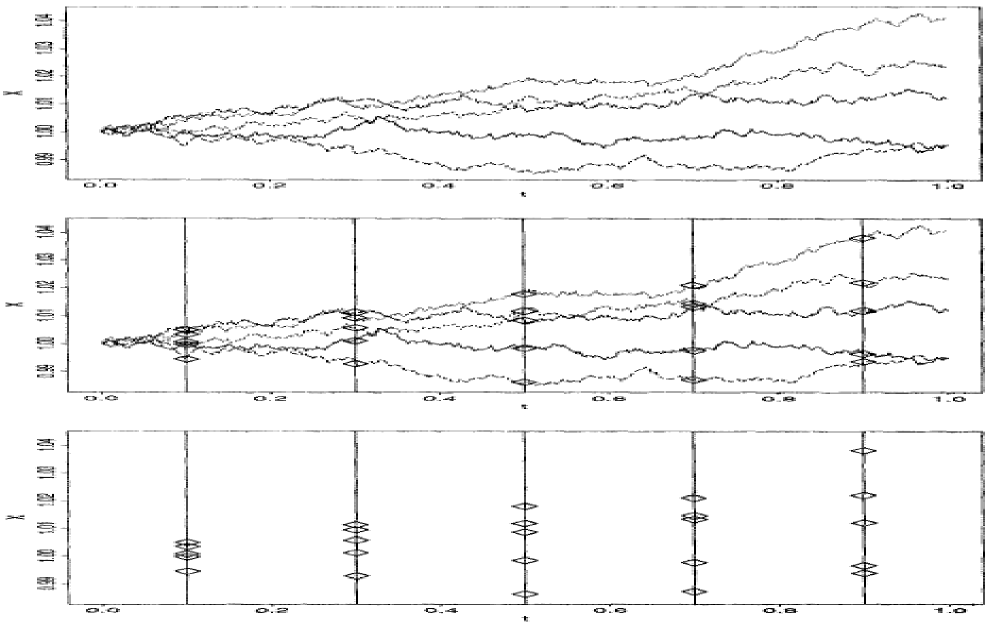
$$X_t : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \quad : \omega \longmapsto X_t(\omega)$$

για ένα σταθερό τυχαίο αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$, είναι μια συνάρτηση του χρόνου:

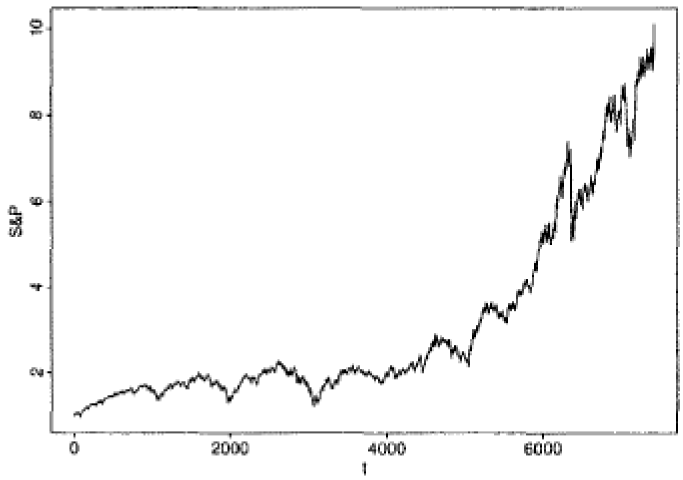
$$X_{\cdot}(\omega) : T \longmapsto \mathbb{R} \quad : t \longmapsto X_t(\omega)$$

*Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πραγματοποίηση, ή **τροχιά** (path) της διαδικασίας X.*

Αυτές οι δύο πτυχές της στοχαστικής διαδικασίας απεικονίζονται στο παρακάτω Σχήματα 1 και 2.



Σχήμα 1: Πέντε τυχαίες τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $(X_t, t \in [0,1])$. Πάνω διάγραμμα: Η κάθε τροχιά αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό $\omega \in \Omega$. Μεσαίο και κάτω διάγραμμα: Οι τιμές των οριζόντιων αξόνων για $t = 0.1, 0.2\ \dots\ 0.9$ αναπαριστούν τις τυχαίες μεταβλητές $X_{0.1}, X_{0.2}\ \dots\ X_{0.9}$.



Σχήμα 2: Η καθημερινή εξέλιξη του δείκτη S&P σε ένα συνολικό διάστημα 7.422 ημερών. Το διάγραμμα υποδεικνύει ότι η εξέλιξη του δείκτη S&P μπορεί να γίνει αντιληπτή σαν μια τροχιά μιας διαδικασίας συνεχούς χρόνου. Αν υπάρχουν πολλές παρατηρήσεις έτσι ώστε οι στιγμές $t \in T$ να είναι αρκετά πυκνές τότε αυτόματα μια διαδικασία που μοιάζει για διακριτή μετατρέπεται σε συνεχή. Έτσι πολλές φορές είναι δύσκολο κάποιος να αποφασίσει αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί το διακριτό ή συνεχές μοντέλο.

Παράδειγμα 2.1.1

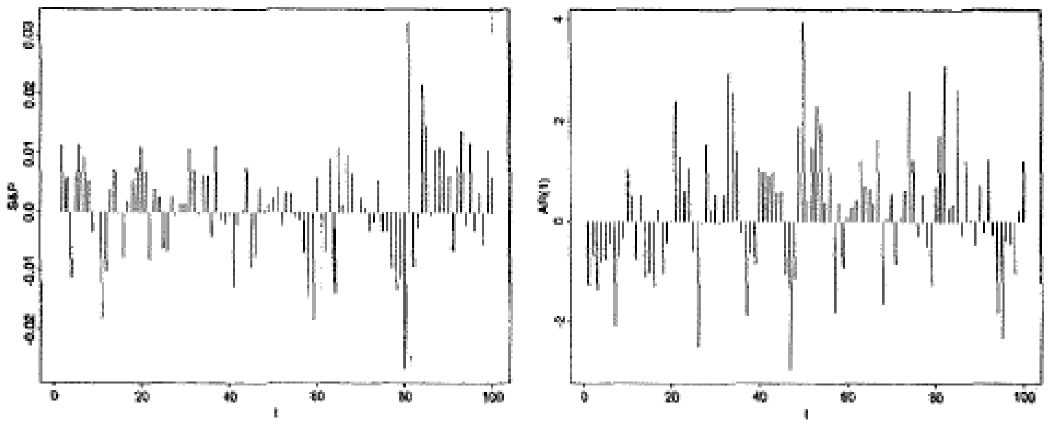
Μια χρονική σειρά $X_{t,}$ $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, είναι μια διαδικασία διακριτού χρόνου με $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Οι χρονοσειρές αποτελούν μια σημαντική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών. Υπάρχουν σχετικά μοντέλα, με πολλές εφαρμογές στην πραγματική ζωή. Κάποιες σειρές αντιπροσωπεύουν, για παράδειγμα, την ημερήσια θερμοκρασία του σώματος του ασθενούς σε νοσοκομείο, τις ημερήσιες αποδόσεις της τιμής ή τον μηνιαίο αριθμό επιβατών της εναέριας κυκλοφορίας στις Ηνωμένες Πολιτείες. Τα πιο δημοφιλή θεωρητικά μοντέλα χρονοσειρών είναι τα μοντέλα ARMA διαδικασίες (AutoRegressive Moving Average (ΑυτοΠαλινδρομούμενος Κινητός Μέσος)). Αυτές οι διαδικασίες δίνονται από ορισμένες εξισώσεις διαφορών στις οποίες εμπλέκεται μία ακολουθία από ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) (Z_t), γνωστή και ως θόρυβος (noise). Για παράδειγμα, ένας κινητός μέσος όρος της τάξης $q \geq 1$ ορίζεται ως:

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

και μία αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία πρώτης τάξης δίνεται από:

$$X_t = \Phi X_{t-1} + Z_{t,} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Εδώ τα $\theta_1, \ldots \ldots, \theta_q$ και το Φ είναι πραγματικές παράμετροι. Μοντέλα χρονοσειρών μπορεί να νοηθούν ως διακριτοποιήσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.). Δύο παραδείγματα χρονοσειρών φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Δύο χρονοσειρές $X_t, t = 1, \ldots, 100$. Αριστερά: διαδοχικές ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P. Δεξιά: μία προσομοιωμένη τροχιά της αυτοπαλινδρόμενης διαδικασίας $X_t = 0.5X_{t-1} + Z_t$, όπου Z_t είναι ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες τ.μ. που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.

Βλέπουμε ότι οι έννοιες μιας τυχαίας μεταβλητής X και μιας στοχαστικής διαδικασίας $(X_t, t \in T)$ δεν είναι τόσο πολύ διαφορετικές. Και οι δύο έχουν τυχαίες πραγματοποιήσεις, αλλά η πραγματοποίηση $X(\omega)$ μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ένας αριθμός, ενώ η πραγματοποίηση του $X_t(\omega), t \in T$ μιας στοχαστικής διαδικασίας είναι μια συνάρτηση του T. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε μια στοχαστική διαδικασία ως ένα τυχαίο στοιχείο που λαμβάνει συναρτήσεις ως τιμές. Επιπλέον, μπορούμε να ερμηνεύσουμε μια τυχαία μεταβλητή και ένα τυχαίο διάνυσμα ως ειδικές στοχαστικές διαδικασίες με πεπερασμένο δείκτη T.

2.1.1 Κατανομή

Κατ' αναλογία προς τις τυχαίες μεταβλητές και τα τυχαία διανύσματα θέλουμε να εισάγουμε τα μη-τυχαία χαρακτηριστικά μιας στοχαστικής διαδικασίας X, όπως η κατανομή της X, η μέση τιμή, κλπ. Αυτή είναι μια πιο περίπλοκη διαδικασία από την περιγραφή ενός τυχαίου διανύσματος. Πράγματι, μια τετριμμένη στοχαστική διαδικασία $X = (X_t, t \in T\,)$ με άπειρο σύνολο δείκτη T είναι ένα άπειρο-διάστατο αντικείμενο, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η άπειρη συλλογή των τυχαίων μεταβλητών $X_t, t \in T$. Δεδομένου ότι οι τιμές της X είναι συναρτήσεις του T, η κατανομή της X θα πρέπει να οριστεί σε υποσύνολα ορισμένου «χώρου συναρτήσεων», δηλαδή

$$P(X \in A), \quad A \in \mathcal{F}, \tag{2.1}$$

όπου $\mathcal{F}$ είναι μια συλλογή των κατάλληλων υποσυνόλων αυτού του χώρου των συναρτήσεων. Αυτή η προσέγγιση είναι δυνατή, αλλά απαιτεί προηγμένα μαθηματικά, και έτσι προσπαθούμε να βρούμε κάποια απλούστερα μέσα.

Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να ερμηνευθεί ως μια συλλογή τυχαίων διανυσμάτων.

Οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης (finite-dimensional distributions (fidis)) της στοχαστικής διαδικασίας X είναι οι κατανομές των διανυσμάτων πεπερασμένης-διάστασης.

$$\left(X_{t_1}, \dots\dots, X_{t_n}\right), \qquad t_1, \dots\dots, t_n \in T,$$

για όλες τις πιθανές χρονικές στιγμές $t_1, \dots\dots, t_n \in T$ *και κάθε* $n \geq 1$.

Μπορούμε να φανταστούμε τις πεπερασμένων διαστάσεων κατανομές πολύ πιο εύκολα από την περίπλοκη κατανομή (2.1) μιας στοχαστικής διαδικασίας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων καθορίζουν την κατανομή του X. Με αυτή την έννοια, αναφερόμαστε στη συλλογή των κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων ως την κατανομή της στοχαστικής διαδικασίας.

Στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να ταξινομηθούν με βάση διάφορα κριτήρια. Ένα από αυτά είναι το είδος των κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων.

Παράδειγμα 2.1.2

Μια στοχαστική διαδικασία λέγεται Γκαουσιανή (Gaussian) αν όλες οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων που την αποτελούν, είναι Γκαουσιανές πολυμεταβλητές. Γνωρίζουμε ότι οι παράμετροι μ και Σ ενός Γκαουσιανού διανύσματος είναι η μέση τιμή και η συνδιακύμανση του αντίστοιχα. Οπότε και η κατανομή μιας Γκαουσιανής στοχαστικής διαδικασίας καθορίζεται από τη συλλογή των μέσων τιμών και των συνδιακυμάσεων των κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων .

Μια απλή Γκαουσιανή διαδικασία για $T = [0,1]$ αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις κατανομής:

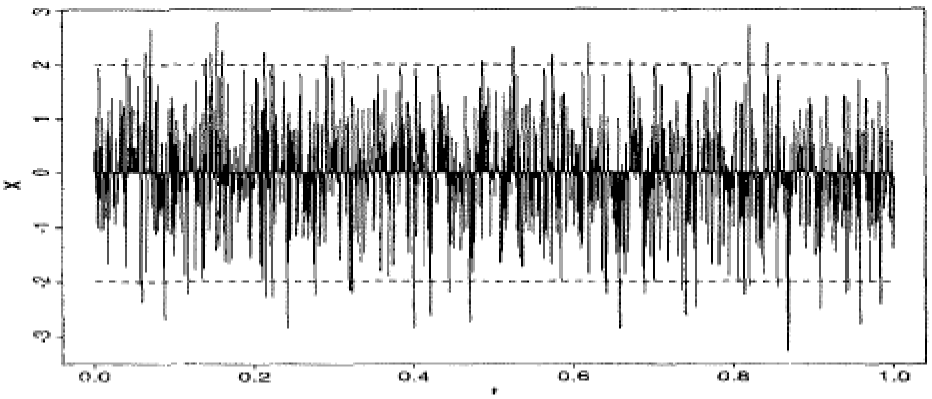
$$P\left(X_{t_1} < x_1, \dots\dots, X_{t_n} < x_n\right)$$

$$= P\left(X_{t_1} \le x_1\right) \dots P\left(X_{t_n} \le x_n\right)$$

$$= \Phi(x_1) \dots . \Phi(x_n)$$

$$0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le 1, \qquad (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \ \blacksquare$$

Οι *τροχιές* αυτής της διαδικασίας είναι μη ομαλές όπως βλέπουμε και στο παρακάτω Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Μια τροχιά της Γκαουσιανής διαδικασίας $(X_t, t \in [0,1])$, όπου X_t είναι ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τ.μ. που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή.

2.1.2 Μέση Τιμή και η Συνάρτηση της Συνδιακύμανσης

Για ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \dots, X_n)$ ορίζουμε την μέση τιμή $\mu_x = (EX_1, \dots, EX_n)$ και τον πίνακα συνδιακύμανσης $\Sigma_x = \left(cov\left(X_i, X_j\right), i, j = 1, \dots, n\right)$.

Μια στοχαστική διαδικασία $X = (X_t,\ t \in T)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η συλλογή των τυχαίων διανυσμάτων $\left(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\right)$ για $t_1, \dots, t_n \in T$ και $n \ge 1$. Για κάθε ένα από αυτά μπορούμε να καθορίσουμε την μέση τιμή και τον πίνακα συνδιακύμανσης. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτές τις ποσότητες ως συναρτήσεις του $t \in T$:

Η συνάρτηση μέσης τιμής της X δίνεται από :

$$\mu_X(t) = \mu_{X_t} = EX_t, \quad t \in T.$$

Η συνάρτηση συνδιακύμανσης της X δίνεται από :

$$c_X(t,s) = cov(X_t, X_s) = E\big[\big(X_t - \mu_X(t)\big)\big(X_s - \mu_X(s)\big)\big], \;\; t,s \in T.$$

Η συνάρτηση διασποράς της X δίνεται από :

$$\sigma_X^2(t) = c_X(t,t) = var(X_t), \;\; t \in T.$$

Μάθαμε στο παράδειγμα 2.1.2 ότι οι Γκαουσιανές διαδικασίες καθορίζονται μόνο από την μέση και τη συνάρτηση συνδιακύμανσης. Αυτό δεν ισχύει για μια μη-Γκαουσιανή διαδικασία.

Όσον αφορά ένα τυχαίο διάνυσμα, η συνάρτηση μέσης τιμής $\mu_X(t)$ είναι μια ντετερμινιστική ποσότητα γύρω από την οποία είναι συγκεντρωμένες οι τροχιές της X [1]. Η συνάρτηση συνδιακύμανσης $c_X(t,s)$ είναι ένα μέτρο της εξάρτησης στη διαδικασία X. Η συνάρτηση διασποράς $\sigma_X^2(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της διάδοσης των τροχών της X γύρω από τη $\mu_X(t)$. Σε αντίθεση με τη μονοδιάστατη περίπτωση, μια έκφραση όπως η: «95% όλων των τροχών βρίσκονται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $\mu_X(t) - 2\sigma_X(t)$ και $\mu_X(t) + 2\sigma_X(t)$» είναι πολύ δύσκολο να αποδειχτεί (ακόμα και για Γκαουσιανές διαδικασίες), και γενικά δεν είναι σωστό.

Παράδειγμα 2.1.3

Θεωρούμε τη Γκαουσιανή διαδικασία $(X_t,\ t \in [0,1])$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$ για ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τ.μ. X_t. Οι συναρτήσεις μέσης τιμής και συνδιακύμανσης δίνεται από τις σχέσεις:

$$\mu_X(t) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad c_X(t,s) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \;\; t = s \\ 0, & \alpha\nu \;\; t \neq s \end{cases}$$

αντίστοιχα. ■

2.2 ΚΙΝΗΣΗ BROWN

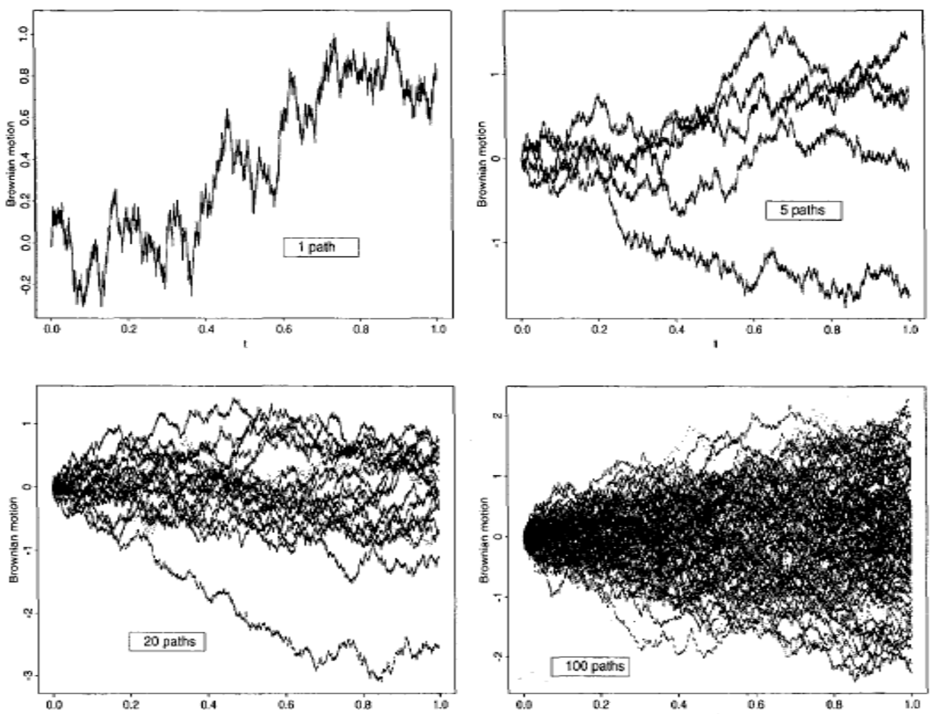
Μια κίνηση Brown διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών [23], στη θεωρία των πιθανοτήτων, στη φυσική, στα χρηματοοικονομικά και βεβαίως και σε αυτή την εργασία. Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό αυτής της σημαντικής διαδικασίας και στη συνέχεια, θα συνεχίσουμε με μερικές στοιχειώδεις ιδιότητες.

2.2.1 Ορισμός της Κίνησης Brown.

Μια στοχαστική διαδικασία $W = (W_t, t \in [0, \infty))$ ονομάζεται (κανονική) κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener, εφόσον πληρούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Αυτή να ξεκινάει από το μηδέν: $W_0 = 0$.
- Να έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- Για κάθε $t > 0$, η W_t έχει μια κανονική κατανομή $N(0,1)$.
- Να έχει συνεχείς *τροχιές* (paths), δηλαδή να μην υπάρχουν άλματα.

Στο παρακάτω Σχήμα 5 φαίνονται οι τροχιές που περιγράφουν μια κίνηση Brown.



Σχήμα 5: Διάφορες τροχιές μιας κίνησης Brown στο διάστημα [0,1].

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι η κίνηση Brown είναι μια συνάρτηση "παθολογική" της οποίας η παράγωγος δεν ορίζεται πουθενά (βλ. παράρτημα).

Η κίνηση Brown πήρε το όνομά της από τον βιολόγο Robert Brown του οποίου η έρευνα χρονολογείται το 1820. Στις αρχές του αιώνα, οι Albert Einstein (1905) και Norbert Wiener (1923) άρχισαν να αναπτύσσουν την μαθηματική θεωρία της κίνησης Brown. Ο Wiener (1923) ήταν ο πρώτος που έθεσε την κίνηση Brown με μια σταθερή μαθηματική βάση.

2.2.2 Κατανομή, Μέση Τιμή και Συνάρτηση Συνδιακύμανσης

Οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων της κίνησης Brown είναι πολυμεταβλητές Γκαουσιανές κατανομές, ως εκ τούτου η κίνηση Brown W είναι μια Γκαουσιανή διαδικασία. Ο τελευταίος ισχυρισμός επαληθεύεται με την παρατήρηση ότι η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες Γκαουσιανές προσαυξήσεις αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για γραμμικούς μετασχηματισμούς ενός Γκαουσιανού τυχαίου διανύσματος [37, σελ. 35].

Οι τυχαίες μεταβλητές $W_t - W_s$ και W_{t-s} έχουν μια $N(0,\ t-s)$ κατανομή για $s < t$.

Αυτό προκύπτει από τη στασιμότητα και την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων. Πράγματι, η $W_t - W_s$ έχει την ίδια κατανομή όπως η $W_{t-s} - W_0 = W_{t-s}$ η οποία είναι κανονική με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $t - s$. Έτσι, η διασπορά είναι ανάλογη προς το μήκος του διαστήματος $[s,\ t]$. Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το χρονικό διάστημα, τόσο μεγαλύτερες είναι οι αυξομειώσεις της κίνησης Brown σε αυτό το διάστημα. Αυτή η παρατήρηση υποστηρίζεται επίσης από τις προσομοιωμένες τροχιές της κίνησης Brown.

2.2.3 Διαδικασίες που Προέρχονται από την Κίνηση Brown

Ο σκοπός της ενότητας αυτής είναι να μελετήσουμε κάποιες διαδικασίες και ιδιότητες της κίνησης Brown. Διάφορες Γκαουσιανές και μη-Γκαουσιανές στοχαστικές διαδικασίες με πρακτική σημασία μπορούν να αναχθούν από τη κίνηση Brown. Παρακάτω παρουσιάζουμε μερικές από αυτές τις διαδικασίες.

Όπως και πριν θεωρούμε ότι η $W = (W_t, t \in [0, \infty))$ υποδηλώνει μια κίνηση Brown.

Παράδειγμα 2.2.1 («Γέφυρα» Brown»)

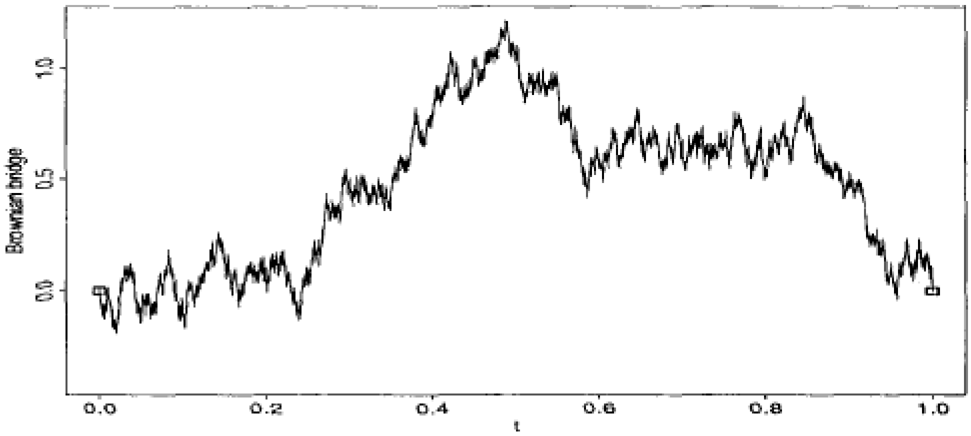
Θεωρούμε τη διαδικασία

$$X_t = W_t - tW_1 , \quad 0 \le t \le 1$$

προφανώς,

$$X_0 = W_0 - 0\, W_1 = 0 \qquad και \quad X_1 = W_1 - 1\, W_1 = 0.$$

Γι 'αυτό το λόγο η διαδικασία X φέρει το όνομα (κανονική) Brown «γέφυρα». Μια ματιά στα τροχιές αυτής της Brown «γέφυρας» (βλ. Σχήμα 6) μπορεί να μας πείσει ότι η ονομασία αυτή είναι δικαιολογημένη.



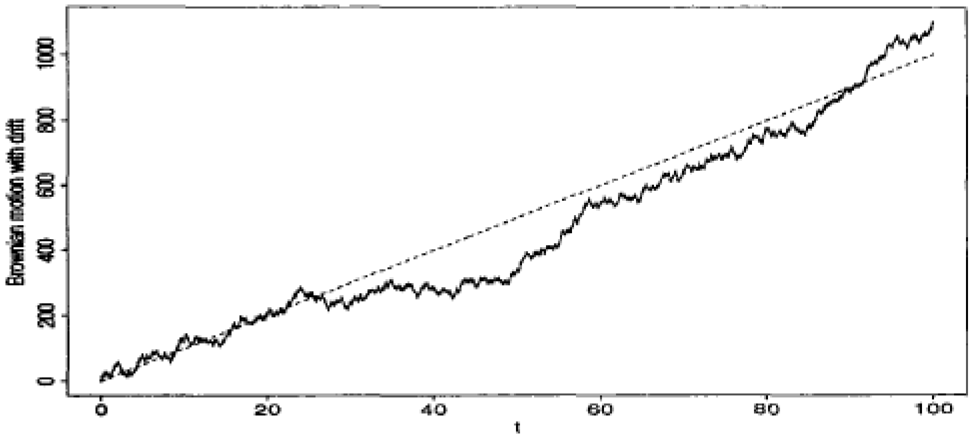
Σχήμα 6: Μία τροχιά της «γέφυρας» Brown (Brownian bridge).

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για γραμμικούς μετασχηματισμούς Γκαουσιανών τυχαίων διανυσμάτων μπορεί κανείς να δείξει ότι οι κατανομές πεπερασμένων διαστάσεων της X είναι Γκαουσιανές. Επομένως η X είναι μια Γκαουσιανή διαδικασία. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση της συνδιακύμανσης της Brown γέφυρας:

$$\mu_X(t) = 0 \; και \; c_X(t,s) = \min(t,s) - ts, \qquad s,t \in [0,1].$$

Δεδομένου ότι X είναι Γκαουσιανή, η γέφυρα Brown χαρακτηρίζεται από αυτές τις δύο συναρτήσεις.

Η γέφυρα Brown εμφανίζεται ως διαδικασία-όριο της κανονικοποιημένης εμπειρικής συνάρτησης κατανομής του δείγματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ομοιόμορφης κατανομής $U(0,1)$.



Σχήμα 7: Μία τροχιά μιας κίνησης Brown με μετατόπιση $X_t = 20W_t + 10t$, στο διάστημα [0,100]. Η διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση μετατόπισης $\mu_x(t) = 10t$.

Παράδειγμα 2.2.2 (Κίνηση Brown με Μετατόπιση (drift))

Θεωρούμε τη διαδικασία

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \qquad t \geq 0,$$

για σταθερές $\sigma > 0$ και $\mu \in \mathbb{R}$. Σαφώς, αυτή είναι μια Γκαουσιανή διαδικασία, με μέση τιμή και συνάρτηση συνδιακύμανσης:

$$\mu_X(t) = \mu t \; \kappa\alpha\iota \; c_X(t,s) = \sigma^2 \min(t,s), \qquad s,t \geq \; 0.$$

Η συνάρτηση μέσης τιμής $\mu_X(t) = \mu t$ (η ντετερμινιστική μετατόπιση της διαδικασίας) προσδιορίζει ουσιαστικά το χαρακτηριστικό σχήμα των τροχιών (βλ. Σχήμα 7). Ως εκ τούτου, X ονομάζεται η κίνηση Brown με (γραμμική) μετατόπιση.

Με τη θεμελιώδη ανακάλυψη του Bachelier το 1900 πως οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο (όπως οι χρηματιστηριακοί δείκτες, συναλλαγματικές ισοτιμίες, τιμές μετοχών, κλπ) μπορούν κάλλιστα να περιγραφούν από την κίνηση Brown, ένα νέο πεδίο των εφαρμογών των στοχαστικών διαδικασιών γεννήθηκε. Ωστόσο, η κίνηση Brown, ως μια Γκαουσιανή διαδικασία, μπορεί να υποθέσει αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι μια πολύ επιθυμητή ιδιότητα σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. τιμή μετοχής). Στις περίφημες δημοσιεύσεις τους, οι Black, Scholes και Merton [26] πρότειναν μια άλλη στοχαστική διαδικασία ως μοντέλο πρόβλεψης για την εξέλιξη των τιμών των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων

Παράδειγμα 2.2.3 (Γεωμετρική Κίνηση Brown)

Η διαδικασία που προτείνεται από τον Black, Scholes και Merton δίνεται από τη σχέση:

$$X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, \qquad t \geq 0,$$

δηλαδή, είναι μία εκθετική κίνηση Brown με μετατόπιση. Είναι φανερό τώρα, ότι η X δεν είναι μια Γκαουσιανή διαδικασία.

Για τους σκοπούς της μετέπειτα χρήσης, υπολογίζουμε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση της συνδιακύμανσης της γεωμετρικής κίνησης Brown. Γνωρίζουμε ότι για μια τυχαία μεταβλητή Z που ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή ισχύει:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Αυτό προκύπτει εύκολα, όπως φαίνεται και παρακάτω:

$$E[e^{\lambda Z}] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda Z} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz$$

$$= e^{\frac{\lambda^2}{2}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(z-\lambda)^2}{2}}\, dz$$

$$= e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(2\pi)^{-1/2}\, e^{\frac{-(z-\lambda)^2}{2}}$ είναι η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την $N(\lambda, 1)$. Από την σχέση (2.2) και από την ομοιότητα (self-similarity) της κίνησης Brown [35] προκύπτει αμέσως ότι:

$$\mu_X(t) = e^{\mu t} E[e^{\sigma W_t}] = e^{\mu t} E[e^{\sigma t^{1/2} W_t}] = e^{(\mu + 0.5\sigma^2)t}. \tag{2.3}$$

Για $s \leq t$, οι διαφορές $W_t - W_s$ και W_s είναι ανεξάρτητες και

$$W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t-s}.$$

Ως εκ τούτου,

$$c_X(t,s) = E[X_t X_s] - E[X_t]\, E[X_s]$$

$$= e^{\mu(t+s)} E[e^{\sigma(W_t + W_s)}] - e^{(\mu + 0.5\sigma^2)(t+s)}$$

$$= e^{\mu(t+s)}E\left[e^{\sigma[(W_t-W_s)+2W_s]}\right] - e^{(\mu+0.5\sigma^2)(t+s)}$$

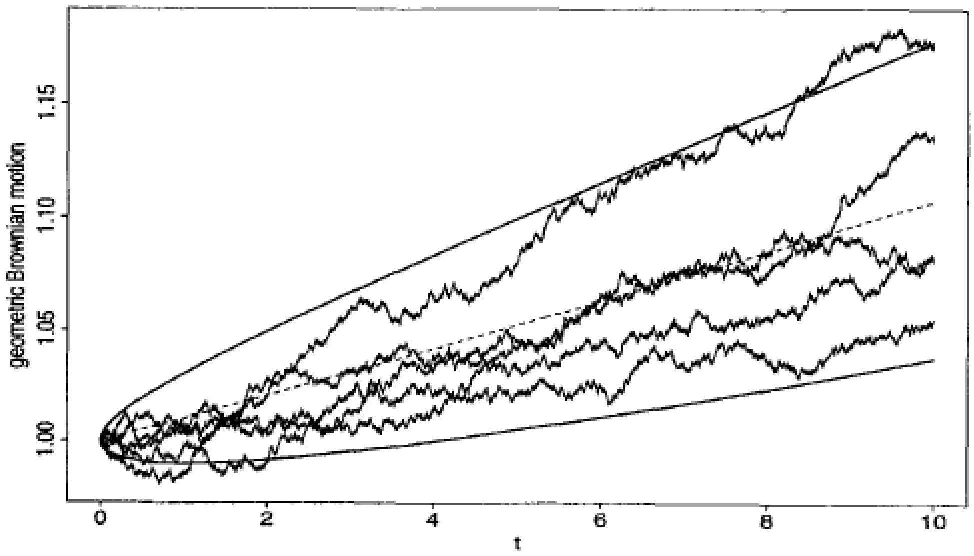
$$= e^{\mu(t+s)}E\left[e^{\sigma(W_t-W_s)}\right]E\left[e^{2\sigma W_s}\right] - e^{(\mu+0.5\sigma^2)(t+s)}$$

$$= e^{(\mu+0.5\sigma^2)(t+s)}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

Ειδικότερα, η γεωμετρική κίνηση Brown έχει συνάρτηση διασποράς

$$\sigma_X^2(t) = e^{(2\mu+\sigma^2)t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

Παρατηρούμε το Σχήμα 8 για μια εικόνα διαφόρων τροχών της γεωμετρικής κίνησης Brown.



Σχήμα 8: Μία τροχιά μιας γεωμετρικής κίνησης Brown με μετατόπιση $X_t = e^{\{0.01W_t+0.001t\}}$, στο διάστημα [0, 10]. Η διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση μέσης τιμής και οι ευθείες αντιπροσωπεύουν τις συναρτήσεις $\mu_x(t) \pm 2\sigma_x(t)$.

2.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή αναφερόμαστε σε εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων [1,2,37]. Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις μπορούν γενικά να γίνουν αντιληπτές ως ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις που «διαστρεβλώνονται» από κάποιον τυχαίο θόρυβο (random noise).

Στην παρακάτω υποενότητα 2.3.1 εξετάζουμε πρώτα τις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις και παραθέτουμε κάποια χρήσιμα παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση τους. Στη συνέχεια στην υποενότητα 2.3.2 αναφερόμαστε σε θέματα στοχαστικής ανάλυσης και ειδικότερα στο Λογισμό του Itô, και μελετάμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô, αφού πρώτα γίνει μια αναλυτική παρουσίαση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

2.3.1 Ντετερμινιστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Η θεωρία των διαφορικών εξισώσεων αποτελεί τη βάση για πολλές πτυχές των υπολογιστικών μαθηματικών. Η ιδέα που διέπει μια διαφορική εξίσωση είναι απλή: μας δίνεται μια συναρτησιακή σχέση

$$f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.4}$$

που περιέχει το χρόνο t, μια άγνωστη συνάρτηση $x(t)$ και πεπερασμένο πλήθος παραγώγων αυτής. Ο στόχος είναι να βρεθεί μια συνάρτηση $x(t)$ που να ικανοποιεί τη σχέση (2.4). Αυτή η συνάρτηση καλείται λύση της σχέσης (2.4) και πιθανότατα αυτή η λύση είναι μοναδική για δοθείσα αρχική συνθήκη, π.χ. $x(0) = x_0$.

Οι απλούστερες διαφορικές εξισώσεις είναι αυτές της πρώτης τάξης. Περιέχουν μόνο την ανεξάρτητη μεταβλητή t, τη συνάρτηση $x(t)$ και την πρώτη της παράγωγο $x'(t)$. Ιδανικά μια εξίσωση τέτοιας μορφής δίνεται στη μορφή

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = a\left(t, x(t)\right), \qquad x(0) = x_0 \tag{2.5}$$

για μια γνωστή συνάρτηση $\alpha(t, x)$. Ισοδύναμα, η (2.5) μπορεί να γραφτεί και ως

$$dx(t) = a\left(t, x(t)\right)dt, \qquad x(0) = x_0 \tag{2.6}$$

Αν ερμηνεύσουμε το $x(t)$ ως τη θέση ενός μικρού σωματιδίου στο χώρο τη χρονική στιγμή t, τότε η (2.6) περιγράφει την αλλαγή της θέσης του σωματιδίου σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t,\ t + dt]$. Η σχέση (2.6) μας δείχνει ότι η αλλαγή θέσης $dx(t) = x(t + dt) - x(t)$ είναι ανάλογη της αύξησης του χρόνου dt με συντελεστή $\alpha(t, x(t))$. Εναλλακτικά η (2.5) μας δείχνει ότι η ταχύτητα $x'(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου t και της θέσης $x(t)$.

Παράδειγμα 2.3.1 (Μερικές απλές διαφορικές εξισώσεις)

Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου:

$$x'(t) = \alpha(t)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη στην παραπάνω σχέση παίρνουμε τη λύση

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s)\, ds.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η ταχύτητα $x'(t)$ εξαρτάται από τη θέση του σωματιδίου $x(t)$, δηλαδή

$$x'(t) = c\, x(t)$$

για κάποια σταθερά c. Στη περίπτωση αυτή η απλή ολοκλήρωση δε βοηθάει, αλλά γνωρίζουμε ότι η λύση της είναι εκθετικής μορφής

$$x(t) = x(0) * e^{ct}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 2.3.2 (Χωρισμός Μεταβλητών)

Υποθέτουμε ότι το δεξί μέλος της σχέσης (2.5) μπορεί να χωριστεί σε ένα γινόμενο δύο συναρτήσεων ως ακολούθως:

$$x'(t) = \alpha_1(t)\alpha_2(x(t))$$

Συμβολικά, επαναδιατυπώνουμε αυτή τη διαφορική εξίσωση ως

$$\frac{dx}{\alpha_2(x)} = \alpha_1(t)dt \tag{2.7}$$

Προχωράμε στην ολοκλήρωση και των δύο μελών της σχέσης

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\alpha_2(x)} = \int_0^t a_1(s)ds \tag{2.8}$$

Στο αριστερό μέλος σχηματίζεται μια συνάρτηση του $x(t)$, στο δεξί μια συνάρτηση του t. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.8) παίρνουμε ότι

$$\frac{x'(t)}{\alpha_2(x(t))} = a_1(t)$$

η οποία είναι μια εναλλακτική μορφή της (2.7).

Εφαρμόζουμε αυτή τη μέθοδο στη διαφορική εξίσωση $x^{'}(t) = c * x(t)$ για κάποιο $x(0) \neq 0$. Τότε προκύπτει:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = c \int_{0}^{t} ds$$

που δίνει $x(t) = x(0) * e^{ct}$. Αυτή είναι η λύση στην οποία καταλήξαμε και στο παράδειγμα 2.4.1. ■

Από τα παραπάνω είδαμε μερικά σημαντικά θέματα σχετικά με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

- Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων είναι συναρτήσεις.
- Προκειμένου να βρούμε μια μοναδική (μερική) λύση, πρέπει να είναι γνωστή η αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Αν αυτή η μοναδική λύση ξεκινάει από ένα σημείο x_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε η συνάρτηση $x(t)$ είναι πλήρως καθορισμένη στο μέλλον, δηλαδή για $t > 0$.
- Λύσεις σε ακριβή μορφή (explicit solutions) για τις διαφορικές εξισώσεις αποτελούν την εξαίρεση στον κανόνα. Γενικά, κάποιος πρέπει να υπολογίζει τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων αριθμητικά.
- Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (2.5), λαμβάνει κάποιος μια ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$x(t) = x(0) + \int_{0}^{t} a(s, x(s))\, ds.$$

Αυτή η τροποποιημένη εξίσωση δεν είναι γενικά χρήσιμη για την επίλυση της (2.7), δίνει όμως μια καλή ιδέα για το πώς μπορούμε να ορίσουμε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση.

2.3.2 Λογισμός του Itô – Ολοκλήρωμα Itô

Ο λογισμός του Itô, που πήρε την ονομασία αυτήν από τον Ιάπωνα μαθηματικό Kiyoshi Itô, δίνει τη δυνατότητα νέων μεθόδων υπολογισμών στις στοχαστικές διαδικασίες, όπως η Κίνηση Brown. Έχει σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά και στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις [32].

Κεντρικό θέμα στο λογισμό του Itô αποτελεί το ολοκλήρωμα Itô, που είναι μια στοχαστική γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann. Το περιεχόμενο του ολοκληρώματος αποτελείται από στοχαστικές διαδικασίες:

$$Y_t = \int_0^t H_s \, dX_s$$

όπου H είναι μια ολοκληρώσιμη διαδικασία προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα που παράγεται από τη X, η οποία είναι μια κίνηση Brown, ή πιο γενικά, ένα martingale [1], [23], [32]. Το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος είναι μια άλλη στοχαστική διαδικασία. Συγκεκριμένα, το ολοκλήρωμα από το 0 μέχρι οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι μια τυχαία μεταβλητή, που ορίζεται ως το πρώτο όριο μιας συγκεκριμένης σειράς τυχαίων μεταβλητών [23], [32]. Οι τροχιές της κίνησης Brown δεν μπορούν να ικανοποιήσουν αυτές τις απαιτήσεις έτσι ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν στις συνήθεις τεχνικές υπολογισμών. Ένα σημαντικό σημείο είναι ότι το ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί εφόσον η διαδικασία H είναι προσαρμοσμένη, που στην ουσία σημαίνει ότι η τιμή τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από πληροφορίες που είναι διαθέσιμες μέχρι τη στιγμή αυτή.

Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, μία εφαρμογή θα μπορούσε να αποτελέσει ότι η ποσότητα εντός του ολοκληρώματος είναι στην ουσία το ποσό της μετοχής που κατέχουμε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Η τιμή της μετοχής και άλλων χρηματοοικονομικών στοιχείων μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια κίνηση Brown, ή συνηθέστερα ως μία Γεωμετρική κίνηση Brown. Τότε, το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô, αναπαριστά την απόδοση μια στρατηγικής συναλλαγών συνεχούς χρόνου. Σε αυτήν την περίπτωση η συνθήκη στην οποία προσαρμόζεται η Η είναι στην ουσία το γεγονός ότι η στρατηγική συναλλαγών μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο πληροφορίες που είναι διαθέσιμες μέχρι τη χρονική στιγμή t.

Σημαντικά αποτελέσματα του λογισμού του Itô περιλαμβάνουν την ολοκλήρωση κατά μέρη και το Λήμμα του Itô, που είναι μια εξίσωση αλλαγής μεταβλητών.

2.3.3 Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση του Itô

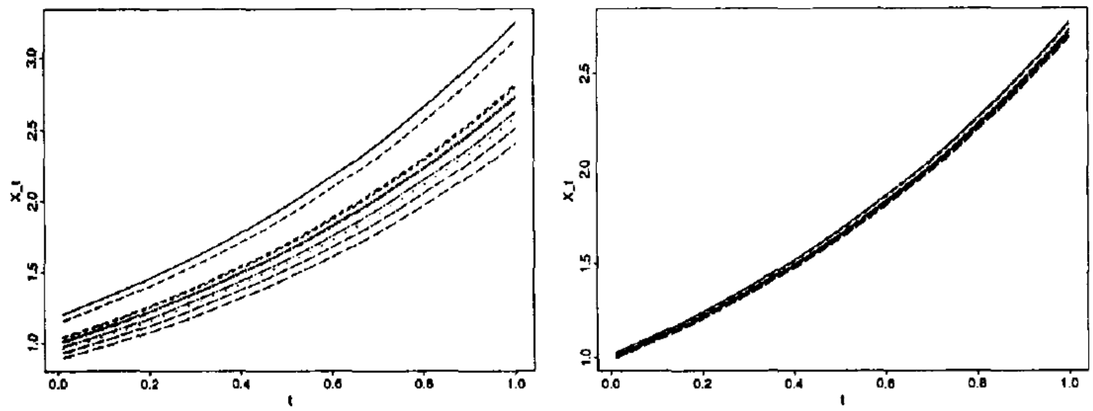
Τι είναι η στοχαστική διαφορική εξίσωση

Θεωρούμε τη ντετερμινιστική εξίσωση

$$dx(t) = a\big(t, x(t)\big)dt, \qquad x(0) = x_0$$

Ο ευκολότερος τρόπος για να εισαγάγουμε το στοιχείο του τυχαίου σε αυτήν την εξίσωση είναι με το να τροποποιήσουμε με τυχαίο τρόπο την αρχική συνθήκη. Τότε η λύση $x(t)$ γίνεται μια στοχαστική διαδικασία $(X_t, t \in [0, T])$:

$$dX_t = a(t, X_t)dt, \qquad X_0(\omega) = Y(\omega)$$



Σχήμα 9: 10 λύσεις $X_t = X_0 e^t$ της τυχαίας διαφορικής εξίσωσης $dX_t = X_t dt$ με αρχική συνθήκη $X_0 = exp\{N\}$, όπου N έχει μια κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Αριστερά: $\sigma^2 = 0.01$. Δεξία $\sigma^2 = 0.0001$.

Μια τέτοια εξίσωση αποκαλείται τυχαία διαφορική εξίσωση. Η επίλυση της δεν απαιτεί στοχαστικό λογισμό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλασσικές μεθόδους και να προσαρμόσουμε τη λύση στο αντίστοιχο αποτέλεσμα της αρχικής συνθήκης. Οι τυχαίες διαφορικές εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις με μια τροποποιούμενη αρχική συνθήκη. Η μελέτη τους μπορεί να είναι ενδιαφέρουσα στην περίπτωση που κάποιος θέλει να εξετάσει τη δυναμική της λύσης σε μια διαφορική εξίσωση μέσω μιας μικρής αλλαγής της αρχικής συνθήκης. Για παράδειγμα, το σχήμα 9 δείχνει ότι η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης μπορεί να αλλάξει αρκετά, ακόμα και αν η αλλαγή της αρχικής συνθήκης είναι μικρή.

Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας, το στοιχείο του τυχαίου στη διαφορική εξίσωση εισάγεται μέσω ενός πρόσθετου τυχαίου όρου θορύβου *(noise term)*:

$$dX_t = a(t, X_t)\; dt + b(t, X_t)\, dW_t, \qquad X_0(\omega) = Y(\omega) \tag{2.9}$$

Εδώ, ως συνήθως, η $W = (W_t, t \geq 0)$ συμβολίζει τη κίνηση Brown, και οι $a(t,x)$και $b(t,x)$ είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις. Η λύση X, αν υπάρχει, είναι μια στοχαστική διαδικασία. Η τυχαιότητα της $X = (X_t, t \epsilon [0,T])$, προκύπτει από τη μία μεριά από την αρχική συνθήκη και από την άλλη από τον θόρυβο που παράγεται από την κίνηση Brown.

Μια απλή ερμηνεία της (2.9) μας δείχνει ότι η αλλαγή $dX_t = X_{t+dt} - X_t$ προκαλείται από την αλλαγή dt του χρόνου, με συντελεστή $\alpha(t, X_t)$ σε συνδυασμό με μια αλλαγή $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ της κίνησης Brown, με συντελεστή $b(t, X_t)$. Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο, ότι η κίνηση Brown δε διαθέτει διαφορικές (παραγωγίσιμες) τροχιές, οπότε εύλογα προκύπτει η απορία για το πώς μπορεί να ερμηνευτεί η (2.9).

Ξεκάθαρα δεν υπάρχει μία μόνο απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Αλλά αφού έχουμε δει το ολοκλήρωμα Itô, μπορεί να γίνει η ακόλουθη πρόταση:

Ερμηνεία της (2.9) ως μια στοχαστικής εξίσωσης με ολοκλήρωμα

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dW_s\,, \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (2.10)$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann και το δεύτερο ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô.

Η εξίσωση (2.10) καλείται *στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô.*

Η κίνηση Brown W αποκαλείται διαδικασία-οδηγός της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης του Itô. Είναι δυνατή η αντικατάσταση της κίνησης Brown από άλλες διαδικασίες αλλά αυτό απαιτεί να οριστούν πιο γενικά στοχαστικά ολοκληρώματα. Δεν είναι ξεκάθαρο με μια ματιά αν τα ολοκληρώματα της (2.10) είναι καλώς ορισμένα. Κάτι τέτοιο αποτελεί απαραίτητο στοιχείο για τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô.

Αρχικά λοιπόν μας ενδιαφέρει να βρούμε τη λύση του στοχαστικού ολοκληρώματος. Δεν υπάρχει μόνο μια λύση, θα δείξουμε ότι υπάρχουν δύο ειδών λύσεις σε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Ονομάζονται ισχυρές και ασθενείς λύσεις.

Μια ισχυρή λύση στη στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô (2.10) είναι μια στοχαστική διαδικασία $X = (X_t, t \epsilon [0,T])$ [35] που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Η διαδικασία X μπορεί να προσαρμοστεί σε κίνηση Brown
- Τα ολοκλήρωμα που υπάρχουν στην (2.10) είναι καλώς ορισμένα ως Riemann και Itô στοχαστικά ολοκληρώματα αντιστοίχως.

- Η X είναι μια συνάρτηση της βασικής τροχιάς της κίνησης Brown και των εξισώσεων των συντελεστών $\alpha(t,x)$ και $b(t,x)$.

Επομένως μια ισχυρή λύση στην (2.10) βασίζεται στη τροχιά της βασικής κίνησης Brown. Αν αλλάζαμε τη κίνηση Brown με μια άλλη κίνηση Brown θα παίρναμε μια άλλη ισχυρή λύση που θα δίνονταν από την ίδια συναρτησιακή σχέση αλλά θα περιείχε τη νέα κίνηση Brown.

Από την άλλη σε μια ασθενή λύση η συμπεριφορά της τροχιάς δεν μας είναι απαραίτητη, αλλά μας ενδιαφέρει μόνο η κατανομή της X. Η αρχική συνθήκη X_0και οι εξισώσεις των συντελεστών $\alpha(t,x)$ και $b(t,x)$ είναι δεδομένα, και πρέπει να βρούμε την κίνηση Brown που να ικανοποιεί την (2.10). Αναφέρουμε ότι υπάρχουν στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις του Itô που έχουν μόνο ασθενείς λύσεις [35].

Οι ασθενείς λύσεις της X είναι επαρκείς προκειμένου να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά της κατανομής της X, όπως η μέση τιμή, η διασπορά και η συνδιακύμανση. Σε αυτήν την περίπτωση δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τις τροχιές της X.

Μια ισχυρή ή ασθενής λύση X της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης του Itô (2.10) αποκαλείται *διάχυση* (*diffusion*). Συγκεκριμένα, θέτοντας $\alpha(t,x)=0$ και $b(t,x)=1$ στην (2.10), παρατηρούμε ότι η κίνηση Brown είναι μια διαδικασία διάχυσης (diffusion process).

Σημασία έχει να δούμε και τι πρέπει να ισχύει έτσι ώστε να παίρνουμε μόνο ισχυρές λύσεις στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις του Itô. Υποθέτουμε ότι μία αρχική συνθήκη X_0, έχει επερασμένη δεύτερη ροπή: $E[X_0^2]<\infty$, και είναι ανεξάρτητη της $(W_t, t \ \geq \ 0)$.

Υποθέτουμε ότι, για κάθε $t \in [0,T]$ και $x,y \in R$, οι συναρτήσεις των συντελεστών $\alpha(t,x)$ και $b(t,x)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

- Είναι συνεχείς.
- Ικανοποιούν τη συνθήκη Lipschitz όσον αφορά τη δεύτερη μεταβλητή:

$$|a(t,x)-a(t-y)|+|b(t,x)+b(t,y)| \leq K|x-y|$$

Τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô (2.10) έχει μια ισχυρή μοναδική λύση X στο $[0,T]$ [35].

Παράδειγμα 2.3.3 (Γραμμική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση)

Υποθέτουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô:

$$X_t = X_0 + \int_0^t (c_1 X_s + c_2)\, ds + \int_0^t (\sigma_1 X_s + \sigma_2)\, dW_s\,, \qquad t \in [0, T] \tag{2.11}$$

για σταθερές c_i και σ_i, $i = 1{,}2$.

Οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται για

$$\alpha(t, x) = c_1 x + c_2 \quad \text{και} \quad b(t, x) = \sigma_1 x + \sigma_2 \tag{2.12}$$

Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô (2.11) με γραμμικές συναρτήσεις συντελεστών $\alpha(t, x)$ και $b(t, x)$ αποκαλείται γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση του Itô. Σύμφωνα με την παραπάνω θεωρία, οι γραμμικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις έχουν μια μοναδική ισχυρή λύση σε κάθε διάστημα $[0, T]$, οποιαδήποτε και αν είναι η επιλογών των σταθερών c_i και σ_i.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Στοχαστική Θεωρία Βελτιστοποίησης για Συμβόλαια Ραντών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το ρόλο των μαθηματικών ως εργαλείο στην εξέλιξη των συνταξιοδοτικών ταμείων. Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις καθορισμένες παροχές και τις καθορισμένες εισφορές των συνταξιοδοτικών ταμείων. Αυτά θα γίνουν στα πλαίσια της εξέτασης των βασικών μεθόδων συνταξιοδότησης στην αναλογιστική επιστήμη.

3.1 ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΠΑΡΟΧΕΣ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΙΚΩΝ ΤΑΜΕΙΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ντετερμινιστικές μεθόδους όσον αφορά σχήματα τελικών αποδοχών και θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά εργαλεία σε κάποιες απλές περιπτώσεις. Αρχικά θα περιγράψουμε την παραδοσιακή χρήση των μαθηματικών, και έπειτα θα μεταβούμε σε πιο πρόσφατες θεμελιώσεις χρησιμοποιώντας στοχαστικά μοντέλα. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο συνταξιοδοτικού σχήματος σύμφωνα με τα παρακάτω:

- Οι μισθοί αυξάνονται κάθε χρόνο, σύμφωνα με δείκτη κόστους διαβίωσης $CLI\ (t)$.
- Στην αρχή κάθε χρόνου $(t, t+1)$ ένα νέο μέλος μπαίνει στο σύστημα στην ηλικία των 25 με μισθό $1000 *\ CLI\ (t)/\ CLI\ (0)$.
- Όλα τα μέλη μένουν στο σύστημα μέχρι την ηλικία των 65 και η θνησιμότητα πριν την ηλικία των 65 θεωρείται μηδέν.
- Στην ηλικία των 65 το μέλος συνταξιοδοτείται και λαμβάνει μια σύνταξη ίση με το $1/60$ από το σύνολο των τελικών μισθών κάθε έτους, που καταβάλλονται ετήσια προκαταβολικά για όλη τη διάρκεια. Η σύνταξη αυτή εξασφαλίζεται από την αγορά μιας ράντας από μια ασφαλιστική εταιρεία ζωής έτσι ώστε το συνταξιοδοτικό ταμείο να μην έχει καμία περαιτέρω ευθύνη για την πραγματοποίηση πληρωμών στο μέλος. Ο τελικός μισθός ορίζεται ως ο μισθός στην ηλικία των 65, συμπεριλαμβανομένου της

αύξησης του κόστους διαβίωσης στην ηλικία 65 ετών. Αυτός ο ορισμός του τελικού μισθού είναι ελαφρώς γενναιόδωρος, αλλά απλοποιεί μερικά από τα επιχειρήματα που ακολουθούν.

- Οι μισθοί αυξάνονται κατά την έναρξη κάθε έτους και περιλαμβάνουν ένα συνδυασμό που σχετίζεται με την ηλικία και το κόστος των αυξήσεων διαβίωσης.

Παράδειγμα 3.1.1

Έστω ότι $S(t,x)$ αντιπροσωπεύει το μισθό την χρονική στιγμή t για άτομο ηλικίας x . Η δομή του σχήματος που περιγράφτηκε παραπάνω υποδεικνύει ότι:

$$S(t+1,x+1) = S(t,x) * [w(x+1)/w(x)] * \; [CLI\,(t+1)/\,CLI\,(t)] \qquad (3.1)$$

όπου η συνάρτηση $w(x)$ είναι το προφίλ των μισθών και καθορίζει τις αυξήσεις που σχετίζονται με την ηλικία. Αρχικά, υποθέτουμε ότι

$$S(0,x) = 10000w(x)/w(25) \text{ για } x = 25, \dots, 65$$

και επομένως εύκολα προκύπτει ότι έχουμε την ταυτότητα:

$$S(t,x) = \; S(0,x) * CLI(t)/CLI(0), \qquad (3.2)$$

όπου CLI ο δείκτης τιμών καταναλωτή. ■

3.1.1 Οι Δημοφιλέστερες Προσεγγίσεις

Ο παραδοσιακός ρόλος του αναλογιστή είναι διπλός, να προσδιορίσει την αναλογιστική υποχρέωση κατά το χρόνο t (το οποίο στη συνέχεια συγκρίνεται με την αξία των περιουσιακών στοιχείων της ασφαλιστικής) και να προτείνει ένα μέρος εισφοράς. Το τελευταίο έρχεται σε αντίθεση με ένα παραδοσιακό ασφαλιστήριο συμβόλαιο ζωής όπου δεν είναι απαραίτητο να καταβληθεί το μέρος εισφοράς ακριβώς στην αρχή του συμβολαίου. Για ένα ταμείο καθορισμένης παροχής (Defined Benefit, (DB)), εάν αποδειχθεί ότι το μέρος εισφοράς ήταν πολύ χαμηλό στο παρελθόν, τότε οι κάτοχοι των κεφαλαίων μπορεί να καταβάλλουν αυξημένες εισφορές στο μέλλον. Αυτή η αρκετά απλουστευμένη παραδοχή καθυστέρησε σημαντικά την πρόοδο του κλάδου των μαθηματικών συνταξιοδότησης αφού δεν επιβαλλόταν καμιά ποινή για λανθασμένες επενδυτικές συμβουλές. Υπάρχουν πολυάριθμες προσεγγίσεις (στις μεθόδους χρηματοδότησης) για την απάντηση των ερωτημάτων που αφορούν το ρόλο του αναλογιστή.

Θα περιγράψουμε δύο από τις πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις:

- **<u>Η πρώτη προσέγγιση</u>** (*μέθοδος ηλικίας εισόδου στο Ηνωμένο Βασίλειο*) αντιμετωπίζει τη σύμβαση σαν ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο ζωής και θέτει το ερώτημα: Τι μέρος εισφορών πρέπει να καταβληθεί (σαν ποσοστό τις εκατό του μισθού) εάν ένα νέο μέλος πληρώνει σε όλη της διάρκεια της εργασίας του, προκειμένου να έχει τη σωστή ποσότητα διαθέσιμου κεφαλαίου σε ηλικία 65 ετών για να αγοράσει την υποσχόμενη σύνταξη? Εφόσον απαντηθεί αυτή η ερώτηση, τότε μπορεί να υπολογιστεί και η συνολική υποχρέωση του συνταξιοδοτικού ταμείου.

- **<u>Η δεύτερη προσέγγιση</u>** (*Προβλεπόμενη μέθοδος της μονάδας*) υπολογίζει πρώτα την αναλογιστική υποχρέωση. Οι τιμές των δεδουλευμένων υποχρεώσεων εξυπηρετούν μόνο τις δεδουλευμένες μέχρι σήμερα και δεν έχουν καμία αποζημίωση για τα οφέλη που προκύπτουν από τη συνεχή υπηρεσία στο μέλλον. Η αξιολόγηση λαμβάνει επίσης υπόψη τις προβλεπόμενες μελλοντικές αυξήσεις των μισθών (σχετιζόμενη με την ηλικία και το κόστος του κύκλου ζωής).

Σ αυτή την περίπτωση η *αναλογιστική υποχρέωση* την χρονική στιγμή t είναι :

$$AL(t) = \sum_{x=25}^{64} \frac{x-25}{60} \left(S(t,x) \frac{w(65)}{w(x)} (1+e)^{65-x} \right) * u^{65-x} \ddot{a}_{65} + \frac{40}{60} S(t,65) \ddot{a}_{65} \qquad (3.3)$$

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η σύνταξη εξαγοράζεται σε ηλικία 65 ετών. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης ορισμού του $AL(t)$ αντιπροσωπεύει την υποχρέωση για το μέλος που μόλις έχει συμπληρώσει το 65^{o} έτος ηλικίας του αλλά στον οποίο δεν έχει καταβληθεί ακόμα η πρώτη σύνταξη. Σε αυτή την εξίσωση, το e αντιπροσωπεύει το εκτιμώμενο μέρος αύξησης του $CL(t)$, με $u = 1/(1+i)$ όπου i είναι το ποσοστό επιτοκίου και $\ddot{a}_{65}$ είναι η εκτιμώμενη τιμή μονάδας της σύνταξης από την ηλικία των 65 ετών. Είναι σωστότερο αλλά και πολύπλοκο να ενσωματωθεί μια σειρά από μειώσεις πριν από την ηλικία των 65 ετών, όπως είναι η θνησιμότητα, η συνταξιοδότηση λόγω κακής υγείας και η παραίτηση κάποιου από την εταιρεία.

Δεδομένου ότι οι μισθοί σε κάθε σταθερή ηλικία x αυξάνονται κάθε έτος σύμφωνα με το ρυθμό αύξησης του δείκτη $CLI\ (t)$, μπορούμε να σημειώσουμε ότι

$$AL(t+1) = \frac{AL(t)*CLI(t+1)}{CLI(t)} \qquad (3.4)$$

Το κανονικό μέρος εισφοράς, $NC(t)$, πληρωτέο την στιγμή t , είναι το ποσοστό όπου εξασφαλίζει ότι :

- Εάν αρχίσουμε την στιγμή t με τα περιουσιακά στοιχεία να είναι ίσα με τις υποχρεώσεις.
- Εάν ο κάτοχος συμβολαίου πληρώνει κανονικά τις εισφορές του, έτσι ώστε να ισχύει: $TSR(t)$: $\sum_{x=25}^{64} S(t,x)$
- Εάν τα άτομα του συνταξιοδοτικού ταμείου είναι σταθερά στις καταβολές τους, διασφαλίζουν την αγορά σύνταξης (για τιμή $B(t)$) για μέλη που μόλις συμπληρώσουν την ηλικία των 65 ετών.
- Εάν η εξέλιξη των παραδοχών είναι όπως προβλεπόταν στην βάση αποτίμησης (απόδοση των επενδύσεων, η αύξηση του μισθού κατά τη χρονική στιγμή $t + 1$ και κανένας θάνατος), τότε:
- Τα περιουσιακά στοιχεία θα εξακολουθήσουν να είναι ίσα με τις υποχρεώσεις στο χρόνο $t + 1$.

Έτσι ισχύει,

$$\big(AL(t) + NC(t)TSR(t) - B(t)\big) * (1 + i) = AL(t + 1) = AL(t)(1 + e) \qquad (3.5)$$

οπότε έχουμε ότι,

$$NC(t) = \frac{B(t) - AL(t)(1 - u_u)}{TSR(t)}, \qquad (3.6)$$

όπου $u_u = (1 + e)/(1 + i)$ είναι το υποτιθέμενο πραγματικό ποσοστό προεξόφλησης.

Το υπολειπόμενο στοιχείο της αξίας της χρηματοδότησης είναι η σύσταση του ποσοστού εισφοράς (έχοντας κατά νου ότι το $NC(t)$ είναι κατάλληλο μόνο εάν τα περιουσιακά στοιχεία είναι ισόποσα με τις υποχρεώσεις).

Αυτό μας οδηγεί στην έννοια της απόσβεσης του πλεονάσματος ή ελλείμματος. Η απλούστερη προσέγγιση είναι αυτή που υιοθετήθηκε στο Ηνωμένο Βασίλειο.

Έστω $F(t)$ αντιπροσωπεύει το μέγεθος του ταμείου κατά το χρόνο t, έτσι ώστε το έλλειμμα με βάση χρηματοδότηση είναι $AL(t) - F(t)$.

Το προτεινόμενο ποσοστό εισφοράς είναι:

$$RCR(t) = NC(t) + \frac{AL(t) - F(t)}{TSR(t)\ddot{a}_{\overline{m}|, i_u}} \qquad (3.7)$$

όπου, $$\ddot{a}_{\overline{m}|,i_u} = \sum_{k=0}^{m-1} u_u^k = \frac{1-u_u^m}{1-u_u} \quad (3.8)$$

Εδώ, η σταθερά m είναι η περίοδος απόσβεσης. Αυτό θα μπορούσε να ρυθμιστεί ανάλογα με το πόσο γρήγορα η ασφαλιστική εταιρεία θέλει να ξεφορτωθεί το πλεόνασμα ή έλλειμμα. Παρόλα αυτά, ορισμένες φορές, τίθεται ίση με την αναμενόμενη μελλοντική ζωή δουλείας των ενεργών μελών, σύμφωνα με ορισμένες κατευθυντήριες γραμμές κοστολόγησης.

Μια σχετική προσέγγιση για την απόσβεση χρησιμοποιείται στη Βόρεια Αμερική. Η προσαρμογή χωρίζεται σε m συνιστώσες που η κάθε μία αφορά την απόσβεση του πλεονάσματος/ελλείμματος που προκύπτει σε κάθε ένα από τα τελευταία χρόνια m. Οι διαφορές αυτές (σε σύγκριση τα την προσέγγιση του Ηνωμένου Βασιλείου) οδηγούν σε μεγαλύτερη διασπορά στα ποσοστά εισφορών.

Μέσα σε αυτό το ντετερμινιστικό πλαίσιο, ο αναλογιστής έχει τον έλεγχο των υποθέσεων. Κατά την παράδοση, για παράδειγμα, πρέπει να υπάρχουν σχετικοί εξωτερικοί έλεγχοι για το πώς θα προσδιοριστούν οι αρχικές παραδοχές. Ως συνέπεια οι αναλογιστές τείνουν να είναι πιο επιφυλακτικοί στις εκτιμήσεις τους από ότι πρέπει, που αυτό σημαίνει ότι είναι χαμηλό το i, υψηλό το e, χαμηλή η θνησιμότητα στην συνταξιοδότηση. Με αποτέλεσμα αυτό να καταλήγει σε συνετές υπερεκτιμήσεις, της αξίας των υποχρεώσεων και στο απαιτούμενο μέρος εισφοράς. Όπως αναφέρθηκε πριν, αυτό δεν προκάλεσε κάποιο πρόβλημα καθώς μια υπερβολική πληρωμή σε ένα χρόνο, μπορεί να εξισορροπηθεί από τη μείωση των πληρωμών κατά τα επόμενα χρόνια, όταν το πλεόνασμα προκύπτει ως αποτέλεσμα της χρήσης μιας επιφυλακτικής βάση. Ένα πρόβλημα με αυτήν την προσέγγιση είναι ότι δεν υπάρχει λογική πίσω από το επίπεδο της προσοχής στις αρχικές παραδοχές, δηλαδή καμία προσπάθεια δεν έχει γίνει ποτέ ώστε να συνδέσει το επίπεδο της προσοχής στις επιμέρους υποθέσεις τού επίπεδου κινδύνου.

3.2 ΣΥΝΤΑΞΕΙΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΣΦΟΡΩΝ

Οι συντάξεις καθορισμένων εισφορών (Defined Contribution (DC)) λειτουργούν με εντελώς διαφορετικό τρόπο από τις συντάξεις καθορισμένων παροχών (DB). Στην τελευταία, η ασφαλιστική εταιρεία χρηματοδοτεί το ταμείο που συνήθως αναλαμβάνει την πλειοψηφία του κινδύνου (ειδικά τον επενδυτικό κίνδυνο). Σε ένα καθορισμένων εισφορών συνταξιοδοτικό ταμείο, τα μεμονωμένα μέλη, αναλαμβάνουν το σύνολο των κινδύνων. Σε ένα τυπικό επαγγελματικό καθορισμένων εισφορών ταμείο συντάξεων, το μέρος εισφοράς που καταβάλλεται τόσο από το μέλος όσο και από τον εργοδότη είναι ένα σταθερό μέρος του μισθού, το οποίο επενδύεται σε διάφορα αμοιβαία κεφαλαία. Το αποτέλεσμα είναι ότι υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα σχετικά με το ποσό της σύνταξης που μπορεί να επιτευχθεί κατά τη στιγμή της συνταξιοδότησης. Και αυτό έρχεται σε αντίθεση με μια σύνταξη καθορισμένων παροχών που αποδίδει ένα καλά ορισμένο επίπεδο σύνταξης.

Μεμονωμένες συντάξεις καθορισμένων εισφορών (DC) (δηλαδή, προσωπικές συντάξεις) προσφέρουν επιπλέον ευελιξία έναντι των επαγγελματικών συστημάτων, μέσω της μεταβολής του μέρους της εισφοράς. Αυτό σημαίνει ότι ο ασφαλισμένος μπορεί να επιλέξει να πληρώσει περισσότερα αν οι επενδύσεις των συνταξιοδοτικών ταμείων του δεν έχουν αποδώσει τα αναμενόμενα.

Συνήθως, δεν υπήρξε ποτέ οποιαδήποτε επίσημη αναγκαιότητα για αναλογιστική ή άλλη συμβουλή ώστε να βοηθήσει τους ασφαλισμένους του ταμείου καθορισμένης εισφοράς που επέλεξαν πώς να επενδύσουν ή τι επίπεδο της εισφοράς θα πρέπει να πληρώσουν. Η εξαίρεση σε αυτό (π.χ. στο Ηνωμένο Βασίλειο, 2003) είναι ότι στο σημείο πώλησης του προσωπικού συνταξιοδοτικού συμβολαίου, ο ασφαλιστής μπορεί να είναι υποχρεωμένος να παρέχει στο πιθανό ασφαλισμένο ντετερμινιστικές προβλέψεις έτσι ώστε αυτός να αποφασίσει το κατάλληλο μέρος εισφοράς. Παρομοίως, υπάρχοντες ασφαλισμένοι συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών μπορούν επίσης να λαμβάνουν ντετερμινιστικές προβλέψεις.

Εξαιτίας αυτής της κατάστασης οι ασφαλισμένοι των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών (DC) έχουν άγνοια σχετικά με το επίπεδο κίνδυνου που είναι εκτεθειμένοι.

Έτσι οι ασφαλισμένοι πρέπει αναγκαστικά να αποδέχονται τους κινδύνους που αντιμετωπίζουν. Ωστόσο, η αυξανόμενη χρήση των στοχαστικών μεθόδων σε συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών έχει προκαλέσει παρόμοιες διεργασίες σε συντάξεις καθορισμένων εισφορών (DC). Σκοπός της στοχαστικής μοντελοποίησης για συντάξεις καθορισμένων εισφορών (DC) είναι να:

- Πληροφορούν τα υπάρχοντα μέλη, για τους πιθανούς κινδύνους που αντιμετωπίζουν, εφόσον διατηρούν την τρέχουσα στρατηγική.
- Ενημερώνουν πιθανά νέα μέλη του ταμείου καθορισμένης εισφοράς ή καινούργιους ασφαλισμένους προσωπικών συντάξεων σχετικά με τους κινδύνους που αντιμετωπίζουν για να τους επιτρέψει να επιλέξουν μεταξύ των συντάξεων καθορισμένης εισφοράς (DC) και ορισμένων εναλλακτικών λύσεων.
- Επιτρέπουν στους υπάρχοντες ασφαλισμένους να διαχειρίζονται τους κινδύνους που αντιμετωπίζουν με την επιλογή μιας στρατηγικής επενδύσεων και εισφορών, η οποία θα καθορίζεται σύμφωνα με τη διάθεση ανάληψης κινδύνου καθώς και με την τρέχουσα κατάσταση των

προσωπικών τους συνταξιοδοτικών τους λογαριασμών καθορισμένων εισφορών (DC).

- Επιτρέπει στα μέλη να υιοθετήσουν μια στρατηγική που με μεγάλη πιθανότητα, θα τους επιτρέψει να συνταξιοδοτηθούν σε μια συγκεκριμένη ηλικία με ένα υψηλό επίπεδο σύνταξης.

Θα επικεντρωθούμε στις επαγγελματικές καθορισμένες εισφορές (DC) συνταξιοδοτικών ταμείων, όπου το μέρος εισφορών είναι ένα σταθερό ποσοστό του μισθού. Αυτός το είδος του συστήματος έχει αναλυθεί εκτενώς από Blake, Cairns & Dowd [4], Haberman & Vigna [20] και Cairns, Blake & Dowd [9,10].

3.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

3.3.1 Ιστορική Αναδρομή

Από το τέλος της δεκαετίας του 80, είχαμε δει την ανάπτυξη από έναν αριθμό πιθανών προσεγγίσεων στην διαχείριση συνταξιοδοτικών ταμείων χρησιμοποιώντας τα στοχαστικά μοντέλα. Στην βιβλιογραφία μέχρι σήμερα, έχουν εστιάσει σε σχετικά απλά μοντέλα, με σκοπό να καταλάβουμε την στοχαστική φύση της δυναμικής των συνταξιοδοτικών ταμείων και την αλληλεπίδραση με τις μεθόδους χρηματοδότησης που χρησιμοποιούνται. Ο σκοπός του τρίτου κεφαλαίου είναι να μας δώσει να καταλάβουμε μερικούς από τους παράγοντες που είναι πιθανό να είναι σημαντικοί στον πιο πολύπλοκο κόσμο στον οποίο εργαζόμαστε.

Το έργο για το θέμα αυτό πραγματοποιήθηκε αρχικά από τον Dufresne σε μια σειρά εργασιών [14-16]. Υποθέσεις που έγιναν σε αυτήν την αρχική εργασία αργότερα απλουστεύτηκαν [21], και διαπιστώθηκε ότι τα αρχικά συμπεράσματα παρέμειναν σε γενικές γραμμές ανέπαφα. Ο Dufresne πήρε τη σειρά των αναλογιστικών υποχρεώσεων $AL(0)$, $AL(1)$ .... ως δεδομένη. Η μέθοδος αποτίμησης και οι αρχικές παραδοχές θεωρήθηκαν γνωστά. Συγκεκριμένα, όλα τα στοιχεία των αρχικών παραδοχών ήταν οι βέλτιστες εκτιμήσεις των σχετικών ποσοτήτων.

Έχουμε επικεντρωθεί στην δυναμική του μεγέθους των κεφαλαίων και του ποσοστού εισφοράς

$$F(t+1) = \big(1 + i(t+1)\big) * [F(t) + RCR(t)TSR(t) - B(t)] \tag{3.9}$$

όπου $i(t+1)$ ήταν η επιτευχθείσα απόδοση των κεφαλαίων από τη χρονική στιγμή t στη χρονική στιγμή $t+1$, και

$$RCR(t) = NC(t) + \frac{AL(t) - F(t)}{TSR(t)\ddot{a}_{\overline{m|},i_u}} \quad (3.10)$$

Απλά μοντέλα για το $i(t)$ θα μας επιτρέψουν να παράγουμε αναλυτικές (ή σχεδόν αναλυτικές) φόρμουλες υπολογισμού για την ανεξάρτητη μέση τιμή και διασπορά τόσο της $F(t)$ όσο και της $RCR(t)$. Το βασικό χαρακτηριστικό των ερευνών αυτών ήταν η εκτίμηση του πώς αυτές οι τιμές εξαρτώνται από την περίοδο απόσβεσης m. Διαπιστώθηκε ότι αν το m είναι πάρα πολύ μεγάλο (συνήθως μεγαλύτερο από 10 χρόνια), τότε η στρατηγική αποσβέσεων ήταν ανεπαρκής, δηλαδή μια χαμηλότερη τιμή για το m θα μείωνε τη διασπορά τόσο του μεγέθους του κεφαλαίου όσο και το μέρος εισφοράς. Κάτω από ένα ορισμένο όριο για το m, ωστόσο, θα υπάρξει μια εξισορρόπηση μεταξύ συνεχής μείωσης στο $Var[F(t)]$ και στο αυξανόμενο $Var[RCR(t)]$.

Ένας αριθμός από περαιτέρω μελέτες έγιναν από τους Cairns & Parker [11] και Huang [22]. Σε παλαιότερα έργα, η μόνη μεταβλητή ελέγχου ήταν η περίοδος απόσβεσης. Οι Cairns & Parker επέκτειναν αυτό ώστε να συμπεριλάβει την τιμή αποτίμησης του επιτοκίου, ενώ ο Huang επέκτεινε αυτό περαιτέρω ώστε να συμπεριλάβει τη στρατηγική διαχείριση περιουσιακών στοιχείων ως μεταβλητή ελέγχου. Βρήκαν ότι να υπάρχει ένα ποσοστό αποτίμησης επιτοκίου διαφορετικό από το $E[i(t)]$ συνείσφερε θετικά στην ανάλυση τους καθώς η χρησιμοποίηση συντηρητικών αρχικών παραδοχών θα έχει ως αποτέλεσμα τη συστηματική παραγωγή πλεονάσματος. Αυτό σήμαινε ότι η διαδικασία λήψης αποφάσεων έπρεπε τώρα να λάβει υπόψη το μέσο μέρος εισφοράς, καθώς και τις αποκλίσεις. Οι Cairns & Parker πραγματοποίησαν επίσης μια ολοκληρωμένη ανάλυση ευαισθησίας όσον αφορά τις διάφορες παραμέτρους του μοντέλου.

3.3.2 Στοχαστικός Δυναμικός Έλεγχος

Μέχρι αυτό το σημείο, η διαδικασία λήψης αποφάσεων ήταν ακόμη σχετικά υποκειμενική. Δεν υπήρχε επίσημος στόχος και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας συγκεκριμένης στρατηγικής εκτός του εύρους των αποτελεσματικών στρατηγικών. Αυτό στη συνέχεια οδήγησε στην εισαγωγή της στοχαστικής θεωρίας ελέγχου, ως μέσο διευκόλυνσης της διαδικασίας λήψης αποφάσεων. Η προσέγγιση αυτή έχει ληφθεί με τη χρήση τόσο μοντελοποίησης συνεχούς χρόνου [7,11] όσο και διακριτού χρόνου [19]. Η πρώτη προσέγγιση δίνει κάποια ισχυρότερα αποτελέσματα και αυτό είναι που θα περιγράψουμε εδώ.

Αφού έχει οριστεί η αντικειμενική συνάρτηση, ο δυναμικός στοχαστικός έλεγχος (θεωρητικά τουλάχιστον) προσδιορίζει τη δυναμική στρατηγική ελέγχου, η οποία είναι η βέλτιστη ανά πάσα χρονική στιγμή στο μέλλον και σε όλες τις πιθανές μελλοντικές καταστάσεις του κόσμου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την προηγούμενη προσέγγιση, όπου θα μπορούσε να θεωρηθεί ένα περιορισμένο εύρος των ελέγχων και το οποίο θα μπορούσε να οδηγήσει μόνο στην αναγνώριση μιας στρατηγικής, η οποία είναι βέλτιστη για μία μόνο κατάσταση του.

Στο στοχαστικό έλεγχο, δεν υπάρχει αυτόματη αναγκαιότητα να διεξάγονται αναλογιστικές εκτιμήσεις ή να καθορίζονται ποσοστά εισφοράς σε σχέση με ένα κανονικό μέρος εισφοράς που αυξάνεται με άκαμπτες κατευθυντήριες γραμμές απόσβεσης. Αντιθέτως, διατυπώνουμε μια αντικειμενική συνάρτηση η οποία θα λαμβάνει υπόψη τα συμφέροντα των διαφόρων ενδιαφερομένων μερών του συνταξιοδοτικού ταμείου. Επομένως η $F(t)$ ορίζεται ως το μέγεθος του ταμείου κατά το χρόνο t και η $c(t)$ το αντίστοιχο μέρος εισφοράς. Ο Cairns [10] πρότεινε ότι η δυναμική της $F(t)$ διέπεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση (βλέπε Λογισμό του Itô)

$$dF(t) = F(t)d\delta(t) + c(t)dt - (Bdt + \sigma_b dW_b(t)) \tag{3.11}$$

Αυτό προϋποθέτει ότι το όφελος της δαπάνης έχει μια σταθερή μέση τιμή με τις διακυμάνσεις να αντικατοπτρίζουν τις δημογραφικές και άλλες αβεβαιότητες στις πληρωμές των παροχών. Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της (3.11) δίνει, το άμεσο επενδυτικό κέρδος του κεφαλαίου από την στιγμή t έως την στιγμή $t + dt$. Ο όρος $d\delta(t)$ αντιπροσωπεύει το στιγμιαίο κέρδος ανά μονάδα επένδυσης και περιέχει τη συνήθη συνέλιξη της μετατόπισης (dt) και της κίνησης Brown $dW(t)$ με όρους. Ο δεύτερο όρος αντιπροσωπεύει τις εισφορές που καταβάλλονται από το ανάδοχο ταμείο. Ο τρίτος όρος στην παρένθεση δείχνει το όφελος της δαπάνης. Ο Boulier et al. [6] και ο Cairns [10] θεώρησαν τόσο το μέρος εισφοράς, $c(t)$, όσο και τη (πιθανώς δυναμική) στρατηγική κατανομή των περιουσιακών στοιχείων, $p(t)$, ήταν και οι δύο μεταβλητές ελέγχου, οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης του ταμείου. Η αντικειμενική συνάρτηση ήταν παρόμοια με εκείνη που εισάγεται από τον Merton [28,29] (βλέπε επίσης [28]) και μπορεί να περιγραφεί ως η προεξοφλημένη αναμενόμενη συνάρτηση απώλειας:

$$\Lambda(t,f)(c,p) = E\left[\int_t^{\infty} e^{-\beta s} L\big(s, c(s), F(s)\big) ds \,\middle|\, F(t) = f\right] \tag{3.12}$$

Από το τρέχον μέγεθος ταμείου, $F(t) = f$ οι αναμενόμενες προεξοφλημένες ζημίες, εξαρτώνται από την επιλογή ελέγχου στρατηγικής c και p. Οι στρατηγικές αυτές μπορεί να εξαρτούνται από την στιγμή της αίτησης, s, στο μέλλον, καθώς και από την ‘’κατάσταση του κόσμου’’ εκείνη την εποχή (δηλαδή, $F(s)$).

Η συνάρτηση $L(t, c, f)$ είναι μια συνάρτηση απώλειας, η οποία μετρά πόσο δυσαρεστημένοι (σε μια συλλογική έννοια) είναι οι μέτοχοι σχετικά με το τι συμβαίνει τη στιγμή s με δεδομένο ότι $F(s) = f$ και ότι το μέρος εισφοράς θα είναι $c(s) = c$. Η συνάρτηση προεξόφλησης $e^{-\beta s}$ καθορίζει τη σχετική επιβάρυνση που συνδέεται με τα αποτελέσματα σε διάφορα σημεία στο μέλλον: για παράδειγμα, μια μεγάλη τιμή του β, θα δώσει μεγαλύτερη έμφαση βραχυπρόθεσμα.

Ο στόχος του προβλήματος είναι να προσδιορίσει ποιες στρατηγικές c και p ελαχιστοποιούν την $\Lambda(t, f)(c, p)$.

Έτσι ώστε

$$V(t, f) = \inf_{c,p} \Lambda(t, f)(c, p) \tag{3.13}$$

Για προβλήματα αυτού του τύπου είναι γνωστό ότι το $V(t, f)$ μπορεί να επιλυθεί με την χρήση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) [3], [17], [24] και ο Cairns [10] χρησιμοποίησε αυτή την εξίσωση για να προσδιορίσει τη βέλτιστη στρατηγική εισφορών και περιουσιακών στοιχείων. Στη συνέχεια αναλύονται παραδείγματα στα οποία η εξίσωση απώλειας είναι τετραγωνική σε c και f καθώς και δυναμική και εκθετική απώλεια μόνο του c. Αυτά οδήγησαν σε ενδιαφέρον συμπεράσματα σχετικά με τη βέλτιστη τιμή για το c και το p. Μερικά από αυτά τα αποτελέσματα ήταν διαισθητικά λογικά, αλλά άλλα ήταν λιγότερο, έτσι και αυτό θα μπορούσε να συνδεθεί με τις πτυχές της αρχικής συνάρτησης απώλειας. Ο Cairns κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η εναλλακτική εξίσωση απώλειας έπρεπε να αναπτυχθεί για την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων και αυτό είναι το αντικείμενο των εν εξελίξει εργασιών.

3.3.3 Στοχαστικός Βέλτιστος Έλεγχος

Η θεωρία του στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου μπορεί να εφαρμοστεί για να βρούμε τη βέλτιστη επενδυτική πολιτική πριν και μετά την συνταξιοδότηση σε ένα συγκεκριμένο συνταξιοδοτικό πλάνο όπου τα οφέλη πληρώνονται υπό την μορφή ραντών. Οι ράντες υποτίθεται ότι έχουν εξασφαλιστεί σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Χρησιμοποιώντας διαφορετικά είδη συναρτήσεων ωφελιμότητας προσπαθούμε να δούμε διαφορετικές στρατηγικές τόσο από την επενδυτική σκοπιά (πριν την συνταξιοδότηση) όσο και από την σκοπιά της πληρωμής της σύνταξης (μετά την συνταξιοδότηση). Η αναγκαία αλλαγή στρατηγικής μετά την συνταξιοδότηση μπορεί να ερμηνευτεί σ’ αυτό το μοντέλο σαν ένα τυπικό ALM (Asset Liability Management) περιορισμό, λαμβάνοντας υπόψη ένα τεχνικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται από τον ασφαλιστή.

Το πρόβλημα της επιλογής της καλύτερης στρατηγικής για τους διαχειριστές συνταξιοδοτικών σχημάτων γίνεται συνεχώς και πιο ενδιαφέρον ιδιαίτερα όσον αφορά την καθορισμένη εισφορά συνταξιοδοτικών σχημάτων και ραντών ζωής. Από την μεθοδολογική άποψη του διαχειριστή μπορούν να χρησιμοποιηθούν κλασσικά εργαλεία όπως ένα χαρτοφυλάκιο ή ο βέλτιστος έλεγχος. Επίσης πρέπει να λάβει σοβαρά υπόψη τις αναλογιστικές υποχρεώσεις και τα δικαιώματα που εμπεριέχονται σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα και τις επιπτώσεις ενός στοχαστικού περιβάλλοντος. Ένα σημαντικό παράδειγμα τέτοιας υποχρέωσης είναι η παρουσία μιας εγγύησης που παρέχεται στους δικαιούχους μετά την συνταξιοδότηση.

Παρακάτω θα μελετήσουμε τα αποτελέσματα της εισαγωγής αυτού του είδους της εγγύησης στην βέλτιστη πολιτική του συνταξιοδοτικού σχήματος χρησιμοποιώντας το κλασσικό εργαλείο του στοχαστικού ελέγχου σαν μέσο βελτιστοποίησης. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις και να εξετάσουμε τα αποτελέσματα των εγγυήσεων μετά την συνταξιοδότηση για δύο σημαντικές χρήσιμες συναρτήσεις ωφελιμότητας. Τα αποτελέσματα θα ερμηνευθούν σε όρους του ALM (Assets and Liabilities Management). Συγχρόνως θα ελέγξουμε την εγκυρότητα της αποκαλούμενης ως ‘’life style strategy’’.

3.4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Θεωρούμε ένα προκαθορισμένο πλάνο συνταξιοδότησης του οποίου οι πληρωμές, αποτελούν όρους μιας ράντας πληρωμών. Σκοπός μας είναι η βέλτιστη πολιτική επένδυσης, η οποία αφορά τα περιουσιακά στοιχεία τα οποία καλύπτουν τις υποχρεώσεις της ασφαλιστικής εταιρείας κατά τη διάρκεια του συνταξιοδοτικού προγράμματος ζωής του ασφαλισμένου, πριν και μετά τη συνταξιοδότηση.

Υποθέτουμε πως οι υποχρεώσεις μετά την συνταξιοδότηση πληρώνονται με μορφή ράντας, οι πληρωμές της οποίας είναι εγγυημένες από τον ασφαλιστή. Σ’ αυτό το απλό μοντέλο η θνησιμότητα παραλείπεται.

Κατά την περίοδο πριν την συνταξιοδότηση, οι συνεισφορές από τον ασφαλιζόμενο μπορούν να επενδυθούν από την ασφαλιστική εταιρεία σε ένα περιουσιακό στοιχείο με ή χωρίς “κίνδυνο”: το αποθεματικό που λαμβάνεται κατά την ηλικία συνταξιοδότησης είναι το ποσό που συσσωρεύεται χωρίς καμία ειδική εγγύηση που δίνεται από τον ασφαλιστή. Ακριβώς στην χρονική στιγμή συνταξιοδότησης, το αποθεματικό αυτό χρησιμοποιείται προς την αγορά μιας ράντας πληρωμών, ώστε μετά την χρονική αυτή στιγμή, ο ασφαλιστής να εξασφαλίσει και εγγυηθεί της πληρωμές της ράντας προς τον συνταξιούχο. Επίσης, η ασφαλιστική εταιρεία θα πρέπει να αποφασίσει τον τρόπο επένδυσης του εναπομείναντος μέρους του αποθεματικού, σε περιουσιακά στοιχεία με ή χωρίς κίνδυνο[31].

Εφόσον οι υποχρεώσεις της ασφαλιστικής παρουσιάζονται μετά τη συνταξιοδότηση, θα χωρίσουμε το πρόβλημά μας σε δύο περιόδους:

- **Περίοδος πριν την συνταξιοδότηση $(\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{N}])$:** Περίοδος χωρίς υποχρεώσεις όπου θα προσπαθήσουμε να έχουμε μεγιστοποιήσει τα κέρδη από τις επενδύσεις των συνεισφορών του συνταξιούχου ακριβώς την στιγμή της συνταξιοδότησής του, και

- **Περίοδος μετά την συνταξιοδότηση $(\mathbf{t} \in [\mathbf{N}, \mathbf{N}+\mathbf{T}])$:** , Περίοδος με τις υποχρεώσεις της εταιρείας προς τον συνταξιούχο, όπου θα προσπαθήσουμε να βελτιστοποιήσουμε το τυχόν τελικού πλεόνασμα.

Θεωρούμε ότι στα παραπάνω, N και T είναι ντετερμινιστικοί αριθμοί.

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος θα δουλέψουμε σε στοχαστικό μοντέλο συνεχούς χρόνου και θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία του στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου.

Ως συνήθως στον βέλτιστο έλεγχο έχουμε τις:

- *Μεταβλητές Κατάστασης*,
- *Μεταβλητές Απόφασης*

καθώς και την:

- *Εξίσωση Εξέλιξης*, και τέλος την
- *Αντικειμενική Συνάρτηση*

Ειδικότερα έχουμε:

Μεταβλητή Κατάσταση: Επιλέγουμε ως μεταβλητή κατάστασης τα περιουσιακά στοιχεία του συνταξιοδοτικού προγράμματος

$$F(t), \qquad t \in [0,\ T+N].$$

Μεταβλητή Απόφασης: Διαλέγουμε ως μεταβλητή απόφασης, το μέρος επένδυσης που αφορά περιουσιακά στοιχεία με ρίσκο, (βλέπε Merton [27]).

Υποθέτουμε πως η οικονομική αγορά περιγράφεται από δύο είδη περιουσιακών στοιχείων:

- Τα περιουσιακά στοιχεία χωρίς ρίσκο X_1 για τα οποία ισχύει

$$dX_1(t) = rX_1(t)dt \tag{3.14}$$

- Τα περιουσιακά στοιχεία με ρίσκο X_2

$$dX_2(t) = aX_2(t)dt + \sigma X_2(t)dW(t) \,, \tag{3.15}$$

όπου W είναι η Κίνηση Brown.

Το μέρος εκείνο που επενδύεται σε περιουσιακά στοιχεία με ρίσκο την χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $u(t)$, ενώ το υπόλοιπο $(1 - u(t))$ είναι το μέρος των περιουσιακών στοιχείων χωρίς ρίσκο.

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε τη βέλτιστη διαδικασία για $u(t)$.

<u>Εξίσωση Εξέλιξης</u>: Θα υποθέσουμε ότι ένα ποσό καταβάλλεται στο συνταξιοδοτικό κεφάλαιο τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ότι δεν υπάρχουν άλλες συνεισφορές στο μέλλον. Την πιο γενική περίπτωση με τις μελλοντικές συνεισφορές θα την δούμε αργότερα σε αυτήν την εργασία (βλέπε ενότητα 3.6).

- **<u>Περίοδος πριν την συνταξιοδότηση ($\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{N}]$).</u>** Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (3.14) και (3.15), η διαδικασία F είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$dF(t) = F(t)[\, u(t)\, \alpha \; + (1 - \; u(t))\, r \,]\, dt \; + F(t)\, u(t)\, \sigma dW\,(t) \tag{3.16}$$

με $F(0) = P$ =ένα ποσό πληρωμής την στιγμή $t = 0$. (3.17)

- **<u>Την στιγμή της συνταξιοδότησης ($\mathbf{t} = \mathbf{N}$).</u>** Τα κεφάλαια της ασφαλιστικής εταιρείας χρησιμοποιούνται για να αγοράσει την ράντα πληρωμών των ασφαλισμένων, της οποίας η τιμή αγοράς της υπολογίζεται με προκαθορισμένο επιτόκιο.

Αντί της κλασικής ισόβιας σύνταξης ζωής , εμείς θα θεωρήσουμε εδώ την περίπτωση ενός προϊόντος, όταν η εγγύηση της ράντας δίνεται για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα (*προσωρινή ράντα*). Αυτό το είδος του προϊόντος επιτρέπει στον ασφαλιστή να χρησιμοποιήσει ένα καλύτερο επιτόκιο.

Συμβολίζουμε με C το μέρος του κεφαλαίου που χρησιμοποιείται για να αγοράσει μια ράντα T περιόδων ($C \; \leq \; F\,(N)$). Το πλεόνασμα στο τέλος αυτής της περιόδου χρησιμοποιείται ξανά είτε με παρόμοιο τρόπο όπως πριν, είτε ως επιστροφή στους ασφαλιστές.

Το συνεχές όφελος να πληρώσει μεταξύ N και $N + T$ δίνεται από :

$$B = \frac{C}{\bar{a}_{\overline{T|}}} \tag{3.18}$$

όπου $\bar{a}_{\overline{T|}}$ είναι το συνεχές τεχνικό επιτόκιο.

- **<u>Περίοδος μετά την συνταξιοδότηση</u>** $(\mathbf{t} \in [\mathbf{N}, \mathbf{N+T}])$*:* Η στοχαστική διαφορική εξίσωση του ταμείου δίνεται από [31]:

$$d\,F\,(t) = [F(t)(u(t)\,\alpha + (1 - u(t))\,r) - B]\,dt + F(t)\,u(t)\,\sigma\,dW\,(t) \tag{3.19}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση: Το πρόβλημα στις δύο περιόδους θα είναι να βελτιστοποιηθεί η αναμενόμενη χρησιμότητα του τελικού πλούτου στο τέλος της περιόδου.

- Πρώτη περίοδος. Μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας του συνολικού ποσού του ταμείου που ελήφθη κατά την ηλικία συνταξιοδότησης:

$$\max_u EU\big(F(N)\big) \tag{3.20}$$

- Δεύτερη περίοδος. Μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας του πλεονάσματος μετά την καταβολή της σύνταξης κατά τη διάρκεια T περιόδων

$$\max_u EU\big(F(N+T)\big) \tag{3.21}$$

Μας ενδιαφέρει η σύγκριση μεταξύ των άριστων πολιτικών στις δύο περιόδους. Πρέπει να αλλάξουμε την επενδυτική στρατηγική μας, λόγω της πληρωμής της ράντας;

3.5 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΠΡΙΝ ΤΗ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΗΣΗ

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τα κλασικά εργαλεία του στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου. Το πρόβλημα να βρεθεί η βέλτιστη αναλογία των ασφαλών περιουσιακών στοιχείων κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου είναι εύκολο να λυθεί και το γνωρίζουμε καλά (Merton (1971)) [27]. Θα δώσουμε σ αυτό το σημείο κάποιες λεπτομέρειες της μεθοδολογίας, προκειμένου να λύσουμε τη βέλτιστη επιλογή κατά τη δεύτερη περίοδο.

Έχουμε να λύσουμε

$$\max_{u} \mathrm{EU}\ (\ \mathrm{F(N)}\ ) \tag{3.22}$$

με $dF(t) = F(t)\,[u(t)a + (1 - u(t))r]\,dt + F(t)u(t)\sigma\, dW(t)$, (3.23)

$$F(0) = P(0 \le t \le N)$$

Εισάγουμε την συνάρτηση αξίας του προβλήματος

$$W(t, F) = \max_{u} E[U(F(N) \,|\, F(t) = F)] \tag{3.24}$$

από την οποία έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης [31]

$$0 = \max_{\{u\}} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + [u(t)(a - r) + r]F\,\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\,u^2(t)\sigma^2 F^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial F^2}\right] \tag{3.25}$$

ή ισοδύναμα

$$0 = \max_{\{u\}}\{\psi\}$$

όπου $\psi = \frac{\partial W}{\partial t} + [u(t)(a - r) + r]F\,\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\,u^2(t)\sigma^2 F^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial F^2}$

Από τις παρακάτω δύο εξισώσεις και την ανισότητα δευτέρου βαθμού

- $\psi(u) = 0$ (3.26)
- $\frac{\partial \psi}{\partial u}\,(u) = 0$ (3.27)
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u) < 0$

παίρνουμε,

$$0 = (a - r)F\,\frac{\partial W}{\partial F} + u(t)F^2\sigma^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial F^2}.$$

Οπότε μια πρώτη έμμεση μορφή για τη βέλτιστη επένδυση u^*, που αποτελεί το μέρος επένδυσης σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο είναι η:

$$u^*(t) = -\frac{{}^{\partial W}\!/_{\partial F}}{F({}^{\partial^2 W}\!/_{\partial F^2})}\,\frac{a-r}{\sigma^2} \tag{3.28}$$

Με αντικατάσταση της (3.28) στην (3.26) παίρνουμε για τη συνάρτηση αξίας, τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial W}{\partial t} + rF\frac{\partial W}{\partial F} - \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{\left(\partial W/_{\partial F}\right)^2}{\partial^2 W/_{\partial F^2}} = 0 \qquad (3.29)$$

με τον περιορισμό: $W(N,P) \ = \ U\ (F)$

Το πρόβλημα τώρα είναι να λυθεί η εξίσωση (3.29) για την εξίσωση αξίας W και να αντικατασταθεί στην (3.28) ώστε να ληφθεί η βέλτιστη πολιτική. Η εξίσωση αυτή δέχεται κάποιες έμμεσες λύσεις για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης ωφελιμότητας:

- **Χρησιμότητα της δύναμης Ισχύος**:

$$U\ (F) = \frac{F^{\gamma}}{\gamma} \quad \text{όπου} \quad (\gamma < 1\ , \gamma \neq 0). \qquad (3.30)$$

Αυτή η μορφή της συνάρτησης ωφελιμότητας έχει μια σταθερή σχετική αποστροφή στο κίνδυνο:

$$-\frac{U''\ (F)}{U'\ (F)}(F) = 1 - \gamma$$

- **Εκθετική ωφελιμότητα:**

$$U\ (F) = -\frac{1}{c}\,e^{-cF} \qquad (\text{Με } c\ >\ 0\ ) \qquad (3.31)$$

Αυτή η μορφή της συνάρτησης ωφελιμότητας έχει μια σταθερή απόλυτη αποστροφή στο κίνδυνο:

$$-\frac{U''\ (F)}{U'(F)}(F) = c$$

3.5.1 Χρησιμότητα του νόμου Ισχύος

Σ΄ αυτή την περίπτωση θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη λύση της (3.29) ακλουθώντας την παρακάτω δομή

$$W(t,F) = b(t)\frac{F^{\gamma}}{\gamma} \tag{3.32}$$

$Με\ \ b(N) = 1$, (συνθήκη)

Έπεται ότι,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = b^{'}(t)\frac{F^{\gamma}}{\gamma}\ , \qquad \frac{\partial W}{\partial F} = b(t)F^{\gamma-1}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} = b(t)(\gamma-1)F^{\gamma-2}\ .$$

Εισάγοντας αυτές τις μερικές παραγώγους στην (3.29) εμείς παίρνουμε για το b την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$b^{'}(t) + r\gamma b(t) + b(t)\gamma\frac{(a-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} = 0$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης εύκολα βρίσκεται να είναι η

$$b(t) = e^{\mu(t-N)},$$

όπου

$$\mu = -\gamma\left[r + \frac{(a-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)}\right] \tag{3.33}$$

και καταλήγουμε $\qquad W(t,F) = e^{\mu(t-N)}\frac{F^{\gamma}}{\gamma}$ (3.34)

Ο δεύτερης τάξης περιορισμός, επίσης , πραγματοποιεί:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = F^2\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial F^2} = F^2\sigma^2 e^{\mu(t-N)}(\gamma-1)F^{\gamma-2} < 0$$

Χρησιμοποιώντας την (3.28) μπορούμε να αντλήσουμε μια μοναδική βέλτιστη πολιτική:

$$u^{*}(t) = -\frac{\mathrm{b(t)F^{\gamma-1}}}{Fb(t)(\gamma-1)F^{\gamma-2}}\frac{a-r}{\sigma^2}, \quad u^{*}(t) = \frac{a-r}{\sigma^2}\frac{1}{1-\gamma}, \tag{3.35}$$

η οποία είναι μια σταθερή αναλογία , ανάλογα με το κίνδυνο του ασφαλίστρου $a-r$, με σ^2 την μεταβλητότητα και γ η αποστροφή στον κίνδυνο.

3.5.2 Εκθετική ωφελιμότητα

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύση στην (3.29) ακολουθώντας τον παρακάτω τρόπο:

$$\mathrm{W}(\mathrm{t},\mathrm{F}) = -\frac{1}{\mathrm{c}}\exp[-\mathrm{c}[\mathrm{a}(\mathrm{t})+\mathrm{b}(\mathrm{t})\mathrm{F}]\,] \quad (3.36)$$

Με $a(N)=0,\ \ b(N)=1$

Τότε έχουμε: $\frac{\partial W}{\partial t} = (a'(t)+b'(t)F)exp[-cu(t,F)]$

Όπου $u(t,F)=a(t)+b(t)F$

$\frac{\partial W}{\partial F} = b(t)\,exp[-cu(t,F)]\,,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} = -cb^2(t)exp[-cu(t,F)]$

Εισάγοντας αυτές τις μερικές παραγώγους στην (3.29) παίρνουμε:

$$a'(t)+b'(t)F+rFb(t)+\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2}=0 \quad (3.37)$$

Θα χωρίσουμε αυτή την εξίσωση σε δύο επιμέρους εξισώσεις, με σκοπό να εξαλείψουμε την εξάρτηση στο F

$$a'(t)+\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2}=0 \quad (3.38)$$

$$b'(t)+rb(t)=0 \quad (3.39)$$

Οι λύσεις στις (3.38) και (3.39) λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, είναι:

$$a(t)=\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2}(N-t)\,,\qquad b(t)=e^{-r(t-N)}$$

Τελικά η συνάρτηση αξίας γίνεται:

$$W(t,F) = -\frac{1}{c}exp\left[-c\left[\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2}(N-t)+e^{-r(t-N)}F\right]\right] \quad (3.40)$$

Για την δεύτερης τάξης εξίσωση υπάρχει επίσης η προϋπόθεση :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = F^2\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial F^2} = -F^2\sigma^2 ce^{-2r(t-N)}exp[-cu(t,F)] < 0$$

Χρησιμοποιώντας την (3.40) εμείς παίρνουμε την βέλτιστη πολιτική στην περίπτωση της εκθετικής ωφελιμότητας [31]:

$$u^*(t) = -\frac{b(t)\exp(-cu(t,F))}{-Fcb^2(t)\exp(-cu(t,F))}\frac{a-r}{\sigma^2}$$

ή ισοδύναμα

$$u^*(t) = \frac{e^{r(t-N)}}{F}\frac{a-r}{\sigma^2 c} \tag{3.41}$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε (3.41) και στη μορφή:

$$u^*(t) = e^{r(t-N)}\frac{a-r}{\sigma^2 c} \tag{3.42}$$

Η αριστερή πλευρά (το $u^*(t)$) αντιπροσωπεύει την αξία της επένδυσης, του περιουσιακού στοιχείου που έχει κίνδυνο.

Η σχέση (3.42) δείχνει ότι αυτή η τιμή, έχει αυξηθεί με την ίδια ταχύτητα, όπως το κίνδυνος που έχει το ελεύθερο επιτόκιο. Αυτό σημαίνει ότι η βέλτιστη αναλογία θα παραμείνει σταθερή αν τα περιουσιακά στοιχεία αυξάνονται με την ίδια ταχύτητα όπως το βασικό επιτόκιο. Και αν τα περιουσιακά στοιχεία αυξάνονται περισσότερο, το ποσοστό της επένδυσης όσο αφορά τα περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο θα πρέπει να μειωθούν πλησιάζοντας στη συνταξιοδότηση.

3.6 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΜΕΤΑ ΤΗ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΗΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια μεθοδολογία με την ενότητα 3.5. Έτσι το πρόβλημα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\max_u EU\big(F(N+T)\big) \tag{3.43}$$

Που υπόκειται στο

$$dF(t) = \big[F(t)\big[\,u(t)\alpha + \big(1 - u(t)\big)r\,\big] - B\big]dt + F(t)\,u(t)\,\sigma\,dW\,(t)$$

$$\text{με} \qquad (N \le t \le N+T), \tag{3.44}$$

όπου $F(N)$ είναι το ποσό που προκύπτει κατά την συνταξιοδότηση.

Εισάγοντας την συνάρτηση αξίας του προβλήματος, έχουμε:

$$V(t,F) = \max_u E[U(F(N+T)|F(t) = F)], \quad N \le t \le N+T \quad .$$

(3.45)

Από την (3.45) έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα μεγιστοποίησης [31]

$$0 = \max_u \left[\frac{\partial V}{\partial t} + [[u(t)(a-r) + r]F - B]\frac{\partial V}{\partial F} + \frac{1}{2}\, u^2(t)\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 W}{\partial F^2}\right] \tag{3.46}$$

ή ισοδύναμα

$$0 = \max_{\{u\}}\{\mathfrak{Q}\}$$

Όπου $\mathfrak{Q} = \frac{\partial V}{\partial t} + [[u(t)(a-r) + r]F - B]\frac{\partial V}{\partial F} + \frac{1}{2}\, u^2(t)\sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 W}{\partial F^2}$

Ανάγουμε τις παρακάτω τρεις παραδοχές:

- $\mathfrak{Q}(u) = 0$ (3.47)
- $\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial u}\,(u) = 0$ (3.48)
- $\frac{\partial^2 \mathfrak{Q}}{\partial u^2}(u) < 0$

Η (3.48) μας δίνει την ίδια έμμεση μορφή για τη βέλτιστη λύση u, όπου είναι το μέρος επένδυσης σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο, όπως και στη (3.28):

$$u^*(t) = -\frac{\partial V/_{\partial F}}{F(\partial^2 V/_{\partial F^2})}\,\frac{a-r}{\sigma^2} \tag{3.49}$$

Με αντικατάσταση της (3.49) στην (3.47) παίρνουμε για τη συνάρτηση αξίας, την μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial F}(rF - B) - \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{\left(\partial V/_{\partial F}\right)^2}{\partial^2 V/_{\partial F^2}} = 0$$

με $\quad V(N+T, F) \;= U(F)$ (3.50)

Όπως στην ενότητα 3.5 θα προσπαθήσουμε να βρούμε έμμεσες λύσεις για συγκεκριμένες περιπτώσεις της συνάρτησης ωφελιμότητας.

3.6.1 Χρησιμότητα του νόμου Ισχύος

Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε

$$U(F) = \frac{F^{\gamma}}{\gamma} \quad \text{όπου} \quad (\gamma < 1, \gamma \neq 0).$$

Εάν προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μορφή της συνάρτησης αξίας όπως στη (3.32), δεν θα επιτύχει.

Για παράδειγμα, εάν πάρουμε τη μορφή:

$$V(t,F) = f(t)\frac{F^{\gamma}}{\gamma}$$

$με$ $f(N+t) = 1$, η συνάρτηση (3.50) γίνεται:

$$f^{'}(t)\frac{F^{\gamma}}{\gamma} + f(t)F^{\gamma-1}[rF - B] - \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{f^2(t)F^{2\gamma-2}}{f(t)(\gamma-1)F^{\gamma-2}} = 0$$

ή

$$\left[f^{'}(t) + r\gamma f(t) + \gamma f(t)\frac{(a-r)^2}{\sigma^2(1-\gamma)}\right]\frac{F^{\gamma}}{\gamma} - f(t)BF^{\gamma-1} = 0$$

Ο τελευταίος όρος της παραπάνω εξίσωσης, όπου συνδέεται με την καταβολή της ράντας B, δεν μας επιτρέπει να βρούμε λύση για την συνάρτηση f, ανεξάρτητη της F όπως αναφέρθηκε στις παραδοχές. Έτσι αν πάρουμε μία άλλη μορφή:

$$V(t,F) = b(t)\frac{(F-a(t))^{\gamma}}{\gamma} \tag{3.51}$$

με περιορισμό: $a(N+T) = 0$, $b(N+T) = 1$, τότε,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = b^{'}(t)\frac{(F-\alpha(t))^{\gamma}}{\gamma} - b(t)\big(F-\alpha(t)\big)^{\gamma-1}\alpha^{'}(t) \ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial F} = b(t)(F-\alpha(t))^{\gamma-1} \ , \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} = b(t)(\gamma-1)(F-\alpha(t))^{\gamma-2} \ .$$

Εισάγοντας αυτές τις παραγώγους στην (3.50) παίρνουμε:

$$\mathrm{b}'(\mathrm{t})\frac{(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t}))^{\gamma}}{\gamma}-\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}\alpha'(\mathrm{t})+(rF-B)\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2}\frac{\mathrm{b}^2(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{2(\gamma-1)}}{\mathrm{b}(\mathrm{t})(\gamma-1)(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t}))^{\gamma-2}}=0$$

(3.52)

Ο τρίτος όρος μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$(rF-B)\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}$$
$$=\mathrm{r}\big(F-\alpha(t)\big)\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}+(\mathrm{r}\alpha(\mathrm{t})-B)\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}$$
$$=\mathrm{rb}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma}+(r\alpha(t)-B)\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο στην εξίσωση (3.52) έχουμε:

$$\mathrm{b}'(\mathrm{t})\frac{\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma}}{\gamma}-\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}\alpha'(\mathrm{t})+\mathrm{rb}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma}$$
$$+(r\alpha(t)-B)\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma-1}-\frac{1}{2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\mathrm{b}(\mathrm{t})\big(\mathrm{F}-\alpha(\mathrm{t})\big)^{\gamma}=0$$

Μπορούμε να χωρίσουμε την εξίσωση σε δύο εξισώσεις:

- Εξίσωση Α:
$$\frac{b'(t)}{\gamma}+\mathrm{rb}(\mathrm{t})-\frac{1}{2}\frac{(\alpha-r)^2}{\sigma^2(\gamma-1)}\mathrm{b}(\mathrm{t})=0$$
- Εξίσωση Β:
$$a'(t)-ra(t)+B=0$$

Οι λύσεις αυτών των δύο εξισώσεων (λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες) αποδεικνύεται ότι είναι:

$$b(t)=exp[\mu(t-(T+N))] \qquad (3.53)$$

με $\qquad \mu=-\gamma\,[\,r+\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2(\gamma-1)}\,]$

και $$\alpha(t) = B[\frac{1-e^{-r(T+N-t)}}{r}] \tag{3.54}$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha(t) = B\ \bar{a}_{\overline{T+N-t|}} \tag{3.55}$$

όπου $\bar{a}_{\overline{T+N-t|}}$ είναι η παρούσα αξία μιας συνεχούς ράντας διάρκειας $T + N - t$.

Η συνάρτηση $\alpha(t)$ μπορεί να θεωρηθεί σε κάθε στιγμή το μαθηματικό απόθεμα που χρειάζεται να καταβληθεί ως αποζημίωση χρησιμοποιώντας το ποσοστό προεξόφλησης για το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

Στον όρο $F - \alpha(t) = F - B\ \bar{a}_{\overline{T+N-t|}}$ μπορούμε να δούμε διαφορές ανάμεσα στα περιουσιακά στοιχεία και στις υποχρεώσεις.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τώρα είμαστε σ ένα αληθινό ALM περιβάλλον. Η συνάρτηση αξίας δίνεται από:

$$V(t,F) = e^{\mu(t-(T+N))}\frac{1}{\gamma}(F - B\ \bar{a}_{\overline{T+N-t|}})^{\gamma} \tag{3.56}$$

Ο περιορισμός δεύτερης τάξης ακόμα ικανοποιείται:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} = F^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial F^2} = F^2\sigma^2 exp[\mu(t-(T+N))](\gamma-1)(F-a(t))^{\gamma-2} < 0$$

Τελικά η βέλτιστη πολιτική δίνεται από την (3.49) και γίνεται:

$$u(t) = -\frac{b(t)(F-\alpha(t))^{\gamma-1}}{Fb(t)(\gamma-1)(F-\alpha(t))^{\gamma-2}}\ \frac{a-r}{\sigma^2}, \quad u(t) = \frac{(F-a(t))}{F}\frac{a-r}{\sigma^2}\frac{1}{1-\gamma} \tag{3.57}$$

(Μπορεί να συγκριθεί με την (3.35)).

Αυτό μπορεί επίσης να γραφτεί ως εξής:

$$u(t)F = (F - B\ \bar{a}_{\overline{T+N-t|}})\ \frac{a-r}{(1-\gamma)\sigma^2} \tag{3.58}$$

Η αριστερή πλευρά είναι το ποσό που επενδύθηκε στο περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο. Η δεξιά πλευρά είναι ο κλασσικός συντελεστής του Merton,

$(a-r)/((1-\gamma)\ \sigma^{\wedge}2)$ που εφαρμόζεται σε μια νέα διαδικασία,

$$Y(t) = F(t) - B\ \bar{a}_{\overline{T+N-t|}}$$

Η διαδικασία Y αντιπροσωπεύει το δωρεάν πλεόνασμα του ασφαλιστή με διαφορά μεταξύ των στοιχείων του ενεργητικού και την προεξοφλημένη αξία των μελλοντικών πληρωμών. Η σχέση αυτή δείχνει ότι στην ηλικία συνταξιοδότησης, η στρατηγική πρέπει να αλλάξει, προκειμένου να ληφθεί υπόψη τη νέα υποχρέωση (μια πιο συντηρητική στρατηγική).

3.6.2 Εκθετική ωφελιμότητα

Εάν χρησιμοποιήσουμε την εκθετική ωφελιμότητα (3.31), είναι εύκολο να καταλήξουμε στην βέλτιστη πολιτική στην περίπτωση που έχουμε αλλάξει την μορφή της συνάρτησης αξίας.

Παίρνοντας την κανονική μορφή (3.36) και την νέα μορφή (3.51) θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την:

$$V(t,F) = -\frac{1}{c} exp[-c[a(t) + b(t)(F - c(t))]\,] \tag{3.59}$$

με $a(N+T) = 0$, $b(N+T) = 1$ και $c(N+T) = 0$. Τότε έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (a'(t) + b'(t)(F - c(t)) - b(t)c'(t))exp[-cu(t,F)]$$

όπου $u(t,F) = a(t) + b(t)[F - c(t)]$, και

$$\frac{\partial V}{\partial F} = b(t)\, exp[-cu(t,F)]\,, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} = -cb^2(t)exp[-cu(t,F)]$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στην (3.50) παίρνουμε:

$$(a'(t) + b'(t)\big(F - c(t) - b(t)c'(t)\big)\, e^{-cu(t,F)}(rF - B)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\,\frac{b^2(t)e^{-2cu(t,F)}}{-cb^2(t)e^{-cu(t,F)}} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$a'(t) + b'(t)F - b'(t)c(t) - b(t)c'(t) + b(t)rF + b(t)B + \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2} = 0$$

Με την ίδια διαδικασία όπως και πριν, χωρίζουμε την τελευταία εξίσωση, σε τρείς εξισώσεις:

- Εξίσωση A:

$$a'(t) + \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2} = 0$$

- Εξίσωση B:

$$b'(t)F + rFb(t) = 0$$

- Εξίσωση C:

$$b'(t)c(t) + b(t)c'(t) + b(t)B = 0$$

Οι λύσεις τους είναι:

$$a(t) = \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{c\sigma^2}(T + N - t) \tag{3.60}$$

$$b(t) = \exp(-r(t-(N+T))) \tag{3.61}$$

$$c(t) = B\ \bar{a}_{\overline{T+N-t|}} \tag{3.62}$$

Ο περιορισμός δεύτερης τάξης συνεχίζει να ικανοποιείται:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{Q}}{\partial u^2} = F^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial F^2} = -F^2\sigma^2 c e^{-2r(t-(N+T))}\exp[-cu(t,F)] < 0$$

και τελικά, η βέλτιστη πολιτική δίνεται από:

$$u(t) = -\frac{b(t)\exp(-cu(t,F))}{-Fcb^2(t)\exp(-cu(t,F))}\,\frac{a-r}{\sigma^2}$$

ή

$$u(t) = \frac{e^{r(t-(N+T))}}{F}\frac{a-r}{c\sigma^2} \tag{3.63}$$

η οποία είναι ακριβώς η ίδια όπως η (3.41). Η παρουσία της υποχρέωσης στην εκθετική περίπτωση δεν έχει καμία επίδραση στην επενδυτική πολιτική.

3.6.3 Η Επίδραση της Εισαγωγής Μελλοντικών Εισφορών πριν από τη Συνταξιοδότηση

Σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών τα ασφάλιστρα συνήθως καταβάλλονται καθ 'όλη τη διάρκεια της εργασιακής ζωής του ασφαλισμένου. Μπορούμε χωρίς δυσκολία να γενικεύσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε ξαναδεί σε αυτή την προοπτική.

Η εξίσωση των περιουσιακών στοιχείων πριν από τη συνταξιοδότηση (3.16) πρέπει να αλλάξει, αν συμβολίζουμε με P την σταθερή συνεχή πριμοδότηση, η σχέση (3.16) γίνεται:

$$dF(t) = \left[\, F(t)\left[\, u(t)\, \alpha \;+ \left(1 - \, u(t)\right) r \,\right] + P \,\right] dt \;+ F(t) u(t) \sigma \, dW(t) \qquad (3.64)$$

Αυτή η εξίσωση έχει ίδια μορφή με την εξίσωση (3.19) μετά την συνταξιοδότηση. Το συνεχής επιτόκιο κατανάλωσης B αντικαθίσταται εδώ από το μειωμένο συνεχή επιτόκιο της συνεισφοράς P. Αντικαθιστούμε το επιτόκιο B από το επιτόκιο P και το χρονικό διάστημα $N + T$ από το N. Έτσι έχουμε:

- Χρησιμότητας της δύναμης ισχύος

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.58) η βέλτιστη κατανομή δίνεται τώρα από:

$$u(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{F+P}\ \bar{\mathrm{a}}_{\overline{\mathrm{N-t}|}}}{\mathrm{F}} \frac{\mathrm{a-r}}{(1-\gamma)\sigma^2} \qquad u(\mathrm{t}) = \left(\, 1 + \frac{\mathrm{P}\ \bar{\mathrm{a}}_{\overline{\mathrm{N-t}|}}}{\mathrm{F}} \right) \frac{\mathrm{a-r}}{(1-\gamma)\sigma^2} \qquad (3.65)$$

Σε σχέση με τον κλασικό συντελεστή Merton $u_1 = (a - r)/(1 - \gamma)\sigma^2$ υπάρχει τώρα ένα συμπληρωματικό μέρος για τα περιουσιακά στοιχεία του ενεργητικού που έχουν υψηλό κίνδυνο:

$$u(t) = u_1 + u_2(t)$$

Όπου,

$$u_2(t) = u_1 \frac{P\ \bar{a}_{\overline{N-t|}}}{F(t)} \qquad (3.66)$$

Ο όρος αυτός επιβεβαιώνει τη λεγόμενη στρατηγική ‘’life style strategy’’ εξαιτίας της φυσικής μείωσης της συμπεριφοράς του.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε εδώ ακριβώς το αντίθετο αποτέλεσμα, όπως αυτές που παρατηρήθηκαν μετά την συνταξιοδότηση, μπορείτε να επενδύσετε περισσότερο σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο κατά την έναρξη, λόγω της προοπτικής των μελλοντικών εισφορών.

- Εκθετική ωφελιμότητα

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.63) της βέλτιστης κατανομής δίνεται ότι:

$$u(t) = \frac{e^{r(t-N)}}{F}\frac{a-r}{c\sigma^2} \qquad (3.67)$$

Το οποίο είναι ακριβώς το ίδιο με το (3.42) στην περίπτωση εφάπαξ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή, μελετήσαμε την επίδραση της υποχρέωσης στη βέλτιστη επένδυση των μαθηματικών αποθεμάτων σε ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα καθορισμένων εισφορών. Ο κλασικός τρόπος να το διαχειριστούμε αυτό είναι να μειώσουμε το ποσό που επενδύεται σε στοιχεία ενεργητικού τα οποία είναι υψηλού κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη τη ρευστότητα που απαιτείται για την πληρωμή των συντάξεων.

Στην περίπτωση της εφάπαξ καταβολής το μοντέλο που παρουσιάστηκε εδώ μπορεί να παρουσιαστεί ως εξής (όπου $F_2(t) = u(t)F(t)$, είναι το ποσό που επενδύθηκε στα περιουσιακά στοιχεία με ρίσκο κατά τη χρονική στιγμή t) :

	Χρησιμότητα της δύναμης ισχύος	Εκθετική Ωφελιμότητα
Πριν την συνταξιοδότηση	$F_2(t) = F\frac{a-r}{\sigma^2}\frac{1}{1-\gamma}$	$F_2(t) = e^{r(t-N)}\frac{a-r}{c\sigma^2}$
Μετά την συνταξιοδότηση	$F_2(t) = (F - B\,\bar{a}_{\overline{T+N-t\rvert}})\frac{a-r}{\sigma^2}\frac{1}{1-\gamma}$	$F_2(t) = e^{r(t-(N+T))}\frac{a-r}{c\sigma^2}$

Στην περίπτωση της δύναμης ισχύος η επίδραση της υποχρέωσης είναι ξεκάθαρη. Στη βέλτιστη πολιτική μετά την συνταξιοδότηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το πλεόνασμα αντί για το σύνολο των στοιχείων του ενεργητικού. Αυτό επιβεβαιώνει την εμπειρική ιδέα της μείωσης του ποσού το οποίο επενδύεται σε υψηλού κινδύνου περιουσιακά στοιχεία.

Αλλά στην εκθετική περίπτωση δεν υπάρχει τέτοια επίδραση. Στην περίπτωση περιοδικών καταβολών πριν την συνταξιοδότηση , βρέθηκαν οι ακόλουθες επιδράσεις:

- Καμιά επίδραση για την εκθετική ωφελιμότητα.
- Αντίθετη επίδραση για την ωφελιμότητα της δύναμης ισχύος που οδηγεί σε μία πιο φυσική επενδυτική στρατηγική.

Στη συνέχεια και για λόγους ευκολίας του αναγνώστη παρατίθεται το ακόλουθο παράρτημα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

❖ ΕΝΤΑΣΗ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

Η ένταση ανατοκισμού δ_t [29] ενός ποσού $A(t)$ ορίζεται ως

$$\delta_t = \frac{d}{dt} lnA(t) = \frac{A^{'}(t)}{A(t)}$$

Η ένταση ανατοκισμού είναι το μέρος της απότομης αλλαγής του επιτοκίου της συνάρτησης μελλοντικής συσσώρευσης. Για να υπολογίσουμε την ένταση ανατοκισμού, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση συσσώρευσης ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} lnA(t) &= \frac{d}{dt}\ln\big(A(0)a(t)\big) \\ &= \frac{d}{dt}\ln\big(A(0)\big) + \frac{d}{dt}\ln\big(a(t)\big) \\ &= \frac{d}{dt}\ln\big(a(t)\big) \end{aligned}$$

❖ Η ΜΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Είναι πραγματικά αξιοσημείωτο το πώς συμπεριφέρεται η κίνηση Brown. Παρόλο που είναι συνεχής παντού, δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Δίνουμε μία διαισθητική απόδειξη γιατί την μη παραγωγισιμότητα της κίνησης Brown .

Φανταστείτε μια μικρή αύξηση $W_{t+s} - W_t$ της κίνησης, η οποία είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά s.

Τότε,

$$E(|W_{t+s} - W_t|^2) = s$$

που σημαίνει, ότι το σύνηθες ποσό αύξησης $|W_{t+s} - W_t|$ είναι περίπου ίσο με$\sqrt{s}$.

Τώρα, ισχύει ότι $s \to 0 \Rightarrow \sqrt{s} \to 0$, το οποίο συμφωνεί με τη συνέχεια των τροχών της κίνησης Brown. Ωστόσο, αν πάρουμε την παράγωγο

$$\frac{\partial W_t}{\partial t} = \lim_{s\to 0}\frac{W_{t+s} - W_t}{s}$$

τότε παρατηρούμε ότι το s είναι μικρό, η απόλυτη τιμή του αριθμητή μοιάζει με το $\sqrt{s}$ που είναι αρκετά μεγαλύτερο από το s. Επομένως το όριο δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, και έτσι έπεται το συμπέρασμα ότι η τροχιά της κίνησης Brown δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Α. Ν. Γιαννακόπουλος «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, (2003).

[2] Ν. Μαχαιράς, «Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, (2006).

[3] Bjork, T. Arbitrage theory in continuous time, *Oxford University Press*, Oxford, (1998).

[4] Blake, D., Cairns, A.J.C. & Dowd, K. Pension metrics: stochastic pension plan design and value at risk during the accumulation phase, *Insurance: Mathematics and Economics 29*, 187-215, (2001).

[5] Booth, P., Yakoubov, Y., Investment for defined contribution pension scheme members close to retirement: an analysis of the ‘’lifestyle’’ concept. *North American Actuarial Journal 4 (2)*, 1-19, (2000).

[6] Boulier, J.-F., Trussant, E. &Florens, D.A dynamic model for pension fund management, *Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium 1*, 361-384, (1995).

[7] Boulier, J.F., Huang, S.J., Taillard, G., Optimal management under stochastic interest. *Insurance: Mathematics and Economics 28*,173-189, (2001).

[8] Cairns A.J.G., Blake, D. & Dowd, K. Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans, *in Proceedings of the 10th AFIR Colloquium*, Tromsoe, pp. 131-154, (2000).

[9] Cairns A.J.G., Blake, D. & Dowd, K., Stochastic Lifestyling: Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans, The Pensions Institute, Cass Business School (2003).

[10] Cairns, A.J.G. Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time, *ASTIN Bulletin 30*, 19-55, (2000).

[11] Cairns A.J.G., & Parker, G. Stochastic pension fund modeling, *Insurance: Mathematics and Economics 21*, 43-79, (1997).

[12] Charupat, N., Milevsky, M. Optimal asset allocation in life annuities, *Insurance: Mathematics and Economics 30*,199-209, (2002).

[13] Dufresne, D. Moments of pension contributions and fund levels when rates of return are random, *Journal of the Institute of Actuaries 115*, 535- 544, (1988).

[14] Dufresne, D. Stability of pension systems when rates of return are random, *Insurance: Mathematics and Economics 8*, 71-76, (1989).

[15] Dufresne, D. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding, *Scandinavian Actuarial Journal 39-79*, (1990).

[16] Deelstra, G., Grasselli, M., Koehl, P.F. Optimal investment strategies in a CIR framework, *Journal of Applied Probability 37*, 1-12, (2000).

[17] Fleming, W.H. &Rishel, R.W. Deterministic and Stochastic Optimal Control, New York, Springer (1975).

[18] Haberman S. Vigna, E. Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes, *Insurance: Mathematics and Economics 28*,233-262, (2001).

[19] Haberman S. Sung, J.H. Dynamic approaches to pension funding, *Insurance: Mathematics and Economics 15*,151-162 (1994).

[20] Haberman, S. &Vigna, E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes, *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 35-69, (2002).

[21] Haberman, S. Pension Funding with Time Delays and Autoregressive Rates, Department of Actuarial Science and Statistics, The City University, London, UK (1993).

[22] Huang, H. -C. Stochastic Modeling and Control of Pension Plans, Ph.D. Thesis Herriot-Watt University, Edinburgh, (2000).

[23] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven. Brownian Motion and Stochastic Calculus (2nd ed.), Springer (1991).

[24] Korn, R. Optimal portfolios, *World Scientific*, Singapore, (1997).

[25] Marcel B. Finan, A Reading of the Theory of Life Contingency Models, Arkansas Tech University.

[26] Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case. *Review of Economics and Statistics 51*, 247-257, (1969).

[27] Merton R.C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory 3*, 373,413, (1971).

[28] Merton, R.C. Continuous-Time Finance, Blackwell, Cambridge, MA, (1990).

[29] Migues A. Arcones, Financial Mathematics, Department of Mathematical Sciences, Binghamton University (2008).

[30] Oksendal, B. Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin, (1998).

[31] Pierre Devolder, Manuela Bosch Princep, Dominguez Fabian, Stochastic optimal control of annuity contracts, *Insurance Mathematics and Economics (33),* 227-238, (2003).

[32] Protter, Philip E. Stochastic Integration and Differential Equations (2nd ed), Springer (2004).

[33] Samuel A. Broverman. Mathematics of Investment and Credit, 5th Edition, ACTEX Academic Series (2010).

[34] Stephen Kellison. Theory of Interest, 3rd Edition, University of Central Florida (2008).

[35] Thomas Mikosch. Elementary Stochastic Calculus, *World Scientific*, (1998).