

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ
ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΟΤΑΝ ΟΙ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ
ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ
ΓΚΑΟΥΣΙΑΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

Γεώργιος Κολιογεώργης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2016

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ
ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΟΤΑΝ ΟΙ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ
ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ
ΓΚΑΟΥΣΙΑΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

Γεώργιος Κολιογεώργης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

..... (Επιβλέπων)

.....

.....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND ACTUARIAL
SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL
SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Risk theory with inverse gaussian claims

By
Koliogeorgis Georgios

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for
the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk
Management

Piraeus
July 2016

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κο Ψαρράκο Γεώργιο, Επίκουρο καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή κατά τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας. Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κο Μαχαιρά Νικόλαο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και τον κο Πολίτη Κωνσταντίνο, Αναπληρωτή Καθηγητή του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Υπογραφή:

Γεώργιος Κολιογεώργης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Γεώργιος Κολιογεώργης

ΜΕΛΕΤΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΟΤΑΝ ΟΙ ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΓΚΑΟΥΣΙΑΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Περίληψη

Στην εργασία που ακολουθεί θα δώσουμε ορισμούς βασικών εννοιών στην θεωρία κινδύνου, θα μελετήσουμε τρία στοχαστικά μοντέλα Κλασικό, Erlang2 και Phase-type2, μελέτη της αντίστροφης γκαουσιανής κατανομής μέσω της γενικευμένης Γάμμα συνάρτησης και της βοηθητικής συνάρτησης σφάλματος και στη συνέχεια θα παραθέσουμε ορισμένα φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας και θα βγάλουμε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα με τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

Georgios Koliogeorgis

Risk theory with inverse gaussian claims

Abstract

In the following work we will give definitions on risk theory stochastic models such as Clasic risk model, Erlang2 and Phase-type2, we study some very usefull properties when claims are distributed with inverse gaussian through generalized Gamma function and auxiliary function error and then cite some barriers of probability of ruin giving some useful conclusions with interesting numerical results.

Περιεχόμενα

1 Περιγραφή στοχαστικών μοντέλων πιθανότητας χρεοκοπίας	3
1.1 Εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας	3
1.2 Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος	5
1.3 Το κλασικό μοντέλο	8
1.3.1 Συνθήκη του καθαρού κέρδους	8
1.3.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο	9
1.3.3 Περιθώριο ασφαλείας	9
1.3.4 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο	10
1.3.5 Πιθανότητα μή-χρεοκοπίας	10
1.3.6 Κλιμακωτά ύψη	11
1.3.7 Μέγιστη συσσωρευτική απώλεια	11
1.3.8 Η εξίσωση του Lundberg	12
1.3.9 Χρόνος χρεοκοπίας	13
1.3.10 Έλλειμμα	14
1.4 Erlang(2) μοντέλο	14
1.5 Phase type 2 μοντέλο	16
2 Μελέτη Γενικευμένης Γάμμα και αντίστροφης γκαουσιανής κατανομής	19
2.1 Γενικευμένη Γάμμα συνάρτηση	19
2.2 Αντίστροφη Γκαουσιανή Κατανομή	24
2.3 Σύνδεση αντίστροφης γκαουσιανής με την μη πλήρη γάμμα μέσω της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος	28
2.4 Μελέτη συνάρτησης πυκνότητας κλιμακωτών υψών	29
2.4.1 Κλασικό μοντέλο	30
2.4.2 Erlang 2 μοντέλο	30

2.4.3	Phase type 2 μοντέλο	30
3	Φράγματα και ασυμπτωτικοί τύποι	32
3.1	Γενικά φράγματα	32
3.1.1	Το κάτω φράγμα των De Vylder και Goovaerts	33
3.1.2	Το άνω φράγμα του Dickson (1994)	33
3.2	Άνω φράγματα και ασυμπτωτικοί τύποι στο κλασικό μοντέλο	34
3.2.1	Ανισότητα του Lundberg	34
3.2.2	Φράγματα για τον συντελεστή προσαρμογής	34
3.2.3	Ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg	35
3.3	Το διπλό φράγμα των Cai-Garrido	36
3.3.1	Ασυμπτωτικός τύπος για την ανέλιξη του πλεονάσματος	38
3.4	Προσεγγίσεις πιθανότητας χρεοκοπίας	38
3.4.1	Προσέγγιση Beekman-Bowers	39
3.4.2	Προσέγγιση De Vylder	39
3.4.3	Προσέγγιση Tijms	40
4	Παραδείγματα κι εφαρμογές	41
4.1	Φράγματα πιθανότητας χρεοκοπίας	41
4.2	Εφαρμογές μεσω της ercf για την πιθανότητα χρεοκοπίας	49
	Βιβλιογραφία	55

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κίνητρο της παρακάτω εργασίας αποτελεί η παραδοχή ότι η κατανομή του ύψους των απαιτήσεων είναι μέλος μιας οικογένειας κατανομών με δύο παραμέτρους όπως η Γάμμα ή η αντίστροφη Γκαουσιανή (Βλέπε Hans Gerber). Δοθέντος ενός σχετικού περιθωρίου ασφαλείας η πιθανότητα χρεοκοπίας θα αποτελεί μία μονότονη συνάρτηση που ανήκει στις προαναφερθείσες οικογένειες κατανομών συναρτήσει κάποιου αρχικού αποθεματικού και μπορούμε εύκολα να πάρουμε κάποια πολύ χρήσιμα φράγματα, (βλέπε [Gerber \(1992\)](#)).

Στο Κεφάλαιο 1 θα κάνουμε μια γενική εισαγωγή στην θεωρία χρεοκοπίας που πρώτος εισήγαγε ως έννοια ο Σουηδός μαθηματικός Lundberg και την χρησιμότητα της στην ασφαλιστική αγορά. Στη συνέχεια θα ορίσουμε την στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος που αποτελεί το βασικότερο κομμάτι της θεωρίας κινδύνου αφού περιγράφει την πορεία των συνολικών εσόδων και εξόδων με την πάροδο του χρόνου. Ακολουθεί η περιγραφή του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας και δίνονται οι ορισμοί της συνθήκης καθαρού κέρδους, της πιθανότητας χρεοκοπίας και μη-χρεοκοπίας σε άπειρο και πεπερασμένο χρόνο, του περιθωρίου ασφαλείας, των κλιμακωτών υψών, της μέγιστης συσσωρευτικής απώλειας, της εξίσωσης του Lundberg και του συντελεστή προσαρμογής που σχετίζεται με αυτή, του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείματος και παραθέτονται οι μαθηματικοί τύποι που περιγράφουν τις έννοιες αυτές. Στη συνέχεια ακολουθεί η μελέτη του στοχαστικού μοντέλου Erlang2 και Phase-type2 που αποτελούν δύο ειδικές περιπτώσεις του ανανεωτικού μοντέλου Sparre-Andersen.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μελέτη της γενικευμένης ή μη-πλήρους Γάμμα συνάρτησης κατανομής μια ειδική περίπτωση της οποίας αποτελεί η αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή που θα μελετήσουμε ακολούθως και ακολουθούν οι αποζημιώσεις στην εργασία αυτή. Θα δοθούν κάποια πολύ σημαντικά θεωρήματα όπως τα μελέτησαν οι [Chaudhry, Zubair \(1994\)](#) καθώς επίσης θα δείξουμε και το πως συνδέεται η αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με την γενικευμένη Γάμμα με την χρήση της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος (Erfc). Τέλος θα δοθούν κάποιοι κλειστοί τύποι για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των κλιμακωτών υψών σε κάθε ένα από τα τρία μοντέλα της

θεωρίας κινδύνων που αναφέραμε προηγουμένως.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε κάποια σημαντικά φράγματα τα οποία δίνουν μια πολύ καλή εικόνα του πως μεταβάλλεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ανάλογα με κάποιο αρχικό αποθεματικό ιδιαίτερα απο την στιγμή που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλες μέθοδοι να εκμαιεύσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας είτε γιατί δεν υπάρχει η Ροπογεννήτρια, είτε γιατί υπάρχει αλλά δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής. Επίσης θα δοθεί ένας ασυμπτωτικός τύπος για την ανέλιξη του πλεονάσματος με χρήση της κατανομή των κλιμακωτών υψών κι ενός χρήσιμου τελεστή του οποίου έχει δοθεί ο ορισμός.

Στο κεφάλαιο 4 που αποτελεί το τελευταίο μέρος της εργασίας αυτής, δίνουμε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα και λαμβάνουμε αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε περιπτώσεις που οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με συγκεκριμένες παραμέτρους και διαφοροποιώντας ορισμένα χαρακτηριστικά όπως το περιθώριο ασφαλείας, παρατίθενται συγκεντρωτικοί πίνακες καθώς γίνεται κι εξαγωγή συμπερασμάτων

Κεφάλαιο 1

Περιγραφή στοχαστικών μοντέλων πιθανότητας χρεοκοπίας

1.1 Εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται αρχικά μια εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας σχετικά με το κλασικό μοντέλο κινδύνου. Στην συνέχεια μελετάμε τα μοντέλα Erlang(2) και Phase Type 2 τα οποία και αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του ανανεωτικού μοντέλου (Sparre-Andersen model). Παρουσιάζουμε συνοπτικά ορισμένες βασικές έννοιες της θεωρίας χρεοκοπίας, όπως είναι η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος, το περιθώριο ασφαλείας, ο συντελεστής προσαρμογής, η πιθανότητα χρεοκοπίας, καθώς και γνωστά βασικά θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν βρεθεί σχετικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως είναι η ανισότητα του Lundberg και ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg. Η θεωρία κινδύνου είναι ένα σχετικά σύγχρονο επιστημονικό πεδίο που μελετά πιθανοθεωρητικά την εξέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων που προβλέπεται να καταβάλλει μία ασφαλιστική εταιρία στους ασφαλισμένους της, με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στο χαρτοφυλάκιο των ασφαλιστικών κινδύνων της, σε ένα συγκεκριμένο μελλοντικό χρονικό διάστημα. Οι δύο βασικές τυχαίες μεταβλητές που εξετάζονται, για ένα συγκεκριμένο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο και για συγκεκριμένο μελλοντικό χρονικό διάστημα, είναι ο αριθμός των απο-

ζημιώσεων που θα απαιτηθούν να πληρωθούν (που είναι μία διακριτή τ.μ. με μη-αρνητικές ακέραιες τιμές) και το μέγεθος (ύψος ζημιάς) που θα έχει η καθεμία από αυτές τις μελλοντικές αποζημιώσεις (που είναι μία συνεχής τ.μ. με μη-αρνητικές τιμές). Για να γίνει εφικτή η μελέτη των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν στην θεωρία χρεοκοπίας, και για λόγους απλοποίησης του προβλήματος, είναι απαραίτητο να γίνουν κάποιες παραδοχές.

- Τα μεγέθη των αποζημιώσεων, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή η μία αποζημίωση δεν επηρεάζει καθόλου την άλλη,
- Ο αριθμός των αποζημιώσεων, ως διακριτή και μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή, είναι ανεξάρτητος από τα μεγέθη των αποζημιώσεων, δηλαδή το συνολικό πλήθος των αποζημιώσεων δεν επηρεάζεται από τα μεγέθη τους,
- Τα μεγέθη των μελλοντικών αποζημιώσεων, είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή έχουν όλα την ίδια κατανομή.

Αρχικά, η θεωρητική και εφαρμοσμένη μελέτη της θεωρίας κινδύνου χρησιμοποίησε την παραδοχή ότι το πλήθος των μελλοντικών αποζημιώσεων, που θα πληρωθούν στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, ακολουθεί μία στοχαστική ανέλιξη Poisson, με όλες τις χαρακτηριστικές θεωρητικές ιδιότητές της (π.χ. ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, των ομογενών προσαυξήσεων, των ανεξάρτητων προσαυξήσεων, κ.λ.π.). Με άλλα λόγια, γινόταν η υπόθεση ότι οι ενδιαμέσοι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές αποζημιώσεις που πληρώνονται, ως συνεχείς και μη-αρνητικές τ.μ., ακολουθούν την εκθετική κατανομή (Exponential Distribution), με παράμετρο, την ένταση της απαριθμίας στοχαστικής ανέλιξης Poisson. Τα μοντέλα που βασίζονται στις παραπάνω προϋποθέσεις, ονομάζονται «κλασσικά μοντέλα» της θεωρίας κινδύνου. Μελετήθηκαν για πρώτη φορά και προτάθηκαν, στις αρχές του 20ού αιώνα, από τον Σουηδό μαθηματικό F. Lundberg. Πάνω στην παραδοχή της ανέλιξης Poisson, για το πλήθος των μελλοντικών ασφαλιστικών αποζημιώσεων, στηρίζεται το μεγαλύτερο μέρος

της σύγχρονης διεθνούς βιβλιογραφίας, σχετικά με τα αντικείμενα της θεωρίας κινδύνου και της θεωρίας χρεοκοπίας.

Στην πράξη όμως, έχει παρατηρηθεί ότι η παραδοχή αυτή της ανέλιξης Poisson δεν είναι ρεαλιστική και έτσι το πλήθος των αποζημιώσεων δεν περιγράφεται ικανοποιητικά από το κλασικό μοντέλο και προτείνεται εναλλακτικά μια άλλη ανανεωτική ανέλιξη η οποία και θα είναι περισσότερο ρεαλιστική. Το πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση ξεκινάει από το γεγονός ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι (χρόνοι μεταξύ των μελλοντικών διαδοχικών απαιτήσεων) δεν είναι εκθετικά κατανεμημένοι. αλλά ακολουθούν κάποια άλλη, συνεχή και μη-αρνητική κατανομή (όπως για παράδειγμα, κατανομή Weibull, Pareto, Λογαριθμοκανονική, Γάμμα, κ.λ.π.). Σε αυτές τις περιπτώσεις λοιπόν, χρησιμοποιούνται τα λεγόμενα «ανανεωτικά μοντέλα» της θεωρίας κινδύνου, σχετικά με την διακριτή κατανομή του πλήθους των μελλοντικών αποζημιώσεων, τα οποία αποτελούν μία ευρεία επέκταση της στοχαστικής ανέλιξης Poisson και των αντίστοιχων κλασικών μοντέλων. Οι δύο βασικές τυχαίες μεταβλητές που συμμετέχουν στα ανανεωτικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου, είναι οι ακόλουθες:

- Ο χρόνος χρεοκοπίας, συμβολίζεται με T και είναι μία συνεχής και μη-αρνητική τ.μ.
- Ο αριθμός των αποζημιώσεων, που θα πληρωθούν στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, μέχρι τη στιγμή που θα επέλθει η χρεοκοπία συμβολίζεται με N και είναι μία διακριτή, μη-αρνητική και ακέραη τ.μ., με σύνολο τιμών της τους φυσικούς αριθμούς $\{1, 2, 3, \dots\}$.

1.2 Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος

Το βασικότερο αντικείμενο μελέτης της θεωρίας χρεοκοπίας, είναι η μελέτη της στοχαστικής ανέλιξης των συνολικών εσόδων (ασφαλίσεων) και των συνολικών εξόδων (αποζημιώσεων) της ασφαλιστικής εταιρίας, στην εξέλιξη του χρόνου, στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο των κινδύνων. Σχετικά με τα συνολικά έσοδα στο κλασικό μοντέλο,

γίνονται, βλέπε Πολίτης (2005), οι ακόλουθες υποθέσεις και παραδοχές:

1. Τα ασφάλιστρα είναι σταθερά στην μονάδα του χρόνου και ισούνται με ένα συγκεκριμένο και προκαθορισμένο ποσό c ,
2. Το συνολικό ποσό των ασφαλίσεων, που θα έχει συσσωρευτεί, έως κάποια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή t , είναι γραμμική συνάρτηση αυτής της μελλοντικής στιγμής t , και είναι της μορφής $u + ct$, όπου u είναι το αρχικό απόθεμα που κρατά η ασφαλιστική εταιρία (ως απόθεμα «ασφαλείας»), κατά την έναρξη του χρόνου που εξελίσσονται τα ασφάλιστρα και οι αποζημιώσεις.

Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, το πλεόνασμα $U(t)$ της ασφαλιστικής εταιρίας, σε συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή t , ορίζεται ως η διαφορά των συνολικών εσόδων $P(t)$ που θα έχουν εισπραχθεί μελλοντικά από τα συνολικά ασφάλιστρα, μείον τα συνολικά έξοδα $S(t)$ των αποζημιώσεων, μέχρι το t . Δηλαδή:

$$U(t) = P(t) - S(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $U(0) = u$, είναι το αρχικό απόθεμα που υπάρχει, κατά την έναρξη του χρόνου. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, για τη στοχαστική ανέλιξη των συνολικών εσόδων (ασφαλίσεων) $\{P(t), t \geq 0\}$, θα ισχύει ότι:

$$P(t) = u + ct, \quad \forall t \geq 0.$$

Επίσης, η στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων $\{S(t), t \geq 0\}$ που θα πληρωθούν, μέχρι κάποια μελλοντική στιγμή t , θα περιγράφεται από μία σύνθετη τ.μ. (κατανομή τυχαίου αθροίσματος), ως εξής:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad \text{αν } \{N(t) \geq 1\},$$

$$S(t) = 0, \quad \text{αν } \{N(t) = 0\}$$

και

$$S(0) = 0, \quad \text{αν } t = 0.$$

όπου:

$N(t)$, για σταθερό $t > 0$, είναι η διακριτή, θετική και ακέραιη τυχαία μεταβλητή, που δηλώνει τον συνολικό αριθμό των αποζημιώσεων που θα έχουν πληρωθεί, μέχρι και τη μελλοντική χρονική στιγμή t και X_i , είναι η μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής), που δηλώνει το οικονομικό μέγεθος που έχει η καθεμία αποζημίωση που καταβάλλεται. Επίσης, τα μεγέθη X_i των αποζημιώσεων, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. (δηλαδή, ακολουθούν την ίδια κατανομή, διακριτή ή συνεχή και δεν επηρεάζονται μεταξύ τους) και θεωρούνται ανεξάρτητα από το συνολικό πλήθος $N(t)$ των αποζημιώσεων που καταβάλλονται.

Επιπλέον, αναφέρεται εδώ ότι, για σταθερό $t > 0$, η σύνθετη κατανομή των συνολικών (αθροιστικών) αποζημιώσεων $S(t)$, στην περίπτωση που τα μεγέθη των αποζημιώσεων X_i ακολουθούν κάποια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας, θα είναι μία κατανομή μικτού τύπου (βλέπε [Dickson, Hipp \(1998\)](#)). Συγκεκριμένα, η σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S(t)$, θα έχει μία μάζα πιθανότητας στο σημείο 0, αν $N(t) = 0$, δηλαδή αν δεν υπάρξει καμία απαίτηση για αποζημίωση στο χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας και θα είναι συνεχής, στο αυστηρά θετικό διάστημα $(0, \infty)$ των συνεχών τιμών της, αν ισχύει $N(t) = 1, 2, 3, \dots$. Όμως, αν τα ξεχωριστά μεγέθη X_i των αποζημιώσεων, ακολουθούν κάποια διακριτή κατανομή πιθανότητας, τότε σε αυτήν την περίπτωση και η σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S(t)$, θα ακολουθεί επίσης κάποια διακριτή κατανομή, δηλαδή με διακριτό σύνολο τιμών τότε.

Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω, η στοχαστική ανάλυση $\{U(t), t \geq 0\}$ για κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t , θα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0,$$

όπου u , είναι το αρχικό απόθεμα που υπάρχει στο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, κατά την έναρξη του χρόνου, δηλαδή για $t = 0$.

Από τα προηγούμενα, συνεπάγεται ότι, η στοχαστική ανάλυση $\{U(t), t \geq 0\}$ του πλεονάσματος, θα εξαρτάται κυρίως από την (συνήθως σύνθετη) κατανομή $S(t)$ των συνολικών μελλοντικών αποζημιώσεων, αλλά θα εξαρτάται επίσης και από τις τιμές των σταθερών παραμέτρων u

(αρχικό απόθεμα) και c (σταθερό ασφάλιστρο που εισπράττεται στη μονάδα του χρόνου).

1.3 Το κλασικό μοντέλο

Το κλασικό μοντέλο, που αποτελεί τα θεμέλια της θεωρίας χρεοκοπίας, παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1903 από τον Σουηδό αναλογιστή Fillip Lundberg. Αργότερα το μοντέλο αυτό γενικεύτηκε τροποποιώντας τις υποθέσεις σχετικά με την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων καθώς και την κατανομή που ακολουθούν οι αποζημιώσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις το ενδιαφέρον είναι στραμμένο στη μελέτη της συνάρτησης της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Η Θεωρία χρεοκοπίας δέχθηκε τεράστια ώθηση μετά τα άρθρα των [Gerber, Shiu \(1998\)](#), οι οποίοι εισήγαγαν την ποσότητα της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, μία γενίκευση της συνάρτησης πιθανότητας χρεοκοπίας.

Στο κλασικό μοντέλο η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t) : t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ από την σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου

- u το αρχικό αποθεματικό
- $P(t)$ μια πραγματική συνάρτηση που εκφράζει τα συνολικά ασφάλιστρα που έχουν εισπραχθεί στο $[0, t]$
- $S(t)$ μια σύνθετη ανέλιξη Poisson και εκφράζει τις συνολικές αποζημιώσεις που έχουν απαιτηθεί στο $[0, t]$.

1.3.1 Συνθήκη του καθαρού κέρδους

Για να έχουμε ένα βιώσιμο χαρτοφυλάκιο (για παράδειγμα σε μια ασφαλιστική εταιρία) θα πρέπει τα έσοδα να είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα στην μονάδα του χρόνου. Δηλαδή

$$c > \lambda\mu_1,$$

όπου c είναι στα συνολικά έσοδα στην μονάδα του χρόνου, λ η ένταση της ανέλιξης Poisson και μ_1 η μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων. Αν δεν ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη.

1.3.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται από την σχέση

$$\psi(u) = \text{Prob}[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u].$$

Είναι δηλαδή η πιθανότητα η ανέλιξη του πλεονάσματος να πάρει αρνητική τιμή σε κάποια χρονική στιγμή δοθέντος ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u . Η $\psi(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u και ισχύει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0.$$

Ο όρος χρεοκοπία είναι τεχνικός όρος και χρησιμοποιείται για να ελεγχουμε την φερεγγυότητα ενός χαρτοφυλακίου και όχι με την αυστηρή σημασία του στην καθημερινότητα.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας όπως την ορίσαμε παραπάνω αναφέρεται σε άπειρο χρόνο, δηλαδή ότι το χαρτοφυλάκιο λειτουργεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Πρακτικά κάτι τέτοιο είναι απίθανο να συμβεί. Επειδή όμως ο ασφαλιστής θέλει να γνωρίζει ανά πάσα στιγμή την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσα σε ένα συγκεκριμένο (πεπερασμένο) χρονικό διάστημα θα δόσουμε τον ακόλουθο ορισμό που ισχύει σε όλα τα στοχαστικά μοντέλα.

1.3.3 Περιθώριο ασφαλείας

Το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφάλειας θ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται από την σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1.$$

Όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας σε αυτό. Διαισθητικά ο συντελεστής αυτός εκφράζει σε τι βαθμό τα έσοδα υπερβαίνουν τα έξοδα

της εταιρίας κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο. Το θ στην ουσία, εκφράζει το ποσοστό κέρδους ενός χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής. Για τον λόγο αυτό οι τιμές που παίρνει είναι συνήθως μεταξύ 0 και 1, ωστόσο δεν αποκλείεται να τις υπερβαίνει σε περίπτωση μη ανταγωνιστικού χαρτοφυλακίου ή ειδικών συνθηκών (έλλειψη ανταγωνισμού στην αγορά σε συγκεκριμένο τομέα ασφάλισης).

1.3.4 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο

$$\psi(u, t) = \text{Prob}[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } 0 < t \leq \tau]$$

Η $\psi(u, t)$ ως συνάρτηση του χρόνου είναι αύξουσα και ως συνάρτηση του u φθίνουσα. Δηλαδή

$$u_1 \leq u_2 \Rightarrow \psi(u_1, t) \geq \psi(u_2, t)$$

και

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \psi(u, t_1) \leq \psi(u, t_2).$$

Προφανώς ισχύει ότι για κάθε $u \geq 0$ το $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \psi(u)$.

1.3.5 Πιθανότητα μή-χρεοκοπίας

Ορίζουμε ως πιθανότητα μή-χρεοκοπίας την $\delta(u) = 1 - \psi(u)$. Η $\delta(u)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς u με $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$. Η συνάρτηση δεν είναι ούτε συνεχής ούτε διακριτή αλλά είναι μία μεικτή κατανομή, αφού $\delta(0) > 0$ και έχει πυκνότητα στο $(0, \infty)$.

Στο κλασικό μοντέλο η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) f(x) dx$$

ή

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) [1 - F(x)] dx, \quad u \geq 0.$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης για $u = 0$ είναι

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}$$

και συνεπώς

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}.$$

1.3.6 Κλιμακωτά ύψη

Τα κλιμακωτά ύψη είναι μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές έστω

$$\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$$

με την L_1 να εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u , την L_2 να εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω το $u_1 = u - L_1$ και την L_k να εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω το $u_k = u - L_k$.

Μια πολύ σημαντική ποσότητα είναι η κατανομή ισορροπίας

$$H(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x [1 - F(t)] dt.$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής L_1 , όταν βρισκόμαστε στο κλασικό μοντέλο.

1.3.7 Μέγιστη συσσωρευτική απώλεια

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό μιας τυχαίας μεταβλητής πολύ χρήσιμης για να εκμαιεύσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σε αρκετά στοχαστικά μοντέλα.

Έστω οι τ.μ. L_i οι οποίες δηλώνουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω απο το αρχικό αποθεματικό και ονομάζονται κλιμακωτά ύψη (Ladder heights).

Έστω K το πλήθος των κλιμακωτών υψών στο κλασικό μοντέλο το οποίο ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Συνεπώς αν θεωρήσουμε "αποτυχία" την εμφάνιση ενός L_i , δηλαδή μίας πτώσης κάτω απο το αρχικό αποθεματικό, η μεταβλητή K μετρά τον αριθμών αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία και η συνάρτηση πιθανότητας αυτής της κατανομής δίνεται απο την σχέση

$$Prob(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) = \left[\frac{1}{1 + \theta} \right]^k \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_k = \sum_{i=1}^k L_i$$

Η L παριστάνει την συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω απο το αρχικό αποθεματικό u και η κατανομή της συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Η κατανομή της είναι μεικτή, αφού μπορεί να πάρει την τιμή 0 με θετική πιθανότητα, ενώ έχει πυκνότητα στο $(0, \infty)$

$$\begin{cases} P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0), & k = 0 \\ P(L > u) = \psi(u), \\ P(L \leq u) = \delta(u). \end{cases}$$

Στο κλασικό μοντέλο, όταν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος, η τυχαία μεταβλητή L_1 ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με πυκνότητα $\frac{1}{\mu_1} \bar{F}(x)$, δηλαδή

$$P(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_1} \bar{F}(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι η κατανομή του κλιμακωτού ύψους L_1 δεν εξαρτάται απο το αρχικό αποθεματικό u .

Αν $M_X(r)$ είναι η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων, τότε ισχύει ότι

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r} (M_X(r) - 1).$$

Όταν το αρχικό αποθεματικό u είναι 0, τότε η κατανομή που έχει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, δοθέντος οτι θα συμβεί χρεοκοπία, είναι η κατανομή H . Αν, δηλαδή, $|U(t)|$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει (σε απόλυτη τιμή) το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, τότε

$$P(|U(t)| \leq x | T < \infty, U(0) = 0) = H(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

1.3.8 Η εξίσωση του Lundberg

Μία ποσότητα με ιδιαίτερη σημασία στην θεωρία κινδύνων είναι ο συντελεστής προσαρμογής R , τον οποίο λαμβάνουμε απο την θετική λύση

της εξίσωσης

$$\int_0^{\infty} e^{rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1 + \theta = \frac{1}{\psi(0)} \quad (1.1)$$

ως προς r .

Οι λόγοι που η ποσότητα αυτή είναι σημαντική είναι κυρίως δύο:

1. Η ανισότητα του Lundberg:

$$\psi(u) \leq e^{Ru}$$

2. Ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg:

$$\psi(u) \sim Ce^{Ru}$$

Μία απο τις σημαντικότερες έννοιες στην θεωρία χρεοκοπίας είναι η εξίσωση του Lundberg, μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας καθώς και να βρούμε προσεγγίσεις και φράγματα. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι η παρακάτω

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1 + \theta = \frac{1}{\psi(0)}$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε κάποιες τυχαίες μεταβλητές που σχετίζονται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

1.3.9 Χρόνος χρεοκοπίας

Είναι η στιγμή που το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό. Είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή γιατί μπορεί με θετική πιθανότητα να πάρει την τιμή ∞ . Όταν ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους η εταιρία μπορεί να μην χρεοκοπήσει ποτέ. Δηλαδή

$$Prob(T = \infty) = Pr(U(t) > 0 \text{ για κάθε } t > 0) = 1 - \psi(u) = \delta(u).$$

Είναι προφανές ότι η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, εξαρτάται απο την τιμή του αρχικού αποθεματικού u . Συνεπώς ένας πληρέστερος συμβολισμός του, θα ήταν

$$T_u = \inf\{t : U(t) < 0 | U(0) = u\}.$$

1.3.10 Έλλειμμα

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα, στην περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία, είναι ποιο θα είναι το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας. Επειδή το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t δηλώνεται με $U(t)$, το έλλειμμα θα ισούται κατά απόλυτη τιμή με την τυχαία μεταβλητή $-U(t)$ που δηλώνει την οξύτητα της χρεοκοπίας.

1.4 Erlang(2) μοντέλο

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με μία ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου (Sparre Andersen) και συγκεκριμένα όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι των απαιτήσεων ακολουθούν την κατανομή Erlang(2). Θα μελετήσουμε αυτό το στοχαστικό μοντέλο και θα δούμε πως διαμορφώνονται οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν σύμφωνα με αυτό (βλέπε [Dickson, Hipp \(1998\)](#)).

Συμβολίζουμε με:

1. $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$: τους ενδιάμεσους χρόνους των απαιτήσεων
2. $k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$, $t > 0$, την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Erlang(2, β)
3. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$: το ύψος των απαιτήσεων.

Στο ανανεωτικό πρότυπο η συνθήκη καθαρού κέρδους παίρνει την μορφή

$$cE(T_i) > E(X_i).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u , δίνεται απο την σχέση:

$$\psi(u) = Pr \left[u + \sum_{i=1}^{N(t)} (cT_i - X_i) < 0 \right], \quad N(t) = 1, 2, \dots$$

Εάν υπάρχει η ροπογεννήτρια της X_i , τότε ο συντελεστής προσαρμογής είναι η μοναδική θετική λύση της παρακάτω εξίσωσης:

$$E(e^{-cRT_i})E(e^{RX_i}) = 1$$

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας $\delta(u)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$\delta(u) = \int_0^{\infty} k(t) \int_0^{u+ct} \delta(u+ct-x) dF(x) dt$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\delta(u)$ είναι

$$\hat{\delta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \delta(u) du,$$

και ο μετασχηματισμός Laplace Stieljes της $F(x)$

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x).$$

οπότε χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\delta(u) = \int_0^{\infty} k(t) \int_0^{u+ct} \delta(u+ct-x) dF(x) dt$$

και αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει

$$\hat{\delta}(s) = \frac{c^2 s \delta(0) + \beta^2 \mu_1 - 2\beta c}{c^2 s^2 - 2\beta c s + \beta^2 (1 - f^*(s))}.$$

Έχοντας ορίσει προηγουμένως [1.3.7] την μέγιστη σωρευτική απώλεια L έτσι ώστε:

$$\delta(u) = Pr(L \leq u)$$

ο μετασχηματισμός Laplace Stieljes της $\delta(u)$ παίρνει την μορφή:

$$\delta^*(s) = E[e^{-sL}] = \frac{c^2 s^2 \delta(0) + (\beta^2 \mu_1 - 2\beta c)s}{c^2 s^2 - 2\beta c s + \beta^2 (1 - f^*(s))}$$

Ωστόσο, όπως και στο κλασικό μοντέλο, έτσι κι εδώ η L ακολουθεί μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή, έτσι μπορούμε να εκφράσουμε τον μετασχηματισμό Laplace Stieljes ως:

$$\delta^*(s) = \frac{\delta(0)}{1 - \psi(0)h^*(s)},$$

όπου

$h^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(s)$ και $q^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dQ(x) = \frac{1-f^*(s)}{\mu_1 s}$, H η κατανομή των κλιμακωτών υψών.

Συνεπώς, αντικαθιστώντας καταλήγουμε ότι:

$$\delta^*(s) = \frac{c^2 s \delta(0) + \beta^2 \mu_1 - 2\beta c}{c^2 s - 2\beta c + \beta^2 \mu_1 q^*(s)}$$

Έτσι τώρα θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον συντελεστή προσαρμογής και να δώσουμε κάποιες κλειστές εκφράσεις για τα $\delta(0)$, $\psi(0)$.

Λύνοντας την εξίσωση της προτάσεως [1.3.1] καταλήγουμε ότι

$$\delta(0) = \frac{2\beta c - \beta^2 \mu_1}{c^2 s_0}$$

$$\psi(0) = \frac{c^2 s_0 + \beta^2 \mu_1 - 2\beta c}{c^2 s_0}$$

όπου s_0 ο συντελεστής προσαρμογής.

1.5 Phase type 2 μοντέλο

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με μία ακόμα ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου (Sparre Andersen). Στην περίπτωση αυτή οι ενδιάμεσοι χρόνοι των απαιτήσεων ακολουθούν την κατανομή Phase-type(2) (βλέπε [Dickson, Hipp \(2000\)](#)).

Η διαφορά με το προηγούμενο μοντέλο είναι ότι εδώ δεν έχουμε κλειστό τύπο για την συνάρτηση πυκνότητας των ενδιάμεσων χρόνων αλλά μια οικογένεια συναρτήσεων πυκνότητας με την ιδιότητα

$$k(t) + A_1 k'(t) + A_2 k''(t) = 0, \quad t > 0.$$

Γενικά, τις κατανομές phase-type της εισήγαγε ο Neuts(1975) και τις όρισε μέσω μίας συνεχούς ομογενούς αλυσίδας Markov σε πεπερασμένο διάστημα $\{0, 1, \dots, I\}$, $I \leq 1$. Όταν η κατάσταση 0 είναι απορροφήσιμη και η Markovιανή αλυσίδα θεωρείται ότι είναι μη-αναστρέψιμη, (δλδ είναι δυνατό να πάμε απο κάθε κατάσταση σε κάθε άλλη κατάσταση), τότε η τυχαία μεταβλητή, (βλέπε [Dickson, Hipp \(2000\)](#))

$$T = \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0\}$$

είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού και η κατανομή της καλείται phase-type με παραμέτρους

$$\pi^* = (\pi_0, \dots, \pi_I) \text{ και } B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,I}.$$

Στην περίπτωση μας θα ασχοληθούμε με κατανομές phase-type με $I = 2$ και $\pi_0 = 0$. Τότε ο πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha\lambda \\ \beta\mu & -\mu \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda, \mu > 0$ και $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha\beta < 1$.

Κάθε phase-type(2) κατανομή με παραμέτρους π και B , όπου το B ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, είναι είτε γραμμικός συνδυασμός δύο εκθετικών κατανομών είτε γραμμικός συνδυασμός μίας εκθετικής και μίας κατανομής Erlang (2) με της ίδιας κλίμακας παραμέτρους.

Θεώρημα 1.5.1. Έστω k η πυκνότητα μιας κατανομής phase-type (2) με παραμέτρους π και B , όπου το B ικανοποιεί τις συνθήκες όπως προηγουμένως. Εάν η f είναι πυκνότητα μιας εκθετικής τότε η k ικανοποιεί την

$$k(t) + A_1 k'(t) + A_2 k''(t) = 0, \quad \forall t > 0$$

με $A_2 > 0$.

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις με το μοντέλο Erlang (2) ως προς τον συμβολισμό των ενδιάμεσων χρόνων, τις αποζημιώσεις, τη συνθήκη καθαρού κέρδους και της πιθανότητας χρεοκοπίας.

1. $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$: οι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων
2. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$: ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που δηλώνουν το μέγεθος της i -οστής απαίτησης
3. η συνθήκη καθαρού κέρδους: $\rho = cE(T_i) > E(X_i)$
4. Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u , δίνεται από την σχέση

$$\psi(u) = Pr(u + \sum_{i=1}^n (cT_i - X_i) < 0), \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας: $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\delta(u)$ είναι

$$\delta^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} du = \frac{A_2 c^2 (s\delta(0) + \delta'(0)) - A_1 c \delta(0)}{A_2 c^2 s^2 - A_1 c s + 1 - f^*(s) + A_2 c k(0) s f^*(s)}$$

όπου $f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$.

Έχοντας ορίσει την μέγιστη σωρευτική απώλεια L έτσι ώστε: $\delta(u) = Pr(L \leq u)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της L δίνεται απο την σχέση

$$\phi^*(s) = E[e^{-sL}] = s\delta^*(s) = \frac{\mu_1 - A_1 c + A_2 c k(0) + A_2 c^2 \delta(0)}{\mu_1 q^*(s) - A_1 c + A_2 c^2 s + f^*(s) A_2 c k(0)}.$$

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας με αρχικό απθεματικό 0 είναι:

$$\delta(0) = \frac{\rho}{A_2 c^2 s_0},$$

όπου s_0 είναι η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης

$$\mu_1 q^*(s_0) - A_1 c + A_2 c^2 s_0 + f^*(s_0) A_2 c k(0) = 0.$$

Η σ.π.π. h της κατανομής των κλιμακωτών υψών δίνεται από την

$$h(y) = \sigma [\mu_1 \hat{q}(y) + A_2 c k(0) \hat{f}(y)], \quad y > 0,$$

όπου

$$\sigma = \frac{s_0}{A_2 c^2 s_0 - \rho}$$

και όταν έχουμε συνάρτηση κερδοσκοπίας G ,

$$\hat{g}(y) = \int_y^{\infty} e^{-s_0(x-y)} dG(x), \quad y > 0.$$

Κεφάλαιο 2

Μελέτη Γενικευμένης Γάμμα και αντίστροφης γκαουσιανής κατανομής

Εισαγωγή

Όπως έχουμε προαναφέρει, οι αποζημιώσεις στην εργασία αυτή θα ακολουθούν την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, μια ιδιαίτερα ευέλικτη κατανομή στην θεωρία χρεοκοπίας. Παρακάτω θα μελετήσουμε την γενικευμένη Γάμμα κατανομή μέσω της οποίας εκφράζεται η αντίστροφη γκαουσιανή καθώς και κάποια χρησιμα θεωρήματα και προτάσεις πάνω σε αυτή.

2.1 Γενικευμένη Γάμμα συνάρτηση

Οι συνεχείς λύσεις σε ένα σημαντικό αριθμό προβλημάτων στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και την στατιστική μπορούν να εκφραστούν με όρους της γενικευμένης γαμμα συνάρτησης.

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re } \alpha > 0$$

και

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad x \text{ ανήκει στο } R$$

όπου προκύπτει ότι

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x)$$

Αυτές οι συναρτήσεις αρχικά μελετήθηκαν, για κάποιο πραγματικό αριθμό x , απο τον Legendre. Πρόσφατα αποδείχθη ότι οι κλειστού τύπου λύσεις (closed-forms solutions) σε πολλά προβλήματα μπορούν να εκφραστούν με όρους γενικευμένης αναπαράστης μη-πλήρους γάμμα συνάρτησης. Δηλαδή:

$$\gamma(\alpha, x; b) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t-bt^{-1}} dt, \quad \text{για } b = 0, \operatorname{Re} \alpha > 0$$

και

$$\Gamma(\alpha, x; b) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t-bt^{-1}} dt, \quad x \text{ ανήκει στο } R.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι $b \neq 0$. Οι [Ahmad, Chaudry \(1992\)](#) προσδιόρησαν την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-(\sqrt{\alpha}x - \sqrt{\beta}x^{-1})^2), \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0.$$

και

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \alpha\sqrt{x}; \alpha\beta\right), \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0.$$

Ο Ahmad ωστόσο μελέτησε μία τάξη συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας με τρεις παραμέτρους κι έτσι προέκυψε εκ νέου ότι:

$$f(x) = cx^{\alpha-1} e^{-\alpha x - \beta x^{-1}}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, c^{-1} = 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{\alpha\beta})$$

και

$$F(x) = 1 - c\alpha^{-\alpha} \Gamma(\alpha, \alpha x; \alpha\beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

όπου

$$c^{-1} = 2\left(\frac{b}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{\alpha b})$$

Αποδείχθηκε ότι μερικές απο τις πιο γνωστές πυκνότητες πιθανοτήτων όπως οι Weibull, log-normal, Γάμμα, x^2 και η Αντίστροφη Γκαουσιανή που μας απασχολεί για την εργασία αυτή, είναι ειδικές περιπτώσεις της παραπάνω συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

Παρακάτω θα δούμε κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών όπως Ασυμπτωτικές συμπεριφορές, μετασχηματισμούς Laplace, συνελίξεις και άλλες μορφές. Παρακάτω παραθέτουμε κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα όπως τα παρουσίασαν οι [Chaudhry, Zubair \(1994\)](#)

Θεώρημα 2.1.1. Θεώρημα Αποσυνθέσης

$$\gamma(\alpha, x; b) + \Gamma(\alpha, x; b) = 2b^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{b}).$$

Θεώρημα 2.1.2. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\alpha t - bt^{-1}} dt = \alpha^{-\alpha} \Gamma(\alpha, \alpha x; \alpha b).$$

Θεώρημα 2.1.3. Έστω L , ο μετασχηματισμός Laplace, τότε προκύπτει ότι

$$L\{(t+x)^{\alpha-1} e^{-\frac{b}{x+t}}; s\} = s^{-\alpha} e^{sx} \Gamma(\alpha, sx; bs), \quad s > 0.$$

Θεώρημα 2.1.4. Αναδρομικός τύπος

$$\Gamma(\alpha + 1, x; b) = \alpha \Gamma(\alpha, x; b) + b \Gamma(\alpha - 1, x; b) + x \alpha e^{-x - bx^{-1}}.$$

Πόρισμα 2.1.1. Απο το Θεώρημα 2.1.4. θέτοντας όπου $\beta = 0$ προκύπτει

$$\Gamma(\alpha + 1, x) = \alpha \Gamma(\alpha, x) + x \alpha e^{-x}.$$

Θεώρημα 2.1.5.

$$\frac{d}{dx} (\Gamma(\alpha, x; b)) = -x^{\alpha-1} e^{-x - bx^{-1}}$$

και θέτοντας $\beta = 0$ προκύπτει

$$\frac{d}{dx} (\Gamma(\alpha + 1, x)) = -x^{\alpha-1} e^{-x}.$$

Θεώρημα 2.1.6.

$$\frac{d}{db}(\Gamma(\alpha, x; b)) = -\Gamma(\alpha - 1, x; b).$$

Θεώρημα 2.1.7. Για $\alpha = 1/2$ προκύπτει

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x; b\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[e^{-2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right) + e^{2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)\right].$$

Ομοίως αν $\alpha = -1/2$ έχουμε

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}, x; b\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}\left[e^{-2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right) - e^{2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)\right].$$

Θεώρημα 2.1.8. Έστω L ο μετασχηματισμός Laplace, τότε προκύπτει ότι

$$L\{\Gamma(a, t; b); p\} = \frac{2}{p}b^{\frac{a}{2}}\left[K_{\alpha}(2\sqrt{b}) - (p+1)^{-\frac{a}{2}}K_{\alpha}(2\sqrt{b(p+1)})\right].$$

Πρόταση 2.1.1. Ως συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.8. έπεται ότι

$$L\left\{e^{-2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{t} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{t}}\right); p\right\} = \frac{2}{p}\left[e^{-2\sqrt{b}} - \frac{e^{-2\sqrt{b(p+1)}}}{\sqrt{p+1}}\right]$$

και

$$L\left\{e^{-2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{t} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\sqrt{b}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{t} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{t}}\right); p\right\} = \frac{2}{p}\left[e^{-2\sqrt{b}} - e^{-2\sqrt{b(p+1)}}\right].$$

Θεώρημα 2.1.9. Για κάθε $p > -\beta$, ο μετασχηματισμός Laplace παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$L\left\{\Gamma\left(a, \frac{1}{t}; b\right); p\right\} = \frac{2}{p}(p+b)^{\frac{a}{2}}K_{\alpha}(2\sqrt{b+p}).$$

Πρόταση 2.1.2. Απο το προηγούμενο Θεώρημα αν θέσουμε $\beta = 0$, ο μετασχηματισμός Laplace γίνεται

$$L\left\{\Gamma\left(a, \frac{1}{t}\right); p\right\} = 2p^{\frac{a}{2}-1}K_{\alpha}(2\sqrt{p}).$$

Πρόταση 2.1.3. Για κάθε $\beta > 0, p > -1$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$L\{e^{-2\sqrt{b}}\text{Erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{bt}) + e^{2\sqrt{b}}\text{Erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{bt}); p\} = \frac{2}{p}[e^{-2\sqrt{b}} - \frac{e^{-2\sqrt{p+b}}}{\sqrt{p+1}}]$$

και

$$L\{e^{-2\sqrt{b}}\text{Erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{bt}) - e^{2\sqrt{b}}\text{Erfc}(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{bt}); p\} = \frac{2}{p}[e^{-2\sqrt{b}} - e^{-2\sqrt{p+b}}].$$

Θεώρημα 2.1.10. Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^t e^{(b-\lambda)x}\Gamma(\alpha, \frac{1}{x}; b)dx = \frac{e^{-\lambda t}}{b-\lambda}[e^{bt}\Gamma(\alpha, \frac{1}{t}; b) - e^{-\lambda t}\Gamma(\alpha, \frac{1}{t}; \lambda)].$$

Πρόταση 2.1.4. Απο το παραπάνω θεώρημα, θέτοντας $\lambda = 0$, προκύπτει

$$\int_0^t e^{bx}\Gamma(\alpha, \frac{1}{x}; b)dx = \frac{1}{b}[e^{bt}\Gamma(\alpha, \frac{1}{t}; b) - \Gamma(\alpha, \frac{1}{t})].$$

Πρόταση 2.1.5. Για κάθε $\beta \geq 0, x > 0$, ισχύουν τα παρακάτω

$$e^{bx}\Gamma(a, \frac{1}{x}; b) \geq \Gamma(a, \frac{1}{x})$$

και

$$e^{bx}\Gamma(a, \frac{1}{x}; b) \leq \Gamma(a, \frac{1}{x}).$$

Πρόταση 2.1.6.

$$\int_0^t \Gamma(a, \frac{1}{x}; \lambda)dx = t\Gamma(a, \frac{1}{t}; \lambda) - \Gamma(a-1, \frac{1}{t}; \lambda).$$

Παρατήρηση 2.1.1. Αξίζει να αναφερθεί ότι η παραπάνω πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για πρακτικούς λόγους. Αρκετές απο τις ειδικές περιπτώσεις μπορούν να εκφραστούν εαν δώσουμε τιμές στις παραμέτρους α, λ . Ειδικότερα όταν $\lambda = 0$ προκύπτει ότι:

$$\int_0^t \Gamma(a, \frac{1}{x})dx = t\Gamma(a, \frac{1}{t}) - \Gamma(a-1, \frac{1}{t}).$$

Θεώρημα 2.1.11. Για $\alpha \leq -1$ και $\beta < 0$ ισχύει ότι

$$\Gamma(\alpha, x; b) < e^\beta \Gamma(\alpha, \beta + x), \quad x > 0.$$

Θεώρημα 2.1.12. Ασυμπτωτικός τύπος για $b > 0$ και κάποιο α .

$$\Gamma(a, x; b) \sim 2b^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{b}) - x^\alpha e^{-x-bx^{-1}}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Θεώρημα 2.1.13.

$$K_\alpha(2\sqrt{p+b}) = p^{\frac{\alpha}{2}} (p+b)^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b^n}{(n!)} p^{-\frac{n}{2}} K_{\alpha-n}(2\sqrt{p}), \quad p > 0, b > 0.$$

2.2 Αντίστροφη Γκαουσιανή Κατανομή

Η επιλογή κατανομής για την περιγραφή δεδομένων συχνά γίνεται υπό το πρίσμα του πόσο καλά τα ίδια τα δεδομένα φαίνεται να προσαρμόζονται από τη συγκεκριμένη κατανομή. Αντιθέτως, στη Στατιστική μοντελοποίηση, η επιλογή της κατανομής γίνεται υπό το πρίσμα του πόσο καλά έχουμε καταφέρει να εξηγήσουμε το μηχανισμό της αποτυχίας ή επιτυχίας ενός φαινομένου. Παραδείγματος χάρη, είναι λογικό να θεωρήσουμε έναν αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας για την αναπαράσταση της διάρκειας ζωής σε μία κατάσταση που κυρίως σχετίζεται με τη γήρανση ή τη διαδικασία φθοράς. Ωστόσο, μία πρόωρη αποτυχία μπορεί να προκληθεί από πληθώρα άλλων λόγων, όπως τεχνολογικό ελάττωμα, λάθος χρήση, στιγμιαίος τραυματισμός κ.α.. Για το λόγο αυτό, είναι επιθυμητό να χρησιμοποιήσουμε τη φυσική περιγραφή ενός φαινομένου προκειμένου να επιλέξουμε την κατανομή που θα το περιγράψει. Περιπτώσεις δεδομένων στα οποία συμβαίνουν συχνά πρόωρα γεγονότα όπως θάνατος ή επιδιόρθωση αποτελούν συνηθισμένο φαινόμενο σε δεδομένα διάρκειας ζωής. Μία κατανομή που είναι κατάλληλη για την περιγραφή δεδομένων με τέτοια συμπεριφορά είναι η

αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή. Στην παράγραφο αυτή, περιγράφεται η γέννηση της αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής ως κατανομής του χρόνου πρώτης μετάβασης σε ανέλιξη Wiener.

Το βασικό χαρακτηριστικό των ανελίξεων με διακριτό χώρο καταστάσεων σε συνεχή χρόνο (ανέλιξη Poisson) είναι ότι σε ένα μικρό χρονικό διάστημα είτε παρατηρείται ριζική αλλαγή είτε δεν παρατηρείται καμία αλλαγή της κατάστασης της ανέλιξης. Πολύ συχνά στις εφαρμογές προκύπτει η ανάγκη να μελετήσουμε ανελίξεις με συνεχή χώρο καταστάσεων. Μέσα σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μία τέτοια ανέλιξη μπορεί να υποστεί μικρές μόνο μεταβολές της κατάστασής της. Οι τροχιές τέτοιων ανελίξεων αναμένεται να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Παράδειγμα μίας τέτοιας ανέλιξης αποτελούν μόρια που αποβάλλονται μέσα σε κάποιο υγρό και κινούνται λόγω των γρήγορων, τυχαίων, βίαιων και διαδοχικών συγκρούσεων με τα γειτονικά μόρια. Αν προχωρούσαμε σε γράφημα της αλλαγής της πορείας ενός τέτοιου μορίου με το χρόνο θα περιμέναμε ένα συνεχές, ακανόνιστο και αλλοπρόσαλλο γράφημα, το οποίο θα αποτελούσε στην πραγματικότητα την τροχιά μίας στοχαστικής ανέλιξης σε συνεχή χρόνο με συνεχή χώρο καταστάσεων. Το φυσικό αυτό φαινόμενο είναι γνωστό ως κίνηση Brown από τον βοτανολόγο Robert Brown, που το παρατήρησε για πρώτη φορά το 1827. Στον απλό τυχαίο περίπατο, μεταβιβάσεις ενός βήματος επιτρέπεται να καταλήγουν μόνο στις κοντινότερες γειτονικές καταστάσεις. Τέτοιου είδους τοπικές αλλαγές μπορεί να θεωρηθούν ως το ανάλογο των διακριτών καταστάσεων του φαινομένου των συνεχών αλλαγών για την περίπτωση του συνεχούς χώρου καταστάσεων. Έτσι, αν θεωρήσουμε μικρά βήματα ενός μεγέθους Δ να συμβαίνουν σε μικρά χρονικά διαστήματα μεγέθους τ , τότε παίρνοντας τα όρια καθώς Δ και τ πηγαίνουν στο μηδέν, περιμένουμε να πάρουμε μία ανέλιξη της οποίας οι τροχιές είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

Θεώρημα 2.2.1. Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με παραμέτρους β, μ , $X \sim IG(\beta, \mu)$. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}}$$

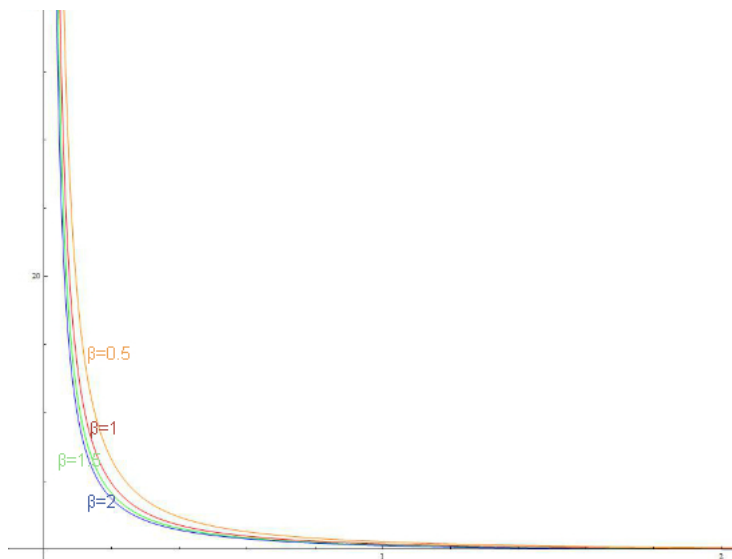
με

Μέση Τιμή $E(X) = \mu$

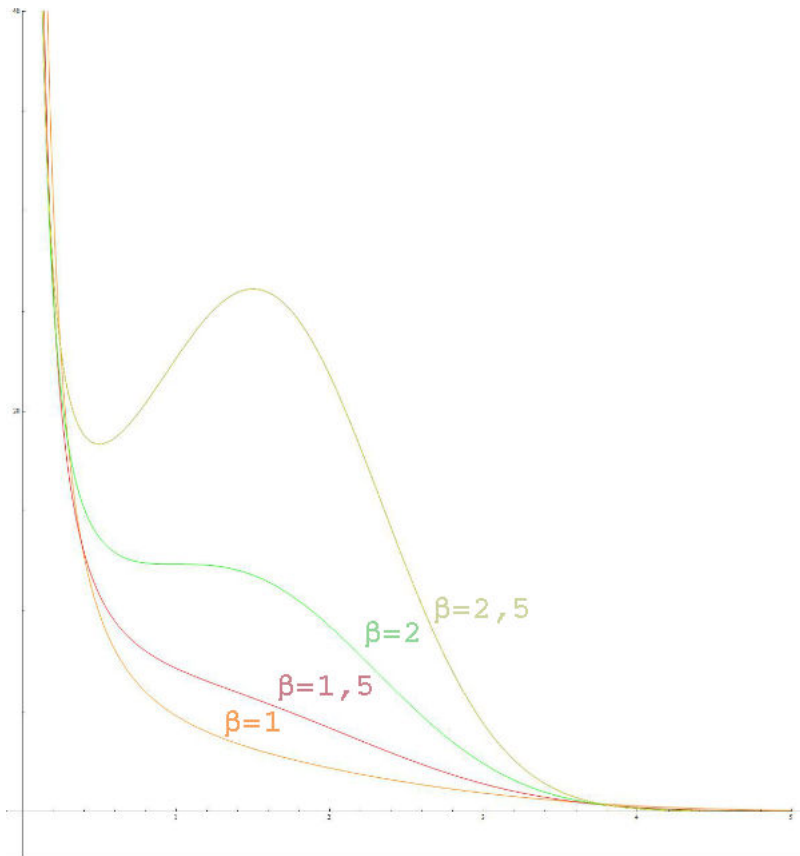
Διακύμανση $Var(x) = \mu\beta$

και Ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_x(t) = e^{\frac{\mu}{\beta}(1-\sqrt{1-2\beta t})}$

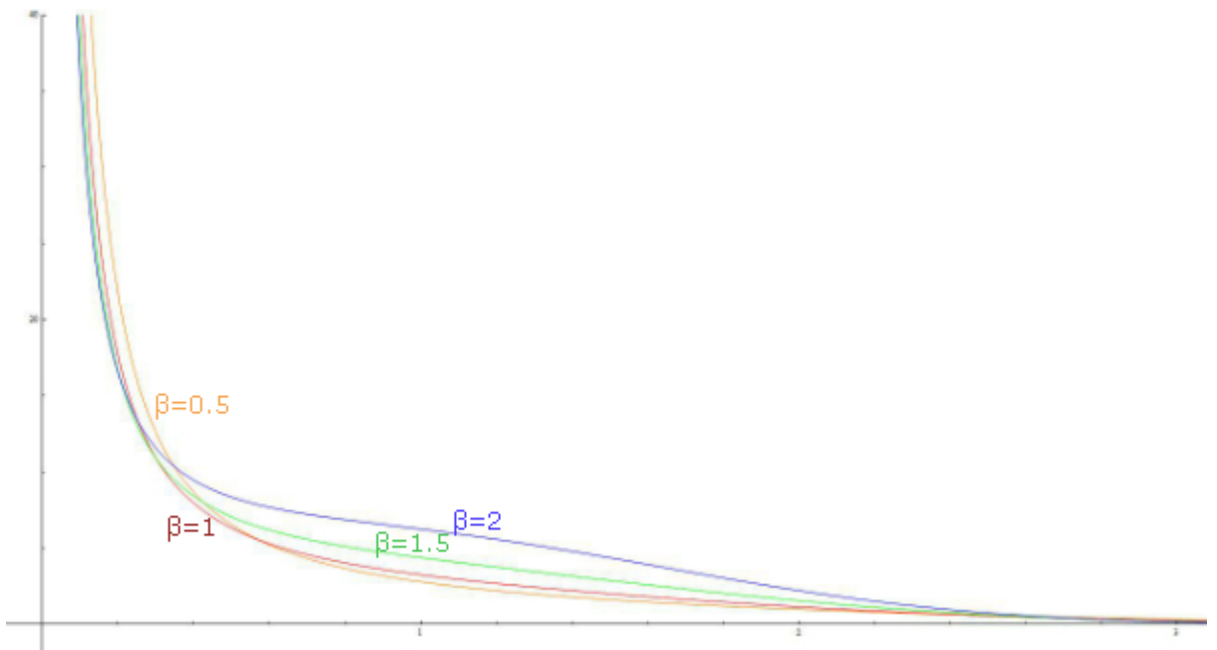
Παράδειγμα 1. Γραφική παράσταση πυκνότητας αντίστροφης γκαουσιανής με $\mu=1$



Παράδειγμα 2. Γραφική παράσταση πυκνότητας αντίστροφης γκαουσιανής με $\mu=4$



Παράδειγμα 3. Γραφική παράσταση αντίστροφης γκαουσιανής με $\mu=3$



2.3 Σύνδεση αντίστροφης γκαουσιανής με την μη πλήρη γάμμα μέσω της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος

Σ αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε με ποιον τρόπο η Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή μπορεί να εκφραστεί μέσω της συμπληρωματικής συνάρτησης λάθους χρησιμοποιώντας χρήσιμα θεωρήματα από την Ενότητα 2.1. και θα βρούμε κάποιους τύπους για την ουρά της κατανομής, την συναρτηση ισορροπίας και κάποιους μετασχηματισμούς Laplace τα οποία είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν και να γίνει η παράθεση παραδειγμάτων που θα μας οδηγήσουν σε χρήσιμα συμπεράσματα.

Ορισμός 2.3.1. Ουρά Αντίστροφης Γκαουσιανή Κατανομής

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= \int_x^{\infty} f(x)dx = \frac{\mu e^{\frac{\mu}{\beta}}}{2\beta\sqrt{\pi}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}, \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) \\ &= \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{2}\left[e^{-\frac{\mu}{\beta}}\text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{2\beta}} - \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right) - e^{\frac{\mu}{\beta}}\text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{2\beta}} + \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right)\right]\end{aligned}$$

(Βλέπε [Pssarakos \(2014\)](#))

Ορισμός 2.3.2. Συνάρτηση Ισορροπίας

$$\bar{H}(x) = \frac{\int_x^{\infty} \bar{F}(x)dt}{\mu}$$

όπου

$$\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt < \infty$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\bar{H}(x) &= \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}, \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) - \frac{x}{2\beta}\Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}, \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right)\right] \\ &= \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)e^{-\frac{\mu}{\beta}}\text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{2\beta}} - \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right) + \left(1 + \frac{x}{\mu}\right)e^{\frac{\mu}{\beta}}\text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{2\beta}} - \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right)\right]\end{aligned}$$

(Βλέπε [Pssarakos \(2014\)](#))

Ορισμός 2.3.3. Τελεστής Dickson-Hipp της $\bar{F}(x)$

$$Tr\bar{F}(x) = \int_x^{\infty} e^{r(x-t)} \bar{F}(t) dt$$

Θεώρημα 2.3.1. Για $0 < r < \frac{1}{2b}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Tr\bar{F}(x) &= \frac{\mu e^{\frac{\mu}{\beta}}}{r\sqrt{2\beta\pi}} \left[e^{r(x-t)} \frac{\sqrt{1-2\beta r}}{\sqrt{2\beta}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{1-2\beta r}{2\beta} x; \frac{\mu^2(1-2\beta r)}{4\beta^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{\beta}; \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) \right] \\ &= \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{2r} \left\{ e^{-rx} \left[e^{-\frac{\mu}{\beta}\sqrt{1-2\beta r}} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{1-2\beta r}{2\beta}} x - \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right) - e^{\frac{\mu}{\beta}\sqrt{1-2\beta r}} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{1-2\beta r}{2\beta}} x + \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[e^{-\frac{\mu}{\beta}} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{2\beta}} - \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right) - e^{\frac{\mu}{\beta}} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{2\beta}} + \frac{\mu}{\sqrt{2\beta x}}\right) \right] \right\} \quad (\text{Βλέπε Pssarakos (2014)}) \end{aligned}$$

Θεώρημα 2.3.2. Για $0 < r < \frac{1}{2b}$ η συνάρτηση $Tr\bar{F}_e(x)$ δίνεται απο

$$\begin{aligned} Tr\bar{F}_e(x) &= \frac{1}{r\mu} Tr\bar{F}(x) - \frac{1}{r} \bar{F}_e(x) \\ &= \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{r^2\sqrt{2\beta\pi}} \left[e^{-rx} \frac{\sqrt{1-2\beta r}}{\sqrt{2\beta}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{1-2\beta r}{2\beta} x; \frac{\mu^2(1-2\beta r)}{4\beta^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{\beta}; \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{r\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}; \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) - \frac{x}{2\beta} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}; \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) \right] \quad (\text{Βλέπε Pssarakos (2014)}) \end{aligned}$$

2.4 Μελέτη συνάρτησης πυκνότητας κλιμακωτών υψών

Έχοντας περιγράψει τον τρόπο που εκφράζεται η αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή μέσω της γενικευμένης Γάμμα συνάρτησης και της συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος θα προχωρήσουμε σε μια συνοπτική περιγραφή των πυκνοτήτων των κλιμακωτών υψών, για κάθε ένα στοχαστικό μόντελο όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή, μια πολύ χρήσιμη ποσότητα στην θεωρία χρεοκοπίας που μας βοηθάει στην εξαγωγή πολλών συμπερασμάτων και αποτελεσμάτων.

2.4.1 Κλασικό μοντέλο

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως στο κλασικό μοντέλο ισχύει ότι

- Ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \dots \sim Exp(\lambda > 0)$ με σ.π.π. $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$
- Απαιτήσεις $x_1, x_2, \dots \sim IG(\beta, \mu)$ με σ.π.π. $f(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}}$

Συνεπώς τα κλιμακωτά ύψη έστω H_1, H_2, \dots έχουν πυκνότητα

$$h(y) = f_e(y) = \frac{\bar{F}(y)}{\mu} = \frac{e^{\frac{\mu}{\beta}}}{2\beta\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}, \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right)$$

2.4.2 Erlang 2 μοντέλο

- Ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \dots \sim Erlang(2, b > 0)$ με $k(t) = b^2 t e^{-bt}$, $t > 0$
- Απαιτήσεις $x_1, x_2, \dots \sim IG(\beta, \mu)$ με σ.π.π. $f(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}}$

Συνεπώς τα κλιμακωτά ύψη έστω H_1, H_2, \dots έχουν πυκνότητα

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{b^2 s_0}{c^2 s_0 - 2bc + b^2 \mu} T - s_0 \bar{F}(y) \\ &= \frac{b^2 s_0}{c^2 s_0 - 2bc + b^2 \mu} \frac{\mu e^{\frac{\mu}{\beta}}}{\sqrt{2\beta\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}, \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) - e^{-s_0 \frac{\sqrt{1+2\beta s_0}}{\sqrt{2\beta}}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{1+2\beta s_0}{2\beta} x; \frac{\mu^2(1+2\beta s_0)}{4\beta^2}\right) \right] \end{aligned}$$

2.4.3 Phase type 2 μοντέλο

- Ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \dots \sim Exp(\lambda > 0)$ με πυκνότητα $k(t)$ η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $k(t) + A_1 k'(t) + A_2 k''(t) = 0$, $t > 0$
- Απαιτήσεις $x_1, x_2, \dots \sim IG(\beta, \mu)$ με σ.π.π. $f(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}}$

Συνεπώς τα κλιμακωτά ύψη έστω H_1, H_2, \dots έχουν πυκνότητα

$$h(y) = \frac{s_0}{A_2 c^2 s_0 - c(A_1 - A_2 k(0)) + \mu} [T - s_0 \bar{F}(y) + A_2 c k(0) T - s_0 f(y)]$$

Όπου το s_0 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης

$$T - s\bar{F}(0) - A_1 c + A_2 c^2 s + A_2 c k(0) T - s f(0) = 0$$

και

- $T - s_0 \bar{F}(x) = \frac{\mu e^{\frac{\mu}{\beta}}}{\sqrt{2\beta\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x}{2\beta}, \frac{\mu^2}{4\beta^2}\right) - e^{-s_0 \frac{\sqrt{1+2\beta s_0}}{\sqrt{2\beta}}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{1+2\beta s_0}{2\beta} x; \frac{\mu^2(1+2\beta s_0)}{4\beta^2}\right) \right]$
- $T - s_0 f(x) = \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{1+2\beta s_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu}{\beta}} e^{s_0 x} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{1+2\beta s_0}{2\beta} x; \frac{\mu^2(1+2\beta s_0)}{4\beta^2}\right)$

Κεφάλαιο 3

Φράγματα και ασυμπτωτικοί τύποι

Εισαγωγή

Αφού έχουμε αναλύσει παραπάνω τα στοχαστικά μοντέλα που θα μας απασχολήσουν, στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε κάποια φράγματα και προσεγγίσεις που αφορούν κυρίως την πιθανότητα χρεοκοπίας και επιπλέον θα βγάλουμε και κάποια πιο γενικά συμπεράσματα για οποιαδήποτε κατανομή στον θετικό ημιάξονα.

3.1 Γενικά φράγματα

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας, η ανισότητα του Lundberg χρησιμοποιείται τόσο για τον προσδιορισμό ενός άνω φράγματος για την πιθανότητα χρεοκοπίας όσο και για την προσέγγισή της. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν υπάρχει η ροπογενήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής που παριστάνει το μέγεθος της ζημιάς. Ο Dickson (1994) πρότεινε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν η ροπογενήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής που παριστάνει το μέγεθος της ζημιάς δεν υπάρχει.

3.1.1 Το κάτω φράγμα των De Vylder και Goovaerts

Οι De Vylder, Goovaerts (1984) ένα γενικό κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι

$$\psi(t) \geq \frac{\bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}$$

όπου

$$G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

3.1.2 Το άνω φράγμα του Dickson (1994)

Ο Dickson (1994) πρότεινε το εξής άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Για κάθε $0 \leq x \leq t$ ισχύει ότι:

$$\psi(x) \leq e^{-xr(t)} + \frac{\bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}$$

για $x = t$

$$\psi(t) \leq e^{-tr(t)} + \frac{\bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}$$

όπου

$r(t)$ ένας περικεκωμένος συντελεστής προσαρμογής όπως προκύπτει από την λύση της εξίσωσης $\int_0^t e^{r(t)x} dH(x) = \frac{c}{\lambda\mu_1} = 1 + \theta$.

Από το παραπάνω φράγμα, προκύπτουν κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες.

1. $\forall t > 0, r(t) > 0$ και φθίνουσα ως προς t .
2. Η συνθήκη Cramer-Lundberg έχει μοναδική λύση στο $(0, \infty)$.
3. Όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής $r, \forall t > 0, r(t) \geq r$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r$.

Παρατήρηση 3.1.1. Όταν η F ανήκει στην οικογένεια των υποεκθετικών κατανομών, δηλαδή $M_x(t) = \infty$, δεν υπάρχει ο συντελεστής r , τότε

$$\psi(t) \sim \frac{\bar{H}(t)}{\theta} \sim \frac{\bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}.$$

Η παραπάνω προσέγγιση είναι ιδιαίτερως σημαντική, διότι γνωρίζοντας μόνο την κατανομή των αποζημιώσεων και το περιθώριο ασφαλείας μπορούμε να έχουμε μία καλή απεικόνιση της πιθανότητας χρεοκοπίας ανεξαρτήτως στοχαστικού μοντέλου.

3.2 Άνω φράγματα και ασυμπτωτικοί τύποι στο κλασικό μοντέλο

Αναφέρουμε πάλι την ανισότητα του Lundberg σαν ένα πάνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, παραθέτουμε άνω φράγματα-προσεγγίσεις για τον συντελεστή προσαρμογής και μελετάμε την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω του ασυμπτωτικού τύπου των Cramer-Lundberg.

3.2.1 Ανισότητα του Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

Η παραπάνω ανισότητα αποτελεί βασικό άνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R .

3.2.2 Φράγματα για τον συντελεστή προσαρμογής

Γνωρίζοντας ότι ο R ικανοποιεί την σχέση:

$$\lambda + cR = \lambda M_X(R)$$

και οι αποζημιώσεις έχουν πυκνότητα :

$$f(x) = \lambda + cR = \lambda \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x) dx.$$

Κάνοντας χρήση του αναπύγματος του Taylor για την συνάρτηση e^{Rx} παίρνουμε ότι

$$\lambda + cR > \lambda \left[\int_0^{\infty} f(x) dy + \int_0^{\infty} Rx f(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} R^2 x^2 f(x) dy \right] = \lambda [1 + RE(X) + \frac{1}{2} R^2 E(X^2)].$$

Συνεπώς λύνοντας ως προς R και χρησιμοποιώντας την σχέση $c = (1 + \theta)\lambda E(X)$ καταλήγουμε

$$R < \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}.$$

Μπορούμε να παράξουμε και άλλα φράγματα για τον συντελεστή προσαρμογής αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα το ανάπτυγμα Taylor και μάλιστα πιο ακριβή. Για παράδειγμα αν χρησιμοποιήσουμε έναν παραπάνω όρο στο ανάπτυγμα Taylor, δηλαδή $e^{Rx} > 1 + Rx + \frac{R^2 x^2}{2} + \frac{R^3 x^3}{6}$, τότε βρίσκουμε

$$R < \frac{12\theta E(X)}{\sqrt{9\mu_2^2 + 24\theta\mu_1 + 3\mu_2^2}}.$$

Επίσης μπορούμε το εν λόγω φράγμα να το κάνουμε ακόμα πιο γενικό, θέτοντας όπου $\theta = \frac{\delta(0)}{\psi(0)}$. Πράγματι η μορφή που παίρνει είναι

$$R < \frac{2\delta(0)E(X)}{\psi(0)E(X^2)}$$

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλες τις κατανομές στις οποίες υπάρχει η ροπογεννήτρια συνάρτηση.

Ένας ακόμη σημαντικός τύπος για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, είναι ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg.

3.2.3 Ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg

Υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει $\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$, τότε:

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}$$

όπου

$$C = \frac{\theta E(X)}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{C e^{-Ru}} = 1.$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι ο τύπος των Cramer-Lundberg είναι, όχι απλά ασυμπτωτικός, αλλά ακριβής, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η εκθετική.

Πολλές φορές ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι είτε πολύ δύσκολος είτε δεν είναι δυνατός. Έτσι έχουν αναπτυχθεί κάποιες προσεγγιστικές μέθοδοι προς διευκόλυνση των διαδικασιών. Παρακάτω θα αναφερθούμε σε κάποιες προσεγγίσεις πολύ γνωστές αλλά και σε ένα πολύ χρήσιμο διπλό φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

3.3 Το διπλό φράγμα των Cai-Garrido

Οι [Cai, Garrido \(1999\)](#), βρήκαν ένα διπλό φράγμα, το οποίο περιορίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την περικοπή της συνθήκης Cramer-Lundberg, το οποίο οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα. Το άνω φράγμα είναι πιο αυστηρό από αυτό του Dickson(1994) και το κάτω φράγμα πιο αυστηρό από την προσέγγιση του De Vylder. Αυτό το διπλό φράγμα εφαρμόζεται σε κάθε θετική συνάρτηση κατανομής.

Λήμμα 3.3.1. Εάν υπάρχει ο συνελεστής προσαρμογής R ώστε να ισχύει η συνθήκη Cramer-Lundberg, τότε:

$$C_1(x)e^{-Rx} \leq \psi(x) \leq C_2(x)e^{-Rx}$$

όπου

$$C_1(x) = \inf_{0 \leq z \leq x} \frac{e^{Rz} \bar{G}(z)}{\int_0^{\infty} e^{Ry} dG(y)} \quad \text{και} \quad C_2(x) = \sup_{0 \leq z \leq x} \frac{e^{Rz} \bar{G}(z)}{\int_0^{\infty} e^{Ry} dG(y)}.$$

Θεώρημα 3.3.1. $\forall t \geq 0$, εάν υπάρχει $r(t)$ ώστε να ισχύει η συνθήκη C-L, $\forall 0 \leq x \leq t$

$$\frac{\theta \alpha_1(x, t) e^{-xr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)} \leq \psi(t) \leq \frac{\theta \alpha_2(x, t) e^{-xr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}$$

όπου

$$\alpha_1(x, t) = \inf_{0 \leq z \leq x} \alpha(z, t), \quad \alpha_2(x, t) = \sup_{0 \leq z \leq x} \alpha(z, t)$$

και

$$\alpha(z, t) = \frac{e^{zr(t)}[\bar{G}(z) - \bar{G}(t)]}{\int_z^t e^{yr(t)} dG(y)}.$$

Πόρισμα 3.3.1. Θέτοντας στο προηγούμενο θεώρημα όπου $x = t$ προκύπτει:

$\forall t > 0$ εάν υπάρχει $r(t)$ τότε:

$$\frac{\theta\alpha_1(t)e^{-tr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)} \leq \psi(t) \leq \frac{\theta\alpha_2(t)e^{-tr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}.$$

όπου

$$\alpha_1(t) = \alpha(t, t) \text{ και } \alpha_2(t) = \alpha(t, t).$$

Πρόταση 3.3.1. $\forall 0 \leq x \leq t$

$$\frac{\theta e^{-(x+t)r(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)} \leq \psi(t) \leq \frac{\theta e^{-xr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}.$$

Πρόταση 3.3.2. $\forall t > 0$

$$\frac{\theta e^{-2tr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)} \leq \psi(t) \leq \frac{\theta e^{-tr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}.$$

Πρόταση 3.3.3. Όταν η G ανήκει στην οικογένεια τών υποεκθετικών κατανομών, τότε δεν υπάρχει συντελεστής προσαρμογής και η πιθανότητα χρεοκοπίας προσεγγίζεται από:

$$\psi(t) \sim \frac{\theta\alpha_1 e^{tr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)} \sim \frac{\theta e^{-2tr(t)} + \bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)} \sim \frac{\bar{G}(t)}{\theta + \bar{G}(t)}.$$

Παρατήρηση 3.3.1. 1. Ως εκ τούτου, οι όροι της εκθετικής κατανομής στις Προτάσεις 3.3.2 και 3.3.2 συγκλίνουν (φθίνουν) γρηγορότερα απο της \bar{H} . Έτσι τα κατώτερα φράγματα, αντίστοιχα, αποφέρουν την σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας.

2. Θέτοντας $L(t) = \frac{\theta e^{-2tr(t)+\bar{G}(t)}}{\theta+\bar{G}(t)}$ και $U(t) = \frac{\theta e^{-tr(t)+\bar{G}(t)}}{\theta+\bar{G}(t)}$, τα αντίστοιχα φράγματα της Πρότασης 3.1.6, μας δίνει την παρακάτω τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας για μικρές τιμές του x :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow 0} U(t) = \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

3.3.1 Ασυμπτωτικός τύπος για την ανέλιξη του πλεονάσματος

Έστω $G_u(y) = P(|U(t)| \leq y | T < \infty, U(0) = u)$, η ανέλιξη του πλεονάσματος συναρτήσει του χρόνου δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Τότε προκύπτει

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{G}_u(y) = \frac{\int_0^\infty e^{rt} \bar{H}(t+y) dt}{\int_0^\infty e^{rt} \bar{H}(t) dt} = \frac{T_k \bar{H}(y)}{T_k \bar{H}(0)}$$

όπου

H η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών και r ο συντελεστής προσαρμογής όπως προκύπτει από την λύση της εξίσωσης του Lundberg, (βλέπε [Pssarakos \(2014\)](#)).

3.4 Προσεγγίσεις πιθανότητας χρεοκοπίας

Η δυσκολία που εμφανίζεται τις περισσότερες φορές που προσπαθούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας έχει οδηγήσει στην χρήση κάποιων ευραίως γνωστών προσεγγίσεων. Τρεις από τις πιο σημαντικές προσεγγίσεις που υπάρχουν στην βιβλιογραφία τις αναφέρουμε συνοπτικά στην συνέχεια.

Στην προσέγγιση Beekman-Bowers υποθέτουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια μικτή κατανομή Γάμμα. Χρησιμοποιούμε τον όρο μικτή διότι η κατανομή αυτή έχει μάζα πιθανότητας $\frac{\theta}{1+\theta}$ στο 0 και την ουρά μιας κατανομής Γάμμα σταθμισμένη με $\frac{1}{1+\theta}$ στο $(0, \infty)$.

3.4.1 Προσέγγιση Beekman-Bowers

$$\psi(u) \cong \frac{1}{1+\theta} [1 - M(x)]$$

όπου $M \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ και τα α, β υπολογίζονται λύνοντας το σύστημα με τις εξής εξισώσεις:

$$\frac{E[X^2]}{2\theta E[X]} = \frac{1}{1+\theta} \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{E[X^3]}{3\theta E[X]} + \left(\frac{E[X^2]}{2\theta E[X]} \right)^2 = \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^2 \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Δηλαδή, στην μέθοδο αυτή χρησιμοποιούμε την ουρά μιας κατανομής Γάμμα ώστε να προσεγγίσουμε την παραμέτρους (Βλέπε Πολίτης (2005)).

3.4.2 Προσέγγιση De Vylder

Στην προσέγγιση αυτή αντικαθιστούμε την ανέλιξη $\{U(t) : t > 0\}$ με μία ανέλιξη έστω $\{\tilde{U}(t) : t \geq 0\}$, με περιθώριο ασφαλείας $\tilde{\theta}$, ένταση Poisson $\tilde{\lambda}$, για την οποία όμως οι αποζημιώσεις είναι εκθετικές. Για τον υπολογισμό των $\tilde{E}(X)$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\lambda}$ πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$E[U(t)^k] = E[\tilde{U}(t)^k].$$

Από την παραπάνω παίρνουμε:

- $\tilde{E}(X) = \frac{E[X^3]}{3E[X^2]}$
- $\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda[E[X^2]^3]}{2[E(X^3)]^2}$
- $\tilde{\theta} = \frac{2E[X]E[X^3]}{3[E(X^2)]^3}$

για $k = 1, 2, 3, \dots$

Έτσι λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\tilde{\psi}(u)$ αφού γνωρίζουμε ότι οι αποζημιώσεις είναι εκθετικά κατανομημένες. Ο υπολογισμός αυτής της πιθανότητας χρεοκοπίας αποτελεί μια προσέγγιση της αρχικής πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$.

$$\bar{\psi}(u) = \frac{1}{1+\tilde{\theta}} e^{-\tilde{R}u} = \frac{1}{1+\tilde{\theta}} e^{-\frac{\tilde{\theta}}{(1+\tilde{\theta})E(X)}u}.$$

(Βλέπε Πολίτης (2005)).

3.4.3 Προσέγγιση Tijms

Ο Tijms πρότεινε την εξής προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\psi_T(u) = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) e^{-\gamma u} + C e^{-Ru}$$

όπου

$$\gamma = \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) \left(\frac{1}{\theta E(X^2)} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1}.$$

(Βλέπε [Πολίτης \(2005\)](#)).

Παρατήρηση 3.4.1. Μία χρήσιμη σχέση που θα μας βοηθήσει να συνδέσουμε το κλασικό μοντέλο με τα άλλα δύο είναι η εξής:

$$\theta = \frac{\delta(0)}{\psi(0)}.$$

Κεφάλαιο 4

Παραδείγματα κι εφαρμογές

4.1 Φράγματα πιθανότητας χρεοκοπίας

Παράδειγμα 4. Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 1, $\beta=5$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta=2.5$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται κάποια φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	3.83875	0.181296	0.181675	0.198915	0.202817
5	0.70472	0.068056	0.068867	0.095541	0.097548
10	0.38312	0.26863	0.27321	0.047965	0.048547
20	0.2362	0.005589	0.005667	0.014419	0.014469
30	0.19016	0.001381	0.001392	0.004706	0.004711
40	0.1678	0.000374	0.000376	0.00159	0.001591
50	0.15459	0.000109	0.000109	0.000548	0.000548
60	0.14586	0.000032	0.000032	0.00019	0.00019

Τώρα χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους για την αντίστροφη γκαουσιανή αλλά αλλάζοντας το περιθώριο ασφαλείας θα δούμε να προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες

- $\theta = 0.25$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.20629	0.688902	0.692674	0.723157	0.799011
5	0.270658	0.422047	0.460634	0.571384	0.680436
10	0.123863	0.216322	0.28213	0.443418	0.506104
20	0.0739267	0.0532011	0.102407	0.269044	0.281173
30	0.0633943	0.0136388	0.035624	0.160898	0.162934
40	0.0598309	0.00371984	0.0120306	0.0947137	0.0950535
50	0.058353	0.00106566	0.00398508	0.0550685	0.0551261
60	0.0576674	0.000316636	0.00130407	0.0317351	0.0317451

- $\theta = 1$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.99273	0.356336	0.357955	0.388616	0.406486
5	0.493103	0.154378	0.160482	0.226226	0.239343
10	0.262642	0.0645539	0.0694487	0.132221	0.136891
20	0.166036	0.013853	0.0151401	0.0494791	0.0499796
30	0.00344495	0.00344495	0.00369027	0.0190807	0.0191348
40	0.126026	0.000932562	0.000273359	0.00739359	0.00739962
50	0.119085	0.000266627	0.00398508	0.00286076	0.00286146
60	0.114728	0.0000791778	0.0000802271	0.00110348	0.00110356

Όπως παρατηρούμε το κάτω των Goovaerts και De Vylder $L1(x)$ είναι πιο οξύ σε σχέση με αυτό των Cai and Garrido ($L(x)$), όμως το άνω φράγμα των Cai and Garrido $U(x)$ είναι πιο οξύ από το άνω φράγμα του Dickson $U1(x)$

Παράδειγμα 5. Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 1, $\beta=4$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta=0.1$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται κάποια φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	1.84356	0.839527	0.843546	0.864922	0.997779
5	0.17809	0.594651	0.662941	0.761028	1.0051
10	0.07033	0.320677	0.487092	0.656905	0.815623
50	0.03435	0.000616532	0.0328166	0.180005	0.180116
100	0.3422	4.962×10^{-7}	0.00106597	0.0326421	0.0326422
150	0.3232	5.55357×10^{-10}	5.55357×10^{-10}	5.55357×10^{-10}	5.55357×10^{-10}

Στην περίπτωση μας λύνοντας την εξίσωση του Lundberg παρατηρούμε ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής και είναι $R = 0.03422$, έτσι μπορούμε να δούμε ότι η ανισότητα του Lundberg δίνει τις παρακάτω τιμές

x	Lundberg Barrier
1	0.966358
5	0.842733
10	0.710199
50	0.180675
100	0.0326436
150	0.00589789

Τώρα χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους για την αντίστροφη γκαουσιανή αλλά αλλάζοντας το περιθώριο ασφαλείας θα δούμε να προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες

- $\theta = 0.3$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.14864	0.635549	0.640508	0.67806	0.752192
5	0.276715	0.328409	0.370613	0.496764	0.57909
10	0.138489	0.135958	0.190113	0.352272	0.386309
50	0.0788246	0.000205595	0.000582822	0.0196259	0.0196299
100	0.0777739	1.7×10^{-7}	3.4×10^{-7}	0.00041927	0.00041927

- $\theta = 1$

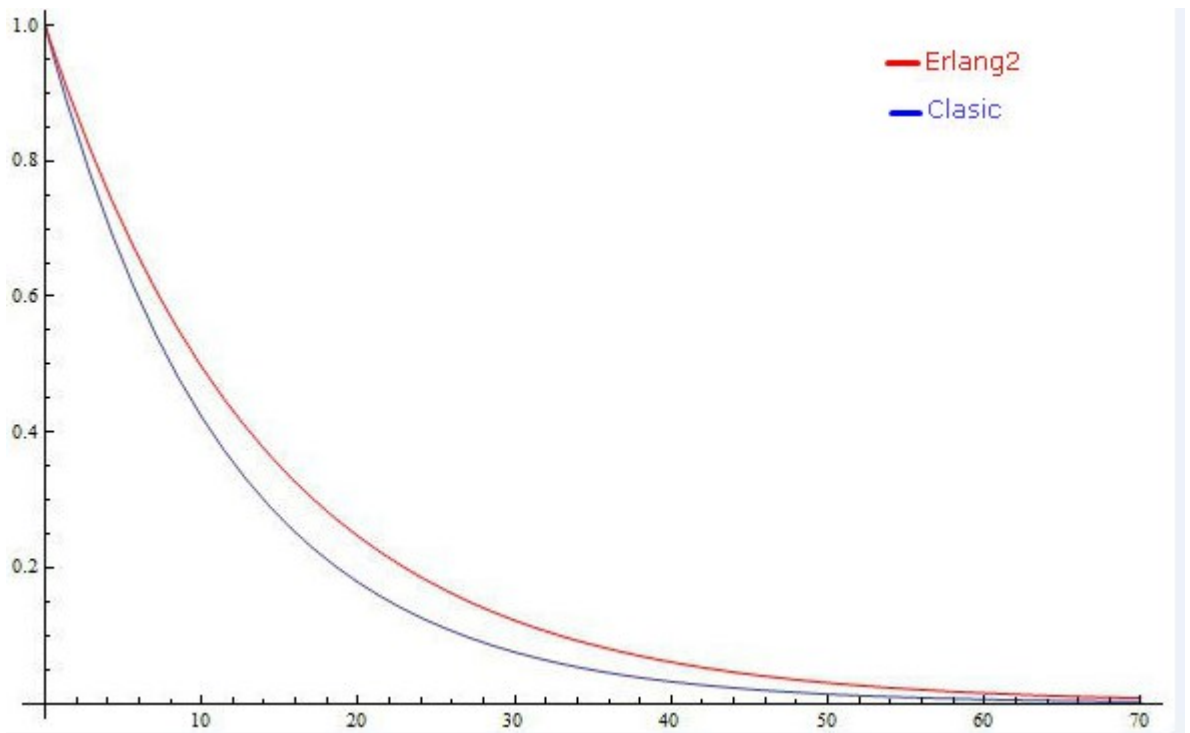
x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.8769	0.343469	0.34555	0.380437	0.399778
5	0.487578	0.127933	0.134586	0.204103	0.215278
10	0.272042	0.0450775	0.0492179	0.107956	0.110924
50	0.140239	0.0000616875	0.0000624993	0.000962685	0.00096274
100	0.129441	4.962×10^{-8}	4.96257×10^{-8}	2.43988×10^{-6}	2.43988×10^{-6}

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι όσο αυξάνεται το περιθώριο ασφαλείας τόσο μειώνονται οι τιμές της των φραγμάτων (κάτω και άνω) της πιθανότητας χρεοκοπίας, κάτι το οποίο είναι πολύ λογικό αφού το

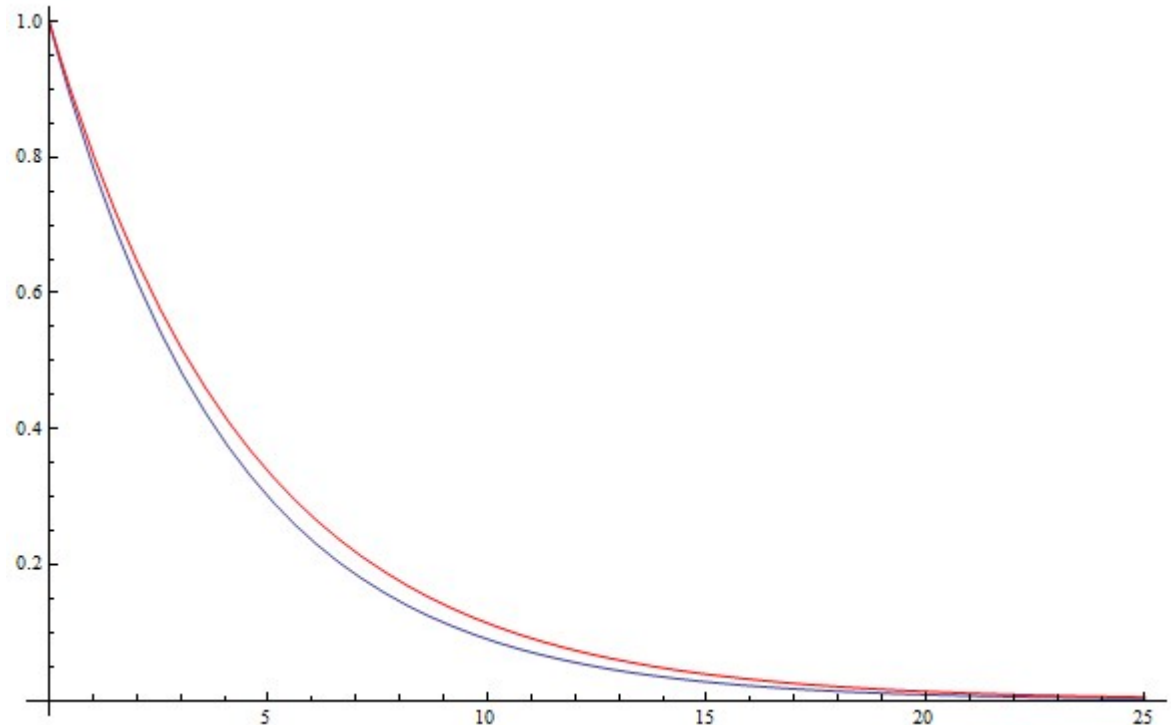
περιθώριο ασφαλείας εκφράζει το πόσο μεγαλύτερα θέλουμε να είναι τα έσοδα μας απο τα έξοδα. Όσο επίσης αυξάνονται οι τιμές του x , τόσο πιο ακριβείς είναι οι τιμές που παίρνουμε απο τα φράγματα επίσης κάτι το αναμενόμενο δοθέντος οτι το x εκφράζει το αρχικό αποθεματικό στα παραδείγματα μας.

Επίσης στην περίπτωση που υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής και το φράγμα του Lundberg δίνει κάποιες τιμές παρατηρούμε οτι η πιθανότητα χρεοκοπίας φράσσεται καλύτερα απο ότι με το φράγμα του Dickson αλλά χειρότερα απο το άνω φράγμα των Cai-Garrido. Ωστόσο κι εδώ παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό τόσο οι τιμές των φραγμάτων συγκλίνουν και μετά απο ένα σημείο δίνουν σχεδόν τις ίδιες τιμές.

Παράδειγμα 6. Στην περίπτωση που έχουμε μια αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με ελαφριά ουρά έχει ενδιαφέρον να κάνουμε μία σύγκριση στα αποτελέσματα που δίνει το άνω φράγμα του Lundberg όταν οι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή(Κλασικό μοντέλο) και όταν ακολουθούν την Erlang2 κατανομή. Για να μπορέσει να γίνει αυτό και να βγεί κάποιο συμπέρασμα θα πρέπει η μέση τιμή της κατανομής των χρόνων άφικης των αποζημιώσεων σε κάθε μοντέλο να είναι ίσες. Στο παρακάτω παράδειγμα θεώρησαμε μια $IG(\beta=1, \mu=2)$, μια Εκθετική κατανομή με $\lambda=1$ και μία $Erlang(2, b=2)$. Και στα δύο μοντέλα το $c=1.1$.



Αν τώρα αυξήσουμε το περιθώριο κέρδους από 1.1 σε 1.5 προκύπτει το παρακάτω γράφημα



Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας όπως την περιγράφει το φράγμα του Lundberg είναι πάντα μεγαλύτερη (ή ίση) στο μοντέλο χρόνων Erlang2 από ότι στο κλασικό μοντέλο. Επιπροσθέτως όσο

μειώνουμε το c βλέπουμε ότι οι πιθανότητες συγκλίνουν περισσότερο αλλά και πάλι δεν αλλάζει η διάταξη τους.

Παράδειγμα 7. Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με μέτρια ουρά με παραμέτρους μέση τιμή $\mu=1$, $\beta=12$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta=1.1$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται κάποια φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	3.54599	0.3771	0.377619	0.395065	0.405941
5	0.560507	0.237806	0.240611	0.284038	0.298462
10	0.266822	0.152386	0.156465	0.21119	0.221761
50	0.0740076	0.009984	0.0105888	0.0344515	0.0346982
60	0.0676902	0.0055336	0.0058287	0.022663	0.022758
70	0.0633389	0.0055336	0.0058287	0.022663	0.022758
80	0.0601741	0.001793	0.0018595	0.0098945	0.009909
100	0.0559038	0.000032	0.000032	0.00019	0.00019
100	0.055904	0.0006113	0.000625	0.004343	0.004345

Τώρα χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους για την αντίστροφη γκαουσιανή αλλά αλλάζοντας το περιθώριο ασφαλείας θα δούμε να προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες

- $\theta = 0.1$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.52065	0.869441	0.870285	0.879939	0.949848
5	0.293837	0.77437	0.786317	0.82629	1.00448
10	0.109153	0.664159	0.702007	0.776902	0.999862
50	0.0164895	0.0998553	0.272909	0.494537	0.53832
60	0.0150366	0.0576784	0.21276	0.439956	0.463355
70	0.0142204	0.0333445	0.165369	0.390587	0.40291
80	0.0137376	0.0193777	0.128249	0.346122	0.352579
100	0.0132544	0.006684	0.0768016	0.270595	0.272371
150	0.0129435	0.000522864	0.0210999	0.143932	0.144007

- $\theta = 0.5$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	3.02932	0.57116	0.572163	0.591894	0.619509
5	0.430916	0.407023	0.414995	0.47578	0.522975
10	0.192309	0.283421	0.298728	0.388153	0.429576
50	0.0501815	0.0217049	0.0281781	0.101283	0.103049
60	0.0464179	0.0120937	0.0158576	0.0730719	0.0738183
70	0.0439543	0.00685166	0.00896291	0.0526423	0.0529582
80	0.0422485	0.00393657	0.0050915	0.037854	0.037988
100	0.0400985	0.00134399	0.00167246	0.0194557	0.0194801
150	0.0377674	0.000104616	0.00011662	0.003569	0.00356937

Παράδειγμα 8. Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με βαριά ουρά με παραμέτρους μέση τιμή $\mu=2$, $\beta=12$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta=0.2$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται κάποια φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.73455	0.780538	0.781463	0.794786	0.845461
5	0.333271	0.649351	0.661868	0.7156	0.838285
10	0.132043	0.516833	0.551283	0.645848	0.783853
50	0.0262707	0.0567735	0.124959	0.310377	0.325641
60	0.0242925	0.03215	0.0846059	0.257471	0.264956
70	0.0231182	0.018379	0.056956	0.212976	0.21662
80	0.0223824	0.0106132	0.0381606	0.175704	0.177475
100	0.0215805	0.00364017	0.0169434	0.11877	0.11919
150	0.0209562	0.000284029	0.00214409	0.0434063	0.0434186

Τώρα χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους για την αντίστροφη γκαουσιανή αλλά αλλάζοντας το περιθώριο ασφαλείας θα δούμε να προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες

- $\theta = 0.5$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	3.02932	0.57116	0.572163	0.591894	0.619509
5	0.430916	0.407023	0.414995	0.47578	0.522975
10	0.192309	0.283421	0.298728	0.388153	0.429576
50	0.0501815	0.0217049	0.0281781	0.101283	0.103049
60	0.0464179	0.0120937	0.0158576	0.0730719	0.0738183
70	0.0439543	0.00685166	0.00896291	0.0526423	0.0529582
80	0.0422485	0.00393657	0.0050915	0.037854	0.037988
100	0.0400985	0.00134399	0.00167246	0.0194557	0.0194801
150	0.0377674	0.000104616	0.00011662	0.003569	0.00356937

• $\theta = 1.5$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	3.82483	0.321672	0.321995	0.336475	0.343495
5	0.610879	0.19802	0.199803	0.235834	0.245171
10	0.293584	0.124821	0.127288	0.171281	0.177907
50	0.0812636	0.00796154	0.00825483	0.0250189	0.0251558
60	0.0740231	0.00440953	0.00454767	0.0161372	0.0161891
70	0.0689925	0.00249019	0.00255389	0.010461	0.0104809
80	0.0653043	0.00142823	0.00145717	0.00680441	0.0068121
100	0.0602748	0.000486892	0.000492705	0.00289727	0.00289845
150	0.0538413	0.0000378799	0.0000379765	0.00034872	0.000348732

Παράδειγμα 9. Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή κατανομή με ακόμα πιο βαριά ουρά με παραμέτρους μέση τιμή $\mu=4$, $\beta=12$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta=0.2$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται κάποια φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	2.73455	0.780538	0.781463	0.794786	0.845461
5	0.333271	0.649351	0.661868	0.7156	0.838285
10	0.132043	0.516833	0.551283	0.645848	0.783853
50	0.0262707	0.0567735	0.124959	0.310377	0.325641
60	0.0242925	0.03215	0.0846059	0.257471	0.264956
70	0.0231182	0.018379	0.056956	0.212976	0.21662
80	0.0223824	0.0106132	0.0381606	0.175704	0.177475
100	0.0215805	0.00364017	0.0169434	0.11877	0.11919
150	0.0209562	0.000284029	0.00214409	0.0434063	0.0434186

Τώρα χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους για την αντίστροφη γκαουσιανή αλλά αλλάζοντας το περιθώριο ασφαλείας θα δούμε να προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες

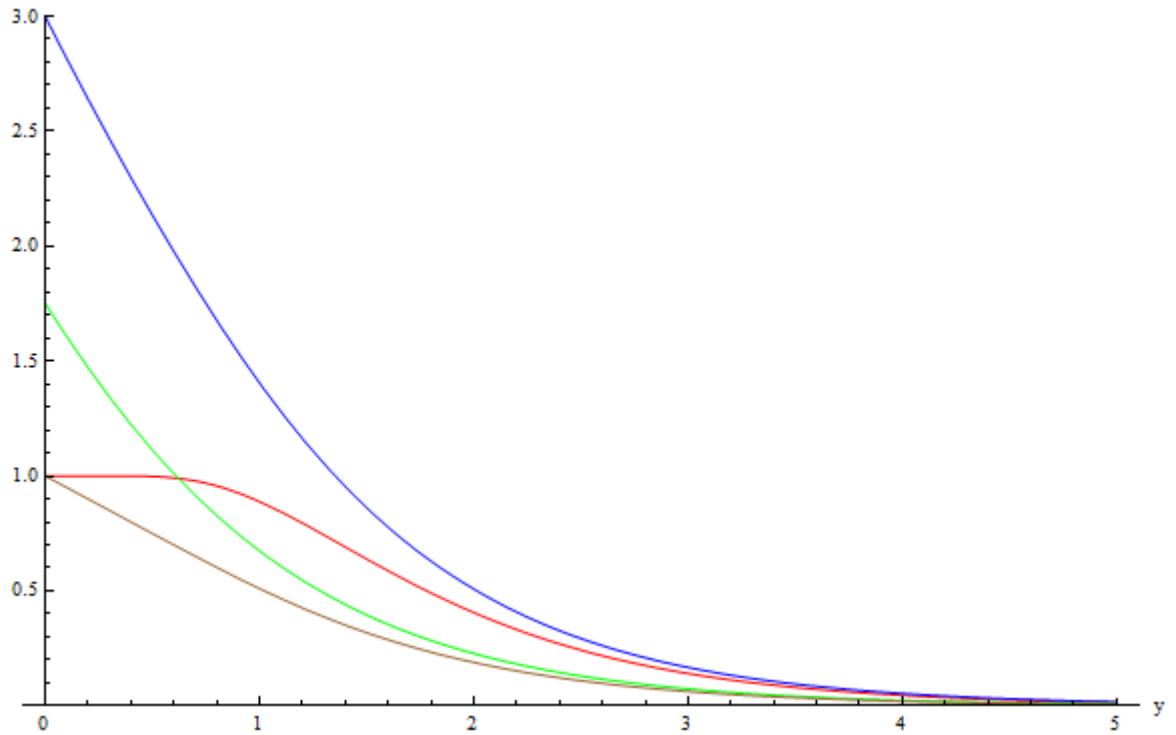
$$\theta = 1.5$$

x	r(x)	L1(x)	L(x)	U(x)	U1(x)
1	3.82483	0.321672	0.321995	0.336475	0.343495
5	0.610879	0.19802	0.199803	0.235834	0.245171
10	0.293584	0.124821	0.127288	0.171281	0.177907
50	0.0812636	0.00796154	0.00825483	0.0250189	0.0251558
60	0.0740231	0.00440953	0.00454767	0.0161372	0.0161891
70	0.0689925	0.00249019	0.00255389	0.010461	0.0104809
80	0.0653043	0.00142823	0.00145717	0.00680441	0.0068121
100	0.0602748	0.000486892	0.000492705	0.00289727	0.00289845
150	0.0538413	0.0000378799	0.0000379765	0.00034872	0.000348732

4.2 Εφαρμογές μέσω της ercf για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Παράδειγμα 10. Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε την ανέλιξη του πλεονάσματος βάσει του ασυμπτωτικού τύπου που δώσαμε στην ενότητα 3.3.1. όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν αντίστροφη γκαουσιανή με παραμέτρους $\beta=0.5$ και $\mu=2$ στο κλασικό μοντέλο με $c=3$ και μέση τιμή των χρόνων άφιξης 1.

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της ουράς της κατανομής των αποζημιώσεων, της συναρτησης ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων και οι γραφικές παραστάσεις των τελεστών για τις προαναφερθείσες συναρτήσεις.



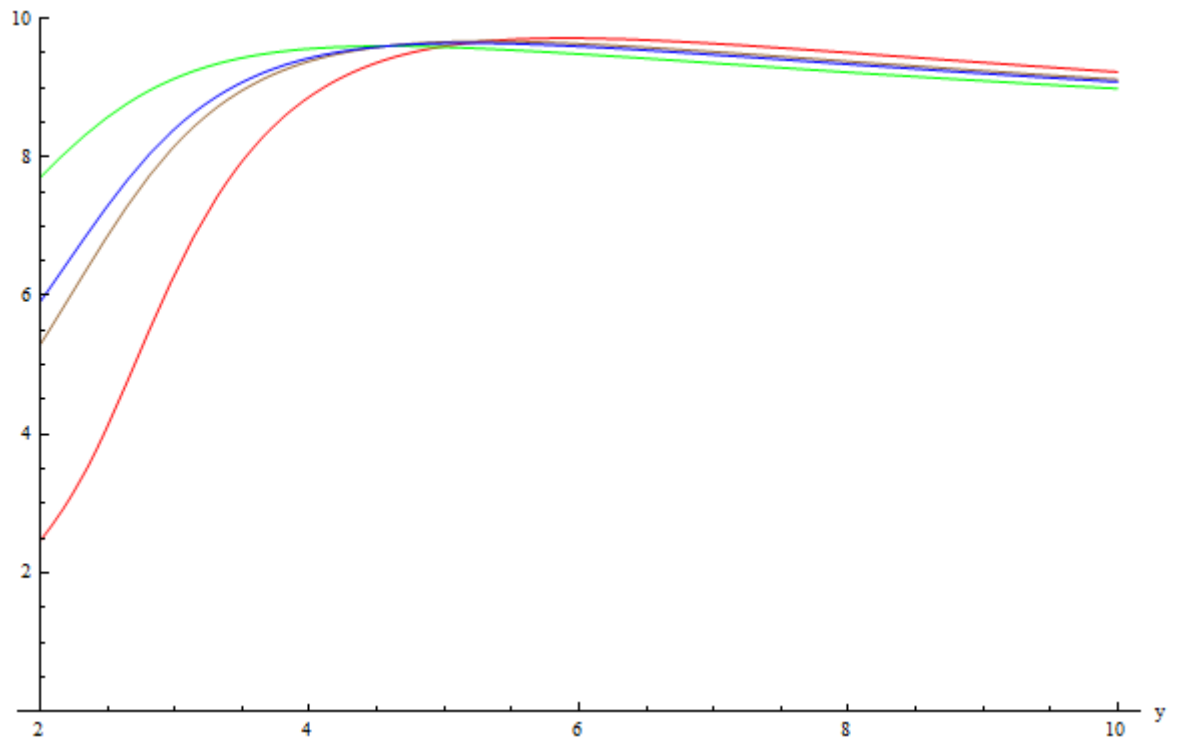
Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(y-2)}{\bar{F}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_e(y-2)}{\bar{F}_e(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{T_r \bar{F}(y-2)}{T_r \bar{F}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{T_r \bar{F}_e(y-2)}{T_r \bar{F}_e(y)} = e^2$$

όπως έδειξε η [Kluppelberg \(1989\)](#) ,

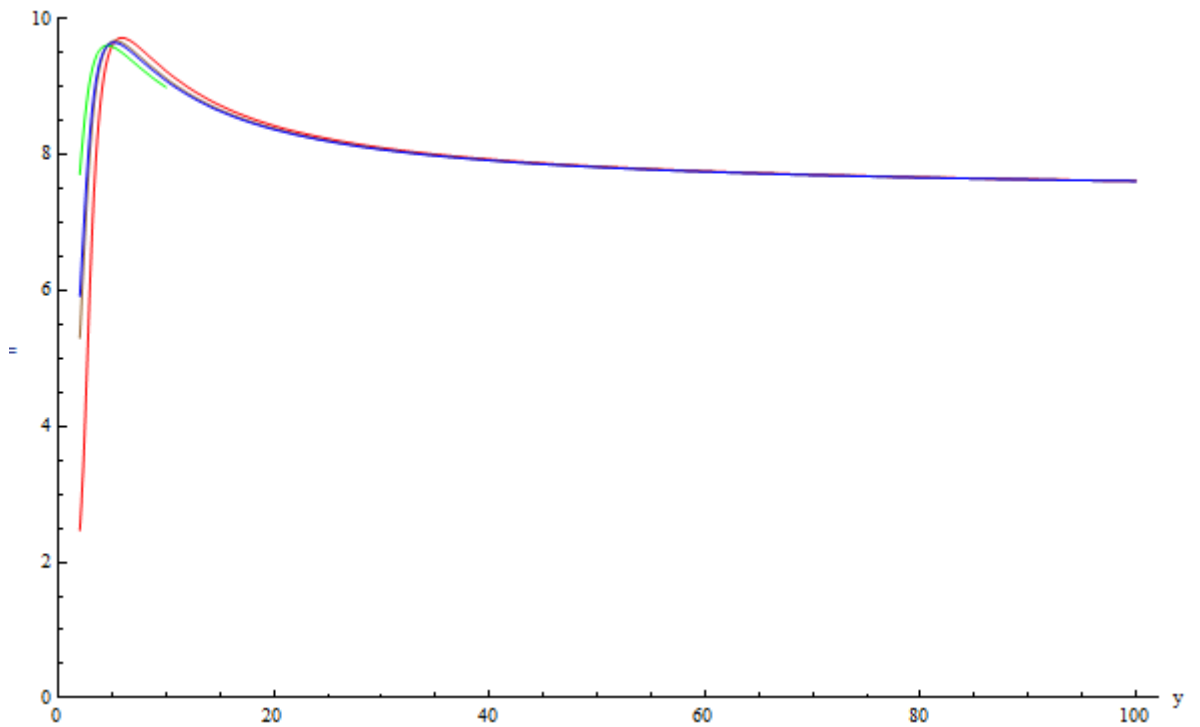
$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(y-x)}{\bar{F}(y)} = e^{\gamma x}, \text{ όπου } \gamma = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} = \frac{1}{2\beta}$$

και συνεπώς τα παρακάτω διαγράμματα επαληθεύουν την θεωρία αυτή

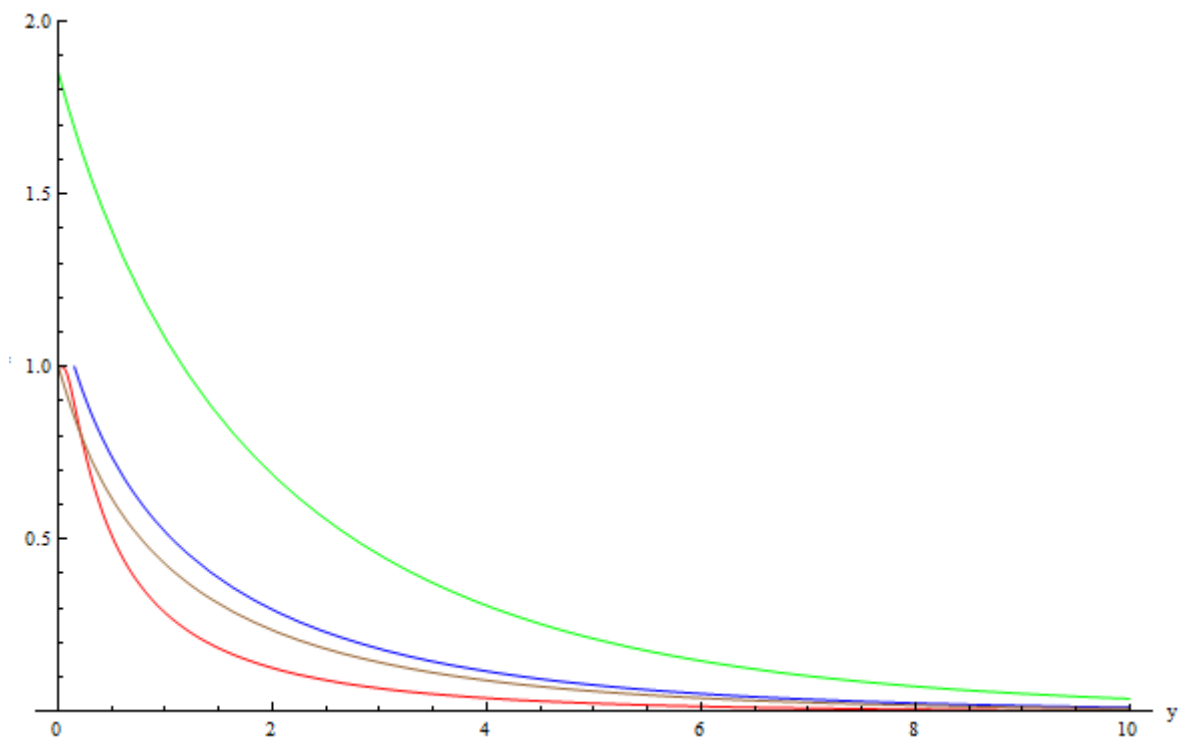


όπου

- $\frac{T_r \bar{F}_e(y-2)}{T_r F_e(y)}$ με πράσινο χρώμα
- $\frac{T_r \bar{F}(y-2)}{T_r F(y)}$ με μπλέ χρώμα
- $\frac{\bar{F}_e(y-2)}{F_e(y)}$ με καφέ χρώμα
- $\frac{\bar{F}(y-2)}{F(y)}$ με κόκκινο χρώμα

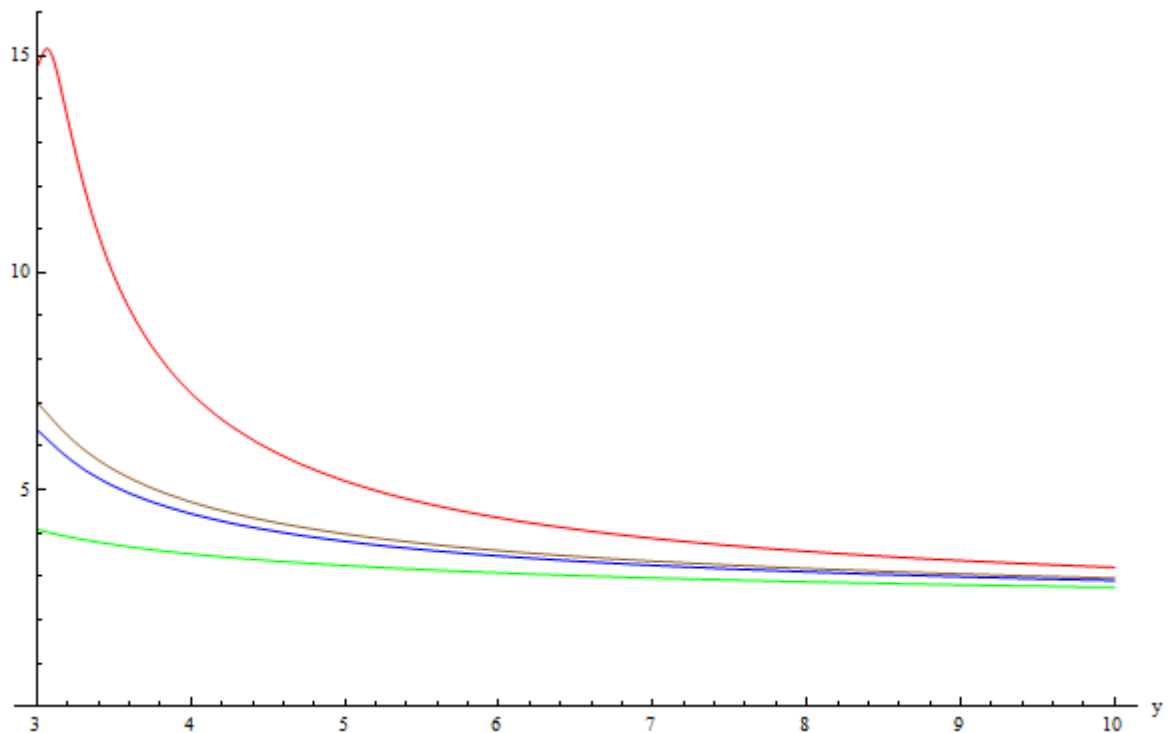


Τώρα αλλάζοντας τις παραμέτρους της αντίστροφης γκαουσιανής σε $\beta=2$ και $\mu=1$ καθώς και τις παραμέτρους του στοχαστικού μοντέλου σε $c=1.1$ και $\lambda=1$ προκύπτουν εκ νέου τα παρακάτω αποτελέσματα



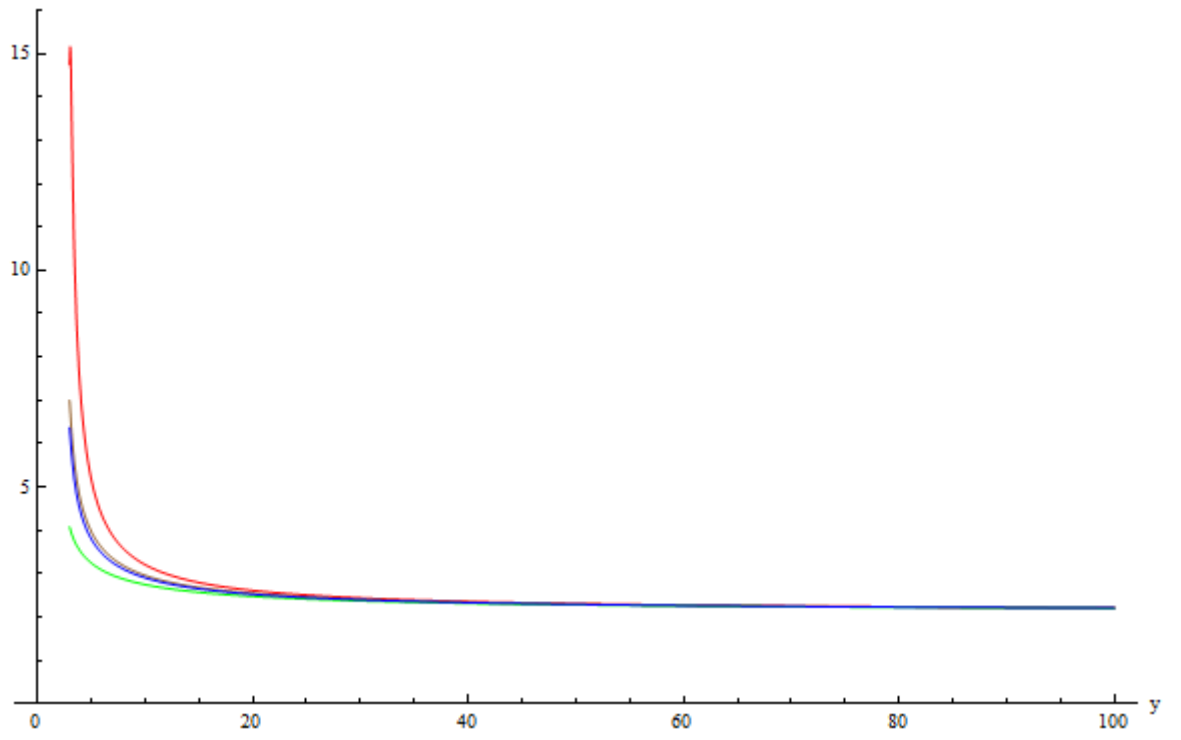
Με την βοήθεια του τύπου της Klupperlberg παρατηρούμε ότι

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(y-3)}{\bar{F}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_e(y-3)}{\bar{F}_e(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{T_r \bar{F}(y-3)}{T_r \bar{F}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{T_r \bar{F}_e(y-3)}{T_r \bar{F}_e(y)} = e^{\frac{3}{4}}$$



όπου

- $\frac{T_r \bar{F}_e(y-3)}{T_r \bar{F}_e(y)}$ με πράσινο χρώμα
- $\frac{T_r \bar{F}(y-3)}{T_r \bar{F}(y)}$ με μπλέ χρώμα
- $\frac{\bar{F}_e(y-3)}{\bar{F}_e(y)}$ με καφέ χρώμα
- $\frac{\bar{F}(y-3)}{\bar{F}(y)}$ με κόκκινο χρώμα



Βιβλιογραφία

- Ahmad M, Chaudry M. Generalized probability distributions: A unified approach // First Iranian Statistic Conference, University Shiraz, Teheran. 1992. 1992. [20](#)
- Cai Jun, Garrido Jose. Two-sided bounds for ruin probabilities when the adjustment coefficient does not exist // Scandinavian Actuarial Journal. 1999. 1999, 1. 80-92. [36](#)
- Chaudhry A, Zubair M. Generalized incomplete gamma functions with applications // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. 1994, 55. 99-124. [1](#), [21](#)
- De Vylder M, Goovaerts P. Bounds for classical ruin probabilities // Insurance:Mathematics and Economics. 1984. [33](#)
- Dickson David, Hipp Christian. Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes // Insurance:Mathematics and Economics. 1998. 1998, 22. 251-262. [7](#), [14](#)
- Dickson David, Hipp Christian. Ruin probabilities for Phase-Type(2) Risk Processes // Scandinavian Actuarial Journal. 2000. 2000, 2. 147-167. [16](#)
- Dickson David C.M. An upper bound for the probability of ultimate ruin // Scandinavian Actuarial Journal. 1994. 1994, 2. 131-138. [x](#), [32](#), [33](#)
- Gerber Hans. On the probability of ruin for infinitely divisible claim amount distributions // Insurance:Mathematics and Economics. 1992. 1992, 11. 163-166. [1](#)
- Gerber Hans, Shiu E. On the time value of ruin // North American Actuarial journal. 1998. 1998, 2. 48-78. [8](#)

Kluppelberg Christian. Subexponential distributions and integrated tails // Insurance:Mathematics and Economics. 1989. 1989. [50](#)

Pssarakos Georgios. On risk models with claims following inverse Gaussian distribution // 2nd European Actuarial Journal Conference & Educational Workshop, TU Vienna, Austria. 2014. 2014. [28](#), [29](#), [38](#)

Πολίτης Κωνσταντίνος. Σημειώσεις Θεωρία Χρεοκοπίας // Πανεπιστήμιο Πειραιά Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης. 2005. 2005. [6](#), [39](#), [40](#)

Μερικές εντολές στο Mathematica που χρησιμοποιήσαμε για την παραγωγή αποτελεσμάτων στα παραδείγματα τα μας είναι:

- για τα παραδείγματα 4,5,7,8 και 9

```

m = 4;
b = 12;
theta = 2;
p[y_] := m * (2 * Pi * b * y^3) ^{-0.5} * Exp[-(y - m)^2 / (2 * b * y)]
ouraP[y_] := Integrate[p[t], {t, y, Infinity}]
tailP[y_] :=
  Exp[m / b] / 2 *
  (Exp[-m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] - m / Sqrt[2 * b * y]] -
  Exp[m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] + m / Sqrt[2 * b * y]])

FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 1}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 5}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 10}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 50}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 60}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 70}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 80}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 100}] = m * (1 + theta), {k, 1}]
FindRoot[Integrate[Exp[k * y] * tailP[y], {y, 0, 150}] = m * (1 + theta), {k, 0.5}]

FindRoot[E^((m / b) * (1 - Sqrt[1 - 2 * b * r])) = m * (1 + theta), {r, 0.5}]

H[y_] = (1 / m) * Integrate[tailP[t], {t, 0, y}]

tailH[y_] = 1 - H[y]

L1[y_] = tailH[y] / (theta + tailH[y])

U1[y_] = E^(-y * k) + tailH[y] / (theta + tailH[y])

U[y_] = (theta * E^(-y * k) + tailH[y]) / (theta + tailH[y])

L[y_] = (theta * E^(-2 * y * k) + tailH[y]) / (theta + tailH[y])

```

- για το παραδείγμα 6

```

m = 1
b = 2
c = 1.1
theta = 0.1
beta = 2

p[y_] := m * (2 * Pi * b * y^3) ^ {-0.5} * Exp[-(y - m)^2 / (2 * b * y)]

tailP[y_] :=
  Exp[m / b] / 2 *
  (Exp[-m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] - m / Sqrt[2 * b * y]] -
   Exp[m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] + m / Sqrt[2 * b * y]])

FindRoot[E^((m / b) * (1 - Sqrt[1 - 2 * b * r])) = m * (1 + theta), {r, 0.1}]
FindRoot[c^2 * s - 2 * beta * c + beta^2 * m * E^((m / b) * (1 - Sqrt[1 - 2 * b * s])) = 0, {s, 0.1}]

PsiCl[u_] = E^{-R * u}
PsiErl[u_] = E^{-S * u}

```

- για το παραδείγμα 10

```

c = 1.1;
lamda = 1;
b = 2; m = 1;
r = 0.086261;

tailPe[y_] =
  (Exp[m / b] / 2) *
  ((1 - y / m) * (Exp[-m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] - m / Sqrt[2 * b * y]]) +
   (1 + y / m) * (Exp[m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] + m / Sqrt[2 * b * y]]))

TrtailP[y_] =
  (Exp[m / b] / (2 * r)) *
  ((Exp[-r * y] *
   (E^((-m / b) * (Sqrt[1 - 2 * b * r])) * Erfc[Sqrt[(1 - 2 * b * r) / (2 * b) * y] - m / Sqrt[2 * b * y]] -
    E^((m / b) * (Sqrt[1 - 2 * b * r])) * Erfc[Sqrt[(1 - 2 * b * r) / (2 * b) * y] + m / Sqrt[2 * b * y]])) -
   (Exp[-m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] - m / Sqrt[2 * b * y]] -
    Exp[m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] + m / Sqrt[2 * b * y]]))

tailP[y_] =
  (Exp[m / b] / 2) *
  (Exp[-m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] - m / Sqrt[2 * b * y]] -
   Exp[m / b] * Erfc[Sqrt[y / (2 * b)] + m / Sqrt[2 * b * y]])

TrtailPe[y_] = 1 / (r * m) * TrtailP[y] - (1 / r) * tailPe[y]
N[Limit[TrtailPe[y], y -> 0]]

```