ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

# ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΧΡΕΩΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ

ΔΟΥΡΑΜΑΝΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2016

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, σύμφωνα με τον εσωτερικό κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

-Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)

-Αναπληρωτής Καθηγητής Νεκτάριος Μιλτιάδης

-Επίκουρος Καθηγητής Στέγγος Δημήτριος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND
INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL
SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

# TIME VALUE OF ABSOLUTE RUIN WITH DEBIT INTEREST RATE

DOURAMANIS DIMITRIOS

PIRAEUS

JULY 2016

This thesis was approved unanimously by the three-member committee appointed by the Department of Statistics and Insurance Science, University of Piraeus, in accordance with the rules of the MSc program in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members were:

-Associate Professor, Chadjikonstantinidis Efstathios (Supervisor)

- Associate Professor, Nektarios Miltiadis

-Assistant Professor, Stengos Dimitrios

# Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτή τη διπλωματική εργασία, για την πολύτιμη συνεισφορά του και την σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε, ώστε να υλοποιήσω με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αρτιότητα την εργασία.

Τέλος δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες, αλλά και την αγάπη μου προς τους γονείς μου και τον αδερφό μου, για την αμέριστη υποστήριξη και την βοήθεια που παρείχαν όλο αυτό το διάστημα.

# Περίληψη

Σκοπός αυτής της διατριβής είναι η μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου που σχετίζονται με την απόλυτη χρεοκοπία, όπως η πιθανότητα και ο χρόνος απόλυτης χρεοκοπίας, το έλλειμμα τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας , το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας, κ.λ.π. Προς τούτο θα μελετηθεί η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας που περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τα παραπάνω μέτρα. Επίσης θα μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα υπό την ύπαρξη μιας στρατηγικής καταβολής σταθερού μερίσματος και θα μελετηθεί εκτός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και η κατανομή των συνολικών καταβαλλόμενων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας.

Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος όπου παρουσιάζονται βασικές έννοιες από το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας και δίνεται η αναφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετηθεί η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Συγκεκριμένα θα γίνει μελέτη διάφορων μέτρων κινδύνων που σχετίζονται με τη απόλυτη χρεοκοπία, όπως η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία, το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου της απόλυτης χρεοκπίας και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την απόλυτη χρεοκοπία. Αρχικά θα παράξουμε ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούνται από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Στη συνέχεια θα δούμε ότι όταν το αρχικό πλεόνασμα τείνει στο άπειρο , η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικά ίσες για ζημιές που διαθέτουν βαριά ουρά. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες από το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη όμως μιας στρατηγικής καταβολής σταθερού μερίσματος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα γίνει η μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου που σχετίζονται με την απόλυτη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο υπό την ύπαρξη όμως, μιας στρατηγικής καταβολής σταθερού μερίσματος. Συγκεκριμένα θα μελετηθεί εκτός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής και η κατανομή των συνολικών καταβαλλόμενων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας. Επίσης θα δούμε την πιθανότητα επαναφοράς του πλεονάσματος σε μηδενικά επίπεδα. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο θα δούμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα.

# Abstract

The purpose of this thesis is the study of various risk measures related to the absolute ruin, the time of absolute ruin, the deficit after ruin and the surplus just before the moment of absolute ruin. Moreover will be studied, the expected discounted penalty function for the time of absolute ruin which includes as special cases the above measures. Also the same problem will be studied in the presence of a stable dividend strategy from the insurance company and will be studied the expected discounted penalty function and the distribution of total dividends paid until the absolute ruin.

More specifically, the first chapter constitutes a introductive part where are presented basic significances from the classic model of ruin theory and is given the expected discounted penalty function of Gerber-Shiu

In the second chapter will we study absolute ruin questions by defining an expected discounted penalty function at absolute ruin. The function includes the absolute ruin probability, the Laplace transform of the time to absolute ruin, the deficit at absolute ruin, the surplus just before absolute ruin, and many other quantities related to absolute ruin. First, we derive a system of integro-differential equations satisfied by the function and obtain a defective renewal equation that links the integro-differential equations in the system. Second, we show that when the initial surplus goes to infinity, the absolute ruin probability and the classical ruin probability are asymptotically equal for heavy-tailed claims while the ratio of the absolute ruin probability to the classical ruin probability goes to a positive constant that is less than one for light-tailed claims. Finally, we give explicit expressions for the function for exponential claims. Then in the third chapter presents basic concepts from the classic model of bankruptcy theory in existence but a fixed dividend strategy.

In the fourth chapter we investigate the absolute ruin in the compound Poisson risk model with nonnegative interest and a constant dividend barrier. An integro-differential equation satisfied by the absolute ruin probability, the distribution and moments of deficit at the time to absolute ruin is derived. In the case of exponential individual claim, the explicit expressions are given. Finally, by a "renewal" argument, which is different from the martingale approach, an integro-differential equation satisfied by the conditional probability of recovery is derived, based on which the probability of recovery is formulated. In the case of exponential individual claim, the explicit expression for the probability of recovery is also given. In the fifth and last chapter we will see some numerical examples.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
# ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

## 1.1 Εισαγωγή

Για να χαρακτηριστεί μια ασφαλιστική επιχείρηση αποτελεσματική και φερέγγυα πρέπει να διαθέτει το απαραίτητο απόθεμα, ώστε να είναι σε θέση να καλύψει τους ασφαλιστικούς κινδύνους τους οποίους έχει αναλάβει. Το κομμάτι των αναλογιστικών μαθηματικών το οποίο ασχολείται με την πιθανότητα να χρεοκοπήσει ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, είναι η θεωρία κινδύνου και συγκεκριμένα η θεωρία χρεοκοπίας. Η θεωρία χρεοκοπίας ασχολείται με το επίπεδο του πλεονάσματος του ασφαλιστή για ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστήριων συμβολαίων. Βασικό αντικείμενο της θεωρίας χρεοκοπίας είναι η μελέτη τόσο των εξόδων όσο και τον εσόδων μιας ασφαλιστικής εταιρίας καθώς και το πώς αυτές οι ποσότητες μεταβάλλονται στον χρόνο. Ειδικότερα στη θεωρία χρεοκοπίας χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα για να περιγράψουν την ευπάθεια ενός ασφαλιστή στην χρεοκοπία. Σε τέτοια μοντέλα βασικές ποσότητες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας , το πλεόνασμα αμέσως πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά το χρόνο της χρεοκοπίας.

Ο πρώτος ερευνητής ο οποίος έθεσε τα θεμέλια της μαθηματικής θεωρίας της θεωρίας χρεοκοπίας ήταν ο Σουηδός μαθηματικός και αναλογιστής Filip Lundberg, ο οποίος το 1903 δημοσίευσε την διδακτορική του διατριβή με τίτλο «Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks». Στην συνέχεια την σκυτάλη ανέλαβε ένας άλλος Σουηδός μαθηματικός και αναλογιστής, ο Harald Cramer, ο οποίος το 1929 βασιζόμενος στην διδακτορική διατριβή του Filip Lundberg, δημοσίευσε διάφορες εργασίες με τις οποίες εισήγαγε τη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών στη θεωρία χρεοκοπίας. Με βάση τις παραπάνω εργασίες των δύο Σουηδών, δημιουργήθηκε ένα μοντέλο, το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramer-Lundberg, το οποίο περιγράφει την εξέλιξη του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στο χρόνο. Για το συγκεκριμένο μοντέλο υπάρχουν κάποιες βασικές παραδοχές. Η πρώτη και πολύ σημαντική παραδοχή αφορά το πλήθος των ζημιών-αποζημιώσεων που πρέπει να εξυπηρετήσει η ασφαλιστική επιχείρηση. Σύμφωνα με το μοντέλο των Cramer-Lundberg, το πλήθος των κινδύνων θεωρείται ότι ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, έπεται ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων (ζημιών-αποζημιώσεωνν) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η πρώτη γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας έγινε το 1957 από τον Νορβηγό μαθηματικό Sparre Andersen μέσω της εργασίας «On the collective theory of risk in case of contagion between claims». O Sparre Andersen εισήγαγε την ιδέα ότι το πλήθος των ζημιών περιγράφεται καλύτερα από μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, δηλαδή από μία στοχαστική διαδικασία για την οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη την εκθετική κατανομή.

Το 1998 ο Hans Gerber και ο Elias Shiu μέσα από την εργασία τους με τίτλο «On the time value of ruin» ανέλυσαν τη συμπεριφορά του πλεονάσματος μέσω μιας συνάρτησης που είναι γνωστή ως η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) ή συνάρτηση των Gerber-Shiu. Η συγκεκριμένη συνάρτηση που αποτελεί μια σημαντική γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δίνει τη δυνατότητα της από κοινού μελέτης τριών ποσοτήτων που συνδέονται με τη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου και οι οποίες είναι: ο χρόνος χρεοκοπίας, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα αμέσως μετά την χρεοκοπία.

Πέρα από τις παραπάνω εργασίες οι οποίες αποτελούν σταθμό για τη μαθηματική ανάπτυξη της θεωρίας χρεοκοπίας, ακολούθησε πλήθος δημοσιεύσεων πάνω στην εξαγωγή διάφορων μέτρων, που αφορούσαν όχι μόνο την πιθανότητα χρεοκοπίας αλλά και την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των: Haili Yuan, Yijiun Hu, (2011) «Absolute ruin problems for the risk processes with interest and a constant dividend barrier», Jun Cai, (2007) « On the time value of absolute ruin with debit interest», Chunwei Wang, Chuancun Yin, (2008) « Dividend payments in the classical risk model under absolute ruin with debit interest» και Xu Lin, Zhang Liming, Wu Liyuan, (2009) « Dividend payments in the classical risk model under absolute ruin with debit interest», μεταξύ άλλων.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα αναπτύξουμε τις βασικές έννοιες του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας των Cramer-Lundberg. Για την ακρίβεια θα δούμε κάποιες σημαντικές παραμέτρους , πως περιγράφεται η εξέλιξη του πλεονάσματος, αλλά και τι ισχύει για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε αυτό το μοντέλο.

## 1.2 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου οι συνολικές απαιτήσεις για αποζημίωση που αφορούν ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο ακολουθούν μια σύνθετη κατανομή που περιγράφονται από τον παρακάτω τύπο,

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i ,$$

όπου το $N(t)$ μας δίνει τον αριθμό των απαιτήσεων την χρονική στιγμή $t$ και η τυχαία μεταβλητή $X_i$ το ύψος της απαίτησης $i$. Μια βασική υπόθεση για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_i$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες αλλά και ανεξάρτητες από το πλήθος τον αποζημιώσεων. Ας δούμε όμως πως ορίζεται το πλήθος των απαιτήσεων στο κλασικό μοντέλο που στην ουσία είναι μια στοχαστική ανέλιξη Poisson.

***Ορισμός* 1.1**

Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη λέγεται στοχαστική ανέλιξη Poisson εάν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

- $N(0)=0$
- $N(t)$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.
- Έχει ισόνομες προσαυξήσεις και μάλιστα σε διάστημα μήκους $t$ το πλήθος των συμβάντων ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda t$ δηλαδή,

$$\Pr\left[N(t+s)-N(s)=n\right]=e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \text{n=0,1,2,...}$$

Με βάση το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομα κατανεμημένοι με παράμετρο $\lambda$. Αν $T_i$ $\mu\varepsilon$ $i=1,2,3...N(t)$ ορίσουμε τους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων και ως $W_i$ με $i=1,2,3...N(t)$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων με:

$$\begin{cases} W_1 = T_1 \\ W_i = T_i - T_{i-1}, \forall i = 2,3,\ldots,N(t), \end{cases}$$

επειδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $W_i \sim Exp(\lambda), \forall i = 2,3,...N(t),$ προκύπτει ότι $W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n \sim G(n,\lambda)$.

Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
&\Pr(N(t)=k) = \Pr(N(t)\le k) - \Pr(N(t)\le k) - \Pr(N(t)\le k-1) = \\
&= \Pr(W_1+W_2+...W_{k+1}>t) - \Pr(W_1+W_2+...W_k>t) = \\
&= \int_t^\infty \frac{\lambda^{\kappa+1}y^k e^{-\lambda y}}{k!}dy - \int_t^\infty \frac{\lambda^{\kappa}y^{k-1}e^{-\lambda y}}{(k-1)!}dy = \\
&= e^{-\lambda y}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} - e^{-\lambda y}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&\Rightarrow N(t) \sim Poi(\lambda t).
\end{aligned}
$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που το n είναι είναι ακέραιος οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομή Erlang, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε ότι

$$W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n \sim Erl(n,\lambda),$$

άρα για κάθε $t$, η τ.μ $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda t$ δηλαδή $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ συνεπώς προκύπτει ότι $\mathrm{E}(\mathrm{N}(t)) = \lambda t$.

Αφού ορίσαμε την στοχαστική ανέλιξη μέσω της οποίας περιγράφεται το πλήθος των αποζημιώσεων, ας δούμε την σύνθετη ανέλιξη που περιγράφει τις συνολικές απαιτήσεις για αποζημίωση.

***Ορισμός 1.2***

Έστω $N(t), t \ge 0$ το πλήθος των ζημιών στο χρονικό διάστημα $[0,t]$ και $X_i, i \ge 1$ το μέγεθος της i-οστής ζημιάς. Τότε οι συνολικές απαιτήσεις στο διάστημα $[0,t]$ δίνονται από την σύνθετη στοχαστική ανέλιξη:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Xi & \text{αν } N(t) \ge 1 \\ 0 & \text{αν } N(t) = 0 \end{cases}$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι για την μέση τιμή της σύνθετης ανέλιξης $S(t)$ ισχύουν τα παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
E\left[S(t)\right] &= E\left[E\left(S(t)\right)\middle|N(t)=n\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \middle| N(t)=n\right)\right] \\
&= E\left[N(t)\mu\right] \\
&= \mu E\left[N(t)\right] \\
&= \mu\lambda t
\end{aligned}
$$

## 1.3 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

Το πλεόνασμα του ασφαλιστή σε μία τυχαία χρονική στιγμή $t$ επηρεάζεται απο τρείς ποσότητες: το απόθεμα την χρονική στιγμή 0, δηλαδή το αρχικό απόθεμα, τα ασφάλιστρα που έλαβε ο ασφαλιστής μέχρι την χρονική στιγμή $t$ και το ποσό των ζημιών που έχουν πληρωθεί μέχρι την χρονική στιγμή $t$. Σκοπός της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος είναι να μετρά και να παρακολουθεί τον κίνδυνο το πλεόνασμα (έσοδα-έξοδα) του ασφαλιστή να γίνει κάποια στιγμή αρνητικό.

***Ορισμός 1.3***

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενως, σκοπός της θεωρίας χρεοκοπίας είναι η εξέταση της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος του ασφαλιστή η οποία περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

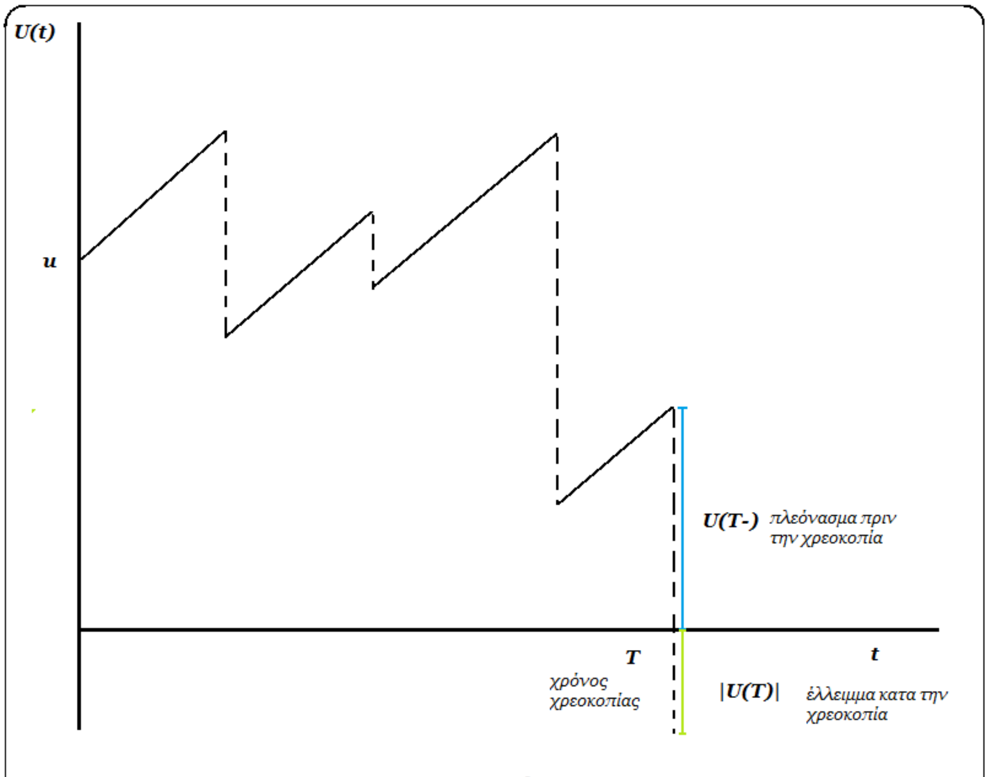
$$U(t) = u + P(t) - S(t),\ t \geq 0,$$

όπου

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Xi, & \text{αν}\, N(t) \geq 1 \\ 0, & \text{αν}\, N(t) = 0. \end{cases}$$

Το $U(t)$ καλείται πλεόνασμα ή απόθεμα την χρονική στιγμή t, $U(0) = u$, $u \geq 0$ το αρχικό απόθεμα, $P(t)$ τα ασφάλιστρα που λαμβάνει ο ασφαλιστής στην μονάδα του χρόνου, και $S(t)$ είναι το άθροισμα των συνολικών απαιτήσεων για το χρονικό διάστημα $[0,t]$.

Η $P(t)$ είναι μία συνάρτηση η οποία παριστάνει τα έσοδα της ασφαλιστικής επιχείρησης τα οποία προέρχονται από την είσπραξη των ασφαλίστρων στο διάστημα $[0,t]$. Η $P(t)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση και στη κλασική θεωρία χρεοκοπίας θεωρούμε τον ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων σταθερό, συνεπώς η συνάρτηση $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση της μορφής $P(t) = ct$ , όπου $c$ είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου και το οποίο ονομάζεται ένταση του ασφαλίστρου.




**Σχήμα 1**

Ίσως η πιο βασική υπόθεση που γίνεται στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου είναι η λεγόμενη συνθήκη του καθαρού κέρδους, δηλαδή ότι $c > \lambda\mu_1$. Το πρακτικό κομμάτι αυτής της συνθήκης είναι η εξασφάλιση ότι τα έσοδα της εταιρίας είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα. Στο δεξιό μέλος έχουμε το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στην μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένο με την μέση αποζημίωση η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\mu_1 = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \overline{F}(x) dx = E(X_i)$$

Άλλη μια σημαντική σχέση που ισχύει για τη στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος είναι ο συντελεστής ή περιθώριο ασφαλείας (Premium Loading Factor) ο οποίος δίνετε απο την παρακάτω σχέση:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1, \ \theta > 0.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: $c = \left(1+\theta\right)\lambda\mu_1$ το οποίο ονομάζεται και επιβαρυμένο ασφάλιστρο.

Από τον ορισμό της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος είναι φανερό ότι κατά τις χρονικές στιγμές $T_i$ άφιξης των κινδύνων η U(t) μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Όταν η ανέλιξη του πλεονάσαμτος γίνει για πρώτη φορά αρνητική, επέρχεται η χρεοκοπία και προσπαθώντας να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας πρέπει να ορίσουμε τον χρόνο χρεοκοπίας χρονική στιγμή $T_i$ κατά την οποία η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος παίρνει για πρώτη φορά αρνητική τιμή ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται ως εξής:

$$T = \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\} \\ \infty, U(t) \geq 0 \forall t \geq 0, \end{cases}$$

εξ ορισμού ο χρόνος χρεοκοπίας μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος, στην δεύτερη περίπτωση αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι η χρεοκοπία δεν έρχεται ποτέ.

Ένα από τα σημαντικότερα μέτρα στην θεωρία χρεοκοπία, είναι η πιθανότητα το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό. Ας θεωρήσουμε ως T την χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνει η χρεοκοπία. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως:

$$\psi\left(u\right) = P\left(T < \infty | U\left(0\right) = u\right), u \geq 0$$

Αν $c \leq \lambda\mu_1$ τότε έχουμε ότι $\psi(u) = 1$ για κάθε $u > 0$, δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη. Ο όρος χρεοκοπία δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα, αφορά μεταφορική έννοια μιας και η ασφαλιστική επιχείρηση δεν διακόπτει την λειτουργία του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου. Η εταιρία μπορεί να δανειστεί χρήματα ή να αναπληρώσει την απώλεια από κάποιο άλλο χαρτοφυλάκιο.

Μιας και το ενδεχόμενο να συμβεί η χρεοκοπία και το ενδεχόμενο να μην συμβεί η χρεοκοπία είναι συμπληρωματικά, θα ορίσουμε και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = P\left(T > \infty \middle| U(0) = u\right)$$

Πριν προχωρήσουμε στο ορισμό και την απόδειξη της εξίσωσης του Lundberg ας δούμε μερικούς ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της εξίσωσης του Lundberg.

## 1.4 Στοχαστικές διαδικασίες Martingale

Οι στοχαστικές διαδικασίες Martingale παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων, στην στοχαστική ανάλυση και τις εφαρμογές της. Το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής θεωρίας πίσω από της στοχαστικές διαδικασίες Martingale οφείλεται στον Αμερικανό μαθηματικό Doob, παρόλαυτα η βασική ιδέα ήταν γνωστή περίπου από τον 20ο αιώνα.

***Ορισμός 1.4***

Έστω $\Omega$ κάποιο σύνολο. Μια σ-άλγεβρα $F$ πάνω στο σύνολο $\Omega$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του $\Omega$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\varnothing \in F$
- $K \in F \Rightarrow K^c \equiv \Omega \setminus K \in F$
- $A_1, A_2, \ldots \in F \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

***Ορισμός 1.5***

Μια διήθηση είναι μια οικογένεια από σ-άλγεβρες $F_t$ τέτοια ώστε:

$$s \le t \Rightarrow F_s \subset F_t$$

Όπως αναφέραμε και παραπάνω μια σ-άλγεβρα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος.

***Ορισμός 1.6***

Μια οικογένεια τ.μ $X_t$ λέγεται προσαρμοσμένη στην διήθηση $F_i$ αν η $X_t$ είναι $F_t$ μετρήσιμη για κάθε t. Με απλά λόγια αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία η οποία αγορά την στοχαστική μεταβλητή $X_t$ μέχρι την χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ-άλγεβρα.

***Ορισμός 1.7***

Έστω $(\Omega, F, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων , $F_t$ μια διήθηση στην $F(F_t \subset F)$ και $X_t$ μια οικογένεια πραγματικών, ολοκληρώσιμων $\left(E\left[|X_t|\right] < \infty\right)$ τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη πάνω στην διήθηση $F_t$.

- Η οικογένεια $X_t$ είναι μια Martingale αν:

$$E[X_t \mid F_s] = X_s \text{ όπου } s \le t$$

- Η οικογένεια $X_t$ είναι μια Supermartingale αν:

$$E[X_t \mid F_s] \le X_s \text{ όπου } s \le t$$

- Η οικογένεια $X_t$ είναι μια Submartingale αν:

$$E[X_t \mid F_s] \ge X_s \text{ όπου } s \le t$$

Με απλά λόγια, οι παραπάνω ορισμοί μας λένε ότι, για μία Martingale έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην $F_s$ η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της $X_t$ είναι η τιμή $X_s$, ομοίως για την Supermartingale είναι μικρότερη από την $X_s$ και για την Submartingale μεγαλύτερη από την $X_s$.

## 1.5 Η εξίσωση του Lundberg και ο συντελεστής προσαρμογής

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε ένα μέτρο το οποίο θα μετράει τον κίνδυνο στην στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος, αλλά θα μας βοηθήσει να κατασκευάσουμε και ένα επάνω όριο για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Για να ορίσουμε την εξίσωση του Lundberg υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός s τέτοιος ώστε η διαδικασία $\left\{e^{sU(t)}\right\}_{t\geq 0}$ να είναι μια στοχαστική διαδικασία Martingale:

$$E\left(e^{sU(0)}\right)=E\left(e^{sU(t)}\right),$$

χρησιμοποιώντας ότι το αρχικό απόθεμα είναι $u$ δηλαδή την ισότητα $U(0)=u$ και την ισότητα από τον ορισμό της ανέλιξης πλεονάσματος έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
e^{su} &= E\left(e^{s\left(u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right)}\right)=E\left(e^{s\left(ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right)}\right)\Rightarrow \\
1 &= E\left(e^{s\left(ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\right)}\right)=e^{sct}E\left(e^{-s\sum_{i=1}^{N(t)}X_i}\right) \\
&= e^{sct}E_{N(t)}\left(e^{-s\sum_{i=1}^{N(t)}X_i} \mid N(t)\right) \\
&= e^{sct}E_{N(t)}\left(e^{-s\left(X_1+X_2+\ldots X_{N(t)}\right)} \mid N(t)\right) \\
&= e^{sct}E_{N(t)}\left(e^{-s\left(X_1+X_2+\ldots X_{N(t)}\right)}\right) \\
&= e^{sct}E_{N(t)}\left(m_X^{N(t)}(-s)\right) \\
&= e^{sct}E_{N(t)}\left(e^{N(t)\ln m_x(-s)}\right) \\
&= e^{sct}m_{N(t)}\left(\ln m_x(-s)\right)=e^{sct}e^{\lambda t(m_X(-s)-1)}.
\end{aligned}
$$

Από την οποία τελικά παίρνουμε ότι

$$sct+\lambda t\left(m_X(-s)-1\right)=0.$$

***Ορισμός 1.7***

Για $s\in\mathbb{R}$ η εξίσωση του Lundberg δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda+cR=\lambda m_X(R),$$

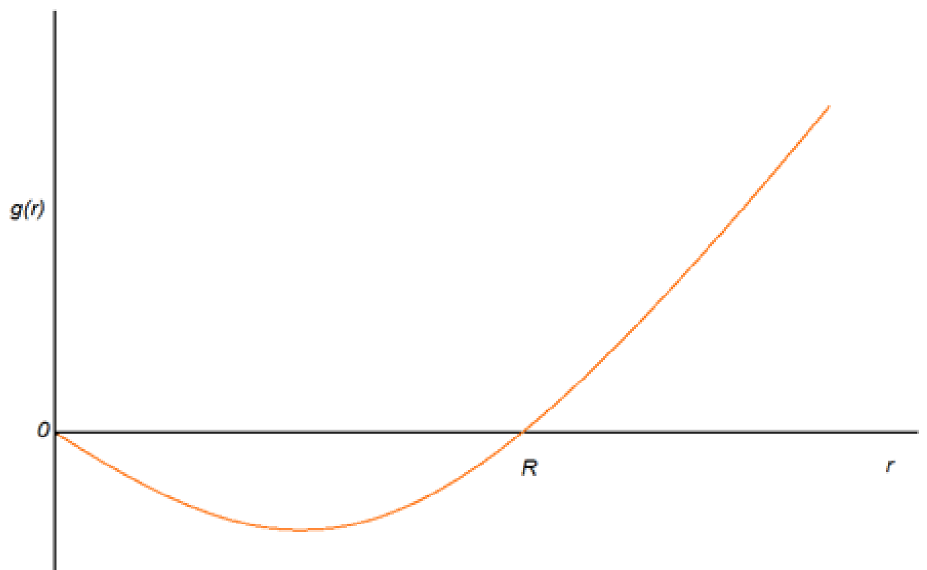
ο συντελεστής προσαρμογής R που μας δίνει ένα μέτρο για τον κίνδυνο στην στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος ορίζεται παρακάτω.

***Ορισμός 1.8***

Έστω R η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg :

$$\lambda + cR = \lambda m_X(R).$$

Αν αυτή η λύση υπάρχει ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής.




***Σχήμα 2***

Ορίζοντας την συνάρτηση $g(r) = \lambda m_X(r) - cr - \lambda$ θα αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικής θετικής ρίζας. Παραγωγίζοντας την $g(r)$ έχουμε,

$$g'(r) = \lambda m_X'(r) - c.$$

Θέτοντας $r = 0$ έπεται ότι:

$$g'(0) = \lambda E(X) - c,$$

και επειδή

$$c > \lambda E(X),$$

παρατηρούμε ότι η $g(r)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Υπολογίζοντας και την δεύτερη παράγωγο της $g(r)$ έχουμε ότι:

$$g''(r) = \lambda m_X''(r) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{rX} f(x)dx > 0,$$

οπότε η εξίσωση $\lambda + cR = \lambda m_X(R)$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες.

## 1.6 Ανισότητα του Lundberg και ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg

Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι μια ποσότητα με ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία χρεοκοπίας για δύο λόγους επειδή μέσω αυτού μπορούμε να πάρουμε τα παρακάτω δύο πολύ σημαντικά αποτελέσματα:

- Η ανισότητα του Lundberg:

$$\psi(u) \le e^{-Ru} \text{ για κάθε } u \ge 0$$

- Ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \text{ καθώς } u \to \infty.$$

Η απόδειξη των παραπάνω αποτελεσμάτων δίνεται στα επόμενα δύο θεωρήματα.

***Θεώρημα 1.1***

Για μη αρνητικό u, $u \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$έχει ένα εκθετικό πάνω φράγμα το οποίο δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \text{ για κάθε } u \geq 0,$$

όπου R είναι ο συντελεστής προσαρμογής που δίνεται στον ορισμό 1.8.

***Απόδειξη***

Η απόδειξη της ανισότητας του Lundberg γίνεται με επαγωγή. Θεωρούμε $\psi_n(u)$την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν την νιοστή αποζημίωση. Για n=1,2,3... έχουμε ότι:

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u).$$

Για n=0 είναι φανερό ότι $\psi_0(u) = 0 \leq e^{-Ru}$. Εάν υποθέσουμε ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο n άρα $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$, θα δείξουμε ότι ισχύει και $\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$. Υποθέτουμε πως η πρώτη ζημιά συμβαίνει την χρονική στιγμή $T_1 = t > 0$και το ύψος αυτής της ζημιάς είναι$X_1 = x$. Αν η χρεοκοπία επέρχεται πριν από την $n+1$ ζημιά τότε δύο περιπτώσεις υπάρχουν:

- Η χρεοκοπία συμβαίνει κατά την άφιξη της πρώτης ζημιάς συνεπώς $x > u + ct$ .
- Η χρεοκοπία δεν συμβαίνει κατά την άφιξη της πρώτης ζημιάς και το πλεόνασμα μετά την πληρωμή της είναι u+ct-x>0 είναι μη αρνητική και η χρεοκοπία συμβαίνει σε μία από της επόμενες n ζημιές.

Συνεπώς

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)\,dx\,dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f_X(x)\,dx\,dt,$$

γνωρίζοντας ότι $e^{-R(u+ct-x)} \geq 1$ για $x \geq u+ct$έχουμε:

$$\int_{u+ct}^\infty f_X(x)\,dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)\,dx,$$

άρα

$$\psi_{n+1}(u) \le \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} f_X(x)\,dx\,dt$$
$$= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} m_X(R)\,dt,$$

όμως από την εξίσωση του Lundberg, $\lambda + cR = \lambda m_X(R)$ ισχύει:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} (\lambda + cR)\,dt = 1$$

και τελικά φτάνουμε σε αυτό που θέλουμε δηλαδή:

$$\psi_{n+1}(u) \le e^{-Ru}.$$

■

Η ανισότητα του Lundberg πρακτικά μας δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Το συγκεκριμένο φράγμα είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην θεωρία χρεοκοπίας σε περιπτώσεις που οι αποζημιώσεις δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ή όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

***Θεώρημα 1.2***

Υποθέτοντας ότι ισχύει: $\int_0^\infty x e^{Rx} \overline{F}(x)\,dx < \infty$, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ικανοποιεί την σχέση:

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \text{ καθώς } u \to \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C,$$

όπου το $C$ είναι μία θετική ποσότητα που δίνεται από τον τύπο,

$$C = \frac{\theta E(x)}{R\int_0^\infty x e^{Rx} \overline{F}(x)\,dx}.$$

## 1.7 Ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την Ψ(u)

Σε αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε κάποιους σημαντικούς ορισμούς και θα δούμε πως υπολογίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιώντας τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

***Ορισμός 1.9***

Έστω ότι $0<\varphi<1$ και η $F(x)$ είναι μια συνάρτηση κατανομής στο $[0,\infty)$ με $F(0)=0$ και συνάρτηση πυκνότητας $f$. Αν η συνάρτηση $m$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$m(x)=\varphi\int_0^y m(x-y)dF(y)+\varphi r(x),\ \ \textit{όπου } x\geq 0$$

όπου $r(x)$ είναι κάποια φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Τότε η $m(x)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation).

***Θεώρημα 1.3***

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u\psi(u-x)f_X(x)dx+\bar{F}_X(u)\right),$$

όπου $\bar{F}_X(u)=1-F_X(u)$ είναι η ουρά της κατανομής.

***Απόδειξη***

Για ένα πολύ μικρό διάστημα $[0,h)$ και δεσμεύοντας ως προς το χρόνο εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος έχουμε ότι,

$$\psi(u)=(1-\lambda h)\psi(u+ch)+\lambda h\left(\int_0^{u+ch}\psi(u+ch-x)f_X(x)dx+\int_{u+ch}^{0}f_X(x)dx\right)+o(h)$$

ή ισοδύναμα:

$$\psi(u+ch)-\psi(u)=\lambda h\psi(u+ch)-\lambda h\left(\int_0^{u+ch}\psi(u+ch-x)f_X(x)dx+\int_{u+ch}^{0}f_X(x)dx\right)+o(h)$$

ή

$$c\frac{\psi(u+ch)-\psi(u)}{c}=\lambda h\psi(u+ch)-\lambda h\left(\int_{0}^{u+ch}\psi(u+ch-x)f_X(x)dx+\int_{u+ch}^{0}f_X(x)dx\right)+o(h)$$

■

Σε αυτό το σημείο αξίζει να απαντήσουμε στο παρακάτω ερώτημα. Ποιά θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας εάν το αρχικό απόθεμα είναι 0;

$$\int_0^{\infty}\psi'(u)du=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^{\infty}\psi(u)du-\int_0^{\infty}\int_0^{u}\psi(u-x)f_X(x)dxdu-\int_0^{\infty}\overline{F}(u)du\right)$$

ή ισοδύναμα

$$-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^{\infty}\psi(u)du-\int_0^{\infty}f_X(x)\int_0^{u}\psi(u-x)dxdu-E(X)\right)$$

ή

$$-\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\int_0^{\infty}\psi(u)du-\int_0^{\infty}f_X(x)dx\int_0^{u}\psi(u)du-E(X)\right)$$

ή

$$-\psi(0)=-\frac{\lambda}{c}\mathrm{E}(X)$$

ή τελικά

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}.$$

Συνεπώς για αρχικό αποθεματικό ίσο με το μηδέν η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι εξίσωση συναρτήσει του περιθωρίου κέρδους θ.

***Ορισμός 1.10***

Όπως κάναμε στην παραπάνω απόδειξη αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-x) f_X(x)dx + \bar{F}_X(u)\right),$$

παίρνουμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση της πιθανότητας χρεοκοπίας,

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-t)\bar{F}(t)dt - \int_0^\infty \bar{F}(t)dt\right)$$

επειδή

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\psi(0)}{E(x)},$$

η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα χρεοκοπίας και η οποία είναι η:

$$\psi(u) = \psi(0)\left(\int_0^u \psi(u-t) f_e(t)dt - \bar{F}_e(u)\right),$$

όπου η συνάρτηση $f_e(x) = \dfrac{\bar{F}(x)}{E(x)}$ και λέγεται συνάρτηση ισορροπίας (equilibrium function) και για τον λόγο ότι $\int_0^\infty \bar{F}(x)dx = E(x)$ η $f_e(x)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής.

## 1.8 Εκθετικά ύψη ζημιών

Ας δούμε τώρα πως υπολογίζεται, με βάση τα παραπάνω, η πιθανότητα χρεοκοπίας, θεωρώντας ότι τα ύψη των ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο α. Η συνάρτηση πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο α είναι:

$$f_X(x) = ae^{-ax} \text{ και } F_X(x) = 1 - e^{-ax} \text{ με } a > 0, x \geq 0.$$

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-x) f_X(x)dx + \overline{F}_X(u)\right)$$

ή

$$c\psi'(u) = \lambda\psi(u) - \lambda\left(\int_0^u \psi(x) f_X(u-x)dx + \overline{F}_X(u)\right).$$

Επειδή όμως η τυχαία μεταβλητή $X \sim Exp(a)$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$c\psi'(u) = \lambda\psi(u) - \lambda\int_0^u \psi(x) a e^{-a(u-x)}dx - \lambda e^{-au}$$

$$= \lambda\psi(u) - ae^{-au}\lambda\int_0^u \psi(x)e^{ax}dx - \lambda e^{-au}$$

Παραγωγίζοντας ως προς u παίρνουμε

$$c\psi''(u) = \lambda\psi'(u) + a^2 e^{-au}\lambda\int_0^u \psi(x)e^{ax}dx - \lambda a\psi(u) + \lambda a e^{-au}$$

η οποία μας δίνει

$$c\psi''(u) = \lambda\psi'(u) + a\left(-c\psi'(u) + \lambda\psi(u) - \lambda e^{-au}\right) - \lambda a\psi(u) - \lambda a e^{-au}.$$

Άρα είναι

$$c\psi''(u) = (\lambda - ac)\psi'(u).$$

Για να λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση παρατηρούμε ότι γράφεται στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{\psi''(u)}{\psi'(u)} = \left(\frac{\lambda}{c} - a\right),$$

οπότε έχουμε ότι

$$\int_0^u \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}dx = \int_0^u \left(\frac{\lambda}{c} - a\right)dx,$$

ή

$$\int_0^u \frac{d}{dx}\ln\psi'(x)dx = \left(\frac{\lambda}{c}-a\right)u,$$

ή

$$\ln\psi'(u)-\ln\psi'(0) = \left(\frac{\lambda}{c}-a\right)u,$$

ή

$$\ln\psi'(u) = \left(\frac{\lambda}{c}-a\right)u+\ln\psi'(0).$$

Αν στην ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\psi(u)$ θέσουμε $u=0$ παίρνουμε

$$\psi'(0) = \frac{\lambda}{c}\psi(0)-\frac{\lambda}{c}\overline{F}(0) = -\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}$$

ή ισοδύναμα

$$\ln\psi'(0) = \ln\left(-\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}\right).$$

Άρα

$$\psi'(u) = e^{\left(\frac{\lambda}{c}-a\right)u+\ln\left(-\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}\right)} = -\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}e^{\left(\frac{\lambda}{c}-a\right)u},$$

από τη οποία βέβαια παίρνουμε

$$\int_0^u \psi'(x)dx = -\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}\int_0^u e^{\left(\frac{\lambda}{c}-a\right)x}dx.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$\psi(u)-\psi(0) = -\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}\frac{1}{a-\frac{\lambda}{c}}\left(1-e^{-\left(a-\frac{\lambda}{c}\right)u}\right),$$

ή

$$\psi(u) = -\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}\frac{1}{a-\frac{\lambda}{c}}\left(1-e^{-\left(a-\frac{\lambda}{c}\right)u}\right).$$

Είναι

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{\psi(0)}{E(x)} = \frac{a}{1+\theta},$$

οπότε

$$a - \frac{\lambda}{c} = a - \frac{a}{1+\theta} = \frac{a\theta}{1+\theta}$$

και

$$\frac{\lambda\theta}{c(1+\theta)}\frac{1}{a-\frac{\lambda}{c}} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Άρα τελικά έχουμε

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)} - \frac{1}{1+\theta}\left(1-e^{-\frac{a\theta u}{1+\theta}}\right),$$

ή

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{a\theta u}{1+\theta}}, u \geq 0.$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι για $u \to \infty$ παίρνουμε $\psi(\infty) = 0$.

## 1.9 Συνάρτηση των Gerber-Shiu

Το 1998 δύο ερευνητές οι Hans Gerber και Elias Shiu μέσω της εργασίας που δημοσίευσαν με τον τίτλο «On the time value of ruin» πήγαν την θεωρία χρεοκοπίας ένα βήμα παραπέρα εισάγοντας μια συνάρτηση, η οποία μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε διάφορα μέτρα γύρω από την θεωρία χρεοκοπίας ταυτόχρονα. Τα μέτρα τα οποία μας βοηθάει αυτή η συνάρτηση να μελετήσουμε είναι:

- ο χρόνος χρεοκοπίας

- το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας $\left|U(T)\right|$
- το πλεόνασμα αμέσως μετά την χρεοκοπία $U\left(T^{-}\right)$

Αρχικά θα ορίσουμε δύο νέες μεταβλητές, την $|U(T)|$ που ορίζει το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας και την $U\left(T^{-}\right)$ που ορίζει το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία. Για την $\left|U(T)\right|$ να σημειώσουμε ότι μας ενδιαφέρει η απόλυτη τιμή της τυχαίας μεταβλητής λόγω της αρνητικής σχέσης του ελλείμματος, συνεπώς για το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας ισχύει $\left|U(T)\right|=-U(T)$ και για το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U\left(T^{-}\right)=\lim_{t\to T^{-}}U(t)$.

Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε πως η συνάρτηση των Gerber-Shiu λέγεται και αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής και αυτό γιατί θεωρούμε ότι την στιγμή που συμβεί η χρεοκοπία ο ασφαλιστής θα επιβαρυνθεί με κάποια ποινή. Η ποινή αυτή εξαρτάται από το πλεόνασμα πριν και μετά την χρεοκοπία. Έστω $w(x,y)$ για $x,y\geq 0$ μια μη αρνητική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}$ και $\delta\geq 0$.

Η συνάρτηση:

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta T}w\left(U\left(T^{-}\right),|U(T)|\right)I(T<\infty)|U(0)=u\right],\ u\geq 0$$

Ονομάζεται συνάρτηση των Gerber-Shiu. Όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού και η συνάρτηση I(.) είναι μία δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου (στην περίπτωση μας η χρεοκοπία) όπου παίρνει την τιμή 1 αν το ενδεχόμενο πραγματοποιηθεί και την τιμή 0 αν όχι.

Η ποσότητα $w\left(U\left(T^{-}\right),|U(T)|\right)$ είναι στην ουσία η ποινή που καλείται να πληρώσει ο ασφαλιστής και για την ακρίβεια είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία της ποινής την στιγμή της χρεοκοπίας. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή πολλές ποσότητες μπορούν να αναλυθούν με την βοήθεια της αναμενόμενης συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής. Έστω $w(x_1,x_2)=I(x_1=x,y_1=y)$ τότε η $\Phi(u)$ μας δίνει το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U\left(T^{-}\right)$. Ας δούμε όμως κάποιες ειδικές περιπτώσεις:

- Για $\delta=0$ και $w(x,y)=1$ παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μιας και

$$\Phi(u)=E\left[I(T<\infty)|U(0)=u\right]=P\left(T<\infty|U(0)=u\right)=\psi(u)$$

- Όταν το $\delta>0$ και $w(x,y)=1$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας:

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta t}I(T<\infty)|U(0)=u\right]=\bar{K}_\delta(u)$$

- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I(x\le x_1)I(y\le x_2)$ προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U\left(T^-\right)$ και $\left|U(T)\right|$.

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta t}\,I\left(x_1\le x\right)I\left(x_2\le y\right)I\left(T<\infty\right)/U\left(0\right)=u\right]=F_\delta\left(x,y/u\right)$$

- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I(x=x_1)I(y=x_2)$ προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U\left(T^-\right)$ και $\left|U(T)\right|$.

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta t}\,I(x=x_1)I(y=x_2)I\left(T<\infty\right)/U\left(0\right)=u\right]=f_\delta\left(x,y/u\right)$$

- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I\left(x_1\le x\right)$ προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του $U\left(T^-\right)$ κατά την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας.

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta t}\,I\left(x_1\le x\right)I\left(T<\infty\right)/U\left(0\right)=u\right]=F_\delta\left(x/u\right)$$

- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I\left(x_1=x\right)$ προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $U\left(T^-\right)$ κατά την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας.

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta t}\,I\left(x_1=x\right)I\left(T<\infty\right)/U\left(0\right)=u\right]=f_\delta\left(x/u\right)$$

- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I\left(x_2\le y\right)$ προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του $\left|U(T)\right|$ κατά την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας.

$$\Phi(u)=E\left[e^{-\delta t}\,I\left(x_2\le y\right)I\left(T<\infty\right)/U\left(0\right)=u\right]=F_\delta\left(y/u\right)$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(x_2 = y)$ προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $|U(T)|$ κατά την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας.

$$\Phi(u) = E\left[e^{-\delta t} I(x_2 = y) I(T < \infty) / U(0) = u\right] = f_\delta(y/u)$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Θεωρούμε το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 1. Έστω η ανέλιξη πλεονάσματος για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου $U(t)=u+ct-\sum_{n=1}^{N(t)} X_n$ για $t\geq 0$ όπου $u\geq 0$ το αρχικό πλεόνασμα και $c>0$ η ένταση ασφαλίστρου. Στην περίπτωση που το πλεόνασμα είναι αρνητικό, δίνεται η δυνατότητα στον ασφαλιστή να δανειστεί ένα ποσό ίσο με το έλλειμμα εκείνης της στιγμής, με μία ένταση ανατοκισμού $\delta>0$, δηλαδή ένα χρεωστικό επιτόκιο $e^{\delta}-1>0$. Σε αυτή την περίπτωση η αποπληρωμή του δανείου γίνεται από την είσπραξη των μελλοντικών ασφαλίστρων. Με αυτό τον τρόπο ο ασφαλιστής καταφέρνει να ¨σώσει¨ το χαρτοφυλάκιο και να επαναφέρει το πλεόνασμα σε θετικές τιμές. Πότε όμως η παραπάνω διαδικασία δεν έχει κανένα αποτέλεσμα;

Όταν το αρνητικό πλεόνασμα είναι κάτω από την τιμή $-\frac{c}{\delta}$, η παραπάνω διαδικασία δεν έχει καμία επίδραση στην προσπάθεια του ασφαλιστή να επαναφέρει το πλεόνασμα σε θετικές τιμές. Η τιμή $-\frac{c}{\delta}$ δεν είναι μία τυχαία τιμή, αλλά είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών ασφαλίστρων. Με απλά λόγια όταν η αξία στο σήμερα των μελλοντικών ασφαλίστρων που δύναται να εισπράξει ο ασφαλιστής είναι ίση ή μεγαλύτερη του αρνητικού πλεονάσματος, τότε η παραπάνω διαδικασία δεν έχει κανένα αποτέλεσμα. Η παραπάνω χρονική στιγμή είναι εκείνη η στιγμή που επέρχεται η απόλυτη χρεοκοπία.

Όλες οι ποσότητες που αναφέραμε στο κεφάλαιο 2 υπάρχουν και εδώ, αλλά με διαφορετικό συμβολισμό λόγω της ύπαρξης της έντασης ανατοκισμού δ. Για την ακρίβεια ο χρόνος της απόλυτης χρεοκοπίας συμβολίζεται με $T_{\delta}$, το πλεόνασμα κατά την απόλυτη χρεοκοπία $|U_{\delta}(T_{\delta})|$ και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την απόλυτη χρεοκοπία $U_{\delta}(T_{\delta}^{-})$.

## 2.1 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

Για $t > 0$ το πλεόνασμα του ασφαλιστή την χρονική στιγμή t, με ένταση ανατοκισμού $\delta \geq 0$ συμβολίζεται με $U_\delta(t)$. Η δυναμική του πλεονάσματος $U_\delta(t)$ καθορίζεται από την

$$dU_\delta(t) = \big(c + \delta U_\delta(t)\mathrm{I}\big(U_\delta(t) < 0\big)\big)dt - dS(t), \qquad U_\delta(0) = u$$

δηλαδή

$$dU_\delta(t) = \begin{cases} cdt - dS(t) & , U_\delta(t) \geq 0 \\ \delta U_\delta(t)dt + cdt - dS(t) & , -\dfrac{c}{\delta} \leq U_\delta(t) < 0 \end{cases}$$

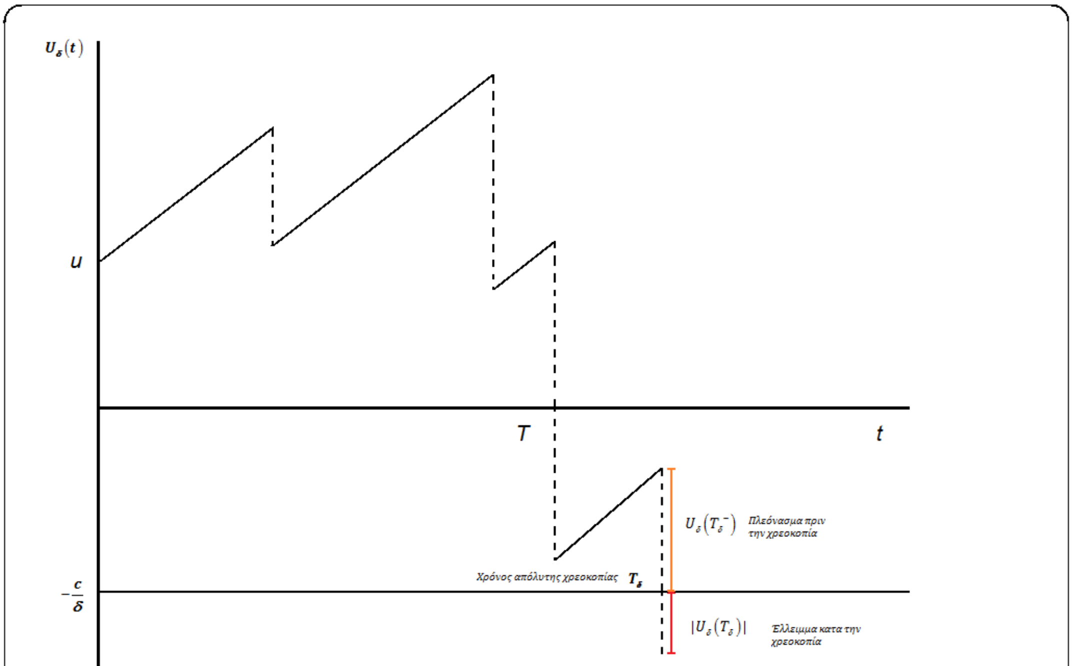
όπου $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ οι συνολικές απαιτήσεις για αποζημίωση. Η στοχαστική διαδικασία $\mathrm{N}(\mathrm{t})$ μας δίνει τον αριθμό των απαιτήσεων την χρονική στιγμή $t$ και είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson όπως στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

## 2.2 Χρόνος απόλυτης χρεοκοπίας

Η χρονική στιγμή κατά την οποία η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος παίρνει για πρώτη φορά τιμή μικρότερη του $-\frac{c}{\delta}$ ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται ως εξής:

$$T_\delta = \begin{cases} \inf\left\{t \geq 0 : U_\delta(t) \leq -\dfrac{c}{\delta}\right\} \\ \infty \; , U_\delta(t) > -\dfrac{c}{\delta} \; \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Εξ ορισμού ο χρόνος χρεοκοπίας μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος, στην δεύτερη περίπτωση αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι η χρεοκοπία δεν έρχεται ποτέ. Είναι φανερό ότι η σχέση που ισχύει ανάμεσα στον χρόνο χρεοκοπίας και του χρόνου απόλυτης χρεοκοπίας είναι $T \le T_\delta$ .




*Σχήμα 3*

Όπως φαίνεται και στο σχήμα παρόλο που υπάρχει έλλειμμα κατά την χρονική στιγμή $T$ , μιας και το πλεόνασμα είναι αρνητικό, το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο λειτουργεί κανονικά με την βοήθεια του δανείου με την προσδοκία το πλεόνασμα να γίνει θετικό. Στη συνέχεια όμως παρατηρούμε ότι μετά από μία ζημιά το πλεόνασμα πέφτει κάτω από την κρίσιμη τιμή $\frac{c}{\delta}$ και οδηγείται στην απόλυτη χρεοκοπία την χρονική στιγμή $T_\delta$ .

## 2.3 Πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας

Θεωρώντας την χρονική στιγμή $T_\delta$ ως την χρονική στιγμή κατά την οποία συμβαίνει η απόλυτη χρεοκοπία, η πιθανότητα της απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής:

$$\psi(u) = P\left(T_\delta < \infty \,|\, U_\delta(0) = u\right).$$

Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι για την διαδικασία πλεονάσματος διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, μία για $u \geq 0$ και μία για $-\frac{c}{\delta} < u < 0$. Για να ξεχωρίσουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις γράφουμε $\psi(u) = \psi_{+}(u)$ για $u \geq 0$ και $\psi(u) = \psi_{-}(u)$ για $-\frac{c}{\delta} < u < 0$.

## 2.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu κατά την απόλυτη χρεοκοπία

Τώρα η συνάρτηση των Gerber-Shiu δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\Phi(u) = E\left[e^{-aT_{\delta}} w\left(U_{\delta}\left(T_{\delta}^{-}\right), |U_{\delta}(T_{\delta})|\right) I(T_{\delta} < \infty) \,|\, U_{\delta}(0) = u\right],$$

όπου I(.) είναι μία δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου (στην περίπτωση μας η χρεοκοπία) όπου παίρνει την τιμή 1 αν το ενδεχόμενο πραγματοποιηθεί και την τιμή 0 αν όχι. Η $w(x_1, x_2)$ με $x_1 > -\frac{c}{\delta}$ και $x_2 \geq \frac{c}{\delta}$ είναι η συνάρτηση ποινής κατά την απόλυτη χρεοκοπία. Τώρα εδώ το αρχικό απόθεμα είναι μεγαλύτερο από την παρούσα αξία των μελλοντικών ασφαλίστρων, δηλαδή $u > -\frac{c}{\delta}$. Η ποσότητα $e^{-aT_{\delta}}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως προεξοφλητικός παράγωντας ή ως μετασχηματισμός Laplace. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε πως το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία $|U_{\delta}(T_{\delta})|$ είναι τουλάχιστον ίσο με $\frac{c}{\delta}$ και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία $U_{\delta}\left(T_{\delta}^{-}\right)$ βρίσκεται στο διάστημα $\left(-\frac{c}{\delta}, \infty\right)$. Για την εξίσωση των Gerber-Shiu ισχύει ακριβώς ότι έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 2, για παράδειγμα $\psi(u) = \Phi(u)$ όταν $a = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$.

## 2.5 Ολοκληρωτικές και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις των $\Phi_+(u)$ και $\Phi_-(u)$

Πριν δούμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι $\Phi_+(u)$ και $\Phi_-(u)$ ας αποδείξουμε ένα πάρα πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο μας δίνει τις ολοκληρωτικές εξισώσεις των παραπάνω συναρτήσεων, αλλά θα μας βοηθήσει στο να διατυπώσουμε ένα θεώρημα στο οποίο δίνονται οι ολοκληροδιαφορικές συναρτήσεις των των $\Phi_+(u)$ και $\Phi_-(u)$.

***Θεώρημα 2.1***

i. Για $u \geq 0$ η $\Phi_+(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\Phi_+(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{(\lambda+a)u}{c}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+a)x}{c}} \left[ \int_0^x \Phi_+(x-y)dF(y) + \int_x^{x+\frac{c}{\delta}} \Phi_-(x-y)dF(y) + A(x) \right] dx .$$

ii. Για $-\frac{c}{\delta} < u < 0$ η $\Phi_-(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\Phi_-(u) = \lambda(\delta u + c)^{\frac{(\lambda+\alpha)}{\delta}} \left[ \int_u^0 (\delta x + c)^{-1-\frac{(\lambda+\alpha)}{\delta}} \left[ \int_0^{x+\frac{c}{\delta}} \Phi_-(x-y)dF(y) + A(x) \right] dx \right.$$
$$\left. + c^{-1-\frac{(\lambda+\alpha)}{\delta}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\lambda+\alpha)z}{c}} \left[ \int_0^z \Phi_+(z-y)dF(y) + \int_z^{z+\frac{c}{\delta}} \Phi_-(z-y)dF(y) + A(z) \right] dz \right]$$

όπου $A(x) = \int_{x+\frac{c}{\delta}}^{\infty} w(x, y-x)dF(y)$.

***Απόδειξη***

Αρχικά ας ξεκινήσουμε την απόδειξη για την περίπτωση που $-\frac{c}{\delta} < u < 0$. Όταν το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό ξεκινάει να επιδρά το χρεωστικό επιτόκιο, καθώς απουσιάζει κάποια ζημιά η πραγματική τιμή του πλεονάσματος την χρονική στιγμή t είναι η ισορροπία της συσσωρευμένης αξίας των ασφαλίστρων μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή $c\bar{s}_{\overline{t}|}^{(\delta)}$ μείον το πραγματικό ποσό του χρέους συσσωρευμένο στο t δηλαδή $|u|e^{\delta t}$, δηλαδή $h_{\delta}(t,u)=ue^{\delta t}+c\left(\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}\right)$. Το $\bar{s}_{\overline{t}|}^{(\delta)}$ είναι η τελική αξία της μονάδας στο χρόνο t, δηλαδή $\bar{s}_{\overline{t}|}^{(\delta)}=\int_0^t e^{\delta v}dv$. Έστω $t_0=t_0(u)=\ln\left(\frac{c}{c+\delta u}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ η λύση της εξίσωσης $h_{\delta}(t,u)=ue^{\delta t}+c\left(\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}\right)=0$, όπου $t_0$ είναι ο χρόνος κατά τον οποίο το πλεόνασμα επιστρέφει σε μηδενικά επίπεδα με την προϋπόθεση ότι μέχρι τότε δεν έχει συμβεί κάποια ζημιά. Με βάση τα παραπάνω είναι ολοφάνερο ότι $h_{\delta}(t,u)<0$ για $t<t_0$ και $h_{\delta}(t_0,u)=0$. Έτσι δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi_{-}(u)=&\int_0^{t_0}\lambda e^{-(\lambda+a)t}\left[\int_0^{h_{\delta}(t,u)+c/\delta}\Phi_{-}\left(h_{\delta}(t,u)-y\right)dF(y)+\int_{h_{\delta}(t,u)+c/\delta}^{\infty}w\left(h_{\delta}(t,u),y-h_{\delta}(t,u)dF(y)\right)\right]dt\\&+\int_{t_0}^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+a)t}\left[\int_0^{c(t-t_0)}\Phi_{+}\left(c(t-t_0)-y\right)dF(y)+\int_{c(t-t_0)}^{c(t-t_0)+c/\delta}\Phi_{-}\left(c(t-t_0)-y\right)dF(y)\right.\\&\left.+\int_{c(t-t_0)+c/\delta}^{\infty}w\left(c(t-t_0),y-c(t-t_0)\right)dF(y)\right]dt\end{aligned}\tag{2.1}$$

Για $u\geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi_{+}(u)=&\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+a)t}\left[\int_0^{u+ct}\Phi_{+}(u+ct-y)dF(y)+\int_{u+ct}^{u+ct+c/\delta}\Phi_{-}(u+ct-y)dF(y)\right.\\&\left.+\int_{u+ct+c/\delta}^{\infty}w\left(u+ct,y-(u+ct)\right)dF(y)\right]dt\end{aligned}\tag{2.2}$$

Θέτοντας $x=u+ct$ στην (2.2) και παίρνουμε την

$$\Phi_{+}(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\frac{(\lambda+a)u}{c}}\int_{u}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+a)x}{c}}\left[\int_{0}^{x}\Phi_{+}(x-y)dF(y)+\int_{x}^{x+\frac{c}{\delta}}\Phi_{-}(x-y)dF(y)+A(x)\right]dx$$

και θέτοντας στην (2.1) $x=h_{\delta}(t,u)$ και $z=c(t-t_{0})$ παίρνουμε την

$$\Phi_{-}(u)=\lambda(\delta u+c)^{\frac{(\lambda+\alpha)}{\delta}}\left[\int_{u}^{0}(\delta x+c)^{-1-\frac{(\lambda+\alpha)}{\delta}}\left[\int_{0}^{x+\frac{c}{\delta}}\Phi_{-}(x-y)dF(y)+A(x)\right]dx\right.$$
$$\left.+c^{-1-\frac{(\lambda+\alpha)}{\delta}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+\alpha)z}{c}}\left[\int_{0}^{z}\Phi_{+}(z-y)dF(y)+\int_{z}^{z+\frac{c}{\delta}}\Phi_{-}(z-y)dF(y)+A(z)\right]dz\right]$$

■

***Σημείωση 2.1***

Μία πολύ σημαντική συνθήκη που ισχύει για τις $\Phi_{-}(u)$ και $\Phi_{+}(u)$ είναι ότι

$$\Phi_{+}(0)=\Phi_{-}(0-).$$

Από το παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\Phi_{-}(u)$ και $\Phi_{+}(u)$ είναι διαφορίσιμες στα διαστήματα $(-c/\delta,0)$ και $(0,\infty)$ αντίστοιχα.

Πριν συνεχίσουμε παρακάτω, ας δούμε κάποιες σημαντικές οριακές συνθήκες που ισχύουν για τις $\Phi_{+}(u)$ και $\Phi_{-}(u)$.

***Πρόταση 2.1***

Αν

$$\lim_{u\to -c/\delta}\int_{u}^{0}(c+\delta x)^{-(\lambda+a)/\delta-1}\,\mathrm{A}(x)dx=\infty,$$

τότε

$$\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_{-}(u)=\frac{\lambda}{\lambda+a}A\left(-\frac{c}{\delta}\right),$$

Αν όμως

$$\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0 \left(c+\delta x\right)^{-(\lambda+a)/\delta-1} \mathrm{A}\left(x\right)dx<\infty ,$$

τότε

$$\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_{-}\left(u\right)=0 \cdot$$

***Απόδειξη***

Από την (2.1) παρατηρούμε ότι αν

$$\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0\left[\left(\delta x\mathrm{+c}\right)^{-1-(\lambda+\alpha)/\delta}\int_0^{x+c/\delta}\Phi_{-}\left(x-y\right)dF\left(y\right)\right]dx<\infty$$

τότε

$$\lim_{u\to -c/\delta}\lambda\left(\delta\mathrm{u+c}\right)^{(\lambda+a)/\delta}\int_u^0\left[\left(\delta x\mathrm{+c}\right)^{-1-(\lambda+\alpha)/\delta}\int_0^{x+c/\delta}\Phi_{-}\left(x-y\right)dF\left(y\right)\right]dx=0$$

αν επιπλέον ισχύει

$$\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0\left[\left(\delta x\mathrm{+c}\right)^{-1-(\lambda+\alpha)/\delta}\int_0^{x+c/\delta}\Phi_{-}\left(x-y\right)dF\left(y\right)\right]dx=\infty$$

τότε με την βοήθεια του κανόνα του L'Hospital

$$\lim_{u\to -c/\delta}\lambda\left(\delta\mathrm{u+c}\right)^{(\lambda+a)/\delta}\int_u^0\left[\left(\delta x\mathrm{+c}\right)^{-1-(\lambda+\alpha)/\delta}\int_0^{x+c/\delta}\Phi_{-}\left(x-y\right)dF\left(y\right)\right]dx=0$$

Παρατηρούμε πως όταν $u\to -c/\delta$ η (2.2) μας δίνει

$$\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_{-}\left(u\right)=\lim_{u\to -c/\delta}\lambda\left(\delta\mathrm{u+c}\right)^{(\lambda+a)/\delta}\int_u^0\left(\delta x\mathrm{+c}\right)^{-1-(\lambda+\alpha)/\delta}A\left(x\right)dx \cdot$$

Αν $\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0 (c+\delta x)^{-(\lambda+a)/\delta-1} \mathrm{A}(x)dx=\infty$, χρησιμοποιώντας το κανόνα του L'Hospital και την ακριβώς παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι $\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_-(u)=\frac{\lambda}{\lambda+a}A\left(-\frac{c}{\delta}\right)$. Αν τώρα $\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0 (c+\delta x)^{-(\lambda+a)/\delta-1} \mathrm{A}(x)dx<\infty$ αντίστοιχα λαμβάνουμε ότι $\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_-(u)=0$.

■

Εάν στο θεώρημα 2.1 θέσουμε $a=0$ και $w(x,y)=1$ καταλήγουμε στις ολοκληρωτικές εξισώσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

***Πόρισμα 2.1***

i. Για $u\geq 0$ η $\psi_+(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\psi_+(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\frac{\lambda u}{c}}\int_u^\infty e^{\frac{\lambda x}{c}}\left[\int_0^x \psi_+(x-y)dF(y)+\int_x^{x+\frac{c}{\delta}}\psi_-(x-y)dF(y)+A(x)\right]dx$$

ii. Για $-\frac{c}{\delta}<u<0$ η $\psi_-(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\psi_-(u)=\lambda(\delta u+c)^{\frac{\lambda}{\delta}}\left[\int_u^0(\delta x+c)^{-1-\frac{\lambda}{\delta}}\left[\int_0^{x+\frac{c}{\delta}}\psi_-(x-y)dF(y)+A(x)\right]dz\right.$$
$$\left.+c^{-1-\frac{\lambda}{\delta}}\int_0^{Y}e^{-\left(\frac{\lambda z}{c}\right)}\left[\int_0^z\psi_+(z-y)dF(y)+A(z)\right]dz\right],$$

όπου

$$\mathrm{A}(x)=\int_{x+\frac{c}{\delta}}^\infty w(x,y-x)dF(y).$$

***Θεώρημα 2.2***

i. Για $u \geq 0$ η $\Phi_+(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\Phi'_+(u) = \frac{\lambda + a}{c}\Phi_+(u) - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \Phi_+(u-x)dF(x) + B(u)\right]. \qquad (2.3)$$

ii. Για $-\frac{c}{\delta} < u < 0$ η $\Phi_-(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\Phi'_-(u) = \frac{\lambda + a}{\delta u + c}\Phi_-(u) - \frac{\lambda}{\delta u + c}\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}} \Phi_-(u-x)dF(x) + A(u)\right], \qquad (2.4)$$

όπου

$$A(u) = \int_{u+c/\delta}^{\infty} w(u, x-u)dF(x) \qquad (2.5)$$

και

$$B(u) = \int_u^{u+c/\delta} \Phi_-(u-x)dF(x) + A(u) \qquad (2.6)$$

***Σημείωση 2.2***

a) Η $\Phi'_+(u)$ μπορεί να γραφτεί και στην παρακάτω μορφή

$$\Phi'_+(u) = \frac{\lambda + a}{c}\Phi_+(u) - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{u+\frac{c}{\delta}} \Phi_+(u-x)dF(x) + A(u)\right],$$

επειδή

$$\int_0^u \Phi_+(u-x)dF(x)+\int_u^{u+c/\delta}\Phi_-(u-x)dF(x)+A(u)=\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}\Phi_+(u-x)dF(x)+A(u)$$

b) Ισχύει ότι $\Phi'_+(0)=\Phi'_-(0-)$.

## 2.6 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για την Φ+(u) και την Φ-(u)

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις του Θεωρήματος 3.2 το $u$ με $t$, ολοκληρώνοντας από 0 έως $u$ και θέτοντας με $a=0$ παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα που μας δίνει τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για την $\Phi_+(u)$ συναρτήσει της $\Phi_-(u)$, δηλαδή έχουμε μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που συνδέει τις $\Phi_+(u)$ και $\Phi_-(u)$.

***Θεώρημα 2.3***

Όταν $\alpha=0$, η $\Phi_+(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\Phi_+(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}B(t)dt+\frac{1}{1+\theta}\int_0^u\Phi_+(u-x)dF_e(x), \qquad u\geq 0$$

όπου $\theta=\dfrac{c}{\lambda\mu_1}-1>0$, για κάθε $u\geq 0$ το περιθώριο ασφαλείας και

$$F_e(y)=\frac{\int_0^y \overline{F}(x)dx}{\mu},\ \mathrm{y}\geq 0 .$$

Για κάθε $u\geq 0$ έχουμε ότι

$$\Phi_+(u)=\frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u z(u-x)dG(x)$$

όπου

$$z(x)=\frac{\lambda}{c}\int_x^{\infty}B(t)dt$$

και

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n F_e^{n}(x)$$

είναι η συνάρτηση κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και $F_e^{n}(x)$ η νιοστή συνέλιξη της $F_e$.

***Απόδειξη***

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[0,u]$ την

$$\Phi_+'(u)=\frac{\lambda+a}{c}\Phi_+(u)-\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u\Phi_+(u-x)dF(x)+B(u)\right]$$

παίρνουμε

$$\Phi_+(u)=\Phi_+(0)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u B(t)dt+\frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u\Phi_+(u-y)dF_e(y)+\frac{a}{c}\int_0^u\Phi_+(t)dt. \qquad (2.7)$$

Θέτοντας $a=0$ η (2.7) γίνεται

$$\Phi_+(u)=\Phi_+(0)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u B(t)dt+\frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u\Phi_+(u-y)dF_e(y). \qquad (2.8)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι ισχύει $\lim_{u\to\infty}\Phi_+(u)=0$ οπότε για $u\to\infty$ η (2.8) γίνεται

$$\Phi_+(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}B(t)dt. \qquad (2.9)$$

Τελικά αν αντικαταστήσουμε την (2.9) στην (2.8) καταλήγουμε σε αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

■

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός της $\Phi_+(u)$ εξαρτάται από την $\Phi_-(u)$ και αυτό διότι η $\Phi_+(u)$ εξαρτάται από την $B(u)=\int_u^{u+c/\delta}\Phi_-(u-x)dF(x)+A(u)$ .

## 2.7 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα για ζημιές με βαριά και ελαφριά ουρά

***Ορισμός 2.1***

Μια συνάρτηση κατανομής $F$ στο $[0,\infty)$ θα λέμε ότι διαθέτει βαριά (Heavy-tailed) ουρά όταν:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\overline{F}(x)=\infty,\ \ \forall\ \lambda>0$$

ή αλλιώς

$$\int_{\Re} xe^{\lambda x}\overline{F}(x)dx=\infty, \qquad \forall\ \lambda>0$$

ή αλλιώς μπορούμε να πούμε όταν η ροπογεννήτρια $M_F(t)$ της $F$ απειρίζεται για κάθε $t>0$.

***Ορισμός 2.2***

Μια συνάρτηση κατανομής $F$ στο $[0,\infty)$ θα λέμε ότι διαθέτει ελαφριά (Light-tailed) ουρά όταν:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\overline{F}(x)<\infty,\ \ \forall\ \lambda>0$$

ή αλλιώς

$$\int_{\Re} xe^{\lambda x}\overline{F}(x)dx<\infty, \qquad \forall\ \lambda>0$$

***Ορισμός 2.3***

Μια συνάρτηση κατανομής $F$ στο $[0,\infty)$ θα λέμε ότι διαθέτει μακριά ουρά (Long-tailed) όταν:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(x)}=1,\ \ \forall\ t>0$$

***Ορισμός 2.4***

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ οι οποίες έχουν σ.κ $F$ για την οποία ισχύει $F(x)<1$ για κάθε $x>0$. Έστω $\overline{F}^{*n}(x)=1-F^{*n}(x)$ για $x\geq 0$ η ουρά της n-τάξης συνέλιξης της $F$ με το εαυτό της. Με βάση τα παραπάνω η $F$ ονομάζεται υποεκθετική (Subexponential) κατανομή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}^{*n}(x)}{\overline{F}(x)}=n \ \text{ για κάθε } n\geq 2$$

Όταν μία συνάρτηση κατανομής διαθέτει βαριά ουρά, μακριά ουρά ή ονομάζεται υποεκθετική γράφουμε κατά αντιστοιχία $F\in H$, $F\in L$, $F\in S$. Επίσης να σημειώσουμε ότι ισχύει $F\in L \Rightarrow F\in H$ και $F\in S\Rightarrow F\in H$. Τα αντίστροφα των παραπάνω δεν ισχύουν.

Το 2006 οι Yin και Zhao χρησιμοποιώντας μια πρόταση που είχαν αποδείξει οι Cai και Tang διατύπωσαν το παρακάτω πολύ σημαντικό λήμμα.

***Λήμμα 2.1***

Θεωρούμε την μη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$Z(t)=g(t)+\varphi\int_0^t Z(t-x)dF(x) \qquad t\geq 0$$

Όπου το $F(t)$ αποτελεί μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής ορισμένη στο $[0,\infty)$ , η $g(t)$ μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη και αυτή στο $[0,\infty)$ και $0<\varphi<1$. Ας υποθέσουμε τώρα πως $\lim_{t\to\infty} g(t)=0$ και $W(t)=\left(\dfrac{g(0)-g(t)}{g(0)}\right)=1-\bar{W}(x)$ . Εάν οι $F$ , W είναι υποεκθετικές κατανομές δηλαδή $F\in S,\ \mathrm{W}\in \mathrm{S}$ και $Sup_{t\geq 0}\left\{\dfrac{\bar{F}(t)}{\bar{W}(t)}\right\}<\infty$ τότε:

$$Z(t)\sim\frac{g(t)}{1-\beta} \text{ δηλαδή ισχύει } \frac{Z(t)}{\dfrac{g(t)}{1-\beta}}\to 1 \text{ καθώς } t\to\infty .$$

Όπως στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου για ζημιές που ακολουθούν κατανομές με βαριά ουρά το αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ασυμπτωτικό δηλαδή ισχύει $\psi(u)\sim\dfrac{1}{\theta}\bar{F}_e(u)$ έτσι και για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας ισχύει κάτι αντίστοιχο.

***Θεώρημα 2.4***

Έστω $f(x)$η συνάρτηση πυκνότητας της συνάρτησης κατανομής $F(x)$και $r(x)=\dfrac{f(x)}{\bar{F}(x)}$. Έαν $r(x)\to 0$ καθώς $x\to\infty$ και $\bar{F}_e\in S$ τότε:

$$\psi_+(u)\sim\psi(u)$$

***Απόδειξη***

Για $w(x_1,x_2)=1$ και $a=0$ έχουμε ότι $\Phi_-(u)=\psi_-(u)$και $A(u)=\bar{F}\left(u+\dfrac{c}{\delta}\right)$. Με βάση τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την (2.6) παίρνουμε ότι

$$\frac{B(u)}{\bar{F}(u)}=\int_{-c/\delta}^{0}\psi_-(t)r(u-t)\frac{\bar{F}(u-t)}{\bar{F}(u)}dt+\frac{\bar{F}(u+c/\delta)}{\bar{F}(u)}. \qquad (2.10)$$

Να σημειώσουμε ότι $0<\psi_-(t)<1$και $0\leq\bar{F}(u-t)/\bar{F}(u)\leq 1$ για κάθε $-c/\delta<t<0$. Επειδή $r(x)\to 0$ για $x\to\infty$ παρατηρούμε ότι η $r(x)$είναι φραγμένη στο διάστημα $[x_0,\infty)$ με $x_0>0$. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι άλλο ένα αποτέλεσμα που απορρέει από ότι το $r(x) \to 0$ και $x \to \infty$ είναι ότι $F \in L$. Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω είναι ότι το πρώτο μέλος της (2.10) τείνει στο μηδέν και το δεύτερο μέλος τείνει στο ένα καθώς $u \to \infty$, άρα $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{B(u)}{\bar{F}(u)} = 1$ και

λόγω του ότι $z(x) = \frac{\lambda}{c} \int_x^\infty B(t)dt$ έχουμε ότι:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{z(u)}{\bar{F}_e(u)} = \frac{\lambda\mu}{c} \lim_{u\to\infty} \frac{B(u)}{\bar{F}(u)} = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Επομένως η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{H}(x)$ η οποία ορίζεται ως $\bar{H}(x) = \frac{z(x)}{z(0)} = 1 - H(x)$

ικανοποιεί την

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\bar{H}(u)}{\bar{F}_e(u)} = \frac{1}{(1+\theta)z(0)},$$

το οποίο βέβαια σημαίνει ότι η $H \in S$ επειδή $F_e \in S$ . Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι οι $\bar{H}(x)$ και $\bar{F}_e(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $(0,\infty)$ και ισχύει $\bar{H}(0) = \bar{F}_e(0) = 1$. Τελικά με βάση όλα τα παραπάνω που αναφέραμε και επειδή η $\psi_+(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση του Θεωρήματος 2.3 καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$\psi_+(u) \sim \frac{1+\theta}{\theta} z(u) \sim \frac{1}{\theta} \bar{F}_e(u)$$

■

Το βασικότερο που αξίζει να σημειώσουμε μετά την διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος, το οποίο είναι και φανερό, είναι ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας αλλά και η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας έχουν ακριβώς την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά, δηλαδή είναι ασυμπτωτικά ίσες, συνεπώς $\frac{\psi_+(u)}{\psi(u)} \to 1$ καθώς $u \to \infty$ άρα $\psi_+(u) \sim \psi(u)$. Η μόνη διαφορά στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας και της απόλυτης πιθανότητας χρεοκοπίας είναι μονάχα η πρόσθετη συνθήκη που πρέπει να τηρείται για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας δηλαδή, $r(x) \to 0$ καθώς $x \to \infty$. Το ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των δύο πιθανοτήτων χρεοκοπίας είναι ίση, είναι πολύ σημαντική, γιατί μπορούμε να βγάλουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα.

- Αν μία βαριά ζημία έχει μεγάλη σφοδρότητα (severity) τέτοια ώστε να επιφέρει την χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου, σημαίνει ότι μπορεί να επιφέρει και την απόλυτη χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου.
- Ζημιές με μεγάλη σφοδρότητα (severity) είναι τόσο επικίνδυνες με την έννοια ότι με την ίδια πιθανότητα που μπορούν να επιφέρουν την χρεοκοπία, μπορούν επίσης να επιφέρουν την απόλυτη χρεοκοπία.

Τι συμβαίνει όμως με την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας στην περίπτωση που οι ζημιές περιγράφονται από μία κατανομή με ελαφριά ουρά;

Είδαμε πως για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο εάν η κατανομή των ζημιών ακολουθούν μία κατανομή με ελαφριά ουρά, δηλαδή ισχύει $\int_0^\infty x e^{Rx} \overline{F}(x) dx < \infty$, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας περιγράφεται από το ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg $\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$ ισοδύναμα $\psi(u) \sim Ce^{-Ru}$ καθώς $u \to \infty$.

***Θεώρημα 2.5***

Υπο την υπόθεση ότι υπάρχει θετική σταθερά $k$ τέτοια ώστε να ισχύει $\int_0^\infty e^{kx} dF_e(x) = 1 + \theta$ και $\int_0^\infty e^{kx} d\overline{F}_e(x) < \infty$ για κάθε $k > 0$. Τότε ισχύει:

$$\frac{\psi_+(u)}{C\psi(u)} \to 1 \text{για } u \to \infty \text{ ,δηλαδή } \psi_+(u) \sim C\psi(u) \text{ για } 0 < C < 1.$$

Τελικά η ασυμπτωτική συμπεριφορά της απόλυτης χρεοκοπίας και της απλής χρεοκοπίας, ενώ για ζημιές των οποίων η κατανομή διαθέτει βαριά ουρά είναι ίδια, για ζημιές των οποίων η κατανομή διαθέτει ελαφριά ουρά διαφέρει.

## 2.8 Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε όλα τα παραπάνω όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δηλαδή όταν $F(y)=1-e^{\frac{y}{\mu}}$ με $y \geq 0$. Με βάση την παραπάνω υπόθεση η (3.4) μας δίνει

$$(\lambda+\alpha)\Phi_-(u)-(\delta u+c)\Phi'_-(u)-\lambda A(u)=\frac{\lambda}{\mu}e^{-\frac{u}{\mu}}\int_{-c/\delta}^{u}e^{\frac{x}{\mu}}\Phi_-(x)dx \qquad (2.11)$$

παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$(a_2u+b_2)\Phi''_-(u)+(a_1u+b_1)\Phi'_-(u)+b_0\Phi_-(u)=-\lambda\left(A'(u)+\frac{1}{\mu}A(u)\right) \qquad (2.12)$$

όπου $a_2=\delta,\ b_2=c,\ \alpha_1=\frac{\delta}{\mu},\ b_1=\frac{c}{\mu}+\delta-\lambda-\alpha,\ b_0=-\frac{a}{\mu}$.

Ας δούμε ένα σημαντικό θεώρημα το οποίο θα μας βοηθήσει να συνεχίσουμε.

***Θεώρημα 2.6***

Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ, δηλαδή $F(y)=1-e^{\frac{y}{\mu}}$, $y \geq 0$ και $E(y)=\mu$ και επίσης υποθέτουμε ότι $a=0$. Αν η $\mathrm{A}(x)=\int_{x+\frac{c}{\delta}}^{\infty}w(x,y-x)dF(y)$ ικανοποιεί την $\lim_{u\to -c/\delta}\int_{u}^{0}(c+\delta s)^{-(\lambda+a)/\delta-1}\mathrm{A}(s)ds=\infty$, τότε

$$\Phi_-(u)=C_1-\int_{u}^{0}e^{-x/\mu}(\delta x+c)^{-1+\lambda/\delta}\left[C_2+\int_{0}^{x}e^{y/\mu}(\delta y+c)^{1-\lambda/\delta}g(y)dy\right]dx, \qquad (2.13)$$

όπου

$$g(u)=-\frac{\lambda(\mu A'(u)+A(u))}{\mu(\delta u+c)}, \qquad (2.14)$$

και οι σταθερές $C_1$ και $C_2$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$C_1 = \frac{-\lambda\beta_3 P\left(-\frac{c}{\delta}\right) + \lambda\beta_2\left[Q\left(-\frac{c}{\delta}\right) + A\left(-\frac{c}{\delta}\right)\right]}{\lambda\beta_2 + (c-\lambda\beta_1)P\left(-\frac{c}{\delta}\right)}, \tag{2.15}$$

$$C_2 = \frac{-\lambda\beta_3 - (c-\lambda\beta_1)\left[Q\left(-\frac{c}{\delta}\right) + A\left(-\frac{c}{\delta}\right)\right]}{\lambda\beta_2 + (c-\lambda\beta_1)P\left(-\frac{c}{\delta}\right)}, \tag{2.16}$$

με

$$\beta_1 = \mu\left(1 - e^{-c/(\delta\mu)}\right),$$

$$\beta_2 = \mu\left[-P(-c/\delta)e^{-c/(\delta\mu)} + \frac{c^{\lambda/\delta}}{\lambda}\right],$$

$$\beta_3 = \int_{-c/\delta}^{0} e^{x/\mu}Q(x)\,dx - \int_0^{\infty} A(t)\,dt,$$

$$P(u) = \int_u^0 e^{x/\mu}(\delta x + c)^{-1+\lambda/\delta}dx,$$

$$Q(u) = \int_u^0 e^{-x/\mu}(\delta x + c)^{-1+\lambda/\delta}\left(\int_0^x e^{y/\mu}(\delta y + c)^{1-\lambda/\delta} g(y)dy\right)dx. \tag{2.17}$$

***Απόδειξη***

Θέτοντας στην (2.8) όπου $\alpha = 0$ έχουμε

$$(\delta u + c)\Phi''_-(u) + \left(\frac{\delta}{\mu}u + \frac{c}{\mu} + \delta - \lambda\right)\Phi'_-(u) = -\lambda\left(A'(u) + \frac{1}{\mu}A(u)\right)$$

οπότε

$$\Phi''_-(u) + \left(\frac{\delta u + c + \mu(\delta-\lambda)}{\mu(\delta u + c)}\right)\Phi'_-(u) = -\frac{\lambda\left(A'(u) + A(u)\right)}{\mu(\delta u + c)}.$$

Θέτοντας ως $f(u) = \left(\frac{\delta u + c + \mu(\delta-\lambda)}{\mu(\delta u + c)}\right)$ και $g(u) = -\frac{\lambda\left(A'(u) + A(u)\right)}{\mu(\delta u + c)}$,

παίρνουμε ότι

$$\Phi''_-(u) + f(u)\Phi'_-(u) = g(u). \qquad (2.18)$$

Η γενική λύση στην παραπάνω διαφορική εξίσωση δίνεται από την παρακάτω εξίσωση,

$$\Phi_-(u) = C_1 + \int e^{-\int f(u)du}\left(C_2 + \int e^{\int f(u)du} g(u)\,du\right)du = C_1 - C_2 P(u) - Q(u). \qquad (2.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις $\Phi_+(0) = \Phi_-(0-)$ και $\Phi_+(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty B(t)\,dt$ έχουμε ότι

$$\Phi_-(0-) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty B(t)\,dt,$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την (2.13) και την (2.14) παίρνουμε ότι και λαμβάνοντας υπόψη πως $P(0) = 0$ και $Q(0) = 0$,

$$\left(\frac{\lambda}{c}\right)\left(C_1\beta_1 - C_2\beta_2 - \beta_3\right) = C_1. \qquad (2.20)$$

Από τις $\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0 (c+\delta s)^{-(\lambda+a)/\delta-1} \mathrm{A}(s)\,ds = \infty$, $\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_-(u) = \frac{\lambda}{\lambda+a}A\left(-\frac{c}{\delta}\right)$ και $(2.19)$

προκύπτει πως $C_1 - C_2 P(-c/\delta) - Q(-c/\delta) = A(-c/\delta)$.

Τελικά λύνοντας το παραπάνω σύστημα καταλήγουμε στο ότι

$$C_1 = \frac{-\lambda\beta_3 P\left(-\frac{c}{\delta}\right) + \lambda\beta_2\left[Q\left(-\frac{c}{\delta}\right) + A\left(-\frac{c}{\delta}\right)\right]}{\lambda\beta_2 + (c-\lambda\beta_1)P\left(-\frac{c}{\delta}\right)},$$

και

$$C_2 = \frac{-\lambda\beta_3 - (c-\lambda\beta_1)\left[Q\left(-\frac{c}{\delta}\right) + A\left(-\frac{c}{\delta}\right)\right]}{\lambda\beta_2 + (c-\lambda\beta_1)P\left(-\frac{c}{\delta}\right)}.$$

■

Αφού διατυπώσαμε το παραπάνω θεώρημα ας δούμε πως μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ώστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, το έλλειμμα της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος και την χρονική στιγμή της απόλυτης χρεοκοπίας.

***Πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας***

Για $\alpha = 0$ και $w(x_1, x_2) = 1$ έχω ότι $A(u) = \int_{u+c/\delta}^{\infty} w(u, y-u) dF(y) = e^{-u/\mu} e^{-c/(\delta\mu)}$ συνεπώς για $u = -c/\delta$ έχουμε ότι $A(-c/\delta) = 1$. Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως για $w(x_1, x_2) = 1$ και $\alpha = 0$ ισχύει ότι $\Phi_+(u) = \psi_+(u)$ και $\Phi_-(u) = \psi_-(u)$. Με βάση το θεώρημα 3.4 η $g(u)$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο $g(u) = -\frac{\lambda(\mu A'(u) + A(u))}{\mu(\delta u + c)}$ αντικαθιστώντας την $A(u) = e^{-u/\mu} e^{-c/(\delta\mu)}$ και $A'(u) = -e^{-u/\mu} e^{-c/(\delta\mu)}$ έχουμε ότι $g(u) = 0$.

Συνεπώς $Q(0) = 0$ μιας και

$$Q(u) = \int_u^0 e^{-x/\mu} (\delta x + c)^{-1+\lambda/\delta} \left( \int_0^x e^{y/\mu} (\delta y + c)^{1-\lambda/\delta} g(y) dy \right) dx \ .$$

Επίσης έχουμε ότι $\beta_3 = -\mu e^{-c/(\delta\mu)}$. Με βάση τα παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$C_1 = \frac{c^{\lambda/\delta}}{c^{\lambda/\delta} + \lambda\theta P(-c/\delta)} \ ,$$

$$C_2 = \frac{-\lambda\theta}{c^{\lambda/\delta} + \lambda\theta P(-c/\delta)} \ .$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην $(2.13)$ παρατηρούμε ότι η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση,

$$\psi_-(u) = \frac{1 + (\lambda\theta/c) \int_u^0 e^{-x/\mu} (1 + \delta x/c)^{-1+\lambda/\delta} dx}{1 + (\lambda\theta/c) \int_{-c/\delta}^0 e^{-x/\mu} (1 + \delta x/c)^{-1+\lambda/\delta} dx}, \quad \text{με} \quad -c/\delta < u < 0 \ . \qquad (2.21)$$

Συνδυάζοντας την $(2.7)$ δηλαδή, $B(u)=\int_u^{u+c/\delta}\Phi_-(u-x)dF(x)+A(u)$ και την $\Phi_-(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty B(t)dt$ που αποδείξαμε στο θεωρήμα $(2.5)$ έχουμε ότι,

$$\int_x^\infty B(t)dt=\int_x^\infty\int_t^{t+c/\delta}\psi_-(t-y)\frac{1}{\mu}e^{-y/\mu}dydt+\int_x^\infty A(t)dt=\left(\int_0^\infty B(t)dt\right)e^{-x/\mu}=\frac{c}{\lambda}\psi_-(0-)\bar{F}_e(x),$$

όπου $\bar{F}_e(x)=e^{-x/\mu}, x\geq 0$ είναι η ουρά της εκθετικής κατανομής. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα και την $z(x)=\frac{\lambda}{c}\int_x^\infty B(t)dt$ καταλήγουμε στο ότι $z(x)$ ικανοποιεί την $z(x)=\psi_-(0-)\bar{F}_e(x)$. Η $(2.22)$ γίνεται:

$$\psi_-(0-)=\left(1+(\lambda\theta/c)\int_{-c/\delta}^{0}e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}dx\right)^{-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της $z(x)=\psi_-(0-)\bar{F}_e(x)$ με την ποσότητα $\frac{1}{1+\theta}G(x)$ και ολοκληρώνοντας την στο διάστημα $[0,u]$ έχουμε ότι

$$\frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u z(u-x)dG(x)=\psi_-(0-)\frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u\bar{F}_e(u-x)dG(x),$$

οπότε χρησιμοποιώντας την $\Phi_+(u)=\frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u z(u-x)dG(x)$ και την

$$\Phi_+(u)=\frac{1}{\theta}\int_0^u\bar{F}_e(u-x)dG(x),\ u\geq 0,$$

καταλήγουμε στο ότι

$$\psi_+(u)=\psi_-(0-)\frac{1+\theta}{\theta}\int_0^u\bar{F}_e(u-x)dG(x)=(1+\theta)\psi_-(0-)\Phi(u) \qquad (2.22)$$

Τελικά συνδυάζοντας την $(2.22)$ και $(2.23)$ καταλήγουμε στο η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\psi_{+}\left(u\right)=\frac{e^{-\frac{\lambda\theta}{c}u}}{1+\left(\lambda\theta/c\right)\int\limits_{-c/\delta}^{0}e^{-x/\mu}\left(1+\delta x/c\right)^{-1+\lambda/\delta}dx} \qquad (2.23)$$

Εδώ να θυμίσουμε απλά (για να υπάρχει μια σύγκριση) ότι στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όταν η $F$ είναι η συνάτηση κατανομής μιας εκθετικής κατανομής η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\Phi\left(u\right)=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\lambda\theta}{c}u} \quad ,u\geq 0$$

***Το έλλειμμα κατά την απόλυτη χρεοκοπία***

Κατά την απόλυτη χρεοκοπία, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$\Phi\left(u\right)=P\left(|U_{\delta}\left(\mathrm{T}_{\delta}\right)|\leq y,T_{\delta}<\infty/U_{\delta}\left(0\right)=u\right)=G\left(y,u\right) \quad ,y\geq c/\delta. \qquad (2.24)$$

Για $\alpha=0$ και $w\left(x_1,x_2\right)=1_{\{x_2\leq y\}}$ έχουμε ότι

$$A\left(u\right)=\int\limits_{u+c/\delta}^{\infty}w\left(u,y-u\right)dF\left(y\right)=e^{-u/\mu}\left(e^{-c/(\delta\mu)}-e^{-y/\mu}\right).$$

Άρα για $u=-c/\delta$ έπεται ότι $A\left(-c/\delta\right)=1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}$. Η $A\left(u\right)$ στην προκειμένη περίπτωση ικανοποιεί την οριακή εξίσωση $\lim\limits_{u\to -c/\delta}\int\limits_{u}^{0}\left(c+\delta s\right)^{-(\lambda+a)/\delta-1}\mathrm{A}\left(s\right)ds=\infty$ και επίσης παραγωγίζοντας την $A\left(u\right)$, αρχικά παρατηρούμε ότι $g\left(u\right)=0$ και στην συνέχεια ως αποτέλεσμα της προηγούμενης ότι

$$Q\left(u\right)=\int\limits_{u}^{0}e^{-x/\mu}\left(\delta x+c\right)^{-1+\lambda/\delta}\left(\int\limits_{0}^{x}e^{y/\mu}\left(\delta y+c\right)^{1-\lambda/\delta}g\left(y\right)dy\right)dx=0.$$

Δηλαδή $Q\left(u\right)=0$ και $\beta_3=-\mu e^{-c/(\delta\mu)}$. Με βάση όλα τα προηγούμενα υπολογίζουμε τις $C_1,C_2$ που δίνονται αντίστοιχα από τις $\left(2.15\right)$ και $\left(2.16\right)$ και βρίσκουμε στο ότι,

$$C_1 = \frac{c^{\lambda/\delta}\left(1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}\right)}{c^{\lambda/\delta}+\lambda\theta P(-c/\delta)} \ ,$$

$$C_2 = \frac{-\lambda\theta\left(1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}\right)}{c^{\lambda/\delta}+\lambda\theta P(-c/\delta)} \ .$$

Παρατηρώντας ότι οι $C_1$, $C_2$ που υπολογίσαμε για το έλλειμμα κατά την απόλυτη χρεοκοπία διαφέρουν από τις $C_1$, $C_2$ που υπολογίσαμε κατά την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας κατά τον παράγοντα $1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}$. Χρησιμοποιώντας την $(2.25)$ και το θεώρημα 3.4 λαμβάνουμε την παρακάτω εξίσωση,

$$\begin{aligned} G(y,u) &= \Phi_-(u) = \psi_-(u)\left(1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}\right) \\ &= \frac{1+(\lambda\theta/c)\int_u^0 e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx}{1+(\lambda\theta/c)\int_{-c/\delta}^0 e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx}\left(1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}\right). \qquad (2.25) \end{aligned}$$

Για $x \geq 0$ και $y \geq c/\delta$ ισχύει $z(x) = \Phi_-(0-)\bar{F}_e(x) = G(y,0-)\bar{F}_e(x)$. Ας δούμε πως προέκυψε η παραπάνω σχέση.

Χρησιμοποιώντας την $\Phi_-(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty B(t)dt$, την $z(x) = \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty B(t)dt$, το θεώρημα 2.2 την $(2.5)$ και την $(2.6)$, δηλαδή τις,

$$A(u) = \int_{u+c/\delta}^{\infty} w(u,x-u)dF(x) \ ,$$

$$B(u) = \int_{u}^{u+c/\delta} \Phi_-(u-x)dF(x) + A(u) \ ,$$

και γνωρίζοντας ότι $\bar{F}_e(x)=e^{-x/\mu}$ $, x\geq 0$ έχουμε,

$$\int_x^\infty B(t)dt=\int_x^\infty\int_t^{t+c/\delta}\Phi_-(t-y)\frac{1}{\mu}e^{-y/\mu}dydt+\int_x^\infty A(t)\,dt=\left(\int_0^\infty B(t)\,dt\right)e^{-x/\mu}=\frac{c}{\lambda}\,\Phi_-(0-)\bar{F}_e(x).$$

Άρα

$$z(x)=\Phi_-(0-)\bar{F}_e(x)=G(y,0-)\bar{F}_e(x).$$

Για $y\geq c/\delta$ και για $u=0$ από την $(2.26)$ παίρνουμε:

$$G(y,0-)=\frac{1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}}{1+(\lambda\theta/c)\displaystyle\int_{-c/\delta}^{0}e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx}.$$

Για $u\geq 0$ και $y\geq c/\delta$ και χρησιμοποιώντας την $\Phi_+(u)=\dfrac{1+\theta}{\theta}\displaystyle\int_0^u z(u\text{-}x)dG(x)$ και την $\Phi_+(u)=\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^u\bar{F}_e(u\text{-}x)dG(x)$ καταλήγουμε στο ότι η $G(y,u)$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\begin{aligned}G(y,u)&=G(y,0-)\frac{1}{1+\theta}\int_0^u\bar{F}_e(u-x)dG(x)=(1+\theta)G(y,0-)\Phi(u)\\&=\frac{\left(1-e^{c/(\delta\mu)}e^{-y/\mu}\right)e^{(-\lambda\theta/c)u}}{1+(\lambda\theta/c)\displaystyle\int_{-c/\delta}^{0}e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx}.\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι συμβαίνει η απόλυτη χρεοκοπία και ότι $u\geq 0$ και $y\geq c/\delta$ , η κατανομή του ελλείμματος κατά την απόλυτη χρεοκοπία δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$P\left(\left|U_\delta\left(T_\delta\right)\right| \le y \mid T_\delta < \infty\right) = \frac{G\left(y,u\right)}{\psi_+\left(u\right)} = \left(1 - e^{c/(\delta\mu)} e^{-y/\mu}\right)$$

Το αναμενόμενο έλλειμμα κατά την απόλυτη χρεοκοπία όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και ισχύει ότι $u \ge 0$ και $y \ge c/\delta$ , όπως συμβαίνει στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι,

$$\mathrm{E}\left(\left|U_\delta\left(T_\delta\right)\right| \mid T_\delta < \infty\right) = \mathrm{E}\left(\left|U\left(T\right)\right| \mid T < \infty\right) + \frac{c}{\delta},$$

και αυτό συμβαίνει για τον λόγο ότι,

$$\mathrm{E}\left(\left|U_\delta\left(T_\delta\right)\right| \mid T_\delta < \infty\right) = \frac{1}{\mu} \int_{c/\delta}^{\infty} y e^{c/(\delta\mu)} e^{-y/\mu} dy = \mu + \frac{c}{\delta},$$

### *Μετασχηματισμός Laplace για τον χρόνο κατά την απόλυτη χρεοκοπία*

Για να μπορέσουμε να δούμε τι συμβαίνει με τον χρόνο κατά την απόλυτη χρεοκοπία χρειάζεται να βρεθεί η λύση της $(2.12)$ για $a > 0$,κάτι το οποίο είναι αρκετά περίπλοκο. Για τον λόγο αυτό θα βρούμε μια αναλυτική έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace για τον χρόνο κατά την απόλυτη χρεοκοπία.

Για $a > 0$ και $w\left(x_1, x_2\right) = 1$ όπως στο κλασικό μοντέλο έχουμε

$$\Phi(u) = E\left[e^{-\delta t} I(T < \infty) | U(0) = u\right] = \bar{K}_\delta(u).$$

Εδώ ισχύει

$$\Phi(u) = E\left[e^{-\delta t} I\left(T_\delta < \infty\right) | U\left(0\right) = u\right]$$

ή γράφοντας την προηγούμενη εξίσωση πιο άπλα

$$\Phi\left(u\right) = E\left(e^{-aT_\delta} 1_{\{T_\delta < \infty\}}\right),$$

που δεν είναι τίποτα παραπάνω από τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου της απόλυτης χρεοκοπίας. Όταν τώρα $w\left(x_1, x_2\right) = 1$ όπως στην περίπτωση μας ισχύουν και τα παρακάτω,

$$A\left(u\right) = \int_{u+c/\delta}^{\infty} w\left(u, y-u\right) dF\left(y\right) = e^{-u/\mu} e^{-c/(\delta\mu)},$$

$$A\left(-c/\delta\right)=1.$$

Είναι φανερό τώρα πως η $A(u)$ ικανοποιεί την $\lim_{u\to -c/\delta}\int_u^0 \left(c+\delta s\right)^{-(\lambda+a)/\delta-1} \mathrm{A}(s)ds=\infty,$

Συνεπώς, είναι

$$\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_-\left(u\right)=\frac{\lambda}{\lambda+a}A\left(-\frac{c}{\delta}\right)=\frac{\lambda}{\lambda+a}. \qquad (2.26)$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της $A(u)$ έχουμε ότι $A'(u)=-e^{-u/\mu}e^{-c/(\delta\mu)}$, οπότε ισχύει ότι

$$A'(u)+\frac{1}{\mu}A(u)=0\,.$$

Θέτοντας στην $(2.12)$ όπου

$$\Phi_-\left(u\right)=y\left(x\right)$$

και $x=\dfrac{\dfrac{u+b_2}{a_2}}{\dfrac{-a_2}{a_1}}=-\mu\left(\dfrac{u+c}{\delta}\right)$ για $-c/\delta<u<0,$

η $(2.12)$ απλοποιείται στην παρακάτω μορφή,

$$xy''_{xx}+\left(b-x\right)y'_x-ay=0 \quad \text{για} \;\; x<0, \qquad (2.27)$$

όπου

$$b=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a^2{}_2}=1-\frac{\lambda+a}{\delta} \qquad \text{και} \quad a=\frac{b_0}{a_1}=-\frac{a}{\delta}.$$

Με βάση τις εξισώσεις $(13.1.15)$ και $(13.1.18)$ των Abramowitz και Stegun (1972) έχουμε ότι η γενική λύση της $(2.27)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός δύο ανεξάρτητων λύσεων, δηλαδή ισχύει ότι

$$y\left(x\right)=c_1e^xU\left(b-a,b;-x\right)+c_2\left(-x\right)^{1-b}e^xM\left(1-a,2-b;-x\right),\qquad x<0\quad\left(2.28\right)$$

Όπου οι $U\left(b-a,b;-x\right)$ και $M\left(1-a,2-b;-x\right)$ ονομάζονται συρρέουσες υπεργεωμετρικές εξισώσεις ή εξισώσεις Kummer και $c_1,c_2$ είναι δύο αυθαίρετες σταθερές. Η $\left(2.28\right)$ τελικά γράφεται:

$$\Phi_-\left(u\right)=y\left(-\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right)=c_1h_1\left(u\right)+c_2h_2\left(u\right),\qquad -c/\delta<u<0,\quad\left(2.29\right)$$

όπου

$$h_1\left(u\right)=e^{-\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}U\left(b-a,b;\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right)$$

και

$$h_2\left(u\right)=\left(\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right)^{1-b}e^{-\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)}M\left(1-a,2-b;\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right).$$

Όπως η $\Phi_-\left(u\right)$ ικανοποιεί την

$$\left(a_2u+b_2\right)\Phi_-''\left(u\right)+\left(a_1u+b_1\right)\Phi_-'\left(u\right)+b_0\Phi_-\left(u\right)=-\lambda\left(A'\left(u\right)+\frac{1}{\mu}A\left(u\right)\right)$$

έτσι και η $\Phi_+\left(u\right)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$c\Phi_+''\left(u\right)+\left(\frac{c}{\mu}-\lambda-a\right)\Phi_+'\left(u\right)-\frac{a}{\mu}\Phi_+\left(u\right)=-\lambda\left(B'\left(u\right)+\frac{1}{\mu}B\left(u\right)\right).\qquad\left(2.30\right)$$

Δοθέντος ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή έχουμε, ότι

$$B'\left(u\right)+\frac{1}{\mu}B\left(u\right)=A'\left(u\right)+\frac{1}{\mu}A\left(u\right)=0,$$

οπότε η $\left(2.30\right)$ γίνεται:

$$\Phi_+''\left(u\right)+p\Phi_+'\left(u\right)+q\Phi_+\left(u\right)=0,\qquad u\geq 0\qquad\left(2.31\right)$$

όπου

$$p=\frac{1}{\mu}-\frac{\lambda+a}{c} \quad \text{και} \quad q=-\frac{a}{\mu c}.$$

Επειδή $p^2-4q>0$ η γενική λύση της $(2.30)$ είναι:

$$\Phi_+(u)=d_1 e^{\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}-p}{2}u\right)}+d_2 e^{\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}+p}{2}u\right)}, \qquad u\geq 0$$

Επείδη όμως ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty}\Phi_+(u)=0$ έχουμε ότι $d_1=0$ άρα οδηγούμαστε στο ότι:

$$\Phi_+(u)=d_2 e^{\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}+p}{2}u\right)}, \qquad u\geq 0$$

Έχουμε φτάσει στο σημείο που έχουμε καταφέρει να βρούμε δύο εκφράσεις για τις $\Phi_+(u)$, $\Phi_-(u)$ αλλά χρειάζεται να καθορίσουμε τις σταθερές $c_1$, $c_2$, $d_2$. Με βάση τις εξισώσεις $(13.5.10)$ και $(13.5.12)$ των Abramowitz και Stegun (1972) και γνωρίζοντας ότι $b\neq 0$ έχουμε ότι $\lim_{u\to -c/\delta} h_1(u)=\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-a)}$, όπου $\Gamma(.)$ είναι η κατανομή γάμμα. Χρησιμοποιώντας τις $\Phi_+(0)=\Phi_-(0-)$, $\Phi_+'(0)=\Phi_-'(0-)$, $\lim_{u\to -c/\delta}\Phi_-(u)=\frac{\lambda}{\lambda+a}$ και γνωρίζοντας ότι $\lim_{u\to -c/\delta} h_2(-c/\delta)=0$ παίρνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned}
&c_1 h_1(0)+c_2 h_2(0)=d_2,\\
&c_1 h_1'(0)+c_2 h_2'(0)=-\frac{d_2}{2}\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right),\\
&c_1\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{\lambda}{\lambda+a}.
\end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα παίρνουμε τις εξής τιμές για τις $c_1$, $c_2$, $d_2$:

$$c_1=\frac{\lambda\Gamma(1-a)}{(\lambda+a)\Gamma(1-b)} \tag{2.32}$$

$$c_2 = \frac{-\lambda\Gamma(1-\alpha)\left(h_1'(0)+\left(\left(p+\sqrt{p^2-4q}/2\right)h_1(0)\right)\right)}{(\lambda+\alpha)\Gamma(1-b)\left(h_2'(0)+\left(\left(p++\sqrt{p^2-4q}/2\right)h_2(0)\right)\right)}, \qquad (2.33)$$

$$c_3 = \frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)\left(h_1(0)h_2'(0)-h_1'(0)h_2(0)\right)}{(\lambda+\alpha)\Gamma(1-b)\left(h_2'(0)+\left(\left(p++\sqrt{p^2-4q}/2\right)h_2(0)\right)\right)}. \qquad (2.34)$$

Παραγωγίζοντας τις $M(a,b;x)$, $U(a,b;x)$ έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dx}M(a,b;x) = \frac{a}{b}M(a+1,b+1;x) \text{ και } \frac{d}{dx}U(a,b;x) = -aU(a+1,b+1;x).$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω παραγώγους καταλήγουμε στις παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις για τις $h_1(0), h_2(0), h_1'(0), h_2'(0)$,

$$h_1(0) = e^{-\frac{\mu c}{\delta}}U\left(b-a,b;\frac{\mu c}{\delta}\right), \qquad (2.35)$$

$$h_1'(0) = -\mu e^{-\mu c/\delta}\left[U\left(b-a,b;\frac{\mu c}{\delta}\right)+(b-a)U\left(b-a+1,b+1;\frac{\mu c}{\delta}\right)\right], \qquad (2.36)$$

$$h_2(0) = \left(\frac{\mu c}{\delta}\right)^{1-b}e^{-\mu c/\delta}M\left(1-a,2-b;\frac{\mu c}{\delta}\right), \qquad (2.37)$$

$$h_2'(0) = \mu\left(\frac{\mu c}{\delta}\right)^{1-b}e^{-\mu c/\delta}\left[\left((1-b)\left(\frac{\mu c}{\delta}\right)^{-1}-1\right)M\left(1-a,2-b;\frac{\mu c}{\delta}\right)+\frac{1-a}{1-b}M\left(2-a,3-b;\frac{\mu c}{\delta}\right)\right]. \qquad (2.38)$$

Τελικά συνοψίζοντας, ο αναλυτικός τύπος για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου κατά την απόλυτη χρεοκοπία είναι,

$$\Phi_+(u) = d_2 e^{\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}+p}{2}u\right)}, \qquad u \geq 0$$

$$\Phi_-(u) = y\left(-\mu\left(u+\frac{c}{\delta}\right)\right) = c_1h_1(u)+c_2h_2(u), \qquad -c/\delta < u < 0.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

Η εξέλιξη της θεωρίας χρεοκοπίας μέσα στον χρόνο έχει αναβιώσει ένα ενδιαφέρον για τα μερίσματα που μπορεί να δίνονται καθώς παρακολουθείτε το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Η στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος εισήχθη για πρώτη φορά το 1957 από τον Ιταλό στατιστικός και αναλογιστή Bruno De Finetti, ο οποίος έφερε στο επίκεντρο την διερεύνηση των μερισμάτων που πληρώνονται στους μετόχους μιας ασφαλιστικής, μέχρι την στιγμή της χρεοκοπίας. Στη συνέχεια ακολούθησαν πολλές μελέτες σχετικές με περισσότερο γενικευμένες μερισματικές στρατηγικές, όπως των Albrecher (2005), Albrecher και Kainhofer (2002), Buhlmann (1970), Dickson και Waters (2004), Gerber (1972, 1973, 1979, 1981), Gerber και Shiu (1998, 2005), Hojgaard (2002), Lin (2003), Paulsen και Gjessing (1997), και Segerdahl (1970).

Δύο στρατηγικές μερισμάτων παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Η πρώτη ονομάζεται στρατηγική σταθερού μερίσματος, κατά την οποία δεν πληρώνεται καθόλου μέρισμα όσο το πλεόνασμα βρίσκεται κάτω από ένα σταθερό όριο και όταν το πλεόνασμα βρίσκεται πάνω από το σταθερό όριο πληρώνεται σαν μέρισμα ολόκληρο το απόθεμα που βρίσκεται πάνω από αυτό. Η δεύτερη, ονομάζεται στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, κατά την οποία δεν πληρώνεται καθόλου μέρισμα όσο το πλεόνασμα βρίσκεται κάτω από ένα σταθερό όριο, και πληρώνεται ένα ποσοστό μικρότερο από την ένταση του ασφαλίστρου $c$, όταν το πλεόνασμα βρίσκεται πάνω από το σταθερό όριο.

Ας περιγράψουμε πως λειτουργεί η διανομή μερισμάτων στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου. Ο ασφαλιστής έχει την υποχρέωση να πληρώσει ένα σταθερόποσοστό $a$ μερισμάτων , όταν το πλεόνασμα υπερβαίνει ένα επίπεδο $b$ , αυτό το επίπεδο $b$ στην κοινή βιβλιογραφία είναι γνωστό ως κατώφλι. Ως εκ τούτου, όταν το πλεόνασμα τρέχει κάτω από το όριο μερίσματος, η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στην κλασική περίπτωση, όπου η αύξηση του πλεονάσματος οδηγείται από το σταθερό ρυθμό $c$ των ασφαλίστρων και η μείωση οφείλεται στις ζημίες που καλείται να καλύψει ο ασφαλιστής. Στην περίπτωση που το πλεόνασμα φτάσει το κατώφλι , η αύξηση του πλεονάσματος μειώνεται σε $c-a$ ως αποτέλεσμα της διανομής μερισμάτων στους μετόχους.

Πριν μπούμε στην διαδικασία να δούμε την ακριβή λειτουργία της στρατηγικής σταθερού μερίσματος, πάμε να δούμε πως μετασχηματίζονται εδώ, όλες εκείνες οι ποσότητες που είδαμε στο κεφάλαιο 2 για το κλασικό μοντέλο.

## 3.1 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

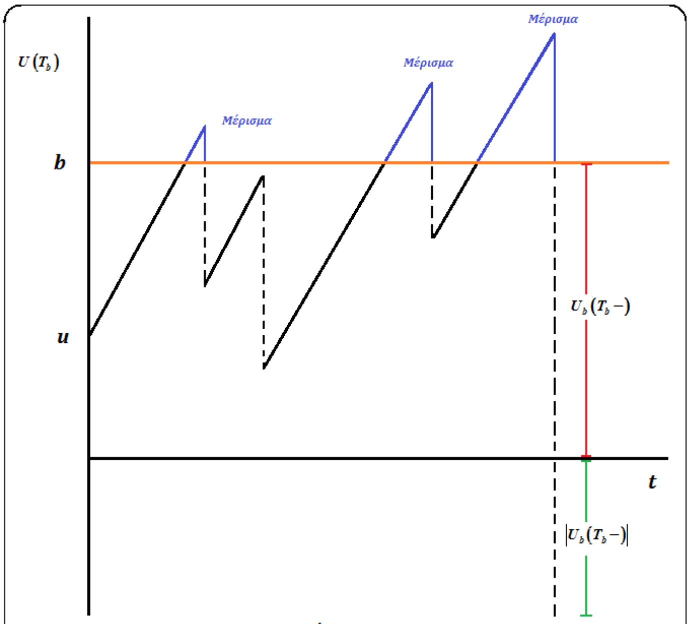
***Ορισμός 3.1***

Έστω $U_b(t)$η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος με αρχικό πλεόνασμα $U_b(0)=u$. Δεδομένου ότι υπάρχει μια στρατηγική σταθερού μερίσματος η στοχαστική ανέλιξη έχει την παρακάτω μορφή:

$$U_b(t)=\begin{cases} u+ct-S(t), & U_b(t)<b \\ u-S(t), & U_b(t)=b \end{cases} .$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω έχουμε ότι η δυναμική της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος δίνεται από την παρακάτω δίκλαδη μορφή:

$$dU_b(t)=\begin{cases} cdt-dS(t), & U_b(t)<b \\ -dS(t), & U_b(t)=b \end{cases}$$



Σχήμα 4

Είναι φανερό πως για $b=\infty$ έχουμε το κλασικό μοντέλο που είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο.

## 3.2 Χρόνος χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

***Ορισμός 3.2***

Έστω $T_b(u)$ ο χρόνος χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, δηλαδή είναι ο χρόνος έως ότου το πλεόνασμα βρεθεί κάτω από το μηδέν, δηλαδή

$$T_b(u)=\inf\{t:U_b(t)<0\}.$$

Ας δούμε όμως σχηματικά την στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος υπό την στρατηγική σταθερού μερίσματος.

## 3.3 Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

***Ορισμός 3.3***

Η πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος ορίζεται ως εξής,

$$\psi_b(u)=\Pr(T_b<\infty)=\Pr\big(U_b(t)<0\big), \qquad u\le b$$

Ποια σχέση συνδέει την $\psi_b(u)$ με την $\psi(u)$;

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας πριν την διέλευση από το b και την πιθανότητα μετά την διέλευση από το b. Άρα ισχύει ότι:

$$\psi(u)=\psi_b(u)+\big(1-\psi_b(u)\big)\psi(b)$$

η οποία μας δίνει

$$\psi_b(u)=\frac{\psi(u)-\psi(b)}{1-\psi(b)}. \qquad b>u\geq 0$$

## 3.4 Συνάρτηση των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu υπο την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος με αρχικό απόθεμα $u\leq b$ και ένταση ανατοκισμού $\delta\geq 0$ είναι:

$$\Phi_b(u)=E\left[e^{-\delta T_b}w\Big(U_b\left(T_b^-\right),|U_b\left(T_b\right)|\Big)I\left(T_b<\infty\right)|U_b\left(0\right)=u\right],\ u\geq 0$$

όπου $w(x,y)$ για $x,y\geq 0$ μια μη αρνητική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}$ και $I\left(T_b<\infty\right)$ μια δείκτρια συνάρτηση με τιμές $I\left(T_b<\infty\right)=1$ για $T_b<\infty$ και $I\left(T_b<\infty\right)=0$ διαφορετικά.

Ας δούμε όμως κάποιες ειδικές περιπτώσεις:

- Για $\delta>0$ και $W(x,y)=1$ παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$\Phi_{T_b}(u,b)=E\left(e^{-\delta T_b}\ |\left(T_b<\infty\right)|U_b\left(0\right)=u\right)$$

- Για $\delta=0$ και $W(x,y)=1$ παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\Phi_{T_b}(u,b)=E\left[I\left(T_b<\infty\right)|U_b\left(0\right)=u\right]$$

- Για $\delta>0$ και $W(x,y)=I\left(x\leq x_1\right)I\left(y\leq x_2\right)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία.

$$\Phi_{T_b}(u,b)=E\left(e^{-\delta T_b}/\left(U_b\left(T_b-\right)\leq x_1\right)/\left(\left|U_b\left(T_b\right)\right|\leq x_2\right)/\left(T_b<\infty\right)/U_b\left(0\right)=u\right)=F\left(x,y/u\right)$$

- Για $\delta > 0$ και $W(x,y) = I(x = x_1)I(y = x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία.

$$\Phi_{T_b}(u,b) = E\left(e^{-\delta T_b} / \left(U_b(T_b -) = x_1\right) / \left(\left|U_b(T_b)\right| = x_2\right) / \left(T_b < \infty\right) / U_b(0) = u\right) = f(x, y/u)$$

Η παραπάνω συνάρτηση μας δίνει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα $u$ και το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία να είναι το πολύ $x_1$ και το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας το πολύ $x_2$.

- Για $\delta > 0$ και $W(x,y) = I(x \le x_1)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος $U_b(T_b -)$ πριν την χρεοκοπία.

$$\Phi_{T_b}(u,b) = E\left(e^{-\delta T_b} / \left(U_b(T_b -) \le x_1\right) / \left(T_b < \infty\right) / U_b(0) = u\right) = F(x/u)$$

- Για $\delta > 0$ και $W(x,y) = I(x = x_1)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος $U_b(T_b -)$ πριν την χρεοκοπία.

$$\Phi_{T_b}(u,b) = E\left(e^{-\delta T_b} / \left(U_b(T_b -) = x_1\right) / \left(T_b < \infty\right) / U_b(0) = u\right) = f(x/u)$$

- Για $\delta > 0$ και $W(x,y) = I(y \le x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $\left|U_b(T_b)\right|$ πριν την χρεοκοπία.

$$\Phi_{T_b}(u,b) = E\left(e^{-\delta T_b} / \left(\left|U_b(T_b)\right| \le x_2\right) / \left(T_b < \infty\right) / U_b(0) = u\right) = F(y/u)$$

- Για $\delta > 0$ και $W(x,y) = I(y = x_2)$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $\left|U_b(T_b)\right|$ πριν την χρεοκοπία.

## 3.5 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την Φb(u)

***Θεώρημα 3.1***

Η αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής ικανοποιεί την παρακάτω δίκλαδη συνάρτηση ανάλογα με το αν το αρχικό απόθεμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το κατώφλι.

$$\Phi_b'(u)=\begin{cases} \Phi_{b,1}'(u)=\dfrac{\lambda+\delta}{c}\Phi_{b,1}(u)-\dfrac{\lambda}{c}\displaystyle\int_0^u\Phi_{b,1}(u-y)dF(y)-\dfrac{\lambda}{c}\zeta(u), & 0\le u\le b \\ \Phi_{b,2}'(u)=\dfrac{\lambda+\delta}{c}\Phi_{b,2}(u)-\dfrac{\lambda}{c}\left[\displaystyle\int_0^{u-b}\Phi_{b,2}(u-y)dF(y)+\int_{u-b}^{u}\Phi_{b,1}(u-y)dF(y)-\dfrac{\lambda}{c}\zeta(u)\right], & u>b \end{cases}$$

με οριακή συνθήκη $\left.\dfrac{d}{du}\Phi_b(u)\right|_{u=b}=0$ και $\zeta(u)=\int_u^{\infty}w(u,y-u)dF(y)$.

Παρατηρούμε δύο ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής: μία για αρχικό πλεόνασμα κάτω από το κατώφλι και το άλλο για αρχικό πλεόνασμα πάνω από το κατώφλι. Όπως βλέπουμε , η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής με αρχικό πλεόνασμα πάνω από το κατώφλι εξαρτάται από την αντίστοιχη συνάρτηση με το αρχικό πλεόνασμα κάτω από το κατώφλι . Η αντίστροφη σχέση όμως , δεν ισχύει.

## 3.6 Παρούσα αξία μερισμάτων

Ας υποθέσουμε ότι οι μέτοχοι παρέχουν το αρχικό πλεόνασμα u και είναι υπεύθυνοι ώστε να καλύψουν το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία. Έχει μεγάλο ενδιαφέρον να δούμε με ποια κριτήρια επιλέγεται το κατώφλι $b$. Η τιμή του κατωφλίου $b$ γίνεται με βάση την μεγιστοποίηση της αναμενόμενης παρούσας αξίας των καθαρών εσόδων για τους μετόχους. Ορίζουμε ως $\mathrm{V}(u,b)$ την παρούσα αξία με βάση ένταση ανατοκισμού $\delta$ των μερισμάτων έως την χρεοκοπία, συμβολίζουμε με $\Upsilon_{u,b}$ το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία και $T_{u,b}$ ο χρόνος κατά τον οποίο συμβαίνει η χρεοκοπία. Άρα η ποσότητα

$E\left[\Upsilon_{u,b}e^{-\delta T_{u,b}}\right]-u$ μας δίνει την αναμενόμενη παρούσα αξία του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία. Με βάση αυτά που αναφέραμε παραπάνω σκοπός μας είναι να βρούμε εκείνο το $b$ το οποίο θα μεγιστοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$V(u,b)-E\left[\Upsilon_{u,b}e^{-\delta T_{u,b}}\right]-u, \qquad (3.1)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί και ως

$$V(u,b)-E\left[\left|U\left(T_{u,b}\right)\right|e^{-\delta T_{u,b}}\right]-u. \qquad (3.2)$$

Από το ασφάλιστρο $c$ που εισπράττει η εταιρία στη μονάδα του χρόνου, ένα μέρος αυτού ίσο με $d$, πληρώνεται σαν μέρισμα όταν το πλεόνασμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το κατώφλι $b$. Έτσι σε αντιστοιχία με το κλασικό μοντέλο η χρεοκοπία δεν είναι βέβαιη με την προϋπόθεση ότι $c-d>\lambda\mu_1$.

***Θεώρημα 3.2***

Η συνάρτηση $V(u,b)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση:

$$V'(u,b)=\frac{\lambda+\delta}{c}V(u,b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)V(u-x,b)\,dxdt, \qquad (3.3)$$

με οριακή συνθήκη

$$V'(u,b)\Big|_{u=b}=1.$$

***Απόδειξη***

Για $u<b$ και δεδομένου πως δεν συμβαίνει καμία ζημιά πριν τον χρόνο $\tau=(b-u)/c$ το πλεόνασμα φτάνει την τιμή $b$ στον χρόνο $\tau$.

Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο και το μέγεθος της πρώτης ζημιάς και για $0<u<b$ έχω:

$$V(u,b)=e^{-(\lambda+\delta)\tau}V(b,b)+\int_0^{\tau}\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^{u+ct} f(x)V(u+ct-x,b)\,dxdt,$$

παραγωγίζοντας την παραπάνω ως προς $u$

$$\frac{d}{du}V(u,b)=\frac{\lambda+\delta}{c}V(u,b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)V(u-x,b)dxdt. \tag{3.4}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο λαμβάνοντας υπόψη μας τις πληρωμές μερισμάτων πριν και μετά την πρώτη ζημιά έχουμε:

$$V(b,b)=\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}c\bar{s}_{\overline{t}|}dt+\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^b f(x)V(b-x,b)dxdt, \tag{3.5}$$

όπου $\bar{s}_{\overline{t}|}=\left(e^{\delta t}-1\right)/\delta$ είναι οι συσσωρευμένες πληρωμές (τελική αξία) στον χρόνο $t$ στην μονάδα του χρόνου. Ολοκληρώνοντας την $(3.5)$ παίρνουμε

$$V(b,b)=\frac{c}{\lambda+\delta}+\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b f(x)V(b-x,b)dxdt, \tag{3.6}$$

και πολλαπλασιάζοντας την $(3.4)$ με $\frac{c}{\lambda+\delta}$

$$\frac{c}{\lambda+\delta}\lim_{u\to b}\frac{d}{du}V(u,b)=V(b,b)-\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b f(x)V(b-x,b)dxdt.$$

Χρησιμοποιώντας την $(3.5)$ έχουμε την παρακάτω οριακή συνθήκη

$$\lim_{u\to b}\frac{d}{du}V(u,b)=1.$$

■

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με μία στρατηγική σταθερού μερίσματος. Όπως και στο κεφάλαιο 3, εάν το πλεόνασμα βρίσκεται κάτω από το μηδενικό επίπεδο τότε ο ασφαλιστής θα μπορεί να δανειστεί με ένα χρεωστικό επιτόκιο ώστε να μπορεί να συνεχιστεί η λειτουργία του χαρτοφυλακίου πληρώνοντας το δάνειο με την είσπραξη των μελλοντικών ασφαλίστρων. Εάν όμως το πλεόνασμα βρίσκεται πάνω από ένα όριο, τότε ο ασφαλιστής θα πληρώνει μέρισμα στους μετόχους. Επίσης θα δούμε την κατανομή του ελλείμματος κατά την απόλυτη χρεοκοπία και την πιθανότητα επιστροφής του αρνητικού πλεονάσματος σε μηδενικό επίπεδο.

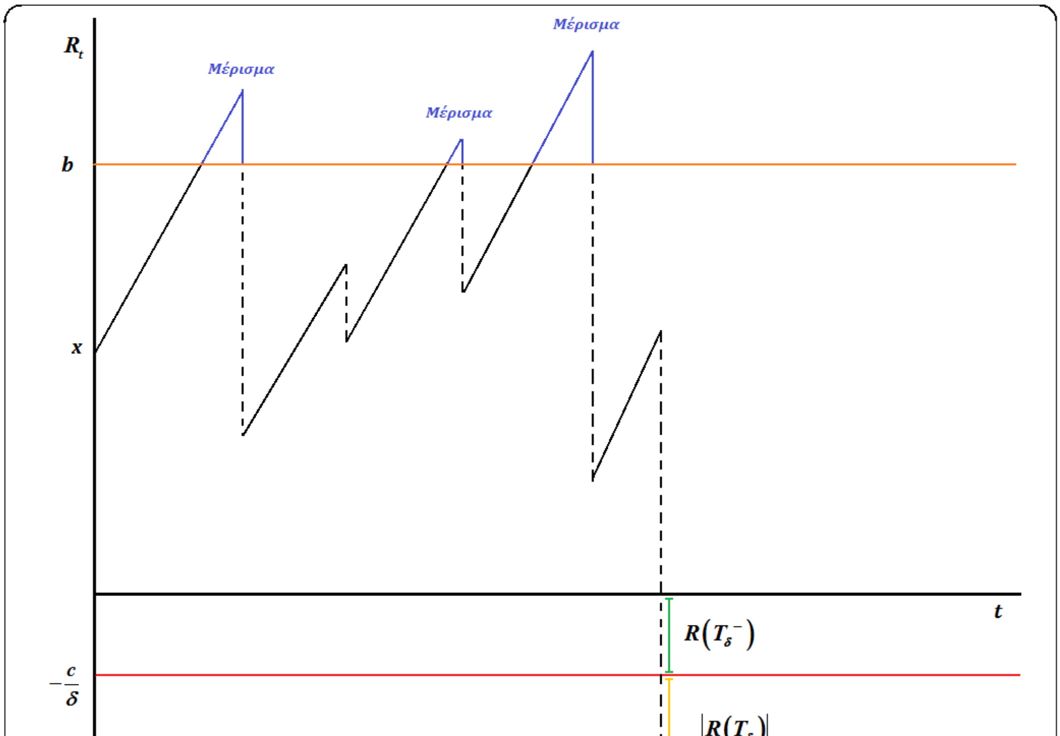
## 4.1 Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος υπό το πρίσμα της απόλυτης χρεοκοπίας και μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Έστω $\{Y_i : \mathrm{i} \geq 1\}$ ανεξάρτητη και ισόνομη θετική τυχαία μεταβλητή η οποία μας δίνει το ύψος της ζημιάς i, με $F(y)$, $y \geq 0$ και $f(y), y \geq 0$ να είναι αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y_i$. Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια το πλήθος των ζημιών στο $[0,t]$ δίνεται από την $N(t)$ η οποία είναι μια Poisson με παράμετρο $\lambda$. Άρα οι συνολικές απαιτήσεις στο διάστημα $[0,t]$ δίνονται από την σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, όπου $S(t)=0$ όταν $N(t)=0$. Συμβολίζουμε με $b$, $b>0$ το σταθερό όριο για το μέρισμα ή αλλιώς κατώφλι, με $\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$ την σταθερή ένταση ανατοκισμού και με $\delta$, $\delta > \varepsilon$ το χρεωστικό επιτόκιο. Στο συγκεκριμένο μοντέλο η ένταση ασφαλίστρου θα συμβολίζεται όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια με $c$ όπου $c>0$ αλλά το πλεόνασμα την χρονική στιγμή

$t$ συμβολίζεται με $R_t$ . Όπως ειπώθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου όταν το πλεόνασμα $R_t$ βρίσκεται κάτω από το μηδέν ο ασφαλιστής μπορεί να δανειστεί με ένα επιτόκιο $e^{\delta}-1$ ώστε να μπορέσει να συνεχίσει την λειτουργία του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου. Εάν όμως το πλεόνασμα $R_t$ βρίσκεται κάτω από την τιμή $-c/\delta$ δεν μπορεί να ανταπεξέλθει στα χρέη του και σταματάει την λειτουργία του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$dR_t=\begin{cases}-dS_t, & R_t=b\\ cdt+\varepsilon R_t dt-dS_t, & 0\le R_t<b\\ cdt+\delta R_t dt-dS_t, & -c/\delta<R_t<0\end{cases} \tag{4.1}$$




Σχήμα 5

Έαν στην παραπάνω εξίσωση θέσουμε όπου $U(t)=R(t)+\frac{c}{\delta}$ έχουμε την παρακάτω εξίσωση που περιγράφει την στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος

$$U(t)=\begin{cases} -S(t), & U(t)=b+\dfrac{c}{\delta} \\ c+\varepsilon U(t)-\varepsilon\dfrac{c}{\delta}-S(t), & \dfrac{c}{\delta}\le U(t)<b+\dfrac{c}{\delta} \\ \delta U(t)-S(t), & 0<U(t)<\dfrac{c}{\delta} \end{cases}. \tag{4.2}$$

Η χρονική στιγμή  κατά την οποία η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος παίρνει για πρώτη φορά τιμή μικρότερη του μηδενός ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται ως εξής:

$$T=\begin{cases} \inf\{t\ge 0: R(t)<0\} \\ \infty, R(t)>0 \forall t\ge 0 \end{cases},$$

όπως ακριβώς και στα προηγούμενα κεφάλαιο ο χρόνος της απόλυτης χρεοκοπίας ορίζεται:

$$T_\delta=\begin{cases} \inf\left\{t\ge 0: R(t)<-\dfrac{c}{\delta}\right\} \\ \infty, R(t)>-\dfrac{c}{\delta}\forall t\ge 0 \end{cases}.$$

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι ακριβώς και στον τρόπο που ορίσαμε την στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος, δηλαδή ότι $U(t)=R(t)+\dfrac{c}{\delta}$ έχουμε τελικά ότι ο χρόνος χρεοκοπίας  ορίζεται όπως παρακάτω:

$$\tilde{T}=\begin{cases} \inf\{t\ge 0: U(t)\le 0\} \\ \infty, U_\delta(t)>0 \forall t\ge 0 \end{cases}.$$

Εξ’ ορισμού ο χρόνος χρεοκοπίας μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος, στην δέυτερη περίπτωση αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι η χρεοκοπία δεν έρχεται ποτέ. Είναι φανερό πως $\tilde{T}=T_\delta$.

## 4.2 Ολοκληρωτικές και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για την Φ(u)

Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\xi_1(u) = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{c}{\delta \mathrm{u}}\right),$$

$$\xi_2(u) = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{c}{\delta \mathrm{u}}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{b\varepsilon + c}{c}\right),$$

$$\xi_3(u) = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b\varepsilon + \mathrm{c}}{\varepsilon\left(u - \frac{c}{\delta}\right) + c}\right)$$

$$\Phi_1(u,t) = ue^{\delta \mathrm{t}},$$

$$\Phi_2(u,t) = \frac{c}{\delta} + \frac{ce^{\varepsilon(t - \xi_1(u))} - c}{\varepsilon},$$

$$\Phi_3(u,t) = \left(u - \frac{c}{\delta}\right)e^{\varepsilon \mathrm{t}} + \frac{c\left(e^{\varepsilon \mathrm{t}} - 1\right)}{\varepsilon} + \frac{c}{\delta}$$

Για $0 < u < \frac{c}{\delta}$, θεωρούμε $t$ να είναι ο χρόνος της πρώτης ζημιάς και $y$ το ύψος αυτής. Υπάρχουν τρείς πιθανές περιπτώσεις για το $t$:

- Να ισχύει $t < \xi_1(u)$ πράγμα που σημαίνει ότι το πλεόνασμα δεν έχει φτάσει υην τιμή $c/\delta$. Σε τούτη την περίπτωση το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρονική στιγμή $t$ δίνεται από την $\Phi_1(u,t)$.
- Να ισχύει $\xi_1(u) \le t < \xi_2(u)$ που σημαίνει ότι το πλεόνασμα δεν έχει φτάσει ακόμα την το όριο του μερίσματος $b + \frac{c}{\delta}$. Αντίστοιχα το πλεόνασμα την χρονική στιγμή $t$ δίνεται από την $\Phi_2(u,t)$.

- Τρίτη και τελευταία περίπτωση είναι $t \geq \xi_2(u)$ όπου το πλεόνασμα εδώ έχει φτάσει το όριο του μερίσματος $b+\frac{c}{\delta}$.

Για $\frac{c}{\delta} \leq u < b+\frac{c}{\delta}$, θεωρούμε $t$ να είναι ο χρόνος της πρώτης ζημιάς και $y$ το ύψος αυτής. Τώρα υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις για το $t$:

- Να ισχύει $t < \xi_3(u)$ πράγμα που σημαίνει ότι το πλεόνασμα δεν έχει φτάσει την τιμή $b+\frac{c}{\delta}$. Σε τούτη την περίπτωση το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρονική στιγμή $t$ δίνεται από την $\Phi_3(u,t)$.
- Να ισχύει $t \geq \xi_3(u)$, όπου το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρονική στιγμή $t$ έχει φτάσει το όριο του μερίσματος $b+\frac{c}{\delta}$.

Απόρροια των παραπάνω είναι το παρακάτω θεώρημα.

***Θεώρημα 4.1***

i. Για $0 < u < \frac{c}{\delta}$, η $\Phi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση,

$$\Phi(u) = \int_0^{\xi_1(u)} \lambda e^{-\lambda t} \gamma\left(\Phi_1(u,t)\right) dt + \int_{\xi_1(u)}^{\xi_2(u)} \lambda e^{-\lambda t} \gamma\left(\Phi_2(u,t)\right) dt + \int_{\xi_2(u)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left(b+\frac{c}{\delta}\right) dt, \qquad (4.3)$$

όπου $\gamma(z_1) = \int_0^{z_1} \Phi(z_1 - y) dF(y) + \zeta(z_1)$ και $\zeta(z_1) = \int_{z_1}^{\infty} w(y - z_1) dF(y)$.

ii. Για $\frac{c}{\delta} \leq u < b+\frac{c}{\delta}$, η $\Phi(u)$ αντίστοιχα ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση,

$$\Phi(u) = \int_0^{\xi_3(u)} \lambda e^{-\lambda t} \gamma\left(\Phi_3(u,t)\right) dt + \int_{\xi_3(u)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \gamma\left(b+\frac{c}{\delta}\right) dt. \qquad (4.4)$$

***Θεώρημα 4.2***

Για $\varepsilon \geq 0$ και $0 < u < \dfrac{c}{\delta}$, η $\Phi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση,

$$\delta u \Phi'(u) = -\lambda \int_0^u \Phi(u-y)\, dF(y) - \lambda \zeta(\theta) + \lambda \Phi(u). \tag{4.5}$$

Αντίστοιχα για $\varepsilon \geq 0$ και $\dfrac{c}{\delta} \leq u < b + \dfrac{c}{\delta}$, η $\Phi(u)$ ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση,

$$\left[\varepsilon u + c\left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right]\Phi'(u) = -\lambda \int_0^u \Phi(u-y)\, dF(y) - \lambda \zeta(u) + \lambda \Phi(u). \tag{4.6}$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να δούμε κάποιες οριακές συνθήκες για την $\Phi(u)$.

Εάν ισχύει $u \to c/\delta$ παρατηρούμε ότι $\xi_1\left(\dfrac{c}{\delta}\right) = \xi_2\left(\dfrac{c}{\delta}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon}\ln\left(\dfrac{b\varepsilon + \mathrm{c}}{c}\right)$ και ως συνέπεια έχουμε ότι $\Phi\left(\dfrac{c}{\delta}-\right) = \Phi\left(\dfrac{c}{\delta}+\right)$ κάτι το οποίο ισχύει και για της ολοκληροδιαφορικές δηλαδή $\Phi'\left(\dfrac{c}{\delta}-\right) = \Phi'\left(\dfrac{c}{\delta}+\right)$.

Άλλο ένα αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι όταν $U_0 \to 0$ από την $(4.3)$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{u \to 0} \Phi(u) = \zeta(0) = \int_0^\infty w(y) dF(y)$ πράγμα που σημαίνει ότι όταν $U_0 = 0$ το πλεόνασμα παραμένει μηδέν έως ότου συμβεί η επόμενη απαίτηση.

Όταν $u \to b + \dfrac{c}{\delta}$ από την $(4.4)$ έχουμε ότι

$$\lim_{u \to b + \frac{c}{\delta}} \Phi(u) = \int_0^{b+\frac{c}{\delta}} \Phi\left(b + \frac{c}{\delta} - y\right) dF(y) + \int_{b+\frac{c}{\delta}}^{\infty} w\left(y - b - \frac{c}{\delta}\right) dF(y)$$

και χρησιμοποιώντας την $(4.6)$ καταλήγουμε στο ότι $\Phi'\left(b + \dfrac{c}{\delta}\right) = 0$.

## 4.3 Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι ζημιές μας ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δηλαδή υποθέτουμε ότι $F(y)=1-\beta e^{\beta y}$ με $y \geq 0$ και $\beta$ μια θετική σταθερά. Με βάση τα παραπάνω η $(4.5)$ γράφεται ως εξής:

$$\delta u \Phi'(u) = -\lambda \int_0^u \Phi(y) \beta e^{-\beta(u-y)} dy - \lambda \zeta(u) + \lambda \Phi(u), \qquad 0 < u < c/\delta$$

και η $(4.4)$ αντίστοιχα

$$\left[\varepsilon u + c\left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right]\Phi'(u) = -\lambda \int_0^u \Phi(y) \beta e^{-\beta(u-y)} dy - \lambda \zeta(u) + \lambda \Phi(u), \qquad \frac{c}{\delta} \leq u < b + \frac{c}{\delta} \quad .$$

Παραγωγίζοντας τις παραπάνω δύο εξισώσεις ως προς $u$ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις,

$$\delta u \Phi''(u) + (\delta + \delta\beta u - \lambda)\Phi'(u) = 0, \qquad 0 < u < \frac{c}{\delta} \qquad (4.7)$$

$$\left[\varepsilon u + c\left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right]\Phi''(u) + \left\{\beta\left[\varepsilon u + c\left(1-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right] - \lambda + \varepsilon\right\}\Phi'(u) = 0, \qquad \frac{c}{\delta} \leq u < b + \frac{c}{\delta} \qquad (4.8)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.5) δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\Phi(u) = A_1 \int_0^u e^{-\beta y} y^{(\lambda/\delta)-1} dy + A_2, \qquad 0 < u < c/\delta \qquad (4.9)$$

με $A_1$, $A_2$ να είναι σταθερές ποσότητες.

Αντίστοιχα η λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.6) δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις οι οποίες διαφοροποιούνται με το αν το $\varepsilon > 0$ ή $\varepsilon = 0$:

i. Για $\varepsilon > 0$:

$$\Phi(u) = G_1 \int_{c/\delta}^u e^{-\beta\left(y-\frac{c}{\delta}\right)} \left[1 + \frac{\varepsilon}{c}\left(y - \frac{c}{\delta}\right)\right]^{-\frac{\varepsilon-\lambda}{\varepsilon}} dy + G_2, \qquad \frac{c}{\delta} \leq u < b + \frac{c}{\delta}, \qquad (4.10)$$

όπου $G_1$, $G_2$ δύο σταθερές ποσότητες.

ii. Για $\varepsilon = 0$:

$$\Phi(u) = C_1 e^{\frac{\lambda - c\beta}{c}u} + C_2, \qquad \frac{c}{\delta} \le u < b + \frac{c}{\delta} \tag{4.11}$$

όπου $C_1$, $C_2$ δύο σταθερές ποσότητες.

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες που αποδείξαμε προηγουμένως θα υπολογίσουμε τις σταθερές $A_1$, $A_2$, $G_1$, $G_2$, $C_1$, $C_2$. Επειδή έχουμε αποδείξει πως ισχύει η οριακή συνάρτηση $\Phi(0) = \zeta(0) = \int_0^\infty w(y)dF(y)$ από την $(4.7)$ έπεται ότι $\Phi(0) = A_2$. Άρα καταλήγουμε στο ότι:

$$A_2 = \int_0^\infty w(y)\beta e^{-\beta y}dy \tag{4.12}$$

Επίσης ολοκληρώνοντας την $\Phi'\left(b + \frac{c}{\delta}\right) = 0$, παίρνουμε στο ότι,

$$\Phi(u) \equiv C, \qquad \frac{c}{\delta} \le u < b + \frac{c}{\delta}. \tag{4.13}$$

Χρησιμοποιώντας τις $\Phi\left(\frac{c}{\delta}-\right) = \Phi\left(\frac{c}{\delta}+\right)$, $\Phi'\left(\frac{c}{\delta}-\right) = \Phi'\left(\frac{c}{\delta}+\right)$ και λαμβάνοντας υπόψη την $(4.7)$ καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα,

$$\begin{cases} C = A_1 \int_0^{c/\delta} e^{-\beta y} y^{(\lambda/\delta)-1} dy + \int_0^\infty w(y)\beta e^{-\beta y} dy \\ 0 = A_1 e^{-\beta\frac{c}{\delta}} \left(\frac{c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1} \end{cases}.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα καταλήγουμε στο ότι $A_1 = 0, C_1 = G_1 = 0$, $C = C_2 = G_2 = \int_0^\infty \beta w(y) e^{-\beta y} dy$.

Τελικά για κάθε $\varepsilon \ge 0$, η $\Phi(u)$ γράφεται:

$$\Phi(u)=\int_0^{\infty} w(y)\beta e^{-\beta y}dy, \qquad \frac{c}{\delta}\le u\le b+\frac{c}{\delta}. \qquad (4.14)$$

## 4.4 Συνάρτηση των Gerber-Shiu

Τώρα η συνάρτηση των Gerber-Shiu δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$m(x)=E\left[w\left(|R(T_\delta)|\right)I(T_\delta<\infty)/R(0)=x\right],$$

όπου I(.) είναι μία δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου (στην περίπτωση μας η χρεοκοπία) όπου παίρνει την τιμή 1 αν το ενδεχόμενο πραγματοποιηθεί και την τιμή 0 αν όχι. Η $w(.)$ είναι όπως ακριβώς και στα προηγούμενα κεφάλαια η συνάρτηση ποινής και το $x$ το αρχικό πλεόνασμα. Αν τώρα σκεφτούμε τις αλλαγές που κάναμε στην στοχαστική ανέλιξη που παρουσιάσαμε στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου έχουμε ότι τελικά:

$$m(x)=E\left[I\left(\tilde{T}<\infty\right)w\left(\left|U\left(\tilde{T}\right)\right|+\frac{c}{\delta}\right)\middle|U(0)=x+\frac{c}{\delta}\right].$$

Διαισθητικά να αναφέρουμε ότι ο ασφαλιστής είναι σαν να πληρώνει μία ποινή για τον λόγο της χρεοκοπίας. Η χρηματική αυτή ποινή υποθέτουμε ότι εξαρτάται από το $\left|U\left(\tilde{T}\right)\right|$. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu τελικά είναι η μέση τιμή αυτής της ποινής $w(.)$. Ας δούμε όμως τι μας δίνει η συνάρτηση των Gerber-Shiu για κάποιες τιμές της συνάρτησης ποινής.

- Για $w\left(|R(T_\delta)|\right)=1$ η $m(x)$ μας δίνει την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας.

$$m(x)=E\left[I(T_\delta<\infty)\middle|R_0=x\right]=P(T_\delta<\infty)=E\left[I\left(\tilde{T}<\infty\right)\middle|U_0=x+\frac{c}{\delta}\right]$$
$$=\Phi\left(x+\frac{c}{\delta}\right)\Bigg|_{w\left(|R(T_\delta)|\right)=1}=\int_0^{\infty}\beta e^{-\beta y}dy=1$$

- Για $w\left(|R(T_\delta)|\right)=I\left(|R(T_\delta)|>z\right)$ όπου $z>\frac{c}{\delta}$ η $m(x)$ μας δίνει το έλλειμμα κατά την απόλυτη χρεοκοπία.

$$m(x)=E\left[I\left(T_\delta<\infty\right)I\left(\left|R\left(T_\delta\right)\right|>z\right)\middle|R_0=x\right]=E\left[I\left(\tilde{T}<\infty\right)I\left(\left|U\left(\tilde{T}\right)\right|>z-\frac{c}{\delta}\right)\middle|U_0=x+\frac{c}{\delta}\right]$$

$$=\Phi\left(x+\frac{c}{\delta}\right)\Bigg|_{w(|R(T_\delta)|)=I(|R(T_\delta)|>z)}=\int_0^\infty \beta I\left(y>z-\frac{c}{\delta}\right)e^{-\beta y}dy=e^{-\beta\left(z-\frac{c}{\delta}\right)}$$

Τι γίνεται στο μοντέλο μας όταν $b\to\infty$;

Όταν $\varepsilon=0$, $b\to\infty$ και $u\to\infty$ επειδή ακριβώς το αρχικό πλεόνασμα τείνει στο άπειρο έχουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μηδέν, άρα χρησιμοποιώντας την $(4.9)$ έχουμε ότι: $\lim_{u\to\infty}\Phi(u)=0\Rightarrow\lim_{u\to\infty}C_1e^{\frac{\lambda-c\beta}{c}u}+C_2=0\Rightarrow C_2=0$. Χρησιμοποιώντας τις $\Phi\left(\frac{c}{\delta}-\right)=\Phi\left(\frac{c}{\delta}+\right)$, $\Phi'\left(\frac{c}{\delta}-\right)=\Phi'\left(\frac{c}{\delta}+\right)$ και την $\lim_{u\to0}\Phi(u)=\zeta(0)=\int_0^\infty w(y)dF(y)$ καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases}A_2=\int_0^\infty \beta e^{-\beta y}dy\\ C_1e^{\left(\frac{\lambda}{c}-\beta\right)\frac{c}{\delta}}=A_1\int_0^{\frac{c}{\delta}}e^{-\beta y}y^{\frac{\lambda}{d}-1}dy+\int_0^\infty\beta e^{-\beta y}dy \quad ,\\ C_1\left(\frac{\lambda}{c}-\beta\right)e^{\left(\frac{\lambda}{c}-\beta\right)\frac{c}{\delta}}=A_1e^{-\beta\frac{c}{\delta}}\left(\frac{c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1}\end{cases} \tag{4.15}$$

του οποίου η λύση είναι:

$$A_1=\frac{e^{\frac{\beta c}{\delta}}}{\frac{c}{\lambda-c\beta}\left(\frac{c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1}-\int_0^{\frac{c}{\delta}}e^{-\beta\left(y-\frac{c}{\delta}\right)}y^{\frac{\lambda}{\delta}-1}dy},$$

$$C_1=\frac{c}{\lambda-c\beta}e^{-\frac{\lambda}{\delta}}\left(\frac{c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1}A_1.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $T_\delta$ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας κατά την απόλυτη χρεοκοπία και $\tilde{T}^\infty$ ο χρόνος χρεοκοπίας υπό το πρίσμα της απόλυτης χρεοκοπίας και μιας στρατηγικής σταθερού μερίσματος όταν $b\to\infty$. Για $x>0$ έχουμε,

$$P\left(T_\delta < \infty \middle| R(0) = x\right) = P\left(\tilde{T}^\infty < \infty \middle| U(0) = x + \frac{c}{\delta}\right)$$

$$= C_1 e^{\frac{\lambda - c\beta}{c}\left(x + \frac{c}{\delta}\right)}$$

$$= \frac{c}{\lambda - c\beta} A_1 e^{-\frac{\lambda}{c}} \left(\frac{c}{\delta}\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1} e^{\frac{\lambda - c\beta}{c}\left(x + \frac{c}{\delta}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{\lambda - c\beta}{c}x}}{1 + \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right) \int_{-\frac{c}{\delta}}^{0} e^{-\beta t} \left(\frac{\delta}{c} t - 1\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}. \qquad (4.16)$$

Αντίστοιχα για $-\frac{c}{\delta} \le x < 0$ έχουμε:

$$P\left(T_\delta < \infty \middle| R(0) = x\right) = P\left(\tilde{T}^\infty < \infty \middle| U(0) = x + \frac{c}{\delta}\right)$$

$$= \frac{1 + \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right) \int_{x}^{0} e^{-\beta t} \left(\frac{\delta}{c} t + 1\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}{1 + \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right) \int_{-\frac{c}{\delta}}^{0} e^{-\beta t} \left(\frac{\delta}{c} t + 1\right)^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}. \qquad (4.17)$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα συμπίπτουν με τα αποτελέσματα των Dassios και Embrechts (1989).

## 4.5 Πιθανότητα ανάκτησης

Σε αυτή την παράγραφο θα συζητήσουμε για την πιθανότητα ανάκτησης του πλεονάσματος σε μηδενικά επίπεδα. Για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου υπό την πολιτική σταθερού μερίσματος η πιθανότητα ανάκτησης του πλεονάσματος σε μηδενικά επίπεδα είναι 1. Στο μοντέλο που περιγράφεται στην $(4.1)$ και υπό την προϋπόθεση ότι οι ζημιές ακολουθούν την εκθετική κατανομή η πιθανότητα ανάκτησης του πλεονάσματος σε μηδενικά επίπεδα είναι μικρότερη της μονάδας.

Ας συμβολίσουμε με $\hat{T}$ τον χρόνο ανάκτησης του πλεονάσματος σε μηδενικά επίπεδα, δηλαδή:

$$\hat{T} = \inf\left\{t > 0; R\left(T + t\right) = 0\right\}$$

επίσης συμβολίζουμε με $\varphi\left(x\right)$ την πιθανότητα ανάκτησης, άρα ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(x) = P\left(\hat{T} < \infty \middle| R(0) = x\right), \qquad 0 < x \le b. \qquad (4.18)$$

Στη συνέχεια θα συμβολίσουμε το χρόνο του πρώτου περάσματος του πλεονάσματος από το μηδέν δοθέντος ότι το πλεόνασμα βρισκόταν σε ύψος $-z$ με $T_{-z}^{0}$, όπου $0 < z < \frac{c}{\delta}$. Η πιθανότητα ανάκτησης από το $-z$ σε μηδενικό επίπεδο ορίζεται ως εξής:

$$\psi\left(-z\right) = P\left(T_{-z}^{0} < \infty \middle| R\left(0\right) = -z\right), \qquad 0 < z < \frac{c}{\delta}. \qquad (4.19)$$

Θεωρώντας ένα απειροελάχιστο διάστημα dt και δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και το ύψος της πρώτης ζημιάςπαίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\psi\left(-z\right) &= \left(1-\lambda dt\right)\psi\left(\left(-z+\frac{c}{\delta}\right)e^{\delta dt}-\frac{c}{\delta}\right)+\lambda dt\int_{0}^{\left(-z+\frac{c}{\delta}\right)e^{\delta dt}}\psi\left(\left(-z+\frac{c}{\delta}\right)e^{\delta dt}-\frac{c}{\delta}-y\right)dF\left(y\right)\\ &= \left(1-\lambda dt\right)\left[\psi\left(-z\right)+\left(c-\delta z\right)\psi'\left(-z\right)dt\right]+\lambda dt\int_{-\frac{c}{\delta}}^{-z}\psi\left(y\right)f\left(-z-y\right)dy+0\left(dt\right), \qquad (4.20)\end{aligned}$$

οπότε τελικά καταλήγουμε στην

$$\left(c-\delta z\right)\psi'\left(-z\right)-\lambda\psi\left(-z\right)+\lambda\int_{-\frac{c}{\delta}}^{-z}\psi\left(y\right)f\left(-z-y\right)dy = 0, \qquad 0 < z < \frac{c}{\delta}. \qquad (4.21)$$

Ανάλογα με την τιμή που παίρνει το $-z$ παίρνουμε κάποιες οριακές συνθήκες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες:

- Εάν $-z = -\frac{c}{\delta}$ είναι φανερό πως $T_{-z}^{0} = \infty$ αφού το πλεόνασμα είναι ίσο με την παρούσα αξία των μελλοντικών ασφαλίστρων και έχει επέλθει η απόλυτη χρεοκοπία, συνεπώς η πιθανότητα ανάκτησης είναι μηδέν, $\psi\left(-\frac{c}{\delta}\right) = 0$ $(4.22)$.
- Εάν $-z = 0$ είναι φανερό πως $T_{-z}^{0} = 0$ συνεπώς η πιθανότητα ανάκτησης είναι $\psi\left(0\right) = 1$ $(4.23)$.

Τελικά η πιθανότητα ανάκτησης του πλεονάσματος σε μηδενικά επίπεδα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\varphi(x) = P\left(\hat{T} < \infty \middle| R(0) = x\right) = \int_0^{\frac{c}{\delta}} P\left(T_{-y}^0 < \infty\right) P\left(T < \infty, \left|R_T\right| \in dy\right),$$

όπου

$$T = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} \\ \infty, R(t) > 0 \forall t \geq 0 \end{cases}.$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι οι ζημιές ακολουθούν την εκθετική κατανομή με σ.π.π $f(y) = \beta \mathrm{e}^{-\beta y}, y \geq 0$ και $\beta$ μία σταθερά η $(4.21)$ γράφεται ως εξής:

$$(c - \delta z)\psi'(-z) - \lambda \psi(-z) + \lambda \int_{-\frac{c}{\delta}}^{-z} \psi(y) e^{-\beta(-z-y)} dy = 0. \qquad (4.24)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω έχουμε:

$$(c - \delta \mathrm{z})\psi''(-z) + \left((c - \delta \mathrm{z})\beta + \delta - \lambda\right)\psi'(-z) = 0.$$

Λύνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο:

$$\psi(-z) = \frac{\int_0^{-z+\frac{c}{\delta}} e^{-\beta t} t^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}{\int_0^{\frac{c}{\delta}} e^{-\beta t} t^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}, \qquad 0 \leq z \leq \frac{c}{\delta}.$$

## 4.6 Παρούσα αξία μερισμάτων

Ας θεωρήσουμε ότι

$$dU_b(t) = \begin{cases} -dS_t, & U_b(t) = b \\ cdt + \varepsilon U_b(t)dt - dS_t, & 0 \leq U_b(t) < b \\ cdt + \delta U_b(t)dt - dS_t, & -c/\delta < U_b(t) < 0 \end{cases}.$$

Έστω $D(t)$ το συνολικό ποσό των μερισμάτων έως τον χρόνο $t$ και $a$ η ένταση ανατοκισμού τότε η

$$D_{u,b} = \int_{o}^{T_u^b} e^{-at} dD(t),$$

αποτελεί την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων μέχρι την χρονική στιγμή $T_u^b$, όπου $T_u^b$ είναι ο χρόνος της απόλυτης χρεοκοπίας δηλαδή $T_u^b = \inf\left\{t : U_b(t) \leq -\frac{c}{\delta}\right\}$.

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M(u,y,b) = E\left(e^{yD_{u,b}}\right), \ \ -c/\delta < u \leq b. \qquad (4.25)$$

Συμβολίζουμε τη n-οστή στιγμή των προεξοφλημένων μερισμάτων με

$$V_n(u,b) = E\left(D_{u,b}^n\right), \quad -c/\delta < u \leq b, n \in \mathbb{N}.$$

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε πως $V_0(u,b) = 1$ και όταν $n = 1$ έχουμε ότι $V_1(u,b) = V(u,b)$ ,η οποία είναι η αναμενόμενη τιμή της $D_{u,b}$.

## 4.7 Ολοκληροδιαφορικες εξισώσεις των M(u,y,b), $V_n$(u,b)

Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε την ροπογεννήτρια συνάρτηση $M(u,y,b)$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση δίνεται από διαφορετική έκφραση ανάλογα με το διάστημα στο οποίο ανήκει το $u$, συγκεκριμένα:

$$M(u,y,b) = \begin{cases} M_1(u,y,b), & -c/\delta < u < 0 \\ M_2(u,y,b), & 0 \leq u \leq b. \\ M_3(u,y,b), & u \geq b \end{cases}$$

***Θεώρημα 4.3***

Οι $M_1(u,y,b)$, $M_2(u,y,b)$ και $M_3(u,y,b)$ ικανοποιούν τις παρακάτω ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις:

$$(\delta u+c)\frac{dM_1}{du}(u,y,b)-ay\frac{dM_1}{dy}(u,y,b)-\lambda M_1(u,y,b)+\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)$$
$$+\lambda\int_0^{u+\frac{c}{\delta}} M_1(u-x,y,b)\,dF(x)=0,\qquad -c/\delta<u<0 \qquad (4.26)$$

$$(\varepsilon u+c)\frac{dM_2}{du}(u,y,b)-ay\frac{dM_2}{dy}(u,y,b)-\lambda M_2(u,y,b)+\lambda\int_0^u M_2(u-x,y,b)\,dF(x)$$
$$+\lambda\int_u^{u+\frac{c}{\delta}} M_1(u-x,y,b)\,dF(x)+\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)=0,\qquad 0\le u<b \qquad (4.27)$$

και

$$(\varepsilon u+c)\frac{dM_3}{du}(u,y,b)-ay\frac{dM_3}{dy}(u,y,b)-\lambda M_3(u,y,b)+\lambda\int_0^{u-b} M_3(u-x,y,b)\,dF(x)$$
$$+\lambda\int_{u-b}^{u} M_2(u-x,y,b)\,dF(x)+\lambda\int_u^{u+\frac{c}{\delta}} M_1(u-x,y,b)\,dF(x)+\lambda\bar{F}\left(u+\frac{c}{\delta}\right)=0,\qquad u\ge b, \qquad (4.28)$$

με οριακές συνθήκες:

$$M_1\left(-\frac{c}{\delta},y,b\right)=1,$$

$$M_1(0-,y,b)=M_2(0,y,b),$$

$$M_2(b-,y,b)=M_3(b,y,b).$$

Στη συνέχεια θα δούμε ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση $V_n(u,b)$.

***Θεώρημα 4.4***

Η $V_n(u,b)$ ικανοποιεί τις παρακάτω ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις:

$$(\delta u+c)V_{n1}'(u,b)-(\lambda+na)V_{n1}(u,b)+\lambda\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n1}(u-x,b)dF(x)=0,$$

$$+\lambda\int_0^{u+\frac{c}{\delta}}M_1(u-x,y,b)dF(x)=0,\qquad -c/\delta<u<0 \tag{4.29}$$

$$(\delta u+c)V_{n2}'(u,b)-(\lambda+na)V_{n2}(u,b)+\lambda\int_0^{u}V_{n2}(u-x,b)dF(x)$$

$$+\lambda\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n1}(u-x,b)dF(x)=0,\qquad 0<u<b \tag{4.30}$$

και

$$(\delta u+c)V_{n3}'(u,b)-(\lambda+na)V_{n3}(u,b)+\lambda\int_0^{u-b}V_{n3}(u-x,b)dF(x)$$

$$+\lambda\int_{u-b}^{u}V_{n2}(u-x,b)dF(x)+\lambda\int_u^{u+\frac{c}{\delta}}V_{n1}(u-x,b)dF(x)=0,\qquad u\ge b \tag{4.31}$$

με οριακές συνθήκες:

$$V_{n1}\left(-\frac{c}{\delta},b\right)=0,$$

$$V_{n3}(u,b)|_{u=b}=nV_{(n-1)3}(b,b),$$

$$V_{n1}(0-,b)=V_{n2}(0,b) \text{ και } V_{n2}(b-,b)=V_{n3}(b,b),$$

$$V_{n1}'(0-,b)=V_{n2}'(0,b) \text{ και } V_{n2}'(b-,b)=V_{n3}'(b,b).$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο, αλλά και της απόλυτης πιθανότητας χρεοκοπίας, με την βοήθεια του Mathematica. Αφού τα αριθμητικά αποτελέσματα αφορούν το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου τα ύψη των ζημιών θα ακολουθούν εκθετική κατανομή και το πλήθος των ζημιών την Poisson.

## 5.1 Πιθανότητα χρεοκοπίας

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υποθέτουμε ότι τα μεγέθη των ζημιών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $a=3$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)=3e^{-3x}$. Το πλήθος των απαιτήσεων ακολουθούν Poisson με παράμετρο $\lambda=2$, δηλαδή $N(t)\sim Poi(2t)$. Τέλος υποθέτουμε ότι $P(t)=3{,}5t$, δηλαδή ότι η ένταση ασφαλίστρου $c=3{,}5$.

Πριν ξεκινήσουμε να υπολογίζουμε θα εκχωρήσουμε στο mathematica τις σταθερές μας, δηλαδή τις τιμές για τις παραμέτρους των κατανομών όπως επίσης και την ένταση ασφαλίστρου θέτοντας $\lambda=2$, $c=3{,}5$, $a=3$. Στη συνέχεια μπορούμε την παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να την εισάγουμε ως συνάρτηση στο Mathematica

$$\mathrm{f}[\mathrm{x}\_]=3*\mathrm{Exp}[-3*\mathrm{x}].$$

Έχοντας γράψει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την συνάρτηση κατανομής

$$F(y)=\int_0^y f(x)dx$$

εισάγοντας την εντολή

$$F[x\_] = Integrate[f[y],\{y,0,x\}],$$

αλλά και την ουρά της κατανομής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = y,$$

εκτελώντας την

$$tailF[x\_] = Integrate[f[y],\{y,x,Infinity\}].$$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής που περιγράφει τις αποζημιώσεις

$$E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x)\,dx,$$

στο Mathematica η αντίστοιχη εντολή είναι

$$\mu \acute{\varepsilon} \sigma \eta \tau \iota \mu \acute{\eta} = \text{Integrate}[\text{x} * \text{f}[\text{x}],\{\text{x},0,\text{Infinity}\}],$$

η οποία μας δίνει ότι $E(X) = 1/3$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την κατανομή ισορροπίας (equilibrium distribution). Η συνάρτηση κατανομής της κατανομής ισορροπίας, είναι

$$F_e(x) = \frac{\int_0^x \bar{F}(y)\,dy}{E(X)},$$

οπότε στο mathematica εισάγουμε την παρακάτω εντολή

Fe[x_]=3*Integrate[tailF[y],{y,0,x}].

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_e(x)$ της κατανομής ισορροπίας δίνεται από την

$$f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(X)}.$$

Στο Mathematica ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται εισάγοντας την εντολή

fe[x_]=3*tailF[x].

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor) ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1,$$

Στο mathematica εισάγουμε την εντολή

$$\theta = (c / (\lambda * \mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\tau\iota\mu\acute{\eta})) - 1,$$

η οποία εκχωρεί στο $\theta$ το αποτέλεσμα του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης, και μας δίνει σαν αποτέλεσμα ότι $\theta = 4,25$.

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής αναφέραμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση που οι απαιτήσεις ακολούθουν εκθετική κατανομή δίνεται από την

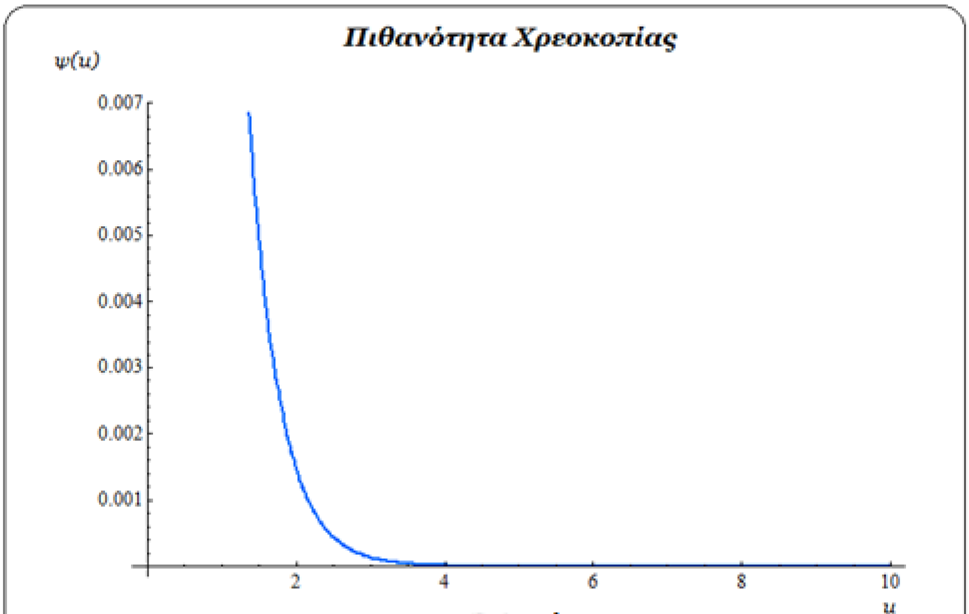
$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\lambda\theta}{c}u} \quad ,u \geq 0.$$

Άρα εκτελώντας στο mathematica την

$$\psi[u\_] = (1/(1+\theta)) * Exp[-((\lambda * \theta)/c) * u],$$

μπορούμε, θέτοντας στο $u$ οποιαδήποτε θετική τιμή να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στο πίνακα που ακλουθεί υπάρχουν κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα όπως επίσης και το σχήμα που περιγράφει τα συγκεκριμένα αποτελέσματα.

| $u$ | $\psi(u)$ |
|---|---|
| 0 | 0,1905 |
| 0,5 | 0,0566 |
| 1 | 0,0168 |
| 1,5 | 0,005 |
| 2 | 0,0015 |
| 2,5 | 0,0004 |
| 3 | 0,0001 |
| 3,5 | 0 |
| 4 | 0 |



Σχήμα 6

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό απόθεμα, τόσο πιο κοντά στο μηδέν τείνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

## 5.2 Πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε μερικά αναλυτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας. Υποθέτουμε ότι το χρεωστικό επιτόκιο είναι $i = 2\%$ άρα η ένταση ανατοκισμού $\delta = \ln(1+i) = 0,019803$. Η απόλυτη χρεοκοπία επέρχεται όταν πλεόνασμα βρεθεί κάτω από την τιμή:

$$-\frac{c}{\delta} = -\frac{3,5}{0,02} = -176,7442 .$$

Στο κεφάλαιο 2 αποδείξαμε πως η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας δίνεται από την

$$\psi_+(u) = \frac{e^{-\frac{\lambda\theta}{c}u}}{1+(\lambda\theta/c)\int\limits_{-c/\delta}^{0} e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx} \quad \text{για } u \geq 0$$

και από την

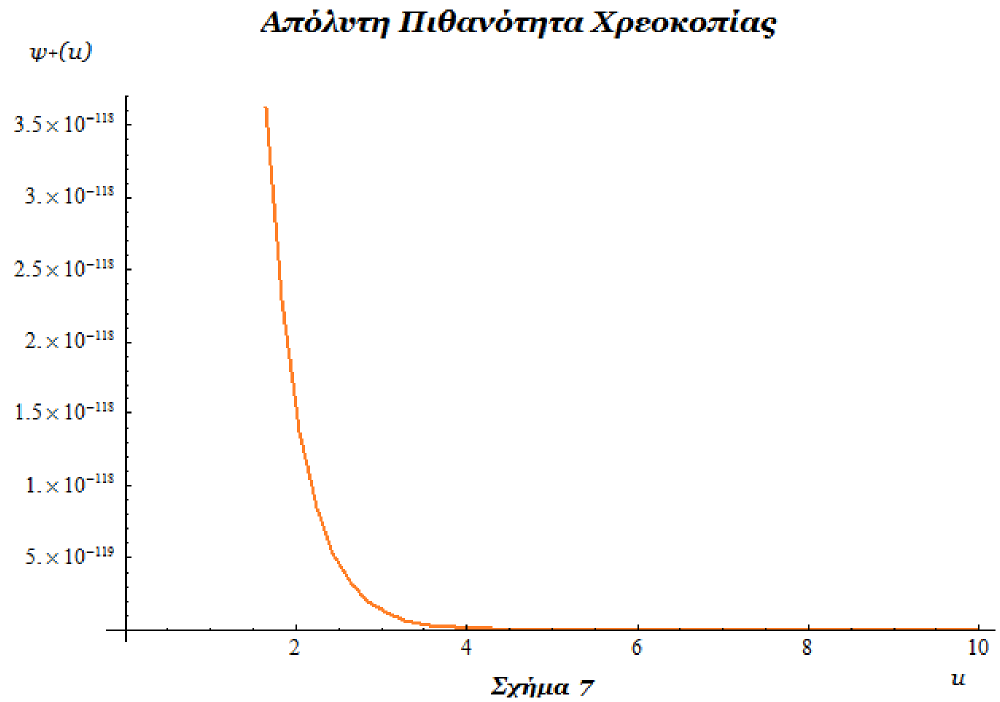
$$\psi_{-}(u)=\frac{1+(\lambda\theta/c)\int_{u}^{0}e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx}{1+(\lambda\theta/c)\int_{-c/\delta}^{0}e^{-x/\mu}(1+\delta x/c)^{-1+\lambda/\delta}\,dx}\quad \text{για } -c/\delta<u<0 .$$

Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε στο mathematica αυτές τις εξισώσεις για διάφορες τιμές του $u$. Αρχικά θα γράψουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις στο πρόγραμμα. Αυτό γίνεται με την χρήση των παρακάτω εντολών:

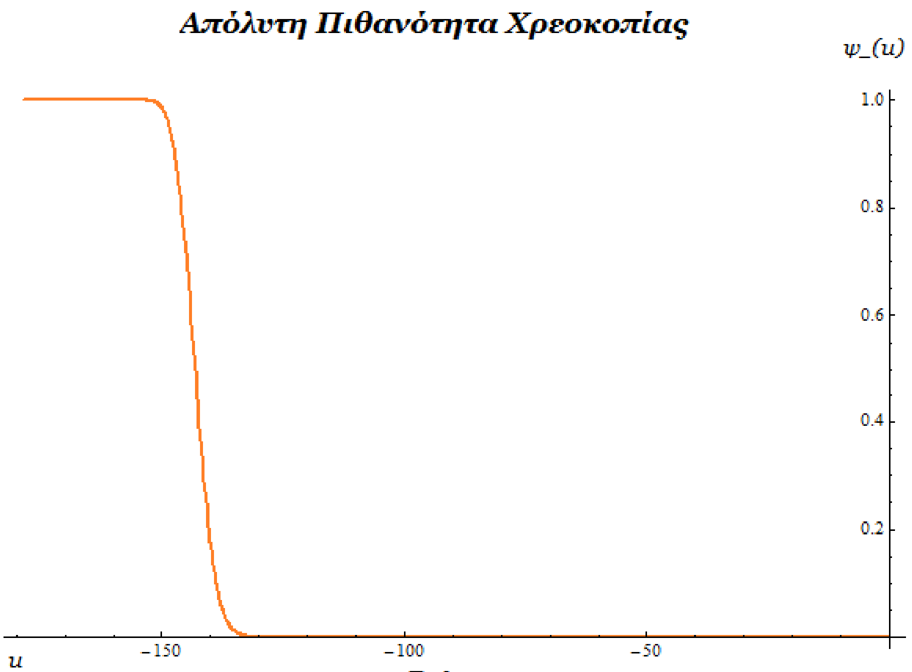
- $\psi_{+}[u\_]=(Exp[-\lambda*\theta*u/c])/(1+(\lambda*\theta/c)*(Integrate[(Exp[-x/\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\tau\iota\mu\acute{\eta}])$ $*(1+(\delta*x)/c)\wedge(-1+\lambda/\delta),\{x,-c/\delta,0\}]))$
- $\psi\_[u\_]=\dfrac{(1+(\lambda*\theta/c)*(Integrate[(Exp[-x/\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\tau\iota\mu\acute{\eta}])*(1+(\delta*x)/c)\wedge(-1+\lambda/\delta),\{x,u,0\}]))}{(1+(\lambda*\theta/c)*(Integrate[(Exp[-x/\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\tau\iota\mu\acute{\eta}])*(1+(\delta*x)/c)\wedge(-1+\lambda/\delta),\{x,-c/\delta,0\}]))}$

Τώρα θέτοντας διάφορες τιμές στις δύο εξισώσεις παίρνουμε διάφορες τιμές για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας. Ενδεικτικά παρακάτω παρουσιάζουμε δύο πίνακες. Αυτό που έχει μεγάλο ενδιαφέρον το οποίο φαίνεται ξεκάθαρα και από τα σχήματα 7 και 8, το οποίο βέβαια είναι και απόρροια όλων αυτών που έχουμε αναφέρει για την πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας, είναι ότι καθώς $u\to-\dfrac{c}{\delta}$ η $\psi(u)\to 1$, κάτι βέβαια που ήταν αναμενόμενο μιας και αν το πλεόνασμα βρεθεί κάτω από το $-\dfrac{c}{\delta}$ επέρχεται η απόλυτη χρεοκοπία.

| $u$ | $\psi_{+}(u)$ | $u$ | $\psi\_(u)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,95E-116 | -0,1 | 2,49E-116 |
| 0,5 | 5,80E-117 | -0,5 | 6,59E-116 |
| 1 | 1,72E-117 | -1 | 2,22E-115 |
| 1,5 | 5,12E-118 | -1,5 | 7,50E-115 |
| 2 | 1,52E-118 | -2 | 2,53E-114 |
| 2,5 | 4,51E-119 | -2,5 | 8,51E-114 |
| 3 | 1,34E-119 | -3 | 2,86E-113 |
| 3,5 | 3,98E-120 | -3,5 | 9,62E-113 |
| 4 | 1,18E-120 | -4 | 3,23E-112 |
| 4,5 | 3,51E-121 | -4,5 | 1,08E-111 |
| 5 | 1,04E-121 | -5 | 3,64E-111 |
| 6,5 | 3,09E-122 | -130 | 2,15E-04 |
| 7 | 9,18E-123 | -140 | 1,78E-01 |
| 7,5 | 2,73E-123 | -145 | 7,10E-01 |
| 8 | 8,09E-124 | -150 | 9,86E-01 |
| 8,5 | 2,40E-124 | -177 | 1,00E+00 |




Σχήμα 7




Σχήμα 8

## 5.3 Πιθανότητα ανάκτησης

Στο κεφάλαιο 4 είδαμε πως όταν οι ζημιές ακολουθούν την εκθετική κατανομή, η πιθανότητα ανάκτησης του πλεονάσματος σε θετικά επίπεδα, δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\psi(-z) = \frac{\int_0^{-z+\frac{c}{\delta}} e^{-\beta t} t^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}{\int_0^{\frac{c}{\delta}} e^{-\beta t} t^{\frac{\lambda}{\delta}-1} dt}, \qquad 0 \le z \le \frac{c}{\delta},$$

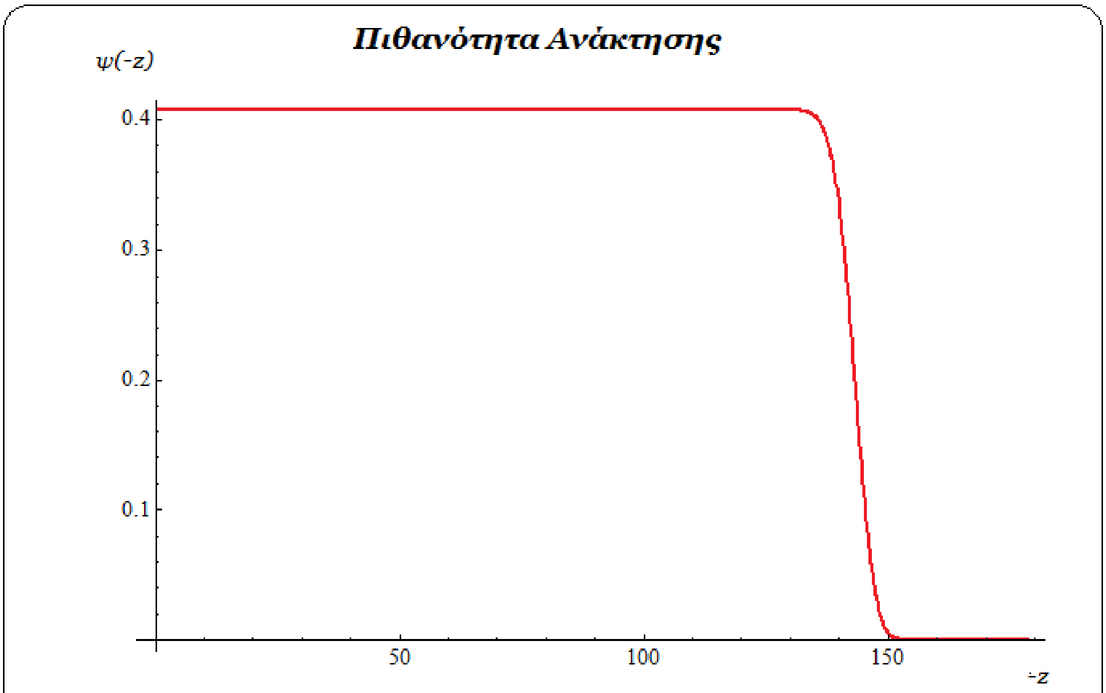
όπου $-z$ το αρχικό πλεόνασμα και $\beta$ η παράμετρος της εκθετικής κατανομής, στην περιπτωσή μας $\beta = 3$. Ας δούμε πως θα υπολογίσουμε αυτή την πιθανότητα στο Mathematica.

Με την εντολή

$\psi[-z\_] = (Integrate[Exp[-a*t]*t^((\lambda/\delta)-1),\{t,0,-z+c/\delta\}])/(Integrate[Exp[-a*t]*t^((\lambda/\delta)-1),\{t,0,c/\delta\}]),$

εισάγουμε την έκφραση της $\psi[-z\_]$ στο πρόγραμμα. Θέτοντας τιμές στο $-z$ για τις οποίες βέβαια ισχύει $0 \le z \le \frac{c}{\delta}$ παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

| z | ψ(-z) |
|---|---|
| 0 | 1,0000000 |
| 50 | 1,0000000 |
| 120 | 1,0000000 |
| 125 | 1,0000000 |
| 130 | 0,9998000 |
| 140 | 0,8224000 |
| 145 | 0,2904000 |
| 150 | 0,0141000 |
| 155 | 0,0000243 |
| 160 | 0,0000000 |
| 165 | 0,0000000 |
| 176,74 | 0,0000000 |



Σχήμα 9

Αυτό που παρατηρούμε από τις τιμές που πήραμε, είναι αυτό που αναφέραμε και στο κεφάλαιο 4, δηλαδή ότι:

- Εάν $-z=-\frac{c}{\delta}=-176,74$ είναι φανερό πως $T_{-z}^{0}=\infty$ αφού το πλεόνασμα είναι ίσο με την παρούσα αξία των μελλοντικών ασφαλίστρων και έχει επέλθει η απόλυτη χρεοκοπία, συνεπώς η πιθανότητα ανάκτησης είναι μηδέν, $\psi\left(-\frac{c}{\delta}\right)=0$
- Εάν $-z=0$ είναι φανερό πως $T_{-z}^{0}=0$ συνεπώς η πιθανότητα ανάκτησης είναι $\psi(0)=1$.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1970). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York.

2. Cai, J. (2007). On the time value of absolute ruin with debit interest. Advances in Applied Probability, 39, 343-359.

3. Cai, J. and Dickson, D.C.M. (2002). On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest. Insurance: Mathematics and Economics, 30, 389-404.

4. Cai, J., Feng, R. and Willmot, G.E. (2009). On the expectation of total discounted operating costs up to default and its applications. Advances in Applied Probability, 41(2), 495-522.

5. C. Yin. Discussion of Hans U. Gerber and Elias S.W. Shiu's "On optimal dividend strategies in the compound Poisson model". North American Actuarial Journal, 2006.

6. Dassios, A. and Embrechts, P. (1989). Martingales and insurance risk. Commun. Statist. Stoch. Models 5, 181–217.

7. De Finetti, B., 1957. Su un'impostazione alternativa dell teoria colletiva del rischio. Transactions of the XV International Congress of Actuaries 2. pp. 433–443.

8. Dickson, D.C.M. and Eg´ıdio dos Reis, A.D. (1997). The effect of interest on negative surplus. Insurance: Mathematics and Economics, 21, 1-16.

9. Dickson, D.C.M. Insurance Risk and Ruin. Centre for Actuarial Studies,Department of Economics, University of Melbourne

10. Embrechts, P. and Schmidli, H. (1994). Ruin estimation for a general insurance risk model. Advances in Applied Probability, 26, 404-422.

11. G.E. Willmot and J. Cai. On applications of residual lifetimes of compound geometric convolutions. Journal of Applied Probability, 41, 2004.

12. Hans Buhlmann. Mathematical Methods in Risk Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, 2nd printing, 1st edition, 2008.

13. K.C. Yuen, G. Wang, and W.K. Li. The Gerber-Shiu expected discounted penalty function for risk processes with interest and a constant dividend barrier. Insurance: Mathematics and Economics, 40(11), 2007.

14. M. Jacobsen. Martingales and the distribution of the time to ruin. Stochastic Processes and Their Applications, 107, 2003.

15. Picard, P. (1994). On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model. Insurance: Mathematics and Economics, 14, 107-115.

16. Thomas Mikosch. Non-Life Insurance Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.

17. Lin, X.S., Pavlova, K.P., 2006. The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy. Insurance: Mathematics and Economics 38(1), 57–80.

18. Rulli`ere, D., Loisel, S., 2005. The win-first probability under interset force. Insurance: Mathematics and Economics 37 (3), 421–442.

19. Segerdahl, C.-O., 1942. uber einige risikotheoretische Fragestellungen. Skandinavisk Aktuarietidskrift 25, 43–83.

20. Sundt, B., Teugels, J.L., 1995. Ruin estimates under interest force. Insurance: Mathematics and Economics 16 (1), 7–22.

21. Yuen, K.C., Wang, G., Li, W.K., 2007. The Gerber–Shiu expected discounted penalty function for risk processes with interest and a constant Dividend barrier. Insurance: Mathematics and Economics 40 (1), 104–112.

22. Yuen, K.C., Wang, G. and Li, W.K. (2007). The Gerber-Shiu expected discounted penalty function for risk process with interest and a constant dividend barrier. Insurance: Mathematics and Economics, 40, 104-112.

23. Yang, H., Zhang, Z. and Lan, C. (2008). On the time value of absolute ruin for a multi-layer compound Poisson model under interest force. Statistics and Probability Letters, 78, 1835-1845.

24. Zhou, M., Zhang, C., 2005. Absolute ruin under classical risk model. Acta Mathematicae Applicate Sinica 28 (4), 57–80.