ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Π.Μ.Σ. ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

«Μέτρα της Εντροπίας στα Χρηματοοικονομικά»

Κωνσταντίνος Ρίνης

Αριθμός Μητρώου: ΜΧΑΝ1323

Επιβλέπων

Λέκτορας Νικόλαος Εγγλέζος

Μέλη Επιτροπής

Καθηγητής Νικήτας Πιττής

Επίκουρος Καθηγητής Δημήτριος Βολιώτης

Λέκτορας Νικόλαος Εγγλέζος

Πειραιάς, Ιούλιος 2015

Περίληψη

Αρχικά, η έννοια της εντροπίας προήλθε από την επιστήμη της φυσικής και συγκεκριμένα από το πεδίο της θερμοδυναμικής. Ωστόσο, οι διάφορες μορφές της και οι δύο βασικές αρχές που τη διέπουν χρησιμοποιήθηκαν κατά κόρον και στην επιστήμη των χρηματοοικονομικών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρονται αυτές οι μορφές και οι βασικές αρχές της εντροπίας, καθώς και οι εφαρμογές τους στα χρηματοοικονομικά. Η εμπειρική μελέτη αυτής της διπλωματικής εργασίας δίνει έμφαση στην εντροπία ως μέτρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου και συγκρίνεται με άλλες παραδοσιακές μεθόδους.

Λέξεις–Κλειδιά: εντροπία, δεσμευμένη εντροπία, επιλογή χαρτοφυλακίου, ελαχιστοποίηση, Shannon, fuzzy.

Abstract

Initially, the concept of entropy came from the science of physics, especially from the field of thermodynamics. However, various forms of entropy and its two basic principles are used extensively in the field of finance. In this thesis, these forms are reported in detail. Basic principles of entropy and their applications in finance are also described. The empirical study of this thesis emphasizes the entropy as a measure of risk of the portfolio and is compared to other traditional methods.

Keywords: entropy, conditional entropy, portfolio selection, minimization, Shannon, fuzzy.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

1.1 Περί εντροπίας

Ο Γερμανός Φυσικός Clausius (1822-1888) το 1850 χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το θερμοδυναμικό όρο εντροπία για να περιγράψει το ποσό της θερμότητας που πρέπει να βάλουμε σε ένα κλειστό σύστημα για να το φέρουμε σε μια δεδομένη κατάσταση. Η έννοια της εντροπίας είναι μία από τις σημαντικότερες έννοιες λόγω της συσχετισμένης διατύπωσης του δεύτερου θερμοδυναμικού νόμου με αυτήν. Σύμφωνα με το 2^{ο} νόμο της Θερμοδυναμικής "είναι αδύνατο να παράγουμε έργο μεταφέροντας θερμότητα από κρύο σώμα σε θερμό σώμα σε οποιαδήποτε αυτό-συντηρούμενη διαδικασία" ή αλλιώς "η εντροπία πάντα αυξάνει σε ένα κλειστό σύστημα που δεν βρίσκεται σε ισορροπία και παραμένει σταθερή σε ένα σύστημα που είναι σε ισορροπία". Πιο απλά όποτε υπάρχει ροή ενέργειας, κάποια πάντα χάνεται σαν χαμηλού επιπέδου θερμότητα. Σε μια ευρύτερη έννοια, μπορούμε να αναφερθούμε στην εντροπία σαν ένα μέτρο της τάξεως ενός συστήματος. Όσο μεγαλώνει η εντροπία, τόσο μικραίνει η τάξη, τόσο μεγαλώνει η αταξία (το χάος). Έτσι ο 2^{ος} Νόμος της Θερμοδυναμικής μπορεί να πάρει και την μορφή "τα συστήματα έχουν την τάση να γίνονται όλο και λιγότερο πολύπλοκα". Με άλλα λόγια "σε όλες τις μετατροπές ενέργειας από μια μορφή σε άλλη, ένα μέρος της ενέργειας πάντα μετατρέπεται σε θερμότητα, που είναι η κατώτατη μορφή ενέργειας". Είναι πολύ εύκολο να μετατρέπουμε οποιαδήποτε μορφή ενέργειας σε θερμότητα, ενώ είναι πολύ δύσκολο και μερικές φορές πρακτικά ασύμφορο (πολύ μικρός συντελεστής απόδοσης) να μετατρέψουμε θερμότητα σε άλλη μορφή ενέργειας. Όλα τα φυσικά συστήματα λοιπόν οδεύουν φυσιολογικά προς την αταξία (το χάος) και όχι προς την τάξη (που είναι η τάση που έχει ο άνθρωπος). Έτσι η εντροπία θα αυξάνεται και θα αυξάνεται συνεχώς (με αποτέλεσμα να αυξάνει συνεχώς η θερμική ενέργεια του σύμπαντος σε βάρος των άλλων μορφών ενέργειας – μηχανική, ηλεκτρομαγνητική, ακουστική κλπ.) έως ότου κάποτε δεν θα υπάρχει άλλη ενέργεια πια για να μετατραπεί σε θερμότητα, όλα θα έχουν γίνει πια θερμότητα, η εντροπία θα γίνει η μέγιστη δυνατή στο σύμπαν, δεν θα υπάρχει πια τάξη, όλα θα είναι τυχαία, όλα χάος, πλήρης ακινησία των πάντων, καμιά ζωή και καμιά διαφορά θερμοκρασίας.

Ο ερευνητής Von Neumann χρησιμοποίησε τον πίνακα πυκνότητας για να επεκτείνει την έννοια της εντροπίας στην κβαντική μηχανική. Η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής στη θεωρία πιθανοτήτων και στη θεωρία πληροφοριών μετρά την αβεβαιότητα που διακατέχει ένα σύστημα. Η εντροπία ποσοτικοποιεί επίσης την εκθετική πολυπλοκότητα ενός δυναμικού συστήματος, δηλαδή τη μέση ροή των πληροφοριών ανά μονάδα χρόνου στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων. Στην κοινωνιολογία, η εντροπία είναι η φυσική φθορά των δομών.

Ο ερευνητής Brissaud πρότεινε ότι η εντροπία θα μπορούσε να γίνει κατανοητή σε τρεις πτυχές. Πρώτον, στον τομέα των πληροφοριών, η εντροπία αναπαριστά την απώλεια των πληροφοριών ενός φυσικού συστήματος που παρατηρείται από ένα άτομο, αλλά μέσα στο σύστημα η εντροπία αποτελεί μετρήσιμη πληροφορία. Δεύτερον, η εντροπία μετράει τους βαθμούς ελευθερίας. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι η επέκταση του φυσικού αερίου, δηλαδή ο βαθμός ελευθερίας της θέσης των μορίων του φυσικού αερίου αυξάνει με το χρόνο. Τέλος, ο Brissaud πίστευε ότι η εντροπία εξομοιώνεται με τη διαταραχή. Ωστόσο, αυτή η αντίληψη φαίνεται ακατάλληλη καθώς η θερμοκρασία είναι ένα καλύτερο μέτρο της διαταραχής.

Η εφαρμογή της εντροπίας στα χρηματοοικονομικά μπορεί να θεωρηθεί ως η επέκταση της εντροπίας πληροφοριών και της εντροπίας πιθανότητας. Μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο στην επιλογή χαρτοφυλακίου και στο asset pricing. Έτσι πολλοί ερευνητές έχουν εμπλουτίσει τη θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου με έννοιες της εντροπίας. Μερικοί από αυτούς έχουν προτείνει διάφορες μορφές της εντροπίας. Κατά τον ίδιο τρόπο έχει εμπλουτιστεί με έννοιες της εντροπίας και το πεδίο έρευνας που αφορά το asset pricing.

1.2 Περιγραφή Διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική εργασία διαμορφώνεται ως εξής: στο κεφάλαιο 1 γίνεται μία σύντομη αναφορά στον τομέα της φυσικής, όπου χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ο όρος “εντροπία” και περιγράφεται η χρήση του. Αναφέρονται επίσης κάποιες επιστήμες που η έννοια αυτή έχει εφαρμογή, μέσα στις οποίες ανήκει φυσικά και η επιστήμη των χρηματοοικονομικών. Στο κεφάλαιο 2, αναλύονται διάφορες μορφές εντροπίας, οι οποίες χρησιμοποιούνται στα χρηματοοικονομικά, ενώ στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφονται με λεπτομερή τρόπο οι δύο βασικές αρχές της εντροπίας που χρησιμοποιούνται σε αυτόν τον τομέα. Το κεφάλαιο 4 επικεντρώνεται στις εφαρμογές της εντροπίας στην επιλογή χαρτοφυλακίου και στο asset pricing και ειδικότερα, στο option pricing. Στο κεφάλαιο 5 περιγράφονται κάποιες πρακτικές εφαρμογές και τέλος, στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται τα συμπεράσματα των πρακτικών αυτών εφαρμογών.

2. Είδη Εντροπίας στα Χρηματοοικονομικά

2.1 Η Εντροπία του Shannon

Έστω ότι έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο από πιθανά γεγονότα των οποίων οι πιθανότητες να συμβούν είναι $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Αυτές οι πιθανότητες είναι γνωστές. Σκοπός είναι να βρούμε ένα μέτρο που να μας υποδεικνύει πόση τύχη εμπεριέχεται στο να συμβεί ένα γεγονός ή να μας υποδεικνύει το ποσοστό της αβεβαιότητας σχετικά με το αποτέλεσμα.

Αν υπάρχει ένα τέτοιο μέτρο, έστω $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ είναι λογικό να το ακολουθούν κάποιες ιδιότητες οι οποίες είναι οι εξής:

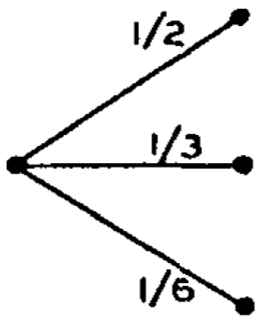
1)Το Μ πρέπει να είναι συνεχές στα p_i.

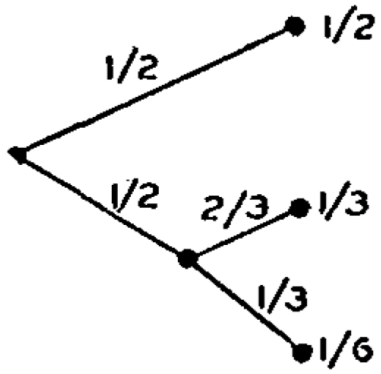
2)Αν όλα τα p_i είναι ίσα,$p_i = 1/n$ και το H πρέπει να είναι μία μονότονη αύξουσα συνάρτηση του n. Με όλα τα γεγονότα να έχουν τις ίδιες πιθανότητες να συμβούν υπάρχει περισσότερη τύχη ή αβεβαιότητα, όταν υπάρχουν περισσότερα πιθανά γεγονότα.

3)Αν μία επιλογή κατανεμηθεί σε δύο επιτυχημένες επιλογές το H θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα των μεμονωμένων τιμών του H. Θα εξηγήσουμε αυτή την πρόταση σχηματικά. Στα αριστερά έχουμε τρεις πιθανότητες $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$ και $p_3 = 1/6$. Στα δεξιά πρώτα διαλέγουμε μεταξύ δύο πιθανοτήτων κάθε μία με πιθανότητα 1/2 και αν η δεύτερη συμβεί κάνουμε άλλη μια επιλογή με πιθανότητες 2/3 και 1/3. Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει:

$H(1/2, 1/3, 1/6) = H(1/2, 1/2) + 1/2H(2/3, 1/3)$

Σχηματικά λοιπόν έχουμε:





Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψιν τα παραπάνω το μόνο H που ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω υποθέσεις είναι: H $= -\sum_{i=1}^{n} p_i \ logp_i$,όπου K είναι μία θετική σταθερά και θα τη θεωρούμε ίση με 1.

Ποσότητες τη μορφής H $= -\sum_{i=1}^{n} p_i \ logp_i$ παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία πληροφοριών σαν μέτρα πληροφορίας, επιλογής και αβεβαιότητας. Η εντροπία λοιπόν του Shannon ενός μέτρου πιθανότητας p σε ένα πεπερασμένο σύνολο δίνεται από τον τύπο H $= -\sum_{i=1}^{n} p_i \ logp_i$,όπου $\sum_{i=1}^{n} p_i$ = 1 με $p_i \geq 0 \ \kappa\alpha\iota \ 0 \ log 0 = 0$. Αν το χ είναι μία τυχαία μεταβλητή θα γράφουμε Η(χ) για την εντροπία του.

Συνεπώς το χ δεν αποτελεί στοιχείο συνάρτησης, αλλά μία ετικέτα για έναν αριθμό, για να διαφοροποιηθεί από το Η(y), την εντροπία δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής y.

Όταν ασχολούμαστε με συνεχείς κατανομές πιθανοτήτων η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αξιολογείται σε όλες τις τιμές του επιχειρήματος. Δεδομένης λοιπόν μίας συνεχούς κατανομής πιθανότητας με συνάρτηση πυκνότητας f(x) η εντροπία ορίζεται ως εξής: H = -$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x)$ dx [27].

Σε αυτό το σημείο να τονιστεί ότι οι ιδιότητες της εντροπίας είναι ίδιες για διακριτές και συνεχείς κατανομές.

2.2 Η Εντροπία του Tsallis

Η εντροπία του Tsalli παίζει σημαντικό ρόλο σε διαφορετικές επιστήμες σαν μια πιο εκτεταμένη μορφή της εντροπίας του Shannon. Επίσης γενικεύει την πληροφορία που κατέχουμε και αυτό επιτυγχάνεται από τη γραμμική διαδικασία μέσου όρου.

Ο τύπος που μας δίνει αυτή τη μέθοδο είναι ο εξής: $S_q = k\ \frac{1-\sum_{i=1}^{w} p_i^q}{q-1}$,

όπου το q είναι θετικός πραγματικός αριθμός, k είναι μία σταθερά την οποία θα τη θεωρούμε ίση με 1, w ο συνολικός αριθμός των μικροσκοπικών διαμορφώσεων και $\{p_i\}$ είναι το σύνολο των αντίστοιχων πιθανοτήτων όπου $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν το $q \to 1$, προκύπτει η εντροπία του Shannon που αναλύσαμε παραπάνω και αυτό γιατί:

$$\lim_{q\to 1} S_q = k\ \lim_{q\to 1} \frac{1-\sum_{i=1}^{w} p_i e^{[(q-1)\ln p_i]}}{q-1} = -k\sum_{i=1}^{w} p_i \ln p_i$$

Άρα λοιπόν η εντροπία του Tsalli μίας πιθανότητας μέτρου p σε ένα διακριτό σύνολο w συνοψίζεται ως εξής:

$$S_q = \begin{cases} k\ \frac{1-\sum_{i=1}^{w} p_i^q}{q-1}, & \alpha\nu\ q \neq 1 \\ -\mathrm{k}\sum_{i=1}^{w} p_i \ln p_i\,, \alpha\nu & q = 1 \end{cases}$$

Το S_q πρέπει να ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(1)Το S_q είναι για το διάστημα $0<p_i<1$ μία συνεχής συνάρτηση των $\{ p_i \}$.

(2)Για ένα δεδομένο σύνολο w που αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα, για παράδειγμα $p_i = 1/w$ το S_q είναι μία μονότονη αύξουσα συνάρτηση των w και ορίζεται ως $S_q = (w^{1-q} -1)/(1-q)$.

(3)Για 2 ανεξάρτητα συστήματα A και B η γενικευμένη εντροπία του συστήματος A+B ικανοποιεί την ψευδοαθροιστική σχέση: $S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) +(1-q)\ S_q(A)\ S_q(B)$

(4) Με $W = W_L + W_M$, $p_L = \sum_{l=1}^{W_L} p_i$,$p_M = \sum_{i=W_{L+1}}^{W} p_i$ (για αυτό $p_L + p_M = 1$) έχουμε:

$$S_q(\{p_i\}) = S_q(p_L, p_M) + p_L{}^q S_q\left(\left\{\frac{p_i}{p_L}\right\}\right) + p_M{}^q S_q\left(\left\{\frac{p_i}{p_M}\right\}\right).$$

Το Sq είναι η μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις [26].

Υπάρχει και η μαθηματική απόδειξη φυσικά, αλλά δεν είναι στους σκοπούς της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

2.3 Η Kullback-Cross Εντροπία

Οι ερευνητές για να λύσουν το πρόβλημα της διάκρισης εισήγαγαν ένα μέτρο απόστασης ή απόκλισης, όπως το ονόμασαν, μεταξύ πληθυσμών στα πλαίσια του γνωστού μας μέτρου πληροφορίας. Για έναν ερευνητή δύο πληθυσμοί διαφέρουν περισσότερο ή λιγότερο ανάλογα με το πόσο δύσκολο είναι να τους διαχωρίσεις με την αποτελεσματικότερη μέθοδο.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δίνονται οι χώροι πιθανοτήτων (X,S,μ_i) με i=1,2 τέτοια ώστε μ1≡μ2, και ας θεωρήσουμε και λ ένα μέτρο πιθανότητας που μπορεί να είναι ένας οποιασδήποτε γραμμικός συνδυασμός των μ1 και μ2. Από το θεώρημα των Radon-Nikodym εκεί υπάρχει συνάρτηση με i = 1,2 μοναδική στο λ μηδενικού μέτρου, με 0<f_i(x)<∞ έτσι ώστε να ισχύει μ_i(E) = $\int f_i\,(x)\,d\lambda(x)$ για όλα τα E∈ S. Εάν H_ι $\mu\varepsilon$ i = 1,2 είναι η υπόθεση ότι το χ επιλέχθηκε από έναν πληθυσμό του οποίου το μέτρο πιθανότητας είναι μ_i τότε ορίζουμε ως $\log\frac{f_1(\mathrm{x})}{f_2(\mathrm{x})}$ την πληροφορία στο x για το

διαχωρισμό μεταξύ του H_1 και του H_2[αυτό προκύπτει από το γνωστό θεώρημα του Bayes,όπου $\log\frac{f_1(\mathrm{x})}{f_2(\mathrm{x})} = \log\frac{P(H_1/x)}{P(H_2/x)} - \log\frac{a_1}{a_2}(\lambda)$]. Η κύρια πληροφορία για το διαχωρισμό μεταξύ H_1 και H_2 ανά παρατήρηση από το E∈ S για το μ_1 δίνεται από τον τύπο:

$$I_{1:2}(E) = \frac{1}{\mu_1(E)}\int_E d\mu_1(x)\,\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{\mu_1(E)}\int_E f_1(x)\,\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\;d\lambda(x)$$

Αυτός ο τύπος ισχύει στην περίπτωση όπου $\mu_1(\mathrm{E}) > 0$, καθώς όταν $\mu_1(\mathrm{E}) = 0$ έχουμε $I_{1:2}(\mathrm{E})$ = 0.Για να καταλήξουμε λοιπόν στην Kullback-Cross εντροπία πρέπει να τονίσουμε ότι η κύρια πληροφορία για το διαχωρισμό μεταξύ H_1 και H_2 ανά παρατήρηση από το H_1 και όχι από το Ε∈ S όπως προηγουμένως δίνεται από τον τύπο:

$$I(1{:}2) = I_{1:2}(X) = \int d\mu_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$
$$= \int f_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\ d\lambda(x).$$

και αυτός ο τύπος είναι τελικά η Kullback-Cross εντροπία ή directed divergence ή discrimination information. Η απόσταση αυτή δηλαδή μεταξύ ουσιαστικά των δύο κατανομών πιθανοτήτων 1 και 2 δεν είναι συμμετρική, δηλαδή $I_{1:2} \neq I_{2:1}$.Για να γίνει μετρική αυτή η απόσταση μπορούμε να προσθέσουμε τη $I_{1:2}(\mathrm{X})$ και τη

$I_{2:1}(\mathrm{X}) = \int f_2(\mathrm{x})\ \log \frac{f_2(\mathrm{x})}{f_1(\mathrm{x})}\, d\lambda(x)$ δηλαδή έχουμε :

$$J_{12}(E) = I_{1:2}(E) + I_{2:1}(E)$$
$$= \frac{1}{\mu_1(E)} \int_E d\mu_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{1}{\mu_2(E)} \int_E d\mu_2(x) \log \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$
$$= \int_E \left(\frac{f_1(x)}{\mu_1(E)} - \frac{f_2(x)}{\mu_2(E)} \right) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\ d\lambda(x).$$

Στην περίπτωση τώρα που έχουμε διακριτή τυχαία μεταβλητή, ο τύπος που μας δίνει την Kullback-Cross εντροπία είναι I(P:Q) = $\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}$ με $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i$ = 1 [15].

2.4 Η Tsallis Relative Εντροπία

Το πρόβλημα των συνεχών δοκιμών, όπως για παράδειγμα ένας διαχωρισμός μεταξύ δύο υποθέσεων είναι σημαντικό και ποικίλει σε διάφορες επιστήμες, όπως φυσικά και στα οικονομικά (για παράδειγμα μελετάται ο βαθμός συσχέτισης των χρονοσειρών των ποσοτήτων των οικονομικών συμφερόντων). Οι μη παραμετρικές δοκιμές με βάση τα μέτρα της εντροπίας είναι ένα πεδίο στο οποίο έχει δοθεί βαρύνουσα σημασία και μελετάται από πολλούς ερευνητές. Αρκετά χρόνια πριν ο Robinson χρησιμοποίησε την εντροπία των Kullback-Leibler η οποία είναι βασισμένη στην εντροπία του Shannon για να κάνει μία ενδιαφέρουσα σύγκριση μεταξύ εξαρτημένων και ανεξάρτητων χρονοσειρών που αναφέρονταν στις συναλλαγματικές ισοτιμίες των πολλών σημαντικών νομισμάτων έναντι του δολαρίου.

Σε μία άλλη βάση τώρα προτάθηκε αρκετά χρόνια πριν μία γενίκευση του γνωστού θεωρήματος των Boltzmann-Gibbs-Shannon η οποία απευθύνεται σε μη εκτεταμένα συστήματα και βασίζεται σε τύπο της εντροπίας. Αναφερόμενοι λοιπόν σε μία συνεχή τυχαία μεταβλητή που χαρακτηρίζεται από την κατανομή πιθανότητας p(x) έχουμε:

S_q(p) ≡ -$\int p$(x) $\frac{[p(x)]^{q-1}}{q-1}$ dx = -$\int [p(x)]^q \ \frac{[p(x)]^{1-q}-1}{1-q}$ dx,όπου $\int p$(x) dx = 1 με q∈ $\mathcal{R}$.

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $[p(x)]^{q-1}$ ~ 1+(q-1)$\ln p(x)$ προκύπτει η εντροπία του Shannon καθώς όταν το q→1 έχουμε: S_1(p) = -$\int p(x) \ln p(x) \ dx$.

Για να καταλήξουμε στη γενίκευση του Kullback Cross-entropy ας θυμηθούμε ξανά την εντροπία των Kullback και Leibler για συνεχείς κατανομές, όπου $I_1(p, p_0) = \int p(x) \ \ln \frac{p(x)}{p_0(x)}$dx = - $\int p(x) \ \ln \frac{p_0(x)}{p(x)}$ dx, όπου το p_0 καλείται κατανομή αναφοράς και η πιο συνηθισμένη κατανομή μπορεί να είναι ομοιόμορφη,Gaussian,Lorentzian ή Poisson. Έχοντας ότι $\ln r$ ≥ 1- $\frac{1}{r}$ (όπου r = $\frac{p(x)}{p_0(x)} > 0$) βλέπουμε ότι ισχύει $I_1(p, p_0) \geq 0 \ \forall (p, p_0)$.Η σχέση $I_1(p, p_0) = 0$ αν και μόνο αν p= p_0 και αυτό προκύπτει εύλογα, αφού η σχέση $I_1(p, p_0)$ δηλώνει την απόσταση μεταξύ p και p_0. Η σχέση $I_1(p, p_0)$ πρέπει να τονιστεί διότι αποτελεί τη βάση για τη συνοχή της παρούσας μη παραμετρικής δοκιμής.Μία ακόμα σημαντική ιδιότητα της $I_1(p, p_0)$ είναι ότι παραμένει μία αμετάβλητη μορφή στα πλαίσια ενός μετασχηματισμού. Πράγματι μέσου του μετασχηματισμού x=f(y) συνεπάγεται ότι p(x)dx=$\tilde{p}(y)dy$, όπου $\tilde{p}(y)$ είναι η νέα κατανομή. Αντίστοιχα και για $p_0(x)$. Είναι $\frac{p}{p_0}$ = $\frac{\tilde{p}}{\tilde{p_0}}$ οπότε $I_1(p, p_0) = \int p(x(y)) \ln \frac{\tilde{p}(x(y))}{\tilde{p}_o(x(y))}$ =$I_1(\tilde{p}, \tilde{p}_o)$ που αποδεικνύει αυτό που αναφέρθηκε προηγούμενα ότι δηλαδή η $I_1(p, p_0)$ παραμένει μία αμετάβλητη μορφή. Μία επιπλέον ιδιότητα της $I_1(p, p_0)$ η οποία είναι άξια αναφοράς είναι ότι αν επιλέξουμε μία ομοιόμορφη κατανομή για παράδειγμα την $p_0(x)$ ως υποστήριξη του μήκους W, τότε μπορεί να εξακριβωθεί ότι I_1(p,$\frac{1}{W}$) = $\ln w - S_1(p)$. Η έννοια της $I_1(p, p_0)$ και ο γενικευμένος τύπος της εντροπίας που αναφέρθηκε σε αυτή την ενότητα προηγουμένως οδηγούν στη γενίκευση

$I_Q(\text{p},p_0) \equiv \int p(x)\, \frac{[p(x)/p_0(x)]^{q-1}-1}{q-1}$ dx = - $\int p(x)\, \frac{[p_0(x)/p(x)]^{1-q}-1}{1-q}$ dx   (1)

Η σχέση (1) ονομάζεται Tsallis relative entropy όπου εύκολα παρατηρούμε ότι όταν το q→1, προκύπτει η Kullback Cross-entropy [28].

2.5 Η Fuzzy Εντροπία

Η εντροπία Fuzzy είναι ένα πολύ σημαντικό αντικείμενο έρευνας στη θεωρία των συνόλων Fuzzy. Τα σύνολα Fuzzy εισήχθησαν από το Zadeh (H_{ZE}(A,P) = - $\sum_{i=1}^{n} \mu_i\ p_i \log p_i$) το 1965 προκειμένου να παράγει μία φόρμουλα για την αντιμετώπιση μίας ποικιλίας προβλημάτων στην οποία θεμελιώδη ρόλο παίζει η αοριστία που προκύπτει περισσότερο από ένα είδος ασάφειας παρά από μία στατιστική διαφοροποίηση.

Οι Luca και Termini ήταν οι πρώτοι οι οποίοι κάνανε μία αλγεβρική ανάλυση της θεωρίας των συνόλων Fuzzy έτσι ώστε να κατανοηθεί περισσότερο η σχέση της με την κλασική θεωρία συνόλων. Σύμφωνα με τους δύο αυτούς ερευνητές η συγκεκριμένη αυτή εντροπία μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο της ποσότητας των πληροφοριών που δε σχετίζεται απαραίτητα με τυχαία πειράματα και την εισήγαγαν χωρίς τη χρησιμοποίηση πιθανοτικών εννοιών. Στη συγκεκριμένη λοιπόν αυτή θεωρία οι Luca και Termini όρισαν ότι η εντροπία είναι ένα μέτρο ασάφειας το οποίο εκφράζει τη δυσκολία στο να πάρεις μία απόφαση εάν ένα στοιχείο ανήκει στο σύνολο ή όχι [19]. Ένα τέτοιο μέτρο H(A) ενός συνόλου Fuzzy A έχει τις ακόλουθες τέσσερις ιδιότητες:

1) Το H(A) είναι ελάχιστο εάν και μόνο αν μ_A(x) = 0 ή 1 για όλα τα x
2) Το H(A) είναι μέγιστο εάν και μόνο αν μ_A(x) = 0,5 για όλα τα x
3) H(A) ≥ H(A_1), όπου ισχύει μ_{A_1}(x) ≤ μ_A(x) αν μ_A(x) ≤ 0,5 και μ_{A_1}(x) ≥ μ_A(x) αν μ_A(x) ≥ 0,5
4) H(A) = H(Ā), όπου Ā είναι το συμπληρωματικό σύνολο του A

Κατέληξαν στον εξής μαθηματικό τύπο: H_{DTE} = -k $\sum_{i=1}^{n} \mu_i\ \log p_i$ + (1- μ_i) log(1- μ_i)

Οι Bhandari και R.Pal εισήγαγαν ένα νέο μέτρο πληροφορίας για να διαχωρίσουν δύο σύνολα Fuzzy [3]. Αυτό το μέτρο κάτω από μία ειδική συνθήκη καταλήγει στη μη πιθανοτική εντροπία των Luca και Termini. Χρησιμοποίησαν επίσης το μέτρο απόστασης μεταξύ δύο συνόλων συνοδευόμενο από ένα σύνολο ιδιοτήτων το οποίο προσδιόριζε επίσης ένα μέτρο ασάφειας. Η μη πιθανοτική εντροπία του Rényi επεκτάθηκε και στον ορισμό μίας μη πιθανοτικής εντροπίας ενός συνόλου Fuzzy. Η εντροπία των Luca και Termini είναι μία ειδική περίπτωση της εντροπίας του Rényi, όταν $\alpha \to 1$.

Ένας άλλος ερευνητής που ασχολήθηκε με την εντροπία Fuzzy είναι ο Bart Kosko. Διατύπωσε ότι η εντροπία είναι αβεβαιότητα [14]. Συνδέεται με την πληροφορία και την υπόθεση και δε σχετίζεται σε καμία περίπτωση με τη θεωρία πιθανοτήτων. Ανέπτυξε ένα γενικό μέτρο εντροπίας βασισμένο σε μία διαισθητική αναλογία των αποστάσεων μεταξύ ενός συνόλου Fuzzy A και A^{near} στην απόσταση μεταξύ του A και του πιο μακρινού μη Fuzzy συνόλου A^{far} = (A^{near} $)^{c}$ ως:

H_{KOE}(q,A) = d^{q} (A, A^{near}) / d^{q} (A, A^{far})

Οι Nikhil R.Pal και James C.Bezdec αναφέρθηκαν στην probabilistic uncertainty (PU), στη resolutional uncertainty (RU) και στη Fuzzy uncertainty (FU) [23]. Η FU διαφέρει από τις PU και RU, γιατί εμφανίζεται λόγω της αοριστίας, ενώ οι PU και RU προσπαθούν να διερευνήσουν τα σύνολα που ανήκουν τα στοιχεία ή τα γεγονότα. Κάτω από κάποιες συνθήκες όμως, όπως αναφέρουν οι ερευνητές η FU σχετίζεται με την PU. Έκαναν επίσης προσπάθεια να συνδυάσουν την PU με την RU και διαπίστωσαν ότι ένα πολύπλοκο σύστημα λογικά περιέχει και τα τρία αυτά είδη αβεβαιότητας. Συσχέτισαν επίσης διάφορα μέτρα εντροπίας μεταξύ τους ώστε να βοηθήσουν τους χρήστες να διαλέξουν το κατάλληλο για την εφαρμογή που επιθυμούν.

Όλοι αυτοί οι ερευνητές που αναφέρθηκαν έδωσαν την ερμηνεία της εντροπίας η οποία χαρακτηρίζεται από την αβεβαιότητα που είναι αποτέλεσμα της αοριστίας αντί της ανεπάρκειας πληροφοριών. Σε άλλη βάση τώρα οι Li και Liu πρότειναν μία νέα ερμηνεία της εντροπίας Fuzzy η οποία χαρακτηρίζεται από την αβεβαιότητα, η οποία είναι αποτέλεσμα της ανεπάρκειας πληροφοριών επειδή δεν μπορούσαν να προβλέψουν ακριβώς τις τιμές [17]. Η κατανομή πιθανότητας μίας Fuzzy μεταβλητής μπορεί να εισαχθεί με τη βοήθεια μίας συνάρτησης συμμετοχής μ(x) ενός κανονικού συνόλου Fuzzy. Όμως παρά το ότι η κατανομή πιθανότητας και η συνάρτηση συμμετοχής έχουν κοινή μαθηματική έκφραση οι ιδέες που τις συνοδεύουν είναι διαφορετικές. Η συνάρτηση συμμετοχής αναπαριστά αβεβαιότητα στο παρόν ενός γεγονότος περιγραφόμενο ως ένα Fuzzy σύνολο ενώ η κατανομή πιθανότητας υποδεικνύει την πιθανότητα να συμβεί κάθε γεγονός το οποίο εκφράζεται από κάποιες τιμές μίας Fuzzy μεταβλητής. Όσο πιο συχνά ένα αντικείμενο ανήκει σε ένα σύνολο Fuzzy, τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός συμμετοχής.

Ένας γενικός ορισμός της αναμενόμενης τιμής μίας Fuzzy μεταβλητής ξ με συνάρτηση συμμετοχής μ(x) (ικανοποιείται η σχέση sup_x μ(x) = 1) δίνεται από τον τύπο:

E[ξ] = $\int_0^{\infty} Cr$ {ξ ≥ r} dr - $\int_{-\infty}^{0} Cr$ {ξ ≤ r} dr , όπου

Cr {ξ∈A} = $\frac{1}{2}$ ($sup_{x\in A}$ μ(x) + 1 - $sup_{x\in A^c}$ μ(x)) είναι το εναλλακτικό μέτρο για να ποσοτικοποιηθεί η πιθανότητα να συμβεί το Fuzzy γεγονός {ξ∈A}, με A να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathcal{R}$. Η συνάρτηση Cr {ξ= x} καλείται και ως καταωομή αξιοπιστίας της ξ.

Στη θεωρία πιθανοτήτων τα μέτρα πιθανότητας και αναγκαιότητας για ένα Fuzzy γεγονός {ξ∈A} εξαγόμενα από τη μ(x) δίνονται από τους εξής τύπους:

Pos {ξ∈A} = $sup_{x\in A}$ μ(x) και Nec {ξ∈A} = 1 - $sup_{x\in A^c}$ μ(x) με A οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathcal{R}$.

Αυτοί οι δύο ερευνητές όρισαν μία συνάρτηση S(t) = - t $\ln t$–(1-t) $\ln(1-t)$ με τη σύμβαση ότι 0 $\ln 0$ = 0. Η S(t) είναι γνωστό ότι είναι κοίλη στο [0 ,1] και συμμετρική στην τιμή t = 0,5.

Αν η ξ είναι μία διακριτή Fuzzy μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα $\{x_1,x_2,..\}$ τότε η εντροπία της δίνεται από τον τύπο H(ξ) = $\sum_{i=1}^{\infty} S$ (Cr {ξ= x_i}), ενώ όταν η ξ είναι μία συνεχής Fuzzy μεταβλητή, τότε έχουμε H[ξ] = $\int_{-\infty}^{\infty} S$(Cr {ξ=r}) dr, όπου S(t) = -t$\ln t$ – (1-t) $\ln(1-t)$

2.6 H Generalized Εντροπία

Στα μαθηματικά η generalized εντροπία καλείται και f – divergence. Ένα είδος της f – divergence είδαμε και στην παράγραφο 2.3, δηλαδή την Kullback – Cross entropy divergence. Οι ερευνητές Friedrich Liese και Igor Vajda γενίκευσαν την Kullback – Cross εντροπία, την ποικίλη ολική απόσταση, την Hellinger divergence και την Pearson divergence. Στην έρευνά τους όλες οι βασικές ιδιότητες των f – divergences που περιλαμβάνουν συσχετισμούς αναφορικά με τα λάθη αποφάσεως αποδεικνύονται με ένα νέο τρόπο, δηλαδή αντικαθιστώντας την κλασική ανισότητα του Jensen με μία γενικευμένη επέκταση της μεθόδου του Taylor των κυρτών συναρτήσεων. Αυτή η νέα μέθοδος δείχνει πολύ εύκολα ότι όλες οι f – divergences είναι μέσοι όροι στατιστικών πληροφοριών και διαφέρουν μόνο στα σταθμά σε σχέση με τις προηγούμενες κατανομές.

Ο Rényi εισήγαγε μία σειρά μέτρων divergence κατανομών P, Q με ιδιότητες ίδιες με αυτή της Kullback-Cross entropy περιλαμβάνοντάς την ως μία ειδική περίπτωση. Οι ερευνητές που εισήγαγαν κυρίως την f – divergence ήταν οι Ali και Silvey με τον εξής τύπο:

D_f(P,Q) = $\int \frac{dQ}{d\mu}$ f ($\frac{dP/d\mu}{dQ/d\mu}$) dμ για τις κυρτές συναρτήσεις f : (0,∞) $\rightarrow \mathcal{R}$, όπου το μ είναι ένα σ – διακριτό μέτρο το οποίο κυριαρχεί των P, Q και το ολοκλήρωμα ορίζεται στα σημεία όπου οι πυκνότητες $dP/d\mu$ και(ή) $dQ/d\mu$ είναι μηδέν.

Όταν έχουμε f(t) = t $\ln t$ η f – divergence είναι στην ουσία η Kullback-Cross entropy divergence. Για τις κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις με f(t) = t^a με α > 0 έχουμε τα λεγόμενα Hellinger ολοκληρώματα με τύπο:

H_α (P,Q) = $\int (dP/d\mu)^a\ (dQ/d\mu)^{1-a}$ dμ με α > 0

Για τις κυρτές συναρτήσεις έχουμε:

f(t) = $(\alpha - 1)^{-1}$ (t^a-1) με α > 0 και α ≠ 1 , όπου αποκτούμε τις Hellinger divergences:

H_α (P,Q) = $(\alpha - 1)^{-1}$ (H_α (P,Q) – 1) οι οποίες είναι αύξουσες συναρτήσεις των Rényi divergences με τύπο:

R_α (P,Q) = $(\alpha - 1)^{-1} \ln H_\alpha\ (\mathrm{P,Q})$ με α > 0 και α ≠ 1.

Τα όρια των Hellinger και Rényi divergences για α→1 μπορεί να μην υπάρχουν αλλά όπως αποδεικνύεται το όριο από αριστερά υπάρχει και μαζί οι Hellinger και Rényi divergences για α→1 τείνουν στην information divergence [18].

Στη σημερινή εποχή εξαιτίας της μεγάλης σημασίας των divergences στη θεωρία πληροφοριών, στη στατιστική και στη θεωρία πιθανοτήτων η προσπάθεια για απλοποίηση και επέκταση της γενικής θεωρίας των f – divergences έχει τραβήξει την προσοχή μεγάλου μέρους της επιστημονικής κοινότητας. Οι περισσότερες δημοσιεύσεις εστιάζουν στις πιο σημαντικές ιδιότητες των f – divergences.

2.7 Άλλα Είδη εντροπίας

2.7.1 Η Εντροπία του Rényi

Η βαθμονόμηση του κινδύνου μίας ουδέτερης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για μελλοντική τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων (assets) μπορεί να επιτευχθεί μεγιστοποιώντας την εντροπία του Rényi. Όταν η κλασική προσέγγιση η οποία βασίζεται στη χρήση μέτρου λογαριθμικής εντροπίας αποτυγχάνει να μας δώσει την κατανομή που θα περιγράψει τις τιμές των options η μεγιστοποίηση της εντροπίας του Rényi κάτω από κάποιους περιορισμούς είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο.

Θεωρούμε λοιπόν τη μεγιστοποίηση της εντροπίας του Renyi δοθέντων κάποιων χρονικών στιγμών της κατανομής. Συγκεκριμένα ορίζουμε την p(x) να είναι η άγνωστη συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας στη θετική πραγματική γραμμή. Επίσης υποθέτουμε ότι η k χρονική στιγμή της κατανομής p(x) είναι γνωστή και δίνεται από τη U. Ο στόχος λοιπόν είναι να βρούμε τη συνάρτηση πυκνότητας p(x), που μεγιστοποιεί την εντροπία του Rényi. Οι σχετικοί περιορισμοί λοιπόν είναι $\int_0^\infty p(x)dx = 1$ και η στιγμιαία κατάσταση $\int_0^\infty x^k \, p(x)dx = U$. Κάτω λοιπόν από αυτούς τους περιορισμούς μεγιστοποιούμε την εντροπία του Rényi:

$H_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_0^\infty p^\alpha(x)dx \quad (1),$ όπου α>0 και α ≠ 1 είναι μία σταθερά.

Η μεγιστοποίηση αυτή επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange.

Ο Rényi κατέληξε στη σχέση (1) ξεκινώντας τη μαθηματική απόδειξη από την εξίσωση του Cauchy. Η εντροπία του Rényi αποτελεί μία παραμετρική οικογένεια μέτρων πληροφορίας και μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν $\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(p)$ καταλήγουμε στην εντροπία του Shannon. Η εντροπία του Rényi δηλαδή περιλαμβάνει την εντροπία του Shannon ως μία ειδική περίπτωση [5].

2.7.2 Η Εντροπία των Havrda – Charvát

Οι Havrda – Charvat θεώρησαν ένα μη κενό σύνολο B και R(B) = $\{M_1, \ldots, M_N, \mu_1, \ldots, \mu_N\}$ $\mu\acute{\iota}\alpha$ διαμέρηση, όπου κάθε στοιχείο $M_i \in \mathrm{R(B)}$ $\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \mu(M_i)\ \mu\varepsilon\ i = 1,2,..,N$ [9]. Όρισαν ότι η σχέση S($\mu_1, \ldots, \mu_N$; α) θα καλείται structural α-entropy εάν ισχύουν τα παρακάτω:

1) S($\mu_1, \ldots, \mu_N$; α) είναι συνεχής στην περιοχή $\mu_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{i} \mu_i = 1$ με α > 0
2) S(1;α) = 0 και S($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$;α) = 1
3) S(μ_1,...,μ_{i-1},0,μ_{i+1},…, μ_N; α) = S(μ_1,...,μ_{i-1},μ_{i+1},…, μ_N; α) για κάθε i= 1,2,…,N
4) S(μ_1,...,μ_{i-1},$\nu_{i1}, \nu_{i2,}\mu_{i+1}$,…, μ_N; α) = S(μ_1,...,μ_{i-1},μ_i, μ_{i+1},…, μ_N; α) + αμ_i^α S ($\frac{\nu_{i1}}{\mu_i}$,$\frac{\nu_{i2}}{\mu_i}$;α) για κάθε ν_{i1}+ν_{i2} = $\mu_i > 0$ με i= 1,2,…,N και α > 0

Η παράμετρος α καλείται χαρακτηριστική παράμετρος. Οι Havrda – Charvat χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες και αποδεικνύοντας τα εξής λήμματα:

1) α = 1
2) Αν ν_k ≥ 0 , k = 1,…,m και $\sum_{k=1}^{m} \nu_k$ = μ_i > 0 ,τότε S(μ_1,...,μ_{i-1},$\nu_1, \ldots, \nu_{m,}\mu_{i+1}$,…, μ_N; α) = S($\mu_1, \ldots, \mu_N$; αS) + μ_i^α S ($\frac{\nu_1}{\mu_i}$,…, $\frac{\nu_m}{\mu_i}$;α)
3) Αν ν_{if} ≥ 0, j = 1,2,…,m_i, $\sum_{j=1}^{m_i} \nu_{ij}$ = μ_i > 0, I = 1,2,…,n και $\sum_{i=1}^{i} \mu_i$ = 1, τότε S(ν_{11},...,ν_{1m_1},…,ν_{n_1},…,ν_{nm_n};α) = S($\mu_1, \ldots, \mu_N$; α) + $\sum_{i=1}^{n}$ μ_i^α S ($\frac{\nu_{i1}}{\mu_i}$,…, $\frac{\nu_{im_i}}{\mu_i}$;α)
4) Αν F(n,α) = S($\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$,…, $\frac{1}{n}$;α), τότε F(mn,α)= F(m,α)+ $\frac{1}{m^{\alpha-1}}$ F(n,α) = F(n,α) + $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ F(m,α) για κάθε θετική σταθερά m,n

5) Αν α ≠ 1, τότε F(n,α) = c(α) (1- $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$), όπου c(α) είναι συνάρτηση της χαρακτηριστικής παραμέτρου α κατέληξαν στις εξής σχέσεις:

   S($\mu_1, \ldots, \mu_N$; α) = $\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$ (1 - $\sum_{i=1}^{N} \mu_i^{\alpha}$) για α > 0 και α ≠ 1 και

   S($\mu_1, \ldots, \mu_N$; 1) = - $\sum_{i=1}^{N} \mu_i \log \mu_i$

2.7.3 Η Incremental Εντροπία

Ας θεωρήσουμε ότι οι τιμές Ν μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα Ν-διάστατο διάνυσμα και η τιμή της k μετοχής έχει n_k πιθανή αξία με k=1,2,…,N. Άρα υπάρχουν W = n_1xn_2x…xn_N πιθανές τιμές διανυσμάτων. Υποθέτουμε ότι η i-οστή τιμή του διανύσματος είναι x_i = (x_{i1},x_{i2},…,x_{in}) με i = 1,2,…,W [30]. Έστω επίσης ότι η τρέχουσα τιμή του διανύσματος είναι x_0 = (x_{01},x_{02},…,x_{0n}) και η απόδοση απο την k μετοχή είναι r_{ik} όταν το τιμοδιάνυσμα x_i συμβεί. Τότε η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι: r_i = $\sum_{k=0}^{N} q_k\ r_{ik}$, όπου q_k είναι το ποσοστό της επένδυσης στην k μετοχή, q_0 είναι το ποσοστό συναλλάγματος που κρατάνε οι επενδυτές. Επίσης ισχύει r_{ik} = $\frac{x_{ik}}{x_{0k}}$, άρα r_{0k} = r_0 = (1+ interest rate). Να θεωρήσουμε ότι τα χρήματα που πρέπει να καταβληθούν για τη συσκευασία, την τιμολόγηση και τη διαπραγμάτευση με τα εμπορεύματα που αποστέλλονται συμπεριλαμβάνουν φόρο(handling charges). Τότε έχουμε: r_{ik} = (1- d $|q_k - q_{k1}|$) $\frac{x_{ik}}{x_{i0}}$, όπου d είναι τα handling charges για κάθε ανταλλαγή δολαρίου και q_{k1} είναι το προηγούμενο ποσοστό επένδυσης στη μετοχή k. Ας θεωρήσουμε ότι το τιμοδιάνυσμα r_i πραγματοποιείται N_i φορές σε Ν πειράματα επενδύσεων. Τότε η απόδοση του κεφαλαίου μετά από αυτά τα Ν πειράματα είναι: $\prod_{\iota=1}^{W} {r_i}^{N_i}$. Ο μέσος όρος απόδοσης για κάθε περίοδο είναι: $\prod_{\iota=1}^{W} r_i^{\frac{N_i}{N}}$. Αυτή η μαθηματική σχέση προτάθηκε πρώτα από τους Latane και Tuttle το 1967 και καλείται μοντέλο μεγιστοποίησης πλούτου. Παίρνοντας τη λογαριθμική αξία έχουμε:

H = $\sum_{i=1}^{W} P(x_i)\ \log r_i$ = $\sum_{i=1}^{W} P(x_i)\ \log \sum_{k=0}^{N} q_k\ r_{ik}$. Καταλήξαμε λοιπόν στον τύπο της incremental εντροπίας.

3. Αρχές της Εντροπίας στα Χρηματοοικονομικά

3.1 Η Αρχή της Μέγιστης Εντροπίας του Jayne

Κατά τη διάρκεια των περασμένων δεκαετιών η αρχή της μέγιστης εντροπίας του Jayne (Jayne's Maximum Entropy Principle ή MEP) χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση μίας ευρείας κατηγορίας πιθανολογικών συστημάτων. Η συγκεκριμένη αυτή αρχή συγκεντρώνει έννοιες από τη θεωρία πληροφοριών, τη βελτιστοποίηση και επίσης απαιτείται ακριβής γνώση για τη μερική πληροφόρηση που κατέχει ένα άτομο σχετικά με ένα πιθανολογικό σύστημα από την άποψη ενός συνόλου στατιστικών στιγμών. Το πιο βασικό στοιχείο αυτής της αρχής είναι ότι η πιο αμερόληπτη κατανομή πιθανοτήτων είναι η maximum entropy κατανομή ικανοποιώντας έτσι τους περιορισμούς. Στη maximum λοιπόν εντροπία μπορούμε να καταλήξουμε μεγιστοποιώντας το μέτρο της εντροπίας (συνήθως χρησιμοποιούμε την εντροπία του Shannon) κάτω από κάποιους περιορισμούς χρησιμοποιώντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange. Αυτή η αρχή χαίρει της εκτίμησης της επιστημονικής κοινότητας τόσο λόγω των φιλοσοφικών της θεμελίων όσο και για την επιτυχία της σε πρακτικές εφαρμογές. Λαμβάνοντας υπόψη τα τρία πιθανολογικά δεδομένα, δηλαδή το μέτρο της εντροπίας, το σύνολο των περιορισμών και την κατανομή πιθανοτήτων η MEP παρέχει μία μεθοδολογία για τον προσδιορισμό της πιο αμερόληπτης κατανομής πιθανότητας βασισμένη στη γνώση των δύο πρώτων δεδομένων. Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή του Laplace που αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.3 η πιο αμερόληπτη κατανομή όταν κάποιος δεν κατέχει κάποια προηγούμενη γνώση για ένα πιθανολογικό συμβάν είναι η ομοιόμορφη κατανομή. Οπότε η MEP αφορά τον καθορισμό της πιο αμερόληπτης κατανομής πιθανότητας όταν τα δεδομένα είναι η συνάρτηση της εντροπίας του Shannon και κάποιοι απλοί γραμμικά περιορισμοί. Η συνάρτηση αυτή είναι μία κοίλη συνάρτηση και κατά συνέπεια έχει ολικό μέγιστο. Επιπλέον η μεγιστοποίηση οδηγεί σε ένα σύνολο πιθανοτήτων με μη αρνητικές τιμές. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως το όλο ζήτημα έγκειται στη μεγιστοποίηση της σχέσης MaxS= $-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ (1) κάτω από τους περιορισμούς $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ και $\sum_{i=1}^{n} p_i \; g_r(x_i) = a_r$ (2) με p_i≥0 και r = 1,2,…,m [13]. Η συνάρτηση του Lagrange είναι:

L = $-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$-($\lambda_0$-1)[$\sum_{i=1}^{n} p_i$-1]-$\sum_{r=1}^{m} \lambda_r$[$\sum_{i=1}^{n} p_i\ g_r(x_i)$- a_r] (3)

Μεγιστοποιώντας το L, (δηλαδή παραγωγίζοντας τη σχέση (3) και εν συνεχεία θέτοντάς την ίση με το 0) έχουμε:

$\ln p_i$+λ_0+$\lambda_1 g_1(x_i)$+ $\lambda_2 g_2(x_i)$+…+ $\lambda_m g_m(x_i)$=0 με i=1,2,…,n (4) ή

$p_i = \exp[-(\lambda_0$+$\lambda_1 g_1(x_i)$+ $\lambda_2 g_2(x_i)$+…+ $\lambda_m g_m(x_i)$)] με i=1,2,…,n (5)

Για να προσδιορίσουμε τώρα τους πολλαπλασιαστές Lagrange αντικαθιστούμε τη (2) στην (5) και προκύπτει

e^{λ_0} = $\sum_{i=1}^{n} \exp[-\lambda_1 g_1(x_i)$- $\lambda_2 g_2(x_i)$-…- $\lambda_m g_m(x_i)$] και

$a_r e^{\lambda_0}$ = $\sum_{i=1}^{n} g_r(x_i)$exp[-$\lambda_1 g_1(x_i)$– $\lambda_2 g_2(x_i)$-…- $\lambda_m g_m(x_i)$].

Για την περίπτωση μίας συνεχής τυχαίας μεταβλητής η MEP απαιτεί τη μεγιστοποίηση της $-\int_a^b f(x)\ \ln f(x) dx$ υπό τους περιορισμούς $\int_a^b f(x)dx = 1\ και$ $\int_a^b f(x)\ g_r(x)dx =\ a_r\ \ με\ r = 1,2, \dots, m.$ Τα αποτελέσματα που αφορούν τη διακριτή κατανομή επεκτείνονται και στη συνεχή κατανομή.

3.2 Η Αρχή της Ελάχιστης Cross-Εντροπίας του Kullback

Όπως είδαμε και στη παράγραφο 2.3 οι Kullback και Leibler εισήγαγαν το μέτρο της εντροπίας απόστασης D(P:Q) = $\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}$ για να διαχωρίσουν την κατανομή πιθανότητας P από την Q. Όταν το P≠Q τότε το D(P:Q)>0 ενώ όταν P=Q τότε D(P:Q)=0. Όταν το Q είναι η ομοιόμορφη κατανομή U (σε αυτή την περίπτωση $q_i = \frac{1}{n}$ για κάθε i), τότε έχουμε:

D(P:U) = $\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{\frac{1}{n}}$ = $\sum_{i=1}^{n} p_i\ \log n p_i$ = $\sum_{i=1}^{n} p_i\ (\log n + \log p_i)$ = $\sum_{i=1}^{n} p_i\ \log n +$ $\sum_{i=1}^{n} p_i\ \log p_i$ = $\log n + \sum_{i=1}^{n} p_i\ \log p_i$ = $\log n$ –(-$\sum_{i=1}^{n} p_i\ \log p_i$) = $\log n$- MaxS (1) ή

S(U) – S(P)

Η σχέση (1) μας δείχνει και μαθηματικά την σχέση που συνδέει τις δύο αρχές της εντροπίας όπου H(U) είναι η εντροπία που συνδέεται με την ομοιόμορφη κατανομή και H(P) είναι η εντροπία του Shannon για την P κατανομή. Ελαχιστοποιώντας δηλαδή την D(P:U) συνεπάγεται μεγιστοποίηση της H(P) το οποίο ισοδυναμεί με την MEP [13]. Αυτό το μέτρο φαίνεται να δίνει μία άλλη εξήγηση για την MEP, ότι δηλαδή η MEP μπορεί να καθορίσει την κατανομή P, στα πλαίσια βέβαια που ικανοποιούνται οι περιορισμοί, όπου η D(P:U) είναι ελάχιστο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η κατανομή που ικανοποιεί τους περιορισμούς είναι η ομοιόμορφη κατανομή. Η αρχή της ελάχιστης Cross-εντροπίας του Kullback (Kullback's minimum Cross-entropy principle) γενικεύει αυτή την ιδέα. Ελαχιστοποιεί δηλαδή την D(P:U) και καθορίζει την κατανομή P η οποία ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και είναι ίση με μία δεδομένη κατανομή Q. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη σχέση

$\sum_{i=1}^{n} p_i \log\frac{p_i}{q_i}$ δεδομένων των περιορισμών $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ και $\sum_{i=1}^{n} p_i\ g_r(x_i) = a_r$ με $p_i \geq 0$ και r = 1,2,…,m. Η συνάρτηση του Lagrange είναι:

L = $\sum_{i=1}^{n} p_i \log\frac{p_i}{q_i} + (\lambda_0 - 1)[\sum_{i=1}^{n} p_i - 1] + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r [\sum_{i=1}^{n} p_i\ g_r(x_i) - a_r]$ έτσι ώστε

$p_i = q_i \exp[-(\lambda_0 + \lambda_1 g_1(x_i) + \lambda_2 g_2(x_i) + \ldots + \lambda_m g_m(x_i))]$ και

$e^{\lambda_0} = \sum_{i=1}^{n} q_i \exp[-\lambda_1 g_1(x_i) - \lambda_2 g_2(x_i) - \ldots - \lambda_m g_m(x_i)]$

Για την περίπτωση τώρα της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τη σχέση:

D(f:g) = $\int_a^b f(x) \log\frac{f(x)}{g(x)}$ dx κάτω από τους περιορισμούς $\int_a^b f(x)$ dx = 1 και

$\int_\alpha^b g_r(x)\ f(x)$ dx = a_r με r = 1,2,…,m. Το αποτέλεσμα δίνεται από τη σχέση

$f(x) = g(x) \exp[-(\lambda_0 + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)]$, όπου τα $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ καθορίζονται από την επίλυση των

$\int_a^b g(x)\ \exp[-(\lambda_0 + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)]$ dx = 1 και

$\int_\alpha^b g_r(x)\ g(x)\ \exp[-(\lambda_0 + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)]$ dx = a_r με r = 1,2,…,m

4. Εφαρμογές της εντροπίας στα Χρηματοοικονομικά

4.1 Εφαρμογές της εντροπίας στην επιλογή χαρτοφυλακίου

Το mean-variance μοντέλο του Markowitz το οποίο είναι βασισμένο στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις των assets ακολουθούν κανονική κατανομή υπήρξε πρωτοπόρο στην επιλογή χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με τον Markowitz η διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίου μπορεί να χωριστεί σε δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο ξεκινάει με την παρατήρηση και την εμπειρία και τελειώνει με τις πεποιθήσεις σχετικά με τις μελλοντικές κινήσεις των διαθέσιμων μετοχών. Το δεύτερο στάδιο ξεκινάει με τις σχετικές πεποιθήσεις σχετικά με τις μελλοντικές κινήσεις των μετοχών και τελειώνει με την επιλογή του χαρτοφυλακίου. Πρόσφατες έρευνες στη μεθοδολογία της επιλογής χαρτοφυλακίου έχουν δόσει έμφαση στους περιορισμούς του mean-variance μοντέλου του Markowitz. Η γενική κριτική έχει προσανατολιστεί στις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τη βέλτιστη επιλογή κάτω από το μοντέλο του Markowitz και την ανάγκη για εναλλακτικά κριτήρια ώστε να βελτιωθεί η λειτουργικότητα και η εμπειρική αποτελεσματικότητα των μοντέλων επιλογής χαρτοφυλακίου. Η χρησιμοποίηση της διασποράς ως μέτρο αβεβαιότητας είναι εδραιωμένη στη στατιστική επιστήμη και σε συνδιασμό με το μέσο χρησιμοποιείατι για να παράξει μεμονωμένες πιθανότητες. Το mean-variance μοντέλο προσφέρεται για περαιτέρω ανάλυση για κατανομές που είναι συμμετρικές από τη στιγμή που οι δύο πρώτες στιγμές ενός πληθυσμού μπορούν να υπολογιστούν από τις αντίστοιχες στιγμές των κατανομών του δείγματος. Έτσι για κατανομές που είναι μη συμμετρικές ή γενικά μη κανονικές απαιτείται ένα διαφορετικό μέτρο αβεβαιότητας, το οποίο είναι πιο γενικό από τη διασπορά και δε βασίζεται σε μία συγκεκριμένη κατανομή. Αυτό το μέτρο είναι φυσικά η εντροπία το οποίο είναι πιο γενικό από τη διασπορά και πολλοί ερευνητές το χρησιμοποιούν στη θεωρία επιλογής χαρτοφυλακίου. Οι ερευνητές McGill και Garner έδειξαν ότι η εντροπία και η ανάλυση της διασποράς είναι ανάλογες τεχνικές για να διαχωρίσεις τη μεταβλητότητα σε μετρικά δεδομένα. Οι εντροπίες μπορούν να υπολογιστούν απ’ ευθείας από τις διασπορές όταν ο τύπος της προηγούμενης κατανομής είναι γνωστός. Από τη στιγμή λοιπόν που η εντροπία μπορεί να υπολογιστεί από μη μετρικά δεδομένα η ανάλυση μέσω της εντροπίας είναι πιο γενική. Η κατασκευή της μέσης εντροπίας αποδοτικών χαρτοφυλακίων απεικονίζεται από την παράλληλη κατασκευή παρόμοιων χαρτοφυλακίων τα οποία βασίζονται στο μοντέλο του Markowitz και στου Sharpe το single-index μοντέλο [24].

4.1.1 Η εντροπία ως μέτρο κινδύνου

Όπως έχουμε αναφέρει η εντροπία είναι ένα μέτρο αβεβαιότητας που εφαρμόζεται στις δυναμικές διαδικασίες που αφορούν τη μηχανική και τη θεωρία πληροφοριών. Στην πρώτη περίπτωση μετράει αβεβαιότητα σχετικά με την κατάσταση ενός συστήματος σε κάποιο σημείο στο χρόνο, ενώ στη δεύτερη μετράει το μέσο όρο αβεβαιότητας σχετικά με τη μετάδοση ενός μηνύματος από μία κατανομή μηνυμάτων. Η χρήση του μέτρου πληροφορίας απαιτεί να ικανοποιούνται δύο προϋποθέσεις: α) το σύνολο των υπό εξέταση φαινομένων να μπορεί να χωριστεί σε μη επικαλυπτόμενα υποσύνολα και β) το σύνολο να μπορεί να περιγραφεί από μία κατανομή πιθανότητας, τέτοια ώστε κάθε υποσύνολο να παίρνει τιμές από μηδέν έως ένα.

Υπάρχουν δύο σύνολα φαινομένων που αφορούν τη χρηματοοικονομική θεωρία τα οποία μπορούν να χωριστούν σε μη επικαλυπτόμενα υποσύνολα με τις σχετικές πιθανότητες να ονομάζονται market-stimuli (ερεθίσματα της αγοράς) και investor-responses (αντιδράσεις των επενδυτών). Η μαθηματική γλώσσα της θεωρίας πληροφοριών είναι εφαρμόσιμη σε μία ποικιλία προβλημάτων υπό το πρίσμα της χρηματοοικονομικής θεωρίας. Στην επιλογή χαρτοφυλακίου τα ερεθίσματα προέρχονται από τις δευτερογενείς κεφαλαιακές αγορές στις οποίες βρίσκονται και διαπραγματεύονται τα ποικίλα χρηματοοικονομικά μέσα. Οι αντιδράσεις προέρχονται από ορθολογικούς επενδυτές οι οποίοι επιχειρούν να συνδυάσουν τα assets σε αποδοτικά χαρτοφυλάκια, έτσι ώστε για ένα δεδομένο επίπεδο μεταβλητότητας η απόδοση του χαρτοφυλακίου μεγιστοποιείται ή για μία δεδομένη απόδοση ελαχιστοποιείται η μεταβλητότητα.

Ο ρυθμός μεταβολής των κεφαλαιακών πόρων καθοδηγείται από τις ενέργειες των επενδυτών των οποίων οι δράσεις εξαρτώνται από το ρυθμό παραγωγής των πληροφοριών. Η αποτελεσματική κατανομή των πόρων ορίζεται από την ποσότητα και το ρυθμό των πληροφοριών που παράγονται, μεταδίδονται και λαμβάνονται. Από τη στιγμή που η επιλογή χαρτοφυλακίου και η κατανομή των πόρων λαμβάνουν χώρα σε πολύ ανταγωνιστικές και ευμετάβλητες αγορές, η καταλληλότητα της εντροπίας ως μέτρο αβεβαιότητας προτείνεται στην κατασκευή χαρτοφυλακίων.

● Οι Philippatos και Wilson λοιπόν προσπάθησαν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου καθώς επίσης και να ελαχιστοποιήσουν την εντροπία του χαρτοφυλακίου στα μοντέλα τους. Για να το καταφέρουν αυτό χρησιμοποίησαν τρεις εντροπίες: την individual entropy, την joint entropy και την conditional entropy. Ξεκινώντας από την individual entropy αν έχουμε στην κατοχή μας μία μετοχή της οποίας η απόδοση R είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με πιθανότητες p_i, i=1,2,…,n τότε η individual entropy ορίζεται ως $\mathrm{H} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, log p_i$, ενώ για την περίπτωση όπου έχουμε μία συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ τότε η εντροπία ορίζεται ως: $\mathrm{H} = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x)$ dx. Αναφορικά τώρα με την joint entropy. Ας θεωρήσουμε μία επένδυση σε δύο μετοχές των οποίων οι αποδόσεις R_1 και R_2 είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και μπορούν να πάρουν τις ακόλουθες τιμές: R_{1i}, i=1,2,…,n με πιθανότητα p_i, i=1,2,…,n και R_{2j}, j=1,2,…,m με πιθανότητα p_j, j=1,2,…,m. Έχουμε λοιπόν την joint entropy να ορίζεται ως εξής: $\mathrm{H}(R_{1i}\ ,\ R_{2j})$ = - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(R_{1i}\ ,\ R_{2j})\ \log_2[\mathrm{p}(R_{1i}\ ,\ R_{2j})]$, όπου $\mathrm{p}(R_{1i}\ ,\ R_{2j})$ είναι η πιθανότητα της απόδοσης 1 στην κατάσταση i και της απόδοσης 2 στην κατάσταση j. Για δύο ανεξάρτητες αποδόσεις μετοχών η εντροπία είναι το άθροισμα των individual entropies, δηλαδή $\mathrm{H}(R_1, R_2) = \mathrm{H}(R_1) + \mathrm{H}(R_2)$. Να αναφέρουμε επίσης ότι οι αποδόσεις από ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών είναι γενικά ανεξάρτητες και στις συμβατικές επιλογές χαρτοφυλακίων η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι μία συνάρτηση των διακυμάνσεων και των συνδιακυμάνσεων μεταξύ των μετοχών.

Η εντροπία των αποδόσεων από ένα χαρτοφυλάκιο είναι επίσης μία συνάρτηση των individual entropies και των conditional entropies μεταξύ των μετοχών. Όπως υποδεικνύει και το όνομά της η conditional entropy είναι η οριακή εντροπία που αποκτάται όταν συμβεί ένα γεγονός R_2 δεδομένου του να συμβεί ένα άλλο γεγονός R_1. Η conditional entropy μεταξύ δύο μετοχικών αποδόσεων ορίζεται ως:

H(R_2,R_1) = - $\sum_j^m \sum_i^n p(R_{1j}\ , R_{2i})$ $\log_2$[p($R_{2i}\ , R_{1j}$)], όπου p($R_{1j}\ , R_{2i}$) είναι η πιθανότητα της απόδοσης 2 στην κατάσταση i και της απόδοσης 1 στην κατάσταση j. Για αυτό η joint entropy δύο μη ανεξάρτητων αποδόσεων είναι:

H(R_1 , R_2) = H(R_1) + H(R_2/R_1) ή H(R_1 , R_2) = H(R_2) + H(R_1/R_2)

Η εντροπία ενός χαρτοφυλακίου με assets είναι το άθροισμα των conditional entropies των n μετοχικών αποδόσεων. Είναι:

H_p = H(R_1,…, R_n) = H(R_1) + H(R_2/R_1) + H(R_3/ R_1, R_2) +…+ H(R_n/R_1,…, R_{n-1}).

Η κατασκευή των mean-entropy αποδοτικών χαρτοφυλακίων για μεγάλο αριθμό μετοχών μπορεί να είναι τόσο πολύπλοκη όσο το full-covariance μοντέλο του Markowitz. Η υπολογιστική εργασία μπορεί να μειωθεί σημαντικά χρησιμοποιώντας ένα δείκτη βασισμένο στο πλαίσιο της εντροπίας του χαρτοφυλακίου που σχετίζεται με κάποιον δείκτη της αγοράς. Αυτή η προσέγγιση είναι ισοδύναμη με το διαγώνιο μοντέλο που προτάθηκε από τον Sharpe το 1963 για να απλοποιήσει το full-covariance μοντέλο του Markowitz. Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε τρεις μετοχές με αποδόσεις R_1, R_2 και R_3 οι οποίες σχετίζονται σε κάποιο βαθμό με την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου της αγοράς, R_I. Δεδομένων των απαιτούμενων individual, joint και conditional υποκειμενικών πιθανοτήτων , η εντροπία του single-index χαρτοφυλακίου μπορεί να γραφεί ως:

H(R_1 , R_2 , R_3, R_I) = H(R_1) + X_1 H(R_1/R_I) + X_2 H(R_2/R_I) + X_3 H(R_3/R_I) , όπου X_i είναι τα κεφάλαια που επενδύονται στη μετοχή i.

Αν η εντροπία του δείκτη είναι η ίδια για όλα τα χαρτοφυλάκια τότε έχουμε: H(χαρτοφυλακίου/R_I) = $\sum_{i=1}^{3} X_i$ H(R_ι /R_I).

Η ελαχιστοποίηση του κινδύνου μπορεί να επιτευχθεί ελαχιστοποιώντας την από πάνω συνάρτηση.

Τα κύρια πλεονεκτήματα χρήσης της εντροπίας σύμφωνα με τους Philippatos και Wilson είναι:

- Η εντροπία όπως και η διασπορά στην περίπτωση της κανονικής κατανομής είναι ανεξάρτητη του μέσου και ποικίλει άμεσα και γραμμικά με το λογάριθμο της τυπικής απόκλισης. Από τη στιγμή που η εντροπία είναι ανεξάρτητη του μέσου για όλες τις κατανομές ικανοποιεί τις συνθήκες πρώτης τάξης όπου η ανάλυση που έχει γίνει είναι περιορισμένη για την περίπτωση της κανονικότητας.

- Οι εντροπίες μπορούν να υπολογιστούν και για μετρικά και για μη μετρικά δεδομένα.
- Οι στατιστικές δοκιμές που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση πληροφοριών είναι ελεύθερες κατανομής υπό την έννοια ότι είναι επεκτάσεις της γνωστής ελεγχοσυνάρτησης ανεξαρτησίας χ^2.
- Το ποσό των πληροφοριών που μεταδίδονται είναι περίπου ο λογάριθμος του αριθμού των διακεκριμένων τάξεων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα μέτρο της ικανότητας του επενδυτή να διακρίνει μεταξύ των ποικίλων μετοχών και χαρτοφυλακίων.
- Έχει δειχθεί ότι το δείγμα πληροφορίας σχετίζεται με την πιθανότητα εμφάνισης και ότι τα μεγάλα δείγματα κατανομής της πιθανότητας εμφάνισης μπορούν να εφαρμοστούν για να βρεθούν προσεγγιστικές κατανομές για ποσότητες που εμπλέκονται στην πολυμεταβλητή μετάδοση.

Τα μειονεκτήματα της χρήσης της εντροπίας αναφορικά με τη χρηματοοικονομική θεωρία είναι:

- Η εντροπία δεν έχει ολοκληρωμένο φιλοσοφικό υπόβαθρο στις αρχές της οικονομικής θεωρίας.
- Υπάρχει πάντα ένα ποσοστό στατιστικής μεροληψίας εξαιτίας των βαθμών ελευθερίας ενός πειράματος.

Η θεωρία των Philippatos και Wilson αποδείχθηκε τελικώς πολύ χρήσιμη από τα εμπειρικά τους αποτελέσματα. Επέλεξαν τυχαία πενήντα μετοχές από το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και από το βιομηχανικό δείκτη Dow Jones. Το δείγμα αυτό των δεδομένων περιείχε μηνιαίες τιμές κλεισίματος, μερίσματα μετρητών, μερίσματα μετοχών και splits μετοχών για μία περίοδο δεκατεσσάρων χρόνων από τον Ιανουάριο του 1957 μέχρι το Δεκέμβριο του 1970. Η σχετική απόδοση υπολογίστηκε από τον τύπο: $\mathrm{R}_{\iota t} = \frac{\mathrm{P}_{it}-\mathrm{D}_{it}}{\mathrm{P}_{i,t-1}}$, όπου $\mathrm{R}_{\iota t}$ είναι η απόδοση της μετοχής i την περίοδο t, P_{it} είναι η τιμή της μετοχής i την περίοδο t και D_{it} είναι το μέρισμα της μετοχής i την περίοδο t. Αποτύπωσαν σε γραφήματα αυτά τα εμπειρικά αποτελέσματα και κατέληξαν στο ότι τα mean-entropy χαρτοφυλάκια είναι συνεπή με του Markowitz το full-covariance μοντέλο και με του Sharpe το single-index μοντέλο. Οι όποιες διαφορές παρατηρούνται είναι εξαιτίας της διαφορετικής κλίμακας που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση.

Πάνω σε αυτά τα πέντε βασικά πλεονεκτήματα της χρήσης της εντροπίας που διατύπωσαν οι Philippatos και Wilson ο ερευνητής White είχε κάποιες ενστάσεις και έτσι σε νεότερό τους άρθρο οι δύο ερευνητές διατύπωσαν ότι το mean-entropy μοντέλο δεν ήταν προορισμένο να χρησιμοποιηθεί για κατανομές που δεν έχουν μοντελοποιηθεί στην επιλογή χαρτοφυλακίου συμπεριλαμβάνοντας κάποιες μονοπαραμετρικές διακριτές κατανομές όπως η κατανομή Bernoulli και κάποιες γεωμετρικές κατανομές και μερικές συνεχείς κατανομές όπως οι εκθετικές κατανομές. Επίσης υποστήριξαν ότι παρόλο που η εντροπία παρέχει έναν ιδανικό τρόπο συσχετισμού των αναφερόμενων κερδών και των εσωτερικών δραστηριοτήτων στις κατανομές των αποδόσεων δεν είναι πάντα εφαρμόσιμη από τη στιγμή που η εντροπία είναι προσθετική οποιαδήποτε και αν είναι η πηγή. Η απόφαση για να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση η εντροπία δε βασίζεται μόνο στις ιδιότητες των μεταβλητών του κριτηρίου αλλά και στα αναμενόμενα πλεονεκτήματα από το να είσαι πιο συγκεκριμένος παρά πιο γενικός [24].

● Ένας άλλος τρόπος για επιλογή χαρτοφυλακίων είναι βασισμένος στη θεωρία fuzzy που είχαμε αναφέρει και στην παράγραφο 2.5. Και σε αυτή την περίπτωση η εντροπία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο κινδύνου. Γνωρίζουμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή της εντροπίας τόσο λιγότερη αβεβαιότητα περιέχει η απόδοση του χαρτοφυλακίου άρα είναι περισσότερο ασφαλές το χαρτοφυλάκιο. Η ερευνήτρια Huang σύγκρινε το fuzzy mean-variance μοντέλο με το fuzzy mean-entropy μοντέλο. Βασίστηκε στο ότι υπάρχουν καταστάσεις όπου οι αποδόσεις των μετοχών είναι fuzzy. Η εντροπία fuzzy δηλαδή της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου αντικατοπτρίζει το βαθμό αβεβαιότητας ενός χαρτοφυλακίου και δε χρειάζεται να γίνει η υπόθεση που αφορά τις συμμετρικές συναρτήσεις συμμετοχής των αποδόσεων των μετοχών.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν x_i την αναλογία επένδυσης σε i μετοχές, ξ_i τις μεταβλητές fuzzy που αναπαριστούν τις αποδόσεις των i μετοχών οι οποίες ορίζονται ως ξ_i = (p_i' + d_i -p_i) / p_i, i=1,2,…,n διαδοχικά, όπου p_i' είναι οι εκτιμημένες τιμές κλεισίματος των i μετοχών στο μέλλον, p_i οι τιμές κλεισίματος των i μετοχών στο παρόν και d_i τα εκτιμημένα μερίσματα των i μετοχών από το παρόν έως το μέλλον [11].

Για ένα συντηρητικό επενδυτή, θα επιδιώξει πρώτα το χαρτοφυλάκιο να είναι αρκετά ασφαλές και μετά θα επιδιώξει τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση μεταξύ των πιο ασφαλών χαρτοφυλακίων. Όσο μικρότερη είναι η αξία της εντροπίας τόσο πιο συγκεντρωτικά κατανέμεται η απόδοση του χαρτοφυλακίου. Όσο πιο συγκεντρωτικά κατανέμεται η απόδοση του χαρτοφυλακίου τόσο πιο πιθανό είναι να συμβεί η αναμενόμενη τιμή που ζητάμε. Για αυτό είναι λογικό να θέσουμε την τιμή της εντροπίας ενός χαρτοφυλακίου να είναι μικρότερη ή ίση από ένα ασφαλές επίπεδο. Ας θεωρήσουμε ότι το γ είναι το μέγιστο επίπεδο της εντροπίας που ζητάνε οι επενδυτές. Μπορούμε να εκφράσουμε το στόχο των επενδυτών και την απαίτησή τους κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Max E [$x_1\xi_1$+$x_2\xi_2$+...+$x_n\xi_n$] υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} H[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n] \le \gamma \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_i \ge 0, \;\; i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (1)$$

όπου το Η δηλώνει την εντροπία των μεταβλητών fuzzy και το Ε είναι η αναμενόμενη τιμή του διανύσματος.

Όταν ο επενδυτής όμως είναι πιο επιθετικός, θα απαιτήσει πρώτα η αναμενόμενη απόδοση να είναι αρκετά υψηλή. Μετά θα προσπαθήσει να μειώσει το επίπεδο κινδύνου όσο περισσότερο γίνεται. Αν υποθέσουμε ότι α είναι το χαμηλότερο επίπεδο απόδοσης τότε αυτή η ιδέα μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με τον ακόλουθο τρόπο:

Min H[$x_1\xi_1$+$x_2\xi_2$+...+$x_n\xi_n$] υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n] \ge \alpha \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_i \ge 0, \;\; i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (2)$$

Το fuzzy mean-variance μοντέλο περιγράφεται από τις εξής μαθηματικές σχέσεις:

Min V[$x_1\xi_1$+$x_2\xi_2$+...+$x_n\xi_n$] υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n] \ge \alpha \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_i \ge 0, \;\; i = 1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (3)$$

όπου ξ_i είναι οι fuzzy αποδόσεις των μετοχών, x_i οι αναλογίες της επένδυσης σε i μετοχές και V είναι η διακύμανση του διανύσματος . Η συνδιακύμανση της fuzzy μεταβλητής ξ με αναμενόμενη τιμή e ορίζεται ως V[ξ] = E[$(\xi - e)^2$]. Στο μοντέλο (3) η διακύμανση χρησιμοποιείται ως μέτρο κινδύνου υπό την έννοια ότι όταν η διακύμανση είναι μεγάλη η απόδοση του χαρτοφυλακίου κατανέμεται πολύ μακριά από την αναμενόμενη τιμή το οποίο δείχνει ότι είναι λιγότερο πιθανό να αποκτήσουμε την αναμενόμενη απόδοση. Από τον ορισμό της διακύμανσης βλέπουμε ότι για να αποφύγουμε το ενδεχόμενο να εγκαταλείψουμε ένα χαρτοφυλάκιο με υψηλά θετική απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή η συνάρτηση συμμετοχής της απόδοσης του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι συμμετρική. Επικεντρωνόμαστε λοιπόν στο ζήτημα της σχέσης που μπορεί να υπάρχει σε κάποιες ειδικές συμμετρικές περιπτώσεις μεταξύ του mean-variance μοντέλου με το mean-entropy μοντέλο. Η συγκεκριμένη αυτή ερευνήτρια απέδειξε μαθηματικά τα ακόλουθα δύο θεωρήματα:

- Ας υποθέσουμε ότι οι fuzzy αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν όλες κανονική κατανομή. Τότε η βέλτιστη λύση του μοντέλου (1) είναι επίσης η βέλτιστη λύση του μοντέλου (3) και αντίστροφα.
- Ας υποθέσουμε ότι οι fuzzy αποδόσεις των μετοχών είναι όλες συμμετρικές τριγωνικές fuzzy μεταβλητές, για παράδειγμα αν ξ_i = (α_i, b_i, c_i), τότε b_i-α_i = c_i-b_i με i=1,2,...,n. Τότε η βέλτιστη λύση του μοντέλου (2) είναι επίσης η βέλτιστη λύση του μοντέλου (3) και αντίστροφα.

4.1.1.1 Προγραμματιστικοί Κώδικες για την Εντροπία ως μέτρο κίνδύνου

Κώδικας της από κοινού κατανομής

Με τη βοήθεια του παρακάτω κώδικα βρίσκουμε την από κοινού κατανομή των αποδόσεων πέντε μετοχών (R1, R2, R3, R4, R5) με ένα δείκτη RI, με χρήση της εντολής hist3.

```
function [ joint_prob ] =jp(R1,R2)

global n m

[a,b]=size(R1);
joint_prob=hist3([R1,R2],[n,m])/a;

end
```

Κώδικας της περιθώριας κατανομής

Βρίσκοντας την περιθώρια κατανομή, είναι δυνατή πλέον η εύρεση της δεσμευμένης κατανομής πιθανότητας.

```
function [perith1,perith2]= perithories (joint_probability)
    global n m
    %[n,m]=size(joint_probability);
    perith1=zeros(n,1);
    perith2=zeros(m,1);
    for i=1:n
        sum1=0;
        for j=1:m
            sum1=sum1+joint_probability(i,j);
        end
        perith1(i)=sum1;
    end
    for j=1:m
        sum2=0;
        for i=1:n
            sum2=sum2+joint_probability(i,j);
        end
        perith2(j)=sum2;
    end
end
```

Κώδικας της δεσμευμένης κατανομής πιθανότητας και της δεσμευμένης εντροπίας

Έχοντας τα παραπάνω γνωστά, υπολογίζουμε τη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας των πέντε μετοχών σε σχέση με το δείκτη και τη δεσμευμένη εντροπία σύμφωνα με τον τύπο H($R_1|R_2$) = - $\sum_j^m \sum_i^n p(R_{1j}, R_{2i}) \log_2$[p($R_{1i}|R_{2j}$)].

```
function [cond1_2,cond2_1, condH1_2]= cond_prob(joint_prob,perith1,perith2)

   global n m

   %[n,m]=size(joint_prob);

    condH1_2=0;
    cond1_2=zeros(n,m);
    cond2_1=zeros(m,n);
    for i=1:n
        for j=1:m
            if perith2(j)~=0
            cond1_2(i,j)=joint_prob(i,j)/perith2(j);
            end
        end
    end
    for j=1:m
        for i=1:n
            if perith1(i)~=0
            cond2_1(j,i)=joint_prob(i,j)/perith1(i);
            end
        end
    end
```

```
    for i=1:n
        for j=1:m
            if cond1_2(i,j)~=0
            condH1_2=condH1_2 - joint_prob(i,j)*log2(cond1_2(i,j));
            end
        end
    end

end
```

Κώδικας της εντροπίας του Shannon

Ο παρακάτω κώδικας υπολογίζει την εντροπία του Shannon σύμφωνα με τον τύπο $\mathrm{H} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, log p_i$.

```
function [s_e] = shan_entropy(x)

global R n

[k,s]=size(R);

olik_athr = 0;

for i=1:s
    olik_athr=olik_athr+x(i)*R(:,i);
end

    y=hist(olik_athr,n)/k;

s_e = 0;

for i=1:n
    if y(i)~=0
    s_e = s_e - y(i)*log(y(i));
    end
end

end
```

4.1.2 Η εντροπία ως μέτρο κεφαλαιακής αύξησης

Η έννοια της incremental entropy έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 2.7.3. Αυτή λοιπόν η εντροπία η οποία δημιουργήθηκε από τον ερευνητή Ou, μετράει το χρόνο που χρειάζεται για να διπλασιάσουμε το κεφάλαιό μας. Στην παράγραφο 2.7.3 είδαμε πως βάσει της incremental entropy μπορούμε να κάνουμε βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου. Ερευνητές έχουν βρει ότι η incremental entropy, ένα είδος γενικευμένης εντροπίας, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων. Η νέα αυτή θεωρία χαρτοφυλακίου έχει κάποιες από τις ιδιότητες της θεωρίας του Markowitz, αλλά τονίζει ότι η αυξητική ταχύτητα του κεφαλαίου είναι ένα πιο αντικειμενικό κριτήριο στην αξιολόγηση των χαρτοφυλακίων. Δεδομένων των προβλέψεων των αποδόσεων μπορεί να επιτευχθεί η βέλτιστη αναλογία της επένδυσης. Συνδυάζοντας λοιπόν τη νέα θεωρία χαρτοφυλακίου και τη γενική θεωρία πληροφοριών μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα μέτρο το οποίο θα αντιπροσωπεύει αυτή την αυξητική ταχύτητα του κεφαλαίου, με την προϋπόθεση βέβαια ότι παρέχονται κάποιες πληροφορίες [22].

Πιο γενικά, ο αριθμός των επενδύσεων είναι μεγαλύτερος από ένα και οι μελλοντικές τους αποδόσεις είναι αβέβαιες. Όταν δίνεται όμως η joint κατανομή πιθανότητας των μελλοντικών τους αποδόσεων, τότε πως μπορούμε να καθορίσουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο; Ο Markowitz επισημαίνει ότι ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο είναι είτε ένα χαρτοφυλάκιο που δίνει τη μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση για ένα δεδομένο επίπεδο κινδύνου ή ένα χαρτοφυλάκιο με το μικρότερο κίνδυνο για μία δεδομένη αναμενόμενη απόδοση. Όσο για τον τρόπο με τον οποίο με τον οποίο μπορούμε να αξιολογήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο δεδομένης μίας αναμενόμενης απόδοσης και μίας τυπικής απόκλισης δεν υπάρχει κάποιο αντικειμενικό κριτήριο.

Προφανώς λοιπόν το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο του Markowitz δεν είναι το χαρτοφυλάκιο που χρειαζόμαστε για την ταχύτερη αύξηση του κεφαλαίου ή για αποδοτικό χαρτοφυλάκιο, για αυτό και χρειαζόταν ένα νέο μαθηματικό μοντέλο.

Τώρα λοιπόν θα αναλύσουμε τη βελτιστοποίηση της αναλογίας επένδυσης. Ας θεωρήσουμε ότι το P(x_i) ορίζεται από το διάνυσμα (P_i) και το q από το q_k. Αν μεταβάλλουμε το q, το H θα γίνει μέγιστο και τότε θα πάρουμε το q^*. Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστή Lagrange το H γίνεται μέγιστο όταν:

$$\sum_{i=1}^{W} \frac{P_i\, \Delta_{ik}}{r_0 + \sum_k \Delta_{ik} q_k} = 0 \quad \text{με} \quad k = 1,2,\ldots,N \quad (1)$$

Όπου Δ_{ik} =(r_{ik}- r_0), το οποίο αντιπροσωπεύει την υπερβάλλουσα απόδοση. Το q^* μπορεί να βρεθεί λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων. Από τη στιγμή που το q^* είναι συνάρτηση των (P_i) και (r_{ik}) μπορεί να γραφεί ως q^*((P_i), (r_{ik})). Όταν το (r_{ik}) είναι δεδομένο, τότε το r_i είναι συνάρτηση του q^*. Για αυτό το r_i^* είναι ίσο με το $r_i(q^*)$. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι έχουμε μία επένδυση της οποίας η απόδοση καθορίζεται ρίχνοντας ένα νόμισμα. Αν εμφανίζεται η Α πλευρά τότε θα κερδίζουμε 200% του στοιχήματός μας και αν εμφανίζεται η Β θα χάνουμε 100% του στοιχήματός μας. Στην περίπτωση αυτή έχουμε N=1 και i=1,2 , οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{P_1\Delta_1}{r_0+\Delta_1 q}+\frac{P_2\Delta_2}{r_0+\Delta_2 q}=0 \quad (2)$$

όπου P_1, P_2 είναι οι πιθανότητες να εμφανιστεί η Α και Β πλευρά διαδοχικά, q είναι η ανλογία της επένδυσης, $\Delta_1= r_1$-r_0, Δ_2=r_2-r_0. Δ_1 και Δ_2 είναι τα ποσοστά ζημίας και κέρδους μείον το διαδοχικό επιτόκιο. Από τη σχέση (2) έχουμε τη βέλτιστη αναλογία:

$$q^* = -\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta_1\Delta_2}\, r_0 \quad (3)$$

Ο αριθμητής δηλώνει την αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση. Βάζοντας $P_1 = P_2 = 1/2$, Δ_1 = -1, Δ_2 = 2, r_0 = 1 στην εξίσωση (3) έχουμε ότι q^* = 0,25. Δηλαδή η βέλτιστη αναλογία της επένδυσης είναι 25%. Όταν τα Δ_1 και Δ_2 είναι και τα δύο μεγαλύτερα και μικρότερα από το μηδέν τότε ο παραπάνω τύπος δεν είναι κατάλληλος. Σε αυτή την περίπτωση το q^* θα πρέπει να ισούται με 1 ή -1 αν η επέκταση της πίστωσης από ένα πιστωτικό οργανισμό όταν ο λογαριασμός φτάσει στο μηδέν δεν επιτρέπεται.

Από την εξίσωση (3) προκύπτει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Αν $P_1 = P_2 = 1/2$,

Δ_1 = -1 και r_0 = 1, τότε έχουμε:

$$q^* = \frac{-1+\Delta_2}{2\Delta_2} < \frac{1}{2} \quad (4)$$

Από την εξίσωση (4) μπορούμε να πούμε ότι όταν το κέρδος και η ζημιά είναι εξίσου πιθανά αν η ζημιά είναι έως και 100% θα πρέπει να μη στοιχηματίσουμε πάνω από 50% του συνολικού ποσού όσο υψηλό και αν είναι το πιθανό κέρδος. Αυτό το συμπέρασμα έχει μεγάλη σημασία για επενδύσεις υψηλού κινδύνου όπως τα futures, options κ.λ.π. Πολλά νέα άτομα στην αγορά χάνουν όλα τους τα χρήματα πολύ γρήγορα επειδή οι αναλογίες των επενδύσεων δεν είναι καλά ζυγισμένες και γενικά είναι πολύ μεγάλες. Στην εξίσωση (3) είναι πιθανά $q^* > 1$ και $q^* <0$. Το $q^* > 1$ σημαίνει ότι είναι καλύτερο να στοιχηματίσουμε το 100% του κεφαλαίου, ενώ το $q^* <0$ σημαίνει ότι είναι καλύτερο να μη στοιχηματίσουμε τίποτε [22].

Συγκρίνοντας τώρα αυτή τη νέα θεωρία με τη θεωρία του Markowitz βλέπουμε ότι αυτή η νέα θεωρία στηρίζει τα συμπεράσματα του Markowitz ότι ο κίνδυνος επένδυσης μπορεί να μειωθεί από ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο. Υπάρχουν όμως σημαντικές διαφορές.

- Η νέα θεωρία υιοθετεί την απόδοση του γεωμετρικού μέσου ως ένα αντικειμενικό κριτήριο για τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου και παρέχει μεθόδους για βελτιστοποίηση των επενδυτικών αναλογιών.
- Η νέα θεωρία ασχολείται με την επέκταση και την πιθανότητα ζημίας και κέρδους αντί της προσδοκίας και της τυπικής απόκλισης της απόδοσης για να περιγράψει την επενδυτική αξία.

4.1.3 Η εντροπία ως μέτρο διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου ή της κατανομής των asset στοχεύει στο να βρει τον καλύτερο τρόπο για έναν επενδυτή ή fund manager να κατανείμει τα funds που διαθέτει μεταξύ ενός αριθμού διαφορετικών assets. Θεωρούμε μία αγορά μετοχών με n assets που έχουν κίνδυνο και ένα χωρίς κίνδυνο asset που προσφέρει ένα σταθερό ποσοστό απόδοσης. Κριτήριο για έναν επενδυτή είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη χρησιμότητα κατανέμοντας τον πλούτο που διαθέτει μεταξύ των μετοχών στο τέλος της περιόδου [12]. Οι συμβολισμοί είναι οι εξής:

x_i είναι η αναλογία επένδυσης στο i asset με κίνδυνο με i=1,2,…,n

x_{n+1} είναι η αναλογία επένδυσης στο asset που δεν έχει κίνδυνο

R_i είναι το τυχαίο ποσοστό απόδοσης του i asset με κίνδυνο με i=1,2,…,n

r_{n+1} είναι το ποσοστό απόδοσης του asset που δεν έχει κίνδυνο

r_i είναι το E(R_i), δηλαδή το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης του i asset με κίνδυνο με i=1,2,…,n

σ_{ij} είναι το Cov(R_i, R_j), δηλαδή η συνδιακύμανση μεταξύ του R_i και R_j με i, j=1,2,…,n

γ_{ijk} είναι το E [(R_i-r_i) (R_j-r_j) (R_k-r_k)], δηλαδή η κατανομή skewness των αποδόσεων με i, j, k =1,2,…,n, όπου το μέτρο skewness μας δείχνει την ασυμμετρία της κατανομής πιθανότητας, δηλαδή μας δείχνει τον όγκο των μεταβλητών που βρίσκονται δεξιά και αριστερά από το μέσο. Η κατανομή skewness μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή απροσδιόριστη.

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου x = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι:

R(x) = $\sum_{i=1}^{n} R_i\, x_i + r_{n+1}\, x_{n+1}$

Η αναμενόμενη απόδοση, διακύμανση και η skewness του χαρτοφυλακίου x = $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ είναι διαδοχικά:

E(x) = $\sum_{i=1}^{n+1} r_i\, x_i$

V(x) = $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, x_i x_j$

S(x) = $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}\, x_i x_j x_k$

Το mean-variance μοντέλο του Markowitz μας λέει απλά ότι ένας επενδυτής θα πρέπει πάντα να επιλέγει ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο. Το κύριο πρόβλημα που παρουσιάζεται σε ένα mean-variance χαρτοφυλάκιο είναι ότι τα χαρτοφυλάκια παρουσιάζουν υψηλή συγκέντρωση σε λίγα assets το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την έννοια της διαφοροποίησης. Επίσης αυτή η μέθοδος οδηγεί σε αρνητικές τιμές για κάποια σταθμά του χαρτοφυλακίου ενώ στην πράξη οι επενδυτές απαγορεύεται να κάνουν short-selling. Οπότε αφού η εντροπία χρησιμοποιείται ως μία αντικειμενική συνάρτηση για να καθορίσει τα σταθμά του χαρτοφυλακίου τα σταθμά που τελικώς παίρνουμε γίνονται αυτόματα μη αρνητικά [12]. Υπάρχει λοιπόν ένα άλλο κριτήριο που έχει εισαχθεί για να λύσουμε το πρόβλημα της διαφοροποίησης. Λύνουμε το τετραγωνικό πρόβλημα του mean-variance μοντέλου επιλογής χαρτοφυλακίου και μετά εφαρμόζουμε το μέτρο της εντροπίας για να συμπεράνουμε πόσο το χαρτοφυλάκιο είναι διαφοροποιημένο. Το βέλτιστο καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο μπορεί να επιτευχθεί ως εξής:

Maximize S(x) = $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}\, x_i x_j x_k$

Maximize E(x) = $\sum_{i=1}^{n+1} r_i\, x_i$

Minimize V(x) = $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, x_i x_j$

Maximize E_n(x) = - $\sum_{i=1}^{n+1} \log x_i$

υπό τον περιορισμό $\sum_{i=1}^{n+1} x_i$ = 1 με $x_i \geq 0$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε έναν άλλο τρόπο για να λύσουμε το πρόβλημα της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Τα μειονεκτήματα του mean-variance μοντέλου του Markowitz που αναφέραμε προηγουμένως δημιουργούνται εξαιτίας στατιστικών λαθών όταν υπολογίζουμε τα συγκεκριμένα ποσοτικά μέτρα του μέσου, της διακύμανσης και της skewness τα οποία χρησιμοποιούνται ως δεδομένα στη βελτιστοποίηση του mean-variance μοντέλου. Αυτά τα λάθη έχουν ως συνέπεια να αλλάζουν τα βέλτιστα σταθμά του χαρτοφυλακίου κατά τέτοιο τρόπο ώστε πολλές φορές να προκύπτουν ακραίες θέσεις για το χαρτοφυλάκιο. Έχει γίνει εκτενής έρευνα για να μειωθούν τα στατιστικά λάθη στο μέσο και στον πίνακα της συνδιακύμανσης. Μία εναλλακτική για να επιτευχθεί αυτό είναι οι εκτιμητές shrinkage. Οι εκτιμητές shrinkage αντισταθμίζουν τα θετικά (αρνητικά) σφάλματα που τείνουν να ενσωματωθούν σε υπερβολικά υψηλούς (χαμηλούς) εκτιμημένους συντελεστές μεταβάλλοντάς τους κάτω (πάνω) και αποτρέπουν με αυτό τον τρόπο τις ακραίες θέσεις για το χαρτοφυλάκιο. Έτσι λοιπόν με τη βοήθεια των shrinkage εκτιμητών προτείνεται ένας άλλος τρόπος διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου [2]. Έχοντας αναφέρει και την έννοια της Kullback-Cross εντροπίας στην παράγραφο 2.3 η αντικειμενική μας συνάρτηση, το κριτήριο πληροφορίας των Kullback-Leibler ορίζεται ως η ψευδοαπόσταση μεταξύ δύο κατανομών πιθανοτήτων (σταθμά χαρτοφυλακίου), p= $(p_1, p_2, \dots, p_N)'$ και q = $(q_1, q_2, \dots, q_N)'$, δηλαδή: KLIC (p,q) = $\sum_{i=1}^{N} p_i \ln(p_i/q_i)$ (1).

Αν λοιπόν κάποιος ελαχιστοποιήσει την Kullback-Cross εντροπία με το q σαν μία κατανομή αναφοράς που ικανοποιεί συγκεκριμένους περιορισμούς μπορεί να πάρει μία λύση p η οποία είναι η πιο κοντινή στην q. Αν θεωρήσουμε ότι η q = $(1/N, 1/N, \dots, 1/N)'$ είναι ομοιόμορφη κατανομή, τότε η KLIC (p,q) είναι η ίδια όπως το αρνητικό μέτρο της εντροπίας του Shannon. Από τη στιγμή που θα μεγιστοποιήσουμε την εντροπία του Shannon υπό κάποιους περιορισμούς συνεπάγεται ότι υπολογίζοντας την p η οποία είναι η πιο κοντινή στην ομοιόμορφη κατανομή (δηλαδή τα σταθμά του χαρτοφυλακίου είναι τα ίδια) ένα βέλτιστο καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο μπορεί να επιτευχθεί.

Η κατανομή του χαρτοφυλακίου π = $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)'$ μεταξύ N assets με κίνδυνο με ιδιότητες $\pi_i \geq 0$, i=1,2,…,N και $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$, έχει τη δομή μίας κατάλληλης κατανομής πιθανότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε την εντροπία του Shannon

$SE(\pi) = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i$ (2) ως μέτρο διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Όταν

$\pi_i = 1/N$ για όλα τα i, η $SE(\pi)$ έχει τη μέγιστη τιμή της $\ln N$. Η άλλη περίπτωση συμβαίνει όταν $\pi_i = 1$ για ένα i και μηδέν για τα υπόλοιπα όπου και έχουμε

$SE(\pi) = 0$. Ως εκ τούτου, η SE η οποία παρέχει ένα καλό μέτρο διαταραχής σε ένα σύστημα ή μία αναμενόμενη πληροφορία σε μία κατανομή πιθανότητας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου. Στις χρηματοοικονομικές εφαρμογές τα χαρτοφυλάκια γενικά αξιολογούνται βάσει του βαθμού διαφοροποίησης χρησιμοποιώντας το μέτρο SE. Τοποθετούμε λοιπόν την εντροπία σε μία αντικειμενική συνάρτηση ώστε να αποκτήσουμε τη μέγιστη ποικιλία σε ένα χαρτοφυλάκιο. Είναι ξεκάθαρο ότι όταν μεγιστοποιήσουμε την $SE(\pi)$ συρρικνώνουμε το χαρτοφυλάκιο σε άλλο ένα με ίσα σταθμά, το $N^{-1}1 = (1/N, 1/N, \dots, 1/N)'$. Θα θεωρήσουμε επίσης μία πιο γενική αντικειμενική συνάρτηση. Ας υποθέσουμε ότι τα σταθμά ενός χαρτοφυλακίου αλλάζουν από π_i σε q_i, τότε η αλλαγή στην εντροπία είναι $-\ln q_i$ - $(-\ln \pi_i)$ = $\ln(\pi_i/q_i)$. Παίρνοντας το μέσο όρο του $\ln(\pi_i/q_i)$ με τα π_i ως σταθμά καταλήγουμε στην έννοια της CE(cross-entropy), με CE(p,q) = KLIC (p,q) που προσδιορίσαμε στην (1). Βλέπουμε ότι όταν q = $(1/N, 1/N, \dots, 1/N)'$,

CE(p,q) = $= \sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i$ - $\ln N$. Άρα η μεγιστοποίηση της SE στη (2) είναι μία ειδική περίπτωση της ελαχιστοποίησης της CE σε μία σχέση με εξίσου σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο. Άρα λοιπόν θα ελαχιστοποιήσουμε τη σχέση CE(p,q) για ένα δεδομένο q ως μία λογική ευκαιρία για έναν επενδυτή. Ξεκινώντας από μία αρχική κατανομή χαρτοφυλακίου q μέσω της ελαχιστοποίησης της CE μπορούμε να αποκτήσουμε ένα καλύτερα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο [2]. Ο ερευνητής Golan έδειξε ότι:

CE(π,q) = $\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} (\pi_i - q_i)^2$ για $q_i > 0$.

Προσαρμόζοντας οπότε μικρές κατανομές του αρχικού χαρτοφυλακίου q περισσότερο από τις μεγάλες καταλήγουμε σε ένα πιο διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο.

Η εντροπία μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σε άλλα μοντέλα ως ο βαθμός διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της εντροπίας τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Ας θεωρήσουμε ένα πολλών περιόδων πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου με n assets που έχουν κίνδυνο. Τα ποσοστά απόδοσης αυτών των assets δηλώνονται ως fuzzy μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής μπαίνει στην αγορά στην αρχή μίας περιόδου 1 με αρχικό κεφάλαιο W_1. Ο επενδυτής σκοπεύει να κατανείμει το κεφάλαιό του μεταξύ n assets με κίνδυνο για να κάνει ένα επενδυτικό πλάνο T περιόδων. Το κεφάλαιό του μπορεί να ανακατανεμηθεί μεταξύ των n assets με κίνδυνο στην αρχή των επόμενων T-1 συνεχόμενων χρονικών περιόδων [31]. Έτσι λοιπόν οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν μετά έχουν ως εξής:

$x_{t,i}$ είναι η αναλογία επένδυσης των i assets με κίνδυνο την περίοδο t

$x_{0,i}$ είναι η αρχική αναλογία επένδυσης των i assets με κίνδυνο την περίοδο 1

x_t είναι το χαρτοφυλάκιο την περίοδο t, με x_t = ($x_{t,1}$, $x_{t,2}$,..., $x_{t,n}$)

$R_{P,t}$ είναι το ποσοστό απόδοσης του χαρτοφυλακίου x_t την περίοδο t

Κινέζοι ερευνητές για να λύσουν το αποκεντρωμένο επενδυτικό πρόβλημα ανέπτυξαν την πιθανοτική εντροπία για να μετρήσουν το βαθμό διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Πρώτα θα αναφέρουμε την υπάρχουσα αναλογία εντροπίας η οποία δείχνει το βαθμό διαφοροποίησης για ένα πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου μίας περιόδου. Η μαθηματική έκφραση είναι η παρακάτω:

E_n(y) = -$\sum_{i=1}^{n} y_i \ln y_i$, (3) όπου το y_i δηλώνει την αναλογία επένδυσης για το i asset με i = 1,2,…,n

Από την εξίσωση (3) έχουμε ότι $y_i > 0$, δηλαδή κάθε asset πρέπει να επιλεγεί για την κατασκευή του χαρτοφυλακίου. Όταν $y_1 = y_2$=...=$1/n$, τότε η (3) παίρνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή ο βαθμός διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου είναι μέγιστος. Παρ' όλα αυτά στην πράξη ένας επενδυτής μπορεί να μη θέλει να κατανείμει το κεφάλαιό του σε κάθε asset για να κατασκευάσει ένα υπερβολικά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο. Ειδικότερα όταν ο επενδυτής προβλέψει το ποσοστό απόδοσης στο asset i το r_i είναι μικρότερο από το ποσοστό απόδοσης χωρίς κίνδυνο r_f και ο επενδυτής μπορεί να μη δύναται να υποστηρίξει την επένδυση στο asset i, δηλαδή

$y_i = 0$. Έτσι χρησιμοποιώντας την εντροπία της σχέσης (3) υπάρχει μία αντίθεση αναφορικά με την αντίληψη του επενδυτή για τη διαφοροποίηση. Για να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία της εντροπίας χρησιμοποιούμε την πιθανοτική εντροπία για να μετρήσουμε το βαθμό διαφοροποίησης ενός χαρτοφυλακίου στην περίπτωση μίας περιόδου. Έτσι έχουμε:

PE_s(y) = $-\sum_{i=1}^{n}[\frac{y_i\theta(y_i)}{2}\ln(\varepsilon + \frac{y_i\theta(y_i)}{2}) + (1-\frac{y_i\theta(y_i)}{2})\ln(1-\frac{y_i\theta(y_i)}{2})]$

όπου το ε είναι ένας αρκετά μικρός θετικός αριθμός,

$\frac{\max\{E(r_i)-r_f,0\}}{Var(r_i)}$ είναι η αναλογία της αμοιβής της μεταβλητότητας του asset i την περίοδο t,

$\theta(y_i) = \frac{\max\{E(r_i)-r_f,0\}}{Var(r_i)} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{\max\{E(r_i)-r_f,0\}}{Var(r_i)}$ είναι ο συντελεστής προσαρμογής της y_i,

E(r_i) και Var(r_i) δηλώνουν την πιθανοτική μέση τιμή και διακύμανση του fuzzy ποσοστού απόδοσης του asset i διαδοχικά.

Πρακτικά δηλαδή αν E(r_i) $< r_f$ τότε $y_i = 0$. Άρα η πιθανοτική εντροπία είναι πιο κατάλληλη να εκφράσει την αντίληψη του επενδυτή σχετικά με την κατανομή της επένδυσης από ότι το ποσοστό της εντροπίας. Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε την εντροπία στην περίπτωση με πολλές περιόδους για τη μέτρηση του βαθμού διαφοροποίησης ενός προβλήματος επιλογής χαρτοφυλακίου με πολλές περιόδους. Έχουμε:

PE_m(x) = $-\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}[\frac{x_{t,i}\theta(x_{t,i})}{2}\ln(\varepsilon + \frac{x_{t,i}\theta(x_{t,i})}{2}) + (1-\frac{x_{t,i}\theta(x_{t,i})}{2})\ln(1-\frac{x_{t,i}\theta(x_{t,i})}{2})]$ με $\frac{\max\{E(r_{t,i})-r_f(t),0\}}{Var(r_{t,i})}$ $\nu\alpha$ είναι η αναλογία της αμοιβής της μεταβλητότητας του asset i την περίοδο t, $\theta(x_{t,i}) = \frac{\max\{E(r_{t,i})-r_f(t),0\}}{Var(r_{t,i})} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\frac{\max\{E(r_{t,i})-r_f(t),0\}}{Var(r_{t,i})}$ είναι ο συντελεστής προσαρμογής του $x_{t,i}$, $r_f(t)$ είναι το χωρίς κίνδυνο ποσοστό του χαρτοφυλακίου την περίοδο t, τα E($r_{t,i}$) και Var($r_{t,i}$) δηλώνουν την πιθανοτική μέση τιμή και διακύμανση του fuzzy ποσοστού απόδοσης του asset i την περίοδο t διαδοχικά [31].

4.2 Εφαρμογές της εντροπίας στην αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων

4.2.1 Η εντροπία στην αποτίμηση των options

Πολλοί ερευνητές στο παρελθόν όταν υπήρχαν περιορισμένες διαθέσιμες πληροφορίες για την κατανομή που ακολουθεί ένα option προσπαθούσαν να κάνουν pricing σε αυτό το option κάνοντας κατάλληλες προσεγγίσεις. Το 1996 λοιπόν οι ερευνητές Buchen και Kelly ασχολήθηκαν με το πρόβλημα του πώς να εξάγουν την κατανομή πιθανότητας που ακολουθεί ένα asset από τις ανεπαρκείς και περιορισμένες πληροφορίες της αγοράς όπως αυτές θα ήταν διαθέσιμες στην αγορά των options [6]. Υιοθέτησαν λοιπόν μία διαφορετική προσέγγιση από προηγούμενους ερευνητές. Χρησιμοποίησαν τη γνωστή μέθοδο του Bayes της επαγωγικής στατιστικής που εκτιμά την κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής από τη μερική πληροφόρηση υπό τη μορφή ενός πεπερασμένου αριθμού προσδοκιών. Παρά το ότι υπάρχει θεωρητικά ένας άπειρος αριθμός τέτοιων κατανομών ο Jaynes πιστεύει ότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος να επιλεγεί η κατανομή με ένα τρόπο στις πληροφορίες που δίνονται και αυτός ο τρόπος είναι η αρχή της μέγιστης εντροπίας (MEP) που είδαμε και στην παράγραφο 3.1. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μόνο τις πληροφορίες αναφορικά με τις τιμές που δίνονται και θα παράξει μία συνάρτηση πιθανότητας στη διακριτή περίπτωση (αντίστοιχα μία συνάρτηση πυκνότητας στη συνεχή περίπτωση) ακόμα και αν υπάρχει μία μοναδική τιμή για το option. Επιπλέον η πυκνότητα είναι εγγυημένα μη αρνητική και ικανοποιεί τη συνθήκη στο άθροισμά της. Σύμφωνα με τον Jaynes η προκύπτουσα πυκνότητα θα είναι η λιγότερο προκατειλημμένη εκτίμηση η οποία είναι συμβατή με τις δεδομένες πληροφορίες αναφορικά με την τιμή υπό την έννοια ότι θα είναι το μέγιστο επιφυλακτική όσον αφορά ανεπαρκείς ή άγνωστες πληροφορίες. Η θεωρία των Buchen και Kelly δείχνει ότι η μέθοδος της μέγιστης εντροπίας βασίζεται μόνο στις παρατηρούμενες τιμές των options οι οποίες μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις προσδοκίες μίας λειτουργικής γνωστής τιμής. Αυτή η λειτουργική τιμή μπορεί να είναι αρκετά γενική και περιορίζεται μόνο από το υπό έρευνα μοντέλο. Έτσι οι δύο αυτοί ερευνητές εφάρμοσαν την MEP στην περίπτωση των απλών call και put options σε ένα asset. Υπέθεσαν ότι το asset δεν πληρώνει μέρισμα και έκαναν τις συνηθισμένες υποθέσεις (οι οποίες δεν περιλαμβάνουν δαπάνες συναλλαγής, φόρους και ευκαιρίες για arbitrage) για τα ευρωπαϊκά options σε μία ισορροπία της αγοράς. Τότε η Maximum Entropy Distribution (MED) θα δίνεται από τον τύπο:

$p(x) = \frac{1}{\mu}$ exp [$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, c_i$(x)] και μ = $\int_0^\infty$ exp [$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, c_i$(x)] dx, όπου μ = $e^{-\lambda_0}$ είναι η σταθερά για την πιθανοτική περιοριστική εξίσωση $\int_0^\infty p(x)\, dx = 1$ και λ_i είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Το εκθετικό διασφαλίζει ότι το $p(x) \geq 0$ και είναι η απόδειξη ότι ο μαθηματικός τύπος της πυκνότητας εξαρτάται μόνο από τον τύπο και τον αριθμό των περιοριστικών συναρτήσεων c_i(x). Ας είναι i ο δείκτης των strike prices K_i, τότε για ένα call option έχουμε:

c_i(x) = D(T) $(\mathrm{x} - K_i)^+$ = D(T) max(0,x-K_i) και για ένα put option:

c_i(x) = D(T) $(K_i - x)^+$ = D(T) max(0,$K_i - x$).

Το D(T) δηλώνει το συντελεστή προεξόφλησης της παρούσας αξίας στο χρόνο T και ενεργεί μόνο ως πολλαπλασιαστική σταθερά. Για παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε D(T) = e^{-rT} με ένα σταθερό risk-free r ή την τιμή B(T) ενός ομολόγου με ονομαστική αξία 1$ και περίοδο ωρίμανσης T.

Αν η i τιμή αναφοράς είναι η τρέχουσα τιμή του asset, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ως c_i(x) = D(T) x, το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα call option με strike price 0.

Οι Buchen και Kelly λοιπόν ανέπτυξαν ένα μοντέλο τιμολόγησης και πήραν ένα σύνολο από τιμές options με διαφορετικά strike prices.Αυτά τα δεδομένα ήταν από μόνα τους ανεπαρκή να καθορίσουν την κατανομή του asset. Παρ’ όλα αυτά αν αυτές οι τιμές χρησιμοποιηθούν για να περιορίσουν την κατανομή που έτσι και αλλιώς έχει μέγιστη εντροπία ή ελάχιστη μία μοναδική κατανομή μπορεί να αποκτηθεί [6]. Η έρευνα έδειξε ότι η MED μπορούσε να πλησιάσει μία γνωστή πυκνότητα με ακρίβεια με δεδομένα προσομοιωμένες τιμές options με διαφορετικά strike prices.

Στον τομέα του option pricing είναι απαραίτητο να αναφέρουμε και τον ερευνητή Gulko. Οι παραδοσιακές μέθοδοι αποτίμησης βάσει του arbitrage είναι αποτελεσματικές σε πλήρεις αγορές, αλλά σε μη πλήρεις αγορές μπερδεύονται κάτω από την πολλαπλότητα των διάφορων πυκνοτήτων των τιμών. Διατύπωσε λοπόν μία θεωρία με δύο βασικούς άξονες [7][8]. Πρώτον, η στατιστική ανάλυση υποδηλώνει ότι οι πεποιθήσεις της αγοράς δεν είναι όλες εξίσου πιθανές, δηλαδή συμβαίνουν με διαφορετικές πιθανότητες και οι πιο πολλές από αυτές συμβαίνουν με πολύ μικρές πιθανότητες. Δεύτερον, η εντροπική ερμηνεία της στατιστικής ανάλυσης συνεπάγεται ότι σε πληροφοριακά αποτελεσματικές αγορές οι πεποιθήσεις που βασίζονται στη μέγιστη εντροπία πρέπει να επικρατήσουν. Το πλαίσιο αυτό της μέγιστης εντροπίας καλείται Entropy Pricing Theory (EPT). H EPT προσφέρει την κατασκευή μοναδικών ουδετέρου κινδύνου πιθανοτήτων και σε πλήρεις και σε μη πλήρεις οικονομίες της αγοράς χωρίς να βασίζεται σε παραμετρικοποιήσεις της πυκνότητας και σε στοχαστικούς υπολογισμούς.

Η οικονομική σημασία της EPT είναι ότι κάνει λειτουργική την Efficient Market Hypothesis (δηλαδή ότι οι τιμές των πληροφοριακά αποτελεσματικών αγορών αντανακλούν πλήρως όλες τις σχετικές διαθέσιμες πληροφορίες), δηλαδή η μέγιστη εντροπία συγκεντρωτικά των πεποιθήσεων των επενδυτών είναι μία απαραίτητη συνθήκη για την πληροφοριακή αποδοτικότητα των τιμών της αγοράς. Έχοντας παρατηρήσει μία αποτελεσματική τιμή της αγοράς, οι επενδυτές ως ομάδα πρέπει να είναι απολύτως αβέβαιοι σχετικά με την επόμενη κίνηση της τιμής. Αν η εντροπία χρησιμοποιείται για να δείξει την αβεβαιότητα της αγοράς, τότε οι συγκεντρωτικές πεποιθήσεις των επενδυτών σχετικά με τις μελλοντικές αλλαγές της τιμής πρέπει να χαρακτηρίζονται από τη μέγιστη εντροπία που βασίζεται σε γνωστές πληροφορίες οι οποίες περιλαμβάνουν τιμές της αγοράς και πιθανώς κάποια άλλα δεδομένα. Για παράδειγμα όταν η πληροφορία αποτελείται από τους μέσους και τις αποδόσεις των μελλοντικών τιμών ή των αποδόσεων οι κατανομές της μέγιστης εντροπίας ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών που περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων την κανονική και τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι r = $[r_i]\in R^n$ να είναι ένα διάνυσμα στήλης τυχαίων μετοχικών αποδόσεων όπου r_i είναι η τυχαία απόδοση του asset i για 1≤ i $\leq n$. Έστω p(r) η μέγιστη εντροπία της joint πυκνότητας-πιθανότητας των μετοχικών αποδόσεων. Επίσης έχουμε μ = $[\mu_i]$≡E(r) με $\mu_i \equiv$ E(r_i) για 1≤ i $\leq n$. Ας είναι επίσης V = $[\nu_{ij}]$ ο πίνακας συνδιακύμανσης των αποδόσεων με ν_{ij} = E [(r_i-μ_i) (r_j-μ_j)] με 1≤ i και j≤n. Υποθέτοντας ότι η απόδοση οποιασδήποτε μετοχής μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αποδόσεων άλλων μετοχών ο πίνακας V είναι μη αντιστρέψιμος. Ο Gulko υπέθεσε ότι ο χώρος απόδοσης R=R^n είναι ένας dart board και επανέλαβε αυτό το εγχείρημα στο χώρο R. Ισχυρίστηκε ότι η p(r) είναι κανονική πυκνότητα και για να το δείξει αυτό έπρεπε να λάβει υπόψιν μόνο τις διακυμάνσεις παραβλέποντας τους μέσους. Έτσι λοιπόν παρέλειψε τους περιορισμούς των μέσων και έδειξε ότι η joint κανονική πυκνότητα ακολουθεί το ακόλουθο σύστημα:

Max - $\int u \,\log(u)\, dr$ κάτω από τους περιορισμούς $\int u \, dr$ = 1, $\int u\, r\, r^T \, dr$ = V και

u(r) > 0 στο χώρο R. Το μέγιστο είναι μία πυκνότητα πιθανότητας του τύπου:

$\frac{\exp(\sum_{ij} \lambda_{ij}\, r_i\, r_j)}{\int exp(\sum_{ij} \lambda_{ij}\, r_i\, r_j)\, dr}$, όπου λ_{ij} είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange που σχετίζεται με τον στιγμιαίο περιορισμό ν_{ij}. Από τη στιγμή που ο εκθέτης είναι μία τετραγωνική μορφή των μετοχικών αποδόσεων προκύπτει ότι αυτή η πυκνότητα πιθανότητας είναι μία πολυμεταβλητή κανονική με μέσο μηδέν. Επίσης από τη στιγμή που πρέπει να πληροί τους περιορισμούς της διακύμανσης πρέπει να είναι μία πολυμεταβλητή κανονική με τον πίνακα συνδιακύμανσης V. Έτσι σε μία αγορά μετοχών η μέγιστη εντροπία της πυκνότητας p(r) είναι μία joint κανονική p(r) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{|V|^{1/2}}\, e^{-\frac{(r-\mu)^T\, V^{-1}\,(r-\mu)}{2}}$, όπου $|V|$ είναι η ορίζουσα του V. Επίσης κατ' αναλογία με τη μονοπαραγοντική περίπτωση η κοινή πυκνότητα f(S_T) των τυχαίων τιμών των μετοχών $S_T \in R_+^n$ είναι μία πολυπαραγοντική λογαριθμοκανονική. Ο Gulko λοιπόν εισήγαγε έναν εναλλακτικό τρόπο για την αποτίμηση των ευρωπαϊκών stock options [7][8]. Το κύριο χαρακτηριστικό της νέας αυτής μεθόδου είναι η γάμμα κατανομή πιθανότητας η οποία αντικαθιστά τη λογαριθμοκανονική κατανομή στο μοντέλο των Black-Scholes. Το γάμμα μοντέλο σε αντίθεση με το μοντέλο των Black-Scholes δεν περιορίζει την τιμή της μετοχής ή τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια ή τις αποδόσεις των μετοχών. Έχουμε:

τρέχουσα τιμή μετοχής S, τρέχουσα τιμή ομολόγου χωρίς κίνδυνο P και strike price K, τότε η γάμμα πυκνότητα είναι

f(S_T) = γ(S_T/u,v) ≡ $\frac{u^v}{\Gamma(v)}\, S_T^{v-1} e^{-uS_T}$, όπου u = $\frac{(S/P)}{\sigma^2}$ και v = $\frac{(S/P)^2}{\sigma^2}$

Τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής γάμμα ορίζεται ως:

G(y/u,v) ≡ $\int_0^y \gamma$(z/u,v) dz και προφανώς η συμπληρωματική αθροιστική συνάρτηση κατανομής γάμμα ορίζεται ως:

$\overline{G}$ (y/u,v) ≡ 1- G(y/u,v)

Οπότε οι γάμμα τιμές των ευρωπαϊκών call και put options είναι:

Call = S$\overline{G}$ (K/u,v+1) - PK$\overline{G}$ (K/u,v) και Put = PKG(K/u,v) - SG(K/u,v+1).

Το γάμμα μοντέλο λοιπόν απαιτεί μόνο τέσσερα δεδομένα, τα K, P, S και σ^2. Αυτός ο τρόπος έχει τη δομή, την απλότητα και αρκετές ιδιότητες του μοντέλου Black-Scholes, όπως για παράδειγμα, το ότι και οι δύο τρόποι επαληθεύουν την ταυτότητα put-call parity. Το γάμμα μοντέλο παραμετρικοποιεί την τιμή μίας φανταστικής σταθερής ταμειακής ροής. Η διαδικασία καθορισμού της πραγματικής τιμής μίας μετοχής δεν επηρεάζεται από την παραμετρικοποίηση. Για παράδειγμα η παραμετρικοποίηση του x(t) δεν αποτρέπει τη μεταβλητότητα της πραγματικής τιμής της μετοχής από το να είναι τυχαία.

4.2.2 Η εντροπία σε παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

Τα παράγωγα προϊόντα είναι χρηματοοικονομικά συμβόλαια που χαρακτηρίζονται από το γνώρισμα ότι η τιμή τους είναι συνάρτηση του μελλοντικού μεγέθους ενός ή περισσότερων assets γνωστά ως ο υποκείμενος τίτλος. Παραδείγματα χρηματοοικονομικών παραγώγων είναι τα futures, τα options, τα swaps,τα warrants, τα convertible bonds. Τα παράγωγα προϊόντα είναι αναπόσπαστο κομμάτι της κερδοσκοπίας και του risk management παρέχοντας ένα μέσο για τον risk manager να αντισταθμίσει τον κίνδυνο ενάντια σε μη επιθυμητές κινήσεις της αγοράς και για τον κερδοσκόπο να συμμετάσχει σε εκείνες τις κινήσεις της αγοράς που θεωρούνται κερδοφόρες. Για να χρησιμοποιηθούν τα χρηματοοικονομικά παράγωγα επιτυχημένα πρέπει να γίνει η αποτίμηση και να υπολογιστούν οι μεταβολές της τιμής εκείνης που απορρέουν από τις αλλαγές στον ή στους υποκείμενους τίτλους. Η ακριβής αποτίμηση εξαρτάται από την ικανότητα να συμπεράνουμε την πιθανότητα ότι ο υποκείμενος τίτλος θα είναι σε συγκεκριμένα επίπεδα σε δεδομένα σημεία στο μέλλον από τις πληροφορίες της αγοράς. Η κατάλληλη κωδικοποίηση των πληροφοριών της αγοράς με τη μορφή πιθανότητας είναι το κλειδί για την αποτίμηση παραγώγων.

Η τιμή του παραγώγου είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία όλων των μελλοντικών ταμειακών ροών που συνδέονται με το εν λόγω παράγωγο. Για να υπολογιστεί η τιμή χρειάζονται:

α) το χρονικό σημείο όπου το παράγωγο θα δημιουργήσει ταμειακή ροή.

β) η ταμειακή ροή που παράγεται από το παράγωγο ως συνάρτηση του επιπέδου του υποκείμενου τίτλου στο διάστημα που ορίστηκε στο (α).

γ) οι προεξοφλητικοί παράγοντες που σχετίζονται με αυτά τα χρονικά διαστήματα.

δ) η πιθανότητα ότι ο υποκείμενος τίτλος ή τίτλοι θα δίνονται στα χρονικά διαστήματα που ορίστηκαν στο (α).

Λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία (α) έως και (δ) μπορούμε απλά να πολλαπλασιάσουμε τις ταμειακές ροές υπό την κατάλληλη πιθανότητα και τον προεξοφλητικό παράγοντα και να τα αθροίσουμε. Τα περισσότερα από τα παραπάνω στοιχεία μπορούμε εύκολα να τα λάβουμε. Τα στάδια των ταμειακών ροών καθορίζονται στους όρους των συμβολαίων που περιγράφουν το παράγωγο και τον υποκείμενο τίτλο. Οι προεξοφλητικοί παράγοντες μπορούν να αποκτηθούν από την καμπύλη απόδοσης και από την πιστωτική ανάλυση. Οι πιθανότητες ωστόσο δεν είναι άμεσα διαθέσιμες και ο υπολογισμός τους γίνεται το κεντρικό ζήτημα για την αποτίμηση των παραγώγων. Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 3.1, η ΜΕΡ έχει συνεχώς αυξανόμενη εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά και μεγιστοποιώντας την όπως δείξαμε, εξυπηρετεί και την αποτίμηση παραγώγων.

Σε μία πλήρη και arbitrage-free αγορά, τα παράγωγα μπορούν να αποτιμηθούν κατασκευάζοντας ένα replicating χαρτοφυλάκιο και εφαρμόζοντας την αρχή του no-arbitrage καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η contigent claim, δηλαδή ο ισχυρισμός που γίνεται όταν συμβούν συγκεκριμένα αποτελέσματα είναι ίση με την τιμή του replicating χαρτοφυλακίου. Εάν τώρα η αγορά είναι μη επαρκής υπάρχουν παράγωγα για τα οποία δεν υπάρχουν replicating χαρτοφυλάκια. Για αυτά τα παράγωγα η αρχή του no-arbitrage δεν καταλήγει σε μία μοναδική τιμή, αλλά σε κάποια ανώτερα και κατώτερα όρια για την τιμή η οποία μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας στρατηγικές αντιστάθμισης κινδύνου. Η συνάρτηση αποτίμησης, η οποία είναι χαρτογράφηση των μελλοντικών πληρωμών στις τρέχουσες τιμές, δεν είναι μοναδική.

Να επισημάνουμε ότι μία αγορά είναι μη επαρκής όταν ο αριθμός των assets που διαπραγματεύονται είναι μικρός συγκριτικά με τον αριθμό των παραγόντων κινδύνου. Ένα παράδειγμα είναι τα μοντέλα με στοχαστική μεταβλητότητα. Ένας τρόπος για να ξεκινήσουμε είναι να παρατηρήσουμε τις τιμές της αγοράς και να αξιολογήσουμε τη συνάρτηση αποτίμησης με βάση αυτές τις τιμές. Γενικά ο αριθμός των παρατηρούμενων τιμών θα είναι πολύ μικρός για να αποκτήσουμε μία μοναδική συνάρτηση αποτίμησης και έτσι έχουμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της αγοράς που δεν είναι πλήρης. Έτσι λοιπόν σε μία αγορά που δεν είναι πλήρης υπάρχει ένα ολόκληρο σύνολο από πιθανές συναρτήσεις αποτίμησης οι οποίες είναι συνεπείς με την πληροφορία της αγοράς [10].

Ο ερευνητής Branger πρότεινε δύο μεθόδους για να καθορίσει τη συνάρτηση αποτίμησης για παράγωγα όταν η αγορά είναι μη πλήρης. Επέλεξε ένα μέτρο ουδετέρου κινδύνου ή ισοδύναμο martingale μέτρο ή μέτρο ισορροπίας (δηλαδή ένα μέτρο πιθανότητας έτσι ώστε κάθε τιμή μετοχής να είναι ακριβώς ίση με την προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή της μετοχής κάτω από αυτό το μέτρο) με ελάχιστη cross-entropy σε σχέση με ένα δεδομένο benchmark μέτρο [4]. Η έρευνά του έδειξε ότι η επιλογή του numeraire (σε οικονομικούς όρους το numeraire αντιπροσωπεύει μία υπολογιστική μονάδα) είχε αντίκτυπο στην προκύπτουσα συνάρτηση αποτίμησης, αλλά δεν υπήρξε σαφής οικονομική απάντηση στο ερώτημα ποιο numeraire να επιλέξει. Η ad-hoc επιλογή (δηλαδή μία επιλογή χωρίς ιδιαίτερη ανάλυση, σχεδιασμό ή περαιτέρω εφαρμογή) του numeraire εισήγαγε ένα στοιχείο τυχαιότητας στη συνάρτηση αποτίμησης το οποίο έρχεται σε αντίθεση με αυτό που θα επιθυμούσαμε να έχουμε δηλαδή τον πιο αντικειμενικό τρόπο για την επιλογή της συνάρτησης αποτίμησης. Πρότεινε επίσης δύο νέες μεθόδους για την επιλογή της συνάρτησης αποτίμησης: 1) την επιλογή του στοχαστικού προεξοφλητικού παράγοντα (stochastic discount factor ή SDF) με ελάχιστη extended cross-entropy που σχετίζεται με ένα δεδομένο benchmark SDF και 2) την επιλογή ενός μοντέλου τιμών Arrow-Debreu (AD) (το μοντέλο AD προτείνει ότι υπό ορισμένες οικονομικές παραδοχές πρέπει να υπάρχει ένα σύνολο τιμών τέτοιο ώστε ο συνολικός αριθμός των προϊόντων και των υπηρεσιών που παράγονται σε μία οικονομία σε ένα δεδομένο συνολικό επίπεδο τιμών σε μία δεδομένη χρονική περίοδο να είναι ίσος με τη συνολική ζήτηση για κάθε εμπόρευμα στην οικονομία. Η έρευνά του έδειξε ότι αυτές οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες υπό την έννοια ότι παράγουν ίδιες συναρτήσεις αποτίμησης. Απέφυγε την εξάρτηση από το numeraire αντικαθιστώντας το με τη συνάρτηση αποτίμησης benchmark η οποία μπορεί να επιλεγεί βασιζόμενη σε κάποιες οικονομικές καταστάσεις σε αντίθεση με το numeraire που επιλέγεται τυχαία.

4.2.3 Η εντοπία σε άλλα πεδία των χρηματοοικονομικών

Εκτός από την επιλογή χαρτοφυλακίου και το asset pricing που αναφέρθηκαν παραπάνω, η εντροπία έχει χρησιμοποιηθεί και σε άλλα πεδία των χρηματοοικονομικών.

Η εντροπία παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στις συναρτήσεις χρησιμότητας. Η χρησιμότητα είναι η ικανότητα ενός προϊόντος να ικανοποιεί τις ανάγκες ή τα θέλω ενός ατόμου. Η συγκεκριμένη αυτή θεωρία έχει βαρύνουσα σημασία στα οικονομικά και στη θεωρία παιγνίων επειδή αντιπροσωπεύει την ικανοποίηση ενός ατόμου από ένα αγαθό. Όχι συμπτωματικά γιατί ένα αγαθό είναι κάτι το οποίο ικανοποιεί τα ανθρώπινα θέλω, για παράδειγμα ένας καταναλωτής όταν κάνει μία οποιαδήποτε αγορά. Οι συναρτήσεις χρησιμότητας προσδίδουν αριθμητικές τιμές στα αποτελέσματα κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα αποτελέσματα με υψηλότερες χρησιμότητες να προτιμούνται πάντα από τα αποτελέσματα με χαμηλότερες χρησιμότητες. Οι ερευνητές Candeal, De Miguel, Induráin και Mehta βρήκαν μία αξιοσημείωτη ομοιότητα μεταξύ των συναρτήσεων χρησιμότητας στα οικονομικά και της εντροπίας στη θερμοδυναμική.

Ο ερευνητής Abbas ανέπτυξε ένα βέλτιστο αλγόριθμο για να πάρει τις τιμές χρησιμότητας των Von Neumann-Morgestern για ένα σύνολο προοπτικών μίας κατάστασης απόφασης [1]. Η θεωρία των Von Neumann-Morgestern απέδειξε ότι κάθε άτομο του οποίου οι προτιμήσεις ικανοποιούν τέσσερα αξιώματα έχει μία συνάρτηση χρησιμότητας. Ενός τέτοιου ατόμου οι προτιμήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα διάστημα κλίμακας και το άτομο πάντα θα προτιμά εκείνες τις πράξεις οι οποίες μεγιστοποιούν την αναμενόμενη χρησιμότητα. Σε μία άλλη έρευνά του ο ερευνητής Abbas εισήγαγε την έννοια της χρησιμότητας μίας συνάρτησης πυκνότητας και την αρχή της μέγιστης εντροπίας για ανάθεση χρησιμότητας. Η λύση της χρησιμότητας της μέγιστης εντροπίας ενσωματώνει μία μεγάλη οικογένεια από συναρτήσεις χρησιμότητας που περιλαμβάνουν τους περισσότερο χρησιμοποιημένους συναρτησιακούς τύπους. Ασχολήθηκε επίσης με τις εφαρμογές της χρησιμότητας μέγιστης εντροπίας αναφορικά με τη συμπεριφορά προτίμησης του ατόμου που παίρνει τις αποφάσεις.

Οι ερευνητές Yang και Qiu πρότειναν ένα μέτρο κινδύνου αναμενόμενης χρησιμότητας-εντροπίας και ένα μοντέλο λήψης αποφάσεων βασισμένο στην αναμενόμενη χρησιμότητα και εντροπία [29]. Το συγκεκριμένο αυτό μέτρο αντικατοπτρίζει τη διαισθητική συμπεριφορά ενός ατόμου απέναντι στον κίνδυνο.

Σε άλλο τομέα τώρα ο ερευνητής Li πρότεινε ένα διαφορετικό τρόπο αποτίμησης του κινδύνου μακροβιότητας (ο κίνδυνος αυτός αναφέρεται στον κίνδυνο ότι οι άνθρωποι ζουν περισσότερο από ότι αναμένεται που παρά το ότι μπορεί αυτό να θεωρείται ως κοινωνικό επίτευγμα είναι ένα σοβαρό πρόβλημα για να καθοριστούν τα συνταξιοδοτικά προγράμματα) ο οποίος βασίζεται στη μεγιστοποίηση της εντροπίας του Shannon [16]. Συγκεκριμένα πρότεινε την εφαρμογή αυτής της μεθόδου αποτίμησης με την parametric bootstrap η οποία είναι εξαιρετικά ευέλικτη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάτω από διαφορετικές υποθέσεις του μοντέλου. Η τεχνική αυτή υπολογίζει τις ιδιότητες ενός εκτιμητή όπως τη διασπορά για παράδειγμα μετρώντας αυτές τις ιδιότητες όταν γίνεται δειγματοληψία από μία προσεγγιστική κατανομή.

Είναι γνωστό ότι οι διατραπεζικές αγορές αποτελούν ένα «κανάλι μόλυνσης» γιατί αν μία τράπεζα χρεοκοπήσει τότε μέσω της διατραπεζικής σύνδεσης θα χρεοκοπήσουν και άλλες τράπεζες. Σε ένα άρθρο του ο ερευνητής Mistrulli ανέλυσε πως μία μόλυνση μεταδίδεται μέσω της διατραπεζικής αγοράς χρησιμοποιώντας ένα μοναδικό σύνολο δεδομένων συμπεριλαμβάνοντας πραγματικές διμερείς εκθέσεις. Υπέθεσε ότι οι τράπεζες εξαπλώνουν το δανεισμό τους όσο πιο ομοιόμορφα γίνεται μεταξύ των άλλων τραπεζών μεγιστοποιώντας την εντροπία των διατραπεζικών συνδέσεων. Βασισμένος στη διαθεσιμότητα των πληροφοριών στις πραγματικές διμερείς εκθέσεις για όλες τις ιταλικές τράπεζες, τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν υποθέτοντας τη μέγιστη εντροπία συγκρίθηκαν με εκείνα που αντικατοπτρίζουν την παρατηρούμενη δομή των διατραπεζικών αξιώσεων [20].

Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι ο ρόλος του αργού πετρελαίου ως η κύρια πηγή ενέργειας για την παγκόσμια οικονομική δραστηριότητα έχει κινητοποιήσει μία συζήτηση αναφορικά με τις αιτίες που προκαλούν τη μεταβολή στην τιμή του αργού πετρελαίου. Για την καλύτερη κατανόηση του θέματος θα έπρεπε να υπάρχουν σημαντικές κατευθυντήριες γραμμές για το σχεδιασμό των βέλτιστων πολιτικών . Οι ερευνητές Ortiz-Cruz, Rodriguez, Ibarra-Valdez και Alvarez-Ramirez ανέλυσαν την εξέλιξη της πολυπλοκότητας και της αποδοτικότητας της πληροφορίας για την αγορά του αργού πετρελαίου με τη βοήθεια των μεθόδων εντροπίας [21].

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ανάπτυξη των εφαρμογών της εντροπίας είναι πολύ μεγάλης σημασίας σε αρκετά πεδία των χρηματοοικονομικών.

5. Αριθμητικά Αποτελέσματα

5.1 Περιγραφή του προβλήματος

Αρχικά συλλέξαμε τις αποδόσεις πέντε μετοχών του δείκτη Nasdaq για ένα χρονικό διάστημα εικοσιτεσσάρων χρόνων. Συγκεκριμένα, από 02/1990 – 01/2014. Αυτές οι πέντε μετοχές είναι οι εξής: Microsoft, Western Digital, Vodafone, Texas Instruments και Ross. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η μείωση του κινδύνου του χαρτοφυλακίου με βάση το αποδοτικό σύνορο του Markowitz και η μέθοδος της εντροπίας είναι παρόμοιες μέθοδοι. Καταλήγουμε με μία δοκιμή που αποδεικνύει ότι η εντροπία θεωρείται ίσως ένα καλύτερο μέτρο κινδύνου. Για την εξαγωγή των παραπάνω συμπερασμάτων χρησιμοποιούμε τη γλώσσα προγραμματισμού matlab.

5.2 Απόδοση των υποδειγμάτων Εντροπίας

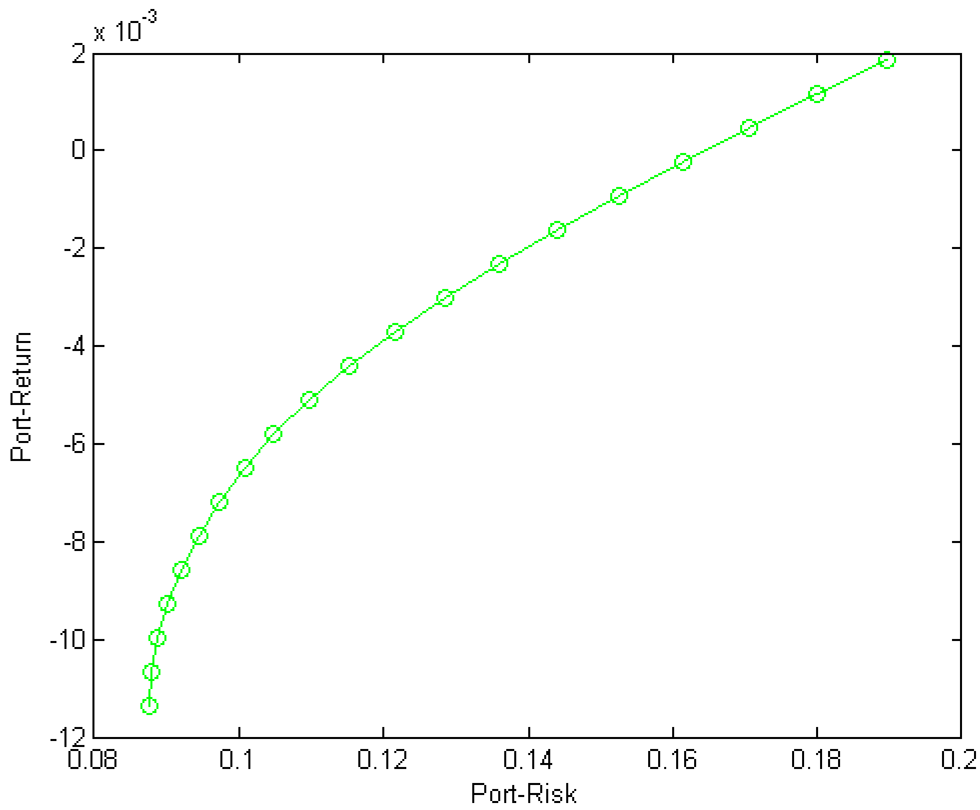
5.2.1 Αποδοτικό σύνορο του Markowitz

Αρχικά παρατίθεται ο κώδικας του Markowitz ο οποίος χρησιμοποιεί τρία ορίσματα. Τη μέση τιμή των αποδόσεων της κάθε μετοχής, τον πίνακα διακύμανσης – συνδιακύμανσης και έναν συγκεκριμένο αριθμό χαρτοφυλακίων που στη συγκεκριμένη περίπτωση επιλέξαμε τυχαία το είκοσι. Τα δύο πρώτα υπολογίστηκαν μέσω του προγράμματος excel. Έτσι λοιπόν προκύπτουν οι τιμές του κινδύνου, της απόδοσης και των βαρών για κάθε ένα από αυτά τα είκοσι χαρτοφυλάκια, όπως επίσης και το διάγραμμα 5.2.1.1, το οποίο πράγματι μας δίνει το αποδοτικό σύνορο του Markowitz.

```
function  markowitz
format short
clear all

e = [ -0.014063121451389   0.001863387989583  -0.009377412736111  -
0.008124595711806  -0.013160802034722];
ExpReturn=e;
sigma =[ 0.109811192995404   0.189662550747433   0.103039965875908
0.129891116978459   0.129775815972011];
```

```
p=[0.012058498107074   0.008556787361487   0.006004043093299
0.007098986502436   0.005265997606511;
   0.008556787361487   0.035971883156022   0.006073162835958
0.011524929449682   0.007433940671325;
   0.006004043093299   0.006073162835958   0.010617234567708
0.006877230498523   0.004959019226931;
   0.007098986502436   0.011524929449682   0.006877230498523
0.016871702269912   0.005620287994573;
   0.005265997606511   0.007433940671325   0.004959019226931
0.005620287994573   0.016841762411201];

ExpCovariance= p;
ExpCovariance;
NumPorts = 20;

frontcon(ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts)
[risk  retur  weigh]=frontcon(ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts);
figure(1)
plot(risk,retur,'go-')
xlabel('Port-Risk');
ylabel('Port-Return');
matrix_r=[risk  retur]
matrix_w=[weigh]
risk
retur
```

Σχήμα 5.2.1.1: Μέθοδος του Markowitz



5.2.2 Υπολογισμός της εντροπίας

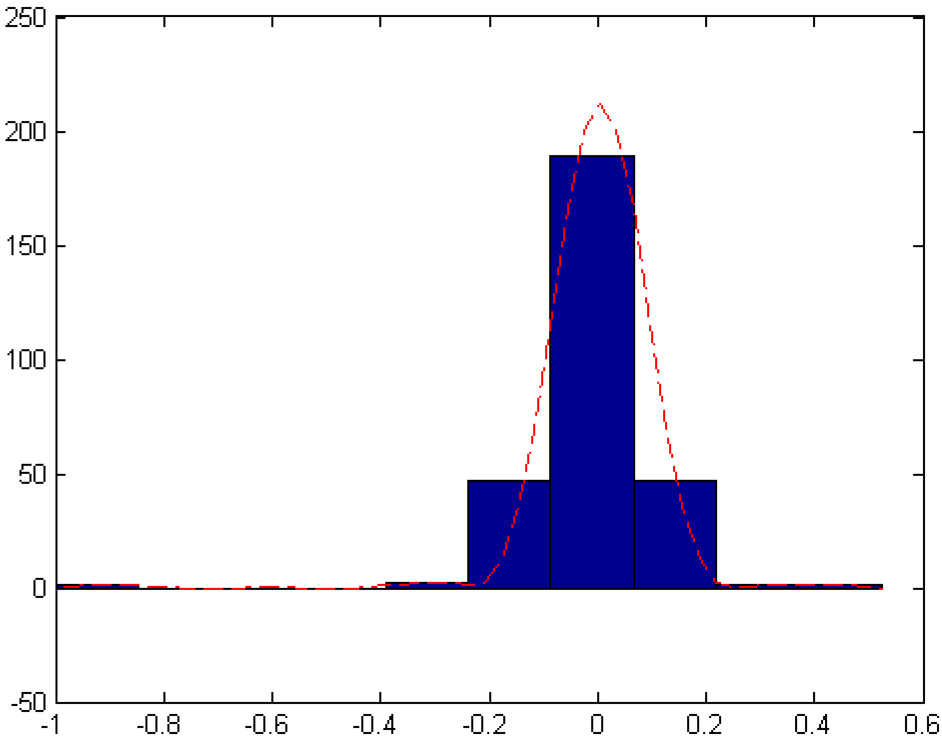
Μέσω των δύο προγραμματιστικών κωδικών histograms και histogramma που παρατίθενται παρακάτω και χωρίς να παρατηρούμε βίαιη παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις των πέντε μετοχών ακολουθούν κανονική κατανομή.

```
function histograms

A=load('rets')


y1=hist(A(:,1))
y2=hist(A(:,2))
y3=hist(A(:,3))
y4=hist(A(:,4))
y5=hist(A(:,5))
for i=1:5
figure(i)
hist(A(:,i),10)
end
```

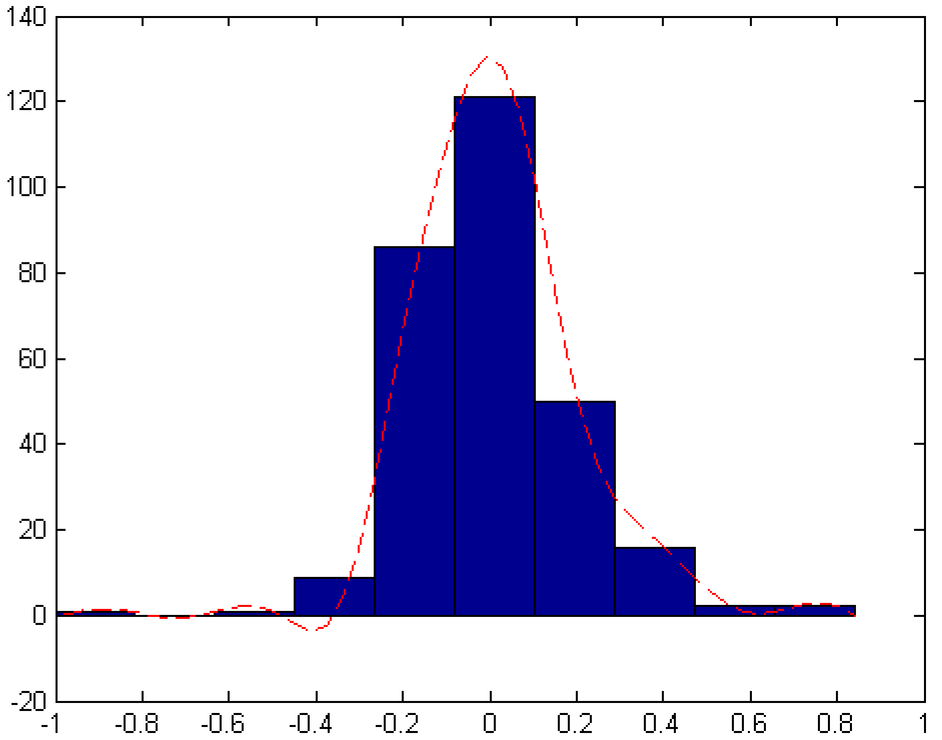
```
function histogramma

A=load('rets');

y=A(:,1);

[heights,centers] = hist(y,10);

n = length(centers);
w = centers(2)-centers(1);
t = linspace(centers(1)-w/2,centers(end)+w/2,n+1);
p = fix(n/2);

dt = diff(t);

Fvals = cumsum([0,heights.*dt])

tt=linspace(centers(1)-w/2,centers(end)+w/2,5*n+1);

[F] = spline(t, [0, Fvals, 0],tt)

for i=2:length(tt)
    df(i)=(F(i)-F(i-1))/(tt(i)-tt(i-1));
end

df(1)=0.0;
df(length(tt))=0.;
figure(1)
hist(y,10)
hold on
```

```
plot(tt,df,'r--')
hold off
```

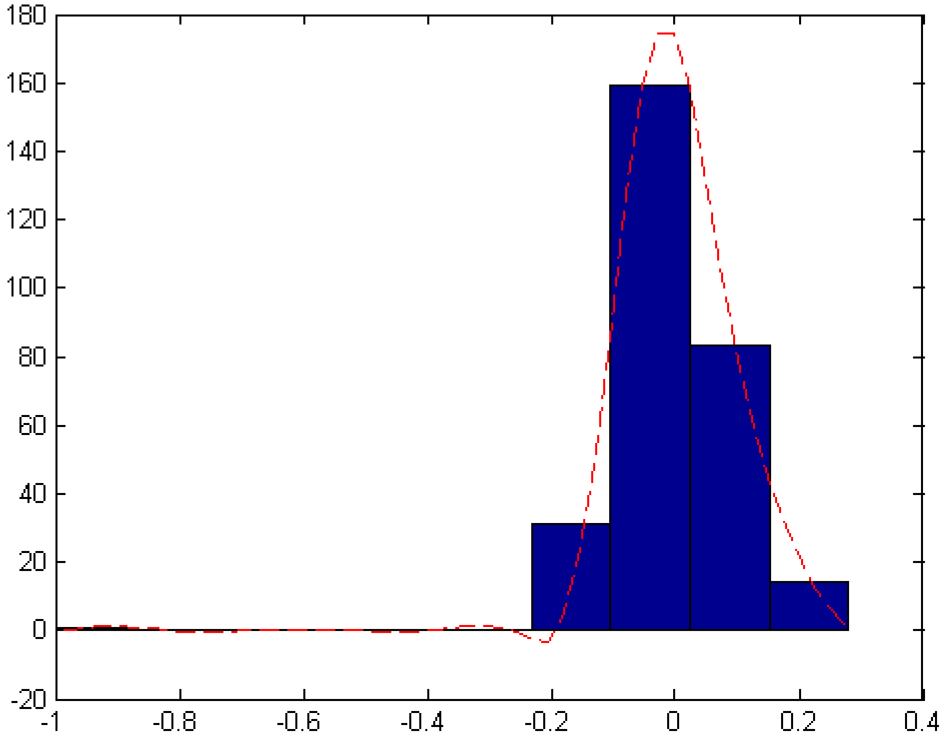
Σχήμα 5.2.2.1: Ιστόγραμμα αποδόσεων της Microsoft



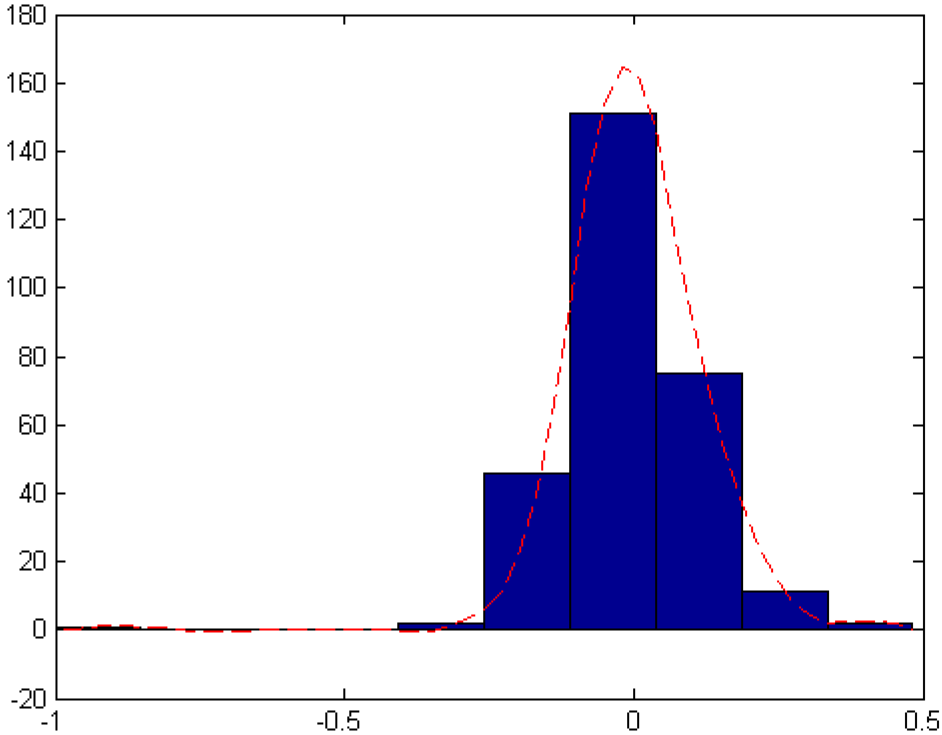
Σχήμα 5.2.2.2: Ιστόγραμμα αποδόσεων της Western Digital



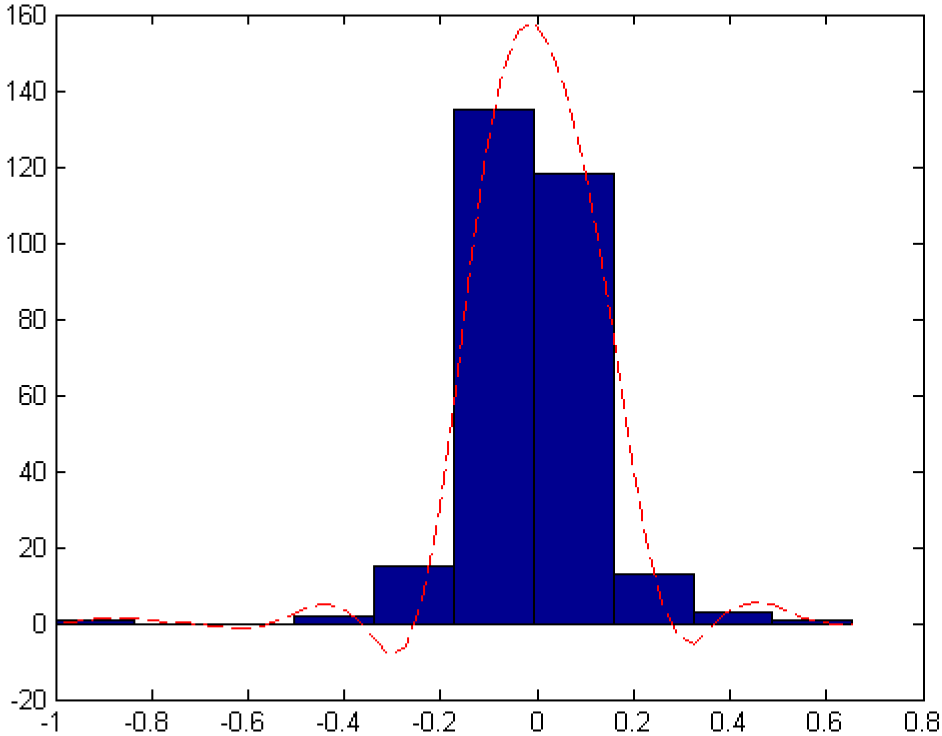
Σχήμα 5.2.2.3: Ιστόγραμμα αποδόσεων της Vodafone



Σχήμα 5.2.2.4: Ιστόγραμμα αποδόσεων της Texas Instruments



Σχήμα 5.2.2.5: Ιστόγραμμα αποδόσεων της Ross



Αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς σύμφωνα με το άρθρο [11] το πρόβλημα

Min H[$x_1\xi_1$+$x_2\xi_2$+...+$x_n\xi_n$] υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} E[x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n] = \alpha \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

ανάγεται στο εξίσου ισοδύναμο πρόβλημα:

Min $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi[x_1\sigma_1$+$x_2\sigma_2$+...+$x_n\sigma_n]$ υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \alpha \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Αρχικά υπολογίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση με τη βοήθεια του κώδικα που ακολουθεί:

```
 function f = antikeimen_sunart(x)

sigma =[ 0.109811192995404  0.189662550747433   0.103039965875908
0.129891116978459   0.129775815972011];


f1 = (sigma(1)*x(1)+sigma(2)*x(2)+sigma(3)* x(3)+...
  sigma(4)*x(4)+sigma(5)*x(5));

f=(pi*sqrt(6)/3)*f1;
```

Εν συνεχεία έχουμε:

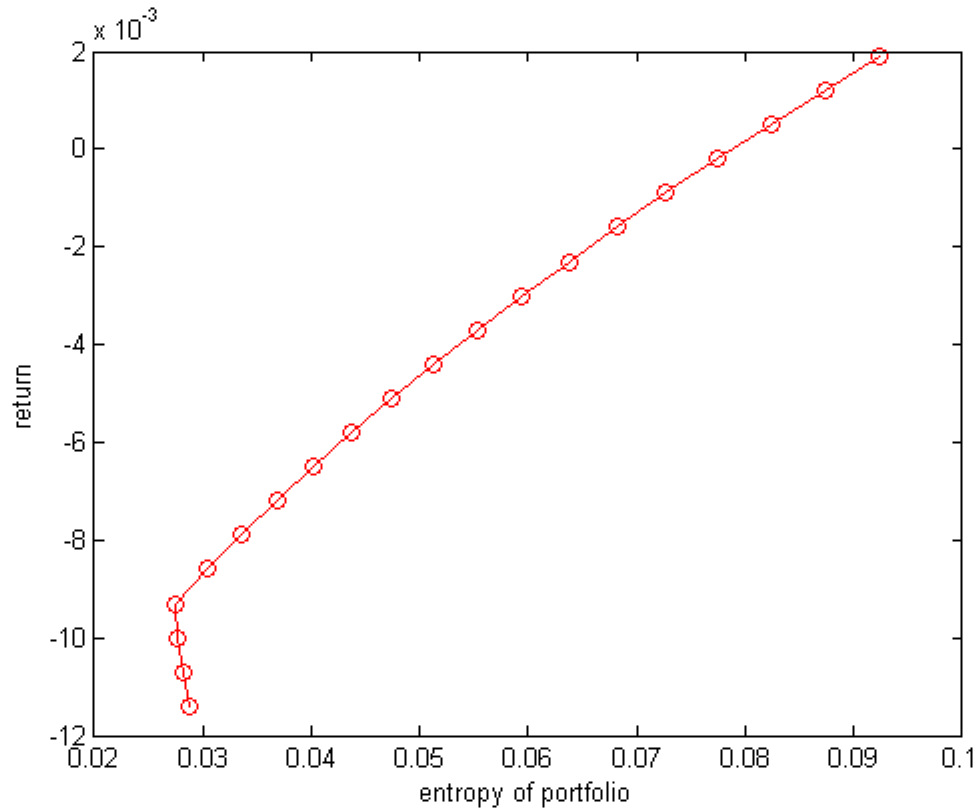
```
function [c,ceq]=nonlinearconstr(x)
c=[];
ceq=[];
```

Γνωρίζοντας λοιπόν την αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, συνεχίζουμε υπολογίζοντας τα βάρη των χαρτοφυλακίων και την εντροπία για κάθε ένα από αυτά, όπου προκύπτει και το αντίστοιχο διάγραμμα (έχοντας ως αποδόσεις τις ίδιες τιμές με εκείνες του Markowitz).

```
function elaxistopoihsh
format  short
```

```
 e = [-0.014063121451389 0.001863387989583 -0.009377412736111 -
0.008124595711806 -0.013160802034722];

ExpReturn=e;

sigma =[0.109811192995404 0.189662550747433 0.103039965875908
0.129891116978459 0.129775815972011];

retur= [  -0.0114
   -0.0107
   -0.0100
   -0.0093
   -0.0086
   -0.0079
   -0.0072
   -0.0065
   -0.0058
   -0.0051
   -0.0044
   -0.0037
   -0.0030
   -0.0023
   -0.0016
   -0.0009
   -0.0002
    0.0005
    0.0012
    0.0019  ];

for j=1:length(retur)

A=[];
b=[];
Aeq=[e;
    1 1 1 1 1];
beq=[retur(j)
      1];
lb=[ 0 0 0 0 0]';
ub=[ 1 1 1 1 1]';
x0=[ 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2];
%ObjectiveFunction=@antikeimen_sunart;
%ConstrainFunction=@ nonlinearconstr;
options = optimset('Algorithm','interior-point');
[x,fval] =
fmincon(@antikeimen_sunart,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@nonlinearconstr,options)
value(j)=fval;
X(j,:)=x;
end

value=(value.^2) /(pi*sqrt(6)/3);
figure(1)
plot(value,retur,'ro-')
ylabel('return')
xlabel('entropy of portfolio')
value;
X
```

Σχήμα 5.2.2.6: Μέθοδος της Εντροπίας



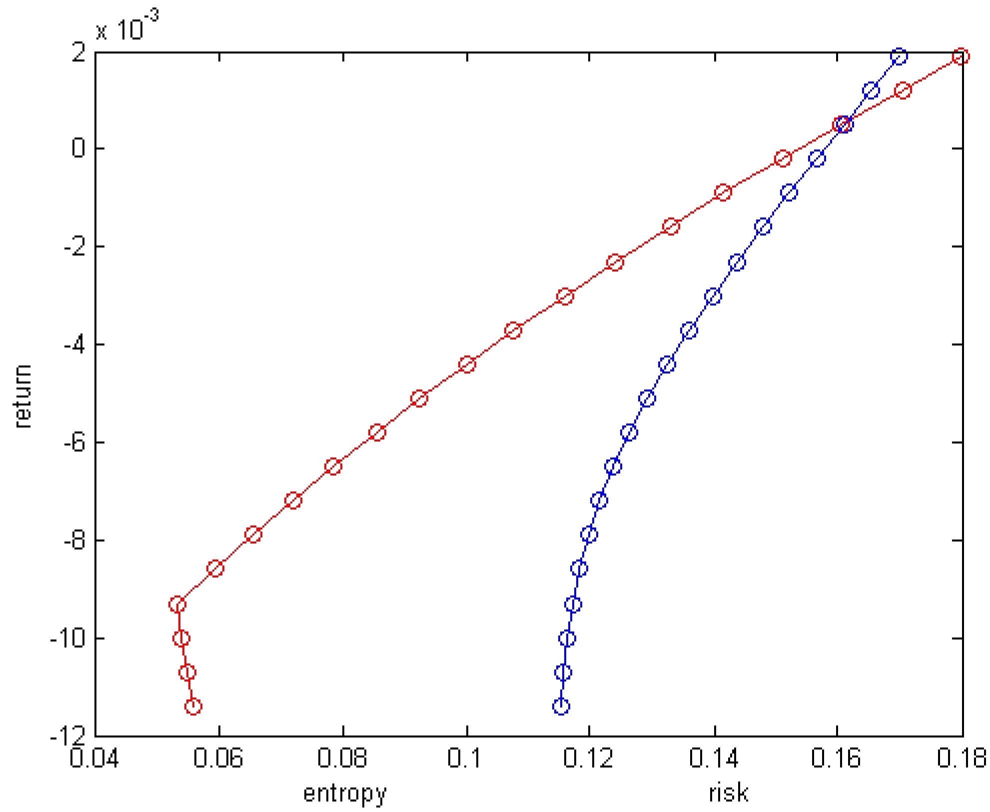
5.3 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας σε ένα σχήμα τα παραπάνω διαγράμματα, τα συμπεράσματά μας συμπίπτουν με τα αποτελέσματα των Philippatos και Wilson. Δηλαδή, τα mean-entropy χαρτοφυλάκια είναι συνεπή με τα χαρτοφυλάκια του Markowitz. Αυτό εμπειρικά αποτυπώνεται στον παρακάτω κώδικα από τον οποίο προκύπτει και το αντίστοιχο γράφημα.

```
function  plots
value=[ 0.0112
    0.0110
    0.0108
    0.0107
    0.0119
    0.0131
    0.0144
    0.0157
    0.0171
    0.0185
    0.0200
    0.0215
    0.0232
    0.0248
    0.0266
    0.0283
```

```
    0.0302
    0.0321
    0.0341
    0.0360
];

value=value*10/2;
ret=[ -0.0114
   -0.0107
   -0.0100
   -0.0093
   -0.0086
   -0.0079
   -0.0072
   -0.0065
   -0.0058
   -0.0051
   -0.0044
   -0.0037
   -0.0030
   -0.0023
   -0.0016
   -0.0009
   -0.0002
    0.0005
    0.0012
    0.0019  ];


risk =[

    0.1154
    0.1156
    0.1162
    0.1171
    0.1183
    0.1198
    0.1216
    0.1237
    0.1262
    0.1291
    0.1323
    0.1359
    0.1397
    0.1438
    0.1479
    0.1522
    0.1566
    0.1610
    0.1654
    0.1698];

figure(1)
plot(value,ret,'ro-',risk,ret,'bo-')
ylabel('return')
xlabel('entropy                                        risk')
```

Σχήμα 5.3.1: Σύγκριση των δύο μεθόδων



Βάσει επίσης, του γεγονότος ότι η εντροπία θεωρείται ένα καλύτερο μέτρο κινδύνου σε σχέση με το Markowitz, μπορούμε να το ελέγξουμε με τον κώδικα που ακολουθεί:

```
function test

e = [ -0.014063121451389   0.001863387989583  -0.009377412736111  -
0.008124595711806  -0.013160802034722];
sigma =[ 0.109811192995404  0.189662550747433   0.103039965875908
0.129891116978459   0.129775815972011];

x=[0.2855   0.002   0.3950  0.1011  0.2163];

f1 = (sigma(1)*x(1)+sigma(2)*x(2)+sigma(3)* x(3)+...
  sigma(4)*x(4)+sigma(5)*x(5));

f=(pi*sqrt(6)/3)*f1
```

Εάν εδώ αντικαταστήσουμε τα βάρη που προκύπτουν από τον κώδικα του Markowitz, θα παρατηρήσουμε ότι η τιμή της εντροπίας δίνει μεγαλύτερη τιμή από ότι δίνει εάν αντικαταστήσουμε τα βάρη που βρήκαμε με τη μέθοδο της εντροπίας στον κώδικα της εντροπίας.

6. Βιβλιογραφία

[1] Abbas, A.E. Maximum entropy utility. *Oper. Res.* **2006**, *54*, 277–290

[2] Bera, A.K.; Park, S.Y. Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Economet. Rev.* **2008**, *27*, 484–512

[3] Bhandari, D.; Pal, N.R. Some new information measures for fuzzy sets. Inf. Sci. 1993,67, 209-228

[4] Branger, N. Pricing derivative securities using cross-entropy an economic analysis. *Int. J. Theor. Appl. Finance* **2004**, *7*, 63–81

[5] Brody, D.C.; Buckley, I.R.C.; Constantinou, I.C. Option price calibration from Renyi entropy.Phys. Lett. 2007, 366, 298-307

[6] Buchen, P.W.; Kelly, M. The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. *J. Financ. Quant. Anal.* **1996**, *31*, 143–159

[7] Gulko, L. Dart boards and asset prices introducing the entropy pricing theory. *Adv. Econom.* **1997**, *12*, 237–276

[8] Gulko, L. The entropy theory of stock option pricing. *Int. J. Theoretical Appl. Finance* **1999**, *2*, 331–355

[9] Havdra J.; Charvat, F. Quantification method of classification processes: concept of structural α-entropy. Kybernetika 1967, 3, 30-35

[10] Hawkins, R.J. Maximum entropy and derivative securities. *Adv. Econometrics* **1997**, *12*, 277–300

[11] Huang, X.X. Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection. *IEEE Tran. Fuzzy Syst.* **2008**, *16*, 1096–1101

[12] Jana, P.; Roy, T.K.; Mazumder, S.K. Multi-objective mean-variance-skewness model for portfolio optimization. *Appl. Math. Optim.* **2007**, *9*, 181–193

[13] Kapur, J.N.; Kesavan, H.K. Jaynes' Maximum Entropy Principle. In Entropy Optimization Principles with Applications; Academic Press: San Diego, CA, USA, 1992; pp. 23-151

[14] Kosko, B. Fuzzy entropy and conditioning. Inf. Sci. 1986, 40, 165-174

[15] Kullback, S.; Leibler, R.A. On information and sufficiency. Ann. Math. Stat. 1951, 22, 79-86

[16] Li, J.S. Pricing longevity risk with the parametric bootstrap: A maximum entropy approach. *Insur. Math. Econ.* **2010**, *47*, 176–186

[17] Li, P.; Liu, B. Entropy of credibility distributions for fuzzy variables. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 2008, 16, 123-129

[18] Liese, F.; Vajda, I. On divergences and informations in statistics and information theory. IEEE Trans. Inform. Theor. 2006, 52, 4394-4412

[19] Luca, A.D.; Termini, S. A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Inf. Control 1972, 20, 301-312

[20] Mistrulli, P.E. Assessing financial contagion in the interbank market: Maximum entropy *versus* observed interbank lending patterns. *J. Bank. Finance* **2011**, *35*, 1114–1127

[21] Ortiz-Cruz, A.; Rodriguez, E.; Ibarra-Valdez, C.; Alvarez-Ramirez, J. Efficiency of crude oil markets: Evidences from informational entropy analysis. *Energ. Pol.* **2012**, *41*, 365–373

[22] Ou, J.S. Theory of portfolio and risk based on incremental entropy. *J. Risk Finance* **2005**, *6*, 31–39

[23] Pal, N.R.; Bezdek, J.C. Measuring fuzzy uncertainty. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1994, 2, 107-118

[24] Philippatos, G.C.; Wilson, C.J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Appl. Econ.* **1972**, *4*, 209–220

[25] Roberto J. V. dos Santos Departamento de Fısica, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970, Maceio, Alagoas, Brazil, Generalization of Shannon's theorem for Tsallis entropy. Received 7 January 1997; accepted for publication 7 March 1997

[26] Rongxi Zhou, Ru Cai and Guanqun Tong. Applications of Entropy in Finance: A Review, Entropy 2013

[27] Shannon, C.E. A mathematical theory of communication. Bell Syst. Tech. J. 1948, 27, 379-423

[28] Tsallis, C. Generalized entropy-based criterion for consistent testing. Phys. Rev. E 1998, 58, 1442-1445

[29] Yang, J.P.; Qiu, W.H. A measure of risk and a decision making model based on expected utility and entropy. *Eur. J. Oper. Res.* **2005**, *164*, 792–799

[30] Yu Jianshe. Theory of portfolio and risk based on incremental entropy: Qingdao Development and Investment Company, Investment Director, Qingdao, PR China

[31] Zhang, W.G.; Liu, Y.J.; Xu, W.J. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs. *Eur. J. Oper. Res.* **2012**, *222*, 341–349