**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**


# ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ POISSON


Δήμητρα Παγκρατίδη


**Διπλωματική εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.


**Πειραιάς**
**Ιούνιος 2015**

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

## ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ


# ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ POISSON


Δήμητρα Παγκρατίδη


**Διπλωματική εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.


**Πειραιάς**
**Ιούνιος 2015**

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL AND RISK MANAGEMENT

# MULTIVARIATE MIXED POISSON PROCESSES

by
Dimitra Pagratidi

**MSc Dissertation**

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

**Piraeus, Greece**
**June 2015**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. $5^{\eta}$/11.04.11 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων),
- Επίκουρος Καθηγητής, Δημήτριος Στέγγος,
- Επίκουρος Καθηγητής, Γεώργιος Ψαρράκος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

*Στη μνήμη του πατέρα μου, Γεωργίου.*
*Στη μητέρα μου, Αλεξάνδρα.*

# Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα για την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά, Αναπληρωτή Καθηγητή, για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Δημήτριο Στέγγο, Επίκουρο Καθηγητή και κύριο Γεώργιο Ψαρράκο , Επίκουρο Καθηγητή, για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

# Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία μελετούμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια κατανομή μίξης και τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα. Αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητες των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μια κατανομή μίξης όπως η πολυωνυμική και η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα αποτέλεσμα, που αναφέρει ότι οι συντεταγμένες μίας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η κατανομή μίξης παριστάνεται ως ένα μέτρο γινόμενο . Επίσης δίνονται κάποιοι χαρακτηρισμοί για τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια κατανομή μίξης μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας, της διωνυμικής ιδιότητας και της ιδιότητας Markov. Τέλος αποδεικνύεται ότι η κλάση των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα είναι υπόκλαση εκείνης των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μία κατανομή μίξης. Παραμένει ανοιχτό το πρόβλημα της ισότητας των δύο κλάσεων.

# Abstract

In this thesis we study the multivariate mixed Poisson processes with arbitrary mixing distribution and the multivariate mixed Poisson processes with parameter a random vector. Some properties of multivariate mixed Poisson processes, such as the multinomial and the Markov property, are derived. The use of multivariate setting is justified by a result, which asserts that the coordinates of a multivariate mixed Poisson process are independent, if and only if the mixing distribution is represented as a product measure. Moreover some characterizations for multivariate mixed Poisson processes, in terms of the multinomial and the Markov property are given. Finally, it is proven that the class of all multivariate mixed Poisson processes with parameter a random vector is subclass of the class of all multivariate mixed Poisson processes with a mixing distribution. The problem of the equality of the two classes remains open.

# Περιεχόμενα

# Κατάλογος Συντομογραφιών

**μ.χ.**: μετρήσιμος χώρος
**χ.μ.**: χώρος μέτρου
**χ.π.**: χώρος πιθανότητας
$\sigma$.**μ.μ.**: σύνολο μηδενικού μέτρου
$\sigma$.**β.**: σχεδόν βέβαια
**τ.μ.**: τυχαία μεταβλητή
$\sigma$.**κ.**: συνάρτηση κατανομής
$\sigma$.**π.**: συνάρτηση πιθανότητας
$\sigma$.**π.π.**: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$\sigma$.**δ.**: στοχαστική διαδικασία
**Exp**$(\theta)$: εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta$
**Ga**$(n, \theta)$: γάμμα κατανομή με παραμέτρους $n$ και $\theta$
MPP: μικτή διαδικασία Poisson
MRP: μικτή ανανεωτική στοχαστική διαδικασία
**δ.μ.τ.**: δεσμευμένη μέση τιμή

# Εισαγωγή

Οι μονομεταβλητές μικτές κατανομές Poisson και οι μονομεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια κατανομή μίξης χρησιμοποιούνται ευρέως για την μοντελοποίηση της εμφάνισης σπάνιων γεγονότων. Αυτό χρονολογείται από τη δεκαετία του 20 του προηγούμενου αιώνα. Από τότε έχει δημοσιευθεί ένα μεγάλο πλήθος εργασιών βασισμένων σε αυστηρή θεμελίωση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και με εφαρμογές σε πληθώρα επιστημονικών τομέων.

Η καθιέρωση της χρήσης των πολυμεταβλητών μικτών κατανομών Poisson και των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μια παράμετρο μίξης πραγματοποιήθηκε στο ίδιο σχεδόν χρονικό διάστημα, με την συμβολή των Bates, Neyman [3] (1952), Consael [7] (1952), και Hofmann [13] (1955).

Αλλά σε αντίθεση με την μονομεταβλητή περίπτωση ο αριθμός των δημοσιεύσεων των πολυμεταβλητών μικτών κατανομών Poisson είναι σχετικά μικρός. Παρ' όλα αυτά, διάφοροι τομείς καλύπτονται από το έργο που έχει δημοσιευθεί μέχρι σήμερα, όπως τα εναέρια ατυχήματα Bates and Neyman [3] (1952), τα εργατικά και μη εργατικά ατυχήματα Hofmann [13] (1955), οι ασφάλειες αυτοκινήτου Picard [20] (1976), Partrat [19] (1994), Lemaire [16] (1995) , Walhin and Paris [26] (2001), Zocher [28] (2005), οι τυφώνες Partrat [19] (1994), η ανίχνευση εικόνας στην αστροφυσικής Ferrari, Letac and Tourneret [9] (2004), και η απώλεια αποθεματικών Schmidt και Zocher [23] (2005).

Εφόσον το θεωρητικό υπόβαθρο δεν έχει ακόμη αναπτυχθεί στον ίδιο βαθμό όπως στην μονομεταβλητή περίπτωση, υπάρχει ένα χάσμα μεταξύ των επιθυμητών πρακτικών εφαρμογών και των διαθέσιμων θεωρητικών αποτελεσμάτων. Η βάση αυτής της μελέτης είναι η πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Το μοντέλο της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας καθορίζεται από διαφορετικές υποθέσεις που οδηγούν σε διαφορετικά μοντέλα πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson,οι οποίες, ωστόσο, συνδέονται μεταξύ τους.

Ξεκινώντας με το πιο γενικό μοντέλο και εξειδικεύοντας βήμα προς βήμα, αυτή η εργασία είναι οργανωμένη ως εξής: Στο Κεφάλαιο 1 παραθέτουμε κάποιες βασικές έννοιες και ορισμούς. Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε μια επισκόπηση στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου όπου αρχικά παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των $\sigma$.δ. άφιξης απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων, (βλ. Ενότητες 2.1 και 2.2 αντίστοιχα). Στην Ενότητα 2.3 αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα της $\sigma$.δ. Poisson, στην Ενότητα 2.4 αναφερόμαστε στις σύνθετες κατανομές και ολοκληρώνουμε το *2ο* Κεφάλαιο με μια αναφορά στη μικτή $\sigma$.δ. Poisson (βλ. Ενότητα 2.5).

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται κάποιοι ορισμοί και αποδεικνύονται αποτελέσματα βοηθητικού χαρακτήρα, σχετικά με τις πολυμεταβλητές απαριθμήτριες κατανομές που χρειάζονται για τα επόμενα κεφάλαια. Στην Ενότητα 3.1 μελετούνται οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις, την Ενότητα 3.2 οι ροπογεννήτριες, και στην Ενότητα 3.3 το Θεώρημα Bernstein-Widder.

Οι πολυμεταβλητές σημειακές διαδικασίες είναι το θεμα του Κεφαλαίου 4. Αρχικά εισάγονται αυτές οι διαδικασίες (Ενότητα 4.1) και στη συνέχεια αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητες τις οποίες έχουν οι απαριθμήτριες κατανομές και οι οποίες σχετίζονται με τις μικτές κατανομές Poisson (Ενότητα 4.2). Οι συσχετισμοί μεταξύ τέτοιων ιδιοτήτων, όπως για παράδειγμα των στάσιμων προσαυξήσεων, της πολυωνυμικής ιδιότητας, και της ιδιότητας Markov, επίσης μελετούνται με κάθε λεπτομέρεια.

Το Κεφάλαιο 5 είναι αφιερωμένο στις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια αυθαίρετη κατανομή μίξης. Και πάλι αποδεικύονται κάποιες ιδιότητες αυτών των διαδικασιών (Ενότητα 5.1). Το γινόμενο πιθανοτήτων Poisson μέσα στα ολοκληρώματα προκαλεί την ερώτηση της ανεξάρτησίας των συντεταγμένων μιας πολυμεταβλητής μικτής $\sigma$.δ. Poisson. Μια απάντηση δίνεται στο Θεώρημα 5.1.5, σύμφωνα με το οποίο οι συντεταγμένες μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson είναι ανεξάρτητες, αν και μόνο αν η κατανομή μίξης παριστάνεται ως ενα μέτρο γινόμενο . Επιπλέον, οι πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson χαρακτηρίζονται ως πολυμεταβλητές απαριθμήτριες διαδικασίες που έχουν την πολυωνυμική ιδιότητα (Θεώρημα 5.2.3). Μετά το αποτέλεσμα αυτό αποδείκνυεται ότι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία με την έννοια ότι οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες και κάθε συντεταγμένη είναι μια μονομεταβλητή $\sigma$.δ. Poisson (Θεώρημα 5.2.7). Οι ιδιότητες της δομής των ροπών πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson δίνονται στην Ενότητα 5.3.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να μοντελοποιήσουμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson εντός της κατηγορίας των πολυμεταβλητών απαριθμητριών διαδικασιών είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός τυχαίου διανύσματος επάνω στον ίδιο χώρο πιθανότητας και να εξετάσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες της διαδικασίας ως προς αυτό το τυχαίο διάνυσμα, έτσι ώστε η διαδικασία να παραμένει μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson. Αυτή η ιδέα μοντελοποίησης οδηγεί στις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια τυχαία παράμετρο, οι οποίες μελετούνται στο Κεφάλαιο 6, και για τις οποίες η κατανομή μίξης προέρχεται από ένα τυχαίο διάνυσμα. Για τις κατανομές μίξης που προέρχονται από ένα τυχαίο διάνυσμα, πετυχαίνονται απλούστερες παραστάσεις κάποιων αποτελεσμάτων, ενώ η χρήση των δεσμευμένων πιθανοτήτων γεννά νέα ερωτήματα. Με παρόμοια μεθοδολογία όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετούνται κάποιες βασικές ιδιότητες (Ενότητα 6.1) και η δομή των ροπών πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα (Ενότητα 6.2). Εξαιτίας της πρόσθετης υπόθεσης, ένας χαρακτηρισμός ανάλογος με εκείνον της Ενότητας 5.2 δεν είναι δυνατός. Αφού το μοντέλο στο Κεφάλαιο 6 απαιτεί την ύπαρξη μιας τυχαίας παραμέτρου, οι posterior κατανομές της παραμέτρου ως προς τη διαδικασία, μελετώνται στην Ενότητα 6.3.

Σε όλη την εργασία εξετάζονται για κάθε ιδιότητα το πρόβλημα της διατήρησης αυτής της ιδιότητας κατά την μετάβαση από την αρχική πολυμεταβλητή $\sigma.\delta.$ σε διαδικασίες που προκύπουν με συγκεκριμένους γραμμικούς μετασχηματισμούς, π.χ.οι συντεταγμένες και το άθροισμα όλων των συντεταγμένων μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* είναι πάλι μικτές διαδικασίες *Poisson*. Επιπλέον, δείχνεται με την βοήθεια της σταδιακής (incremental) $\sigma.\delta.$, οτι όλα τα μοντέλα που θεωρούμε είναι κατα κάποιον τρόπο ευσταθή (*stable*) ως προς τον χρόνο. Έτσι, για να είμαστε σε θέση να δεχθούμε ένα από αυτά τα μοντέλα δεν ειναι σημαντικό να γνωρίζουμε πότε αρχίζει η διαδικασία, πράγμα το οποίο έχει ένα σημαντικό θετικό αντίκτυπο σε πιθανές εφαρμογές. Πρέπει επίσης να αναφερθεί, οτι οι δημοσιεύσεις που αφορούν στην μονομεταβλητή περίπτωση, όπως π.χ. η [21] και η [11] για να αναφερθούμε μόνο δυο από αυτές, επίσης δίνουν σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων, ερωτήματα προς απάντηση και ιδέες για κάποιες αποδείξεις για την πολυμεταβλητή περίπτωση. Αυτή η επιρροή δεν προσφέρεται για όλα τα προβήματα, αλλά κάθε φορά που οι ιδέες της μονομεταβλητής περίπτωσης είναι ουσιώδεις για την πολυμεταβλητή περίπτωση, δίνονται οι καταλληλες αναφορές της βιβλιογραφίας.

# Κεφάλαιο 1

# Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών , με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.

Έστω $\Omega$ σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με $A^c$ ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** $A$ (σε σχέση με το $\Omega$), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ ($I \neq \varnothing$) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\Omega$. Τα στοιχεία μίας $\sigma$-άλγεβρας $\Sigma$ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \Sigma$ με $\chi_A$ συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) $A$. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathcal{G}$ του $\Omega$. **Η ελάχιστη $\sigma$-άλγεβρα** υποσυνόλων του $\Omega$ που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **$\sigma$-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$ , ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μία $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του $\Omega$ για την οποία ισχύει $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathfrak{B}$ και $\mathfrak{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $(\alpha, \beta)$, αντίστοιχα, ενώ με $\mathfrak{B}_n$ συμβολίζουμε την $Borel - \sigma -$άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ για την $n \in \mathbb{N}$.

Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. $(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** ($\sigma.\mu.\mu.$) ή **σύνολο** $\mu$-

**μηδενικού μέτρου** ($\mu - \sigma.\mu.\mu.$) ή $\mu$-**μηδενικό σύνολο** αν και μόνο αν $\mu(N) = 0$. Το σύνολο όλων των $\mu - \sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με $\Sigma_0$.
Μία τ.μ. $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο $P$) αν $\int |f|dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_+(P)$) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P - \sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται αντίστοιχα το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** – δηλαδή όλων των τ.μ. $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $\int f^2 dP < \infty$ – **συναρτήσεων**.
Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας ((συνεχής τ.μ.)) θα εννοούμε ((απόλυτα συνεχής τ.μ.)).
Ακόμη, θα λέμε ότι η τ.μ. $X$ με σύνολο τιμών $R_X$ **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, όπου $m \in \mathbb{N}$ , και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X}\nu(dx) = \int_{B\cap R_X} f_X(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $f_X$ η αντίστοιχη $\sigma.(\pi.)\pi.$, και $\nu$ είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue $\lambda$ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. $X$ είναι συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. $X$ είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το $R_X$ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.
Έστω $(\Omega, \Sigma, \mu)$ και $(\Theta, T, \nu)$ χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του** $\Omega \times \Theta$**)** , αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται $\sigma$-**άλγεβρα γινόμενο** των $\Sigma$ και $T$ και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.
Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο $\rho$ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** $\mu$ **και** $\nu$ και συμβολίζεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
Εαν $I$ είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών και $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π.-γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := \left(\prod_{i\in J}\Omega_i, \otimes_{i\in J}\Sigma_i, \otimes_{i\in J}P_i\right)$. Αν $(\Omega, \Sigma, P)$ είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με $P^I$ την πιθανότητα-γινόμενο στον $\Omega^I$ και με $\Sigma^I$ το πεδίο ορισμού της $P^I$.
Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια $\sigma$-άλγεβρα στο $\Omega$ που ονομάζεται η $\sigma$-**άλγεβρα στο** $\Omega$ **η παραγόμενη από την** $X$ και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια

$\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου $I$ σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\bigg(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η $\sigma$-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$. Για κάθε $B \in \Sigma$ ώστε $P(B) > 0$ και για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα της $X$ ως προς την δεσμευμένη πιθανότητα $P_B$ συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και εφόσον υπάρχει στο $\bar{\mathbb{R}}$ ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή** (δ.μ.τ. για συντομία) της τ.μ. $X$ δοθέντος του $B$. Αν $X = \chi_A$ με $A \in \Sigma$ τότε εύκολα προκύπτει οτι $\mathbb{E}[X_A|B] = P_B(A)$.

Έστω μια τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και μια τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Μια **δεσμευμένη μέση τιμή της** $X$ **δεδομένης της** $Y$ είναι μια τ.μ. $\mathbb{E}[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$(i)$ Η $\mathbb{E}[X|Y]$ είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη συνάρτηση,

$(ii)$ $\int_A \mathbb{E}[X|Y]dP = \int_A X dP \qquad \forall A \in \sigma(Y).$

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και T μια $\sigma$ -υποάλγεβρα της $\Sigma$. Μια **δεσμευμένη μέση τιμή της** $X$ **δοσμένης της** $\sigma$ **-υποάλγεβρας** $T$ είναι μια τ.μ. $\mathbb{E}[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$(i)$ Η $\mathbb{E}[X|T]$ να είναι $T$-μετρήσιμη συνάρτηση,

$(ii)$ $\int_A \mathbb{E}[X|T]dP = \int_A X dP \qquad \forall A \in T.$

Η $\mathbb{E}[X|T]$ δεν είναι μοναδική, αλλά είναι μοναδική $P|T$-σ.β., δηλαδή αν η $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια δ.μ.τ. της $X$ δεδομένης της $T$, τότε $Z = \mathbb{E}[X|T] \qquad P|T - \sigma.\beta.$ Η $\mathbb{E}[X|T]$ είναι μια εκδοχή ($version$) της δ.μ.τ. της $X$ δοσμένης της $T$, και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|T]$ ή αλλιώς $\mathbb{E}[X|T]$. Για $X := \chi_B \in \mathcal{L}^1(P)$ με $B \in \Sigma$ θέτουμε

$$P[B|T] := \mathbb{E}_P[X\chi_B|T].$$

Η έννοια της δ.μ.τ. μιας τ.μ. $X$ δοσμένης μιας $\sigma$-υποέλγεβρας της $\Sigma$ επεκτείνει την έννοια της δ.μ.τ. της $X$ δοσμένης μιας τ.μ. $Y$ υπο την έννοια οτι $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)$.

Οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της $\Sigma$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων $\sigma$-υποαλγεβρών της** $\Sigma$ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.
Μία οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται $P$-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** της $\sigma$-υποάλγεβρας $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n | \mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

$\forall j \leq n \ \ \forall E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του $I$.
Μία οικογένεια $\Sigma$--μετρήσιμων απεικονήσεων $\{X_i\}_{i\in I}$ από τον $\Omega$ στον $\Upsilon$ είναι:
- $P$-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στην $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ , αν η οικογένεια $\sigma\left(\{X_i\}\right)_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$,και
- $P$-**υπό συνθήκη ισόνομη** επάνω στην $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ αν,

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P(F \cap X_j^{-1}(B)),$$

για $i, j \in I$ , $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$.
Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και $\sigma$-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της $\Sigma$ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.
Αν οι $P, Q$ είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B - y) dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των $P, Q$. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την $n$-**οστη συνέλιξη** της $P$, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου $P^{*0}$ (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο $\sigma$.κ.π. $F, G$ ή δύο $\sigma$.(π.)π. $f, g$. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου $I$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [?], Ορισμός 1.19), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται **$\sigma$.δ.** ($\sigma$.δ.) ή **στοχαστική ανέλιξη.** Επί πλέον, αν το $I$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια **$\sigma$.δ. συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια **$\sigma$.δ. διακριτού χρόνου**.
Μια $\sigma$.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:
• μια **$\sigma$.δ. ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
• μια **$\sigma$.δ. στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\}$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι για την υπόλοιπη εργασία κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε έναν σταθερό χ.π. $(\Omega, \Sigma, P)$.

# Κεφάλαιο 2

# Επισκόπηση Κάποιων Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι μία σύντομη αναφορά σε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Έτσι, αρχικά σκιαγραφούμε ένα υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, θέτοντας το γενικό πλαίσιο αναφοράς του παρόντος κεφαλαίου (βλ. Ενότητα 2.1). Έπειτα, προχωράμε στην επισκόπιση κάποιων ιδιοτήτων των $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Ενότητες 2.2 και 2.3, αντίστοιχα). Τέλος αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson(βλ. Ενότητα 2.4), που αποτελεί την βάση για την κατανόηση τόσο της μικτής διαδικασίας Poisson όσο και των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών.

## 2.1 Το Υπόδειγμα

Για την ανάπτυξη ενός υποδείγματος που θα μοντελοποιεί το χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, αναφέρουμε αρχικά τις ακόλουθες έννοιες,

- την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων (*claim arrival process*),

- την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων (*claim number process*), και,

- την $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων (*claim interarrival process*).

Θα δούμε ότι και οι τρείς στοχαστικές διαδικασίες σχετίζονται μεταξύ τους και μάλιστα γνωρίζοντας την μία μπορούμε να καθορίσουμε τις υπόλοιπες.
Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που ασφαλίζονται από κάποια ασφαλιστική εταιρεία. Οι ασφαλισμένοι πληρώνουν ασφάλιστρα έναντι των κινδύνων που αντιμετωπίζουν και οι οποίοι αν παραγματοποιηθούν προξενούν απαιτήσεις έναντι της εταιρίας, η οποία με τη σειρά της καλείται να τις εξοφλήσει . Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να αποτελείται από έναν και μοναδικό ή περισσότερους κινδύνους.
Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι απαιτήσεις λαμβάνουν χώρα τυχαία και σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα ξεκινώντας στο χρόνο μηδέν, έτσι ώστε

- καμιά απαίτηση να μην λαμβάνει χώρα στο χρόνο μηδέν, και
- να μην συμβαίνουν δύο (ή περισσότερες) απαιτήσεις, ταυτόχρονα.

Η υπόθεση της μη ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο (ή περισσότερων) απαιτήσεων φαίνεται ότι μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, δεν πρέπει να παρουσιάζεται κάποιο σημαντικό πρόβλημα όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μικρό. Όμως, όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο, εξαρτάται από το είδος της υπό εξέταση ασφάλισης για το αν αυτή η υπόθεση είναι πράγματι αποδεκτή ,π.χ δύο ασφαλισμένοι από το ίδιο χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αυτοκινήτων να εμπλακούν σε ένα δυστύχημα μεταξύ τους και να υπάρχει μερική ευθύνη και από τους δύο.
Πάντως, η υπόθεση της μη ταυτόχρονης εμφάνισης δύο απαιτήσεων ακόμα κι όταν κρίνεται ως μη αποδεκτή, μπορεί να διατηρηθεί, αλλάζοντας ελαφρώς την οπτική μας, δηλαδή, με το να θεωρήσουμε τα γεγονότα (που προκαλούν την έγερση) απαίτησης (όπως αυτοκινητιστικά δυστυχήματα) αντί των ατομικών απαιτήσεων. Ο αριθμός των ατομικών απαιτήσεων που εγείρονται για ένα συγκεκριμένο γεγονός απαίτησης μπορεί τότε να ερμηνευτεί ως το μέγεθος του γεγονότος απαίτησης.
Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου μοντελοποιούμε τις προηγούμενες ιδέες σε ένα *πιθανοθεωρητικό* υπόδειγμα.

## 2.2 Η Σ.Δ. άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε τόσο την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων όσο και την $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και παραθέτουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

**Ορισμός 2.2.1.** Η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τ.μ. είναι μια **$\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων** αν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$ να ισχούν τα εξής:

**(t$_1$)** $T_0(\omega) = 0$, και

**(t$_2$)** $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \geq 1$.

Επιπλέον, το $P$-μηδενικό σύνολο $\Omega_T$ ονομάζεται το **$P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. $T_n$ είναι θετική κάτι που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

**Ορισμός 2.2.2.** Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων . Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι η **$\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων**

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς άμεσα έπεται για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι η τ.μ. $W_n$ είναι θετική, καθώς και ότι ισχύει η σχέση

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i. \tag{2.1}$$

Ερμηνεύοντας, τώρα, τους Ορισμούς 2.2.2 και 2.2.1 σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην προηγούμενη ενότητα σημειώνουμε τα εξής:

- Η $T_n$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο εμφάνισης της $n$-οστής απαίτησης.
- Η $W_n$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο αναμονής μεταξύ της $(n-1)$-οστής και της $n$-οστής απαίτησης.
- Με πιθανότητα ένα **καμία** απαίτηση δεν εγείρεται στον χρόνο μηδέν και δύο (ή παραπάνω) απαιτήσεις **δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα**.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως οι Ορισμοί 2.2.2 και 2.2.1 βρίσκουν άμεση φυσική ερμηνεία, αφού προφανώς οι χρόνοι άφιξης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων θα είναι θετικοί, ενώ λογικά η απαίτηση $n$ θα εμφανίζεται σε χρόνο μεταγενέστερο αυτού στον οποίο εμφανίζεται η απαίτηση $n-1$.
Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως

την αντίστοιχη $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T := \varnothing \in \Sigma$.
Από τον Ορισμό 2.2.1 και την (2.1), είναι προφανές ότι η $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων αλληλοκαθορίζονται. Η σχέση τους γίνεται ξεκάθαρη από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

**Λήμμα 2.2.3.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}\big)$.

*(ii) Για τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{T_n}, \mathbf{W_n} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ με τύπο*

$$\mathbf{T_n}(\omega) := (T_1, \ldots, T_n)'(\omega) = (T_1(\omega), \ldots, T_n(\omega))'$$

*και*

$$\mathbf{W_n}(\omega) := (W_1, \ldots, W_n)'(\omega) = (W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega))'$$

*για κάθε $\omega \in \Omega$, αντίστοιχα, καθώς και για τον $n \times n$-πίνακα $\mathbf{M_n} = [m_{ij}]$ με*

$$m_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j \end{array} \right\}.$$

*έχουμε:*

**(a)** *Ο $\mathbf{M_n}$ είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί την σχέση* $\det(\mathbf{M_n}) = 1$, *και*

**(b)** $\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n}$ *καθώς και* $\mathbf{W_n} = \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.2.3.

Από το (i) έπεται το συμπέρασμα ότι η πληροφορία που είναι διαθέσιμη από την γνώση της $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ίδια με την πληροφορία που προκύπτει από την γνώση της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενώ από το (ii) προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τιμές της μίας μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε και τις τιμές της άλλης μέσω ενός πίνακα.

**Λήμμα 2.2.4.** *Οι κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων του Λήμματος 2.2.3 ικανοποιούν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα εξής:*

$$P_{\mathbf{T_n}} = (P_{\mathbf{W_n}})_{\mathbf{M_n}} \quad \text{και} \quad P_{\mathbf{W_n}} = (P_{\mathbf{T_n}})_{\mathbf{M_n^{-1}}}.$$

Στις υποθέσεις που κάναμε για το υπόδειγμα που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 2.1 η πιθανότητα να προκύψουν ταυτόχρονα δύο ή και περισσότερες απαιτήσεις είναι ίση με μηδέν, αυτό όμως δεν αποκλείουν την δυνατότητα πραγματοποίησης απείρως πολλών απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρόνο, κάτι που μας οδηγεί πολύ φυσικά στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 2.2.5.** Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη** .

Παρακάτω παραθέτουμε δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στην πιθανότητα της έκρηξης .

**Λήμμα 2.2.6.** *Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

**Πόρισμα 2.2.7.** *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7 αντίστοιχα.
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια συγκεκριμένη ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί είναι η απόφαση για το αν θα πρέπει να θεωρήσουμε την πιθανότητα έκρηξης ίση με το μηδέν ή όχι. Αυτή φυσικά είναι μια απόφαση που αφορά την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων .
Το ακόλουθο Λήμμα μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση που έχουν οι στοχαστικές διαδικασίες $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Λήμμα 2.2.8.** *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Αν η $\sigma$.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*Σε αυτήν την περίπτωση και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathbb{E}[W_n] = 1/\alpha$ και $\mathbb{E}[T_n] = n/\alpha$, και η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [21] Λήμμα 1.2.2.

## 2.3 Η Σ.Δ. του Αριθμού των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και αποδεικνύουμε ότι οι $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη (και κατ'επέκταση την $\sigma$.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων). Παραθέτουμε ακόμη δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στο πως συνδέεται η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με την πιθανότητα της έκρηξης . Τέλος, ορίζουμε τις έννοιες της προσαύξησης, των ανεξάρτητων και των στάσιμων προσαυξήσεων για την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

**Ορισμός 2.3.1.** Μία οικογένεια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται $\sigma$.δ. **του αριθμού των απαιτήσεων ή απαριθμήτρια διαδικασία** αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχούν τα εξής:

**(n1)** $N_0(\omega) = 0$,

**(n2)** $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0, \infty)$,

**(n3)** $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

**(n4)** $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

**(n5)** $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Επί πλέον, το $P$-μηδενικό σύνολο $\Omega_N$ ονομάζεται το $P$-**μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Μία $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται από ορισμένους συγγραφείς και *σημειακή διαδικασία*
Θέλοντας να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία στον παραπάνω ορισμό σημειώνουμε τα εξής:

- Η $N_t$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

- $P$-σχεδόν βέβαια όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ξεκινούν από το μηδέν (βλ. **(n1)**), είναι δεξιά συνεχείς (βλ. **(n3)**), αυξάνουν με άλματα μοναδιαίου ύψους στα σημεία ασυνέχειας (βλ. **(n2)** και **(n4)** ), και τείνουν στο άπειρο (βλ. **(n5)**).

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως σε χρόνο μηδέν δεν έχουμε καμία απαίτηση, ενώ με το πέρασμα του χρόνου ο αριθμός των απαιτήσεων αυξάνει. Μάλιστα, όταν αυτό γίνεται στο χρονικό διάστημα $(t, t+\varepsilon)$, η αύξηση δεν είναι μεγαλύτερη της μίας απαίτησης, αφού από τις υπθέσεις του υποδείγματός μας σχεδόν βέβαια δύο ή περισσότερες απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παρούσας ενότητας η $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη, μαθηματικά η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται στα δύο ακόλουθα θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.3.2.** *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$ θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega), \tag{2.2}$$

*τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και*

*(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ ισχύει*

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}. \tag{2.3}$$

**Θεώρημα 2.3.3.** *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \in \mathbb{N}_0$ θέσουμε $T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$, τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και*

*(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ ισχύει $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega)$.*

Για την απόδειξη των παραπάνω δύο αποτελεσμάτων βλ. π.χ [1] Θεώρημα 3.3.2 και Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων που παράγεται από την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που παράγεται από την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,(και άρα και το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων αφού $\Omega_T = \Omega_N$) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$.

Εξαιτίας της παραπάνω υπόθεσης, παίρνουμε δύο απλές, αλλά πολύ χρήσιμες ισότητες, που καταδεικνύουν το ότι ορισμένα ενδεχόμενα που καθορίζονται από την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων μπορούν να ερμηνευτούν (ισοδύναμα) ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων κι αντίστροφα.

**Λήμμα 2.3.4.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

*(ii)* $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.3.4.

'μεση συνέπεια του (i) του Λήμματος 2.3.4 αποτελεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Λήμμα 2.3.5.** *Ισχύει* $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\big) = \sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Μία πρώτη εφαρμογή του Λήμματος 2.3.4 είναι η σύνδεση του ενδεχομένου της έκρηξης με την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, κάτι που φαίνεται στα παρακάτω δύο αποτελέσματα.

**Λήμμα 2.3.6.** *Για την πιθανότητα της έκρηξης ισχύει*

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\right) = P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \{N_t = \infty\}\right) = P\left(\bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\}\right).$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ [21] Lemma 2.1.4.

**Πόρισμα 2.3.7.** *Αν η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ [21] Corollary 2.1.5.

Όπως θα διαπιστώσουμε και στα επόμενα κεφάλαια, η μελέτη της $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων θα βασιστεί σε σημαντικό βαθμό στις ιδιότητες των προσαυξήσεών της, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων στο διάστημα $(s, t]$, των στάσιμων αλλά και των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.
Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ η **προσαύξηση** της $\sigma$.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s, t]$ ορίζεται από την

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{2.4}$$

Επειδή, μάλιστα, για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $N_0(\omega) = 0$ και $T_n(\omega) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η (2.4) βρίσκεται σε συμφωνία με τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε η τ.μ. $N_t$ στο Θεώρημα 2.3.2. Επί πλέον, για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.5}$$

που ισχύει ακόμα κι αν το $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

## 2.4 Η Διαδικασία Poisson

Στην παρούσα ενότητα ορίζουμε τη διαδικασία Poisson και δίνουμε κάποια αρχικά αποτελέσμα που αφορούν τις κατανομές των στοχαστικών διαδικασιών $\{_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,$\{_t\}_{n\in\mathbb{R}_+}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ορισμός 2.4.1.** Η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (**ομογενής**) **διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\theta \in (0, \infty)$ εάν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις και για κάθε $t \in (0, \infty)$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού είναι ότι μία $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν

$$P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$$

για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

**Ορισμός 2.4.2.** Η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson** αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο 1.

**Λήμμα 2.4.3.** *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

*Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

Για την απόδειξη βλ π.χ [21] Lemma 2.2.1

Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων των Λημμάτων ?? και 2.4.3 και δηλώνει ότι αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων είναι (ισόνομα) εκθετικά κατανεμημένοι και ανεξάρτητοι έπεται ότι ο αριθμός των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή Poisson και αντίστροφα.

**Πόρισμα 2.4.4.** *Έστω* $\theta \in (0, \infty)$. *Αν η σ.δ.* $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

**Ορισμός 2.4.5.** *Μία οικογένεια* $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$ *σ-υποαλγεβρών της* $\Sigma$ *ονομάζεται* ***διύλιση*** *αν και μόνο αν για κάθε* $j, k \in I$ *με* $j < k$ *ισχύει* $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.
*Μία σ.δ.* $\{X_j\}_{j \in I}$ *λέμε ότι είναι* ***προσαρμοσμένη σε μία διύλιση*** $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$ *αν και μόνο αν για κάθε* $j \in I$ *η τ.μ.* $X_j$ *είναι* $\Sigma_j$*-μετρήσιμη.*
*Η* $\{T_j\}_{j \in I}$ *με* $T_j = \sigma\big(\{X_k : k \leq j\}\big)$ *για κάθε* $j \in I$ *ονομάζεται* ***η κανονική διύλιση για την*** $\{X_j\}_{j \in I}$. *Προφανώς, κάθε σ.δ.* $\{X_j\}_{j \in I}$ *είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση . Μια σ.δ.* $\{X_j\}_{j \in I}$ *ονομάζεται* ***ένα martingale ως προς τη διύλιση*** $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$ *ή* ***ένα*** $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$***-martingale*** *(ή η οικογένεια* $\{(X_j, \Sigma_j)\}_{j \in I}$ *ονομάζεται* ***ένα martingale****) αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

**(m₁)** *Η* $\{X_j\}_{j \in I}$ *είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση)* $\{\Sigma_j\}_{j \in I}$.

**(m₂)** *Για κάθε* $j \in I$ *η* $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$.

**(m₃)** *Για κάθε* $j, k \in I$ *με* $j \leq k$ *ισχύει* $\mathbb{E}[X_k | \Sigma_j] = X_j \quad P|\Sigma_j - \sigma.\beta..$

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρισμού είναι το πρώτο από μία σειρά θεωρημάτων χαρακτηρισμού που θα ακολουθήσουν στα υπόλοιπα κεφάλαια

**Θεώρημα 2.4.6.** *Έστω* $\theta \in (0, \infty)$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η σ.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων* $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii) Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο $\theta$.*

*(iii) Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(iv) Η σ.δ $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.*

Για απόδειξη βλ. π.χ. [21] Theorem 2.3.4 .

## 2.5 Η μικτή $\sigma$.δ. Poisson

Η επιλογή της κατάλληλης $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια γενική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος. Η βασική ιδέα είναι να ερμηνεύσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνου ως μίγμα ομοιογενών χαρτοφυλακίων κινδύνου. Πιο συσκεκριμένα η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου οριζεται ως μια μίξη $\sigma$.δ. αριθμού απαιτήσεων ομοιογενών χαρτοφυλακίων, ώστε η μικτή κατανομή τους να αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου. Αρχικά θα καθορίσουμε το γενικό μοντέλο και στη συνέχεια τη μελέτη της μικτής $\sigma$.δ. Poisson

#### Το υπόδειγμα

Έστω οτι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων και $\Theta$ μια τυχαία μεταβλητή. Κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

• Έστω οτι τα ανομοιογενή χαρτοφυλάκια κινδύνου είναι ένα μίγμα από ομοιγενή χαρτοφυλάκια κινδύνου παρόμοια, ίδιου μεγέθους και διαφορετικά μεταξύ τους.

• Έστω οτι κάθε ένα από τα ομοιγενή χαρτοφυλάκια μπορεί να προσδιοριστεί από την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής $\Theta$. Δηλαδή η κατανομή της $\Theta$ παριστά τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου υπό εξέταση. Επομένως οι ιδιότητες της κατανομής της $\sigma$.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του αριθμού των απαιτήσεων, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής της ως προς το $\Theta$ καθώς και από τις ιδιότητες της κατανομης της $\Theta$, η οποία ονομάζεται **δομική παράμετρος**. Η κατανομή της $P_\Theta$ ονομάζεται **δομική κατανομή** ενώ η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ ονομάζεται **μικτή $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων**.

**Ορισμός 2.5.1.** Η μικτή $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων έχει

**(a) Υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το $\Theta$ αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_1, t_2, ..., t_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j \in \{1,2...,m\}}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το $\Theta$.

**(b) Υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το $\Theta$ αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j \in \{1,2...,m\}}$ έχουν την ίδια υπο συνθήκη κατανομή ως προς το $\Theta$, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$P_{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}|\Theta} \qquad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

**Λήμμα 2.5.2.** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις , τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις .*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. π.χ [21], Lemma 4.1.1.

**Ορισμός 2.5.3.** Η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μικτή** $\sigma$.**δ. Poisson με παράμετρο** $\Theta$ εαν η $\Theta$ είναι μια τ.μ. για την οποία ισχύει $P_\Theta[(0, \infty)] = 1$ και εαν $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_t}$ έχει υπο συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$ έτσι ώστε για κάθε $t \in (0, \infty)$ να ισχύει η σχέση

$$P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \qquad P|\sigma.(\Theta) - \sigma\beta.$$

για κάθε $t \in (0, \infty) P - MPP(\Theta)$ ή απλώς $MPP(\Theta)$ για συντομία

**Λήμμα 2.5.4.** *Μια στοχαστική διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ που έχει υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$ θα έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$ αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$P_{N_{t+h} - Nt|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \qquad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

**Απόδειξη.** Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε ανάλογα επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης για σ.δ. χωρίς τη δέσμευση ως προς $\Theta$ (βλ. π.χ. [1], Λήμμα A'1.3).
**(α)** (ευθύ) Πράγματι, έστω οτι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$. Θεωρούμε $t \in \mathbb{R}_+$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $m \in \mathbb{N}$ . Τότε για κάθε $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ ισχύει

$$P_{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}|\Theta}$$

Για $j=1$ προκύπτει: $P_{N_{t_1+h}-N_{t_0+h}|\Theta} = P_{N_{t_1}-N_{t_0}|\Theta}$ ή ισοδύναμα $P_{N_{t_1+h}-N_h|\Theta} = P_{N_{t_1}|\Theta}$. Αν θεσω όπου $t_1$ το $h$ και όπου $h$ το $t_1$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

**(b)** Αντιστρόφως, έστω οτι για κάθε $t,h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta$ θα δείξουμε οτι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις. Πράγματι, έστω οτι $h \in \mathbb{R}_+$ , $m \in \mathbb{N}$ και $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$, όπου $t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

• Αν $t_{j-1} + h < t_j$ τότε

$$\begin{aligned}
P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} &= P_{N_{t_j+h}-N_{t_j}+N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j+h}-N_{t_j}|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} \\
&= P_{N_h|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta}.
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} &= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}+N_{t_{j-1}+h}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} * P_{N_h|\Theta} \\
&= P_{N_h|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta}.
\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει οτι

$$P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta}.$$

• Αν $t_{j-1} + h \geq t_j$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
P_{N_h|\Theta} &= P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_j}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_{j-1}+h}+N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_{j-1}+h}} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta}.
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{N_h|\Theta} &= P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}+N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta}.
\end{aligned}$$

Απο τις παραπάνω σχέσεις έχουμε οτι

$$P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_{j-1}+h}} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta}.$$

Άρα $P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta}$, από όπου έπεται το ζητούμενο. □

**Λήμμα 2.5.5.** *Αν η σ.δ.$\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

*και*

$$Var[N_t] = t\mathbb{E}[Var(N_t|\Theta)] + Var[\mathbb{E}(N_t)|\Theta]$$

**Λήμμα 2.5.6.** *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση*

$$P[\{N_t = n\}] > 0$$

*για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, \infty)$.*

Το επόμενο λήμμα είναι συνέπεια του Λήμματος 2.5.5.

**Λήμμα 2.5.7. (Πολυωνυμικό κριτήριο)** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson, τότε ισχύει*

$$P[\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\}|\{N_{t_m} = n\}] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} k_j!}\prod_{j=1}^{k}(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m})^{k_j}$$

*για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k_1, \ldots, k_m$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$*

Για τις αποδείξεις των Λημμάτων 2.5.5, 2.5.6 και 2.5.7 βλ. π.χ. [21], Lemma 4.1.2, Lemma 4.2.1 και Lemma 4.2.2, αντίστοιχα.

**Ορισμός 2.5.8.** *Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται σ.**δ.** $Markov$ αν ισχύει η ισότητα*

$$P[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}] = P[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}|\{N_{t_m} = n_m\}],$$

*για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_1 < \ldots < t_{m+1} \in (0, \infty)$ και $n_1, \ldots, n_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ ώστε $t_1 < \ldots < t_{m+1}$ και $P[\cap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}] > 0$.*

*Η παραπάνω συνθήκη ονομάζεται* **ιδιότητα Markov**, *από την οποία προκύπτει οτι* $n_1 \leq \ldots \leq n_m$. *Επιπλέον αν η σ. δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια σ. δ.* $Markov$, *τότε η παραπάνω ισότητα ισχύει για* $t_1 = 0$ *ή για* $n_j = \infty$ *για κάποιο* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

**Θεώρημα 2.5.9.** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έιναι μια μικτή σ.δ. Poisson, τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Το επόμενο λήμμα είναι συνέπεια του Λήμματος 2.5.5.

**Λήμμα 2.5.10.** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο* $\Theta$ *τέτοια ώστε η* $[\Theta] < \infty$, *τότε για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$ *ισχύει*

$$\mathbb{E}[_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

*και*

$$Var[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2 Var[\Theta]$$

**Θεώρημα 2.5.11.** *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο* $\Theta$ *τέτοια ώστε το* $\Theta$ *να έχει πεπερασμένη μέση τιμή τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

**(a)** *Η κατανομή του* $\Theta$ *είναι εκφυλισμένη .*

**(b)** *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις .*

**(c)** *Η σ.δ.του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια μη ομογενής σ.δ. Poisson.*

**(d)** *Η σ.δ.του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια (ομογενής) σ.δ. Poisson.*

Για την απλοδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. π.χ. [21], Theorem 4.2.6.

# Κεφάλαιο 3

# Πολυμεταβλητές σημειακές κατανομές

## 3.1 Πιθανογεννήτριες

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας, τις οποίες χρειαζόμαστε στην ανάλυση της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson. Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητα ανήκει σε μια κατανομή. Δεδομένου ότι χρειαζόμαστε αυτή τη συνάρτηση σε σχέση με σημειακά τυχαία διανύσματα, καθορίζουμε την γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας από τυχαία διανύσματα. Πριν ορίσουμε την γεννήτρια πιθανοτήτων εισάγουμε έναν συμβολισμό που αφορά τις παραγώγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

$$D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) := \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} f}{\partial t_1^{n^{(1)}} \ldots \partial t_k^{n^{(k)}}}(\mathbf{t})$$

Φυσικά αυτός ο συμβολισμός θα χρησιμοποιείται μόνο όταν οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.
Λόγω των γραμμικών μετασχηματισμών, που θα προκύπτουν, θα χρησιμοποιούμε ένα άλλο συμβολισμό για τις παραγώγους. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, με $g(\mathbf{t}) = r(\mathbf{t} - \mathbf{1})$, για $r \in \mathbb{R}_+$.
*Στη συνέχεια, για λόγους σαφήνειας, θα χρησιμοποιούμε* $\frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} f(r(\mathbf{t}-\mathbf{1}))}{\partial^{\mathbf{nt}}}|_{t=0}$ *αντι του* $D^{\mathbf{n}}(f \circ g)(0)$.

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{N}_0^k$ ένα τυχαίο διάνυσμα και $g_{\mathbf{X}} : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) := \mathbb{E}[\mathbf{r}^{\mathbf{X}}] = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]$$

καλείται **πιθανογεννήτρια συνάρτηση του X.** Επομένως η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας είναι μια δυναμοσειρά με $k$ συντεταγμένες.

**Λήμμα 3.1.2.** *Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας $g_{\mathbf{X}}$ ενός τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0^k$ Έχει τις εξής ιδιότητες:*

*(i) Η $g_{\mathbf{X}}$ είναι αύξουσα και ισχύει $0 \leq g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) \leq g_{\mathbf{X}}(\mathbf{1}) = 1$ για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ .*

*(ii) η $g_{\mathbf{X}}$ είναι συνεχής στο* **[0,1]**.

*(iii) $g_{\mathbf{X}}$ είναι απείρως διαφορίσιμη στο* **[0,1]**.

*(iv) $\forall \mathbf{l} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ και $r$ στο* **[0,1]** *η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας πληροί την παρακάτω σχέση:*

$$D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]$$

.

*(v) $\forall \mathbf{l} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ η παράγωγος $D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}$ είναι αύξουσα επάνω στο* **[0,1)** *και ισχύει*

$$\sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]$$

.

**Απόδειξη.**

$(i)$ : Είναι προφανές.
$(ii)$ : Για κάθε $\mathbf{r} \in\ [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $m \in \mathbb{N}_0^k$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] - \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]| &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}\setminus[\mathbf{0},\mathbf{m}]} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\ &\leq \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}\setminus[\mathbf{0},\mathbf{m}]} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \end{aligned}$$

αφού $\mathbf{r} \leq \mathbf{1}$. Επειδή η τελευταία σειρά είναι ουρά μιας συγκλίνουσας δυναμοσειράς θα έχουμε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^\mathbf{k}$ ώστε

$$|\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] - \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]| < \varepsilon$$

για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ άρα η δυνομοσειρά $g_{\mathbf{x}}$ συγκλίνει ομοιόμορφη στο **[0,1]**. Δεδομένου οτι κάθε μερικό άθροισμα της σειράς είναι ένα πολυώνυμο και επομένως συνεχής συνάρτηση, από την θεωρία των δυναμοσειρών έπεται η συνέχεια της $g_{\mathbf{x}}$.
$(iii)$ : Αφού η $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}]$ συγκλίνει απόλυτα στο **[-1,1]**, από τη θεωρία των δυναμοσειρών έπεται οτι θα είναι απείρως διαφορίσιμη στο **(-1,1)** άρα η $g_{\mathbf{x}}$ είναι απείρως διαφορίσιμη στο **[0,1)**.
$(iv)$ : Η απόδειξη του $(iv)$ θα γίνει με δυο διαδοχικές επαγωγές.
(**a**) Είναι γνωστό οτι για κάθε $j \in \{0, ..., k\}$ και για κάθε $\mathbf{r} \in \ [\mathbf{0}, \mathbf{1})$ ισχύει 312a

$$D^{\mathbf{e}_j} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} \in [\mathbf{e_j}, \infty) n_j \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] \tag{3.1}$$

βλ.πχ.[$Diendonne'$] [8] (1971) όπου $\mathbf{e_j} = \mathbf{e_0} + ... + \mathbf{e_j}$
Η απόδειξη του (**a**) θα γίνει με επαγωγή στο $j$.
• Για $j = 0$

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{e}_0} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= D^{\mathbf{e}_0} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_0},\infty)} n_0 \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_0}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_0},\infty)} n_0 \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_0}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}]. \end{aligned}$$

•$j \to j + 1$ Έστω οτι ισχύει η (3.1) για κάποιο $j \in \{0, ..., k - 1\}$.
Ισχύει

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{e_j}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_j},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}} \mathbf{n_j} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_j},\infty)} \frac{n_0!}{(n_0-1)!} \cdots \frac{n_j!}{(n_j-1)!} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_j},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}} \frac{\mathbf{n_j}!}{(\mathbf{n_j} - \mathbf{e_j})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}]. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει 312b

$$D^{\mathbf{e_j}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_j},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}} \frac{\mathbf{n_j}!}{(\mathbf{n} - \mathbf{e_j})!} P[\{X = n\}]. \tag{3.2}$$

Όπου $\mathbf{n_j} := (n_0, ...n_j, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}_0^k$.
Τότε,

$$
\begin{aligned}
D^{\mathbf{e}_{j+1}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r_{j+1}} D^{\mathbf{e_j}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_{j+1}} \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_j},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}} \frac{\mathbf{n_j}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{e_j})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_{j+1}},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_j}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n_j}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{e_j}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_{j+1}},\infty)} n_{j+1} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_{j+1}}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]
\end{aligned}
$$

**(b)** Ισχύει η $(iv)$.
Η απόδειξη του **(b)** θα γίνει με επαγωγή στο **l**.
$\bullet \mathbf{l}=\mathbf{e}$ ισχύει λόγω του $(\mathbf{a})$.
$\bullet \mathbf{l}\to\mathbf{l}+\mathbf{1}$ Έστω

$$
D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].
$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
D^{\mathbf{l}+\mathbf{1}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= D^{\mathbf{1}}(D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})) \\
&= D^{\mathbf{1}}\Big(\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]\Big) \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l}+\mathbf{1},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l}+\mathbf{1},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-(\mathbf{l}+\mathbf{1})} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-(\mathbf{l}+\mathbf{1}))!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].
\end{aligned}
$$

$(v)$ : Έστω $\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k$. Είναι προφανές οτι η $D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}$ είναι αύξουσα στο **[0,1)**. Επιπλέον έστω

$$
c_1 = \sup_{\mathbf{r}\in\ [\mathbf{0},\mathbf{1})} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})
$$

Για κάθε $r\in[\mathbf{0},\mathbf{1})$ έχουμε από $(iv)$ οτι

$$
D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\} \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].
$$

Άρα

$$c_1 \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]. \tag{3.3}$$

Επιπλέον για κάθε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ και για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\mathbf{m})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\} &\leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] \\ &= D^{\mathbf{1}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \leq c_1. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει

$$\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\mathbf{m})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{X=n\}] \leq c_1. \tag{3.4}$$

Από τις (3.3) και (3.4) προκύπτει

$$c_1 = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].$$

□

**Πόρισμα 3.1.3.** *Έστω $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{N}_0^k$ τυχαίο διάνυσμα, τότε ισχύει:*

$$P[\mathbf{X}=\mathbf{1}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \qquad \forall\ \mathbf{l} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}.$$

Το παραπάνω πόρισμα μας δείχνει οτι το όνομα της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας είναι δικαιολογημένο. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ είναι μοναδικά ορισμένη από την γεννήτρια συνάρτησης πιθανότητας.

**Ορισμός 3.1.4.** Έστω $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{N}_0^k$ τυχαίο διάνυσμα και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$, τότε

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] = \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]$$

Καλείται **διωνυμική ροπή τάξης l του X** . Η διωνυμική ροπή τάξης $\mathbf{l}$ του $\mathbf{X}$ υπάρχει ως μέση τιμή ενός θετικού τυχαίου διανύσματος αλλά δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένη μέση τιμή .

**Παρατήρηση 3.1.5.** Ισχύει

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] = \sup_{\mathbf{r}\in\ [\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^l g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] &= \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{l}!(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} D^l g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \\
&= \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^l g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

**Λήμμα 3.1.6.** *Έστω $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{N}_0^k$ τυχαίο διάνυσμα και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

**(i)** *Η διωνυμική ροπή ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] < \infty$$

**(ii)** *Για κάθε $\mathbf{s} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ισχύει η ανισότητα*

$$\lim_{r\to s} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}(\mathbf{r}) < \infty.$$

*Αν το $\mathbf{X}$ ικανοποιεί μια από τις παραπάνω ιδιότητες τότε η διωνυμική ροπή μπορεί να εκφραστεί ως*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] = \frac{1}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}(\mathbf{r})$$

**Απόδειξη.** $(\mathbf{i}) \Longrightarrow (\mathbf{ii})$ Έστω οτι ισχύει το $(i)$. Τότε

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] < \infty$$

άρα έχουμε

$$\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] = \mathbf{l}!\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] < \infty. \tag{3.5}$$

Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.1.2,$(iv)$ για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^k$ ώστε

$$\begin{aligned} &|\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] - \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\mathbf{q})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]| \\ &\qquad \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)\setminus[\mathbf{1},\mathbf{q})} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\mathbf{r} \in (\mathbf{0},\mathbf{1}]$ η δυναμοσειρά $\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)\setminus[\mathbf{1},\mathbf{q})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(\mathbf{0},\mathbf{1}]$ και είναι συνεχής. Σαν συμπέρασμα από το Λήμμα 3.1.2,$(iv)$ έχουμε για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$, για κάθε $\mathbf{s} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ και για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ οτι

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\ &\leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] < \infty, \end{aligned}$$

Όπου η η ανισότητα είναι συνέπεια της Παρατήρησης 3.1.5.
Άρα

$$D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) < \infty$$

Επομένως ισχύει η $(ii)$.
$(\mathbf{ii}) \Longrightarrow (\mathbf{i})$ Από το $(ii)$ και από το Λήμμα 3.1.2,$(v)$ έπεται οτι

$$\sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) < \infty.$$

Άρα από την την παρατήρηση 3.1.5 προκύπτει

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] = \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) < \infty.$$

$\square$

Σε αντίθεση με την μονοδιάστατη περίπτωση θετικών διακριτών τυχαίων μεταβλητών, το πεπερασμένο της διωνυμικής ροπής της $\mathbf{l}$ δεν είναι ισοδύναμο με το πεπερασμένο της ροπής τάξης $\mathbf{l}$ .Επιπλέον, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το Λήμμα 3.1.6 $(ii)$ αν για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$, υπάρχει $\mathbf{m} \in [\mathbf{0}, \mathbf{l}]$ με $\mathbf{m} \neq \mathbf{l}$ έτσι ωστε to $(ii)$ να ισχύει για το $\mathbf{m}$. Ως εκ τούτου , δεν είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε το όριο $D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{l})$.

**Παράδειγμα 3.1.7.** Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα δυο μεταβλητών $\mathbf{X}$ με

$$P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] = \begin{cases} (2cn^2)^{-1}, & \mathbf{n} = [(n,0)', (1,n)'] \\ 0, & \mathbf{n} \neq [(n,0)', (1,n)'] \end{cases}$$

όπου

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Έχουμε οτι

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)X_2] = 0$$

. Πράγματι,

• Για $(X_1, X_2) = \mathbf{n} = (n, 0)$

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)X_2] = 0.$$

• Για $(X_1, X_2) = \mathbf{n} = (1, n)$

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)X_2] = 0.$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \sum_{n=1}^{\infty} X_1 P[(X_1, X_2) = \mathbf{n}] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[(X_1, X_2 = (n,0)] + P[(X_1, X_2 = (1,n)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2cn^2} + \frac{1}{2cn^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2cn} + \frac{1}{2cn^2}) > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2cn}. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\quad \mathbb{E}[X_1] \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2cn}$.
Επίσης

$$\mathbb{E}[X_2] = \sum_{n=1}^{\infty} X_2 P[(X_1, X_2) = \mathbf{n}] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[(X_1, X_2) = (1, n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2cn^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2cn}$$

Άρα ισχύει $\quad \mathbb{E}[X_2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2cn}$. Επίσης

$$\mathbb{E}[(X_1 X_2)] = \sum_{n=1}^{\infty} X_1 X_2 P((X_1, X_2) = \mathbf{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (n \frac{1}{2cn^2} + 0 \frac{1}{2cn^2}).$$

Άρα ισχύει $\Rightarrow \mathbb{E}[X_1 X_2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2cn}$
Όπου το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2cn}$ είναι άπειρο. Έτσι η διωνυμική ροπή τάξης $(2, 1)$ είναι πεπερασμένη, αλλά καμία άλλη ροπή του $\mathbf{l}$ με $\mathbf{l} \leq (1, 2)$ είναι πεπερασμένη. Επιπλέον έχουμε

$$\mathbb{E}[(X_1^2 X_2)] \geq \mathbb{E}[(X_1 X_2)]$$

και ως εκ τούτου η ροπή της τάξης $(2, 1)'$ επίσης δεν είναι πεπερασμένη.Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ μοιάζει με

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \frac{(r_1^n)}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \frac{(r_1 r_2^n)}{n^2}$$

και επιπλέον έχουμε

$$D^{\mathbf{e}_1} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \frac{(r_1^{n-1})}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \frac{(r_2^n)}{n^2}$$

$$D^{\mathbf{e}_2} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \frac{(r_1 r_2^{n-1})}{n^2}$$

$$D^{\mathbf{e}_1} D^{\mathbf{e}_2} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \frac{(r_2^{n-1})}{n^2}$$

$$D^{\mathbf{e}_1}D^{\mathbf{e}_1}D^{\mathbf{e}_2}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = 0$$

Για καθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})$ παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{e}_1}g_{\mathbf{x}|_{[0,1)}}(\mathbf{r}) &= \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{e}_2}g_{\mathbf{x}|_{[0,1)}}(\mathbf{r}) \\ &= \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{e}_1}D^{\mathbf{e}_2}g_{\mathbf{x}|_{[0,1)}}(\mathbf{r}) = \infty.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, δεν είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τον όρο $D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})$. Αυτό δείχνει οτι η θεωρία των λειτουργιών γεννητριων πιθανοτήτων για μονοδιάστατη τυχαία μεταλητή δεν μπορούνα να μεταφερθούν στην πολυδιάστατη περίπτωση.

**Λήμμα 3.1.8.** *Έστω $\mathbf{X} : \square \to \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$ τυχαίο διάνυσμα και $l \in \mathbb{N}_0^k$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

**(i)** *Για κάθε $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ η διωνυμική ροπή*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{m}}] < \infty$$

**(ii)** *Για κάθε $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{m}}] < \infty$$

**(iii)** *Για κάθε $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ και για κάθε $\mathbf{s} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ισχύει*

$$\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{s}} D^{\mathbf{e}_1}g_{\mathbf{x}|_{[0,1)}}(\mathbf{r}) < \infty$$

**(iv)** *Για κάθε $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ η $m$-οστή παράγωγος της $g_x$ είναι συνεχής στο $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.*
*Αν $\mathbf{X}$ ικανοποιεί ένα και ως εκτούτου όλα τα προηγούμενα στοιχεία, τότε ισχύει*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}] = \frac{1}{\mathbf{l}!}D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})$$

**Απόδειξη.** (**i**) $\iff$ (**iii**) Προκύπτει από το Λήμμα 3.1.6
Για την απόδειξη του (**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) έχουμε (**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) Με επαγωγη είμαστε σε θέση να δείξουμε οτι για κάθε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$

$$\mathbf{X}^m \in \ span\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix} : j \in \mathbb{N}_0^k, j \leq m$$

• Για $j = 1$ έχουμε $\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} = \mathbf{X}$ άρα ισχυει οτι $\mathbf{X}^1 \in \ span\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix} : j \in \mathbb{N}_0^k, j \leq 1$

• (Υ.Ε.)

$$\mathbf{X}^n \in \ span\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix} : j \in \mathbb{N}_0^k, j \leq n$$

• Έχουμε οτι $\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{n+1}\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{X}!}{(\mathbf{n+1})!(\mathbf{X-n-1})!} = a_{n+1}\mathbf{X}^{n+1} + a_n\mathbf{X}^n ... + a_1\mathbf{X}.$
Επομένως $\mathbf{X}^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}[\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{n+1}\end{pmatrix} - (a_n\mathbf{X}^n ... + a_1\mathbf{X})].$

Άρα για όλες τις ροπές τάξης $\mathbf{m}$ με $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$
$\mathbb{E}[\mathbf{X^m}] = \sum_{\mathbf{j}\in\ [\mathbf{0},\mathbf{m}]} a_{\mathbf{mj}}\mathbb{E}[\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix}]$ όπου $a_{\mathbf{mj}} \in \mathbb{R}$ δηλ.

$$\mathbb{E}[\mathbf{X^m}] < \infty \quad \forall \mathbf{m} \leq \mathbf{l}$$

.
(**ii**) $\Longrightarrow$ (**i**) Ισχύει $\mathbb{E}[\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix}] \leq \mathbb{E}[\mathbf{X^m}]$ και αφού $\mathbb{E}[\mathbf{X^m}] < \infty$ συνεπάγεται οτι $\mathbb{E}[\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix}] < \infty$ .
Για την συνεπαγωγή (**i**) $\iff$ (**iv**) έχουμε:
(**i**) $\Longrightarrow$ (**iii**) Θεωρούμε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ με $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\mathbf{q} \leq \mathbf{1}$ έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

$$\begin{aligned}|\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{m},\infty)} \mathbf{r^{n-m}}\frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{m})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] - \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{m},\mathbf{q})} \mathbf{r^{n-m}}\frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{m})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]| \\ \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{m},\infty)\setminus[\mathbf{m},\mathbf{q})} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{m})!}P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ σε συνεχή συνάρτηση την οποία θα ονομάσουμε $f_m$. Έστω $h \in frm[o]--, .eqn.., k$ με $\mathbf{m} - e_{\mathbf{m}} \leq 0$. Για $\mathbf{r} = (r - s_h)\mathbf{e}_h + \mathbf{s}$ και για αυθαίρετο $\mathbf{s} \in [, \mathbf{1}]$ προκυπτουν δυο δυναμοσειρές $f_{\mathbf{m},h}$ και $f_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_h}, h$ οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα στο [0,1]. Από τη θεωρία των μονοδιάστατων δυναμοσειρών προκύπτει οτι $f_{\mathbf{m},h} = f'_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_h}, h$ για κάθε $r \in 0, 1]$. Επειδή το $s$ είναι αυθαίρετο παίρνουμε $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = D^{\mathbf{e}_h} f_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_h}(r)$ για κάθε $r \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Με επαγωγή προκυπτει $f_{\mathbf{m}} = D^{\mathbf{m}} g_{\mathbf{x}}$.

(**i**) $\iff$ (**iv**) Αφού η $g_{\mathbf{x}}$ είναι απείρως διαφορίσημη και συνεχής ισχύει από το Λήμμα 3.1.6

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{m}}] = \sup_{\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}!} D^{\mathbf{m}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^{\mathbf{m}} \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) < \infty.$$

□

**Πόρισμα 3.1.9.** *Έστω* $\mathbf{X} : \square \to \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$ *τυχαίο διάνυσμα*

*(1) Αν* $X_i \in \mathcal{L}^1(P)$ *για κάθε* $i \in 1, ..., k$ *τότε*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}).$$

*(2) Αν* $X_i \in \mathcal{L}^2(P)$ *για κάθε* $i \in \{1, ..., k\}$ *τότε*

$$Var[\mathbf{X}] = Hess g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) - grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})' + Diag(grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})).$$

## 3.2 Ροπογεννήτριες

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα άλλο βοηθητικό εργαλείο το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί σε αυθαίρετες κατανομές επάνω στην $\mathfrak{B}_k$ για $k \in \mathbb{N}$.

Η **ροπογεννήτρια συνάρτηση** $M_U : \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$ ορίζεται ως εξής:

$$M_U(\mathbf{s}) := \int_{\mathbb{R}^k} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} dU(\mathbf{x}).$$

**Λήμμα 3.2.1.** *Θεωρούμε μια κατανομή* $U : \mathfrak{B}_k \to [0,1]$ *και υποθέτουμε οτι* $M_U(\mathbf{s})$ *είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή* $B$ *του* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$*. Τότε*

$$D^{\mathbf{n}} M_U(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} dU(\mathbf{x})$$

*για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$*. Επιπλέον ισχύει*

$$M_U(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{t}-\mathbf{s})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} dU(\mathbf{x})$$

*για κάθε* $\mathbf{t} \in \ B$*.*

**Απόδειξη.** Αρχικά υποθέτουμε οτι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $M_U$ είναι πεπερασμένη στο $:= (-\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0)$ με $\mathbf{s}_0 > \mathbf{0}$ άρα και τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα. Ισχύει η ανισότητα $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|} \le e^{\mathbf{t}'\mathbf{x}} + e^{\mathbf{t}'\mathbf{x}}$ και επειδή η δεξιά πλευρά έχει ένα πεπερασμένο ολοκλήρωμα ως προς $U$ έχουμε οτι το ολοκλήρωμα της $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|}$ είναι πεπερασμένο. Θυμίζουμε οτι $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|^n}{n!}$, επομένως η σειρά συγκλίνει (βλ. *Billingsley* [6] *Theorem* 16.7 (1995) ) Έχουμε

$$\begin{aligned} M_U(\mathbf{t}) &:= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{e}^{\mathbf{t}'\mathbf{x}} U(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{n}}}{n!} U(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{k}}}{k!} U(d\mathbf{x}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{t} \in \ B$. Επίσης

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{k}}}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|^{\mathbf{k}}}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|^{\mathbf{n}}}{n!} = e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|}. \tag{3.6}$$

Αφού $\int_{\mathbb{R}^k} e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|} U(d\mathbf{x}) < \infty$, προκύπτει οτι $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|} \in \ \mathcal{L}^1(U)$ Από την (3.6) και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{k}}}{k!} U(d\mathbf{x}) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{k}}}{k!} U(d\mathbf{x}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{k}}}{k!} U(d\mathbf{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{n}}}{n!} U(d\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του διωνύμου του $Newton$ στο $(\mathbf{t'x})^{\mathbf{n}} = (\sum_{i=1}^{k} t_i x_i)^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
M_U(\mathbf{t}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k} \prod_{i=1}^{k} \frac{(t_i x_i)^{n_i}}{n_i!} U(d\mathbf{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} 75 \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} U(d\mathbf{x}) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} U(d\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποίηθηκε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Το ανάπτυγμα $Taylor$ γύρω από το $\mathbf{0}$ δίνει επίσης μια αναπαράσταση της δυναμοσειράς.

$$M_U(\mathbf{t}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_U(\mathbf{0}).$$

Από μοναδικότητα της δυναμοσειράς έχουμε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$

$$D^{\mathbf{n}} M_U(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} U(d\mathbf{x}). \tag{3.7}$$

Από την υπόθεση η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή $B$ του $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$.

Εξετάζουμε την κατανομή $V75 : \mathfrak{B}_k \to [0,1]$ με $V(A) := \inf_A \frac{e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} Ud(\mathbf{x})$ , για κάθε $\in \mathfrak{B}_k$. Τότε η $V$ έχει μια πεπερασμένη ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned} M_V(\mathbf{v}) &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{\mathbf{v}'\mathbf{x}} V(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \frac{e^{(\mathbf{v}+\mathbf{s})'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} U(d\mathbf{x}) \\ &= \frac{M_U(\mathbf{v}+\mathbf{s})}{M_U(\mathbf{s})} \end{aligned}$$

για $\mathbf{v}$ σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$. Από την (3.7) έχουμε

$$\begin{aligned} D^n M_V(\mathbf{0}) &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x^n} V(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x^n} \frac{e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} U(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά

$$D^n M_V(\mathbf{0}) = \frac{D^n M_U(\mathbf{s})}{M_U(\mathbf{s})}$$

και ως εκ τούτου

$$D^n M_V(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x^n} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} U(d\mathbf{x}).$$

Η συνάρτηση $M_V$ είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$ και έχει ένα ανάπτυγμα $Taylor$ της μορφής $M_V(\mathbf{t}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{t^n}}{\mathbf{n!}} D^{\mathbf{n}} M_V(\mathbf{0})$.
Για $\mathbf{v}$ σε αυτήν την περιοχή του $\mathbf{0}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{M_U(\mathbf{v}+\mathbf{s})}{M_U(\mathbf{s})} &= M_V(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{n\in\ \mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{v^n}}{\mathbf{n!}} D^{\mathbf{n}} M_V(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{n\in\ \mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{v^n}}{\mathbf{n!}} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x^n} \frac{e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} U(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Με $\mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{s}$ έπεται το συμπέρασμα του λήμματος. □

**Λήμμα 3.2.2.** *Έστω* $U : \mathfrak{B}_k \to [0, 751]$ *είναι μια κατανομή και* $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ *είναι ένας πίνακας.Τότε*

$$M_{U_A}(\mathbf{t}) = M_U(A'\mathbf{t})$$

*για κάθε* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.

**Απόδειξη:** Δεδομένου οτι $A$ είναι μετρίσημη συνάρτηση και η εκθετική συάρτηση είναι θετική, από την θεωρά ολοκλήρωσης έχουμε οτι

$$\begin{aligned} M_{U_A} &= \int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{t}'\mathbf{x}} U_A(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{t}'\mathbf{A}\mathbf{x}} U_(d\mathbf{x}) = M_U(A'\mathbf{t}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θ.2.4.6 του [Σ.Σ.].
Μετά την εισαγωγή της ροπογεννήτριας συνάρτησης μπορούμε να αναφέρουμε ένα χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας για κάποιες ειδικές θετικές τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα με την υπο συνθήκη ανεξαρτησία.75
Συμβολισμός $\mathrm{M}_X := M_P$.

**Θεώρημα 3.2.3.** *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ είναι μια τυχαία μεαβλητή και έστω $Y : \Omega \to \mathbb{R}_+^k$ είναι ένα φραγμένο τυχαίο διάνυσμα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

**(a)** *Τα $X$ και $\mathbf{Y}$ είναι ανεξάρτητα.*

**(b)** *Η ροπογεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση*

$$M_{(X,\mathbf{Y})}(t, \mathbf{s}) = M_X(t) M_{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}$$

*Για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$.*

**(c)** *Υπάρχει $t > 0$ ώστε*

$$\mathbb{E}[e^{-Xt} x^{\mathbf{n}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] = \mathbb{E}[e^{-Xt} x^{\mathbf{n}}] \mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}].$$

*για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**(d)** *Ισχύει η ταυτότητα $\mathbb{E}[e^{-Xt} X^n e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] = \mathbb{E}[e^{-Xt} X^n] \mathbb{E}[e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}]$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Αποδεικνίουμε τον ισχυρισμό σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα (a)$\Longrightarrow$ (d)$\Longrightarrow$ (c)$\Longrightarrow$ (b)$\Longrightarrow$ (a)

(a)$\Longrightarrow$ (d): Έιναι προφανές.
(d)$\Longrightarrow$ (c): Έιναι προφανές.
(c)$\Longrightarrow$ (b): Αφού η $X$ είναι θετική και το $\mathbf{Y}$ είναι φραγμένο, υπάρχει ένα ανοικτό $B = B_t \times B_{\mathbf{s}}$ έτσι ώστε $-t \in B_t \subseteq (-\infty, 0)$ και το $\mathbf{0} \in B_{\mathbf{s}} \subseteq \mathbb{R}^k$ και οι ροπογεννήτριες συναστήσεις $M_X, M_{\mathbf{Y}}$ και $M_{(X,\mathbf{Y})}$ να είναι πεπερασμένες στα $_{t,\mathbf{s}}$ και

αντίστοιχα. Τώρα αν θεωρήσουμε αυθαίρετα οτι $\hat{t} \in t$ και $\mathbf{s} \in_{\square} \mathbf{s}$ από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
M_{(X,\mathbf{Y})}(\hat{t}, \hat{\mathbf{s}}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{(\hat{t}+t)^n}{n!}\frac{(\hat{\mathbf{s}})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\mathbb{E}[e^{-Xt}X^n\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] \quad = \\
\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{(\hat{t}+t)^n}{n!}\frac{(\hat{\mathbf{s}})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\mathbb{E}[e^{-Xt}X^n]\mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] &= \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(\hat{t}+t)^n}{n!}\mathbb{E}[e^{-Xt}X^n]\Big)\Big(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k}\frac{(\hat{\mathbf{s}})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}]\Big) = \\
{}_X(\hat{t})M_{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{s}})
\end{aligned}
$$

Άρα η επιθυμητή ταυτότητα ισχύει στο $B$. Αφού οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_X, M_{\mathbf{Y}}$ και $M_{X,\mathbf{Y}}$ πάνω στα $(-\infty, 0), \mathbb{R}^k$ και $(-\infty, 0)\times\mathbb{R}^k$ αντίστοιχα είναι συνεχώς παραγωγίσημες άπειρες φορές, από την προηγούμενη ισότητα έπεται το $B$.
(b)$\Longrightarrow$ (a): Για κάθε $t < 0$ και για κάθε $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}} P_{(X,\mathbf{Y})}(x, \mathbf{y}) &= M_{(X,\mathbf{Y})}(t, \mathbf{s}) \\
&= M_X(t)M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{tx}P_X d(x) \int_{\mathbb{R}^k} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} P_{\mathbf{Y}} d(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}} Pd(x) \otimes Pd(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θ.$Fubini$. Ως εκ τούτου

$$
\int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}} P_{(X,\mathbf{Y})}(x, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}} Pd(x) \otimes Pd(\mathbf{y}).
$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει αν θέσω όπου $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Τότε απο τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού *Laplace* για μέτρα τα οποία συγκεντρώνονται στο $\mathbb{R}_+^d$ προκύπτει οτι $P_{(X,\mathbf{Y})} = P_X \otimes P_{\mathbf{Y}}$ και ως εκ τούτου προκύπτει η ανεξαρτησία των $X$ και $\mathbf{Y}$. □

**Λήμμα 3.2.4.** *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ και $Y : \Omega \to \mathbb{R}_+$ και είναι δυο τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον, $Z : \Omega \to \mathbb{N}_0^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ωστε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει οτι $P[Z = n] > 0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

*(i) Η ταυτότητα $\mathbb{E}(XY|\mathbf{Z}) = \mathbb{E}(X|\mathbf{Z})\mathbb{E}(X|\mathbf{Y})$ ισχύει.*

*(ii) Η ταυτότητα $\mathbb{E}(XY|\mathbf{Z} = \mathbf{n}) = \mathbb{E}(X|\mathbf{Z} = \mathbf{n})E(X|\mathbf{Z} = \mathbf{n})$ ισχύει για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{d}}$.*

**Απόδειξη.** Από την ανάλυση *Fourier*, για δεσμευμένες μέσες τιμές έχουμε:

$$\mathbb{E}(XY\mathbf{Z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbb{E}(XY|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}$$

Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|\mathbf{Z})\mathbb{E}(Y|\mathbf{Z}) &= (\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbb{E}(X|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \mathbb{E}(\mathbf{Y}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbb{E}(X|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\mathbb{E}(\mathbf{Y}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}.
\end{aligned}$$

Άρα έπεται ο ισχυρισμός. □

**Πόρισμα 3.2.5.** *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ είναι μια τυχαία μεταβλητή και $\mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}_+^k$ είναι ένα φραγμένο τυχαίο διάνυσμα. Επιπλέον, $Z : \Omega \to \mathbb{N}_0^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ωστε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει οτι $P[Z = n] > 0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

**(a)** *$X$ και $\mathbf{Y}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητα σε σχέση με το $\mathbf{Z}$.*

**(b)** *Η ταυτότητα*

$$P(X \in$$

$\cap \mathbf{Y} \in |\mathbf{Z}) = P(X \in$

$|\mathbf{Z}) P(\mathbf{Y} \in |\mathbf{Z}) B \in \mathfrak{B}$ *και* $C \in \mathfrak{B}_k$.

**(c)** *Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ η τυχαία μεταβλητή $X$ και το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y}$ είναι ανεξάρτητα σε σχέση με το μέτρο $P[\bullet|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}]$*

**Απόδειξη.** $(a) \iff (b)$: Είναι προφανές
$(b) \iff (c)$: Το $(c)$ ισχύει αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$

$$P[\{X \in \ B\} \cap \{\mathbf{Y} \in \ C\}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}] = \mathbf{P}[\{\mathbf{X} \in\}\square|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}]\mathbf{P}[\{\mathbf{Y} \in \ \mathbf{C}\}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}]$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ και $C \in \mathfrak{B}_k$. Λαμβάνοντας υπόψην τις τυχαίες μεταβλητές $\chi_B \cdot X$ και $Y \cdot \chi_C$ για αυθαίρετα $\in \mathfrak{B}$ και $C \in \mathfrak{B}_k$ από το Λήμμα 3.2.4 έπεται ο ισχυρισμός. □

**Πόρισμα 3.2.6.** *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ είναι μια τυχαία μεταβλητή και $\mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}_+^k$ είναι ένα φραγμένο τυχαίο διάνυσμα. Επιπλέον, $\mathbf{Z} : \Omega \to \mathbb{N}_0^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει οτι $P[\{\mathbf{Z} = \mathbf{n}\}] > 0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

**(a)** *$X$ και $\mathbf{Y}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητα σε σχέση με το $\mathbf{Z}$.*

**(b)** *Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει*

$$P_{(X,\mathbf{Y})|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}(t, \mathbf{s}) = P_{X|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}(t) P_{\mathbf{Y}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}(\mathbf{s})$$

*για κάθε $t < 0$ και $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$.*

**(c)** *Υπάρχει $t > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{E}(e^{-Xt} X^n \mathbf{Y}^{\mathbf{l}} | \mathbf{Z}) = E(e^{-Xt} X^n | \mathbf{Z}) \mathbb{E}(\mathbf{Y}^{\mathbf{l}} | \mathbf{Z})$$

*για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**(d)** *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$*

$$\mathbb{E}(e^{-Xt} X^n e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}} | \mathbf{Z}) = \mathbb{E}(e^{-Xt} X^n | \mathbf{Z}) \mathbb{E}(e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}} | \mathbf{Z})$$

*ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Αθροίζοντας όλα τα $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ της $(b)$ ιδιότητας του Θεωρήματος 3.2.3 υπο το μέτρο $P[\bullet|\mathbf{Z} = \mathbf{n}]$ δίνει την ιδιότητα $(b)$ αυτού του Πορίσματος. Ως εκ τούτου χρησιμοποιόντας επιπλέον το Θεώρημα 3.2.5 προκύπτει η ισοδυναμία για το $(b)$ και το $(a)$. Από το Λήμμα 3.2.4 παίρνουμε τις ισοδυναμίες $b \Leftrightarrow c$ και $b \Leftrightarrow d$. □

## 3.3 Θεώρημα Bernstein-Widder

Για εναν ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό των πολυμεταβλητών μικτών $\sigma.\delta.$ $Poisson$ στην Ενότητα 5.2 θα χρειαστούμε μια πολυμεταβλητή επέκταση του γνωστού Θεωρήματος $Bernstein - Widder$, το οποίο αναφέρει οτι μια πλήρως μονότονη συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως μετασχηματισμός $Laplace$ μιας κατανομής. Το Θεώρημα $Bernstein - Widder$ αποδεικνύεται με διάφορους τρόπους σε διάφορους τομείς των μαθηματικών, ωστόσο η απόδειξη μιας πολυμεταβλητής επέκτασης συχνά λαμβάνεται ως δεδομένο και ως εκ τούτου παραλείπεται. Σε αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε το πολυμεταβλητό Θεώρημα $Bernstein - Widder$ με έναν τρόπο που ταιριάζει στο αντικείμενο μελέτης μας και θα δώσουμε μια απόδειξη η οποία βασίζεται στη μεθοδολογία που αναπτύσσεται στο βιβλίο των $Berg, Ch., Christensen, J.P.R. and Ressel, P.$ [5] (1984).

***Ορισμός*** (3.3.1). Έστω N μια περιοχή του $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι **θετικά ορισμένη** αν

(i) $f(\mathbf{0}) = 0$.

(ii) $f(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in N$.

**Ορισμός 3.3.2.** Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **πλήρως μονότονη** αν είναι μη αρνητική και αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\nabla_{\mathbf{a}_1} ... \nabla_{\mathbf{a}_n} f(\mathbf{s}) \geq 0$$

όπου $\nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{s}) := f(\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} + \mathbf{a})$.

Το σύνολο των πλήρως μονότονων συναρτήσεων συμβολίζεται με $M(\mathbb{R}_+)$.Είναι ξεκάθαρο οτι το $M(\mathbb{R}_+)$ είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος στο $\mathbb{R}^S$ και οι μη αρνητικές σταθερές συναρτήσεις εμπεριέχονται στο $M(\mathbb{R}_+)$.

**Θεώρημα Bernstein-Widder (για διάσταση 1) 3.3.3.** *Για μια συνεχή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η $\varphi$ είναι πλήρως μονότονη*

*(ii) Η $\varphi$ είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη*

*(iii) Υπάρχει πεπερασμένο μέτρο $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ ώστε $\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx} \mu(dx)$*

*(iv) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ και $(-1)^n \varphi^{(n)}(s) \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$ και για κάθε $s > 0$, όπου $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ είναι ο χώρος όλων των άπειρα παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων επάνω στον $\mathbb{R}_+^*$).*

**Απόδειξη.** Οι ισοδυναμίες $(i) \iff (ii) \iff (iii)$ προκύπτουν από το [5] (βλ. $Berg$[1984] 4.4.)

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Η συνάρτηση $s \to \int_0^\infty e^{-sa} \mu(da)$ αποκαλείται μετασχηματισμός $Laplace$ και συμβολίζεται $\mathcal{L}(\mu)$. Αυτή η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο δεξί ημιεπίπεδο των πραγματικών αριθμών και εύκολα διακρίνουμε οτι είναι συνεχής και άπειρα παραγωγίσιμη στο ανοιχτό ημιεπίπεδο των πραγματικών αριθμών $z > 0$. Επιπλέον $(\mathcal{L}\mu)^{(n)}(z) = \int_0^\infty (-a)^n e^{-za} \mu(da)$ για κάθε πραγματικό $z > 0$ και $n \geq 0$.

Έτσι $(-1)^n(\mathcal{L}\mu)^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.
$(iv) \Longrightarrow (i)$ Υποθέτουμε πως ισχύει η $(iv)$.
Για $a \geq 0$ η συνάρτηση $\nabla_{\mathbf{a}}\varphi$ είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και ικανοποιεί την $(iv)$. Πράγματι,για $n \geq 0$ και $s > 0$ από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε οτι

$$\begin{aligned}(-1)^n(\nabla_a\varphi)^{(n)}(s) &= (-1)^n(\varphi(s) - \varphi(s+a))^{(n)} \\ &= (-1)^{n+1}a\varphi^{(n+1)}(\xi) \geq 0\end{aligned}$$

για $\xi \in (s, s+a)$. Επαγωγικά διαπιστώνουμε οτι η συνάρτηση $f_n := \nabla a_1 ... \nabla a_n \varphi$ ικανοποιεί την $(iv)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1...a_n \geq 0$. Ειδικότερα $f(s) \geq 0$, για κάθε $s > 0$ και από τη συνέχεια $f(s) \geq 0$, για κάθε $s \geq 0$. Ως εκ τούτου, η $\varphi$ είναι πλήρως μονότονη.
• για $n = 1$ η $f_1$ ικανοποιεί την $(iv)$ όπως αποδείχτηκε παραπάνω.
$n \leftarrow n+1$ Έστω οτι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$(-1)^k f_n^{(k)}(s) = (-1)^k \nabla_n \varphi^{(k)}(s) \geq 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $s > 0$, όπου $\nabla_n \varphi^{(k)}(s) := \nabla_{a_1} ... \nabla_{a_n} \varphi^{(k)}(s)$.
Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ και $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}(-1)^k f_{n+1}^{(k)}(s) &= (-1)^k(\nabla_{n+1}\varphi)^{(k)}(s) \\ &= (-1)^k[(\nabla_n\varphi)^{(k)}(s) - (\nabla_n\varphi)^{(k)}(s + a_{n+1})] \\ &= (-1)^{k+1}a_{n+1}[(\nabla_n\varphi)^{(k+1)}(\xi)] \\ &= (-1)^{k+1}a_{n+1}[f_n^{(k+1)}(\xi)] \geq 0.\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει το θεώρημα, θα δείξουμε όμως και ειδικά την $(iv) \Longrightarrow (iii)$. Όπως αποδείχτηκε στην συνεπαγωγή $(iv) \leftarrow (i)$ αν ισύχει η $(iv)$,τότε $f(s) \geq 0$ για κάθε $s \geq 0$. Αφού από την υπόθεση η f είναι μη αρνητική, θα είναι πλήρως μονότονη. Τότε η $\varphi$ θα είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη (βλ.π.χ.,[5] Θεώρημα 6.5). Επομένως από την συνέχεια της $\varphi$ μαζί με τον *Proposition* 4.4.7 του [5] προκύπτει η ύπαρξη ενός πεπερασμένου μέτρου $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ ώστε $\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx} U(dx)$.
Η ισοδυναμία των $(iii)$ και $(iv)$ είναι ένα διάσημο αποτέλεσμα της $Bernstein, cf. Widder(1941)$

**Θεώρημα Bernstein-Widder για $k$ διαστάσεις 3.3.4.** *Έστω $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $f(\mathbf{0}) = 1$ και*

$$(-1)^{\mathbf{1'n}} D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) \geq 0$$

*για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$*.Τότε υπάρχει η κατανομή* $U$ *επάνω στο* $\mathfrak{B}_k$ *με* $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$ *έτσι ώστε*

$$f(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{t}'\mathbf{x}} U d(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k.$$

**Απόδειξη.** Αρχικά δείχνουμε οτι η $f$ είναι πλήρως μονότονη. Έτσι γενικεύουμε το μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.3. Ας θεωρήσουμε $\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^k$ τότε η συνάρτηση $\nabla_{\mathbf{k}} f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^k$. Επιπλέον έχουμε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ και $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k) \in (\mathbb{R}_0^*)^k$ με το Θεώρημα Μέσης Τιμής (βλ. [12], *Section* 167)

$$\begin{aligned} (-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}} (\nabla_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{t}) &= (-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} \nabla_{\mathbf{a}} D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) \\ &= (-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} (D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) - D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t} + \boldsymbol{\alpha})) \\ &= (-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}+1} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i D^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_j} f(\xi) \end{aligned}$$

με $\xi \in \ [\mathbf{t}, \mathbf{t} + \mathbf{a}]$. Τότε όπως και στο θεώρημα 3.3.3 έχουμε οτι $(-\mathbf{1})^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}} (\nabla_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{t}) \geq 0$. Επαναλαμβάνοντας για κάθε $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ τότε η συνάρτηση $\nabla_{\mathbf{a}_1} ... \nabla_{\mathbf{a}_n} f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^k$ και ισχύει

$$(-\mathbf{1})^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}} (\nabla_{\mathbf{a}_1} ... \nabla_{\mathbf{a}_n} f)(\mathbf{t}) \geq 0$$

για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ και $\mathbf{t} > 0$. Ειδικότερα $\nabla_{\mathbf{a}_1} ... \nabla_{\mathbf{a}_n} f(\mathbf{t}) \geq 0$ για κάθε $\mathbf{t} > 0$ και από την συνέχεια έχουμε οτι $\nabla_{\mathbf{a}_1} ... \nabla_{\mathbf{a}_n} f(\mathbf{t}) \geq 0$, για κάθε $\mathbf{t} \geq 0$. Απο την υπόθεση έχουμε οτι η $f$ είναι συνεχης και πλήρως μονότονη, επομένως η $f$ είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη (βλ.[5], *Theorem*4.6.5). Έτσι απο την πρόταση 4.4.7, η συνέχεια της $f$ μαζί με την [5] *Preposition* 4.4.7 μας αποδίδει την ύπαρξη ενός πεπερασμένου, μη αρνητικού μέτρου $U$ στο $\mathfrak{B}_k$ με $f(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}_+^k} e^{-\mathbf{t}'\mathbf{x}} U d(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^\mathbf{k}$ Τελικά $U[\mathbb{R}_+^k] = \int_{\mathbb{R}_+^k} U d(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) = 1$. Άρα ισχύει το θεώρημα. □

**Πόρισμα 3.3.5.** *Έστω* $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ *είναι μια συνεχής συνάρτηση με* $f(\mathbf{0}) = 1$ *και* $(-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) \geq 0$ *για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$*.Τότε υπάρχει μια κατανομή* $U$ *στο* $\mathfrak{B}_k$ *με* $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$ *έτσι ώστε* $f(\mathbf{t}) = M_U(-\mathbf{t})$.

# Κεφάλαιο 4

# Πολυμεταβλητές σημειακές διαδικασίες

Από δω και στο εξής υποθέτουμε οτι κάθε απαριθμητρια έχει μηδενική έκρηξη .

## 4.1 Το υπόδειγμα

**Ορισμός 4.1.1.** Μια πολυμεταβλητή στοχαστική διαδικασία $\{N_t\}_{t\mathbb{R}_t}$ σε $k$ διαστάσεις λέγεται οτι είναι μια **πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία** αν κάθε συντεταγμένη $\{N_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}, i \in \{1, ..., k\}$ και το άθροισμα $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{\mathbf{1}'\mathbf{N}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων είναι μια απαριθμήτρια. Έτσι, υπάρχει μηδενικό σύνολο $M \in$ που ονομάζεται **μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας** έτσι για κάθε $\omega \in \Omega \setminus M$ να πληρούνται οι ιδιότητες $(i) - (v)$ για όλες τις συντεταγμένες $\{N_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}, i \in \{1, ..., k\}$ , και για το άθροισμα $\{N_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων.

Ως συνέπεια ταυτόχρονα άλματα διαφορετικών συντεταγμένων σχεδόν βέβαια αποκλείονται.Από δω και στο εξής $k$ θα είναι πάντα η διάσταση της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας με την οποία εργαζόμαστε.
Για να δούμε πως μπορούν να μετατραπούν πολυμεταβλητές απαριθμήτριες διαδικασίες, ορίζουμε διαφορετικά σύνολα από πινάκων. Αρχικά ας υποθέσουμε τους μεταθετικούς πίνακες με επιλεγμένες συντεταγμένες και πίνακες οι οποίοι συσσωρεύουν συντεταγμενες με βάση κάποιους κανόνες.

• Έστω $\mathcal{A}_P$ το σύνολο όλων των $A \in \{0,1\}^{k\times k}$ με $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\mathbf{1}'A\mathbf{e}_j = 1 = \mathbf{e}_i'A\mathbf{1}$ για κάθε $j, i \in \{1, ...k\}$.

• Έστω $\mathcal{A}_S$ είναι το σύνολο όλων των $A = (I_d, 0) \in \{0,1\}^{d\times k}$ με $d, k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $d < k$ και $I_d$ ο ταυτοτικός πίνακας διάστασης $d$.
• Έστω $\mathcal{A}_C$ είναι το σύνολο όλων των $A \in \{0,1\}^{d\times k}$ με $d, k \in \mathbb{N}$ και $d \leq k$ έτσι ώστε να υπάρχει $k_i \in \mathbb{N}$ για $i \in \{1, ..., d\}$ με $\sum_{i=1}^{d} k_i = k$ και $A = (A_1, ..., A_d)$, όπου $:= (e_i, ..., e_i) \in \mathbb{R}^{d\times k_i}$ για $i \in \{1, ..., d\}$.

Τώρα το σύνολο των πιθανων μετασχηματισμών πινάκων μπορεί να οριστεί ως το σύνολο $\mathcal{A}$ που περιέχει όλα τα $A \in \{0,1\}^{d\times k}$ με $d, k \in \mathbb{N}$ και $d \leq k$ έτσι ώστε να υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $A_i \in \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_S \cup \mathcal{A}_C$, $i \in \{1, ..., m\}$ με $A = A_m A_{m-1} ... A_1$. Έτσι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλους τους πίνακες οι οποίοι παίρνουν τιμές 0 ή 1, με τουλάχιστον μια μονάδα ανα γραμμή και το πολύ μια μονάδα ανα στήλη. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιλαμβάνει όλους τους πίνακες οι οποίοι παρουσιάζονται στην απόδειξη του παρακάτω λήμματος.

**Λήμμα 4.1.2.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διαδικασία και $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$. Τότε $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή διδικασία καταμέτρησης αν και μόνο αν $A \in \mathcal{A}$.*

**Απόδειξη.** Υποθέτω $A \in \mathcal{A}$. Για να δείξουμε οτι η $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή διδικασία καταμέτρησης πρέπει να δείξουμε οτι είναι σταθερή κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό των τριών συνόλων $\mathcal{A}_P, \mathcal{A}_S$ και $\mathcal{A}_C$. Είναι προφανές οτι $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διδικασία για $A \in \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_S$. Τώρα έστω $A \in \mathcal{A}_C$ και θεωρούμε οτι $\omega \in \Omega \setminus M$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό μας οι συντεταγμένες της $\{\mathbf{N_t}(\omega)\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+}$ δεν μπορούν να έχουν άλματα ταυτόχρονα. Κάθε συντεταγμένη από την διαδικασία του μετασχηματισμού $\{A\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι άθροισμα από συντεταγμένες της αρχικής διαδικασίας $\{\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ως εκτούτου ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i) - (v)$ της απαριθμήτριας διαδικασίας.
Από τη σχέση $\{\mathbf{1}' A\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{\mathbf{1}'\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ προκύπτει οτι το άθροισμα όλων των συντεταγμένων του $\{\mathbf{N_t}(\omega)\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i)-(v)$ μιας απαριθμήτριας διαδικασίας. Έτσι το $M$ χρησιμεύει ως ένα μηδενικό σύνολο εξαίρεσης για τη διαδικασία μετασχηματσμού του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οποία είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία. Τώρα ας θεωρήσουμε οτι $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ και οτι $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διδικασία και έστω  είναι ένα μηδενικό σύνολο εξαίρεσης του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Θεωρούμε $\omega \in \Omega \setminus (M \cup M_A)$. Κάθε συντεταγμένη του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει άλμα ύψους μιας μονάδας και δεν επιτρέπεται ταυτόχρονη αύξηση με τις συντεταγμένες του $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Όλες οι καταχωρήσεις του $A$ είναι 0 ή

1. Επιπλέον, κάθε συντεταγμένη της $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει τροχιές που είναι αύξουσες συναρτήσεις του $t$ και το όριό τους για $t\to\infty$ είναι το $\infty$, και θεωρούμε $A\mathbf{1}\geq\mathbf{1}$. Επιπλέον δεν υπάρχουν ταυτόχρονα άλματα των συντεταγμένων του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και έτσι $\mathbf{1}'A\leq\mathbf{1}'$. Αυτά τα τρία επιχειρήματα προκύπτουν από την ύπαρξη του πίνακα $A_P\in\mathcal{A}_P$ έτσι ώστε

$$_P=\begin{pmatrix}1...1 & 0... & ...0\\ 0...0 & 1...1 & 0...0\\ ... & ... & ...\\ 0... & ...0 & 1...1\end{pmatrix}.$$

Το τελευταίο κομμάτι που αποτελείται από 0 μπορεί να υπάρχει ή μπορεί και να μην υπάρχει. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει $A_C\in\mathbb{R}^{(d+1)\times k}$ και $A_S\in\mathbb{R}^{d\times(d+1)}$ με $A_C\in\mathcal{A}_C$ και $A_S\in\mathcal{A}_S$ έτσι ώστε $AA_P=A_SA_C$. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ήδη $AA_P\in\mathcal{A}_C$. Αφού $(A_P)^{-1}\in\mathbb{A}_P$ καταλήγουμε οτι $A\in\mathcal{A}$. □

Παραδείγματα από χρήσιμους μετασχηματισμούς.

• A=**1**',στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}=\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι το άθροισμα όλων των συντεταγμένων.

• $A=\mathbf{e}_i'$, στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}=\{\mathbf{N}_t\}^i_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η $i-$συντεταγμένη.

• $A\in\mathcal{A}_S$, στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αποτελείται από τις πρώτες $d$ συντεταγμένες της πρωτότυπης διαδικασίας.

• $A\in\mathcal{A}_P$, στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μεταθέτει τις συντεταγμένες της αρχικής διαδικασίας.

Για μια πρακτική χρήση του μετασχηματισμού εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 4.1.3.** Μια ιδιότητα $(P)$ για την απαριθμήτρια διαδικασία καλείται $\mathcal{A}$-**σταθερή** αν για κάθε $A\in\mathcal{A}$ η απαριθμήτρια διαδικασία $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $(P)$ για οποιαδήποτε $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που έχει την ιδιότητα $(P)$.

Το επόμενο Λήμμα αναφέρεται σε κάποιες ιδιότητες για τις μονοδιάστασες πιθανότητες των απαριθμητριών πολυμεταβλητών διαδικασιών που θα χρειαστούμε αργότερα.

**Λήμμα 4.1.4.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία. Τότε*

*(i) Για κάθε $s\in\mathbb{R}^k_+$ και για κάθε $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k_0$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}}P[\cap_{i=1}^k N^{(i)}_{t_i}=n^{(i)}]=P[\cap_{i=1}^k N^{(i)}_{s_i}=n^{(i)}].$$

*(ii) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \downarrow s} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}\}].$$

*(iii) Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \downarrow 0} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \begin{cases} 1 & \text{αν } \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ 0 & \text{αν } \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

*(iv) Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \uparrow \infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = 0.$$

*(v) Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \uparrow \infty} P[\{\mathbf{N}_t \geq \mathbf{n}\}] = 1.$$

**Απόδειξη.** $(i)$ Εξ' ορισμού, κάθε συντεταγμένη της $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία και ως εκ τούτου, έχει σχεδόν βέβαια συνεχείς και αύξουσες τροχιές. Έτσι για αυθαίρετα $m \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{Z}^k$, $j \in \{1, ..., m\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_i \leq u_i \leq t_i \quad & \Rightarrow \quad N_{u_i}^{(i)} \leq N_{t_i}^{(i)} \\ & \Rightarrow \quad \{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\} \subseteq \{N_{u_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\} \\ & \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{u_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \\ & \Rightarrow \quad P\Big[ \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big] \leq P\Big[ \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{u_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big]. \end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια $\Big\{ P\Big[ \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big] \Big\}$ είναι φθίνουσα και επομένως ισχύει

$$\lim_{\mathbf{t} \downarrow \mathbf{s}} P\Big[ \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big] \quad = \quad \sup_{\mathbf{t} \in \ (\mathbf{s}, \infty)} P\Big[ \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big].$$

Τώρα θα δείξουμε οτι

$$\sup_{\mathbf{t} \in \ (\mathbf{s}, \infty)} P\Big[ \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big] = P\Big[ \bigcup_{\mathbf{t} \in \ (\mathbf{s}, \infty)} \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \Big\{ N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)} \Big\} \Big].$$

Θεωρώ $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_k)$ με $\mathbf{t} \in (\mathbf{s}, \infty)$ και $A_{\mathbf{t}} := \cup_{j=1}^{m} \cap_{i=1}^{k} \{N_{t_i}^{(i)} n_j^{(i)}\}$. Τότε υπάρχει μια υποοικογένεια $\{A_{\mathbf{t}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{A_{\mathbf{t}}\}_{t\in(\mathbf{s},\infty)}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \mathbf{t}_n = \mathbf{s}$ και

$$\sup_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P(A_{\mathbf{t}}) = \sup_{\mathbf{t}_n\to\mathbf{s}} P(A_{\mathbf{t}_n}) = P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n})$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος μονότονης σύγκλισης (βλ. π.χ. [2] Θεώρημα 2.3.1 του $[\Sigma.\Sigma.A.]$.)

Αρκεί να δείξουμε οτι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n} = \bigcup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{s},\infty)} A_{\mathbf{t}}$.

Ισχύει οτι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n} \subseteq \bigcup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{0},\infty)} A_{\mathbf{t}}$.

Έστω οτι $\omega \in \bigcup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{s},\infty)} A_{\mathbf{t}}$ τότε υπάρχει $\mathbf{t} > \mathbf{s}$ τέτοιο ώστε $\omega \in A_{\mathbf{t}}$. Επίσης ισχύει οτι $N_t > N_{\mathbf{t}_n}$ συνεπώς $N_{t_i}^{(i)} > N_{t_{n_i}}^{(i)}$ για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$. Άρα $\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\} \subseteq \{N_{t_{n_i}}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\}$ για κάθε $i \in \{1, ...k\}$ από το οποίο προκύπτει οτι $A_{\mathbf{t}} \subseteq A_{\mathbf{t}_n}$.

Επομένως υπάρχει $\mathbf{t}_n \in (\mathbf{s}, \mathbf{t})$ τέτοιο ώστε $\omega \in A_{\mathbf{t}_n}$ άρα $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t_n}}$. Άρα ισχύει οτι $\cup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{s},\infty)} A_{\mathbf{t}} \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n}$ και επομένως $\bigcup_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} A_{\mathbf{t}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n}$.

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P\Big[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\Big\}\Big] &= \sup_{\mathbf{t}\in\ (\mathbf{s},\infty)} P\Big[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\Big\}\Big] \\
&= P\Big[\bigcup_{\mathbf{t}\in\ (\mathbf{s},\infty)}\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\Big\}\Big] \\
&= P\Big[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{\mathbf{t}\in\ (\mathbf{s},\infty)}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\Big\}\Big] \\
&= P\Big[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{\inf_{t_i\in\ (s_i,\infty)} N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\Big\}\Big] \\
&= P\Big[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{s_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\Big\}\Big].
\end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$. Τότε παίρνουμε, από την προηγούμενη ταυτότητα (λαμβάνοντας υπόψη οτι $m \in \{1, ..., k\}$)

$$
\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\Big\}\Big] &= \lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \le n^{(i)}\Big\}\setminus\bigcup_{j=1}^{k}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \le n^{(i)} - \delta_{ij}\Big\}\Big] \\
&= \lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}}\Big(P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \le n^{(i)}\Big\}\Big] - P\Big[\bigcup_{j=1}^{k}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{t_i}^{(i)} \le n^{(i)} - \delta_{ij}\Big\}\Big]\Big) \\
&= P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{s_i}^{(i)} \le n^{(i)}\Big\}\Big] - P\Big[\bigcup_{j=1}^{k}\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{s_i}^{(i)} \le n^{(i)} - \delta_{ij}\Big\}\Big] \\
&= P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\Big\{N_{s_i}^{(i)} = n^{(i)}\Big\}\Big].
\end{aligned}
$$

$(ii)$ Λαμβάνοντας υπόψη μόνο διανύσματα $\mathbf{s}$ με ίσες συντεταγμένες, ο ισχυρισμός έπεται αμέσως από το $(i)$

$(iii)$ Δεδομένου ότι όλες οι συντεταγμένες έχουν τροχιές που σχεδόν σίγουρα ξεκινούν από το μηδέν, θέτοντας $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ από το $(ii)$ έπεται ο ισχυρισμός.

$(iv)$ Εξ ορισμού, το άθροισμα $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία και ως εκ τούτου, έχει τροχιές που δεν έχουν κανένα ανώτερο όριο.

$$
\lim_{t\uparrow\infty} P[\mathbf{N}_t = \mathbf{n}] \;\le\; \lim_{t\uparrow\infty} P[\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}].
$$

Εύκολα αποδεικνύεται οτι $\{P[\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}]\}$ είναι φθίνουσα.

Πράγματι, έστω $s \le t$ και $\omega \in \{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}$ τότε $N_t(\omega) \le n_1 + ... + n_k$ και άρα $N_{\mathbf{s}}(\omega) \le n_1 + ... + n_k$, δηλαδή $\omega \in \{N_s \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}$.

Άρα $\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\} \subseteq \{N_s \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}$ και επομένως η $\{[\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φθίνουσα οικογένεια.

Έστω $b_t := P[\{N_t \le \mathbf{1n}\}]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει μια υποοικογένεια $\{b_{\mathbf{t}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{b_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ και $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_{\mathbf{t}_n} = \inf_{\mathbf{t}\in\ (0,\infty)} b_{\mathbf{t}} = \alpha$.

Επομένως ισχύει

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow\infty} P[\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}] &= \inf_{t\in\ (0,\infty)} P[\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}] \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} P[\{N_{t_n} \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}] \\
&= P\Big[\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{N_t \le \mathbf{1}'\mathbf{n}\}\Big]
\end{aligned}
$$

όπου η τελεύταία ισότητα είναι συνέπεια της Πρότασης 1.2.3 του [2] του [Σ.Σ.$A$.]
Επίσης ισχύει οτι

$$P\Big[\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}\Big] \;=\; P\Big[\bigcap_{t\in\ (0,\infty)}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}\Big].$$

Πράγματι, έστω $A := \cap_{t\in(0,\infty)}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}$ και $:= \cap_{n\in\mathbb{N}}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}$.
Έστω $\omega \in B$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $N_{\mathbf{t}}(\omega) \leq \mathbf{1'n}$. Έστω οτι υπάρχει ένα $\tilde{t}_0 \in (0,\infty)$ ώστε $N_{\tilde{t}_0}(\omega) > \mathbf{1'n}$, τότε θα υπάρχει ένα $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ ώστε $t_{\tilde{n}} > \tilde{t}_0$ και άρα $N_{t_{\tilde{n}}}(\omega) \geq N_{\tilde{t}_0}(\omega) > \mathbf{1'n}$, άτοπο διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $N_{\mathbf{t}_n}(\omega) \leq \mathbf{1'n}$. Άρα $B \subseteq A$. Προφανώς $A \supseteq B$ (αφού το $A$ είναι τομή περισσότερων συνόλων), επομένως $A = B$.
Τώρα θα δείξουμε οτι

$$\bigcap_{t\in\ (0,\infty)}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\} \;=\; \{\sup_{t\in\ (0,\infty)} N_t \leq \mathbf{1'n}\}.$$

Πράγματι, θέτω $A = \bigcap_{t\in\ (0,\infty)}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}$ και $C = \{\sup_{t\in\ (0,\infty)} N_t \leq \mathbf{1'n}\}$. Τότε για οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\omega \in A &\iff \forall t \in (0,\infty) \quad N_t(\omega) \leq \mathbf{1'n}\\ &\iff \sup_{t\in(0,\infty)} N_t(\omega) \leq \mathbf{1'n}\\ &\iff \omega \in C.\end{aligned}$$

Άρα $A = C$.
Τέλος, γνωρίζουμε από την ιδιότητα $(n5)$ οτι ισχύει

$$P\Big[\{\sup_{t\in\ (0,\infty)} N_t \leq \mathbf{1'n}\}\Big] = 0.$$

$(v)$ Εξ ορισμού, όλες οι συντεταγμένες είναι απαριθμήτριες διαδικασίες και έχουν, ως εκ τούτου, τροχιές οι οποίες είναι αύξουσες και δεν έχουν ανώτερο όριο.

$$\begin{aligned}\lim_{t\uparrow\infty} P[N_t \geq n] &= \lim_{t\uparrow\infty} P[\cap_{i=1}^{k}\{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}]\\ &= \sup_{t\uparrow\infty} P[\cap_{i=1}^{k}\{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}]\\ &= P[\cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^{k} \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}].\end{aligned}$$

Θα δείξουμε οτι $A := \cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^{k} \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\} \supseteq \cap_{i=1}^{k}\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\} := B$. Έστω $\omega \in B$. Τότε για κάθε $i \in \{1,...,k\}$ ισχύει $\sup N_t^{(i)}(\omega) > n^{(i)}$, έτσι για κάθε $i \in \{1,...,k\}$ υπάρχει $t \geq 0$ ώστε
$N_t^{(i)}(\omega) \geq n^{(i)}$, άρα $\omega \in \cap_{i=1}^{k} \cup_{t\in(0,\infty)} \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\} = \cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^{k} \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\} = A$.
Επομένως, $B \subseteq A$.
Άρα

$$P[\cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^{k} \{N_t^{(i)} \leq n^{(i)}\}] \leq P[\cap_{i=1}^{k}\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}].$$

Συνεπώς

$$\lim_{t\uparrow\infty} P[\cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^{k} \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}] \geq \lim_{t\uparrow\infty} P[\cap_{i=1}^{k}\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}].$$

Όμως $P[\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}] = 1$ (από $n5$)
Συνεπώς, $P[\cap_{i=1}^{k}\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}] = 1$ άρα έπεται ο ισχυρισμός. □

Το $(ii)$ φαίνεται να είναι η φυσική εκδοχή όσον αφορά τη συνέχεια της πιθανότητας ως συνάρτηση του χρόνου. Αλλά για το χαρακτηρισμό της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* χρειαζόμαστε πολλές διαφορετικές μεταβλητές του χρόνου καθώς η διαδικασία έχει συντεταγμένες. Έτσι το Λήμμα 4.1.4 $(i)$ είναι αναγκαίο και θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του 5.2.1.
Θα μελετήσουμε επίσης τις λεγόμενες μεταγενέστερες κατανομές και διαδικασίες. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 4.1.5.** Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $\sigma.\delta$ $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$, ωστε $\mathbf{K}_{t,h} := \mathbf{N}_{t+h} - \mathbf{N}_t$ για όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$, καλείται **σταδιακή διαδικασία (Incremental Process) (incremental process)**.

Δεδομένου ότι όλες οι ιδιότητες των τροχιών μεταφέρονται από την διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στην διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ το επόμενο λήμμα είναι προφανές.

**Λήμμα 4.1.6.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία , για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.*

Αργότερα, η μελέτη της σταδιακής διαδικασίας θα απαιτήσει τον περιορισμό του μέτρου πιθανότητας. Ως εκ τούτου, μπορούμε επίσης να ορίσουμε για $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$ ένα νέο μέτρο πιθανότητας

$$P_{t,\mathbf{n}}[B] := P[B|\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}]$$

για $\in \mathcal{F}$ και να τροποποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα, έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας στα επόμενα κεφάλαια.

**Λήμμα 4.1.7.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\mathbf{N}_t = \mathbf{n}] > 0$ η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P_{t,\mathbf{n}})$.*

## 4.2 Η πολυωνυμική ιδιότητα

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε διάφορες ιδιότητες, τις οποίες ενδέχεται να έχει μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Όλα αυτά έχουν σχέση με την πολυωνιμική ιδιότητα. Ξεκινάμε με δύο ιδιότητες που αφορούν στις προσαυξήσεις.

**Ορισμός 4.2.1.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] = \prod_{j=1}^{m} P[\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}$$

ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, ...m\}$.

**Ορισμός 4.2.2.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\right] = P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right]$$

ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, ...m\}$.

Όπως μπορεί να φανεί από το επόμενο λήμμα, τόσο η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων και η ιδιότητα των στάσιμων προσαυξήσεων παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από ορισμένους μετασχηματισμούς.

**Λήμμα 4.2.3.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε*

*(i) Η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

*(ii) Η ιδιότητα των στάσιμων προσαυξήσεων είναι $\mathcal{A}$-σταθερή.*

**Απόδειξη.** $(i)$ : Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και $\mathbf{l}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, ...m\}$. Τότε παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A\mathbf{N}_{t_j} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{l}_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A(\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}}) = \mathbf{l}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_m \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_m \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})} \prod_{j=1}^{m} P[\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}] \\
&= \prod_{j=1}^{m} \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_j\})} P[\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}] \\
&= \prod_{j=1}^{m} P[\{A\mathbf{N}_{t_j} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{l}_j\}]
\end{aligned}
$$

άρα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.
$(ii)$ : Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και $\mathbf{l}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, ...m\}$. Τότε παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A\mathbf{N}_{t_j+h} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{l}_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A(\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h}) = \mathbf{l}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_m \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_m \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A\mathbf{N}_{t_j} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{l}_j\}\right]
\end{aligned}
$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Οι επόμενες ιδιότητες που εισάγουμε αφορούν στην αντίστροφη πιθανότητα μετάβασης, δηλαδή στις πιθανότητες των προσαυξήσεων που συνέβησαν πριν από μια συγκεκριμένη κατάσταση της διαδικασίας.

**Ορισμός 4.2.4.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει την **πολυωνυμική ιδιότητα** αν η ταυτότητα

$$P\Big[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\Big]=\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\frac{(\sum_{j=1}^{m}n_j^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\Big)^{n_j^{(i)}}\Bigg)P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{n}_j\}]$$

ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, ...m\}$.

**Ορισμός 4.2.5.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα** αν η ταυτότητα

$$\begin{aligned}&P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^{(i)}=l^{(i)}\}\cap\{N_t^{(i)}-N_{t_i}^{(i)}=n^{(i)}\}\Big]\\&=\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+l^{(i)}}{l^{(i)}}(\frac{t_i}{t})^{l^{(i)}}(1-\frac{t_i}{t})^{n^{(i)}}\Bigg)P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]\end{aligned}$$

ισχύει για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$, $t \in \mathbb{R}_+$ με $\mathbf{t} \in\ (\mathbf{0}, t\mathbf{1})$ και για κάθε $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

**Ορισμός 4.2.6.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **διωνυμική ιδιότητα** αν η ταυτότητα

$$P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{1}\}\cap\{\mathbf{N}_t-\mathbf{N}_s=\mathbf{n}\}]=\Bigg(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+l^{(i)}}{l^{(i)}}(\frac{s}{t})^{l^{(i)}}(1-\frac{s}{t})^{n^{(i)}}\Bigg)P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]$$

ισχύει για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $0 < s < t$ και για κάθε $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Για μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει την πολυωνυμική ιδιότητα , οι πεπερασμένων διαστάσεων κατανομές προσδιορίζονται πλήρως από τις μονοδιάστατες κατανομές. Επιπλέον, δεδομένου του αριθμού των συμβάντων σε κάποια χρονική στιγμή $t_m$ η διαμέριση των γεγονότων σε ξένα ανα δυο χρονικά διαστήματα στο παρελθόν οφείλεται σε δειγματοληψία με αντικατάσταση. Δεδομένου ότι αυτή η δειγματοληψία είναι ανεξάρτητη για τις συντεταγμένες της διαδικασίας, κάθε συντεταγμένη θα μπορούσε να αποτελεί αντικείμενο ξεχωριστής δειγματοληψίας. Η έννοια του ορισμού της πολυωνιμικής ιδιότητας θα παραμείνει αμετάβλητη, αν επιτρέψουμε ίσους χρόνους (δηλαδή $0 = t_0 \le t_1 \le ... \le t_m$). Χωρις βλάβη της γενικοτητας θεωρούμε $t_m = t_{m-1}$. Αν $\mathbf{n}_m = \mathbf{0}$ μπορούμε να αγνοήσουμε $t_m$ και να εξετάσει $m-1$ διαστήματα. Αν $\mathbf{n}_m \neq \mathbf{0}$ οι δύο πλευρές του ορισμού είναι ίσες με το μηδέν και η ταυτότητα ισχύει.

**Λήμμα 4.2.7.** *Έστω μια $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε*

*(i) Η πολυωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

*(ii) Η επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

*(iii) Η διωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ.[29], Λήμμα 2.2.2
Το επόμενο λήμμα αναφέρει μια συνέπεια της διωνυμικής ιδιότητας η οποία παράγεται από την αλληλεπίδραση με τις ιδιότητες των τροχιών της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας.

**Λήμμα 4.2.8.** *Έστω μια $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα , τότε*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\} > 0]$$

*ισχύει για κάθε $t > 0$ και για όλα τα $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Αρχικά υποθέτουμε οτι υπάρχουν κάποια $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ έτσι ώστε

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = 0$$

για όλα τα $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$. Τότε έχουμε $P[\{\mathbf{N}_t \geq \mathbf{m}\}] = \mathbf{0}$ , το οποίο είναι αντιφατικό με το $\lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t \geq \mathbf{n}\}] = 1$. (Λήμμα 4.1.4$(v)$).
Τώρα θεωρούμε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης υπάρχει κάποια $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$ έτσι ώστε $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$
Από την διωνυμική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}] &\geq P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{n} - \mathbf{l}\}] \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)}}{l^{(i)}} \left(\frac{s}{t}\right)^{l^{(i)}} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου $P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}] > 0$ για όλα τα $s \in (0, t)$ και για όλα τα $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{l} \geq \mathbf{n}$. Επίσης, για όλα τα $u \in (t, \infty)$, η ταυτότητα $\sum_{\mathbf{p}\geq\mathbf{n}} P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\}|\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = 1$ μας δίνει την ύπαρξη κάποιου $\mathbf{p} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{n} \leq \mathbf{p}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\}] &\geq P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \\ &= P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\}|\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0 \end{aligned}$$

Άρα $P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}] > 0$ για όλα τα $s > 0$ και όλα τα $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{l} \leq \mathbf{n}$ Αφού το $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ ήταν αυθαίρετο, έπεται ο ισχυρισμός. □

**Πόρισμα 4.2.9.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Αν η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την πολυωνυμική ιδιότητα , τότε* $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$ *για κάθε* $t > 0$ *και για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Η ιδιότητα των απαριθμητριών διαδικασιών που έχουν την διωνυμική ιδιότητα ότι όλες οι καταστάσεις έχουν αυστηρά θετική πιθανότητα, θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια αρκετά συχνά.

**Λήμμα 4.2.10.** *Αν μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία έχει την πολυωνυμική ιδιότητα , τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m, h \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και

$\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, ..., m\}$. Θέτοντας $t_{-1} = -h$ και $\mathbf{l}_m := \sum_{j=1}^m \mathbf{n}_j$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P\Big[\bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\Big] &= P\Big[\bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\} \bigcap \Big(\biguplus \mathbf{N}_{t_0+h} = \mathbf{n}_0\}\Big)\Big] \\
&= P\Big[\biguplus_{\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}_0^k} \Big(\bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\} \cap \mathbf{N}_{t_0+h} = \mathbf{n}_0\}\Big)\Big] \\
&= P\Big[\biguplus_{\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}_0^k} \Big(\bigcap_{j=0}^m \{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\Big)\Big] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}_0^k} P\Big[\bigcap_{j=0}^m \{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\Big] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}_0^k} \Big(\prod_{i=1}^k \frac{(l_m^{(i)} + n_0^{(i)})!}{\prod_{j=0}^m n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{l_j - l_{j-1}}{t_m + h}\Big)^{n_j^{(i)}} \\
&\quad \cdot P[\{\mathbf{N}_{t_m+h} = \mathbf{1}_m + \mathbf{n}_0\}]\Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^k \frac{(l_m^{(i)})!}{\prod_{j=1}^m n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\Big)^{n_j^{(i)}} \\
&\quad \cdot \sum_{\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}_0^k} P[\{\mathbf{N}_{t_m+h} = \mathbf{1}_m + \mathbf{n}_0\}]\Big) \\
&\quad \cdot \Big(\prod_{i=1}^k \binom{l_m^{(i)}! + n_0^{(i)}}{l_m^{(i)}} \Big(\frac{t_m}{t_m + h}\Big)^{l_m^{(i)}} \Big(\frac{h}{t_m + h}\Big)^{n_0^{(i)}}\Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^k \frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^m n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\Big)^{n_j^{(i)}}\Big) \\
&\quad \cdot \sum_{\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}_0^k} P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\} \cap \{\mathbf{N}_{t_m+h} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_0\}] \\
&= \Big(\prod_{i=1}^k \frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^m n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\Big)^{n_j^{(i)}}\Big) \\
&\quad \cdot P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{1}_m\}] \\
&= P[\cap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]
\end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

**Ορισμός 4.2.11.** Έστω $\{\mathrm{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει την **ιδιότητα Markov** αν ισχύει η ταυτότητα

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]$$
$$=P\left[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}\cap\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}] \quad \mathbf{(4.1)}$$

για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ με $t_0 < t_1 < ... < t_{m+1}$ και γα όλα τα $\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_{m+1} \in \mathbb{N}_0^k$, με $\mathbf{l}_m := \sum_{j=1}^{m}\mathbf{n}_j$.

**Παρατήρηση 4.2.12.** Αν $P[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}]>0$ η ισότητα (4.1) είναι ισοδύναμη με την

$$P\left[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]$$
$$=P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}|\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}] \quad (4.2)$$

Πράγματι, έστω οτι ισχύει η (4.2). Τότε ισοδύναμα έχουμε

$$\frac{P[\cap_{j=1}^{m}(\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\})]}{P[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}]}$$
$$=\frac{P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}\cap\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]}{P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]}$$
$$\Leftrightarrow \quad P\left[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}\bigcap\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}\right]P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]$$
$$=P\left[\bigcap_{j=1}^{m}(\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\})\right]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]$$
$$\Leftrightarrow \quad (4.1)$$

Άρα η (4.2) ισοδυναμεί με την (4.1).

Η (4.1) είναι πιο χρήσιμη για τεχνικούς λόγους, ενώ η (4.2) μας δίνει μια ερμηνεία της ιδιότητας $Markov$. Σε γενικές γραμμές, η μελλοντική προσαύξηση μιας διαδικασίας $Markov$ εξαρτάται μόνο από την συνολική προσαύξηση του παρόντος και όχι από τον διαχωρισμό της προσάυξησης στο παρελθόντος.

**Ορισμός 4.2.13.** Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **ιδιότητα ChapmanKolmogorov** αν ισχύει η ιδιότητα

$$P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ = \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}]$$

ισχύει για όλα τα $r,t \in \mathbb{R}_+$, με $r \leq t$ και $\mathbf{n},\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] > 0$ και για όλα τα $s \in [r,t]$.

**Παρατήρηση 4.2.14.** Αφού η πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία έχει αύξουσες τροχιές, αυστηρά αρνητικές προσαυξήσεις έχουν μηδενική πιθανότητα. Ως εκ τούτου, ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την σχέση

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k,P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}]$$

για όλα τα $r,t \in \mathbb{R}_+$, με $r \leq t$ και $\mathbf{n},\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] > 0$ και για όλα τα $s \in [r,t]$.
Πράγματι, για $r,t,s$ και $\mathbf{n},\mathbf{m}$ όπως και παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} &P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &\quad= \frac{P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\ &\quad= \frac{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}+\mathbf{n}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\ &\quad= P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}+\mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \end{aligned}$$

Άρα

$$P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] = P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}+\mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \tag{4.3}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}] \\ &\quad= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{m}+\mathbf{n}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}+\mathbf{n}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}] \end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνοντας υπόψιν την (4.3) η ισότητα του ορισμού 4.2.12 ισοδυναμεί με την

$$\begin{aligned} &P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}+\mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &\quad = \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}-\mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ισοδύναμα, αντικαθιστώντας το $\mathbf{l}+\mathbf{n}$ με το $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} &P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &\quad = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k,P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}]. \end{aligned}$$

Αυτές είναι οι γενικές εξισώσεις $Chapman - Kolmogorov$ που βρίσκονται συχνά στη βιβλιογραφία. Το πλεονέκτημα της χρήσης των πρώτων ταυτοτήτων είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα και η χρήση των προσαυξήσεων, το οποίο ταιριάζει ακριβώς με τους ορισμούς από τις άλλες ιδιότητες.

Αφού γενικά στις γενικές στοχαστικές διαδικασίες υπάρχουν παραδείγματα πολυμεταβλητών $Markov$ διαδικασιών με τις συντεταγμένες να μην έχουν την ιδιότητα $Markov$ φαίνεται πιθανό ότι η ιδιότητα $Markov$ δεν είναι γενικά $\mathcal{A}$-σταθερή.

**Λήμμα 4.2.15.** *Εάν μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία είναι μια διαδικασία $Markov$, τότε έχει την ιδιότητα $Chapman - Kolmogorov$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $r, t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$, με $r \leq t$ και $P[\mathbf{N}_r = \mathbf{n}] > 0$ καθώς και ένα αυθαίρετο $s \in [r,t]$. Θέτοντας $B := \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}\}$ έχουμε
**(a)** Ισχύει $\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} = \biguplus_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]}\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}]$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \omega \in \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} &\iff \mathbf{N}_t(\omega) - \mathbf{N}_r(\omega) = \mathbf{m} \\ &\iff \exists \mathbf{l} \in [\mathbf{0},\mathbf{m}] \quad \mathbf{N}_t(\omega) - \mathbf{N}_s(\omega) = \mathbf{m}-\mathbf{l} \\ &\qquad \& \quad \mathbf{N}_s(\omega) - \mathbf{N}_r(\omega) = \mathbf{l} \end{aligned}$$

επομένως ισχύει το (**a**).
**(b)** Για κάθε $A, B, C \in \Sigma$ ισχύει $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A|B \cap C)P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)}{P(C)} \\ &= P(A|B \cap C)P(B|C). \end{aligned}$$

(**c**) Για όλα τα $r, t \in \mathbb{R}_+$, με $r \leq t, s \in [r, t], \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$, με $P[\{\mathbf{N}_r\}] > 0$ ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] = P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}].$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} &P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}]} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}], P[\mathbf{B}] > 0} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\} \\ &\quad \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}], P[\mathbf{B}] > 0} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}], P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}] > 0} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] \\ &= P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το $(a)$, η δεύτερη από το $(b)$ αν θέσουμε $A = \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{1}\}, B = \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\}, C = \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}$ και $\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\} = \{\mathbf{N}_s = \mathbf{1} + \mathbf{n}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}$ η τρίτη ισοτητα ισχύει από την ιδιότητα $Markov$. Ως εκ τούτου έπεται το $(c)$. □

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων που αφορούν στις αντίστροφες πιθανότητες μετάβασης και τις ιδιότητες που αφορούν στις πιθανότητες μετάβασης.

**Λήμμα 4.2.16.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε τα ακολουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i) H* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την πολυωνυμική ιδιότητα .*

*(ii) H* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα* $Markov$

*(iii) H* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα* $Markov$.

**Απόδειξη.** Θα αποδείξουμε το λήμμα σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα: $(ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (ii)$.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ : Είναι προφανές
$(iii) \Longrightarrow (i)$ : Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της επαγωγής για τον αριθμό $m$ των περιόδων στην εξίσωση.

$$P\Big[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\Big]=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{(\sum_{j=1}^{m}n_j^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j^{(i)}}\right)P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{n}_j\}] \tag{4.5}$$

για κάθε $t_0,t_1...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$ και $j\in\{1,...m\}$.
Για $m=1$ είναι προφανές.
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (4.7) για κάποιο $m\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε $t_0,t_1...,t_m,t_{m+1}\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m<t_{m+1}$ , $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$ και $j\in\{1,...,m+1\}$. Θέντωντας $\mathbf{l}_j:=\sum_{h=1}^{j}\mathbf{n}_h$ για $j\in\{1,...,m+1\}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
P\Big[\ \bigcap_{j=1}^{m+1}\ &\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\Big]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]\\
&= P\Big[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\Big]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}\cap\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}]\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m})^{n_j^{(i)}}\right)P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{1}_m\}]\\
&\cdot \left(\prod_{i=1}^{k}\binom{l_{m+1}^{(i)}}{l_m^{(i)}}(\frac{t_m}{t_{m+1}})^{l_m^{(i)}}(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}})^{n_{m+1}^{(i)}}\right)P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}=\mathbf{l}_{m+1}\}]\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{l_{m+1}^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m+1}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m+1}(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_{m+1}})^{n_{j^{(i)}}}\right)P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}=\mathbf{1}_{m+1}\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}],
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα συνεπάγεται από την (4.1) και η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της (4.7) και της διωνυμικής ιδιότητα.
Επειδή ξέρουμε από τη διωνυμική ιδιότητα οτι $P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]>0$, βλ.Λήμμα 4.2.8, έπεται οτι η (4.7) ισχύει για $m+1$. Ως εκ τούτου, η διωνυμική ιδιότητα και

η ιδιότητα $Markov$ συνεπάγεται από την πολυωνυμική ιδιότητα .
$(i) \implies (ii)$. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m+1}$ και $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_{m+1} \in \mathbb{N}_0^k$. Θέτω $\mathbf{l}_j := \sum_{h=1}^{j} \mathbf{n}_h$ για κάθε $j \in \{1, ...m+1\}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
P[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] &= \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l_{m+1}^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m+1} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} (\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{m+1}})^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} = \mathbf{l}_{m+1}\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l_{m}^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} (\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{m}})^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
&\quad \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{l_{m+1}^{(i)}}{l_m^{(i)}} (\frac{t_m}{t_{m+1}})^{l_m^{(i)}} (1 - \frac{t_m}{t_{m+1}})^{n_{m+1}^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} = \mathbf{l}_{m+1}\}] \\
&= P[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\}}]
\end{aligned}
$$

Όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την πολυωνυμική ιδιότητα .Έτσι, η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $Markov$.
Τώρα, θα εξετάσουμε την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα .Θεωρούμε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{k}}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+$ με $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, t\mathbf{1})$ και $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Δεδομένου ότι η επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή, άρα είναι σταθερή ως προς τις μεταθέσεις ($A \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$), μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε οτι $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k \leq t$. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική ιδιότητα , όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κατά τρόπο ώστε ίσοι χρόνοι να επιτρέπονται.

Τέλος, θέτοντας $M_{(i)} := \{n_j^{(i)} : n_j^{(i)} \in \mathbb{N}_0, j \in \{1, ..., k+1\}, \sum_{j=1}^{i} n_j^{(i)} = l^{(i)}, \sum_{j=i+1}^{k+1} n_j^{(i)} = n^{(i)}\}$ και $t_{k+1} := t$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
P\Big[\bigcap\ {}_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^{(i)}=l^{(i)}\}\cap\{N_t^{(i)}-N_{t_i}^{(i)}=n^{(i)}\}\Big] \\
&= \sum_{M(1)}\cdots\sum_{M(k)} P\Big[\bigcap_{j=1}^{k+1}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\Big]\\
&= \sum_{M(1)}\cdots\sum_{M(k)}\bigg(\prod_{i=1}^{k}\frac{(n^{(i)}+l^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{k}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{k+1}\Big(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_{k+1}}\Big)^{n_j^{(i)}}\bigg)P[\{N_{t_{k+1}}=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]\\
&= P[\{N_{\mathbf{t}}=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]\prod_{i=1}^{k}\sum_{M(i)}\frac{(n^{(i)}+l^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{k}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{k+1}\Big(\frac{t_j-t_{j-1}}{t}\Big)^{n_j^{(i)}}\\
&= P[\{N_{\mathbf{t}}=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]\prod_{i=1}^{k}\frac{(n^{(i)}+l^{(i)})!}{l^{(i)}!n^{(i)}!}\Big(\frac{1}{t}\Big)^{l^{(i)}+n^{(i)}}t_i^{l^{(i)}}(t-t_i)^{n^{(i)}}\\
&\cdot\sum_{M(i)}\bigg[\frac{l^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{i}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{i}\Big(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_i}\Big)^{n_j^{(i)}}\bigg]\bigg[\frac{n^{(i)}!}{\prod_{j=i+1}^{k+1}n_j^{(i)}!}\prod_{j=i+1}^{k+1}\Big(\frac{t_j-t_{j-1}}{t-t_(i)}\Big)^{n_j^{(i)}}\bigg]\\
&= \bigg(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+l^{(i)}}{l^{(i)}}(\frac{t_i}{t})^{l^{(i)}}(1-\frac{t_i}{t})^{n^{(i)}}\bigg)P[\{N_t=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]
\end{aligned}
$$

Έτσι, η πολυωνυμική ιδιότητα , συνεπάγεται την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα . □

Έχοντας αποδείξει την ισοδυναμία, γνωρίζουμε ότι η πολυωνυμική ιδιότητα , συνεπάγεται την ιδιότητα $Chapman-Kolmogorov$.

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε οτι η διωνυμική ιδιότητα αποτελεί ικανή προϋπόθεση για μια απαριθμήτρια διαδικασία να έχει την ιδιότητα $Chapman-Kolmogorov$.

**Λήμμα 4.2.17.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει την διωνυμική ιδιότητα τότε εχει και την ιδιότητα $Chapman-Kolmogorov$.*

**Απόδειξη.** Λόγω Λήμμα 4.2.8 έχουμε

$P[\{N_t=\mathbf{n}\}]>0$ για όλα τα $t>0$ και για όλα τα $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$. Θεωρούμε $r,t\in\mathbb{R}_+,\ r\le t$ και $s\in[r,t]$ καθώς και $\mathbf{n},\mathbf{m}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ με $P[\{N_r=\mathbf{n}\}]>0$. Για $s>0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{N_s=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]>0} P[\{N_s-N_r=\mathbf{l}\}|\{N_r=\mathbf{n}\}]P[\{N_t-N_s=\mathbf{m}\}|\{N_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}] \\
=&\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]}\frac{P[\{N_s-N_r=\mathbf{l}\}\cap\{N_r=\mathbf{n}\}]}{P[\{N_r=\mathbf{n}\}]}\frac{P[\{N_t-N_s=\mathbf{m}\}\cap\{N_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]}{P[\{N_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]} \\
=&\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]}\left(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+l^{(i)}}{l^{(i)}}(\frac{r}{s})^{n^{(i)}}(1-\frac{r}{s})^{l^{(i)}}\right)\frac{P[\{N_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]}{P[\{N_r=\mathbf{n}\}]} \\
&\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+m^{(i)}}{n^{(i)}+l^{(i)}}(\frac{s}{t})^{n^{(i)}+l^{(i)}}(1-\frac{s}{t})^{m^{(i)}-l^{(i)}}\right)\frac{P[\{N_t=\mathbf{n}+\mathbf{m}\}}{P[\{N_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]} \\
=&\frac{P[\{N_t=\mathbf{n}+\mathbf{m}\}}{P[\{N_r=\mathbf{n}\}]}\left(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+m^{(i)}}{n^{(i)}}r^{n^{(i)}}t^{-(n^{(i)}+m^{(i)})}\right) \\
&\cdot\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]}\prod_{i=1}^{k}\binom{m^{(i)}}{l^{(i)}}(s-r)^{l^{(i)}}(t-s)^{m^{(i)}-l^{(i)}} \\
=&\frac{P[\{N_t=\mathbf{n}+\mathbf{m}\}}{P[\{N_r=\mathbf{n}\}]}\left(\prod_{i=1}^{k}\binom{n^{(i)}+m^{(i)}}{n^{(i)}}(\frac{r}{t})^{n^{(i)}}(1-\frac{r}{t})^{m^{(i)}}\right) \\
&\cdot\sum_{l=0}^{\mathbf{1}'\mathbf{m}}(\frac{s-r}{t-r})^{l}(\frac{t-s}{t-r})^{\mathbf{1}'\mathbf{m}-l}\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],\mathbf{1}'\mathbf{l}=l}\prod_{i=1}^{k}\binom{m^{(i)}}{l^{(i)}} \\
=&\frac{P[\{N_t-N_r=\mathbf{m}\}\cap\{N_r=\mathbf{n}\}]}{P[\{N_r=\mathbf{n}\}]}\sum_{l=0}^{\mathbf{1}'\mathbf{m}}(\frac{s-r}{t-r})^{l}(\frac{t-s}{t-r})^{\mathbf{1}'\mathbf{m}-l}\binom{\mathbf{1}'\mathbf{m}}{l} \\
=&P[\{N_t-N_r=\mathbf{m}\}|\{N_r=\mathbf{n}\}]
\end{aligned}
$$

Όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την διωνυμική ιδιότητα .
Η περίπτωση $s=0$ μπορεί να συμβεί μόνο αν $r=0$ και $\mathbf{n}=\mathbf{0}$.Τότε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{N_0=\mathbf{n}+\mathbf{1}>0\}]} P[\{N_0-N_r=\mathbf{l}\}|\{N_r=\mathbf{n}\}]P[\{N_t-N_0=\mathbf{m}-\mathbf{l}\}|\{N_0=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}] \\
&\quad= P[\{N_0-N_0=\mathbf{0}\}|\{N_0=\mathbf{0}\}]P[\{N_t-N_0=\mathbf{m}\}|\{N_0=\mathbf{0}\}] \\
&\quad= P[\{N_t-N_r=\mathbf{m}\}|\{N_r=\mathbf{n}\}]
\end{aligned}
$$

ισχύει, όπου η δεξιά πλευρά, και ως εκ τούτου η αριστερή πλευρά, είναι στην πραγματικότητα $P[N_t=\mathbf{m}]$. Έτσι, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Σε αντίθεση με την πολυωνυμική ιδιότητα η ιδιότητα $Markov$, όπως παρατηρήθηκε αμέσως πριν το Λήμμα 4.2.15, δεν φαίνεται να είναι $\mathcal{A}$-σταθερή. Ωστόσο, με το Λήμμα 4.2.16 μπορούμε εύκολα να γράψουμε ένα πόρισμα από το Λήμμα 4.2.7 το οποίο παρέχει μια επαρκή προϋπόθεση για την σταθερότητα της ιδιότητας $Markov$.

**Πόρισμα 4.2.18.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει την ιδιότητα $Markov$. Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα τότε $\{\mathbf{AN}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $Markov$ διαδικασία για όλα τα $A \in \mathcal{A}$*

Έχουμε δείξει μέχρι τώρα ότι όλες οι ιδιότητες, εκτός από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις συνδέονται με την την πολυωνυμική ιδιότητα .

**Λήμμα 4.2.19.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις , τότε έχει και την ιδιότητα $Markov$.*

**Απόδειξη.**
Θεωρώ $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m+1}$ και $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_{m+1} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{l}_m := \sum_{j=1}^m \mathbf{n}_j$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&P[\cap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
&= \left(\prod_{j=1}^{m+1} P[\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]\right)P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
&= P[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\}]
\end{aligned}$$

Έτσι, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $Markov$ διαδικασία. □

**Πόρισμα 4.2.20.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και την διωνυμικη ιδιότητα, τότε έχει και την πολυωνυμική ιδιότητα .*

# Κεφάλαιο 5

# Πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την μικτή διαδικασία Poisson των απαριθμήτριων διαδικασιών και επιπλέον να συζητήσουμε κάποιες ιδιότητες αυτών των διαδικασιών.

## 5.1 Το Υπόδειγμα

**Ορισμός 5.1.1.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ λέγεται **πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης** $U : \mathfrak{B}_k \leftrightarrow \ [0,1]$ αν
$U[(0,\infty)] = 1$ και αν

$$P[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(t_j-t_{j-1})}\frac{x(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}dU(\lambda)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ...t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, 2, ..., m\}$.

Μια σύντομη συζήτηση σχετικά με την υποστήριξη της μικτής κατανομής θα παραθετηθεί στο τέλος της ενότητας.

Θα συνδέσουμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες *Poisson* με την ενότητα 4.2 δείχνοντας ότι οι πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες *Poisson* έχουν την πολυωνυμική ιδιότητα .

**Λήμμα 5.1.2.** *'Εστω η πολυμεταβλητή απαριθμήτρια σ.δ.* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ $U : \mathfrak{B}_k \mapsto [0,1]$ *μια συνάρτηση κατανομής με* $U[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

**(i)** *Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μίξης* $U$.

**(ii)***Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *έχει την πολυωνυμική ιδιότητα και*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

*ισχύει για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$ *και* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$

**Απόδειξη.** Αφού

$$\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(t_j-t_{j-1})}\frac{\lambda(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}dU(\lambda)$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{n^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m})^{n_j^{(i)}}\right)\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t_m}\frac{(\lambda t_m)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, ..., m\}$ με $\sum_{j=1}^{m}\mathbf{n}_j = \mathbf{n}$ η ισοδυναμία είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της πολυμεταβλητής μικτής *σ.δ.Poisson.* □

**Πόρισμα 5.1.3.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δPoisson τότε*

**(i)**$P[N_t = n] > 0$ *για κάθε* $t > 0$ *και* $n \in \mathbb{N}_0^k$

**(ii)***Η σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *έχει σταθερές προσαυξήσεις.*

**(iii)***Η* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια διαδικασία Markov.*

**Λήμμα 5.1.4.** *Έστω η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.Τότε η μικτή διαδικασία Poisson είναι A-σταθερή και επιπλέον η κατανομή μίξης* $\{A\mathbf{N_t}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_\mathbf{t}}$ *δίνεται από* $U_A$

**Απόδειξη.**
Ως συνέπεια του Λήμματος 5.1.2 και του Λήμματος 4.2.7, εμείς απλά πρέπει να δείξουμε οτι η μονοδιάστατη κατανομή είναι σταθερή. Έτσι θεωρούμε $t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{R}_0^d$.Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
P[A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}] &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{1}'\lambda * \mathbf{t}\frac{(\lambda * t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}} dU_A(\lambda^*) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{1}'\mathbf{A}\lambda\mathbf{t}\frac{(A\lambda t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}} dU_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

για όλα τα $A \in \mathcal{A}$ με $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$

- Έστω $A \in \mathcal{A}_P$. Τότε η παραπάνω σχέση είναι προφανής.
- Έστω $A \in \mathcal{A}_S$. Τότε με την βοήθεια της μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$
\begin{aligned}
P[A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}] &= \sum_{\mathbf{n}\in^{-1}(\{\mathbf{l}\})} P[\mathbf{N}_t = \mathbf{n}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in^{-1}} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^i!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{\mathbf{n}\in^{-1}} \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^i!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{l^{(i)}}}{l^i!} \right) \sum_{\mathbf{n}\in^{-1}} \prod_{i=d+1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^i!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{1}'A\lambda t} \frac{(A\lambda t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} dU_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

□

**Θεώρημα 5.1.5.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μίξης $U$.Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

*(i) Οι συντεταγμένες των $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι ανεξάρτητες*

*(ii) Ισχύει $U = \bigotimes_{i=1}^{k} U_{e_i'}$*

**Απόδειξη.** $(ii) \Longrightarrow (i)$ Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, ..., m\}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
&P\Big[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n_j}\}\Big]\\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}dU(\lambda)\\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}d(\otimes_{i=1}^{k}U_{\mathbf{e}'_i})(\lambda)\\
&= \prod_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}dU_{\mathbf{e}'_i}(\lambda_i)\\
&= \prod_{i=1}^{k}P\Big[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}^{(i)}_{t_j}-\mathbf{N}^{(i)}_{t_{j-1}}=n_j^{(i)}\}\Big].
\end{aligned}
$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{e'_i}\in\mathcal{A}$, έτσι ώστε η τελευταία σχέση αληθεύει λόγω του Λήμματος 5.1.4.

$(i)\Longrightarrow(ii)$ Για ορισμένες πιθανότητες της διαδικασίας θεωρούμε το χρόνο ως μεταβλητή. Για κάθε $t_0,t_1,...,t_k\in\mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $0<t_0<t_1<...<t_k$, η ανεξαρτησία των συντεταγμένων συνεπάγεται οτι

$$
\begin{aligned}
P\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N^{(i)}_{t_i}-N^{(i)}_{t_{i-1}}=0\}\Big] &= \prod_{i=1}^{k}P\Big[\{N^{(i)}_{t_i}-N^{(i)}_{t_{i-1}}=0\}\Big]\\
&= \prod_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i(t_i-t_{i-1})}dU_{\mathbf{e}'_i}(\lambda_i)\\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\sum_{j=1}^{k}\lambda_i(t_i-t_{i-1})}d(\bigotimes_{i=1}^{k}U_{\mathbf{e}'_i})(\lambda)
\end{aligned}
$$

και από την άλλη πλευρά έχουμε (όπου $(\mathbf{e}'_1)^{-1}(\{0\})$ είναι η αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ κάτω από την $\mathbf{e}'_1$ ) οτι

$$
\begin{aligned}
&P\Big[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_i}^{(i)}-N_{t_{i-1}}^{(i)}=0\}\Big]\\
&= \sum_{\mathbf{n}_1\in\mathbf{e}_1'^{-1}(\{0\})}\cdots\sum_{\mathbf{n}_k\in\mathbf{e}_k'^{-1}(\{0\})} P\Big[\bigcap_{j=1}^{k}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\Big]\\
&= \sum_{\mathbf{n}_1\in\mathbf{e}_1'^{-1}(\{0\})}\cdots\sum_{\mathbf{n}_k\in\mathbf{e}_k'^{-1}(\{0\})} \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}dU(\lambda)\\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\sum_{\mathbf{n}_1\in\mathbf{e}_1'^{-1}(\{0\})}\cdots\sum_{\mathbf{n}_k\in\mathbf{e}_k'^{-1}(\{0\})}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}dU(\lambda)\\
&= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i(t_i-t_{i-1})}dU(\lambda)\\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t_j-t_{j-1})}dU(\lambda)
\end{aligned}
$$

Από το συνδυασμό αυτών των δύο σχέσεων παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{z}'\lambda}dU(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{z}'\lambda}d(\bigotimes_{i=1}^{k}U_{\mathbf{e}_i'})(\lambda)$$

για κάθε $\mathbf{z}\in(\mathbf{0},\infty)$. Αυτή είναι μια ιδιότητα του μετασχηματισμού *Laplace*. Από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού *Laplace* (βλ.π.χ.[15], *Theorem* 5.3) έχουμε οτι $U=\bigotimes_{i=1}^{k}U_{\mathbf{e}_i'}$. □

Το παραπάνω θεώρημα είναι μια εξήγηση για τη χρήση των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson*. Μόνο στην περίπτωση μιας μικτής κατανομής που είναι ένα γινόμενο των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών της, οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες. Υπό μία τέτοια κατάσταση η θεωρία των μονοδιάστατων μικτών διαδικασιών *Poisson* είναι επαρκής. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, η μελέτη των πολυμεταβλητών *σ.δ.* καθίσταται αναγκαία.

Για τη χρήση των *poterior* κατανομών μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* με κατανομή μίξης το επόμενο θεώρημα μας δίνει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες. Για μονομεταβλητές μικτές διαδικασίες *Poisson* ο ισχυρισμός αναφέρεται με παρόμοια μορφή, για παράδειγμα από τους *Willmot* και *Sundt* [1989] (βλ.πχ.[27]).

Για να αποκτήσουμε έναν απλό συμβολισμό εισάγουμε την κατανομή $U_{t,\mathbf{n}} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) \to [0,1]$ έτσι ώστε

$$U_{t,\mathbf{n}} := \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \lambda^{\mathbf{n}} dU(\lambda)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \lambda^{\mathbf{n}} dU(\lambda)}$$

για αυθαίρετο $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k, t > 0$ και δοθείσα κατανομή $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) \to [0,1]$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό επιπλέον ορίζουμε $U_{0,\mathbf{0}} := U$.

***Θεώρημα*** (5.1.6). Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή $\sigma$.δ. *Poisson* με κατανομή μείξης $U$ . Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}_0^k, t > 0$ η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ των προσαυξήσεων της $\mathbf{N}_t$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή $\sigma$.δ. *Poisson* με κατανομή μείξης $U_{t,\mathbf{n}}$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P_{t,\mathbf{n}})$.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $h_0, h_1, ..., h_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = h_0 < h_1 < ... < h_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, ..., m\}$ καθώς και $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.
Από το Πόρισμα 5.1.3 $(i)$ παίρνουμε οτι $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&P_{t,\mathbf{n}}\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{K}_{t,h_j} - \mathbf{K}_{t,h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
:=\;& P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{(\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_t) - (\mathbf{N}_{t+h_{j-1}} - \mathbf{N}_t) = \mathbf{n}_j\}|\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}\right] \\
=\;& \frac{P[\bigcap_{j=1}^{m}\{(\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_t) - (\mathbf{N}_{t+h_{j-1}} - \mathbf{N}_t) = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}]} \\
=\;& \frac{\int_{\mathbb{R}^k}\left(\prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(h_j - h_{j-1})}\frac{\lambda(h_j - h_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}\right)e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)} \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^k}\left(\prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(h_j - h_{j-1})}\frac{\lambda(h_j - h_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}\right)dU_{t,\mathbf{n}}(\lambda),
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού της $U_{t,\mathbf{n}}$. Επομένως έπεται ο ισχυρισμός. □

Το παραπάνω θεώρημα δεν παρέχει μόνο μια αναπαράσταση των *posterior* κατανομών, αλλά αναφέρει επίσης ότι το μοντέλο των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με κατανομή μείξης εξακολουθεί να ισχύει για τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις , ανεξάρτητα από τον χρόνο που αρχίζουμε να παρακολουθούμε την διαδικασία.
Τώρα θα συζητήσουμε σχετικά με τον φορέα μιας μικτής κατανομή μίας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες πληρούν την σχέση

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ και όπου $U : \mathfrak{B}_k \to [0,1]$ είναι μια κατανομή με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Σε σύγκριση με μικτές διαδικασίες *Poisson* επεκτείνουμε τον φορέα της κατανομής μείξης από το $(\mathbf{0}, \infty)$ στο $\mathbb{R}_+^k$.

Τα επόμενα δύο λήμματα περιέχουν ιδιότητες των εξεταζόμενων διαδικασιών.

***Λήμμα*** (5.1.7). Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_t}$ είναι μια σ.δ. σε $k$ διαστάσεις, για την οποία ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} dU_A(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d$ , όπου για την κατανομή μείξης $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ ισχύει $U_A[\mathbb{R}_+^d] = 1$.

**Απόδειξη.** Η απόδειξη της ιδιότητας για τις μονομεταβλητές κατανομές είναι εντελώς ίδια με την απόδειξη του Λήμματος 5.1.4. Επιπλέον, με $A \in \mathcal{A}$ έχουμε έχουμε

$1 \geq U_A[\mathbb{R}_+^d] = U[A^{-1}\mathbb{R}_+^d] \geq U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. ???????????? Έτσι $U_A[\mathbb{R}_+^d] = 1$. □

***Λήμμα*** (5.1.8). Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_t}$ είναι μια σ.δ. σε $k$ διαστάσεις, για την οποία ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Τότε ισχύει

$$\lim_{t \uparrow \infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \begin{cases} U[\{0\}] & \text{αν } \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ 0 & \text{αν } \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k | \{\mathbf{0}\} \end{cases}$$

**Απόδειξη.** Πρώτον, ας εξετάσουμε την συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda) := e^{-\lambda t}(\lambda t)^n$ με $t > 0$ και $n \geq 1$. Τότε έχουμε

$$f'(\lambda) = e^{-\lambda t} \lambda^{n-1} t^n (n - \lambda t)$$

$$f''(\lambda) = e^{-\lambda t}\lambda^{n-2}t^n((n-\lambda t)^2 - n)$$

και $\lambda^* := \frac{n}{t}$ είναι η θέση που μεγιστοποιήται η $f$ με $f(\lambda^*) = e^{-n}n^n$.. Ως εκ τούτου $e^{-\lambda t}(\lambda t)^n \leq e^{-n}n^n$ και

$$e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} = \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t}\frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \leq \prod_{i=1}^{k} e^{-n^{(i)}}(n^{(i)})^{n^{(i)}}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+^k, t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.
Από το Θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] &= \lim_{t\uparrow\infty}\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda) \\
&= U[\{\mathbf{0}\}]\frac{\mathbf{0}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} + \lim_{t\uparrow\infty}\int_{\mathbb{R}_+^k|\{\mathbf{0}\}} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda) \\
&= U[\{\mathbf{0}\}]\frac{\mathbf{0}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} + \int_{\mathbb{R}_+^k|\{\mathbf{0}\}} \lim_{t\uparrow\infty} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda) \\
&= U[\{\mathbf{0}\}]\frac{\mathbf{0}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}.
\end{aligned}$$

Επομένως έπεται ο ισχυρισμός. □

Προσθέτοντας τώρα τις ιδιότητες των τροχιών μιας πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

***Λήμμα*** (5.1.9). Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία για την οποία ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $U[\mathbb{R}_0^k] = 1$. Τότε $U[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$.

**Απόδειξη.** Από το προηγούμενο λήμμα και από το Λήμμα 4.1.4 $(iv)$ ισχύει η σχέση $U[\{\mathbf{0}\}] = \lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{0}\}] = 0$. Δεδομένου ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ η μετασχηματισμένη διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία (από το

Λήμμα 4.1.2) και έχει κατανομές μικτής *Poisson* (από το Λήμμα 5.1.7), παίρνουμε $U[\{\mathbf{0}\}] = 0$. Για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$ ο μετασχηματισμός $A := \mathbf{e}'_i$ ικανοποιεί την $A \in \mathcal{A}$ και έτσι έχουμε $0 = U_{e'_i}[\{0\}] = U[{e'}_i^{-1}(\{0\})] = U[\prod_{j=1}^{k} B_j]$ με $_j := \begin{cases} \{0\} & \text{αν } i = j \\ \mathbb{R} & \text{αλλιώς.} \end{cases}$
Άρα $U[\mathbb{R}_+^k \setminus (\mathbf{0}, \infty)] = 0$. □

Ως εκ τούτου, ο περιορισμός της κατανομής μείξης στον ορισμό των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* δεν έχει καμία επίδραση. Οι τροχιές, οι οποίες σχεδόν σίγουρα αυξάνονται στο άπειρο, δεν επιτρέπουν στην κατανομή μείξης να έχει θετική μάζα στο μηδέν σε οποιαδήποτε συντεταγμένη. Όταν παραλείψουμε αυτή την ιδιότητα των τροχιών στον ορισμό των απαριθμήτριων διαδικασιών, θα πρέπει να προσθέσουμε μια άλλη ιδιότητα, όπως οτι οι τροχιές που αυξάνουν στο άπειρο έχουν τουλάχιστον αυστηρά θετικές πιθανότητες, για να εξασφαλιστεί για παράδειγμα, ότι η διωνυμική ιδιότητα οδηγεί σε αυστηρά θετικές πιθανότητες για όλους τους αριθμούς των γεγονότων ($P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$ για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$). Παράβαλε Λήμμα 4.2.8

## 5.2 Ένας χαρακτηρισμός

Σε αυτή την ενότητα θα χαρακτηρίσουμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες *Poisson* στην κατηγορία των πολυμεταβλητών απαριθμητριών διαδικασιών. Για το επόμενο λήμμα θα εισάγουμε ένα νέο συμβολισμό. Για $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ θέτουμε

$$\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) := P\left[\bigcap_{i=1}^{k} \{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\}\right]$$

με $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$.

***Λήμμα*** (5.2.1). Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ που έχει την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα . Τότε για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{(-t)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(t\mathbf{1}).$$

Επιπλέον, υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}_k \to [0, 1]$ με $U[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.
**Απόδειξη.** Θεωρούμε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$, $t \in \mathbb{R}_+$ με $\mathbf{t} \in \mathbf{0}, t\mathbf{1})$. Από την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα προκύπτει

$$\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \textstyle\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty)} P\left[\bigcap_{i=1}^k \{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\} \cap \{N_t^{(i)} - N_{t_i}^{(i)} = l^{(i)} - n^{(i)}\}\right]$$

$$= \textstyle\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty]} \left(\prod_{i=1}^k \binom{l^{(i)}}{n^{(i)}} \left(\frac{t_i}{t}\right)^{n^{(i)}} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}-n^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}).$$

Ιδιαιτέρως, έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \left(\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) \\ &= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \left(\prod_{i=1}^k \left(t_i - t\right)^{l^{(i)}}\right) \frac{\Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1})}{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}} \end{aligned}$$

Η δυναμοσειρά $\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t})$ σε $k$ συντεταγμένες είναι απολύτως φραγμένη για $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, 2t\mathbf{1})$ επειδή $\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) = 1$ και άρα είναι απόλυτα συγκλίνουσα. Επομένως, η $\Pi_{\mathbf{0}}$ είναι συνεχής στο $(\mathbf{0}, 2t\mathbf{1})$ και η δυναμοσειρά παραγωγίζεται άπειρα φορές επάνω σε αυτό το ανοιχτό σύνολο (βλ. Dieudonne [8])

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{n}}\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty)} \left(\prod_{i=1}^k \frac{l^{(i)}!}{(l^{(i)} - n^{(i)})!} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}-n^{(i)}} \left(\frac{-1}{t}\right)^{n^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) \\ &= \frac{\mathbf{n}!}{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty)} \left(\prod_{i=1}^k \binom{l^{(i)}}{n^{(i)}} \left(\frac{t_i}{t}\right)^{n^{(i)}} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}-n^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου ισχύει

$$\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}}\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t})$$

για κάθε $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, 2t\mathbf{1})$. Αφού το $t$ ήταν αυθαίρετο, η ανισότητα

$$(-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) \geq 0$$

ισχύει για κάθε $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, \infty)$ και η $\Pi_{\mathbf{0}}$ είναι συνεχής στο $(\mathbf{0}, \infty)$.
Από το Λήμμα 4.1.4 $(ii)$ προκύπτει ότι η $\Pi_{\mathbf{0}}$ είναι δεξία συνεχής στο 0 και έτσι η $\Pi_0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^k$. Τελευταίο, αλλά όχι λιγότερο σημαντικό έχουμε οτι $\Pi_{\mathbf{0}} = 1$ αφού η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια $\sigma$.δ.
Έτσι η $\Pi_{\mathbf{0}}$ πληρεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος $Bernstein - Widder$ σε $k$ διαστάσεις (3.3.4), το οποίο συνεπάγεται την ύπαρξη μιας κατανομής $U : \mathfrak{B}_k \rightarrow [0, 1]$ με $U[\mathbb{R}_0^k] = 1$ έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$ να ισχύει η σχέση

$$\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{t}'\lambda} dU(\lambda)$$

Έτσι παίρνουμε $\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) = M_U(-\mathbf{t})$, όπου $M_U$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $U$. Αφού η $M_U$ είναι πεπερασμένη στο $(-\infty, \mathbf{0}]$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα (3.2.1) για να παραγωγίσουμε την $\Pi_{\mathbf{0}}$ στο $(\mathbf{0}, \infty)$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) &= \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) \\
&= \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} (-\lambda)^{\mathbf{n}} e^{-\mathbf{t}'\lambda} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{t}'\lambda} \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{n}} \lambda^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \Pi_{\mathbf{n}}(t\mathbf{1})$, παίρνουμε αμέσως ότι

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(t\mathbf{1})$$

και

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(t)^n}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

ισχύει για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$
Οι τελευταίες ισιότητες ισχύουν επίσης για $t = 0$ καθώς όλες οι τροχιές σχεδόν σίγουρα ξεκινούν από το $\mathbf{0}$. Επί πλέον από το Λήμμα 5.1.9 έχουμε οτι $U[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$ Το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Δεδομένου ότι στην προηγούμενη απόδειξη χρειαζόμαστε πολλές διαφορετικές μεταβλητές του χρόνου καθώς η διαδικασία έχει συντεταγμένες, δεν είναι δυνατόν να αντικατασταθεί η επεκτεταμένη διωνυμική ιδιότητα από τη διωνυμική ιδιότητα . Ωστόσο, καθώς η διωνυμική ιδιότητα μεταφέρεται στην μετασχηματσμένη διαδικασία και η επεκτεταμένη διωνυμική ιδιότητα με την διωνυμική ιδιότητα είναι ταυτόσημες, για μια μονομεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 5.2.2.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. η οποία έχει την διωνυμική ιδιότητα . Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $A \in \mathbb{R}^{1\times k}$. Τότε υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}_k \to [0,1]$ με $U[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ έτσι ώστε*

$$P[\{A\mathbf{N}_t = n\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dU(\lambda)$$

*ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0$.*

Ιδιαιτέρως, αυτό ισχύει για όλες τις συντεταγμένες $\{N_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για $i \in \{1,...,k\}$ και το άθροισμα $\{\mathbf{1}'\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας.
Από το Λήμμα 5.2.1, ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* είναι μάλλον προφανής.

**Θεώρημα χαρακτηρισμού 5.2.3.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

*(i) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson .*

*(ii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα .*

*(iii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την επεκτεταμένη διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.*

*(iv) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.*

**Απόδειξη.** Η ισοδυναμία των $(ii), (iii)$ και $(iv)$ είναι ήδη γνωστή από το Λήμμα 4.2.16. Επιπλέον, από το Λήμμα 5.1.2 ισχύει $(i) \implies (ii)$. Έτσι, παραμένει να αποδειχθεί οτι $(iii) \implies (i)$.
Από το Λήμμα 5.2.1 υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}_k \to [0,1]$ με $U[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.
Από την πολυωνυμική ιδιότητα , η οποία είναι γνωστό οτι είναι ισοδύναμη με το $(iii)$, σε συνδυασμό με το Λήμμα 5.1.2 έπεται ο ισχυρισμός. □

Έτσι, με μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με κατανομή μείξης είμαστε σε μια άνετη κατάσταση. Δεν είναι μόνο ότι, λόγω της πολυωνυμικής ιδιότητας έχουμε μόνο να εξετάσουμε τις μονοδιάστατες κατανομές αντί της πεπερασμένης διάστασης κατανομές, αλλά και η μονοδιάστατη κατανομή μπορεί να μετατραπεί σε μια συνάρτηση,η οποία είναι ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής μείξης.

**Πόρισμα 5.2.4.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μείξης $U$ . Τότε η ισότητα*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_U(-t\mathbf{1})$$

*ισχύει για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Για $\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) = M_U(-\mathbf{t})$, έχουμε από το Λήμμα 5.2.1

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] &= \frac{(-t)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(t\mathbf{1}) \\ &= \frac{(-t)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} M_U(-\mathbf{x})}{\partial^{\mathbf{n}} \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=t\mathbf{1}} \\ &= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} M_U(-t\mathbf{1}) \end{aligned}$$

ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

Δοσμένης μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* η συνάρτηση $\Pi_{\mathbf{0}}$, η οποία μπορεί να εκφραστεί από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής μείξης, παρέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για τις πεπερασμένων διαστάσεων κατανομές. Επιπλέον, μπορούμε επίσης να αντλήσουμε διωνυμικές ροπές της διαδικασίας από αυτήν την ροπογεννήτρια συνάρτηση, όπως θα δείξουμε στη ενότητα 5.3. Η $\Pi_0$ ως μία συνάρτηση του χρόνου όχι μόνο παρέχει όλες τις πληροφορίες μια πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* αλλά επίσης η κατανομή του $N_t$ για κάθε $t > 0$ είναι επαρκής για τον προσδιορισμό των κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων της διαδικασίας. Θα αναπτύξουμε το επόμενο λήμμα για να δούμε πώς λειτουργεί αυτό.

**Λήμμα 5.2.5.** *Έστω $U$ και $V$ είναι δυο κατανομές με $U[(\mathbf{0},\infty)] = V[(\mathbf{0},\infty)] = 1$. Έστω $t > 0$ και έστω οτι*

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dV(\lambda)$$

*για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$. Τότε $U = V$.*

**Απόδειξη.** Η ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_U$ και $M_V$ είναι πεπερασμένες για όλα τα $\mathbf{s} < \mathbf{0}$. Χρησιμοποιόντας το Λήμμα 3.2.1 παρατηρούμε οτι υπάρχει για όλα τα $\mathbf{s} < \mathbf{0}$ ένα ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το $\mathbf{s}$ και έτσι οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις είναι αναλυτικές για $\mathbf{s} < \mathbf{0}$. Εξετάζοντας το ανάπτυγμα *Taylor* στη περιοχή $B$ του $-t\mathbf{1}$ έχουμε για όλα τα $\mathbf{s} \in B$ οτι

$$\begin{aligned} M_U(\mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \frac{(\mathbf{s} + t\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \lambda^{\mathbf{n}} dU(\lambda) \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \left( \frac{1}{t}(\mathbf{s} + t\mathbf{1}) \right)^{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \left( \frac{1}{t}(\mathbf{s} + t\mathbf{1}) \right)^{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dV(\lambda) \\ &= M_V(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Έτσι, $M_U(\mathbf{s}) = M_V(\mathbf{s})$ για κάθε $\mathbf{s} \in B$, από το οποίο προκύπτει (βλ. Dieudonne [8], 9.4.2) οτι $M_U(\mathbf{s}) = M_V(\mathbf{s})$ για κάθε $\mathbf{s} < \mathbf{0}$. Αφού οι $U$ και $V$ έχουν μάζα στο θετικό κώνο του $\mathbb{R}^k$ καθώς και οι $M_U$ και $M_V$ είναι συνεχείς στο $(-\infty, \mathbf{0}]$ η σχέση $M_U(\mathbf{s}) = M_V(\mathbf{s})$ ισχύει για κάθε $\mathbf{s} \leq \mathbf{0}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_V$ κάτω από τις υποθέσεις του λήμματος, όπου με $\mathcal{L}_U$ και $\mathcal{L}_V$ συμβολίζουμε το μετασχηματισμό *Laplace* του μέτρου $U$ και $V$, αντίστοιχα. Η μοναδικότητα του μετασχηματισμού *Laplace* (βλ. Kallenberg [2002] *Theorem* 5.3 [15]) μας δίνει οτι $U = V$. □

Τώρα είναι φανερό ότι η κατανομή μείξης $U$ καθορίζεται από την κατανομή ενός μόνο τυχαίου διανύσματος $\mathbf{N}_t$, ανεξάρτητα από το $t > 0$. Στην μονομεταβλητή περίπτωση μπορούν να βρευούν συγκεκριμένες αποδείξεις (βλ. π.χ. Teicher [25] (1961) ή Grandell [10] (1976) , *Theorem* 1.1) που δείχνουν οτι κατανομή μείξης προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη μικτή κατανομή *Poisson* που έχουμε.

Αφού μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει τη διωνυμική ιδιότητα και ανεξάρτητες προσαυξήσεις διαθέτει την πολυωνυμική ιδιότητα (βλ. Πόρισμα 4.2.20), είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με κατανομή μείξης, επίσης Ωστόσο, για να είμαστε πιο ακριβείς είναι μια κάπως ιδιαίτερη πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson*. Για να γίνει αντιληπτή η έννοια της λέξης "ιδιαίτερη" δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 5.2.6.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, λέγεται **πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson**
(multivariate Poisson process) αν είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με κατανομή μείξης $U$ και υπάρχει κάποιο $\mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \infty)$ ώστε $U[\{\mathbf{x}\}] = 1$.

Με άλλα λόγια, μία διαδικασία Poisson πολλών μεταβλητών είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με εκφυλισμένη κατανομή μίξης . Άρα

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_i} = \mathbf{n}_j\}\right] = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} e^{-x_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(x_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}$$

ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ με $j \in \{1, ..., m\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η διαδικασία έχει ανεξάρτητες συντεταγμένες, οι οποίες είναι μονοδιάστατες διαδικασίες Poisson με τη συνήθη έννοια. Ωστόσο, ο προηγούμενος ορισμός χρησιμεύει μόνο ως σημείο αναφοράς, για παράδειγμα, στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.2.7.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson.*

*(ii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα και ανεξάρτητες προσαυξήσεις .*

*(iii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και κάθε συντεταγμένη της είναι μια διαδικασία Poisson.*

**Απόδειξη.** $(c) \Longleftrightarrow (a)$: Η παράσταση των πεπερασμένων διαστάσεων κατανομών αμέσως αποδίδει τον ισχυρισμό.
$(a) \Longrightarrow (b)$: Καθώς κάθε πολυμεταβλητή διαδικασία *Poisson* είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία , έχει την διωνυμική ιδιότητα . Οι ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι εμφανείς από την παράσταση των πεπερασμένων διαστάσεων κατανομών.
$(b) \Longrightarrow (a)$: Από το Πόρισμα 4.2.20 και το Θεώρημα 5.2.3, η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με κατανομή μίξης $U$. Επιπλέον, η μετασχηματισμένη διαδικασία $\{\mathbf{A}\mathbf{N}_{t\in\mathbb{R}_+}\}$ με $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ έχει επίσης, ως συνέπεια των

Λημμάτων 4.2.7 και 4.2.3, την διωνυμική ιδιότητα και ανεξάρτητες προσαυξήσεις . Ιδιεταίρως, αυτό ισχύει με $\mathbf{A} = \mathbf{e'}_i$ για κάθε συντεταγμένη $\{\mathbf{N}_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, $i \in \{1, ..., k\}$. Από τους *Schmidt* και *Zocher* [22] *Theorem* 3.2 κάθε συντεταγμένη είναι μια διαδικασία *Poisson* και επομένως για κάθε $i \in \{1, ...k\}$ υπάρχει κάποιο $x_i \in (0, \infty)$ έτσι ώστε $\{\mathbf{N}_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μικτή διαδικασία *Poisson* με κατανομή μίξης $\delta_{x_i}$. Ως εκ τούτου η

$$U = \delta_x = \bigotimes_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$$

είναι η μόνη κατανομή με $U_{e'_i} = \delta_{x_i}$ για κάθε $i \in \{1, ..., k\}$. Επομένως, η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία *Poisson*. □

**Πόρισμα 5.2.8.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

*(ii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson.*

## 5.3 Οι ροπές

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με κάποιες ιδιότητες των διωνυμικών ροπών, ροπών γύρω από την αρχή η και των κεντρικών ροπών των τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{N}_t, t \in \mathbb{R}_+$. Και πάλι, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής μίξης θα διαδραματίσει ηγετικό ρόλο. Επιπλέον, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα βοηθήσει επίσης στο να αναλύσουμε τις ροπές τυχαίων διανυσμάτων.

**Θεώρημα 5.3.1.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ . Τότε η σχέση*

$$g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_U(t(\mathbf{r} - \mathbf{1}))$$

*ισχύει για όλα τα $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \prod_{i=1}^{k} \sum_{n^{(i)} \in \mathbb{N}_0} \frac{(\lambda_i t r_i)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} e^{\mathbf{r}'\lambda t} dU(\lambda) \\
&= M_U(t(\mathbf{r} - \mathbf{1}))
\end{aligned}
$$

και ο ισχυρισμός είναι εμφανής. □

**Πόρισμα 5.3.2.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε*

*(i)* $g_{A\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = g_{\mathbf{N}_t}(A'\mathbf{r})$ *αν* $A \in \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_C$.

*(ii)* $g_{A\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = g_{\mathbf{N}_t}(A'\mathbf{r} + \mathbf{1} - A'\mathbf{1})$ *αν* $A \in \mathcal{A}_S$.

**Απόδειξη.** $(i) \Longrightarrow (ii)$ Έστω οτι ισχύει η $(i)$. Τότε για αυθαίρετο $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
g_{A\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) &= M_{U_A}(t(\mathbf{r} - \mathbf{1})) \\
&= M_U(A't(\mathbf{r} - \mathbf{1})) \\
&= M_U(t(A'\mathbf{r} - A'\mathbf{1})) \\
&= M_U(t(A'\mathbf{r} - A'\mathbf{1} + \mathbf{1} - \mathbf{1})) \\
&= g_{\mathbf{N}_t}(A'\mathbf{r} + \mathbf{1} - A'\mathbf{1})
\end{aligned}
$$

Όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο απόδειξης του Θεωρήματος 5.3.1 , δεύτερη από το Λήμμα 3.2.2 , ενώ η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.1.

$(ii) \implies (i)$ Αφού $A'\mathbf{1} = \mathbf{1}$ και $A \in A_P \cup A_C$ Άρα ισχύει η $(ii)$. $\square$

Το Θεώρημα 3.3.1 δείχνει ότι η ροπογεννήτριας συνάρτηση της κατανομής μίξης περιέχει επίσης πληροφορίες σχετικά με τις διωνυμικές ροπές των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson*. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να διατυπώσουμε συνθήκες για το πεπερσμένο τέτοιων ροπών στα επόμενα δύο θεωρήματα. Αλλά πριν από αυτό αναφέρουμε ένα σύντομο λήμμα.

**Λήμμα 5.3.3.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} U(d\lambda)$$

*ισχύει για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη.** Έστω $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Από το Λήμμα 3.1.2, το Θεώρημα 5.3.1, το Λήμμα 3.2.1 και από το το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] &= \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{1}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) \\
&= \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{1}{\mathbf{l}!} \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{l}} M_U(t(\mathbf{x}-\mathbf{1}))}{\partial^{\mathbf{l}}\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{r}} \\
&= \sup_{\mathbf{s}\in[-t\mathbf{1},\mathbf{0})} \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} M_U(\mathbf{s}) \\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \sup_{\mathbf{s}\in[-t\mathbf{1},\mathbf{0})} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} e^{\mathbf{s}'\lambda} U(d\lambda) \\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \int_{\mathbb{R}^k} \sup_{\mathbf{s}\in[-t\mathbf{1},\mathbf{0})} \lambda^{\mathbf{l}} e^{\mathbf{s}'\lambda} U(d\lambda) \\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} U(d\lambda)
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.1.2, η δεύτερη από το Θεώρημα 5.3.1 και τον ορισμό της παραγώγου και η τέταρτη είναι συνέπεια του Λήμματος 3.2.1

Αφού $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ σχεδόν βέβαια ο ισχυρισμός ισχύει για $t = 0$, επίσης. $\square$

**Θεώρημα 5.3.4.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

*(a) Υπάρχουν κάποια $t > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] < \infty.$$

*(b) Η σχέση*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] < \infty$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(c) Η κατανομή μίξης ικανοποιεί την σχέση*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} dU(\lambda) < \infty.$$

*(d) Για κάθε $\mathbf{s} \in (-\infty, \mathbf{0})$ ισχύει η ανισότητα*

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} D^{\mathbf{l}} M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0})} (\mathbf{r}) < \infty.$$

*Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πληροί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες ιδιότητες, τότε*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} D^{\mathbf{l}} M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0})} (\mathbf{r})$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη.** Η ισοδυναμία των $(a), (b)$ και $(c)$ προκύπτει από το Λήμμα 5.3.3.

$(a) \iff (b)$ Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.1 ισχύει $g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_U(t(\mathbf{r} - \mathbf{1}))$ ισχύει για $r \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t > 0$. Έτσι, ο ισχυρισμός προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 3.1.5.
Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned}
E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] &= \frac{1}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{N}_t} \mid_{[\mathbf{0},\mathbf{1})} (\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}, \mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{l}} M_U(t(\mathbf{x} - \mathbf{1}))}{\partial^{\mathbf{l}} \mathbf{x}} \mid_{\mathbf{x}=\mathbf{r}} \\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^{\mathbf{l}} M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0})} (\mathbf{r})
\end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Αφού $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ σχεδόν σίγουρα, ο ισχυρισμός ισχύει για $t = 0$, επίσης. $\square$

**Θεώρημα 5.3.5.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(a) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ υπάρχει $t > 0$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty.$$

*(b) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ η ανισότητα*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(c) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{m}} U(d\lambda) < \infty.$$

*(d) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ η $\mathbf{m}$-οστή παράγωγος του $M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, \mathbf{0}]$.*

*Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες ιδιότητες, τότε ισχύει*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{0})$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη.** Λόγω του Λήμματος 3.1.8 έχουμε την ισοδυμανία των $(a), (b)$ και $(c)$ από το Θεώρημα 3.3.4.
$(b) \Longleftrightarrow (d)$: Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.1 ισχύει $g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_U(t(\mathbf{r} - \mathbf{1}))$ για όλα τα $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t > 0$. Έτσι, από το Λήμμα 3.1.8 έπεται ο ισχυρισμός.
Αφού ισχύει η συνθήκη $(c)$ του Θεωρήματος 5.3.4, επιπλέον έχουμε τη συνέχεια της $\mathbf{l}$-οστής παραγώγου της $M_U$

$$\begin{aligned} E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] &= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{r}) \\ &= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{r}), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει το Θεώρημα 5.3.4. □

Ως συνέπεια του Λήμματος 5.3.3 και της ισοδυναμίας των ($c$) και ($d$) στο Θεώρημα 5.3.4 έχουμε

$$\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} U(d\lambda)$$

στην περίπτωση που ένας από τους όρους είναι πεπερασμένος. Δεν απαιτούμε, όπως στο Λήμμα 3.2.1, το πεπερασμένο της ροπογεννήτριας συνάρτησης $M_U$ σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$. Υπό αυτή την κατάσταση θα υπάρχουν όλες οι παράγωγοι της $M_U$ στο $\mathbf{0}$ και, ως εκ τούτου όλες οι ροπές της $\mathbf{N}_t$ θα είναι πεπερασμένες. Με μια παράκαμψη για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασία $Poisson$ με κατανομή μίξης σε κάποια χρονική στιγμή $t$ θα ήμασταν σε θέση να βελτιώσουμε αποτελέσματα για την ροπογεννήτρια συνάρτηση.
Με τις ιδιότητες που έχουμε μέχρι τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε συνθήκες για το πεπερασμένο της πρώτη και της δεύτερης κεντρικής ροπής της διαδικασίας σε κάποιο χρόνο $t$, το οποίο θα διευκρινίσουμε στο επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 5.3.6.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία $Poisson$ με κατανομή μίξης $U$ και έστω $i, j \in \{1, ..., k\}$ με $i \neq j$.*

*(i) Αν $\int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i U(d\lambda) < \infty$, τότε $\mathbb{E}[N_t^{(i)}] < \infty$ και*

$$\mathbb{E}[N_t^{(i)}] = t \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i U(d\lambda)$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(ii) Αν $\int_{\mathbb{R}^k} (\lambda_i)^2 U(d\lambda) < \infty$, τότε $\mathbb{E}[(N_t^{(i)})^2] < \infty$ και*

$$Var[N_t^{(i)}] = t^2 \int_{\mathbb{R}} (\lambda_i - \int_{\mathbb{R}^k} x_i U(d\mathbf{x}))^2 U(d\lambda) + t \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i dU(\lambda)$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(iii) Αν $\max\{\int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i\lambda_j U(d\lambda), \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i dU(\lambda), \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_j U(d\lambda)\} < \infty$,τότε*

$$\mathbb{E}[N_t^{(i)} N_t^{(j)}] < \infty, \qquad \mathbb{E}[N_t^{(i)}] < \infty, \qquad \mathbb{E}[N_t^{(j)}] < \infty$$

*και*

$$Cov[N_t^{(i)}, N_t^{(j)}] = t^2 \int_{\mathbb{R}} \Big(\lambda_i - \int_{\mathbb{R}^k} x_i U(d\mathbf{x})\Big)\Big(\lambda_j - \int_{\mathbb{R}^k} x_j U(d\mathbf{x})\Big) U(d\lambda$$

*ισχύει για* $t \in \mathbb{R}_+$.

**Απόδειξη.**
Αφού $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ σχεδον βέβαια, ο ισυρισμός ισχύει γαι $t = 0$. Για $t > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.3 και και μετασχηματισμό μεταξύ διωνυμικών και των κεντρικών ροπών. □

Το παραπάνω πόρισμα μας δείχνει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των πολυμεταβλητών διαδικασιών *Poisson* και των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* με κατανομή μίξης μη-εκφυλισμένη . Εάν $U$ είναι μια κατανομή εκφυλισμένη τότε, και μόνο τότε

$$Var[N_t^{(i)}] = t \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i U(d\lambda) = \mathbb{E}[N_t^{(i)}]$$

για όλα τα $i \in \{1, ...k\}$. Εάν $U$ είναι εκφυλισμένη έχουμε επίσης $Cov[N_t^{(i)}, N_t^{(j)}] = 0$ για $i \neq j$, το οποίο είναι απολύτως σαφές, δεδομένου ότι οι συντεταγμένες της διαδικασίας είναι ανεξάρτητες.
Για να σχεδιάσουμε ένα συμπέρασμα από αυτή την ενότητα επισημαίνουμε ότι η ροπογεννήτρια συνάρτιση $M_U$ της κατανομής μίξης δεν καθορίζει μόνο τις μονοδιάστατες κατανομές της διαδικασίας, αλλά και τις ροπές της $\mathbf{N}_t$ με $t \in \mathbb{R}_+$. Οι μετασχηματισμένες διαδικασίες $\{\mathbf{AN}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $A \in \mathcal{A}$ είναι πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες *Poisson* με κατανομή μίξης $U_A$. Ως συνέπεια της

$$M_{U_A}(\mathbf{t}) = M_U(A'\mathbf{t})$$

η συνάρτηση $M_U$ περιέχει επίσης πληροφορίες σχετικά με τις μονοδιάστατες κατανομές και τις ροπές των μετασχηματισμένων διαδικασιών.

# Κεφάλαιο 6

# Πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με τυχαία παράμετρο

## 6.1 Το υπόδειγμα

Μια μικτή διαδικασία *Poisson* μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα ενός μοντέλου δύο βημάτων. Πρώτα επιλέγεται μια παράμετρος σύμφωνα με την κατανομή μίξης και στη συνέχεια η εμφάνιση των υπό εξέταση γεγονότων στο χρονικό διάστημα της μονάδας ακολουθεί κατανομή *Poisson*, με μέση τιμή την επιλεγμένη παράμετρο. Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε το μοντέλο της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* με κατανομή μίξης με την παραδοχή ότι η παράμετρος είναι μια υλοποίηση ενός τυχαίου διανύσματος και επιπλέον λαμβάνοντας υπόψη τις εξαρτημένες πιθανοτήτες της διαδικασίας ως προς το υπάρχον τυχαίο διάνυσμα.

**Ορισμός 6.1.1.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ λέγεται **πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\Box$ αν $\Box$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με $P_{\Box}[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\Box\}\right)=\prod_{j=1}^{m}e^{-\mathbf{1}'\Box(t_j-t_{j-1})}\frac{\Box(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}\qquad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta.$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,...,m\}$.

Ο ορισμός αυτός εμπεριέχει δεσμευμένες πιθανότητες, με την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής, των προσαυξήσεων πεπερασμένης διάστασης της διαδικασίας.

Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης μικτής διαδικασίας *Poisson* (βλ. Ορισμό 2.5.3), υπάρχει ένας ισοδύναμος ορισμός χρησιμοποιώντας άλλες ιδιότητες των στοχαστικών διαδικασιών. Ως εκ τούτου, εισάγουμε την έννοια της δεσμευμένης ανεξαρτησίας και των δεσμευμένων στάσιμων προσαυξήσεων.

**Ορισμοί 6.1.2.** **(α)** Έστω μια $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία και □ ένα τυχαίο διάνυσμα. Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ λέγεται οτι έχει **δεσμευμένες ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το □ αν ισχύει η ισότητα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\}\right)=\prod_{j=1}^{m}P(\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\})$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,...,m\}$.

**(β)** Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ λέγεται οτι έχει **δεσμευμένες στάσιμες προσαυξήσεις** (conditionally stationary increments) ως προς το □ αν ισχύει η ισότητα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h}-\mathbf{N}_{t_{j-1}+h}=\mathbf{n}_j|\square\}\right)=P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\}\right)$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,...,m\}$.

**Θεώρημα 6.1.3.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία και □ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

*(i) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο □ .*

*(ii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ έχει δεσμευμένες ανεξάρτητες και δεσμευμένες στάσιμες προσαυξήσεις ως προς το □ και ισχύει η ισότητα*

$$P(\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}|\square\})=e^{-\mathbf{1}'\square t}\frac{(\square t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta.$$

*για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη**: $(i)\Rightarrow(ii)$: Είναι προφανές

$(ii)\Rightarrow(i)$: Έστω $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,...,m\}$.

Τότε

$$
\begin{aligned}
P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\}\Bigg) &= \prod_{j=1}^{m} P(\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\}) \\
&= \prod_{j=1}^{m} P(\{\mathbf{N}_{t_j-t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\}) \\
&= \prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\square(t_j-t_{j-1})}\frac{\square(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!},
\end{aligned}
$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta.$ Επομένως έπεται ο ισχυρισμός. □

Σε αντίθεση με τον ορισμό των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* με κατανομή μίξης, ο ορισμός του πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* με παράμετρο εμπεριέχει τις δεσμευμένες πιθανότητες. Λαμβάνοντας υπόψη τις μη δεσμευμένες πιθανότητες, το επόμενο πόρισμα είναι προφανές.

**Πόρισμα 6.1.4.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο □ . Τότε η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $P_{\square}$.*

**Παρατήρηση 6.1.5. (α)** Η πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με παράμετρο , έχει όλες τις ιδιότητες μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* με κατανομή μίξης. Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν φαίνεται να ισχύει γενικά, δεδομένου ότι γενικά δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν οι δεσμευμένες πιθανότητες από τις μη δεσμευμένες. Ως εκ τούτου, ο χαρακτηρισμός της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* με μικτή κατανομή στα πλαίσια της πολυωνυμικής ιδιότητας (Θεώρημα 5.2.3) γενικά δεν μπορεί να μεταφερθεί στην πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με παράμετρο . Κατ' αρχήν, δεν είμαστε σίγουροι για την ύπαρξη τυχαίου διανύσματος με την κατανομή προερχόμενη από το Θεώρημα *Bernstein – Widder* για το συγκεκριμένο χώρο πιθανότητας. Από την άλλη πλευρά, υποθέτοντας οτι υπάρχει ένα τέτοιο τυχαίο διάνυσμα δεν είναι γενικά δυνατό να κατασκευαστούν οι δεσμευμένες πιθανότητες με βάση τον ορισμό των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* με την παράμετρο από τις μη δεσμευμένες.
**(β)** Κάτω από κάποιες ασθενείς συνθήκες, που ικανοποιούνται από μια ευρεία κλάση χ.π., έχει αποδειχθεί στην [17], *Theorem* 2.7, οτι για μονομεταβλητές μικτές στοχαστικές διαδικασίες *Poisson* με παράμετρο μια τυχαία μεταβλητή ισχύει το

αντίστροφο του Πορίσματος 6.1.4.
**(γ)** Επίσης κάτω από ορισμένες συνθήκες, που ικανοποιούνται από μια ευρεία κλάση χ.π. έχει αποδειχθεί στην [18], *Theorem* 2.11 ένας χαρακτηρισμός της μονομεταβλητής μικτής *σ.δ.* *Poisson* με παράμετρο μια τυχαία μεταβλητή μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητα και της ιδιότητας *Markov*.

Όμως τα παρακάτω ερωτήματα παραμένουν ανοικτά.

**Ερωτήματα 6.1.6.** Κάτω από ποιές συνθήκες:

(*a*) οι ορισμοί μιας πολυμεταβλητής *σ.δ.* *Poisson* με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα και μιας πολυμεταβλητής *σ.δ.* Poisson με κατανομή μίξης είναι ισοδύναμοι,

(*b*) ο ορισμός μιας πολυμεταβλητής μικτής *σ.δ.* Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα είναι ισοδύναμος με την ιδιότητα Markov;

Σύμφωνα με το παραπάνω ερώτημα, ο χαρακτηρισμός των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας (Λήμμα 5.1.2) δεν είναι γνωστό αν εφαρμόζεται στις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες *Poisson* με παράμετρο. Ως εκ τούτου, για να δείξουμε ότι μια μικτή διαδικασία *Poisson* με παράμετρο είναι $\mathcal{A}$-σταθερή, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απόδειξη του Λήμματος 5.1.4. Ωστόσο, εφαρμόζοντας αυτή τη φορά το Θεώρημα 6.1.3 έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Λήμμα 6.1.7.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία και* ▯ *ένα τυχαίο διάνυσμα.Τότε*

(*i*) *Η ιδιότητα του να έχει δεσμευμένες ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς* ▯ *είναι* $\mathcal{A}$*-σταθερη.*

(*ii*) *Η ιδιότητα του να έχει δεσμευμένες στάσιμες προσαυξήσεις ως προς* ▯ *είναι* $\mathcal{A}$*-σταθερη.*

**Απόδειξη.** Ο ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί από τους ίδιους μετασχηματισμούς όπως στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.3, με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε δεσμευμένες πιθανότητες αντί των μη δεσμευμένων πιθανοτήτων. □

**Λήμμα 6.1.8.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία* *Poisson* *με παράμετρο* ▯ *και έστω* $A \in \mathcal{A}$. *Τότε* *(i) Η διαδικασία $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετο $A\Box$ . Αυτό σημαίνει, οτι αφού είναι μια μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο, είναι $\mathcal{A}$-σταθερή.*

*(ii) Η ισότητα*

$$P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|A\Box) = P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|\Box)$$

*ισχύει για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε ένα $t \in \mathbb{R}_+$ και ένα $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d$. Αρχικά θα αποδείξουμε οτι 61

$$\mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t\}=\mathbf{l}}|\Box] = e^{-\mathbf{1}'A\Box t}\frac{(A\Box t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \tag{6.1}$$

ισχύει για όλα τα $A \in \mathcal{A}$ και $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$.
Έστω $A \in \mathcal{A}_P$. Τότε η (6.1) είναι προφανής.
Έστω $A \in \mathcal{A}_S$. Τότε έχουμε με την βοήθεια της μονότονης σύγκλισης για την δεσμευμένη μέση τιμή τις παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t\}=\mathbf{l}}|\Box] &= E\left[\sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})}\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}}|\Box\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} P(\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}|\Box) \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})}\prod_{i=1}^{k} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{l^{(i)}}}{l^{(i)}!}\right)\sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})}\prod_{i=d+1}^{k} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \\
&= e^{-\Box t}\frac{(\Box t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \\
&= e^{-\mathbf{1}'A-\Box t}\frac{(A\Box t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.
\end{aligned}$$

Έτσι η (6.1) ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{A}_S$.
Έστω $A \in \mathcal{A}_C$. Θέτωντας $I(i) := \{h \in \{1, ..., k\} : \mathbf{e}'_i A\mathbf{e}_h = 1\}$ (το σύνολο των συντεταγμένων σωρεύονται στην i-συντεταγμένη της μετασχηματισμένης διαδικασίας), έχουμε $\sum_{h\in I(i)}\theta_h = \mathbf{e}'_i A\theta$ για όλα τα $i \in \{1, ..., d\}$.

Έτσι, με τον ίδιο τρόπο, όπως και πριν, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_{A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}}|\Box] &= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \prod_{i=1}^{k} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d} e^{-\mathbf{e'}_i A\Box t}\frac{(\mathbf{e'}_i A\Box \mathbf{t})^{l^{(i)}}}{l^{(i)}!}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \prod_{i=1}^{d} \frac{l^{(i)}}{\prod_{h\in I(i)} n^{(h)}!} \prod_{h\in I(i)} \left(\frac{\Theta_h}{\mathbf{e'}_i A\Box}\right)^{n^{(h)}} \\
&= e^{-\mathbf{1'}A\Box t}\frac{(A\Box)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η (6.1) ισχύει για όλα τα $A \in \mathcal{A}$. Τώρα θα αποδείξουμε τις $(i)$ και $(ii)$.

(i) Από την σχέση (6.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|A\Box) &= E\Big[\mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}\}}|\Box]|A\Box\Big] \\
&= E\Big[e^{-\mathbf{1'}A\Box t}\frac{(A\Box t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}|A\Box\Big] \\
&= e^{-\mathbf{1'}A\Box t}\frac{(A\Box t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.
\end{aligned}$$

Τώρα,από το Θεώρημα 6.1.3 σε συνδιασμό με το Λήμμα 6.1.7 προκύπτει η $(i)$.

(ii) Χρησιμοποιόντας τη σχέση (6.1) και την $(i)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|A\Box) &= e^{-\mathbf{1'}A\Box t}\frac{(A\Box t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \\
&= \mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}\}}|\Box] \\
&= P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|\Box).
\end{aligned}$$

Επομένως η $(ii)$ έχει αποδειχθεί. $\square$

Αφού μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson* με παράμετρο είναι μια πολυμεταβλητή μικτή Διαδικασία *Poisson* με κατανομή μεταφέρουμε κάποια αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5. Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $P_{▯}$ αντί του $U$ και έτσι θα είναι πιο εύκολο να θυμόμαστε τα αποτελέσματα . Ο πρώτος ισχυρισμός που εξετάζεται είναι του Θεωρήματος 5.1.5.

**Θεώρημα 6.1.9.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο ▯ . Τότε οι συντεταγμένες της $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι συντεταγμένες της ▯ είναι ανεξάρτητες.*

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στην εργασία του *Zocher* [2003]. Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρεται στον *Zocher* [2003], επίσης. Θεωρεί υπό όρους ανεξαρτησία ως προς την παράμετρο η οποία είναι τώρα δυνατή λόγω της παραμέτρου Θ που έχει εισάχθεί στον ορισμό.

**Θεώρημα 6.1.10.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο ▯ . Τότε οι συντεταγμένες της $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητες ως προς ▯.*

**Απόδειξη.** Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $= \mathbf{e}'_i$ με $A▯ = \Theta_i$, και το Λήμμα 6.1.6 έχουμε

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}|▯\Big) &= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\Theta_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\Theta_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} \\
&= \prod_{i=1}^{k} P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}^{(i)} - N_{t_{j-1}}^{(i)} = n_j^{(i)}\}|\Theta_i\Big) \\
&= \prod_{i=1}^{k} P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}^{(i)} - N_{t_{j-1}}^{(i)} = n_j^{(i)}\}|▯\Big)
\end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ με $j \in \{1, ..., m\}$. □

Όπως και στο Κεφάλαιο 5, η ροπογεννήτριες συναρτήσεις διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Για λόγους απλοποίησης θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $M_{▯}$ αντί

$M_{P_{\square}}$ για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος $\square$.

Από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 έχουμε

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_{\square}(-t\mathbf{1})$$

για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ και $t > 0$ καθώς και $M_{A\square}(\mathbf{t}) = M_{\square}(A'\mathbf{t})$ για $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Έτσι, οι μονοδιάστατες πιθανότητες, οι οποίες είναι οι πιο κατάλληλες, λόγω της πολυωνυμικής ιδιότητας, καθορίζονται από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της $\square$. Επιπλέον, οι μονοδιάστατες πιθανότητες των μετασχηματισμένων διαδικασιών καθορίζονται επίσης από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_{\square}$. Η εφαρμογή αυτής της συνάρτησης σε σχέση με τις ροπές της διαδικασίας εξετάζεται στην επόμενη ενότητα.

## 6.2 Ροπές

Στην Ενότητα 5.3 έχουμε αναφέρει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το πεπερασμένο των διωνυμικών ροπών, των ροπών γύρω από την αρχή και των κεντρικών ροπών των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* με μικτή κατανομή. Ένα σημαντικό εργαλείο ήταν η πιθανογεννήτρια συνάρτηση. Στην περίπτωση της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας *Poisson* με την παράμετρο παραθέτουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

**Θεώρημα 6.2.1.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία Poisson με παράμετρο $\square$. Τότε ισχύει η σχέση*

$$g_{\mathbf{N}_t}(bfr) = M_{\square}(t(\mathbf{r} - \mathbf{1}))$$

*για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Η διωνυμική ροπή της $\mathbf{N}_t$ πληροί την σχέση*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\mathbb{E}[\square^{\mathbf{l}}]$$

*για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ και $l \in \mathbb{R}_+$.*

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του Θεωρήματος 5.3.1. □

**Θεώρημα 6.2.2.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\square$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. Τότε τα ακόλουθα είναιισοδύναμα.*

*(a) Υπάρχει $t > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}] < \infty.$$

*(b) Ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}] < \infty$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(c) Η παράμετρος ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathbb{E}[\square^{\mathbf{l}}] < \infty.$$

*(d) Για κάθε $\mathbf{s} \in (-\infty, \mathbf{0}]$ ισχύει η ανισότητα*

$$lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} D^{\mathbf{l}} M_{\square}|_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r}) < \infty.$$

Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πληροί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες σχέσεις, τότε ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} D^{\mathbf{l}} M_{\square}|_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r})$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκεη του Θεωρήματος 5.3.4. □

**Θεώρημα 6.2.3.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\square$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. Τότε τα ακόλουθα είναιισοδύναμα:*

*(a) Για κάθε $\mathbf{m} \le \mathbf{1}$ υπάρχει $t > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty.$$

*(b) Για κάθε $\mathbf{m} \le \mathbf{1}$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty.$$

*(c) Η παράμετρος ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathbb{E}[\Box^{\mathbf{m}}] < \infty,$$

*για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$.

*(d) Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$, *η* $\mathbf{m}$*-οστή παράγωγος της* $M_{\Box}|_{(-\infty,\mathbf{0})}$ *είναι συνεχής στο* $(-\infty, \mathbf{0}]$.

*Αν η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *πληροί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες σχέσεις, τότε ισχύει η ισότητα*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} M_{\Box}|_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{0})$$

*για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

Η απόδειξη γίνεται όπως και στο Θεώρημα 5.3.5. $\square$

Ως αποτέλεσμα αυτών των θεωρημάτων είναι δυνατόν να διατυπώσουμε συγκεκριμένους τύπους για την πρώτη και τη δεύτερη κεντρική ροπή του $N_t$ όπως στο Πόρισμα 5.3.6. Ωστόσο, αυτά τα αποτελέσματα μπορούν επίσης να ληφθούν με συμπαγή τρόπο χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη μέση τιμή . Η προσέγγιση αυτή επιπλέον μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσετε τη συνδιακύμανση των $\mathbf{N}_t$ και $\mathbf{N}_{t+h}$.

**Θεώρημα 6.2.4.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο* $\Box$ .

*(i) Αν η παράμετρος* $\Box$ *έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης, τότε*

$$\mathbb{E}[\mathbf{N}_t] = t\mathbb{E}[\Box]$$

*ισχύει για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

*(ii) Αν η παράμετρος* $\Box$ *έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης, τότε*

$$Cov[\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h}] = tDiag\Big(\mathbb{E}[\Box]\Big) + \mathbf{t}(\mathbf{t}+\mathbf{h})\mathbf{Var}[\Box]$$

*ισχύει για κάθε* $t, h \in \mathbb{R}_+$.

*(iii) Αν η παράμετρος □ έχει μια πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης και* $Var[\Theta_i] > 0$ *και* $Var[\Theta_l] > 0$ *για* $i, l \in \{1, ..., k\}$ *με* $i \neq l$*, τότε ισχύει η ισότητα*

$$lim_{t\uparrow\infty}\varrho\bigg(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}\bigg) = \varrho(\Theta_i, \Theta_l).$$

*Επιπλέον η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι αύξουσα στο* $(0, \infty)$.

**Απόδειξη.** Πριν αποδείξουμε τους ισχυρισμούς, θα κάνουμε κάποιες προκαταρκτικές παρατηρήσεις. Από το Λήμμα 6.1.8 έχουμε οτι (το τυχαίο διάνυσμα □ είναι σχεδόν σίγουρα πεπερασμένο) $\mathbb{E}(N_t^{(i)}|□) = E(N_t^{(i)}|\Theta_i) = t\Theta_i$ και $Var(N_t^{(i)}|□) = Var(N_t^{(i)}|\Theta_i) = t\Theta_i$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Από την συνθήκη ανεξαρτησίας των συντεταγμένων ως προς □ έχουμε οτι $Cov(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}|□) = 0$ για $i \neq l$, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.8. Συνολικά, έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbf{N}_t|□) = t□ \qquad Var(\mathbf{N}_t|□) = tDiag(□).$$

$(i)$: Με το □ επίσης το $\mathbf{N}_t$ έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ (Θεώρημα 6.2.3). 'Ετσι έχουμε

$$\mathbb{E}[\mathbf{N}_t] = \mathbb{E}\bigg[\mathbb{E}(\mathbf{N}_t|□)\bigg] = \mathbb{E}[t□] = t\mathbb{E}[□].$$

$(ii)$: Εάν το τυχαίο διάνυσμα □ έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης, τότε έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης, επίσης.΄Ετσι, $\mathbf{N}_t$ έχει πεπερασμένες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (Θεώρημα 6.2.3) και έτσι ισχύει

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h}] &= \mathbb{E}[Cov(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h}|□)] + Cov[E(\mathbf{N}_t|□), E(\mathbf{N}_{t+h}|□)] \\ &= \mathbb{E}[Cov(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h} - \mathbf{N}_t|□)] + \mathbb{E}[Var(\mathbf{N}_t|□)] + Cov[t□), (t+h)□] \\ &= \mathbb{E}[tDiag(□)] + t(t+h)Var[□] \\ &= tDiag(\mathbb{E}[□]) + t(t+h)Var[□] \end{aligned}$$

όπου $Cov(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h} - \mathbf{N}_t|□) = 0$, διότι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς □.
$(iii)$: Αφού

$$
\begin{aligned}
&\varrho\Bigg(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}\Bigg) \\
&= \frac{Cov[N_t^{(i)}, N_t^{(l)}]}{\sqrt{Var[N_t^{(i)}]Var[N_t^{(l)}]}} \\
&= \frac{t^2 Cov[\Theta_i, \Theta_l]}{\sqrt{t^4 Var[\Theta_i]Var[\Theta_l] + t^3(Var[\Theta_i]\mathbb{E}[\Theta_l] + Var[\Theta_l]\mathbb{E}[\Theta_i]) + t^2\mathbb{E}[\Theta_i]\mathbb{E}[\Theta_l]}} \\
&= \frac{Cov[\Theta_i, \Theta_l]}{\sqrt{Var[\Theta_i]Var[\Theta_l] + t^{-1}(Var[\Theta_i\mathbb{E}[\Theta_l + \mathbb{E}[\Theta_i]Var[\Theta_l]) + t^{-2}\mathbb{E}[\Theta_i]\mathbb{E}[\Theta_l]}}
\end{aligned}
$$

έχουμε

$$lim_{t\uparrow\infty}\varrho\Bigg(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}\Bigg) = \varrho(\Theta_i, \Theta_l)$$

και η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα δίνει έναν εύκολο τρόπο για να ελέγξουμε τη συσχέτιση δύο συντεταγμένων της διαδικασίας. Αν $i \neq l$ έχουμε

$$Cov[N_s^{(i)}, N_t^{(l)}] = stCov[\Theta_i, \Theta_l]$$

για κάθε $s, t > 0$.

Ως εκ τούτου, είναι αναγκαίο να ελέγξουμε τη συσχέτιση μεταξύ δύο συντεταγμένων για ένα χρονικό ζευγάρι ώστε να βρούμε τη συσχέτιση των συντεταγμένων της παραμέτρου, η οποία είναι σημαντική για τη συσχέτιση των συντεταγμένων για όλα τα χρονικά ζευγάρια.

Ας ρίξουμε μια ματιά και στη συσχέτιση των δύο προσευξήσεων της διαδικασίας.

**Πόρισμα 6.2.5.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο □ . Αν η □ έχει μια πεπερασμένη ροπή της δεύτερης τάξης, τότε*

$$
\begin{aligned}
&Cov[\mathbf{N}_{t_2} - \mathbf{N}_{t_1}, \mathbf{N}_{t_4} - \mathbf{N}_{t_3}] \\
&= Var[\square](t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \\
&\quad + Diag(\mathbb{E}[\square])\Bigg((t_2 - t_3)^+ - (t_2 - t_4)^+\Bigg)
\end{aligned}
$$

*για κάθε $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}_+$ με $t_1 < t_2, t_3 < t_4$ και $t_1 \leq t_3$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}_+$ με $t_1 < t_2, t_3 < t_4$ και $t_1 \leq t_3$. Από το Θεώρημα 6.2.4 έχουμε

$$
\begin{aligned}
& Cov[\mathbf{N}_{t_2} - \mathbf{N}_{t_1}, \mathbf{N}_{t_4} - \mathbf{N}_{t_3}] \\
= \; & Cov[\mathbf{N}_{t_2}, \mathbf{N}_{t_4}] - Cov[\mathbf{N}_{t_2}, \mathbf{N}_{t_3}] - Cov[\mathbf{N}_{t_1}, \mathbf{N}_{t_4}] + Cov[\mathbf{N}_{t_2}, \mathbf{N}_{t_3}] \\
= \; & min\{t_2, t_4\} Diag(\mathbb{E}[\Box]) + t_2 t_4 Var[\Box] \\
& -min\{t_2, t_3\} Diag(\mathbb{E}[\Box]) - t_2 t_3 Var[\Box] \\
& -min\{t_1, t_4\} Diag(\mathbb{E}[\Box]) - t_1 t_4 Var[\Box] \\
& +min\{t_1, t_3\} Diag(\mathbb{E}[\Box]) + t_1 t_3 Var[\Box] \\
= \; & Var[\Box](t_2 t_4 - t_2 t_3 - t_1 t_4 + t_1 t_3) \\
& +Diag(\mathbb{E}[\Box])(min\{t_2, t_4\} - min\{t_2, t_3\} - min\{t_1, t_4\} + min\{t_1, t_3\}) \\
= \; & Var[\Box](t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \\
& +Diag(\mathbb{E}[\Box])(min\{0, t_4 - t_2\} - min\{0, t_3 - t_2\}) \\
= \; & Var[\Box](t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \\
& +Diag(\mathbb{E}[\Box])\bigg((t_2 - t_3)^+ - (t_2 - t_4)^+\bigg).
\end{aligned}
$$

Εδώ τελειώνει η απόδειξη. $\square$

Μόνο στην περίπτωση που τα δύο διαστήματα δεν είναι ξένα μεταξύ τους ο όρος $(t_2 - t_3)^+ - (t_2 - t_4)^+$ είναι διαφορετικός του μηδενός. Τότε παίρνει την τιμή του μήκους του κοινού διαστήματος.

## 6.3 Posterior κατανομές

Η εισαγωγή της τυχαίας παραμέτρου στο μοντέλο πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών *Poisson* στο κεφάλαιο αυτό προσφέρει τη δυνατότητα να μελετήσουμε την δεσμευμένη κατανομή της παραμέτρου σε σχέση με την διαδικασία σε κάποιο χρόνο $t$. Δεδομένου ότι οι ρόλοι των τυχαίων διανυσμάτων εναλλάσονται με εκείνους των τυχαίων μεταβλητών μιας μικτής *Poisson*, μπορούμε να μιλάμε για εκ των υστέρων κατανομες. Η εξέταση της εκ των υστέρων κατανομής συνδέεται με το ερώτημα της σταθερότητας του μοντέλου στην πάροδο του χρόνου, το οποίο επίσης απαντάται σε αυτή την ενότητα. Καθορίζουμε πρώτα την κοινή κατανομή των πεπερασμένης διάστασης προσαυξήσεων και της παραμέτρου.

**Λήμμα 6.3.1.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Box$ . Τότε η σχέση*

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}|\{\Box\in B\}\right]=\int_{\Omega}\chi_{\{\Box\in\}}\prod_{j=1}^{m}e^{-\mathbf{1}'\Box(t_j-t_{j-1})}\frac{(\Box(t_j-t_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n_j}!}dP$$

*ισχύει για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k, j\in\{1,...,m\}$, και για κάθε $B\in\mathfrak{B}_k$.*

**Απόδειξη.**
Θεωρούμε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<...<t_m$ και $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k, j\in\{1,...,m\}$, και για κάθε $\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\Box\in B\}\right] &= \int_{\Omega}\chi_{\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\Box\in B\}}dP\\
&= \int_{\Omega}E\left(\chi_{\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\Box\in B\}}|\Box\right)dP\\
&= \int_{\Omega}\chi_{\Box\in\mathbf{B}}E\left(\chi_{\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}}|\Box\right)dP\\
&= \int_{\Omega}\chi_{\{\Box\in B\}}\prod_{j=1}^{m}e^{-\mathbf{1}'\Box(t_j-t_{j-1})}\frac{(\Box(t_j-t_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n_j}!}dP.
\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει το Λήμμα. □

**Θεώρημα 6.3.2.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Box$ . Τότε για κάθε $t>0$ και για όλα τα $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$ η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Box$ πάνω στον χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P_{t,\mathbf{n}})$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $t>0$ και $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$. Ο πρώτος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η ισότητα

$$\int_{\Box}(f\circ\Box)dP_{t,\mathbf{n}}=\frac{\int_{\Omega}(f\circ\Box)(e^{-\mathbf{1}'\Box t}(\Box\mathbf{t})^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!)dP}{P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}]}$$

ισχύει για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$. Ως εκ τούτου, θεωρούμε ένα σύνολο $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ και $f := \chi_B$. Τότε $f \circ \square = \chi_{\square^{-1}(\mathbf{B})}$ και από το Λήμμα 6.3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\square} (f \circ \square) dP_{t,\mathbf{n}} &= \int_\Omega \chi_{\square^{-1}(B)} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= P_{t,\mathbf{n}}[\square^{-1}(B)] \\
&= \frac{\int_\Omega \chi_{\square^{-1}(B)} (e^{-\mathbf{1}'\square t} (\square\mathbf{t})^{\mathbf{n}} / \mathbf{n}!) dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega (f \circ \square) (e^{-\mathbf{1}'\square t} (\square\mathbf{t})^{\mathbf{n}} / \mathbf{n}!) dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}
\end{aligned}$$

Τώρα, η παράσταση των θετικών μετρήσιμων συναρτήσεων μέσω απλών συναρτήσεων και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δίνει την επιθυμητή ισότητα. Για το υπόλοιπο της απόδειξης επιπροσθέτως θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $h_0, h_1 ... h_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = h_0 < h_1 < ... < h_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, ... m\}$ καθώς και ένα αυθαίρετο $C \in \sigma(\square)$. Το Λήμμα 4.3.1 και η προηγούμενη ισότητα μας δίνουν

$$\begin{aligned}
& \int_C \chi_{\cap_{j=1}^m \{\mathbf{K}_{t,h_j} - \mathbf{K}_{t,h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= \int_\Omega \chi_{\cap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_{t+h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap C} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= P_{t,\mathbf{n}} \left[ \bigcap_{j=1}^m \left[ \{\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_{t+h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap C \right] \right. \\
&= \frac{P\left[ \bigcap_{j=1}^m \left[ \{\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_{t+h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\} \cap C \right] \right.}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega \chi_C \left( \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\square(h_j - h_{j-1})} \frac{\square(h_j - h_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} \right) e^{-\mathbf{1}'\square t} \frac{(\square t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \int_\Omega \chi_C \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\square(h_j - h_{j-1})} \frac{(\square(h_j - h_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= \int_C \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\square(h_j - h_{j-1})} \frac{(\square(h_j - h_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} dP_{t,\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$P_{t,\mathbf{n}}\left(\bigcap\{\mathbf{K}_{t,h_j}-\mathbf{K}_{t,h_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\square\}\right)=\prod_{j=1}^{m}e^{-\mathbf{1}'\square(h_j-h_{j-1})}\frac{(\square(h_j-h_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}dP_{t,\mathbf{n}}$$

και ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

Ως εκ τούτου, η εισαγωγή της παραμέτρου στο μοντέλο της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασιάς *Poisson* δεν αλλάζει η σταθερότητα του μοντέλου στην πάροδο του χρόνου με την έννοια ότι δεν είναι σημαντικό πότε θα αρχίσουμε να παρατηρούμε τη διαδικασία. Ενώ το μοντέλο παραμένει αμετάβλητο η κατανομή αλλάζει φυσικά. Έτσι, το επόμενο θεώρημα ασχολείται με την δεσμευμένη κατανομή της παραμέτρου σε σχέση με τη διαδικασία σε κάποιο χρόνο $t$.

**Θεώρημα 6.3.3.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία* *Poisson* *με παράμετρο* $\square$ *. Τότε*

$$P_{\square|\mathbf{N}_t}(B)=\frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t}dP_{\square}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t}dP_{\square}(\theta)}$$

*για κάθε* $t>0$ *και* $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $t>0$ και $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$. Από το Λήμμα 6.3.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{\square\in B\}\cap\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}) &= \int_\Omega P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}\cap\{\Theta\in B\}|\square]dP\\
&= \int_\Omega E_P[\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}}\chi_{\{\Theta\in B\}}|\square]dP\\
&= \int_\Omega \chi_{\{\Theta\in B\}}E_P[\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}}|\square]dP\\
&= \int_{\square^{-1}(B)} P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}|\square\}]dP\\
&= \int_{\square^{-1}(B)} e^{-\mathbf{1}'\square\mathbf{t}}\frac{(\square\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dP\\
&= \int_B e^{-\mathbf{1}'\theta\mathbf{t}}\frac{(\theta\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}P_{\square}(d\theta),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του [2] Θεωρήματος 2.4.6.

Ως εκ τούτου έχουμε

$$
\begin{aligned}
P_{\square|\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}[B] &= P[\{\square \in B\}|\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \\
&= \frac{P[\{\square \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N}_t = n]} \\
&= \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}(\theta t)^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!P_{\square}(d\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}(\theta t)^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!P_{\square}(d\theta)}.
\end{aligned}
$$

Επομένως έχουμε

$$
\begin{aligned}
P_{\square|\mathbf{N}_t}(B) &= P_{\square|\mathbf{N}_t}[B|\mathbb{N}_0^k] \\
&= P[\{\square \in B\}|\{\mathbf{N}_t \in \mathbb{N}_0^k\}] \\
&= \frac{P[\{\square \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t \in \mathbb{N}_0^k\}]}{P[\{\mathbf{N}_t \in \mathbb{N}_0^k\}]} \\
&= \frac{P[\biguplus_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k}\{\square \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{P[\biguplus_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k}\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P[\{\square \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{P(\Omega)} \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P[\{\square \in B\}|\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{1} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P_{\square|\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}[B]E_P[\chi_{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P_{\square|\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}[B]\chi_{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{n}} dP_{\square}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{n}} dP_{\square}(\theta)}\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\square}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\square}(\theta)}\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}} \\
&= \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\square}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\square}(\theta)}.
\end{aligned}
$$

Επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

# Παράρτημα Α΄

# Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

## Α΄.1 Ορισμοί και χρήσιμα αποτελέσματα

**Η χαρακτηριστική συνάρτηση** ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής $Q$ ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή $Q$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση $\varphi_Q$.

**Η ροπογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής $Q$ ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $Q$ είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρο από το μηδέν, τότε η $Q$ έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής $Q$ ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

A12

Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.π. $(\Omega, \Sigma, P)$. Μία συνάρτηση $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία) **ή** $\Sigma$-**μετρήσιμη** αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $X^{-1}(B) \in \Sigma$.
Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** για συντομία ($\sigma.\kappa.\pi.$) αν είναι , αύξουσα, δεξιά συνεχής, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
Για μια τ.μ. $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι πιθανότητα και ονομάζεται **κατανομή (πιθανότητας)** της τ.μ. $X$. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η $P_X$ ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution). Η $P_X$ (αντ. η τ.μ. $X$) παράγει την $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ της τ.μ. $X$, που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η $F_X$ είναι πράγματι $\sigma.\kappa.\pi.$ (βλ. π.χ. [2], Πρόταση 1.4.9). Η $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X$ μίας τ.μ. $X$ ικανοποιεί την σχέση

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B), \forall B \in \mathfrak{B} \tag{A'.1}$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι το μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την $F_X$ ( βλ. π.χ. [?], Πρόταση 1.4.10 για τον ορισμό του μέτρου Lebesgue-Stieltjes και για την απόδειξη της (A'.1) ).
Μια $\sigma.\kappa.\pi.$ $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (αντ. μια τ.μ. $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ με $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X = F$) ονομάζεται:
• **Διακριτή**, αν αυτή (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ της ) είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \mapsto \mathbb{R}_+$. Η $f$ ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** ($\sigma.\pi.$) της $F$ (αντ. της ).
• **Συνεχής**, αν η $F$ (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X$ της ) είναι συνεχής συνάρτηση.
•**Απόλυτα Συνεχής**, αν αυτή (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X$ της ) είναι της μορφής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ .
Η $f$ ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ($\sigma.\pi.\pi.$) της $F$ (αντ. της $X$). Προφανώς, αν η τ.μ. $X$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας ((συνεχής τ.μ.)) θα εννοούμε ((απόλυτα συνεχής τ.μ.)). A13
Για μια τ.μ. $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

(εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται η **μέση τιμή** ή η **αναμενόμενη τιμή** ή η **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. $X$. Ειδικά αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ένας αριθμός.
Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}), \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \quad \text{και για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \mapsto \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ. [?], Παρατήρηση 3.2.5(b). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.
Οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της $\Sigma$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων $\sigma$-υποαλγεβρών της** $\Sigma$ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

## Α΄.2 Θεώρημα Μονότονης Κλάσης

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζουμε δύο θεωρήματα για $\sigma$-άλγεβρες. Τα θεωρήματα αυτά (ιδιαιτέρως το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης) είναι μέρος της βασικής τεχνικής αποδείξεων των Μετροθεωρητικών Πιθανοτήτων και έχουν πολλές και μεγάλου φάσματος εφαρμογές. A21

Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\Omega$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) **(Dyn1)** $\Omega \in \mathcal{D}$

**(Dyn2)** $B \setminus A \in \mathcal{D}$, για $A, B \in \mathcal{D}$ και $\subseteq$

**(Dyn3)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

**(Dyn2)** $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, για κάθε $A \in \mathcal{D}$

**(Dyn3)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [18] (Λήμμα $B'$.1.)
Εάν ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες *(i)* ή *(ii)* του Λήμματος Α΄.2 τότε λέγεται **κλάση Dynkin** υποσυνόλων του $\Omega$.

**(Μονότονης Κλάσης:)** Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του $\Omega$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βλ. [18]
Η ονομασία κλάση Dynkin ή σύστημα Dynkin έχει προταθεί από τον H. Bauer (βλ. [4]) προς τιμή του E.B. Dynkin (1924 - ), ο οποίος χρησιμοποιεί αυτή την έννοια με την ονομασία λ-σύστημα στο βιβλίο του για στοχαστικές διαδικασίες (1959). Αυτά τα συστήματα συνόλων είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον W. Sierpinski (βλ. [24] σελ. 710-714).

# Παράρτημα Β΄

# Χρήσιμες κατανομές

Παρακάτω, παραθέτουμε τις κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στη παρούσα εργασία. Ορίζουμε μια κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$ δίνοντας απλώς την αντίστοιχη σ.(π.)π. όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1.

(i) **Κατανομή Poisson** $(P_X = \mathbf{P}(\theta))$

- $f_X(x) = e^{-\theta}(\theta^x/x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$ με $\theta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = Var[X] = \theta$.

(ii) **Εκθετική Κατανομή** $(P_X = \mathbf{P}(\beta))$

- $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\beta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = 1/\beta, Var[X] = 1/\beta^2$.

(iii) **Κατανομή Γάμμα** $(P_X = \mathbf{P}(\alpha, \beta))$

- $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\alpha, \beta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = \alpha/\beta, Var[X] = \alpha/\beta^2$.

# Βιβλιογραφία


[1] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006) : *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική εργασία.

[2] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006) : *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*.

[3] Bates, G.E. and Neyman, J. (1952) *Contribution to the theory of accident proneness, I :An optimistic model of the correlation between light and severe accidents. In: University of California Publications in Statistics, University of California Press*, Vol.1, pp.215-254.

[4] Bauer, H. (1992): *Mass und Integrationstheorie*,Berlin-New York: W. de Gruyter und Co. 1990,2. Aull 1992

[5] Billingsley, P. (1995) : *Harmonic Analysis on Semigroups.New York: Wiley* .

[6] Berg,Ch.,Christensen,J.P.R. and Ressel,P.(1984) : *Probability and Measure .New York:Springer*.

[7] Consael, R.(1952) : *Sur les processus composes de Poisson a deux variables aleatoires.* , Academie Royale de Belgique.Mem.Cl.Sci.,fase 6,t27 .

[8] Dieudonne, J. (1971): *Grundzuge der modernen Analysis. Berlin* :Deutscher Verlag der Wissenschaften

[9] Ferrari, Letac and Tourneret (2004) *Multivariate Mixed Poisson Distributions*. Proceeding of the 12th Conf.On Sign. Proc.(Vienna), 1067-1070

[10] Grandell, J. (1976): *Doubly Stochastic Poisson Processes Berlin*: Springer

[11] Grandell, J. (1997): *Mixed Poisson Processes. London*: Chapman Hall

[12] Heuser,H.(2003b): *Lehrbuch der Analysis Teil 2. Stuttgart*: Teubner

[13] Hofmann,M.(1955): *Uder zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung.*: Mitt. SVVM 55, 499-575

[14] Huang W.J. (1990) : *On the Characterization of Point Processes with the Exchangeable and Markov Properties*, Sankhya, Volume 52, Series A, Pt. 1, pp. 16-27 .

[15] Kallenberg, O. (2002): *Foundations of Modern Probability Berlin*: Springer

[16] Lemaire, J. (1995): *Foundations of Modern Probability Berlin*: Springer

[17] Lyberopoulos D.P., Macheras N.D. and Tzaninis S.M. (2015): *On the equivalence of various definitions of mixed Poisson processes* preprint 2015

[18] Macheras N.D. and Tzaninis S.M.(2014): *Some characterizations for Markov processes as mixed renewal processes* preprint 2014

[19] Partrat, C. (1994): *Compound Model for Two Dependent Kinds of Claims*.Insurance: Mathematics and Economics 15, 219-231

[20] Picard, P. (1976): *Generalisation de l'etude sur la survenance des sinistres en assurance automobile*. Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Francais 296, 204-268

[21] Schmidt, K.D. (1996): *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart (1996).

[22] Schmidt,K.D and Zocher,M. (2003): *Claim Number Processes having the Multinomial Property*. Dresdener Schriften zur Versicherungsmathematik 1/2003

[23] Schmidt,K.D and Zocher,M. (2005): *Loss reserving and Hofmann Distributions*. preprint

[24] W. Sierpinski: *Euvres choisis,Tome II*, Warszawa, PWN-Editions Scientifiques de Palague (1975)

[25] Teicher, H. (1961): *Identifiability of mixtures*. Annals of Mathematical Statistics 32,244-248

[26] Walhin, J.F. and Paris J. (2001): *The Mixed Bivariate Hofmann Distribution*. ASTIN Bulletin 31,123-138

[27] Willmot,G.E. and Sundt B. (1989): *On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Processes*. Scandinavian Actuarial Journal, 139-146

[28] Zocher, M. (2005): *Statistik fur bivariate gemischte Poisson-Prozesse am Beispiel der Kraftfahrthaftpflichtvericherung*. to appear in: Allgemeines Statistisches Archiv

[29] Zocher Mathias (2005): *Multivariate Mixed Poisson Processes*

# Ευρετήριο Όρων

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. $1^{\eta}$/26.09.13 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων),

- Επίκουρος Καθηγητής Δημήτριος Στέγγος,

- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Ψαρράκος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

*Στη μνήμη του πατέρα μου, Γεωργίου.*
*Στη μητέρα μου, Αλεξάνδρα.*

# Ευχαριστίες

Κατάρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα για την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά, Αναπληρωτή Καθηγητή, για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Δημήτριο Στέγγο, Επίκουρο Καθηγητή και κύριο Γεώργιο Ψαρράκο , Επίκουρο Καθηγητή, για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

# Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία μελετούμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια κατανομή μίξης και τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα. Αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητες των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μια κατανομή μίξης, όπως η πολυωνυμική και η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα αποτέλεσμα, που αναφέρει ότι οι συντεταγμένες μίας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η κατανομή μίξης παριστάνεται ως ένα μέτρο γινόμενο. Επίσησδίνονται κάποιοι χαρακτηρισμοί για τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια κατανομή μίξης μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας, της διωνυμικής ιδιότητας και της ιδιότητας Markov. Τέλος αποδεικνύεται ότι η κλάση των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα είναι υπόκλαση εκείνης των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μία κατανομή μίξης. Παραμένει ανοιχτό το πρόβλημα της ισότητας των δύο κλάσεων.

# Abstract

In this thesis we study the multivariate mixed Poisson processes with arbitrary mixing distribution and the multivariate mixed Poisson processes with parameter a random vector. Some properties of multivariate mixed Poisson processes, such as the multinomial and the Markov property, are derived. The use of multivariate setting is justified by a result, which asserts that the coordinates of a multivariate mixed Poisson process are independent, if and only if the mixing distribution is represented as a product measure. Moreover some characterizations for multivariate mixed Poisson processes, in terms of the multinomial and the Markov property are given. Finally, it is proven that the class of all multivariate mixed Poisson processes with parameter a random vector is subclass of the class of all multivariate mixed Poisson processes with a mixing distribution. The problem of the equality of the two classes remains open.

# Περιεχόμενα

# Κατάλογος Συντομογραφιών

**μ.χ.**: μετρήσιμος χώρος

**χ.μ.**: χώρος μέτρου

**χ.π.**: χώρος πιθανότητας

$\sigma$.**μ.μ.**: σύνολο μηδενικού μέτρου

$\sigma$.**β.**: σχεδόν βέβαια

**τ.μ.**: τυχαία μεταβλητή

$\sigma$.**κ.**: συνάρτηση κατανομής

$\sigma$.**π.**: συνάρτηση πιθανότητας

$\sigma$.**π.π.**: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$\sigma$.**δ.**: στοχαστική διαδικασία

$\mathbf{Exp}(\theta)$: εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta$

$\mathbf{Ga}(n, \theta)$: γάμμα κατανομή με παραμέτρους $n$ και $\theta$

MPP: μικτή διαδικασία Poisson

MRP: μικτή ανανεωτική στοχαστική διαδικασία

**δ.μ.τ.**: δεσμευμένη μέση τιμή

# Εισαγωγή

Οι μονομεταβλητές μικτές κατανομές Poisson και οι μονομεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια κατανομή μίξης χρησιμοποιούνται ευρέως για την μοντελοποίηση της εμφάνισης σπάνιων γεγονότων. Αυτό χρονολογείται από τη δεκαετία του 20 του προηγούμενου αιώνα. Από τότε έχει δημοσιευθεί ένα μεγάλο πλήθος εργασιών βασισμένων σε αυστηρή θεμελίωση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και με εφαρμογές σε πληθώρα επιστημονικών τομέων.

Η καθιέρωση της χρήσης των πολυμεταβλητών μικτών κατανομών Poisson και των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μια παράμετρο μίξης πραγματοποιήθηκε στο ίδιο σχεδόν χρονικό διάστημα, με την συμβολή των Bates, Neyman [4] (1952), Consael [8] (1952), και Hofmann [14] (1955).

Αλλά σε αντίθεση με την μονομεταβλητή περίπτωση ο αριθμός των δημοσιεύσεων των πολυμεταβλητών μικτών κατανομών Poisson είναι σχετικά μικρός. Παρ΄ όλα αυτά, διάφοροι τομείς καλύπτονται από το έργο που έχει δημοσιευθεί μέχρι σήμερα, όπως τα εναέρια ατυχήματα Bates and Neyman [4] (1952), τα εργατικά και μη εργατικά ατυχήματα Hofmann [14] (1955), οι ασφάλειες αυτοκινήτου Picard [21] (1976), Partrat [20] (1994), Lemaire [17] (1995) , Walhin and Paris [27] (2001), Zocher [29] (2005), οι τυφώνες Partrat [20] (1994), η ανίχνευση εικόνας στην αστροφυσικής Ferrari, Letac and Tourneret [10] (2004), και η απώλεια αποθεματικών Schmidt και Zocher [24] (2005).

Εφόσον το θεωρητικό υπόβαθρο δεν έχει ακόμη αναπτυχθεί στον ίδιο βαθμό όπως στην μονομεταβλητή περίπτωση, υπάρχει ένα χάσμα μεταξύ των επιθυμητών πρακτικών εφαρμογών και των διαθέσιμων θεωρητικών αποτελεσμάτων. Η βάση αυτής της μελέτης είναι η πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία. Το μοντέλο της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας καθορίζεται από διαφορετικές υποθέσεις που οδηγούν σε διαφορετικά μοντέλα πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson,οι οποίες, ωστόσο, συνδέονται μεταξύ τους.

Ξεκινώντας με το πιο γενικό μοντέλο και εξειδικεύοντας βήμα προς βήμα, αυτή η εργασία είναι οργανωμένη ως εξής: Στο Κεφάλαιο 1 παραθέτουμε κάποιες βασικές έννοιες και ορισμούς. Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε μια επισκόπηση στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου όπου αρχικά παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των σ. δ. άφιξης απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων, (βλ. Ενότητες 2.1 και 2.2 αντίστοιχα). Στην Ενότητα 2.3

αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα της $\sigma.\delta.$ Poisson, στην Ενότητα 2.4 αναφερόμαστε στις σύνθετες κατανομές και ολοκληρώνουμε το 2ο Κεφάλαιο με μια αναφορά στη μικτή $\sigma.\delta.$ Poisson (βλ. Ενότητα 2.5).

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται κάποιοι ορισμοί και αποδεικνύονται αποτελέσματα βοηθητικού χαρακτήρα, σχετικά με τις πολυμεταβλητές απαριθμήτριες κατανομές που χρειάζονται για τα επόμενα κεφάλαια. Στην Ενότητα 3.1 μελετούνται οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις, στην Ενότητα 3.2 οι ροπογεννήτριες, και στην Ενότητα 3.3 το Θεώρημα Bernstein-Widder.

Οι πολυμεταβλητές σημειακές διαδικασίες είναι το θέμα του Κεφαλαίου 4. Αρχικά εισάγονται αυτές οι διαδικασίες (Ενότητα 4.1) και στη συνέχεια αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητες τις οποίες έχουν οι απαριθμήτριες κατανομές και οι οποίες σχετίζονται με τις μικτές κατανομές Poisson (Ενότητα 4.2). Οι συσχετισμοί μεταξύ τέτοιων ιδιοτήτων, όπως για παράδειγμα των στάσιμων προσαυξήσεων, της πολυωνυμικής ιδιότητας, και της ιδιότητας Markov, επίσης μελετούνται με κάθε λεπτομέρεια.

Το Κεφάλαιο 5 είναι αφιερωμένο στις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια αυθαίρετη κατανομή μίξης. Και πάλι αποδεικύονται κάποιες ιδιότητες αυτών των διαδικασιών (Ενότητα 5.1). Το γινόμενο πιθανοτήτων Poisson μέσα στα ολοκληρώματα προκαλεί την ερώτηση της ανεξάρτησίας των συντεταγμένων μιας πολυμεταβλητής μικτής $\sigma.\delta.$ Poisson. Μια απάντηση δίνεται στο Θεώρημα 5.1.5, σύμφωνα με το οποίο οι συντεταγμένες μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson είναι ανεξάρτητες, αν και μόνο αν η κατανομή μίξης παριστάνεται ως ενα μέτρο γινόμενο. Επιπλέον, οι πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson χαρακτηρίζονται ως πολυμεταβλητές απαριθμήτριες διαδικασίες που έχουν την πολυωνυμική ιδιότητα (Θεώρημα 5.2.3). Μετά το αποτέλεσμα αυτό αποδείκνυεται ότι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία με την έννοια ότι οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες και κάθε συντεταγμένη είναι μια μονομεταβλητή $\sigma.\delta.$ Poisson (Θεώρημα 5.2.7). Οι ιδιότητες της δομής των ροπών πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson δίνονται στην Ενότητα 5.3.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να μοντελοποιήσουμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson εντός της κατηγορίας των πολυμεταβλητών απαριθμητριών διαδικασιών είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός τυχαίου διανύσματος επάνω στον ίδιο χώρο πιθανότητας και να εξετάσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες της διαδικασίας ως προς αυτό το τυχαίο διάνυσμα, έτσι ώστε η διαδικασία να παραμένει μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson. Αυτή η ιδέα μοντελοποίησης οδηγεί στις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με μια τυχαία παράμετρο, οι οποίες μελετούνται στο Κεφάλαιο 6, και για τις οποίες η κατανομή μίξης προέρχεται από ένα τυχαίο διάνυσμα. Για τις κατανομές μίξης που προέρχονται από ένα τυχαίο διάνυσμα, πετυχαίνονται απλούστερες παραστάσεις κάποιων αποτελεσμάτων, ενώ η χρήση των δεσμευμένων πιθανοτήτων γεννά νέα ερωτήματα. Με παρόμοια μεθοδολογία όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετούνται κάποιες βασικές ιδιότητες (Ενότητα 6.1) και η δομή των ροπών πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα (Ενότητα 6.2). Εξαιτίας της πρόσθετης υπόθεσης, ένας χαρακτηρισμός ανάλογος με εκείνον της Ενότητας 5.2 δεν είναι δυνατός. Αφού το μοντέλο στο Κεφάλαιο 6 απαιτεί την ύπαρξη μιας τυχαίας παραμέτρου, οι posterior κατανομές της παραμέτρου ως προς τη διαδικασία, μελετώνται στην Ενότητα 6.3.

Σε όλη την εργασία εξετάζονται για κάθε ιδιότητα το πρόβλημα της διατήρησης αυτής της ιδιότητας κατά την μετάβαση από την αρχική πολυμεταβλητή $\sigma$.δ. σε διαδικασίες που προκύπουν με συγκεκριμένους γραμμικούς μετασχηματισμούς, π.χ.οι συντεταγμένες και το άθροισμα όλων των συντεταγμένων μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson είναι πάλι μικτές διαδικασίες Poisson. Επιπλέον, δείχνεται με την βοήθεια της σταδιακής (incremental) $\sigma$.δ., οτι όλα τα μοντέλα που θεωρούμε είναι κατα κάποιον τρόπο ευσταθή (*stable*) ως προς τον χρόνο. Έτσι, για να είμαστε σε θέση να δεχθούμε ένα από αυτά τα μοντέλα δεν ειναι σημαντικό να γνωρίζουμε πότε αρχίζει η διαδικασία, πράγμα το οποίο έχει ένα σημαντικό θετικό αντίκτυπο σε πιθανές εφαρμογές. Πρέπει επίσης να αναφερθεί, οτι οι δημοσιεύσεις που αφορούν στην μονομεταβλητή περίπτωση, όπως π.χ. η [22] και η [12] για να αναφερθούμε μόνο δυο από αυτές, επίσης δίνουν σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων, ερωτήματα προς απάντηση και ιδέες για κάποιες αποδείξεις για την πολυμεταβλητή περίπτωση. Αυτή η επιρροή δεν προσφέρεται για όλα τα προβήματα, αλλά κάθε φορά που οι ιδέες της μονομεταβλητής περίπτωσης είναι ουσιώδεις για την πολυμεταβλητή περίπτωση, δίνονται οι καταλληλες αναφορές της βιβλιογραφίας.

# Κεφάλαιο 1

# Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών , με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.

Έστω $\Omega$ σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με $A^c$ ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** $A$ (σε σχέση με το $\Omega$), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ $(I \neq \varnothing)$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\Omega$. Τα στοιχεία μίας $\sigma$-άλγεβρας $\Sigma$ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \Sigma$ με $\chi_A$ συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) $A$. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathcal{G}$ του $\Omega$. **Η ελάχιστη $\sigma$-άλγεβρα** υποσυνόλων του $\Omega$ που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **$\sigma$-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$ , ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μία $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του $\Omega$ για την οποία ισχύει $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathfrak{B}$ και $\mathfrak{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $(\alpha, \beta)$, αντίστοιχα, ενώ με $\mathfrak{B}_n$ συμβολίζουμε την $Borel - \sigma -$άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ για την $n \in \mathbb{N}$.

Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. $(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** $(\sigma.\mu.\mu.)$ ή **σύνολο $\mu$-μηδενικού μέτρου** $(\mu - \sigma.\mu.\mu.)$ ή **$\mu$-μηδενικό σύνολο** αν και μόνο αν $\mu(N) = 0$. Το σύνολο όλων των $\mu - \sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με $\Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο $P$) αν $\int |f| dP < \infty$.

Με $\mathcal{L}^1(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_+(P)$) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P-\sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f:\Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται αντίστοιχα το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** – δηλαδή όλων των τ.μ. $f:\Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\int f^2 dP < \infty$ – **συναρτήσεων**.

Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας «συνεχής τ.μ.» θα εννοούμε «απόλυτα συνεχής τ.μ.».

Ακόμη, θα λέμε ότι η τ.μ. $X$ με σύνολο τιμών $R_X$ **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, όπου $m \in \mathbb{N}$ , και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X}\nu(dx) = \int_{B\cap R_X} f_X(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $f_X$ η αντίστοιχη $\sigma.(\pi.)\pi.$, και $\nu$ είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue $\lambda$ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. $X$ είναι συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. $X$ είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το $R_X$ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Έστω $(\Omega, \Sigma, \mu)$ και $(\Theta, T, \nu)$ χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του** $\Omega \times \Theta$**)** , αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται $\sigma$**-άλγεβρα γινόμενο** των $\Sigma$ και $T$ και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο $\rho$ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** $\mu$ **και** $\nu$ και συμβολίζεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Εαν $I$ είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών και $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π.-γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := \left(\prod_{i\in J}\Omega_i, \otimes_{i\in J}\Sigma_i, \otimes_{i\in J}P_i\right)$. Αν $(\Omega, \Sigma, P)$ είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με $P^I$ την πιθανότητα-γινόμενο στον $\Omega^I$ και με $\Sigma^I$ το πεδίο ορισμού της $P^I$.

Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X:\Omega \longmapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια $\sigma$-άλγεβρα στο $\Omega$ που ονομάζεται η $\sigma$**-άλγεβρα στο** $\Omega$ **η παραγόμενη από την** $X$ και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου $I$ σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\left(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\right).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η $\sigma$-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$.

Για κάθε $B \in \Sigma$ ώστε $P(B) > 0$ και για κάθε τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα της $X$ ως προς την δεσμευμένη πιθανότητα $P_B$ συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και εφόσον υπάρχει στο $\bar{\mathbb{R}}$ ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή** (δ.μ.τ. για συντομία) της τ.μ. $X$ δοθέντος του $B$. Αν $X = \chi_A$ με $A \in \Sigma$ τότε εύκολα προκύπτει οτι $\mathbb{E}[X_A|B] = P_B(A)$.

Έστω μια τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και μια τ.μ. $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Μια **δεσμευμένη μέση τιμή της $X$ δεδομένης της $Y$** είναι μια τ.μ. $\mathbb{E}[X|Y] : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$(i)$ Η $\mathbb{E}[X|Y]$ είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη συνάρτηση,

$(ii)$ $\int_A \mathbb{E}[X|Y]dP = \int_A XdP \qquad \forall A \in \sigma(Y)$.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και T μια $\sigma$ -υποάλγεβρα της $\Sigma$. Μια **δεσμευμένη μέση τιμή της $X$ δοσμένης της $\sigma$ -υποάλγεβρας $T$** είναι μια τ.μ. $\mathbb{E}[X|Y] : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$(i)$ Η $\mathbb{E}[X|T]$ να είναι $T$-μετρήσιμη συνάρτηση,

$(ii)$ $\int_A \mathbb{E}[X|T]dP = \int_A XdP \qquad \forall A \in T$.

Η $\mathbb{E}[X|T]$ δεν είναι μοναδική, αλλά είναι μοναδική $P|T$-ς.β., δηλαδή αν η $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια δ.μ.τ. της $X$ δεδομένης της $T$, τότε $Z = \mathbb{E}[X|T] \qquad P|T - \sigma.\beta$. Η $\mathbb{E}[X|T]$ είναι μια εκδοχή $(version)$ της δ.μ.τ. της $X$ δοσμένης της $T$, και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|T]$ ή αλλιώς $\mathbb{E}[X|T]$. Για $X := \chi_B \in \mathcal{L}^1(P)$ με $B \in \Sigma$ θέτουμε

$$P[B|T] := \mathbb{E}_P[X\chi_B|T].$$

Η έννοια της δ.μ.τ. μιας τ.μ. $X$ δοσμένης μιας $\sigma$-υποέλγεβρας της $\Sigma$ επεκτείνει την έννοια της δ.μ.τ. της $X$ δοσμένης μιας τ.μ. $Y$ υπο την έννοια οτι $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$.

Οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της $\Sigma$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων $\sigma$-υποαλγεβρών της** $\Sigma$ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

Μία οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται $P$-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** της $\sigma$-υποάλγεβρας $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

$\forall j \leq n \ \ \forall E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του $I$.

Μία οικογένεια $\Sigma$-$T$-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{X_i\}_{i\in I}$ από τον $\Omega$ στον $\Upsilon$ είναι:

• $P$-**υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στην $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ , αν η οικογένεια $\sigma\left(\{X_i\}\right)_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$,και

• $P$-**υπό συνθήκη ισόνομη** επάνω στην $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ αν,

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P(F \cap X_j^{-1}(B)),$$

για $i, j \in I$ , $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$.

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και $\sigma$-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της $\Sigma$ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι $P, Q$ είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B - y) dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των $P, Q$. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την $n$-**οστη συνέλιξη** της $P$, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου $P^{*0}$ (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο $\sigma$.κ.π. $F, G$ ή δύο $\sigma$.(π.)π. $f, g$. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0 + \cdots + X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου $I$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [3], Ορισμός 1.19), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται $\sigma$.**δ.** ($\sigma$.δ.) ή **στοχαστική ανέλιξη.** Επί πλέον, αν το $I$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια $\sigma$.**δ. συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια $\sigma$.**δ. διακριτού χρόνου**.

Μια $\sigma$.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:

• μια $\sigma$.**δ. ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

• μια $\sigma$.**δ. στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι για την υπόλοιπη εργασία κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε έναν σταθερό χ.π. $(\Omega, \Sigma, P)$.

# Κεφάλαιο 2

# Επισκόπηση Κάποιων Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι μία σύντομη αναφορά σε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Έτσι, αρχικά σκιαγραφούμε ένα υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, θέτοντας το γενικό πλαίσιο αναφοράς του παρόντος κεφαλαίου (βλ. Ενότητα 2.1). Έπειτα, προχωράμε στην επισκόπιση κάποιων ιδιοτήτων των $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Ενότητες 2.2 και 2.3, αντίστοιχα). Τέλος αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson(βλ. Ενότητα 2.4), που αποτελεί την βάση για την κατανόηση τόσο της μικτής διαδικασίας Poisson όσο και των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών.

## 2.1 Το Υπόδειγμα

Για την ανάπτυξη ενός υποδείγματος που θα μοντελοποιεί το χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, αναφέρουμε αρχικά τις ακόλουθες έννοιες,

- την $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων (*claim arrival process*),

- την $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων (*claim number process*), και,

- την $\sigma.\delta.$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων (*claim interarrival process*).

Θα δούμε ότι και οι τρείς στοχαστικές διαδικασίες σχετίζονται μεταξύ τους και μάλιστα γνωρίζοντας την μία μπορούμε να καθορίσουμε τις υπόλοιπες.

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που ασφαλίζονται από κάποια ασφαλιστική εταιρεία. Οι ασφαλισμένοι πληρώνουν ασφάλιστρα έναντι των κινδύνων που αντιμετωπίζουν και οι οποίοι αν παραγματοποιηθούν προξενούν απαιτήσεις έναντι της εταιρίας, η οποία με τη σειρά της καλείται να τις εξοφλήσει . Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να αποτελείται από έναν και μοναδικό ή περισσότερους κινδύνους.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι απαιτήσεις λαμβάνουν χώρα τυχαία και σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα ξεκινώντας στο χρόνο μηδέν, έτσι ώστε

- καμιά απαίτηση να μην λαμβάνει χώρα στο χρόνο μηδέν, και

- να μην συμβαίνουν δύο (ή περισσότερες) απαιτήσεις, ταυτόχρονα.

Η υπόθεση της μη ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο (ή περισσότερων) απαιτήσεων φαίνεται ότι μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, δεν πρέπει να παρουσιάζεται κάποιο σημαντικό πρόβλημα όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μικρό. Όμως, όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο, εξαρτάται από το είδος της υπό εξέταση ασφάλισης για το αν αυτή η υπόθεση είναι πράγματι αποδεκτή ,π.χ δύο ασφαλισμένοι από το ίδιο χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αυτοκινήτων να εμπλακούν σε ένα δυστύχημα μεταξύ τους και να υπάρχει μερική ευθύνη και από τους δύο.

Πάντως, η υπόθεση της μη ταυτόχρονης εμφάνισης δύο απαιτήσεων ακόμα κι όταν κρίνεται ως μη αποδεκτή, μπορεί να διατηρηθεί, αλλάζοντας ελαφρώς την οπτική μας, δηλαδή, με το να θεωρήσουμε τα γεγονότα (που προκαλούν την έγερση) απαίτησης (όπως αυτοκινητιστικά δυστυχήματα) αντί των ατομικών απαιτήσεων. Ο αριθμός των ατομικών απαιτήσεων που εγείρονται για ένα συγκεκριμένο γεγονός απαίτησης μπορεί τότε να ερμηνευτεί ως το μέγεθος του γεγονότος απαίτησης.

Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου μοντελοποιούμε τις προηγούμενες ιδέες σε ένα *πιθανοθεωρητικό* υπόδειγμα.

## 2.2 Η Σ.Δ. άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε τόσο την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων όσο και την $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και παραθέτουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

**Ορισμός 2.2.1.** Η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τ.μ. είναι μια **$\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων** αν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ να ισχούν τα εξής:

**($\mathbf{t_1}$)** $T_0(\omega) = 0$, και

**($\mathbf{t_2}$)** $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \geq 1$.

Επιπλέον, το $P$-μηδενικό σύνολο $\Omega_T$ ονομάζεται το **$P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. $T_n$ είναι θετική κάτι που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

**Ορισμός 2.2.2.** Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων . Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι η **$\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων**

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς άμεσα έπεται για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι η τ.μ. $W_n$ είναι θετική, καθώς και ότι ισχύει η σχέση

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i. \tag{2.1}$$

Ερμηνεύοντας, τώρα, τους Ορισμούς 2.2.2 και 2.2.1 σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην προηγούμενη ενότητα σημειώνουμε τα εξής:

- Η $T_n$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο εμφάνισης της $n$-οστής απαίτησης.
- Η $W_n$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο αναμονής μεταξύ της $(n-1)$-οστής και της $n$-οστής απαίτησης.
- Με πιθανότητα ένα **καμία** απαίτηση δεν εγείρεται στον χρόνο μηδέν και δύο (ή παραπάνω) απαιτήσεις **δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα**.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως οι Ορισμοί 2.2.2 και 2.2.1 βρίσκουν άμεση φυσική ερμηνεία, αφού προφανώς οι χρόνοι άφιξης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων θα είναι θετικοί, ενώ λογικά η απαίτηση $n$ θα εμφανίζεται σε χρόνο μεταγενέστερο αυτού στον οποίο εμφανίζεται η απαίτηση $n-1$.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την αντίστοιχη $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T := \varnothing \in \Sigma$.

Από τον Ορισμό 2.2.1 και την (2.1), είναι προφανές ότι η $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων αλληλοκαθορίζονται. Η σχέση τους γίνεται ξεκάθαρη από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

**Λήμμα 2.2.3.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\{0,1,\dots,n\}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}}\big)$.

*(ii) Για τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{T_n}, \mathbf{W_n} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ με τύπο*

$$\mathbf{T_n}(\omega) := (T_1, \dots, T_n)'(\omega) = (T_1(\omega), \dots, T_n(\omega))'$$

*και*

$$\mathbf{W_n}(\omega) := (W_1, \ldots, W_n)'(\omega) = (W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega))'$$

*για κάθε* $\omega \in \Omega$, *αντίστοιχα, καθώς και για τον* $n \times n$*-πίνακα* $\mathbf{M_n} = [m_{ij}]$ *με*

$$m_{ij} := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j \end{array} \right\}.$$

*έχουμε:*

**(a)** *O* $\mathbf{M_n}$ *είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί την σχέση* $\det(\mathbf{M_n}) = 1$, *και*

**(b)** $\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n}$ *καθώς και* $\mathbf{W_n} = \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.2.3.

Από το (i) έπεται το συμπέρασμα ότι η πληροφορία που είναι διαθέσιμη από την γνώση της $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ίδια με την πληροφορία που προκύπτει από την γνώση της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενώ από το (ii) προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τιμές της μίας μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε και τις τιμές της άλλης μέσω ενός πίνακα.

**Λήμμα 2.2.4.** *Οι κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων του Λήμματος 2.2.3 ικανοποιούν για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τα εξής:*

$$P_{\mathbf{T_n}} = (P_{\mathbf{W_n}})_{\mathbf{M_n}} \quad \text{και} \quad P_{\mathbf{W_n}} = (P_{\mathbf{T_n}})_{\mathbf{M_n^{-1}}}.$$

Στις υποθέσεις που κάναμε για το υπόδειγμα που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 2.1 η πιθανότητα να προκύψουν ταυτόχρονα δύο ή και περισσότερες απαιτήσεις είναι ίση με μηδέν, αυτό όμως δεν αποκλείουν την δυνατότητα πραγματοποίησης απείρως πολλών απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρόνο.

Το ακόλουθο Λήμμα μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση που έχουν οι στοχαστικές διαδικασίες $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Λήμμα 2.2.5.** *Έστω* $\theta \in (0, \infty)$. *Αν η σ.δ.* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*Σε αυτήν την περίπτωση και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $\mathbb{E}[W_n] = 1/\alpha$ *και* $\mathbb{E}[T_n] = n/\alpha$, *και η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [22] Λήμμα 1.2.2.

## 2.3 Η Σ.Δ. του Αριθμού των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και αποδεικνύουμε ότι οι $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη (και κατέπέκταση την $\sigma$.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων). Παραθέτουμε ακόμη δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στο πως συνδέεται η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με την πιθανότητα της έκρηξης . Τέλος, ορίζουμε τις έννοιες της προσαύξησης, των ανεξάρτητων και των στάσιμων προσαυξήσεων για την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

**Ορισμός 2.3.1.** Μία οικογένεια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται $\sigma$.δ. **του αριθμού των απαιτήσεων ή απαριθμήτρια διαδικασία** αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχούν τα εξής:

**(n1)** $N_0(\omega) = 0$,

**(n2)** $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0, \infty)$,

**(n3)** $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

**(n4)** $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

**(n5)** $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Επί πλέον, το $P$-μηδενικό σύνολο $\Omega_N$ ονομάζεται το $P$-**μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Μία $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται από ορισμένους συγγραφείς και *σημειακή διαδικασία*

Θέλοντας να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία στον παραπάνω ορισμό σημειώνουμε τα εξής:

- Η $N_t$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

- $P$-σχεδόν βέβαια όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ξεκινούν από το μηδέν (βλ. **(n1)**), είναι δεξιά συνεχείς (βλ. **(n3)**), αυξάνουν με άλματα μοναδιαίου ύψους στα σημεία ασυνέχειας (βλ. **(n2)** και **(n4)** ), και τείνουν στο άπειρο (βλ. **(n5)**).

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως σε χρόνο μηδέν δεν έχουμε καμία απαίτηση, ενώ με το πέρασμα του χρόνου ο αριθμός των απαιτήσεων αυξάνει. Μάλιστα, όταν αυτό γίνεται στο χρονικό διάστημα $(t, t+\varepsilon)$, η αύξηση δεν είναι μεγαλύτερη της μίας απαίτησης, αφού από τις υπθέσεις του υποδείγματός μας σχεδόν βέβαια δύο ή περισσότερες απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παρούσας ενότητας η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη, μαθηματικά η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται στα δύο ακόλουθα θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.3.2.** *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$ θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega), \tag{2.2}$$

*τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και*

*(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ ισχύει*

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}. \tag{2.3}$$

**Θεώρημα 2.3.3.** *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \in \mathbb{N}_0$ θέσουμε $T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$, τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και*

*(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ ισχύει $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega)$.*

Για την απόδειξη των παραπάνω δύο αποτελεσμάτων βλ. π.χ [1] Θεώρημα 3.3.2 και Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων που παράγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που παράγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,(και άρα και το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων αφού $\Omega_T = \Omega_N$) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$.

Εξαιτίας της παραπάνω υπόθεσης, παίρνουμε δύο απλές, αλλά πολύ χρήσιμες ισότητες, που καταδεικνύουν το ότι ορισμένα ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων μπορούν να ερμηνευτούν (ισοδύναμα) ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων κι αντίστροφα.

**Λήμμα 2.3.4.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

*(ii)* $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \backslash \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ [1] Λήμμα 3.3.4.

Άμεση συνέπεια του (i) του Λήμματος 2.3.4 αποτελεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Λήμμα 2.3.5.** *Ισχύει* $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\big) = \sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Μία πρώτη εφαρμογή του Λήμματος 2.3.4 είναι η σύνδεση του ενδεχομένου της έκρηξης με την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, κάτι που φαίνεται στα παρακάτω δύο αποτελέσματα.

**Λήμμα 2.3.6.** *Για την πιθανότητα της έκρηξης ισχύει*

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\right) = P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\right) = P\left(\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right).$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ [22] Lemma 2.1.4.

**Πόρισμα 2.3.7.** *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ [22] Corollary 2.1.5.

Όπως θα διαπιστώσουμε και στα επόμενα κεφάλαια, η μελέτη της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων θα βασιστεί σε σημαντικό βαθμό στις ιδιότητες των προσαυξήσεών της, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων στο διάστημα $(s,t]$, των στάσιμων αλλά και των ανεξάρτητων προσαυξήσεων. Για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ η **προσαύξηση** της σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s,t]$ ορίζεται από την

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{2.4}$$

Επειδή, μάλιστα, για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $N_0(\omega) = 0$ και $T_n(\omega) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η (2.4) βρίσκεται σε συμφωνία με τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε η τ.μ. $N_t$ στο Θεώρημα 2.3.2. Επί πλέον, για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.5}$$

που ισχύει ακόμα κι αν το $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

## 2.4 Η Διαδικασία Poisson

Στην παρούσα ενότητα ορίζουμε τη διαδικασία Poisson και δίνουμε κάποια αρχικά αποτελέσμα που αφορούν τις κατανομές των στοχαστικών διαδικασιών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,$\{N_t\}_{n\in\mathbb{R}_+}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ορισμός 2.4.1.** Η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (**ομογενής**) **διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\theta \in (0,\infty)$ εάν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις και για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού είναι ότι μία $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν

$$P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$$

για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

**Ορισμός 2.4.2.** Η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson** αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο 1.

**Λήμμα 2.4.3.** *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0,\infty)$.

*Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ *για κάθε* $t \in (0,\infty)$.

Για την απόδειξη βλ π.χ [22] Lemma 2.2.1

Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων των Λημμάτων 2.2.5 και 2.4.3 και δηλώνει ότι αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων είναι (ισόνομα) εκθετικά κατανεμημένοι και ανεξάρτητοι έπεται ότι ο αριθμός των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή Poisson και αντίστροφα.

**Πόρισμα 2.4.4.** *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Αν η $\sigma.\delta.$ $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0,\infty)$.

**Ορισμός 2.4.5.** *Μία οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται* **διύλιση** *αν και μόνο αν για κάθε $j,k\in I$ με $j<k$ ισχύει $\Sigma_j\subseteq\Sigma_k$.*
*Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι* **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** *$\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j\in I$ η τ.μ. $X_j$ είναι $\Sigma_j$-μετρήσιμη.*
*Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j=\sigma\big(\{X_k : k\le j\}\big)$ για κάθε $j\in I$ ονομάζεται* **η κανονική διύλιση για την** *$\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση . Μια σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται* **ένα martingale ως προς τη διύλιση** *$\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή* **ένα** *$\{\Sigma_j\}_{j\in I}$***- martingale** *(ή η οικογένεια $\{(X_j,\Sigma_j)\}_{j\in I}$ ονομάζεται* **ένα martingale***) αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

**($\mathbf{m_1}$)** *Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$.*

**($\mathbf{m_2}$)** *Για κάθε $j\in I$ η $X_j\in\mathcal{L}^1(P)$.*

**($\mathbf{m_3}$)** *Για κάθε $j,k\in I$ με $j\le k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j]=X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta.$.*

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρισμού είναι το πρώτο από μία σειρά θεωρημάτων χαρακτηρισμού που θα ακολουθήσουν στα υπόλοιπα κεφάλαια

**Θεώρημα 2.4.6.** *Έστω $\theta\in(0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η σ.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n}=\mathbf{Exp}\,(\theta)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

*(ii) Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο $\theta$.*

*(iii) Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}\,[N_t]=\theta t$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$.*

*(iv) Η σ.δ $\{N_t-\theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale .*

Για απόδειξη βλ. π.χ. [22] Theorem 2.3.4 .

## 2.5 Η μικτή σ.δ. Poisson

Η επιλογή της κατάλληλης σ.δ. του αριθμού απαιτήσεων που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια γενική μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος. Η βασική ιδέα είναι να ερμηνεύσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνου ως μίγμα ομοιογενών χαρτοφυλακίων κινδύνου. Πιο συσκεκριμένα η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου οριζεται ως μια μίξη σ.δ. αριθμού απαιτήσεων ομοιογενών χαρτοφυλακίων, ώστε η μικτή κατανομή τους να αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου. Αρχικά θα καθορίσουμε το γενικό μοντέλο και στη συνέχεια τη μελέτη της μικτής $\sigma$.δ. Poisson

### Το υπόδειγμα

Έστω οτι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων και $\Theta$ μια τυχαία μεταβλητή. Κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

• Έστω οτι τα ανομοιογενή χαρτοφυλάκια κινδύνου είναι ένα μίγμα από ομοιγενή χαρτοφυλάκια κινδύνου παρόμοια, ίδιου μεγέθους και διαφορετικά μεταξύ τους.

• Έστω οτι κάθε ένα από τα ομοιγενή χαρτοφυλάκια μπορεί να προσδιοριστεί από την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής $\Theta$. Δηλαδή η κατανομή της $\Theta$ παριστά τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου υπό εξέταση. Επομένως οι ιδιότητες της κατανομής της $\sigma$.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του αριθμού των απαιτήσεων, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής της ως προς το $\Theta$ καθώς και από τις ιδιότητες της κατανομης της $\Theta$, η οποία ονομάζεται **δομική παράμετρος**. Η κατανομή της $P_\Theta$ ονομάζεται **δομική κατανομή** ενώ η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ ονομάζεται **μικτή $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων**.

**Ορισμός 2.5.1.** Η μικτή $\sigma$.δ. του αριθμού απαιτήσεων έχει

(a) **Υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το $\Theta$ αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ και $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,2\ldots,m\}}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το $\Theta$.

(b) **Υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το $\Theta$ αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,2\ldots,m\}}$ έχουν την ίδια υπο συνθήκη κατανομή ως προς το $\Theta$, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \qquad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

**Λήμμα 2.5.2.** *Αν μια $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις , τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις .*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. π.χ [22], Lemma 4.1.1.

**Ορισμός 2.5.3.** Η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μικτή $\sigma$.δ. Poisson με παράμετρο** $\Theta$ εαν η $\Theta$ είναι μια τ.μ. για την οποία ισχύει $P_\Theta[(0,\infty)] = 1$ και εαν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ έχει υπο συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$ έτσι ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει η σχέση

$$P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \qquad P|\sigma.(\Theta) - \sigma\beta.$$

για κάθε $t \in (0,\infty) P - MPP(\Theta)$ ή απλώς $MPP(\Theta)$ για συντομία

**Λήμμα 2.5.4.** *Μια στοχαστική διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που έχει υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$ θα έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$ αν και μόνο αν για κάθε $t,h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$P_{N_{t+h}-Nt|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \qquad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

**Απόδειξη**. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε ανάλογα επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης για σ.δ. χωρίς τη δέσμευση ως προς $\Theta$ (βλ. π.χ. [1], Λήμμα Α΄1.3).
**(a)** (ευθύ) Πράγματι, έστω οτι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς $\Theta$. Θεωρούμε $t \in \mathbb{R}_+$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $m \in \mathbb{N}$ . Τότε για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ ισχύει

$$P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta}$$

Για $j = 1$ προκύπτει: $P_{N_{t_1+h}-N_{t_0+h}|\Theta} = P_{N_{t_1}-N_{t_0}|\Theta}$ ή ισοδύναμα $P_{N_{t_1+h}-N_h|\Theta} = P_{N_{t_1}|\Theta}$.

Αν θεσω όπου $t_1$ το $h$ και όπου $h$ το $t_1$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

**(b)** Αντιστρόφως, έστω οτι για κάθε $t,h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta$ θα δείξουμε οτι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις . Πράγματι, έστω οτι $h \in \mathbb{R}_+$ , $m \in \mathbb{N}$ και $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, όπου $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$
Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
• Αν $t_{j-1} + h < t_j$ τότε

$$\begin{aligned}
P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} &= P_{N_{t_j+h}-N_{t_j}+N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j+h}-N_{t_j}|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} \\
&= P_{N_h|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta}.
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}+N_{t_{j-1}+h}-N_{t_{j-1}}|\Theta}$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} * P_{N_h|\Theta} \\
&= P_{N_h|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta}.
\end{aligned}
$$

Επομένως ισχύει οτι

$$P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta}.$$

- Αν $t_{j-1}+h \geq t_j$ έχουμε οτι

$$
\begin{aligned}
P_{N_h|\Theta} &= P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_j}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_{j-1}+h}+N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta}.
\end{aligned}
$$

Επίσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
P_{N_h|\Theta} &= P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}+N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta} * P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} \\
&= P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta}.
\end{aligned}
$$

Απο τις παραπάνω σχέσεις έχουμε οτι

$$P_{N_{t_{j+h}}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta} * P_{N_{t_{j-1}+h}-N_{t_j}|\Theta}.$$

Άρα $P_{N_{t_j+h}-N_{t_{j-1}+h}|\Theta} = P_{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}|\Theta}$, από όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

**Λήμμα 2.5.5.** *Αν η σ.δ.$\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

*και*

$$Var[N_t] = t\mathbb{E}[Var(N_t|\Theta)] + Var[\mathbb{E}(N_t)|\Theta]$$

**Λήμμα 2.5.6.** *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση*

$$P[\{N_t = n\}] > 0$$

*για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in (0,\infty)$ .*

Το επόμενο λήμμα είναι συνέπεια του Λήμματος 2.5.5.

**Λήμμα 2.5.7.** **(Πολυωνυμικό κριτήριο)** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson, τότε ισχύει*

$$P[\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}-N_{t_{i-1}}=k_i\}|\{N_{t_m}=n\}]=\frac{n!}{\prod_{j=1}^{k}k_j!}\prod_{j=1}^{k}(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m})^{k_j}$$

*για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0=t_0<t_1<\ldots<t_m$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $k_1,\ldots,k_m$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{m}k_j=n$*

Για τις αποδείξεις των Λημμάτων 2.5.5, 2.5.6 και 2.5.7 βλ. π.χ. [22], Lemma 4.1.2, Lemma 4.2.1 και Lemma 4.2.2, αντίστοιχα.

**Ορισμός 2.5.8.** *Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται* **σ.δ.** *Markov αν ισχύει η ισότητα*

$$P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}]=P[\{N_{t_{m+1}}=n_{m+1}\}|\{N_{t_m}=n_m\}],$$

*για κάθε $m\in\mathbb{N}$, $t_1<\ldots<t_{m+1}\in(0,\infty)$ και $n_1,\ldots,n_{m+1}\in\mathbb{N}_0$ ώστε $t_1<\ldots<t_{m+1}$ και $P[\cap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}]>0$.*

*Η παραπάνω συνθήκη ονομάζεται* **ιδιότητα Markov** *από την οποία προκύπτει οτι $n_1\leq\ldots\leq n_m$. Επιπλέον αν η σ. δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια σ. δ. Markov , τότε η παραπάνω ισότητα ισχύει για $t_1=0$ ή για $n_j=\infty$ για κάποιο $j\in\{1,\ldots,m\}$.*

**Θεώρημα 2.5.9.** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έιναι μια μικτή σ.δ. Poisson, τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Το επόμενο λήμμα είναι συνέπεια του Λήμματος 2.5.5.

**Λήμμα 2.5.10.** *Αν μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο $\Theta$ τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta]<\infty$, τότε για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[N_t]=t\mathbb{E}[\Theta]$$

*και*

$$Var[N_t]=t\mathbb{E}[\Theta]+t^2Var[\Theta]$$

**Θεώρημα 2.5.11.** *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο $\Theta$ τέτοια ώστε το $\Theta$ να έχει πεπερασμένη μέση τιμή τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

**(a)** *Η κατανομή του* $\Theta$ *είναι εκφυλισμένη .*

**(b)** *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις .*

**(c)** *Η σ.δ.του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια μη ομογενής σ.δ. Poisson.*

**(d)** *Η σ.δ.του αριθμού των απαιτήσεων* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια (ομογενής) σ.δ. Poisson.*

Για την απλοδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. π.χ. [22], Theorem 4.2.6.

# Κεφάλαιο 3

# Πολυμεταβλητές σημειακές κατανομές

## 3.1 Πιθανογεννήτριες

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας, τις οποίες χρειαζόμαστε στην ανάλυση της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson. Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητα ανήκει σε μια κατανομή. Δεδομένου ότι χρειαζόμαστε αυτή τη συνάρτηση σε σχέση με σημειακά τυχαία διανύσματα, καθορίζουμε την γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας από τυχαία διανύσματα. Πριν ορίσουμε την γεννήτρια πιθανοτήτων εισάγουμε έναν συμβολισμό που αφορά τις παραγώγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

$$D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) := \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} f}{\partial t_1^{n(1)} \ldots \partial t_k^{n(k)}}(\mathbf{t})$$

Φυσικά αυτός ο συμβολισμός θα χρησιμοποιείται μόνο όταν οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

Λόγω των γραμμικών μετασχηματισμών, που θα προκύπτουν, θα χρησιμοποιούμε ένα άλλο συμβολισμό για τις παραγώγους. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, με $g(\mathbf{t}) = r(\mathbf{t} - \mathbf{1})$, για $r \in \mathbb{R}_+$.

*Στη συνέχεια, για λόγους σαφήνειας, θα χρησιμοποιούμε* $\frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} f(r(\mathbf{t}-\mathbf{1}))}{\partial^{\mathbf{n}\mathbf{t}}}|_{t=0}$ *αντι του* $D^{\mathbf{n}}(f \circ g)(0)$.

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^k$ ένα τυχαίο διάνυσμα και $g_{\mathbf{X}} : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) := \mathbb{E}[\mathbf{r}^{\mathbf{X}}] = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}]$$

καλείται **πιθανογεννήτρια συνάρτηση του X.** Επομένως η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας είναι μια δυναμοσειρά με $k$ συντεταγμένες.

**Λήμμα 3.1.2.** *Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας $g_{\mathbf{X}}$ ενός τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^k$ Έχει τις εξής ιδιότητες:*

*(i) Η $g_{\mathbf{X}}$ είναι αύξουσα και ισχύει $0 \leq g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) \leq g_{\mathbf{X}}(\mathbf{1}) = 1$ για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ .*

*(ii) η $g_{\mathbf{X}}$ είναι συνεχής στο $[\mathbf{0,1}]$.*

*(iii) $g_{\mathbf{X}}$ είναι απείρως διαφορίσιμη στο $[\mathbf{0,1}]$.*

*(iv) $\forall \mathbf{l} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ και $r$ στο $[\mathbf{0,1}]$ η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας πληροί την παρακάτω σχέση:*

$$D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{l}, \infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}]$$

.

*(v) $\forall \mathbf{l} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ η παράγωγος $D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}$ είναι αύξουσα επάνω στο $[\mathbf{0,1})$ και ισχύει*

$$\sup_{\mathbf{r} \in [\mathbf{0},\mathbf{1})} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{l}, \infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}]$$

.

**Απόδειξη.**

$(i)$ : Είναι προφανές.

$(ii)$ : Για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $m \in \mathbb{N}_0^k$ έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] - \sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}]} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] \Big| &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k} \setminus [\mathbf{0}, \mathbf{m}]} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] \\ &\leq \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k} \setminus [\mathbf{0}, \mathbf{m}]} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] \end{aligned}$$

αφού $\mathbf{r} \leq \mathbf{1}$. Επειδή η τελευταία σειρά είναι ουρά μιας συγκλίνουσας δυναμοσειράς θα έχουμε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^\mathbf{k}$ ώστε

$$| \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] - \sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}]} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\mathbf{X} = \mathbf{n}] | < \varepsilon$$

για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ άρα η δυνομοσειρά $g_{\mathbf{x}}$ συγκλίνει ομοιόμορφη στο $[\mathbf{0,1}]$. Δεδομένου οτι κάθε μερικό άθροισμα της σειράς είναι ένα πολυώνυμο και επομένως συνεχής συνάρτηση, από

την θεωρία των δυναμοσειρών έπεται η συνέχεια της $g_{\mathbf{x}}$.
$(iii)$ : Αφού η $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}}\mathbf{r}^{\mathbf{n}}P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]$ συγκλίνει απόλυτα στο $[\mathbf{-1,1}]$, από τη θεωρία των δυναμοσειρών έπεται οτι θα είναι απείρως διαφορίσιμη στο $(\mathbf{-1,1})$ άρα η $g_{\mathbf{x}}$ είναι απείρως διαφορίσιμη στο $[\mathbf{0,1})$.

$(iv)$ : Η απόδειξη του $(iv)$ θα γίνει με δυο διαδοχικές επαγωγές.

(**a**) Είναι γνωστό οτι για κάθε $j\in\{0,\ldots,k\}$ και για κάθε $\mathbf{r}\in\ [\mathbf{0},\mathbf{1})$ ισχύει 312α

$$D^{\tilde{\mathbf{e}}_j}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})=\sum_{\mathbf{n}}\in[\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}},\infty)n_j\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_{\mathbf{j}}}P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \tag{3.1}$$

βλ.πχ.$[Diendonne']$ [9] (1971) όπου $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}=\mathbf{e_0}+\cdots+\mathbf{e_j}$

Η απόδειξη του (**a**) θα γίνει με επαγωγή στο $j$.

• Για $j=0$

$$\begin{aligned}D^{\tilde{\mathbf{e}}_0}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= D^{\mathbf{e}_0}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})\\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{e_0},\infty)}n_0\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e_0}}P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]\\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{0}},\infty)}n_0\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{0}}}P[\mathbf{X}=\mathbf{n}].\end{aligned}$$

•$j\to j+1$ Έστω οτι ισχύει η (3.1) για κάποιο $j\in\{0,\ldots,k-1\}$.
Ισχύει

$$\begin{aligned}D^{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}},\infty)}\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]\\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}},\infty)}\frac{n_0!}{(n_0-1)!}\cdots\frac{n_j!}{(n_j-1)!}\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]\\ &= \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}},\infty)}\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}\frac{\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}!}{(\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].\end{aligned}$$

Άρα ισχύει 312β

$$D^{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})=\sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}},\infty)}\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}\frac{\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}!}{(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}})!}P[\{X=n\}]. \tag{3.2}$$

Όπου $\tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}:=(n_0,\ldots,n_j,0,\ldots,0)\in\mathbb{N}_0^k$.

Τότε,

$$D^{\tilde{\mathbf{e}}_{j+1}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_{j+1}}D^{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial r_{j+1}} \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j}} \frac{\tilde{\mathbf{n}}_\mathbf{j}!}{(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j+1},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j}-\mathbf{1}} \frac{\tilde{\mathbf{n}}_\mathbf{j}!}{(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j}-\mathbf{1})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\tilde{\mathbf{e}}_\mathbf{j+1},\infty)} n_{j+1}\mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{e}_\mathbf{j+1}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]
\end{aligned}
$$

(**b**) Ισχύει η $(iv)$.

Η απόδειξη του (**b**) θα γίνει με επαγωγή στο $\mathbf{l}$.

$\bullet \mathbf{l}=\mathbf{e}$ ισχύει λόγω του (**a**).

$\bullet \mathbf{l}\to\mathbf{l}+\mathbf{1}$ Έστω

$$D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
D^{\mathbf{l+1}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) &= D^{\mathbf{1}}(D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})) \\
&= D^{\mathbf{1}}\Big(\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]\Big) \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l+1},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l}-\mathbf{1})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l+1},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-(\mathbf{l+1})} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-(\mathbf{l}+\mathbf{1}))!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].
\end{aligned}
$$

$(v)$ : Έστω $\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k$. Είναι προφανές οτι η $D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}$ είναι αύξουσα στο $[\mathbf{0{,}1})$. Επιπλέον έστω

$$c_1 = \sup_{\mathbf{r}\in\ [\mathbf{0},\mathbf{1})} D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})$$

Για κάθε $r\in[\mathbf{0},\mathbf{1})$ έχουμε από $(iv)$ οτι

$$D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\} \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].$$

Άρα

$$c_1 \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]. \tag{3.3}$$

Επιπλέον για κάθε $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^k$ και για κάθε $\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\mathbf{m})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\} &\leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] \\ &= D^{\mathbf{1}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \leq c_1.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει

$$\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\mathbf{m})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{X=n\}] \leq c_1. \tag{3.4}$$

Από τις (3.3) και (3.4) προκύπτει

$$c_1 = \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}].$$

□

**Πόρισμα 3.1.3.** *Έστω $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^k$ τυχαίο διάνυσμα, τότε ισχύει:*

$$P[\mathbf{X}=\mathbf{1}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) \qquad \forall\ \mathbf{l} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}.$$

Το παραπάνω πόρισμα μας δείχνει οτι το όνομα της γεννήτριας συνάρτησης πιθανότητας είναι δικαιολογημένο. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}$ είναι μοναδικά ορισμένη από την γεννήτρια συνάρτησης πιθανότητας.

**Ορισμός 3.1.4.** Έστω $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^k$ τυχαίο διάνυσμα και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$, τότε

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] = \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}]$$

Καλείται **διωνυμική ροπή τάξης $\mathbf{l}$ του $\mathbf{X}$** . Η διωνυμική ροπή τάξης $\mathbf{l}$ του $\mathbf{X}$ υπάρχει ως μέση τιμή ενός θετικού τυχαίου διανύσματος αλλά δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένη μέση τιμή .

**Παρατήρηση 3.1.5.** Ισχύει

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] = \sup_{\mathbf{r}\in\ [\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^l g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] &= \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{l}!(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} \sum_{\mathbf{n}\in\ [\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} D^l g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \\
&= \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^l g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

**Λήμμα 3.1.6.** *Έστω $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^k$ τυχαίο διάνυσμα και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

**(i)** *Η διωνυμική ροπή ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] < \infty$$

**(ii)** *Για κάθε $\mathbf{s} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ισχύει η ανισότητα*

$$\lim_{r\to s} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}(\mathbf{r}) < \infty.$$

*Αν το $\mathbf{X}$ ικανοποιεί μια από τις παραπάνω ιδιότητες τότε η διωνυμική ροπή μπορεί να εκφραστεί ως*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] = \frac{1}{\mathbf{l}!} \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}(\mathbf{r})$$

**Απόδειξη.** (**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) Έστω οτι ισχύει το $(i)$. Τότε

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] < \infty$$

άρα έχουμε

$$\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] = \mathbf{l}!\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] < \infty. \tag{3.5}$$

Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.1.2,$(iv)$ για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^k$ ώστε

$$\begin{aligned}|\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] - \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{1},\mathbf{q})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]| \\ \leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)\setminus[\mathbf{1},\mathbf{q})} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!} P[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}] < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\mathbf{r} \in (\mathbf{0},\mathbf{1}]$ η δυναμοσειρά $\sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)\setminus[\mathbf{1},\mathbf{q})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}\mathbf{P}[\{\mathbf{X}=\mathbf{n}\}]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(\mathbf{0},\mathbf{1}]$ και είναι συνεχής. Σαν συμπέρασμα από το Λήμμα 3.1.2,$(iv)$ έχουμε για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$, για κάθε $\mathbf{s} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ και για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ οτι

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{l}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}\mathbf{P}[\mathbf{X}=\mathbf{n}] \\ &\leq \sum_{\mathbf{n}\in[\mathbf{l},\infty)} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{1})!} P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] < \infty, \end{aligned}$$

Όπου η η ανισότητα είναι συνέπεια της Παρατήρησης 3.1.5.

Άρα

$$D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) < \infty$$

Επομένως ισχύει η $(ii)$.

**(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** Από το $(ii)$ και από το Λήμμα 3.1.2,$(v)$ έπεται οτι

$$\sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) < \infty.$$

Άρα από την την παρατήρηση 3.1.5 προκύπτει

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] = \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) < \infty.$$

□

Σε αντίθεση με την μονοδιάστατη περίπτωση θετικών διακριτών τυχαίων μεταβλητών, το πεπερασμένο της διωνυμικής ροπής της $\mathbf{l}$ δεν είναι ισοδύναμο με το πεπερασμένο της ροπής τάξης $\mathbf{l}$ .Επιπλέον, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το Λήμμα 3.1.6 $(ii)$ αν για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$, υπάρχει $\mathbf{m} \in [\mathbf{0},\mathbf{l}]$ με $\mathbf{m} \neq \mathbf{l}$ έτσι ωστε το $(ii)$ να ισχύει για το $\mathbf{m}$. Ως εκ τούτου , δεν είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε το όριο $D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{l})$.

**Παράδειγμα 3.1.7.** Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα δυο μεταβλητών $\mathbf{X}$ με

$$P[\mathbf{X}=\mathbf{n}] = \begin{cases} (2cn^2)^{-1}, & \mathbf{n} = [(n,0)', (1,n)'] \\ 0, & \mathbf{n} \neq [(n,0)', (1,n)'] \end{cases}$$

όπου

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Έχουμε οτι

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)X_2] = 0$$

. Πράγματι,

• Για $(X_1, X_2) = \mathbf{n} = (n, 0)$

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)X_2] = 0.$$

• Για $(X_1, X_2) = \mathbf{n} = (1, n)$

$$\mathbb{E}[X_1(X_1-1)X_2] = 0.$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \sum_{n=1}^{\infty} X_1 P\Big[(X_1, X_2) = \mathbf{n}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} nP\Big[(X_1, X_2) = (n, 0)\Big] + P\Big[(X_1, X_2) = (1, n)\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2cn^2} + \frac{1}{2cn^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2cn} + \frac{1}{2cn^2}\right) > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2cn}. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\mathbb{E}[X_1] \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2cn}$. Επίσης

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_2] &= \sum_{n=1}^{\infty} X_2 P\Big[(X_1, X_2) = \mathbf{n}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} nP\Big[(X_1, X_2) = (1, n)\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2cn^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2cn} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\mathbb{E}[X_2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2cn}$. Επίσης

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_1 X_2)] &= \sum_{n=1}^{\infty} X_1 X_2 P\Big[(X_1, X_2) = \mathbf{n}\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(n\frac{1}{2cn^2} + 0\frac{1}{2cn^2}\right). \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\mathbb{E}[X_1X_2] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2cn}$, όπου το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2cn}$ είναι άπειρο. Έτσι η διωνυμική ροπή τάξης $(2,1)$ είναι πεπερασμένη, αλλά καμία άλλη ροπή του $\mathbf{l}$ με $\mathbf{l} \leq (1,2)$ είναι πεπερασμένη. Επιπλέον έχουμε

$$\mathbb{E}[(X_1^2X_2)] \quad \geq \quad \mathbb{E}[(X_1X_2)]$$

και ως εκ τούτου η ροπή της τάξης $(2,1)'$ επίσης δεν είναι πεπερασμένη.Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ μοιάζει με

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\frac{(r_1^n)}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\frac{(r_1r_2^n)}{n^2}$$

και επιπλέον έχουμε

$$D^{\mathbf{e_1}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\frac{(r_1^{n-1})}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\frac{(r_2^n)}{n^2}$$

$$D^{\mathbf{e_2}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\frac{(r_1r_2^{n-1})}{n^2}$$

$$D^{\mathbf{e_1}}D^{\mathbf{e_2}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2c}\frac{(r_2^{n-1})}{n^2}$$

$$D^{\mathbf{e_1}}D^{\mathbf{e_1}}D^{\mathbf{e_2}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = 0$$

Για καθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0},\mathbf{1})$ παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{e_1}}g_{\mathbf{x}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\mathbf{r}) &= \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{e_2}}g_{\mathbf{x}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\mathbf{r}) \\ &= \lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{e_1}}D^{\mathbf{e_2}}g_{\mathbf{x}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\mathbf{r}) = \infty.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, δεν είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τον όρο $D^{\mathbf{l}}g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})$. Αυτό δείχνει οτι η θεωρία των λειτουργιών γεννητριων πιθανοτήτων για μονοδιάστατη τυχαία μεταλητή δεν μπορούνα να μεταφερθούν στην πολυδιάστατη περίπτωση.

**Λήμμα 3.1.8.** *Έστω $\mathbf{X} : \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$ τυχαίο διάνυσμα και $l \in \mathbb{N}_0^k$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

**(i)** *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ *η διωνυμική ροπή*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{m}}\right] < \infty$$

**(ii)** *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ *ισχύει*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{m}}] < \infty$$

**(iii)** *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ *και για κάθε* $\mathbf{s} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ *ισχύει*

$$\lim_{\mathbf{r} \uparrow \mathbf{s}} D^{\mathbf{e_1}} g_{\mathbf{X}|_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}}(\mathbf{r}) \quad < \quad \infty$$

**(iv)** *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ *η* $m$*-οστή παράγωγος της* $g_x$ *είναι συνεχής στο* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.
*Αν* $\mathbf{X}$ *ικανοποιεί ένα και ως εκτούτου όλα τα προηγούμενα στοιχεία, τότε ισχύει*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{l}}\right] = \frac{1}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})$$

**Απόδειξη.** (**i**) $\Longleftrightarrow$ (**iii**) Προκύπτει από το Λήμμα 3.1.6
Για την απόδειξη του (**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) έχουμε (**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) Με επαγωγη είμαστε σε θέση να δείξουμε οτι για κάθε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$

$$\mathbf{X}^m \in \ span\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{j}} : j \in \mathbb{N}_0^k, j \leq m$$

- Για $j = 1$ έχουμε $\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{1}} = \mathbf{X}$ άρα ισχυει οτι $\mathbf{X}^1 \in \ span\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{j}} : j \in \mathbb{N}_0^k, j \leq 1$

- (Υ.Ε.)

$$\mathbf{X}^n \in \ span\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{j}} : j \in \mathbb{N}_0^k, j \leq n$$

- Έχουμε οτι $\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{n+1}} = \frac{\mathbf{X}!}{(\mathbf{n+1})!(\mathbf{X-n-1})!} = a_{n+1}\mathbf{X}^{n+1} + a_n\mathbf{X}^n \cdots + a_1\mathbf{X}$.

Επομένως $\mathbf{X}^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{n+1}} - (a_n\mathbf{X}^n \cdots + a_1\mathbf{X})\right]$.

Άρα για όλες τις ροπές τάξης $\mathbf{m}$ με $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$
$\mathbb{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{m}}] = \sum_{\mathbf{j} \in\ [\mathbf{0},\mathbf{m}]} a_{\mathbf{mj}} \mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{j}}]$ όπου $a_{\mathbf{mj}} \in \mathbb{R}$ δηλ.

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{m}}] < \infty \quad \forall \mathbf{m} \leq \mathbf{l}$$

.

**(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** Ισχύει $\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{j}}] \leq \mathbb{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{m}}]$ και αφού $\mathbb{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{m}}] < \infty$ συνεπάγεται οτι $\mathbb{E}[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{j}}] < \infty$ .
Για την συνεπαγωγή **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(iv)** έχουμε:
**(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)** Θεωρούμε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$ με $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\mathbf{q} \leq \mathbf{1}$ έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

$$\begin{aligned} &|\sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{m},\infty)} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{m})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}] - \sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{m},\mathbf{q})} \mathbf{r}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{m})!} \mathbf{P}[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}]\big| \\ &\qquad \leq \sum_{\mathbf{n} \in [\mathbf{m},\infty) \setminus [\mathbf{m},\mathbf{q})} \frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n}-\mathbf{m})!} P[\{\mathbf{X} = \mathbf{n}\}] < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ σε συνεχή συνάρτηση την οποία θα ονομάσουμε $f_m$. Έστω $h \in \{1, \ldots, k\}$ με $\mathbf{m} - e_{\mathbf{m}} \leq 0$. Για $\mathbf{r} = (r - s_h)\mathbf{e}_h + \mathbf{s}$ και για αυθαίρετο $\mathbf{s} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ προκυπτουν δυο δυναμοσειρές $f_{\mathbf{m},h}$ και $f_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_h,h}$ οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα στο [0,1]. Από τη θεωρία των μονοδιάστατων δυναμοσειρών προκύπτει οτι $f_{\mathbf{m},h} = f'_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_h,h}$ για κάθε $r \in [0, 1]$.

Επειδή το $s$ είναι αυθαίρετο παίρνουμε $f_{\mathbf{m}}(r) = D^{\mathbf{e}_h} f_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_h}(r)$ για κάθε $r \in [0, 1]$. Με επαγωγή προκυπτει $f_{\mathbf{m}} = D^{\mathbf{m}} g_{\mathbf{x}}$.

**(i)** $\Longleftrightarrow$ **(iv)** Αφού η $g_{\mathbf{x}}$ είναι απείρως διαφορίσημη και συνεχής ισχύει από το Λήμμα 3.1.6

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{m}}\right] = \sup_{r \in [0,1)} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}!} D^{\mathbf{m}} g_{\mathbf{x}}(r) = D^{\mathbf{m}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) < \infty.$$

□

**Πόρισμα 3.1.9.** *Έστω* $\mathbf{X} : \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$ *τυχαίο διάνυσμα*

*(1) Αν* $X_i \in \mathcal{L}^1(P)$ *για κάθε* $i \in 1, \ldots, k$ *τότε*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}).$$

*(2) Αν* $X_i \in \mathcal{L}^2(P)$ *για κάθε* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *τότε*

$$Var[\mathbf{X}] = Hess g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) - grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})' + Diag(grad g_{\mathbf{x}}(\mathbf{1})).$$

## 3.2 Ροπογεννήτριες

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ένα άλλο βοηθητικό εργαλείο το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί σε αυθαίρετες κατανομές επάνω στην $\mathfrak{B}_k$ για $k \in \mathbb{N}$.

Η **ροπογεννήτρια συνάρτηση** $M_U : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0, \infty]$ ορίζεται ως εξής:

$$M_U(\mathbf{s}) := \int_{\mathbb{R}^k} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} dU(\mathbf{x}).$$

**Λήμμα 3.2.1.** *Θεωρούμε μια κατανομή* $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0, 1]$ *και υποθέτουμε οτι* $M_U(\mathbf{s})$ *είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή* $B$ *του* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$*. Τότε*

$$D^{\mathbf{n}} M_U(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} dU(\mathbf{x})$$

*για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$*. Επιπλέον ισχύει*

$$M_U(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}} \frac{(\mathbf{t} - \mathbf{s})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} dU(\mathbf{x})$$

*για κάθε* $\mathbf{t} \in B$.

**Απόδειξη.** Αρχικά υποθέτουμε οτι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $M_U$ είναι πεπερασμένη στο $B := (-\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0)$ με $\mathbf{s}_0 > \mathbf{0}$ άρα και τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα. Ισχύει η ανισότητα $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|} \leq e^{\mathbf{t}'\mathbf{x}} + e^{\mathbf{t}'\mathbf{x}}$ και επειδή η δεξιά πλευρά έχει ένα πεπερασμένο ολοκλήρωμα ως προς $U$ έχουμε οτι το ολοκλήρωμα της $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|}$ είναι πεπερασμένο. Θυμίζουμε οτι $e^{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{t}'\mathbf{x}|^n}{n!}$, επομένως η σειρά συγκλίνει (βλ. *Billingsley* [7] *Theorem* 16.7 (1995) ) Έχουμε

$$\begin{aligned} M_U(\mathbf{t}) &:= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{e}^{\mathbf{t}'\mathbf{x}} U(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{n}}}{n!} U(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathbf{t}'\mathbf{x})^{\mathbf{k}}}{k!} U(d\mathbf{x}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{t} \in B$. Επίσης

$$|\sum_{k=0}^{n}\frac{(\mathbf{t'x})^{\mathbf{k}}}{k!}|\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{|\mathbf{t'x}|^{\mathbf{k}}}{k!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\mathbf{t'x}|^{\mathbf{n}}}{n!}=e^{|\mathbf{t'x}|}. \tag{3.6}$$

Αφού $\int_{\mathbb{R}^k} e^{|\mathbf{t'x}|}U(d\mathbf{x}) < \infty$, προκύπτει οτι $e^{|\mathbf{t'x}|} \in \mathcal{L}^1(U)$ Από την (3.6) και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\mathbf{t'x})^{\mathbf{k}}}{k!}U(d\mathbf{x}) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\mathbf{t'x})^{\mathbf{k}}}{k!}U(d\mathbf{x})\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{\mathbb{R}^k}\frac{(\mathbf{t'x})^{\mathbf{k}}}{k!}U(d\mathbf{x})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^k}\frac{(\mathbf{t'x})^{\mathbf{n}}}{n!}U(d\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του διωνύμου του *Newton* στο $(\mathbf{t'x})^{\mathbf{n}} = (\sum_{i=1}^{k} t_i x_i)^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}M_U(\mathbf{t}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{n\in\mathbb{N}_0^k}\prod_{i=1}^{k}\frac{(t_ix_i)^{n_i}}{n_i!}U(d\mathbf{x})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}_0^k}\frac{\mathbf{t^n}}{\mathbf{n}!}75\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{x^n}U(d\mathbf{x})\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k}\frac{\mathbf{t^n}}{\mathbf{n}!}\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{x^n}U(d\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποίηθηκε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Το ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το $\mathbf{0}$ δίνει επίσης μια αναπαράσταση της δυναμοσειράς.

$$M_U(\mathbf{t})=\sum_{n\in\mathbb{N}_0^k}\frac{\mathbf{t^n}}{\mathbf{n}!}D^{\mathbf{n}}M_U(\mathbf{0}).$$

Από μοναδικότητα της δυναμοσειράς έχουμε για κάθε $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$

$$D^{\mathbf{n}}M_U(\mathbf{0})=\int_{\mathbb{R}^k}\mathbf{x^n}U(d\mathbf{x}). \tag{3.7}$$

Από την υπόθεση η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή $B$ του $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^k$.

Εξετάζουμε την κατανομή $V75 : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0,1]$ με $V(A) := \inf_A \frac{e^{\mathbf{s'x}}}{M_U(\mathbf{s})}Ud(\mathbf{x})$ , για κάθε $A\in \mathfrak{B}_k$. Τότε η $V$ έχει μια πεπερασμένη ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_V(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{\mathbf{v'x}}V(d\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^k} \frac{e^{(\mathbf{v}+\mathbf{s})'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} U(d\mathbf{x}) \\ &= \frac{M_U(\mathbf{v}+\mathbf{s})}{M_U(\mathbf{s})} \end{aligned}$$

για $\mathbf{v}$ σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$. Από την (3.7) έχουμε

$$\begin{aligned} D^n M_V(\mathbf{0}) &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} V(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \frac{e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} U(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά

$$D^n M_V(\mathbf{0}) = \frac{D^n M_U(\mathbf{s})}{M_U(\mathbf{s})}$$

και ως εκ τούτου

$$D^n M_V(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}} U(d\mathbf{x}).$$

Η συνάρτηση $M_V$ είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$ και έχει ένα ανάπτυγμα $Taylor$ της μορφής $M_V(\mathbf{t}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_V(\mathbf{0})$.

Για $\mathbf{v}$ σε αυτήν την περιοχή του $\mathbf{0}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{M_U(\mathbf{v}+\mathbf{s})}{M_U(\mathbf{s})} &= M_V(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{n\in\ \mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{v}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_V(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{n\in\ \mathbb{N}_0^k} \frac{\mathbf{v}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \frac{e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}}}{M_U(\mathbf{s})} U(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Με $\mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{s}$ έπεται το συμπέρασμα του λήμματος. □

**Λήμμα 3.2.2.** *Έστω* $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0, 751]$ *είναι μια κατανομή και* $A : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *είναι ένας πίνακας. Τότε*

$$M_{U_A}(\mathbf{t}) = M_U(A'\mathbf{t})$$

*για κάθε* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.

**Απόδειξη:** Δεδομένου οτι $A$ είναι μετρίσημη συνάρτηση και η εκθετική συάρτηση είναι θετική, από την θεωρά ολοκλήρωσης έχουμε οτι

$$M_{U_A} = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{t}'\mathbf{x}} U_A(d\mathbf{x})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{t}'\mathbf{A}\mathbf{x}} U_(d\mathbf{x}) = M_U(A'\mathbf{t})$$

για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θ.2.4.6 του [2].

Μετά την εισαγωγή της ροπογεννήτριας συνάρτησης μπορούμε να αναφέρουμε ένα χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας για κάποιες ειδικές θετικές τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα με την υπο συνθήκη ανεξαρτησία.75 Συμβολισμός $M_X := M_{P_Q}$.

**Θεώρημα 3.2.3.** *Έστω $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ είναι μια τυχαία μεαβλητή και έστω $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ είναι ένα φραγμένο τυχαίο διάνυσμα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

**(a)** *Τα $X$ και $\mathbf{Y}$ είναι ανεξάρτητα.*

**(b)** *Η ροπογεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση*

$$M_{(X,\mathbf{Y})}(t, \mathbf{s}) = M_X(t) M_{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}$$

*για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$.*

**(c)** *Υπάρχει $t > 0$ ώστε*

$$\mathbb{E}[e^{-Xt} x^{\mathbf{n}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] = \mathbb{E}[e^{-Xt} x^{\mathbf{n}}]\mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}].$$

*για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**(d)** *Ισχύει η ταυτότητα $\mathbb{E}[e^{-Xt} X^n e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] = \mathbb{E}[e^{-Xt} X^n]\mathbb{E}[e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}} \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}]$, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Αποδεικνίουμε τον ισχυρισμό σύμφωνα με το ακόλουθο διάγραμμα (a)$\Longrightarrow$ (d)$\Longrightarrow$ (c)$\Longrightarrow$ (b)$\Longrightarrow$ (a)

(a)$\Longrightarrow$ (d): Έιναι προφανές.
(d)$\Longrightarrow$ (c): Έιναι προφανές.
(c)$\Longrightarrow$ (b): Αφού η $X$ είναι θετική και το $\mathbf{Y}$ είναι φραγμένο, υπάρχει ένα ανοικτό $B = B_t \times B_{\mathbf{s}}$ έτσι ώστε $-t \in \ B_t \subseteq (-\infty, 0)$ και το $\mathbf{0} \in \ B_{\mathbf{s}} \subseteq \mathbb{R}^k$ και οι ροπογεννήτριες συναστήσεις $M_X, M_{\mathbf{Y}}$ και $M_{(X,\mathbf{Y})}$ να είναι πεπερασμένες στα $B_t, B_{\mathbf{s}}$ και $B$ αντίστοιχα. Τώρα αν θεωρήσουμε αυθαίρετα οτι $\hat{t} \in B_t$ και $\mathbf{s} \in \mathbf{B_s}$ από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{(X,\mathbf{Y})}(\hat{t}, \hat{\mathbf{s}}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{(\hat{t}+t)^n}{n!} \frac{(\hat{\mathbf{s}})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \mathbb{E}[e^{-Xt} X^n \mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{(\hat{t}+t)^n}{n!} \frac{(\hat{\mathbf{s}})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \mathbb{E}[e^{-Xt} X^n]\mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(\hat{t}+t)^n}{n!}\mathbb{E}[e^{-Xt}X^n]\right)\left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k}\frac{(\hat{\mathbf{s}})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}]\right)\\
&= M_X(\hat{t})M_{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{s}})
\end{aligned}
$$

Άρα η επιθυμητή ταυτότητα ισχύει στο $B$. Αφού οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_X, M_{\mathbf{Y}}$ και $M_{X,\mathbf{Y}}$ πάνω στα $(-\infty,0), \mathbb{R}^k$ και $(-\infty,0)\times\mathbb{R}^k$ αντίστοιχα είναι συνεχώς παραγωγίσημες άπειρες φορές, από την προηγούμενη ισότητα έπεται το $B$.

(b)$\Longrightarrow$ (a): Για κάθε $t<0$ και για κάθε $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^k$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}}P_{(X,\mathbf{Y})}(x,\mathbf{y}) &= M_{(X,\mathbf{Y})}(t,\mathbf{s})\\
&= M_X(t)M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{s})\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{tx}P_X d(x)\int_{\mathbb{R}^k} e^{\mathbf{s}'\mathbf{x}}P_{\mathbf{Y}}d(\mathbf{y})\\
&= \int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}}Pd(x)\otimes Pd(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θ. Fubini. Ως εκ τούτου

$$
\int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}}P_{(X,\mathbf{Y})}(x,\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^{1+k}} e^{tx+\mathbf{s}'\mathbf{y}}Pd(x)\otimes Pd(\mathbf{y}).
$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει αν θέσω όπου $\mathbf{t}=\mathbf{0}$. Τότε απο τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού *Laplace* για μέτρα τα οποία συγκεντρώνονται στο $\mathbb{R}^d_+$ προκύπτει οτι $P_{(X,\mathbf{Y})} = P_X\otimes P_{\mathbf{Y}}$ και ως εκ τούτου προκύπτει η ανεξαρτησία των $X$ και $\mathbf{Y}$. □

**Λήμμα 3.2.4.** *Έστω $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}_+$ και $Y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}_+$ και είναι δυο τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον, $Z:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}_0^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ωστε για κάθε $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d$ ισχύει οτι $P[Z=n]>0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

*(i) Η ταυτότητα $\mathbb{E}(XY|\mathbf{Z}) = \mathbb{E}(X|\mathbf{Z})\mathbb{E}(X|\mathbf{Y})$ ισχύει.*

*(ii) Η ταυτότητα $\mathbb{E}(XY|\mathbf{Z}=\mathbf{n}) = \mathbb{E}(X|\mathbf{Z}=\mathbf{n})E(X|\mathbf{Z}=\mathbf{n})$ ισχύει για κάθε $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{d}$.*

**Απόδειξη.** Από την ανάλυση Fourier, για δεσμευμένες μέσες τιμές έχουμε:

$$
\mathbb{E}(XY\mathbf{Z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k}\mathbb{E}(XY|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}
$$

Άρα ισχύει

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|\mathbf{Z})\mathbb{E}(Y|\mathbf{Z}) &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k}\mathbb{E}(X|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}}\mathbb{E}(\mathbf{Y}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}\\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k}\mathbb{E}(X|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\mathbb{E}(\mathbf{Y}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\})\chi_{\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}.
\end{aligned}
$$

Άρα έπεται ο ισχυρισμός. □

**Πόρισμα 3.2.5.** *Έστω $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ είναι μια τυχαία μεταβλητή και $\mathbf{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ είναι ένα φραγμένο τυχαίο διάνυσμα. Επιπλέον, $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ωστε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει οτι $P[Z = n] > 0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

**(a)** *$X$ και $\mathbf{Y}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητα σε σχέση με το $\mathbf{Z}$.*

**(b)** *Η ταυτότητα*

$$P(X \in B \cap \mathbf{Y} \in C|\mathbf{Z}) = P(X \in B|\mathbf{Z})P(\mathbf{Y} \in C|\mathbf{Z})$$

*ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ και $C \in \mathfrak{B}_k$.*

**(c)** *Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ η τυχαία μεταβλητή $X$ και το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{Y}$ είναι ανεξάρτητα σε σχέση με το μέτρο $P[\bullet|\{\mathbf{Z} = \mathbf{n}\}]$*

**Απόδειξη.** $(a) \iff (b)$: Είναι προφανές
$(b) \iff (c)$: Το $(c)$ ισχύει αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$

$$P[\{X \in B\} \cap \{\mathbf{Y} \in C\}|\{\mathbf{Z} = \mathbf{n}\}] = P[\{X \in B\}|\{\mathbf{Z} = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{Y} \in C\}|\{\mathbf{Z} = \mathbf{n}\}]$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ και $C \in \mathfrak{B}_k$. Λαμβάνοντας υπόψην τις τυχαίες μεταβλητές $\chi_B \cdot X$ και $Y \cdot \chi_C$ για αυθαίρετα $B \in \mathfrak{B}$ και $C \in \mathfrak{B}_k$ από το Λήμμα 3.2.4 έπεται ο ισχυρισμός. □

**Πόρισμα 3.2.6.** *Έστω $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ είναι μια τυχαία μεταβλητή και $\mathbf{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ είναι ένα φραγμένο τυχαίο διάνυσμα. Επιπλέον, $\mathbf{Z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει οτι $P[\{\mathbf{Z} = \mathbf{n}\}] > 0$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

**(a)** *$X$ και $\mathbf{Y}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητα σε σχέση με το $\mathbf{Z}$.*

**(b)** *Για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ ισχύει*

$$M_{P_{(X,\mathbf{Y})|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}}(t, \mathbf{s}) = M_{P_{X|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}}(t) M_{P_{\mathbf{Y}|\{\mathbf{Z}=\mathbf{n}\}}}(\mathbf{s})$$

*για κάθε $t < 0$ και $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$.*

**(c)** *Υπάρχει $t > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\mathbb{E}(e^{-Xt}X^n\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}|\mathbf{Z}) = E(e^{-Xt}X^n|\mathbf{Z})\mathbb{E}(\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}|\mathbf{Z})$$

*για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**(d)** *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$*

$$\mathbb{E}(e^{-Xt}X^n e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}}\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}|\mathbf{Z}) = \mathbb{E}(e^{-Xt}X^n|\mathbf{Z})\mathbb{E}(e^{\mathbf{s}'\mathbf{Y}}\mathbf{Y}^{\mathbf{l}}|\mathbf{Z})$$

*ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Αθροίζοντας όλα τα $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ της $(b)$ ιδιότητας του Θεωρήματος 3.2.3 υπο το μέτρο $P[\bullet|\mathbf{Z} = \mathbf{n}]$ δίνει την ιδιότητα $(b)$ αυτού του Πορίσματος. Ως εκ τούτου χρησιμοποιόντας επιπλέον το Θεώρημα 3.2.5 προκύπτει η ισοδυναμία για το $(b)$ και το $(a)$. Από το Λήμμα 3.2.4 παίρνουμε τις ισοδυναμίες $b \Leftrightarrow c$ και $b \Leftrightarrow d$. □

## 3.3 Θεώρημα Bernstein-Widder

Για εναν ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό των πολυμεταβλητών μικτών σ.δ. Poisson στην Ενότητα 5.2 θα χρειαστούμε μια πολυμεταβλητή επέκταση του γνωστού Θεωρήματος $Bernstein - Widder$, το οποίο αναφέρει οτι μια πλήρως μονότονη συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως μετασχηματισμός *Laplace* μιας κατανομής. Το Θεώρημα $Bernstein - Widder$ αποδεικνύεται με διάφορους τρόπους σε διάφορους τομείς των μαθηματικών, ωστόσο η απόδειξη μιας πολυμεταβλητής επέκτασης συχνά λαμβάνεται ως δεδομένο και ως εκ τούτου παραλείπεται. Σε αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε το πολυμεταβλητό Θεώρημα $Bernstein - Widder$ με έναν τρόπο που ταιριάζει στο αντικείμενο μελέτης μας και θα δώσουμε μια απόδειξη η οποία βασίζεται στη μεθοδολογία που αναπτύσσεται στο βιβλίο των $Berg, Ch., Christensen, J.P.R.andRessel, P.$ [6] (1984).

**Ορισμός 3.3.1.** Έστω N μια περιοχή του $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι **θετικά ορισμένη** αν

(i) $f(\mathbf{0}) = 0$.

(ii) $f(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in N$.

**Ορισμός 3.3.2.** Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **πλήρως μονότονη** αν είναι μη αρνητική και αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ και $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\nabla_{\mathbf{a}_1} \ldots \nabla_{\mathbf{a}_n} f(\mathbf{s}) \geq 0$$

όπου $\nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{s}) := f(\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} + \mathbf{a})$.

Το σύνολο των πλήρως μονότονων συναρτήσεων συμβολίζεται με $M(\mathbb{R}_+)$.Είναι ξεκάθαρο οτι το $M(\mathbb{R}_+)$ είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος στο $\mathbb{R}^S$ και οι μη αρνητικές σταθερές συναρτήσεις εμπεριέχονται στο $M(\mathbb{R}_+)$.

**Θεώρημα Bernstein-Widder (για διάσταση 1) 3.3.3.** *Για μια συνεχή συνάρτηση* $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η* $\varphi$ *είναι πλήρως μονότονη*

(ii) *Η $\varphi$ είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη*

(iii) *Υπάρχει πεπερασμένο μέτρο $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε $\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}\mu(dx)$*

(iv) *$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$ και $(-1)^n\varphi^{(n)}(s) \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$ και για κάθε $s > 0$, όπου $C^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$ είναι ο χώρος όλων των άπειρα παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων επάνω στον $\mathbb{R}_+^*$).*

**Απόδειξη.** Οι ισοδυναμίες $(i) \iff (ii) \iff (iii)$ προκύπτουν από το [6] (βλ. *Berg*[1984] 4.4.)

$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Η συνάρτηση $s \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-sa}\mu(da)$ αποκαλείται μετασχηματισμός *Laplace* και συμβολίζεται $\mathcal{L}(\mu)$. Αυτή η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο δεξί ημιεπίπεδο των πραγματικών αριθμών και εύκολα διακρίνουμε οτι είναι συνεχής και άπειρα παραγωγίσιμη στο ανοιχτό ημιεπίπεδο των πραγματικών αριθμών $z > 0$. Επιπλέον $(\mathcal{L}\mu)^{(n)}(z) = \int_0^{\infty}(-a)^n e^{-za}\mu(da)$ για κάθε πραγματικό $z > 0$ και $n \geq 0$. Έτσι $(-1)^n(\mathcal{L}\mu)^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.
$(iv) \Longrightarrow (i)$ Υποθέτουμε πως ισχύει η $(iv)$.

Για $a \geq 0$ η συνάρτηση $\nabla_{\mathbf{a}}\varphi$ είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και ικανοποιεί την $(iv)$. Πράγματι,για $n \geq 0$ και $s > 0$ από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε οτι

$$\begin{aligned}(-1)^n(\nabla_a\varphi)^{(n)}(s) &= (-1)^n(\varphi(s) - \varphi(s+a))^{(n)} \\ &= (-1)^{n+1}a\varphi^{(n+1)}(\xi) \geq 0\end{aligned}$$

για $\xi \in (s, s+a)$. Επαγωγικά διαπιστώνουμε οτι η συνάρτηση $f_n := \nabla a_1 \ldots \nabla a_n\varphi$ ικανοποιεί την $(iv)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1 \ldots, a_n \geq 0$. Ειδικότερα $f(s) \geq 0$, για κάθε $s > 0$ και από τη συνέχεια $f(s) \geq 0$, για κάθε $s \geq 0$. Ως εκ τούτου, η $\varphi$ είναι πλήρως μονότονη.
• για $n = 1$ η $f_1$ ικανοποιεί την $(iv)$ όπως αποδείχτηκε παραπάνω.
$n \longleftarrow n+1$ Έστω οτι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$(-1)^k f_n^{(k)}(s) = (-1)^k\nabla_n\varphi^{(k)}(s) \geq 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $s > 0$, όπου $\nabla_n\varphi^{(k)}(s) := \nabla_{a_1} \ldots \nabla_{a_n}\varphi^{(k)}(s)$.
Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ και $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}(-1)^k f_{n+1}^{(k)}(s) &= (-1)^k(\nabla_{n+1}\varphi)^{(k)}(s) \\ &= (-1)^k[(\nabla_n\varphi)^{(k)}(s) - (\nabla_n\varphi)^{(k)}(s+a_{n+1})] \\ &= (-1)^{k+1}a_{n+1}[(\nabla_n\varphi)^{(k+1)}(\xi)] \\ &= (-1)^{k+1}a_{n+1}[f_n^{(k+1)}(\xi)] \geq 0.\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει το θεώρημα, θα δείξουμε όμως και ειδικά την $(iv) \Longrightarrow (iii)$. Όπως αποδείχτηκε στην συνεπαγωγή $(iv) \longleftarrow (i)$ αν ισύχει η $(iv)$,τότε $f(s) \geq 0$ για κάθε $s \geq 0$. Αφού από την υπόθεση η φ είναι μη αρνητική, θα είναι πλήρως μονότονη. Τότε η $\varphi$ θα είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη (βλ.π.χ.,[6] Θεώρημα 6.5). Επομένως από την συνέχεια της $\varphi$ μαζί με τον *Proposition* 4.4.7 του [6] προκύπτει η ύπαρξη ενός πεπερασμένου μέτρου $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε $\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx}U(dx)$. Η ισοδυναμία των $(iii)$ και $(iv)$ είναι ένα διάσημο αποτέλεσμα της Bernstein,cf. Widder (1941)

**Θεώρημα Bernstein-Widder για $k$ διαστάσεις 3.3.4.** *Έστω $f : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $f(\mathbf{0}) = 1$ και*

$$(-1)^{\mathbf{1'n}} D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) \geq 0$$

*για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.Τότε υπάρχει η κατανομή $U$ επάνω στο $\mathfrak{B}_k$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$ έτσι ώστε*

$$f(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{t'x}} Ud(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k.$$

**Απόδειξη.** Αρχικά δείχνουμε οτι η $f$ είναι πλήρως μονότονη. Έτσι γενικεύουμε το μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.3. Ας θεωρήσουμε $\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^k$ τότε η συνάρτηση $\nabla_{\mathbf{k}} f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^k$. Επιπλέον έχουμε για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ και $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in (\mathbb{R}_0^*)^k$ με το Θεώρημα Μέσης Τιμής (βλ. [13], *Section* 167)

$$\begin{aligned}(-1)^{\mathbf{1'n}} D^{\mathbf{n}} (\nabla_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{t}) &= (-1)^{\mathbf{1'n}} \nabla_{\mathbf{a}} D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) \\ &= (-1)^{\mathbf{1'n}} (D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) - D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}+\mathbf{a})) \\ &= (-1)^{\mathbf{1'n}+1} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i D^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_j} f(\xi)\end{aligned}$$

με $\xi \in \ [\mathbf{t}, \mathbf{t}+\mathbf{a}]$. Τότε όπως και στο θεώρημα 3.3.3 έχουμε οτι $(-\mathbf{1})^{\mathbf{1'n}} D^{\mathbf{n}} (\nabla_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{t}) \geq 0$. Επαναλαμβάνοντας για κάθε $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ τότε η συνάρτηση $\nabla_{\mathbf{a}_1} \ldots \nabla_{\mathbf{a}_n} f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^k$ και ισχύει

$$(-\mathbf{1})^{\mathbf{1'n}} D^{\mathbf{n}} (\nabla_{\mathbf{a}_1} \ldots \nabla_{\mathbf{a}_n} f)(\mathbf{t}) \geq 0$$

για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$ και $\mathbf{t} > 0$. Ειδικότερα $\nabla_{\mathbf{a}_1} \ldots \nabla_{\mathbf{a}_n} f(\mathbf{t}) \geq 0$ για κάθε $\mathbf{t} > 0$ και από την συνέχεια έχουμε οτι $\nabla_{\mathbf{a}_1} \ldots \nabla_{\mathbf{a}_n} f(\mathbf{t}) \geq 0$, για κάθε $\mathbf{t} \geq 0$. Απο την υπόθεση έχουμε οτι η $f$ είναι συνεχης και πλήρως μονότονη, επομένως η $f$ είναι θετικά ορισμένη και φραγμένη (βλ.[6], *Theorem*4.6.5). Έτσι απο την πρόταση 4.4.7, η συνέχεια της $f$ μαζί με την [6] *Preposition* 4.4.7 μας αποδίδει την ύπαρξη ενός πεπερασμένου, μη αρνητικού μέτρου $U$ στο $\mathfrak{B}_k$ με $f(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}_+^k} e^{-\mathbf{t'x}} Ud(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{k}}$ Τελικά $U[\mathbb{R}_+^k] = \int_{\mathbb{R}_+^k} Ud(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) = 1$. Άρα ισχύει το θεώρημα. □

**Πόρισμα 3.3.5.** *Έστω* $f : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι μια συνεχής συνάρτηση με* $f(\mathbf{0}) = 1$ *και* $(-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}} f(\mathbf{t}) \geq 0$ *για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$*. Τότε υπάρχει μια κατανομή* $U$ *στο* $\mathfrak{B}_k$ *με* $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$ *έτσι ώστε* $f(\mathbf{t}) = M_U(-\mathbf{t})$.

# Κεφάλαιο 4

# Πολυμεταβλητές σημειακές διαδικασίες

Από δω και στο εξής υποθέτουμε οτι κάθε απαριθμητρια έχει μηδενική έκρηξη.

## 4.1 Το υπόδειγμα

**Ορισμός 4.1.1.** Μια πολυμεταβλητή στοχαστική διαδικασία $\{N_t\}_{t\mathbb{R}_t}$ σε $k$ διαστάσεις λέγεται οτι είναι μια **πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία** αν κάθε συντεταγμένη $\{N_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}, i \in \{1, \ldots, k\}$ και το άθροισμα $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{\mathbf{1}'\mathbf{N}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων είναι μια απαριθμήτρια. Έτσι, υπάρχει μηδενικό σύνολο $M \in \mathcal{S}$ που ονομάζεται **μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας** έτσι για κάθε $\omega \in \Omega \setminus M$ να πληρούνται οι ιδιότητες $(i) - (v)$ για όλες τις συντεταγμένες $\{N_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}, i \in \{1, \ldots, k\}$ , και για το άθροισμα $\{N_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων.

Ως συνέπεια ταυτόχρονα άλματα διαφορετικών συντεταγμένων σχεδόν βέβαια αποκλείονται.Από δω και στο εξής $k$ θα είναι πάντα η διάσταση της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας με την οποία εργαζόμαστε.

Για να δούμε πως μπορούν να μετατραπούν πολυμεταβλητές απαριθμήτριες διαδικασίες, ορίζουμε διαφορετικά σύνολα από πινάκων. Αρχικά ας υποθέσουμε τους μεταθετικούς πίνακες με επιλεγμένες συντεταγμένες και πίνακες οι οποίοι συσσωρεύουν συντεταγμενες με βάση κάποιους κανόνες.

- Έστω $\mathcal{A}_P$ το σύνολο όλων των $A \in \{0,1\}^{k\times k}$ με $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\mathbf{1}'A\mathbf{e}_j = 1 = \mathbf{e}_i'A\mathbf{1}$ για κάθε $j, i \in \{1, \ldots, k\}$.

- Έστω $\mathcal{A}_S$ είναι το σύνολο όλων των $A = (I_d, 0) \in \{0,1\}^{d\times k}$ με $d, k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $d < k$ και $I_d$ ο ταυτοτικός πίνακας διάστασης $d$.

- Έστω $\mathcal{A}_C$ είναι το σύνολο όλων των $A \in \{0,1\}^{d\times k}$ με $d, k \in \mathbb{N}$ και $d \leq k$ έτσι ώστε να υπάρχει $k_i \in \mathbb{N}$ για $i \in \{1, \dots, d\}$ με $\sum_{i=1}^{d} k_i = k$ και $A = (A_1, \dots, A_d)$, όπου $A := (e_i, \dots, e_i) \in \mathbb{R}^{d\times k_i}$ για $i \in \{1, \dots, d\}$.

Τώρα το σύνολο των πιθανων μετασχηματισμών πινάκων μπορεί να οριστεί ως το σύνολο $\mathcal{A}$ που περιέχει όλα τα $A \in \{0,1\}^{d\times k}$ με $d, k \in \mathbb{N}$ και $d \leq k$ έτσι ώστε να υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $A_i \in \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_S \cup \mathcal{A}_C$, $i \in \{1, \dots, m\}$ με $A = A_m A_{m-1} \dots A_1$. Έτσι το $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλους τους πίνακες οι οποίοι παίρνουν τιμές 0 ή 1, με τουλάχιστον μια μονάδα ανα γραμμή και το πολύ μια μονάδα ανα στήλη. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιλαμβάνει όλους τους πίνακες οι οποίοι παρουσιάζονται στην απόδειξη του παρακάτω λήμματος.

**Λήμμα 4.1.2.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διαδικασία και $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$. Τότε $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διδικασία αν και μόνο αν $A \in \mathcal{A}$.*

**Απόδειξη.** Υποθέτω $A \in \mathcal{A}$. Για να δείξουμε οτι η $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή διδικασία καταμέτρησης πρέπει να δείξουμε οτι είναι σταθερή κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό των τριών συνόλων $\mathcal{A}_P, \mathcal{A}_S$ και $\mathcal{A}_C$. Είναι προφανές οτι $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διαδικασία για $A \in \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_S$. Τώρα έστω $A \in \mathcal{A}_C$ και θεωρούμε οτι $\omega \in \Omega \backslash M$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό μας οι συντεταγμένες της $\{\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δεν μπορούν να έχουν άλματα ταυτόχρονα. Κάθε συντεταγμένη από την διαδικασία του μετασχηματισμού $\{A\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι άθροισμα από συντεταγμένες της αρχικής διαδικασίας $\{\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ως εκτούτου ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i) - (v)$ της απαριθμήτριας διαδικασίας.

Από τη σχέση $\{\mathbf{1}'A\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{\mathbf{1}'\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ προκύπτει οτι το άθροισμα όλων των συντεταγμένων του $\{\mathbf{N}_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i) - (v)$ μιας απαριθμήτριας διαδικασίας. Έτσι το $M$ χρησιμεύει ως ένα μηδενικό σύνολο εξαίρεσης για τη διαδικασία μετασχηματσμού του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οποία είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία. Τώρα ας θεωρήσουμε οτι $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ και οτι $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια πολυμεταβλητή διδικασία και έστω $M_A$ είναι ένα μηδενικό σύνολο εξαίρεσης του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Θεωρούμε $\omega \in \Omega \setminus (M \cup M_A)$. Κάθε συντεταγμένη του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει άλμα ύψους μιας μονάδας και δεν επιτρέπεται ταυτόχρονη αύξηση με τις συντεταγμένες του $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Όλες οι καταχωρήσεις του $A$ είναι 0 ή 1. Επιπλέον, κάθε συντεταγμένη της $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει τροχιές που είναι αύξουσες συναρτήσεις του $t$ και το όριό τους για $t \longrightarrow \infty$ είναι το $\infty$, και θεωρούμε $A\mathbf{1} \geq \mathbf{1}$. Επιπλέον δεν υπάρχουν ταυτόχρονα άλματα των συντεταγμένων του $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και έτσι $\mathbf{1}'A \leq \mathbf{1}'$. Αυτά τα τρία επιχειρήματα προκύπτουν από την ύπαρξη του πίνακα $A_P \in \mathcal{A}_P$ έτσι ώστε

$$AA_P = \begin{bmatrix} 1\dots1 & 0\dots0 & 0\dots0 \\ 0\dots0 & 1\dots1 & 0\dots0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0\dots0 & 0\dots0 & 1\dots1 \end{bmatrix}.$$

Το τελευταίο κομμάτι που αποτελείται από 0 μπορεί να υπάρχει ή μπορεί και να μην υπάρχει. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει $A_C \in \mathbb{R}^{(d+1)\times k}$ και $A_S \in \mathbb{R}^{d\times(d+1)}$ με $A_C \in \mathcal{A}_C$ και $A_S \in \mathcal{A}_S$ έτσι ώστε $AA_P = A_S A_C$. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ήδη $AA_P \in \mathcal{A}_C$. Αφού $(A_P)^{-1} \in \mathbb{A}_P$ καταλήγουμε οτι $A \in \mathcal{A}$. □

Παραδείγματα από χρήσιμους μετασχηματισμούς.

- A=$\mathbf{1}'$,στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι το άθροισμα όλων των συντεταγμένων.
- $A = \mathbf{e}_i'$, στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{\mathbf{N}_t\}^i_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η $i-$συντεταγμένη.
- $A \in \mathcal{A}_S$, στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αποτελείται από τις πρώτες $d$ συντεταγμένες της πρωτότυπης διαδικασίας.
- $A \in \mathcal{A}_P$, στην περίπτωση του οποίου $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μεταθέτει τις συντεταγμένες της αρχικής διαδικασίας.

Για μια πρακτική χρήση του μετασχηματισμού εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 4.1.3.** Μια ιδιότητα $(P)$ για απαριθμήτριες διαδικασίες καλείται **$\mathcal{A}$-σταθερή** αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ η απαριθμήτρια διαδικασία $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $(P)$ για οποιαδήποτε $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που έχει την ιδιότητα $(P)$.

Το επόμενο Λήμμα αναφέρεται σε κάποιες ιδιότητες για τις μονοδιάστασες πιθανότητες των απαριθμητριών πολυμεταβλητών διαδικασιών που θα χρειαστούμε αργότερα.

**Λήμμα 4.1.4.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία. Τότε*

*(i) Για κάθε $s \in \mathbb{R}^k_+$ και για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k_0$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P[\cap_{i=1}^k \{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\}] = P[\cap_{i=1}^k \{N_{s_i}^{(i)} = n^{(i)}\}].$$

*(ii) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k_0$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t\downarrow s} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}\}].$$

*(iii)* *Για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ *ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \downarrow 0} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \begin{cases} 1 & \textit{αν } \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ 0 & \textit{αν } \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

*(iv)* *Για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ *ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \uparrow \infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = 0.$$

*(v)* *Για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ *ισχύει η ταυτότητα*

$$\lim_{t \uparrow \infty} P[\{\mathbf{N}_t \geq \mathbf{n}\}] = 1.$$

**Απόδειξη.** *(i)* Εξ' ορισμού, κάθε συντεταγμένη της $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία και ως εκ τούτου, έχει σχεδόν βέβαια συνεχείς και αύξουσες τροχιές. Έτσι για αυθαίρετα $m \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{Z}^k$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_i \leq u_i \leq t_i \quad & \Rightarrow \quad N_{u_i}^{(i)} \leq N_{t_i}^{(i)} \\ & \Rightarrow \quad \{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\} \subseteq \{N_{u_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\} \\ & \Rightarrow \quad \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{u_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\} \\ & \Rightarrow \quad P\left[\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] \leq P\left[\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{u_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια $\left\{P\left[\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right]\right\}$ είναι φθίνουσα και επομένως ισχύει

$$\lim_{\mathbf{t} \downarrow \mathbf{s}} P\left[\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] \;=\; \sup_{\mathbf{t} \in\ (\mathbf{s}, \infty)} P\left[\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right].$$

Τώρα θα δείξουμε οτι

$$\sup_{\mathbf{t} \in\ (\mathbf{s}, \infty)} P\left[\bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] = P\left[\bigcup_{\mathbf{t} \in\ (\mathbf{s}, \infty)} \bigcup_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{k} \left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right].$$

Θεωρώ $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ με $\mathbf{t} \in (\mathbf{s}, \infty)$ και $A_{\mathbf{t}} := \cup_{j=1}^{m} \cap_{i=1}^{k} \{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\}$. Τότε υπάρχει μια υποοικογένεια $\{A_{\mathbf{t}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ της $\{A_{\mathbf{t}}\}_{t \in (\mathbf{s}, \infty)}$ ώστε $\lim_{n \to \infty} \mathbf{t}_n = \mathbf{s}$ και

$$\sup_{\mathbf{t} \downarrow \mathbf{s}} P(A_{\mathbf{t}}) = \sup_{\mathbf{t}_n \to \mathbf{s}} P(A_{\mathbf{t}_n}) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n})$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος μονότονης σύγκλισης (βλ. π.χ. [2] Θεώρημα 2.3.1 του [Σ.Σ.$A$.].)

Αρκεί να δείξουμε οτι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n} = \bigcup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{s},\infty)} A_{\mathbf{t}}$.

Ισχύει οτι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n} \subseteq \bigcup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{0},\infty)} A_{\mathbf{t}}$.

Έστω οτι $\omega \in \bigcup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{s},\infty)} A_{\mathbf{t}}$ τότε υπάρχει $\mathbf{t} > \mathbf{s}$ τέτοιο ώστε $\omega \in A_{\mathbf{t}}$. Επίσης ισχύει οτι $N_{\mathbf{t}} > N_{\mathbf{t}_n}$ συνεπώς $N_{t_i}^{(i)} > N_{t_{n_i}}^{(i)}$ για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$. Άρα $\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\} \subseteq \{N_{t_{n_i}}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\}$ για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$ από το οποίο προκύπτει οτι $A_{\mathbf{t}} \subseteq A_{\mathbf{t}_n}$. Επομένως υπάρχει $\mathbf{t}_n \in (\mathbf{s},\mathbf{t})$ τέτοιο ώστε $\omega \in A_{\mathbf{t}_n}$ άρα $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t_n}}$. Άρα ισχύει οτι $\cup_{\mathbf{t}\in(\mathbf{s},\infty)} A_{\mathbf{t}} \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n}$ και επομένως $\bigcup_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} A_{\mathbf{t}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathbf{t}_n}$.

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P\left[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] &= \sup_{\mathbf{t}\in\ (\mathbf{s},\infty)} P\left[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] \\
&= P\left[\bigcup_{\mathbf{t}\in\ (\mathbf{s},\infty)}\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] \\
&= P\left[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{\mathbf{t}\in\ (\mathbf{s},\infty)}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] \\
&= P\left[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{\inf_{t_i\in\ (s_i,\infty)} N_{t_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right] \\
&= P\left[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{s_i}^{(i)} \leq n_j^{(i)}\right\}\right].
\end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$. Τότε παίρνουμε, από την προηγούμενη ταυτότητα (λαμβάνοντας υπόψη οτι $m \in \{1,\ldots,k\}$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\right\}\right] &= \lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}} P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n^{(i)}\right\} \setminus \bigcup_{j=1}^{k}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n^{(i)} - \delta_{ij}\right\}\right] \\
&= \lim_{\mathbf{t}\downarrow\mathbf{s}}\left(P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n^{(i)}\right\}\right] - P\left[\bigcup_{j=1}^{k}\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_{t_i}^{(i)} \leq n^{(i)} - \delta_{ij}\right\}\right]\right) \\
&= P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{s_i}^{(i)} \leq n^{(i)}\}\right] - P\left[\bigcup_{j=1}^{k}\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{s_i}^{(i)} \leq n^{(i)} - \delta_{ij}\}\right] \\
&= P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{s_i}^{(i)} = n^{(i)}\}\right].
\end{aligned}$$

$(ii)$ Λαμβάνοντας υπόψη μόνο διανύσματα $\mathbf{s}$ με ίσες συντεταγμένες, ο ισχυρισμός έπεται αμέσως από το $(i)$
$(iii)$ Δεδομένου ότι όλες οι συντεταγμένες έχουν τροχιές που σχεδόν σίγουρα ξεκινούν από το μηδέν, θέτοντας $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ από το $(ii)$ έπεται ο ισχυρισμός.
$(iv)$ Εξ ορισμού, το άθροισμα $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία και ως εκ τούτου, έχει τροχιές που δεν έχουν κανένα ανώτερο όριο.

$$\lim_{t\uparrow\infty} P[\mathbf{N}_t = \mathbf{n}] \;\; \leq \;\; \lim_{t\uparrow\infty} P[\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}].$$

Εύκολα αποδεικνύεται οτι $\{P[\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}]\}$ είναι φθίνουσα.
Πράγματι, έστω $s \leq t$ και $\omega \in \{N_t \leq \mathbf{1'n}\}$ τότε $N_t(\omega) \leq n_1 + \cdots + n_k$ και άρα $N_{\mathbf{s}}(\omega) \leq n_1 + \cdots + n_k$, δηλαδή $\omega \in \{N_s \leq \mathbf{1'n}\}$.

Άρα $\{N_t \leq \mathbf{1'n}\} \subseteq \{N_s \leq \mathbf{1'n}\}$ και επομένως η $\{[\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φθίνουσα οικογένεια.

Έστω $b_t := P[\{N_t \leq \mathbf{1n}\}]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει μια υποοικογένεια $\{b_{\mathbf{t}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\{b_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ και $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_{\mathbf{t}_n} = \inf_{\mathbf{t}\in\ (0,\infty)} b_{\mathbf{t}} = \alpha$.

Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow\infty} P[\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}] &= \inf_{t\in\ (0,\infty)} P[\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}] \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} P[\{N_{t_n} \leq \mathbf{1'n}\}] \\
&= P\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{N_t \leq \mathbf{1'n}\}\right]
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της Πρότασης 1.2.3 του [2] του $[\Sigma.\Sigma.A.]$ Επίσης ισχύει οτι

$$P\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{N_t \leq \mathbf{1'n}\}\right] \;\; = \;\; P\left[\bigcap_{t\in\ (0,\infty)} \{N_t \leq \mathbf{1'n}\}\right].$$

Πράγματι, έστω $A := \cap_{t\in(0,\infty)}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}$ και $B := \cap_{n\in\mathbb{N}}\{N_t \leq \mathbf{1'n}\}$.

Έστω $\omega \in B$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $N_{\mathbf{t}}(\omega) \leq \mathbf{1'n}$. Έστω οτι υπάρχει ένα $\tilde{t}_0 \in (0,\infty)$ ώστε $N_{\tilde{t}_0}(\omega) > \mathbf{1'n}$, τότε θα υπάρχει ένα $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ ώστε $t_{\tilde{n}} > \tilde{t}_0$ και άρα $N_{t_{\tilde{n}}}(\omega) \geq N_{\tilde{t}_0}(\omega) > \mathbf{1'n}$, άτοπο διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $N_{\mathbf{t}_n}(\omega) \leq \mathbf{1'n}$. Άρα $B \subseteq A$. Προφανώς $A \supseteq B$ (αφού το $A$ είναι τομή περισσότερων συνόλων), επομένως $A = B$.

Τώρα θα δείξουμε οτι

$$\bigcap_{t\in\ (0,\infty)} \{N_t \leq \mathbf{1}'\mathbf{n}\} \;=\; \{\sup_{t\in\ (0,\infty)} N_t \leq \mathbf{1}'\mathbf{n}\}.$$

Πράγματι, θέτω $A = \bigcap_{t\in\ (0,\infty)}\{N_t \leq \mathbf{1}'\mathbf{n}\}$ και $C = \{\sup_{t\in\ (0,\infty)} N_t \leq \mathbf{1}'\mathbf{n}\}$. Τότε για οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \omega \in A &\iff \forall t \in (0,\infty) \quad N_t(\omega) \leq \mathbf{1}'\mathbf{n} \\ &\iff \sup_{t\in(0,\infty)} N_t(\omega) \leq \mathbf{1}'\mathbf{n} \\ &\iff \omega \in C. \end{aligned}$$

Άρα $A = C$.

Τέλος, γνωρίζουμε από την ιδιότητα $(n5)$ οτι ισχύει

$$P\left[\{\sup_{t\in\ (0,\infty)} N_t \leq \mathbf{1}'\mathbf{n}\}\right] = 0.$$

$(v)$ Εξ ορισμού, όλες οι συντεταγμένες είναι απαριθμήτριες διαδικασίες και έχουν, ως εκ τούτου, τροχιές οι οποίες είναι αύξουσες και δεν έχουν ανώτερο όριο.

$$\begin{aligned} \lim_{t\uparrow\infty} P[N_t \geq n] &= \lim_{t\uparrow\infty} P[\cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}] \\ &= \sup_{t\uparrow\infty} P[\cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}] \\ &= P[\cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}]. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε οτι $A := \cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\} \supseteq \cap_{i=1}^k \{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\} := B$. Έστω $\omega \in B$. Τότε για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$ ισχύει $\sup N_t^{(i)}(\omega) > n^{(i)}$, έτσι για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$ υπάρχει $t \geq 0$ ώστε

$N_t^{(i)}(\omega) \geq n^{(i)}$, άρα $\omega \in \cap_{i=1}^k \cup_{t\in(0,\infty)} \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\} = \cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\} = A$.

Επομένως, $B \subseteq A$.

Άρα

$$P[\cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \leq n^{(i)}\}] \leq P[\cap_{i=1}^k \{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}].$$

Συνεπώς

$$\lim_{t\uparrow\infty} P[\cup_{t\in(0,\infty)} \cap_{i=1}^k \{N_t^{(i)} \geq n^{(i)}\}] \geq \lim_{t\uparrow\infty} P[\cap_{i=1}^k \{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}].$$

Όμως $P[\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}] = 1$ (από $n5$)

Συνεπώς, $P[\cap_{i=1}^{k}\{\sup N_t^{(i)} > n^{(i)}\}] = 1$ άρα έπεται ο ισχυρισμός. $\square$

Το $(ii)$ φαίνεται να είναι η φυσική εκδοχή όσον αφορά τη συνέχεια της πιθανότητας ως συνάρτηση του χρόνου. Αλλά για το χαρακτηρισμό της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson χρειαζόμαστε πολλές διαφορετικές μεταβλητές του χρόνου καθώς η διαδικασία έχει συντεταγμένες. Έτσι το Λήμμα 4.1.4 $(i)$ είναι αναγκαίο και θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του 5.2.1.

Θα μελετήσουμε επίσης τις λεγόμενες μεταγενέστερες κατανομές και διαδικασίες. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 4.1.5.** Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $\sigma.\delta$ $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$, ωστε $\mathbf{K}_{t,h} := \mathbf{N}_{t+h} - \mathbf{N}_t$ για όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$, καλείται **σταδιακή διαδικασία (Incremental Process)** .

Δεδομένου ότι όλες οι ιδιότητες των τροχιών μεταφέρονται από την διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στην διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ το επόμενο λήμμα είναι προφανές.

**Λήμμα 4.1.6.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία , για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.*

Αργότερα, η μελέτη της σταδιακής διαδικασίας θα απαιτήσει τον περιορισμό του μέτρου πιθανότητας. Ως εκ τούτου, μπορούμε επίσης να ορίσουμε για $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$ ένα νέο μέτρο πιθανότητας

$$P_{t,\mathbf{n}}[B] := P[B|\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}]$$

για $B \in \mathcal{F}$ και να τροποποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα, έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας στα επόμενα κεφάλαια.

**Λήμμα 4.1.7.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\mathbf{N}_t = \mathbf{n}] > 0$ η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P_{t,\mathbf{n}})$.*

## 4.2 Η πολυωνυμική ιδιότητα

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε διάφορες ιδιότητες, τις οποίες ενδέχεται να έχει μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Όλα αυτά έχουν σχέση με την πολυωνιμική ιδιότητα. Ξεκινάμε με δύο ιδιότητες που αφορούν στις προσαυξήσεις.

**Ορισμός 4.2.1.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]=\prod_{j=1}^{m}P[\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}$$

ισχύει για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1\dots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$ και $j\in\{1,\cdots\}$.

**Ορισμός 4.2.2.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h}-\mathbf{N}_{t_{j-1}+h}=\mathbf{n}_j\}\right]=P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]$$

ισχύει για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1\dots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$ και $j\in\{1,\cdots\}$.

Όπως μπορεί να φανεί από το επόμενο λήμμα, τόσο η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων και η ιδιότητα των στάσιμων προσαυξήσεων παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από ορισμένους μετασχηματισμούς.

**Λήμμα 4.2.3.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε*

*(i) Η ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

*(ii) Η ιδιότητα των στάσιμων προσαυξήσεων είναι $\mathcal{A}$-σταθερή .*

**Απόδειξη.** $(i)$ : Θεωρούμε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\dots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και $\mathbf{l}_j\in\mathbb{N}_0^k$ και $j\in\{1,\cdots\}$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A\mathbf{N}_{t_j}-A\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{l}_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A(\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}})=\mathbf{l}_j\}\right]\\
&= \sum_{\mathbf{n}_1\in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})}\cdots\sum_{\mathbf{n}_m\in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})}P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]\\
&= \sum_{\mathbf{n}_1\in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})}\cdots\sum_{\mathbf{n}_m\in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})}\prod_{j=1}^{m}P[\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}]\\
&= \prod_{j=1}^{m}\sum_{\mathbf{n}_1\in A^{-1}(\{\mathbf{1}_j\})}P[\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}]
\end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{m} P[\{A\mathbf{N}_{t_j} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{l}_j\}]$$

άρα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.

$(ii)$ : Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και $\mathbf{l}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, \cdots\}$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A\mathbf{N}_{t_j+h} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{l}_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A(\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h}) = \mathbf{l}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_m \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_1\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_m \in A^{-1}(\{\mathbf{1}_m\})} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{A\mathbf{N}_{t_j} - A\mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{l}_j\}\right]
\end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Οι επόμενες ιδιότητες που εισάγουμε αφορούν στην αντίστροφη πιθανότητα μετάβασης, δηλαδή στις πιθανότητες των προσαυξήσεων που συνέβησαν πριν από μια συγκεκριμένη κατάσταση της διαδικασίας.

**Ορισμός 4.2.4.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **πολυωνυμική ιδιότητα** αν η ταυτότητα

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{(\sum_{j=1}^{m} n_j^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{n}_j\}]$$

ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1 \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, \cdots\}$.

**Ορισμός 4.2.5.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα** αν η ταυτότητα

$$\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^{(i)} = l^{(i)}\} \cap \{N_t^{(i)} - N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\}\right] \\
&\quad = \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + l^{(i)}}{l^{(i)}} (\frac{t_i}{t})^{l^{(i)}} (1 - \frac{t_i}{t})^{n^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}]
\end{aligned}$$

ισχύει για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$, $t \in \mathbb{R}_+$ με $\mathbf{t} \in \ (\mathbf{0}, t\mathbf{1})$ και για κάθε $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

**Ορισμός 4.2.6.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **διωνυμική ιδιότητα** αν η ταυτότητα

$$P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{1}\} \cap \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{n}\}] = \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + l^{(i)}}{l^{(i)}} (\frac{s}{t})^{l^{(i)}} (1 - \frac{s}{t})^{n^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}]$$

ισχύει για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $0 < s < t$ και για κάθε $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Για μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει την πολυωνυμική ιδιότητα , οι πεπερασμένων διαστάσεων κατανομές προσδιορίζονται πλήρως από τις μονοδιάστατες κατανομές. Επιπλέον, δεδομένου του αριθμού των συμβάντων σε κάποια χρονική στιγμή $t_m$ η διαμέριση των γεγονότων σε ξένα ανα δυο χρονικά διαστήματα στο παρελθόν οφείλεται σε δειγματοληψία με αντικατάσταση. Δεδομένου ότι αυτή η δειγματοληψία είναι ανεξάρτητη για τις συντεταγμένες της διαδικασίας, κάθε συντεταγμένη θα μπορούσε να αποτελεί αντικείμενο ξεχωριστής δειγματοληψίας. Η έννοια του ορισμού της πολυωνιμικής ιδιότητας θα παραμείνει αμετάβλητη, αν επιτρέψουμε ίσους χρόνους (δηλαδή $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$). Χωρις βλάβη της γενικοτητας θεωρούμε $t_m = t_{m-1}$. Αν $\mathbf{n}_m = \mathbf{0}$ μπορούμε να αγνοήσουμε $t_m$ και να εξετάσει $m-1$ διαστήματα. Αν $\mathbf{n}_m \neq \mathbf{0}$ οι δύο πλευρές του ορισμού είναι ίσες με το μηδέν και η ταυτότητα ισχύει.

**Λήμμα 4.2.7.** *Έστω μια $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε*

*(i) Η πολυωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

*(ii) Η επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

*(iii) Η διωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ.[30], Λήμμα 2.2.2
Το επόμενο λήμμα αναφέρει μια συνέπεια της διωνυμικής ιδιότητας η οποία παράγεται από την αλληλεπίδραση με τις ιδιότητες των τροχιών της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας.

**Λήμμα 4.2.8.** *Έστω μια $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία. Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα , τότε*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\} > 0]$$

*ισχύει για κάθε $t > 0$ και για όλα τα $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη.** Αρχικά υποθέτουμε οτι υπάρχουν κάποια $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ έτσι ώστε

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = 0$$

για όλα τα $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$. Τότε έχουμε $P[\{\mathbf{N}_t \geq \mathbf{m}\}] = \mathbf{0}$ , το οποίο είναι αντιφατικό με το $\lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t \geq \mathbf{n}\}] = 1$. (Λήμμα 4.1.4($v$)).
Τώρα θεωρούμε $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης υπάρχει κάποια $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$ έτσι ώστε $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$

Από την διωνυμική ιδιότητα έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}] &\geq P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{n} - \mathbf{l}\}] \\ &= \left( \prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)}}{l^{(i)}} \left(\frac{s}{t}\right)^{l^{(i)}} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n^{(i)}} \right) P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου $P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}] > 0$ για όλα τα $s \in (0,t)$ και για όλα τα $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{l} \geq \mathbf{n}$. Επίσης, για όλα τα $u \in (t,\infty)$, η ταυτότητα $\sum_{\mathbf{p}\geq\mathbf{n}} P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\}|\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = 1$ μας δίνει την ύπαρξη κάποιου $\mathbf{p} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{n} \leq \mathbf{p}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\}] &\geq P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \\ &= P[\{\mathbf{N}_u = \mathbf{p}\}|\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0 \end{aligned}$$

Άρα $P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}] > 0$ για όλα τα $s > 0$ και όλα τα $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{l} \leq \mathbf{n}$ Αφού το $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ ήταν αυθαίρετο, έπεται ο ισχυρισμός. $\square$

**Πόρισμα 4.2.9.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα , τότε $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$ για κάθε $t > 0$ και για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.*

Η ιδιότητα των απαριθμητριών διαδικασιών που έχουν την διωνυμική ιδιότητα ότι όλες οι καταστάσεις έχουν αυστηρά θετική πιθανότητα, θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια αρκετά συχνά.

**Λήμμα 4.2.10.** *Αν μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία έχει την πολυωνυμική ιδιότητα , τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις .*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, \ldots, m\}$. Θέτοντας $t_{-1} = -h$ και $\mathbf{l}_m := \sum_{j=1}^m \mathbf{n}_j$ έχουμε

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\}\right] = P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h} - \mathbf{N}_{t_{j-1}+h} = \mathbf{n}_j\} \bigcap \left(\biguplus \mathbf{N}_{t_0+h} = \mathbf{n}_0\}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left[\biguplus_{\mathbf{n}_0\in\mathbb{N}_0^k}\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h}-\mathbf{N}_{t_{j-1}+h}=\mathbf{n}_j\}\cap\mathbf{N}_{t_0+h}=\mathbf{n}_0\}\right)\right]\\
&= P\left[\biguplus_{\mathbf{n}_0\in\mathbb{N}_0^k}\left(\bigcap_{j=0}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h}-\mathbf{N}_{t_{j-1}+h}=\mathbf{n}_j\}\right)\right]\\
&= \sum_{\mathbf{n}_0\in\mathbb{N}_0^k} P\left[\bigcap_{j=0}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h}-\mathbf{N}_{t_{j-1}+h}=\mathbf{n}_j\}\right]\\
&= \sum_{\mathbf{n}_0\in\mathbb{N}_0^k}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{(l_m^{(i)}+n_0^{(i)})!}{\prod_{j=0}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{l_j-l_{j-1}}{t_m+h}\right)^{n_j^{(i)}}\right.\\
&\quad \left.\cdot P[\{\mathbf{N}_{t_m+h}=\mathbf{1}_m+\mathbf{n}_0\}]\right)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{(l_m^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j^{(i)}}\right.\\
&\quad \left.\cdot\sum_{\mathbf{n}_0\in\mathbb{N}_0^k}P[\{\mathbf{N}_{t_m+h}=\mathbf{1}_m+\mathbf{n}_0\}]\right)\\
&\quad \cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\binom{l_m^{(i)}!+n_0^{(i)}}{l_m^{(i)}}\right)\left(\frac{t_m}{t_m+h}\right)^{l_m^{(i)}}\left(\frac{h}{t_m+h}\right)^{n_0^{(i)}}\right)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j^{(i)}}\right)\\
&\quad \cdot\sum_{\mathbf{n}_0\in\mathbb{N}_0^k}P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}\cap\{\mathbf{N}_{t_m+h}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_0\}]\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j^{(i)}}\right)\cdot P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{1}_m\}]\\
&= P[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}]
\end{aligned}
$$

και ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

**Ορισμός 4.2.11.** Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **ιδιότητα Markov** αν ισχύει η ταυτότητα

$$
\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}]\\
&\quad = P\left[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\right]P[\{\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{l}_m\}\cap\{\mathbf{N}_{t_{m+1}}-\mathbf{N}_{t_m}=\mathbf{n}_{m+1}\}] \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

για όλα τα $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\ldots,t_{m+1}\in\mathbb{R}_+$ με $t_0<t_1<\cdots<t_{m+1}$ και γα όλα τα

$\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{m+1} \in \mathbb{N}_0^k$, με $\mathbf{l}_m := \sum_{j=1}^m \mathbf{n}_j$.

**Παρατήρηση 4.2.12.** Αν $P[\cap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}] > 0$ η ισότητα (4.1) είναι ισοδύναμη με την

$$P\left[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\} | \bigcap_{j=1}^{m} \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right]$$
$$= P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\} | \{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \tag{4.2}$$

Πράγματι, έστω οτι ισχύει η (4.2). Τότε ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{P[\cap_{j=1}^m (\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\})]}{P[\cap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]} \\
&\quad = \frac{P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\} \cap \{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}]}{P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}]} \\
&\Leftrightarrow \quad P\left[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\} \bigcap \{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}\right] P\left[\bigcap_{j=1}^{m} \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&\quad = P\left[\bigcap_{j=1}^{m} (\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\})\right] P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
&\Leftrightarrow \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Άρα η (4.2) ισοδυναμεί με την (4.1).

Η (4.1) είναι πιο χρήσιμη για τεχνικούς λόγους, ενώ η (4.2) μας δίνει μια ερμηνεία της ιδιότητας *Markov*. Σε γενικές γραμμές, η μελλοντική προσαύξηση μιας διαδικασίας *Markov* εξαρτάται μόνο από την συνολική προσαύξηση του παρόντος και όχι από τον διαχωρισμό της προσαύξησης στο παρελθόντος.

**Ορισμός 4.2.13.** Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει την **ιδιότητα Chapman Kolmogorov** αν ισχύει η ιδιότητα

$$\begin{aligned}
&P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} | \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\
&\quad = \sum_{\mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}], P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] > 0} P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\} | \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\} | \{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}]
\end{aligned}$$

ισχύει για όλα τα $r, t \in \mathbb{R}_+$, με $r \leq t$ και $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] > 0$ και για όλα τα $s \in [r, t]$.

**Παρατήρηση 4.2.14.** Αφού η πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία έχει αύξουσες τροχιές, αυστηρά αρνητικές προσαυξήσεις έχουν μηδενική πιθανότητα. Ως εκ τούτου, ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την σχέση

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k, P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}]$$

για όλα τα $r, t \in \mathbb{R}_+$, με $r \leq t$ και $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$ με $P[\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] > 0$ και για όλα τα $s \in [r, t]$.

Πράγματι, για $r, t, s$ και $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ όπως και παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] &= \frac{P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\ &= \frac{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m} + \mathbf{n}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\ &= P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m} + \mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \end{aligned}$$

Άρα

$$P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] = P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m} + \mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]$$

Επίσης

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}], P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{m} + \mathbf{n}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m} + \mathbf{n}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] \end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνοντας υπόψιν την (4.3) η ισότητα του Ορισμού 4.2.13 ισοδυναμεί με την

$$\begin{aligned} &P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m} + \mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}], P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{n}+\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m} - \mathbf{n}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ισοδύναμα, αντικαθιστώντας το $\mathbf{l} + \mathbf{n}$ με το $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} &P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\ &\overset{(4.3)}{=} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k, P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{l}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{l}\}]. \end{aligned}$$

Αυτές είναι οι γενικές εξισώσεις Chapman-Kolmogorov που βρίσκονται συχνά στη βιβλιογραφία. Το πλεονέκτημα της χρήσης των πρώτων ταυτοτήτων είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα και η χρήση των προσαυξήσεων, το οποίο ταιριάζει ακριβώς με τους ορισμούς από τις άλλες ιδιότητες.

Αφού γενικά στις γενικές στοχαστικές διαδικασίες υπάρχουν παραδείγματα πολυμεταβλητών $Markov$ διαδικασιών με τις συντεταγμένες να μην έχουν την ιδιότητα $Markov$ φαίνεται πιθανό ότι η ιδιότητα $Markov$ δεν είναι γενικά $\mathcal{A}$-σταθερή .

**Λήμμα 4.2.15.** *Εάν μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία είναι μια διαδικασία* $Markov$, *τότε έχει την ιδιότητα Chapman-Kolmogorov.*

**Απόδειξη**. Θεωρούμε $r, t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$, με $r \leq t$ και $P[\mathbf{N}_r = \mathbf{n}] > 0$ καθώς και ένα αυθαίρετο $s \in [r, t]$. Θέτοντας $B := \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}\}$ έχουμε

**(a)** Ισχύει $\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} = \biguplus_{\mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}]} \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}]$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \omega \in \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} &\iff \mathbf{N}_t(\omega) - \mathbf{N}_r(\omega) = \mathbf{m} \\ &\iff \exists\, \mathbf{l} \in [\mathbf{0}, \mathbf{m}] \quad \mathbf{N}_t(\omega) - \mathbf{N}_s(\omega) = \mathbf{m} - \mathbf{l} \\ &\qquad \& \; \mathbf{N}_s(\omega) - \mathbf{N}_r(\omega) = \mathbf{l} \end{aligned}$$

επομένως ισχύει το (**a**).

**(b)** Για κάθε $A, B, C \in \Sigma$ ισχύει $P(A \cap B | C) = P(A | B \cap C) P(B | C)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(A \cap B | C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A | B \cap C) P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A | B \cap C) P(B | C) P(C)}{P(C)} \\ &= P(A | B \cap C) P(B | C). \end{aligned}$$

**(c)** Για όλα τα $r, t \in \mathbb{R}_+$, με $r \leq t, s \in [r, t], \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k$, με $P[\{\mathbf{N}_r\}] > 0$ ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\} | \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] = P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\} | \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}].$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
& P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_r = \mathbf{m}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\} \cap \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}], P[\mathbf{B}]>0} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\} \\
&\quad \cap\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}], P[\mathbf{B}]>0} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}]P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}], P[\{\mathbf{N}_s=\mathbf{n}+\mathbf{1}\}]>0} P[\{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m}-\mathbf{l}\}|\{\mathbf{N}_s = \mathbf{n}+\mathbf{l}\}] \\
&= P[\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\}|\{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}]
\end{aligned}
$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το $(a)$, η δεύτερη από το $(b)$ αν θέσουμε $A = \{\mathbf{N}_t - \mathbf{N}_s = \mathbf{m} - \mathbf{1}\}, B = \{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\}, C = \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}$ και $\{\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{1}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\} = \{\mathbf{N}_s = \mathbf{1} + \mathbf{n}\} \cap \{\mathbf{N}_r = \mathbf{n}\}$ η τρίτη ισοτητα ισχύει από την ιδιότητα $Markov$. Ως εκ τούτου έπεται το $(c)$. □

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων που αφορούν στις αντίστροφες πιθανότητες μετάβασης και τις ιδιότητες που αφορούν στις πιθανότητες μετάβασης.

**Λήμμα 4.2.16.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε τα ακολουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα .*

*(ii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα $Markov$*

*(iii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα $Markov$.*

**Απόδειξη**. Θα αποδείξουμε το λήμμα σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα: $(ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (ii)$.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ : Είναι προφανές
$(iii) \Longrightarrow (i)$ : Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της επαγωγής για τον αριθμό $m$ των περιόδων στην εξίσωση.

$$
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{(\sum_{j=1}^{m} n_j^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{n}_j\}] \tag{4.4}
$$

για κάθε $t_0, t_1 \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, \cdots\}$.
Για $m = 1$ είναι προφανές.
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (4.7) για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $t_0, t_1 \ldots, t_m, t_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1}$ , $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ και $j \in \{1, \ldots, m+1\}$. Θέντωντας $\mathbf{l}_j := \sum_{h=1}^{j} \mathbf{n}_h$ για $j \in \{1, \ldots, m+1\}$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1} \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
= \; & P\left[\bigcap_{j=1}^{m} \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\}] \\
= \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} (\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m})^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{1}_m\}] \\
\cdot \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{l_{m+1}^{(i)}}{l_m^{(i)}} (\frac{t_m}{t_{m+1}})^{l_m^{(i)}} (\frac{t_{m+1} - t_m}{t_{m+1}})^{n_{m+1}^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} = \mathbf{l}_{m+1}\}] \\
= \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l_{m+1}^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m+1} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m+1} (\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{m+1}})^{n_{j^{(i)}}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} = \mathbf{1}_{m+1}\}] P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}],
\end{aligned}
$$

όπου η πρώτη ισότητα συνεπάγεται από την (4.1) και η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια της (4.7) και της διωνυμικής ιδιότητα.

Επειδή ξέρουμε από τη διωνυμική ιδιότητα οτι $P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] > 0$, βλ.Λήμμα 4.2.8, έπεται οτι η (4.7) ισχύει για $m+1$. Ως εκ τούτου, η διωνυμική ιδιότητα και η ιδιότητα *Markov* συνεπάγεται από την πολυωνυμική ιδιότητα .
$(i) \implies (ii)$. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+1}$ και $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{m+1} \in \mathbb{N}_0^k$. Θέτω $\mathbf{l}_j := \sum_{h=1}^{j} \mathbf{n}_h$ για κάθε $j \in \{1, \cdots + 1\}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1} \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] P\left[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}\right] = \\
= \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l_{m+1}^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m+1} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} (\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{m+1}})^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} = \mathbf{l}_{m+1}\}] P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
= \; & \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l_m^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{m} (\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m})^{n_j^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\
& \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{l_{m+1}^{(i)}}{l_m^{(i)}} (\frac{t_m}{t_{m+1}})^{l_m^{(i)}} (1 - \frac{t_m}{t_{m+1}})^{n_{m+1}^{(i)}}\right) P[\{\mathbf{N}_{t_{m+1}} = \mathbf{l}_{m+1}\}]
\end{aligned}
$$

$$= \quad P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\}]$$

Όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την πολυωνυμική ιδιότητα . Έτσι, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $Markov$.
Τώρα, θα εξετάσουμε την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα .Θεωρούμε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{k}}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+$ με $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, t\mathbf{1})$ και $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Δεδομένου ότι η επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα είναι $\mathcal{A}$-σταθερή , άρα είναι σταθερή ως προς τις μεταθέσεις ($A \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$), μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε οτι $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq t$. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική ιδιότητα , όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κατά τρόπο ώστε ίσοι χρόνοι να επιτρέπονται.

Τέλος, θέτοντας $M_{(i)} := \{n_j^{(i)} : n_j^{(i)} \in \mathbb{N}_0, j \in \{1, \dots, k+1\}, \sum_{j=1}^{i} n_j^{(i)} = l^{(i)}, \sum_{j=i+1}^{k+1} n_j^{(i)} = n^{(i)}\}$ και $t_{k+1} := t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
& P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^{(i)} = l^{(i)}\} \cap \{N_t^{(i)} - N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\}\right] \\
= \quad & \sum_{M(1)} \cdots \sum_{M(k)} P\left[\bigcap_{j=1}^{k+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
= \quad & \sum_{M(1)} \cdots \sum_{M(k)} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{(n^{(i)} + l^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{k} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{k+1} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_{k+1}}\right)^{n_j^{(i)}}\right) P[\{N_{t_{k+1}} = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}] \\
= \quad & P[\{N_{\mathbf{t}} = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}] \prod_{i=1}^{k} \sum_{M(i)} \frac{(n^{(i)} + l^{(i)})!}{\prod_{j=1}^{k} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{k+1} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t}\right)^{n_j^{(i)}} \\
= \quad & P[\{N_{\mathbf{t}} = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}] \prod_{i=1}^{k} \frac{(n^{(i)} + l^{(i)})!}{l^{(i)}! n^{(i)}!} \left(\frac{1}{t}\right)^{l^{(i)} + n^{(i)}} t_i^{l^{(i)}} (t - t_i)^{n^{(i)}} \\
& \cdot \sum_{M(i)} \left[\frac{l^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{i} n_j^{(i)}!} \prod_{j=1}^{i} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_i}\right)^{n_j^{(i)}}\right] \left[\frac{n^{(i)}!}{\prod_{j=i+1}^{k+1} n_j^{(i)}!} \prod_{j=i+1}^{k+1} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t - t_(i)}\right)^{n_j^{(i)}}\right] \\
= \quad & \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + l^{(i)}}{l^{(i)}} (\frac{t_i}{t})^{l^{(i)}} (1 - \frac{t_i}{t})^{n^{(i)}}\right) P[\{N_t = \mathbf{n} + \mathbf{1}\}]
\end{aligned}$$

Έτσι, η πολυωνυμική ιδιότητα , συνεπάγεται την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα . $\square$
Έχοντας αποδείξει την ισοδυναμία, γνωρίζουμε ότι η πολυωνυμική ιδιότητα , συνεπάγεται την ιδιότητα Chapman-Kolmogorov.

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε οτι η διωνυμική ιδιότητα αποτελεί ικανή προϋπόθεση για μια απαριθμήτρια διαδικασία να έχει την ιδιότητα Chapman-Kolmogorov.

**Λήμμα 4.2.17.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει την διωνυμική ιδιότητα τότε εχει και την ιδιότητα Chapman-Kolmogorov.*

**Απόδειξη.** Λόγω Λήμμα 4.2.8 έχουμε

$P[\{N_t = \mathbf{n}\}] > 0$ για όλα τα $t > 0$ και για όλα τα $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$. Θεωρούμε $r, t \in \mathbb{R}_+,\ r \leq t$ και $s \in [r, t]$ καθώς και $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}^\mathbf{k}$ με $P[\{N_r = \mathbf{n}\}] > 0$. Για $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{N_s=\mathbf{n+1}\}]>0} P[\{N_s - N_r = \mathbf{l}\}|\{N_r = \mathbf{n}\}]P[\{N_t - N_s = \mathbf{m}\}|\{N_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] \\
= &\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} \frac{P[\{N_s - N_r = \mathbf{l}\} \cap \{N_r = \mathbf{n}\}]}{P[\{N_r = \mathbf{n}\}]} \frac{P[\{N_t - N_s = \mathbf{m}\} \cap \{N_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}]}{P[\{N_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}]} \\
= &\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + l^{(i)}}{l^{(i)}} (\frac{r}{s})^{n^{(i)}} (1 - \frac{r}{s})^{l^{(i)}}\right) \frac{P[\{N_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}]}{P[\{N_r = \mathbf{n}\}]} \\
&\cdot \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + m^{(i)}}{n^{(i)} + l^{(i)}} (\frac{s}{t})^{n^{(i)}+l^{(i)}} (1 - \frac{s}{t})^{m^{(i)}-l^{(i)}}\right) \frac{P[\{N_t = \mathbf{n} + \mathbf{m}\}}{P[\{N_s = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}]} \\
= &\frac{P[\{N_t = \mathbf{n} + \mathbf{m}\}}{P[\{N_r = \mathbf{n}\}]} \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + m^{(i)}}{n^{(i)}} r^{n^{(i)}} t^{-(n^{(i)}+m^{(i)})}\right) \\
&\cdot \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}]} \prod_{i=1}^{k} \binom{m^{(i)}}{l^{(i)}} (s-r)^{l^{(i)}} (t-s)^{m^{(i)}-l^{(i)}} \\
= &\frac{P[\{N_t = \mathbf{n} + \mathbf{m}\}}{P[\{N_r = \mathbf{n}\}]} \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n^{(i)} + m^{(i)}}{n^{(i)}} (\frac{r}{t})^{n^{(i)}} (1 - \frac{r}{t})^{m^{(i)}}\right) \\
&\cdot \sum_{l=0}^{\mathbf{1'm}} \left(\frac{s-r}{t-r}\right)^l \left(\frac{t-s}{t-r}\right)^{\mathbf{1'm}-l} \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],\mathbf{1'l}=l} \prod_{i=1}^{k} \binom{m^{(i)}}{l^{(i)}} \\
= &\frac{P[\{N_t - N_r = \mathbf{m}\} \cap \{N_r = \mathbf{n}\}]}{P[\{N_r = \mathbf{n}\}]} \sum_{l=0}^{\mathbf{1'm}} \left(\frac{s-r}{t-r}\right)^l \left(\frac{t-s}{t-r}\right)^{\mathbf{1'm}-l} \binom{\mathbf{1'm}}{l} \\
= &P[\{N_t - N_r = \mathbf{m}\}|\{N_r = \mathbf{n}\}]
\end{aligned}$$

Όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την διωνυμική ιδιότητα .

Η περίπτωση $s = 0$ μπορεί να συμβεί μόνο αν $r = 0$ και $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Τότε

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{0},\mathbf{m}],P[\{N_0=\mathbf{n+1}>0\}]} P[\{N_0 - N_r = \mathbf{l}\}|\{N_r = \mathbf{n}\}]P[\{N_t - N_0 = \mathbf{m} - \mathbf{l}\}|\{N_0 = \mathbf{n} + \mathbf{l}\}] \\
= &P[\{N_0 - N_0 = \mathbf{0}\}|\{N_0 = \mathbf{0}\}]P[\{N_t - N_0 = \mathbf{m}\}|\{N_0 = \mathbf{0}\}] \\
= &P[\{N_t - N_r = \mathbf{m}\}|\{N_r = \mathbf{n}\}]
\end{aligned}$$

ισχύει, όπου η δεξιά πλευρά, και ως εκ τούτου η αριστερή πλευρά, είναι στην πραγματικότητα $P[\{N_t = \mathbf{m}\}]$. Έτσι, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Σε αντίθεση με την πολυωνυμική ιδιότητα η ιδιότητα $Markov$, όπως παρατηρήθηκε αμέσως πριν το Λήμμα 4.2.15, δεν φαίνεται να είναι $\mathcal{A}$-σταθερή . Ωστόσο, με το Λήμμα 4.2.16 μπορούμε εύκολα να γράψουμε ένα πόρισμα από το Λήμμα 4.2.7 το οποίο παρέχει μια επαρκή προϋπόθεση για την σταθερότητα της ιδιότητας $Markov$.

**Πόρισμα 4.2.18.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει την ιδιότητα $Markov$. Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα τότε*

*$\{\mathbf{AN}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $Markov$ διαδικασία για όλα τα $A \in \mathcal{A}$*

Έχουμε δείξει μέχρι τώρα ότι όλες οι ιδιότητες, εκτός από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις συνδέονται με την την πολυωνυμική ιδιότητα .

**Λήμμα 4.2.19.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις , τότε έχει και την ιδιότητα $Markov$.*

**Απόδειξη.**

Θεωρώ $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ $me0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+1}$ και $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{m+1} \in \mathbb{N}_0^k$ με $\mathbf{l}_m := \sum_{j=1}^m \mathbf{n}_j$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} & P[\cap_{j=1}^{m+1}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\ = & \left(\prod_{j=1}^{m+1} P[\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]\right) P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\}] \\ = & P[\cap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]P[\{\mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{l}_m\} \cap \{\mathbf{N}_{t_{m+1}} - \mathbf{N}_{t_m} = \mathbf{n}_{m+1}\}] \end{aligned}$$

Έτσι, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $Markov$ διαδικασία. □

**Πόρισμα 4.2.20.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και την διωνυμικη ιδιότητα, τότε έχει και την πολυωνυμική ιδιότητα .*

# Κεφάλαιο 5

# Πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την μικτή διαδικασία Poisson των απαριθμήτριων διαδικασιών και επιπλέον να συζητήσουμε κάποιες ιδιότητες αυτών των διαδικασιών.

## 5.1 Το Υπόδειγμα

**Ορισμός 5.1.1.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ λέγεται **πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης** $U : \mathfrak{B}_k \longmapsto [0,1]$ αν

$U[(0,\infty)] = 1$ και αν

$$P[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}]$$
$$= \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(t_j-t_{j-1})} \frac{x(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} dU(\lambda)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Μια σύντομη συζήτηση σχετικά με την υποστήριξη της μικτής κατανομής θα παραθετηθεί στο τέλος της ενότητας.

Θα συνδέσουμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με την ενότητα 4.2 δείχνοντας ότι οι πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson έχουν την πολυωνυμική ιδιότητα .

**Λήμμα 5.1.2.** *Έστω η πολυμεταβλητή απαριθμήτρια σ.δ. $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ $U : \mathfrak{B}_k \longmapsto [0,1]$ μια συνάρτηση κατανομής με $U[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

**(i)** *Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μίξης* $U$.

**(ii)***Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *έχει την πολυωνυμική ιδιότητα και*

$$P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}]=\int_{\mathbb{R}^k}e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

*ισχύει για κάθε* $t\in\mathbb{R}_+$ *και* $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$

**Απόδειξη**. Αφού

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k}&\prod_{j=1}^{m}e^{-\mathbf{1}'\lambda(t_j-t_{j-1})}\frac{\lambda(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}dU(\lambda)\\ &=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{n^{(i)}!}{\prod_{j=1}^{m}n_j^{(i)}!}\prod_{j=1}^{m}(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m})^{n_j^{(i)}}\right)\int_{\mathbb{R}^k}e^{-\mathbf{1}'\lambda t_m}\frac{(\lambda t_m)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)\end{aligned}$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k, j\in\{1,\ldots,m\}$ με $\sum_{j=1}^{m}\mathbf{n}_j=\mathbf{n}$ η ισοδυναμία είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της πολυμεταβλητής μικτής *σ.δ.Poisson*. □

**Πόρισμα 5.1.3.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δPoisson τότε*

**(i)**$P[N_t=n]>0$ *για κάθε* $t>0$ *και* $n\in\mathbb{N}_0^k$

**(ii)***Η σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *έχει σταθερές προσαυξήσεις.*

**(iii)***Η* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια διαδικασία Markov.*

**Λήμμα 5.1.4.** *Έστω η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ *είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.Τότε η μικτή διαδικασία Poisson είναι* $\mathcal{A}$*-σταθερή και επιπλέον η κατανομή μίξης* $\{A\mathbf{N_t}\}_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_\mathbf{t}}$ *δίνεται από την* $U_A$

**Απόδειξη**. Ως συνέπεια του Λήμματος 5.1.2 και του Λήμματος 4.2.7, εμείς απλά πρέπει να δείξουμε οτι η μονοδιάστατη κατανομή είναι σταθερή. Έτσι θεωρούμε $t\in\mathbb{R}$ και $\mathbf{l}\in\mathbb{R}_0^d$.Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}P[A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}]&=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\mathbf{1}'\lambda*t}\frac{(\lambda*t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}dU_A(\lambda^*)\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\mathbf{1}'A\lambda t}\frac{(A\lambda t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}dU_A(\lambda)\end{aligned}$$

για όλα τα $A\in\mathcal{A}$ με $A\in\mathbb{R}^{d\times k}$.

- Έστω $A\in\mathcal{A}_P$. Τότε η παραπάνω σχέση είναι προφανής.

- Έστω $A \in \mathcal{A}_S$. Τότε με την βοήθεια της μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
P[A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}] &= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} P[\mathbf{N}_t = \mathbf{n}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^i!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}} \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^i!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \left( \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{l^{(i)}}}{l^i!} \right) \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}} \prod_{i=d+1}^{k} e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^i!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{1}' A\lambda t} \frac{(A\lambda t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} dU_A(\lambda).
\end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 5.1.5.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια μικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μίξης $U$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

*(i) Οι συντεταγμένες των $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι ανεξάρτητες.*

*(ii) Ισχύει $U = \bigotimes_{i=1}^{k} U_{e_i'}$*

**Απόδειξη.** $(ii) \Longrightarrow (i)$ Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, \ldots, m\}$. Τότε

$$\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{j=1}^{m} \{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n_j}\}\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda_i(t_j - t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda_i(t_j - t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} d(\otimes_{i=1}^{k} U_{\mathbf{e}_i'})(\lambda) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda_i(t_j - t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} dU_{\mathbf{e}_i'}(\lambda_i) \\
&= \prod_{i=1}^{k} P\left[\bigcap_{j=1}^{m} \{\mathbf{N}_{t_j}^{(i)} - \mathbf{N}_{t_{j-1}}^{(i)} = n_j^{(i)}\}\right].
\end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{e_i'} \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε η τελευταία σχέση αληθεύει λόγω του Λήμματος 5.1.4.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Για ορισμένες πιθανότητες της διαδικασίας θεωρούμε το χρόνο ως μεταβλητή. Για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, η ανεξαρτησία των συντεταγμένων συνεπάγεται οτι

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^{(i)} - N_{t_{i-1}}^{(i)} = 0\}\right] &= \prod_{i=1}^{k} P\left[\{N_{t_i}^{(i)} - N_{t_{i-1}}^{(i)} = 0\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i(t_i - t_{i-1})} dU_{\mathbf{e}_i'}(\lambda_i) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\sum_{j=1}^{k}\lambda_i(t_i - t_{i-1})} d(\bigotimes_{i=1}^{k} U_{\mathbf{e}_i'})(\lambda)
\end{aligned}$$

και από την άλλη πλευρά έχουμε (όπου $(\mathbf{e}_1')^{-1}(\{0\})$ είναι η αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$ κάτω από την $\mathbf{e}_1'$ ) οτι

$$\begin{aligned}
&P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_i}^{(i)} - N_{t_{i-1}}^{(i)} = 0\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in \mathbf{e}_1'^{-1}(\{0\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_k \in \mathbf{e}_k'^{-1}(\{0\})} P\left[\bigcap_{j=1}^{k}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}_1 \in \mathbf{e}_1'^{-1}(\{0\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_k \in \mathbf{e}_k'^{-1}(\{0\})} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda_i(t_j - t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{\mathbf{n}_1 \in \mathbf{e}_1'^{-1}(\{0\})} \cdots \sum_{\mathbf{n}_k \in \mathbf{e}_k'^{-1}(\{0\})} \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda_i(t_j - t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i(t_i - t_{i-1})} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\sum_{j-1}^{k}\lambda_j(t_j - t_{j-1})} dU(\lambda)
\end{aligned}$$

Από το συνδυασμό αυτών των δύο σχέσεων παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{z}'\lambda} dU(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{z}'\lambda} d(\bigotimes_{i=1}^{k} U_{\mathbf{e}_i'})(\lambda)$$

για κάθε $\mathbf{z} \in (\mathbf{0}, \infty)$. Αυτή είναι μια ιδιότητα του μετασχηματισμού *Laplace*. Από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού *Laplace* (βλ.π.χ.[16], *Theorem* 5.3) έχουμε οτι $U = \bigotimes_{i=1}^{k} U_{\mathbf{e}_i'}$. □

Το παραπάνω θεώρημα είναι μια εξήγηση για τη χρήση των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson. Μόνο στην περίπτωση μιας μικτής κατανομής που είναι ένα γινόμενο των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών της, οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες. Υπό μία τέτοια κατάσταση η θεωρία των μονοδιάστατων μικτών διαδικασιών Poisson είναι επαρκής. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, η μελέτη των πολυμεταβλητών σ.δ. καθίσταται αναγκαία.

Για τη χρήση των *poterior* κατανομών μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson με κατανομή μίξης το επόμενο θεώρημα μας δίνει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες. Για μονομεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson ο ισχυρισμός αναφέρεται με παρόμοια μορφή, για παράδειγμα από τους *Willmot* και *Sundt* [1989] (βλ.πχ.[28]).

Για να αποκτήσουμε έναν απλό συμβολισμό εισάγουμε την κατανομή $U_{t,\mathbf{n}} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow [0,1]$ έτσι ώστε

$$U_{t,\mathbf{n}} := \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\lambda^{\mathbf{n}} dU(\lambda)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\lambda^{\mathbf{n}} dU(\lambda)}$$

για αυθαίρετο $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k, t > 0$ και δοθείσα κατανομή $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow [0,1]$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό επιπλέον ορίζουμε $U_{0,\mathbf{0}} := U$.

**Θεώρημα 5.1.6.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μείξης $U$ . Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}_0^k, t > 0$ η διαδικασία $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ των προσαυξήσεων της $\mathbf{N}_t$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μείξης $U_{t,\mathbf{n}}$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P_{t,\mathbf{n}})$.*

**Απόδειξη**. Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $h_0, h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, \ldots, m\}$ καθώς και $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Από το Πόρισμα 5.1.3 (*i*) παίρνουμε οτι $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&P_{t,\mathbf{n}}\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{K}_{t,h_j} - \mathbf{K}_{t,h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}\right] \\
&:= \quad P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{(\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_t) - (\mathbf{N}_{t+h_{j-1}} - \mathbf{N}_t) = \mathbf{n}_j\}|\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}\right] \\
&= \quad \frac{P[\bigcap_{j=1}^{m}\{(\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_t) - (\mathbf{N}_{t+h_{j-1}} - \mathbf{N}_t) = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}]} \\
&= \quad \frac{\int_{\mathbb{R}^k}\left(\prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(h_j-h_{j-1})}\frac{\lambda(h_j-h_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}\right) e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)} \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}^k}\left(\prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\lambda(h_j-h_{j-1})}\frac{\lambda(h_j - h_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}\right) dU_{t,\mathbf{n}}(\lambda),
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού της $U_{t,\mathbf{n}}$. Επομένως έπεται ο ισχυρισμός. □

Το παραπάνω θεώρημα δεν παρέχει μόνο μια αναπαράσταση των posterior κατανομών, αλλά αναφέρει επίσης ότι το μοντέλο των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με κατανομή μείξης εξακολουθεί να ισχύει για τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις , ανεξάρτητα από τον χρόνο που αρχίζουμε να παρακολουθούμε την διαδικασία.

Τώρα θα συζητήσουμε σχετικά με τον φορέα μιας μικτής κατανομή μίας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες πληρούν την σχέση

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ και όπου $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0,1]$ είναι μια κατανομή με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Σε σύγκριση με μικτές διαδικασίες Poisson επεκτείνουμε τον φορέα της κατανομής μείξης από το $(\mathbf{0}, \infty)$ στο $\mathbb{R}_+^k$.

Τα επόμενα δύο λήμματα περιέχουν ιδιότητες των εξεταζόμενων διαδικασιών.

**Λήμμα 5.1.7.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια σ.δ. σε $k$ διαστάσεις, για την οποία ισχύει*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει*

$$P[\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} dU_A(\lambda)$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d$ , όπου για την κατανομή μείξης $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1]$ ισχύει $U_A[\mathbb{R}_+^d] = 1$.*

**Απόδειξη**. Η απόδειξη της ιδιότητας για τις μονομεταβλητές κατανομές είναι εντελώς ίδια με την απόδειξη του Λήμματος 5.1.4. Επιπλέον, με $A \in \mathcal{A}$ έχουμε έχουμε

$1 \geq U_A[\mathbb{R}_+^d] = U[A^{-1}\mathbb{R}_+^d] \geq U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Έτσι $U_A[\mathbb{R}_+^d] = 1$. □

**Λήμμα 5.1.8.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια σ.δ. σε $k$ διαστάσεις, για την οποία ισχύει*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ με $U[\mathbb{R}_+^k] = 1$. Τότε ισχύει*

$$\lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \begin{cases} U[\{0\}] & \text{αν } \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ 0 & \text{αν } \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k | \{\mathbf{0}\} \end{cases}$$

**Απόδειξη**. Πρώτον, ας εξετάσουμε την συνάρτηση $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(\lambda) := e^{-\lambda t}(\lambda t)^n$ με $t > 0$ και $n \geq 1$. Τότε έχουμε

$$f'(\lambda) = e^{-\lambda t}\lambda^{n-1}t^n(n - \lambda t)$$

$$f''(\lambda) = e^{-\lambda t}\lambda^{n-2}t^n((n - \lambda t)^2 - n)$$

και $\lambda^* := \frac{n}{t}$ είναι η θέση που μεγιστοποιήται η $f$ με $f(\lambda^*) = e^{-n}n^n$.. Ως εκ τούτου $e^{-\lambda t}(\lambda t)^n \leq e^{-n}n^n$ και

$$e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} = \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t}\frac{(\lambda_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \leq \prod_{i=1}^{k} e^{-n^{(i)}}(n^{(i)})^{n^{(i)}}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^k_+, t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k_0$.

Από το Θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] &= \lim_{t\uparrow\infty}\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda) \\
&= U[\{\mathbf{0}\}]\frac{\mathbf{0}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} + \lim_{t\uparrow\infty}\int_{\mathbb{R}^k_+|\{\mathbf{0}\}} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda) \\
&= U[\{\mathbf{0}\}]\frac{\mathbf{0}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} + \int_{\mathbb{R}^k_+|\{\mathbf{0}\}} \lim_{t\uparrow\infty} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda) \\
&= U[\{\mathbf{0}\}]\frac{\mathbf{0}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}.
\end{aligned}$$

Επομένως έπεται ο ισχυρισμός. □

Προσθέτοντας τώρα τις ιδιότητες των τροχιών μιας πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Λήμμα 5.1.9.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία για την οποία ισχύει*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k_0$ με $U[\mathbb{R}^k_0] = 1$. Τότε $U[(\mathbf{0},\infty)] = 1$.*

**Απόδειξη**. Από το προηγούμενο λήμμα και από το Λήμμα 4.1.4 (*iv*) ισχύει η σχέση $U[\{\mathbf{0}\}] = \lim_{t\uparrow\infty} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{0}\}] = 0$. Δεδομένου ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ η μετασχηματισμένη διαδικασία $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_t}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία (από το Λήμμα 4.1.2) και έχει κατανομές μικτής Poisson (από το Λήμμα 5.1.7), παίρνουμε $U_A[\{\mathbf{0}\}] = 0$. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ ο μετασχηματισμός $A := \mathbf{e}'_i$ ικανοποιεί την $A \in \mathcal{A}$ και έτσι έχουμε $0 = U_{e'_i}[\{0\}] = U[{e'}_i^{-1}(\{0\})] = U[\prod_{j=1}^k B_j]$ με $B_j := \begin{cases} \{0\} & \text{αν } i = j \\ \mathbb{R} & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Άρα $U[\mathbb{R}_+^k \setminus (\mathbf{0}, \infty)] = 0$. □

Ως εκ τούτου, ο περιορισμός της κατανομής μείξης στον ορισμό των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson δεν έχει καμία επίδραση. Οι τροχιές, οι οποίες σχεδόν σίγουρα αυξάνονται στο άπειρο, δεν επιτρέπουν στην κατανομή μείξης να έχει θετική μάζα στο μηδέν σε οποιαδήποτε συντεταγμένη. Όταν παραλείψουμε αυτή την ιδιότητα των τροχιών στον ορισμό των απαριθμήτριων διαδικασιών, θα πρέπει να προσθέσουμε μια άλλη ιδιότητα, όπως οτι οι τροχιές που αυξάνουν στο άπειρο έχουν τουλάχιστον αυστηρά θετικές πιθανότητες, για να εξασφαλιστεί για παράδειγμα, ότι η διωνυμική ιδιότητα οδηγεί σε αυστηρά θετικές πιθανότητες για όλους τους αριθμούς των γεγονότων ($P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] > 0$ για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$). Παράβαλε Λήμμα 4.2.8

## 5.2 Ένας χαρακτηρισμός

Σε αυτή την ενότητα θα χαρακτηρίσουμε τις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson στην κατηγορία των πολυμεταβλητών απαριθμητριών διαδικασιών. Για το επόμενο λήμμα θα εισάγουμε ένα νέο συμβολισμό. Για $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ θέτουμε

$$\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) := P\left[\bigcap_{i=1}^{k} \{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\}\right]$$

με $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$.

**Λήμμα 5.2.1.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια σ.δ. που έχει την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα . Τότε για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ ισχύει*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{(-t)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(t\mathbf{1}).$$

*Επιπλέον, υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0, 1]$ με $U[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη**. Θεωρούμε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$, $t \in \mathbb{R}_+$ με $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, t\mathbf{1})$. Από την επεκταμένη διωνυμική ιδιότητα προκύπτει

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty)} P\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^{(i)} = n^{(i)}\} \cap \{N_t^{(i)} - N_{t_i}^{(i)} = l^{(i)} - n^{(i)}\}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty]} \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{l^{(i)}}{n^{(i)}} \left(\frac{t_i}{t}\right)^{n^{(i)}} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}-n^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Ιδιαιτέρως, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \left(\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \left(\prod_{i=1}^{k} (t_i - t)^{l^{(i)}}\right) \frac{\Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1})}{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}
\end{aligned}$$

Η δυναμοσειρά $\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t})$ σε $k$ συντεταγμένες είναι απολύτως φραγμένη για $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, 2t\mathbf{1})$ επειδή $\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k} \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) = 1$ και άρα είναι απόλυτα συγκλίνουσα. Επομένως, η $\Pi_{\mathbf{0}}$ είναι συνεχής στο $(\mathbf{0}, 2t\mathbf{1})$ και η δυναμοσειρά παραγωγίζεται άπειρα φορές επάνω σε αυτό το ανοιχτό σύνολο (βλ. Dieudonne [9])

$$\begin{aligned}
D^{\mathbf{n}}\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty)} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{l^{(i)}!}{(l^{(i)} - n^{(i)})!} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}-n^{(i)}} \left(\frac{-1}{t}\right)^{n^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1}) \\
&= \frac{\mathbf{n}!}{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{l}\in[\mathbf{n},\infty)} \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{l^{(i)}}{n^{(i)}} \left(\frac{t_i}{t}\right)^{n^{(i)}} \left(1 - \frac{t_i}{t}\right)^{l^{(i)}-n^{(i)}}\right) \Pi_{\mathbf{l}}(t\mathbf{1})
\end{aligned}$$

και ως εκ τούτου ισχύει

$$\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}}\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t})$$

για κάθε $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, 2t\mathbf{1})$. Αφού το $t$ ήταν αυθαίρετο, η ανισότητα

$$(-1)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} D^{\mathbf{n}}\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) \geq 0$$

ισχύει για κάθε $\mathbf{t} \in (\mathbf{0}, \infty)$ και η $\Pi_{\mathbf{0}}$ είναι συνεχής στο $(\mathbf{0}, \infty)$.

Από το Λήμμα 4.1.4 $(ii)$ προκύπτει ότι η $\Pi_{\mathbf{0}}$ είναι δεξία συνεχής στο 0 και έτσι η $\Pi_0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^k$. Τελευταίο, αλλά όχι λιγότερο σημαντικό έχουμε οτι $\Pi_{\mathbf{0}} = 1$ αφού η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια $\sigma$.δ.

Έτσι η $\Pi_{\mathbf{0}}$ πληρεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος $Bernstein - Widder$ σε $k$ διαστάσεις (3.3.4), το οποίο συνεπάγεται την ύπαρξη μιας κατανομής $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0,1]$ με $U[\mathbb{R}_0^k] = 1$ έτσι ώστε για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^k$ να ισχύει η σχέση

$$\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{t}'\lambda} dU(\lambda)$$

Έτσι παίρνουμε $\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) = M_U(-\mathbf{t})$, όπου $M_U$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $U$. Αφού η $M_U$ είναι πεπερασμένη στο $(-\infty, \mathbf{0}]$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα (3.2.1) για να παραγωγίσουμε την $\Pi_{\mathbf{0}}$ στο $(\mathbf{0}, \infty)$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) &= \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) \\
&= \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} (-\lambda)^{\mathbf{n}} e^{-\mathbf{t}'\lambda} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{t}'\lambda} \frac{\mathbf{t}^{\mathbf{n}} \lambda^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \Pi_{\mathbf{n}}(t\mathbf{1})$, παίρνουμε αμέσως ότι

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{(-\mathbf{t})^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(t\mathbf{1})$$

και

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{\mathbf{n}!} dU(\lambda)$$

ισχύει για κάθε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$

Οι τελευταίες ισιότητες ισχύουν επίσης για $t = 0$ καθώς όλες οι τροχιές σχεδόν σίγουρα ξεκινούν από το $\mathbf{0}$. Επί πλέον από το Λήμμα 5.1.9 έχουμε οτι $U[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$ Το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Δεδομένου ότι στην προηγούμενη απόδειξη χρειαζόμαστε πολλές διαφορετικές μεταβλητές του χρόνου καθώς η διαδικασία έχει συντεταγμένες, δεν είναι δυνατόν να αντικατασταθεί η επεκτεταμένη διωνυμική ιδιότητα από τη διωνυμική ιδιότητα . Ωστόσο, καθώς η διωνυμική ιδιότητα μεταφέρεται στην μετασχηματσμένη διαδικασία και η επεκτεταμένη διωνυμική ιδιότητα με την διωνυμική ιδιότητα είναι ταυτόσημες, για μια μονομεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 5.2.2.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. η οποία έχει την διωνυμική ιδιότητα . Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $A \in \mathbb{R}^{1 \times k}$. Τότε υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0,1]$ με $U[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$ έτσι ώστε*

$$P[\{A\mathbf{N}_t = n\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda)$$

*ισχύει για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$ *και* $n \in \mathbb{N}_0$.

Ιδιαιτέρως, αυτό ισχύει για όλες τις συντεταγμένες $\{N_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για $i \in \{1,\dots,k\}$ και το άθροισμα $\{\mathbf{1}'\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όλων των συντεταγμένων της πολυμεταβλητής απαριθμήτριας διαδικασίας.

Από το Λήμμα 5.2.1, ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson είναι μάλλον προφανής.

**Θεώρημα χαρακτηρισμού 5.2.3.** *Έστω η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

*(i) Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson .*

*(ii) Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την πολυωνυμική ιδιότητα .*

*(iii) Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την επεκτεταμένη διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.*

*(iv) Η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.*

**Απόδειξη**. Η ισοδυναμία των $(ii), (iii)$ και $(iv)$ είναι ήδη γνωστή από το Λήμμα 4.2.16. Επιπλέον, από το Λήμμα 5.1.2 ισχύει $(i) \Longrightarrow (ii)$. Έτσι, παραμένει να αποδειχθεί οτι $(iii) \Longrightarrow (i)$.

Από το Λήμμα 5.2.1 υπάρχει μια κατανομή $U : \mathfrak{B}_k \longrightarrow [0,1]$ με $U[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

Από την πολυωνυμική ιδιότητα , η οποία είναι γνωστό οτι είναι ισοδύναμη με το $(iii)$, σε συνδυασμό με το Λήμμα 5.1.2 έπεται ο ισχυρισμός. □

Έτσι, με μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μείξης είμαστε σε μια άνετη κατάσταση. Δεν είναι μόνο ότι, λόγω της πολυωνυμικής ιδιότητας έχουμε μόνο να εξετάσουμε τις μονοδιάστατες κατανομές αντί της πεπερασμένης διάστασης κατανομές, αλλά και η μονοδιάστατη κατανομή μπορεί να μετατραπεί σε μια συνάρτηση,η οποία είναι ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής μείξης.

**Πόρισμα 5.2.4.** *Έστω η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μείξης* $U$ *. Τότε η ισότητα*

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_U(-t\mathbf{1})$$

*ισχύει για κάθε* $t > 0$ *και* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$.

**Απόδειξη**. Για $\Pi_{\mathbf{0}}(\mathbf{t}) = M_U(-\mathbf{t})$, έχουμε από το Λήμμα 5.2.1

$$\begin{aligned} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] &= \frac{(-t)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{0}}(t\mathbf{1}) \\ &= \frac{(-t)^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{n}} M_U(-\mathbf{x})}{\partial^{\mathbf{n}} \mathbf{x}} |_{\mathbf{x}=t\mathbf{1}} \\ &= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} M_U(-t\mathbf{1}) \end{aligned}$$

ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

Δοσμένης μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson η συνάρτηση $\Pi_{\mathbf{0}}$, η οποία μπορεί να εκφραστεί από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής μείξης, παρέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για τις πεπερασμένων διαστάσεων κατανομές. Επιπλέον, μπορούμε επίσης να αντλήσουμε διωνυμικές ροπές της διαδικασίας από αυτήν την ροπογεννήτρια συνάρτηση, όπως θα δείξουμε στη ενότητα 5.3. Η $\Pi_0$ ως μία συνάρτηση του χρόνου όχι μόνο παρέχει όλες τις πληροφορίες μια πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson αλλά επίσης η κατανομή του $N_t$ για κάθε $t > 0$ είναι επαρκής για τον προσδιορισμό των κατανομών πεπερασμένων διαστάσεων της διαδικασίας. Θα αναπτύξουμε το επόμενο λήμμα για να δούμε πώς λειτουργεί αυτό.

**Λήμμα 5.2.5.** *Έστω* $U$ *και* $V$ *είναι δυο κατανομές με* $U[(\mathbf{0}, \infty)] = V[(\mathbf{0}, \infty)] = 1$. *Έστω* $t > 0$ *και έστω οτι*

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dV(\lambda)$$

*για κάθε* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}}$. *Τότε* $U = V$.

**Απόδειξη**. Η ροπογεννήτριες συναρτήσεις $M_U$ και $M_V$ είναι πεπερασμένες για όλα τα $\mathbf{s} < \mathbf{0}$. Χρησιμοποιόντας το Λήμμα 3.2.1 παρατηρούμε οτι υπάρχει για όλα τα $\mathbf{s} < \mathbf{0}$ ένα ανάπτυγμα $Taylor$ γύρω από το $\mathbf{s}$ και έτσι οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις είναι αναλυτικές για $\mathbf{s} < \mathbf{0}$. Εξετάζοντας το ανάπτυγμα $Taylor$ στη περιοχή $B$ του $-t\mathbf{1}$ έχουμε για όλα τα $\mathbf{s} \in B$ οτι

$$M_U(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \frac{(\mathbf{s} + t\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \lambda^{\mathbf{n}} dU(\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \left(\frac{1}{t}(\mathbf{s}+t\mathbf{1})\right)^{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dU(\lambda)\\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \left(\frac{1}{t}(\mathbf{s}+t\mathbf{1})\right)^{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}dV(\lambda)\\
&= M_V(\mathbf{s}).
\end{aligned}
$$

Έτσι, $M_U(\mathbf{s}) = M_V(\mathbf{s})$ για κάθε $\mathbf{s} \in B$, από το οποίο προκύπτει (βλ. Dieudonne [9], 9.4.2) οτι $M_U(\mathbf{s}) = M_V(\mathbf{s})$ για κάθε $\mathbf{s} < \mathbf{0}$. Αφού οι $U$ και $V$ έχουν μάζα στο θετικό κώνο του $\mathbb{R}^k$ καθώς και οι $M_U$ και $M_V$ είναι συνεχείς στο $(-\infty, \mathbf{0}]$ η σχέση $M_U(\mathbf{s}) = M_V(\mathbf{s})$ ισχύει για κάθε $\mathbf{s} \leq \mathbf{0}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_V$ κάτω από τις υποθέσεις του λήμματος, όπου με $\mathcal{L}_U$ και $\mathcal{L}_V$ συμβολίζουμε το μετασχηματισμό *Laplace* του μέτρου $U$ και $V$, αντίστοιχα. Η μοναδικότητα του μετασχηματισμού *Laplace* (βλ. Kallenberg [2002] *Theorem* 5.3 [16]) μας δίνει οτι $U = V$. □

Τώρα είναι φανερό ότι η κατανομή μείξης $U$ καθορίζεται από την κατανομή ενός μόνο τυχαίου διανύσματος $\mathbf{N}_t$, ανεξάρτητα από το $t > 0$. Στην μονομεταβλητή περίπτωση μπορούν να βρευούν συγκεκριμένες αποδείξεις (βλ. π.χ. Teicher [26] (1961) ή Grandell [11] (1976) , *Theorem* 1.1) που δείχνουν οτι κατανομή μείξης προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη μικτή κατανομή Poisson που έχουμε.
Αφού μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία που έχει τη διωνυμική ιδιότητα και ανεξάρτητες προσαυξήσεις διαθέτει την πολυωνυμική ιδιότητα (βλ. Πόρισμα 4.2.20), είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μείξης, επίσης Ωστόσο, για να είμαστε πιο ακριβείς είναι μια κάπως ιδιαίτερη πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία *Poisson*. Για να γίνει αντιληπτή η έννοια της λέξης ϊδιαίτερη' δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 5.2.6.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, λέγεται **πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson** (multivariate Poisson process) an e'inai mia polumetablht'h mikt'h diadikas'ia Poisson me katanom'h me'ixhs $U$ kai up'arqei k'apoio $\mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \infty)$ 'wste $U[\{\mathbf{x}\}] = 1$.

Με άλλα λόγια, μία διαδικασία Poisson πολλών μεταβλητών είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με εκφυλισμένη κατανομή μίξης . Άρα

$$
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_i} = \mathbf{n}_j\}\right] = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} e^{-x_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(x_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!}
$$

ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ με $j \in \{1, \ldots, m\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η διαδικασία έχει ανεξάρτητες συντεταγμένες, οι οποίες είναι μονοδιάστατες διαδικασίες Poisson με τη συνήθη έννοια. Ωστόσο, ο προηγούμενος ορισμός χρησιμεύει μόνο ως σημείο αναφοράς, για παράδειγμα, στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.2.7.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson .*

*(ii)* *Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την διωνυμική ιδιότητα και ανεξάρτητες προσαυξήσεις .*

*(iii)* *Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και κάθε συντεταγμένη της είναι μια διαδικασία Poisson.*

**Απόδειξη**. $(c) \iff (a)$: Η παράσταση των πεπερασμένων διαστάσεων κατανομών αμέσως αποδίδει τον ισχυρισμό.
$(a) \implies (b)$: Καθώς κάθε πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία , έχει την διωνυμική ιδιότητα . Οι ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι εμφανείς από την παράσταση των πεπερασμένων διαστάσεων κατανομών.

$(b) \implies (a)$: Από το Πόρισμα 4.2.20 και το Θεώρημα 5.2.3, η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$. Επιπλέον, η μετασχηματισμένη διαδικασία $\{\mathbf{A}\mathbf{N}_{t\in\mathbb{R}_+}\}$ με $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ έχει επίσης, ως συνέπεια των Λημμάτων 4.2.7 και 4.2.3, την διωνυμική ιδιότητα και ανεξάρτητες προσαυξήσεις . Ιδιεταίρως, αυτό ισχύει με $\mathbf{A} = \mathbf{e}'_i$ για κάθε συντεταγμένη $\{\mathbf{N}_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, $i \in \{1,\dots,k\}$. Από τους *Schmidt* και *Zocher* [23] *Theorem* 3.2 κάθε συντεταγμένη είναι μια διαδικασία Poisson και επομένως για κάθε $i \in \{1,\dots,k\}$ υπάρχει κάποιο $x_i \in (0,\infty)$ έτσι ώστε $\{\mathbf{N}_t^{(i)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $\delta_{x_i}$. Ως εκ τούτου η

$$U = \delta_x = \bigotimes_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$$

είναι η μόνη κατανομή με $U_{e'_i} = \delta_{x_i}$ για κάθε $i \in \{1,\dots,k\}$. Επομένως, η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson . □

**Πόρισμα 5.2.8.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson . Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

*(ii)* *Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή διαδικασία Poisson.*

## 5.3 Οι ροπές

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με κάποιες ιδιότητες των διωνυμικών ροπών, ροπών γύρω από την αρχή η και των κεντρικών ροπών των τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{N}_t, t \in \mathbb{R}_+$. Και πάλι, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής μίξης θα διαδραματίσει ηγετικό ρόλο. Επιπλέον, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση θα βοηθήσει επίσης στο να αναλύσουμε τις ροπές τυχαίων διανυσμάτων.

**Θεώρημα 5.3.1.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ . Τότε η σχέση*

$$g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_U(t(\mathbf{r}-\mathbf{1}))$$

*ισχύει για όλα τα $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη**. Θεωρούμε $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε

$$\begin{aligned}
g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} \prod_{i=1}^{k} \sum_{n^{(i)}\in\mathbb{N}_0} \frac{(\lambda_i t r_i)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} dU(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\lambda t} e^{\mathbf{r}'\lambda t} dU(\lambda) \\
&= M_U(t(\mathbf{r}-\mathbf{1}))
\end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός είναι εμφανής. □

**Πόρισμα 5.3.2.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε*

*(i)* $g_{A\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = g_{\mathbf{N}_t}(A'\mathbf{r})$ *αν* $A \in \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_C$.

*(ii)* $g_{A\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = g_{\mathbf{N}_t}(A'\mathbf{r} + \mathbf{1} - A'\mathbf{1})$ *αν* $A \in \mathcal{A}_S$.

**Απόδειξη**. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Έστω οτι ισχύει η $(i)$. Τότε για αυθαίρετο $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
g_{A\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) &= M_{U_A}(t(\mathbf{r}-\mathbf{1}))\\
&= M_U(A't(\mathbf{r}-\mathbf{1}))\\
&= M_U(t(A'\mathbf{r}-A'\mathbf{1}))\\
&= M_U(t(A'\mathbf{r}-A'\mathbf{1}+\mathbf{1}-\mathbf{1}))\\
&= g_{\mathbf{N}_t}(A'\mathbf{r}+\mathbf{1}-A'\mathbf{1})
\end{aligned}
$$

Όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο απόδειξης του Θεωρήματος 5.3.1 , δεύτερη από το Λήμμα 3.2.2 , ενώ η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.1.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ Αφού $A'\mathbf{1}=\mathbf{1}$ και $A \in A_P \cup A_C$ Άρα ισχύει η $(ii)$. □

Το Θεώρημα 5.3.1 δείχνει ότι η ροπογεννήτριας συνάρτηση της κατανομής μίξης περιέχει επίσης πληροφορίες σχετικά με τις διωνυμικές ροπές των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να διατυπώσουμε συνθήκες για το πεπερσμένο τέτοιων ροπών στα επόμενα δύο θεωρήματα. Αλλά πριν από αυτό αναφέρουμε ένα σύντομο λήμμα.

**Λήμμα 5.3.3.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε*

$$
E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} U(d\lambda)
$$

*ισχύει για κάθε $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη**. Έστω $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Από το Λήμμα 3.1.2, το Θεώρημα 5.3.1, το Λήμμα 3.2.1 και από το το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$
\begin{aligned}
E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] &= \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{1}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r})\\
&= \sup_{\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{1}{\mathbf{l}!} \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{l}} M_U(t(\mathbf{x}-\mathbf{1}))}{\partial^{\mathbf{l}}\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{r}}\\
&= \sup_{\mathbf{s}\in[-t\mathbf{1},\mathbf{0})} \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} M_U(\mathbf{s})\\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \sup_{\mathbf{s}\in[-t\mathbf{1},\mathbf{0})} \int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} e^{\mathbf{s}'\lambda} U(d\lambda)\\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \int_{\mathbb{R}^k} \sup_{\mathbf{s}\in[-t\mathbf{1},\mathbf{0})} \lambda^{\mathbf{l}} e^{\mathbf{s}'\lambda} U(d\lambda)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\int_{\mathbb{R}^k}\lambda^{\mathbf{l}}U(d\lambda)$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 3.1.2, η δεύτερη από το Θεώρημα 5.3.1 και τον ορισμό της παραγώγου και η τέταρτη είναι συνέπεια του Λήμματος 3.2.1

Αφού $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ σχεδόν βέβαια ο ισχυρισμός ισχύει για $t = 0$, επίσης. □

**Θεώρημα 5.3.4.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και $\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^k$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

*(a) Υπάρχουν κάποια $t>0$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] < \infty.$$

*(b) Η σχέση*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] < \infty$$

*ισχύει για $t\in\mathbb{R}_+$.*

*(c) Η κατανομή μίξης ικανοποιεί την σχέση*

$$\int_{\mathbb{R}^k}\lambda^{\mathbf{l}}dU(\lambda) < \infty.$$

*(d) Για κάθε $\mathbf{s}\in(-\infty,\mathbf{0})$ ισχύει η ανισότητα*

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} D^{\mathbf{l}}M_U\mid_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r}) < \infty.$$

*Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πληροί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες ιδιότητες, τότε*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} D^{\mathbf{l}}M_U\mid_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r})$$

*για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη**. Η ισοδυναμία των $(a), (b)$ και $(c)$ προκύπτει από το Λήμμα 5.3.3.

$(a) \Longleftrightarrow (b)$ Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.1 ισχύει

$g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_U(t(\mathbf{r}-\mathbf{1}))$ ισχύει για $r\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ και $t>0$. Έτσι, ο ισχυρισμός προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 3.1.5.

Επιπλέον, έχουμε

$$
\begin{aligned}
E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] &= \frac{1}{\mathbf{l}!}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1}} D^{\mathbf{l}} g_{\mathbf{N}_t}\mid_{[\mathbf{0},\mathbf{1})}(\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{\mathbf{l}!}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{1},\mathbf{r}\in[\mathbf{0},\mathbf{1})} \frac{\partial^{\mathbf{1}'\mathbf{l}} M_U(t(\mathbf{x}-\mathbf{1}))}{\partial^{\mathbf{l}}\mathbf{x}}\mid_{\mathbf{x}=\mathbf{r}} \\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^{\mathbf{l}} M_U\mid_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

για κάθε $t > 0$. Αφού $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ σχεδόν σίγουρα, ο ισχυρισμός ισχύει για $t = 0$, επίσης. □

**Θεώρημα 5.3.5.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(a) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ υπάρχει $t > 0$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty.$$

*(b) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ η ανισότητα*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(c) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{m}} U(d\lambda) < \infty.$$

*(d) Για όλα τα $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$ η $\mathbf{m}$-οστή παράγωγος του $M_U\mid_{(-\infty,\mathbf{0}]}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, \mathbf{0}]$.*

*Αν η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες ιδιότητες, τότε ισχύει*

$$E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} D^{l} M_U\mid_{(-\infty,\mathbf{0}]}(\mathbf{0})$$

*για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Απόδειξη**. Λόγω του Λήμματος 3.1.8 έχουμε την ισοδυμανία των $(a), (b)$ και $(c)$ από το Θεώρημα 5.3.4.
$(b) \iff (d)$: Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.1 ισχύει $g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_U(t(\mathbf{r}-\mathbf{1}))$ για όλα τα $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ και $t > 0$. Έτσι, από το Λήμμα 3.1.8 έπεται ο ισχυρισμός.

Αφού ισχύει η συνθήκη $(c)$ του Θεωρήματος 5.3.4, επιπλέον έχουμε τη συνέχεια της $\mathbf{l}$-οστής παραγώγου της $M_U$

$$
\begin{aligned}
E\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{1}}\right] &= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{r}) \\
&= \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{r}),
\end{aligned}
$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει το Θεώρημα 5.3.4. □

Ως συνέπεια του Λήμματος 5.3.3 και της ισοδυναμίας των $(c)$ και $(d)$ στο Θεώρημα 5.3.4 έχουμε

$$
\lim_{\mathbf{r}\uparrow\mathbf{0}} D^l M_U \mid_{(-\infty,\mathbf{0}]} (\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda^{\mathbf{l}} U(d\lambda)
$$

στην περίπτωση που ένας από τους όρους είναι πεπερασμένος. Δεν απαιτούμε, όπως στο Λήμμα 3.2.1, το πεπερασμένο της ροπογεννήτριας συνάρτησης $M_U$ σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$. Υπό αυτή την κατάσταση θα υπάρχουν όλες οι παράγωγοι της $M_U$ στο $\mathbf{0}$ και, ως εκ τούτου όλες οι ροπές της $\mathbf{N}_t$ θα είναι πεπερασμένες. Με μια παράκαμψη για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης σε κάποια χρονική στιγμή $t$ θα ήμασταν σε θέση να βελτιώσουμε αποτελέσματα για την ροπογεννήτρια συνάρτηση.
Με τις ιδιότητες που έχουμε μέχρι τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε συνθήκες για το πεπερασμένο της πρώτη και της δεύτερης κεντρικής ροπής της διαδικασίας σε κάποιο χρόνο $t$, το οποίο θα διευκρινίσουμε στο επόμενο πόρισμα.

**Πόρισμα 5.3.6.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $U$ και έστω $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ με $i \neq j$.*

*(i) Αν $\int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i U(d\lambda) < \infty$, τότε $\mathbb{E}[N_t^{(i)}] < \infty$ και*

$$
\mathbb{E}[N_t^{(i)}] = t\int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i U(d\lambda)
$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(ii) Αν $\int_{\mathbb{R}^k} (\lambda_i)^2 U(d\lambda) < \infty$, τότε $\mathbb{E}[(N_t^{(i)})^2] < \infty$ και*

$$
Var[N_t^{(i)}] = t^2 \int_{\mathbb{R}} (\lambda_i - \int_{\mathbb{R}^k} x_i U(d\mathbf{x}))^2 U(d\lambda) + t\int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i dU(\lambda)
$$

*ισχύει για $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(iii) Αν* $\max\{\int_{\mathbb{R}^k}\lambda_i\lambda_j U(d\lambda), \int_{\mathbb{R}^k}\lambda_i dU(\lambda), \int_{\mathbb{R}^k}\lambda_j U(d\lambda)\} < \infty$*,τότε*

$$\mathbb{E}[N_t^{(i)}N_t^{(j)}] < \infty, \qquad \mathbb{E}[N_t^{(i)}] < \infty, \qquad \mathbb{E}[N_t^{(j)}] < \infty$$

*και*

$$Cov[N_t^{(i)}, N_t^{(j)}] = t^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_i - \int_{\mathbb{R}^k} x_i U(d\mathbf{x})\right)\left(\lambda_j - \int_{\mathbb{R}^k} x_j U(d\mathbf{x})\right) U(d\lambda)$$

*ισχύει για* $t \in \mathbb{R}_+$.

**Απόδειξη**.

Αφού $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ σχεδον βέβαια, ο ισυρισμός ισχύει γαι $t = 0$. Για $t > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.3 και και μετασχηματισμό μεταξύ διωνυμικών και των κεντρικών ροπών. □

Το παραπάνω πόρισμα μας δείχνει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των πολυμεταβλητών διαδικασιών Poisson και των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με κατανομή μίξης μη-εκφυλισμένη . Εάν $U$ είναι μια κατανομή εκφυλισμένη τότε, και μόνο τότε

$$Var[N_t^{(i)}] = t \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_i U(d\lambda) = \mathbb{E}[N_t^{(i)}]$$

για όλα τα $i \in \{1, \ldots, k\}$. Εάν $U$ είναι εκφυλισμένη έχουμε επίσης $Cov[N_t^{(i)}, N_t^{(j)}] = 0$ για $i \neq j$, το οποίο είναι απολύτως σαφές, δεδομένου ότι οι συντεταγμένες της διαδικασίας είναι ανεξάρτητες.

Για να σχεδιάσουμε ένα συμπέρασμα από αυτή την ενότητα επισημαίνουμε ότι η ροπογεννήτρια συνάρτιση $M_U$ της κατανομής μίξης δεν καθορίζει μόνο τις μονοδιάστατες κατανομές της διαδικασίας, αλλά και τις ροπές της $\mathbf{N}_t$ με $t \in \mathbb{R}_+$. Οι μετασχηματισμένες διαδικασίες $\{\mathbf{AN}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $A \in \mathcal{A}$ είναι πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με κατανομή μίξης $U_A$. Ως συνέπεια της

$$M_{U_A}(\mathbf{t}) = M_U(A'\mathbf{t})$$

βλ. Λήμμα 3.2.2 η συνάρτηση $M_U$ περιέχει επίσης πληροφορίες σχετικά με τις μονοδιάστατες κατανομές και τις ροπές των μετασχηματισμένων διαδικασιών.

πολυμεταβλητή

# Κεφάλαιο 6

# Πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με τυχαία παράμετρο

## 6.1 Το υπόδειγμα

Μια μικτή διαδικασία Poisson μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα ενός μοντέλου δύο βημάτων. Πρώτα επιλέγεται μια παράμετρος σύμφωνα με την κατανομή μίξης και στη συνέχεια η εμφάνιση των υπό εξέταση γεγονότων στο χρονικό διάστημα της μονάδας ακολουθεί κατανομή Poisson, με μέση τιμή την επιλεγμένη παράμετρο. Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε το μοντέλο της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson με κατανομή μίξης με την παραδοχή ότι η παράμετρος είναι μια υλοποίηση ενός τυχαίου διανύσματος και επιπλέον λαμβάνοντας υπόψη τις εξαρτημένες πιθανοτήτες της διαδικασίας ως προς το υπάρχον τυχαίο διάνυσμα.

**Ορισμός 6.1.1.** Μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ λέγεται **πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\boldsymbol{\Theta}$** αν $\boldsymbol{\Theta}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με $P_{\boldsymbol{\Theta}}[(\mathbf{0},\infty)] = 1$ έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j|\boldsymbol{\Theta}\}\right) = \prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\boldsymbol{\Theta}(t_j-t_{j-1})}\frac{\boldsymbol{\Theta}(t_j-t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} \qquad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$, όπου $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Ο ορισμός αυτός εμπεριέχει δεσμευμένες πιθανότητες, με την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής, των προσαυξήσεων πεπερασμένης διάστασης της διαδικασίας. Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης μικτής διαδικασίας Poisson (βλ. Ορισμό 2.5.3), υπάρχει ένας ισοδύναμος ορισμός χρησιμοποιώντας άλλες ιδιότητες των στοχαστικών διαδικασιών. Ως εκ τούτου, εισάγουμε την έννοια της δεσμευμένης ανεξαρτησίας και των δεσμευμένων στάσιμων προσαυξήσεων.

**Ορισμοί 6.1.2.** **(α)** Έστω μια $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία και $\mathbf{\Theta}$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ λέγεται οτι έχει **δεσμευμένες ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το $\mathbf{\Theta}$ αν ισχύει η ισότητα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\mathbf{\Theta}\}\right)=\prod_{j=1}^{m}P(\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\mathbf{\Theta}\})$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,\ldots,m\}$.

**(β)** Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ λέγεται οτι έχει **δεσμευμένες στάσιμες προσαυξήσεις** (conditionally stationary increments) ως προς το $\mathbf{\Theta}$ αν ισχύει η ισότητα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j+h}-\mathbf{N}_{t_{j-1}+h}=\mathbf{n}_j|\mathbf{\Theta}\}\right)=P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\mathbf{\Theta}\}\right)$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,\ldots,m\}$.

**Θεώρημα 6.1.3.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία και $\mathbf{\Theta}$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

*(i) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$.*

*(ii) Η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ έχει δεσμευμένες ανεξάρτητες και δεσμευμένες στάσιμες προσαυξήσεις ως προς το $\mathbf{\Theta}$ και ισχύει η ισότητα*

$$P(\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}|\mathbf{\Theta}\})=e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}t}\frac{(\mathbf{\Theta}t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta.$$

*για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k$.*

**Απόδειξη:** $(i)\Rightarrow(ii)$: Είναι προφανές
$(ii)\Rightarrow(i)$: Έστω $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j\in\mathbb{N}_0^k$, όπου $j\in\{1,\ldots,m\}$.

Τότε

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\mathbf{\Theta}\}\right)\ =\ \prod_{j=1}^{m}P(\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j|\mathbf{\Theta}\})$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{j=1}^{m} P(\{\mathbf{N}_{t_j - t_{j-1}} = \mathbf{n}_j | \mathbf{\Theta}\}) \\ &= \prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(t_j - t_{j-1})} \frac{\mathbf{\Theta}(t_j - t_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!}, \end{aligned}$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ Επομένως έπεται ο ισχυρισμός. □

Σε αντίθεση με τον ορισμό των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με κατανομή μίξης, ο ορισμός του πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με παράμετρο εμπεριέχει τις δεσμευμένες πιθανότητες. Λαμβάνοντας υπόψη τις μη δεσμευμένες πιθανότητες, το επόμενο πόρισμα είναι προφανές.

**Πόρισμα 6.1.4.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ μια πολυμεταβλητή μικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$. Τότε η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με κατανομή μίξης $P_{\mathbf{\Theta}}$.*

**Παρατήρηση 6.1.5.** **(α)** Η πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο , έχει όλες τις ιδιότητες μιας πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson με κατανομή μίξης. Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν φαίνεται να ισχύει γενικά, δεδομένου ότι γενικά δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν οι δεσμευμένες πιθανότητες από τις μη δεσμευμένες. Ως εκ τούτου, ο χαρακτηρισμός της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson με μικτή κατανομή στα πλαίσια της πολυωνυμικής ιδιότητας (Θεώρημα 5.2.3) γενικά δεν μπορεί να μεταφερθεί στην πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο . Κατ΄ αρχήν, δεν είμαστε σίγουροι για την ύπαρξη τυχαίου διανύσματος με την κατανομή προερχόμενη από το Θεώρημα $Bernstein - Widder$ για το συγκεκριμένο χώρο πιθανότητας. Από την άλλη πλευρά, υποθέτοντας οτι υπάρχει ένα τέτοιο τυχαίο διάνυσμα δεν είναι γενικά δυνατό να κατασκευαστούν οι δεσμευμένες πιθανότητες με βάση τον ορισμό των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με την παράμετρο από τις μη δεσμευμένες.
**(β)** Κάτω από κάποιες ασθενείς συνθήκες, που ικανοποιούνται από μια ευρεία κλάση χ.π., έχει αποδειχθεί στην [18], *Theorem* 2.7, οτι για μονομεταβλητές μικτές στοχαστικές διαδικασίες Poisson με παράμετρο μια τυχαία μεταβλητή ισχύει το αντίστροφο του Πορίσματος 6.1.4.
**(γ)** Επίσης κάτω από ορισμένες συνθήκες, που ικανοποιούνται από μια ευρεία κλάση χ.π. έχει αποδειχθεί στην [19], *Theorem* 2.11 ένας χαρακτηρισμός της μονομεταβλητής μικτής σ.δ. Poisson με παράμετρο μια τυχαία μεταβλητή μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητα και της ιδιότητας *Markov*.

Όμως τα παρακάτω ερωτήματα παραμένουν ανοικτά.

**Ερωτήματα 6.1.6.** Κάτω από ποιές συνθήκες:

($\alpha$) οι ορισμοί μιας πολυμεταβλητής σ.δ. Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα και μιας πολυμεταβλητής σ.δ. Poisson με κατανομή μίξης είναι ισοδύναμοι;

($\beta$) ο ορισμός μιας πολυμεταβλητής μικτής σ.δ. Poisson με παράμετρο ένα τυχαίο διάνυσμα είναι ισοδύναμος με την ιδιότητα Markov;

Σύμφωνα με το παραπάνω ερώτημα, ο χαρακτηρισμός των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας (Λήμμα 5.1.2) δεν είναι γνωστό αν εφαρμόζεται στις πολυμεταβλητές μικτές διαδικασίες Poisson με παράμετρο. Ως εκ τούτου, για να δείξουμε ότι μια μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο είναι $\mathcal{A}$-σταθερή , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απόδειξη του Λήμματος 5.1.4. Ωστόσο, εφαρμόζοντας αυτή τη φορά το Θεώρημα 6.1.3 έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Λήμμα 6.1.7.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία και $\mathbf{\Theta}$ ένα τυχαίο διάνυσμα.Τότε*

*(i) Η ιδιότητα του να έχει δεσμευμένες ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς $\mathbf{\Theta}$ είναι $\mathcal{A}$-σταθερη.*

*(ii) Η ιδιότητα του να έχει δεσμευμένες στάσιμες προσαυξήσεις ως προς $\mathbf{\Theta}$ είναι $\mathcal{A}$-σταθερη.*

**Απόδειξη.** Ο ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί από τους ίδιους μετασχηματισμούς όπως στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.3, με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε δεσμευμένες πιθανότητες αντί των μη δεσμευμένων πιθανοτήτων. □

**Λήμμα 6.1.8.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$ και έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε*

*(i) Η διαδικασία $\{A\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετο $A\mathbf{\Theta}$ . Αυτό σημαίνει, οτι αφού είναι μια μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο, είναι $\mathcal{A}$-σταθερή .*

*(ii) Η ισότητα*
$$P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|A\mathbf{\Theta}) = P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|\mathbf{\Theta})$$
*ισχύει για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε ένα $t \in \mathbb{R}_+$ και ένα $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d$. Αρχικά θα αποδείξουμε οτι

$$\mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t\}=\mathbf{l}}|\mathbf{\Theta}] = e^{-\mathbf{1}'A\mathbf{\Theta}t}\frac{(A\mathbf{\Theta}t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \tag{6.1}$$

ισχύει για όλα τα $A \in \mathcal{A}$ και $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$.
Έστω $A \in \mathcal{A}_P$. Τότε η (6.1) είναι προφανής.
Έστω $A \in \mathcal{A}_S$. Τότε έχουμε με την βοήθεια της μονότονης σύγκλισης για την δεσμευμένη μέση τιμή τις παρακάτω ισότητες:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t\}=\mathbf{l}}|\mathbf{\Theta}] &= E\left[\sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}}|\mathbf{\Theta}\right] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} P(\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}|\mathbf{\Theta}) \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \prod_{i=1}^{k} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{l^{(i)}}}{l^{(i)}!}\right) \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \prod_{i=d+1}^{k} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \\
&= e^{-\mathbf{\Theta} t}\frac{(\mathbf{\Theta} t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \\
&= e^{-\mathbf{1}'A-\mathbf{\Theta} t}\frac{(A\mathbf{\Theta} t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.
\end{aligned}
$$

Έτσι η (6.1) ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{A}_S$.
Έστω $A \in \mathcal{A}_C$. Θέτωντας $I(i) := \{h \in \{1,\ldots,k\} : \mathbf{e}'_i A\mathbf{e}_h = 1\}$ (το σύνολο των συντεταγμένων σωρεύονται στην ι-συντεταγμένη της μετασχηματισμένης διαδικασίας), έχουμε $\sum_{h\in I(i)} \theta_h = \mathbf{e}'_i A\theta$ για όλα τα $i \in \{1,\ldots,d\}$.

Έτσι, με τον ίδιο τρόπο, όπως και πριν, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_{A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}}|\mathbf{\Theta}] &= \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \prod_{i=1}^{k} e^{-\Theta_i t}\frac{(\Theta_i t)^{n^{(i)}}}{n^{(i)}!} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d} e^{-\mathbf{e}'_i A\mathbf{\Theta} t}\frac{(\mathbf{e}'_i A\mathbf{\Theta}\mathbf{t})^{l^{(i)}}}{l^{(i)}!}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{\mathbf{n}\in A^{-1}(\{\mathbf{l}\})} \prod_{i=1}^{d} \frac{l^{(i)}}{\prod_{h\in I(i)} n^{(h)}!} \prod_{h\in I(i)} \left(\frac{\Theta_h}{\mathbf{e}'_i A\mathbf{\Theta}}\right)^{n^{(h)}} \\
&= e^{-\mathbf{1}'A\mathbf{\Theta} t}\frac{(A\mathbf{\Theta})^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.
\end{aligned}
$$

Ως εκ τούτου, η (6.1) ισχύει για όλα τα $A \in \mathcal{A}$. Τώρα θα αποδείξουμε τις $(i)$ και $(ii)$.

(i) Από την σχέση (6.1) έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|A\boldsymbol{\Theta}) &= E\left[\mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}\}}|\boldsymbol{\Theta}]|A\boldsymbol{\Theta}\right] \\
&= E\left[e^{-\mathbf{1}'A\boldsymbol{\Theta}t}\frac{(A\boldsymbol{\Theta}t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}|A\boldsymbol{\Theta}\right] \\
&= e^{-\mathbf{1}'A\boldsymbol{\Theta}t}\frac{(A\boldsymbol{\Theta}t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}.
\end{aligned}
$$

Τώρα,από το Θεώρημα 6.1.3 σε συνδιασμό με το Λήμμα 6.1.7 προκύπτει η $(i)$.

(ii) Χρησιμοποιόντας τη σχέση (6.1) και την $(i)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|A\boldsymbol{\Theta}) &= e^{-\mathbf{1}'A\boldsymbol{\Theta}t}\frac{(A\boldsymbol{\Theta}t)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} \\
&= \mathbb{E}[\chi_{\{A\mathbf{N}_t=\mathbf{l}\}}|\boldsymbol{\Theta}] \\
&= P(\{A\mathbf{N}_t = \mathbf{l}\}|\boldsymbol{\Theta}).
\end{aligned}
$$

Επομένως η $(ii)$ έχει αποδειχθεί. □

Αφού μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο είναι μια πολυμεταβλητή μικτή Διαδικασία Poisson με κατανομή μεταφέρουμε κάποια αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5. Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $P_{\boldsymbol{\Theta}}$ αντί του $U$ και έτσι θα είναι πιο εύκολο να θυμόμαστε τα αποτελέσματα . Ο πρώτος ισχυρισμός που εξετάζεται είναι του Θεωρήματος 5.1.5.

**Θεώρημα 6.1.9.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\boldsymbol{\Theta}$ . Τότε οι συντεταγμένες της $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν οι συντεταγμένες της $\boldsymbol{\Theta}$ είναι ανεξάρτητες.*

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στην εργασία του *Zocher* [2003]. Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρεται στον *Zocher* [2003], επίσης. Θεωρεί υπό όρους ανεξαρτησία ως προς την παράμετρο η οποία είναι τώρα δυνατή λόγω της παραμέτρου Θ που έχει εισάχθεί στον ορισμό.

**Θεώρημα 6.1.10.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\boldsymbol{\Theta}$ . Τότε οι συντεταγμένες της $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητες ως προς $\boldsymbol{\Theta}$.*

**Απόδειξη.** Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $A = \mathbf{e}'_i$ με $A\boldsymbol{\Theta} = \Theta_i$, και το Λήμμα 6.1.6 έχουμε

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}|\mathbf{\Theta}\right) &= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} e^{-\Theta_i(t_j-t_{j-1})}\frac{(\Theta_i(t_j-t_{j-1}))^{n_j^{(i)}}}{n_j^{(i)}!} \\ &= \prod_{i=1}^{k} P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}^{(i)}-N_{t_{j-1}}^{(i)}=n_j^{(i)}\}|\Theta_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k} P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}^{(i)}-N_{t_{j-1}}^{(i)}=n_j^{(i)}\}|\mathbf{\Theta}\right) D \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για κάθε $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k$ με $j \in \{1, \ldots, m\}$. □

Όπως και στο Κεφάλαιο 5, η ροπογεννήτριες συναρτήσεις διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Για λόγους απλοποίησης θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $M_{\mathbf{\Theta}}$ αντί $M_{P_{\mathbf{\Theta}}}$ για τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{\Theta}$.

Από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 έχουμε

$$P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} D^{\mathbf{n}} M_{\mathbf{\Theta}}(-t\mathbf{1})$$

$\Delta$ για κάθε $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ και $t > 0$ καθώς και $M_{A\mathbf{\Theta}}(\mathbf{t}) = M_{\mathbf{\Theta}}(A'\mathbf{t})$ για $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Έτσι, οι μονοδιάστατες πιθανότητες, οι οποίες είναι οι πιο κατάλληλες, λόγω της πολυωνυμικής ιδιότητας, καθορίζονται από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της $\mathbf{\Theta}$. Επιπλέον, οι μονοδιάστατες πιθανότητες των μετασχηματισμένων διαδικασιών καθορίζονται επίσης από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_{\mathbf{\Theta}}$. Η εφαρμογή αυτής της συνάρτησης σε σχέση με τις ροπές της διαδικασίας εξετάζεται στην επόμενη ενότητα.

## 6.2 Ροπές

Στην Ενότητα 5.3 έχουμε αναφέρει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το πεπερασμένο των διωνυμικών ροπών, των ροπών γύρω από την αρχή και των κεντρικών ροπών των πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson με μικτή κατανομή. Ένα σημαντικό εργαλείο ήταν η πιθανογεννήτρια συνάρτηση. Στην περίπτωση της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασίας Poisson με την παράμετρο παραθέτουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

**Θεώρημα 6.2.1.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή απαριθμήτρια διαδικασία Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$. Τότε ισχύει η σχέση*

$$g_{\mathbf{N}_t}(\mathbf{r}) = M_{\mathbf{\Theta}}(t(\mathbf{r}-\mathbf{1}))$$

*για κάθε* $\mathbf{r} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ *και* $t \in \mathbb{R}_+$. *Η διωνυμική ροπή της* $\mathbf{N}_t$ *πληροί την σχέση*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}^{\mathbf{l}}]$$

*για κάθε* $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$ *και* $l \in \mathbb{R}_+$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του Θεωρήματος 5.3.1. □

**Θεώρημα 6.2.2.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο* $\mathbf{\Theta}$ *και* $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. *Τότε τα ακόλουθα είναιισοδύναμα.*

(a) *Υπάρχει* $t > 0$ *έτσι ώστε να ισχύει η σχέση*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] < \infty.$$

(b) *Ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] < \infty$$

*για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

(c) *Η παράμετρος ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}^{\mathbf{l}}] < \infty.$$

(d) *Για κάθε* $\mathbf{s} \in (-\infty, \mathbf{0}]$ *ισχύει η ανισότητα*

$$lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{s}} D^{\mathbf{l}} M_{\mathbf{\Theta}}|_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r}) < \infty.$$

*Αν η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *πληροί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες σχέσεις, τότε ισχύει η ισότητα*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} D^{\mathbf{l}} M_{\mathbf{\Theta}}|_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{r})$$

*για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του Θεωρήματος 5.3.4. □

**Θεώρημα 6.2.3.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο* $\mathbf{\Theta}$ *και* $\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^k$. *Τότε τα ακόλουθα είναιισοδύναμα:*

(a) *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{1}$ *υπάρχει* $t > 0$ *έτσι ώστε να ισχύει η σχέση*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty.$$

(b) *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{1}$ *και για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$ *ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}[(\mathbf{N}_t)^{\mathbf{m}}] < \infty.$$

(c) *Η παράμετρος ικανοποιεί τη σχέση*

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\Theta}^{\mathbf{m}}] < \infty,$$

*για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$.

(d) *Για κάθε* $\mathbf{m} \leq \mathbf{l}$, *η* $\mathbf{m}$*-οστή παράγωγος της* $M_{\boldsymbol{\Theta}}|_{(-\infty,\mathbf{0})}$ *είναι συνεχής στο* $(-\infty, \mathbf{0}]$.

*Αν η* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *πληροί μία και ως εκ τούτου όλες τις προηγούμενες σχέσεις, τότε ισχύει η ισότητα*

$$\mathbb{E}\left[\binom{\mathbf{N}_t}{\mathbf{l}}\right] = \frac{t^{\mathbf{1}'\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!} D^{\mathbf{l}} M_{\boldsymbol{\Theta}}|_{(-\infty,\mathbf{0})}(\mathbf{0})$$

*για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

Η απόδειξη γίνεται όπως και στο Θεώρημα 5.3.5. □

Ως αποτέλεσμα αυτών των θεωρημάτων είναι δυνατόν να διατυπώσουμε συγκεκριμένους τύπους για την πρώτη και τη δεύτερη κεντρική ροπή του $N_t$ όπως στο Πόρισμα 5.3.6. Ωστόσο, αυτά τα αποτελέσματα μπορούν επίσης να ληφθούν με συμπαγή τρόπο χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη μέση τιμή . Η προσέγγιση αυτή επιπλέον μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσετε τη συνδιακύμανση των $\mathbf{N}_t$ και $\mathbf{N}_{t+h}$.

**Θεώρημα 6.2.4.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο* $\boldsymbol{\Theta}$ .

(i) *Αν η παράμετρος* $\boldsymbol{\Theta}$ *έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης, τότε*

$$\mathbb{E}[\mathbf{N}_t] = t\mathbb{E}[\boldsymbol{\Theta}]$$

*ισχύει για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

*(ii) Αν η παράμετρος* $\mathbf{\Theta}$ *έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης, τότε*

$$Cov[\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h}] = tDiag\left(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]\right) + t(t+h)Var[\mathbf{\Theta}]$$

*ισχύει για κάθε* $t, h \in \mathbb{R}_+$.

*(iii) Αν η παράμετρος* $\mathbf{\Theta}$ *έχει μια πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης και* $Var[\Theta_i] > 0$ *και* $Var[\Theta_l] > 0$ *για* $i, l \in \{1, \ldots, k\}$ *με* $i \neq l$*, τότε ισχύει η ισότητα*

$$lim_{t\uparrow\infty}\varrho\left(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}\right) = \varrho(\Theta_i, \Theta_l).$$

*Επιπλέον η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι αύξουσα στο* $(0, \infty)$.

**Απόδειξη.** Πριν αποδείξουμε τους ισχυρισμούς, θα κάνουμε κάποιες προκαταρκτικές παρατηρήσεις. Από το Λήμμα 6.1.8 έχουμε οτι (το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{\Theta}$ είναι σχεδόν σίγουρα πεπερασμένο) $\mathbb{E}(N_t^{(i)}|\mathbf{\Theta}) = E(N_t^{(i)}|\Theta_i) = t\Theta_i$ και $Var(N_t^{(i)}|\mathbf{\Theta}) = Var(N_t^{(i)}|\Theta_i) = t\Theta_i$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Από την συνθήκη ανεξαρτησίας των συντεταγμένων ως προς $\mathbf{\Theta}$ έχουμε οτι $Cov(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}|\mathbf{\Theta}) = 0$ για $i \neq l$, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.10. Συνολικά, έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta}) = t\mathbf{\Theta} \qquad Var(\mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta}) = tDiag(\mathbf{\Theta}).$$

$(i)$: Με το $\mathbf{\Theta}$ επίσης το $\mathbf{N}_t$ έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ (Θεώρημα 6.2.3). Έτσι έχουμε

$$\mathbb{E}[\mathbf{N}_t] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta})\right] = \mathbb{E}[t\mathbf{\Theta}] = t\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}].$$

$(ii)$: Εάν το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{\Theta}$ έχει πεπερασμένη ροπή δεύτερης τάξης, τότε έχει πεπερασμένη ροπή πρώτης τάξης, επίσης. Έτσι, $\mathbf{N}_t$ έχει πεπερασμένες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (Θεώρημα 6.2.3) και έτσι ισχύει

$$\begin{aligned}
Cov[\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h}] &= \mathbb{E}[Cov(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h}|\mathbf{\Theta})] + Cov[E(\mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta}), E(\mathbf{N}_{t+h}|\mathbf{\Theta})] \\
&= \mathbb{E}[Cov(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h} - \mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta})] + \mathbb{E}[Var(\mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta})] + Cov[t\mathbf{\Theta}), (t+h)\mathbf{\Theta}] \\
&= \mathbb{E}[tDiag(\mathbf{\Theta})] + t(t+h)Var[\mathbf{\Theta}] \\
&= tDiag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]) + t(t+h)Var[\mathbf{\Theta}]
\end{aligned}$$

όπου $Cov(\mathbf{N}_t, \mathbf{N}_{t+h} - \mathbf{N}_t|\mathbf{\Theta}) = 0$, διότι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς $\mathbf{\Theta}$.
$(iii)$: Αφού

$$\begin{aligned}
&\varrho\left(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}\right) \\
&= \frac{Cov[N_t^{(i)}, N_t^{(l)}]}{\sqrt{Var[N_t^{(i)}]Var[N_t^{(l)}]}} \\
&= \frac{t^2 Cov[\Theta_i, \Theta_l]}{\sqrt{t^4 Var[\Theta_i]Var[\Theta_l] + t^3(Var[\Theta_i]\mathbb{E}[\Theta_l] + Var[\Theta_l]\mathbb{E}[\Theta_i]) + t^2\mathbb{E}[\Theta_i]\mathbb{E}[\Theta_l]}} \\
&= \frac{Cov[\Theta_i, \Theta_l]}{\sqrt{Var[\Theta_i]Var[\Theta_l] + t^{-1}(Var[\Theta_i\mathbb{E}[\Theta_l + \mathbb{E}[\Theta_i]Var[\Theta_l]) + t^{-2}\mathbb{E}[\Theta_i]\mathbb{E}[\Theta_l]}}
\end{aligned}$$

έχουμε

$$lim_{t\uparrow\infty}\varrho\left(N_t^{(i)}, N_t^{(l)}\right) = \varrho(\Theta_i, \Theta_l)$$

και η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$. □

Το παραπάνω θεώρημα δίνει έναν εύκολο τρόπο για να ελέγξουμε τη συσχέτιση δύο συντεταγμένων της διαδικασίας. Αν $i \neq l$ έχουμε

$$Cov[N_s^{(i)}, N_t^{(l)}] = stCov[\Theta_i, \Theta_l]$$

για κάθε $s, t > 0$.

Ως εκ τούτου, είναι αναγκαίο να ελέγξουμε τη συσχέτιση μεταξύ δύο συντεταγμένων για ένα χρονικό ζευγάρι ώστε να βρούμε τη συσχέτιση των συντεταγμένων της παραμέτρου, η οποία είναι σημαντική για τη συσχέτιση των συντεταγμένων για όλα τα χρονικά ζευγάρια.

Ας ρίξουμε μια ματιά και στη συσχέτιση των δύο προσευξήσεων της διαδικασίας.

**Πόρισμα 6.2.5.** *Έστω η $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$ . Αν η $\mathbf{\Theta}$ έχει μια πεπερασμένη ροπή της δεύτερης τάξης, τότε*

$$\begin{aligned}
&Cov[\mathbf{N}_{t_2} - \mathbf{N}_{t_1}, \mathbf{N}_{t_4} - \mathbf{N}_{t_3}] \\
&= Var[\mathbf{\Theta}](t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \\
&\quad + Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}])\left((t_2 - t_3)^+ - (t_2 - t_4)^+\right)
\end{aligned}$$

*για κάθε $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}_+$ με $t_1 < t_2, t_3 < t_4$ και $t_1 \leq t_3$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}_+$ με $t_1 < t_2, t_3 < t_4$ και $t_1 \leq t_3$. Από το Θεώρημα 6.2.4 έχουμε

$$Cov[\mathbf{N}_{t_2} - \mathbf{N}_{t_1}, \mathbf{N}_{t_4} - \mathbf{N}_{t_3}]$$

$$
\begin{aligned}
&= Cov[\mathbf{N}_{t_2}, \mathbf{N}_{t_4}] - Cov[\mathbf{N}_{t_2}, \mathbf{N}_{t_3}] - Cov[\mathbf{N}_{t_1}, \mathbf{N}_{t_4}] + Cov[\mathbf{N}_{t_2}, \mathbf{N}_{t_3}] \\
&= \min\{t_2, t_4\} Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]) + t_2 t_4 Var[\mathbf{\Theta}] \\
&\quad - \min\{t_2, t_3\} Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]) - t_2 t_3 Var[\mathbf{\Theta}] \\
&\quad - \min\{t_1, t_4\} Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]) - t_1 t_4 Var[\mathbf{\Theta}] \\
&\quad + \min\{t_1, t_3\} Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]) + t_1 t_3 Var[\mathbf{\Theta}] \\
&= Var[\mathbf{\Theta}](t_2 t_4 - t_2 t_3 - t_1 t_4 + t_1 t_3) \\
&\quad + Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}])(\min\{t_2, t_4\} - \min\{t_2, t_3\} - \min\{t_1, t_4\} + \min\{t_1, t_3\}) \\
&= Var[\mathbf{\Theta}](t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \\
&\quad + Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}])(\min\{0, t_4 - t_2\} - \min\{0, t_3 - t_2\}) \\
&= Var[\mathbf{\Theta}](t_2 - t_1)(t_4 - t_3) \\
&\quad + Diag(\mathbb{E}[\mathbf{\Theta}]) \left((t_2 - t_3)^+ - (t_2 - t_4)^+\right).
\end{aligned}
$$

Εδώ τελειώνει η απόδειξη. □

Μόνο στην περίπτωση που τα δύο διαστήματα δεν είναι ξένα μεταξύ τους ο όρος $(t_2 - t_3)^+ - (t_2 - t_4)^+$ είναι διαφορετικός του μηδενός. Τότε παίρνει την τιμή του μήκους του κοινού διαστήματος.

## 6.3 Posterior κατανομές

Η εισαγωγή της τυχαίας παραμέτρου στο μοντέλο πολυμεταβλητών μικτών διαδικασιών Poisson στο κεφάλαιο αυτό προσφέρει τη δυνατότητα να μελετήσουμε την δεσμευμένη κατανομή της παραμέτρου σε σχέση με την διαδικασία σε κάποιο χρόνο $t$. Δεδομένου ότι οι ρόλοι των τυχαίων διανυσμάτων εναλλάσονται με εκείνους των τυχαίων μεταβλητών μιας μικτής Poisson, μπορούμε να μιλάμε για εκ των υστέρων κατανομες. Η εξέταση της εκ των υστέρων κατανομής συνδέεται με το ερώτημα της σταθερότητας του μοντέλου στην πάροδο του χρόνου, το οποίο επίσης απαντάται σε αυτή την ενότητα. Καθορίζουμε πρώτα την κοινή κατανομή των πεπερασμένης διάστασης προσαυξήσεων και της παραμέτρου.

**Λήμμα 6.3.1.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$ . Τότε η σχέση*

$$
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}|\{\mathbf{\Theta} \in B\}\right] = \int_{\Omega} \chi_{\{\mathbf{\Theta}\in B\}} \prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(t_j - t_{j-1})} \frac{(\mathbf{\Theta}(t_j - t_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n_j}!} dP
$$

*ισχύει για κάθε* $m \in \mathbb{N}$ *και* $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ *με* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *και* $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, \ldots, m\}$, *και για κάθε* $B \in \mathfrak{B}_k$.

**Απόδειξη.**

Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, \ldots, m\}$, και για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{\mathbf{N}_{t_j} - \mathbf{N}_{t_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{\Theta} \in B\}\right] &= \int_\Omega \chi_{\cap_{j=1}^m\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\mathbf{\Theta}\in B\}} dP \\
&= \int_\Omega E\left(\chi_{\cap_{j=1}^m\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}\cap\{\mathbf{\Theta}\in B\}}|\mathbf{\Theta}\right) dP \\
&= \int_\Omega \chi_{\mathbf{\Theta}\in\mathbf{B}} E\left(\chi_{\cap_{j=1}^m\{\mathbf{N}_{t_j}-\mathbf{N}_{t_{j-1}}=\mathbf{n}_j\}}|\mathbf{\Theta}\right) dP \\
&= \int_\Omega \chi_{\{\mathbf{\Theta}\in B\}} \prod_{j=1}^{m} e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(t_j-t_{j-1})} \frac{(\mathbf{\Theta}(t_j - t_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n_j}!} dP.
\end{aligned}
$$

Επομένως ισχύει το Λήμμα. □

**Θεώρημα 6.3.2.** *Έστω* $\{\mathbf{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο* $\mathbf{\Theta}$ . *Τότε για κάθε* $t > 0$ *και για όλα τα* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$ *η διαδικασία* $\{\mathbf{K}_{t,h}\}_{h\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο* $\mathbf{\Theta}$ *πάνω στον χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P_{t,\mathbf{n}})$.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $t > 0$ και $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k$. Ο πρώτος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η ισότητα

$$\int_{\mathbf{\Omega}} (f \circ \mathbf{\Theta}) dP_{t,\mathbf{n}} = \frac{\int_\Omega (f \circ \mathbf{\Theta})(e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}t}(\mathbf{\Theta}\mathbf{t})^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!)dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}$$

ισχύει για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Ως εκ τούτου, θεωρούμε ένα σύνολο $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ και $f := \chi_B$. Τότε $f \circ \mathbf{\Theta} = \chi_{\mathbf{\Theta}^{-1}(\mathbf{B})}$ και από το Λήμμα 6.3.1 παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{\Omega}} (f \circ \mathbf{\Theta}) dP_{t,\mathbf{n}} &= \int_\Omega \chi_{\mathbf{\Theta}^{-1}(B)} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= P_{t,\mathbf{n}}[\mathbf{\Theta}^{-1}(B)] \\
&= \frac{\int_\Omega \chi_{\mathbf{\Theta}^{-1}(B)}(e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}t}(\mathbf{\Theta}\mathbf{t})^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!)dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega (f \circ \mathbf{\Theta})(e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}t}(\mathbf{\Theta}\mathbf{t})^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!)dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}
\end{aligned}
$$

Τώρα, η παράσταση των θετικών μετρήσιμων συναρτήσεων μέσω απλών συναρτήσεων και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας δίνει την επιθυμητή ισότητα. Για το υπόλοιπο της απόδειξης επιπροσθέτως θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $h_0, h_1 \ldots, h_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_m$ και $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}_0^k, j \in \{1, \ldots, m\}$ καθώς και ένα αυθαίρετο $C \in \sigma(\mathbf{\Theta})$. Το Λήμμα 4.3.1 και η προηγούμενη ισότητα μας δίνουν

$$\begin{aligned}
&\int_C \chi_{\bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{K}_{t,h_j} - \mathbf{K}_{t,h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\}} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= \int_\Omega \chi_{\bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_{t+h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap C} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= P_{t,\mathbf{n}} \left[ \bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_{t+h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap C \right] \\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{N}_{t+h_j} - \mathbf{N}_{t+h_{j-1}} = \mathbf{n}_j\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\} \cap C\right]}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \frac{\int_\Omega \chi_C \left( \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1})} \frac{\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1})^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} \right) e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta} t} \frac{(\mathbf{\Theta} t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dP}{P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \int_\Omega \chi_C \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1})} \frac{(\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} dP_{t,\mathbf{n}} \\
&= \int_C \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1})} \frac{(\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} dP_{t,\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$P_{t,\mathbf{n}} \left( \bigcap \{\mathbf{K}_{t,h_j} - \mathbf{K}_{t,h_{j-1}} = \mathbf{n}_j | \mathbf{\Theta}\} \right) = \prod_{j=1}^m e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1})} \frac{(\mathbf{\Theta}(h_j - h_{j-1}))^{\mathbf{n}_j}}{\mathbf{n}_j!} dP_{t,\mathbf{n}}$$

και ο ισχυρισμός είναι προφανής. □

Ως εκ τούτου, η εισαγωγή της παραμέτρου στο μοντέλο της πολυμεταβλητής μικτής διαδικασιάς Poisson δεν αλλάζει η σταθερότητα του μοντέλου στην πάροδο του χρόνου με την έννοια ότι δεν είναι σημαντικό πότε θα αρχίσουμε να παρατηρούμε τη διαδικασία. Ενώ το μοντέλο παραμένει αμετάβλητο η κατανομή αλλάζει φυσικά. Έτσι, το επόμενο θεώρημα ασχολείται με την δεσμευμένη κατανομή της παραμέτρου σε σχέση με τη διαδικασία σε κάποιο χρόνο $t$.

**Θεώρημα 6.3.3.** *Έστω $\{\mathbf{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ είναι μια πολυμεταβλητή μικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $\mathbf{\Theta}$ . Τότε*

$$P_{\mathbf{\Theta}|\mathbf{N}_t}(B) = \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}$$

*για κάθε* $t > 0$ *και* $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$.

**Απόδειξη.** Θεωρούμε $t > 0$ και $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$. Από το Λήμμα 6.3.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{\mathbf{\Theta} \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}) &= \int_\Omega P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\} \cap \{\Theta \in B\} | \mathbf{\Theta}] dP \\
&= \int_\Omega E_P[\chi_{\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}} \chi_{\{\Theta \in B\}} | \mathbf{\Theta}] dP \\
&= \int_\Omega \chi_{\{\Theta \in B\}} E_P[\chi_{\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}} | \mathbf{\Theta}] dP \\
&= \int_{\mathbf{\Theta}^{-1}(B)} P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n} | \mathbf{\Theta}\}] dP \\
&= \int_{\mathbf{\Theta}^{-1}(B)} e^{-\mathbf{1}'\mathbf{\Theta}\mathbf{t}} \frac{(\mathbf{\Theta}\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} dP \\
&= \int_B e^{-\mathbf{1}'\theta \mathbf{t}} \frac{(\theta\mathbf{t})^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} P_{\mathbf{\Theta}}(d\theta),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια του [2] Θεωρήματος 2.4.6.
Ως εκ τούτου έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{\Theta}|\mathbf{N}_t = \mathbf{n}}[B] &= P[\{\mathbf{\Theta} \in B\} | \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}] \\
&= \frac{P[\{\mathbf{\Theta} \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{P[\{\mathbf{N}_t = n]} \\
&= \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}(\theta t)^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}! P_{\mathbf{\Theta}}(d\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}(\theta t)^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}! P_{\mathbf{\Theta}}(d\theta)}.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{\Theta}|\mathbf{N}_t}(B) &= P_{\mathbf{\Theta}|\mathbf{N}_t}[B|\mathbb{N}_0^k] \\
&= P[\{\mathbf{\Theta} \in B\} | \{\mathbf{N}_t \in \mathbb{N}_0^k\}] \\
&= \frac{P[\{\mathbf{\Theta} \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t \in \mathbb{N}_0^k\}]}{P[\{\mathbf{N}_t \in \mathbb{N}_0^k\}]} \\
&= \frac{P[\biguplus_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \{\mathbf{\Theta} \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{P[\biguplus_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]} \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^k} P[\{\mathbf{\Theta} \in B\} \cap \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]}{P(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P[\{\mathbf{\Theta}\in B\}|\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}]P[\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}]}{1} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P_{\mathbf{\Theta}|\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}[B]E_P[\chi_{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}] \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} P_{\mathbf{\Theta}|\mathbf{N}_t=\mathbf{n}}[B]\chi_{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{n}} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{n}} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}} \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^k} \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}\chi_{\{\mathbf{N}_t=\mathbf{n}\}} \\
&= \frac{\int_B e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}{\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{1}'\theta t}\theta^{\mathbf{N}_t} dP_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}.
\end{aligned}
$$

Επομένως η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

# Παράρτημα Α΄

# Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

## Α΄.1 Ορισμοί και χρήσιμα αποτελέσματα

**Ορισμοί Α΄.1.1. Η χαρακτηριστική συνάρτηση** ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής $Q$ ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή $Q$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση $\varphi_Q$.

**Η ροπογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής $Q$ ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $Q$ είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρο από το μηδέν, τότε η $Q$ έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής $Q$ ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

**Ορισμοί Α΄.1.2.** Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.π. $(\Omega, \Sigma, P)$. A12
Μία συνάρτηση $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία) **ή Σ-μετρήσιμη** αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $X^{-1}(B) \in \Sigma$.

Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** για συντομία (*σ.κ.π.*) αν είναι , αύξουσα, δεξιά συνεχής, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι πιθανότητα και ονομάζεται **κατανομή (πιθανότητας)** της τ.μ. $X$. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η $P_X$ ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution). Η $P_X$ (αντ. η τ.μ. $X$) παράγει την *σ.κ.π.* $F_X : \mathbb{R} \longmapsto [0, 1]$ της τ.μ. $X$, που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η $F_X$ είναι πράγματι *σ.κ.π.* (βλ. π.χ. [2], Πρόταση 1.4.9). Η *σ.κ.π.* $F_X$ μίας τ.μ. $X$ ικανοποιεί την σχέση

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B), \forall B \in \mathfrak{B} \tag{Α΄.1}$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι το μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την $F_X$ ( βλ. π.χ. [2], Πρόταση 1.4.10 για τον ορισμό του μέτρου Lebesgue-Stieltjes και για την απόδειξη της (Α΄.1».

Μια *σ.κ.π.* $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (αντ. μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με *σ.κ.π.* $F_X = F$) ονομάζεται:

- **Διακριτή** , αν αυτή (αντ. η *σ.κ.π.* της $X$) είναι της μορφής

  $$F(x) = \sum_{k\in K : k\leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

  για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \longmapsto \mathbb{R}_+$. Η $f$ ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (*σ.π.*) της $F$ (αντ. της $X$).

- **Συνεχής** , αν η $F$ (αντ. η *σ.κ.π.* $F_X$ της $X$) είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** , αν αυτή (αντ. η *σ.κ.π.* $F_X$ της $X$) είναι της μορφής

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

  για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ .

Η $f$ ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) της $F$ (αντ. της $X$). Προφανώς, αν η τ.μ. $X$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας «συνεχής τ.μ.» θα εννοούμε «απόλυτα συνεχής τ.μ.».

A13

**Ορισμοί Α′.1.3.** Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

(εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται η **μέση τιμή** ή η **αναμενόμενη τιμή** ή η **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. $X$. Ειδικά αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ένας αριθμός.

Τα ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}), \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \quad \text{και για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ. [2], Παρατήρηση 3.2.5(β). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της $\Sigma$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα . Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων $\sigma$-υποαλγεβρών της** $\Sigma$ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

## Α′.2 Θεώρημα Μονότονης Κλάσης

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζουμε δύο θεωρήματα για $\sigma$-άλγεβρες. Τα θεωρήματα αυτά (ιδιαιτέρως το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης) είναι μέρος της βασικής τεχνικής αποδείξεων των Μετροθεωρητικών Πιθανοτήτων και έχουν πολλές και μεγάλου φάσματος εφαρμογές.

A21

**Λήμμα Α′.2.1.** Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\Omega$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) **(Dyn1)** $\Omega \in \mathcal{D}$

**(Dyn2)** $B \setminus A \in \mathcal{D}$, για $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subseteq B$

**(Dyn3)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

**(Dyn2)** $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, για κάθε $A \in \mathcal{D}$

**(Dyn3)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [19] (Λήμμα $A'$.2.1.)

**Ορισμός Α$'$.2.2.** Εάν ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες *(i)* ή *(ii)* του Λήμματος Α$'$.2.1 τότε λέγεται **κλάση Dynkin** υποσυνόλων του $\Omega$.

**Θεώρημα Α$'$.2.3. (Μονότονης Κλάσης:)** Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του $\Omega$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βλ. [19]

**Παρατήρηση Α$'$.2.4.** Η ονομασία κλάση Dynkin ή σύστημα Dynkin έχει προταθεί από τον H. Bauer (βλ. [5]) προς τιμή του E.B. Dynkin (1924 - ), ο οποίος χρησιμοποιεί αυτή την έννοια με την ονομασία λ-σύστημα στο βιβλίο του για στοχαστικές διαδικασίες (1959). Αυτά τα συστήματα συνόλων είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον W. Sierpinski (βλ. [25] σελ. 710-714).

# Παράρτημα Β΄

# Χρήσιμες κατανομές

Παρακάτω, παραθέτουμε τις κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στη παρούσα εργασία. Ορίζουμε μια κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$ δίνοντας απλώς την αντίστοιχη ς.(π.)π. όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1.

(i) **Κατανομή Poisson** $(P_X = \mathbf{P}(\theta))$

- $f_X(x) = e^{-\theta}(\theta^x/x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$ με $\theta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = Var[X] = \theta$.

(ii) **Εκθετική Κατανομή** $(P_X = \mathbf{P}(\beta))$

- $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\beta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = 1/\beta, Var[X] = 1/\beta^2$.

(iii) **Κατανομή Γάμμα** $(P_X = \mathbf{P}(\alpha, \beta))$

- $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(a)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ με $\alpha, \beta > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = \alpha/\beta, Var[X] = \alpha/\beta^2$.

# Βιβλιογραφία


[1] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006) : *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[2] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006) : *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2002) : *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

[4] Bates, G.E. and Neyman, J. (1952) *Contribution to the theory of accident proneness, I :An optimistic model of the correlation between light and severe accidents. In: University of California Publications in Statistics, University of California Press*, Vol.1, pp.215-254.

[5] Bauer, H. (1992): *Mass und Integrationstheorie*,Berlin-New York: W. de Gruyter und Co. 1990,2. Aufl.

[6] Billingsley, P. (1995) : *Harmonic Analysis on Semigroups,* New York: Wiley.

[7] Berg,Ch., Christensen,J.P.R. and Ressel,P.(1984) : *Probability and Measure,* New York: Springer.

[8] Consael, R.(1952) : *Sur les processus composes de Poisson a deux variables aleatoires,* Academie Royale de Belgique.Mem.Cl.Sci.,fase 6,t27 .

[9] Dieudonne, J. (1971): *Grundzuge der modernen Analysis. Berlin* :Deutscher Verlag der Wissenschaften

[10] Ferrari, Letac and Tourneret (2004) *Multivariate Mixed Poisson Distributions.* Proceeding of the 12th Conf.On Sign. Proc.(Vienna), 1067-1070

[11] Grandell, J. (1976): *Doubly Stochastic Poisson Processes Berlin*: Springer

[12] Grandell, J. (1997): *Mixed Poisson Processes. London*, Chapman & Hall

[13] Heuser,H.(2003b): *Lehrbuch der Analysis Teil 2. Stuttgart*: Teubner

[14] Hofmann,M.(1955): *Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung.*: Mitt. SVVM 55, 499-575

[15] Huang W.J. (1990) : *On the Characterization of Point Processes with the Exchangeable and Markov Properties*, Sankhya, Volume 52, Series A, Pt. 1, pp. 16-27 .

[16] Kallenberg, O. (2002): *Foundations of Modern Probability Berlin*: Springer

[17] Lemaire, J. (1995): *Foundations of Modern Probability Berlin*: Springer

[18] Lyberopoulos D.P., Macheras N.D. and Tzaninis S.M. (2015): *On the equivalence of various definitions of mixed Poisson processes* preprint 2015

[19] Macheras N.D. and Tzaninis S.M.(2014): *Some characterizations for Markov processes as mixed renewal processes* preprint 2014

[20] Partrat, C. (1994): *Compound Model for Two Dependent Kinds of Claims.*Insurance: Mathematics and Economics 15, 219-231

[21] Picard, P. (1976): *Generalisation de l'etude sur la survenance des sinistres en assurance automobile.* Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaires Francais 296, 204-268

[22] Schmidt, K.D. (1996): *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart (1996).

[23] Schmidt,K.D and Zocher,M. (2003): *Claim Number Processes having the Multinomial Property.* Dresdener Schriften zur Versicherungsmathematik 1/2003

[24] Schmidt,K.D and Zocher,M. (2005): *Loss reserving and Hofmann Distributions,* Mitteil ungen der Schweiz Aktuarversicherng Heft 2.

[25] W. Sierpinski (1975): *Euvres choisis,Tome II*, Warszawa, PWN-Editions Scientifiques de Palague.

[26] Teicher, H. (1961): *Identifiability of mixtures.* Annals of Mathematical Statistics 32, 244-248

[27] Walhin, J.F. and Paris J. (2001): *The Mixed Bivariate Hofmann Distribution.* ASTIN Bulletin 31, 123-138

[28] Willmot,G.E. and Sundt B. (1989): *On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Processes.* Scandinavian Actuarial Journal, 139-146

[29] Zocher, M. (2005): *Statistik fur bivariate gemischte Poisson-Prozesse am Beispiel der Kraftfahrthaftpflichtvericherung.* to appear in: Allgemeines Statistisches Archiv

[30] Zocher Mathias (2005): *Multivariate Mixed Poisson Processes,* Phd Thesis, Technishe Univ. Dresden.

# Ευρετήριο

# Συμβολισμοί

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $\{1, 2, ...\}$ |
| $\mathbb{N}_0$ | $\{0, 1, 2, ...\}$ |
| $\mathbb{N}_0^k$ | διανύσματα $k$ συντεταγμένων στο $\mathbb{N}_0$ |
| $\mathbb{Z}$ | οι ακέραιοι αριθμοί |
| $\mathbb{Z}^k$ | διανύσματα $k$ συντεταγμένων στο $\mathbb{Z}$ |
| $\mathbb{R}$ | οι πραγματικοί αριθμοί |
| $\mathbb{R}_+$ | $[0, \infty)$ |
| $\mathbb{R}^k$ | $k$-διάστατος χώρος |
| $\mathbb{R}_+^k$ | τα στοιχεία του $[\mathbf{0}, \infty)$ |
| $\mathbf{0}$ | διάνυσμα με όλα τα στοιχεία να είναι ίσα με μηδέν |
| $\mathbf{1}$ | διάνυσμα με όλα τα στοιχεία να είναι ίσα με μονάδα |
| $\infty$ | διάνυσμα με όλα τα στοιχεία να είναι ίσα με $\infty$ |
| $\mathbf{e}_j$ | το $i$-οστό μοναδιαίο διάνυσμα |
| $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ | $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ αν και μόνο αν $x_i < y_i$ |
| $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ | $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ αν και μόνο αν $x_i < z_i < y_i$ |
| $\mathbf{x}^{\mathbf{y}}$ | $\chi^{\mathbf{y}} := \prod_{i=1}^{k} (x_i)^{y_i}$ |
| $\mathbf{n}!$ | $\mathbf{n}! := \prod_{i=1}^{k} n_i!$ |
| $\binom{\mathbf{1}'\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$ | $\binom{\mathbf{1}'\mathbf{n}}{\mathbf{n}} := \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{n})!}{\mathbf{n}}$ |
| $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}}$ | $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}} := \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{l_i}, \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{l}} := \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{l}!(\mathbf{n}-\mathbf{l})!}$ |
| $\Pi_{\mathbf{n}}(t)$ | $\Pi_{\mathbf{n}}(t) := P[\{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}]$ |
| $\Pi_{t,\mathbf{n}}[B]$ | $\Pi_{t,\mathbf{n}}[B] := P\Bigg[B \vert \{\mathbf{N}_t = \mathbf{n}\}\Bigg]$ |