ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Διατήρηση ιδιοτήτων κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά διαφόρων κλάσεων, τις οποίες έχουμε εισάγει σε προηγούμενα κεφάλαια, κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Συγκεκριμένα θα δούμε, με τη βοήθεια αντιπαραδειγμάτων, ιδιότητες των μονάδων που δεν διατηρούνται στο σύστημα, (π.χ. οι ιδιότητες *IFR, DFR, NBUE* κ.α.), αλλά και θα αποδείξουμε θεωρήματα για κλάσεις (ιδιότητες) που είναι κλειστές ως προς τη λειτουργία αυτή (π.χ. *IFRA, NBU, NBAFR*). Τέλος, θα διατυπώσουμε προτάσεις για μη κλειστές κλάσεις, που δίνουν συνθήκες, οι οποίες αν ισχύουν, καθιστούν κλειστές τις κλάσεις αυτές ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

4.2 Μη κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων

Ένα πρόβλημα, το οποίο παρουσιάζει μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον, είναι η διατήρηση του είδους γήρανσης κάτω από διάφορες πιθανοθεωρητικές λειτουργίες, όπως ο σχηματισμός μονότονων συστημάτων, η μίξη ή άθροιση τυχαίων μεταβλητών. Στην παράγραφο αυτή, θα δούμε αναλυτικά περιπτώσεις, στις οποίες το είδος γήρανσης των μονάδων δεν διατηρείται στο μονότονο σύστημα, το οποίο σχηματίζουν.

Έστω ότι n μονάδες με χρόνους ζωής $T_i \;, i = 1,2,...,n$ συνδέονται έτσι ώστε να σχηματισθεί ένα μονότονο σύστημα με χρόνο ζωής T_s. Στα ακόλουθα παραδείγματα, υποθέτοντας ότι οι μονάδες του συστήματος έχουν κάθε φορά ένα συγκεκριμένο είδος γήρανσης, διαπιστώνουμε ότι αυτό δεν διατηρείται στο σύστημα, το οποίο δημιουργούν.

- Έστω ότι οι χρόνοι ζωής των μονάδων $T_i \in IFR$. Με μια πρώτη ματιά, θα ήταν λογικό να υποθέσουμε ότι, δεδομένου ότι κάθε μονάδα του μονότονου συστήματος έχει αυξανόμενη βαθμίδα αποτυχίας (*IFR*), το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και για το σύστημα. Άλλωστε, κάθε φορά που μία μονάδα αποτυγχάνει, το σύστημα γίνεται κατασκευαστικά ασθενέστερο (λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης δομής του μονότονου συστήματος). Επιπρόσθετα, όσο περνάει ο χρόνος, η βαθμίδα αποτυχίας κάθε μονάδας αυξάνει. Το λογικοφανές αυτό συμπέρασμα επιβεβαιώνεται στην περίπτωση, όπου n μονάδες με την ιδιότητα *IFR,* σχηματίζουν ένα σειριακό σύστημα. Πράγματι αν $\lambda_i \ , i = 1,2,...,n$, είναι οι βαθμίδες αποτυχίας των μονάδων, τότε είναι προφανές ότι αν όλες οι συναρτήσεις λ_i , είναι αύξουσες (ή φθίνουσες), τότε και η βαθμίδα αποτυχίας λ_{ss} του συστήματος, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\lambda_{ss}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t),$$

θα είναι αύξουσα (ή φθίνουσα).

Ωστόσο, όπως θα δούμε τώρα, αυτό δεν συμβαίνει αν οι n μονάδες συνδεθούν παράλληλα. Η αξιοπιστία ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$R_{PS}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t))$$

όπου $R_i(t), \ \ i = 1,2,...,n$ είναι οι αξιοπιστίες των μονάδων.

Αν θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση n=2, τότε η αξιοπιστία του παράλληλου συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

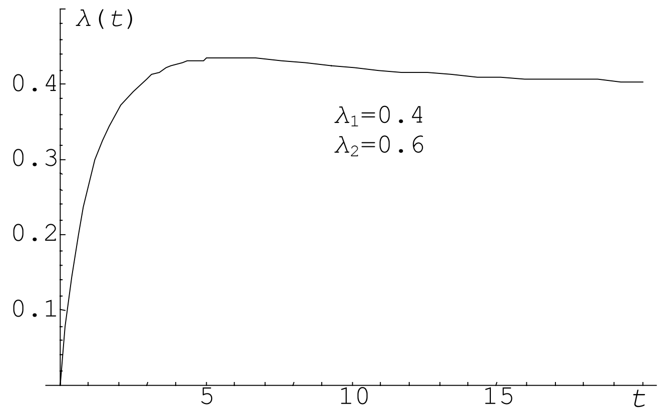
$$R_{PS}(t) = 1 - (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t).$$

Αν $T_1 \sim Exp(\lambda_1), \quad T_2 \sim Exp(\lambda_2)$ προκύπτει ότι

$$\lambda_{PS}(t) = -\frac{R'_{PS}(t)}{R_{PS}(t)} = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}, \ \ t \geq 0$$

και είναι φανερό ότι η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος δεν είναι ίση με μία σταθερά. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_{PS}(t)$ είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα της μορφής $(0, t_o)$ και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα της μορφής $[t_o, +\infty)$.

ΣΧΗΜΑ 4.1



Συνεπώς η ιδιότητα *IFR/DFR* δεν διατηρείται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

- Γνωρίζουμε ότι η κλάση $NBUE$ διατηρείται κατά το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων (η απόδειξη στην Παράγραφο 4.4). Ωστόσο για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα $NBUE$ δεν διατηρείται, γενικά, κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων, θεωρούμε ένα σειριακό σύστημα με δύο ανεξάρτητες μονάδες, κάθε μία από τις οποίες έχει μια κατανομή F που παίρνει ισοπίθανα τις τιμές 1 και 3.

Τότε η κατανομή F έχει μέσο μ=2 και για $t \geq 0$ ισχύει η σχέση

$$\int_0^{\infty} \overline{F}(t+x)dx / \overline{F}(t) \leq 2,$$

οπότε η F είναι $NBUE$ (Marshall & Proschan (1972)), δηλαδή οι δύο μονάδες έχουν χρόνους ζωής $T_i \in NBUE$. Ωστόσο ο μέσος χρόνος ζωής ενός καινούριου συστήματος θα είναι

$$\mu' = \int_0^3 \overline{F}^2(x)dx = \frac{3}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mu' < \mu$,συνεπώς, από τον ορισμό της κλάσης $NBUE$, ο χρόνος ζωής του συστήματος δεν είναι $NBUE$.

Συνεπώς η ιδιότητα *NBUE* δεν διατηρείται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

- Για να αποδείξουμε ότι, τόσο η ιδιότητα NWU, όσο και η ιδιότητα $NWUE$, δεν διατηρούνται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων, θεωρούμε ένα παράλληλο σύστημα με δύο ανεξάρτητες μονάδες, κάθε μία από τις οποίες έχει κατανομή που δίνεται από τον τύπο

$$F(t) = 1 - e^{-t}.$$

Η κατανομή *F* είναι *NWU* και *NWUE*. Ο χρόνος ζωής και η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις

$$F(t) = (1 - e^{-t})^2$$

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{2e^t - 1}.$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, συνεπώς ο χρόνος ζωής του συστήματος δεν είναι ούτε *NWU*, ούτε *NWUE*.

Συνεπώς οι ιδιότητες *NWU* και *NWUE* δεν διατηρούνται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

- Γνωρίζουμε ότι η κλάση $NBUC$ διατηρείται κατά το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων (η απόδειξη στην Παράγραφο 4.4). Επιπλέον έχει αποδειχθεί ότι και στην περίπτωση που συνδέονται ανεξάρτητες και ανόμοιες μονάδες με την ιδιότητα $NBUC$, ο χρόνος ζωής του συστήματος διατηρεί την ιδιότητα αυτή (Cai and Wu (1997)). Ωστόσο για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα $NBUC$ δεν διατηρείται, γενικά, κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων, θεωρούμε ένα παράλληλο σύστημα με δύο ανεξάρτητες μονάδες, κάθε μία από τις οποίες έχει κατανομή που δίνεται από τον τύπο

$$F(t)=\begin{cases} 0 & , \ 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{2} & , \ 1 \le t < 3 \\ 1 & , \ t \ge 3 \end{cases}$$

Η κατανομή F είναι $NBUC$, ωστόσο ο χρόνος ζωής του συστήματος δεν ανήκει στην κλάση $NBUC$ (Cao & Wang (1991)).

Συνεπώς η ιδιότητα *NBUC* δεν διατηρείται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

• Για να αποδείξουμε ότι οι κλάσεις $NWUC$, UBA δεν διατηρούνται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων, θεωρούμε ένα παράλληλο σύστημα με δύο ανεξάρτητες μονάδες, κάθε μία από τις οποίες έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_1 και λ_2 αντίστοιχα (Abdulhamid (1994)). Οι δύο μονάδες έχουν την ιδιότητα UBA και $NWUC$, ωστόσο η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

$$\lambda_{PS}(t)=-\frac{R'_{PS}(t)}{R_{PS}(t)}=\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}, \quad t \ge 0$$

η μορφή της οποίας δηλώνει ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος δεν ανήκει στην κλάση $NWUC$ (Cao & Wang (1991)), αλλά ούτε και στην κλάση UBA, αφού θα έπρεπε, από τον ορισμό της κλάσης UBA, να ισχύει η σχέση

$$\lambda(t) < \lambda(\infty), \text{ για όλα τα } t.$$

Συνεπώς οι ιδιότητες *NWUC* και *UBA* δεν διατηρούνται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

• Γνωρίζουμε ότι η κλάση *DMRL* διατηρείται κατά το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων (η απόδειξη στην Παράγραφο 4.4). Ωστόσο η ιδιότητα *DMRL* δεν διατηρείται, γενικά, κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει άμεσα από το τελευταίο παράδειγμα που δώσαμε για την κλάση UBA. Πράγματι δύο εκθετικές μονάδες είναι *DMRL* και ταυτόχρονα, αφού ο χρόνος ζωής του συστήματος δεν είναι UBA, δεν θα ανήκει ούτε στην κλάση *DMRL*.

Συνεπώς η ιδιότητα *DMRL* δε διατηρείται κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

4.3 Κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε θεωρήματα για κλειστές κλάσεις κατανομών ως προς τη διατήρηση των ιδιοτήτων των μονάδων σε ένα μονότονο σύστημα. Τέτοιες είναι οι κλάσεις *IFRA*, *NBU, NBUFR* και *NBAFR*.

Το Θεώρημα 1, το οποίο ακολουθεί, είχε αρχικά εισαχθεί και αποδειχθεί από τους Birnbaum, Esary και Marshall (1966). Ωστόσο η απόδειξη, η οποία παρατίθεται στην συνέχεια, έχει δοθεί από τον Ross (1980). Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τις ακόλουθες δύο προτάσεις.

Πρόταση 1. *Έστω* $R(\mathbf{p}) = R(p_1, p_2, ..., p_n)$ *η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος με n μονάδες. Τότε η* $R(\mathbf{p})$ *είναι γνησίως αύξουσα ως προς κάθε* p_i, $i = 1,2,...,n$.

Απόδειξη. Για την αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος με n ανεξάρτητες μονάδες ισχύει

$$R(\mathbf{p}) = E(\phi(\mathbf{X})) = E(X_i) \cdot E(\phi(1_i, \mathbf{X}) + (1 - E(X_i)) \cdot E(\phi(0_i, \mathbf{X})$$

συνεπώς έχουμε

$$R(\mathbf{p}) = p_i \cdot R(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i) \cdot R(0_i, \mathbf{p}) \,,\; i = 1,2,...,n.$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = R(1_i, \mathbf{p}) \text{-} R(0_i, \mathbf{p}),$$

οπότε

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = E(\phi(1_i, \mathbf{X}) \text{-} \phi(0_i, \mathbf{X})).$$

Επειδή η συνάρτηση δομής ϕ είναι αύξουσα, ισχύει η ανίσωση

$$\phi(1_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{x}) - \phi(0_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{x}) \geq 0 \,.$$

Επιπλέον, αφού κάθε μονάδα επηρεάζει την κατάσταση του συστήματος, για κάποια $\mathbf{x_o}$ ισχύει η σχέση

$$\phi(1_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{x_o}) - \phi(0_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{x_o}) = 1,$$

συνεπώς για $\mathbf{p} \in (0,1)^{\boldsymbol{n}}$ το $\mathbf{x_o}$ έχει θετική πιθανότητα να συμβεί, και τελικά καταλήγουμε στη ζητούμενη ανίσωση

$$E(\phi(1_{\boldsymbol{i}}, \mathbf{X})\text{-}\phi(0_i, \mathbf{X}))>0 ,$$

η οποία αποδεικνύει ότι η αξιοπιστία του συστήματος είναι γνησίως αύξουσα. ■

Λήμμα 1. *Έστω* $\alpha \in [0,1]$, $\lambda \in [0,1]$, *και* $0 \le x \le y$. *Τότε*

$$\lambda^a y^a + (1-\lambda^a)x^a - [\lambda y + (1-\lambda)x]^a \ge 0.$$

Πρόταση 2. *Έστω* $R(\boldsymbol{p}) = R(p_1, p_2, ..., p_n)$ *η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος με* n *μονάδες. Τότε ισχύει η ανίσωση*

$$R(\mathbf{p}^\alpha) \ge R^\alpha(\mathbf{p}) \text{ , για } i=1,2,\dots,n \quad (1) \text{ , όπου } \mathbf{p}^\alpha = (p_1^a, p_2^a, ..., p_n^a)$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση επαγωγικά.

Έστω n=1. Τότε ισχύει μία από τις ακόλουθες σχέσεις

$$R(p) \equiv p, \quad R(p) \equiv 0, \quad R(p) \equiv 1.$$

Σε κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις η ζητούμενη σχέση είναι προφανής.

Έστω ότι η σχέση (1) ισχύει για όλα τα μονότονα συστήματα με (n-1) μονάδες. Τότε για ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες, έχουμε

$$R(\mathbf{p}^\alpha) = p_n^a \cdot R(1_n, \mathbf{p}^\alpha) + (1-p_n^a) \cdot R(0_n, \mathbf{p}^\alpha).$$

Επειδή οι συναρτήσεις $R(1_n, \mathbf{p}^\alpha)$ και $R(0_n, \mathbf{p}^\alpha)$ είναι, και οι δύο, συναρτήσεις αξιοπιστίας για μονότονα συστήματα με (n-1) μονάδες, συνεπάγεται ότι αυτές ικανοποιούν τη σχέση (1), συνεπώς

$$R(1_n, \mathbf{p}^\alpha) \ge R^\alpha(1_n, \mathbf{p}) \;\; , \;\; R(0_n, \mathbf{p}^\alpha) \ge R^\alpha(0_n, \mathbf{p})$$

και τελικά έχουμε

$$R(\mathbf{p}^{\alpha}) \geq p_n^a \cdot R^a(1_n, \mathbf{p}) + (1 - p_n^a) \cdot R^a(0_n, \mathbf{p}).$$

Από το Λήμμα 1, διαλέγοντας $\lambda = p_n,\ \ y = R(1_n, p),\ \ x = R(0_n, \mathbf{p})$, παίρνουμε

$$p_n^a \cdot R^a(1_n, \mathbf{p}) + (1 - p_n^a) \cdot R^a(0_n, \mathbf{p}) \geq [\, p_n \cdot R\ \ (1_n, \mathbf{p}) + (1 - p_n) \cdot R\ \ (0_n, \mathbf{p})]^{\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την *pivotal decomposition* μορφή, καταλήγουμε στη ζητούμενη ανίσωση

$$R(\mathbf{p}^{\alpha}) \geq R^{\alpha}(\mathbf{p}). \qquad \blacksquare$$

Η απόδειξη της Πρότασης 2 δίνεται στα συγγράμματα Barlow & Proschan (1975) και Aven & Jensen (1999).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το θεώρημα για την κλειστή κλάση *IFRA* (*IFRA Closure Theorem*).

Θεώρημα 1. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες μονάδες, οι οποίες έχουν κατανομή χρόνου ζωής με την ιδιότητα IFRA. Τότε η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος είναι IFRA.*

Απόδειξη. Έστω F η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος και F_i οι κατανομές χρόνου ζωής των μονάδων, για $i = 1,2,\ldots,n.$ Υποθέτουμε ότι οι κατανομές F_i είναι *IFRA.* Τότε ισχύει η σχέση

$$\overline{F}_i(at) \geq \overline{F}_i^{\,a}(t), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ενώ για $0 < a \leq 1$ είναι φανερό ότι

$$\overline{F}(at) = R[\overline{F}_1(at), \overline{F}_2(at), \ldots, \overline{F}_n(at)]$$

όπου η $R(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας του μονότονου συστήματος. Η συνάρτηση R είναι αύξουσα ως προς κάθε συντεταγμένη της p_i, για $i = 1,2,\ldots,n$, συνεπώς

$$\overline{F}(at) \geq R[\overline{F}_1^{\,a}(t), \overline{F}_2^{\,a}(t), \ldots, \overline{F}_n^{\,a}(t)] \quad (1)$$

Από την Πρόταση 2 της Παραγράφου 4.3 έχουμε ότι

$$R[\overline{F}_1^{\,a}(t), \overline{F}_2^{\,a}(t), \ldots, \overline{F}_n^{\,a}(t)] \geq R^a[\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)] \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις ανισώσεις (1),(2) και κάνοντας χρήση της ισότητας

$$R(\overline{F}_1(t),...,\overline{F}_n(t)) = \overline{F}(t)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{F}(at) \geq \overline{F}^{a}(t)$$

και τελικά καταλήγουμε ότι η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος είναι *IFRA*. ■

Το Θεώρημα 2, το οποίο ακολουθεί, τεκμηριώνει την κλειστότητα της κλάσης *NBU* κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Το θεώρημα αυτό έχει εισαχθεί και αποδειχθεί από τους Esary, Marshall και Proschan (1970). Για την απόδειξη του θα χρειαστούμε τα ακόλουθα.

Ορισμός . *Έστω* $\Lambda(t)$ *η συνάρτηση κινδύνου του συστήματος, η οποία δίνεται από τη σχέση*

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1,...,\Lambda_n)$$

όπου $\Lambda_i(t) = -\log(1 - F_i(t))$*, με* F_i *τη συνάρτηση κατανομής της i–οστής μονάδας. Τότε η συνάρτηση η, η οποία δίνεται από τη σχέση*

$$\eta = \eta(\mathbf{\Lambda})$$

ονομάζεται μετασχηματισμός κινδύνου (hazard transform) και εκφράζει τη συνάρτηση κινδύνου του συστήματος ως προς τις συναρτήσεις κινδύνου Λ_i *των μονάδων.*

Αν η αξιοπιστία του συστήματος συμβολίζεται με *R,* τότε μια αναλυτικότερη μορφή του μετασχηματισμού κινδύνου δίνεται από τη σχέση

$$\eta(\mathbf{p}) = -\log R(e^{-p_1},...,e^{-p_n}), \ \ \gamma\iota\alpha \ \ 0 \leq p_i \leq n, \ \ \mu\varepsilon \ \ i = 1,2,...,n.$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός κινδύνου είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς p_i , ενώ ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta(\mathbf{0})=0 \ , \ \eta(\infty) = \infty.$$

Πρόταση 3. *Έστω ότι η συνάρτηση η εκφράζει το μετασχηματισμό κινδύνου ενός μονότονου συστήματος. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\eta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \geq \eta(\mathbf{p}) + \eta(\mathbf{p}')$$

για όλα τα $\mathbf{p},\mathbf{p}' \in [0,+\infty)$. *Με λόγια, λέμε ότι η συνάρτηση η είναι υπερπροσθετική* (*superadditive*) .

Θεώρημα 2. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες μονάδες, οι οποίες έχουν κατανομή χρόνου ζωής με την ιδιότητα NBU. Τότε η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος είναι NBU.*

Απόδειξη. Έστω F η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος και F_{i} οι κατανομές χρόνου ζωής των μονάδων, για $i = 1,2,...,n.$ Υποθέτουμε ότι οι κατανομές F_{i} είναι *NBU*. Αν Λ_i και Λ είναι η συνάρτηση κινδύνου της *i*–οστής μονάδας και του συστήματος αντίστοιχα, τότε από τον ορισμό της κλάσης *NBU* είναι φανερό ότι

$$\Lambda_i(s+t) \geq \Lambda_i(s) + \Lambda(t)\,.$$

Ο μετασχηματισμός κινδύνου η είναι αύξουσα συνάρτηση, συνεπώς

$$\eta(\Lambda(s+t)) \geq \eta(\Lambda(s) + \Lambda(t)) \quad (1)$$

Από την Πρόταση 3 (Παράγραφος 4.3) ισχύει η ακόλουθη ανίσωση

$$\eta(\Lambda(s) + \Lambda(t)) \geq \eta(\Lambda(s)) + \eta(\Lambda(t)) \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) καταλήγουμε στη σχέση

$$\Lambda(s+t) \equiv \eta(\Lambda(s+t)) \geq \eta(\Lambda(s)) + \eta(\Lambda(t)) \equiv \Lambda(s) + \Lambda(t)$$

Συνεπώς για τη συνάρτηση αξιοπιστίας $R(t) = \overline{F}(t)$ έχουμε

$$\overline{F}(s+t) = e^{-\Lambda(s+t)} \leq e^{-\Lambda(s)} e^{-\Lambda(t)} = \overline{F}(s)\overline{F}(t)\,,$$

δηλαδή ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *NBU*. ■

Το θεώρημα, που ακολουθεί, αναφέρεται στην κλάση *NBAFR*, η οποία έχει ορισθεί στο Κεφάλαιο 2. Η κλάση αυτή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι κλειστή κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων (Loh (1984)).

Θεώρημα 3. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες μονάδες, οι οποίες έχουν κατανομή χρόνου ζωής με την ιδιότητα NBAFR. Τότε η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος είναι NBAFR.*

Απόδειξη. Για να αποδειχθεί το θεώρημα, αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη ανίσωση

$$t^{-1}\eta\{\Lambda(t)\} \geq \lim_{s\to 0} s^{-1}\eta\{\Lambda(s)\}, t > 0. \ (1)$$

Από την Πρόταση 3 (Παράγραφος 4.3), συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω ανίσωση είναι προφανής, αν το όριο είναι άπειρο.

Υποθέτουμε ότι το όριο είναι πεπερασμένο. Αφού η συνάρτηση *η* έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (Esary & Proschan (1963)), μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω όριο ως εξής

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}\eta\{\Lambda(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\mathbf{0})\, r_i(0) \quad (2)$$

όπου η_i είναι η μερική παράγωγος του μετασχηματισμού *η* ως προς Λ_i και $\lambda_i(t)$ είναι η παράγωγος της $\Lambda_i(t)$. Από την υπόθεση του θεωρήματος ότι οι μονάδες είναι *NBAFR,* έχουμε ότι

$$\Lambda_i(t) \geq t \lim_{s\to 0} s^{-1}\Lambda_i(t), \ \ t > 0. \ \ (3)$$

Από τη μονοτονία και τη συνέχεια της συνάρτησης *η,* είναι φανερό ότι

$$t^{-1}\eta\{\Lambda(t)\} \geq t \lim_{s\to 0} t^{-1}\eta\{ts^{-1}\Lambda(s)\}, \ \ t > 0. \quad (4)$$

Η $\eta\{ts^{-1}\Lambda(s)\}$, ως συνάρτηση του *t*, είναι *superadditive*. Συνεπώς, για το όριο της σχέσης (4), ισχύουν τα ακόλουθα

$$\lim_{s\to 0} t^{-1}\eta\{ts^{-1}\Lambda(s)\} \geq \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0} t^{-1}\eta\{ts^{-1}\Lambda(s)\}$$

$$\lim_{s\to 0} t^{-1}\eta\{ts^{-1}\Lambda(s)\} = \sum \eta_i(\mathbf{0})\,\lambda_i(0)$$

αφού $\Lambda_i(0) = 0$. (Hille & Philips (1957))

Η ζητούμενη σχέση (1) προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (2),(4) . ■

Η κλάση *NBUFR* ανήκει στις κλάσεις κατανομών, οι οποίες είναι κλειστές ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Το επόμενο θεώρημα περιέχει το παραπάνω συμπέρασμα (Gohout & Kuhnert (1995)).

Θεώρημα 4. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες μονάδες, οι οποίες έχουν κατανομή χρόνου ζωής με την ιδιότητα NBUFR. Τότε η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος είναι NBUFR.*

Απόδειξη. Η αξιοπιστία $R(t)$ του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$R(t) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \phi(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^{n} R_i^{x_i}(t) F_i^{1-x_i}(t) .$$

Θέτουμε

$$P_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^{n} R_i^{x_i}(t) F_i^{1-x_i}(t) ,$$

οπότε η αξιοπιστία γράφεται στη μορφή

$$R(t) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} P_t(\mathbf{x}) = \sum_{\{x|\phi(x)=1\}} P_t(\mathbf{x}) \quad (1)$$

όπου η $P_t(\mathbf{x})$ είναι η πιθανότητα ότι, τη χρονική στιγμή *t*, το διάνυσμα κατάστασης των μονάδων παίρνει την τιμή **x**, αν το **x** είναι διάνυσμα λειτουργίας και μηδέν, αν δεν είναι.

Για τη συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$ του χρόνου ζωής του συστήματος έχουμε

$$f(t) = -\frac{d}{dt} R(t) =$$

$$= \sum_{x\in\{0,1\}^n} \sum_{i=1}^{n} (x_i R_i^{x_i-1}(t) f_i(t) F_i^{1-x_i}(t) - (1-x_i) F_i^{-x_i}(t) f_i(t) R_i^{x_i}(t)) \cdot \phi(\mathbf{x}) \prod_{j\neq i} R_j^{x_j}(t) F_j^{1-x_j}(t)$$

$$= \sum_{x\in\{0,1\}^n} \sum_{i=1}^{n} (2x_i - 1) \cdot f_i(t) \cdot \phi(\mathbf{x}) \prod_{j\neq i} R_j^{x_j}(t) F_j^{1-x_j}(t) =$$

$$= \sum_{i} \sum_{\{x|\phi(x)=1\}} (2x_i - 1) \cdot \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)}\right)^{1-x_i} \cdot P_t(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{i} \sum_{x\in C_i \cup D_i^0 \cup D_i^1} (2x_i - 1) \cdot \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)}\right)^{1-x_i} \cdot P_t(\mathbf{x}) \quad (2)$$

όπου

$$C_i = \{\mathbf{x}|\, \phi(\mathbf{x})=1 \;\gamma\iota\alpha\; x_i = 1 \;, \varepsilon\nu\acute{\omega}\; \phi(0_i, \mathbf{x})=0\},$$

$$D_i^0 = \{\mathbf{x}|\, \phi(\mathbf{x})=1 \;\gamma\iota\alpha\; x_i = 0 \;, \varepsilon\nu\acute{\omega}\; \phi(0_i, \mathbf{x})=1\},$$

$$D_i^1 = \{ \mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}){=}1 \; \gamma\iota\alpha \;\; x_i = 1 \;\; , \varepsilon\nu\acute{\omega} \;\; \phi(0_i, \mathbf{x}){=}1 \}$$

Είναι φανερό ότι

$$C_i \cup D_i^0 \cup D_i^1 = \{ \mathbf{x} | \varphi(\mathbf{x}){=}1 \}, \text{ για κάθε } i \text{ μονάδα.}$$

Το σύνολο C_i είναι το σύνολο των διανυσμάτων λειτουργίας, στα οποία κάθε i μονάδα λειτουργεί, αλλά η αποτυχία της θα προκαλέσει την αποτυχία του συστήματος, το σύνολο D_i^1 είναι το σύνολο των διανυσμάτων λειτουργίας, στα οποία κάθε i μονάδα λειτουργεί, και το σύνολο D_i^0 είναι το σύνολο των διανυσμάτων λειτουργίας, στα οποία η i μονάδα δεν λειτουργεί.

Από τη μονοτονία της συνάρτησης δομής φ, προκύπτει ότι

$$(0_i, \mathbf{x}) \in D_i^0 \Leftrightarrow (1_i, \ \mathbf{x}) \in D_i^1 .$$

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η σχέση (2) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{x \in D_i^0} (2x_i - 1) \cdot \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)} \right)^{1-x_i} \cdot P_t(\mathbf{x}) + \sum_{x \in D_i^1} (2x_i - 1) \cdot \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)} \right)^{1-x_i} \cdot P_t(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{x \in D_i^0} -\frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)} \right)^{1} \cdot P_t(0_i, \mathbf{x}) + \sum_{x \in D_i^1} \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)} \right)^{0} \cdot P_t(1_i, \ \mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{x \in D_i^0} -\frac{f_i(t)}{F_i(t)} \cdot P_t(0_i, \mathbf{x}) + \sum_{x \in D_i^1} \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \frac{R_i(t)}{F_i(t)} \cdot P_t(0_i, \ \mathbf{x}) = 0.$$

Συνεπώς

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in C_i} (2x_i - 1) \cdot \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot \left(\frac{R_i(t)}{F_i(t)} \right)^{1-x_i} \cdot P_t(\mathbf{x}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in C_i} (2x_i - 1) \cdot \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \cdot P_t(\mathbf{x}) . \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1),(3) προκύπτει ότι η βαθμίδα αποτυχίας δίνεται από τον τύπο

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in C_i}\frac{f_i(t)}{R_i(t)}\cdot P_t(x)}{\sum_{\{x|\phi(x)=1\}}P_t(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{x\in C_i}\frac{f_i(t)}{R_i(t)}\cdot P_t(x)}{\sum_{x\in C_i\cup D_i^0\cup D_i^1}P_t(x)} \quad (4)$$

Επειδή $T_i \in NBUFR$, έχουμε

$$\lambda(t)\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{x\in C_i}f_i(0)\cdot P_t(x)}{\sum_{x\in C_i\cup D_i^0\cup D_i^1}P_t(x)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\cdot(1-\frac{\sum_{x\in D_i^0\cup D_i^1}P_t(x)}{\sum_{x\in C_i\cup D_i^0\cup D_i^1}P_t(x)}\geq$$

$$\geq\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\cdot(1-\phi(0_i,\mathbf{1})) \quad (5)$$

Υπολογίζοντας τη σχέση (4) για $t=0$, έχουμε

$$\lambda(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in C_i}f_i(0)\cdot P_0(\mathbf{x})$$

αφού $R(0)=R_i(0)=1$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής

$$P_0(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}=1\\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\end{cases}$$

$$\lambda(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in C_i\cap\{1\}}f_i(0)=\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\cdot(1-\phi(0_i,\mathbf{1})) \quad (6)$$

αφού, για κάθε i ,προκύπτει από τη σχέση $\phi(0_i,\mathbf{1})=0$ ότι $\mathbf{1}\in C_i$ και από τη σχέση $\phi(0_i,\mathbf{1})=$ 1 προκύπτει ότι $\mathbf{1}\notin C_i$.

Από τις σχέσεις (5), (6) προκύπτει

$$\lambda(t)\geq\sum_{i=1}^{n}f_i(0)\cdot(1-\phi(0_i,\mathbf{1}))=\lambda(0)$$

που είναι το ζητούμενο του θεωρήματος. ■

4.4 Κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά κλάσεων κατανομών χρόνων ζωής στο σχηματισμό παράλληλων συστημάτων. Αναλυτικότερα θα δούμε ότι αν n μονάδες με μια συγκεκριμένη ιδιότητα συνδεθούν μεταξύ τους σχηματίζοντας ένα παράλληλο σύστημα, τότε το σύστημα θα διατηρεί τη ιδιότητα αυτή. Τέτοιες κλάσεις είναι οι $NBUC, NBUE, DMRL, IFR(2), NBU(2)$.

Πρόταση 1. (Abouammoh & El-Neweihi (1986)) *Έστω $T_1, T_2, ..., T_n$ n όμοιες και ανεξάρτητες NBUE τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή F. Τότε η τυχαία μεταβλητή $T = \max(T_1, T_2, ..., T_n)$ είναι NBUE.*

Απόδειξη. Ο μέσος $\mu = E(T)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mu = \int_0^t (1 - F(u))du + \int_t^\infty (1 - F(u))du$$

συνεπώς, από τον ορισμό της κλάσης *NBUE*, έχουμε

$$\int_0^t (1 - F(u))du \geq \int_t^\infty \{F(t)(1 - F(u))\} / (1 - F(t))du \quad (1)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ανίσωση (1) ισχύει για τη συνάρτηση κατανομής $F^n(t)$ της μεταβλητής *T*. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να δείξουμε τη σχέση

$$\int_t^\infty F(t)(1 - F(u)) / (1 - F(t))du \geq \int_t^\infty F^n(t)(1 - F^n(u)) / (1 - F^n(t))du .$$

Η τελευταία ανίσωση προκύπτει άμεσα από τα ακόλουθα

$$F(t)(1 - F(u)) / (1 - F(t)) - F^n(t)(1 - F^n(u)) / (1 - F^n(t)) =$$

$$= F(t)(1 - F(u)) / (1 - F(t)) \cdot \{1 - F^{n-1}(t)[1 + F(u) + ... + F^{n-1}(t)] /]1 + F(t) + ... + F^{n-1}(t)] \geq 0$$

■

Πρόταση 2. (Abouammoh & El-Neweihi (1986)) *Έστω* $T_1, T_2, ..., T_n$ *n όμοιες και ανεξάρτητες DMRL τυχαίες μεταβλητές με κοινή διαφορίσιμη συνάρτηση κατανομής F. Τότε η τυχαία μεταβλητή* $T = \max(T_1, T_2, ..., T_n)$ *είναι DMRL.*

Απόδειξη. Έστω f η παράγωγος της συνάρτησης F. Τότε από τον ορισμό της κλάσης *DMRL* έχουμε

$$\int_t^\infty f(t)(1-F(u))/(1-F(t))^2 du \le 1 \quad (2)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η ανίσωση (2) ισχύει για τη συνάρτηση κατανομής $F^n(t)$ της μεταβλητής T. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να δείξουμε τη σχέση

$$\int_t^\infty f(t)(1-F(u))/(1-F(t))^2 du \ge \int_t^\infty nF^{n-1}(t) f(t)(1-F^n(u))/(1-F^n(t))^2 du \quad (3)$$

Όμως έχουμε

$$1 + F(t) + ... + F^{n-1}(t) - nF^{(n-1)/2}(t) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} [1 - F^{[(n-1)/2]-j}(t)][F^j(t) - F^{(n-1)/2}(t)]$$

όπου $[(n-1)/2]$ εκφράζει το μεγαλύτερο ακέραιο, ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος με $(n-1)/2$. Συνεπώς είναι φανερό ότι

$$nF^{n-1}(t)[1 + F(u) + ... + F^{n-1}(t)] \le [1 + F(t) + ... + F^{n-1}(t)]^2$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει άμεσα τη ζητούμενη ανίσωση (3). ■

Πρόταση 3. (Hendi, Mashhour & Montasser (1993)) *Έστω* $T_1, T_2, ..., T_n$ *n όμοιες και ανεξάρτητες NBUC τυχαίες μεταβλητές με κοινή διαφορίσιμη συνάρτηση κατανομής F. Τότε η τυχαία μεταβλητή* $T = \max(T_1, T_2, ..., T_n)$ *είναι NBUC.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση αξιοπιστίας για τη μεταβλητή $T_{(n)}$ δίνεται από τη σχέση

$$R_{(n)}(t) = \overline{F}_{(n)}(t) = P[T_{(n)} > t] = 1 - F^n(t).$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\int_x^\infty \overline{F}_{(n)}(t+y)dy \le \overline{F}_n(t) \int_x^\infty \overline{F}_n(y)dy, \quad x \ge 0. \ (1)$$

Είναι φανερό ότι η ανίσωση (1) ισχύει για $\overline{F}_n(t) = 0$.

Για $\overline{F}_n(t) \neq 0$ έχουμε την εξής ισοδυναμία

$$F \in NBUC \Leftrightarrow \frac{F(t)}{1-F(t)}\int_{t+x}^{\infty}\overline{F}(u)du \leq \int_{x}^{x+t}[1-F(u)]du. \ (2)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$$\int_{x}^{x+t}\overline{F}(u)du \leq \int_{x}^{x+t}[1-F_{(n)}(u)]du \quad (3)$$

$$\int_{t+x}^{\infty}\frac{F(t)}{1-F(t)}\overline{F}(u)du \geq \int_{t+x}^{\infty}\frac{F^n(t)}{1-F^n(t)}[1-F^n(u)]du. \ (4)$$

Η ανίσωση (4) ισχύει, διότι

$$\int_{t+x}^{\infty}\{\frac{F(t)}{1-F(t)}[1-F(u)]-\frac{F^n(t)}{1-F^n(t)}[1-F^n(u)]\}du =$$

$$= \int_{t+x}^{\infty}\frac{F(t)[1-F(u)]}{1-F(t)}\{1-F^{n-1}(t)\frac{[1-F(t)][1-F^n(u)]}{[1-F^n(t)][1-F(u)]}\}du =$$

$$= \int_{t+x}^{\infty}\frac{F(t)[1-F(u)]}{1-F(t)}\{1-F^{n-1}(t)\frac{[1+F(u)+...+F^{n-1}(u)]}{[1+F(t)+...+F^{n-1}(u)]}\}du =$$

$$\geq \int_{t+x}^{\infty}\frac{F(t)[1-F(u)]}{1-F(t)}\{1-F^{n-1}(t)\frac{[1+F^{-1}(t)+...+F^{-(n-1)}(t)]}{[1+F(t)+...+F^{n-1}(t)]}\}du \geq 0.$$

Επειδή ισχύει ότι

$$F(u) \leq F^{-1}(u) \leq F^{-1}(t), \quad \gamma\iota\alpha \ \ u \geq t$$

είναι φανερό ότι

$$\int_{t+x}^{\infty}\frac{F(t)}{1-F(t)}\overline{F}(u)du \geq \int_{t+x}^{\infty}\frac{F_{(n)}(t)}{1-F_{(n)}(t)}[1-F_{(n)}(u)]du. \ (5)$$

Από τις σχέσεις (4),(5) έχουμε

$$\int_{t+x}^{\infty}\frac{F_{(n)}(t)}{1-F_{(n)}(t)}\overline{F}_{(n)}(u)du \leq \int_{x}^{x+t}\overline{F}_{(n)}(u)du,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{t+x}^{\infty}[\frac{1}{1-F_{(n)}(t)}-1]\overline{F}_{(n)}(u)du \leq \int_{x}^{x+t}\overline{F}_{(n)}(u)du,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{t+x}^{\infty} \frac{\overline{F}_{(n)}(u)}{\overline{F}_{(n)}(t)} du \leq \int_{x}^{\infty} \overline{F}_{(n)}(u) du,$$

δηλαδή

$$\int_{t+x}^{\infty} \overline{F}_{(n)}(u) du \leq \overline{F}_{(n)}(t) \int_{x}^{\infty} \overline{F}_{(n)}(u) du.$$

Συνεπώς

$$\int_{x}^{\infty} \overline{F}_{(n)}(t+y) du \leq \overline{F}_{(n)}(t) \int_{x}^{\infty} \overline{F}_{(n)}(y) dy.$$

και άρα προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Η ακόλουθη πρόταση αποδεικνύει ότι ένα παράλληλο σύστημα, το οποίο αποτελείται από *n* ανόμοιες και ανεξάρτητες *NBUC* μονάδες, διατηρεί την ιδιότητα αυτή (Cai & Wu (1997)).

Πρόταση 4. *Έστω ότι* $T_1, T_2, ..., T_n$ *είναι οι χρόνοι ζωής* n *ανεξάρτητων μονάδων με την ιδιότητα* $NBUC$, *δηλαδή* $T_i \in NBUC,\ i = 1,2,...,n$. *Αν οι χρόνοι ζωής έχουν συνάρτηση κατανομής* $F_1, F_2, ..., F_n$ *αντίστοιχα και* T_{PS} *είναι ο χρόνος ζωής του παράλληλου συστήματος που σχηματίζεται από τις* n *μονάδες, τότε ισχύει ότι* $T_{PS} \in NBUC$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την Πρόταση επαγωγικά. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για την περίπτωση $n = 2$. Έστω

$$F(t) = P(\max(T_1, T_2) < t).$$

Από τον ορισμό της κλάσης $NBUC$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$F(t) \int_{x+t}^{\infty} \overline{F}(y) dy \leq \overline{F}(t) \int_{x}^{x+t} \overline{F}(y) dy.$$

Από γνωστό Λήμμα (Παράρτημα, Λήμμα 5) έχουμε

$$F(t) \int_{x+t}^{\infty} \overline{F}(y) dy \leq$$

$$\leq F_1(t)F_2(t)\int_{x+t}^{\infty}\overline{F}_1(y)dy + F_1(t)F_2(t)\int_{x+t}^{\infty}\overline{F}_2(y)dy \leq$$

$$\leq F_2(t)\overline{F}_1(t)\int_{x}^{x+t}\overline{F}_1(y)dy + F_1(t)\overline{F}_2(t)\int_{x}^{x+t}\overline{F}_2(y)dy \leq$$

$$\leq F_2(t)\overline{F}_1(t)\int_{x}^{x+t}\overline{F}(y)dy + F_1(t)\overline{F}_2(t)\int_{x}^{x+t}\overline{F}(y)dy \leq \overline{F}(t)\int_{x}^{x+t}\overline{F}(y)dy\,,$$

όπου στην πρώτη ανίσωση κάναμε χρήση της σχέσης $F(t)=F_1(t)F_2(t)$ και του Λήμματος 5 (Παράρτημα), η δεύτερη ανίσωση προέκυψε από τον ορισμό της κλάσης $NBUC$, η τρίτη από το γεγονός ότι

$$\overline{F}_1(y) \leq \overline{F}(y),\;\; \overline{F}_2(y) \leq \overline{F}(y)$$

και η τελευταία ανίσωση από το Λήμμα 5 (Παράρτημα).

■

Μια διαφορετική απόδειξη της παραπάνω Πρότασης έχει δοθεί από τους Li, Li & Jing (2000).

Πρόταση 5. (Franco, Ruiz & Ruiz (2001)) *Έστω ότι $T_1, T_2, ..., T_n$ είναι οι χρόνοι ζωής n όμοιων και ανεξάρτητων μονάδων με την ιδιότητα $IFR(2)$, δηλαδή $T_i \in IFR(2),\; i=1,2,...,n$. Αν T_{PS} είναι ο χρόνος ζωής του παράλληλου συστήματος που σχηματίζεται από τις n μονάδες, τότε ισχύει ότι $T_{PS} \in IFR(2)$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος ζωής ενός παράλληλου συστήματος ταυτίζεται με το μέγιστο χρόνο ζωής μιας μονάδας. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\max_{i=1,2,...,n}\{T_i\} \in IFR(2)\,.$$

Έστω ότι οι τυχαίοι χρόνοι $T_1, T_2, ..., T_n$ έχουν συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας $F(t)$ και $f(t)$ αντίστοιχα. Από γνωστό Λήμμα (Παράρτημα, Λήμμα 1) γνωρίζουμε ότι

$$\max_{i=1,2,...,n}\{T_i\} \in IFR(2)$$

αν και μόνο αν

$$\frac{nf(t)F^{n-1}(t)}{(1-F^n(t))(F^n(t+y)-F^n(t))}\int_t^{t+y}(1-F^n(x))dx \le 1, \quad (1)$$

για όλα τα $y > 0$ και $t > 0$.

Επιπλέον έχουμε

$$(a^n - b^n) = (a-b)\sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j\ge 0}} a^i b^j$$

συνεπώς η σχέση (1) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & nF^{n-1}(t)(1+F(x)+\ldots+F^{n-1}(x))(F(t+y)-F(t)) \le \\ & \le (1+F(t)+\ldots+F^{n-1}(t))(F^n(t+y)-F^n(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

με $x \in (t, t+y)$. Όμως, από γνωστό Λήμμα (Παράρτημα, Λήμμα 2), επειδή η ανίσωση $g(F(t), F(t+y)) \ge 0$ αληθεύει για $n \ge 2$, είναι φανερό ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} & nF^{n-1}(t)(1+F(t+y)+\ldots+F^{n-1}(t+y))(F(t+y)-F(t)) \le \\ & \le (1+F(t)+\ldots+F^{n-1}(t))(F^n(t+y)-F^n(t)) \end{aligned}$$

συνεπώς ισχύει η ζητούμενη σχέση (2). ■

Πρόταση 6. (Li (2004)) *Έστω ότι* $T_1, T_2, ..., T_n$ *είναι οι χρόνοι ζωής* n *ανεξάρτητων μονάδων με την ιδιότητα* $NBU(2)$, *δηλαδή* $T_i \in NBU(2),\ i = 1,2,...,n$. *Αν* T_{PS} *είναι ο χρόνος ζωής του παράλληλου συστήματος που σχηματίζεται από τις* n *μονάδες, τότε ισχύει ότι* $T_{PS} \in NBU(2)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρόταση για την περίπτωση $n = 2$. Έστω ότι οι F_1, F_2 είναι οι συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων χρόνων ζωής T_1, T_2 των δύο μονάδων. Τότε η συνάρτηση $F(t) = F_1(t)F_2(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής για το χρόνο ζωής του παράλληλου συστήματος των δύο μονάδων. Για κάθε μη αρνητική, αύξουσα, κοίλη συνάρτηση g και για $a \ge 0$, ισχύουν τα εξής

$$\int_a^{\infty} g(t-a)dF(t) = E(g(\max(T_1,T_2)-a)1_{(\max(T_1,T_2)>a)}) =$$

$$= E(g(\max(T_1,T_2)-a)1_{(T_1>a)}) + E(g(\max(T_1,T_2)-a)1_{T_1\le a\le T_2}) =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_a^{\infty} g(\max(t_1,t_2)-a)dF_1(t_1)dF_2(t_2) + \int_a^{\infty}\int_0^{a} g(t_2-a)dF_1(t_1)dF_2(t_2)\,. \quad (1)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε τα εξής (Λήμμα 3, Παράρτημα)

$$\int_0^{\infty}\int_a^{\infty} g(\max(t_1,t_2)-a)dF_1(t_1)dF_2(t_2) \le \overline{F}_1(a)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\max(t_1,t_2))dF_1(t_1)dF_2(t_2)\,. \ (2)$$

και από το Λήμμα 4 (Παράρτημα)

$$\int_a^{\infty}\int_0^{a} g(t_2-a)dF_1(t_1)dF_2(t_2) = F_1(a)\int_a^{\infty} g(t_2-a)dF_2(t_2) \le$$

$$\le F_1(a)\overline{F}_2(a)\int_0^{\infty} g(t_2)dF_2(t_2) \le F_2(a)F_1(a)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\max(t_1,t_2)dF_1(t_1)dF_2(t_2)\,. \ (3)$$

Συνεπώς, με τη βοήθεια των σχέσεων (2),(3), η σχέση (3) παίρνει τη μορφή

$$\int_a^{\infty} g(t-a)dF(t) \le \overline{F}_1(a)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\max(t_1,t_2))dF_1(t_1)dF_2(t_2) +$$

$$+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\max(t_1,t_2))dF_1(t_1)dF_2(t_2) =$$

$$= \overline{F}(a)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\max(t_1,t_2))dF_1(t_1)dF_2(t_2) = \overline{F}(a)\int_0^{\infty} g(t)dF(t)\,,$$

οπότε, από τον ορισμό της κλάσης $NBU(2)$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής $F \in NBU(2)$.

■

4.5 Συνθήκες διατήρησης για μη κλειστές κλάσεις κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε συνθήκες, κάτω από τις οποίες, μη κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων, καθίστανται κλειστές.

Όπως έχουμε δει στην αρχή του Κεφαλαίου 4, η ιδιότητα *IFR* δεν διατηρείται, εν γένει, όταν συνδέσουμε σε μονότονο σύστημα μονάδες, που χαρακτηρίζονται από αυτήν την ιδιότητα. Η ακόλουθη πρόταση δίνει μια συνθήκη, η οποία επαρκεί ώστε, κατά το σχηματισμό ενός μονότονου συστήματος, η ιδιότητα *IFR* να διατηρείται (Esary & Proschan (1963)).

Πρόταση 1. *Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση αξιοπιστίας* $R_s(\boldsymbol{p})= R_s(p_1, p_2,..., p_n)$, *για το οποίο ισχύουν τα εξής*

α. οι μονάδες είναι όμοιες και ανεξάρτητες (*i.i.d.*) *με χρόνους ζωής IFR και*

β. η συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \frac{x \cdot r'(x)}{r(x)}, \ \ 0 < x < 1$$

όπου $r(p) = R_s(p, p,..., p)$ *είναι η αξιοπιστία του συστήματος, είναι φθίνουσα. Τότε ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι IFR.*

Απόδειξη. Αν $\overline{F}(t), \lambda(t)$ είναι η αξιοπιστία και η βαθμίδα αποτυχίας των μονάδων ως συνάρτηση του χρόνου, τότε η αξιοπιστία του συστήματος θα δίνεται από τον τύπο

$$R(\overline{F}(t),..., \overline{F}(t)) = r(\overline{F}(t))$$

και

$$\lambda_s(t) = -\frac{r'(\overline{F}(t))\overline{F}(t)}{r(\overline{F}(t))} = -\frac{\overline{F}(t) \cdot r'(\overline{F}(t))}{r(\overline{F}(t))} \cdot \frac{\overline{F}'(t)}{\overline{F}(t)} = g(\overline{F}(t)) \cdot \lambda(t).$$

Επομένως

$$\lambda_s(t) = \lambda(t) \cdot g(\overline{F}(t)) = \lambda(t) \cdot (g \circ \overline{F})(t)$$

και αφού η συνάρτηση $g \circ \overline{F}$ είναι αύξουσα (διότι η $\overline{F} = R$ είναι πάντοτε φθίνουσα και η g είναι φθίνουσα), ενώ η λ είναι αύξουσα (από υπόθεση), συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda_s(t)$ του συστήματος είναι αύξουσα. Συνεπώς ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *IFR*, δηλαδή

$$T_s \in IFR$$ ■

Η Πρόταση 1 δίνει έναν τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να εξετάζουμε εάν ένα μονότονο σύστημα διατηρεί την ιδιότητα *IFR* των μονάδων του. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το i.i.d. σύστημα S(*n,k*):G, στο οποίο οι *n* μονάδες είναι *IFR*. Για την αξιοπιστία του συστήματος γνωρίζουμε ότι

$$r(p) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^i \ .$$

Κάνοντας χρήση διαδοχικών παραγοντικών ολοκληρώσεων μπορεί να διαπιστωθεί ότι

$$r(p) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \int_0^p s^{k-1}(1-s)^{n-k}\, ds \,,$$

οπότε

$$g(p) = \frac{pr'(p)}{r(p)} = \frac{pp^{k-1}(1-p)^{n-k}}{\int_0^p s^{k-1}(1-s)^{n-k}\, ds} = \frac{1}{p}\left\{ \int_0^p \left(\frac{s}{p}\right)^{k-1} \left(\frac{1-s}{1-p}\right)^{n-k} ds \right\}^{-1} .$$

Θέτοντας $u = \dfrac{s}{p}$ παίρνουμε

$$g(p) = \left\{ \int_0^1 u^{k-1} \left(\frac{1-pu}{1-p}\right)^{n-k} du \right\}^{-1}$$

και αφού η ποσότητα

$$\frac{1-pu}{1-p} = \frac{1-u}{1-p} + u$$

είναι αύξουσα ως προς *p*, συμπεραίνουμε ότι η *g* είναι φθίνουσα (για $n \neq k$). Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, ο χρόνος ζωής T_s του συστήματος έχει την ιδιότητα *IFR*.

Στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι αν *n* ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες έχουν χρόνους ζωής $T_1, T_2, ..., T_n$, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα *IFR*, τότε οι διατεταγμένοι χρόνοι $T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(n-1)}$ είναι αντίστοιχα οι χρόνοι ζωής ενός *k*-από-τα-*n* συστήματος και άρα, βασιζόμενοι στο προηγούμενο παράδειγμα, οι χρόνοι $T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(n)}$ έχουν και αυτοί την ιδιότητα *IFR*.

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα, τα οποία εξάγονται από την Πρόταση 1, έχουμε τα εξής

- Αν η συνάρτηση g είναι φθίνουσα και οι μονάδες είναι *IFR*, τότε ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *IFR*.
- Αν η συνάρτηση g είναι αύξουσα και οι μονάδες είναι *DFR*, τότε ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *DFR*.
- Αν οι χρόνοι ζωής των μονάδων T_i , $i = 1,2,...,n$ είναι εκθετικοί, τότε

α. Ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *IFR*, όταν η συνάρτηση g είναι φθίνουσα.

β. Ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *DFR*, όταν η συνάρτηση g είναι αύξουσα.

Ωστόσο τα παραπάνω αποτελέσματα δεν καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις. Έτσι το είδος (*IFR/DFR*) του χρόνου ζωής του συστήματος, δεν μπορεί να καθορισθεί με χρήση της έκφρασης

$$\lambda_s(t) = \lambda(t) \cdot (g \circ \overline{F})(t)$$

όταν

$$\triangleright\ g \text{ αύξουσα και } T_i \in IFR$$

$$\triangleright\ g \text{ φθίνουσα και } T_i \in DFR\ .$$

Ένα θεώρημα, το οποίο παρέχει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε ένα μονότονο σύστημα να διατηρεί την ιδιότητα *IFR*, έχει εισαχθεί από τον Samaniego (1985). Πριν να διατυπώσουμε το θεώρημα αυτό, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. *Ένα σύστημα είναι κλειστό ως προς την ιδιότητα IFR, αν ο χρόνος ζωής του συστήματος έχει μία IFR κατανομή όταν οι μονάδες του συστήματος είναι όμοιες, ανεξάρτητες και IFR. Επιπλέον, μία κλάση συστημάτων είναι κλειστή ως προς την ιδιότητα IFR, αν κάθε ένα σύστημα που ανήκει στην κλάση αυτή, είναι κλειστό ως προς την ιδιότητα IFR.*

Με τη ορολογία αυτή, διατυπώνουμε το θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Έστω **C** η κλάση των συστημάτων, τα οποία αποτελούνται από n όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες και είναι κλειστά ως προς την ιδιότητα IFR. Ένα μονότονο σύστημα ανήκει στην κλάση αυτή, αν και μόνο αν η συνάρτηση* $h(x)$, *η οποία ορίζεται από τον τύπο*

$$h(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\cdot s_{i+1}\cdot\binom{n}{i}\cdot x^i}{\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} s_j\right)\cdot\binom{n}{i}\cdot x^i}$$

όπου $s_i = P(T = X_{(i)})$, $i=1,2,\ldots,n$ *είναι η i–οστή συντεταγμένη της υπογραφής **s** του συστήματος, είναι αύξουσα ως προς x, για* $x \in (0,+\infty)$.

Απόδειξη. Έστω ένα μονότονο σύστημα, το οποίο αποτελείται από *n* όμοιες, ανεξάρτητες και *IFR* μονάδες. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι αύξουσα ως προς *x*, για $x \in (0,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα αυτό ανήκει στην κλάση ***C***.

Από την Πρόταση 1 της Παραγράφου 3.2, γνωρίζουμε ότι η αξιοπιστία του συστήματος δίνεται, συναρτήσει της υπογραφής του, από τον τύπο

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{j}(F(t))^j(\overline{F}(t))^{n-j} \quad (1)$$

όπου $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$.

Συνεπώς η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος γράφεται στη μορφή

$$\lambda_T(t) = \frac{-\frac{\partial}{\partial t}P(T>t)}{P(T>t)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i\cdot(n!/(i-1)!(n-i)!)(F(t))^{i-1}(\overline{F}(t))^{n-i}f(t)}{\sum_{i=1}^{n} s_i\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{j}(F(t))^j(\overline{F}(t))^{n-j}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot s_i \cdot \binom{n}{i} (F(t))^{i-1} (\overline{F}(t))^{n-i+1}}{\sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{i=j+1}^{n} s_i) \binom{n}{j} (F(t))^{j} (\overline{F}(t))^{n-j}} \cdot \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \cdot \binom{n}{i} (F(t))^{i} (\overline{F}(t))^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j=i+1}^{n} s_j) \binom{n}{i} (F(t))^{i} (\overline{F}(t))^{n-i}} \cdot \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \quad (2) .$$

Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος είναι *IFR* αν και μόνο αν η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (2), είναι αύξουσα στο σύνολο $\{t | F(t) < 1\}$. Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος στη σχέση (2), με την ποσότητα $(\overline{F}(t))^n$, η βαθμίδα αποτυχίας παίρνει τη μορφή

$$\lambda_T(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \cdot \binom{n}{i} (G(t))^{i}}{\sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j=i+1}^{n} s_j) \binom{n}{i} (G(t))^{i}} \cdot \frac{f(t)}{\overline{F}(t)},$$

όπου $G(t) = \frac{F(t)}{\overline{F}(t)}$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του *t*. Δεδομένου ότι οι μονάδες του συστήματος είναι όμοιες, ανεξάρτητες και *IFR*, και αφού η συνάρτηση *h*(*x*) είναι αύξουσα για $x \in (0,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος έχει την ιδιότητα *IFR*, δηλαδή το σύστημα ανήκει στην κλάση **C**.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν ένα σύστημα ανήκει στην κλάση **C,** τότε για το σύστημα αυτό η συνάρτηση *h*(*x*) είναι αύξουσα. Έστω ότι για ένα μονότονο σύστημα, το οποίο ανήκει στην κλάση **C,** η συνάρτηση *h*(*x*) δεν είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού η συνάρτηση *h* είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει διάστημα (a,β), στο οποίο η *h* είναι φθίνουσα. Ας υποθέσουμε ότι οι *n* όμοιες, ανεξάρτητες και IFR μονάδες του συστήματος έχουν χρόνους ζωής, που ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσο μ=1. Η βαθμίδα αποτυχίας του συστήματος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\lambda_T(t) = h(e^t - 1),$$

συνεπώς η βαθμίδα $\lambda_T(t)$ είναι φθίνουσα ως προς t, για $t \in (\ln(1+a), \ln(1+\beta))$. Τελικά είναι φανερό ότι, η κατανομή του χρόνου ζωής του συστήματος δεν είναι IFR, δηλαδή το σύστημα δεν είναι κλειστό ως προς την ιδιότητα IFR, ή ισοδύναμα το σύστημα δεν ανήκει στην κλάση **C**. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε υποθέσει ότι το σύστημα ανήκει στην κλάση **C**.

■

Παράδειγμα . Θεωρούμε n ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες με την ιδιότητα IFR. Τότε ένα k-από-τα-n σύστημα που αποτελείται από τις n αυτές μονάδες έχει χρόνο ζωής T που διατηρεί την ιδιότητα IFR. Η υπογραφή του συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$s_i = \begin{cases} 1, & i = n-k+1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Συνεπώς η συνάρτηση $h(x)$ του προηγούμενου Θεωρήματος, για το συγκεκριμένο σύστημα, έχει τη μορφή

$$h(x) = \frac{k\binom{n}{k}x^{n-k}}{\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}x^i},$$

η οποία είναι αύξουσα ως προς $x \in (0, \infty)$, οπότε, από το Θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος διατηρεί την ιδιότητα IFR.

Ο χαρακτηρισμός των IFR κλειστών συστημάτων, ο οποίος τεκμηριώνεται από το προηγούμενο θεώρημα, δίνει μια μέθοδο για να μπορούμε να καθορίσουμε αν ένα σύστημα με όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες διατηρεί τη ιδιότητα IFR. Δεδομένου ότι αυτά τα συστήματα χρησιμοποιούνται συχνά στην Εφαρμοσμένη Μηχανική, το θεώρημα έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η μονοτονία της συνάρτησης h μπορεί να αποδειχθεί αναλυτικά, ενώ σε κάποιες άλλες περιπτώσεις, θα πρέπει να ελέγχουμε την μονοτονία της συνάρτησης αυτής με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων.

Για ένα συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα, το οποίο αποτελείται από ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες με την ιδιότητα *IFR*, οι Cui, Hawkes και Jalali (1995) απέδειξαν ότι για κάθε σταθερό αριθμό *k*, υπάρχει ένας αριθμός n_k για τον οποίο το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR* αν $n > n_k$. Ωστόσο η εύρεση μιας αναλυτικής έκφρασης για τον αριθμό n_k είναι ένα εφικτό, αλλά χρονοβόρο πρόβλημα. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε θεωρήματα, τα οποία καθορίζουν την ικανότητα ή μη ενός συνεχόμενου *k*-από-τα-*n*: *F* συστήματος να διατηρεί την ιδιότητα *IFR*, όπου $n = kq + r$, με $1 < k < n$, $0 \le r < k$ και q να εκφράζει τον ελάχιστο αριθμό μονάδων που λειτουργούν, με τις οποίες το σύστημα εξακολουθεί να λειτουργεί.

Θεώρημα 2. (Cui (2002)) *Έστω ένα συνεχόμενο k-από-τα-n: F σύστημα με* $k \ge 6$. *Αν ο* k *είναι ένας άρτιος ακέραιος αριθμός και ορίσουμε την ποσότητα* $\overline{n}_k = kq_{Le}^* + r$, *τότε το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα IFR για* $n > \overline{n}_k$, *όπου*

$$q_{Le}^* = \frac{7k-10-r}{2} + \sqrt{\left(\frac{7k-10-r}{2}\right)^2 + 2k + 4r - 4}\,.$$

Η απόδειξη παραλείπεται. (Cui (2002))

Το Θεώρημα 2 προσδιορίζει ένα εύρος τιμών για το n, ώστε το συνεχόμενο *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα να μην διατηρεί την ιδιότητα *IFR*. Επιπλέον, επειδή ισχύει $0 < r < k$, έχουμε

$$q_{Le}^* < \frac{7k-10}{2} + \sqrt{\left(\frac{7k-10}{2}\right)^2 + 6k - 4} \equiv \hat{q}_{Le}$$

και παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\hat{q}_{Le}$ εξαρτάται μόνο από το k.

Πρόταση 2. (Cui (2002)) *Έστω ένα συνεχόμενο k-από-τα-n: F σύστημα με* $k \ge 6$. *Αν ο* k *είναι ένας άρτιος ακέραιος αριθμός και ορίσουμε την ποσότητα* $\overline{n}_k = (k+1)\hat{q}_{Le}$, *τότε το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα IFR για* $n > \overline{n}_k$.

Η απόδειξη παραλείπεται. (Cui (2002))

Για την περίπτωση όπου ο αριθμός k είναι περιττός ακέραιος διατυπώνουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3. (Cui (2002)) *Έστω ένα συνεχόμενο k-από-τα-n: F σύστημα με* $k \geq 6$. *Αν ο* k *είναι ένας περιττός ακέραιος αριθμός και ορίσουμε την ποσότητα* $\overline{n}_k = kq^*_{Lo} + r$, *τότε το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα IFR για* $n > \overline{n}_k$, *όπου*

$$q^*_{Lo} = \frac{3k^2 + k - 7}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9k^4 + 6k^3 - 41k^2 - 6k + 33},\ \text{αν } r=0$$

και

$$q^*_{Lo} = \frac{6k^2 - 6kr - 5k + 5r - 4}{2} + \sqrt{\left(\frac{6k^2 - (6r+5)k + 5r - 4}{2}\right)^2 + 6r(k-r) - 2r - 4 + 2k},\ \text{αν } r>0$$

Η απόδειξη παραλείπεται. (Cui (2002))

Πρόταση 3. (Cui (2002)) *Έστω ένα συνεχόμενο k-από-τα-n: F σύστημα με* $k \geq 6$. *Αν ο* k *είναι ένας περιττός ακέραιος αριθμός και ορίσουμε την ποσότητα* $\overline{n}_k = (k+1)\hat{q}_{Lo}$, *τότε το σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα IFR για* $n > \overline{n}_k$, *όπου*

$$\hat{q}_{Lo} = \frac{3k^2 + k - 7}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9k^4 + 6k^3 - 41k^2 - 6k + 33},\ \text{αν } r>0$$

και

$$\hat{q}_{Lo} = 3k^2 - 3k - 2 + \sqrt{48k + 12k^2 - 72k^3 + 36k^4},\ \text{αν } r=0.$$

Η απόδειξη παραλείπεται. (Cui (2002))

Ο Πίνακας 4.1 δίνει τις τιμές των q^*_{Le}, q^*_{Lo} για διάφορα n, k.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

	r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	6	32	31	30	29	28	28	--			
	7	147	218	181	144	107	70	34	--		
	8	46	45	44	43	42	41	40	40	--	
	9	245	388	339	290	241	192	143	94	46	--
	10	60	59	58	57	*56*	55	54	53	52	52

Για παράδειγμα το συνεχόμενο 6-από-τα-*n* : *F* σύστημα για $r=1$ δεν διατηρεί την ιδιότητα *IFR* αν $n > k \cdot q^{*}_{Le} + r = 6 \cdot 31 + 1 = 187$. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα συνεχόμενο 6-από-τα-*n* : *F* σύστημα (με $r=1$), το οποίο αποτελείται από *n* ανεξάρτητες, όμοιες και *IFR* μονάδες, διατηρεί την ιδιότητα *IFR*, τότε πρέπει να ισχύει $n \leq 187$. Τέλος, παρουσιάζουμε στον Πίνακα 4.2 τιμές των ποσοτήτων $\hat{q}_{Le}$, $\hat{q}_{Lo}$ για διάφορα n, k.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

k	$\hat{q}_{Le}$	$\hat{q}_{Lo}$ (r=0)	$\hat{q}_{Lo}$ (r>0)
6	32,97	---	---
7	---	147,07	374,33
8	46,94	---	---
9	---	245,057	644,246
10	60,92	---	---

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 4.2 και την Πρόταση 2, συμπεραίνουμε ότι, για παράδειγμα, ένα συνεχόμενο 6-από-τα-*n* : *F* σύστημα δεν διατηρεί την ιδιότητα IFR αν $n > (k+1) \cdot \hat{q}_{Le} = 7 \cdot 32{,}97 = 230{,}79 \cong 231$. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα συνεχόμενο 6-από-τα-*n*: *F* σύστημα, το οποίο αποτελείται από *n* ανεξάρτητες, όμοιες και IFR μονάδες, διατηρεί την ιδιότητα IFR, τότε πρέπει να ισχύει $n \leq 231$. Αντίστοιχα συμπεράσματα εξάγονται για όλα τα συνεχόμενα *k*-από-*τα*-*n*: *F* συστήματα *με* $k \geq 6$.