

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ IFR/DFR

Γιάννης Σ. Τριανταφύλλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2005



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ IFR/DFR

Γιάννης Σ. Τριανταφύλλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2005

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- (Επιβλέπων)
-
-

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**PRESERVATION OF THE ATTRIBUTES
IFR/DFR**

By

Giannis S. Triantafyllou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
February 2005

*Στους γονείς μου
Σπύρο και Φλώρα*

Ευχαριστίες

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στον καθηγητή κ. Μ. Κούτρα για τη σημαντική συμβολή του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Οι παρατηρήσεις, οι διορθώσεις και οι συμβουλές του καθ'όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας αποτέλεσαν πολύτιμη καθοδήγηση για την ολοκλήρωση της. Η υπομονή που επέδειξε όλο αυτό το χρονικό διάστημα, η άριστη συνεργασία του σε όλους τους τομείς και συνολικά η παρουσία του κ. Μ. Κούτρα αποτέλεσε το ηθικό και επιστημονικό στήριγμα για την προσπάθεια αυτή.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επίκουρους καθηγητές κ. Δ. Αντζουλάκο και κ. Κ. Πολίτη για τις χρήσιμες παρεμβάσεις τους. Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω από τη θέση αυτή την ερευνήτρια Μ. Κουτσοδήμου και τον υποψήφιο διδάκτορα του Μαθηματικού τμήματος Δ. Τριανταφύλλου για τη συμβολή τους στον εμπλουτισμό της βιβλιογραφίας της εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου για την αφοσίωση και την αγάπη τους.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως θέμα τη διατήρηση των ιδιοτήτων φθοράς κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Συγκεκριμένα, ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα αν ένα μονότονο σύστημα, που σχηματίζεται από IFR/DFR μονάδες, διατηρεί την ιδιότητα αυτή. Για το σκοπό αυτό σημαντική έννοια είναι η υπογραφή ενός συστήματος, με τη βοήθεια της οποίας ορίζεται μία υποοικογένεια της κλάσης των μονότονων συστημάτων που είναι κλειστή ως προς την ιδιότητα IFR/DFR. Στα πλαίσια της εργασίας διατυπώνονται και ερευνώνται ανάλογα ερωτήματα και για ευρύτερες κλάσεις κατανομών, όπως οι NBU/NWU, IFRA/DFRA, κ.α.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της βαθμίδας αποτυχίας, παρουσιάζεται η ερμηνεία της και περιγράφονται οι διάφορες μορφές της. Στη συνέχεια δίνονται αναλυτικά παραδείγματα της βαθμίδας αποτυχίας πολλών γνωστών συνεχών και διακριτών κατανομών, στα οποία παρουσιάζεται ο τύπος και η γραφική της παράσταση. Στο τέλος του κεφαλαίου προτείνονται εκτιμητές της βαθμίδας αποτυχίας από εμπειρικά δεδομένα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο οι κατανομές χρόνων ζωής ταξινομούνται σε διάφορες κλάσεις, με βάση τη βαθμίδα αποτυχίας ή το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής τους. Οι κλάσεις IFR, DFR, IFRA και DFRA αναλύονται διεξοδικά, καθώς διατυπώνονται και αποδεικνύονται προτάσεις που ισχύουν για κατανομές που ανήκουν σε αυτές. Τέλος η συνολοθεωρητική διάταξη μεταξύ των κλάσεων θεμελιώνεται με αποδείξεις και αντιπαραδείγματα κατανομών.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγουμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό ενός συστήματος αξιοπιστίας που ονομάζεται υπογραφή (*signature*). Αρχικά δίνονται οι ορισμοί της συνάρτησης δομής και της μονοτονίας ενός συστήματος, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την περιγραφή και ερμηνεία της υπογραφής του. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι υπογραφές γνωστών συστημάτων και ο τρόπος υπολογισμού τους. Τέλος δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στις

εφαρμογές και χρήσεις της έννοιας της υπογραφής στην Αξιοπιστία, όπως για παράδειγμα στη σύγκριση των χρόνων ζωής διαφόρων συστημάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετούμε τη συμπεριφορά διαφόρων κλάσεων κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων. Συγκεκριμένα θα δούμε, με τη βοήθεια αντιπαραδειγμάτων, ιδιότητες των μονάδων που δεν διατηρούνται στο σύστημα, (π.χ. οι ιδιότητες *IFR*, *DFR*, *NBUE* κ.α.), αλλά και θα αποδείξουμε θεωρήματα για κλάσεις (ιδιότητες) που είναι κλειστές ως προς τη λειτουργία αυτή (π.χ. *IFRA*, *NBU*, *NBAFR*). Τέλος, θα διατυπώσουμε προτάσεις για μη κλειστές κλάσεις, που δίνουν συνθήκες, οι οποίες αν ισχύουν, καθιστούν κλειστές τις κλάσεις αυτές ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων.

Abstract

The subject of the present MSc Dissertation is the preservation of the components attributes (aging properties) of under the formation of coherent reliability systems. More specifically, an interesting question is whether a coherent system of n IFR/DFR components is IFR/DFR itself or not. In order to answer this question, we introduce the signature of a system, which is subsequently used to define a subgroup of the class of the coherent systems that is closed under this formation. In this dissertation, we investigate analogous questions, concerning larger classes, such as NBU/NWU, IFRA/DFRA e.t.c.

In the first chapter we introduce the concept of the failure rate and study its interpretation and its forms. In addition, the failure rates of several continuous and discrete distributions are given by their form and graph. Finally we present some failure rate estimators, which are based on empirical data.

In the second chapter, the lifetime distributions are classified by their failure rate or their mean remaining lifetime. The classes IFR, DFR, IFRA and DFRA are comprehensively studied, by stating and proving several propositions that are valid for such families of distributions. Finally the ordering of the classes of lifetime distributions is established by proofs and examples.

In the third chapter we introduce an important feature of a reliability system, which is called signature. The definitions of structure function and coherence of a system are also given, since they are necessary for the description and interpretation of its signature. In addition, we calculate the signatures of several systems, such as serial, parallel, e.t.c. Finally we study the applications of the signature in the field of reliability, e.g. in the comparison between the lifetimes of two systems.

In the fourth chapter we study the closeness of several classes under the formation of coherent systems. Specifically, we present examples, which prove that some classes are not closed in general (e.g. *IFR*, *DFR*, *NBUE* e.t.c.), and state theorems related to closeness of some other classes under this particular operation (e.g. *IFRA*, *NBU*, *NBAFR*). Finally we state

several propositions, providing conditions, under which a class of reliability systems is closed under the formation of coherent structure.

Περιεχόμενα

Περίληψη	ix
Abstract	xi
Κατάλογος Πινάκων	xv
Κατάλογος Σχημάτων	xvii
1. Βαθμίδα αποτυχίας	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Ορισμός της βαθμίδας αποτυχίας	1
1.3 Μορφές της βαθμίδας αποτυχίας	5
1.4 Η βαθμίδα αποτυχίας γνωστών συνεχών κατανομών	10
1.5 Η βαθμίδα αποτυχίας γνωστών διακριτών κατανομών	32
1.6 Εκτίμηση της βαθμίδας αποτυχίας	37
2. Ταξινόμηση κατανομών χρόνων ζωής	41
2.1 Εισαγωγή	41
2.2 Η οικογένεια IFR	41
2.3 Η οικογένεια DFR	51
2.4 Η οικογένεια IFRA	54
2.5 Η οικογένεια DFRA	61
2.6 Άλλες οικογένειες χρόνων ζωής	63
3. Υπογραφή	81
3.1 Εισαγωγή	81
3.2 Βασικές έννοιες της δομικής αξιοπιστίας	81
3.3 Η έννοια της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος	90
3.4 Η υπογραφή γνωστών συστημάτων	97
3.5 Υπολογισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός συστήματος μέσω της υπογραφής	127

3.6	Σύγκριση συστημάτων με χρήση της υπογραφής	129
4.	Διατήρηση ιδιοτήτων κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων	141
4.1	Εισαγωγή	141
4.2	Μη κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων	141
4.3	Κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό μονότονων συστημάτων	145
4.4	Κλειστές κλάσεις ως προς το σχηματισμό παράλληλων συστημάτων	154
4.5	Συνθήκες διατήρησης για μη κλειστές κλάσεις κατά το σχηματισμό μονότονων συστημάτων	161
	Παραρτήματα	171
Π.1	Εντολές στο Mathematica	173
Π.2	Αποδείξεις Λημμάτων	181
	Βιβλιογραφία	185

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης κατανομής Γάμμα $GG3(\alpha, \beta, \gamma)$	28
3.1	Παράδειγμα μη μονότονου συστήματος	85
3.2	Η υπογραφή s του συνεχόμενου 2-από-τα- n συστήματος για όλα τα $n: 2 \leq n \leq 8$	110
3.3	Χρόνος ζωής του σειριακού-παράλληλου συστήματος με $n=3$ μονάδες	117
3.4	Η υπογραφή του 5×3 και του 3×5 συστήματος έμμεσης πλειονότητας	120
4.1	Οι τιμές των q_{Le}^* , q_{Lo}^* για διάφορα n, k	169
4.2	Οι τιμές των \hat{q}_{Le} , \hat{q}_{Lo} για διάφορα n, k	169

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Η σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις $f(t), F(t), R(t)$ και $\lambda(t)$	3
1.2	Μορφές της βαθμίδας αποτυχίας $\lambda(t)$	6
1.3	Η bathtub-shaped βαθμίδα αποτυχίας του χρόνου ζωής των ανθρώπων	8
1.4	Απεικόνιση της εμπειρικής bathtub-shaped βαθμίδας αποτυχίας	9
1.5	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ ενός γραμμικού μοντέλου	10
1.6	Η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda=2$	11
1.7	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής <i>Weibull</i>	12
1.8	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Γάμμα	14
1.9	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της περικομμένης κανονικής κατανομής	16
1.10	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της λογαριθμοκανονικής κατανομής	17
1.11	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της ομοιόμορφης κατανομής	18
1.12	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της λογιστικής κατανομής	19
1.13	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της λογαριθμολογιστικής κατανομής	20
1.14	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Gompertz-Makeham	21
1.15	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ των extreme value κατανομών τύπου I για την ελάχιστη τιμή	23
1.16	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ των extreme value κατανομών τύπου I για τη μέγιστη τιμή	23
1.17	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ των extreme value κατανομών τύπου II για την ελάχιστη τιμή	24
1.18	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ των extreme value κατανομών τύπου II για τη μέγιστη τιμή	25
1.19	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ των extreme value κατανομών τύπου III για την ελάχιστη τιμή	26
1.20	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ των extreme value κατανομών τύπου III	26

	για τη μέγιστη τιμή	
1.21	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Rayleigh	27
1.22	Η συνάρτηση πυκνότητας της Γενικευμένης κατανομής Γάμμα	29
1.23	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της Γενικευμένης κατανομής Γάμμα	30
1.24	Η βαθμίδα αποτυχίας της $\lambda(t)$ Exponential power κατανομής	31
1.25	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Pareto	32
1.26	Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής	34
1.27	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της γεωμετρικής κατανομής	34
1.28	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της διωνυμικής κατανομής	35
1.29	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής Poisson	36
2.1	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ και η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας $\Lambda(t)$ για μια κατανομή <i>IFR</i>	45
2.2	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ και η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας $\Lambda(t)$ για μια κατανομή που δεν είναι <i>IFR</i>	45
2.3	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ της κατανομής που προτάθηκε από τον Zhenmin Chen	50
2.4	Το διάγραμμα Venn για τις κατανομές <i>IFR</i> και <i>DFR</i>	54
2.5	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ μιας <i>IFRA</i> κατανομής	56
2.6	Παράδειγμα κατανομής που είναι <i>IFRA</i> και δεν είναι <i>IFR</i> .	58
2.7	Η αθροιστική βαθμίδα αποτυχίας $\Lambda(t)$ για μια <i>IFR</i> κατανομή	59
2.8	Παραδείγματα συναρτήσεων <i>IFRA</i> , που δεν είναι όμως <i>IFR</i>	59
2.9	Παράδειγμα <i>IFRA</i> κατανομής	60
2.10	Παράδειγμα <i>IFRA</i> κατανομής	61
2.11	Σχέσεις διάταξης μεταξύ των κλάσεων κατανομών χρόνου ζωής	76
3.1	Η συνάρτηση <i>S</i> -μορφής	90
3.2	Η διάταξη του σειριακού συστήματος	97
3.3	Η αξιοπιστία του σειριακού συστήματος με n μονάδες	98
3.4	Η διάταξη του παράλληλου συστήματος	100
3.5	Η αξιοπιστία του παράλληλου συστήματος με n μονάδες	101
3.6	Η διάταξη της γέφυρας	103
3.7	Η διάταξη του συνεχόμενου συστήματος k -από-τα- n : F	107
3.8	Η διάταξη του σειριακού-παράλληλου συστήματος	116

3.9	Η διάταξη του k -από-τα- n συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο μονάδων	122
3.10	Η διάταξη του k -από-τα- n συστήματος με περίσσεια σε επίπεδο συστήματος	123
3.11	Παράδειγμα συστημάτων, οι υπογραφές των οποίων διατάσσονται στοχαστικά	135
3.12	Παράδειγμα δύο συστημάτων, οι υπογραφές των οποίων ικανοποιούν τη στοχαστική διάταξη και τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας	136
4.1	Η βαθμίδα αποτυχίας $\lambda(t)$ ενός παράλληλου συστήματος με $n=2$ εκθετικές μονάδες	143

