Δημήτρης Π. Λυμπερόπουλος

MARTINGALE – ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

Διδακτορική Διατριβή
που υποβλήθηκε στο...

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του

Πανεπιστημιου Πειραιως.

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2013

Δημήτρης Π. Λυμπερόπουλος

MARTINGALE - ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

Διδακτορική Διατριβή
που υποβλήθηκε στο...

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του

Πανεπιστημιου Πειραιως.

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2013

Demetris P. Lyberopoulos

MARTINGALE - EQUIVALENT PROBABILITY DISTRIBUTIONS WITH APPLICATIONS IN PREMIUM CALCULATION PRINCIPLES

Ph.D. Thesis
submitted to the...

Department of Statistics and Insurance Science,
UNIVERSITY OF PIRAEUS.

Piraeus
September 2013

Πριν από την αφιέρωση, το…

Χαῖρε, φιλοσόφους ἀσόφους δεικνύουσα,
Χαῖρε, τεχνολόγους ἀλόγους ἐλέγχουσα.

και προς τον «γείτονά» μου, το…

Τᾶς τοῦ πλάνου παγίδας ἐκφυγῶν, ἱερώτατε,
ἀπλανῶς ἐπορεύθης διὰ βίου, πατὴρ ἡμῶν,
Νικόλαε ἀοίδιμε Πλανᾶ…

και η αφιέρωση…

στους γονείς μου,
Παναγιώτη και Άννα.

Ευχαριστίες

Υπό την επήρεια της συγγραφής των επόμενων σελίδων αποφάσισα να κατηγοριοποιήσω τις ευχαριστίες μου ως εξής:

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους *κατέβαλαν* για να καταστεί δυνατή η παρούσα διατριβή και *όσους θα καταβάλλουν κόπο* για την ανάγνωσή της. Στους τελευταίους περιλαμβάνονται σαφώς τα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, ενώ στους πρώτους ξεχωρίζουν τα μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, ο καθηγητής Θεόδωρος Αρτίκης και ο επίκουρος καθηγητής Δημήτριος Στέγγος του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Ιδιαίτερης μνείας χρήζει η συνεισφορά του επιβλέποντα τη διδακτορική μου διατριβή, αναπληρωτή καθηγητή του ιδίου τμήματος, κυρίου Νικολάου Μαχαιρά, ο οποίος αποτέλεσε βασικό μοχλό για την πραγματοποίησή της, με την πολύτιμη υποστήριξη που μου προσέφερε και την υπομονή που επέδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε εκείνους που αποτέλεσαν την «αναγκαία συνθήκη» για την πραγματοποίηση των διδακτορικών μου σπουδών. Βασικός συνοδοιπόρος μου υπήρξε το *Κοινωφελές Ίδρυμα ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Σ. ΩΝΑΣΗΣ*, που στήριξε αυτή την προσπάθεια τόσο οικονομικά μέσω του Προγράμματος Υποτροφιών προς Έλληνες όσο και ψυχολογικά με την άμεση ανταπόκριση των ανθρώπων του σε οποιοδήποτε αίτημά μου και οποιαδήποτε απορία μου. Στο χρηματοδοτικό τομέα σημαντική υπήρξε και η συνεισφορά του επίκουρου καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, κυρίου Γεωργίου Πιτσέλη, ο οποίος προσέφερε τόσο σε 'μενα όσο και σε άλλους υποψήφιους διδάκτορες του τμήματος τη δυνατότητα να βγάλουμε, έστω και μερικώς, τα «προς το ζήν» με τη συμμετοχή μας στη διοργάνωση των Εξετάσεων των Ασφαλιστικών Διαμεσολαβούντων.

Έχοντας γνώση ότι η παραπάνω παράγραφος μπορεί να αποτελέσει φορολογητέα ύλη, θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω όσους με *συνέδραμαν με διάφορους τρόπους* στην πορεία των διδακτορικών μου σπουδών, συγγενείς, φίλους, νυν και πρώην συμφοιτητές, οι οποίοι και ανέχτηκαν τις «κοινωνικά άγαρμπες» συμπεριφορές μου, καθώς και όλους τους συναδέλφους στρατιώτες και τα στελέχη που γνώρισα κατά τη διάρκεια της στρατιωτικής μου θητείας. Οι τελευταίοι και ιδιαίτερα εκείνοι που συνάντησα στον 96 Λόχο Διαβιβάσεων στη Χίο και στο 487 Τάγμα Διαβιβάσεων στο Γενικό Επιτελείο Στρατού διευκόλυναν την εκπόνηση της διατριβής και μου προσέφεραν μια σημαντική ανάπαυλα από τις δυσκολίες, αγωνίες και ανησυχίες του τελευταίου ενάμιση έτους.

Περίληψη

Μια θετική απάντηση στο πρόβλημα του χαρακτηρισμού των martingale-ισοδύναμων σύνθετων μεμειγμένων διαδικασιών Poisson καθίσταται εδώ δυνατή, γενικεύοντας ένα ανάλογο αποτέλεσμα των Delbaen & Haezendonk (1989) για σύνθετες διαδικασίες Poisson. Ως επακόλουθο, προκύπτουν εφαρμογές στη θεωρία αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου.

Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, θεωρήθηκε αρχικά αναγκαία η μελέτη του δομικού ρόλου των disintegrations στις μεμειγμένες στοχαστικές διαδικασίες, από την οποία προκύπτει η αναγωγή της δεσμευμένης ανεξαρτησίας σε συνήθη (μη δεσμευμένη) για μία ευρεία κλάση στοχαστικών διαδικασιών, μέσω μιας κατάλληλης αλλαγής του μέτρου πιθανότητας. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα εξασφαλίζεται και για τη δεσμευμένη ισονομία. Ως συνέπεια, εξάγονται κάποιοι χαρακτηρισμοί των μεμειγμένων διαδικασιών Poisson και των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών. Ιδιαιτέρως για τις δεύτερες, και αφού πρώτα αποδειχθεί μια νέα επέκταση του Θεωρήματος de Finetti για ανταλλάξιμες στοχαστικές διαδικασίες, δίνονται περαιτέρω χαρακτηρισμοί τους μέσω της έννοιας της ανταλλαξιμότητας και διαφόρων τύπων disintegrations.

Επίσης παρουσιάζεται μια νέα μέθοδος κατασκευής μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών, που περιλαμβάνει ως ειδική περίπτωση εκείνη των μεμειγμένων διαδικασιών Poisson, βάσει της οποίας δίνονται συγκεκριμένα κατασκευαστικά παραδείγματα τέτοιων διαδικασιών και καθίσταται δυνατός ο ακριβής υπολογισμός των αντίστοιχων disintegrations. Τέλος, διερευνώνται εφαρμογές του κεντρικού μας χαρακτηρισμού στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και σε άλλα σχετικά χρηματασφαλιστικά προβλήματα.

Abstract

A positive answer to the problem of characterizing martingale-equivalent compound mixed Poisson processes becomes here possible, generalizing in this way a corresponding result of Delbaen & Haezendonk (1989) for compound Poisson processes. Some applications to the theory of premium calculation principles are then obtained.

For solving the above problem, the structural role of disintegrations in mixed stochastic processes is studied first. As a result, the reduction of conditional independence to the ordinary one follows for a wide class of stochastic processes, under a proper change of measure. The reduction of conditional identically distributed processes to ordinary ones is obtained in a similar way. As a consequence, some characterizations of mixed Poisson processes as well as of mixed renewal processes are derived. In particular, further characterizations in terms of exchangeability and of different types of disintegrations are given for mixed renewal processes, providing among others an extension of de Finetti's Theorem.

In addition, a new method of constructing mixed renewal processes, including the construction of mixed Poisson processes as a special case, is presented. Based on the latter results, some concrete examples of constructing such processes are given and the corresponding disintegrating measures are computed. Finally, possible applications of our main characterization to premium calculation principles as well as to other problems related to insurance and finance are investigated.

Κατάλογος Συντομογραφιών

κ.δ.π.	:	κανονική δεσμευμένη πιθανότητα (*r.c.p.*)
μ.α.δ.	:	μεμειγμένη ανανεωτική διαδικασία (MRP)
μ.δ.	:	μεμειγμένη διαδικασία
μ.χ.	:	μετρήσιμος χώρος
ΠΧΑΑ	:	Προσέγγιση Χρηματοοικονομικής Αποτίμησης της Ασφάλισης
σ.β.	:	σχεδόν βέβαια
σ.δ.	:	στοχαστική διαδικασία
σ.μ.δ. Poisson	:	σύνθετη μεμειγμένη διαδικασία Poisson (CMPP)
σ.ό.	:	σχεδόν όλα
σ.(π.)π.	:	συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας
τ.μ.	:	τυχαία μεταβλητή
χ.μ.	:	χώρος μέτρου
χ.π.	:	χώρος πιθανότητας

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ 5
1.1 Βασικοί συμβολισμοί. 5
1.2 Μετροθεωρητικές και πιθανοθεωρητικές έννοιες 5

2 DISINTEGRATIONS 9
2.1 Βασικές Έννοιες 9
2.2 Κανονικές δεσμευμένες πιθανότητες-γινόμενο και disintegrations 12
2.3 Δεσμευμένες μέσες τιμές και disintegrations 16

3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ POISSON 21
3.1 Υπό συνθήκη ανεξαρτησία και ισονομία 22
3.2 Αναγωγή των μεμειγμένων διαδικασιών Poisson σε συνήθεις 23
3.3 Περαιτέρω χαρακτηρισμοί μέσω disintegrations 34

4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ 45
4.1 Χαρακτηρισμοί μέσω disintegrations 46
4.2 Μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες και ανταλλαξιμότητα 51

5 ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ 59
5.1 Η Κατασκευή 59
5.2 Παραδείγματα σχετικά με την κατασκευή 62

6 ΕΝΑΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ POISSON **73**

6.1 Βασικές υποθέσεις . . . 73

6.2 Ο Χαρακτηρισμός . . . 75

7 MARTINGALE-ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ POISSON **79**

7.1 Δύο εκθετικά martingales . . . 79

7.2 Μια απάντηση στο κεντρικό πρόβλημα . . . 89

8 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ **111**

8.1 Η χρηματοοικονομική αποτίμηση της ασφάλισης . . . 111

8.2 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου . . . 114

8.3 Ειδικές περιπτώσεις . . . 119

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ **121**

A Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων και Μέτρου **123**

A.I Μετρησιμότητα και τυχαίες μεταβλητές . . . 123

A.II Χρήσιμα αποτελέσματα . . . 124

A.III Κατανομές πιθανότητας . . . 125

B Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας **127**

Γ Τοπολογικά Μέτρα **131**

Δ Κατάλογος Μηδενικών Συνόλων **133**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ **137**

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ **141**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διατριβή θα μας απασχολήσει το πρόβλημα εύρεσης κατάλληλων martingale - ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας, μέσω των οποίων καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός αρχών υπολογισμών ασφαλίστρου στα πλαίσια μιας μη κερδοσκοπικής αγοράς (*arbitrage-free market*) και της μη κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου.

Οι Delbaen & Haezendonk (1989) εισήγαγαν την *Προσέγγιση της Χρηματοοικονομικής Αποτίμησης της Ασφάλισης* (ΠΧΑΑ) στην προσπάθειά τους να δημιουργήσουν ένα κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο για την αντιμετώπιση προβλημάτων χρηματοοικονομικής φύσης που σχετίζονται με την αντίστοιχη σ.δ. κινδύνου μιας ασφαλιστικής εταιρείας, δηλαδή με τη διαχρονική εξέλιξη των κινδύνων που αυτή αναλαμβάνει, καθώς και να συνδέσουν το πλαίσιο αυτό με τη θεωρία των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου (*premium claculation principles*).

Στο σχετικό άρθρο, βλέπε [8], οι συγγραφείς θεωρούν ότι μια ασφαλιστική εταιρεία διατηρεί ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων, καθώς και ότι η διαχρονική εξέλιξη του ύψους των συνολικών απαιτήσεων που εγείρονται έναντι της εταιρείας από αυτό το χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μια σύνθετη διαδικασία Poisson $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P), κάτι το οποίο ισχύει στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου. Επίσης θεωρούν έναν χρονικό ορίζοντα $\tau > 0$ και υποθέτουν ότι σε κάθε χρονική στιγμή t η εταιρεία μπορεί να πουλήσει στα πλαίσια μιας μη κερδοσκοπικής αγοράς τον εναπομείναντα κίνδυνο της περιόδου $(t, \tau]$ για δοσμένο ασφάλιστρο p_t (βλ. και Ενότητα 8.1). Κάτω από αυτές τις υποθέσεις, οι συγγραφείς του [8] οδηγούνται στην ακόλουθη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της χρηματοοικονομικής αποτίμησης της ασφάλισης:

[Π0] Αν η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-σύνθετη διαδικασία Poisson, τότε ζητείται να χαρακτηριστούν εκείνα τα μέτρα πιθανότητας Q έτσι ώστε η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να παραμένει μια σύνθετη διαδικασία Poisson κάτω από το Q, και τα Q και P να είναι προοδευτικά ισοδύναμα.

Μάλιστα, οι Delbaen & Haezendonk (1989) δίνουν μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα μέσω ενός χαρακτηρισμού martingale-ισοδύναμων σύνθετων διαδικασιών Poisson (βλ. [8], Proposition 2.2).

Το [Π0] προκαλεί το εξής γενικότερο ερώτημα:

[Π1] Αν η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-σ.μ.δ. Poisson, τότε ζητείται να χαρακτηριστούν εκείνα τα μέτρα πιθανότητας Q έτσι ώστε η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να παραμένει μια σ.μ.δ. Poisson κάτω από το Q, και τα Q και P να είναι προοδευτικά ισοδύναμα.

Σε αυτή τη διατριβή, δίνεται κάτω από ορισμένες ασθενείς προϋποθέσεις, μια θετική απάντηση στο πρόβλημα [Π1] (βλ. Θεώρημα 7.2.9). Ως ειδική περίπτωση του προαναφερθέντος θεωρήματος προκύπτει το αποτέλεσμα των Delbaen & Haezendonk (1989).

Η απουσία της ανεξαρτησίας για τις προσαυξήσεις της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, και άρα της επαγόμενης σ.δ. συνολικών απαιτήσεων, και η αντικατάστασή της από τη δεσμευμένη ή υπό συνθήκη ανεξαρτησία στην περίπτωση των σ.μ.δ. Poisson, κάνει το πρόβλημα του χαρακτηρισμού των Q ουσιαστικά δυσκολότερο από εκείνο της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου. Η εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης ανεξαρτησίας με τη σειρά της, καθιστά απαραίτητη για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος, τη μελέτη των disintegrations[1] και των κανονικών δεσμευμένων πιθανοτήτων (*regular conditional probabilities*), που σχετίζονται το πρόβλημα αυτό.

Πιο συγκεκριμένα, για την επίλυση του [Π1] αρχικά δίνονται ορισμένες προαπαιτούμενες έννοιες και κάποιοι βασικοί ορισμοί (βλ. Κεφάλαιο 1). Στο Κεφάλαιο 2, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο πως σχετίζονται μεταξύ τους οι έννοιες των συνεπών ως προς μια μετρήσιμη απεικόνιση disintegrations, των κ.δ.π.-γινόμενο και των δεσμευμένων μέσων τιμών. Τα αποτελέσματα που αναφέρονται στην ισοδυναμία (της ύπαρξης) disintegrations συνεπών με μια μετρήσιμη απεικόνιση και κ.δ.π.-γινόμενο (βλ. Προτάσεις 2.2.2 και 2.3.4) παρουσιάζουν (και ανεξάρτητο της προσπάθειας επίλυσης του [Π1]) ενδιαφέρον για τη θεωρία των disintegrations.

Μέσω της χρήσης των αποτελεσμάτων του δευτέρου κεφαλαίου (και όχι μόνο), στο Κεφάλαιο 3 καθίσταται δυνατή η αναγωγή της δεσμευμένης ανεξαρτησίας κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P σε συνήθη (μη δεσμευμένη) κάτω από τα επιμέρους μέτρα πιθανότητας P_θ μιας disintegration για μια ευρεία κλάση σ.δ. (βλ. Λήμμα 3.2.2 και Πρόταση 3.2.4). Ως συνέπεια, προκύπτει η αναγωγή μιας P-μ.δ. Poisson σε μια P_θ-διαδικασία Poisson για σ.ό. τα μέτρα πιθανότητας P_θ μιας disintegration $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ του P επάνω στην κατανομή πιθανότητας P_Θ της δομικής παραμέτρου Θ της μ.δ. Poisson, συνεπούς με τη Θ (βλ. Πρόταση 3.2.10). Με τη βοήθεια του εν λόγω αποτελέσματος, αποδεικνύονται περαιτέρω χαρακτηρισμοί των

[1] *Ο όρος "disintegration" δεν φαίνεται να βρίσκει μια ικανοποιητική, τόσο από γλωσσικής όσο και από μαθηματικής απόψεως, μετάφραση στα ελληνικά. Για τον λόγο αυτό επιλέχτηκε στη διατριβή αυτή να παραμείνει αμετάφραστος.*

διαδικασιών αυτών μέσω σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, martingales και μέτρων απαίτησης (βλ. Θεώρημα 3.3.5).

Στο Κεφάλαιο 4 εισάγεται ένας νέος ορισμός μ.α.δ. με δομική παράμετρο μια μετρήσιμη απεικόνιση (βλ. Ορισμό 4.1.2), αντίστοιχος εκείνος των μ.δ. Poisson και γενικεύεται το κύριο αποτέλεσμα του τρίτου κεφαλαίου (βλ. Πρόταση 3.2.10) για την περίπτωση των μ.α.δ. (βλ. Πρόταση 4.1.11). Επίσης επεκτείνεται το Θεώρημα de Finetti (βλ. Θεώρημα 4.2.3 και Πρόταση 4.2.5) και αποδεικνύονται ορισμένοι χαρακτηρισμοί των μ.α.δ. μέσω της έννοιας της ανταλλαξιμότητας μιας σ.δ. και μέσω διαφόρων τύπων disintegrations (βλ. Θεώρημα 4.2.7). Μεταξύ άλλων στο Θεώρημα 4.2.7 καθίσταται δυνατή η σύγκριση του νέου ορισμού των μ.α.δ. με τον γνωστό ορισμό του Huang (βλ. Ορισμό 4.1.3) και αποδεικνύεται ότι για μια ευρύτατη κλάση χ.π. που χρησιμοποιείται στις εφαρμογές οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Ως συνέπεια, στο Κεφάλαιο 5 αποδεικνύεται μια νέα κατασκευή μέσω disintegrations για τις μ.α.δ. (βλ. Θεώρημα 5.1.1), ως ειδική περίπτωση της οποίας προκύπτει μια νέα κατασκευή για μ.δ. Poisson (βλ. Πόρισμα 5.1.2), η οποία ταυτόχρονα συνιστά κι ένα αποτέλεσμα ύπαρξής τους. Το γεγονός αυτό επιτρεπεί την κατασκευή απτών παραδειγμάτων τέτοιων διαδικασιών, καθώς και τον υπολογισμό των αντίστοιχων επιμέρους μέτρων πιθανότητας των disintegrations. (βλ. Ενότητα 5.2).

Στο έκτο κεφάλαιο, αποδεικνύεται με τη βοήθεια του κύριου αποτελέσματος του τρίτου κεφαλαίου ένας χαρακτηρισμός των σ.μ.δ. Poisson μέσω disintegrations. Στο Κεφάλαιο 7 δίνεται ένας *χαρακτηρισμός, μέσω disintegrations και martingale - (προοδευτικά) ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας (βλ. Ορισμούς 7.2.1)*, όλων των μέτρων πιθανότητας Q, που είναι προοδευτικά ισοδύναμα με το αρχικό μέτρο πιθανότητας P και κάτω από οποία μια P-σ.μ.δ. Poisson παραμένει μια σ.μ.δ. Poisson. Ο εν λόγω χαρακτηρισμός (βλ. Θεώρημα 7.2.9 και Πόρισμα 7.2.13) παρέχει, κάτω από ασθενείς προϋποθέσεις, μια καταφατική απάντηση στο [Π1]. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.9 χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων το κύριο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 6, όπως επίσης και η ιδέα της απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Ακόμη παραθέτουμε μια σειρά από αξιοσημείωτες συνέπειες του Θεωρήματος 7.2.9, πριν μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 8 τις εφαρμογές του στη θεωρία αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου και εξετάσουμε ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις. Επίσης διερευνούμε το πως συνδέεται το εν λόγω θεώρημα τόσο με την ΠΧΑΑ όσο και με άλλα σχετικά πεδία εφαρμογής του στα ασφαλιστικά και τα χρηματοοικονομικά.

Κλείνοντας την εισαγωγή, κάνουμε κάποια σχόλια για τη διάρθρωση της παρούσας διατριβής. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος [Π1] δεν χρησιμοποιείται άμεσα κανένα από τα αποτελέσματα των Κεφαλαίων 4 και 5. Παρόλα αυτά, όπως ήδη προαναφέραμε, η βασική ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1 ενυπάρχει στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.9,

(ii). Επίσης και τα δύο αυτά κεφάλαια βρίσκονται σε άμεση σύνδεση με τα Κεφάλαια 2, 3, 6 και 7. Επί πλέον, είναι μάλλον αυτονόητη η σχέση του ογδόου κεφαλαίου με το Κεφάλαιο 7, υπογραμμίζοντας με αυτό τον τρόπο τη σημασία των εξαγχθέντων αποτελεσμάτων και για το πεδίο των εφαρμογών.

Τα παραπάνω μπορεί να συνοψιστούν στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\textbf{ΚΕΦ.2}} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{\textbf{ΚΕΦ.3}} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \boxed{\textbf{ΚΕΦ.6}} \arrow[r] & \boxed{\textbf{ΚΕΦ.7}} \arrow[r, dashed] & \boxed{\textbf{ΚΕΦ.8}} \\
& \boxed{\text{ΚΕΦ.4}} \arrow[r] \arrow[u, shift left] & \boxed{\text{ΚΕΦ.5}} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Στα Παραρτήματα Α, Β και Γ που βρίσκονται στο τέλος της διατριβής παραθέτουμε γνωστά αποτελέσματα και ορισμούς της Θεωρίας Πιθανοτήτων, της Θεωρίας Μέτρου, της Γενικής Τοπολογίας και των τοπολογικών μέτρων που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη διατριβή. Ιδιαίτερα σημαντική είναι επίσης η συνεισφορά του Παραρτήματος Δ, αφού εκεί δίνεται ένας κατάλογος των συνόλων μηδενικής πιθανότητας που εμφανίζονται στο κύριο μέρος της διατριβής, χωρίς τη συμβολή του οποίου η ενασχόληση του αναγνώστη με αυτά θα αποδεικνύονταν μάλλον προβληματική!

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή.

1.1 Βασικοί συμβολισμοί

Έστω Ω σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Με $A^c := \Omega \setminus A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω), ενώ με χ_A συμβολίζεται η δείκτρια (ή χαρακτηριστική) συνάρτηση του συνόλου A, και με id_A η ταυτοτική απεικόνιση στο σύνολο A. Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι μια οποιαδήποτε απεικόνιση και $D \subseteq A$ τότε με $f \mid D$ συμβολίζουμε τον **περιορισμό** της f στον D.

Με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i \in I}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω. Επίσης αν $\mathcal{K}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, τότε $\bigcup \mathcal{K} := \{\omega : \exists\ K \in \mathcal{K},\ \omega \in K\}$ και $\bigcap \mathcal{K} := \{\omega : \omega \in K \ \ \forall\ K \in \mathcal{K}\}$.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών και $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Επίσης με $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ δηλώνουμε το σύνολο όλων των ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών, αντίστοιχα. Επί πλέον, $\mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ και το $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.2 Μετροθεωρητικές και πιθανοθεωρητικές έννοιες

Σε αυτή την ενότητα καλύπτονται κατά σειρά τα εξής θέματα: συστήματα συνόλων, χρήσιμες σ-άλγεβρες, χώροι πιθανότητας, η έννοια της κατανομής πιθανότητας και χώροι γινόμενο.

Συστήματα συνόλων

Μια μη κενή οικογένεια $\{B_i\}_{i\in I}$ ονομάζεται **διαμέριση** του Ω αν $B_i \cap B_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in I$ και $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$. Οι τελευταίες δύο ιδιότητες συνοπτικά σημειώνονται ως εξής: $\biguplus_{i\in I} B_i = \Omega$. *Στο εξής, κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε οποιαδήποτε οικογένεια στην οποία γίνεται αναφορά ως μη κενή.*

Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **μονότονη κλάση** αν (i) για κάθε $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στη $\mathcal{M}$ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$, και (ii) για κάθε $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία στη $\mathcal{M}$ ισχύει $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$. Ας θεωρήσουμε επίσης $\mathcal{G}$ σύστημα υποσυνόλων του Ω. **Η ελάχιστη μονότονη κλάση** υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $m(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **η μονότονη κλάση η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $m(\mathcal{G})$.

Μια οικογένεια $\mathcal{D}$ υποσυνόλων του Ω είναι μια **κλάση Dynkin** αν (i) $\Omega \in \mathcal{D}$, (ii) $B \setminus A \in \mathcal{D}$ για κάθε $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq B$, και (iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ για κάθε $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στο $\mathcal{D}$ (βλ. π.χ. [15], 136).

Μια **άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω είναι ένα σύστημα $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω, τέτοιο ώστε (i) $\Omega \in \mathcal{A}$, (ii) για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $A^c \in \mathcal{A}$, (iii) $A \cup B \in \mathcal{A}$ για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$. Ομοίως με την περίπτωση της ελάχιστης μονότονης κλάσης ορίζεται **η ελάχιστη άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\alpha(\mathcal{G})$, και ονομάζεται **η άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\alpha(\mathcal{G})$.

Μια σ**-άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω είναι ένα σύστημα Σ υποσυνόλων του Ω, τέτοιο ώστε (i) $\Omega \in \Sigma$, (ii) για κάθε $E \in \Sigma$ ισχύει $E^c \in \Sigma$, (iii) για κάθε $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του Σ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. Τα στοιχεία της Σ καλούνται **μετρήσιμα σύνολα ή ενδεχόμενα** (στη γλώσσα της Θεωρίας Πιθανοτήτων). Ας θεωρήσουμε επίσης $\mathcal{G}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του Ω. **Η ελάχιστη** σ**-άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$, ονομάζεται **η** σ**-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα Σ είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** αν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε $\Sigma = \sigma(\mathcal{G})$. Αν η Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και το A ένα υποσύνολο του Ω, τότε η οικογένεια $\Sigma_A := \{A \cap B : B \in \Sigma\}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του A και ονομάζεται **η** σ**-άλγεβρα ίχνος της** Σ **επάνω στο** A.

Χρήσιμες σ-άλγεβρες

Για μια οποιαδήποτε Hausdorff τοπολογία $\mathfrak{T}$ επάνω στο Ω (βλ. Ορισμό B.1, (c)), με $\mathfrak{B}(\Omega)$ συμβολίζεται η **Borel** σ**-άλγεβρα** επάνω στο Ω, δηλαδή η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathfrak{T}$. Ιδιαιτέρως, με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}} := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ και $\overline{\mathfrak{B}} := \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$

σημειώνεται η Borel σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\overline{\mathbb{R}}$, αντίστοιχα. Ο περιορισμός του μέτρου του Lebesgue λ στη $\mathfrak{B}$ ή γενικότερα στη $\mathfrak{B}(A)$, όπου A είναι ένα οποιοδήποτε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$, θα σημειώνεται και πάλι με λ.

Ένα ζεύγος (Ω, Σ), όπου Ω ένα οποιοδήποτε σύνολο και Σ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος** (μ.χ.). Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μ.χ., κι έστω f μια Σ-T-μετρήσιμη απεικόνιση από το Ω στο Υ. Θέτουμε $\sigma(f) := \{f^{-1}(B) : B \in T\}$. Τότε η $\sigma(f)$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** f, και ισχύει $\sigma(f) \subseteq \Sigma$. Η $\sigma(f)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που καθιστά την απεικόνιση f μετρήσιμη. Γενικότερα, αν $\{f_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια Σ-T-μετρησίμων απεικονίσεων από το Ω στο Υ, τότε με $\sigma(\{f_i\}_{i\in I}) := \sigma\big(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)\big)$ συμβολίζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτή.

Χώροι πιθανότητας

Έστω (Ω, Σ) ένας μ.χ.. Μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ ονομάζεται **μέτρο** επάνω στη Σ (ή αν δεν προκαλείται σύγχυση απλώς επάνω στο Ω) αν (i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στη Σ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω ισχύει $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$. Μια τριάδα (Ω, Σ, μ) τέτοια ώστε το ζεύγος (Ω, Σ) να είναι ένας μ.χ. και το μ ένα μέτρο ονομάζεται **χώρος μέτρου** (χ.μ.). Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) = 1$ τότε αυτό ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα** και συμβολίζεται συνήθως με P. Συνακόλουθα, ο αντίστοιχος χ.μ. ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (χ.π.) και συμβολίζεται με (Ω, Σ, P). *Μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θεωρούμε έναν χ.π.* (Ω, Σ, P).

Το μέτρο πιθανότητας P ονομάζεται **τέλειο** αν για κάθε τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X επάνω στο Ω υπάρχει ένα σύνολο Borel $B \subseteq R_X := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ τέτοιο ώστε $P(X^{-1}(B)) = 1$. Το R_X είναι το **σύνολο τιμών** της X.

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ με $P(N) = 0$ ονομάζεται ένα P-**μηδενικό σύνολο** (ή απλώς ένα μηδενικό σύνολο). Η οικογένεια όλων των P-μηδενικών συνόλων συμβολίζεται με Σ_0. Για δύο τ.μ. X, Y επάνω στο Ω γράφουμε $X = Y$ P-σ.β. αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Η οικογένεια των όλων των πραγματικών και μη αρνητικών P-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του Ω, δηλαδή όλων και όλων των μη αρνητικών τ.μ. X επάνω στο Ω ώστε $\int |X| dP < \infty$, συμβολίζεται με $\mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{L}^1_+(P)$, αντίστοιχα. Συναρτήσεις που είναι $P-$σ.β. ίσες δεν ταυτίζονται. Για μια τ.μ. X επάνω στο Ω με $\mathbb{E}_P[X]$ συμβολίζεται η **μέση ή αναμενόμενη τιμή** της X.

Η έννοια της κατανομής πιθανότητας

Για μια οποιαδήποτε Σ-T-μετρήσιμη απεικόνιση[2] X από το Ω στο Υ, θέτουμε $T_X := \{B \subseteq \Upsilon : X^{-1}(B) \in \Sigma\}$. Τότε έχουμε ότι η T_X είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Υ, ενώ προφανώς $T \subseteq T_X$. Με P_X συμβολίζουμε το **μέτρο εικόνα** $P \circ X^{-1}$ του P κάτω από την X ή **την κατανομή πιθανότητας** της X κάτω από το P, και πάλι με P_X τον περιορισμό του στην T. Μια κατανομή πιθανότητας P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη** (*degenerate*) αν υπάρχει $x \in \Upsilon$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$. Ο συμβολισμός $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ θα δηλώνει ότι η X κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$, όπου $\theta \in \Psi$ και Ψ είναι ο παραμετρικός χώρος. Στο Παράρτημα A δίνονται οι κατανομές πιθανότητες που θα χρειαστούμε παρακάτω.

Χώροι γινόμενο

Ένα υποσύνολο R του $\Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του $\Omega \times \Upsilon$)** αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρησίμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$. Αντίστοιχα, η άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρησίμων ορθογωνίων συμβολίζεται με $\Sigma \times T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μοναδικό μέτρο πιθανότητας ρ που ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$ για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο των P και Q** και συμβολίζεται με $P \otimes Q$ (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 9.7).

Με $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ συμβολίζουμε τον χ.π.-γινόμενο των (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q), και με π_Ω και π_Υ τις κανονικές προβολές του $\Omega \times \Upsilon$ επάνω στο Ω και Υ, αντίστοιχα. Αν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη επάνω στο $\Omega \times \Upsilon$, τότε για σταθερά $\omega_0 \in \Omega$ και $y_0 \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_{\omega_0} : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ και $f^{y_0} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζονται από τους τύπους $f_{\omega_0}(y) := f(\omega_0, y)$ για κάθε $y \in \Upsilon$ και $f^{y_0}(\omega) := f(\omega, y_0)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, αντίστοιχα. Ομοίως, $C_{\omega_0} := \{y \in \Upsilon : (\omega_0, y) \in C\}$ και $C^{y_0} := \{\omega \in \Omega : (\omega, y_0) \in C\}$.

Αν $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ μια οικογένεια οποιωνδήποτε χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, \mu_J)$ τον **χώρο γινόμενο** $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, με Σ_J τη **σ-άλγεβρα γινόμενο** $\otimes_{i \in J}\Sigma_i$, και με μ_J το **μέτρο γινόμενο** $\otimes_{i \in J}\mu_i$. Ιδιαιτέρως, αν $(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) = (\Omega, \Sigma, P)$ για κάθε $i \in I$, τότε με P_I συμβολίζεται το μέτρο γινόμενο επάνω στο Ω^I και με Σ_I η σ-άλγεβρα γινόμενο επάνω στην οποία ορίζεται. Για οποιοδήποτε $\emptyset \neq J \subseteq I$ η κανονική προβολή του Ω_I επάνω στο Ω_J συμβολίζεται με π_J. Ιδιαιτέρως, αν $J = \{j\}$, τότε για λόγους απλοποίησης θέτουμε $\pi_J = \pi_j$.

[2] *Συνήθως οι απεικονίσεις από το Ω στο Υ σημειώνονται με μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, και στην ειδική περίπτωση όπου $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ χρησιμοποιούνται κεφαλαία. Εδώ υιοθετούμε και στις δύο περιπτώσεις τα κεφαλαία, αφού στο μεγαλύτερο μέρος της διατριβής θα ασχοληθούμε με τ.μ..*

Κεφάλαιο 2

DISINTEGRATIONS

Στο κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνονται έννοιες και αποτελέσματα ζωτικής σημασίας για την επίλυση των προβλημάτων που τίθενται στην παρούσα διατριβή και για την παρουσίαση των αντικειμένων των επόμενων κεφαλαίων. Κεντρικό ρόλο μεταξύ αυτών έχει η έννοια της disintegration.

Έτσι, στην Ενότητα 2.1 άρχικα ανακαλούμε τους ορισμούς της δεσμευμένης μέσης τιμής, του *μαρκοβιανού πυρήνα*, της disintegration, της *κανονικής δεσμευμένης πιθανότητας (κ.δ.π.)-γινόμενο* και της *υποαλγεβρικής κ.δ.π.*, ενώ στην Ενότητα 2.2 διερευνούμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι disintegrations που είναι συνεπείς με μια απεικόνιση που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας (*inverse-measure-preserving map*) και οι κ.δ.π.-γινόμενο. Το κύριο αποτέλεσμα της ενότητας αυτής (βλ. Πρόταση 2.2.2) θα μπορούσε να παρουσιάζει ξεχωριστό ενδιαφέρον, αφού αναφέρεται στην ισοδυναμία της ύπαρξης μιας τέτοιας disintegration με αυτή μιας κ.δ.π.-γινόμενο. Στην Ενότητα 2.3, δίνεται ο τρόπος με τον οποίο συνδέεται η έννοια της κ.δ.π.-γινόμενο με αυτή της δεσμευμένης μέσης τιμής (βλ. Πρόταση 2.3.5).

Μέχρι το τέλος του έκτου κεφαλαίου, οι (Ω, Σ, P), (Υ, T, Q) ***και*** (Ψ, Z) ***είναι αυθαίρετοι αλλά σταθεροί χ.π. και χ.μ., αντίστοιχα.***

2.1 Βασικές Έννοιες

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μια σ-υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P \mid \mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$ ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής** της X δοθείσης της $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X \mid \mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$, θέτουμε $P(E \mid \mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E \mid \mathcal{F}]$.

Ένας T-Σ-**μαρκοβιανός πυρήνας** είναι μια συνάρτηση $k \colon T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(k1) Η συνολοσυνάρτηση $k(\cdot,\omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην T για οποιοδήποτε σταθερό $\omega \in \Omega$.

(k2) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B,\omega)$ είναι Σ-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$.

Έστω μια Σ-T-μετρήσιμη απεικόνιση X από το Ω στο Υ και μια σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Μια **δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας της X δοθείσης της $\mathcal{F}$** είναι ένας T-$\mathcal{F}$-μαρκοβιανός πυρήνας k που ικανοποιεί για κάθε $B \in T$ τη συνθήκη

$$k(B,\cdot) = P(X^{-1}(B) \mid \mathcal{F})(\cdot) \quad P \mid \mathcal{F} - \sigma.\beta..$$

Ένας τέτοιος μαρκοβιανός πυρήνας k θα σημειώνεται στο εξής με $P_{X|\mathcal{F}}$. Ιδιαιτέρως, αν (Ψ, Z) είναι ένας μ.χ., Θ μία Σ-Z-μετρήσιμη απεικόνιση από το Ω στο Ψ και $\mathcal{F} := \sigma(\Theta)$, τότε η συνάρτηση $P_{X|\Theta} := P_{X|\sigma(\Theta)}$ ονομάζεται μια **δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας της X δοθείσης της Θ**. Σημειώνται ότι αν ο Υ είναι ένας πολωνικός χώρος (βλ. Ορισμό B.12), τότε υπάρχει πάντα μια δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας της X δοθείσης της $\mathcal{F}$ (βλ. π.χ. [11], Theorem 10.2.2).

Προφανώς, για κάθε T-Z-μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta)$ από το $T \times \Omega$ στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται μέσω της

$$K(\Theta)(B,\omega) := (k(B,\cdot) \circ \Theta)(\omega) \quad \text{για κάθε } \; B \in T \; \text{ και } \; \omega \in \Omega$$

είναι ένας T-$\sigma(\Theta)$-μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετιζόμενα μέτρα πιθανότητας $k(\cdot,\theta)$ για $\theta \in \Psi$ είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}$, κι επομένως μπορούμε να τα συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\theta)(\cdot)$ αντί με $k(\cdot,\theta)$. Για τον λόγο αυτόν και για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, ένας τέτοιος μαρκοβιανός πυρήνας $K(\Theta)$ θα συμβολίζεται με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Θα λέμε ότι δύο οποιοιδήποτε T-Σ-μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, όπου $i \in \{1,2\}$, είναι **P-ισοδύναμοι** και θα γράφουμε $k_1 = k_2$ P-σ.β., αν υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin N$ και $B \in T$ να ισχύει η ισότητα $k_1(B,\omega) = k_2(B,\omega)$, δηλαδή αν

$$\exists\, N \in \Sigma_0 \quad k_1 \mid T \times N^c = k_2 \mid T \times N^c. \tag{2.1}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους ορισμούς διαφόρων ειδών μαρκοβιανών πυρήνων, που απαιτούνται για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής. Ο ακόλουθος ορισμός αποτελεί σε αυτό το πλαίσιο μια χρήσιμη ειδική περίπτωση του [17], 452E.

Ορισμός 2.1.1. Μία **disintegration του P επάνω στο Q** είναι μια οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μέτρων πιθανότητας $P_y : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(d1) για οποιοδήποτε σταθερό $D \in \Sigma$ η συνάρτηση $P_\bullet(D) : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ να είναι T-μετρήσιμη,

(d2) $\int P_y(D)Q(dy) = P(D)$ για κάθε $D \in \Sigma$.

Αν η $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ είναι μια απεικόνιση **που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας** (*inverse-measure-preserving map*), *δηλαδή τέτοια ώστε* $P(f^{-1}(B)) = Q(B)$ *για κάθε* $B \in T$, *η disintegration* $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ *του* P *επάνω στο* Q *ονομάζεται* **συνεπής** *με την* f *αν για κάθε* $B \in T$ *ισχύει ότι* $P_y(f^{-1}(B)) = 1$ *για* Q*-σ.ό. τα* $y \in B$.

Για λεπτομέρειες αναφορικά με τον γενικότερο ορισμό μιας disintegration, βλέπε τον Pachl [30] ή τον Fremlin [17], 452 και 453. Σε αυτόν τον πιο γενικό ορισμό, είναι δυνατόν τα πεδία ορισμού Σ_y των P_y για $y \in \Upsilon$, να μεταβάλλονται μαζί με την παράμετρο $y \in \Upsilon$. Μπορούν επίσης να διαφέρουν από το Σ, αν και μπορεί πάντα να υποτεθεί ότι $\Sigma_y \subseteq \Sigma$, αφού η Σ_y μπορεί να αντικατασταθεί από την τομή $\Sigma_y \cap \Sigma$. Το σημαντικότερο, όμως, είναι ότι γενικά δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Σ είναι ένα γνήσιο υποσύνολο μιας Σ_y (βλ. [30], σελ. 158). Η ύπαρξη disintegrations (με τον γενικότερο ορισμό) στηρίζεται στην ύπαρξη των liftings επάνω σε πλήρεις χ.π. (βλ. π.χ. Pachl [30], Fremlin [17] και Strauss et al. [36]). Ως γνωστόν, κάθε πλήρης χ.π. επιδέχεται ένα lifting.

Ορισμοί 2.1.2. **(a)** Έστω M μέτρο πιθανότητας επάνω στη σ-άλγεβρα $\Sigma \otimes T$ τέτοιο ώστε $M \circ \pi_\Omega^{-1} = P$ και $M \circ \pi_\Upsilon^{-1} = Q$. Έστω επίσης ότι για κάθε $y \in \Upsilon$ υπάρχει μια πιθανότητα P_y επάνω στο Σ, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(D1) Για κάθε $A \in \Sigma$ η απεικόνιση $y \longmapsto P_y(A)$ είναι T-μετρήσιμη,

(D2) $M(A \times B) = \int_B P_y(A)Q(dy)$ για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$.

Τότε, η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ονομάζεται μία **κανονική δεσμευμένη πιθανότητα (κ.δ.π.)-γινόμενο** (*product r.c.p.*) **επάνω στη** Σ **για την** M **ως προς το** Q (βλ. π.χ. [37], Definition 1.1).
(b) Έστω $\mathcal{F}$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ και $R := P \mid \mathcal{F}$. Μία **υποαλγεβρική κ.δ.π.** (*subfield r.c.p.*) για το P επάνω στο R (βλ. [14], Section 2) είναι μια οικογένεια $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας της Σ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(sf1) Για κάθε $E \in \Sigma$ η συνάρτηση $\omega \longmapsto P_\omega(E)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη,

(sf2) $\int_F P_\omega(E)R(d\omega) = P(E \cap F)$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και $E \in \Sigma$.

Παρατήρηση 2.1.3. Αν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το P είναι τέλειο, τότε υπάρχει πάντα μια disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P επάνω στο Q συνεπής με μια οποιαδήποτε συνάρτηση f από το Ω στο Υ που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας, εφόσον και η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη (βλ. [14], Theorems 6 and 3), μια κ.δ.π.-γινόμενο (βλ. [14], Theorem 6) και μία υποαλγεβρική κ.δ.π. (βλ. [14], Theorems 6 and 2). Σημειώνεται ότι οι πιο σημαντικές εφαρμογές στη Θεωρία Πιθανοτήτων συνεχίζουν να έχουν τις ρίζες τους σε τυπικούς χώρους Borel (*standard Borel spaces*) (Ω, Σ), δηλαδή σε χώρους ισομορφικούς του $(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega}))$, όπου ο $\widetilde{\Omega}$ είναι ένας πολωνικός χώρος, και άρα σε χώρους που πάντα ικανοποιούν τις προαναφερθείσες υποθέσεις για τα P, Σ και T. Ως γνωστόν, κάθε πολωνικός χώρος είναι ένας τυπικός χώρος Borel. Ιδιαιτέρως, οι $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι τέτοιοι χώροι. Επί πλέον, αν οι (Ω, Σ) και (Υ, T) είναι μη κενοί τυπικοί χώροι Borel, τότε υπάρχει πάντα μια *ουσιωδώς μοναδική* disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P επάνω στο Q συνεπής με μια οποιαδήποτε απεικόνιση f από το Ω στο Υ, υπό την έννοια ότι αν η $\{R_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μια οποιαδήποτε άλλη disintegration του P επάνω στο Q συνεπής με την f, τότε θα υπάρχει Q-μηδενικό σύνολο $N \in T$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin N$ να ισχύει ότι $P_\theta = R_\theta$ (βλ. π.χ. [17], 452X(m)).

Για περισσότερα αποτελέσματα ύπαρξης πάνω στις disintegrations και τις κ.δ.π. παραπέμπουμε και πάλι στους Pachl [30] και Fremlin [17], 452 και 453.

2.2 Κανονικές δεσμευμένες πιθανότητες-γινόμενο και disintegrations

Το παρακάτω λήμμα είναι χρήσιμο τόσο για την απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος αυτής της ενότητας (βλ. Πρόταση 2.2.2) όσο και για τους σκοπούς του πέμπτου κεφαλαίου.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω M μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\Sigma \otimes T$ ώστε η $\{\widetilde{P}_y\}_{y\in\Upsilon}$ να είναι μία κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για το M ως προς το Q. Θέτουμε επίσης $P_y := \widetilde{P}_y \otimes \delta_y$ για $y \in \Upsilon$, όπου δ_y είναι το μέτρο του Dirac επάνω στην T που ορίζεται μέσω του τύπου $\delta_y(B) := \chi_B(y)$ για κάθε $B \in T$. Τότε η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του M επάνω στο Q συνεπής με την κανονική προβολή π_Υ από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Υ.*

Απόδειξη. Προφανώς, το P_y είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\Sigma\otimes T$ για κάθε $y \in \Upsilon$.
(a) Η οικογένεια

$$\mathcal{D}_1 := \{E \in \Sigma \otimes T : P_\bullet(E) \quad T\text{-μετρήσιμη}\}$$

είναι μια κλάση Dynkin.

Πράγματι, $\Omega\times\Upsilon \in \mathcal{D}_1$, αφού $P_\bullet(\Omega\times\Upsilon) = 1$. Έστω, τώρα, $E, F \in \mathcal{D}_1$ με $F \subseteq E$. Τότε το σύνολο $E \setminus F$ ανήκει στην $\mathcal{D}_1$, αφού η $P_\bullet(E\setminus F) = P_\bullet(E) - P_\bullet(F)$ είναι T-μετρήσιμη ως διαφορά τέτοιων απεικονίσεων. Επί πλέον, αν η $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μη φθίνουσα ακολουθία στη $\mathcal{D}_1$ τότε η απεικόνιση $P_\bullet(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} P_\bullet(E_n) : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι T-μετρήσιμη ως όριο τέτοιων απεικονίσεων, δηλαδή $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}_1$, οπότε έχουμε το (a).
(b) Η οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (d1).

Πράγματι, για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $P_y(A \times B) = \widetilde{P}_y(A)\chi_B(y)$, οπότε η $P_\bullet(A \times B)$ είναι T-μετρήσιμη, και άρα $A \times B \in \mathcal{D}_1$. Όμως, αφού το $\Sigma \times T$ είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές, λαμβάνοντας υπόψη το (a), μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. Θεώρημα A.9) και να προκύψει ότι $\Sigma \otimes T \subseteq \mathcal{D}_1$, και άρα ότι $\Sigma \otimes T = \mathcal{D}_1$.

(c) Η οικογένεια

$$\mathcal{D}_2 := \left\{ E \in \Sigma \otimes T : M(E) = \int P_y(E)Q(dy) \right\}$$

είναι μια κλάση Dynkin.

Πράγματι,

$$M(\Omega \times \Upsilon) = \int \widetilde{P}_y(\Omega)Q(dy) = \int \widetilde{P}_y(\Omega)\chi_\Upsilon(y)Q(dy) = \int P_y(\Omega \times \Upsilon)Q(dy),$$

και άρα $\Omega \times \Upsilon \in \mathcal{D}_2$. Για $E, F \in \mathcal{D}_2$ με $F \subseteq E$, έχουμε

$$M(E \setminus F) = \int P_y(E)Q(dy) - \int P_y(F)Q(dy) = \int P_y(E \setminus F)Q(dy),$$

και άρα $E \setminus F \in \mathcal{D}_2$. Επί πλέον, αν η $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μη φθίνουσα ακολουθία στη $\mathcal{D}_2$, τότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 6.8) έχουμε ότι

$$M\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} M(E_n) = \lim_{n\to\infty} \int P_y(E_n)Q(dy) = \int P_y\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)Q(dy).$$

Από την τελευταία σχέση, όμως, έπεται ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}_2$, κάτι που αποδεικνύει ότι η $\mathcal{D}_2$ είναι μια κλάση Dynkin.

(d)Η οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (d2).

Πράγματι, για κάθε $A \times B \in \Sigma \times T$ έχουμε

$$\begin{aligned} M(A \times B) &= \int_B \widetilde{P}_y(A)Q(dy) = \int \chi_B(y)\widetilde{P}_y(A)Q(dy) \\ &= \int \widetilde{P}_y(A)\delta_y(B)Q(dy) = \int P_y(A \times B)Q(dy), \end{aligned}$$

και άρα $A \times B \in \mathcal{D}_2$. Εφαρμόζοντας και πάλι ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης σαν και αυτό του (b), έχουμε ότι $\Sigma \otimes T = \mathcal{D}_2$.

(e) Η disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του M επάνω στο Q είναι συνεπής με την κανονική προβολή π_Υ από το $\Omega \times \Upsilon$ επάνω στο Υ.

Πράγματι, για κάθε $B \in T$ έχουμε

$$\begin{aligned} M(\Omega \times B) &= Q(B) = \int_B \widetilde{P}_y(\Omega)Q(dy) = \int_B \chi_B(y)\widetilde{P}_y(\Omega)Q(dy) \\ &= \int_B P_y(\Omega \times B)Q(dy) = \int_B P_y\big(\pi_\Upsilon^{-1}(B)\big)Q(dy), \end{aligned}$$

οπότε $\int_B 1Q(dy) = \int_B P_y\big(\pi_\Upsilon^{-1}(B)\big)Q(dy)$, κάτι που ισοδυναμεί με το ότι $P_y\big(\pi_\Upsilon^{-1}(B)\big) = 1$ για Q-σ.ό. τα $y \in B$, και άρα δείξαμε το (e). $\square$

Πρόταση 2.2.2. *Έστω M μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\Sigma \otimes T$ τέτοιο ώστε $M \circ \pi_\Omega^{-1} = P$ και $M \circ \pi_\Upsilon^{-1} = Q$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Υπάρχει μια κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για την M ως προς το Q.

(ii) Υπάρχει μια disintegration του M επάνω στο Q συνεπής με την π_Υ.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (ii)$ προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2.2.1.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια disintegration $\{\widetilde{P}_y\}_{y\in\Upsilon}$ του M επάνω στο Q συνεπής με την π_Υ. Για κάθε $y \in \Upsilon$ ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $P_y : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω της

$$P_y(A) := \widetilde{P}_y(A \times \Upsilon) \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma.$$

Προφανώς η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ που ικανοποιεί την ιδιότητα (D1).

Για να δείξουμε την ισχύ της (D2), επιλέγουμε ένα αυθαίρετο $A \times B \in \Sigma \times T$. Επειδή η $\{\widetilde{P}_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την π_Υ, έχουμε ότι $\widetilde{P}_y(\Omega \times B) = 1$ για Q-σ.ό. τα $y \in B$, και αφού επίσης ισχύει η $\widetilde{P}_y(\Omega \times B^c) = 1$ για Q-σ.ό. τα $y \in B^c$, προκύπτει ότι $\widetilde{P}_y(\Omega \times B) = 0$ για Q-σ.ό. τα $y \in B^c$, που συνεπάγεται την

$$\widetilde{P}_y(A \times B) = 0 \quad \text{για} \quad Q - \text{σ.ό. τα} \quad y \in B^c. \tag{2.2}$$

Και πάλι από τη συνέπεια της $\{\widetilde{P}_y\}_{y\in\Upsilon}$ με την π_Υ έπεται ότι για Q-σ.ό. τα $y \in B$ έχουμε

$$\widetilde{P}_y(A \times B) = \widetilde{P}_y\big((A \times \Upsilon) \cap (\Omega \times B)\big) = \widetilde{P}_y(A \times \Upsilon) = P_y(A),$$

δηλαδή

$$\widetilde{P}_y(A \times B) = P_y(A) \quad \text{για} \quad Q - \text{σ.ό. τα} \quad y \in B. \tag{2.3}$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, τις συνθήκες (2.2) και (2.3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M(A \times B) &= \int \widetilde{P}_y(A \times B)Q(dy) = \int_B \widetilde{P}_y(A \times B)Q(dy) + \int_{B^c} \widetilde{P}_y(A \times B)Q(dy) \\ &= \int_B P_y(A)Q(dy), \end{aligned}$$

και άρα προκύπτει η ισχύς της ιδιότητας (D2). Επομένως, δείξαμε τον ισχυρισμό (i). $\square$

Στη συνέχεια παραθέτουμε συγκεντρωμένα ορισμένα αποτελέσματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο για την παρούσα ενότητα όσο και για το υπόλοιπο αυτής της διατριβής, και ιδιαιτέρως για την απόδειξη της Πρότασης 2.3.5.

Παρατηρήσεις 2.2.3. **(a)** Έστω $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ που ικανοποιεί τη συνθήκη (D1), και M μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\Sigma\otimes T$ τέτοιο ώστε $M\circ\pi_\Omega^{-1}=P$ και $M\circ\pi_\Upsilon^{-1}=Q$. Ας θεωρήσουμε ακόμη μια M-ολοκληρώσιμη συνάρτηση g και ας θέσουμε το $\Upsilon_1:=\Upsilon\setminus M_g$ όπου $M_g:=\{y\in\Upsilon:\int(g^+)^y dP_y=\infty\ \text{ ή }\ \int(g^-)^y dP_y=\infty\}$. Τότε η συνάρτηση $h:\Upsilon_1\longrightarrow\mathbb{R}$, που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$h(y):=\int g^y dP_y \quad \text{για κάθε} \quad y\in\Upsilon_1$$

είναι T_{Υ_1}-μετρήσιμη, όπου T_{Υ_1} είναι η σ-άλγεβρα ίχνος της T επάνω στο Υ_1. Επί πλέον, το συμπέρασμά μας ισχύει και για κάθε μη αρνητική $\Sigma\otimes T$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη συνάρτηση g από το $\Omega\times\Upsilon$ στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την περίπτωση των δεικτριών συναρτήσεων των συνόλων της $\Sigma\otimes T$ και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{D}_1$ την οικογένεια όλων των στοιχείων της $\Sigma\otimes T$ των οποίων οι δείκτριες συναρτήσεις ικανοποιούν το (a). Εξαιτίας της συνθήκης (D1) άμεσα έπεται ότι $\Sigma\times T\subseteq\mathcal{D}_1$. Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{D}_1$ είναι μια κλάση Dynkin. Όμως, επειδή το καρτεσιανό γινόμενο $\Sigma\times T$ είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για να συμπεράνουμε ότι $\Sigma\otimes T\subseteq\mathcal{D}_1$. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα στοιχεία της $\mathcal{D}_1$ ικανοποιούν το (a) για $\Upsilon_1=\Upsilon$. Οπότε έχουμε ότι και κάθε απλή $\Sigma\otimes T$-μετρήσιμη συνάρτηση επάνω στο $\Omega\times\Upsilon$ ικανοποιεί το (a) για $\Upsilon_1=\Upsilon$.

Για μια μη αρνητική $\Sigma\otimes T$-μετρήσιμη συνάρτηση g υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ απλών $\Sigma\otimes T$-μετρήσιμων συναρτήσεων $g_n\geq 0$ επάνω στο $\Omega\times\Upsilon$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega,y)=g(\omega,y) \quad \text{για κάθε} \quad (\omega,y)\in\Omega\times\Upsilon.$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} g_n^y(\omega)=g^y(\omega)$ και από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι για κάθε $y\in\Upsilon$ ισχύει $\int g^y(\omega)P_y(d\omega)=\lim_{n\to\infty}\int g_n^y(\omega)P_y(d\omega)$. Ως συνέπεια προκύπτει η T-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρησιμότητα της συνάρτησης $h_0:=h_{0,g}:\Upsilon\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ που ορίζεται από τη σχέση $h_0(y):=\int g^y dP_y$ για κάθε $y\in\Upsilon$, κάτι που συνεπάγεται ότι $\Upsilon_1=\Upsilon\setminus h_0^{-1}(\{\infty\})\in T$ και ότι η πραγματική συνάρτηση $h=h_0\mid\Upsilon_1$ είναι T_{Υ_1}-μετρήσιμη. Άρα δείξαμε ότι το (a) ικανοποιείται από όλες τις μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Για μια οποιαδήποτε συνάρτηση g είναι $g=g^+-g^-$. Εξαιτίας της T-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρησιμότητας των συναρτήσεων h_{0,g^+} και h_{0,g^-} έχουμε ότι $M_g=h_{0,g^+}^{-1}(\{\infty\})\cup h_{0,g^-}^{-1}(\{\infty\})\in T$, απ' όπου έπεται ότι $\Upsilon_1\in T$ και ότι η συνάρτηση $h:\Upsilon_1\longrightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $h(y)=\int(g^+)^y dP_y-\int(g^-)^y dP_y$ για κάθε $y\in\Upsilon_1$ είναι T_{Υ_1}-μετρήσιμη. Επομένως, δείξαμε ότι το (a) ισχύει.

(b) Αν η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για το M ως προς το Q, τότε $M(E)=\int P_y(E^y)Q(dy)$ για κάθε $E\in\Sigma\otimes T$.

Πράγματι, θέτοντας $\mathcal{D}_2:=\{E\in\Sigma\otimes T: M(E)=\int P_y(E^y)Q(dy)\}$ παρατηρούμε ότι η $\mathcal{D}_2$ είναι μια κλάση Dynkin και περιλαμβάνει το καρτεσιανό γινόμενο $\Sigma\times T$, που είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές. Έτσι από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης έχουμε ότι η $\mathcal{D}_2$ περιλαμβάνει την $\Sigma \otimes T$, και άρα ισούται με ολόκληρη την $\Sigma \otimes T$. Επομένως, ισχύει το (b).

(c) Έστω ότι υπάρχει μια κ.δ.π.-γινόμενο $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ επάνω στη Σ για το M ως προς το Q. Τότε το ολοκλήρωμα $\int \int g^y dP_y Q(dy)$ ορίζεται στο $\overline{\mathbb{R}}$ (δηλαδή $\int \int g^y dP_y Q(dy) \in \overline{\mathbb{R}}$) και ισούται με $\int g dM$ για κάθε συνάρτηση $g : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int g dM$ ορίζεται στο $\overline{\mathbb{R}}$. Το γεγονός αυτό είναι μια συνέπεια του (b) και της παρατήρησης που έπεται της Proposition 452F του [17].

(d) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια κ.δ.π.-γινόμενο $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ επάνω στη Σ για το M ως προς το Q. Έστω επίσης g μια οποιαδήποτε συνάρτηση στο $\mathcal{L}^1(M)$ και έστω ότι τα h, Υ_1 είναι όπως στο (a). Τότε η συνάρτηση h είναι T_{Υ_1}-μετρήσιμη, $Q(\Upsilon_1) = 1$, το ολοκλήρωμα $\int \int g^y dP_y Q(dy)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει η ισότητα

$$\int g dM = \int \int g^y dP_y Q(dy).$$

Ιδιαιτέρως, αν η g είναι μια οποιαδήποτε φραγμένη $\Sigma \otimes T$-μετρήσιμη συνάρτηση επάνω στο $\Omega \times \Upsilon$, τότε επί πλέον έχουμε ότι $\Upsilon_1 = \Upsilon$.

Πράγματι, η συνθήκη $\Upsilon_1 \in T$ καθώς επίσης και η T_{Υ_1}-μετρησιμότητα της h προκύπτουν από το (a), ενώ τα υπόλοιπα ζητούμενα αποτελούν συνέπεια του (c) και της M-ολοκληρωσιμότητας του g. Ιδιαιτέρως, αν επί πλέον η g είναι φραγμένη εύκολα προκύπτει ότι το M_g του (a) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Upsilon = \Upsilon_1$. Επομένως, στην ειδική αυτή περίπτωση εξασφαλίζουμε το Lemma 3.1 του [37].

2.3 Δεσμευμένες μέσες τιμές και disintegrations

Τα επόμενα δύο λήμματα δίνουν τρόπους σύνδεσης των δεσμευμένων μέσων τιμών και των disintegrations που είναι συνεπείς ως προς μετρήσιμες απεικονίσεις που διατηρούν τα μέτρα.

Λήμμα 2.3.1. *Έστω $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ μια disintegration του P επάνω στο Q, και f μια απεικόνιση από το Ω στο Υ που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ είναι συνεπής με την f.*

(ii) *Για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ισχύει $P(A \cap f^{-1}(B)) = \int_B P_y(A) Q(dy)$.*

(iii) *Για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $\mathbb{E}_P[\chi_A \mid \sigma(f)] = P_\bullet(A) \circ f \quad P \mid \sigma(f) - \sigma.\beta.$.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία $(ii) \iff (iii)$ είναι άμεση.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Έστω ότι ισχύει η (i). Τότε, για κάθε $B \in T$ έχουμε ότι

$$\int \chi_{B^c}(y) P_y(f^{-1}(B)) Q(dy) = 0 \tag{2.4}$$

ή ισοδύναμα

$$P_y(f^{-1}(B)) = 0 \quad \text{για } Q\text{-σ.ό. } y \in B^c.$$

Επομένως, για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$, προκύπτει ότι

$$P_y(A \cap f^{-1}(B)) = 0 \quad \text{για } Q\text{-σ.ό. } y \in B^c. \tag{2.5}$$

Επί πλέον, από την (2.4), για κάθε $B \in T$ ισοδύναμα έχουμε

$$P_y(f^{-1}(B)) = 1 \quad \text{για } Q\text{-σ.ό. } y \in B.$$

Συνεπώς, $P_y(A \cap f^{-1}(B)) = \int_{f^{-1}(B)} \chi_A dP_y = \int_\Omega \chi_A dP_y = P_y(A)$ για Q-σ.ό. τα $y \in B$, κάτι που μαζί με την (2.5) και την ιδιότητα (d2) συνεπάγεται την ισχύ της συνθήκης (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αν ισχύει η (ii), τότε θέτοντας $A = f^{-1}(B)$ με $B \in T$ έχουμε

$$P(f^{-1}(B)) = \int_B P_y(f^{-1}(B)) Q(dy),$$

που είναι ισοδύναμο με το ότι

$$\int \chi_B(y)[1 - P_y(f^{-1}(B))] Q(dy) = 0$$

ή με το ότι

$$P_y(f^{-1}(B)) = 1 \quad \text{για} \;\; Q - \text{σ.ό. τα} \;\; y \in B,$$

αφού $\chi_B(y)[1 - P_y(f^{-1}(B))] \geq 0$ για κάθε $y \in \Upsilon$ και $B \in T$. Επομένως, δείξαμε το (i). □

Λήμμα 2.3.2. *Έστω f μια απεικόνιση από το Ω στο Υ που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας και $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μια disintegration του P επάνω στο Q συνεπής με την f. Τότε για κάθε $g \in \mathcal{L}^1(P)$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}_P[g \mid \sigma(f)] = \mathbb{E}_{P_\bullet}[g] \circ f \quad P \mid \sigma(f) - \sigma.\beta..$$

Επί πλέον, η τελευταία συνθήκη ισχύει και για κάθε μη αρνητική Σ-$\mathfrak{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση g από το Ω στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 2.3.1 άμεσα προκύπτει η ισχύς της ζητούμενης συνθήκης για $g = \chi_A$, όπου $A \in \Sigma$, κι επομένως για μια οποιαδήποτε απλή Σ-μετρήσιμη συνάρτηση g επάνω στο Ω. Όμως, ως γνωστόν, για κάθε $g \in \mathcal{L}^1_+(P)$ υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από Σ-μετρήσιμες μη αρνητικές απλές συναρτήσεις g_n επάνω στο Ω ώστε $g(\omega) = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, κάτι που σε συνδυασμό το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για συνήθεις (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 6.8) και δεσμευμένες (βλ. π.χ. [7], Chapter 7, Section 7.1, Theorem 2) μέσες τιμές συνεπάγεται την ισχύ της ζητούμενης συνθήκης για την $g \in \mathcal{L}^1_+(P)$. Κι επειδή κάθε P-ολοκληρώσιμη συνάρτηση g μπορεί να γραφεί ως η διαφορά $g^+ - g^-$ μεταξύ των μη αρνητικών P-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων g^+ και g^-, δηλαδή του θετικού και του αρνητικού μέρους της g, αντίστοιχα, άμεσα έπεται το ζητούμενο. $\square$

Στο εξής και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, η $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ είναι μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας, και η $M : \Sigma\otimes T \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνολοσυνάρτηση που ορίζεται μέσω της $M := P\circ(id_\Omega \times f)^{-1}$, όπου

$$(id_\Omega \times f)(\omega) := (\omega, f(\omega)) \text{ για κάθε } \omega\in\Omega.$$

Λήμμα 2.3.3. *Η συνολοσυνάρτηση M είναι ένα μέτρο πιθανότητας που πληροί τις ιδιότητες:*

(i) $P = M\circ\pi_\Omega^{-1}$ *και* $Q = M\circ\pi_\Upsilon^{-1}$.

(ii) $P(A\cap f^{-1}(B)) = M(A\times B)$ *για κάθε* $A\times B\in\Sigma\times T$.

Ιδιαιτέρως, αν η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q συνεπής με την f τότε

(iii) $M(A\times B) = \int_B P_y(A)Q(dy)$ *για κάθε* $A\times B\in\Sigma\times T$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $id_\Omega\times f$ είναι Σ-$\Sigma\otimes T$-μετρήσιμη, αφού $(id_\Omega\times f)^{-1}(A\times B) = A\cap f^{-1}(B)\in\Sigma$ για κάθε $A\times B\in\Sigma\times T$, και άρα η M θα είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\Sigma\otimes T$.

Έστω, τώρα, αυθαίρετα σύνολα $A\in\Sigma$ και $B\in T$. Τότε έχουμε

$$M(\pi_\Omega^{-1}(A)) = M(A\times\Upsilon) = P((id_\Omega\times f)^{-1}(A\times\Upsilon)) = P(A\cap f^{-1}(\Upsilon)) = P(A),$$

οπότε $M\circ\pi_\Omega^{-1} = P$. Ομοίως, $M\circ\pi_\Upsilon^{-1} = Q$. Άρα δείξαμε το (i).

Ιδιαιτέρως, αν η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q συνεπής με την f τότε ο ισχυρισμός (iii) προκύπτει άμεσα από τον (ii) και από το Λήμμα 2.3.1. $\square$

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας P_y επάνω στη Σ. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q συνεπής με την f.*

(ii) *Η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για την M ως προς το Q.*

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (ii)$ προκύπτει από τα (i), (iii) του Λήμματος 2.3.3.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αρχικά παρατηρούμε ότι από τις ιδιότητες (D1) και (D2) έχουμε ότι η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο Q. Για να δείξουμε ότι η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την f, ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $B \in T$ και ας σημειώσουμε ότι από το Λήμμα 2.3.3, (ii), έπεται ότι $P(A\cap f^{-1}(B)) = M(A\times B)$, και άρα $P(A\cap f^{-1}(B)) = \int_B P_y(A)Q(dy)$ για κάθε $A \in \Sigma$. Επομένως, έχουμε $P(f^{-1}(B)) = \int_B P_y(f^{-1}(B))Q(dy)$ ή $\int \chi_B(y)Q(dy) = \int \chi_B(y)P_y(f^{-1}(B))Q(dy)$ ή $P_y(f^{-1}(B)) = 1$ για Q-σ.ό. τα $y \in B$. Κι επειδή το $B \in T$ είναι αυθαίρετο, η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την f. □

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 2.3.2.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω ότι υπάρχει μια disintegration $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P επάνω στο Q συνεπής με την f, κι έστω ότι $g := u \circ (id_\Omega \times f)$ για κάθε $u \in \mathcal{L}^1(M)$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $\mathbb{E}_P[g \mid \sigma(f)] = \mathbb{E}_{P_\bullet}[u^\bullet] \circ f \quad P \mid \sigma(f) - \sigma.\beta.$·

(ii) $\int\int u^\bullet dP_\bullet dQ = \int g dP$.

Επί πλέον, τα (i) και (ii) ισχύουν και για κάθε μη αρνητική $\Sigma\otimes T$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη συνάρτηση u από το $\Omega \times \Upsilon$ στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Απόδειξη. (i): Αρχικά παρατηρούμε ότι $g \in \mathcal{L}^1(P)$, αφού ισχύει ότι $\int |g|dP = \int |u|dM < \infty$. Τότε, για κάθε $D \in T$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{f^{-1}(D)} \mathbb{E}_P[g \mid \sigma(f)]dP &= \int_{f^{-1}(D)} gdP = \int (\chi_D \circ f)gdP \\
&= \int [\chi_{\Omega\times D} \circ (id_\Omega \times f)][u \circ (id_\Omega \times f)]dP = \int (\chi_{\Omega\times D}u)dM \\
&= \int\int [\chi_{\Omega\times D}u]^y dP_y Q(dy) = \int_D\int u^y dP_y Q(dy) \\
&= \int_D \mathbb{E}_{P_y}[u^y]Q(dy) = \int_{f^{-1}(D)} (\mathbb{E}_{P_\bullet}[u^\bullet] \circ f)dP,
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα αποτελεί συνέπεια της Παρατήρησης 2.2.3, (d) σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.3.4, ενώ για την τέταρτη ισότητα βλ. π.χ. το Θεώρημα A.5.

(ii): Εφαρμόζοντας το (i) έχουμε ότι

$$\int\int u^\bullet dP_\bullet dQ = \int \mathbb{E}_{P_\bullet}[u^\bullet]dQ = \int (\mathbb{E}_{P_\bullet}[u^\bullet] \circ f)dP = \int \mathbb{E}_P[g \mid \sigma(f)]dP = \int gdP.$$

Επί πλέον, η ισχύς του (i), άρα και του (ii), για κάθε μη αρνητική $\Sigma \otimes T$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη συνάρτηση u από το $\Omega\times\Upsilon$ στο $\overline{\mathbb{R}}$, αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο, λαμβάνοντας υπόψη και τις Παρατηρήσεις 2.2.3, (a) και (c), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Κεφάλαιο 3

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ POISSON

Οι μ.δ. Poisson παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους της εφαρμοσμένης θεωρίας πιθανοτήτων, για παράδειγμα στα ασφαλιστικά μαθηματικά και στη θεωρία σημειακών διαδικασιών (βλ. Grandell [18] για περισσότερες πληροφορίες).

Η σχέση των disintegrations ή των κ.δ.π.-γινόμενο με τις μ.δ. Poisson αποτελεί ένα ερώτημα που προκύπτει ως φυσική συνέπεια της εμπλοκής των δεσμευμένων κατανομών πιθανότητας στον ορισμό των εν λόγω σ.δ..

Αφού πρώτα ανακαλέσουμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς, σχετικούς με τις έννοιες της υπό συνθήκη ανεξαρτησίας και υπό συνθήκη ισονομίας (βλ. Ενότητα 3.1), εκμεταλλευόμενοι τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, στην Ενότητα 3.2 δίνουμε έναν πρώτο χαρακτηρισμό των μ.δ. Poisson μέσω disintegrations (βλ. Πρόταση 3.2.10). Το αποτέλεσμα αυτό ανάγει μέσω της εμπλοκής μιας disintegration $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ τις μ.δ. Poisson σε (συνήθεις ομογενείς) διαδικασίες Poisson κάτω από τα επιμέρους μέτρα πιθανότητας P_θ της disintegration, και εδράζεται σε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για τη δεσμευμένη ανεξαρτησία τ.μ. (βλ. Πρόταση 3.2.4).

Ως άμεση συνέπεια των παραπάνω αποτελεσμάτων προκύπτουν χαρακτηρισμοί των μ.δ. Poisson μέσω σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, martingales και μέτρων απαίτησης (βλ. Θεώρημα 3.3.5, $(ii) \Longleftrightarrow (i)$, $(ii) \Longleftrightarrow (vi)$ και $(ii) \Longleftrightarrow (viii)$, αντίστοιχα).

Επί πλέον, δοθείσης μιας disintegration $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ ενός μέτρου πιθανότητας P επάνω σε ένα μέτρο πιθανότητας Q συνεπούς με μια απεικόνιση f, η ισοδυναμία $(v) \Longleftrightarrow (vi)$ του Θεωρήματος 3.3.5 επιτρέπει στη martingale-ιδιότητα κάθε κεντραρισμένης P_θ-διαδικασίας Poisson να μεταφερθεί στην αντίστοιχη κεντραρισμένη P-μ.δ. Poisson, ενώ η ισοδυναμία

$(vii) \Longleftrightarrow (viii)$ του ιδίου θεωρήματος μαζί με το Λήμμα 3.3.4 ανάγει τον υπολογισμό του σχετιζόμενου με μια P-μ.δ. Poisson P-μέτρου απαίτησης σε αυτόν κάθε επιμέρους P_θ-μέτρου απαίτησης που σχετίζεται με την αντίστοιχη P_θ-διαδικασία Poisson.

3.1 Υπό συνθήκη ανεξαρτησία και ισονομία

Μία οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ είναι (P-) **υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** ως προς τη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n \mid \mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j \mid \mathcal{F}) \quad P \mid \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

για οποιαδήποτε διαφορετικά ανά δύο $i_1, \ldots, i_n$ στο I και για οποιαδήποτε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου $j \leq n$.

Μια οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ Σ-T-μετρησίμων απεικονίσεων από το Ω στο Υ είναι (P-) **υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** δοθείσης μίας Σ-Z-μετρήσιμης απεικόνισης Θ από το Ω στο Ψ, αν η οικογένεια των σ-αλγεβρών $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη ως προς τη σ-άλγεβρα $\sigma(\Theta)$. Επί πλέον, η $\{X_i\}_{i\in I}$ ονομάζεται (P-) **υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_j\}_{j\in J}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν το ζεύγος $(\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}, \{\Sigma_j\}_{j\in J})$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητο ως προς την $\mathcal{F}$.

Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι **P-υπό συνθήκη ισόνομη** ως προς τη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ αν $P\big(F \cap X_i^{-1}(B)\big) = P\big(F \cap X_j^{-1}(B)\big)$ για κάθε $i, j \in I$, $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$. Επίσης είναι **P-υπό συνθήκη ισόνομη** δοθείσης μίας Σ-Z-μετρήσιμη απεικόνιση Θ από το Ω στο Ψ, αν είναι P-υπό συνθήκη ισόνομη ως προς τη σ-άλγεβρα $\sigma(\Theta)$.

Κάθε οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ τ.μ. επάνω στο Ω ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη**. Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο Ω έχει **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς ως προς τη μετρήσιμη απεικόνιση Θ, αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι προσαυξήσεις $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ ($j \in \{1, \ldots, m\}$) είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες (ως προς τη Θ). Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς τη Θ αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ ισχύει η συνθήκη

$$P_{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h} \mid \Theta} = P_{X_{t_j} - X_{t_{j-1}} \mid \Theta} \quad P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta..$$

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι εύκολα μπορεί να αποδειχθεί το εξής: Αν μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα $X_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$, κι έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς τη Θ, τότε θα έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς τη Θ αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $P_{X_{t+h} - X_t \mid \Theta} = P_{X_h \mid \Theta}$ $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β..

Επισημαίνεται ότι αν η κατανομή πιθανότητας της υπό δέσμευση μετρήσιμης απεικόνισης Θ είναι εκφυλισμένη τότε όλοι οι παραπάνω ορισμοί που την εμπλέκουν ανάγονται στους αντίστοιχους της (συνήθους) ανεξαρτησίας, ισονομίας και στασιμότητας, οι οποίοι διατηρούν την ίδια ορολογία με αυτούς των υπό συνθήκη ιδιοτήτων με μόνη διαφορά ότι οι εκφράσεις «υπό συνθήκη» και «ως προς τη Θ» εξαφανίζονται.

3.2 Αναγωγή των μεμειγμένων διαδικασιών Poisson σε συνήθεις

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, θεωρούμε τη Θ ως μια τ.μ. επάνω στο Ω τέτοια ώστε $P_\Theta\big((0,\infty)\big) = 1$. Αν θέσουμε $N_\Theta := \{\omega \in \Omega : \Theta(\omega) \le 0\}$ τότε $P_\Theta(N_\Theta) = 0$, κι επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N_\Theta = \emptyset$.

Δοθέντος ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου I, μια αύξουσα οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται μια **διύλιση** (*filtration*) για τον μ.χ. (Ω, Σ). Ιδιαιτέρως, για $I = \mathbb{R}_+$ η διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **δεξιά συνεχής** αν $\Sigma_t = \bigcap_{s>t} \Sigma_s$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [31], σελ. 3). Για οποιαδήποτε οικογένεια $\{Z_i\}_{i\in I}$ τ.μ. επάνω στον (Ω, Σ), η διύλιση $\{\mathcal{Z}_i\}_{i\in I}$ με $\mathcal{Z}_i := \sigma(\bigcup_{j\le i} \sigma(Z_j))$ για κάθε $i \in I$, ονομάζεται **η κανονική διύλιση** (*canonical or natural filtration*) για τη $\{Z_i\}_{i\in I}$.

Μία ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τ.μ. επάνω στον (Ω, Σ) είναι **μια P-σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων**, αν υπάρχει P-μηδενικό σύνολο $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες: **(t1)** $T_0(\omega) = 0$ και **(t2)** $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται το **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Τότε, η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ των τ.μ. που ορίζονται μέσω της $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται **η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων** που επάγεται από τη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (βλ. π.χ. [34], Chapter 1, Section 1.1, σελ. 6).

Μια οικογένεια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. επάνω στον (Ω, Σ) είναι μία **P-σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων** αν υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $\Omega_N \in \Sigma$ ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

(n1) $N_0(\omega) = 0$,

(n2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0,\infty)$,

(n3) $N_t(\omega) = \inf_{u\in(t,\infty)} N_u(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(n4) $\sup_{u\in[0,t)} N_u(\omega) \le N_t(\omega) \le \sup_{u\in[0,t)} N_u(\omega) + 1$ για κάθε $t \in (0,\infty)$,

(n5) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega)=\infty$.

Το μηδενικό σύνολο $\varOmega_N$ ονομάζεται το P-**μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (βλ. π.χ. [34], Chapter 2, Section 2.1, σελ. 17).

Δηλαδή, οι τροχιές μιας σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων ξεκινούν από το μηδέν και βαίνουν αύξουσες στο άπειρο με μοναδιαία άλματα, είναι δεξιά συνεχείς, και σε άπειρο χρόνο φτάνουν στο άπειρο· το τελευταίο μπορεί επίσης να συμβεί και σε πεπερασμένο χρόνο.

Παρατήρηση 3.2.1. Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\varOmega_N$, τότε η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ που ορίζεται μέσω της

$$T_n:=\inf\{t\in\mathbb{R}_+ : N_t=n\}\quad \text{για κάθε}\quad n\in\mathbb{N}_0$$

είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων με P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\varOmega_T=\varOmega_N$, ενώ η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου κάθε $W_n:=T_n-T_{n-1}$, είναι προφανώς μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων με P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\varOmega_W=\varOmega_T$.

Οι ακολουθίες $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζονται στην παραπάνω παρατήρηση καλούνται η **σ.δ. των χρόνων και των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων**, αντίστοιχα, **που επάγονται από τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αντιστρόφως, δοθείσης μιας σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζουμε την **επαγόμενη σ.δ. χρόνων άφιξης και αριθμού των απαιτήσεων** θέτοντας $T_n:=\sum_{k=1}^n W_k$ για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$ και $N_t:=\sum_{n=1}^\infty \chi_{\{T_n\le t\}}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, αντίστοιχα (βλ. π.χ. [34], Theorem 2.1.1).

Για το υπόλοιπο της διατριβής, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\varOmega_N=\emptyset$***. Επίσης επειδή οι δεσμεύσεις μας θα γίνονται πάντα ως προς μια μετρήσιμη απεικόνιση*** Θ***, αντί της ορολογίας «υπό συνθήκη ως προς τη*** $\sigma(\Theta)$***» ή «υπό συνθήκη δοθείσης της*** Θ***» θα χρησιμοποιείται απλώς η φράση «υπό συνθήκη».***

Επί πλέον, μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θέτουμε $\varUpsilon:=(0,\infty)$ *και υποθέτουμε ότι η* $\{P_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ *είναι μια disintegration του* P *επάνω στο* P_Θ *συνεπής με τη* Θ*.* Επισημαίνουμε ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων που συναντώνται στις εφαρμογές των μ.δ. Poisson, ο υποκείμενος χ.π. $(\varOmega,\Sigma,P)$ είναι πολωνικός και άρα τέλειος, με αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα, κι επομένως η ύπαρξη μιας τέτοιας disintegration είναι εξασφαλισμένη (βλ. Παρατήρηση 2.1.3).

Ακόμη, με $\mathcal{A}:=\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συμβολίζουμε τη κανονική διύλιση της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αν $\widetilde{\mathcal{A}}_t:=\sigma(\mathcal{A}_t\cup\sigma(\Theta))$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, τότε η $\widetilde{\mathcal{A}}:=\{\widetilde{\mathcal{A}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διύλιση για τον $(\varOmega,\Sigma)$. Επί πλέον, θέτουμε $\mathcal{A}_\infty:=\sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{A}_t)=\sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ και $\widetilde{\mathcal{A}}_\infty:=\sigma(\mathcal{A}_\infty\cup\sigma(\Theta))$. Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι δεξιά συνεχής (βλ. π.χ. [31], Theorem 25).

Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μια **μεμειγμένη διαδικασία Poisson** επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) (ή απλά μια P-**μ.δ. Poisson**) με παράμετρο την τ.μ. Θ, αν έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει $P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta)$ $P \mid \sigma(\Theta) -$ σ.β. (βλ. π.χ. [34], Section 4.2, σελ. 87). Ιδιαιτέρως, αν η P_Θ είναι εκφυλισμένη σε κάποιο $\theta_0 > 0$, τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-**διαδικασία Poisson** με παράμετρο θ_0.

Το ακόλουθο λήμμα είναι θεμελιώδες, αφού ανάγει, μέσω μιας disintegration, την P-υπό συνθήκη ανεξαρτησία σε συνήθη ως προς τα επιμέρους μέτρα πιθανότητας P_θ.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω I αριθμήσιμο σύνολο. Τότε η σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη αν και μόνο υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_I \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin O_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε τα παρακάτω δύο βήματα.
(a) Έστω ότι η σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη, τότε ισοδύναμα και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\} \mid \Theta\Big) = \prod_{j=1}^{m} P(\{X_{i_j} \in B_j\} \mid \Theta) \quad P \mid \sigma(\Theta) - \text{σ.β.}, \tag{3.1}$$

για οποιαδήποτε διαφορετικά ανά δύο $i_1, \ldots, i_n$ στο I και για όλα τα $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$.

Η συνθήκη (3.1) είναι ισοδύναμη με την

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\} \mid \Theta\Big)dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m} P(\{X_{i_j} \in B_j\} \mid \Theta)dP\ ,$$

ή βάσει του Λήμματος 2.3.2, με την

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P_\bullet\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\Big) \circ \Theta dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m}[P_\bullet(\{X_{i_j} \in B_j\}) \circ \Theta]dP,$$

ή ισοδύναμα με την

$$\int_D P_\theta\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\Big)P_\Theta(d\theta) = \int_D \prod_{j=1}^{m} P_\theta(\{X_{i_j} \in B_j\})P_\Theta(d\theta) \tag{3.2}$$

για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

Όμως, από την (3.2) ισοδύναμα έχουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, για οποιαδήποτε διαφορετικά ανά δύο $i_1, \ldots, i_m \in I$ και για όλα τα $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{I,m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin O_{I,m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m}$ να ισχύει η

$$P_\theta\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\Big) = \prod_{j=1}^{m} P_\theta(\{X_{i_j} \in B_j\}). \tag{3.3}$$

Επειδή το I είναι αριθμήσιμο έπεται ότι το $O_{I,m,B_1,\ldots,B_m} := \bigcup_{i_1,\ldots,i_m\in I} O_{I,m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m}$ είναι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο, όπου $i_1,\ldots,i_m$ διαφορετικά ανά δύο, και ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $B_1,\ldots,B_m \in \mathfrak{B}$ η συνθήκη (3.3) ικανοποιείται για κάθε $\theta \notin O_{I,m,B_1,\ldots,B_m}$.

(b) Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = 2$. Τότε υπάρχει ένα καθολικό P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_I \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin O_I$ να ισχύει η συνθήκη (3.3) για $m = 2$, για κάθε $i_1, i_2 \in I$ με $i_1 \neq i_2$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathfrak{B}$ έχει έναν γεννήτορα $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ που είναι μια αριθμήσιμη άλγεβρα, αφού αν ο $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ ήταν ένας οποιοσδήποτε αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathfrak{B}$ τότε η $\alpha(\mathcal{G}_{\mathfrak{B}})$ θα ήταν μια αριθμήσιμη άλγεβρα που θα παρήγαγε την $\mathfrak{B}$. Επομένως, εφαρμόζοντας την (3.3) για $m = 2$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{I,B_1,B_2} := O_{I,2,B_1,B_2} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin O_{I,B_1,B_2}$ να ισχύει η (3.3). Θέτουμε $O_I := \bigcup_{B_1,B_2\in\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}} O_{I,B_1,B_2}$. Τότε έχουμε ότι $P_\Theta(O_I) = 0$ και ότι η (3.3) ικανοποιείται για κάθε $\theta \notin O_I$ και για όλα τα $B_1, B_2 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$.

Εφαρμόζοντας, τώρα, διαδοχικά δύο επιχειρήματα μονότονης κλάσης, αποδεικνύεται το (b): Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας την (3.3) για $m = 2$ προκύπτει ότι για κάθε $i_1, i_2 \in I$ με $i_1 \neq i_2$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{I,B_1,B_2} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O_{I,B_1,B_2}$ να ισχύει η

$$P_\theta(X_{i_1}^{-1}(B_1) \cap X_{i_2}^{-1}(B_2)) = P_\theta(X_{i_1}^{-1}(B_1))P_\theta(X_{i_2}^{-1}(B_2)). \tag{3.4}$$

Τότε για κάθε $i_1, i_2 \in I$ με $i_1 \neq i_2$, για κάθε $n_1 \in \mathbb{N}$ και $B_{1,n_1} \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ και για κάθε $B_2 \in \mathfrak{B}$ υπάρχει $O_{I,n_1,B_2} := O_{B_{1,n_1},B_2} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O_{n_1,B_2}$ να ισχύει η

$$P_\theta(X_{i_1}^{-1}(B_{1,n_1}) \cap X_{i_2}^{-1}(B_2)) = P_\theta(X_{i_1}^{-1}(B_{1,n_1}))P_\theta(X_{i_2}^{-1}(B_2)).$$

Ας σταθεροποιήσουμε, τώρα, ένα αυθαίρετο $B_2 \in \mathfrak{B}$, ας ορίσουμε το P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{I,B_2} := \bigcup_{n_1\in\mathbb{N}} O_{I,n_1,B_2} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{D}_1$ την οικογένεια όλων των $B_1 \in \mathfrak{B}$ που ικανοποιούν την (3.4) για κάθε $i_1, i_2 \in I$ με $i_1 \neq i_2$ και για κάθε $\theta \notin O_{I,B_2}$. Τότε $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathcal{D}_1$, ενώ εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η $\mathcal{D}_1$ είναι μια μονότονη κλάση, οπότε εξασφαλίζουμε ότι $\mathcal{D}_1 \supseteq \sigma(\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{B}$ (βλ. Θεώρημα A.8), και άρα ότι $\mathcal{D}_1 = \mathfrak{B}$. Επομένως, για κάθε $i_1, i_2 \in I$ με $i_1 \neq i_2$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{I,B_2} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O_{I,B_2}$ να ισχύει η (3.4). Με ένα παρόμοιο επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορούμε να απαλλάξουμε το μηδενικό μας σύνολο από το B_2, και άρα να βρούμε ένα καθολικό P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_I \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ εκτός του οποίου ισχύει η (3.4), κάτι που αποδεικνύει το (b).

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, παρατηρούμε ότι υποθέτοντας την ύπαρξη ενός καθολικού P_Θ-μηδενικού συνόλου $O_I \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ εκτός του οποίου ικανοποιείται η (3.3), προκύπτει άμεσα η ισχύς της (3.2) ή ισοδύναμα της (3.1). □

Παρατηρήσεις 3.2.3. Έστω Q μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ κι έστω $I \subseteq \mathbb{R}_+$, σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ και $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ η κανονική της διύλιση. Τότε ισχύουν τα εξής:
(a) Η $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι Q-ανεξάρτητη αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_t)] = Q(A)\mathbb{E}_Q[f(X_t)] \tag{3.5}$$

για κάθε $s, t \in I$ με $s < t$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι Q-ανεξάρτητη. Τότε για κάθε $s, t \in I$ με $s < t$ η τ.μ. X_t είναι Q-ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s$, και άρα το ίδιο θα ισχύει για την $f(X_t)$, όπου f είναι μια οποιαδήποτε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, απ′ όπου έπεται ότι η $f(X_t)$ είναι Q-ανεξάρτητη της χ_A για $A \in \mathcal{F}_s$ καθώς επίσης και ότι $\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_t)] = \mathbb{E}_Q[\chi_A]\mathbb{E}_Q[f(X_t)] = Q(A)\mathbb{E}_P[f(X_t)]$ για κάθε $s, t \in I$ με $s < t$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη (3.5) ισχύει για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, για κάθε $s, t \in I$ με $s < t$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$. Τότε έπεται ότι η $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι Q-ανεξάρτητη, αφού εύκολα μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή ότι $Q(\bigcap_{j=1}^m X_{t_j}^{-1}(B_j)) = \prod_{j=1}^m Q(X_{t_j}^{-1}(B_j))$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 2$, για όλα τα $t_1, \ldots, t_m \in I$ και για όλα τα σύνολα Borel $B_1, \ldots, B_m$.
(b) Ομοίως αποδεικνύεται ότι η $\{X_t\}_{t\in I}$ έχει Q-ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{E}_Q[\chi_A f(X_t - X_s)] = Q(A)\mathbb{E}_Q[f(X_t - X_s)] \tag{3.6}$$

για κάθε $s, t \in I$ με $s < t$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$.
(c) Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι δύο τ.μ. X_1 και X_2 είναι Q-ισόνομες αν και μόνο αν $\mathbb{E}_Q[f(X_1)] = \mathbb{E}_Q[f(X_2)]$ για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ κι έστω $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική της διύλιση. Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει δεξιά συνεχείς τροχιές και η $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά συνεχής, τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη αν και μόνο αν υπάρχει P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O_{\mathbb{Q}_+}$ η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε τα παρακάτω βήματα.
(a) Θέτουμε $\mathcal{Z}_s := \sigma(\{X_u\}_{u\in\mathbb{Q}_+, u\leq s})$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Τότε $\mathcal{F}_s = \mathcal{Z}_s$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$.

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε αρχικά ένα αυθαίρετο $s \in \mathbb{R}_+$. Επειδή η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει εξ′ υποθέσεως δεξιά συνεχείς τροχιές κι επειδή το $\mathbb{Q}_+$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$, προκύπτει ότι για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ με $u \le s$ υπάρχει μια ακολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ ώστε $u_n \downarrow u$ και $X_u = \lim_{n\to\infty} X_{u_n}$. Επομένως, η τ.μ. X_u είναι για κάθε $u \le s$ μια $\mathcal{Z}_s$-μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο τέτοιων συναρτήσεων, και άρα $\sigma(X_u) \subseteq \mathcal{Z}_s$ για κάθε $u \le s$, απ' όπου έπεται ότι $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{Z}_s$, κάτι που αποδεικνύει το (b), αφού η αντίστροφη σχέση εγκλεισμού είναι προφανής.

(b) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathcal{F}_s = \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+,\, s'>s} \mathcal{F}_{s'}$.

Πράγματι, έστω $A \in \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+,\, s'>s} \mathcal{F}_{s'}$. Τότε ισοδύναμα έχουμε ότι $A \in \mathcal{F}_{s'}$ για κάθε $s' \in \mathbb{Q}_+$ με $s' > s$, το οποίο λόγω του ότι το $\mathbb{Q}_+$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$ ισοδυναμεί με το ότι $A \in \mathcal{F}_u$ για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ με $u > s$ ή με το ότι $A \in \bigcap_{u\in\mathbb{R}_+,\, u>s} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_s$, κάτι που αποδεικνύει το (b).

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη.

(c) Τότε από το Λήμμα 3.2.2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα καθολικό P_Θ-μηδενικό σύνολο $O_{\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O_{\mathbb{Q}_+}$ να ισχύει η συνθήκη (3.3) για $I = \mathbb{Q}_+$.

Για τη συνέχεια της απόδειξης σταθεροποιούμε αυθαίρετο $\theta \notin O_{\mathbb{Q}_+}$. Τότε από την Παρατήρηση 3.2.3, (a) έπεται ότι για όλα τα $s, t \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$, για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, και για κάθε $A \in \mathcal{Z}_s$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(X_t)] = P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_t)]. \tag{3.7}$$

(d) Αν θεωρήσουμε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και αν γράψουμε την (3.7) για $s', t' \in \mathbb{Q}_+$ με $s' < t'$ και στη συνέχεια αφήσουμε το $s' \downarrow s$ και το $t' \downarrow t$, εφαρμόζοντας τις υποθέσεις μας για την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 6.21) προκύπτει ότι για κάθε $A \in \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+,\, s'>s} \mathcal{F}_{s'} = \mathcal{F}_s$ και για κάθε f φραγμένη, συνεχή, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, ισχύει η συνθήκη (3.7).

Πράγματι, έστω ότι η f είναι όπως παραπάνω κι έστω δύο ακολουθίες $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ τέτοιες ώστε $s_n \downarrow s$ και $t_n \downarrow t$ καθώς επίσης κι ένα σύνολο $A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{s_n}$. Τότε υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \varOmega$ εξασφαλίζουμε ότι $|\chi_A(f \circ X_{t_n})|(\omega) = |\chi_A(\omega) f(X_{t_n}(\omega))| \le M \in \mathcal{L}^1(P)$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue για την ακολουθία $\{\chi_A(f \circ X_{t_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. επάνω στο $\varOmega$ για να εξασφαλίσουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(X_t)] &= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \lim_{n\to\infty} f(X_{t_n})] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(X_{t_n})] = \lim_{n\to\infty} P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_{t_n})] \\ &= P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[\lim_{n\to\infty} f(X_{t_n})] = P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_t)].\end{aligned}$$

Συνεπώς η συνθήκη (3.7) ισχύει για κάθε $A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{s_n} = \mathcal{F}_s$, όπου η ισότητα προκύπτει από το (b), και άρα δείξαμε το (d).

(e) Για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, υπάρχει μια ακολουθία $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ φραγμένων, συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, ώστε η συνθήκη

$$\lim_{m\to\infty}\int \chi_A(|g_m - f|\circ X_t)dP_\theta = 0$$

να ισχύει για όλα τα $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s<t$ και για κάθε $A\in\mathcal{F}_s$.

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε αυθαίρετα $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s<t$. Έστω επίσης f όπως παραπάνω. Τότε για κάθε $m\in\mathbb{N}$ υπάρχει μια φραγμένη, συνεχής, πραγματική συνάρτηση g_m πραγματικής μεταβλητής, τέτοια ώστε $\int|g_m-f|d(P_\theta)_{X_t}\le\frac{1}{m}$ (βλ. π.χ. [17], Proposition 415P). Επομένως, $\lim_{m\to\infty}\int(|g_m-f|\circ X_t)dP_\theta=0$, που συνεπάγεται το (e).

(f) Η συνθήκη (3.7) ικανοποιείται για όλα τα $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s<t$, για κάθε $A\in\mathcal{F}_s$ και για κάθε συνάρτηση f όπως στο (c).

Πράγματι, έστω s,t,f και A όπως πιο πάνω. Τότε από το (e) προκύπτει ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ φραγμένων, συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, ώστε

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(X_t)] = \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A g_m(X_t)] \overset{\text{(d)}}{=} \lim_{m\to\infty}P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[g_m(X_t)] = P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_t)],$$

και άρα από την Παρατήρηση 3.2.3, (a) ισοδύναμα έχουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta\notin O_{\mathbb{Q}_+}$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού το ότι η τελευταία συνθήκη συνεπάγεται την P-υπό συνθήκη ανεξαρτησία της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προφανές. □

Πρόταση 3.2.5. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπως στην Πρόταση 3.2.4. Τότε η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}$ η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Απόδειξη. Επειδή η P-υπό συνθήκη ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $m\in\mathbb{N}$ με $m\ge 2$ ισχύει η

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\in B_j\}\mid\Theta\Big)=\prod_{j=1}^{m}P(\{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\in B_j\}\mid\Theta)\quad P\mid\sigma(\Theta)-\text{σ.β..}$$

για οποιαδήποτε διαφορετικά ανά δύο $t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{Q}_+$ και για όλα τα $B_1,\ldots,B_m\in\mathfrak{B}$, μπορούμε, λαμβάνοντας υπόψη την Παρατήρηση 3.2.3, (b), να εφαρμόσουμε τη συλλογιστική της απόδειξης της Πρότασης 3.2.4 (αντικαθιστώντας τον όρο X_t με τον X_t-X_s) για να εξασφαλίσουμε τη ζητούμενη ισοδυναμία. □

Παρατήρηση 3.2.6. Έστω I αριθμήσιμο σύνολο. Τότε η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ισόνομη αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_I\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin L_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_θ-ισόνομη.

Πράγματι, αν για οποιαδήποτε $i, j \in I$ και για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ η ισότητα $P_{X_i|\Theta}(B) = P_{X_j|\Theta}(B)$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β., τότε από το Λήμμα 2.3.2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_{I,i,j,B} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_{I,i,j,B}$ να ισχύει η ισότητα $P_\theta(X_i^{-1}(B)) = P_\theta(X_j^{-1}(B))$. Επειδή το I είναι αριθμήσιμο και η $\mathfrak{B}$ αριθμήσιμα παραγόμενη, θέτοντας $L_I := \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}} \bigcup_{i,j \in I} L_{I,i,j,B}$, όπου $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ είναι ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathfrak{B}$, κι εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_I \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_I$ να ισχύει ότι $P_\theta(X_i^{-1}(B)) = P_\theta(X_j^{-1}(B))$ για όλα τα $i, j \in I$ και $B \in \mathfrak{B}$. Επομένως, δείξαμε ότι η $\{X_i\}_{i \in I}$ είναι P_θ-ισόνομη για κάθε $\theta \notin L_I$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2.3.2.

Λήμμα 3.2.7. *Έστω $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ όπως στην Πρόταση 3.2.4. Τότε η σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ισόνομες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$ η $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-ισόνομες προσαυξήσεις.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$ η $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-ισόνομες προσαυξήσεις, οπότε για όλα τα $B \in \mathfrak{B}$ και $s, t, u, v \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και $u < v$ έχουμε ότι $P_\theta\big((X_t - X_s)^{-1}(B)\big) = P_\theta\big((X_v - X_u)^{-1}(B)\big)$, και άρα εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.3.2, προκύπτει ότι η ισότητα $P_{X_t - X_s|\Theta}(B) = P_{X_v - X_u|\Theta}(B)$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β., δηλαδή ότι οι προασαυξήσεις $X_t - X_s$ και $X_v - X_u$ είναι P-υπό συνθήκη ισόνομα κατανεμημένες. Επομένως, αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι για κάθε $s, t, u, v \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και $u < v$ οι προσαυξήσεις $X_t - X_s$ και $X_v - X_u$ είναι P-υπό συνθήκη ισόνομα κατανεμημένες. Επειδή το $\mathbb{Q}_+$ είναι αριθμήσιμο και η $\mathfrak{B}$ αριθμήσιμα παραγόμενη μπορεί να αποδειχθεί όπως στην Παρατήρηση 3.2.6 ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$ να ισχύει η $P_\theta\big((X_t - X_s)^{-1}(B)\big) = P_\theta\big((X_v - X_u)^{-1}(B)\big)$ για κάθε $s, t, u, v \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$ και $u < v$ και για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Τότε από την Παρατήρηση 3.2.3, (c) έχουμε ότι για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$ η συνθήκη

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_t - X_s)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_v - X_u)] \tag{3.8}$$

ισχύει για κάθε $s, t, u, v \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$ και $u < v$ και για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής.

Ακολουθώντας τώρα τη συλλογιστική της απόδειξης της Πρότασης 3.2.5, εξασφαλίζουμε ότι η συνθήκη (3.8) ισχύει για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$, για όλα τα $s, t, u, v \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και $u < v$, και για κάθε συνάρτηση f όπως πιο πάνω, το οποίο σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.3, (c) ισοδυναμεί με το ότι οι τ.μ. $X_t - X_s$ και $X_v - X_u$ είναι P_θ-ισόνομες για κάθε $\theta \notin \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$. $\square$

Πόρισμα 3.2.8. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπως στην Πρόταση 3.2.4. Αν $X_0(\omega)=0$ για κάθε $\omega\in\Omega$, και αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $K_{\mathbb{Q}_+}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}\subseteq K_{\mathbb{Q}_+}$ και για κάθε $\theta\notin K_{\mathbb{Q}_+}$ η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-στάσιμες προσαυξήσεις.*

Απόδειξη. Έστω σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τέτοια ώστε $X_0(\omega)=0$ για κάθε $\omega\in\Omega$ και με P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Ας υποθέσουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις, δηλαδή ότι για κάθε $t,h\in\mathbb{R}_+$ ισχύει η $P_{X_{t+h}-X_t|\Theta}=P_{X_h|\Theta}$ $P\mid\sigma(\Theta)-$σ.β.. Τότε, όμως, βάσει του Λήμματος 3.2.7 η τελευταία συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$ η ισότητα $P_\theta\circ(X_{t+h}-X_t)^{-1}=P_\theta\circ X_h^{-1}$ να ισχύει για κάθε $t,h\in\mathbb{R}_+$. Επειδή, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.5, υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}$ η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε η τελευταία συνθήκη ισονομίας είναι ισοδύναμη με το ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P_θ-στάσιμες προασαυξήσεις για κάθε $\theta\notin K_{\mathbb{Q}_+}:=\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}\cup\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}$. □

Λήμμα 3.2.9. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ.δ. με δεξιά συνεχείς τροχιές τέτοια ώστε όλες οι τ.μ. X_t να είναι διακριτές ή (απόλυτα) συνεχείς με συναρτήσεις (πυκνότητας) πιθανότητας $f_{X_t}(\cdot,\Theta)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$. Υποθέτουμε ότι για σταθερό $t\in\mathbb{R}_+$ η συνάρτηση $(y,\theta)\longmapsto f_{X_t}(y,\theta)$ που παίρνει πραγματικές τιμές είναι $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B}$-μετρήσιμη. Επίσης θέτουμε $\mathbf{K}_t(\Theta)(B):=\int_B f_{X_t}(y,\Theta)\nu(dy)$ και $\mathbf{K}_t(\theta)(B):=\int_B f_{X_t}(y,\theta)\nu(dy)$ για κάθε $B\in\mathfrak{B}$ και $\theta\in\Upsilon$, και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $t\longmapsto\mathbf{K}_t(\theta)(B)$ είναι δεξιά συνεχής για σταθερά $B\in\mathfrak{B}$ και $\theta\in\Upsilon$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $B\in\mathfrak{B}$ η συνθήκη $P_{X_t|\Theta}(B)=\mathbf{K}_t(\Theta)(B)$ ισχύει $P\mid\sigma(\Theta)$-σ.β..

(ii) Για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ η συνθήκη $P_{X_t|\Theta}=\mathbf{K}_t(\Theta)$ ισχύει $P\mid\sigma(\Theta)$-σ.β..

(iii) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widetilde{L}$ να ισχύει η συνθήκη $(P_\theta)_{X_t}=\mathbf{K}_t(\theta)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$.

Ιδιαιτέρως, αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}=\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, τότε για κάθε $t\in(0,\infty)$ η συνθήκη $P_{N_t|\Theta}=\mathbf{P}(t\Theta)$ ισχύει $P\mid\sigma(\Theta)$-σ.β. αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widetilde{L}$ να ισχύει η συνθήκη $(P_\theta)_{N_t}=\mathbf{P}(t\theta)$ για κάθε $t\in(0,\infty)$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνθήκη (i) είναι ισοδύναμη με το ότι για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $B,D\in\mathfrak{B}$ ισχύει η ισότητα

$$\int_{\Theta^{-1}(D)}P_{X_t|\Theta}(B)dP=\int_{\Theta^{-1}(D)}\int_B f_{X_t}(y,\Theta)\nu(dy)dP, \tag{3.9}$$

από την οποία βάσει του Λήμματος 2.3.2 ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\int_D P_\theta\big(X_t^{-1}(B)\big)P_\Theta(d\theta) = \int_D \int_B f_{X_t}(y,\theta)\nu(dy)P_\Theta(d\theta), \tag{3.10}$$

όπου ν είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ (βλ. π.χ. [2], Παράδειγμα 1.2.7, (a) για τον ορισμό) αν όλες οι τ.μ. X_t είναι διακριτές, και το μέτρο του Lebesgue λ στο $\mathbb{R}$ αν όλες οι τ.μ. X_t είναι απόλυτα συνεχείς.

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$: Έστω ότι ισχύει το (i). Τότε έχουμε την (3.9), και άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$ υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}'_{B,t} \in \sigma(\Theta)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin \widetilde{L}'_{B,t}$ να ισχύει η

$$P_{X_t|\Theta}(B,\omega) = \mathbf{K}_t(\Theta(\omega))(B) \tag{3.11}$$

Επειδή μπορούμε να επιλέξουμε έναν γεννήτορα $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ της $\mathfrak{B}$, ο οποίος να είναι μια αριθμήσιμη άλγεβρα, τότε θέτοντας $\widetilde{L}'_t := \bigcup_{B\in\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}} \widetilde{L}'_{B,t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, προκύπτει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ότι $P(\widetilde{L}'_t) = 0$ και ότι η συνθήκη (3.11) ικανοποιείται για κάθε $\omega \notin \widetilde{L}'_t$ και $B \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$. Τότε, μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης, αποδεικνύεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \notin \widetilde{L}'_t$ η συνθήκη (3.11) ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Επομένως, έχουμε το (ii). Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι προφανής.

$(i) \Longleftrightarrow (iii)$: Έστω ότι ισχύει το (i). Τότε έχουμε την (3.10), και άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$ υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_{B,t} \in \sigma(\Theta)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin \widetilde{L}_{B,t}$ να ισχύει η

$$P_\theta(X_t^{-1}(B)) = \mathbf{K}_t(\theta)(B) \tag{3.12}$$

Τότε, εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά της ισοδυναμίας $(i) \Longleftrightarrow (ii)$, μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \notin \widetilde{L}_t := \bigcup_{B\in\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}} \widetilde{L}_{B,t}$ η συνθήκη (3.12) ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Επομένως, μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} \widetilde{L}_t \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$, $t \in \mathbb{Q}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ να ισχύει η (3.12).

Ας σταθεροποιήσουμε $\theta \notin \widetilde{L}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε επειδή η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει δεξιά συνεχείς τροχιές υπάρχει μια ακολουθία $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ ώστε $q_n \downarrow t$ και $X_t = \lim_{n\to\infty} X_{q_n}$, κάτι που σε συνδυασμό με την (3.12) συνεπάγεται ότι $(P_\theta)_{X_t} = \lim_{n\to\infty}(P_\theta)_{X_{q_n}} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{K}_{q_n}(\theta) = \mathbf{K}_t(\theta)$ (βλ. π.χ. [3], Theorem 2.5.1 και Proposition 9.1.1 για την πρώτη ισότητα), και άρα δείξαμε το (iii). Η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι προφανής, οπότε έχουμε την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i), (ii) και (iii). $\square$

Επειδή το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στην πληροφορία που περιέχουν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και η τ.μ. Θ, κι επειδή όλες οι τ.μ. T_n (άρα και όλες οι W_n) είναι $\mathcal{A}_\infty$-μετρήσιμες (βλ. [34], Lemma 2.1.3), *μπορούμε να υποθέσουμε και το κάνουμε ότι για τα* *δύο επόμενα αποτελέσματα όσο επίσης και για τα αποτελέσματα από το Λήμμα 3.3.4 μέχρι το τέλος του κεφαλαίου $\Sigma = \widetilde{\mathcal{A}}_\infty$.*

Με την επόμενη πρόταση οι P-μ.δ. Poisson ανάγονται μέσω μιας disintegration σε συνήθεις διαδικασίες Poisson.

Πρόταση 3.2.10. *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ ή ισοδύναμα ότι έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και η συνθήκη

$$P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

ισχύει για κάθε $t \in (0,\infty)$. Αλλά σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.9, η τελευταία συνθήκη ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $\widetilde{L}_* := L_{*,\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}_*$ να ισχύει

$$P_\theta \circ N_t^{-1} = \mathbf{P}(t\theta) \quad \text{για κάθε } \ t \in (0,\infty). \tag{3.13}$$

Τότε, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.8, το ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις ισοδυναμεί με το ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $K_* := K_{*,\mathbb{Q}_+} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin K_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις. Θέτοντας $L_* := K_* \cup \widetilde{L}_*$ και λαμβάνοντας υπόψη την (3.13), ισοδύναμα έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ για κάθε $\theta \notin L_*$. □

Πρόταση 3.2.11. *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ αν και μόνο αν η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ισότητα $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{Exp}(\Theta)$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$.*

Απόδειξη. Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.10, ισοδύναμα έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ, το οποίο με τη σειρά του ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\theta \notin L_*$ η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη, και ισχύει η $P_\theta \circ W_n^{-1} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (βλ. π.χ. [34], Theorem 2.3.4), κάτι που σύμφωνα με τα Λήμματα 3.2.2 και 3.2.9 ισοδυναμεί με το ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ισότητα $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{Exp}(\Theta)$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$. □

3.3 Περαιτέρω χαρακτηρισμοί μέσω disintegrations

Ο πρώτος από τους χαρακτηρισμούς που δίνονται στην παρούσα ενότητα αναφέρεται στη martingale-ιδιότητα κεντραρισμένων σ.δ. και αποτελεί ένα ακόμη χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος αυτού του κεφαλαίου (βλ. Θεώρημα 3.3.5).

Θα λέμε ότι μια σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι ένα **martingale** επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) προσαρμοσμένο σε μια διύλιση $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$, ή αλλιώς ένα $(P, \{\Sigma_i\}_{i\in I})$-**martingale** αν

(m1) κάθε τ.μ. X_i είναι Σ_i-μετρήσιμη,

(m2) $X_i \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $i \in I$,

(m3) για κάθε $i \leq j$ στο I, ισχύει $\mathbb{E}_P[X_j \mid \Sigma_i] = X_i \;\; P \mid \Sigma_i - $σ.β..

Λήμμα 3.3.1. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ.δ. με δεξιά συνεχείς τροχιές κι έστω $\mathcal{F}_X := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική της διύληση. Θέτουμε όπου $\widetilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t \cup \sigma(\Theta))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου $\widetilde{\mathcal{F}}_X := \{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και θεωρούμε τις ακόλουθες συνθήκες:*

- *(a) Η σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \widetilde{\mathcal{F}}_X)$-martingale.*
- *(b) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H'$ η κεντραρισμένη σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{F}}_X)$-martingale.*
- *(c) Η σ.δ. $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale.*
- *(d) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H$ η σ.δ. $\{N_t - t\theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale.*

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- *(i) Αν όλες οι τ.μ. X_t είναι μη αρνητικές, η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μη φθίνουσα και η $\mathcal{F}_X$ είναι δεξιά συνεχής τότε (a) $\Longrightarrow$ (b).*
- *(ii) Αν όλες οι τ.μ. X_t είναι P-ολοκληρώσιμες τότε (b) $\Longrightarrow$ (a).*
- *(iii) Αν $\mathbb{E}_P[\Theta] < \infty$ τότε οι συνθήκες (c) και (d) είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Αρχικά χρειαζόμαστε τα επόμενα δύο βήματα.
(a) Αν $X_t \in \mathcal{L}^1_+(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μη φθίνουσα, τότε υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H'_1 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H'_1$ να ισχύει η συνθήκη $X_t \in \mathcal{L}^1_+(P_\theta)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $X_t \in \mathcal{L}^1_+(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $B \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$. Τότε

$$\infty > \int_{\varTheta^{-1}(B)} X_t dP = \int_{\varTheta^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[X_t \mid \varTheta] dP = \int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] P_\varTheta(d\theta),$$

όπου η δεύτερη ισότητα αντλεί την ισχύ της από το Λήμμα 2.3.2. Συνεπώς, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] < \infty$ για $P_\varTheta$-σ.ό. τα $\theta \in \varUpsilon$, δηλαδή για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει ένα $P_\varTheta$-μηδενικό σύνολο $H'_{1,t} \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H'_{1,t}$ να ισχύει $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] < \infty$.

Θέτοντας $H'_1 := \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} H'_{1,t}$ εξασφαλίζουμε ένα $P_\varTheta$-μηδενικό σύνολο $H'_1 \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H'_1$ να ισχύει η συνθήκη $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{Q}_+$. Αλλά από την μονοτονία της $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ προκύπτει για κάθε $\theta \notin H'_1$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] < \infty$, αφού για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει ένα $s \in \mathbb{Q}_+$ με $t \leq s$, οπότε έχουμε ότι $X_t \leq X_s$ και $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_s] < \infty$.

(b) Για οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας Q επάνω στο $\varSigma$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η συνθήκη $X_t - \mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta] \in \mathcal{L}^1(Q)$ συνεπάγεται το ότι $\mathbb{E}_Q[|X_t|], \mathbb{E}_Q[|\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]|] < \infty$.

Πράγματι, έστω Q μέτρο πιθανότητας επάνω στο $\varSigma$. Επίσης σταθεροποιούμε αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$. Αν $X_t - \mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta] \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε

$$\mathbb{E}_Q\big[\big||\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]| - |X_t|\big|\big] = \mathbb{E}_Q\big[\big||X_t| - |\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]|\big|\big] \leq \mathbb{E}_Q[|X_t - \mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]|] < \infty,$$

συνεπώς

$$\mathbb{E}_Q[|X_t|] - \mathbb{E}_Q[|\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]|] \leq \mathbb{E}_Q\big[\big||X_t| - |\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]|\big|\big] < \infty$$

και

$$\mathbb{E}_Q[|\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]|] - \mathbb{E}_Q[|X_t|] \leq \mathbb{E}_Q\big[\big||\mathbb{E}_Q[X_t \mid \varTheta]| - |X_t|\big|\big] < \infty,$$

κάτι που αποδεικνύει το (b).

(i): Προφανώς οι σ.δ. των συνθηκών (a) και (b) ικανοποιούν την ιδιότητα (m1).

Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (a). Σταθεροποιούμε αυθαίρετα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και αυθαίρετο $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g_t : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g_t(\omega) := f_t \circ (id_\varOmega \times \varTheta)(\omega)$ για κάθε $\omega \in \varOmega$, όπου η $f_t : \varOmega \times \varUpsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο $f_t(\omega, \theta) := \chi_A(\omega)[X_t(\omega) - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]]$ για κάθε $(\omega, \theta) \in \varOmega \times \varUpsilon$. Επίσης $M := P \circ (id_\varOmega \times \varTheta)^{-1}$.

(c) Η συνάρτηση f_t είναι M-ολοκληρώσιμη.

Πράγματι, επειδή εξ' υποθέσεως η τ.μ. $X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \varTheta] \in \mathcal{L}^1(P)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int |f_t| dM &= \int |g_t| dP = \int \chi_A\big(|X_t - \mathbb{E}_{P_\bullet}[X_t] \circ \varTheta|\big) dP = \int \chi_A |X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \varTheta]| dP \\ &\leq \mathbb{E}_P[|X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \varTheta]|] < \infty, \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 2.3.2.

(d) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H_1' \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H_1'$ η κεντραρισμένη σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα (m2).

Πράγματι, επειδή εξ' υποθέσεως η τ.μ. $X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(P)$, από το (b) έχουμε ότι $X_t \in \mathcal{L}^1(P)$, και άρα από το (a) εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H_1' \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H_1'$ να ισχύει η συνθήκη $\mathbb{E}_{P_\theta}[|X_t|] < \infty$. Όμως, επειδή για κάθε $\theta \in \varUpsilon$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int |X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]|dP_\theta &\leq \int |X_t|dP_\theta + \int |\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]|dP_\theta \leq \int |X_t|dP_\theta + \int \mathbb{E}_{P_\theta}[|X_t|]dP_\theta \\ &= \mathbb{E}_{P_\theta}[|X_t|] + \mathbb{E}_{P_\theta}[\mathbb{E}_{P_\theta}[|X_t|]] = 2\mathbb{E}_{P_\theta}[|X_t|],\end{aligned}$$

άμεσα έπεται το (d).

(e) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H_2' \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H_2'$ η κεντραρισμένη σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να ικανοποιεί την (m3).

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε αυθαίρετο $B \in \mathfrak{B}$ και ας ορίσουμε τις συναρτήσεις $\widetilde{f}_t$ και $\widetilde{g}_t$ ως εξής: $\widetilde{f}_t(\omega,\theta) := \chi_B(\theta) f_t(\omega,\theta)$ για κάθε $(\omega,\theta) \in \varOmega \times \varUpsilon$ και $\widetilde{g}_t := \widetilde{f}_t \circ (id_\varOmega \times \Theta)$. Σύμφωνα με το (c) έχουμε ότι $\widetilde{f}_t \in \mathcal{L}^1(M)$. Επομένως, εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.3.5, (ii), προκύπτει η ισότητα

$$\int\int \widetilde{f}_t^{\theta}(\omega) P_\theta(d\omega) P_\Theta(d\theta) = \int \widetilde{g}_t(\omega) P(d\omega)$$

ή ισοδύναμα

$$\int_B \int f_t^{\theta}(\omega) P_\theta(d\omega) P_\Theta(d\theta) = \int_{\Theta^{-1}(B)} g_t(\omega) P(d\omega). \tag{3.14}$$

Επί πλέον, έχουμε ότι η σ.δ.

$$\begin{aligned}&\{X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta]\}_{t\in I} \quad \text{ικανοποιεί την ιδιότητα (m3)} \\ \iff &\int_A (X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta])dP = \int_A (X_s - \mathbb{E}_P[X_s \mid \Theta])dP \\ \iff &\int_{A\cap\Theta^{-1}(B)} (X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta])dP = \int_{A\cap\Theta^{-1}(B)} (X_s - \mathbb{E}_P[X_s \mid \Theta])dP \\ \iff &\int_{\Theta^{-1}(B)} \chi_A (X_t - \mathbb{E}_{P_\bullet}[X_t] \circ \Theta)dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} \chi_A (X_s - \mathbb{E}_{P_\bullet}[X_s] \circ \Theta)dP \\ \iff &\int_{\Theta^{-1}(B)} g_t(\omega)P(d\omega) = \int_{\Theta^{-1}(B)} g_s(\omega)P(d\omega) \\ \overset{(3.14)}{\iff} &\int_B\int f_t^{\theta}(\omega)P_\theta(d\omega)P_\Theta(d\theta) = \int_B\int f_s^{\theta}(\omega)P_\theta(d\omega)P_\Theta(d\theta) \\ \iff &\int_B\int_A (X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t])dP_\theta P_\Theta(d\theta) = \int_B\int_A (X_s - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_s])dP_\theta P_\Theta(d\theta) \\ \iff &\int_A (X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t])dP_\theta = \int_A (X_s - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_s])dP_\theta \;\; \text{για} \;\; P_\Theta - \text{σ.ό. τα} \;\; \theta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

όπου όλες οι ισοδυναμίες ισχύουν για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ και $B \in \mathfrak{B}$, καθώς έχουμε θεωρήσει και τα δύο σύνολα ως αυθαίρετα, ενώ η ισχύς της τρίτης ισοδυναμίας έπεται από το Λήμμα 2.3.2.

Όμως, η τελευταία συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$, για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ και για P_Θ-σ.ό. τα $\theta \in \Upsilon$ ισχύει η ισότητα

$$\int_A (X_t - X_s) dP_\theta = \int_A (\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_s]) dP_\theta, \tag{3.15}$$

και άρα για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{F}}_s}$, όπου $\mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{F}}_s}$ η αριθμήσιμη άλγεβρα που παράγει την $\widetilde{\mathcal{F}}_s$, υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H'_{2,A,s,t} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H'_{2,A,s,t}$ να ισχύει η συνθήκη (3.15).

Θέτοντας $H'_2 := \bigcup_{A \in \mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{F}}_s}} \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q}_+,\, s \leq t} H'_{2,A,s,t}$ προκύπτει ότι $P_\Theta(H'_2) = 0$, ενώ μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης, προκύπτει ακόμη ότι για κάθε $\theta \notin H'_2$ εξασφαλίζεται η ισχύς της συνθήκης (3.15) για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ και για όλα τα $s, t \in \mathbb{Q}_+$ με $s < t$.

Σταθεροποιούμε, τώρα, αυθαίρετο $\theta \notin H'_1 \cup H'_2$. Τότε για όλα τα $s \in \mathbb{Q}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ υπάρχει μια ακολουθία $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ ώστε $t_n \downarrow t$ και $X_t = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}$, και άρα για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_A (X_t - X_s) dP_\theta &= \lim_{n \to \infty} \int_A (X_{t_n} - X_s) dP_\theta = \lim_{n \to \infty} \int_A (\mathbb{E}_{P_\theta}[X_{t_n}] - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_s]) dP_\theta \\ &= \int_A (\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_s]) dP_\theta, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 6.8), αφού το ότι $X_{t_0} \in \mathcal{L}^1(P)$ συνεπάγεται $X_{t_0} \in \mathcal{L}^1(P_\theta)$ λόγω του (a). Εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα προκύπτει ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ υπάρχει μια ακολουθία $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{Q}_+$ τέτοια ώστε $s_n \downarrow s$ και $\int_A (X_t - X_s) dP_\theta = \lim_{n \to \infty} \int_A (X_t - X_{s_n}) dP_\theta = \lim_{n \to \infty} \int_A (\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_{s_n}]) dP_\theta = \int_A (\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t] - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_s]) dP_\theta$.

Άρα δείξαμε ότι για κάθε $\theta \notin H'_1 \cup H'_2$ ισχύει η (3.15) για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$, κάτι που αποδεικνύει το (e). Επομένως, θέτοντας $H' := H'_1 \cup H'_2$ προκύπτει ότι η σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (m1) έως (m3) για κάθε $\theta \notin H'$, οπότε έχουμε τη συνθήκη (b), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (i).

(ii): Από την υπόθεση της P-ολοκληρωσιμότητας όλων των τ.μ. X_t συνεπάγεται ότι η σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m2). Επί πλέον, αν θεωρήσουμε τις ισοδυναμίες που έπονται της (3.14) από το τέλος προς την αρχή, τότε προκύπτει ότι αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H'$ η οικογένεια $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να πληροί την ιδιότητα (m3), τότε το ίδιο θα ισχύει και για την οικογένεια $\{X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Άρα δείξαμε τη συνεπαγωγή $(b) \Longrightarrow (a)$.

(iii): Έστω $\mathbb{E}_P[\Theta] < \infty$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H$ η σ.δ. $\{N_t - t\theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale, και άρα τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin H$ να ισχύει η ισότητα $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = t\theta$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, κάτι που συνεπάγεται ότι η $\{N_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[N_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale, καθώς επίσης και ότι $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = t\Theta$ $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β. για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου η τελευταία συνθήκη αντλεί την ισχύ της από το Λήμμα 2.3.2. Επομένως, $\mathbb{E}_P[N_t] = t\mathbb{E}_P[\Theta] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [34], Lemma 4.2.5), οπότε βάσει του ισχυρισμού (ii) προκύπτει ότι η σ.δ. $\{N_t - \mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και άρα η $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale.

Αντιστρόφως, υποθέτοντας ότι η σ.δ. $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = t\Theta$ $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β., κάτι που συνεπάγεται ότι το ίδιο θα ισχύει και για την $\{N_t - \mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, καθώς επίσης και το ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $\widehat{K}_t = \Theta^{-1}(\widehat{L}_t)$ με $\widehat{L}_t \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $P_\Theta(\widehat{L}_t) = 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin \widehat{K}_t$ να ισχύει η $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = t\Theta(\omega)$, κάτι που σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.3.2 συνεπάγεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $\widehat{K}'_t = \Theta^{-1}(\widehat{L}'_t)$ με $\widehat{L}'_t \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $P_\Theta(\widehat{L}'_t) = 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin \widehat{K}''_t := \widehat{K}_t \cup \widehat{K}'_t$ να ισχύει η ισότητα

$$(\mathbb{E}_{P_\bullet}[N_t]) \circ \Theta(\omega) = \mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = t\Theta(\omega). \tag{3.16}$$

Επομένως, βρήκαμε ένα P-μηδενικό σύνολο $\widehat{K}'' = \Theta^{-1}(H'')$ με $H'' = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+}(\widehat{L}_t \cup \widehat{L}'_t) \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $P_\Theta(H'') = 0$ τέτοιο ώστε η συνθήκη (3.16) να ικανοποιείται για κάθε $\omega \notin \widehat{K}''$ και $t \in \mathbb{Q}_+$. Άρα δείξαμε ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = t\theta$ για κάθε $\theta \notin H''$ και $t \in \mathbb{Q}_+$.

Συνεπώς, για οποιαδήποτε σταθερά $\omega \notin \widehat{K}''$ και $t \in \mathbb{R}_+$, λόγω της δεξιάς συνέχειας των τροχιών της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+$ τέτοια ώστε $q_n \downarrow t$ και $N_t = \lim_{n\to\infty} N_{q_n}$, κάτι που σε συνδυασμό με την (3.16) και το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για συνήθεις (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 6.8) και δεσμευμένες (βλ. π.χ. [7], Chapter 7, Section 7.1, Theorem 2) μέσες τιμές συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_P[N_{q_n} \mid \Theta](\omega) = \lim_{n\to\infty} \big(\mathbb{E}_{P_\bullet}[N_{q_n}] \circ \Theta(\omega)\big) = (\mathbb{E}_{P_\bullet}[N_t]) \circ \Theta(\omega).$$

Συνεπώς, $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = t\theta$ για κάθε $\theta \notin H''$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Επίσης από τον ισχυρισμό (i) έπεται η ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $H'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin H'_*$ η σ.δ. $\{N_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[N_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale, κι επομένως η $\{N_t - t\theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale για κάθε $\theta \notin H := H'_* \cup H''$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 3.3.2. *Έστω I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο δεικτών κι έστω σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$. Θέτουμε $\mathcal{F}_{X,I} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ για την κανονική διύλιση της $\{X_t\}_{t\in I}$, ενώ για σταθερό $s \in I$*

θέτουμε $\mathcal{F}_s := \sigma(\{X_t\}_{t\leq s})$ *και* $\widetilde{\mathcal{F}}_s := \sigma(\mathcal{F}_s \cup \sigma(\Theta))$. *Αν η τ.μ.* $X_t - X_s$ *με* $t > s$ *είναι* P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της* $\mathcal{F}_s$, *τότε είναι και* P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της* $\widetilde{\mathcal{F}}_s$.

Απόδειξη. Ας σταθεροποιήσουμε ένα $s \in I$ και ας θεωρήσουμε έναν δείκτη $t \in I$ τέτοιον ώστε $s < t$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_t - X_s)$ και $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ και $B \in \sigma(X_t - X_s)$ ισχύει η

$$\mathbb{E}_P[\chi_{A\cap B} \mid \Theta] = \mathbb{E}_P[\chi_A \mid \Theta]\mathbb{E}_P[\chi_B \mid \Theta] \quad P \mid \sigma(\Theta) - \text{σ.β.}. \tag{3.17}$$

Σταθεροποιούμε επίσης ένα αυθαίρετο $B \in \sigma(X_t - X_s)$, και συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_s$ την οικογένεια όλων των $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ που ικανοποιούν την (3.17). Επειδή $\mathcal{D}_s \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}_s$, αρκεί να δείξουμε ότι $\widetilde{\mathcal{F}}_s \subseteq \mathcal{D}_s$.

Όμως, εξ' υποθέσεως, έχουμε ότι η (3.17) ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{F}_s$, ενώ η ισχύς της (3.17) για κάθε $A \in \sigma(\Theta)$ είναι προφανής, και άρα $\mathcal{F}_s \cup \sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{D}_s$. Ακόμη, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για δεσμευμένες μέσες τιμές (βλ. π.χ. [7], Chapter 7, Section 7.1, Theorem 2) ότι η $\mathcal{D}_s$ είναι μια κλάση Dynkin.

Έπειτα, σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$ και θέτουμε

$$\mathcal{G}_n := \left\{\bigcap_{k=1}^{n} C_k : C_k \in \mathcal{F}_s \cup \sigma(\Theta)\right\}.$$

Τότε για κάθε $G \in \mathcal{G}_n$ υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $\{C_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ στην $\mathcal{F}_s \cup \sigma(\Theta)$ τέτοια ώστε $G = \bigcap_{k=1}^n C_k$. Επίσης εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι τα σύνολα δεικτών $I_\Theta := \{k \in \{1,\ldots,n\} : C_k \in \sigma(\Theta)\}$ και $I_F := \{k \in \{1,\ldots,n\} : C_k \in \mathcal{F}_s \setminus \sigma(\Theta)\}$ είναι μια διαμέριση του $\{1,\ldots,n\}$, και να έχουμε $P \mid \sigma(\Theta) -$ σ.β. ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[\chi_{B\cap G} \mid \Theta] &= \mathbb{E}_P[\chi_{B\cap(\bigcap_{k\in I_\Theta} C_k)\cap(\bigcap_{k\in I_F} C_k)} \mid \Theta] = \chi_{\bigcap_{k\in I_\Theta} C_k}\mathbb{E}_P\big[\chi_B \chi_{\bigcap_{k\in I_F} C_k} \mid \Theta\big] \\
&= \chi_{\bigcap_{k\in I_\Theta} C_k}\mathbb{E}_P[\chi_B \mid \Theta]\mathbb{E}_P\big[\chi_{\bigcap_{k\in I_F} C_k} \mid \Theta\big] \\
&= \mathbb{E}_P\big[\chi_{\bigcap_{k\in I_\Theta} C_k}\chi_{\bigcap_{k\in I_F} C_k} \mid \Theta\big]\mathbb{E}_P[\chi_B \mid \Theta] = \mathbb{E}_P[\chi_G \mid \Theta]\mathbb{E}_P[\chi_B \mid \Theta].
\end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε ότι η (3.17) ικανοποιείται για κάθε $G \in \mathcal{G}_n$, και άρα $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{D}_s$. Επομένως, από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης (βλ. Θεώρημα A.9) έπεται ότι $\sigma(\mathcal{F}_s \cup \sigma(\Theta) \cup \mathcal{G}_n) \subseteq \mathcal{D}_s$, και άρα $\widetilde{\mathcal{F}}_s \subseteq \mathcal{D}_s$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα συνδέει τις ολοκληρώσιμες σ.δ. που έχουν υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις με τη martingale-ιδιότητα.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F}_X$, $\widetilde{\mathcal{F}}_X$, $\mathcal{F}_s$ *και* $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ *όπως στο Λήμμα 3.3.1 για σταθερό* $s \in \mathbb{R}_+$. *Υποθέτουμε ότι η* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια μη φθίνουσα σ.δ. στο* $\mathcal{L}^1_+(P)$ *που έχει* P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ότι η* $\mathcal{F}_X$ *είναι δεξιά συνεχής. Τότε υπάρχει ένα* P_Θ*-μηδενικό σύνολο* $\widetilde{H}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\theta \notin \widetilde{H}_*$ *η κεντραρισμένη σ.δ.* $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *να είναι ένα* $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{F}})$*-martingale.*

Απόδειξη. Προφανώς για όλα τα $\theta \in \Upsilon$ η σ.δ. $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m1), ενώ από το βήμα (d) της απόδειξης του Λήμματος 3.3.1 εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $H_1' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin H_1'$ να ισχύει η ιδιότητα (m2) για την $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ας σταθεροποιήσουμε έναν δείκτη $s \in \mathbb{R}_+$ και ας θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$.

(a) Από τον ορισμό της υπό συνθήκης ανεξαρτησίας και το Λήμμα 2.3.2, προκύπτει ότι η προσαύξηση $X_t - X_s$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{H} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{H}$ η $X_t - X_s$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{F}}_s$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η τ.μ. $X_t - X_s$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ ή ισοδύναμα ότι για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$, $B \in \sigma(X_t - X_s)$ και για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει η ισότητα

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P(A \cap (X_t - X_s)^{-1}(B) \mid \Theta)dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} P(A \mid \Theta)P((X_t - X_s)^{-1}(B) \mid \Theta)dP, \tag{3.18}$$

κάτι που βάσει του Λήμματος 2.3.2, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $\widetilde{H}_{A,B,s,t} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{H}_{A,B,s,t}$ να ισχύει η

$$P_\theta(A \cap (X_t - X_s)^{-1}(B)) = P_\theta(A)P_\theta((X_t - X_s)^{-1}(B)). \tag{3.19}$$

Επειδή, όμως, η $\mathfrak{B}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και κάθε $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ έχει μια αριθμήσιμη άλγεβρα $\mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{F}}_s}$ που την παράγει, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά δύο επιχειρήματα μονότονης κλάσης για να εξασφαλίσουμε για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{H}_{s,t} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{H}_{s,t}$ να ικανοποιείται η συνθήκη (3.19) για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Το τελευταίο, όμως, ισοδυναμεί με το ότι η προσαύξηση $X_t - X_s$ είναι P_θ-ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{H}_{s,t}$, κάτι που ομοίως με την Παρατήρηση 3.2.3, (b) αποδεικνύεται ότι ισοδυναμεί με το ότι για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, και για κάθε $\theta \notin \widetilde{H}_{s,t}$ ισχύει η

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A f(X_t - X_s)] = P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[f(X_t - X_s)] \tag{3.20}$$

για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ και για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής.

Θέτοντας, τώρα, $\widetilde{H} := \bigcup_{s',t'\in\mathbb{Q}_+,\, s'<t'} \widetilde{H}_{s',t'}$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{H} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{H}$ να ικανοποιείται η συνθήκη (3.20) για όλα τα $s', t' \in \mathbb{Q}_+$ με $s' < t'$ και για κάθε $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_{s'}$.

Ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $\theta \notin \widetilde{H}$. Επειδή, όμως, η δεξιά συνέχεια της $\mathcal{F}_X$ συνεπάγεται αυτή της $\widetilde{\mathcal{F}}_X$, έχουμε ότι $\widetilde{\mathcal{F}}_s = \bigcap_{s'\in\mathbb{Q}_+,\, s'>s} \widetilde{\mathcal{F}}_{s'}$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία συνθήκη σε συνδυασμό με τη δεξιά συνέχεια των τροχιών της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ακολουθώντας τη συλλογιστική των βημάτων (d) έως (f) στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.4, προκύπτει ότι η (3.20) ισχύει για όλα τα $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s<t$, για κάθε $A\in\widetilde{\mathcal{F}}_s$ και για κάθε φραγμένη, Borel, πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής, που ισοδυναμεί με ότι η X_t-X_s είναι P_θ-ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{F}}_s$. Άρα δείξαμε το (a).

(b) Για κάθε $\theta\notin\widetilde{H}$ και για κάθε $A\in\widetilde{\mathcal{F}}_s$ οι τ.μ. χ_A και X_t-X_s είναι P_θ-ανεξάρτητες.

Πράγματι, επειδή εξ' υποθέσεως η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις, η τ.μ. X_t-X_s είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$, κάτι που μαζί με το Λήμμα 3.3.2 συνεπάγεται ότι η X_t-X_s είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{F}}_s$. Όμως, σύμφωνα με το (a), ο τελευταίος ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με το ότι η τ.μ. X_t-X_s είναι P_θ-ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{F}}_s$ για κάθε $\theta\notin\widetilde{H}$. Επομένως, δείξαμε το (b).

(c) Η σ.δ. $\{X_t-\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m3) για κάθε $\theta\notin\widetilde{H}_*:=H_1'\cup\widetilde{H}$.

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε ένα σύνολο $A\in\widetilde{\mathcal{F}}_s$. Θέτοντας $J_t:=J_A(t,\theta):=\int_A(X_t-\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t])dP_\theta$ για κάθε $\theta\in\varUpsilon$, προκύπτει ότι για κάθε $\theta\notin\widetilde{H}_*$ έχουμε

$$\begin{aligned} J_t &= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A X_s]-P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[X_s]+\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A(X_t-X_s)]-P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t-X_s]\\ &\overset{\text{(b)}}{=} \int_A(X_s-\mathbb{E}_{P_\theta}[X_s])dP_\theta+\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A]\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t-X_s]-P_\theta(A)\mathbb{E}_{P_\theta}[X_t-X_s]=J_s, \end{aligned}$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη τόσο του (c) όσο και της πρότασης. □

Για να δώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, χρειαζόμαστε ακόμα την παρακάτω έννοια, την οποία και δανειζόμαστε από το [34], Section 1.1, page 8.

Για οποιοδήποτε $n\in\mathbb{N}$, το γράφημα της T_n ορίζεται ως η απεικόνιση $U_n:\varOmega\longrightarrow\varOmega\times\mathbb{R}$ που δίνεται μέσω του τύπου

$$U_n(\omega):=(\omega,T_n(\omega))\quad \text{για κάθε}\quad \omega\in\varOmega.$$

Προφανώς, η U_n είναι $\varSigma$-$\varSigma\otimes\mathfrak{B}$-μετρήσιμη. Ας ορίσουμε ακόμη τη συνολοσυνάρτηση $\mu:\varSigma\otimes\mathfrak{B}\longrightarrow[0,\infty]$ μέσω του τύπου

$$\mu(E):=\sum_{n=1}^{\infty}P_{U_n}(E)\quad \text{για κάθε}\quad E\in\varSigma\otimes\mathfrak{B}.$$

Τότε η μ είναι μέτρο και καλείται το P-**μέτρο απαίτησης** (ή απλά το μέτρο απαίτησης αν δεν προκαλείται σύγχυση) που επάγεται από την (σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Λήμμα 3.3.4. *Αν, για κάθε δοσμένο $\theta\in\varUpsilon$, τα μέτρα μ και μ_θ είναι το P-μέτρο απαίτησης και το P_θ-μέτρο απαίτησης, αντίστοιχα, που επάγεται από την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, τότε ισχύει*

$$\mu(F)=\int\mu_\theta(F)P_\Theta(d\theta)\quad \textit{για κάθε}\quad F\in\varSigma\otimes\mathfrak{B}$$

Απόδειξη. Επειδή το μ_θ είναι το P_θ-μέτρο απαίτησης που επάγεται από την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρησιμότητα της συνάρτησης $P_\bullet(E)$ για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \Sigma$ συνεπάγεται αυτήν της $\mu_\bullet(F)$ για οποιοδήποτε σταθερό $F \in \Sigma \otimes \mathfrak{B}$.

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο $\widetilde{\mu} : \Sigma \otimes \mathfrak{B} \longrightarrow [0,\infty]$ μέσω της σχέσης

$$\widetilde{\mu}(F) := \int \mu_\theta(F) P_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad F \in \Sigma \otimes \mathfrak{B}.$$

Αν σταθεροποιήσουμε, τώρα, ένα αυθαίρετο σύνολο $F \in \Sigma \otimes \mathfrak{B}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(F) &= \int \mu_\theta(F) P_\Theta(d\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int P_\theta(U_n^{-1}(F)) P_\Theta(d\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int P_\bullet(U_n^{-1}(F)) \circ \Theta dP \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbb{E}_P[\chi_{U_n^{-1}(F)} \mid \Theta] dP = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_P[\chi_{U_n^{-1}(F)}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{U_n}(F) = \mu(F),\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει λόγω του Λήμματος 2.3.2. □

Σε σχέση με το μέτρο απαίτησης, χρειαζόμαστε ακόμα να θεωρήσουμε την παρακάτω κλάση:

$$\widetilde{\mathcal{E}} := \{A \times (s,t] : s,t \in \mathbb{R}_+ \text{ με } s \leq t,\ A \in \widetilde{\mathcal{A}}_s\} \subseteq \Sigma \otimes \mathfrak{B}.$$

Τα αποτελέσματα της παρούσας ενότητας συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω ότι $\mathbb{E}_P[\Theta] < \infty$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{Exp}(\Theta)$ $P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$.

(ii) Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ.

(iii) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.

(iv) Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = t\Theta$ $P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$.

(v) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ η σ.δ. $\{N_t - t\theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale.

(vi) Η σ.δ. $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale.

(vii) *Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ το P_θ-μέτρο απαίτησης μ_θ που επάγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ να ικανοποιεί τη συνθήκη $\mu_\theta \mid \sigma(\widetilde{\mathcal{E}}) = (\theta P_\theta \otimes \lambda) \mid \sigma(\widetilde{\mathcal{E}})$.*

(viii) *Το P-μέτρο απαίτησης μ που επάγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\mu(E) = \int \mathbb{E}_P[\chi_{E^y}\Theta]\lambda(dy)$ για κάθε $E \in \sigma(\widetilde{\mathcal{E}})$.*

Απόδειξη. Οι ισοδυναμίες $(i) \iff (ii)$ και $(ii) \iff (iii)$ είναι άμεσες συνέπειες των Προτάσεων 3.2.11 και 3.2.10, αντίστοιχα.

$(iii) \iff (iv)$: Από το [34], Theorem 2.3.4 προκύπτει ότι το (iii) ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να έχει P_θ-ανεξάρτητες προσαυξήσεις και να ικανοποιεί την $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = t\theta$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Από το (iii) επίσης ισοδύναμα έχουμε την ισχύ του (ii), κάτι που μαζί με την υπόθεση $\Theta \in \mathcal{L}^1(P)$ συνεπάγεται το ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = t\mathbb{E}_P[\Theta] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.3.2 για να εξασφαλίσουμε ότι η συνθήκη

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = t\theta \quad \text{για κάθε } \theta \notin L_* \text{ και } t \in \mathbb{R}_+,$$

ισοδυναμεί με το ότι $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = t\Theta\ P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β. για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επί πλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.5, η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P_θ-ανεξάρτητες προσαυξήσεις για κάθε $\theta \notin L_*$ αν και μόνο αν έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Επομένως, δείξαμε την ισοδυναμία $(iii) \iff (iv)$.

$(iv) \iff (v)$: Έστω ότι ισχύει το (iv), το οποίο είναι ισοδύναμο με το (iii). Όμως, όπως δείξαμε στην απόδειξη της προηγούμενης ισοδυναμίας, από τον ισχυρισμό (iii) έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες μέσες τιμές. Επίσης επειδή η $\mathcal{A}$ είναι δεξιά συνεχής (βλ. π.χ. [31], Theorem 25), θα είναι και η $\widetilde{\mathcal{A}}$, και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3.3 για να εξασφαλίσουμε την ισχύ του (v).

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, παρατηρούμε ότι η σχέση εγκλεισμού $\mathcal{A}_t \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ συνεπάγεται το ότι η σ.δ. $\{N_t - t\theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P_\theta, \mathcal{A})$-martingale για κάθε $\theta \notin L_*$, κάτι που μαζί με το [34], Theorem 2.3.4, συνεπάγεται την ισχύ της συνθήκης (iii), η οποία είναι ισοδύναμη με την (iv).

Η ισοδυναμία $(v) \iff (vi)$ είναι άμεση συνέπεια του ισχυρισμού (iii) του Λήμματος 3.3.1, ενώ η συνεπαγωγή $(v) \Longrightarrow (vii)$ μπορεί να αποδειχθεί ομοίως με την $(d) \Longrightarrow (e)$ του [34], Theorem 2.3.4.

$(vii) \Longrightarrow (viii)$: Έστω ότι ισχύει το (vii). Για οποιοδήποτε σταθερό σύνολο $E \in \sigma(\widetilde{\mathcal{E}})$, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.4 και το Θεώρημα Fubini (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 9.12) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int \mu_\theta(E)P_\Theta(d\theta) = \int (\theta P_\theta \otimes \lambda)(E)P_\Theta(d\theta)\\ &= \int \Big[\int \theta P_\theta(E^y)\lambda(dy)\Big]P_\Theta(d\theta) = \int \Big[\int \theta P_\theta(E^y)P_\Theta(d\theta)\Big]\lambda(dy)\\ &= \int \Big[\int \Theta(P_\bullet(E^y)) \circ \Theta dP\Big]\lambda(dy) = \int \Big[\int \Theta \mathbb{E}_P[\chi_{E^y} \mid \Theta]dP\Big]\lambda(dy)\\ &= \int \mathbb{E}_P[\Theta\chi_{E^y}]\lambda(dy),\end{aligned}$$

όπου η ισχύς της έκτης ισότητας έπεται από το Λήμμα 2.3.2.

$(viii) \Longrightarrow (vi)$: Ας σταθεροποιήσουμε ένα σύνολο $A \times (s,t] \in \widetilde{\mathcal{E}}$. Τότε από το $(viii)$ έχουμε ότι

$$\mu(A \times (s,t]) = \int_{(s,t]} \mathbb{E}_P[\chi_A \Theta]\lambda(dy) = (t-s)\mathbb{E}_P[\chi_A\Theta],$$

κάτι που μαζί με το Lemma 2.1.6 από το [34] συνεπάγεται την ισχύ της συνθήκης

$$\int_A (N_t - N_s)dP = (t-s)\mathbb{E}_P[\chi_A\Theta] = \int_A (t-s)\Theta dP$$

ή ισοδύναμα της

$$\int_A (N_t - t\Theta)dP = \int_A (N_s - s\Theta)dP. \tag{3.21}$$

Επομένως, η $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m3).

Εφαρμόζοντας, τώρα, τη συνθήκη (3.21) για $s = 0$, προκύπτει ότι $A \in \sigma(\Theta)$ και ότι $\int_A N_t dP = \int_A t\Theta dP$ ή ισοδύναμα $\int_A \mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta]dP = \int_A t\Theta dP$. Κι επειδή το A επιλέχτηκε αυθαίρετα, οι δύο τελευταίοι ισχυρισμοί συνεπάγονται το ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η ισότητα $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = t\Theta$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta)$ – σ.β., και άρα η $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(P)$ αφού η τ.μ. $\Theta \in \mathcal{L}^1(P)$. Επομένως, η σ.δ. $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m2). Κι επειδή η ισχύς της (m1) για την $\{N_t - t\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προφανής, προκύπτει και αυτή του ισχυρισμού (vi), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση. Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (ii) και (vi) είναι γνωστή (βλ. π.χ. [18], σελ. 126-127). Η απόδειξή της, όμως, έχει γίνει με μεθόδους πολύ διαφορετικές από αυτές του παρόντος κεφαλαίου, αφού εδώ οι disintegrations κατέχουν ρόλο κλειδί σε αυτή.

Κεφάλαιο 4

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

Οι μ.α.δ. μπορεί να αποτελέσουν τόσο μια πηγή ενδιαφέροντων θεωρητικών προβλημάτων, αφού από τη μία είναι γενικεύσεις των μ.δ. Poisson, και από την άλλη σχετίζονται άμεσα με τις ανταλλάξιμες (*exchangeable*) σ.δ. (βλ. π.χ. [24]), καθώς επίσης κι ένα χρήσιμο εργαλείο για την προτυποποίηση προβλημάτων που εμφανίζονται στην καθημερινότητα, όπως αυτά στην αναλογιστική πρακτική (βλ. Grandell [18] για περισσότερες πληροφορίες).

Στην Ενότητα 4.1 εισάγουμε έναν νέο (τουλάχιστον σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε) ορισμό των μ.α.δ. (βλ. Ορισμό 4.1.2) που είναι σύμφωνος με αυτόν των μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ. Ένας τέτοιος ορισμός φαίνεται να είναι κατάλληλος, αφού εμπλέκεται σε αυτόν με τρόπο ρητό η δομική παράμετρος Θ, η οποία συνήθως κατέχει ουσιώδη ρόλο στη μελέτη των προβλημάτων της Θεωρίας Κινδύνου. Η σχέση των disintegrations με τις μ.α.δ. αποτελεί ένα ερώτημα που προκύπτει ως φυσική συνέπεια της εμπλοκής των δεσμευμένων κατανομών πιθανότητας στον ορισμό των εν λόγω σ.δ.. Προς αυτή την κατεύθυνση, δίνουμε μερικούς χαρακτηρισμούς των μ.α.δ. μέσω disintegrations (βλ. Πρόταση 4.1.11 και Πόρισμα 4.1.12). Μέσω αυτών των αποτελεσμάτων οι μ.α.δ. ανάγονται σε συνήθεις ανανεωτικές διαδικασίες κάτω από τα επιμέρους μέτρα πιθανότητας των disintegrations, καταδεικνύοντας με αυτόν τον τρόπο ότι ο Ορισμός 4.1.2 είναι ένας φυσικός ορισμός για τις μ.α.δ.. Βάσει των παραπάνω εξάγουμε ορισμένες ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ανταλλαξιμότητα της σχετιζόμενης σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων (βλ. Θεώρημα 4.2.7, (i)-(iii)). Ο δεύτερος ορισμός των μ.α.δ. που διερευνάται σε αυτό το κεφάλαιο οφείλεται στον Huang [24] (βλ. Definition 4.1.3).

Στην Ενότητα 4.2, αρχικά παραθέτουμε ορισμένους χαρακτηρισμούς της έννοιας της ανταλλαξιμότητας μέσω διαφόρων τύπων disintegrations, παρέχοντας ταυτόχρονα και μια επέκταση του Θεωρήματος de Finetti (βλ. Θεώρημα 4.2.3 και Πρόταση 4.2.5). Ως συνέπεια καθίσταται δυνατή η εξαγωγή μερικών ακόμη χαρακτηρισμών των μ.α.δ. μέσω των disintegrations και της έννοιας της ανταλλαξιμότητας (βλ. Θεώρημα 4.2.7, (*iii*)-(*vi*)). Το Θεώρημα 4.2.7 αποτελεί μεταξύ άλλων και μια λεπτομερή αναφορά για το πως σχετίζονται οι δύο ορισμοί των μ.α.δ. που διερευνούμε σε αυτό το κεφάλαιο, αποδεικνύοντας μάλιστα ότι αυτοί συμπίπτουν στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που συναντώνται στις εφαρμογές.

4.1 Χαρακτηρισμοί μέσω disintegrations

Μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, η Θ είναι μια Σ-Z-μετρήσιμη απεικόνιση από το Ω στο Ψ. Επί πλέον, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, ενώ χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\Omega_N = \emptyset$.

Επίσης, για να αποφύγουμε τις τετριμμένες καταστάσεις των άπειρων απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρόνο και μιας σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων που παραμένει στο μηδέν, *υποθέτουμε ακόμη και ως συνήθως ότι τόσο το ενδεχόμενο της* **έκρηξης** $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ *όσο και το ενδεχόμενο* $\{T_1 = \infty\}$, όπου οι $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι οι επαγόμενες σ.δ. άφιξης κι ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, *είναι ένα P-μηδενικό σύνολο.* Επομένως, και πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας και για λόγους ευκολίας, μπορούμε να θεωρήσουμε τόσο την έκρηξη όσο και το ενδεχόμενο $\{T_1 = \infty\}$ ίσα με το κενό σύνολο.

Παρατηρήσεις 4.1.1. **(a)** Έστω X μια Σ-T-μετρήσιμη απεικόνιση από το Ω στο Υ, έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ μια disintegration του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη Θ, κι έστω k ένας T-Z-μαρκοβιανός πυρήνας. Αν $k(\cdot,\theta)$ είναι η κατανομή πιθανότητας της X κάτω από το P_θ, όπου $\theta \in \Psi$, τότε η απεικόνιση $K(\Theta)$ είναι μια δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας της X δοθείσης της Θ, αφού εφαρμόζοντας τη συνθήκη (*ii*) του Λήμματος 2.3.1 για $A = X^{-1}(B)$, όπου $B \in T$, προκύπτει ότι η ισότητα $P_{X|\Theta}(B,\cdot) = K(\Theta)(B,\cdot)$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β..
(b) Αντιστρόφως, αν η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ είναι όπως στο (a), και αν υποθέσουμε ότι η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, προκύπτει ότι για κάθε δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\Theta)$ της X δοθείσης της Θ υπάρχει μια *ουσιωδώς μοναδική* $(P_\theta)_X$, όπου $\theta \in \Psi$, κατανομή πιθανότητας της X, τέτοια ώστε για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ να ισχύει $\mathbf{K}(\Theta)(B,\cdot) = (P_\bullet)_X(B) \circ \Theta$ $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β..

Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης ότι η disintegration είναι ουσιωδώς μοναδική. Όμως, το ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη Θ, σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.3.1 συνεπάγεται την ισχύ της συνθήκης (iii) του εν λόγω λήμματος, και άρα θέτοντας $A = X^{-1}(B)$ για $B \in \mathfrak{B}$ συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{K}(\Theta)(B, \cdot) = (P_\bullet)_X(B) \circ \Theta \quad P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β.. Τέλος, κι εφόσον δεν προκαλείται σύγχυση, θα μπορούμε να γράφουμε $\mathbf{K}(\theta)$ αντί για $(P_\theta)_X$, όπου $\theta \in \Psi$.

Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στη δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\Theta)$ *της Παρατήρησης 4.1.1, (b), θα θεωρούμε, χωρίς περαιτέρω σχολιασμό, ότι αυτή συνοδεύεται από τις σχετιζόμενες κατανομές* $\mathbf{K}(\theta)$, *όπου* $\theta \in \Psi$.

Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μια **P-ανανεωτική διαδικασία** με κατανομή πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\mathbf{K}(\theta_0)$, όπου $\theta_0 \in \Psi$ είναι μια παράμετρος (ή απλώς μια $(P, \mathbf{K}(\theta_0))$-RP), αν οι σχετιζόμενοι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων W_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανεξάρτητοι και κατανέμονται σύμφωνα με την κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta_0)$, κάτω από το μέτρο πιθανότητας P.

Ο ακόλουθος ορισμός μιας μ.α.δ., που βρίσκεται σε αντιστοιχία με τον ορισμό μιας μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ (βλ. και Ενότητα 2) φαίνεται να είναι ο φυσικός ορισμός για μια μ.α.δ., αφού μεταξύ άλλων εμπλέκεται με τρόπο σαφή σε αυτόν η *δομική παράμετρος* Θ.

Ορισμός 4.1.2. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μια **μεμειγμένη ανανεωτική διαδικασία** (*mixed renewal process*) επάνω στον (Ω, Σ, P) με παράμετρο την απεικόνιση Θ και δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\mathbf{K}(\Theta)$ (ή απλώς μια $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP), αν η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισχύει ότι

$$P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta) \quad P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $P_\Theta\big((0, \infty)\big) = 1$ και $\mathbf{K}(\Theta) = \mathbf{Exp}(\Theta)$ η $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ γίνεται μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ (βλ. Πρόταση 3.2.11).

Ο ακόλουθος ορισμός μιας μ.α.δ. προέρχεται από τον Huang [24], Section 1, Definition 3.

Ορισμός 4.1.3. Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μια **ν - μεμειγμένη ανανεωτική διαδικασία** (ή απλώς μια ν-MRP) σχετιζόμενη με την $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$, αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και για οποιαδήποτε $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \le w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_{\widetilde{y}}(W_k \le w_k)\nu(d\widetilde{y}),$$

όπου η $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ είναι μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στο Σ και ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $B(\widetilde{\Upsilon}) := \sigma(\{P_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$ ώστε για ν-σ.ό. $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι $P_{\widetilde{y}}$-ισόνομη.

Στον ορισμό του, ο Huang επιτρέπει στις τ.μ. N_t να παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}_0$, κάτι που στην περίπτωσή μας ισχύει αφού έχουμε υποθέσει ότι το ενδεχόμενο της έκρηξης είναι το κενό σύνολο.

Παρατήρηση 4.1.4. Αξίζει να σημειωθεί ότι στον ορισμό του Huang, η υπόθεση της $P_{\widetilde{y}}$-ισονομίας των W_n για ν-σ.ό. τα $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ δεν δηλώνεται ρητά. Η εν λόγω υπόθεση πρέπει, όμως, να συμπεριληφθεί εκεί, αφού είναι απαραίτητη για την ισχύ του πορίσματος στη σελ. 20 του [24], όπως προκύπτει και από το Παράδειγμα 5.2.9.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τη σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του Παραδείγματος 5.2.9, όπου η παραπάνω υπόθεση δεν ισχύει, καθώς και ότι στον ορισμό των μ.α.δ. κατά Huang δεν περιλαμβάνεται η εν λόγω υπόθεση. Επίσης παρατηρούμε ότι $q := P(Z < \infty) = 0 < 1$, όπου Z είναι το σ.β. -όριο της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όταν $t \to \infty$. Ας υπόθεσουμε, τώρα κι εφόσον κάτι τέτοιο έχει νόημα, την ισχύ πορίσματος στη σελ. 20 του [24]. Τότε, δοθέντος του ενδεχομένου $\{Z = \infty\}$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα (E) (βλ. [24], Definition 1 για τον σχετικό ορισμό), απ'όπου έπεται η ανταλλαξιμότητα της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, κάτι που, όμως, σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.2.9 είναι άτοπο.

Για το υπόλοιπο αυτής της ενότητας, η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ είναι μια disintegration του P επάνω στην P_Θ συνεπής με τη Θ και η $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι μια (μη κενή) οικογένεια Σ-T-μετρησίμων απεικονίσεων από το Ω στο Υ.

Λήμμα 4.1.5. *Αν η $\{k_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια $T - Z$-μαρκοβιανών πυρήνων, τότε για κάθε $i \in I$ και για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) $P_{X_i|\Theta}(B,\cdot) = K_i(\Theta)(B,\cdot) \quad P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta..$

(ii) $P_\theta(X_i^{-1}(B)) = k_i(B,\theta)$ *για* P_Θ*-σ.ό. τα* $\theta \in \Psi$.

Ιδιαιτέρως, οι ίδιες συνθήκες ισχύουν ακόμα και αν τα $K_i(\Theta)(B,\cdot)$ και $k_i(B,\theta)$ είναι ανεξάρτητα του i για κάθε $B \in T$ και για P_Θ-σ.ό. τα $\theta \in \Psi$.

Απόδειξη. Ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $i \in I$. Για κάθε $B \in T$ και $D \in Z$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\Theta^{-1}(D)} P_{X_i|\Theta}(B,\cdot)dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} K_i(\Theta)(B,\cdot)dP \\
\Longleftrightarrow\ &\int_{\Theta^{-1}(D)} \mathbb{E}_P[\chi_{X_i^{-1}(B)} \mid \Theta]dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} k_i(B,\cdot)\circ\Theta dP \\
\Longleftrightarrow\ &\int_D P_\theta\big(X_i^{-1}(B)\big)P_\Theta(d\theta) = \int_D k_i(B,\theta)P_\Theta(d\theta),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία αντλεί την ισχύ της από το Λήμμα 2.3.2. Επομένως, δείξαμε την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii). $\square$

Πρόταση 4.1.6. *Έστω ότι η $\{k_i\}_{i\in I}$ είναι όπως στο Λήμμα 4.1.5. Αν το I είναι αριθμήσιμο και η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε $i \in I$ και $B \in T$ η ισότητα $P_{X_i|\Theta}(B,\cdot) = K_i(\Theta)(B,\cdot)$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta)-\sigma.\beta.$.

(ii) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{A}_I \in Z$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{A}_I$, $B \in T$ και $i \in I$ να ισχύει η ισότητα $P_\theta(X_i^{-1}(B)) = k_i(B,\theta)$.

Ιδιαιτέρως, οι ίδιες συνθήκες ισχύουν ακόμα και αν οι μαρκοβιανοί πυρήνες k_i και $K_i(\Theta)$ είναι ανεξάρτητοι του i.

Απόδειξη. Αν ισχύει το (i) τότε από το Λήμμα 4.1.5 προκύπτει ότι για κάθε $i \in I$ και $B \in T$ ισχύει η συνθήκη

$$P_\theta(X_i^{-1}(B)) = k_i(B,\theta) \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ό. } \theta \in \Psi,$$

που ισοδυναμεί με το ότι

$$\forall\, i \in I \;\; \forall\, B \in T \;\; \exists\, \widetilde{A}_{I,i,B} \in Z_0 \;\; \forall\, \theta \notin \widetilde{A}_{I,i,B} \quad P_\theta(X_i^{-1}(B)) = k_i(B,\theta).$$

Κι επειδή το I είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να βρούμε για κάθε $B \in T$ ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{A}_{I,B} := \bigcup_{i\in I} \widetilde{A}_{I,i,B}$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, \theta \notin \widetilde{A}_{I,B} \;\; \forall\, i \in I \quad P_\theta(X_i^{-1}(B)) = k_i(B,\theta). \tag{4.1}$$

Έστω $\mathcal{G}_T$ ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της T. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{G}_T$ είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές. Τότε από την (4.1) έχουμε ότι

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, B_n \in \mathcal{G}_T \;\; \exists\, \widetilde{A}_{I,n} := \widetilde{A}_{I,B_n} \in Z_0 \;\; \forall\, \theta \notin \widetilde{A}_{I,n} \quad P_\theta(X_i^{-1}(B_n)) = k_i(B_n,\theta).$$

Θέτουμε $\widetilde{A}_I := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_{I,k} \in Z_0$ και

$$\mathcal{D} := \{B \in T : \; P_\theta(X_i^{-1}(B)) = k_i(B,\theta) \;\; \forall\, \theta \notin \widetilde{A}_I\}.$$

Τότε $\mathcal{G}_T \subseteq \mathcal{D}$, ενώ μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin.

Επειδή, όμως, ο $\mathcal{G}_T$ είναι ένας γεννήτορας της T κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης προκύπτει ότι $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\mathcal{G}_T) = T$, οπότε $\mathcal{D} = T$. Επομένως, δείξαμε την ισχύ του (ii).

Η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2.3.2. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποτελεί μια επέκταση του Λήμματος 3.2.2 και αποδεικνύεται ομοίως με αυτό.

Λήμμα 4.1.7. *Έστω I αριθμήσιμο σύνολο και ότι η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Τότε, η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $A_I \in Z$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin A_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη.*

Πόρισμα 4.1.8. *Έστω $\mathcal{F}$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ και $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μια υποαλγεβρική κ.δ.π. για το P επάνω στο $R := P \mid \mathcal{F}$. Αν το I είναι αριθμήσιμο και η T αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη ως προς την $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα R-μηδενικό σύνολο $A_I \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin A_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_ω-ανεξάρτητη.*

Απόδειξη. Θέτοντας $(\Psi, Z) := (\Omega, \mathcal{F})$ και $\Theta := id_\Omega$ προκύπτει ότι η $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο $P_\Theta = R$ συνεπής με τη Θ. Τότε, η ζητούμενη ισοδυναμία είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.1.7.

Πρόταση 4.1.9. *Έστω I αριθμήσιμο σύνολο και ότι η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ισόνομη αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{A}'_I \in Z$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{A}'_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_θ-ισόνομη.*

(ii) *Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{A}_I \in Z$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{A}_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη και ισόνομη.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός (i) αποδεικνύεται ομοίως με την Παρατήρηση 3.2.6, ενώ ο (ii) αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.1.7 και του ισχυρισμού (i). □

Πόρισμα 4.1.10. *Έστω $\mathcal{F}$, $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ και R όπως στο Πόρισμα 4.1.8. Αν το I είναι αριθμήσιμο και η T αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη ως προς την $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα R-μηδενικό σύνολο $\widehat{A}_I \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin \widehat{A}_I$ η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P_ω-ανεξάρτητη και ισόνομη.*

Ο ακόλουθος χαρακτηρισμός για τις μ.α.δ. γενικεύει τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό των μ.δ. Poisson (βλ. Πρόταση 3.2.10).

Πρόταση 4.1.11. *Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $B_* \in Z$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin B_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-RP.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP, δηλαδή έστω ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανέξαρτητη και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta)\ P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β.. Εφαρμόζοντας, τώρα, το Λήμμα 4.1.7 και την Πρόταση 4.1.6, ισοδύναμα έχουμε ότι υπάρχουν δύο P_Θ-μηδενικά σύνολα $B_{\mathbb{N}}$ και $\widetilde{B}_{\mathbb{N}}$ στη σ-άλγεβρα Z τέτοια ώστε για κάθε $\theta \notin B_* := \widetilde{B}_{\mathbb{N}} \cup B_{\mathbb{N}}$ η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη και να ισχύει ότι $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αντίστοιχα, κάτι που ισοδυναμεί με το ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-RP. $\square$

Πόρισμα 4.1.12. *Έστω $\mathcal{F}$, $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ και R όπως στο Πόρισμα 4.1.8. Τότε η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανέξαρτητη και ισόνομα κατανεμημένη ως προς την $\mathcal{F}$ με δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(id_\Omega) = P_{W_n|\mathcal{F}}$ $P \mid \mathcal{F}$-σ.β. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν και μόνο αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $(P, \mathbf{K}(\mathrm{id}_\Omega))$-MRP αν και μόνο αν υπάρχει ένα R-μηδενικό σύνολο $B_* \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin B_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια $(P_\omega, \mathbf{K}(\omega))$-RP.*

4.2 Μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες και ανταλλαξιμότητα

Μια άπειρη οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ από Σ-T-μετρήσιμες απεικονίσεις από το Ω στο Υ ονομάζεται **ανταλλάξιμη** κάτω από το P ή απλώς P-**ανταλλάξιμη**, αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ ισχύει η ισότητα

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} X_{i_k}^{-1}(B_k)\Big) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} X_{j_k}^{-1}(B_k)\Big) \tag{4.2}$$

για οποιαδήποτε διαφορετικά ανά δύο $i_1, \ldots, i_r \in I$ και διαφορετικά ανά δύο $j_1, \ldots, j_r \in I$, και για οποιαδήποτε $B_k \in T$ για κάθε $k \leq r$ (βλ. π.χ. [17], 459C).

Παρατήρηση 4.2.1. Μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η ανταλλαξιμότητα της $\{X_i\}_{i\in I}$ ισοδυναμεί με το ότι

$$P_{(X_{i_1},\ldots,X_{i_r})} = P_{(X_{j_1},\ldots,X_{j_r})} \tag{4.3}$$

για οποιαδήποτε $r \in \mathbb{N}$, διαφορετικά ανά δύο $i_1, \ldots, i_r \in I$ και διαφορετικά ανά δύο $j_1, \ldots, j_r \in I$.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $\mathcal{F}$ μια σ-υποάλγεβρα της Σ κι έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μια μη κενή οικογένεια Σ-T-μετρήσιμων απεικονίσεων από το Ω στο Υ, τέτοια ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη ως προς την $\mathcal{F}$. Αν η σ-άλγεβρα T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το P_{X_i} είναι τέλειο για κάθε $i \in I$, τότε υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας M επάνω στην $T \otimes \mathcal{F}$ με περιθώριο μέτρο πιθανότητας $R := P \mid \mathcal{F}$ επάνω στην $\mathcal{F}$, τέτοιο ώστε $M := P \circ (X_i \times \mathrm{id}_\Omega)^{-1}$ για κάθε $i \in I$, καθώς και μια κ.δ.π.-γινόμενο $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ επάνω στην T για την M ως προς R, τέτοια ώστε*

(i) *για κάθε* $B \in T$ *και* $i \in I$ *η απεικόνιση* $Q_\bullet(B) : \Omega \longrightarrow [0,1]$ *να ισούται* R-*σ.β. με την* $P(X_i^{-1}(B) \mid \mathcal{F})(\cdot)$,

(ii) $\int_F Q_\omega^I(H)R(d\omega) = P(F \cap X^{-1}(H))$ *για κάθε* $F \in \mathcal{F}$ *και* $H \in T_I$, *όπου με* Q_ω^I *συμβολίζουμε το* I-*πλο μέτρο γινόμενο* $\otimes_{i\in I} P_i$ *όλων των* $P_i := Q_\omega$ *όπου* $i \in I$, *ενώ η* $X : \Omega \longrightarrow \Upsilon^I$ *ορίζεται μέσω της σχέσης* $X(\omega) = \big(X_i(\omega)\big)_{i\in I}$ *για κάθε* $\omega \in \Omega$.

Απόδειξη. Αρχικά σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $i \in I$.

(a) Η συνάρτηση $X_i \times id_\Omega$ από το Ω στο $\Upsilon \times \Omega$ που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$(X_i \times id_\Omega)(\omega) := (X_i(\omega), \omega) \quad \text{για κάθε} \;\; \omega \in \Omega$$

είναι Σ-$T \otimes \mathcal{F}$-μετρήσιμη, αφού $F \cap X_i^{-1}(B) \in \Sigma$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$. Επομένως, το $M_i := P \circ (X_i \times id_\Omega)^{-1}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $T \otimes \mathcal{F}$.

Κι επειδή όλες οι X_i είναι P-υπό συνθήκη ισόνομα κατανεμημένες ως προς την $\mathcal{F}$, κάθε M_i θα είναι ανεξάρτητο του i, και άρα μπορούμε να θέσουμε όπου $M := M_{i^*}$ (πράγματι, η P-υπό συνθήκη ισονομία της $\{X_i\}_{i\in I}$ ως προς την $\mathcal{F}$ ισοδυναμεί με το ότι $P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P(F \cap X_{i^*}^{-1}(B))$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$, οπότε εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης εξασφαλίζουμε ότι $M = M_{i^*}$).

(b) Υπάρχει μια κ.δ.π.-γινόμενο $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ επάνω στην T για την M ως προς $R = P \mid \mathcal{F}$, τέτοια ώστε για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$

$$Q_\bullet(B) = P(X_i^{-1}(B) \mid \mathcal{F})(\cdot) \quad R - \text{σ.β.}.$$

Πράγματι, επειδή εξ' υποθέσεως κάθε περιθώριο μέτρο πιθανότητας P_{X_i} του M επάνω στην T είναι τέλειο και η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, από την Παρατήρηση 2.1.3 προκύπτει ότι υπάρχει μια κ.δ.π.-γινόμενο $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ επάνω στην T για την M ως προς R.

Κι επειδή η $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ικανοποιεί την (D2), έχουμε ότι

$$\int_F Q_\omega(B)R(d\omega) = M(B \times F) = P(F \cap X_i^{-1}(B)) = \int_F P(X_i^{-1}(B) \mid \mathcal{F})(\omega)R(d\omega)$$

για κάθε $B \in T$ και $F \in \mathcal{F}$, κάτι που αποδεικνύει το (b), και άρα το (i).

(c) Ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $F \in \mathcal{F}$ και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{C}$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων του Υ^I, δηλαδή όλων των υποσυνόλων του Υ^I της μορφής $C = \{y : y \in \Upsilon^I,\ y_j \in C_j \text{ για κάθε } j \in J\}$, όπου το $J \subseteq \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο και $C_j \in T$ για κάθε $j \in J$. Εφαρμόζοντας για ένα τέτοιο σύνολο τη συνθήκη (i) παίρνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} P(F \cap X^{-1}(C)) &= P\Big(F \cap \Big(\bigcap_{j\in J} X_j^{-1}(C_j)\Big)\Big) = \int P\Big(F \cap \Big(\bigcap_{j\in J} X_j^{-1}(C_j)\Big) \mid \mathcal{F}\Big)dR \\ &= \int_F \prod_{j\in J} P(X_j^{-1}(C_j) \mid \mathcal{F})dR = \int_F Q_\omega^I(C)R(d\omega). \end{aligned}$$

Κι επειδή το F είναι αυθαίρετο, η ισότητα

$$P(F \cap X^{-1}(C)) = \int_F Q^I_\omega(C) R(d\omega) \tag{4.4}$$

θα ισχύει για κάθε $F \in \mathcal{F}$.

Συνεπώς αν συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ την οικογένεια όλων των $H \in T_I$ που ικανοποιούν την (4.4) προκύπτει ότι $\mathcal{C} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}_1$. Αλλά μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ είναι μια κλάση Dynkin. Όμως, παρατηρούμε επίσης ότι η $\sigma(\mathcal{C}) = T_I$ και ότι η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για να συμπεράνουμε ότι $\widetilde{\mathcal{D}}_1 \supseteq \sigma(\mathcal{C}) = T_I$, απ'όπου έπεται η ισχύς της συνθήκης (ii). $\square$

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μια άπειρη οικογένεια Σ-T-μετρησίμων απεικονίσεων από το Ω στο Υ. Ας θεωρήσουμε ακόμη τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) Η $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-ανταλλάξιμη.

(ii) Υπάρχει μια σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ τέτοια ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη ως προς την $\mathcal{F}$.

(iii) Υπάρχει μια σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ και μια οικογένεια $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στην T τέτοιες ώστε η απεικόνιση $\omega \longmapsto Q_\omega(B)$ να είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$ και

$$\int_F Q^I_\omega(H) R(d\omega) = P(F \cap X^{-1}(H))$$

για κάθε $H \in T_I$ και $F \in \mathcal{F}$, όπου $R := P \mid \mathcal{F}$ και τα Q^I_ω, X είναι όπως στο Λήμμα 4.2.2.

Τότε $(i) \iff (ii)$ και $(iii) \Longrightarrow (i)$. Αν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις συνθήκες (i) έως (iii), τότε όλα τα μέτρα πιθανότητας P_{X_i} είναι ίσα.
Επί πλέον, αν το P_{X_i} είναι τέλειο για κάθε $i \in I$ και η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε οι ισχυρισμοί (i) έως (iii) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν το P είναι τέλειο τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε P_{X_i} (βλ. π.χ. [17], Proposition 451E(a)). Επομένως, η ισοδυναμία $(i) \iff (ii)$ έπεται από το [17], Theorem 459B.

Η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεση. Προφανώς, αν ικανοποιείται ο ισχυρισμός (i) ή ισοδύναμα ο (ii), τότε όλα τα μέτρα πιθανότητας P_{X_i} είναι ίσα. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που ικανοποιείται το (iii).

Αν το κάθε P_{X_i} είναι τέλειο και η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε η συνεπαγωγή $(ii) \Longrightarrow (iii)$ αντλεί την ισχύ της από το Λήμμα 4.2.2. Επομένως, δείξαμε ότι οι ισχυρισμοί (i) έως (iii) είναι ισοδύναμοι. □

Παρατηρήσεις 4.2.4. **(a)** Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε, το γενικότερο αποτέλεσμα που σχετίζεται με το Θεώρημα de Finetti είναι το Theorem 1.1 του [25], σύμφωνα με το οποίο για κάθε άπειρη ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. που παίρνουν τιμές σε έναν τυπικό χώρο Borel Υ οι συνθήκες (i) και (iii) του Θεωρήματος 4.2.3 με $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αντί για $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι ισοδύναμες. Ως γνωστόν, κάθε πολωνικός χώρος είναι ένας τυπικός χώρος Borel. Ιδιαιτέρως, οι $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι τέτοιοι χώροι.
(b) Υπάρχουν μ.χ. (Υ, T) που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.3, δηλαδή ότι η T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και κάθε P_{X_i} είναι τέλειο, που, όμως, δεν είναι τυπικοί χώροι Borel. Πράγματι, ως γνωστόν κάθε μη αριθμήσιμος αναλυτικός χώρος Hausdorff (δηλαδή κάθε μη κενός τοπολογικός χώρος Hausdorff, που είναι μια συνεχής εικόνα του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, βλ. π.χ. [17], Definition 423A) έχει ένα αναλυτικό υποσύνολο που δεν είναι σύνολο Borel (βλ. π.χ. [17], Proposition 423L). Είναι επίσης γνωστό ότι για κάθε αναλυτικό χώρο Hausdorff Υ η Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη (βλ. π.χ. [17], 423X(d)), και ότι κάθε Borel μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι πάντα εσωτερικά κανονικό ως προς τα συμπαγή σύνολα (βλ. [23], Chapter IV, Theorem 1, σελ. 195), και άρα είναι τέλειο (βλ. π.χ. [17], Proposition 451C). Επομένως, για κάθε μη αριθμήσιμο αναλυτικό χώρο Hausdorff μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.3, αλλά που δεν είναι ένας τυπικός χώρος Borel.
(c) Από τις Παρατηρήσεις (a) και (b) έπεται ότι το Θεώρημα 4.2.3 αποτελεί μια περαιτέρω γενίκευση της μέχρι τώρα γενικότερης γνωστής επέκτασης του Θεωρήματος de Finneti.
(d) Περιορίζοντας την προσοχή μας σε μ.χ. (Υ, T) που ικανοποιούν την υπόθεση της αριθμήσιμα παραγόμενης T, όπως στο Θεώρημα 4.2.3, χάνουμε κάτι σε γενικότητα. Για παράδειγμα ένας συμπαγής χώρος Hausdorff δεν ικανοποιεί την εν λόγω υπόθεση για την T, ενώ είναι γνωστό ότι μια επέκταση του Θεωρήματος de Finetti ισχύει για αριθμήσιμα γινόμενα συμπαγών χώρων Hausdorff (βλ. [22] ή [10]). Μια άλλη γενίκευση του Θεωρήματος de Finetti αποδεικνύεται στο [17], Theorem 459G για μη αριθμήσιμα γινόμενα χώρων Hausdorff. Αλλά όλα τα παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις χώρων Ω που είναι γινόμενα τοπολογικών χώρων, ενώ το Θεώρημα 4.2.3 έχει το πλεονέκτημα ο χώρος Ω να είναι απαλλαγμένος από κάθε είδους τοπολογικές υποθέσεις, καθώς και από την υπόθεση να είναι γινόμενο τοπολογικών χώρων.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα επεκτείνει ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Olshen (βλ. [29], Theorem (3)) και αφορά μια γενίκευση του Θεωρήματος de Finetti.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μια P-ανταλλάξιμη άπειρη ακολουθία Σ-T-μετρησίμων απεικονίσεων από το Ω στο Υ. Αν υποθέσουμε ότι η σ-άλγεβρα T είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το μέτρο πιθανότητας P_{X_i} είναι τέλειο για κάθε $i \in I$, τότε υπάρχει μια Σ-$\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη απεικόνιση Θ από το Ω στο $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη δοθείσης της Θ.*

Απόδειξη. **(a)** Επειδή η $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-ανταλλάξιμη, η T αριθμήσιμα παραγόμενη και όλα τα P_{X_i} τέλεια, από το Θεώρημα 4.2.3 προκύπτει ότι υπάρχει μια σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ και μια οικογένεια $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στην T έτσι ώστε η απεικόνιση $\omega \longmapsto Q_\omega(B)$ να είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$, και

$$\int_F Q^I_\omega(H)R(d\omega) = P(F \cap X^{-1}(H))$$

για κάθε $H \in T_I$ και $F \in \mathcal{F}$, όπου $R := P \mid \mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμα παραγόμενη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{A}$ της $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε η $Q_\bullet(B)$ να είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$ (λ.χ. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $\mathcal{A} := \sigma(\{[Q_\bullet(B)]^{-1}(E) : E \in \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}\})$ όπου $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ είναι ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathfrak{B}$). Επειδή, όμως, η $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, υπάρχει μια απεικόνιση $\widetilde{\Theta} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\widetilde{\Theta})$ (λ.χ. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $\widetilde{\Theta}$ είναι το *συναρτησιοειδές του Marczewski* επάνω στο Ω, βλ. π.χ. και [17], 343E). Επομένως, η $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ είναι μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στην T που ικανοποιεί τον ισχυρισμό (iii) του Θεωρήματος 4.2.3 για την $\mathcal{A}$ αντί της $\mathcal{F}$, και άρα λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 4.2.3 έχουμε ότι η $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{A} = \sigma(\widetilde{\Theta})$.
(b) Υπάρχει μια Σ-$\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη απεικόνιση Θ από το Ω στο $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι Q-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη δοθείσης της $\widetilde{\Theta}$.

Πράγματι, επειδή οι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^d$ είναι τυπικοί χώροι Borel της ίδιας πληθικότητας, υπάρχει ένας Borel ισομορφισμός g από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^d$ (βλ. π.χ. [17], Corollary 424D(a)). Τότε, θέτοντας $\Theta := g \circ \widetilde{\Theta}$, προκύπτει ότι η Θ είναι μια Σ-$\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη απεικόνιση από το Ω στο $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $\sigma(\Theta) = \sigma(\widetilde{\Theta})$. Επομένως, το (b) έπεται από το (a), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 4.2.6 (Olshen, R. [29], Theorem (3)). *Αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια P - ανταλλάξιμη ακολουθία μετρήσιμων απεικονίσεων από το Ω σε έναν πλήρη, διαχωρίσιμο, μετρικό χώρο, τότε υπάρχει μια τ.μ. Θ επάνω στο Ω τέτοια ώστε η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη δοθείσης της Θ.*

Θεώρημα 4.2.7. *Έστω οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:*

(i) *Υπάρχει μια* Σ-Z-*μετρήσιμη απεικόνιση* Θ *από το* Ω *στο* Ψ *τέτοια ώστε η* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *να είναι μια* $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-*MRP.*

(ii) *Υπάρχουν μια* Σ-Z-*μετρήσιμη απεικόνιση* Θ *από το* Ω *στο* Ψ, *μια disintegration* $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ *του* P *επάνω στο* P_Θ *συνεπής με τη* Θ, *μια οικογένεια* $\{\mathbf{K}(\theta)\}_{\theta\in\Psi}$ *μέτρων πιθανότητας επάνω στη* $\mathfrak{B}$ *με τη συνάρτηση* $\theta \longmapsto \mathbf{K}(\theta)(B)$ *να είναι* Z-*μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό* $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, *κι ένα* P_Θ-*μηδενικό σύνολο* $B_* \in Z$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\theta \notin B_*$ *η* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *να είναι μια* $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-*RP.*

(iii) *Η σ.δ.* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι* P-*ανταλλάξιμη.*

(iv) *Υπάρχουν μια* σ-*υποάλγεβρα* $\mathcal{F}$ *της* Σ *και μια οικογένεια* $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *μέτρων πιθανότητας επάνω στη* $\mathfrak{B}$ *τέτοιες ώστε η απεικόνιση* $\omega \longmapsto Q_\omega(B)$ *να είναι* $\mathcal{F}$-*μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό* $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ *και*

$$\int_F Q_\omega^{\mathbb{N}}(H)R(d\omega) = P(F \cap W^{-1}(H))$$

για κάθε $H \in \mathfrak{B}_{\mathbb{N}}$ *και* $F \in \mathcal{F}$, *όπου* $R := P \mid \mathcal{F}$ *και* $W := (W_1, \ldots, W_n, \ldots)$, *και όπου με* $Q_\omega^{\mathbb{N}}$ *συμβολίζεται η* $\mathbb{N}$-*πλη πιθανότητα γινόμενο* $\otimes_{n\in\mathbb{N}} P_n$ *όλων των* $P_n := Q_\omega$ *όπου* $n \in \mathbb{N}$.

(v) *Υπάρχουν μια* σ-*υποάλγεβρα* $\mathcal{F}$ *της* Σ, *μια υποαλγεβρική κ.δ.π.* $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *για το* P *επάνω στο* $R := P \mid \mathcal{F}$, *μια οικογένεια* $\{\mathbf{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *μέτρων πιθανότητας επάνω στη* $\mathfrak{B}$ *με τη συνάρτηση* $\omega \longmapsto \mathbf{K}(\omega)(B)$ *να είναι* $\mathcal{F}$-*μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό* $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, *και ένα* R-*μηδενικό σύνολο* $B_{**} \in \mathcal{F}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\omega \notin B_{**}$ *η* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *να είναι μια* $(S_\omega, \mathbf{K}(\omega))$-*RP.*

(vi) *Υπάρχουν ένα σύνολο* $\widetilde{Y}$, *μια οικογένεια* $\{S_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ *μέτρων πιθανότητας επάνω στη* Σ *κι ένα μέτρο πιθανότητας* ν *επάνω στη* $B(\widetilde{Y}) := \sigma(\{S_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$ *τέτοια ώστε η* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *να είναι μια* ν-*MRP σχετιζόμενη με την* $\{S_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\Upsilon}$.

(vii) *Υπάρχουν ένα σύνολο* $\widetilde{Y}$, *μια οικογένεια* $\{S_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ *μέτρων πιθανότητας επάνω στη* Σ *κι ένα μέτρο πιθανότητας* ν *επάνω στη* $B(\widetilde{Y}) := \sigma(\{S_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$ *που ικανοποιούν για κάθε* $r \in \mathbb{N}$ *και* $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}$ *τη συνθήκη*

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \le w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} S_{\widetilde{y}}(W_k \le w_k)\nu(d\widetilde{y}).$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\begin{array}{ccccccc} (i) & \Longleftarrow & (ii) & \Longrightarrow & (v) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ (iii) & \Longleftrightarrow & (iv) & \Longleftarrow & (vi) & \Longrightarrow & (vii) \end{array}$$

Επί πλέον, αν το P είναι τέλειο και η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε $(iv) \Longleftrightarrow (v)$. Αν ακόμη η Z είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε $(i) \Longleftrightarrow (ii)$. Αν $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ για $d \in \mathbb{N}$ τότε $(i) \Longleftrightarrow (iii)$. Αν το P είναι τέλειο, η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$, τότε τα (i) έως (vi) είναι όλα ισοδύναμα.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι οι συνεπαγωγές $(i) \Longrightarrow (iii)$, $(vi) \Longrightarrow (iii)$ και $(vi) \Longrightarrow (vii)$ είναι προφανείς. Η συνεπαγωγή $(ii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.1.11, ενώ η ισοδυναμία των (iii) και (iv) προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.2.3, αφού για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ κάθε μέτρο πιθανότητας P_{W_n} επάνω στη $\mathfrak{B}$ είναι τέλειο και η $\mathfrak{B}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Από το γεγονός αυτό και τη συνεπαγωγή $(vi) \Longrightarrow (iii)$ προκύπτει η συνεπαγωγή $(vi) \Longrightarrow (iv)$.

$(ii) \Longrightarrow (iv)$: Αν ισχύει το (ii), τότε προφανώς η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P_θ-ανταλλάξιμη για κάθε $\theta \notin B_*$, κάτι που μαζί με την ιδιότητα (d2) συνεπάγεται και την P-ανταλλαξιμότητά της, οπότε προκύπτει η ισχύς του (iii) ή ισοδύναμα του (iv).

$(ii) \Longrightarrow (v)$: Έστω ότι ισχύει το (ii). Θέτοντας $S_\omega(E) := P_\theta(E)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, $E \in \Sigma$ και $\theta = \Theta(\omega)$, εύκολα παίρνουμε ότι η $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ είναι μια υποαλγεβρική κ.δ.π. για το P επάνω στο $R := P \mid \sigma(\Theta)$ τέτοια ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια $(S_\omega, \mathbf{K}(\omega))$-RP για κάθε $\omega \notin B_{**} := \Theta^{-1}(B_*)$, όπου $\mathbf{K}(\omega) := \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\Theta(\omega) = \theta \notin B_* \in Z$. Επειδή προφανώς το B_{**} είναι ένα R-μηδενικό σύνολο, προκύπτει ότι οι $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, $\mathcal{F} := \sigma(\Theta)$ και $\{\mathbf{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ ικανοποιούν το ισχυρισμό (v).

$(v) \Longrightarrow (vi)$: Έστω ότι ισχύει το (v) κι έστω $\mathcal{F}$, $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ και R σαν και αυτά του (v). Θέτουμε $\widetilde{Y} := \Omega$, $\{S_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}} := \{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ και $B(\widetilde{Y}) := \sigma(\{S_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$. Τότε $B(\widetilde{Y}) \subseteq \mathcal{F}$ κι επομένως μπορεί να οριστεί το μέτρο πιθανότητας $\nu := R \mid B(\widetilde{Y})$. Κι επειδή από το (v) η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι S_ω-ανεξάρτητη και ισόνομα κατανεμημένη για R-σ.ό. τα $\omega \in \Omega$, θα είναι και $S_{\widetilde{y}}$-ανεξάρτητη και ισόνομα κατανεμημένη για ν-σ.ό. τα $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$, κάτι που σε συνδυασμό με την ιδιότητα (sf2) συνεπάγεται το ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ν-MRP σχετιζομένη με την $\{S_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\Upsilon}$ κι επομένως τον ισχυρισμό (vi).

Επί πλέον, αν το P είναι τέλειο και η Σ αριθμήσιμα παραγόμενη, εξασφαλίζουμε την ισχύ της συνεπαγωγής $(iv) \Longrightarrow (v)$: Πράγματι, από το Θεώρημα 4.2.3 έχουμε ότι ο ισχυρισμός (iv) ισοδυναμεί με το ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη ως προς την $\mathcal{F}$. Όμως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.3 υπάρχει μια υποαλγεβρική κ.δ.π. $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ για το P επάνω στο $R := P \mid \mathcal{F}$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.1.10 για να εξασφαλίσουμε το (v).

Αν ακόμη η Z είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και ισχύει το (i), τότε βάσει της Παρατήρησης 2.1.3 θα υπάρχει μια disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη Θ, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.11, θα υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $B_* \in Z$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin B_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-RP. Άρα δείξαμε ότι το (i) συνεπάγεται το (ii).

Αν η $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ και ισχύει το (iii), τότε από την Πρόταση 4.2.5 θα υπάρχει μια Σ-$\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη απεικόνιση Θ από το Ω στο $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομα κατανεμημένη δοθείσης της Θ. Επομένως, δείξαμε το (i). Συνεπώς, υποθέτοντας ότι το P είναι τέλειο, η Σ αριθμήσιμα παραγόμενη και $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ εξασφαλίζουμε την ισοδυναμία όλων των ισχυρισμών (i) έως (vi), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πιο σημαντικές εφαρμογές στη Θεωρία Πιθανοτήτων συνεχίζουν να έχουν τις ρίζες τους σε τυπικούς χώρους Borel, και άρα σε χώρους που πάντα ικανοποιούν τις σχετικές με τα P, Σ και (Ψ, Z) υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος.

Ερώτημα 4.2.8. Όμως, παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα αν τα Θεωρήματα 4.2.3 και 4.2.7 μπορούν να επεκταθούν απαλοίφοντας τις υποθέσεις για αριθμήσιμα παραγόμενες σ - άλγεβρες T και Σ, αντίστοιχα;

Κεφάλαιο 5

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνεται μια νέα κατασκευή μέσω disintegrations για τις μ.α.δ. (βλ. Θεώρημα 5.1.1), η οποία συνιστά ταυτόχρονα κι ένα αποτέλεσμα ύπαρξής τους. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ως μία ακόμη συνέπεια των χαρακτηρισμών του προηγούμενου κεφαλαίου, κι επιτρεπεί την κατασκευή συγκεκριμένων παραδειγμάτων μ.α.δ., καθώς και τον υπολογισμό των αντίστοιχων επιμέρους μέτρων πιθανότητας των disintegrations (βλ. Ενότητα 5.2).

5.1 Η Κατασκευή

Σε αυτή την ενότητα και μέσω μιας εφαρμογής τόσο της Πρότασης 4.1.11 όσο και του Θεωρήματος 4.2.7, αποδεικνύεται η ύπαρξη $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP με προκαθορισμένες κατανομές πιθανότητας για τους σχετιζόμενους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων, καθώς και για την παράμετρο Θ.

Μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, και για λόγους απλοποίησης, θέτουμε $\Upsilon := (0, \infty)$, $\widetilde{\Omega} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Omega := \widetilde{\Omega} \times \Psi$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ *και* $\Sigma := \widetilde{\Sigma} \otimes Z$.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας επάνω στη Z, και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Psi$ έστω $Q_n(\theta)$ μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}$ με $Q_n(\theta) = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου για οποιοδήποτε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ η συνάρτηση $\mathbf{K}(\cdot)(B) : \Psi \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Z-μετρήσιμη και $\mathbf{K}(\theta)(\Upsilon) = 1$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει μια απεικόνιση Θ από το Ω στο Ψ, μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta \in \Psi}$ επάνω στη Σ, και μοναδικό μέτρο πιθανότητας P επάνω στη Σ ώστε $P_\Theta = \mu$ και η*

$\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ να είναι μια disintegration του P επάνω στο μ συνεπής με τη Θ, καθώς και μια $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της οποίας ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta) \ \ \text{για κάθε} \ \ n\in\mathbb{N}$$

και για $\theta\in\Psi$ σταθερό.

(ii) Υπάρχει πάντα μια οικογένεια $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ και μία ν-MRP $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σχετιζόμενη με την $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, όπου $\nu = P \mid B(\Omega)$, η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της οποίας ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(S_\omega)_{W_n} = Q_n(\Theta(\omega)) \ \ \text{για κάθε} \ \ n\in\mathbb{N}$$

και για $\omega\in\Omega$ σταθερό.

Απόδειξη. (i): Ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $\theta\in\Psi$. Αν $Q_n(\theta) = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}_\theta := \otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)$ επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$, καθώς και μια ακολουθία $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες τ.μ. επάνω στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ τέτοια ώστε

$$\widetilde{W}_n(\omega) = \omega_n = \pi_n(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad \omega\in\widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n\in\mathbb{N},$$

όπου π_n είναι η κανονική προβολή από το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ επάνω στο $\mathbb{R}$, που ικανοποιεί την

$$(\widetilde{P}_\theta)_{\widetilde{W}_n} = Q_n(\theta) \ \ \text{για κάθε} \ \ n\in\mathbb{N}.$$

Κι επειδή εξ′ υποθέσεως, και για οποιοδήποτε σταθερό $B\in\mathfrak{B}$ κάθε συνάρτηση $Q_n(\cdot)(B)$ είναι Z-μετρήσιμη, βάσει ένος επιχειρήματος μονότονης κλάσης προκύπτει ότι το ίδιο θα ισχύει και για τη συνάρτηση $\widetilde{P}_\bullet(E)$ για σταθερό $E\in\widetilde{\Sigma}$: Πράγματι, ας συμβολίσουμε επίσης με $\widetilde{\mathcal{C}}$ και $\widetilde{\mathcal{D}}$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων στο $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}}$ και την οικογένεια όλων $E\in\widetilde{\Sigma}$ ώστε η $\widetilde{P}_\bullet(E)$ να είναι μια Z-μετρήσιμη συνάρτηση, αντίστοιχα. Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι η $\widetilde{\mathcal{D}}$ είναι μια κλάση Dynkin. Κι επειδή η $\widetilde{\mathcal{C}}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και προφανώς $\widetilde{\mathcal{C}}\subseteq\widetilde{\mathcal{D}}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για να συμπεράνουμε ότι $\widetilde{\Sigma} = \sigma(\widetilde{\mathcal{C}})\subseteq\widetilde{\mathcal{D}}$, και άρα ότι $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\mathcal{D}}$.

Μπορούμε, τώρα, να ορίσουμε τη συνολοσυνάρτηση $\widetilde{P}:\widetilde{\Sigma}\longrightarrow\mathbb{R}$ μέσω της σχέσης

$$\widetilde{P}(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E)\mu(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad E\in\widetilde{\Sigma}.$$

Τότε το $\widetilde{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$ και η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ είναι μια disintegration του $\widetilde{P}$ επάνω στο μ. Θέτουμε $P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\mu(d\theta)$ για κάθε $E\in\Sigma$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ τέτοιο ώστε η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ να είναι μια κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$ για το P ως προς το μ.

Για κάθε $\theta \in \Psi$ ας θέσουμε $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$, όπου δ_θ είναι το μέτρο πιθανότητας του Dirac επάνω στη Z, και ας ορίσουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ την τ.μ. $W_n := \widetilde{W}_n \circ \pi_{\widetilde{\Omega}}$, όπου $\pi_{\widetilde{\Omega}}$ είναι η κανονική προβολή από το Ω επάνω στο $\widetilde{\Omega}$. Προφανώς, κάθε P_θ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.2.1 για να συμπεράνουμε ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο μ συνεπής με την π_Ψ, όπου π_Ψ είναι η κανονική προβολή από το Ω επάνω στο Ψ. Επί πλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $\theta \in \Psi$ η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη και $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, αν θέσουμε $\Theta := \pi_\Psi$ τότε $P_\Theta = \mu$.

Θέτοντας επίσης $T_n := \sum_{k=1}^n W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, καθώς και $N_t := \sum_{n=1}^\infty \chi_{\{T_n\le t\}}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, προκύπτει ότι η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με κενό μηδενικό σύνολο εξαίρεσης (βλ. Παρατήρηση 3.2.1 και την παράγραφο που έπεται αυτής). Επομένως, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι μία $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-RP για κάθε $\theta \in \Psi$, και άρα σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.11 θα είναι μια $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP.

(ii): Επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP και η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό (ii) του Θεωρήματος 4.2.7, μπορούμε να επιλέξουμε την $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ έτσι ώστε $S_\omega(B) := P_\theta(B)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, $B \in \mathfrak{B}$ και $\theta = \Theta(\omega)$. Τότε από την απόδειξη της συνεπαγωγής $(ii) \Longrightarrow (v)$ του Θεωρήματος 4.2.7 έχουμε ότι οι $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, $\mathcal{F} := \sigma(\Theta)$ και $\{\mathbf{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, όπου $\mathbf{K}(\omega) := \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\Theta(\omega) = \theta \in \Psi$ ικανοποιούν τον ισχυρισμό (v) του εν λόγω θεωρήματος, και άρα η οικογένεια $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ και ο χ.π. $(\widetilde{\Upsilon}, B(\widetilde{\Upsilon}), \nu) := (\Omega, B(\Omega), P \mid B(\Omega))$ ικανοποιούν τον ισχυρισμό (vi) του ιδίου θεωρήματος, απ'όπου έπεται η ισχύς του (ii). $\square$

Πόρισμα 5.1.2. *Έστω ν μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, κι έστω $Q_n(\theta)$ μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοια ώστε $Q_n(\theta) = \mathbf{Exp}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$. Τότε υπάρχει μια τ.μ. Θ από το Ω επάνω στο Υ, μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ επάνω στη Σ, μοναδικό μέτρο πιθανότητας P επάνω στη Σ τέτοιο ώστε $P_\Theta = \nu$ και η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ να είναι μια disintegration του P επάνω στο ν συνεπής με τη Θ, καθώς και μια P-μ.δ. Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με παράμετρο Θ και με σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta) \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

και για $\theta \in \Upsilon$ σταθερό.

Παρατηρήσεις 5.1.3. Το κύριο πλεονέκτημα του Θεωρήματος 5.1.1 είναι ότι επιτρέπει την κατασκευή μ.α.δ. χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις, όπως οι παρακάτω:

(a) Στο Θεώρημα Ύπαρξης του Kolmogorov δίνεται μια κατασκευαστική μέθοδος για τις διαδικασίες Markov (βλ. π.χ. [17], Theorem 455A). Αλλά επειδή μια ν-MRP δεν είναι γενικά και μια διαδικασία Markov (βλ. [24], Theorem 3) η παραπάνω μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε ν-MRP, και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.7 για οποιαδήποτε $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP.

(b) Η κλασσική κατασκευή μιας μ.δ. Poisson, που οφείλεται στον Lundberg, απαιτεί την παρουσία διαδικασιών γέννησης (βλ. π.χ. [18], σελ. 61-63). Αλλά επειδή, σύμφωνα με το (a), μια μ.α.δ. δεν είναι γενικά μια διαδικασία Markov, και άρα μια διαδικασία γέννησης, δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε τα επιχειρήματα της εν λόγω κατασκευής για οποιαδήποτε μ.α.δ..

5.2 Παραδείγματα σχετικά με την κατασκευή

Σε αυτή την ενότητα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.1, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των αντίστοιχων επιμέρους μέτρων πιθανότητας P_θ ($\theta \in \mathbb{R}^d$), καθώς επίσης και του μέτρου πιθανότητας P για μερικές μ.α.δ. ειδικού ενδιαφέροντος.

Για τους σκοπούς της παρούσας ενότητας, θεωρούμε την οικογένεια $\widetilde{\mathcal{C}}$ όλων των **μετρήσιμων κυλίνδρων** $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$, δηλαδή όλων των συνόλων $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{\Omega}$ της μορφής $\prod_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_n$, όπου $\widetilde{B}_n \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το σύνολο $\widetilde{L} := \{n \in \mathbb{N} : \widetilde{B}_n \neq \Upsilon\}$ είναι πεπερασμένο. Θέτοντας $\widetilde{C}_n := \widetilde{B}_n$ για κάθε $n \in \widetilde{L}$ έχουμε ότι $\widetilde{B} = \prod_{k\in\widetilde{L}} \widetilde{C}_k \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\widetilde{L}}$. Ομοίως, με $\mathcal{C}$ δηλώνεται η οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων $B \in \mathfrak{B}(\Omega)$.

Επίσης για λόγους ευκολίας, συμβολίζουμε με $\mathcal{E}$ την ευκλείδια τοπολογία επάνω στον Υ και με $\mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ την τοπολογία γινόμενο $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ όπου $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (βλ. Ορισμούς B.11 και B.5, αντίστοιχα). Ως γνωστόν, το ζεύγος $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}})$ είναι ένας πολωνικός χώρος.

Στη συνέχεια και σε πρώτη φάση, δίνονται οριμένα παραδείγματα που αφορούν τις μ.δ. Poisson (και άρα σε αυτή την περίπτωση ουσιαστικά εφαρμόζουμε το Πόρισμα 5.1.2), στα οποία υπολογίζονται επί πλέον τα P_θ-μέτρα απαίτησης μ_θ ($\theta \in \Upsilon$) μαζί με το P-μέτρο απαίτησης μ, καταδεικνύοντας με έναν ακόμη τρόπο τη χρησιμότητα του Θεωρήματος 3.3.5.

Επομένως, *για τα επόμενα πέντε παραδείγματα θεωρούμε ότι* $(\Psi, Z) = (\Upsilon, \mathfrak{B}(\Upsilon))$, *καθώς και ότι* $\mathbf{K}(\theta) = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για οποιοδήποτε σταθερό* $\theta \in \Upsilon$.

Πριν δώσουμε το πρώτο παράδειγμα υπενθυμίζουμε ότι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-**διαδικασία Pólya-Lundberg** με παραμέτρους c και d, όπου $c, d > 0$, αν είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ τέτοια ώστε $P_\Theta = \mathbf{Ga}(c, d)$.

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω $\widetilde{\mu}_\theta$ και $\widetilde{\mu}$ τα $\widetilde{P}_\theta$- και $\widetilde{P}$-μέτρα απαίτησης ($\theta \in \Upsilon$), που επάγονται από τη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ του Θεωρήματος 5.1.1. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\gamma,\alpha)$, δηλαδή ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-διαδικασία Pólya-Lundberg με παραμέτρους $c = \gamma$ και $d = \alpha$.

(a) Ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $\widetilde{B} = \prod_{k\in\widetilde{L}} \widetilde{C}_k \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\widetilde{L}} \in \widetilde{\mathcal{C}}$. Τότε έχουμε

$$\widetilde{P}_\theta(\widetilde{B}) = (\otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta))(\widetilde{B}) = \prod_{k\in\widetilde{L}} Q_k(\theta)(\widetilde{C}_k) = \prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \theta e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k) \tag{5.1}$$

και άρα

$$\widetilde{P}(\widetilde{B}) = \int \Big[\prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \theta e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big] P_\Theta(d\theta).$$

Επίσης από την (5.1) και για κάθε $E \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ προκύπτει ότι

$$P_\theta(\widetilde{B}\times E) = (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)(\widetilde{B}\times E) = \widetilde{P}_\theta(\widetilde{B})\delta_\theta(E) = \chi_E(\theta)\prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \theta e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)$$

και άρα

$$P(\widetilde{B}\times E) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_E \Big[\prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big] \theta^\alpha e^{-\gamma\theta}\lambda(d\theta).$$

Επομένως, έχουμε

$$P_\theta(B) = \prod_{k\in L} \int_{C_k} \theta e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k), \tag{5.2}$$

και άρα

$$P(B) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \Big[\prod_{k\in L} \int_{C_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big] \theta^\alpha e^{-\gamma\theta} d\theta$$

για κάθε $B = \prod_{k\in L} C_k \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus L} \in \mathcal{C}$.

(b) Έστω $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}$ η κανονική βάση για την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{E}^{\mathbb{N}}$, που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$, όπου $G_n \in \mathcal{E}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και όπου το σύνολο $\widetilde{L} := \{n \in \mathbb{N} : G_n \neq \Upsilon\}$ είναι πεπερασμένο. Έστω επίσης $\widetilde{\mathcal{U}}_f$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ενώσεων στοιχείων του $\widetilde{\mathcal{U}}$, και $\widetilde{\mathcal{H}}$ το σύνολο όλων των μη κενών άνω κατευθυνόμενων οικογενειών του $\widetilde{\mathcal{U}}_f$ (βλ. Ορισμό Γ.1).

Αν το $G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$, τότε το

$$\widetilde{\mathcal{V}}_G := \{V \in \widetilde{\mathcal{U}}_f : V \subseteq G\}$$

ανήκει στο $\widetilde{\mathcal{H}}$ και $\bigcup \mathcal{V}_G = G$. Επειδή ο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{E}}^{\mathbb{N}})$ είναι ένας πολωνικός χώρος, τα μέτρα πιθανότητας $\widetilde{P}$ και $\widetilde{P}_\theta$ ($\theta \in \Upsilon$) είναι εσωτερικά κανονικά ως προς τα κλειστά σύνολα (βλ. π.χ. Ορισμούς Γ.2 και [17], Theorem 412E), και άρα είναι τ-προσθετικά (βλ. π.χ. Ορισμό Γ.2, (c) και [17], Proposition 414O). Επομένως, έχουμε

$$\widetilde{P}(G) = \sup_{V\in\widetilde{\mathcal{V}}_G} \widetilde{P}(V) \quad \text{και} \quad \widetilde{P}_\theta(G) = \sup_{V\in\widetilde{\mathcal{V}}_G} \widetilde{P}_\theta(V) \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \Upsilon. \tag{5.3}$$

Αλλά επειδή τόσο το $\widetilde{P}$ όσο και όλα τα $\widetilde{P}_\theta$ είναι εσωτερικά κανονικά ως προς τα κλειστά σύνολα, τότε θα είναι εξωτερικά κανονικά ως προς τα ανοικτά σύνολα, κάτι που μαζί με την (5.3) συνεπάγεται το ότι

$$\widetilde{P}(E) = \inf_{G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}, G \supseteq E} \sup_{V \in \widetilde{\mathcal{V}}_G} \widetilde{P}(V) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$$

και

$$\widetilde{P}_\theta(E) = \inf_{G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}, G \supseteq E} \sup_{V \in \widetilde{\mathcal{V}}_G} \widetilde{P}_\theta(V) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega}) \quad \text{και} \quad \theta \in \Upsilon.$$

Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$ η κανονική βάση για την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}$, που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $\prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$, όπου $G_n \in \mathcal{E}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και όπου το σύνολο $L := \{n \in \mathbb{N} : G_n \neq \Upsilon\}$ είναι πεπερασμένο. Έστω επίσης $\mathcal{U}_f$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ενώσεων στοιχείων του $\mathcal{U}$, και $\mathcal{H}$ το σύνολο όλων των μη κενών άνω κατευθυνόμενων οικογενειών του $\mathcal{U}_f$.

Αν το $G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}$, τότε το

$$\mathcal{V}_G := \{V \in \mathcal{U}_f : V \subseteq G\}$$

ανήκει στο $\mathcal{H}$ και $\bigcup \mathcal{V}_G = G$.

Επειδή ο $(\Omega, \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E})$ είναι ένας πολωνικός χώρος, τα μέτρα πιθανότητας $\widetilde{P}$ και $\widetilde{P}_\theta$ $(\theta \in \Upsilon)$ είναι εσωτερικά κανονικά ως προς τα κλειστά σύνολα (βλ. π.χ. [17], Theorem 412E), και άρα είναι τ-προσθετικά (βλ. π.χ. [17], Proposition 414O). Επομένως, έχουμε

$$P(G) = \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P(V) \quad \text{και} \quad P_\theta(G) = \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P_\theta(V) \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \Upsilon. \tag{5.4}$$

Αλλά επειδή τόσο το $\widetilde{P}$ όσο και όλα τα $\widetilde{P}_\theta$ είναι εσωτερικά κανονικά ως προς τα κλειστά σύνολα, τότε θα είναι εξωτερικά κανονικά ως προς τα ανοικτά σύνολα, κάτι που μαζί με την (5.4) συνεπάγεται το ότι

$$P(E) = \inf_{G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}, G \supseteq E} \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P(V) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B}(\Omega)$$

και

$$P_\theta(E) = \inf_{G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}, G \supseteq E} \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P_\theta(V) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B}(\Omega) \quad \text{και} \quad \theta \in \Upsilon.$$

(c) Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.5, έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ να ισχύει $\widetilde{\mu}_\theta \mid \sigma(\widetilde{\mathcal{Q}}) = (\theta \widetilde{P}_\theta \otimes \lambda) \mid \sigma(\widetilde{\mathcal{Q}})$, όπου

$$\mathcal{Q} := \{A' \times (s,t] : s,t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{με} \quad s \leq t,\ A' \in \mathcal{A}'_s\} \subseteq \widetilde{\Sigma} \otimes \mathfrak{B},$$

με την $\mathcal{A}' := \{\mathcal{A}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να ορίζεται όπως η $\mathcal{A}$ αλλά για τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, που επάγεται από τη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{\widetilde{W}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1.

Ας σταθεροποιήσουμε, τώρα, $\theta \notin L_*$. Τότε, για κάθε $A' \times (s,t] \in \mathcal{Q}$ έχουμε

$$\widetilde{\mu}_\theta(A' \times (s,t]) = \theta(t-s)\widetilde{P}_\theta(A'), \tag{5.5}$$

οπότε από το Λήμμα 3.3.4 συμπεραίνουμε ότι

$$\widetilde{\mu}(A' \times (s,t]) = (t-s)\int \theta \widetilde{P}_\theta(A')P_\Theta(d\theta). \tag{5.6}$$

Ιδιαιτέρως, αν $\widetilde{B} \times (s,t]$ είναι αυθαίρετο σύνολο από το $\mathcal{Q}$ με $\widetilde{B} = \prod_{k\in\widetilde{L}} \widetilde{C}_k \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\widetilde{L}} \in \mathcal{A}'_s \cap \widetilde{\mathcal{C}}$, εφαρμόζοντας τις (5.1) και (5.5), όπως επίσης και τις (5.1) και (5.6), έχουμε ότι

$$\widetilde{\mu}_\theta(\widetilde{B} \times (s,t]) = \theta^2(t-s)\prod_{k\in\widetilde{L}}\int_{\widetilde{C}_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)$$

και

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{B} \times (s,t]) = (t-s)\int \theta^2\Big[\prod_{k\in\widetilde{L}}\int_{\widetilde{C}_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big]\widetilde{P}_\Theta(d\theta),$$

αντίστοιχα.

Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{Q}} := \{A \times (s,t] : s,t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{με} \quad s \le t,\ A \in \widetilde{\mathcal{A}}_s\} \subseteq \Sigma \otimes \mathfrak{B}$.

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\mu_\theta(A \times (s,t]) = \theta(t-s)P_\theta(A) \tag{5.7}$$

και

$$\mu(A \times (s,t]) = (t-s)\int \theta P_\theta(A)P_\Theta(d\theta) \tag{5.8}$$

για κάθε $A \times (s,t] \in \widetilde{\mathcal{Q}}$. Ιδιαιτέρως, εφαρμόζοντας τις (5.2) και (5.7) όπως επίσης και τις (5.2) και (5.8), έχουμε ότι

$$\mu_\theta(B \times (s,t]) = \theta^2(t-s)\prod_{k\in L}\int_{C_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)$$

και

$$\mu(B \times (s,t]) = \frac{\gamma^\alpha(t-s)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \Big[\prod_{k\in L}\int_{C_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big]\theta^{\alpha+1}e^{-\gamma\theta}d\theta,$$

αντίστοιχα, για κάθε $B \times (s,t] \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ με $B = \prod_{k\in L} C_k \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus L} \in \widetilde{\mathcal{A}}_s \cap \mathcal{C}$.

Παράδειγμα 5.2.2. Για $P_\Theta = p\delta_{\theta_1} + (1-p)\delta_{\theta_2}$ με $\theta_1, \theta_2 \in \Upsilon$ και $p \in (0,1)$, δηλαδή για την περίπτωση όπου η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **διπλή διαδικασία Poisson** (βλ. π.χ. [18], σελ. 77) έχουμε ότι

$$P(\widetilde{B} \times E) = p\chi_E(\theta_1)\prod_{k\in\widetilde{L}}\int_{\widetilde{C}_k}\theta_1 e^{-\theta_1\omega_k}\lambda(d\omega_k) + (1-p)\chi_E(\theta_2)\prod_{k\in\widetilde{L}}\int_{\widetilde{C}_k}\theta_2 e^{-\theta_2\omega_k}\lambda(d\omega_k)$$

για κάθε $\widetilde{B} \times E \in \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1, κάτι που συνεπάγεται ότι

$$P(B) = p \prod_{k \in L} \int_{C_k} \theta_1 e^{-\theta_1 \omega_k} \lambda(d\omega_k) + (1-p) \prod_{k \in L} \int_{C_k} \theta_2 e^{-\theta_2 \omega_k} \lambda(d\omega_k)$$

για κάθε $B = \prod_{k \in L} C_k \times \varUpsilon^{\mathbb{N} \setminus L} \in \mathcal{C}$. Επί πλέον, από τις (5.2) και (5.8) έπεται ότι

$$\mu(B \times (s,t]) = (t-s)\Big[p\theta_1^2 \prod_{k \in L} \int_{C_k} e^{-\theta_1 \omega_k} \lambda(d\omega_k) + (1-p)\theta_2^2 \prod_{k \in L} \int_{C_k} e^{-\theta_2 \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big]$$

για κάθε $B \times (s,t] \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1.

Παράδειγμα 5.2.3. Για $P_\Theta = \mathbf{U}(0,\alpha)$ με $\alpha > 0$, δηλαδή για την περίπτωση όπου η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια **ομοιόμορφη-Poisson διαδικασία** (βλ. π.χ. [18], σελ. 76), έχουμε ότι

$$P(\widetilde{B} \times E) = \frac{1}{\alpha} \int_{E \cap [0,\alpha)} \Big[\prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \theta e^{-\theta \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] \lambda(d\theta)$$

για κάθε $\widetilde{B} \times E \in \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1, κάτι που συνεπάγεται ότι

$$P(B) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \Big[\prod_{k \in L} \int_{C_k} \theta e^{-\theta \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] d\theta$$

για κάθε $B = \prod_{k \in L} C_k \times \varUpsilon^{\mathbb{N} \setminus L} \in \mathcal{C}$. Επί πλέον, από τις (5.2) και (5.8) έπεται ότι

$$\mu(B \times (s,t]) = \frac{t-s}{\alpha} \int_0^\alpha \theta^2 \Big[\prod_{k \in L} \int_{C_k} e^{-\theta \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] d\theta$$

για κάθε $B \times (s,t] \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1.

Παράδειγμα 5.2.4. Για $P_\Theta = \mathbf{IG}(\alpha)$, δηλαδή για την περίπτωση όπου οι αριθμοί των απαιτήσεων της μ.δ. Poisson $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ κατανέμονται σύμφωνα με μια **αντίστροφη κανονική-Poisson** κατανομή (βλ. π.χ. [18], σελ. 41, καθώς και το Παράρτημα A.III για τον ορισμό της αντίστροφης κανονικής κατανομής) έχουμε

$$P(\widetilde{B} \times E) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \int_E \Big[\prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} e^{-\theta \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] \frac{e^{-\alpha/2\theta}}{\sqrt{\theta}} \lambda(d\theta)$$

για κάθε $\widetilde{B} \times E \in \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1, κάτι που συνεπάγεται ότι

$$P(B) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \int_0^\infty \Big[\prod_{k \in L} \int_{C_k} e^{-\theta \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] \frac{e^{-\alpha/2\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta$$

για κάθε $B = \prod_{k \in L} C_k \times \varUpsilon^{\mathbb{N} \setminus L} \in \mathcal{C}$. Επί πλέον, από τις (5.2) και (5.8) έπεται ότι

$$\mu(B \times (s,t]) = (t-s)\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \int_0^\infty \Big[\prod_{k \in L} \int_{C_k} e^{-\theta \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] e^{-\alpha/2\theta} \sqrt{\theta} d\theta$$

για κάθε $B \times (s,t] \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1.

Παράδειγμα 5.2.5. Για $P_\Theta = \mathbf{Be}(r,\alpha,\gamma)$, δηλαδή για την περίπτωση όπου οι αριθμοί των απαιτήσεων είναι **βήτα-Poisson** κατανεμημένοι (βλ. π.χ. [18], σελ. 42 και Παράρτημα A.III) έχουμε

$$P(\widetilde{B}\times E) = \frac{r^{1-(a+\gamma)}}{B(\alpha,\gamma)} \int_{E\cap(0,r)} \Big[\prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big]\theta^\alpha (r-\theta)^{\gamma-1}\lambda(d\theta)$$

για κάθε $\widetilde{B}\times E \in \widetilde{\mathcal{C}}\times\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1, κάτι που συνεπάγεται ότι

$$P(B) = \frac{r^{1-(a+\gamma)}}{B(\alpha,\gamma)} \int_0^r \Big[\prod_{k\in L} \int_{C_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big]\theta^\alpha (r-\theta)^{\gamma-1}d\theta$$

για κάθε $B=\prod_{k\in L} C_k\times \varUpsilon^{\mathbb{N}\setminus L}\in\mathcal{C}$. Επί πλέον, από τις (5.2) και (5.8) έπεται ότι

$$\mu(B\times(s,t]) = \frac{r^{1-(a+\gamma)}(t-s)}{B(\alpha,\gamma)} \int_0^r \Big[\prod_{k\in L} \int_{C_k} e^{-\theta\omega_k}\lambda(d\omega_k)\Big]\theta^{\alpha+1} (r-\theta)^{\gamma-1}d\theta$$

για κάθε $B\times(s,t]\in\widetilde{\mathcal{Q}}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1.

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι οι δομικές κατανομές πιθανότητας P_Θ των παραπάνω παραδειγμάτων, και άρα οι αντίστοιχες μ.δ. Poisson παρουσιάζουν ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών στα ασφαλιστικά μαθηματικά και στη Θεωρία Κινδύνου. Η κατανομή βήτα του τελευταίου παραδείγματος βρίσκει επίσης εφαρμογές στη βιολογία. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις εφαρμογές των Παραδειγμάτων 5.2.3 και 5.2.5, βλ. π.χ. [18], σελ. 46 και 43 ή [4], σελ. 46 και [19], σελ. 43, 45, αντίστοιχα.

Στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν, κατασκευάζονται για μία από τις πιο κοινές επιλογές που μπορούν να γίνουν για μια κατανομή ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή για την $\mathbf{Ga}(\theta_1,\theta_2)$ με $\theta_1>0$ και $0<\theta_2<1$ (βλ. π.χ. [18], σελ. 95), συγκεκριμένες $(P,\mathbf{K}(\varTheta))$-MRP μαζί με τις σχετιζόμενες οικογένειες των επιμέρους μέτρων πιθανότητας τους P_θ. Ιδιαιτέρως, στο επόμενο παράδειγμα όπου $\theta_2=1/2$, η εν λόγω κλάση κατανομών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού κανένα από τα μέλη της δεν ικανοποιεί την Assumption 5.1 του [18], που προτάθηκε από τον Huang στο [24], Theorem 3, και η οποία κατέχει ουσιώδη ρόλο στη μελέτη του Grandell για τις μ.α.δ. (βλ. [18], Section 5.3). Επί πλέον, στο ίδιο παράδειγμα αποδεικνύεται ότι υπάρχουν σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που είναι ταυτόχρονα και $(P,\mathbf{K}(\varTheta))$-MRP και $P_\varTheta \mid B(\varPsi)$-MRP, οι οποίες, όμως, δεν είναι μ.α.δ. σύμφωνα με τον Grandell [18], Definition 5.3.

Παράδειγμα 5.2.6. Έστω $Q_n(\theta) = \mathbf{Ga}(\theta,1/2)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta>0$ κι έστω $\mu=\mathbf{Ga}(\gamma,\alpha)$. Τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1 για $(\varPsi,Z)=\big(\varUpsilon,\mathfrak{B}(\varUpsilon)\big)$.

Επομένως, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των μέτρων πιθανότητας $\widetilde{P}$ και P επάνω στις σ-άλγεβρες $\widetilde{\Sigma} = \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ και $\Sigma = \mathfrak{B}(\Omega)$, όπου $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \Upsilon$, αντίστοιχα, καθώς και των disintegrations $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in\Psi}$ και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$. Επί πλέον, υπάρχει μια τ.μ. Θ επάνω στο Ω τέτοια ώστε $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\gamma, \alpha)$.

Αρχικά υπολογίζουμε τα μέτρα πιθανότητας επάνω σε μετρήσιμους κυλίνδρους. Ας συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{C}}$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$, οπότε έχουμε

$$\widetilde{P}_\theta(\widetilde{B}) = (\otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta))(\widetilde{B}) = \prod_{k\in\widetilde{L}} Q_k(\theta)(\widetilde{C}_k) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta\omega_k} \lambda(d\omega_k) \tag{5.9}$$

για κάθε $\theta > 0$, κι επομένως

$$\widetilde{P}(\widetilde{B}) = \int \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta\omega_k} \lambda(d\omega_k) P_\Theta(d\theta).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν μετρήσιμο κύλινδρο $\widetilde{B} \times E \in \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Εφαρμόζοντας την (5.9) προκύπτει ότι

$$P_\theta(\widetilde{B} \times E) = \widetilde{P}_\theta(\widetilde{B})\delta_\theta(E) = \chi_E(\theta)\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta\omega_k} \lambda(d\omega_k);$$

για κάθε $\theta > 0$, οπότε

$$P(\widetilde{B} \times E) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{\pi}} \int_E \Big[\prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta(\gamma+\omega_k)} \lambda(d\omega_k)\Big] \theta^{\alpha-\frac{1}{2}} \lambda(d\theta).$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας κλασσικές μεθόδους Τοπολογικής Θεωρίας Μέτρου, όπως αυτές του Παραδείγματος 5.2.1, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα πιθανότητας $P(E)$ και $P_\theta(E)$ για κάθε $E \in \Sigma$.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μια μ.α.δ., που έχει ως παράμετρο μια διδιάστατη τ.μ. Θ.

Παράδειγμα 5.2.7. Έστω $Q_n(\theta) = Q_n(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{Ga}(\theta_1, \theta_2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon \times (0, 1)$, κι έστω μ μια διδιάστατη κατανομή πιθανότητας επάνω στη Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}_2$ τέτοια ώστε $\mu(\Upsilon \times (0, 1)) = 1$.

Τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1 για $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$, οπότε $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^2$ και $\Theta = \pi_{\mathbb{R}^2}$.

Εφαρμόζοντας, τώρα, τα επιχειρήματα του Παραδείγματος 5.2.6, προκύπτει ότι $P_\Theta = \mu$. Και πάλι σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.2.6, αρκεί να υπολογίσουμε τα μέτρα πιθανότητας που μας ενδιαφέρουν επάνω σε μετρήσιμους κυλίνδρους. Τότε έχουμε ότι

$$\widetilde{P}_\theta(\widetilde{B}) = (\otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta))(\widetilde{B}) = \prod_{k\in\widetilde{L}} Q_k(\theta)(\widetilde{C}_k) = \frac{\theta_1^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2)} \prod_{k\in\widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{\theta_2-1} e^{-\theta_1\omega_k} \lambda(d\omega_k); \tag{5.10}$$

για κάθε $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon \times (0,1)$, κι επομένως

$$\widetilde{P}(\widetilde{B}) = \int \frac{\theta_1^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2)} \Big[\prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{\theta_2 - 1} e^{-\theta_1 \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] P_\Theta(d\theta_1, d\theta_2).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν μετρήσιμο κύλινδρο $\widetilde{B} \times E \in \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$. Εφαρμόζοντας την (5.10) προκύπτει ότι

$$P_\theta(\widetilde{B} \times E) = \chi_E(\theta_1, \theta_2) \frac{\theta_1^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2)} \prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{\theta_2 - 1} e^{-\theta_1 \omega_k} \lambda(d\omega_k);$$

για κάθε $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon \times (0,1)$, οπότε

$$P(\widetilde{B} \times E) = \int_E \frac{\theta_1^{\theta_2}}{\Gamma(\theta_2)} \Big[\prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{\theta_2 - 1} e^{-\theta_1 \omega_k} \lambda(d\omega_k)\Big] P_\Theta(d\theta_1, d\theta_2).$$

Σημειώνουμε ότι και στα δύο παραδείγματα που προηγήθηκαν αν θέσουμε $S_\omega(B) := P_\theta(B)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, $B \in \mathfrak{B}$ και $\theta = \Theta(\omega)$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.1 και την απόδειξή του, προκύπτει ότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία $P \mid B(\Omega)$-MRP σχετιζόμενη με την $\{S_\omega\}_{\omega \in \Omega}$.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα μέσω του οποίου θα δείξουμε ότι η συνεπαγωγή $(vii) \Longrightarrow (vi)$ του Θεωρήματος 4.2.7 δεν ισχύει, ακόμα και αν $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B}_{\mathbb{N}})$ και $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$.

Παράδειγμα 5.2.8. Έστω $Q_n(\theta) = \mathbf{Exp}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta > 0$ κι έστω $\mu = \mathbf{Ga}(2,1)$. Τότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1 για $(\Psi, Z) = \big(\Upsilon, \mathfrak{B}(\Upsilon)\big)$.

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα πιθανότητας $\widetilde{P}$ και P επάνω στις σ-άλγεβρες $\widetilde{\Sigma} = \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ και $\Sigma = \mathfrak{B}(\Omega)$, όπου $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \Upsilon$, αντίστοιχα, καθώς επίσης και τις disintegrations $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta \in \Psi}$ και $\{P_\theta\}_{\theta \in \Psi}$. Επί πλέον, υπάρχει μια τ.μ. Θ επάνω στο Ω τέτοια ώστε $P_\Theta = \mathbf{Ga}(2,1)$, και άρα η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια P-διαδικασία Pólya-Lundberg με παραμέτρους $c = 2$ και $d = 1$.

(a) Επειδή η $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta > 0$, τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} \{W_k \leq w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_\theta(W_k \leq w_k) \nu(d\theta), \tag{5.11}$$

όπου $\nu = P_\Theta \mid B(\Upsilon)$ και $B(\Upsilon) = \sigma(\{P_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$. Συνεπώς, η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια ν-MRP σχετιζόμενη με την $\{P_\theta\}_{\theta \in \Psi}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την ακολουθία $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ που δίνεται από τη σχέση

$$Y_n := \begin{cases} W_n & \text{αν} \quad n \ \text{περιττός} \\ \frac{1}{2} W_n & \text{αν} \quad n \ \text{άρτιος}. \end{cases}$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, αφού και η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοια, καθώς επίσης και ότι η P_θ-ανεξαρτησία της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συνεπάγεται αυτή της $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $\theta > 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$(P_\theta)_{Y_n} = \begin{cases} \mathbf{Exp}(\theta) & \text{αν} \quad n \text{ περιττός} \\ \mathbf{Exp}(2\theta) & \text{αν} \quad n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

για οποιοδήποτε σταθερό $\theta > 0$.

Επομένως, η $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που ικανοποιεί την (5.11) αφού είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta > 0$. Δεν είναι, όμως, P_θ-ισόνομη.

(b) Επί πλέον, για κάθε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) &= 2\int_0^\infty (1-e^{-\theta y_1})(1-e^{-2\theta y_2})e^{-2\theta}d\theta \\ &= y_2(y_2+1)^{-1} - 2[(y_1+2)^{-1} - (y_1+2y_2+2)^{-1}], \end{aligned} \tag{5.12}$$

κάτι που συνεπάγεται ότι $P(Y_1 \le 2, Y_2 \le 1) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{7} = P(Y_1 \le 1, Y_2 \le 2)$, και άρα η $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι P-ανταλλάξιμη.

Θέτοντας, τώρα, $\widetilde{T}_n := \sum_{k=1}^n Y_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\widetilde{N}_t := \sum_{n=1}^\infty \chi_{\{Y_n \le t\}}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, προκύπτει μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με κενό μηδενικό σύνολο εξαίρεσης, που επάγεται από τη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία δεν είναι ανταλλάξιμη. Προφανώς, η $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δεν είναι μια ν-MRP σχετιζόμενη με την $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$.

Κλείνοντας το κεφάλαιο, δίνουμε ένα παράδειγμα για να δείξουμε ότι η συνεπαγωγή $(vii) \Longrightarrow (vi)$ του Θεωρήματος 4.2.7 δεν ισχύει, ακόμα και αν υποθέσουμε όχι μόνο ότι $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B}_{\mathbb{N}})$ και $(\Psi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$, αλλά επίσης και ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων W_n είναι οι κανονικές προβολές π_n από το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ επάνω στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.2.9. Έστω $Q_n(\theta) = \mathbf{Exp}(n\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta > 0$ κι έστω $\mu = \mathbf{Ga}(2,1)$. Τότε ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1 για $(\Psi, Z) = \big(\Upsilon, \mathfrak{B}(\Upsilon)\big)$, εκτός από το ότι

$$Q_n(\theta) = \mathbf{K}(\theta) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και για οποιοδήποτε σταθερό } \theta \in \Psi\,.$$

Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση η κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$ αντικαθίσταται από την $\mathbf{K}(n\theta) := \mathbf{Exp}(n\theta)$.

Ακολουθώντας, τώρα, την ίδια συλλογιστική με αυτή της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta > 0$ και η οποία ικανοποιεί την $W_n = \pi_n$ καθώς επίσης και την $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(n\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta > 0$.

Επομένως, η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, η οποία δεν είναι P_θ-ισόνομη για οποιοδήποτε σταθερό $\theta > 0$, αλλά η οποία ικανοποιεί την (5.11). Συνεπώς, η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που επάγεται από την ακολουθία των κανονικών προβολών $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μια ν-MRP σχετιζόμενη με την $\{P_\theta\}_{\theta\in\Psi}$, όπου $\nu = P_\Theta \mid B(\Upsilon) = \mu \mid B(\Upsilon)$. Επί πλέον, όπως στο Παράδειγμα 3.3.3, (b), προκύπτει ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι P-ανταλλάξιμη.

Κεφάλαιο 6

ΕΝΑΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ POISSON

Σε αυτό το κεφάλαιο, δίνονται ένας χαρακτηρισμός των σ.μ.δ. Poisson (βλ. Θεώρημα 6.2.2), με τον οποίο οι σ.μ.δ. Poisson ανάγονται μέσω της εμπλοκής μιας disintegration $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ σε συνήθεις σύνθετες διαδικασίες Poisson, κάτω από τα επιμέρους μέτρα πιθανότητας P_θ της disintegration, καθώς και ορισμένα προαπαιτούμενα για τον χαρακτηρισμό αυτό αποτελέσματα (βλ. Λήμμα 6.2.1).

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και ο εν λόγω χαρακτηρισμός είναι μια γενίκευση του αντίστοιχου αποτελέσματος για μ.δ. Poisson (βλ. Πρόταση 3.2.10), επιλέξαμε να τον παρουσιάσουμε στο σημείο αυτό και σε ξεχωριστό κεφάλαιο, μιας και θέλουμε να τονίσουμε όχι μόνο το ενδιαφέρον που έχει από μόνος του, αλλά και τη χρησιμότητά του για την αντιμετώπιση του κεντρικού προβλήματος της παρούσας διατριβής, με το οποίο θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

6.1 Βασικές υποθέσεις

Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών τ.μ. επάνω στο Ω. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ορίζουμε την τ.μ. S_t μέσω του τύπου

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

όπου $X_{N_t}(\omega) := X_{N_t(\omega)}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Προφανώς, ισχύει ότι $S_0 = 0$.

Στη Θεωρία Κινδύνου η τ.μ. X_n, όπου $n \in \mathbb{N}$, ερμηνεύεται ως το *μέγεθος ή ποσό της n-απαίτησης*, ενώ η S_t ερμηνεύεται ως το *συνολικό μέγεθος των απαιτήσεων* που συνέβησαν μέχρι το χρόνο t. Συνακόλουθα, η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται η **σ.δ. μεγέθους απαίτησης**, ενώ η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **σ.δ. συνολικών απαιτήσεων**, που επάγεται από τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και τη σ.δ. μεγέθους απαίτησης (βλ. π.χ. [34], Chapter 5, Section 5.1, σελ. 103).

Για τον επόμενο ορισμό, βλέπε επίσης το [34], Chapter 6, σελ. 127: Ένα ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ ονομάζεται μια **σ.δ. κινδύνου** επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) ή απλώς μια P-**σ.δ. κινδύνου** αν

(R1) η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,

(R2) η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. μεγέθους απαίτησης, ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. κάτω από το μέτρο πιθανότητας P με κοινή κατανομή P_{X_1}, και

(R3) οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες κάτω από το μέτρο πιθανότητας P.

Στο εξής, και μέχρι το τέλος αυτού του κεφαλαίου, η Θ είναι μια τ.μ. επάνω στο Ω τέτοια ώστε $P_\Theta\big((0,\infty)\big) = 1$. Αν θέσουμε $N_\Theta := \{\omega \in \Omega : \Theta(\omega) \leq 0\}$ τότε $P_\Theta(N_\Theta) = 0$, κι επομένως *χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $N_\Theta = \emptyset$.

Μια σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **μια σύνθετη μεμειγμένη διαδικασία Poisson** (σ.μ.δ. Poisson) επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) με παραμέτρους Θ και P_{X_1} (συμβολικά μια P-CMPP(Θ,P_{X_1})), αν επάγεται από μια P-σ.δ. κινδύνου $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ τέτοια ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ (βλ. π.χ. [18], σελ. 207-208).

Ιδιαιτέρως, αν η P_Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 \in (0,\infty)$, τότε η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μια **σύνθετη διαδικασία Poisson** επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) με παραμέτρους θ_0 και P_{X_1} (συμβολικά μια P-CPP(θ_0,P_{X_1})).

Οι ακόλουθες συνθήκες θα αποτελέσουν χρήσιμες υποθέσεις για τη μελέτη των σ.μ.δ. Poisson:

(a1) Οι σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μεταξύ τους P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες .

(a2) Η τ.μ. Θ και η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-ανεξάρτητες.

(a3) Η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και υπό συνθήκη ισόνομη.

Για το υπόλοιπο της διατριβής, οποτεδήποτε ικανοποιείται η συνθήκη (a1), (a2) ***και*** (a3) ***θα γράφουμε ότι η τετράδα*** $(P, \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \Theta)$ ***ή (αν δεν προκαλείται σύγχυση) το μέτρο πιθανότητας*** P ***ικανοποιεί την*** (a1), (a2)***, και*** (a3)***, αντίστοιχα.***

6.2 Ο Χαρακτηρισμός

Σε αυτή την ενότητα, θέτουμε $\Upsilon := (0,\infty)$ *και υποθέτουμε την ύπαρξη μιας disintegration* $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ *του* P *επάνω στο* P_Θ *συνεπούς με τη* Θ (βλ. και Παρατήρηση 2.1.3). Επίσης, υποθέτουμε για άλλη μια φορά ότι *τόσο η έκρηξη όσο και το ενδεχόμενο* $\{T_1 = \infty\}$ *είναι ίσα με το κενό σύνολο.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα παρέχει σχετικούς με τη σ.δ. κινδύνου χαρακτηρισμούς.

Λήμμα 6.2.1. *(i) Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(a) Η συνθήκη (a1).

(b) Οι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *και* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι μεταξύ τους* P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητες.*

(c) Υπάρχει ένα P_Θ*-μηδενικό σύνολο* $G' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\theta \notin G'$ *οι* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *και* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *να είναι μεταξύ τους* P_θ*-ανεξάρτητες.*

(ii) Η συνθήκη (a2) *συνεπάγεται το ότι η σ.δ.* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι* P*-ανεξάρτητη και ισόνομη αν και μόνο αν είναι* P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη αν και μόνο αν υπάρχει ένα* P_Θ*-μηδενικό σύνολο* $G'' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\theta \notin G''$ *η* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *να είναι* P_θ*-ανεξάρτητη και ισόνομη.*

(iii) Οι συνθήκες (a1) *και* (a2) *συνεπάγονται ότι το ζεύγος* $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *είναι μια* P*-σ.δ. κινδύνου αν και μόνο αν υπάρχει ένα* P_Θ*-μηδενικό σύνολο* $G_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\theta \notin G_*$ *το ζεύγος* $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *να είναι μια* P_θ*-σ.δ. κινδύνου.*

(iv) Αν το P *ικανοποιεί τις συνθήκες* (a1), (a2) *και* (a3), *τότε υπάρχει ένα* P_Θ*-μηδενικό σύνολο* $G_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\theta \notin G_*$ *το ζεύγος* $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *να είναι μια* P_θ*-σ.δ. κινδύνου.*

Απόδειξη. *(i)*: Επειδή $\sigma(\{T_k\}_{k\in\{0,\ldots,n\}}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (βλ. [34], Lemma 1.1.1), έχουμε ότι $\sigma(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sigma(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}) = \sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$, όπου η τελευταία ισότητα είναι άμεση συνέπεια του [34], Lemma 2.1.3, οπότε προκύπτει ότι $(b) \Longrightarrow (a)$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι προφανής, αφού

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{\{\sum_{k=1}^{n} W_k\le t<\sum_{k=1}^{n+1} W_k\}}. \tag{6.1}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [34], Theorem 2.1.1 και Lemma 2.1.2). Η ισοδυναμία $(a) \Longleftrightarrow (c)$ προκύπτει από το Λήμμα 3.2.2.

(ii): Έστω ότι ισχύει η (a2) και ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-ανεξάρτητη. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, για αυθαίρετα διαφορετικά ανά δύο $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ και για κάθε ακολουθία $\{C_l\}_{l\in\{1,\ldots,k\}}$

στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, έχουμε ισοδύναμα ότι $P(\bigcap_{l=1}^{k}\{X_{n_l}\in C_l\})=\prod_{l=1}^{k}P(X_{n_l}\in C_l)$, που λόγω της (a2) ισοδυναμεί με το ότι

$$P\Big(\bigcap_{l=1}^{k}\{X_{n_l}\in C_l\}\mid\Theta\Big)=\prod_{l=1}^{k}P(\{X_{n_l}\in C_l\}\mid\Theta)\quad P\mid\sigma(\Theta)-\sigma.\beta.,$$

δηλαδή με το ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Αλλά, σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.2, το γεγονός αυτό ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $O:=O_{\mathbb{N}}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta\notin O$ η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη.

Και πάλι εξαιτίας της (a2) το ότι όλες οι τ.μ. X_n είναι P-ισόνομες ισοδυναμεί με το ότι είναι P-υπό συνθήκη ισόνομες, κάτι που σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 3.2.6 ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $L:=L_{\mathbb{N}}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta\notin L$ η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι P_θ-ισόνομη. Επομένως, θέτοντας $G'':=O\cup L$ προκύπτει το (ii).

(iii): Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες (a1) και (a2), καθώς επίσης και ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_*\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin G_*$ το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ να είναι μια P_θ-σ.δ. κινδύνου. Τότε από το (ii) προκύπτει ότι η ιδιότητα (R2) ικανοποιείται επάνω στον χ.π. (Ω,Σ,P_θ) για κάθε $\theta\notin G_*$ αν και μόνο αν ικανοποιείται επάνω στον (Ω,Σ,P). Επίσης παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το (i) η ισχύς της ιδιότητας (R3) επάνω στον (Ω,Σ,P_θ) για κάθε $\theta\notin G_*$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη (a1), που σε συνδυασμό με τη συνθήκη (a2) συνεπάγεται την ισχύ της ιδιότητας (R3) επάνω στον (Ω,Σ,P). Επομένως, το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ είναι μια P-σ.δ. κινδύνου.

Η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει άμεσα και για $G_*:=G'\cup G''$ από τα (i) και (ii), αφού η ισχύς της ιδιότητας (R1) επάνω στον χ.π. (Ω,Σ,P_θ) για κάθε $\theta\notin G_*$ είναι προφανής.

(iv): Ας υποθέσουμε ότι το P ικανοποιεί τις συνθήκες (a1), (a2) και (a3). Όμως, οι τελευταίες δύο συνθήκες συνεπάγονται, σύμφωνα με το (ii), την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $G''\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta\notin G''$ να ικανοποιείται η ιδιότητα (R2) επάνω στον χ.π. (Ω,Σ,P_θ). Επί πλέον, από το (i) προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G'\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin G'$ να ικανοποιείται η ιδιότητα (R3) επάνω στον χ.π. (Ω,Σ,P_θ). Επομένως, θέτοντας $G_*:=G'\cup G''$, έχουμε ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ είναι μια P_θ-σ.δ. κινδύνου για κάθε $\theta\notin G_*$. □

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω ότι το P ικανοποιεί τις συνθήκες* (a1) *και* (a2). *Τότε η σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-CMPP(Θ,P_{X_1}) αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $C_*\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin C_*$ η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-CPP$(\theta,(P_\theta)_{X_1})$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-CMPP(Θ,P_{X_1}), κάτι που ισοδυναμεί με το ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ είναι μια P-σ.δ. κινδύνου και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ.

Poisson με παράμετρο $\varTheta$. Σύμφωνα με το Λήμμα 6.2.1, (iii) και την Πρόταση 3.2.10 η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με το ότι υπάρχουν $P_\varTheta$-μηδενικά σύνολα G_* και L_* της σ-άλγεβρας $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοια ώστε για κάθε $\theta \notin G_*$ το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ να είναι μια P_θ-σ.δ. κινδύνου, και για κάθε $\theta \notin L_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ, αντίστοιχα. Επομένως, θέτοντας $C_* := G_* \cup L_*$, ισοδύναμα έχουμε ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P_θ-CPP$(\theta, (P_\theta)_{X_1})$ για κάθε $\theta \notin C_*$. $\square$

Κεφάλαιο 7

MARTINGALE-ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ POISSON

Σε αυτό το κεφάλαιο, $\Upsilon := (0, \infty)$, *ο* (Ω, Σ, P) *είναι ένας αυθαίρετος αλλά σταθερός χ.π. και η* Θ *είναι μια τ.μ. επάνω στο* Ω *τέτοια ώστε* $P_\Theta(\Upsilon) = 1$. Αν θέσουμε, τώρα, $N_\Theta := \{\omega \in \Omega : \Theta(\omega) \leq 0\}$ τότε $P_\Theta(N_\Theta) = 0$, κι επομένως *χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι* $N_\Theta = \emptyset$.

Στην Ενότητα 7.1 εισάγουμε δύο τροποποιημένες σ.δ. συνολικών απαιτήσεων, που εμπλέκονται στον ορισμό δύο εκθετικών martingales (βλ. Πρόταση 7.1.7), χρήσιμων για τους σκοπούς της επόμενης ενότητας. Εκεί καθίσταται δυνατή μια λύση στο πρόβλημα που κατά κύριο λόγο φιλοδοξεί να αντιμετωπίσει η παρούσα διατριβή, δηλαδή στο [Π1] της Εισαγωγής (βλ. επίσης το Ερώτημα 7.2.3).

Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 7.2 δίνεται ένας *χαρακτηρισμός μέσω disintegrations και martingale - (προοδευτικά) ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας* όλων των μέτρων πιθανότητας Q, που είναι προοδευτικά ισοδύναμα με το αρχικό μέτρο πιθανότητας P, κάτω από τα οποία μια P-σ.μ.δ. Poisson παραμένει μια σ.μ.δ. Poisson. Μέσω αυτού του αποτελέσματος παρέχεται, κάτω από ασθενείς προϋποθέσεις, μια καταφατική απάντηση στο Ερώτημα 7.2.3. Προς το τέλος του κεφαλαίου, γίνεται αναφορά σε κάποιες αξιοσημείωτες συνέπειες του Θεωρήματος 7.2.9 (βλ. π.χ. Πόρισμα 7.2.13), ανοίγοντας ουσιαστικά το δρόμο για εφαρμογές και ειδικές περιπτώσεις του προαναφερθέντος χαρακτηρισμού, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και οι οποίες θα αποτελέσουν το αντικείμενο μελέτης του Κεφαλαίου 8.

7.1 Δύο εκθετικά martingales

Για τους σκοπούς της παρούσας ενότητας ανακαλούμε μερικές ακόμα γνωστές έννοιες.

Μια τ.μ. $T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ ονομάζεται ένας **χρόνος διακοπής** (*stopping time*) της διύλισης $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (ή αλλιώς ένας $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$**-χρόνος διακοπής**) αν ισχύει ότι $\{T \le t\} \in \Sigma_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Η τ.μ. Z_T που ορίζεται μέσω της σχέσης $Z_T(\omega) := Z_{T(\omega)}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ είναι η **τιμή της διαδικασίας** $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο χρόνο διακοπής T (βλ. π.χ. [26], Chapter 1, Definitions 2.1 and 1.15, αντίστοιχα).

Η οικογένεια $\Sigma_T := \{A \in \Sigma : A \cap \{T \le t\} \in \Sigma_t \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}_+\}$ είναι **η** σ**-άλγεβρα των προσδιορίσιμων πριν από το χρόνο διακοπής** T **ενδεχομένων** ή αλλιώς το **παρελθόν του χρόνου διακοπής** T (βλ. π.χ. [26], Chapter 1, Definition 2.12).

Μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θεωρούμε μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *και μια σ.δ. μεγέθους απαίτησης* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *καθώς και ότι τόσο η έκρηξη όσο και το ενδεχόμενο* $\{T_1 = \infty\}$ *είναι ίσο με το κενό σύνολο.*

Έστω, τώρα, μία $\mathfrak{B}(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση $(x, \theta) \longmapsto \beta(x, \theta)$ από το $\Upsilon \times \Upsilon$ στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $S_t^{(\beta)} : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ και $S_t^{(\beta)}(\Theta) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω των σχέσεων

$$S_t^{(\beta)}(\omega, \theta) := \sum_{k=1}^{N_t(\omega)} \beta(X_k(\omega), \theta) \quad \text{για κάθε } (\omega, \theta) \in \Omega \times \Upsilon$$

και

$$S_t^{(\beta)}(\Theta)(\omega) := \sum_{k=1}^{N_t(\omega)} \beta(X_k(\omega), \Theta(\omega)) \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega,$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $S_t^{(\beta)}(\Theta) = S_t^{(\beta)} \circ (id_\Omega \times \Theta)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Επί πλέον, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ ορίζουμε τη συνάρτηση $S_t^{(\beta)}(\theta) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$S_t^{(\beta)}(\theta)(\omega) := \sum_{k=1}^{N_t(\omega)} \beta^\theta(X_k(\omega)) \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega.$$

Επίσης ας θέσουμε $\widetilde{\mathcal{H}}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, ας συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{H}} := \{\widetilde{\mathcal{H}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ την κανονική διύλιση της σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, και ας θέσουμε ακόμη $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty := \sigma(\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$. Τότε $\widetilde{\mathcal{H}}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Θέτοντας, τώρα, $\mathcal{H}_t := \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_t \cup \sigma(\Theta))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, προκύπτει ότι η $\mathcal{H} := \{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διύλιση, αφού το ίδιο ισχύει και για την $\widetilde{\mathcal{H}}$. Επί πλέον, θέτουμε $\mathcal{H}_\infty := \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_\infty \cup \sigma(\Theta))$.

Παρατηρήσεις 7.1.1. Σχετικά με τη μετρησιμότητα των βασικών τ.μ. που εμπλέκονται σε αυτό το κεφάλαιο σημειώνουμε τα εξής:

(a) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. N_t είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-μετρήσιμη, και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ίδιο θα ισχύει και για τις τ.μ. T_n και W_n, αφού $\{N_t \ge n\} = \{T_n \le t\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ (βλ. π.χ. [34], Lemma 2.1.2, (a)).

Πράγματι, αρχικά σταθεροποιούμε αυθαίρετα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και $\omega \in \Omega$. Αν θέσουμε $\Delta S_u := S_u - S_{u^-} := S_u - \lim_{t \to u^-} S_t$ για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$, τότε από την ιδιότητα (n2) συνεπάγεται ότι $\{u \in (s,t] : \exists\, n \in \mathbb{N} \quad T_n(\omega) = u\} \subseteq \{u \in (s,t] : \Delta N_u(\omega) \neq 0\}$, ενώ η ισχύς της αντίστροφης σχέσης εγκλεισμού αποτελεί συνέπεια των ιδιοτήτων (n4) και (n2). Ακόμη η δεξιά συνέχεια των τροχιών της $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, και άρα ότι $\{u \in (s,t] : \Delta S_u(\omega) \neq 0\} = \{u \in (s,t] : \Delta N_u(\omega) \neq 0\}$ αποτελούν άμεση συνέπεια της ιδιότητας (n3). Συνεπώς,

$$\{u \in (s,t] : \Delta S_u(\omega) \neq 0\} = \{u \in (s,t] : \exists\, n \in \mathbb{N} \quad T_n(\omega) = u\},$$

οπότε το σύνολο στο αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι (το πολύ) αριθμήσιμο (αφού έχουμε υποθέσει ότι $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty\} = \emptyset$), και άρα η $\sum_{s<u\le t} \chi_{\{\Delta S_u \neq 0\}}(\omega)$ είναι μια σειρά. Επομένως, $\sum_{s<u\le t} \chi_{\{\Delta S_u \neq 0\}}(\omega) = \sum_{s<u\le t} \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T_n = u\}}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\{s<T_n\le t\}}(\omega) = (N_t - N_s)(\omega)$, οπότε προκύπτει ότι η $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-μετρησιμότητα της τ.μ. N_t.

(b) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. X_{N_t} είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-μετρήσιμη, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. X_n είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_{T_n}$-μετρήσιμη.

Πράγματι, από το (a) προκύπτει ότι όλες οι τ.μ. T_n είναι $\widetilde{\mathcal{H}}$-χρόνοι διακοπής, καθώς και ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά συνεχής. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι τ.μ. S_{T_n} και $S_{T_{n-1}}$ είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_{T_n}$-μετρήσιμες, αφού $T_{n-1} < T_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (βλ. π.χ. [26], Chapter 1, Propositions 2.18, 1.13 και Lemma 2.15). Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη το ότι $X_n(\omega) = (S_{T_n} - S_{T_{n-1}})(\omega)$, αφού $N_{T_n(\omega)}(\omega) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$, συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. X_n είναι $\widetilde{\mathcal{H}}_{T_n}$-μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $\{N_t = n\} = \{T_n \le t < T_{n+1}\} \in \widetilde{\mathcal{H}}_t$ από το (a), βλ. και πάλι [34], Lemma 2.1.2 για την ισότητα, οπότε $X_{N_t}^{-1}(B) \cap \{N_t = n\} \in \widetilde{\mathcal{H}}_t$ (βλ. και πάλι [26], Chapter 1, Lemma 2.15). Επομένως, προκύπτει η $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-μετρησιμότητα κάθε τ.μ. X_{N_t}.

(c) Η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρησιμότητα της συνάρτησης β^θ, για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$, σε συνδυασμό με το (b) συνεπάγεται τη $\widetilde{\mathcal{H}}_t$-, κι επομένως τη $\mathcal{H}_t$- και τη $\mathcal{H}_\infty$-μετρησιμότητα για κάθε τ.μ. $S_t^{(\beta)}(\theta)$.

(d) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η συνάρτηση $S_t^{(\beta)}(\Theta)$ είναι $\mathcal{H}_t$-μετρήσιμη.

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$. Αρχικά παρατηρούμε ότι από το (b) και το γεγονός ότι τόσο η $\sigma(\Theta)$ όσο και η $\widetilde{\mathcal{H}}_t$ εμπεριέχονται στη $\mathcal{H}_t$, έχουμε ότι για κάθε ζεύγος που εμφανίζεται στο τυχαίο άθροισμα $\sum_{k=1}^{N_t} \beta(X_k, \Theta)$ ισχύει $(X_k, \Theta)^{-1}(B \times D) = X_k^{-1}(B) \cap \Theta^{-1}(D) \in \mathcal{H}_t$ για κάθε $B \times D \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \times \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ζεύγος (X_k, Θ) είναι $\mathcal{H}_t$-$\mathfrak{B}(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμο, κάτι που σε συνδυασμό με το ότι η β είναι μια $\mathfrak{B}(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση συνεπάγεται την ισχύ του (d).

(e) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $S_t^{(\beta)}$ είναι μια $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση.

Πράγματι, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $(X_n \times id_\Upsilon)(\omega, \theta) = (X_n(\omega), \theta)$ για κάθε $(\omega, \theta) \in \Omega \times \Upsilon$, από το (b) προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση $X_k \times id_\Upsilon$ που εμφανίζεται στο τυχαίο άθροισμα $\sum_{k=1}^{N_t} \beta \circ (X_k \times id_\Upsilon)$ είναι $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon) \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη, κι επομένως κάθε συνάρτηση $\beta \circ (X_k \times id_\Upsilon)$ είναι $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη, κάτι που συνεπάγεται ότι το ίδιο θα ισχύει και για την $S_t^{(\beta)}$.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου θεωρούμε μια disintegration $\{P_\theta\}_{\theta \in \Upsilon}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπή με τη Θ (βλ. και Παρατήρηση 2.1.3 για την ύπαρξή της).

Συμβολισμός & Παρατήρηση 7.1.2. Η κλάση όλων των $\mathfrak{B}(\Upsilon \times \Upsilon)$-μετρησίμων συναρτήσεων β από το $\Upsilon \times \Upsilon$ στο $\mathbb{R}$ τέτοιων ώστε $\beta(x, \theta) = \alpha(\theta) + \gamma(x)$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$, όπου οι α, γ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμες συναρτήσεις από το Υ στο $\mathbb{R}$ με $e^{\beta(X_1, \Theta)} \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$, θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_P := \mathcal{F}_{P, X_1, \Theta}$.

Αν η $\beta \in \mathcal{F}_P$, τότε η P-ολοκληρωσιμότητα της τ.μ. $e^{\beta(X_1, \Theta)}$ συνεπάγεται την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $\widehat{D} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{D}$ η τ.μ. $e^{\beta^\theta(X_1)}$ να είναι P_θ-ολοκληρώσιμη: Πράγματι, έχουμε $\infty > \int_{\Theta^{-1}(B)} e^{\beta(X_1, \Theta)} dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1, \Theta)} \mid \Theta] dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} e^{\alpha(\Theta)} \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)} \mid \Theta] dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} e^{\alpha(\Theta)} \mathbb{E}_{P_\bullet}[e^{\gamma(X_1)}] \circ \Theta dP = \int_B \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)}] P_\Theta(d\theta)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, όπου η τρίτη ισότητα είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.3.2. Επομένως, υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{D} := \widehat{D}_{\beta, X_1} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{D}$ να έχουμε ότι $\int e^{\beta^\theta(x)} (P_\theta)_{X_1}(dx) < \infty$ ή ισοδύναμα $\int e^{\beta^\theta(X_1)} dP_\theta < \infty$.

Λήμμα 7.1.3. *Έστω ότι το P ικανοποιεί τις* (a1), (a2) *και* (a3). *Αν η $\beta \in \mathcal{F}_P$ και η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τότε υπάρχουν P_Θ-μηδενικά σύνολα $C_*, \widehat{D} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $r > 0$ να ισχύουν τα εξής:*

(i) Για κάθε $\theta \notin C_*$ ισχύει η ισότητα $E_{P_\theta}[e^{r S_t^{(\beta)}(\theta)}] = e^{t\theta \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{r\beta^\theta(X_1)} - 1]}$, και η ισότητα $\mathbb{E}_P[e^{r S_t^{(\beta)}(\Theta)} \mid \Theta] = e^{t\Theta \mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1, \Theta)} - 1 \mid \Theta]}$ ισχύει $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β..

(ii) Για κάθε $\theta \notin \widehat{D}$ ισχύει η συνθήκη $\mathbb{E}_{P_\theta}[\beta^\theta(X_1)] < \infty$, που συνεπάγεται την

$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_t^{(\beta)}(\theta)}{N_t} = \mathbb{E}_{P_\theta}[\beta^\theta(X_1)] \quad P_\theta - \sigma.\beta..$$

Απόδειξη. (*i*): Αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή εξ'υποθέσεως η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τότε ισοδύναμα έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_*$ η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ (βλ. Πρόταση 3.2.10). Οι υποθέσεις μας σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.2.1, (*iv*) μας εξασφαλίζουν επίσης την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $G_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin G_*$ το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ να είναι μια P_θ-σ.δ. κινδύνου, που συνεπάγεται ότι το ίδιο ισχύει και για το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, όπου $Y_n := Y_{n,\theta}^{(\beta)} := \beta^\theta(X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \varUpsilon$, αφού από το ότι η $\beta \in \mathcal{F}_P$ έχουμε ότι $\beta^\theta(X_n) = \alpha(\theta) + \gamma(X_n)$ για οποιαδήποτε σταθερά $\theta \in \varUpsilon$ και $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως, για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin C_* = G_* \cup L_*$, η ροπογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου αθροίσματος $S_t^{(\beta)}(\theta) = \sum_{k=1}^{N_t} Y_n$ κάτω από το μέτρο πιθανότητας P_θ δίνεται από τη σχέση $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{rS_t^{(\beta)}(\theta)}] = e^{t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{rY_1-1}]} = e^{t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{r\beta^\theta(X_1)}-1]}$ (βλ. π.χ. [34], Corollary 5.2.3). Η τελευταία συνθήκη σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.3.5 συνεπάγεται ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}
&\int\int \chi_B(\theta)e^{rS_t^{(\beta)}(\theta)}dP_\theta P_\Theta(d\theta) = \int_B e^{t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{r\beta^\theta(X_1)}-1]}P_\Theta(d\theta)\\
\iff\quad &\int \chi_{\Theta^{-1}(B)}e^{rS_t^{(\beta)}(\Theta)}dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} e^{t\Theta(\mathbb{E}_{P_\bullet}[e^{r\beta^\bullet(X_1)}-1])\circ\Theta}dP\\
\iff\quad &\int_{\Theta^{-1}(B)} \mathbb{E}_P[e^{rS_t^{(\beta)}(\Theta)} \mid \Theta]dP = \int_{\Theta^{-1}(B)} e^{t\Theta\mathbb{E}_P[e^{r\beta(X_1,\Theta)}-1|\Theta]}dP,
\end{aligned}$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (i).

(ii): Αρχικά παρατηρούμε ότι η υπόθεση $\beta \in \mathcal{F}_P$ σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 7.1.2 συνεπάγεται την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $\widehat{D} \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{D}$ να έχουμε ότι $e^{\beta^\theta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P_\theta)$ και άρα ότι $\beta^\theta(X_1) \in \mathcal{L}^1(P_\theta)$.

Ας σταθεροποιήσουμε, τώρα, ένα αυθαίρετο $\theta \notin \widehat{D}$. Από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών (βλ. π.χ. [5], Theorem 22.1), εξασφαλίζουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \beta^\theta(X_k) = \mathbb{E}_{P_\theta}[\beta^\theta(X_1)] \quad P_\theta - \text{σ.β.}. \tag{7.1}$$

Επί πλέον, επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι εξ' υποθέσεως μια P-σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με ένα κενό μηδενικό σύνολο εξαίρεσης, προκύπτει ότι

$$\lim_{t\to\infty} N_t(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty \quad \text{για κάθε } \omega \in \varOmega,$$

και άρα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t} \beta^\theta(X_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta^\theta(X_k) \overset{(7.1)}{=} \mathbb{E}_{P_\theta}[\beta^\theta(X_1)] \quad P_\theta - \text{σ.β.},$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρήσεις 7.1.4. Σχετικά με το (i) του Λήμματος 7.1.3 σημειώνουμε τα εξής:

(a) Ισχύει ακόμα και αν αντί της $\beta \in \mathcal{F}_P$ κάνουμε την ασθενέστερη υπόθεση ότι το β είναι μια $\mathfrak{B}(\varUpsilon \times \varUpsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση από το $\varUpsilon \times \varUpsilon$ στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\beta(x,\theta) = \alpha(\theta) + \gamma(x)$

για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$, όπου οι α, γ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμες συναρτήσεις από το Υ στο $\mathbb{R}$, αφού στην απόδειξη του εν λόγω ισχυρισμού χρειαζόμαστε μόνο την τελευταία υπόθεση.
(b) Για $r = 1$ και $\beta \in \mathcal{F}_P$, σύμφωνα με το δεύτερο μέρος του (i), προκύπτει ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathbb{E}_P[e^{S_t^{(\beta)}(\Theta)} \mid \Theta] < \infty$ $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β., ενώ από πρώτο μέρος του (i) και την Παρατήρηση 7.1.2 έπεται η ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $\widehat{D}_* := C_* \cup \widehat{D} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{D}_*$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_t^{(\beta)}(\theta)}] < \infty$.

Ας σταθεροποιήσουμε, τώρα, ένα αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$ και ας ορίσουμε για $\beta \in \mathcal{F}_P$ τη συνάρτηση $M_t^{(\beta)}(\theta) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$M_t^{(\beta)}(\theta) := e^{S_t^{(\beta)}(\theta) - t\theta \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)} - 1]} \quad \text{αν } \theta \notin \widehat{D} \tag{7.2}$$

και $M_t^{(\beta)}(\theta) = 0$ αν $\theta \in \widehat{D}$, καθώς και τη συνάρτηση $M_t^{(\beta)} : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται μέσω της σχέσης

$$M_t^{(\beta)}(\omega, \theta) := e^{S_t^{(\beta)}(\omega,\theta) - t\theta \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)} - 1]} \quad \text{για κάθε } (\omega, \theta) \in \Omega \times \widehat{D}^c \tag{7.3}$$

και $M_t^{(\beta)}(\omega, \theta) = 0$ για κάθε $(\omega, \theta) \in \Omega \times \widehat{D}$. Από την Παρατήρηση 7.1.4, (b) έπεται ότι οι συναρτήσεις $M_t^{(\beta)}(\theta)$ και $M_t^{(\beta)}$ είναι καλά ορισμένες.

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με εκείνη που είδαμε στην περίπτωση της $S_t^{(\beta)}(\Theta)$ συμβολίζουμε με $M_t^{(\beta)}(\Theta)$ τη σύνθεση της $M_t^{(\beta)}$ με την $id_\Omega \times \Theta$. Τότε βάσει της Πρότασης 2.3.5, (i) εξασφαλίζουμε ότι

$$M_t^{(\beta)}(\Theta) = e^{S_t^{(\beta)}(\Theta) - t\Theta \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1,\Theta)} - 1 \mid \Theta]} \quad P \mid \sigma(\Theta) - \text{σ.β.}. \tag{7.4}$$

Επί πλέον, από τις Παρατηρήσεις 7.1.1, (c) και (d) προκύπτει ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ οι τ.μ. $M_t^{(\beta)}(\theta)$ και $M_t^{(\beta)}(\Theta)$, αντίστοιχα, είναι $\mathcal{H}_t$-μετρήσιμες, ενώ από την Παρατήρηση 7.1.1, (e) έπεται η $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρησιμότητα κάθε τ.μ. $M_t^{(\beta)}$.

Λήμμα 7.1.5. *Έστω ότι το P ικανοποιεί τις (a1), (a2) και (a3). Αν η $\beta \in \mathcal{F}_P$ και η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τότε υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{D}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$ να ισχύουν τα εξής:*

(i) $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ *για κάθε* $\theta \notin \widehat{D}_*$.

(ii) $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta) \mid \Theta] = 1 \quad P \mid \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$.

(iii) $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)] = 1$.

(iv) $\int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP = \int \xi(\theta) \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] P_\Theta(d\theta)$ *για κάθε* $\xi \in \mathcal{L}^1(P_\Theta)$.

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί (i) και (ii) προκύπτουν από τις (7.2), (7.4), το Λήμμα 7.1.3, (i) και την Παρατήρηση 7.1.4, (b), ενώ ο ισχυρισμός (iii) είναι άμεση συνέπεια του (ii).

Έστω, τώρα, $\xi \in \mathcal{L}^1(P_\Theta)$ και ας θέσουμε $\mu := P \circ (id_\Omega \times \Theta)^{-1}$. Παρατηρούμε ότι κάθε τ.μ. $(\chi_A \times \xi)M_t^{(\beta)}$, όπου $(\chi_A \times \xi)(\omega,\theta) = \chi_A(\omega)\xi(\theta)$ για κάθε $(\omega,\theta) \in \Omega \times \Upsilon$, είναι $\mathcal{H}_t \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη, αφού το ίδιο ισχύει για κάθε τ.μ. $M_t^{(\beta)}$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int (\chi_A \times \xi)M_t^{(\beta)} d\mu &= \int \Big(\big((\chi_A \times \xi)M_t^{(\beta)}\big) \circ (id_\Omega \times \Theta)\Big) dP = \int \chi_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP \\ &\leq \int \mathbb{E}_P[\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) \mid \Theta] dP = \int \xi(\Theta)\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta) \mid \Theta] dP \\ &\overset{(i)}{=} \int \xi(\Theta) dP = \int \xi dP_\Theta < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.3.5, (ii) για $u = (\chi_A \times \xi)M_t^{(\beta)}$ και $f = \Theta$ για να εξασφαλίσουμε τον ισχυρισμό (iv). □

Λήμμα 7.1.6. *Έστω ότι το P ικανοποιεί τις* (a1), (a2) *και* (a3). *Τότε υπάρχουν δύο P_Θ-μηδενικά σύνολα $G_*, \widehat{V}$ της σ-άλγεβρας $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοια ώστε για οποιαδήποτε $\beta \in \mathcal{F}_P$ να ισχύουν τα εξής:*

(i) Αν για κάθε $\theta \notin G_*$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, τότε η $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα έχει P_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

(ii) Αν για κάθε $\theta \notin \widehat{V}$ η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P_θ-ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ οι σ-άλγεβρες $\sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ και $\mathcal{H}_s$ θα είναι P_θ-ανεξάρτητες.

Απόδειξη. Όπως δείξαμε στην απόδειξη του Λήμματος 7.1.3, (i), κάτω από την υπόθεση ότι το P ικανοποιεί τις (a1), (a2) και (a3), εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού σύνολου $G_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin G_*$ το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{\beta^\theta(X_n)\}_{n\in\mathbb{N}})$ να είναι μια P_θ-σ.δ. κινδύνου για $\beta \in \mathcal{F}_P$. Επομένως, οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιούν για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin G_*$ τις απαιτήσεις των Theorems 5.1.2 και 5.1.3 του [34] επάνω στον χ.π. $(\Omega, \Sigma, P_\theta)$. Τότε, εφαρμόζοντας τα εν λόγω αποτελέσματα για αυτές τις σ.δ., προκύπτει ο ισχυρισμός (i).

(ii): Αρχικά σταθεροποιούμε αυθαίρετα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$I_m := I_{m,s,t} := \{v^{(m)} = (v_0,\ldots,v_m) \in [s,t]^{m+1} : s = v_0 < v_1 < \cdots < v_{m-1} < v_m = t\},$$

καθώς και $E_m := E_{s,t,m} := \{N_t - N_s = m\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$. Επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την (n2) και έχουμε υποθέσει ότι η το ενδεχόμενο της έκρηξης είναι το κενό σύνολο, προκύπτει ότι $\Omega = \biguplus_{m\in\mathbb{N}_0} E_m$.

(a) $E_m = \bigcup_{v^{(m)} \in I_m} \bigcap_{j=1}^{m} \{N_{v_j} = N_{v_{j-1}} + 1\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, αρχικά σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $m \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\omega \in E_m$ ισοδύναμα έχουμε ότι $\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{\{s<T_n \le t\}}(\omega) = m$ (βλ. την απόδειξη της Παρατήρησης 7.1.1, (a)). Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια P-σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με μηδενικό σύνολο εξαίρεσης το κενό και το ότι η $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι η επαγόμενη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ με $n_1 < \cdots < n_m$ τέτοια ώστε $s < T_{n_1}(\omega) < \cdots < T_{n_m}(\omega) \le t$ και $N_{T_{n_j}}(\omega) = n_j = n_{j-1} + 1$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$. Κι επειδή δεν μπορούν να υπάρξουν περισσότεροι από m-χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων στο χρονικό διάστημα $(s,t]$ έχουμε $N_t(\omega) = N_{T_{n_m}}(\omega)$. Θέτοντας, τώρα, $v_0 := s$, $v_j := T_{n_j}(\omega)$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ και $v_m := t$ εξασφαλίζουμε ένα στοιχείο $v^{(m)} := (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m) = (s, T_{n_1}(\omega), \ldots, T_{n_{m-1}}(\omega), t)$ του I_m τέτοιο ώστε $(N_{v_j} - N_{v_{j-1}})(\omega) = 1$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, m\}$. Άρα δείξαμε τη σχέση εγκλεισμού $E_m \subseteq \bigcup_{v^{(m)} \in I_m} \bigcap_{j=1}^{m} \{N_{v_j} = N_{v_{j-1}} + 1\}$, κάτι που συνεπάγεται το (a), αφού $N_t - N_s = \sum_{j=1}^{m} (N_{v_j} - N_{v_{j-1}})$.

(b) Από το (a) έπεται ότι για κάθε $\omega \notin E_0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $v^{(m)} \in I_m$ τέτοια ώστε $N_{v_j}(\omega) = N_{v_{j-1}}(\omega) + 1 = N_s(\omega) + j$, και άρα τέτοια ώστε $(N_t - N_s)(\omega) = m$ και $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})(\omega) = X_{N_s(\omega)+j}(\omega)$, οπότε $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}}) \mid E_0^c = X_{N_s+j} \mid E_0^c$ για οποιοδήποτε $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Για το υπόλοιπο της απόδειξης, σταθεροποιούμε τα $m \in \mathbb{N}$ και $v^{(m)} \in I_m$.

(c) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_* \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin G_*$ και $j \in \mathbb{N}_m$ ο περιορισμός $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}}) \mid E_0^c$ να είναι P_θ-ανεξάρτητος της τ.μ. S_u για όλα τα $0 \le u \le s$.

Πράγματι, από το Λήμμα 6.2.1, (iv) έχουμε ότι υπάρχει P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_* \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin G_*$ οι σ.δ. $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ να ικανοποιούν κάτω από το μέτρο πιθανότητας P_θ τις απαιτήσεις του [34], Theorem 5.1.2. Μέχρι το τέλος του βήματος (e), σταθεροποιούμε αυθαίρετο $\theta \notin G_*$.

Τότε έχουμε ότι η σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει P_θ-ανεξάρτητες προσαυξήσεις, κάτι που συνεπάγεται το ότι η τ.μ. $S_{u_2} - S_{u_1}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη της τ.μ. S_u για όλα τα $0 \le u \le s \le u_1 < u_2 \le t$.

Ας σταθεροποιήσουμε u, u_1, u_2 όπως πιο πάνω. Επειδή $(S_{u_2} - S_{u_1}) = \chi_{E_0^c}(S_{u_2} - S_{u_1})$ προκύπτει ότι $(S_{u_2} - S_{u_1})^{-1}(B) = \big((S_{u_2} - S_{u_1}) \mid E_0^c\big)^{-1}(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$. Επομένως, θέτοντας $\pi_{\theta,u,u_1,u_2} := \pi_{\theta,u,u_1,u_2,B_1,B_2} := P_\theta\Big(\big((S_{u_2} - S_{u_1}) \mid E_0^c\big)^{-1}(B_1) \cap S_u^{-1}(B_2)\Big)$ για όλα τα $\theta \in \varUpsilon$, $B_1 \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ και $B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\pi_{\theta,u,u_1,u_2} &= P_\theta\big((S_{u_2} - S_{u_1})^{-1}(B_1) \cap S_u^{-1}(B_2)\big) = P_\theta((S_{u_2} - S_{u_1})^{-1}(B_1)) P_\theta(S_u^{-1}(B_2)) \\ &= P_\theta\Big(\big((S_{u_2} - S_{u_1}) \mid E_0^c\big)^{-1}(B_1)\Big) P_\theta(S_u^{-1}(B_2)).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τις τελευταίες ισότητες για $(u_1, u_2) = (v_{j-1}, v_j)$ με $j \in \{1, \ldots, m\}$, παίρνουμε ότι

$$\pi_{\theta,u,v_{j-1},v_j} = P_\theta\Big(\big((S_{v_j} - S_{v_{j-1}}) \mid E_0^c\big)^{-1}(B_1)\Big)P_\theta(S_u^{-1}(B_2))$$

για κάθε $B_1 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$, κάτι που ισοδυναμεί με το (c), αφού από το (b) κάθε τ.μ. $(S_{v_j} - S_{v_{j-1}}) \mid E_0^c$ παίρνει μόνο θετικές τιμές.

(d) Η οικογένεια $\{(S_{v_j} - S_{v_{j-1}}) \mid E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη.

Πράγματι, από την P_θ-ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έπεται ότι η ακολουθία $\{(S_{v_j} - S_{v_{j-1}})\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη. Ακολουθώντας, τώρα, τη συλλογιστική του βήματος (c), μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι όλοι το ίδιο ισχύει για όλους τους περιορισμούς $\{(S_{v_j} - S_{v_{j-1}}) \mid E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$.

(e) Η σ-άλγεβρα $\sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ είναι P_θ-ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{H}}_s$.

Πράγματι, από τα βήματα (b), (c), και (d) έχουμε ότι η οικογένεια $\{X_{N_s+j} \mid E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι P_θ-ανεξάρτητη και P_θ-ανεξάρτητη της τ.μ. S_u για όλα τα $0 \le u \le s$. Επομένως, το ίδιο θα ισχύει και για την οικογένεια $\{\beta^\theta(X_{N_s+j}) \mid E_0^c\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$, κάτι που σε συνδυασμό με τη συνθήκη $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta) \mid E_0^c = \sum_{j=1}^m \beta^\theta(X_{N_s+j}) \mid E_0^c$, η οποία και αποτελεί άμεση συνέπεια του (b), συνεπάγεται ότι ο περιορισμός $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta) \mid E_0^c$ είναι P_θ-ανεξάρτητος της τ.μ. S_u για όλα τα $0 \le u \le s$.

Επίσης παρατηρούμε ότι η συνθήκη $E_0 = \{S_t - S_s = 0\} = \{(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta) = 0\}$ συνεπάγεται ότι $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta) \mid E_0 = 0 \mid E_0$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, και ότι ο περιορισμός $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta) \mid E_0$ είναι P_θ-ανεξάρτητος της τ.μ. S_u για όλα τα $0 \le u \le s$. Επομένως, το ίδιο θα ισχύει και για την τ.μ. $(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)$, κάτι που αποδεικνύει το (e).

(f) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{V} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widehat{V}$ η σ-άλγεβρα $\sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ να είναι P_θ-ανεξάρτητη της $\mathcal{H}_s$.

Πράγματι, από το βήμα (e) ισοδύναμα έχουμε ότι για κάθε $\theta \notin G_*$ ισχύει η ισότητα

$$P_\theta(E \cap F) = P_\theta(E)P_\theta(F) \tag{7.5}$$

για κάθε $E \in \sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ και $F \in \widetilde{\mathcal{H}}_s$. Όμως, επειδή η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration συνεπής με τη Θ, τότε για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ θα υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V_B$ να ισχύει ότι $P_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$. Μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ να ισχύει ότι $P_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$, κι επομένως για κάθε $\theta \in B \cap V^c$ και για κάθε $E \in \sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε ότι

$$P_\theta(E \cap \Theta^{-1}(B)) = P_\theta(E) = P_\theta(E)P_\theta(\Theta^{-1}(B)),$$

ενώ για κάθε $\theta \in B^c \cap V^c$ ισχύει ότι $P_\theta(E \cap \Theta^{-1}(B)) = 0 = P_\theta(E)P_\theta(\Theta^{-1}(B))$. Συνεπώς, για κάθε $\theta \notin V$ η συνθήκη (7.5) ικανοποιείται για όλα τα $F \in \sigma(\Theta)$. Επομένως, για κάθε

$\theta \notin \widehat{V} := V \cup G_*$ η συνθήκη (7.5) ικανοποιείται για κάθε $E \in \sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ και $F \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)$.

Σταθεροποιούμε, τώρα, ένα αυθαίρετο $\theta \notin \widehat{V}$. Αν με $\mathcal{D}_s^*$ συμβολίσουμε την οικογένεια όλων των $F \in \mathcal{H}_s$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (7.5) για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$, τότε έχουμε ότι $\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{D}_s^*$. Επί πλέον, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{D}_s^*$ είναι μια κλάση Dynkin.

Έπειτα, σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$ και θέτουμε

$$\mathcal{G}_s^* := \Big\{\bigcap_{k=1}^{n} C_k : C_k \in \mathcal{H}_s \cup \sigma(\Theta),\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Τότε, για κάθε $G \in \mathcal{G}_s^*$ υπάρχουν ένα $n \in \mathbb{N}$ και μια πεπερασμένη ακολουθία $\{C_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ στοιχείων της ένωσης $\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)$ τέτοια ώστε $G = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$. Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι είναι δυνατό να διαμερίσουμε το $\{1,\ldots,n\}$ στα σύνολα δεικτών

$$I_\Theta := \{k \in \{1,\ldots,n\} : C_k \in \sigma(\Theta)\} \ \text{ και } \ I_F := \{k \in \{1,\ldots,n\} : C_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \setminus \sigma(\Theta)\}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ως σ-άλγεβρες οι $\widetilde{\mathcal{H}}_s$ και $\sigma(\Theta)$ είναι κλειστές ως προς τις πεπερασμένες τομές. Επομένως, $\bigcap_{k\in I_\Theta} C_k \in \sigma(\Theta)$ για $C_k \in \sigma(\Theta)$, και άρα θα υπάρχει $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $\Theta^{-1}(B) = \bigcap_{k\in I_\Theta} C_k$, οπότε λόγω του ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration συνεπής με τη Θ θα έχουμε για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ ότι

$$\begin{aligned}
P_\theta(E \cap G) &= P_\theta\Big(E \cap \Theta^{-1}(B) \cap \Big(\bigcap_{k\in I_F} C_k\Big)\Big) = \chi_B(\theta) P_\theta\Big(E \cap \Big(\bigcap_{k\in I_F} C_k\Big)\Big) \\
&= \chi_B(\theta) P_\theta\Big(\bigcap_{k\in I_F} C_k\Big) P_\theta(E) = P_\theta\Big(\Theta^{-1}(B) \cap \Big(\bigcap_{k\in I_F} C_k\Big)\Big) P_\theta(E) \\
&= P_\theta(G) P_\theta(E).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, δείξαμε ότι η (7.5) ικανοποιείται για κάθε $G \in \mathcal{G}_s^*$, κι επομένως $\mathcal{G}_s^* \subseteq \mathcal{D}_s^*$. Η τελευταία σχέση εγκλεισμού, σε συνδυασμό με το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης, συνεπάγεται ότι $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{D}_s^*$, και άρα την ισχύ του βήματος (f), κάτι που ολοκληρώνει την όλη απόδειξη.$\square$

Πρόταση 7.1.7. *Έστω ότι το P ικανοποιεί τις* (a1), (a2) *και* (a3). *Αν η $\beta \in \mathcal{F}_P$ και η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{D}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{D}_*$ η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \mathcal{H})$-martingale που ικανοποιεί την $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

(ii) *Η σ.δ.* $\{M_t^{(\beta)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι ένα* $(P,\mathcal{H})$*-martingale τέτοιο ώστε* $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)\mid\Theta] = 1 = \mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)]$ *για κάθε* $t\in\mathbb{R}_+$, *όπου η πρώτη ισότητα ισχύει* $P\mid\sigma(\Theta)$*-σ.β..*

Απόδειξη. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι από τις Παρατηρήσεις 7.1.1, (c) και (d) προκύπτει για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ η $\mathcal{H}_t$-μετρησιμότητα της τ.μ. $M_t^{(\beta)}(\theta)$, για οποιοδήποτε σταθερό $\theta\in\Upsilon$, καθώς και της τ.μ. $M_t^{(\beta)}(\Theta)$, αντίστοιχα. Επί πλέον, από το Λήμμα 7.1.5, έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{D}_*\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widehat{D}_*$ να ισχύει ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, καθώς επίσης και ότι $\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)\mid\Theta] = 1 = \mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta)]$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, όπου η πρώτη ισότητα ισχύει $P\mid\sigma(\Theta)$-σ.β..

(i): Επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-μ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, ισοδύναμα έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_*\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin L_*$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο θ, και άρα να έχει P_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις. Όμως, από το Λήμμα 7.1.6, (i), έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_*\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin G_*$ η P_θ-ανεξαρτησία και στασιμότητα των προσαυξήσεων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να συνεπάγεται αυτή των προσαυξήσεων της τροποποιημένης σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Επί πλέον, από την P_θ-ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και το Λήμμα 7.1.6, (ii), συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{V}\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin L_*\cup\widehat{V}$, για όλα τα $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s\le t$ και για κάθε $A\in\mathcal{H}_s$ οι τ.μ. $e^{(S_t^{(\beta)}-S_s^{(\beta)})(\theta)}$ και χ_A είναι P_θ-ανεξάρτητες. Επειδή $G_*\cup L_*\subseteq\widehat{D}_*$ (βλ. Παρατήρηση 7.1.4, (b)), θέτοντας $\widetilde{D}_* := \widehat{V}\cup\widehat{D}_* = V\cup\widehat{D}_*$ έχουμε για κάθε $\theta\notin\widetilde{D}_*$ ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] &\overset{(7.2)}{=} \mathbb{E}_{P_\theta}\left[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)e^{(S_t^{(\beta)}-S_s^{(\beta)})(\theta)-(t-s)\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)}-1]}\right]\\ &= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)]\mathbb{E}_{P_\theta}[M_{t-s}^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)],\end{aligned}$$

κάτι που αποδεικνύει το (i).

(ii): Επειδή από το (i) υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{D}_*\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta\notin\widetilde{D}_*$ η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα (m3), τότε για όλα τα $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s\le t$ και για κάθε $A\in\mathcal{H}_s$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_A M_t^{(\beta)}(\Theta)dP &= \int\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)]P_\Theta(d\theta) = \int\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)]P_\Theta(d\theta)\\ &= \int_A M_s^{(\beta)}(\Theta)dP,\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα αντλούν την ισχύ τους από το Λήμμα 7.1.5, (iv), κάτι που αποδεικνύει το (ii) και ολοκληρώνει την όλη απόδειξη. □

7.2 Μια απάντηση στο κεντρικό πρόβλημα

Σε αυτή την ενότητα δίνεται το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου (βλ. Θεώρημα 7.2.9).

Ορισμοί 7.2.1. Έστω $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ με $0 \in \mathbb{T}$, έστω $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ μια διύλιση για τον μ.χ. (Ω, Σ), κι έστω P, Q δύο μέτρα πιθανότητας επάνω στη Σ, καθώς και $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ και μια σ.δ. επάνω στον (Ω, Σ). Τότε:

(a) τα P και Q ονομάζονται **ισοδύναμα** και γράφουμε συμβολικά $Q \sim P$ αν για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει ότι

$$Q(A) = 0 \Longleftrightarrow P(A) = 0.$$

(b) τα P και Q ονομάζονται **προοδευτικά ισοδύναμα** (για την $\mathcal{Z}$) αν ισχύει ότι

$$\{N \in \mathcal{Z}_t : Q(N) = 0\} = \{N \in \mathcal{Z}_t : P(N) = 0\} \;\text{ για κάθε }\; t \in \mathbb{T}$$

δηλαδή αν για κάθε $t \in \mathbb{T}$ έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα επάνω στη $\mathcal{Z}_t$. Ιδιαιτέρως, αν τα P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμα για την $\mathcal{H}$, γράφουμε συμβολικά $Q \overset{pr}{\sim} P$.

(c) τα P και Q ονομάζονται **κάθετα μεταξύ τους** (*singular*) και γράφουμε συμβολικά $Q \perp P$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο $A \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 1$.

(d) το Q είναι ένα $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$**-martingale-ισοδύναμο μέτρο** με το P αν

(em1) $Q \sim P$,

(em2) η σ.δ. $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{Z})$-martingale.

(e) το Q είναι ένα $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$**-martingale-προοδευτικά ισοδύναμο μέτρο** με το P αν

(pem1) τα P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμα για την $\mathcal{Z}$,

(pem2) η σ.δ. $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{Z})$-martingale.

Η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q που είναι $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$-martingale-προοδευτικά ισοδύναμα με το P θα συμβολίζεται με $\mathbb{M}_P(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$.

Για τον Ορισμό 7.2.1, (a), βλέπε π.χ. [32], Definition 1.1, ενώ για $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ και $\Sigma = \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{Z}_t)$, ο Ορισμός 7.2.1, (b), συμπίπτει με εκείνον των Delbaen & Haezendonck [8], Definition 2.1. Επίσης, παρατηρούμε ότι αν το σύνολο δεικτών $\mathbb{T} = [0, \tau]$, όπου $\tau \in (0, \infty)$, και $\Sigma = \mathcal{Z}_T$, τότε η κλάση $\mathbb{M}_P(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}})$ συμπίπτει με αυτή των $(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in[0,\tau]})$-martingale-ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 7.2.2. *Αν* $Q \overset{pr}{\sim} P$ *τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$,

(ii) $Q_\Theta \sim P_\Theta$.

Απόδειξη. Επειδή για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $Q \mid \mathcal{H}_t \sim P \mid \mathcal{H}_t$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_t \subseteq \mathcal{H}_t$, προκύπτει ότι $Q \mid \widetilde{\mathcal{H}}_t \sim P \mid \widetilde{\mathcal{H}}_t$. Επί πλέον από την Παρατήρηση 7.1.1, (b) έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει $S_{T_1}^{-1}(B) \cap \{T_1 \leq n\} \in \widetilde{\mathcal{H}}_n$, και άρα μπορούμε να επαναλάβουμε τα επιχειρήματα της απόδειξης του [8], Lemma 2.1 για να εξασφαλίσουμε το (i). Ο ισχυρισμός (ii) αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι $Q \overset{pr}{\sim} P$ σε συνδυασμό με το ότι $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. □

Έστω $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια P-σύνθετη διαδικασία Poisson με παραμέτρους $\theta > 0$ και P_{X_1}. Στο [8], Proposition 2.2, οι Delbaen & Haezendonck έδωσαν ένα χαρακτηρισμό όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στη σ-άλγεβρα Σ ώστε $Q \mid \widetilde{\mathcal{H}}_t \sim P \mid \widetilde{\mathcal{H}}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και η S να παραμένει μια σύνθετη διαδικασία Poisson κάτω από το Q, με παραμέτρους θe^{α} και Q_{X_1}, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Το γεγονός αυτό εγείρει το ακόλουθο ερώτημα.

Ερώτημα 7.2.3. Έστω ότι η S είναι μια P-CMPP(Θ, P_{X_1}). Να χαρακτηριστούν όλα τα μέτρα πιθανότητας Q επάνω στη Σ έτσι ώστε $Q \overset{pr}{\sim} P$ και η S να είναι μια Q-CMPP$(g(\Theta), Q_{X_1})$, όπου η g είναι μια θετική $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση επάνω στο Υ.

Συμβολισμός 7.2.4. Έστω g μια θετική $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση επάνω στο Υ τέτοια ώστε $\frac{g(\Theta)}{\Theta} \in \mathcal{L}^1(P)$. Η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στη Σ που ικανοποιούν τις (a1) και (a2) ώστε $Q \overset{pr}{\sim} P$ και η S να είναι μια Q-CMPP$(g(\Theta), Q_{X_1})$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{S,g} := \mathcal{M}_{S,g,P_{X_1},\Theta}$. Για $g := id_{\Upsilon}$ θέτουμε $\mathcal{M}_S := \mathcal{M}_{S,id_{\Upsilon}}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα παρέχει την μια κατεύθυνση του ζητούμενου χαρακτηρισμού.

Πρόταση 7.2.5. *Έστω $P \in \mathcal{M}_S$ και $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$. Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει μια disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη Θ. Τότε υπάρχει μια ουσιωδώς μοναδική συνάρτηση $\beta \in \mathcal{F}_P$ τέτοια ώστε*

$$g(\Theta) = \Theta e^{\alpha(\Theta)} \quad \textit{και} \quad \gamma = \ln f, \tag{$*$}$$

όπου η f είναι μια P_{X_1}-σ.β. θετική παράγωγος Radon-Nikodym του Q_{X_1} ως προς P_{X_1}, και υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V_*$, για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες

$$Q_\theta(A) = \int_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta \tag{M_θ}$$

και

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP, \tag{M_ξ}$$

όπου η ξ είναι μία P_Θ-σ.β. θετική παράγωγος Radon-Nikodym του Q_Θ ως προς P_Θ.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ και το Λήμμα 7.2.2, (ii) συνεπάγεται ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$. Συνεπώς, κάθε P_Θ-μηδενικό σύνολο είναι κι ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο και αντιστρόφως.

(a) Αν θέσουμε $\alpha(\theta) := \ln(\theta^{-1} g(\theta))$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, τότε υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_{\mathrm{a}} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{a}}$ να ισχύει η ισότητα

$$Q_\theta(N_t = n) = e^{n\alpha(\theta) - t\theta[e^{\alpha(\theta)}-1]} P_\theta(N_t = n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Πράγματι, επειδή η σ.δ. $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι τόσο μια P-CMPP(Θ, P_{X_1}) όσο και μια Q-CMPP$(g(\Theta), Q_{X_1})$, από το Θεώρημα 6.2.2 προκύπτει ότι υπάρχουν ένα P_Θ- κι ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο C_* και $\widetilde{C}_*$ της σ-άλγεβρας $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοια ώστε για κάθε $\theta \notin C_*$ και $\theta \notin \widetilde{C}_*$ η S να είναι μια P_θ-CPP$(\theta, (P_\theta)_{X_1})$ και μια Q_θ-CPP$(g(\theta), Q_\theta)_{X_1})$, αντίστοιχα. Επομένως, θέτοντας $G_{\mathrm{a}} := C_* \cup \widetilde{C}_*$ και μέσω ενός εύκολου υπολογισμού εξασφαλίζουμε το βήμα (a).

(b) Έστω $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \widetilde{\mathcal{H}}_s$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathcal{X}_n := \sigma(\{X_k\}_{k \in \{1,\ldots,n\}})$ τέτοιο ώστε $A \cap \{N_s = n\} = B_n \cap \{N_s = n\}$. Επί πλέον, υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $G_{\mathrm{b}} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{b}}$ να ισχύει η σχέση

$$Q_\theta(A) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta(B_n) Q_\theta(N_s = n).$$

Πράγματι, το πρώτο μέρος του (b) αποτελεί άμεση συνέπεια της (2.19) του [8]. Επειδή το Q ικανοποιεί την (a1) από το Λήμμα 6.2.1, (i) έχουμε ότι υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $G_{\mathrm{b}} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{b}}$ οι σ.δ. $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι Q_θ-ανεξάρτητες, απ′ όπου έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ίδιο θα ισχύει και για τα ενδεχόμενα $B_n \in \mathcal{X}_n$ και $\{N_s = n\}$. Εφαρμόζοντας τώρα τη συλλογιστική της απόδειξης της Proposition 2.2 του [8], εξάγουμε το (b).

(c) Υπάρχει μια P_{X_1}-σ.β. θετική συνάρτηση f τέτοια ώστε $Q_{X_1}(D) = \int_D f dP_{X_1}$ για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, καθώς κι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_{\mathrm{c}} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{c}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $B_n \in \mathcal{X}_n$ να ισχύουν οι ισότητες

$$Q(B_n) = Q_\theta(B_n) = \mathbb{E}_{P_\theta}\left[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\right] = \mathbb{E}_P\left[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\right], \tag{7.6}$$

όπου $\gamma := \ln f$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ και το Λήμμα 7.2.2, (i) έχουμε ότι $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, κάτι σε συνδυασμό με το Θεώρημα Radon-Nikodym (βλ. Θεώρημα A.4) συνεπάγεται την ύπαρξη μιας P_{X_1}-σ.β. θετικής συνάρτησης f τέτοιας ώστε $Q_{X_1}(D) = \int_D f dP_{X_1}$ για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P_{X_1}-μηδενικό σύνολο στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ όλων των $y \in \Upsilon$ ώστε $f(y) = 0$ είναι το κενό σύνολο.

Επίσης παρατηρούμε ότι εξ'υποθέσεως η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Q-ανεξάρτητη και ισόνομη, κάτι που σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.2.1, (ii) συνεπάγεται την ύπαρξη ενός Q_Θ-μηδενικού συνόλου $\widetilde{G}'' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{G}''$ η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι Q_θ-ανεξάρτητη και ισόνομη. Επομένως, η δεύτερη ισότητα προκύπτει όπως στο [8], (2.21).

Για να δείξουμε, τώρα, την πρώτη και την τελευταία ισότητα του (7.6) ας σταθεροποιήσουμε $n \in \mathbb{N}$ και $B_n \in \mathcal{X}_n$. Επειδή το Q ικανοποιεί την (a2), εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.3.2 προκύπτει ότι για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\int_D Q_\theta(B_n) Q_\Theta(d\theta) = \int_{\Theta^{-1}(D)} Q(B_n \mid \Theta) dQ \overset{\text{(a2)}}{=} \int_{\Theta^{-1}(D)} Q(B_n) dQ = \int_D Q(B_n) Q_\Theta(d\theta).$$

Επομένως, υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{O}^{(*)}_{n,B_n} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{O}^{(*)}_{n,B_n}$ να ισχύει η πρώτη ισότητα του (7.6). Επειδή, όμως, κάθε $\mathcal{X}_n$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης ότι υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{O}^{(*)} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{O}^{(*)}$ να ισχύει η πρώτη ισότητα της (7.6).

Επειδή το P ικανοποιεί την (a2), εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.3.2, προκύπτει ότι για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Theta^{-1}(D)} \mathbb{E}_P\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big] dP &= \int_{\Theta^{-1}(D)} \mathbb{E}_P\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)} \mid \Theta\big] dP \\ &= \int_{\Theta^{-1}(D)} \mathbb{E}_{P_\bullet}\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big] \circ \Theta dP \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\int_D \mathbb{E}_P\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big] P_\Theta(d\theta) = \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big] P_\Theta(d\theta) \tag{7.7}$$

και άρα υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O^{(*)}_{n,B_n} := O^{(*)}_{n,B_n,\gamma,X_1,\ldots,X_n} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O^{(*)}_{n,B_n}$ να ισχύει η τελευταία ισότητα της (7.6). Και πάλι μέσω ενός επιχειρήματος μονότονης κλάσης προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O^{(*)} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O^{(*)}$ να ισχύει η τελευταία ισότητα της (7.6). Επομένως, θέτοντας $G_{\mathrm{c}} := \widetilde{G}'' \cup \widetilde{O}^{(*)} \cup O^{(*)}$, προκύπτει το βήμα (c).

(d)Έστω $\beta(x,\theta) := \alpha(\theta) + \gamma(x)$ για κάθε $(x,\theta) \in \Upsilon \times \Upsilon$. Το δεύτερο μέρος του (c) σε συνδυασμό με το ότι το P ικανοποιεί τη συνθήκη (a2), συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $G_{\mathrm{d}} := O^{(*)}_{\gamma,X_1} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $\widehat{D} \subseteq G_{\mathrm{d}}$ και για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{d}}$ να έχουμε $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$, κάτι που μέσω ενός εύκολου υπολογισμού μας δίνει ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)}] = e^{\alpha(\theta)} \quad \text{για κάθε } \theta \notin G_{\mathrm{d}},$$

ενώ λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση $\frac{g(\Theta)}{\Theta} \in \mathcal{L}^1(P)$ εξασφαλίζουμε το ότι

$$\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1,\Theta)}] = \mathbb{E}_P[e^{\alpha(\Theta)}] = \mathbb{E}_P\Big[\frac{g(\Theta)}{\Theta}\Big] < \infty.$$

Προφανώς, τότε $\beta \in \mathcal{F}_P$. Η απόδειξη της σχέσης εγκλεισμού $\widehat{D} \subseteq G_{\mathrm{d}}$ είναι άμεση συνέπεια των ορισμών των $\widehat{D}$ και G_{d}.

(e) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V_*$ να ικανοποιείται η συνθήκη (M_θ) για τις $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$.

Θα αποδείξουμε το (e) μέσω ένος επιχειρήματος μονότονης κλάσης.

Αρχικά παρατηρούμε ότι από την Πρόταση 7.1.7, (i) υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{D}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{D}_*$ η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta, \mathcal{H})$-martingale που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επί πλέον, το ότι η disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με τη Θ συνεπάγεται, όπως στο βήμα (e) της απόδειξης του Λήμματος 7.1.6, την ύπαρξη ενός Q_Θ-μηδενικού συνόλου $\widetilde{V} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{V}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ να έχουμε ότι $Q_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$. Επίσης, για κάθε $\theta \notin V$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει ότι $P_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$, όπου V είναι το P_Θ-μηδενικό σύνολο της προαναφερθείσας απόδειξης.

Τότε, θέτοντας $V_* := G_{\mathrm{a}} \cup G_{\mathrm{b}} \cup G_{\mathrm{c}} \cup G_{\mathrm{d}} \cup \widetilde{D}_* \cup \widetilde{V} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, προκύπτει ότι $P_\Theta(V_*) = 0$, καθώς επίσης και ότι $V \subseteq V_*$, αφού $V \subseteq \widetilde{D}_*$ (βλ. την απόδειξη της Πρότασης 7.1.7, (i)). Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε αυθαίρετα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_s$ την οικογένεια όλων των $A \in \mathcal{H}_s$ που ικανοποιούν την (M_θ) για κάθε $\theta \notin V_*$. Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{K}_s. \tag{7.8}$$

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε $A = \Theta^{-1}(B)$ για $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Λαμβάνοντας ξανά υπόψη το ότι οι disintegrations $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι συνεπείς με τη Θ, καθώς και το ότι $V \cup \widetilde{V} \subseteq V_*$, προκύπτει ότι για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in (V_*)^c \cap B$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\Theta^{-1}(B)} M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1 = Q_\theta(\Theta^{-1}(B)),$$

όπου η δεύτερη ισότητα αντλεί την ισχύ της από το Λήμμα 7.1.5, (i). Εφαρμόζοντας την ίδια συλλογιστική παίρνουμε ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)] = 0 = Q_\theta(\Theta^{-1}(B))$ για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in (V_*)^c \cap B^c$. Συνεπώς, $A \in \mathcal{K}_s$ και άρα $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{K}_s \neq \emptyset$.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι $A \in \widetilde{\mathcal{H}}_s$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα σύνολο $B_n \in \mathcal{X}_n$

τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin V_*$ να ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
Q_\theta(A) &\overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Q_\theta(B_n) Q_\theta(N_s = n) \overset{(7.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big] Q_\theta(N_s = n) \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big] e^{n\alpha(\theta) - s\theta[e^{\alpha(\theta)}-1]} P_\theta(N_s = n) \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{A\cap\{N_s=n\}} e^{n\alpha(\theta) - s\theta[e^{\alpha(\theta)}-1] + \sum_{j=1}^{N_s} \gamma(X_j)}\big] \\
&\overset{(d),(7.2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_{\{N_s=n\}} \chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)\big] = \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_A M_s^{(\beta)}(\theta)\big] = \mathbb{E}_{P_\theta}\big[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)\big],
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία και η τελευταία ισότητα αποτελούν συνέπεια του Θεωρήματος B. Levi (βλ. π.χ. [1], Πόρισμα 6.10) και της Πρότασης 7.1.7, (i), αντίστοιχα. Δηλαδή, δείξαμε ότι $A \in \mathcal{K}_s$, οπότε $\widetilde{\mathcal{H}}_s \subseteq \mathcal{K}_s$, κάτι που αποδεικνύει την (7.8).

Ας ορίσουμε, τώρα, τις κλάσεις

$$\mathcal{G} := \Big\{ \bigcap_{k=1}^{m} A_k : A_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta),\ m \in \mathbb{N} \Big\} \quad \text{και} \quad \mathcal{U} := \Big\{ \biguplus_{j=1}^{r} B_j : r \in \mathbb{N},\ B_j \in \mathcal{G} \Big\}.$$

Τότε ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$\mathcal{G}, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}_s. \tag{7.9}$$

Για να δείξουμε την (7.9), ας σταθεροποιήσουμε $G \in \mathcal{G}$. Τότε υπάρχουν ένα $m \in \mathbb{N}$ και μια πεπερασμένη ακολουθία $\{A_k\}_{k\in\{1,\ldots,m\}}$ στην ένωση $\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)$ τέτοια ώστε $G = \bigcap_{k=1}^m A_k$. Θέτοντας

$$I_\Theta := \{k \in \{1,\ldots,m\} : A_k \in \sigma(\Theta)\} \quad \text{και} \quad I_H := \{k \in \{1,\ldots,m\} : A_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s \setminus \sigma(\Theta)\},$$

παίρνουμε ότι $I_\Theta \cup I_H = \{1,\ldots,m\}$ καθώς και ότι

$$\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k \in \sigma(\Theta) \quad \text{και} \quad \bigcap_{k\in I_H} A_k \in \widetilde{\mathcal{H}}_s. \tag{7.10}$$

Από το πρώτο μέρος της (7.10) έπεται ότι υπάρχει $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε $\Theta^{-1}(D) = \bigcap_{k\in I_\Theta} A_k$, κάτι που σε συνδυασμό με το δεύτερο μέρος της (7.10), τη συνθήκη (7.8), το ότι οι $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι disintegrations συνεπείς με τη Θ, και την Πρόταση 7.1.7, (i) συνεπάγεται ότι για κάθε $\theta \in (V_*)^c \cap D$ έχουμε

$$\begin{aligned}
Q_\theta(G) &= Q_\theta\Big(\Theta^{-1}(D) \cap \Big(\bigcap_{k\in I_H} A_k\Big)\Big) = Q_\theta\Big(\bigcap_{k\in I_H} A_k\Big) = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} M_s^{(\beta)}(\theta)] \\
&= \int_{\Theta^{-1}(D)} \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} M_s^{(\beta)}(\theta) dP_\theta = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_G M_s^{(\beta)}(\theta)] = \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_G M_t^{(\beta)}(\theta)],
\end{aligned}$$

ενώ για κάθε $\theta \in (V_*)^c \cap D^c$ ομοίως προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_G M_t^{(\beta)}(\theta)] = 0 = Q_\theta\Big(\Theta^{-1}(D) \cap \big(\bigcap_{k \in I_H} A_k\big)\Big) = Q_\theta(G).$$

Συνεπώς, $G \in \mathcal{K}_s$ κι επομένως $\mathcal{G}, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}_s$, κάτι που αποδεικνύει την (7.9).

Από τους ορισμούς των $\mathcal{G}$ και $\mathcal{U}$ προκύπτει ότι $\mathcal{U} = \alpha(\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta))$ (βλ. π.χ. [12], I, Aufgabe 5.3), οπότε $\mathcal{H}_s = \sigma(\widetilde{\mathcal{H}}_s \cup \sigma(\Theta)) = \sigma(\mathcal{U}) = m(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{K}_s$, όπου για την τελευταία ισότητα βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 1.16, ενώ η σχέση εγκλεισμού αντλεί την ισχύ της από την (7.9) σε συνδυασμό με το ότι μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{K}_s$ είναι μια μονότονη κλάση (βλ. Θεώρημα A.8). Επομένως, $\mathcal{H}_s = \mathcal{K}_s$, και άρα δείξαμε το (e).

(f) Η συνθήκη (M_ξ) ικανοποιείται από τα Q και P.

Πράγματι, επειδή $Q \overset{pr}{\sim} P$ από το Λήμμα 7.2.2, (ii) έχουμε ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$, κάτι που σε συνδυασμό με το Θεώρημα Radon-Nikodym συνεπάγεται την ύπαρξη μιας P_Θ-σ.β. θετικής συνάρτησης ξ τέτοιας ώστε $Q_\Theta(B) = \int_B \xi dP_\Theta$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (M_θ), προκύπτει για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ ότι

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int\int \chi_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta Q_\Theta(d\theta) = \int \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)]\xi(\theta) P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_A \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta) dP, \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα αντλεί την ισχύ της από το Λήμμα 7.1.5, (iii). □

Ας θεωρήσουμε, τώρα, έναν αυθαίρετο αλλά σταθερό χ.π. $(\Omega^*, \Sigma^*, P^*)$, καθώς επίσης και τη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, τη σ.δ. μεγέθους απαίτησης $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ και την τ.μ. Θ^* επάνω σε αυτόν, και ας υποθέσουμε ότι οι $\{W_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ και Θ^* ικανοποιούν τις συνθήκες (a1*), (a2*) και (a3*), που είναι οι συνθήκες (a1), (a2) και (a3) αλλά με W_n^*, X_n^* και Θ^* στη θέση των W_n, X_n και Θ, αντίστοιχα. *Μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θέτουμε* $\widetilde{\Omega} := \Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}}$, $\Omega = \widetilde{\Omega} \times \Upsilon$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ *και* $\Sigma := \mathfrak{B}(\Omega)$. *Επίσης για* $n \in \mathbb{N}$ *θέτουμε* $W^* := (W_1^*, \ldots, W_n^*, \ldots)$, $X^* := (X_1^*, \ldots, X_n^*, \ldots)$ *και θεωρούμε μια απεικόνιση* Ψ^* *από το* Ω^* *στο* Ω *που ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\Psi^*(\omega^*) := (W^*, X^*, \Theta^*)(\omega^*) := (w, x, \theta) := \omega, \quad \text{για κάθε} \quad \omega^* \in \Omega^*,$$

όπου $w = (w_1, \ldots, w_n, \ldots) \in \Upsilon^{\mathbb{N}}$, $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \Upsilon^{\mathbb{N}}$ και $\theta \in \Upsilon$.

Παρατηρήσεις 7.2.6. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε τον χ.π. $(\Omega, \Sigma, P) := (\Omega, \Sigma, P^*_{\Psi^*})$ αντί του $(\Omega^*, \Sigma^*, P^*)$ διότι ισχύουν τα εξής:

(a) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $W_n, X_n, \Theta : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ μέσω της

$$W_n^* = W_n \circ \Psi^*, \quad X_n^* = X_n \circ \Psi^* \quad \text{και} \quad \Theta^* = \Theta \circ \Psi^*. \tag{7.11}$$

Προφανώς, κάθε W_n, X_n και η Θ είναι τ.μ. επάνω στο Ω. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $P^*_{W^*_n} = P^* \circ (W_n \circ \Psi^*)^{-1} = P^*_{\Psi^*} \circ W_n^{-1} = P_{W_n}$ και ομοίως εξάγουμε ότι $P_{X_n} = P^*_{X^*_n}$, καθώς επίσης και ότι $P_\Theta = P^*_{\Theta^*}$. Επομένως, κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και μια σ.δ. μεγέθους απαίτησης, τέτοιες ώστε οι τ.μ. W_n και X_n να κατανέμονται κάτω από το μέτρο πιθανότητας P όπως οι W^*_n και X^*_n κάτω από το P^*, αντίστοιχα.

(b) Έστω $\Psi := (W_1, \ldots, W_n, \ldots; X_1, \ldots, X_n, \ldots; \Theta)$. Εξαιτίας του (a) προκύπτει ότι $W^* = W \circ \Psi^*$, $X^* = X \circ \Psi^*$ και $\Theta^* = \Theta \circ \Psi^*$. Τότε $(W^*, X^*) = (W, X) \circ \Psi^*$ και για κάθε $D^* \in \sigma(\Theta^*)$ υπάρχει ένα $D \in \sigma(\Theta)$ ώστε

$$\int_{D^*} P^*_{(W^*,X^*)|\Theta^*}(E)dP^* = \int_D P_{(W,X)|\Theta}(E)dP \quad \text{για κάθε } E \in \widetilde{\Sigma}. \tag{7.12}$$

Επομένως, έχουμε ακόμη ότι

$$\int_{D^*} P^*_{W^*_n|\Theta^*}(A)dP^* = \int_D P_{W_n|\Theta}(A)dP \quad \text{και} \quad \int_{D^*} P^*_{X^*_n|\Theta^*}(B)dP^* = \int_D P_{X_n|\Theta}(B)dP$$

για κάθε $A, B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

(c) Οι συνθήκες (a1), (a2) και (a3) ικανοποιούνται από τα P,$\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και Θ.

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$P_{(W,X)|\Theta} = (\otimes_{n\in\mathbb{N}} P_{W_n|\Theta}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}} P_{X_n}) \quad P \mid \sigma(\Theta) - \text{σ.β.}. \tag{7.13}$$

Ας συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{C}}$ την οικογένεια όλων των μετρησίμων κυλίνδρων του $\widetilde{\Omega}$, δηλαδή όλων των υποσυνόλων του $\widetilde{\Omega}$ της μορφής

$$\widetilde{C} = \left\{\widetilde{\omega} : \widetilde{\omega} = (w, x) \in \Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \text{ με } w_i \in A_i \text{ και } x_j \in B_j \text{ για κάθε } (i,j) \in I \times J\right\},$$

όπου $I, J \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένα και $A_i, B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $(i,j) \in I \times J$. Τότε από την (7.12) και το ότι το P^* ικανοποιεί τις (a1*) έως (a3*) προκύπτει ότι για κάθε $D^* \in \sigma(\Theta^*)$ υπάρχει $D \in \sigma(\Theta)$ ώστε

$$\begin{aligned}
\int_D P_{(W,X)|\Theta}(\widetilde{C})dP &= \prod_{j\in J} P^*_{X^*_j}(B_j) \int_{D^*} \prod_{i\in I} P^*_{W^*_i|\Theta^*}(A_i)dP^* \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j) \int_{D^*} \prod_{i\in I} P^*\big((W_i \circ \Psi^*)^{-1}(A_i) \mid \Theta^*\big)dP^* \\
&\overset{P=P^*_{\Psi^*}}{=} \prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j) \int_{(\Psi^*)^{-1}(D)} \prod_{i\in I} P(W_i^{-1}(A_i) \mid \Theta \circ \Psi^*)dP^* \\
&\overset{P=P^*_{\Psi^*}}{=} \prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j) \int_D \prod_{i\in I} P(W_i^{-1}(A_i) \mid \Theta)dP \\
&= \int_D \prod_{i\in I} P_{W_i|\Theta}(A_i) \prod_{j\in J} P_{X_j}(B_j)dP.
\end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε ότι η (7.13) ισχύει επάνω στο $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Έτσι αν συμβολίσουμε με $\widetilde{\mathcal{D}}$ την οικογένεια όλων των $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$ που ικανοποιούν την (7.13) τότε προκύπτει ότι $\widetilde{\mathcal{C}} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}$. Όμως, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η $\widetilde{\mathcal{D}}$ είναι μια κλάση Dynkin. Παρατηρούμε επίσης ότι $\sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \widetilde{\Sigma}$ και ότι η $\widetilde{\mathcal{C}}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για να εξασφαλίσουμε ότι $\widetilde{\mathcal{D}} \supseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{C}}) = \widetilde{\Sigma}$, κάτι που συνεπάγεται την ισχύ της (7.13). Επομένως, δείξαμε την (c), καθώς και την P-υπό συνθήκη ανεξαρτησία της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Συνεπώς, από τώρα και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θεωρούμε τον χ.π. (Ω, Σ, P) μαζί με όλα τα στοιχεία που τον συνοδεύουν στην Παρατήρηση 7.2.6, (a), καθώς επίσης και τις επαγόμενες σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και των συνολικών απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, αντίστοιχα.

Παρατήρηση 7.2.7. Η παραπάνω υπόθεση που αφορά τον χ.π. (Ω, Σ, P) δεν είναι περιοριστική, αφού το ενδιαφέρον μας δεν υπερβαίνει την πληροφορία που εμπεριέχεται στη σ.δ. συνολικών απαιτήσεων και στη δομική παράμετρο. Πράγματι, επειδή ισχύει ότι $\Sigma = \sigma(\{\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \Theta\})$, άμεσα έχουμε ότι $\mathcal{H}_\infty \subseteq \Sigma$. Εξαιτίας, όμως, των Παρατηρήσεων 7.1.1, (a) και (b) έχουμε κάτι παραπάνω, δηλαδή ότι $\Sigma = \mathcal{H}_\infty$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα μετροθεωρητικό αποτέλεσμα που θα μας φανεί χρήσιμο για την απόδειξη του επόμενου και κεντρικού θεωρήματος της παρούσας διατριβής.

Λήμμα 7.2.8. *Έστω $\phi : \mathbb{R} \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση, κι έστω απεικόνιση $h_\phi : \Upsilon \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ τέτοια ώστε $h_\phi(y) := \int \phi^y d\lambda$ για κάθε $y \in \Upsilon$. Τότε η h_ϕ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αρχικά ας συμβολίσουμε με $\mathcal{D}_\chi$ την οικογένεια όλων των $E \in \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε η απεικόνιση h_ϕ για $\phi = \chi_E$ να είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για κάθε $A \times B \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $y \in \Upsilon$ ισχύει $h_{\chi_{A\times B}}(y) = \int \chi_{[A\times B]^y} d\lambda = \lambda(A)\chi_B(y)$, και άρα ότι η απεικόνιση $h_{\chi_{A\times B}}$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη. Συνεπώς, $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}(\Upsilon) \subseteq \mathcal{D}_\chi$.

Επίσης μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{D}_\chi$ είναι μια κλάση Dynkin. Κι επειδή η οικογένεια $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης για να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{D}_\chi \supseteq \sigma(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}(\Upsilon))$, και άρα ότι $\mathcal{D}_\chi = \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Επομένως, δείξαμε ότι για $\phi = \chi_E$, όπου $E \in \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$, η h_ϕ είναι μια $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρήσιμη απεικόνιση. Τότε, επαναλαμβάνοντας τα επιχειρήματα της απόδειξης της Παρατήρησης 2.2.3, (a), αποδεικνύεται διαδοχικά για ϕ απλή $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη, ϕ μη αρνητική $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη και ϕ οποιαδήποτε $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη απεικόνιση η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\overline{\mathfrak{B}}$-μετρησιμότητα της h_ϕ. $\square$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι επειδή ο $\varOmega$ είναι ένας πολωνικός χώρος, τότε για κάθε μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathcal{H}_\infty$, και άρα για οποιοδήποτε δοσμένο P, υπάρχει πάντα μια disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη $\varTheta$ (βλ. Παρατήρηση 2.1.3).

Θεώρημα 7.2.9. *Έστω $P \in \mathcal{M}_S$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Για κάθε $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ υπάρχουν μια ουσιωδώς μοναδική συνάρτηση $\beta \in \mathcal{F}_P$, μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη $\varTheta$, μια P_Θ-σ.β. θετική παράγωγος Radon-Nikodym ξ του Q_Θ ως προς P_Θ, καθώς κι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_* \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ).

(ii) Αντιστρόφως, για κάθε $\beta \in \mathcal{F}_P$ και για οποιαδήποτε P_Θ-σ.β. θετική συνάρτηση ξ τέτοια ώστε $\mathbb{E}_P[\xi(\varTheta)] = 1$ υπάρχουν μοναδική συνάρτηση g όπως του Συμβολισμού 7.2.4, μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$, μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη $\varTheta$, καθώς κι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V'_* \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V'_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ).

Απόδειξη. Έστω ότι $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$. Υπάρχει πάντα μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη $\varTheta$ (βλ. Παρατήρηση 2.1.3). Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 7.2.5 για να εξασφαλίσουμε τον ισχυρισμό (i).

(ii): Έστω $\beta \in \mathcal{F}_P$. Από την Πρόταση 7.1.7, (i) έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{D}_* \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{D}_*$ η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(P_\theta,\mathcal{H})$-martingale που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Ορίζουμε, τώρα, για κάθε $\theta \in \varUpsilon$ τη συνολοσυνάρτηση $R_\theta : \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω της σχέσης

$$R_\theta(A) := \begin{cases} \int_A M_t^{(\beta)}(\theta)dP_\theta & \text{αν } \theta \notin \widetilde{D}_* \\ P_\theta(A) & \text{αν } \theta \in \widetilde{D}_* \end{cases} \tag{7.14}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$. Προφανώς, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \in \varUpsilon$ ο περιορισμός $R_\theta \mid \mathcal{H}_t$ της R_θ στη $\mathcal{H}_t$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathcal{H}_t$. Αν δεν προκαλείται σύγχυση συμβολίζουμε τον περιορισμό $R_\theta \mid \mathcal{H}_t$ και πάλι με R_θ. Επί πλέον, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $A \in \mathcal{H}_t$ ορίσουμε τη συνάρτηση $h : \varUpsilon_\upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω του τύπου $h(\theta) := \int \upsilon^\theta dP_\theta$ για κάθε $\theta \in \varUpsilon_\upsilon := \varUpsilon \setminus I_\upsilon$, όπου $\upsilon(\omega,\theta) := \chi_A(\omega)M_t^{(\beta)}(\omega,\theta)$ για κάθε $(\omega,\theta) \in \varOmega \times \varUpsilon$, και $I_\upsilon := \{\theta \in \varUpsilon : \int (\upsilon^+)^\theta dP_\theta = \infty \;\text{ ή }\; \int (\upsilon^-)^\theta dP_\theta = \infty\}$, τότε επειδή η $\{P_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ είναι μια disintegration του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη $\varTheta$, κι επειδή από την απόδειξη του Λήμματος 7.1.5 η υ είναι $P_{id_\varOmega\times\Theta}$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση, προκύπτει ότι

$I_v \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και ότι η h είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)_{\Upsilon\setminus I_v}$-μετρήσιμη (βλ. Παρατήρηση 2.2.3, (a)). Όμως, από την Πρόταση 7.1.7, (i) έχουμε ότι $I_v \subseteq \widetilde{D}_*$, και άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για οποιοδήποτε σταθερό $A \in \mathcal{H}_t$ την $\mathfrak{B}(\Upsilon)_{\Upsilon\setminus\widetilde{D}_*}$-μετρησιμότητα του περιορισμού $h \mid (\widetilde{D}_*)^c$, συνεπώς την $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρησιμότητα της συνάρτησης $\theta \longmapsto R_\theta(A)$.

Επομένως, για μια οποιαδήποτε P_Θ-σ.β. θετική συνάρτηση ξ τέτοια ώστε $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ μπορούμε να ορίσουμε τη συνολοσυνάρτηση $R : \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω της σχέσης

$$R(A) := \int \xi(\theta)R_\theta(A)P_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε } A \in \textstyle\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t.$$

Τότε έχουμε ότι

$$R(A) \overset{(7.14)}{=} \int\int \xi(\theta)\chi_A M_t^{(\beta)}(\theta)dP_\theta P_\Theta(d\theta) = \int_A \xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta)dP, \tag{7.15}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_t$, όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 7.1.5, (iv).

Παρατηρούμε επίσης ότι η συνθήκη (7.15) σε συνδυασμό με το Λήμμα 7.1.5, (ii) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} R_\Theta(F) &= \int_{\Theta^{-1}(F)} \mathbb{E}_P[\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) \mid \Theta]dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} \xi(\Theta)\mathbb{E}_P[M_t^{(\beta)}(\Theta) \mid \Theta]dP \\ &= \int_F \xi(\theta)P_\Theta(d\theta) \end{aligned}$$

για κάθε $F \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, και άρα $R_\Theta \sim P_\Theta$. Επομένως, έχουμε ότι

$$R(A) = \int R_\theta(A)R_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε } A \in \textstyle\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t$$

καθώς επίσης και ότι κάθε P_Θ-μηδενικό σύνολο είναι κι ένα R_Θ-μηδενικό σύνολο και αντιστρόφως.

Προφανώς, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η οικογένεια $\{R_\theta \mid \mathcal{H}_t\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του $R \mid \mathcal{H}_t$ επάνω στο R_Θ, κι επειδή εξ' υποθέσεως η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με τη Θ, από την (7.14) και το Λήμμα 7.1.5, ότι το ίδιο θα ισχύει και για την $\{R_\theta \mid \mathcal{H}_t\}_{\theta\in\Upsilon}$.

Ας ορίσουμε, τώρα, τη συνάρτηση $\eta : \mathbb{R}_+ \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}_+$ μέσω των σχέσεων

$$\eta(t,\theta) := e^{-t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)-1]}} \quad \text{για κάθε } \ t \in \mathbb{R}_+ \ \text{ και } \ \theta \notin \widehat{D}.$$

και $\eta(t,\theta) := 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \in \widehat{D}$. Από το βήμα (d) της Πρότασης 7.2.5 και το ότι το P ικανοποιεί την (a2) έπεται η ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $G_{\mathrm{d}} := O^{(*)}_{\gamma,X_1} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε $\widehat{D} \subseteq G_{\mathrm{d}}$ και για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{d}}$ να ισχύει ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$. Επομένως,

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)}] = e^{\alpha(\theta)}\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = e^{\alpha(\theta)}\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = e^{\alpha(\theta)} \tag{7.16}$$

για κάθε $\theta \notin G_{\mathrm{d}}$, οπότε έχουμε ότι

$$\eta(t,\theta) = e^{-t\theta[e^{\alpha(\theta)}-1]} \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \theta \notin G_{\mathrm{d}}. \tag{7.17}$$

(a) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε σταθερά $\theta \notin V'$ και $t \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $r > 0$ και για όλα τα $0 \leq u \leq s \leq t$ και $A \in \mathcal{H}_u$ να ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{E}_{R_\theta}[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}] = \eta(s-u,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_u^{(\beta)}(\theta)]\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_{s-u}^{(\beta)}(\theta)-rS_{s-u}}].$$

Πράγματι, επειδή η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-CMPP(Θ, P_{X_1}) και το P ικανοποιεί τις (a1) και (a2), από το Θεώρημα 6.2.2 και την απόδειξή του προκύπτει ότι υπάρχει P_Θ-μηδενικό σύνολο $C_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $G_* \subseteq C_*$ και για κάθε $\theta \notin C_*$ να ισχύει ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P_θ-CPP$(\theta, (P_\theta)_{X_1})$. Τότε, από το Λήμμα 7.1.6, (i) έχουμε ότι η $\{S_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει P_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις για κάθε $\theta \notin C_*$. Επομένως, θέτοντας $V' := \widetilde{D}_* \cup G_{\mathrm{d}}$ προκύπτει ότι $P_\Theta(V') = 0$ καθώς και ότι $C_* \subseteq V'$, και άρα από την (7.14) και για οποιοδήποτε $\theta \notin V'$, για κάθε $r > 0$, για όλα τα $0 \leq u \leq s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_u$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{R_\theta}[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}] &= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)} M_s^{(\beta)}(\theta)] \\
&= \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \eta(s-u,\theta) M_u^{(\beta)}(\theta) e^{(S_s^{(\beta)}-S_u^{(\beta)})(\theta)-r(S_s-S_u)}] \\
&= \eta(s-u,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A M_u^{(\beta)}(\theta)]\mathbb{E}_{P_\theta}\big[e^{S_{s-u}^{(\beta)}(\theta)-rS_{s-u}}\big],
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα αντλεί την ισχύ της από τις συνθήκες (7.2), (7.16) και (7.17).

(b) Για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ ορίζουμε τις συνολοσυναρτήσεις $\nu_\theta : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longrightarrow [0,\infty]$, $\mu : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longrightarrow [0,\infty]$ και $\widetilde{Q}_\theta : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow [0,\infty]$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned}
\nu_\theta &:= \mathbf{Exp}(g(\theta)), \quad \text{όπου } g(\theta) := \theta e^{\alpha(\theta)}, \\
\mu(B) &:= \int_B e^{\gamma(x)} P_{X_1}(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),
\end{aligned} \tag{7.18}$$

και

$$\widetilde{Q}_\theta := (\nu_\theta)_{\mathbb{N}} \otimes \mu_{\mathbb{N}},$$

αντίστοιχα. Τότε οι μ και $\widetilde{Q}_\theta$ είναι μέτρα πιθανότητας, και για οποιοδήποτε σταθερό $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E})$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη. Επί πλέον, ισχύει ότι $\frac{g(\Theta)}{\Theta} \in \mathcal{L}^1(P)$.

Πράγματι, το μ είναι προφανώς ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στο $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ και το $\widetilde{Q}_\theta$ είναι, για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$, ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στο $\widetilde{\Sigma}$. Επίσης, επειδή $\nu_\theta(D) = \int \chi_D(x) g(\theta) e^{-xg(\theta)} \lambda(dx)$ για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, από το Λήμμα 7.2.8 και το ότι $\nu_\theta(D) \leq 1$ για κάθε $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, προκύπτει ότι η συνάρτηση $\theta \longmapsto \nu_\theta(D)$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $D \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Συνεπώς, η $\widetilde{Q}_\bullet(A \times B)$ είναι μια $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση για οποιοδήποτε σταθερό $A \times B \in \mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}}) \times \mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}})$. Εφαρμόζοντας,

τώρα, ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης, όπως αυτό της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.1, μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E})$ είναι $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$. Επί πλέον, επειδή $\beta \in \mathcal{F}_P$ άμεσα έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[\frac{g(\Theta)}{\Theta}] = \mathbb{E}_P[e^{\alpha(\Theta)}] < \infty$.
(c) Ορίζουμε, τώρα, τις συνολοσυναρτήσεις $\widetilde{Q} : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow [0,\infty]$ και $Q, Q_\theta : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ για κάθε $\theta \in \varUpsilon$ μέσω των σχέσεων

$$\widetilde{Q}(\widetilde{E}) := \int \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E}) R_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma},$$
$$Q(E) := \int \widetilde{Q}_\theta(E^\theta) R_\Theta(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \Sigma,$$

και

$$Q_\theta := \widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta,$$

όπου δ_θ το μέτρο του Dirac επάνω στην $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ στο σημείο $\theta \in \varUpsilon$, αντίστοιχα. Τότε οι $\widetilde{Q}$, Q και κάθε Q_θ είναι μέτρα πιθανότητας, $Q_\Theta = R_\Theta$ και η $\{Q_\theta\}_{\theta \in \varUpsilon}$ είναι μια disintegration του Q επάνω στο R_Θ συνεπής με την κανονική προβολή $\pi_\varUpsilon = \Theta$ από το $\widetilde{\varOmega} \times \varUpsilon$ επάνω στο $\varUpsilon$.

Πράγματι, προφανώς οι $\widetilde{Q}$, Q και κάθε Q_θ είναι μέτρα πιθανότητας. Επίσης για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ έχουμε $Q_\Theta(B) = \int \widetilde{Q}_\theta([\widetilde{\varOmega} \times B]^\theta) R_\Theta(d\theta) = \int_B \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{\varOmega}) R_\Theta(d\theta) = R_\Theta(B)$. Επειδή από το βήμα (b) η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{Q}_\theta(\widetilde{E})$ είναι $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$-μετρήσιμη για σταθερό $\widetilde{E} \in \widetilde{\Sigma}$, η $\{\widetilde{Q}_\theta\}_{\theta \in \varUpsilon}$ είναι μια κ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$ για το Q ως προς το R_Θ, αφού η ισχύς της (D2) είναι άμεση. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.2.1 για να εξασφαλίσουμε ότι η $\{Q_\theta\}_{\theta \in \varUpsilon}$ είναι μια disintegration του Q επάνω στο R_Θ συνεπής με τη Θ.
(d) Το Q ικανοποιεί τις (a1) και (a2), η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Q-ανεξάρτητη και ισόνομη, και η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι Q-ανεξάρτητη της $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Πράγματι, αρχικά σταθεροποιούμε αυθαίρετα $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in \varUpsilon$. Με $\pi_{\widetilde{\varOmega}}$ συμβολίζουμε την κανονική προβολή από το $\varOmega$ επάνω στο $\widetilde{\varOmega}$ και θεωρούμε τις τ.μ. $\widetilde{W}_n$ και $\widetilde{X}_n$ επάνω στο $\widetilde{\varOmega}$ που ορίζονται μέσω των σχέσεων

$$W_n = \widetilde{W}_n \circ \pi_{\widetilde{\varOmega}} \quad \text{και} \quad X_n = \widetilde{X}_n \circ \pi_{\widetilde{\varOmega}}, \tag{7.19}$$

αντίστοιχα. Επειδή εξ' ορισμού οι W_n και X_n είναι οι κανονικές προβολές από το $\varOmega = \varUpsilon^{\mathbb{N}} \times \varUpsilon^{\mathbb{N}} \times \varUpsilon = \widetilde{\varOmega} \times \varUpsilon$ επάνω στην n-συντεταγμένη του πρώτου και του δεύτερου καρτεσιανού γινομένου $\varUpsilon^{\mathbb{N}}$, αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$\nu_\theta = Q_\theta \circ W_n{}^{-1} = Q_\theta \circ (\widetilde{W}_n \circ \pi_{\widetilde{\varOmega}})^{-1} = (Q_\theta \circ \pi_{\widetilde{\varOmega}}^{-1}) \circ \widetilde{W}_n^{-1} = (\widetilde{Q}_\theta \otimes \delta_\theta)_{\pi_{\widetilde{\varOmega}}} \circ \widetilde{W}_n^{-1} = (\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n},$$

καθώς και ότι $(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{X}_n} = \mu$.

Υπενθυμίζουμε ότι με $\widetilde{\mathcal{C}}$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των μετρησίμων κυλίνδρων του $\widetilde{\varOmega}$, δηλαδή όλων εκείνων των συνόλων $\widetilde{C} \in \mathfrak{B}(\widetilde{\varOmega})$ της μορφής $\prod_{i,j \in \mathbb{N}}(A_i \times B_j)$, όπου

$A_i, B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ και $I := \{i \in \mathbb{N} : A_i \neq \Upsilon\}$, $J := \{j \in \mathbb{N} : B_j \neq \Upsilon\}$ πεπερασμένα. Θέτουμε $C_i := A_i$ για $i \in I$ και $D_j := B_j$ για $j \in J$. Τότε έχουμε ότι $\widetilde{C} = \prod_{(i,j)\in I\times J}(C_i \times D_j) \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus I} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus J}$, οπότε θέτοντας $\widetilde{W} := (\widetilde{W}_1 \ldots, \widetilde{W}_n, \ldots)$ και $\widetilde{X} := (\widetilde{X}_1 \ldots, \widetilde{X}_n, \ldots)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(\widetilde{Q}_\theta)_{(\widetilde{W},\widetilde{X})}(\widetilde{C}) &= ((\nu_\theta)_{\mathbb{N}} \otimes \mu_{\mathbb{N}})\Big(\prod_{(i,j)\in I\times J}(C_i \times D_j) \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus I} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus J}\Big)\\ &= \prod_{i\in I}\nu_\theta(C_i)\prod_{j\in J}\mu(D_j) = \prod_{i\in I}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_i}(C_i)\prod_{j\in J}\widetilde{Q}_{\widetilde{X}_j}(D_j),\end{aligned}$$

και άρα η ισότητα

$$(\widetilde{Q}_\theta)_{(\widetilde{W},\widetilde{X})} = \big(\otimes_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}\big) \otimes \big(\otimes_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{X}_n}\big) = (\nu_\theta)_{\mathbb{N}} \otimes \mu_{\mathbb{N}} \tag{7.20}$$

θα ισχύει επάνω στο $\widetilde{\mathcal{C}}$. Τότε, όμως, εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης παρόμοιο με αυτό του (b), μπορεί εύκολα να αποδειχθεί η ισχύς της (7.20) επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$.

Επομένως, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ οι ακολουθίες $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{\widetilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\widetilde{Q}_\theta$-ανεξάρτητες και ανεξάρτητες μεταξύ τους, κάτι που συνεπάγεται ότι οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Q_θ-ανεξάρτητες και ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού αν $W := (W_1 \ldots, W_n, \ldots)$ και $X := (X_1 \ldots, X_n, \ldots)$ τότε έχουμε ότι

$$(Q_\theta)_{(W,X)} \overset{(7.19)}{=} Q_\theta \circ \pi_{\widetilde{\Omega}}^{-1} \circ (\widetilde{W}, \widetilde{X})^{-1} = (\widetilde{Q}_\theta)_{(\widetilde{W},\widetilde{X})} \overset{(7.20)}{=} \big(\otimes_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{W}_n}\big) \otimes \big(\otimes_{n\in\mathbb{N}}(\widetilde{Q}_\theta)_{\widetilde{X}_n}\big),$$

και άρα ότι

$$(Q_\theta)_{(W,X)} = \big(\otimes_{n\in\mathbb{N}}(Q_\theta)_{W_n}\big) \otimes \big(\otimes_{n\in\mathbb{N}}(Q_\theta)_{X_n}\big). \tag{7.21}$$

Όμως, επειδή από το βήμα (c) η $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του Q επάνω στο R_Θ συνεπής με τη Θ, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.2, ισοδύναμα έχουμε ότι οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Q-υπό συνθήκη ανεξάρτητες, δηλαδή ότι το Q ικανοποιεί τη συνθήκη (a1).

Επί πλέον, επειδή $(Q_\theta)_{X_n} = \mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in \Upsilon$, από το Λημμα 2.3.2 εξασφαλίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ την ισχύ της $Q_{X_n|\Theta} = \mu$ $Q \mid \sigma(\Theta)$-σ.β., κι επομένως την ισχύ της συνθήκης (a2) για το Q. Ακόμη, η ισχύς των συνθηκών (a1) και (a2) για το Q, συνεπάγεται την Q-ανεξαρτησία μεταξύ των $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, και άρα λόγω της (6.1) αυτή μεταξύ των $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Παρατηρούμε επίσης ότι από τις (7.20) και (7.21) έχουμε ότι $(Q_\theta)_X = \otimes_{n\in\mathbb{N}}(Q_\theta)_{X_n} = \mu_{\mathbb{N}}$, κι επομένως ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Q_θ-ανεξάρτητη και ισόνομη για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Το γεγονός αυτό, όμως, σύμφωνα με το Λήμμα 6.2.1, (ii) κι επειδή η Q ικανοποιεί την (a2), συνεπάγεται ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Q-ανεξάρτητη και ισόνομη.

(e) Η σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-CMPP$(g(\Theta), Q_{X_1})$.

Πράγματι, από το (d), την απόδειξή του και τη σχέση (6.1) προκύπτει ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ είναι μια Q_θ-σ.δ. κινδύνου για όλα τα $\theta \in \Upsilon$. Παρατηρούμε επίσης ότι από τις συνθήκες $\nu_\theta = \mathbf{Exp}(g(\theta))$ και $(Q_\theta)_{W_n} = \nu_\theta$ των βημάτων (b) και (d), αντίστοιχα, που ισχύουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in \Upsilon$, συνεπάγεται ότι για κάθε $\theta \in \Upsilon$ η επαγόμενη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο $g(\theta)$ (βλ. π.χ. [34], Theorem 2.3.6). Επομένως, η επαγόμενη σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q_θ-CPP$(g(\theta),(Q_\theta)_{X_1})$ για όλα τα $\theta \in \Upsilon$, κάτι που σε συνδυασμό με το (d) και το Θεώρημα 6.2.2 συνεπάγεται την ισχύ του (e).

(f) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V'_*$ να ισχύει η συνθήκη $(R_\theta)_{S_t} = (Q_\theta)_{S_t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου $R_\theta = R_\theta \mid \mathcal{H}_t$ και $Q_\theta = Q_\theta \mid \mathcal{H}_t$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή το P ικανοποιεί την (a2), μπορεί να αποδειχθεί όπως στο βήμα (c) της Πρότασης 7.2.5, ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $O' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin O'$ να έχουμε $(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}$. Στη συνέχεια σταθεροποιούμε αυθαίρετα $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$, και παρατηρούμε ότι από τη συνθήκη (7.18) συνεπάγεται για κάθε $\theta \notin O'$ η ισχύς της

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rX_1}] = \int e^{-rx}(Q_\theta)_{X_1}(dx) = \int e^{-rx}\mu(dx) = \mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}]. \tag{7.22}$$

Επειδή από την απόδειξη του βήματος (e) έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο $g(\theta)$, λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (7.17) εξασφαλίζουμε ότι για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin G_{\mathrm{d}}$ ισχύει

$$Q_\theta(N_t = n) = \eta(t,\theta)e^{n\alpha(\theta)}P_\theta(N_t = n). \tag{7.23}$$

Όμως, θέτοντας $V'_* := V' \cup O' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ προκύπτει ότι $P_\Theta(V'_*) = 0$ και άρα $R_\Theta(V'_*) = 0 = Q_\Theta(V'_*)$, αφού $Q_\Theta = R_\Theta \sim P_\Theta$ από το βήμα (c), τη συνθήκη (7.15) και το Λήμμα 7.1.5, (ii). Τότε από τις (7.22) και (7.23) και από τη συνθήκη $G_{\mathrm{d}} \subseteq V' \subseteq V'_*$ προκύπτει ότι για κάθε $\theta \notin V'_*$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rS_t}] = \eta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}]\right)^n e^{n\alpha(\theta)}P_\theta(N_t = n),$$

οπότε εφαρμόζοντας το (a) έχουμε ακόμη ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{R_\theta}[e^{-rS_t}] &= \eta(t,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{S_t^{(\beta)}(\theta)-rS_t}] = \eta(t,\theta)\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\sum_{k=1}^{N_t}[\beta^\theta(X_1)-rX_1]}] \\
&= \eta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)-rX_1}]\right)^n P_\theta(N_t = n) \\
&= \eta(t,\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)-rX_1}]\right)^n e^{n\alpha(\theta)}P_\theta(N_t = n) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[e^{-rS_t}]
\end{aligned}$$

και άρα ότι $(R_\theta)_{S_t} = (Q_\theta)_{S_t}$ (βλ. π.χ. [5], Theorem 22.2).

(g) Για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin V'_*$ υπάρχει μοναδική επέκταση του R_θ στη Σ, που συμβολίζεται και πάλι με R_θ, τέτοια ώστε $Q_\theta = R_\theta$ επάνω στη Σ. Επί πλέον, υπάρχει μοναδική επέκταση του R στη Σ, που συμβολίζεται και πάλι με R, τέτοια ώστε $Q = R$ επάνω στη Σ και η οικογένεια $\{R_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ να είναι μια disintegration του R επάνω στο R_Θ συνεπής με τη Θ.

Πράγματι, σύμφωνα με το (f) και για οποιοδήποτε σταθερά $\theta \notin V'_*$ και $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $Q_\theta \mid \sigma(S_u) = R_\theta \mid \sigma(S_u)$ για κάθε $0 \le u \le t$, κι επομένως ότι $Q_\theta \mid \bigcup_{0\le u\le t}\sigma(S_u) = R_\theta \mid \bigcup_{0\le u\le t}\sigma(S_u)$. Όμως, επειδή τα Q_θ και R_θ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\widetilde{\mathcal{H}}_t$ που συμπίπτουν στην $\bigcup_{0\le u\le t}\sigma(S_u)$, τότε από το Θεώρημα Μοναδικότητας για μέτρα (βλ. Θεώρημα A.7) θα συμπίπτουν επίσης κι επάνω στη σ-άλγεβρα $\widetilde{\mathcal{H}}_t$. Επί πλέον, επειδή οι disintegrations $\{Q_\theta \mid \mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{R_\theta \mid \mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι συνεπείς με τη Θ, θα συμπίπτουν επάνω στη σ-άλγεβρα $\sigma(\Theta)$, κι επομένως στην ένωση $\widetilde{\mathcal{H}}_t \cup \sigma(\Theta)$. Όμως, επειδή οι συνολοσυναρτήσεις Q_θ και R_θ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathcal{H}_t$, που συμπίπτουν επάνω στη $\widetilde{\mathcal{H}}_t \cup \sigma(\Theta)$, εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης ανάλογο με αυτό του βήματος (e) της απόδειξης της Πρότασης 7.2.5, προκύπτει ότι θα συμπίπτουν επάνω και στη $\mathcal{H}_t$, και άρα στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$.

Επειδή η συνολοσυνάρτηση Q_θ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ τέτοιο ώστε $Q_\theta \mid \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t = R_\theta$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Επέκτασης Μέτρου του Καραθεοδωρή (βλ. Θεώρημα A.6) προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική επέκταση R_θ στη Σ, που συμβολίζεται και πάλι με R_θ, τέτοια ώστε $Q_\theta = R_\theta$.

Εκμεταλλευόμενοι, τώρα, το ότι η συνάρτηση $\theta \longmapsto R_\theta(F)$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $F \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$ κι εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης, εξασφαλίζουμε τη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρησιμότητα της συνάρτησης $\theta \longmapsto R_\theta(E)$ για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \Sigma$: Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{V}$ την οικογένεια όλων των $E \in \Sigma$ ώστε η συνάρτηση $\theta \longmapsto R_\theta(E)$ να είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη για σταθερό E, τότε $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{V}$. Επειδή η $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διύλιση, τότε η $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$ θα είναι μια άλγεβρα. Επίσης εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η $\mathcal{V}$ είναι μια μονότονη κλάση. Επομένως, προκύπτει ότι $\mathcal{H}_\infty = \sigma\big(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t\big) = m\big(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t\big) \subseteq \mathcal{V}$ (βλ. π.χ. Θεώρημα A.8), και άρα $\Sigma = \mathcal{V}$. Συνεπώς, δείξαμε τη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρησιμότητα της συνάρτησης $\theta \longmapsto R_\theta(E)$ για οποιοδήποτε σταθερό $E \in \Sigma$.

Επί πλέον, το βήμα (c) σε συνδυασμό με το ότι $Q_\theta = R_\theta$ για οποιοδήποτε δοσμένο $\theta \notin V'_*$, συνεπάγεται ότι τα R και Q συμπίπτουν επάνω στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$ και ότι το Q είναι μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ. Επομένως, εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα Επέκτασης Μέτρου του Καραθεοδωρή εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μοναδικής επέκτασης του R στη Σ, που συμβολίζεται και πάλι με R, τέτοιας ώστε $R = Q$ επάνω στη Σ. Τότε, προφανώς, η οικογένεια $\{R_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ καθίσταται μια disintegration του R επάνω στο R_Θ συνεπής με τη Θ.

(h) Υπάρχει μοναδική συνάρτηση g όπως του Συμβολισμού 7.2.4, μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ και μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη Θ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ) για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin V'_*$.

Πράγματι, επειδή $Q \stackrel{pr}{\sim} P$ εξαιτίας της (7.15) και του (g), από τα βήματα (b), (d) και (e) προκύπτει ότι $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$, όπου η g είναι η μοναδικά ορισμένη συνάρτηση του βήματος (b). Επί πλέον, η ύπαρξη μια ουσιωδώς μοναδικής disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπούς με τη Θ, καθώς και η ισχύς της (M_θ) για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin V'_*$ και για τις disintegrations $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, αποτελούν άμεσες συνέπειες του (g), της (7.14) και της Παρατήρησης 2.1.3, ενώ η ισχύς της (M_ξ) προκύπτει από το (g) και την (7.15). Κι επειδή η μοναδικότητα του Q είναι άμεση, δείξαμε το (h), κάτι που ολοκληρώνει και την όλη απόδειξη. $\square$

Πόρισμα 7.2.10. *Έστω ότι $P \in \mathcal{M}_S$. Αν ισχύει οποιοσδήποτε από τους ισχυρισμούς (i) ή (ii) του Θεωρήματος 7.2.9 και αν υπάρχει P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{H} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $Q_\theta \neq P_\theta$ για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin \widehat{H}$, τότε $Q_\theta \perp P_\theta$ για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin \widehat{H}$. Επίσης ισχύει ότι $Q \perp P$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $P \in \mathcal{M}_S$, καθώς και ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widehat{H}_\kappa \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $Q_\theta \neq P_\theta$ για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin \widehat{H}_\kappa$. Αλλά η υπόθεσή μας ότι $P \in \mathcal{M}_S$ σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.2.2 συνεπάγεται την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $C_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin C_*$ η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια P_θ-CPP$(\theta, (P_\theta)_{X_1})$. Επί πλέον, από το Θεώρημα 7.2.9 και την απόδειξή του εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $O' \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιου ώστε για κάθε $\theta \notin O'$ να ισχύει η συνθήκη $(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1} = P_{X_n} = (P_\theta)_{X_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω, τώρα, τα P_Θ-μηδενικά σύνολα V_* και V'_*, που εμπλέκονται στους ισχυρισμούς (i) και (ii) του Θεωρήματος 7.2.9. Θέτουμε $\widehat{H} := \widehat{H}_\kappa \cup V_* \cup V'_* \cup C_* \cup O'$, κι έπειτα σταθεροποιούμε αυθαίρετο $\theta \notin \widehat{H}$. Αν ισχύει οποιοσδήποτε από τους ισχυρισμούς (i) ή (ii) του Θεωρήματος 7.2.9, τότε $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$, $\beta \in \mathcal{F}_P$ και ικανοποιείται η συνθήκη (M_θ). Επειδή $Q_\theta \neq P_\theta$ προκύπτει ότι $P_\theta(\beta^\theta(X_1) \neq 0) > 0$, αφού αν ίσχυε $P_\theta(\beta^\theta(X_1) \neq 0) = 0$ τότε θα είχαμε P_θ-σ.β. ότι $\beta^\theta(X_n) = \beta^\theta(X_1) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάτι που θα συνεπάγονταν ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ θα είχαμε $M_t^{(\beta)}(\theta) = 1$ $P_\theta \mid \mathcal{H}_t$-σ.β., και άρα τα Q_θ και P_θ θα συνέπιπταν πάνω στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με Θεώρημα Μοναδικότητας για μέτρα θα συνεπάγονταν ότι $Q_\theta = P_\theta$, άτοπο.

Επίσης παρατηρούμε ότι από την απόδειξη τόσο του ισχυρισμού (i) όσο και του ισχυρισμού (ii) του Θεωρήματος 7.2.9 έχουμε ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)}] = e^{\alpha(\theta)} < \infty$, και άρα από το Λήμμα 7.1.3, (ii) προκύπτει ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t} \beta^\theta(X_k) = \mathbb{E}_{P_\theta}[\beta^\theta(X_1)]$, αφού $\widehat{D} \subseteq \widehat{H}$, όπου $\widehat{D}$ είναι το P_Θ-μηδενικό σύνολο που εμπλέκεται στο προαναφερθέν λήμμα. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε παρόμοια επιχειρήματα με αυτά των σελ. 274-275 της απόδειξης του [8], Proposition 2.2 για να εξασφαλίσουμε ότι $Q_\theta \perp P_\theta$.

Η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με το υπάρχει $E \in \Sigma$ τέτοιο ώστε

$$P_\theta(E) = 0 \Longleftrightarrow Q_\theta(E) = 1.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν ισχύει οποιοσδήποτε από τους ισχυρισμούς (i) ή (ii) του Θεωρήματος 7.2.9, τότε $Q_\Theta \sim P_\Theta$ λόγω του Λήμματος 7.2.2, (ii), και άρα από την τελευταία ισοδυναμία έχουμε ότι

$$P(E) = \int P_\theta(E) P_\Theta(d\theta) = 0 \Longleftrightarrow Q(E) = \int Q_\theta(E) Q_\Theta(d\theta) = 1,$$

αφού οι $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι disintegrations του P επάνω στο P_Θ και του Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα. Επομένως, $Q \perp P$. $\square$

Παρατήρηση 7.2.11. Η Proposition 2.2 των Delbaen & Haezendonck [8] προκύπτει ως ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 7.2.9 αν η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. Θ είναι κάτω από το μέτρο πιθανότητας P εκφυλισμένη σε κάποιο $\theta_0 > 0$.

Πράγματι, αν $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$ για κάποιο $\theta_0 > 0$, τότε οι συνθήκες (a1) και (a2) ανάγονται στην $P_{(W,X)} = (\otimes_{n\in\mathbb{N}} P_{W_n}) \otimes (\otimes_{n\in\mathbb{N}} P_{X_n})$. Επίσης η υπόθεση $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ σε συνδυασμό με το Λήμμα 7.2.2, (ii) συνεπάγεται ότι $Q_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$, οπότε $P_\Theta(\Upsilon \setminus \{\theta_0\}) = Q_\Theta(\Upsilon \setminus \{\theta_0\}) = 0$, $P = P_{\theta_0}$ και $Q = Q_{\theta_0}$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\Theta(\omega) = \theta_0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Συνεπώς, $\sigma(\Theta) = \{\emptyset, \Omega\}$, και άρα $\widetilde{\mathcal{H}}_t = \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, καθώς και $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty = \mathcal{H}_\infty$. Τότε, αμφότερες οι (M_θ) και (M_ξ) ανάγονται στη σχέση (2.15) του [8]. Εφαρμόζοντας για την περίπτωση μιας εκφυλισμένης P_Θ τόσο το Θεώρημα 7.2.9 όσο και το Πόρισμα 7.2.10, και λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, άμεσα έχουμε το [8], Proposition 2.2.

Μερικές ακόμη συνέπειες του Θεωρήματος 7.2.9 δίνονται παρακάτω.

Πρόταση 7.2.12. *Αν $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ και $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{C}^{(*)} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{C}^{(*)}$ η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα $(Q_\theta, \mathcal{H})$-martingale.

(ii) Αν $g(\Theta) \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{H})$-martingale.

(iii) *Αν $g(\Theta) \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q,\mathcal{H})$-martingale αν και μόνο αν η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. $g(\Theta)$ είναι εκφυλισμένη στο $g(\theta_0)$ για κάποιο $\theta_0 > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ και $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$. Τότε έχουμε ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-CMPP$(g(\Theta), Q_{X_1})$, καθώς και ότι το Q ικανοποιεί τις (a1) και (a2). Τότε από το Θεώρημα 6.2.2 έχουμε ότι υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{C}_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{C}_*$ η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μια Q_θ-CPP$(g(\theta), (Q_\theta)_{X_1})$, που συνεπάγεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q_θ-διαδικασία Poisson με παράμετρο $g(\theta)$, κάτι που σε συνδυασμό με το Λήμμα 7.1.6, (i) συνεπάγεται το ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει Q_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

(i): Από την τελευταία συνθήκη και την απόδειξη της πρώτης ισότητας της συνθήκης (7.6) έπεται ότι για κάθε $\theta \notin \widetilde{C}^{(*)} := \widetilde{C}_* \cup \widetilde{O}^{(*)}$, όπου $\widetilde{O}^{(*)}$ είναι το μηδενικό σύνολο εκτός του οποίου ισχύει η πρώτη ισότητα της (7.6), η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m3) για τα Q_θ και $\mathcal{H}$, αφού $\mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t] = tg(\theta)\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = tg(\theta)\mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου η δεύτερη ισότητα αποτελεί συνέπεια της πρώτης ισότητας της (7.6). Επομένως, έχουμε το (i).

(ii): Προφανώς, η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m1) για τη $\mathcal{H}$, ενώ η ιδιότητα (m2) έπεται από την Q-ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. X_1 και $g(\Theta)$. Επειδή η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει Q_θ-ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις για κάθε $\theta \notin \widetilde{C}_*$, από το Πόρισμα 3.2.8 συνεπάγεται ότι θα έχει Q-υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις. Συνεπώς, για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ η τ.μ. $S_t - S_s$ θα είναι Q-υπό συνθήκη ανεξάρτητη της $\widetilde{\mathcal{H}}_s$, και άρα της $\mathcal{H}_s$ (βλ. Λήμμα 3.3.2). Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το [7], Section 7.3, Theorem 1, συνεπάγεται ότι η συνθήκη $\int_A \mathbb{E}_Q[S_t - S_s \mid \mathcal{H}_s]dQ = \int_A \mathbb{E}_Q[S_t - S_s \mid \Theta]dQ$ ισχύει για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$, οπότε η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (m3) για το Q και τη $\mathcal{H}$. Άρα δείξαμε το (ii).

(iii): Αν η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q,\mathcal{H})$-martingale, τότε προκύπτει ότι ικανοποιεί την ιδιότητα (m3), κάτι που με τη σειρά του συνεπάγεται το ότι $\int_D (S_t - S_s)dQ = \int_D \mathbb{E}_Q[(S_t - S_s)]dQ$ για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $D \in \sigma(\Theta)$. Από την τελευταία συνθήκη, σε συνδυασμό με το ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι εξ' υποθέσεως μια Q-CMPP$(g(\Theta), Q_{X_1})$ τέτοια ώστε οι τ.μ. $g(\Theta)$ και X_1 να είναι Q-ολοκληρώσιμες, προκύπτει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ότι

$$\mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta] = E_Q[S_t] \Longleftrightarrow tg(\Theta)\mathbb{E}_Q[X_1] = t\mathbb{E}_Q[g(\Theta)]\mathbb{E}_Q[X_1] \Longleftrightarrow g(\Theta) = \mathbb{E}_Q[g(\Theta)],$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $Q \mid \sigma(\Theta)$-σ.β.. Επομένως, υπάρχει ένα $\theta_0 \in \Upsilon$ τέτοιο ώστε $1 = Q_{g(\Theta)}(\{g(\theta_0)\}) = Q\big(\Theta^{-1}(g^{-1}(\{g(\theta_0)\})\big) = Q_\Theta(\{\theta : g(\theta) = g(\theta_0)\})$, και άρα τέτοιο ώστε $P_\Theta(\{\theta : g(\theta) = g(\theta_0)\}) = 1$, αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$ από την υπόθεση $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$. Συνεπώς, η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-CPP$(g(\theta_0), Q_{X_1})$.

Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι άμεση, αφού εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η

$\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-CPP$(g(\theta_0), Q_{X_1})$, τότε η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q,\mathcal{H})$-martingale. $\square$

Προφανώς, το μέτρο πιθανότητας Q του Θεωρήματος 7.2.9 ικανοποιεί τις συνθήκες (i) έως (iii) της Πρότασης 7.2.12, εφόσον κάτω από αυτό εξασφαλίζεται η ολοκληρωσιμότητα της τ.μ. X_1.

Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{M}^*_{S,g} := \mathcal{M}^*_{S,g,P_{X_1},\Theta}$ την οικογένεια όλων των μέτρων πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $Q \in \mathbb{M}_P(\mathcal{H}, \{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+})$. Επί πλέον, αν η ξ είναι μια P_Θ-σ.β. θετική συνάρτηση με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, τότε με $\mathcal{F}^*_{P,\xi} := \mathcal{F}^*_{P,X_1,\Theta,\xi}$ σημειώνουμε την κλάση όλων των $\beta \in \mathcal{F}_P$ τέτοιων ώστε $\Theta e^{\alpha(\Theta)}\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) \in \mathcal{L}^1(P)$ και $X_1\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) \in \mathcal{L}^1(P)$.

Πόρισμα 7.2.13. *Έστω ότι $P \in \mathcal{M}_S$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Για κάθε $Q \in \mathcal{M}^*_{S,g}$ υπάρχουν μια P_Θ-σ.β. θετική παράγωγος Radon-Nikodym ξ του Q_Θ ως προς P_Θ, μια ουσιωδώς μοναδική $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi}$, μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη Θ, καθώς κι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ).

(ii) Αντιστρόφως, για οποιαδήποτε P_Θ-σ.β. θετική συνάρτηση ξ με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi}$ υπάρχουν μοναδική συνάρτηση g όπως του Συμβολισμού 7.2.4, μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^*_{S,g}$, μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη Θ, καθώς κι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V'_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ).

Απόδειξη. (i): Έστω ότι $Q \in \mathcal{M}^*_{S,g}$. Επειδή προφανώς $\mathcal{M}^*_{S,g} \subseteq \mathcal{M}_{S,g}$, από το Θεώρημα 7.2.9, (i) έχουμε ότι υπάρχουν μια P_Θ-σ.β. θετική παράγωγος Radon-Nikodym ξ του Q_Θ ως προς P_Θ, μια ουσιωδώς μοναδική $\beta \in \mathcal{F}_P$, μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με τη Θ, καθώς κι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V_*$, για όλα τα $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ). Όμως, επειδή το $Q \in \mathcal{M}^*_{S,g}$, όλες οι τ.μ. $S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]$ είναι Q-ολοκληρώσιμες, κάτι που μέσω απλών υπολογισμών μας δίνει ότι το ίδιο θα ισχύει και για τις τ.μ. $g(\Theta)$ και X_1. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την (M_ξ) συνεπάγεται ότι οι τ.μ. $\Theta e^{\alpha(\Theta)}\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta)$ και $X_1\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta)$ είναι P-ολοκληρώσιμες. Συνεπώς, $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi}$, κάτι που αποδεικνύει το (i).

(ii): Έστω ξ μια P_{Θ}-σ.β. θετική συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, κι έστω ότι $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi}$. Επειδή $\mathcal{F}^*_{P,\xi} \subseteq \mathcal{F}_P$ από το Θεώρημα 7.2.9, (i) έχουμε ότι υπάρχουν μοναδική συνάρτηση g όπως του Συμβολισμού 7.2.4, μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$, μια ουσιωδώς μοναδική disintegration $\{Q_\theta\}_{\theta \in \Upsilon}$ του Q επάνω στο Q_{Θ} συνεπής με τη Θ, καθώς κι ένα P_{Θ}-μηδενικό σύνολο $V'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V'_*$, για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ να ισχύουν οι συνθήκες $(*)$, (M_ξ) και (M_θ). Επί πλέον, η υπόθεση $\beta \in \mathcal{F}^*_{P,\xi}$ σε συνδυασμό με την (M_ξ) συνεπάγεται ότι οι τ.μ. $g(\Theta)$ και X_1 είναι Q-ολοκληρώσιμες. Τότε, η συνθήκη $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ σε συνδυασμό με την Πρόταση 7.2.12, (ii) συνεπάγεται το ότι η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{H})$-martingale, συνεπώς $Q \in \mathbb{M}_P(\mathcal{H}, \{S_t - \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\}_{t \in \mathbb{R}_+})$, κάτι που αποδεικνύει το (ii). $\square$

Κεφάλαιο 8

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάμε διάφορες συνέπειες του κεντρικού αποτελέσματος της διατριβής (βλ. Θεώρημα 7.2.9), εστιάζοντας κυρίως σε αυτές που σχετίζονται με την *Προσέγγιση της Χρηματοοικονομικής Αποτίμησης της Ασφάλισης* (ΠΧΑΑ) στα πλαίσια μιας μη κερδοσκοπικής αγοράς (*arbitrage-free market*). Συνακόλουθα, κρίνεται σκόπιμο να δοθεί αρχικά μια σύντομη περιγραφή της ΠΧΑΑ (βλ. Ενότητα 8.1). Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.2.9, εξάγουμε διάφορες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και διερευνούμε κατά πόσο έχει νόημα η έννοια μιας *μεμειγμένης* τέτοιας αρχής (βλ. Ενότητα 8.2). Στην τελευταία ενότητα δίνονται ειδικές περιπτώσεις για την παράγωγο Radon-Nikodym ξ του Θεωρήματος 7.2.9, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

8.1 Η χρηματοοικονομική αποτίμηση της ασφάλισης

Η χρηματοοικονομική κατάσταση μιας ασφαλιστικής εταιρείας διαμορφώνεται από διάφορους παράγοντες σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας. Είναι φυσικό, λοιπόν, οι σ.δ. να αποτελούν κατάλληλα εργαλεία για την μαθηματική προτυποποίηση της διαχρονικής εξέλιξής της. Μάλιστα μπορούμε να διακρίνουμε δύο βασικές προσεγγίσεις προς αυτή την κατεύθυνση:

- *Την κλασσική*, όπου ουσιαστικά θεωρούμε πως σε κάθε χρονική στιγμή η εταιρεία δεν είναι τίποτε άλλο από ένας διαχειριστής χρηματικών εισροών και εκροών ή όπως γράφει και ο Lundberg [27] «μια δεξαμενή προς την οποία εισρέουν συνεχώς ασφάλιστρα και διαρρέει μια ακολουθία αποζημιώσεων» (βλ. επίσης Borch [6] και Sondermann [35]). Εδώ, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στη σ.δ. $\{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αποθεματικού, όπου $R_t^u := u + I_t - S_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $u > 0$. Το u είναι το αρχικό κεφάλαιο που διατηρεί η εταιρεία, το I_t τα έσοδα της εταιρείας (*premium income*) μέχρι το χρόνο t, και το S_t οι συνολικές απαιτήσεις έναντι της εταιρείας στο χρόνο t.

- *Την ΠΧΑΑ*, σύμφωνα με την οποία η εταιρεία πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή t να διατηρεί περιουσιακά στοιχεία ικανής αξίας για την κάλυψη τόσο των συνολικών υποχρεώσεων που έχουν δημιουργηθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή όσο και των μελλοντικών υποχρεώσεων που αναμένεται να δημιουργηθούν από το χαρτοφυλάκιο που διατηρεί.

Παρακάτω επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στη δεύτερη προσέγγιση, παραθέτοντας πρώτα κάποιες έννοιες που θα χρειαστούμε.

Κάθε εξάδα $\mathscr{M} = (\Omega, \Sigma, P, \mathbb{T}, \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \{U_t\}_{t\in\mathbb{T}})$ τέτοια ώστε η τριάδα (Ω, Σ, P) να είναι ένας χ.π., το $\mathbb{T}$ ένα σύνολο δεικτών τέτοιο ώστε $\{0, \tau\} \subseteq \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ για $\tau \in (0, \infty)$, η $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ μια διύλιση, και η $\{U_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ μια σ.δ. προσαρμοσμένη στη $\mathcal{Z}$, ονομάζεται **ένα υπόδειγμα αγοράς άυλων τίτλων** (*securities market model*).

Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\omega \in \Omega$ εκφράζουν τις καταστάσεις του πραγματικού κόσμου που επηρεάζουν την αγορά, και πιο συγκεκριμένα τη διαμόρφωση των τιμών των υπό διαπραγμάτευση σε αυτή άυλων τίτλων. Η διαθέσιμη πληροφορία στον κόσμο ή την οικονομία με τη σειρά της, δίνεται μέσω της σ-άλγεβρας Σ, ενώ οι εκτιμήσεις για τις πιθανότητες πραγματοποίησης των καταστάσεων του κόσμου αποτυπώνονται μέσω του μέτρου πιθανότητας P. Το σύνολο δεικτών $\mathbb{T}$ εκφράζει τις ημερομηνίες ή γενικότερα τις χρονικές στιγμές για τις οποίες θεωρούμε την οικονομία, ενώ με τ δηλώνεται ο χρονικός ορίζοντας της αγοράς. Η διύλιση $\{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ δηλώνει τη διαθέσιμη πληροφορία στην αγορά σε κάθε χρονική στιγμή t. Η $\{U_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ ονομάζεται **σ.δ. τιμών** και σε κάθε χρονική στιγμή δηλώνει τις τιμές του υπό διαπραγμάτευση άυλου τίτλου (περιουσιακού στοιχείου) στην αγορά.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα Αποτίμησης Άυλων Τίτλων (*Fundamental Theorem of Asset Pricing*), γενικά η *απουσία «κερδοσκοπίας»* σε μια αγορά $\mathscr{M}$ με χρονικό ορίζοντα τ (δηλαδή με $\mathbb{T} = [0, \tau]$ και $\mathcal{Z}_T = \Sigma$, βλ. και Harrison & Kreps [20], σελ. 388) ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός $(P, \{U_t\}_{t\in[0,\tau]})$-martingale-ισοδύναμου μέτρου Q. Πιο συγκεκριμένα, στην πιο απλή περίπτωση, όπου το Ω έχει πεπερασμένα στο πλήθος στοιχεία, η απουσία *ευκαιριών «κερδοσκοπίας»* (*arbitrage opportunities*)[3] είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός $Q \in \mathbb{M}_P(\mathcal{Z}, \{U_t\}_{t\in[0,\tau]})$. Η τελευταία συνθήκη ισοδυναμεί με την απουσία *δωρεάν γευμάτων* (*free lunches*) αν το Ω είναι οποιοδήποτε και η σ.δ. τιμών $\{U_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι φραγμένη (βλ. π.χ. [33], Theorem 7.2).

Για μια επισκόπηση επάνω στις διάφορες έννοιες της «κερδοσκοπίας» (λ.χ. *arbitrage opportunity, free lunch with vanishing risk*) κι εκδοχές του Θεμελιώδους Θεωρήματος Αποτίμησης Άυλων Τίτλων παραπέμπουμε στον Schachermayer [33], στο [20], στα [9], σελ.

[3] *Δυνατοτήτων αποκόμισης σ.β.-κέρδους με μηδενικό κόστος από τη διαπραγμάτευση ενός άυλου τίτλου.*

464-501 και Main Theorem 1.1, στα [21], Theorem 2.7 και Sections 1.5 και 3.1, καθώς και στον Sondermann [35] για την ειδική περίπτωση των αντασφαλιστικών αγορών.

Οι Delbaen & Haezendonk (1989) θεωρούν ως κατάλληλο υπόδειγμα για τη σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ μιας ασφαλιστικής εταιρείας μια σύνθετη διαδικασία Poisson ως προς το βασικό μέτρο πιθανότητας P, βρίσκονται δηλαδή στο πλαίσιο της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου. Επίσης υποθέτουν $\mathbb{T} = [0, \tau]$ και $\widetilde{\mathcal{H}}_T = \Sigma$, καθώς και ότι σε κάθε χρονική στιγμή t η εταιρεία μπορεί να πουλήσει τον εναπομείναντα κίνδυνο της περιόδου $(t, \tau]$ για δοσμένο ασφάλιστρο p_t. Το ασφάλιστρο αυτό δηλώνει ουσιαστικά το κόστος των μελλοντικών κινδύνων. Επομένως, για να είναι η ασφαλιστική εταιρεία καλυμμένη έναντι των πραγματοποιηθέντων και των αναμενόμενων κινδύνων θα πρέπει να διαθέτει (άυλα) περιουσιακά στοιχεία αξίας $U_t = p_t + S_t$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Τότε, στα πλαίσια μιας μη κερδοσκοπικής αγοράς (με μηδενικά επιτόκια) και σύμφωνα με τη θεωρία των Harrison & Kreps [20], μια δίκαιη αποτίμηση σε χρόνο $t = 0$ της αξίας αυτών των περιουσιακών στοιχείων σε χρόνο $t \in \mathbb{T}$ θα δίνονταν γενικά από τη μέση τιμή $\mathbb{E}_Q[U_t]$, όπου $Q \in \mathbb{M}_P(\mathcal{Z}, \{U_t\}_{t\in\mathbb{T}})$.

Στα χρηματοοικονομικά και ασφαλιστικά οικονομικά, όμως, η έννοια της αποστροφής προς τον κίνδυνο επιβάλλει μια πρόσθετη απαίτηση, η οποία πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά την τιμολόγηση των αναληφθέντων κινδύνων: *στα πιο δυσμενή ενδεχόμενα πρέπει να δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα*. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον υπολογισμό ασφαλίστρων που θα περιλαμβάνουν ένα περιθώριο ασφαλείας, και άρα ασφαλίστρων που θα είναι μεγαλύτερα από τις αναμενόμενες τιμές ως προς το αρχικό μέτρο πιθανότητας P (βλ. επίσης [8], σελ. 269-271).

Είναι, λοιπόν, φυσικό να εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην αναζήτηση martingale-ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας Q, τέτοιων ώστε $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$. Τέτοια μέτρα πιθανότητας καλούνται **ουδέτερα κινδύνου** (*risk-neutral*) **μέτρα**. Αλλά όπως αναφέρεται και στους Delbaen & Haezendonck [8], σελ. 270, «πρακτικά κάτι τέτοιο είναι πάρα πολύ γενικό». Αντιθέτως, είναι αρκετά κοντά στην πραγματικότητα το να απαιτήσουμε τα ασφάλιστρα να είναι γραμμικές συναρτήσεις του υπολειπόμενου χρόνου $\tau - t$, κάτι που ουσιαστικά σημαίνει πως απαιτούμε την ισχύ της συνθήκης $p_t = (\tau - t)p(Q) < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, όπου $p(Q)$ είναι η **πυκνότητα ασφαλίστρου** ενός μέτρου πιθανότητας Q. Με άλλα λόγια, μια πυκνότητα ασφαλίστρου δηλώνει *τον αριθμό των νομισματικών μονάδων που πρέπει να καταβάλονται σε μια ασφαλιστική εταιρεία στη μονάδα του χρόνου προκειμένου αυτή να αναλάβει έναν κίνδυνο, εφόσον η στοχαστική συμπεριφορά αυτού του κινδύνου καθορίζεται από το μέτρο πιθανότητας Q.*

Έτσι θα μπορούσε να δειχθεί ότι το πρόβλημα της χρηματοοικονομικής αποτίμησης της ασφάλισης ανάγεται σε αυτό του χαρακτηρισμού των martingale-(προοδευτικά) ισοδύναμων σύνθετων διαδικασιών Poisson: Πράγματι, στην ΠΧΑΑ ξεκινώντας από την παραδοχή ότι μια P-σύνθετη διαδικασία Poisson αποτελεί ένα κατάλληλο υπόδειγμα για τη σ.δ. συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, στόχος μας είναι η εύρεση ενός κατάλληλου μέτρου πιθανότητας Q που να καθιστά τη σ.δ. τιμών $\{U_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ ένα $(Q,\widetilde{\mathcal{H}})$-martingale ή ισοδύναμα που να επιτυγχάνει το ίδιο για τη σ.δ. $\{S_t - tp(Q)\}_{t\in\mathbb{T}}$ (αφού $U_t - p_0 = S_t - tp(Q)$ για κάθε $t\in\mathbb{T}$), κάτι που με τη σειρά του ισοδυναμεί με το ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ είναι μια Q-σύνθετη διαδικασία Poisson (βλ. και [8], σελ. 271-272). Για ένα τέτοιο μέτρο Q προκύπτει ότι $p(Q) = \mathbb{E}_Q[S_1]$, και άρα ότι $\mathbb{E}_Q[S_t] = tp(Q)$ για κάθε $t\in\mathbb{T}$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο εν λόγω χαρακτηρισμός βρίσκει εφαρμογή και στο πρόβλημα της αποτίμησης των ασφαλιστικών παραγώγων CAT (CAT insurance future and options), όπου ο υποκείμενος άυλος τίτλος είναι ουσιαστικά η δυνατότητα πραγματοποίησης προβλέψεων για την πορεία του Δείκτη Ζημιών (*Loss Index*) του ISO (Insurance Service Office). Ο τελευταίος αποτελεί ένα κατάλληλα σταθμισμένο άθροισμα των ζημιών που υφίστανται (σε τριμηνιαία βάση) περίπου 100 αντιπροσωπευτικά επιλεγμένες ασφαλιστικές εταιρείες, και μάλιστα τα τρία βασικά υποδείγματα που προτείνονται ως κατάλληλα για την περιγραφή της διαχρονικής εξέλιξής του είναι οι *σύνθετες* και οι *σύνθετες μ.δ. Poisson*, καθώς και οι *σύνθετες διαδικασίες Cox*. Για περισσότερες πληροφορίες επάνω σε αυτά τα θέματα, παραπέμπουμε στους Embrects & Meister [13] ή για μια πιο αναλυτική προσέγγιση στο [28].

Εύλογα, λοιπόν, μπορεί κανείς να οδηγηθεί στο συμπέρασμα πως τόσο το Ερώτημα 7.2.3 όσο και οι απαντήσεις που βρίσκει μέσω του Θεωρήματος 7.2.9 και των συνεπειών αυτού παρουσιάζουν ακόμη μεγαλύτερο από το ήδη σημαντικό μαθηματικό τους ενδιαφέρον.

8.2 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Στο εξής, υποθέτουμε ότι ο χ.π. $(\varOmega,\varSigma,P)$ *είναι αυτός της Παρατήρησης 7.2.6,* (a), *καθώς και ότι οι τ.μ.* X_1 *και* $\varTheta$ *είναι* P*-ολοκληρώσιμες. Επί πλέον, με* Q *και* $\{Q_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ *συμβολίζουμε το μοναδικό μέτρο πιθανότητας* $Q\in\mathcal{M}_{S,g}$ *και την ουσιωδώς μοναδική disintegration* $\{Q_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ *του* Q *επάνω στο* $Q_\varTheta$ *που είναι συνεπής με τη* $\varTheta$*, που αντιστοιχούν στη συνάρτηση* $\beta\in\mathcal{F}_P$ (βλ. Θεώρημα 7.2.9).

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, παραθέτουμε τον παρακάτω ορισμό, ο οποίος αποτελεί μια ελαφρά τροποποίηση του [8], Definition 3.1, κατάλληλη για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής.

Ορισμός 8.2.1. Μια **αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου** είναι ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στον μ.χ. $(\varOmega,\varSigma)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα εξής:

(pc1) $Q \overset{pr}{\sim} P$.

(pc2) Η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-CPP(θ_0, Q_{X_1}) για $\theta_0 > 0$.

(pc3) $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$.

Παρατηρούμε ότι σε σύγκριση με το [8], Definition 3.1, η κλάση όλων των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων είναι εδώ διευρυμένη, αφού $\Sigma = \mathcal{H}_\infty \supseteq \widetilde{\mathcal{H}}_\infty$.

Παρατηρήσεις 8.2.2. Προφανώς, τα Q και $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ ικανοποιούν τον ισχυρισμό (ii) του Θεωρήματος 7.2.9. Τότε από το Θεώρημα 7.2.9, (ii) και την απόδειξή του προκύπτει ότι $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$, $(Q_\theta)_{X_1} = Q_{X_1}$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$ και ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V'_* \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin V'_*$ να ισχύει $Q_\theta \overset{pr}{\sim} P_\theta$. Η συνθήκη $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$ σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.2.2 συνεπάγεται ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q_θ-CPP$(g(\theta), Q_{X_1})$ για κάθε $\theta \notin V'_*$. Επομένως, αν $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$ τότε P_Θ-σ.ό. τα επιμέρους μέτρα πιθανότητας Q_θ είναι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου. Η υποκείμενη αγορά στην οποία εφαρμόζεται η ΠΧΑΑ των Delbaen & Haezendonck (1989) για την εξασφάλιση των εν λόγω αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου δίνεται για κάθε $\theta \notin V'_*$ μέσω του

$$\mathscr{M}_\theta = (\Omega, \Sigma, P_\theta, \mathbb{T}, \mathcal{H}, \{S_t - \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]\}_{t\in\mathbb{T}}),$$

όπου $\mathbb{T} = [0, \tau]$ και $\tau \in (0, \infty)$ (βλ. και Ενότητα 8.1). Επί πλέον, παρατηρούμε τα εξής:

(a) Από την (7.22) και το ότι $O' \subseteq V'_*$, προκύπτει ότι για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \notin V'_*$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = e^{-\alpha(\theta)}\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{\beta^\theta(X_1)}] \tag{8.1}$$

κάτι που συνεπάγεται ότι $p(P_\theta) < p(Q_\theta)$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1(e^{\beta^\theta(X_1)} - 1)] > 0$. Επομένως, αν $X_1 e^{\gamma(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\beta^\theta(X_1) > 0$ P_θ-σ.β., τότε $p(P_\theta) < p(Q_\theta) < \infty$, αφού και πάλι από τη σχέση εγκλεισμού $O' \subseteq V'_*$, η P-ολοκληρωσιμότητα της τ.μ. $X_1 e^{\gamma(X_1)}$ συνεπάγεται την P_θ-ολοκληρωσιμότητά της για κάθε $\theta \notin V'_*$.

(b) Η σχέση (8.1) σε συνδυασμό με το ότι τα P και Q ικανοποιούν την (a2) συνεπάγεται την ισότητα $\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}]$, η οποία σε συνδυασμό με τη συνθήκη (M_ξ) δίνει την

$$\frac{\mathbb{E}_Q[S_1]}{\mathbb{E}_P[S_1]} = \frac{\mathbb{E}_Q[X_1]\mathbb{E}_Q[N_1]}{\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[N_1]} = \frac{\mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}]}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \frac{\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta)\Theta e^{\alpha(\Theta)}]}{\mathbb{E}_P[\Theta]}.$$

Επομένως, αν $X_1 e^{\gamma(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\gamma > 0$ P_{X_1}-σ.β. και αν $\xi(\Theta)e^{\alpha(\Theta)} > 1$ $P \mid \sigma(\Theta)$-σ.β., τότε $\mathbb{E}_P[S_1] < \mathbb{E}_Q[S_1] < \infty$ και άρα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(c) Επειδή $\mathbb{E}_P[X_1 e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[X_1 \xi(\Theta) M_t^{(\beta)}(\Theta)] = \mathbb{E}_Q[X_1]$, η συνθήκη $X_1 \in \mathcal{L}^1(Q)$ ή ισοδύναμα η $X_1\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) \in \mathcal{L}^1(P)$, που εμπλέκεται στον ορισμό της $\mathcal{F}^*_P$ και στο Πόρισμα 7.2.13, ισοδυναμεί με τη συνθήκη $X_1 e^{\gamma(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$. Επί πλέον, άμεσα έχουμε ότι $\int X_1[\xi(\Theta)M_t^{(\beta)}(\Theta) - e^{\gamma(X_1)}]dP = 0$.

Εκμεταλλευόμενοι τις Παρατηρήσεις 8.1 (δηλαδή το Θεώρημα 7.2.9), δίνουμε στη συνέχεια παραδείγματα συγκεκριμένων αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου.

Παράδειγμα 8.2.3 (Αρχή Αναμενόμενης Αξίας). Αν $\beta(x,\theta) = c_0$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$, όπου $c_0 \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε:

- $\gamma(x) = 0$ και $\alpha(\theta) = c_0$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$.
- $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1,\Theta)}] = e^{c_0}$, οπότε $\beta \in \mathcal{F}_P$.
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = \theta e^{c_0} = e^{c_0}\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ και $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]$ για κάθε $\theta \notin V'_*$, όπου V'_* είναι το P_Θ-μηδενικό σύνολο του Θεωρήματος 7.2.9.
- $p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = e^{c_0}\mathbb{E}_{P_\theta}[S_1] = e^{c_0}p(P_\theta)$ για κάθε $\theta \notin V'_*$.

Επομένως, $\mathbb{E}_Q[N_1] = \mathbb{E}_Q[e^{c_0}\Theta] = e^{c_0}\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1]$, οπότε $\mathbb{E}_Q[S_t] = t\mathbb{E}_Q[S_1] = te^{c_0}\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Ιδιαιτέρως, για $c_0 > 0$ έχουμε ότι για κάθε $\theta \notin V'_*$ η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου Q_θ είναι και ουδέτερο κινδύνου μέτρο. Επίσης αν $c_0 > 0$ και $\xi > 1$ P_Θ-σ.β., τότε $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Παράδειγμα 8.2.4 (Αρχή του Esscher). Αν $\beta(x,\theta) = cx - \ln\mathbb{E}_P[e^{cX}]$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$, όπου $c > 0$ σταθερά, τότε:

- $\gamma(x) = cx - \ln\mathbb{E}_P[e^{cX}]$ και $\alpha(\theta) = 0$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$.
- $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1 = \mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1,\Theta)}]$, οπότε $\beta \in \mathcal{F}_P$.
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] = \theta$ και
$$\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \frac{\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{cX_1}]}{\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{cX_1}]}$$
για κάθε $\theta \notin V'_*$.
- $p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = r_*(c)\mathbb{E}_{P_\theta}[S_1] = r_*(c)p(P_\theta)$ για κάθε $\theta \notin V'_*$, όπου
$$r_*(c) := \frac{\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 e^{cX_1}]}{\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{cX_1}]} = \frac{\mathbb{E}_P[X_1 e^{cX_1}]}{\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[e^{cX_1}]} \quad \text{για κάθε } c > 0 \text{ και } \theta \notin V'_*.$$

Επομένως, $\mathbb{E}_Q[N_1] = \mathbb{E}_Q[\Theta] = \mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = (\mathbb{E}_P[X_1 e^{cX_1}])(\mathbb{E}_P[e^{cX_1}])^{-1}$, οπότε έχουμε $\mathbb{E}_Q[S_t] = r_*(c)\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Επειδή, όμως, εύκολα διαπιστώνεται ότι $r_*(c) > r_0 \in (0,1)$ για κάθε $c > 0$, δεν μπορούμε γενικά να αποφανθούμε για το αν οι άρχες υπολογισμού ασφαλίστρου του Esscher Q_θ είναι ουδέτερα κινδύνου μέτρα.

Παράδειγμα 8.2.5. Αν $\beta(x,\theta) = \ln \frac{\theta}{x\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]}$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$, τότε:

- $\gamma(x) = -\ln(x\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])$ και $\alpha(\theta) = \ln\theta$ για κάθε $x, \theta \in \Upsilon$.
- $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[e^{\beta(X_1,\Theta)}] = \mathbb{E}_P[e^{\alpha(\Theta)}] = \mathbb{E}_P[\Theta] < \infty$, οπότε $\beta \in \mathcal{F}_P$.
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = \theta^2 = \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ και $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = (\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1} = (\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}])^{-1}$ για κάθε $\theta \notin V'_*$.
- $p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = \theta\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1](\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}])^{-1}$ για κάθε $\theta \notin V'_*$.

Επομένως, $\mathbb{E}_Q[N_1] = \mathbb{E}_Q[\Theta^2] = \mathbb{E}_P[\Theta^2\xi(\Theta)]$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = (\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}$, οπότε έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[S_t] = t\mathbb{E}_P[\Theta^2\xi(\Theta)](\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\theta \notin V'_*$ ισχύει η συνθήκη $p(P_\theta) < p(Q_\theta)$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]\mathbb{E}_{P_\theta}[\frac{1}{X_1}] < \theta = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$, καθώς και ότι η ανισότητα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t]$ ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_P[X_1]\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}] < (\mathbb{E}_P[\Theta^2\xi(\Theta)])(\mathbb{E}_P[\Theta])^{-1}$.

Παράδειγμα 8.2.6. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$\beta(x,\theta) = \ln \frac{c_1c_2(c_1x - c_2)(c_1^{-1}\theta - c_2^{-1})}{x\theta(c_1 - c_2\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])(c_2 - c_1\mathbb{E}_P[\frac{1}{\Theta}])} \quad \text{για κάθε } x, \theta \in \Upsilon,$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ σταθερές τέτοιες ώστε $\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}] \neq c_1c_2^{-1}$ και $\mathbb{E}_P[\frac{1}{\Theta}] \neq c_2c_1^{-1}$.
(a) Τότε έχουμε:

- $\gamma(x) = \ln[(c_1 - c_2\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}(c_1 - c_2x^{-1})]$ για κάθε $x \in \Upsilon$.
- $\alpha(\theta) = \ln[(c_2 - c_1\mathbb{E}_P[\frac{1}{\Theta}])^{-1}(c_2 - c_1\theta^{-1})]$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$.
- $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[e^{\alpha(\Theta)}] = 1$, οπότε $\beta \in \mathcal{F}_P$.
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1] = c_3\theta - c_4 = c_3\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] - c_4$ για κάθε $\theta \notin V'_*$, όπου
$$c_3 := c_2\big(c_2 - c_1\mathbb{E}_P\big[\frac{1}{\Theta}\big]\big)^{-1} \text{ και } c_4 := c_1\big(c_2 - c_1\mathbb{E}_P\big[\frac{1}{\Theta}\big]\big)^{-1}.$$
- $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = c_3\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] - c_4 = c_3\mathbb{E}_P[X_1] - c_4$ για κάθε $\theta \notin V'_*$, όπου
$$c_5 := c_1\big(c_1 - c_2\mathbb{E}_P\big[\frac{1}{X_1}\big]\big)^{-1} \text{ και } c_6 := c_2\big(c_1 - c_2\mathbb{E}_P\big[\frac{1}{X_1}\big]\big)^{-1}.$$
- Για την πυκνότητα ασφαλίστρου θα ισχύουν για κάθε $\theta \notin V'_*$ οι ισότητες
$$\begin{aligned} p(Q_\theta) &= \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] = (c_3\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] - c_4)(c_5\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] - c_6) \\ &= c_3c_4p(P_\theta) - c_4c_5\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] - c_3c_6\theta + c_5c_6. \end{aligned}$$

Επομένως, $\mathbb{E}_Q[N_1] = c_3\mathbb{E}_Q[\Theta] - c_4 = c_3\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)] - c_4$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = c_5\mathbb{E}_P[X_1] - c_6$, οπότε $\mathbb{E}_Q[S_t] = t(c_3\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)] - c_4)(c_5\mathbb{E}_P[X_1] - c_6)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Αν θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση όπου $P_\Theta = \mathbf{Ga}(4,3)$, δηλαδή όπου η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-διαδικασία Pólya-Lundberg με παραμέτρους $c = 4$ και $d = 3$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{E}_P[\frac{1}{\Theta}] = 2$. Υποθέτουμε, ακόμη ότι $c_1 = c_2 = 1$, οπότε έχουμε ότι $c_3 = c_4 = -1$ και $c_5 = c_6 = (1 - \mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}$. Συνεπώς, για κάθε $\theta \notin V'_*$ προκύπτει ότι

$$p(Q_\theta) = p(P_\theta) + \frac{\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] + \theta}{1 - \mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}]} + \frac{1}{(1 - \mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^2}$$

και άρα η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου Q_θ θα είναι ένα ουδέτερο κινδύνου μέτρο αν και μόνο αν $(1 - \mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] > \theta(\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}] - 1) - 1$.

Παρατηρήσεις 8.2.7. Σχετικά με τα παραπάνω παραδείγματα σημειώνουμε τα εξής:

(a) Στα Παραδείγματα 8.2.3 και 8.2.4 η $\beta \in \mathcal{F}_P$ είναι μια μονομεταβλητή συνάρτηση του θ και του x, δηλαδή έχουν εξαφανιστεί οι συνιστώσες $\gamma(x)$ και $\alpha(\theta)$, αντίστοιχα. Έτσι επαναλαμβάνουμε ουσιαστικά τους υπολογισμούς των Examples 3.1 και 3.3 του [8], αλλά αυτή τη φορά εξάγουμε όχι μόνο μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου, αλλά μια ολόκληρη *οικογένεια* από αυτές. Επί πλέον, υπολογίζονται και οι μέσες τιμές $\mathbb{E}_Q[S_t]$.

(b) Αντίθετα, στα επόμενα δύο παραδείγματα επιλέγουμε συναρτήσεις $\beta \in \mathcal{F}_P$ που αποτελούνται από δύο συνιστώσες. Μάλιστα, διαπιστώνουμε ότι κάτω από P_Θ-σ.ό. τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου του Παραδείγματος 8.2.5, δηλαδή τα μέτρα Q_θ, ο αναμενόμενος αριθμός εμφάνισης απαιτήσεων στη μονάδα του χρόνου δέχεται μια πολλαπλασιαστική επίδραση ίση με $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ σε σχέση με αυτόν κάτω από τα αρχικά μέτρα P_θ. Για τη φύση της επίδραση που ασκείται στο αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης δεν μπορούμε γενικά να αποφανθούμε μιας κι εξαρτάται από την κατανομή των μεγεθών απαίτησης P_{X_1}. Στο Παράδειγμα 8.2.6 από την άλλη, οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου επιφέρουν έναν γραμμικό μετασχηματισμό τόσο στον αναμενόμενο αριθμό των απαιτήσεων όσο και στο αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης. Ανάλογα σχόλια για τις πιο απλές περιπτώσεις των Παραδειγμάτων 8.2.3 και 8.2.4 δίνονται στα Examples 3.1 και 3.3 του [8], αντίστοιχα.

(c) Σε όλα τα παραδείγματα, μετά τον υπολογισμό των μέσων τιμών κάτω από τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου Q_θ δίνονται και οι αντίστοιχες μέσες τιμές κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q. Μάλιστα, η επίδραση που ασκείται σε αυτές λόγω της αλλαγής μέτρου από το P στο Q φαίνεται να εμφανίζει παρόμοια συμπεριφορά με αυτήν που παρουσιάζεται στις αντίστοιχες επιμέρους μέσες τιμές $\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_1]$, $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1]$ και $\mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t] = tp(Q_\theta)$ λόγω της μετάβασης από τα αρχικά μέτρα P_θ στα Q_θ. Επομένως, είναι μάλλον φυσικό να αναρωτηθεί κανείς για το αν τα εκάστοτε μέτρα πιθανότητας Q αποτελούν και αυτά αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου και αν ναι τί είδους; Για μια πρώτη απάντηση στο ερώτημα αυτό, επισημαίνουμε το ότι μαθηματικά είναι δόκιμο τα μέτρα αυτά να ονομαστούν **μεμειγμένες αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου**, διότι $Q(A) = \int Q_\theta(A) Q_\Theta(d\theta)$ για κάθε $A \in \Sigma$, αφού η $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του Q επάνω στο Q_Θ (βλ. Θεώρημα 7.2.9).

(d) Από πλευράς χρηματοοικονομικής ερμηνείας, όμως, ο ορισμός που προτείνεται στο τέλος του (c) είναι μάλλον καταχρηστικός, αφού το να ονομαστούν τα μέτρα Q «αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου» προϋποθέτει ότι οι μέσες τιμές $\mathbb{E}_Q[S_{\tau-t}]$, όπου $t \in [0,\tau]$ και $\tau \in (0,\infty)$, υπολογίζουν σε χρόνο t τα ασφάλιστρα που αντιστοιχούν σε αναμενόμενους μελλοντικούς κινδύνους, δηλαδή ότι οι μέσες τιμές $\mathbb{E}_Q[S_1]$ είναι όντως πυκνότητες ασφαλίστρου (βλ. Ενότητα 8.1). Επομένως, γεννάται μάλλον φυσικά η κάπως γενική απορία για το αν είναι δυνατή η μετάβαση από τις υποκείμενες για τα μέτρα Q_θ αγορές, που δίνονται μέσω των $\mathscr{M}_\theta$ (βλ. και Παρατηρήσεις 8.2.2), σε μια κατάλληλη αγορά, που δίνεται μέσω ενός υποδείγματος αγοράς άυλων τίτλων $\mathscr{M}_*$, για την οποία θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την ΠΧΑΑ; Η απορία αυτή μας οδηγεί στη διατύπωση του ακόλουθου ερωτήματος.

Ερώτημα 8.2.8. Έστω $\tau \in (0,\infty)$ και $\{0,\tau\} \subseteq \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$. Θεωρούμε, για κάθε $\theta \in \Upsilon$ τις αγορές $\mathscr{M}_\theta = (\Omega, \Sigma, P_\theta, \mathbb{T}, \{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \{Y_{t,\theta}\}_{t\in\mathbb{T}})$ και $\mathscr{M}^* = (\Omega, \Sigma, P, \mathbb{T}, \{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \{Y_t^*\}_{t\in\mathbb{T}})$. Αν για P_θ-σ.ό. $\theta \in \Upsilon$ υπάρχουν $Q_\theta \in \mathbb{M}_{P_\theta}(\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \{Y_{t,\theta}\}_{t\in\mathbb{T}})$ και $Q \in \mathcal{M}_{S,g}$, τότε ζητείται να χαρακτηριστούν οι σ.δ. $\{Y_t^*\}_{t\in\mathbb{T}}$ ώστε $Q \in \mathbb{M}_P(\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \{Y_t^*\}_{t\in\mathbb{T}})$.

Μια κατάλληλη γενίκευση του πλαισίου που διατύπωσαν οι Delbaen & Haezendonck στο [8] για την ΠΧΑΑ (βλ. Ενότητα 8.1), στην περίπτωση όπου η σ.δ. συνολικών απαιτήσεων περιγράφεται από μια σ.μ.δ. Poisson κάτω από το αρχικό μέτρο πιθανότητας P, θα μπορούσε να προσφέρει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως το 8.2.8 και αυτό της Παρατήρησης 8.2.7, (c). Εντούτοις, το θέμα αυτό ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας διατριβής και δεν θα μας απασχολήσει άλλο.

8.3 Ειδικές περιπτώσεις

Σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των Delbean & Haezendonck (βλ. [8], Proposition 2.2) ή και των Embrechts & Meister (βλ. [13], Theorem 1 ή [28], Proposition 2.9 και Corollary 2.10), το Θεώρημα 7.2.9 παρέχει έναν χαρακτηρισμό των martingale - (προοδευτικά) ισοδύναμων σ.μ.δ. Poisson, προσφέροντάς μας μια πολύ σημαντική πληροφορία: τη συνθήκη (M_ξ).

Για το λόγο αυτό, παρακάτω υπολογίζουμε την παράγωγο Radon-Nikodym ξ του Q_Θ ως προς P_Θ για ειδικές περιπτώσεις κατανομών πιθανότητας της δομικής παραμέτρου Θ, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα ασφαλιστικά και χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

Παρατήρηση 8.3.1. Μέσω εύκολων υπολογισμών προκύπτει ότι καθεμία από τις παρακάτω παράγωγους Radon-Nikodym ισούται με τον λόγο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της εκάστοτε κατανομής πιθανότητας Q_Θ προς την αντίστοιχη σ.π.π. της P_Θ.

(a) Αν $P_\Theta = \mathbf{Ga}(c_1, d_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(c_2, d_2)$, όπου $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2^{d_2}\Gamma(d_1)}{c_1^{d_1}\Gamma(d_2)}\theta^{d_2-d_1}e^{(c_1-c_2)\theta} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ό. τα } \theta \in \varUpsilon.$$

(b) Αν $P_\Theta = \mathbf{Pa}(c_1, d_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Pa}(c_2, d_2)$, όπου $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2 d_2^{c_2}(d_1+\theta)^{c_1}}{c_1 d_1^{c_1}(d_2+\theta)^{c_2}} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ό. τα } \theta \in \varUpsilon.$$

(c) Αν $P_\Theta = \mathbf{IG}(c_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{IG}(c_2)$, όπου $c_1, c_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c_1-c_2}{2\theta}} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ό. τα } \theta \in \varUpsilon.$$

(d) Αν $P_\Theta = \mathbf{Pa}(c_1, d_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(c_2, d_2)$, όπου $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$, τότε

$$\xi(\theta) = \frac{c_2^{d_2}}{c_1 d_1^{c_1}\Gamma(d_2)}\theta^{d_2-1}(d+\theta)^{c_1+1}e^{-c_2\theta} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ό. τα } \theta \in \varUpsilon.$$

Στο (a) της παραπάνω παρατήρησης μελετάμε την περίπτωση όπου η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από μια P- γίνεται μια Q-διαδικασία Pólya-Lundberg εξαιτίας της αλλαγής του μέτρου πιθανότητας. Παρόμοια είναι η λογική στο (b) για μια άλλη, όμως, δημοφιλή κατανομή των ασφαλιστικών μαθηματικών, ενώ στο (c) εξετάζουμε την αντίστοιχη περίπτωση για μια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που παραμένει στη κλάση των διαδικασιών Sichel. Για εφαρμογές των τελευταίων στον αναλογισμό, βλέπε π.χ. τον Grandell [18], σελ. 41. Τέλος, στο (d) δίνεται ένα παράδειγμα για το τι συμβαίνει αν η αλλαγή του μέτρου επηρεάζει την ίδια την κατανομή πιθανότητας της δομικής παραμέτρου Θ (από Pareto κάτω από το P την κάνει Γάμμα κάτω από το Q) και όχι απλώς τις παραμέτρους της αρχικής κατανομής.

Ανάλογα αποτελέσματα με αυτά της προηγούμενης παρατήρησης μπορούν να εξαχθούν και για τη συνάρτηση f, που είναι μια παράγωγος Radon-Nikodym του Q_{X_1} ως προς P_{X_1}, όταν η τ.μ. X_1 ακολουθεί συγκεκριμένες κατανομές κάτω από τα μέτρα P και Q.

Παράδειγμα 8.3.2. Αν θεωρήσουμε τώρα στο Παράδειγμα 8.2.6, (b) την ειδική περίπτωση της Παρατήρησης 8.3.1, (a) με $P_\Theta = \mathbf{Ga}(4,3)$ και $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(2,5)$, τότε εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η ανισότητα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t]$ ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ αν και μόνο αν $\mathbb{E}_P[X_1] < 2(1-\mathbb{E}_P[X_1])(1-\mathbb{E}_P[\frac{1}{X_1}])^{-1}$, αφού $\mathbb{E}_P[\Theta\xi(\Theta)] = 5/2$ και $\mathbb{E}_P[\Theta] = 3/4$.

Ανάλογα σχόλια με εκείνα του Παραδείγματος 8.3.2, που αφορούν το 8.2.6, μπορούν να γίνουν και για τα υπόλοιπα παραδείγματα της Ενότητας 8.2, τόσο για την περίπτωση (a) της Παρατήρησης 8.3.1 όσο και για τις άλλες τρεις περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ
Α έως Δ

Παράρτημα A

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων και Μέτρου

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε για λόγους πληρότητας, κι εξαιτίας του σημαντικού ρόλου που κατέχουν στα πλαίσια αυτής της διατριβής, γνωστές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Θεωρίας Μέτρου. Επίσης δίνονται οι κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στο κύριο μέρος της παρούσας διατριβής.

A.I Μετρησιμότητα και τυχαίες μεταβλητές

Έστω αυθαίρετοι αλλά σταθεροί χ.π. $(\varOmega, \varSigma, P)$ και $(\varUpsilon, T, Q)$.

Ορισμοί A.1. Μια απεικόνιση $f : \varOmega \longrightarrow \varUpsilon$ ονομάζεται $\varSigma$-T-**μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** αν για κάθε $B \in T$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \varSigma$.

Ιδιαιτέρως, αν $(\varUpsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η f ονομάζεται $\varSigma$-**μετρήσιμη συνάρτηση** ή απλώς **μετρήσιμη συνάρτηση** ή συνήθως **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**, ενώ αν $(\varUpsilon, T) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$, όπου $d \in \mathbb{N}$, τότε η f ονομάζεται **(d-διάστατο) τυχαίο διάνυσμα**.

Στη συνέχεια προχωρούμε ένα βήμα παρακάτω διακρίνοντας τα διάφορα είδη τ.μ..

Ορισμοί A.2. Μια τ.μ. $X : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται:
(a) Διακριτή, αν το R_X είναι αριθμήσιμο, δηλαδή της μορφής

$$R_X := \{x_k \in \mathbb{R} : k \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Οι ιδιότητες της τ.μ. X καθορίζονται πλήρως από τη **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ που ορίζεται από τον τύπο

$$f_X(x) := P(X = x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$P_X(B) = \sum_{x \in B} f_X(x) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}.$$

Το άθροισμα είναι αριθμήσιμο αφού η $f(x)$ μηδενίζεται εκτός των $x = x_k \in R_X$.
(b) Συνεχής, αν το σύνολο τιμών R_X της X έχει την πληθικότητα $\mathbf{c}$ του συνεχούς και η $P_X(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in R_X$.
(c) Απόλυτα Συνεχής, αν υπάρχει μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \ \text{ για κάθε } \ x \in \mathbb{R}.$$

Η f_X ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) της X. Αποδεικνύεται ότι αν η X είναι απόλυτα συνεχής με σ.π.π. f_X τότε ισχύει

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)dx \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής.

A.II Χρήσιμα αποτελέσματα

Πρόταση & Ορισμός A.3. Έστω (Ω, Σ, μ) χ.π. και $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $\nu := \nu(f, \mu) : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ ώστε $\nu(A) := \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$. Το ν ονομάζεται το **αόριστο ολοκλήρωμα της** f (ως προς μ) και ισχύουν τα εξής:

(i) ν μέτρο,

(ii) για κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) = 0$ έπεται ότι $\nu(A) = 0$ (συμβολικά $\nu \ll \mu$),

(iii) Αν $g : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $\int g d\nu = \int g f d\mu$.

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης, βλ. π.χ. [1], Πόρισμα 6.12.

Θεώρημα A.4 (Radon-Nikodym). *Έστω μ, ν μέτρα πιθανότητας επάνω στον μ.χ. (Ω, Σ). Αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \textit{για κάθε} \quad A \in \Sigma.$$

Η f ονομάζεται **παράγωγος Radon-Nikodym του** *ν* **ως προς** *μ και είναι μ-σ.β.μοναδική.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 10.12(β).

Θεώρημα A.5. *Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μ.χ., f μια Σ-T-μετρήσιμη απεικόνιση από το Ω στο Υ και P ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον μ.χ. (Ω, Σ). Τότε για κάθε $B \in T$ και κάθε T-μετρήσιμη συνάρτηση $h : \Upsilon \longrightarrow [-\infty, \infty]$ ισχύει*

$$\int_{f^1(B)} (h \circ f)dP = \int_B h \, dP_f$$

(υπό την έννοια ότι αν υπάρχει το ένα ολοκλήρωμα υπάρχει και το άλλο και είναι ίσα).

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 7.6.

Θεώρημα A.6 (Επέκτασης Μέτρου Καραθεοδωρή). *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα επάνω στο σύνολο Ω, και $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ μια συνολοσυνάρτηση τέτοια ώστε $\nu(\emptyset) = 0$ και $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(E_n)$ για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ με την ιδιότητα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$. Τότε το ν επεκτείνεται σε ένα μέτρο μ επάνω στη $\sigma(\mathcal{A})$. Ιδιαιτέρως, αν το ν έχει την ιδιότητα $\nu(\Omega) = 1$ τότε το μ είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που επεκτείνει το ν.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Επέκτασης Μέτρου του Καραθεοδωρή, βλ. π.χ. [2], Θεώρημα 1.3.5.

Θεώρημα A.7 (Μοναδικότητας για μέτρα). *Έστω (Ω, Σ) ένας μετρήσιμος χώρος και μ,ν δύο μέτρα επάνω στη σ-άλγεβρα Σ. Αν $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$, η $\mathcal{I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, τέτοια ώστε $\mu \mid \mathcal{I} = \nu \mid \mathcal{I}$ και $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$, τότε $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \Sigma$.*

Για περισσότερα σχετικά με το παραπάνω θεώρημα, βλ. π.χ. [2], Πρόταση 1.2.8.

Θεώρημα A.8. *Έστω σύνολο Ω και $\mathcal{A}$ άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Αν η $\mathcal{M}$ είναι μια μονότονη κλάση υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, τότε $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.*

Θεώρημα A.9 (Μονότονης Κλάσης). *Έστω σύνολο Ω και $\mathcal{D}$ μια κλάση Dynkin υποσυνόλων του Ω. Αν η $\mathcal{C}$ είναι μια κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές υποκλάση της $\mathcal{D}$, τότε $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$.*

Για περισσότερα σχετικά με τα Θεωρήματα A.8 και A.9, βλ. π.χ. [15], 136G και 136B, αντίστοιχα.

A.III Κατανομές πιθανότητας

Θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \Psi$, όπου $d \in \mathbb{N}$ και $\Psi \subseteq \mathbb{R}^d$ (συμβολικά $P_X = \mathbf{K}(\theta)$) αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X}(x)\nu(dx) = \int_{B\cap R_X} f_X(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου f_X η αντίστοιχη σ.π.π. και ν είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$, ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι (απόλυτα) συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Παρακάτω, παραθέτουμε τις κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στην παρούσα διατριβή. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, ορίζουμε μια κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$ δίνοντας απλώς την αντίστοιχη σ.(π.)π. Ακόμη, δίνουμε και την αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση, καθώς και τη μέση τιμή της κάθε κατανομής όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο:

(i) **Κατανομή Poisson** $(P_X = \mathbf{P}(\theta))$

- $f_X(x) = e^{-\theta}(\theta^x/x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$, όπου $\theta > 0$.
- $\varphi_X(u) := \mathbb{E}_P[e^{\mathrm{i}uX}] = e^{\theta(e^{\mathrm{i}u}-1)}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου i η φανταστική μονάδα.
- $\mathbb{E}_P[X] = \theta$.

(ii) **Εκθετική Κατανομή** $(P_X = \mathbf{Exp}(\theta))$

- $f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$ για κάθε $x, \theta > 0$.

(iii) **Κατανομή Γάμμα** $(P_X = \mathbf{Ga}(c,d))$

- $f_X(x) = \frac{c^d}{\Gamma(d)} x^{d-1} e^{-cx}$ για κάθε $x > 0$, όπου $c, d > 0$.

  Σημειώνουμε ότι $\Gamma(d) := \int_0^\infty x^{d-1} e^{-x} dx$ για κάθε $d > 0$.
- $\mathbb{E}_P[X] = d/c$.

(iv) **(r-Μετατοπισμένη) Κατανομή Βήτα** $(P_X = \mathbf{Be}(r,\alpha,\gamma))$

- $f_X(x) = \frac{r^{1-(\alpha+\gamma)}}{B(\alpha,\gamma)} x^{\alpha-1}(r-x)^{\gamma-1}$ για κάθε $x \in (0,r)$, όπου $r, \alpha, \gamma > 0$.

  Σημειώνουμε ότι $B(\alpha,\gamma) := \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}$ για κάθε $\alpha, \gamma > 0$. Για $r = 0$ η $\mathbf{Be}(0,\alpha,\gamma)$ ταυτίζεται με την Κατανομή Βήτα με παραμέτρους $\alpha, \gamma > 0$ (συμβολικά $\mathbf{Be}(\alpha,\gamma)$).

(v) **Ομοιόμορφη Κατανομή** $(P_X = \mathbf{U}(c_1,c_2))$

- $f_X(x) = 1$ για κάθε $x \in [c_1, c_2]$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(vi) **Αντίστροφη Κανονική Κατανομή** $(P_X = \mathbf{IG}(\alpha))$

- $f_X(x) = \frac{(2/\alpha)^{1/2}}{\pi^{1/2}} x^{-3/2} e^{-\alpha/2x}$ για κάθε $x > 0$, όπου $\alpha > 0$.

(vii) **Κατανομή Pareto** $(P_X = \mathbf{Pa}(c,d))$

- $f_X(x) = cd^c(d+x)^{-(c+1)}$ για κάθε $x > 0$, όπου $c, d > 0$.

Παράρτημα B

Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας

Σε αυτό το παράρτημα δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Γενικής Τοπολογίας, που χρησιμοποιούνται στο κύριο μέρος της παρούσας διατριβής.

Ορισμοί B.1. Έστω σύνολο Ω.
(a) Μια **τοπολογία** επάνω στο Ω είναι μία οικογένεια $\mathfrak{T}$ υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε

(T1) $\emptyset, \Omega \in \mathfrak{T}$,

(T2) $G, H \in \mathfrak{T} \Longrightarrow G \cap H \in \mathfrak{T}$,

(T3) $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T} \Longrightarrow \bigcup \mathcal{G} \in \mathfrak{T}$.

Το ζεύγος, τώρα, $(\Omega, \mathfrak{T})$ ονομάζεται ένας **τοπολογικός χώρος** (βλ. π.χ. [16], 2A3A).
(b) Τα στοιχεία της $\mathfrak{T}$ καλούνται **ανοικτά σύνολα** και τα συμπληρώματά τους (στο Ω) καλούνται **κλειστά**. Αν $A \subseteq \Omega$ τότε το σύνολο $\mathrm{cl}A := \bigcap \big\{F : \ F^c \in \mathfrak{T},\ A \subseteq F\big\}$ καλείται **κλειστότητα** του A και είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιλαμβάνει το A (βλ. π.χ. [16], 2A3D(b)). Επίσης το σύνολο $\mathrm{int}A := \bigcup\{G : G \in \mathfrak{T}, G \subseteq A\}$ ονομάζεται το **εσωτερικό** του A και είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιλαμβάνεται στο A.
(c) Ένας τοπολογικός χώρος $(\Omega, \mathfrak{T})$ ονομάζεται **Hausdorff** αν για οποιαδήποτε δύο διακριτά $x, y \in \Omega$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $G, H \in \mathfrak{T}$ με $G \cap H = \emptyset$ ώστε $x \in G$ και $y \in H$. (βλ. π.χ. [16], 2A3E).

Ορισμοί B.2. Έστω $(\Omega, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff.
(a) Το υποσύνολο D του Ω είναι **πυκνό** στο Ω αν $\mathrm{cl}D = \Omega$, δηλαδή αν ταυτίζεται με κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο (βλ. π.χ. [16], 2A3U(a)).
(b) Ο $(\Omega, \mathfrak{T})$ ονομάζεται **διαχωρίσιμος** αν το Ω περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο (βλ. π.χ. [16], 2A3U(d)).

Ορισμός Β.3. Θα λέμε ότι ένα σύστημα $\mathcal{K}$ υποσυνόλων του Ω σχηματίζει μια **κάλυψη** του $K \subseteq \Omega$ ή ότι **καλύπτει το** K αν $K \subseteq \bigcup \mathcal{K}$.

Ορισμός Β.4. Έστω $(\Omega, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff.
(a) Ένα υποσύνολο K του Ω καλείται **συμπαγές** αν για οποιαδήποτε οικογένεια $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$ που καλύπτει το K υπάρχει μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{G}$ που συνεχίζει να καλύπτει το K (βλ. π.χ. [16], 2A3N(a)).
(b) Ο $(\Omega, \mathfrak{T})$ είναι **συμπαγής** αν κάθε ανοικτή κάλυψη του Ω έχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη (βλ. π.χ. [16], 3A3A(f)).

Ορισμός Β.5. Έστω $(\Omega, \mathfrak{T})$ και $(\Upsilon, \mathfrak{G})$ τοπολογικοί χώροι Hausdorff. Η οικογένεια $\mathfrak{U}$ όλων των υποσυνόλων U του $\Omega \times \Upsilon$ που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\forall\, (x, y) \in U \;\; \exists\, G \in \mathfrak{T},\; H \in \mathfrak{G} \quad (x, y) \in G \times H \subseteq U$$

είναι μια τοπολογία επάνω στο $\Omega \times \Upsilon$ και ονομάζεται η **τοπολογία γινόμενο** επάνω στο $\Omega \times \Upsilon$ (βλ. π.χ. [16], 2A3T).

Ορισμοί Β.6. Έστω $(\Omega, \mathfrak{T})$ και $(\Upsilon, \mathfrak{G})$ τοπολογικοί χώροι Hausdorff.
(a) Έστω μια απεικόνιση $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής** αν $f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}$ για κάθε $G \in \mathfrak{G}$ (βλ. [16], 2A3T).
(b) Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι κενός ή συνεχής εικόνα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ονομάζεται **αναλυτικός ή Souslin** (βλ. π.χ. [17], 423A).

Ορισμός Β.7. Έστω σύνολο Ω. Μια **ψευδομετρική** επάνω στο Ω είναι μια συνάρτηση ρ από το $\Omega \times \Omega$ στο $\mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

($\mathbf{\Psi}1$) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in \Omega$ (τριγωνική ανισότητα),

($\mathbf{\Psi}2$) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in \Omega$,

($\mathbf{\Psi}3$) $\rho(x, x) = 0$ για κάθε $x \in \Omega$.

Μια μετρική είναι μια ψευδομετρική ρ που ικανοποιεί ακόμα την ιδιότητα

($\mathbf{\Psi}4$) $\rho(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$

(βλ. π.χ. [16], 2A3F). Το ζεύγος (Ω, ρ) είναι ένας **μετρικός χώρος**.

Ορισμός Β.8. Έστω U γραμμικός χώρος. Το συναρτησιοειδές $||\cdot|| : U \longrightarrow \mathbb{R}_+$ είναι μια **νόρμα** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(u1) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ για κάθε $u, v \in U$,

(u2) $||\alpha u|| \leq |\alpha| \cdot ||u||$ για κάθε $u \in U$ και $\alpha \in \mathbb{R}$,

(u3) $||u|| = 0$ αν και μόνο αν $u = 0_U$, όπου 0_U το μηδενικό διάνυσμα του U.

Ορισμοί B.9. Έστω (Ω, ρ) ένας μετρικός χώρος και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του Ω. Θα λέμε ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει στο** $x \in \Omega$ αν

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 \quad \rho(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Ω ονομάζεται **βασική ή Cauchy** αν

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, m \geq n_0 \quad \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Ο μετρικός χώρος (Ω, ρ) ονομάζεται **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι και συγκλίνουσα.

Παρατήρηση B.10. Έστω (Ω, ρ) μετρικός χώρος, $\varepsilon > 0$ και $x \in \Omega$. Το σύνολο $U_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ ονομάζεται μια **ε-περιοχή του** x. Ορίζουμε την οικογένεια $\mathfrak{T} := \{G \subseteq \Omega : \;\forall\, x \in G \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;\; U_\varepsilon(x) \subseteq G\}$. Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathfrak{T}$ είναι μια τοπολογία στο Ω που ονομάζεται η **τοπολογία η επαγόμενη από τη μετρική** ρ (βλ. π.χ. [16], 2A3F(c)).

Εξαιτίας της Παρατήρησης B.10 έχει νόημα ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός B.11. Κάθε τοπολογικός χώρος που μπορεί να προκύψει από κάποιον μετρικό χώρο μέσω της κατασκευής που περιγράφεται στην Παρατήρηση B.10, καλείται **μετρικοποιήσιμος** και η αντίστοιχη τοπολογία **μετρικοποιήσιμη**.

Ιδιαιτέρως, για $x, y \in \mathbb{R}^d$, ας θέσουμε $\rho(x, y) = ||x - y||$, όπου για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε ως συνήθως $||z|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{d} z_k^2}$. Τότε το ρ είναι μια μετρική, και καλείται η **ευκλείδια μετρική** επάνω στον $\mathbb{R}^d$. Η **ευκλείδια τοπολογία** επάνω στον $\mathbb{R}^d$ είναι η μετρικοποιήσιμη τοπολογία που ορίζεται από την ευκλείδια μετρική ρ (βλ. π.χ. [16], 2A3F(f)).

Ορισμός B.12. Ένας τοπολογικός χώρος $(\Omega, \mathfrak{T})$ (ή απλώς Ω) ονομάζεται **πολωνικός** αν είναι διαχωρίσιμος και η τοπολογία του μπορεί να οριστεί από μια μετρική κάτω από την οποία ο Ω είναι πλήρης (βλ. π.χ. [17], 4A2A).

Παράρτημα Γ

Τοπολογικά Μέτρα

Ορισμός Γ.1. Έστω $\mathcal{K}$ οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Θα λέμε ότι η $\mathcal{K}$ είναι **άνω (αντ. κάτω) κατευθυνόμενη** αν για κάθε $K, K' \in \mathcal{K}$ υπάρχει ένα σύνολο $L \in \mathcal{K}$ ώστε $K \subseteq L$ και $K' \subseteq L$ (αντ. $K \supseteq L$ και $K' \supseteq L$, βλ. π.χ. [16], 2A1A(b)).

Ορισμός Γ.2. Έστω $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathfrak{B}(\Omega), P)$ ένας **τοπολογικός χώρος πιθανότητας**, δηλαδή μια τετράδα τέτοια ώστε η τριάδα (Ω, Σ, P) να είναι ένας χ.π. και το ζεύγος $(\Omega, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff. Τότε:

(a) Το μέτρο πιθανότητας P είναι **εσωτερικά κανονικό** ως προς την οικογένεια $\mathfrak{F}$ των κλειστών υποσυνόλων του Ω αν

$$P(E) = \sup\{P(F) : \ F \in \mathfrak{F}, \ F \subseteq E\}$$

για κάθε $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ (βλ. π.χ. [17], 411B).

(b) Το μέτρο πιθανότητας P είναι **εξωτερικά κανονικό** ως προς την οικογένεια $\mathfrak{T}$ αν

$$P(E) = \inf\{P(G) : \ G \in \mathfrak{T}, \ G \supseteq E\}$$

για κάθε $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ (βλ. π.χ. [17], 411D).

Κάθε Borel μέτρο πιθανότητας επάνω σε έναν τοπολογικό χ.π. $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathfrak{B}(\Omega), P)$, όπου $(\Omega, \mathfrak{T})$ είναι ένας πολωνικός χώρος, είναι πάντα εσωτερικά κανονικό ως προς την οικογένεια $\mathfrak{F}$ των κλειστών συνόλων (βλ. π.χ. [17], Theorem 412E), κι επομένως εξωτερικά κανονικό ως προς την $\mathfrak{T}$.

(c) Το μέτρο πιθανότητας P επάνω στη $\mathfrak{B}(\Omega)$ ονομάζεται **τ-προσθετικό** αν για οποιαδήποτε μη κενή άνω κατευθυνόμενη οικογένεια $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$ ισχύει

$$P\Big(\bigcup \mathcal{G}\Big) = \sup\{P(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

(βλ. π.χ. [17], 411C).

Παράρτημα Δ

Κατάλογος Μηδενικών Συνόλων

Σε αυτό το παράρτημα δίνεται ένας κατάλογος των συνόλων μηδενικής πιθανότητας που εμπλέκονται τόσο στις διατυπώσεις όσο και στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων της παρούσας διατριβής. Ο κατάλογος υποδιαιρείται σε οκτώ επιμέρους πίνακες, που αναφέρονται στα αντίστοιχα κεφάλαια, ενότητες ή και συγκεκριμένα αποτελέσματα όπου συναντώνται τα μηδενικά σύνολα μέσα στη διατριβή. Η υποδιαίρεση αποσκοπεί στο να διευκολύνει τον αναγνώστη στα σημεία εκείνα όπου η παρουσία των μηδενικών συνόλων καθίσταται από αρκετά έως πάρα πολύ κουραστική!!! Έτσι για παράδειγμα επιλέξαμε να παραθέσουμε έναν μόνο πίνακα τόσο για καθένα από τα Κεφάλαια 2, 3, 4 και 6 όσο και για ένα μόνο από τα μέρη μιας απόδειξης (βλ. λ.χ. τον πίνακα για το Θεώρημα 7.2.9, (ii)).

Οι πίνακες αποτελούνται από τρεις στήλες που ουσιαστικά απαντούν στο παρακάτω τρίπτυχο ερωτήσεων που αφορά το εκάστοτε μηδενικό σύνολο (γραμμή του πίνακα):

ποιό - πού συναντάται για πρώτη φορά - τί ιδιότητα έχει;

Επισημαίνουμε ότι *αν δεν δηλώνεται διαφορετικά* οι ιδιότητες που αναφέρονται στην τρίτη στήλη του κάθε πίνακα ισχύουν *κάτω από το μέτρο πιθανότητας* P_θ *και για κάθε* θ *εκτός του μηδενικού συνόλου*. Οι γραμμές με *πλάγια* γράμματα αφορούν μηδενικά σύνολα που εμφανίζονται μόνο μια φορά σε κάποια απόδειξη και από εκεί και πέρα δεν επηρεάζουν το υπόλοιπο κείμενο. Κάποια από αυτά σχετίζονται με άλλα μηδενικά σύνολα, η εμπλοκή των οποίων στις αποδείξεις σημειώνεται στους πίνακες μέσα σε αγκύλες.

Τέλος, αναφέρουμε πως προσπαθήσαμε κατά το μέτρο του δυνατού οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε για μηδενικά σύνολα με συναφείς ιδιότητες να παρουσιάζουν μια λογική συνέχεια και συνέπεια. Για παράδειγμα το O στις διάφορες εκφάνσεις του συνδέεται με ιδιότητες ανεξαρτησίας ή λ.χ. οι συμβολισμοί της απόδειξης της Πρότασης 7.2.5 σχετίζονται με αυτούς της Ενότητας 7.1. Βέβαια, υπάρχουν και περιπτώσεις που δεν ήταν εφικτό να συμβεί κάτι τέτοιο, χωρίς όμως το γεγονός αυτό να προκαλεί οποιαδήποτε είδους σύγχυση (βλ. π.χ. τους συμβολισμούς του Λήμματος 3.3.1 και του Πορίσματος 7.2.10 που αφορούν εντελώς άσχετες ιδιότητες).

Κεφάλαιο 2

N	2.1.3	σ.β. μοναδικότητα disintegration

Κεφάλαιο 3

O_I	3.2.2	ανεξαρτησία σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ (I αριθμήσιμο)
		[*στην απόδειξη εμπλέκονται και τα* $O_{I,m,i_1,\ldots,i_m,B_1,\ldots,B_m}$]
$O_{\mathbb{Q}_+}$	3.2.4	ανεξαρτησία σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$
$\widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}$	3.2.5	ανεξαρτησία προσαυξήσεων σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$
L_I	3.2.6	ισονομία σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ (I αριθμήσιμο)
$\widehat{L}_{\mathbb{Q}_+}$	3.2.7	ισονομία προσαυξήσεων σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$
$K_{\mathbb{Q}_+}$	3.2.8	στασ. ανεξ. προσαυξήσεων $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ($K_{\mathbb{Q}_+} := \widehat{L}_{\mathbb{Q}_+} \cup \widehat{O}_{\mathbb{Q}_+}$)
$\widetilde{L}'_t, \widetilde{L}_t$	*απόδειξη 3.2.9*	*ισχύς συνθηκών (3.11), (3.12), αντίστοιχα*
		[*εμπλέκονται και τα* $\widetilde{L}'_{t,B}, \widetilde{L}_{t,B}$]
$\widetilde{L}$	3.2.9	διατήρηση κατανομής $\mathbf{K}_t$ για την τ.μ. X_t για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$
		$(\widetilde{L} := \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} \widetilde{L}_t)$
K_*	3.2.10	στασ. ανεξ. προσαυξήσεων προσαυξήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$
$\widetilde{L}_*$	3.2.10	διατήρηση κατανομής Poisson για την τ.μ. N_t για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$
L_*	3.2.10	$\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ διαδικασία Poisson ($L_* := K_* \cup \widetilde{L}_*$)
H'_1	*απόδειξη 3.3.1*	*ολοκληρωσιμότητα τ.μ.* X_t
H'_2	*απόδειξη 3.3.1*	*(m3) για* $\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ [*εμπλέκονται και τα* $H'_{2,A,s,t}$]
H'	3.3.1	$\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{F}}_X)$-martingale ($H' := H'_1 \cup H'_2$)
$\widehat{K}_t$	*απόδειξη 3.3.1*	$\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = t\Theta(\omega)\ \ \forall\, \omega \notin \widehat{K}_t\ \ (\widehat{K}_t = \Theta^{-1}(\widehat{L}_t))$
$\widehat{K}'_t$	*απόδειξη 3.3.1*	$\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = \mathbb{E}_{P_\bullet}[N_t]\circ\Theta(\omega)\ \ \forall\, \omega \notin \widehat{K}'_t\ \ (\widehat{K}'_t = \Theta^{-1}(\widehat{L}'_t))$
$\widehat{K}''_t$	*απόδειξη 3.3.1*	$\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = \mathbb{E}_{P_\bullet}[N_t]\circ\Theta(\omega) = t\Theta(\omega)\ \ \forall\, \omega \notin \widehat{K}''_t$
		$(\widehat{K}''_t := \widehat{K}_t \cup \widehat{K}'_t)$
H''	*απόδειξη 3.3.1*	$\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = t\theta\ (H'' = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+}(\widehat{L}_t \cup \widehat{L}'_t))$
$\widehat{K}''$	*απόδειξη 3.3.1*	$\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta](\omega) = \mathbb{E}_{P_\bullet}[N_t]\circ\Theta(\omega)\ \ \forall\, \omega \notin \widehat{K}''\ (\widehat{K}'' = \Theta^{-1}(H''))$
H'_*	*απόδειξη 3.3.1*	$\{N_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[N_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale
H	3.3.1	$\{N_t - t\theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{A}})$-martingale ($H := H'_* \cup H''$)
$\widetilde{H}$	*απόδειξη 3.3.3*	$X_t - X_s$ *ανεξάρτητη* $\widetilde{\mathcal{F}}_s\ \ \forall\, s \le t$ [*εμπλέκονται και τα* $\widetilde{H}_{A,B,s,t}$]
$\widetilde{H}_*$	3.3.3	$\{X_t - \mathbb{E}_{P_\theta}[X_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta, \widetilde{\mathcal{F}}_X)$-martingale ($\widetilde{H}_* := H'_1 \cup \widetilde{H}$)

Κεφάλαιο 4

$\widetilde{A}_I$	4.1.6	(αντίστοιχη με τη δεσμευμένη K_i) κατανομή πιθανότητας k_i για τη μετρήσιμη απεικόνιση X_i για κάθε $i \in I$
A_I	4.1.7	ανεξαρτησία $\{X_i\}_{i\in I}$ (I αριθμήσιμο)
$\widetilde{A}'_I$	4.1.9, (i)	ισονομία $\{X_i\}_{i\in I}$ (I αριθμήσιμο)
$\widehat{A}_I$	4.1.9, (ii)	ανεξαρτησία και ισονομία $\{X_i\}_{i\in I}$ (I αριθμήσιμο)
$\widetilde{B}_{\mathbb{N}}$	4.1.11	$\mathbf{K}(\theta)$-κατανεμημένοι ενδιάμεσοι χρόνοι W_n
$B_{\mathbb{N}}$	4.1.11	ανεξαρτησία της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
B_*	4.1.11	$\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-ανανεωτική διαδικασία ($B_* := \widetilde{B}_{\mathbb{N}} \cup B_{\mathbb{N}}$)
B_{**}	4.2.7	$\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(S_\omega, \mathbf{K}(\omega))$-ανανεωτική διαδικασία $\forall\, \omega \notin B_{**} := \Theta^{-1}(B_*)$

Κεφάλαιο 6

G'	6.2.1, (i)	$\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μεταξύ τους ανεξάρτητες σ.δ.
O	απόδειξη 6.2.1, (ii)	$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητη σ.δ.
L	απόδειξη 6.2.1, (ii)	$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισόνομη σ.δ.
G''	6.2.1, (ii)	$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητη και ισόνομη σ.δ. ($G'' := O \cup L$)
G_*	6.2.1, (iii)	$(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ σ.δ. κινδύνου ($G_* = G' \cup G''$)
C_*	6.2.2	$\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σύνθετη διαδικασία Poisson ($C_* = G_* \cup L_*$)

Ενότητα 7.1

$\widehat{D}$	7.1.2	ολοκληρωσιμότητα τ.μ. $e^{\beta^\theta(X_1)}$
$\widehat{D}_*$	7.1.4, (b)	$E_{P_\theta}[e^{S_t^{(\beta)}(\theta)}] = e^{t\theta\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\beta^\theta(X_1)-1}]} < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ($\widehat{D}_* := C_* \cup \widehat{D} = G_* \cup L_* \cup \widehat{D}$)
V	απόδειξη 7.1.6, (ii)	$P_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ($\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ συνεπής με τη Θ)
$\widehat{V}$	7.1.6, (ii)	$\sigma\big((S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})(\theta)\big)$ και $\mathcal{H}_s$ ανεξάρτητες για κάθε $s \le t$ ($\widehat{V} := G_* \cup V$)
$\widetilde{D}_*$	7.1.7	$\{M_t^{(\beta)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta, \mathcal{H})$-martingale με $\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$ ($\widetilde{D}_* := \widehat{V} \cup \widehat{D}_* = V \cup \widehat{D}_*$)

Απόδειξη Πρότασης 7.2.5

$\widetilde{C}_*$	βήμα (a)	$\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Q_θ-CPP$(g(\theta),(Q_\theta)_{X_1})$
G_{a}	βήμα (a)	$G_{\mathrm{a}} := C_* \cup \widetilde{C}_*$
G_{b}	βήμα (b)	Q_θ-μεταξύ τους ανεξάρτητες $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$\widetilde{G}''$	βήμα (c)	Q_θ-ανεξάρτητη και ισόνομη $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$\widetilde{O}^{(*)}$	βήμα (c)	ισχύς πρώτης ισότητας της (7.6)
		[*στην απόδειξη εμπλέκονται και τα* $\widetilde{O}^{(*)}_{n,B_n}$]
$O^{(*)}$	βήμα (c)	ισχύς τελευταίας ισότητας της (7.6)
		[*στην απόδειξη εμπλέκονται και τα* $O^{(*)}_{n,B_n}$]
G_{c}	βήμα (c)	ισχύς της (7.6) ($G_{\mathrm{c}} := \widetilde{G}'' \cup \widetilde{O}^{(*)} \cup O^{(*)}$)
$G_{\mathrm{d}} := O^{(*)}_{\gamma,X_1}$	βήμα (d)	$\mathbb{E}_{P_\theta}[e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$
$\widetilde{V}$	βήμα (e)	$Q_\theta(\Theta^{-1}(B)) = \chi_B(\theta)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$
		($\{Q_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ συνεπής με τη Θ)
V_*	Εκφώνηση, βήμα (e)	$V_* := G_{\mathrm{a}} \cup G_{\mathrm{b}} \cup G_{\mathrm{c}} \cup G_{\mathrm{d}} \cup \widetilde{D}_* \cup \widetilde{V}$

Απόδειξη Θεωρήματος 7.2.9, (ii)

V'	βήμα (a)	$V' := \widetilde{D}_* \cup G_{\mathrm{d}}$
O'	βήμα (f)	$(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}$
V'_*	Εκφώνηση, βήμα (f)	$V'_* := V' \cup O'$

Υπόλοιπο Ενότητας 7.2

$\widetilde{C}^{(*)}$	7.2.12, (i)	$\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \mathbb{E}_Q[X_1]$ ($\widetilde{C}^{(*)} := \widetilde{C}_* \cup \widetilde{O}^{(*)}$)
$\widehat{H}_\kappa$	*απόδειξη 7.2.10*	$Q_\theta \neq P_\theta$
$\widehat{H}$	7.2.10	$Q_\theta \neq P_\theta \Longrightarrow Q_\theta \perp P_\theta$ ($\widehat{H} := \widehat{H}_\kappa \cup V_* \cup V'_* \cup C_* \cup O'$)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Κουμουλλής Γ. – Νεγρεπόντης Σ.:** *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα (1991).

[2] **Μαχαιράς Ν.Δ.:** *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς (2006).

[3] **Athreya, K.B. – Lahiri, S.N.:** *Measure Theory and Probability Theory*, Springer Science+Business Media, LLC, USA (2006).

[4] **Bhattacharya, S.K. – Holla, M.S. (1965):** On a Discrete Distribution with Special Reference to the Theory of accident Proneness, *J. Amer. Statist. Assoc.* **60**, 1060-1066.

[5] **Billingsley, P.:** *Probability and Measure*, Third Edition, Wiley-Interscience, New York (1995).

[6] **Borch, K. (1967):** The theory of risk, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* **29**, 432-452.

[7] **Chow, Y.S. – Teicher, H.:** *Probability Theory: Independence, Interchangeability and Martingales*, Second Edition, Springer-Verlag, New York (1988).

[8] **Delbaen, F. – Haezendonck, J. (1989):** A martingale approach to premium calculation principles in an arbitrage free market, *Insurance Math. Econom.* **8**, 269-277.

[9] **Delbaen, F. – Schachermayer, W. (1994):** A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Math. Ann.* **300**, 463-520.

[10] **Diaconis, P. – Freedman, D. (1980):** Finite Exchangeable Sequences, *Ann. Probab.* **8** (No. 4), 745-764.

[11] **Dudley, R.M.:** *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole, Advanced Books & Software, Pacific Grove, California (1989).

[12] **Elstrodt, J.:** *Mass-und Integrationstheorie*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1996).

[13] **Embrechts, P. – Meister, S. (1997):** Pricing Insurance Derivatives: The Case of CAT Futures, *Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Risk*, George State University Atlanta, Society of Actuaries, Monograph M-FI97-1, 15-26.

[14] **Faden, A.M. (1985):** The existence of regular conditional probabilities: Necessary and sufficient conditions, *Ann. Probab.* **13** (No. 1), 288-298.

[15] **Fremlin, D.H.:** *Measure Theory, Vol. 1, The Irreducible Minimum*, Torres Fremlin, Colchester (2000).

[16] **Fremlin, D.H.:** *Measure Theory, Vol. 2, Broad Foundations*, Torres Fremlin, Colchester (2001).

[17] **Fremlin, D.H.:** *Measure Theory, Vol. 4, Topological Measure Spaces*, Torres Fremlin, Colchester (2003).

[18] **Grandell, J.:** *Mixed Poisson Processes*, Chapman & Hall, London (1997).

[19] **Gurland, J. (1958):** A generalized class of contagious distributions, *Biometrics* **14**, 229-249.

[20] **Harrison, J.M. – Kreps, D.M. (1979):** Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, *J. Econom. Theory* **20**, 381-408.

[21] **Harrison, J.M. – Pliska, S.R. (1981):** Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process. Appl.* **11**, 215-260.

[22] **Hewitt, E. – Savage, L.J. (1955):** Symmetric measures on cartesian products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **80**, 470-501.

[23] **Hoffmann-Jørgensen, J.:** *The Theory of Analytic Spaces*, Various Publications Series, No. 10, Aarhus: Aarhus Universitet, Matematisk (1970).

[24] **Huang, W.J. (1990):** On the characterization of point processes with the exchangeable and Markov properties, *Sankhyā A* **52**, 16-27.

[25] **Kallenberg, O.:** *Probabilistic Symmetries and Invariance Principles*, Springer (2005).

[26] **Karatzas, I. – Shreve, S.E.:** *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York (1988).

[27] **Lundberg, F. (1909):** Zur Theorie der Rückversichering, *Transactions of the International Congress of Actuaries.*

[28] **Meister, S.:** *Contributions to the Mathematics of Catastrophe Insurance Futures*, Unpublished Diplomarbeit, ETH Zürich (1995).

[29] **Olshen, R. (1974):** A Note on Exchangeable Sequences, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **28**, 317-321.

[30] **Pachl, J.K. (1978):** Disintegration and compact measures, *Math. Scand.* **43**, 157-168.

[31] **Protter, Ph.:** *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2004).

[32] **Schachermayer, W. (1994):** Martingale measures for discrete-time processes with infinite horizon, *Math. Finance* **4** (1), 25-55.

[33] **Schachermayer, W.:** *The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance*, http://www.mat.univie.ac.at/∼schachermayer/pubs/index.php.

[34] **Schmidt, K.D.:** *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart (1996).

[35] **Sondermann, D. (1991):** Reinsurance in arbitrage-free markets, *Insurance Math. Econom.* **10**, 191-202.

[36] **Strauss, W. – Macheras, N.D. – Musial, K.:** *Liftings, in: Handbook of Measure Theory, vol. II* (E. Pap, ed.), Chapter 28, Elsevier, Amsterdam (2002).

[37] **Strauss, W. – Macheras, N.D. – Musial, K. (2004):** Splitting of liftings in products of probability spaces, *Ann. Probab.* **32** (No. 3B), 2389-2408.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Α,

ακολουθία

  βασική ή Cauchy, 129

  συγκλίνουσα, 129

άλγεβρα, 6

  η παραγόμενη, 6

αόριστο ολοκλήρωμα, 124

απεικόνιση(-ης)

  μετρήσιμη, 123

  περιορισμός, 5

  που διατηρεί τα μέτρα, 11

  συνεχής (τοπολογία), 128

αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου, 114

  αναμενόμενης αξίας, 116

  μεμειγμένη, 119

  Esscher, 116

Δ,

δεσμευμένη μέση τιμή, 9

διαμέριση, 6

διύλιση, 23

  δεξιά συνεχής, 23

  κανονική, 23

Ε,

έκρηξη, 46

ε-περιοχή, 129

Θ,

Θεώρημα

  Επέκτασης Μέτρου Καραθεοδωρή, 125

  Μοναδικότητας για μέτρα, 125

  Μονότονης Κλάσης, 125

  Radon-Nikodym, 124

Κ,

κανονική δεσμευμένη πιθανότητα (κ.δ.π.)

  -γινόμενο, 11

  υποαλγεβρική, 11

κατανομή πιθανότητας, 8

  δεσμευμένη, 10

  εκφυλισμένη, 8

κλάση

  μονότονη, 6

  Dynkin, 6

Μ,

μαρκοβιανός πυρήνας, 9

  ισοδύναμος, 10

μέση τιμή, 7

μετρήσιμο(-ος)

  κύλινδρος, 52, 62

  ορθογώνιο, 8

  σύνολο, 6

μετρική, 128

ευκλείδια, 129
ψευδο-, 128
μέτρο(-α), 7
απαίτησης, 41
γινόμενο, 8
εικόνα, 8
εξωτερικά κανονικό, 131
εσωτερικά κανονικό, 131
ισοδύναμα, 90
κάθετα, 90
ουδέτερο κινδύνου, 113
πιθανότητας, 7
προοδευτικά ισοδύναμα, 90
τέλειο, 7
martingale-ισοδύναμα, 90
martingale-προοδευτικά ισοδύναμα, 90

Ν,
νόρμα, 128

Ο,
οικογένεια
άνω κατευθυνόμενη, 131
κάτω κατευθυνόμενη, 131

Π,
παράγωγος Radon-Nikodym, 124
πυκνότητα ασφαλίστρου, 113

Σ,
στοχαστική διαδικασία (σ.δ.), 22
ανανεωτική, 47
ανταλλάξιμη, 51
άφιξης των απαιτήσεων, 23
διπλή Poisson, 65
ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, 23
κινδύνου, 74
μεγέθους απαίτησης, 74
μεμειγμένη ανανεωτική (μ.α.δ.), 47
μεμειγμένη Poisson (μ.δ. Poisson), 25
σύνθετη μεμειγμένη (σ.μ.δ.) Poisson, 74
σύνθετη Poisson, 74
συνολικών απαιτήσεων, 74
τιμών, 112
του αριθμού των απαιτήσεων, 23
(ή διαδικασία) Poisson, 25
(ή διαδικασία) Pólya-Lunberg, 62
συνάρτηση
μετρήσιμη, 123
(πυκνότητας) πιθανότητας (σ.(π.)π.), 123
σύνολο(-ου)
ανοικτό, 127
εσωτερικό, 127
κάλυψη, 128
κλειστό, 127
κλειστότητα, 127
μηδενικό, 7
εξαίρεσης, 23, 24
πυκνό, 127
συμπαγές, 128
συμπληρωματικό, 5
τιμών, 7
σ-άλγεβρα, 6
αριθμήσιμα παραγόμενη, 6
γινόμενο, 8
ενδεχόμενα, 6
η παραγόμενη, 6, 7
ίχνος, 6
Borel, 6

Τ,

τοπολογία, 127
- γινόμενο, 128
- ευκλείδια, 129
- η επαγόμενη, 129
- μετρικοποίησιμη, 129

τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), 123
- απόλυτα συνεχής, 124
- διακριτή, 123
- συνεχής, 124

Υ,

υπόδειγμα αγοράς άυλων τίτλων, 112

υπό συνθήκη
- ανεξαρτησία, 22
- ανεξάρτητες προσαυξήσεις, 22
- ισονομία, 22
- στάσιμες προσαυξήσεις, 22

Χ,

χρημ/κή αποτίμηση της ασφάλισης, 112

χρόνος διακοπής, 80
- παρελθόν, 80
- τιμή της διαδικασίας, 80

χώρος
- αναλυτικός, 128
- διαχωρίσιμος, 127
- μετρήσιμος, 7
- μετρικός, 128
- μετρικοποιήσιμος τοπολογικός, 129
- μέτρου, 7
- πιθανότητας (χ.π.), 7
  - -γινόμενο, 8
  - τοπολογικός, 131
- πλήρης μετρικός, 129
- πολωνικός, 129
- συμπαγής τοπολογικός, 128
- τοπολογικός, 127
- Hausdorff, 127

d,

disintegration, 10
- συνεπής, 11

m,

martingale, 34

p,

P-σχεδόν
- βέβαια (σ.β.), 7
- όλα (σ.ό.), 7

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\alpha(\mathcal{G})$, 6
δ_y , 12
λ , 7
ν-MRP , 48
$\pi_\Omega, \pi_\Upsilon, \pi_i$, 8
Σ_A , 6
Σ_T , 80
Σ_0 , 7
$\Sigma \times T$, 8
$\Sigma \otimes T$, 8
$\sigma(\mathcal{G})$, 6
$\sigma(f)$, 7
$\sigma(\{f_i\}_{i\in I})$, 7
A^c , 5
$\mathcal{A} := \{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, 24
$\widetilde{\mathcal{A}} := \{\widetilde{\mathcal{A}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, 24
$\mathcal{A}_\infty, \widetilde{\mathcal{A}}_\infty$, 24
$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_d$, 7
$\mathfrak{B}_\mathbb{N}$, 7
$\overline{\mathfrak{B}}$, 7
$\mathfrak{B}(A)$, 7
$\mathbf{Be}(r, \alpha, \gamma)$, 126
$\mathbb{E}_P[X]$, 7
$\mathbb{E}_P[X \mid \mathcal{F}]$, 9
$\mathbf{Exp}(\theta)$, 126
$\mathcal{F}_P$, 82
$\mathcal{F}^*_{P,\xi}$, 109
$f \mid D$, 5
$\mathbf{Ga}(c, d)$, 126
$\mathcal{H} := \{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, 80
$\widetilde{\mathcal{H}} := \{\widetilde{\mathcal{H}}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, 80
$\mathcal{H}_\infty, \widetilde{\mathcal{H}}_\infty$, 80
$\mathbf{IG}(\alpha)$, 126
id_A , 5
$K(\Theta)$, 10
$\mathbf{K}(\Theta)$, 10, 8
$\mathcal{L}^1(P), \mathcal{L}^1_+(P)$, 7
$\mathscr{M}$, 112
$\mathcal{M}_{S,g}, \mathcal{M}_S$, 91
$\mathcal{M}^*_{S,g}$, 109
$\mathbb{M}_P(\mathcal{Z}, \{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$, 90
$m(\mathcal{G})$, 6
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$, 5
$\mathbf{P}(\theta)$, 126
$\mathbf{Pa}(c, d)$, 126
P-CPP(θ_0, P_{X_1}) , 74
P-CMPP(Θ, P_{X_1}) , 74
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$, 5
$Q \ll P$, 124
$Q \sim P$, 90
$Q \overset{pr}{\sim} P$, 90
$Q \perp P$, 90
$Q \otimes P$, 8
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \overline{\mathbb{R}}$, 5
R_X , 7
$\mathbb{T}$, 112
$\mathbf{U}(c_1, c_2)$, 126
X_{N_t} , 73
$\mathcal{X}_n$, 92
$\mathbb{Z}$, 5
Z_T , 80
(M_θ) , 91
(M_ξ) , 91
$(P, \mathbf{K}(\theta_0))$-RP , 47
$(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP , 47
$(*)$, 91
$\otimes_{i\in J}\mu_i$, 8
$\otimes_{i\in J}\Sigma_i$, 8
$\bigcup\mathcal{K}, \bigcap\mathcal{K}$, 5
$\uplus$, 5

$\widetilde{P}_\theta := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)$

$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k$

(Ω, Σ, P)

$T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$

$P_\Theta = \mathrm{Ga}(c,d)$

$\mu(F) = \int \mu_\theta(F) P_\Theta(d\theta)$

$X_t - \mathbb{E}_P[X_t \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(P)$

χ_E

λ

$\mathcal{A}$

$\sigma(\mathcal{H})$

$Q_\theta(A) = \int_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta$

$\mathbb{E}_{P_\theta}[M_t^{(\beta)}(\theta)] = 1$

$Q \mid \mathcal{H}_t \sim P \mid \mathcal{H}_t$

$$R_\theta(A) := \begin{cases} \int_A M_t^{(\beta)}(\theta) dP_\theta & \text{αν } \theta \notin \widetilde{D}_* \\ P_\theta(A) & \text{αν } \theta \in \widetilde{D}_* \end{cases}$$

…ξανά το Θεώρημα Επέκτασης Μέτρου του Καραθεοδωρή