



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη της Ολοκληρώσιμης Προεξοφλημένης
Συνάρτησης Ποινής στη Θεωρία Χρεοκοπίας

Αρθρογράφος:
Δανογλίδου Ευθυμία

Επιβλέπων :
Ψαρράκος Γεώργιος

Τριμελής Επιτροπή :

Ψαρράκος Γεώργιος

Πολίτης Κωνσταντίνος

Πιτσέλης Γεώργιος

Αθήνα, 2013

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Ψαρράκο Γεώργιο, επιβλέποντα καθηγητή μου, για την πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε.

Ευχαριστώ επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον κ. Πιτσέλη Γεώργιο και τον κ. Πολίτη Κωνσταντίνο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η λειτουργία μιας ασφαλιστικής εταιρείας και οι αποφάσεις που λαμβάνει, καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το αποθεματικό που έχει τη δεδομένη χρονική στιγμή. Ένα από τα βασικά προβλήματα στη θεωρία χρεοκοπίας είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου το αποθεματικό να γίνει κάποια χρονική στιγμή αρνητικό. Εκτός από το χρόνο χρεοκοπίας T , δύο ακόμα σημαντικές ποσότητες είναι οι τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$. Οι Gerber-Shiu (1998) εισήγαγαν μια συνάρτηση που ονομάζεται προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και είναι ευρέως γνωστή και ως συνάρτηση Gerber-Shiu. Συγκεκριμένα ορίζεται ως η μέση τιμή

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \cdot w(U(T-), |U(T)|) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u],$$

όπου :

- u : το αρχικό αποθεματικό.
- $w(x, y)$: η συνάρτηση ποινής (penalty function) .
- $\delta > 0$: προεξοφλητικός παράγοντας.
- $I(T < \infty)$: δείκτη συνάρτηση η οποία παίρνει την τιμή 1 αν συμβεί χρεοκοπία και την τιμή 0 διαφορετικά.

Στην εργασία εισάγουμε την ολοκληρώσιμη $m_\delta(u)$ και μελετάμε ειδικές περιπτώσεις για τις διάφορες επιλογές των δ και $w(x, y)$. Στη συνέχεια θα ορίσουμε την κατανομή του ελλείμματος καθώς και την ολοκληρώσιμη μορφή της.

ABSTRACT

The operation of an insurance company and the decisions taken are largely determined by the reserve that has the given time. One of the main problems in the ruin theory is the calculation of the probability of ruin, i.e. the probability of the possibility the reserve to be some time negative. Apart from the time of ruin T , two significant quantities are the random variables that describe the surplus before the ruin occurs $U(T-)$ and the deficit at the time of ruin $|U(T)|$. Gerber-Shiu (1998) introduced a function called Gerber-Shiu expected discounted penalty function, also known as Gerber-Shiu function. Specifically it is defined as the following expectation

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \cdot w(U(T-), |U(T)|) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u] ,$$

where :

- u : the initial surplus.
- $w(x, y)$: a penalty function.
- $\delta > 0$: a discount function.
- $I(T < \infty)$: an indicator function, equal to 1 when ruin occurs and equal to 0 otherwise.

In this dissertation we introduce the integrated $m_\delta(u)$ and we study specific cases for various choices of δ and $w(x, y)$. Furthermore, we consider the distribution of the deficit and the integrated form.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ	
Εισαγωγή11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	
2.1 Εισαγωγή12
2.2 Στοχαστικές Ανελιξεις12
2.3 Το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου17
2.3.1 Η Στοχαστική Ανέλιξη του Πλεονάσματος17
2.3.2 Ο Χρόνος Χρεοκοπίας20
2.3.3 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας20
2.3.4 Τα Κλιμακωτά Ύψη24
2.3.5 Ο Συντελεστής Προσαρμογής26
2.4 Το Ανανεωτικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ ΤΩΝ GERBER-SHIU	
3.1 Η Συνάρτηση των Gerber-Shiu31
3.2 Ειδικές Μορφές της Συνάρτησης των Gerber-Shiu32
3.3 Η Ολοκληρώσιμη Μορφή της Συνάρτησης των Gerber-Shiu36
3.4 Ειδικές Μορφές της Ολοκληρώσιμης Συνάρτησης των Gerber-Shiu38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ

4.1 Ανάλυση και Μαθηματικός Τύπος της Κατανομής του Ελλείμματος41
4.2 Αριθμητικά Αποτελέσματα για την Εκθετική Κατανομή43
4.3 Ολοκληρώσιμη Μορφή της Κατανομής του Ελλείμματος51
4.3.1 Ολοκληρώσιμη Μορφή της Κατανομής του Ελλείμματος ως προς y51
4.3.2 Ολοκληρώσιμη Μορφή της Κατανομής του Ελλείμματος ως προς u51

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αριθμητικά Αποτελέσματα55
-----------------------------------	-----

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ91
-------------------------------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ93
----------------------------	-----

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- u : Αρχικό αποθεματικό.
- c : Σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλιστρων.
- $S(t)$: Στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων.
- $U(t)$: Στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος.
- $N(t)$: Απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη/ Αριθμός κινδύνων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$.
- Y_i : Το μέγεθος της αποζημίωσης από τον i κίνδυνο.
 - $P(y)$: Η συνάρτηση κατανομής των Y_i .
 - m_1 : Η μέση τιμή των Y_i .
- W_i : Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων.
 - $K(t)$: Η συνάρτηση κατανομής των W_i .
 - $E(W)$: Η μέση τιμή των W_i .
- T_i : Η χρονική στιγμή εμφάνισης του i -ενδεχομένου.
- L_i : Το i κλιμακωτό ύψος.
- L : Το άθροισμα των κλιμακωτών υψών.
- Κατανομή Ισορροπίας
 - Κλασικό Μοντέλο
 - P : Η συνάρτηση κατανομής των αποζημιώσεων.
 - P_1 : Η 1η κατανομή ισορροπίας (Συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών).
 - P_2 : Η 2η κατανομή ισορροπίας.
 - Ανανεωτικό Μοντέλο
 - P : Η συνάρτηση κατανομής των αποζημιώσεων.
 - F : Η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών.
 - F_1 : Η 1η κατανομή ισορροπίας της F .
 - Μέση Τιμή
 - m_1 : Η μέση τιμή των αποζημιώσεων.
 - $\mu_{1,1}$: Η μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας.
 - $\mu_{2,1}$: Η μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας.

- Κλασικό Μοντέλο
 - $mrlP(y)$: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων.
 - $mrlP_1(y)$: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας .
 - $mrlP_2(y)$: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας .
 - Ανανεωτικό Μοντέλο
 - $mrlP(y)$: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων.
 - $mrlF(y)$: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των κλιμακωτών υψών.
 - $mrlF_1(y)$: Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών F .
- T : Ο χρόνος χρεοκοπίας.
 - $\psi(u)$: Η πιθανότητα χρεοκοπίας.
 - $\delta(u)$: Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας.
 - $U(T-)$: Το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία.
 - $|U(T)|$: Το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας (σε απόλυτη τιμή).
 - $w(x, y)$: Συνάρτηση ποινής.
 - $I(A)$: Δείκτης συνάρτηση.
 - $m_\delta(u)$: Αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των *Gerber – Shiu*.
 - δ : Παράγοντας προεξόφλησης.
 - $G_\delta(u, y)$: Η κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.
 - $\bar{G}_\delta(u, y)$: Η προεξοφλημένη ουρά του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας.
 - $h_\delta(x|0)$: Η προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία για $u = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός μιας ασφαλιστικής εταιρείας είναι η κάλυψη κινδύνων έναντι ενός ορισμένου χρηματικού ποσού, γνωστό ως ασφάλιστρο. Η ασφαλιστική εταιρεία εισπράττει τα ασφάλιστρα, τα οποία αποτελούν τα έσοδα της εταιρείας και καταβάλλει τις αποζημιώσεις που προέρχονται από την επέλευση ενός ζημιογόνου ενδεχομένου.

Προκειμένου να διασφαλιστεί η ορθή λειτουργία της ασφαλιστικής εταιρείας θα πρέπει τα έσοδα να υπερβαίνουν τα έξοδα, δηλαδή η εταιρεία να έχει πλεόνασμα έτσι ώστε να μην επέλθει χρεοκοπία. Ο όρος της χρεοκοπίας δεν ισοδυναμεί με την παύση λειτουργίας της ασφαλιστικής εταιρείας, αλλά με την προσωρινή υπέρβαση των εξόδων έναντι των εσόδων. Τα μεγέθη τα οποία μας ενδιαφέρουν είναι ο χρόνος της χρεοκοπίας, το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία.

Στην παρούσα εργασία αρχικά, θα μελετήσουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu η οποία λαμβάνει υπόψιν και τις τρεις προαναφερθείσες μεταβλητές. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την ολοκληρώσιμη μορφή της, καθώς και με την κατανομή του ελλείμματος.

Η δομή της εργασίας θα είναι η εξής :

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα γίνει μια εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας και θα αναπτυχθούν τα δύο κυριότερα μοντέλα, τα οποία είναι το κλασικό μοντέλο και το ανανεωτικό μοντέλο. Ειδικότερα, θα ξεκινήσουμε την επισκόπηση παρουσιάζοντας τις στοχαστικές ανελιξεις. Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις έννοιες της στοχαστικής ανέλιξης του πλεονάσματος, του χρόνου χρεοκοπίας, της πιθανότητας χρεοκοπίας, των κλιμακωτών υψών και του συντελεστή προσαρμογής, τόσο για το κλασικό όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu και στην ολοκληρώσιμη μορφή της και θα αναλύσουμε τις διάφορες μορφές τους για διαφορετικές τιμές του συντελεστή προεξόφλησης δ και της συνάρτησης ποινής $w(U(T-), |U(T)|)$.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα γίνει ανάλυση της κατανομής του ελλείμματος, και της ολοκληρώσιμης μορφής της ως προς y και ως προς u . Επίσης, θα εισάγουμε την τυχαία μεταβλητή V_y , θα μελετήσουμε την μορφή της μέση της τιμής και θα αναφέρουμε πως συνδέεται αυτή η ποσότητα με την κατανομή του ελλείμματος.

Στο πέμπτο κεφάλαιο θα δούμε αριθμητικά αποτελέσματα της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής V_y στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις εκφράζονται από την κατανομή Pareto, την εκθετική κατανομή, την κατανομή Weibull και την κατανομή Γάμμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1 Εισαγωγή

Στην αναλογιστική επιστήμη χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα για την μελέτη ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μια εισαγωγή στη θεωρία χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, θα γίνει μια επισκόπηση στις βασικές έννοιες της θεωρίας κινδύνου για το κλασικό μοντέλο, καθώς και για το ανανεωτικό μοντέλο.

Το κλασικό μοντέλο ή το μοντέλο Cramer-Lundberg εισήχθη το 1903 από το Σουηδό αναλογιστή Filip Lundberg και αναπτύχθηκε το 1930 από τον Harald Cramer . Ο Cramer ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων στη θεωρία κινδύνου. Βασικό χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου είναι ότι το πλήθος των ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Το ανανεωτικό μοντέλο ή μοντέλο Sparre Andersen αποτελεί γενίκευση του κλασικού μοντέλου. Η γενίκευση αυτή έγινε από τον Νορβηγό E.Sparre Andersen το έτος 1957. Στην περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου το πλήθος των ζημιών ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία.

2.2 Στοχαστικές Ανελίξεις

Σημαντικό για την κατανόηση των δύο προαναφερθέντων μοντέλων είναι η παρουσίαση των στοχαστικών ανελίξεων. Οι στοχαστικές ανελίξεις παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο από θεωρητική άποψη, όσο και για το ευρύ φάσμα των εφαρμογών τους. Αυτό συμβαίνει γιατί μελετούν πιθανοθεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν φαινόμενα τα οποία εξαρτώνται από τον χρόνο και υπόκεινται σε τυχαιότητα. Στη θεωρία χρεοκοπίας μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε το πλεόνασμα, το ύψος των αποζημιώσεων και τον αριθμό των κινδύνων κάθε χρονική στιγμή t . Εκφράζουμε αυτό το αποτέλεσμα μέσω μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t) : t \in T\}$.

Όπως προαναφέραμε, οι κύριες τυχαίες μεταβλητές που εξετάζονται σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων είναι το πλήθος και το ύψος των αποζημιώσεων. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν είναι οι εξής :

1. Τα ξεχωριστά μεγέθη των αποζημιώσεων θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ως προς τα μεγέθη τους.
2. Ο αριθμός των αποζημιώσεων, ως διακριτή και μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή, θεωρείται ανεξάρτητος ως προς τα μεγέθη των αποζημιώσεων.
3. Τα μεγέθη των αποζημιώσεων θεωρούνται ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή έχουν την ίδια συνεχή και μη-αρνητική κατανομή πυκνότητας πιθανότητας.

Στις σημειώσεις του Πολίτη (2007) του μαθήματος “ Θεωρία Χρεοκοπίας ” καθώς και στο σύγγραμμα “ Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις ” της Ουρανίας Χρυσ αφίνου (2011) μπορούμε να λάβουμε μια πιο εκτενή ανάλυση των παρακάτω εννοιών.

Ορισμός 2.1 : Στοχαστική ανέλιξη είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$. Το σύνολο T καλείται σύνολο δεικτών της ανέλιξης και το σύνολο των τιμών I των τυχαίων μεταβλητών $X(t)$, $t \in T$ καλείται χώρος καταστάσεων της στοχαστικής ανέλιξης.

- Αν ο χρόνος T παίρνει διακριτές τιμές, τότε αναφερόμαστε σε μια στοχαστική ανέλιξη με διακριτό χώρο καταστάσεων.
- Αν ο χρόνος T παίρνει συνεχείς τιμές, τότε αναφερόμαστε σε μια στοχαστική ανέλιξη με συνεχή χώρο καταστάσεων.
- Αν το πλήθος των τιμών I είναι αριθμήσιμο, τότε αναφερόμαστε σε μία στοχαστική ανέλιξη με διακριτές τιμές.
- Αν το πλήθος των τιμών I είναι μη-αριθμήσιμο, τότε αναφερόμαστε σε μία στοχαστική ανέλιξη με συνεχείς τιμές.

Δύο χρήσιμες ιδιότητες μιας στοχαστικής ανέλιξης είναι οι εξής, Πολίτης (2007) :

1. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t) : t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ και $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $X_{t_0}, (X_{t_1} - X_{t_0}), (X_{t_2} - X_{t_1}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ είναι ανεξάρτητες.
2. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t) : t \geq 0\}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ και $h > 0$, η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}), (X_{t_2+h} - X_{t_1+h}), \dots, (X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h})$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο h .

Μια πολύ σημαντική στοχαστική ανέλιξη για την θεωρία κινδύνου είναι η στοχαστική ανέλιξη Poisson, Χρυσοφίνου (2011).

Ορισμός 2.2 : Απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t) : t \in T\}$ ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη η οποία έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά :

1. $X(0) = 0$.
2. $T_i = \min \{t : X(t) = i\}$, όπου T_i : εκφράζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης του i -κινδύνου.
3. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων συμβολίζονται με W_i και ορίζονται ως : $W_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1$, με $T_0 = 0$.

$$0 \xrightarrow{W_1} T_1 \xrightarrow{W_2} T_2 \xrightarrow{W_3} T_3 \xrightarrow{W_4} T_4 \quad \dots$$

Σχήμα 2.1 : Σχήμα ενδιάμεσων χρόνων W_i εμφάνισης ενός ζημιογόνου ενδεχομένου .

Ο αριθμός των κινδύνων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου στο $[0, t]$ εκφράζεται από μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη και συμβολίζεται με $N(t)$.

Ορισμός 2.3 : Η στοχαστική ανάλυση $\{X(t) : t \in T\}$ είναι στοχαστική ανάλυση Poisson αν :

1. $X(0) = 0$.
2. Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος.
3. Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαιξήσεις, δηλαδή :

$$Pr(N(t+k) - N(t) = k) = e^{-\lambda h} \cdot \frac{(\lambda h)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου λ : η ένταση της κατανομής Poisson .

Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε την ανάλυση Poisson ως μια απαριθμητρία στοχαστική ανάλυση η οποία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαιξήσεις.

Οι ανανεωτικές ανελίξεις αποτελούν γενίκευση της ανάλυσης Poisson .

Ορισμός 2.4 : Μια ανανεωτική ανάλυση $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μία απαριθμητρία στοχαστική ανάλυση στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, δεν ακολουθούν όμως απαραίτητα την εκθετική κατανομή.

Για τη μελέτη των ανανεωτικών ανελίξεων αναγκαία είναι η ανανεωτική συνάρτηση $a(t)$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$a(t) = E[X(t)]$$

και δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των γεγονότων στο διάστημα $[0, t]$.

Σε μία ανανεωτική ανάλυση εξετάζουμε αθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Για αυτό το λόγο σημαντικό είναι να αναφέρουμε την έννοια της συνέλιξης.

Ορισμός 2.5 : Έστω F, G : δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής. Τότε η συνάρτηση κατανομής $F * G$ ονομάζεται συνέλιξη των F, G και ορίζεται ως

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(x-t) dG(t), \text{ για } x \geq 0.$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(F * G)(x) = \int_0^x F(x-t) \cdot g(t) dt, \text{ για } x \geq 0 ,$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $g(t)$.

Ορισμός 2.6 : Η πυκνότητα πιθανότητας της συνέλιξης F, G δίνεται από τη σχέση

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t) \cdot g(t) dt, \text{ για } x \geq 0,$$

όπου f, g οι πυκνότητες της F, G , αντίστοιχα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των συνελίξεων :

1. Έστω X, Y : δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής F, G , αντίστοιχα. Τότε η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος $X + Y$ είναι η συνέλιξη $(F * G)(x)$.
2. Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή :

$$(F * G)(x) = (G * F)(x).$$

3. Η σειρά των συναρτήσεων στην συνέλιξη δεν παίζει ρόλο, δηλαδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Για τρεις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής F, G, H ισχύει :

$$[(F * G) * H](x) = [F * (G * H)](x).$$

Όπως προαναφέραμε σημαντική για την μελέτη μιας ανανεωτικής εξίσωσης είναι το μέγεθος $a(t)$. Παρακάτω αναφέρονται δύο σημαντικές προτάσεις για την $a(t)$.

Πρόταση 2.1 : Έστω μία ανανεωτική ανέλιξη $\{X(t) : t \in T\}$ στην οποία η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι K και $a(t) = E[X(t)]$ είναι η ανανεωτική συνάρτηση. Τότε η $a(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$a(t) = \sum_{i=1}^{\infty} K^{*i}(t), t \geq 0,$$

όπου K^{*i} : η i -τάξης συνέλιξη της K με τον εαυτό της.

Αναλυτικά :

- $K^{*0} = 1$.
- $K^{*1} = K$.
- $K^{*n} = K * K * K \dots$ για $n \geq 2$.

Αντίστοιχα η ανανεωτική πυκνότητα δίνεται από τον τύπο

$$a'(t) = \sum_{i=1}^{\infty} k^{*i}(t), t \geq 0.$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις δύο προαναφερθέντες ποσότητες ως εξής : η ανανεωτική συνάρτηση είναι ο αναμενόμενος αριθμός ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, και η ανανεωτική πυκνότητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται ο αναμενόμενος αριθμός των ανανεώσεων.

Πρόταση 2.2 : Έστω μία ανανεωτική ανέλιξη $\{X(t) : t \in T\}$ στην οποία η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι K και $a(t) = E[X(t)]$ είναι η ανανεωτική συνάρτηση. Τότε η $a(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$a(t) = K(t) + \int_0^t a(t-x)dK(x), t \geq 0.$$

Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της $a(t)$ χρησιμοποιείται σε περίπτωση που η $a(t)$ δεν μπορεί να υπολογισθεί άμεσα από τον τύπο της Πρότασης 2.1.

Γενικότερα, ανανεωτική ανέλιξη ονομάζεται οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής

$$\mu(t) = g(t) + \varphi \int_0^t \mu(t-x)dr(x), t \geq 0,$$

όπου :

- $0 < \varphi \leq 1$:μία σταθερά.
 Ανάλογα με την τιμή της φ οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε :
 1. Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις όταν $0 < \varphi < 1$.
 2. Κανονικές ή μη-ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις όταν $\varphi = 1$.
- g : μία φραγμένη συνάρτηση στο $[0, \infty)$.
- r : μία συνεχής συνάρτηση κατανομής στο $[0, \infty)$.
- μ : η άγνωστη συνάρτηση.

Η γενική λύση της $\mu(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$\mu(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x)dM(x),$$

όπου $M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^i \cdot r^{*i}(t)$.

Θεώρημα 2.1 (Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα)

Θεωρούμε την μη-ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση : $\mu(t) = g(t) + \int_0^t g(t-x)dM(x)$.

Έστω ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες :

1. $g(t) \geq 0$ για κάθε t .
2. Η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη, δηλαδή $\int_0^{\infty} g(t)dt < \infty$.
3. Η συνάρτηση g είναι μια φθίνουσα συνάρτηση.

Τότε

$$\int_0^t g(t-x)dm(x) \rightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^{\infty} g(x)dx \text{ καθώς το } t \rightarrow \infty.$$

2.3 Το Κλασικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Δύο κύριες ιδιότητες για το κλασικό μοντέλο κινδύνου είναι οι παρακάτω :

- Για κάθε σταθερό t , η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και συμβολίζεται με $N(t)$, ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , όπου λ : η ένταση της ανέλιξης Poisson .
- Για κάθε $i \neq j$, οι τυχαίες μεταβλητές W_i, W_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και καθεμία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

2.3.1 Η Στοχαστική Ανέλιξη του Πλεονάσματος

Το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρείας μοντελοποιείται σαν το αποτέλεσμα δύο αντίθετων χρηματοροών, τα έσοδα που προέρχονται από την είσπραξη των ασφαλίσεων και τα έξοδα λόγω των ασφαλιστικών απαιτήσεων Y_i . Θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων όπου το πλεόνασμα περιγράφεται από μια στοχαστική ανέλιξη η οποία συμβολίζεται με $\{U(t), t \geq 0\}$ και ορίζεται ως

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t) ,$$

όπου :

- u : Το αρχικό αποθεματικό. Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση κατά την έναρξη των εργασιών της υποχρεούται από τον νόμο να διαθέτει κάποιο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο αποτελεί και το πλεόνασμα της εταιρείας κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, $U(0) = u$.
- c : Ο σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλίσεων ανά μονάδα χρόνου.
- $S(t)$: Η στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Η στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ ορίζεται με τον εξής τρόπο.

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων στο $[0, t]$ ορίζεται ως η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $N(t)$. Επίσης $Y_i, i \geq 1$ είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστά το ύψος της αποζημίωσης από την επέλευση του i -κινδύνου. Τότε το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t ορίζεται η στοχαστική ανέλιξη

$$S(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, N(t) \geq 1$$

και

$$S(t) = 0, N(t) = 0 .$$

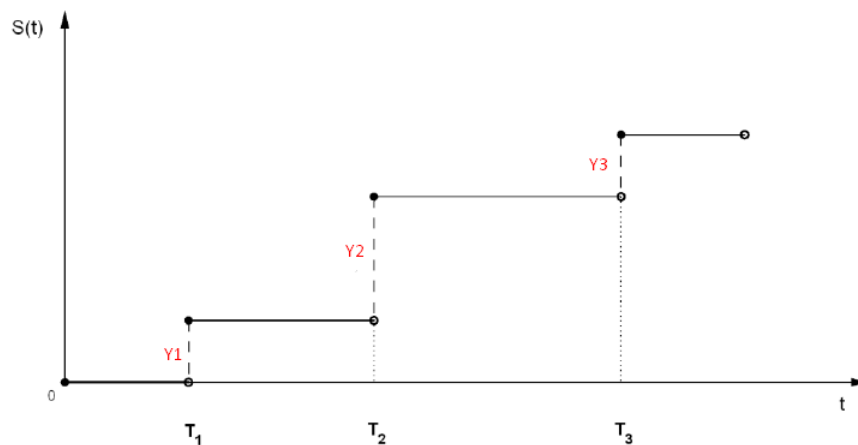
- Αν τα Y_i ακολουθούν κάποια συνεχή κατανομή στο $[0, \infty)$, τότε η $S(t)$ θα είναι μία κατανομή μεικτού τύπου, βλέπε σημειώσεις Χατζηκωνσταντινίδη (2009). Σε αυτή την περίπτωση η σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S(t)$ έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο 0, για $N(t) = 0$ και είναι συνεχής για διάστημα $(0, \infty)$ για $N(t) \geq 1$.

- Αν τα Y_i ακολουθούν κάποια διακριτή κατανομή, τότε η $S(t)$ θα ακολουθεί επίσης μία διακριτή κατανομή.

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ισχύουν οι εξής παραδοχές :

- Θεωρούμε ότι η συνάρτηση των ασφαλίσεων είναι ντετερμινιστική και ίση με $c \cdot t$.
- Οι τυχαίες μεταβλητές Y_i που περιγράφουν το ύψος της i -αποζημίωσης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους.
- Οι τυχαίες μεταβλητές Y_i είναι ανεξάρτητες από το πλήθος των αποζημιώσεων $N(t)$.
- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή $W_i \sim E(\lambda)$.
- Το πλήθος των αποζημιώσεων $N(t)$ και το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$ ακολουθούν μια στοχαστική ανέλιξη Poisson και σύνθετη στοχαστική ανέλιξη Poisson, αντίστοιχα. Συνοπτικά έχουμε $N(t) \sim P(\lambda t) \Rightarrow S(t) \sim CP(\lambda t)$.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ας δούμε τα Σχήματα 2.2 και 2.3, βλέπε σημειώσεις Χατζηκωνσταντινίδη (2009).



Σχήμα 2.2 : Γραφική παράσταση της στοχαστικής διαδικασίας των αποζημιώσεων .

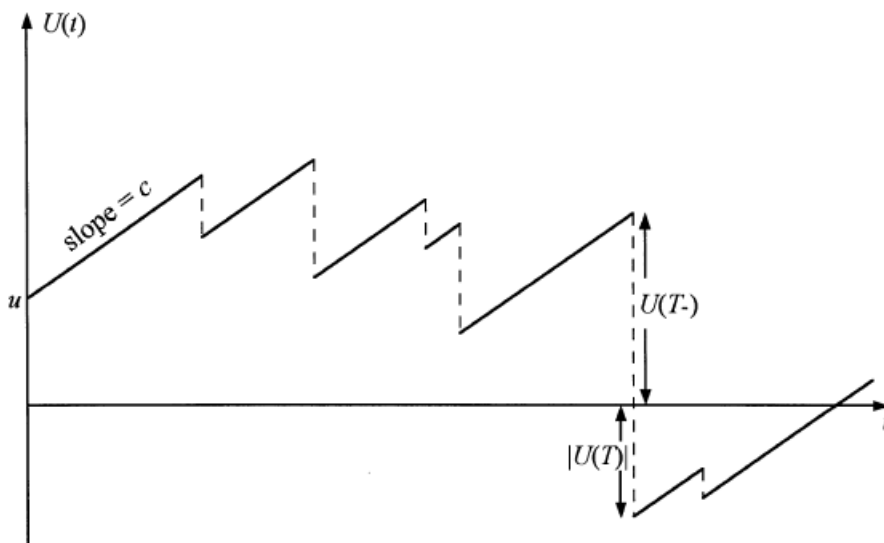
Στο Σχήμα 2.2 παρατηρούμε ότι η $S(t)$ είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση και απεικονίζει μία δυνατή εξέλιξη των τιμών των συνολικών αποζημιώσεων. Στο χρονικό διάστημα $[0, t_1)$, δηλαδή ακριβώς πριν την επέλευση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου οι συνολικές αποζημιώσεις είναι μηδενικές. Στη συνέχεια η γραφική παράσταση εμφανίζει “ άλματα ” τα οποία απεικονίζουν το ύψος της κάθε ζημιάς, ενώ παραμένει σταθερή όταν δεν επέρχεται κίνδυνος.

$$S(t) = 0, 0 \leq t < T_1$$

$$S(t) = Y_1, T_1 \leq t < T_2$$

$$S(t) = Y_1 + Y_2, T_2 \leq t < T_3$$

...



Σχήμα 2.3 : Γραφική παράσταση της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος .

Στη χρονική στιγμή 0 η ασφαλιστική εταιρεία έχει αρχικό αποθεματικό u . Στο Σχήμα 2.3 παρατηρούμε ότι η τιμή του πλεονάσματος εμφανίζει “ άλματα προς τα κάτω ”. Τα άλματα στην γραφική παράσταση $U(t)$ γίνονται τις χρονικές στιγμές που εμφανίζει “ άλματα ” η γραφική παράσταση $S(t)$ καθώς οι μεταβολές στο ύψος των αποζημιώσεων επιφέρουν μεταβολές ίσου ύψους στην τιμή του πλεονάσματος.

- Η ποσότητα $U(T-)$ είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.
- Η ποσότητα $|U(T)|$ είναι το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας σε απόλυτη τιμή και αποτελεί ένδειξη για την επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου.
- Η ποσότητα T είναι ο χρόνος της χρεοκοπίας.

Στα σημεία που η $S(t)$ εμφανίζει “ άλματα προς τα πάνω ” η $U(t)$ εμφανίζει “ άλματα προς τα κάτω ” ίδιου ύψους.

$$U(t) = u + c \cdot t, 0 \leq t < T_1$$

$$U(t) = u + c \cdot t - Y_1, T_1 \leq t < T_2$$

$$U(t) = u + c \cdot t - (Y_1 + Y_2), T_2 \leq t < T_3$$

...

2.3.2 Ο Χρόνος Χρεοκοπίας

Η χρεοκοπία επέρχεται όταν το πλεόνασμα πάρει για πρώτη φορά αρνητική τιμή. Η χρονική στιγμή που το πλεόνασμα γίνει για πρώτη φορά αρνητικό ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας (time of ruin) και ορίζεται ως

$$T = \inf \{t : U(t) < 0\}.$$

2.3.3 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Το κεντρικό αντικείμενο στη θεωρία χρεοκοπίας είναι η διερεύνηση της πιθανότητας η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος να πέσει τελικά κάτω από το μηδέν. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται πιθανότητα χρεοκοπίας (probability of ruin) και ορίζεται ως

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u]. \quad (1)$$

- Η $\psi(u)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u .
 $u_1 \leq u_2 \Rightarrow \psi(u_1) \geq \psi(u_2)$.
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι για την ορθή λειτουργία μιας ασφαλιστικής εταιρείας πρέπει τα έσοδα να καλύπτουν τα έξοδα. Μαθηματικά αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$c \cdot t > E(S(t)) \Leftrightarrow c > t \geq E(N(t)) \cdot m_1.$$

Καθώς $N(t) \sim P(\lambda t)$:

$$c \cdot t > \lambda t \cdot m_1 \Leftrightarrow c > \lambda \cdot m_1 \Rightarrow c = (1 + \theta)\lambda \cdot m_1 \Rightarrow 1 + \theta = \frac{c}{\lambda m_1},$$

όπου $0 < \theta < 1$ ορίζεται ως το περιθώριο ασφαλείας.

Στο κλασικό μοντέλο ισχύει η συνθήκη $\lambda \cdot m_1 < c$.

Επιπλέον προκύπτει ότι $\varphi = \frac{\lambda \cdot m_1}{c}$.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί την εξής ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\psi(u) = \varphi \int_0^u \psi(u-y) dP_1(y) + \varphi \bar{P}_1(u), \quad (2)$$

όπου :

- $P_1(y)$: η 1η κατανομή ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων $P(y)$ και ορίζεται ως

$$P_1(y) = \frac{1}{m_1} \int_0^y \bar{P}(u) du, u \geq 0 .$$

Ακόμα συμβολίζουμε με $\bar{P}_1(y) = 1 - P_1(y)$ τη συνάρτηση επιβίωσης ή ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων.

- m_1 : η μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων $P(y)$.

Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η παρακάτω

$$\psi(u) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0+}^u \bar{P}_1(u-t) d\delta(t) + \varphi \bar{P}_1(u) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \bar{P}_1(u-t) d\delta(t), \quad (3)$$

όπου $\delta(u) = 1 - \psi(u) = (1 - \phi) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \cdot P_1(u)$, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

- Η $\delta(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u .
 $u_1 \leq u_2 \Rightarrow \delta(u_1) \leq \delta(u_2)$.
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$.
- Η $\delta(u)$ είναι μια μεικτή κατανομή, καθώς $\delta(0) > 0$, δηλαδή η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u = 0$ είναι θετική, ενώ για το διάστημα $(0, \infty)$ η $\delta(u)$ είναι συνεχής.

Από την (3) προκύπτει ότι

$$\psi(0) = \varphi = \frac{1}{1+\theta} = \frac{\lambda \cdot m_1}{c},$$

και επομένως ισχύει ότι

$$\delta(0) = 1 - \psi(0) = 1 - \varphi = \frac{\theta}{1+\theta} = \frac{c - \lambda \cdot m_1}{c}.$$

Σύμφωνα με τις σημειώσεις του Χατζηκωνσταντινίδη (2009), δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και το ύψος του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου, από τον νόμο της ολικής πιθανότητας, προκύπτει ότι

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \left\{ \int_{u+ct}^\infty p(y) dy + \int_0^{u+ct} \psi(u+ct-y)p(y) dy \right\} dt ,$$

όπου $p(y)$: η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων Y_i .

και

$$\delta(u) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^{u+ct} \delta(u+ct-y)p(y) dy \right\} dt.$$

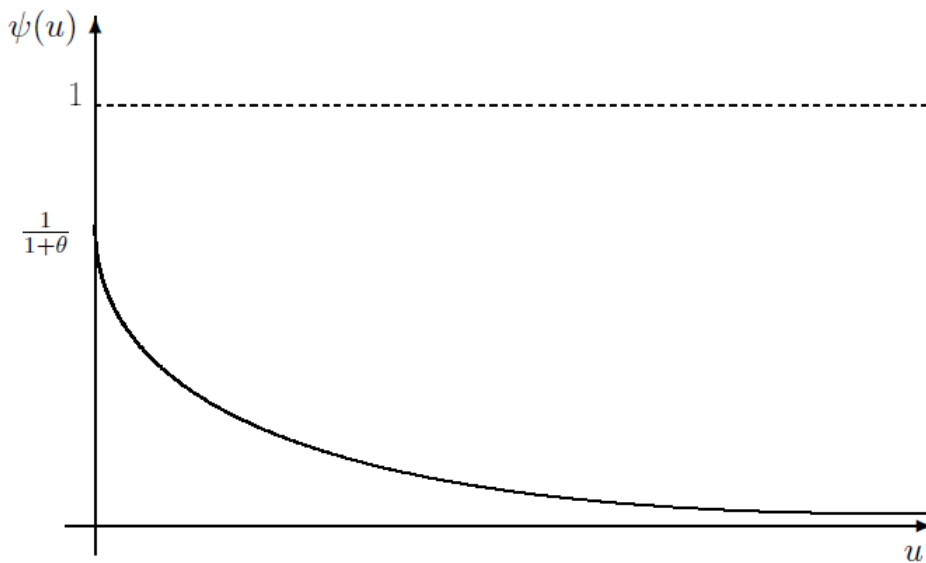
Στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , $Y \sim E(\lambda)$ και ισχύει ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \cdot e^{-\frac{\lambda\theta u}{1+\theta}}$$

και

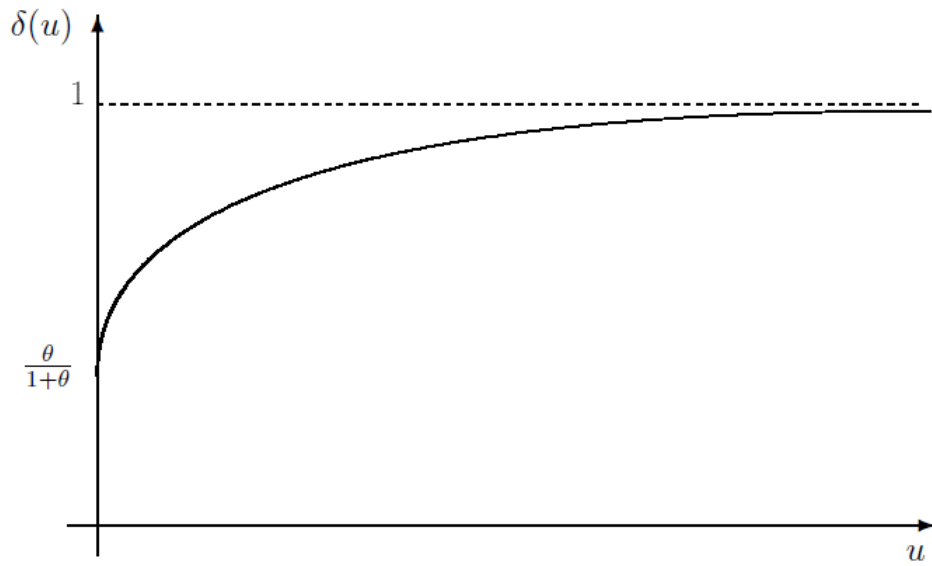
$$\delta(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \cdot e^{-\frac{\lambda\theta u}{1+\theta}} .$$

Στη συνέχεια βλέπουμε γραφικά τις $\psi(u)$ και $\delta(u)$.



Σχήμα 2.4 : Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας .

Παρατηρούμε ότι η $\psi(u)$ ξεκινάει από το σημείο $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$. Επίσης είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u .

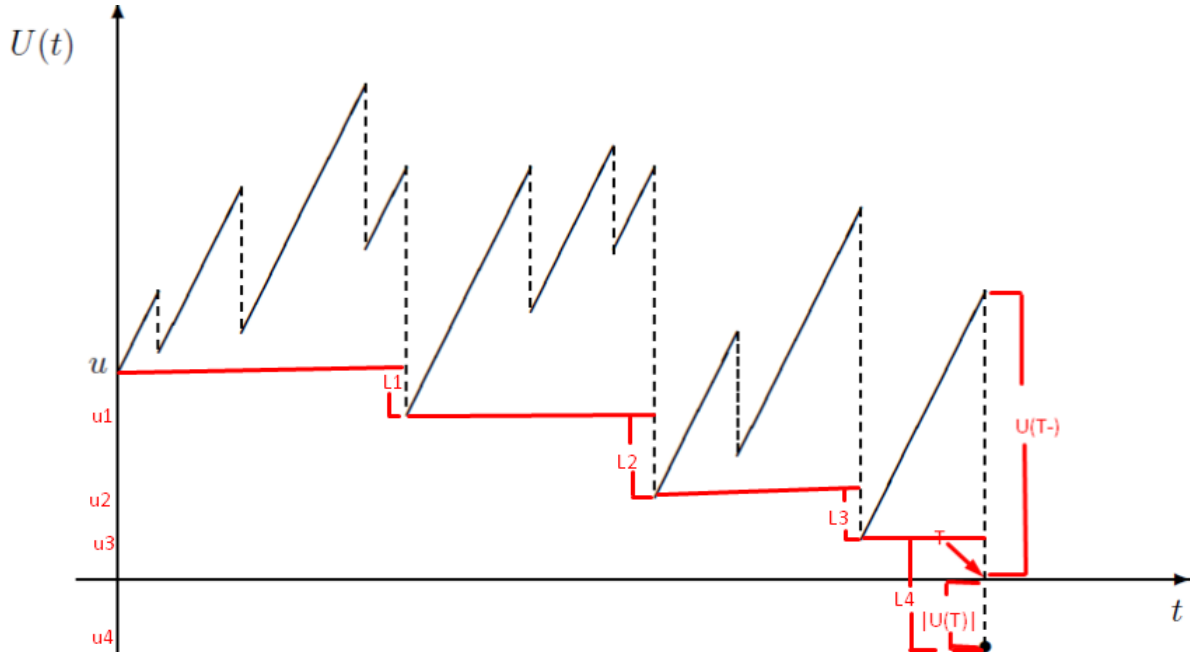


Σχήμα 2.5 : Γραφική παράσταση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας .

Παρατηρούμε ότι η $\delta(u)$ ξεκινάει από το σημείο $\psi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$. Επίσης είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u .

2.3.4 Τα Κλιμακωτά Ύψη

Τα κλιμακωτά ύψη (ladder heights), τα οποία συμβολίζονται με $L_i, i = 1, 2, \dots$, είναι η i -πτώση κάτω από την προηγούμενη ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος.



Σχήμα 2.6 : Γραφική παράσταση των κλιμακωτών υψών .

Σύμφωνα με τις σημειώσεις του Πολίτη (2007), ξεκινώντας με αρχικό αποθεματικό u η πρώτη πτώση κάτω από την τιμή u συμβολίζεται με u_1 . Τότε η ποσότητα L_1 είναι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό και ισούται με $L_1 = u - u_1$.

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αποθεματικό u_1 στην τιμή u_2 , ως $L_2 = u_1 - u_2$.

$$L_1 = u - u_1 ,$$

$$L_2 = u_1 - u_2 ,$$

$$L_3 = u_2 - u_3 ,$$

$$L_4 = u_3 - u_4 ,$$

...

Οι τυχαίες μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων.

Ορισμός 2.7 : Έστω μία τυχαία μεταβλητή Q η οποία ακολουθεί την κατανομή ισορροπίας μιας κατανομής P , τότε οι : συνάρτηση κατανομής, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, κατανομή ισορροπίας και η k -οστή ροπή δίνονται από τους τύπους :

- Συνάρτηση κατανομής :

$$P_1(q) = \frac{\int_0^q \bar{P}(t) dt}{m_1}.$$

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$p_1(q) = \frac{\bar{P}(q)}{m_1}.$$

- Συνάρτηση επιβίωσης :

$$\bar{P}_1(q) = \frac{\int_q^\infty \bar{P}(t) dt}{m_1}.$$

- k -οστή ροπή :

$$\mu_{1,k} = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}.$$

όπου m_k η k -οστή ροπή της κατανομής των αποζημιώσεων.

Απόδειξη :

Εξ ορισμού ισχύει ότι η k -οστή ροπή μίας κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \mu_{1,k} &= \int_0^\infty q^k \cdot p_1(q) dq = \int_0^\infty q^k \cdot \frac{\bar{P}(q)}{m_1} dq = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \int_0^\infty q^{k+1} \cdot \bar{P}(q) dq \\ &= \frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \left\{ \left[q^{k+1} \cdot \bar{P}(q) \right]_0^\infty + \int_0^\infty q^{k+1} \cdot p(q) dq \right\}. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\lim_{q \rightarrow \infty} q^{k+1} \cdot \bar{P}(q) = 0$ είναι

$$\frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \{0 - 0 + m_{k+1}\} \Rightarrow \mu_{1,k} = \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1}.$$

- Για $k = 1 \Rightarrow \mu_{1,1} = \frac{m_2}{2m_1}$.

- Για $k = 2 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{m_3}{3m_1}$.

Πρόταση 2.3 : Έστω μία τυχαία μεταβλητή Q η οποία περιγράφεται από την κατανομή ισορροπίας μίας κατανομής P . Τότε η πρώτη ροπή (μέση τιμή) της Q ισούται με $\mu_{1,1} = \frac{m_2}{2m_1}$ και η δεύτερη ροπή με $\mu_{1,2} = \frac{m_3}{3m_1}$.

Το πλήθος των L_i ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια, ορίζεται ως το τυχαίο άθροισμα όλων των καταγεγραμμένων πτώσεων $L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$ και παριστά τη συνολική πτώση κάτω από το αρχικό αποθεματικό, βλέπε σημειώσεις Πολίτη (2007).

Η L έχει μάζα στο 0 και είναι διακριτή όταν τα κλιμακωτά ύψη είναι διακριτά και μεικτή όταν τα κλιμακωτά ύψη είναι συνεχή. Επίσης, η L ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$, καθώς αν θεωρήσουμε “αποτυχία” την εμφάνιση μιας πτώσης L_i , η L μετρά τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Δηλαδή $L \sim Geo(\frac{\theta}{1+\theta})$.
Για την συνάρτηση πιθανότητας της L ισχύει ότι

$$Pr(L = l) = \delta(0) \cdot [\psi(0)]^l = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^l, l = 0, 1, 2, \dots$$

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια L εκφράζει τη μέγιστη διαφορά μεταξύ των συνολικών αποζημιώσεων και των συνολικών εισπραχθέντων ασφαλιστρών μέχρι την χρονική στιγμή t .

$$L = \max \{S(t) - ct\}, L \geq 0, t \geq 0.$$

Δεν προκύπτει χρεοκοπία όταν $U(t) \geq 0 \Leftrightarrow u + ct - S(t) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq \max \{S(t) - ct\}, t \geq 0$.

Δηλαδή δεν εμφανίζεται χρεοκοπία όταν $\psi(u) = Pr(L > u)$, ή ισοδύναμα όταν $\delta(u) = Pr(L \leq u)$.

2.3.5 Ο Συντελεστής Προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής (adjustment coefficient) συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$1 + (1 + \theta) \cdot m_1 \cdot r = M_Y(r), \quad (4)$$

όπου :

- θ : το περιθώριο ασφαλείας.
- m_1 : η μέση τιμή των αποζημιώσεων.
- $M_Y(r) = E(e^{rY}) = \int_0^\infty e^{ry} p(y) dy$: η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια $M_Y(r)$, δηλαδή να ισχύει ότι $M_Y(r) < \infty$.

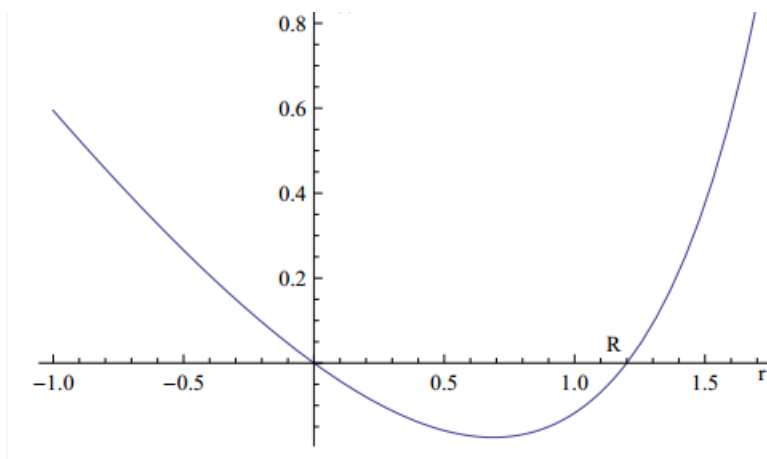
Μια ισοδύναμη σχέση για την εύρεση του συντελεστή προσαρμογής είναι η παρακάτω

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdot M_Y(r) = \frac{c}{\lambda},$$

όπου θυμίζουμε ότι:

- c : ο σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών.
- λ : η παράμετρος της εκθετικής κατανομής που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι.

Στο Σχήμα 2.7 παρατηρούμε γραφικά τη Σχέση 4 .



Σχήμα 2.7 : Γραφική παράσταση του συντελεστή προσαρμογής R .

Ο συντελεστής προσαρμογής βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία κινδύνου. Οι κύριες εφαρμογές είναι οι παρακάτω :

1. Η ανισότητα του Lundberg :

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, u \geq 0 .$$

2. Ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer - Lundberg :

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \text{ καθώς } u \rightarrow \infty ,$$

όπου $C > 0$ μία σταθερά.

2.4 Το Ανανεωτικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Στο ανανεωτικό μοντέλο, σύμφωνα με τον Olof Thorin (1974), ο Sparre Andersen υπέθεσε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i που μεσολαβούν μεταξύ των ζημιολόγων ενδεχομένων δεν ακολουθούν την εκθετική κατανομή αλλά μια πιο γενική συνάρτηση κατανομής.

Τα κύρια χαρακτηριστικά του ανανεωτικού μοντέλου είναι τα εξής :

- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν μία κατανομή $K(t)$.
- Το πλήθος των ζημιών δεν περιγράφεται από μια ανέλιξη Poisson , αλλά από μια ανανεωτική ανέλιξη.
- Οι τυχαίες μεταβλητές $L_i, i = 1, 2, \dots$ που περιγράφουν τα κλιμακωτά ύψη, δεν ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας του μεγέθους των αποζημιώσεων, αλλά μία άλλη κατανομή έστω F .

Στην περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου ισχύει η συνθήκη

$$E(Y_i) < c \cdot E(W_i), \quad (5)$$

όπου :

- $E(Y_i)$: Η μέση τιμή του μεγέθους των αποζημιώσεων.
- c : Ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών ανά μονάδα χρόνου.
- $E(W_i)$: Η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των ενδεχομένων.

Θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων όπου το πλεόνασμα περιγράφεται από μια στοχαστική ανέλιξη η οποία συμβολίζεται με $\{U(t), t \geq 0\}$ και ορίζεται ως

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t),$$

όπου :

- u : Το αρχικό αποθεματικό.
- $S(t)$: Η στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

$$S(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, N(t) \geq 1$$

και

$$S(t) = 0, N(t) = 0 .$$

Η χρονική στιγμή που το πλεόνασμα πάρει για πρώτη φορά αρνητική τιμή ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας (time of ruin) και συμβολίζεται ως

$$T = \inf \{t : U(t) < 0\} ,$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας (probability of ruin) και ορίζεται ως

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u].$$

Επίσης η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας δίνεται από τον τύπο $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Στο ανανεωτικό μοντέλο δεν ισχύουν οι σχέσεις για τις ποσότητες $\psi(0)$ και $\delta(0)$ συναρτήσε του θ , δηλαδή $\psi(0) \neq \frac{1}{1+\theta}$ και $\delta(0) \neq \frac{\theta}{1+\theta}$.

Στην περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\psi(u) = \varphi \cdot \int_0^u \psi(u-t) dF(t) + \varphi \bar{F}(u), \quad (6)$$

και η λύση δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0+}^u \bar{F}(u-t) d\delta(t) + \varphi \bar{F}(u) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \bar{F}(u-t) d\delta(t), \quad (7)$$

Ορίζουμε μία νέα μεταβλητή $Z_i = Y_i - cW_i, Z_0 = 0$ η οποία δηλώνει το ύψος της i -απαίτησης εφόσον έχουν εισπραχθεί τα απαιτούμενα ασφάλιστρα, βλέπε Olof Thorin (1974) . Η Z ακολουθεί μία συνάρτηση κατανομής J .

Τότε ο συντελεστής προσαρμογής R , στο ανανεωτικό μοντέλο είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$M_Z(r) = 1 ,$$

όπου $M_Z(r)$ η ροπογεννήτρια της μεταβλητής Z .

Ισχύει ότι :

- $M_Z(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rZ} dJ(z) = E(e^{r(Y-cW)}) = E(e^{rY}) \cdot E(e^{-rcW})$.
- $M_Y(r) = \int_0^{\infty} e^{rY} p(y) dy = E(e^{rY})$.
- $M_W(r) = \int_0^{\infty} e^{rW} k(w) dw = E(e^{rW})$.

Με βάση τα παραπάνω ο συντελεστής προσαρμογής μπορεί να υπολογισθεί από ένα πιο απλό τύπο

$$M_Z(r) = 1 \Leftrightarrow M_Y(r) \cdot M_W(-cr) = 1, \quad (8)$$

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace μπορούμε να γράψουμε την Σχέση 7 με τον εξής τρόπο

$$\tilde{p}(-r) \cdot \tilde{k}(cr) = 1. \quad (9)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ ΤΩΝ GERBER - SHIU .

3.1 Η Συνάρτηση των Gerber και Shiu

Το 1998 με το άρθρο τους “ On the time of value of ruin ” οι Gerber - Shiu εισήγαγαν μια εξίσωση που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και μοντελοποιεί το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας $U(T-)$ και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$. Η εξίσωση ονομάζεται αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) των Gerber - Shiu και ορίζεται ως

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \cdot w(U(T-), |U(T)|) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u], \quad (10)$$

όπου :

- u : το αρχικό αποθεματικό.
- $w(x, y)$: η συνάρτηση ποινής (penalty function) .
- $\delta > 0$: προεξοφλητικός παράγοντας.
- $I(T < \infty)$: δείκτηρα συνάρτηση η οποία παίρνει την τιμή 1 αν συμβεί χρεοκοπία και την τιμή 0 διαφορετικά.

Ορίζουμε :

- $U(T-) \rightarrow x$.
- $|U(T)| \rightarrow y$.
- $T \rightarrow t$.

Το x συνδέεται με το έλλειμμα κατά τη στιγμή χρεοκοπίας σε απόλυτη τιμή. Το y συνδέεται με το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας. Τέλος , το t συμβολίζει το χρόνο χρεοκοπίας. Στη συνέχεια, χάριν ευκολίας θα χρησιμοποιήσουμε τους παραπάνω συμβολισμούς.

Σύμφωνα με τους Gerber - Shiu (1998), η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber - Shiu μπορεί να γραφτεί και ως

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot w(x, y) \cdot b(x, y, t|u) dt dx dy, \quad (11)$$

όπου $b(x, y, t|u)$: η ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|, T$.

Όπως προαναφέραμε η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, η οποία είναι της μορφής

$$m_\delta(u) = \varphi \int_0^u m_\delta(u-t) dF(t) + v(u). \quad (12)$$

Από την σχέση (5) ισχύει ότι : $\lim_{u \rightarrow \infty} m_\delta(u) = 0$.

Η λύση της παραπάνω σχέσης δόθηκε από τους Willmot Lin (1999)

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_0^u v(u-t) d\delta(t). \quad (13)$$

3.2 Ειδικές Μορφές της Συνάρτησης των Gerber - Shiu

1. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

$$m_0(u) = \psi(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u].$$

2. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T .

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

3. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-), |U(T)|$.

$$m_0(u) = E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

4. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T-), |U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

5. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y)$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|$.

$$m_0(u) = E[I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

6. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y)$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-), |U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

7. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η συνάρτηση κατανομής της $U(T-)$.

$$m_0(u) = E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

8. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της $U(T-)$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

9. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$.

$$m_0(u) = E[I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

10. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

11. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$.

$$m_0(u) = E[I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

12. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

13. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$.

$$m_0(u) = E[I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

14. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

15. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = e^{-s_1 \cdot x - s_2 \cdot y} = e^{-s_1 \cdot x} \cdot e^{-s_2 \cdot y}$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού πυκνότητας των $U(T-), |U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T - s_1 \cdot x - s_2 \cdot y} \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

16. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j \cdot |U(T)|^k$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η ροπή τάξεως j της $U(T-)$ και η ροπή τάξεως k της $|U(T)|$.

$$m_0(u) = E[U(T-)^j \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

17. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j \cdot |U(T)|^k$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή τάξεως j της $U(T-)$ και η προεξοφλημένη ροπή τάξεως k της $|U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

18. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η ροπή τάξεως j της $U(T-)$.

$$m_0(u) = E[U(T-)^j \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

19. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή τάξεως j της $U(T-)$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

20. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = |U(T)|^k$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η ροπή τάξεως k της $|U(T)|$.

$$m_0(u) = E[|U(T)|^k \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

21. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = |U(T)|^k$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή τάξεως k της $|U(T)|$.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

22. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = (U(T-) + |U(T)|)^d$ και $\delta=0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η ροπή τάξεως d του ενδεχομένου που προκαλεί χρεοκοπία.

$$m_0(u) = E[(U(T-) + |U(T)|)^d \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

23. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = (U(T-) + |U(T)|)^d$ και $\delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή τάξεως d του ενδεχομένου που προκαλεί χρεοκοπία.

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot (U(T-) + |U(T)|)^d \cdot I(T < \infty) | U(0) = u].$$

Παρακάτω παρατίθεται ένας συνοπτικός πίνακας με τις μορφές της συνάρτησης Gerber-Shiu για τις διαφορετικές τιμές της συνάρτησης ποινής $w(U(T-), |U(T)|)$ και για τον παράγοντα προεξοφλησης δ .

$w(U(T-), U(T))$	δ	Τύποι
1	0	$m_0(u) = \psi(u) = E[I(T < \infty) U(0) = u]$
1	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) \leq x) \cdot I(U(T) \leq y)$	0	$m_0(u) = E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(U(T) \leq y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) \leq x) \cdot I(U(T) \leq y)$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(U(T) \leq y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) = x) \cdot I(U(T) = y)$	0	$m_0(u) = E[I(U(T-) = x) \cdot I(U(T) = y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) = x) \cdot I(U(T) = y)$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(U(T) = y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) \leq x)$	0	$m_0(u) = E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) \leq x)$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T) \leq y)$	0	$m_0(u) = E[I(U(T) \leq y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T) \leq y)$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T) \leq y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) = x)$	0	$m_0(u) = E[I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T-) = x)$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T) = y)$	0	$m_0(u) = E[I(U(T) = y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$I(U(T) = y)$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T) = y) \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$e^{-s_1 \cdot x - s_2 \cdot y}$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T - s_1 \cdot x - s_2 \cdot y} \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$U(T-)^j \cdot U(T) ^k$	0	$m_0(u) = E[U(T-)^j \cdot U(T) ^k \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$U(T-)^j \cdot U(T) ^k$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot U(T) ^k \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$U(T-)^j$	0	$m_0(u) = E[U(T-)^j \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$U(T-)^j$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$ U(T) ^k$	0	$m_0(u) = E[(U(T-) + U(T))^d \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$ U(T) ^k$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot (U(T-) + U(T))^d \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$(U(T-) + U(T))^d$	0	$m_0(u) = E[(U(T-) + U(T))^d \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$
$(U(T-) + U(T))^d$	> 0	$m_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot (U(T-) + U(T))^d \cdot I(T < \infty) U(0) = u]$

3.3 Η Ολοκληρώσιμη Μορφή της Συνάρτησης των Gerber - Shiu

Η ολοκληρώσιμη μορφή της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber - Shiu, βλέπε Psarrakos (2013), δίνεται από τον τύπο

$$m_{1,\delta}(u) = \frac{\int_0^u m_\delta(x)dx}{\int_0^\infty m_\delta(x)dx}. \quad (14)$$

Η $m_{1,\delta}(u)$ είναι συνάρτηση κατανομής ως προς u .

Η ουρά της παραπάνω κατανομής ορίζεται ως εξής

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty m_\delta(x)dx}{\int_0^\infty m_\delta(x)dx}. \quad (15)$$

Η ολοκληρώσιμη μορφή της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber - Shiu είναι πολύ χρήσιμη καθώς παίρνοντας τους παραπάνω λόγους, η $m_{1,\delta}(u)$ και οι ειδικές μορφές της που θα μελετήσουμε παρακάτω γίνονται κατανομές ως προς u .

Ισχύει ότι η ολοκληρώσιμη αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ικανοποιεί την εξής ελλειμματική στοχαστική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \varphi \cdot \int_0^u m(u-t)dF(t) + v(u). \quad (16)$$

Όπου $F(t)$: η κατανομή των κλιμακωτών υψών.

Η λύση της παραπάνω σχέσης είναι

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_0^u v(u-t)d\delta(t). \quad (17)$$

Απόδειξη :

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (16) προκύπτουν τα εξής

$$\begin{aligned} \int_u^\infty m_\delta(x)dx &= \varphi \cdot \int_u^\infty \int_0^x m(x-t)dF(t)dx + \int_u^\infty v(x)dx = \\ &= \varphi \cdot \int_u^\infty \int_0^u m(x-t)dF(t)dx + \varphi \cdot \int_u^\infty \int_u^x m(x-t)dF(t)dx + \int_u^\infty v(x)dx . \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τη σειρά στα ολοκληρώματα έχουμε

$$\begin{aligned} &= \varphi \cdot \int_0^u \int_u^\infty m(x-t)dx dF(t) + \varphi \cdot \int_u^\infty \int_t^\infty m(x-t)dx dF(t) + \int_u^\infty v(x)dx = \\ &= \varphi \cdot \int_0^u \int_{u-t}^\infty m(x)dx dF(t) + \varphi \cdot \int_u^\infty \int_0^\infty m(x)dx dF(t) + \int_u^\infty v(x)dx = \\ &= \varphi \cdot \int_0^u \int_{u-t}^\infty m(x)dx dF(t) + \varphi \cdot \int_0^\infty m(x)dx \cdot \bar{F}(u) + \int_u^\infty v(x)dx . \end{aligned}$$

Για $u = 0$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty m(x)dx = \varphi \cdot \int_0^\infty m(x)dx \cdot 1 + \int_0^\infty v(x)dx \Rightarrow \int_0^\infty m(x)dx = \frac{\int_0^\infty v(x)dx}{1-\varphi} .$$

Επομένως

$$\begin{aligned} m_{1,\delta}(u) &= \frac{\int_0^u m(x)dx}{\int_0^\infty m(x)dx} = \frac{\varphi \cdot \int_0^u \int_{u-t}^\infty m(x)dx dF(t)}{\int_0^\infty \frac{v(x)dx}{1-\varphi}} + \frac{\varphi \cdot \int_0^\infty m(x)dx \cdot \bar{F}(u)}{\int_0^\infty \frac{v(x)dx}{1-\varphi}} + \frac{\int_0^u v(x)dx}{\int_0^\infty \frac{v(x)dx}{1-\varphi}} \Rightarrow \\ m_{1,\delta}(u) &= \varphi \cdot \int_0^u m_1(u-t)dF(t) + \varphi \cdot \bar{F}(u) + (1-\varphi) \cdot \frac{\int_0^u v(x)dx}{\int_0^\infty v(x)dx} \Rightarrow \\ m_{1,\delta}(u) &= \varphi \cdot \int_0^u m_1(u-t)dF(t) + \varphi \cdot \bar{F}(u) + (1-\varphi) \cdot v_{1,\delta}(u). \quad (18) \end{aligned}$$

Για την λύση της ολοκληρώνουμε την λύση της $m_\delta(u)$.

$$\begin{aligned} \int_u^\infty m_\delta(x)dx &= \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_{0-}^u v(x-t)d\delta(t)dx = \\ &= \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_{0-}^u v(x-t)d\delta(t)dx + \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_u^x v(x-t)d\delta(t)dx . \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τα όρια των ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \int_u^\infty v(x-t)dx d\delta(t) + \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_t^\infty v(x-t)dx d\delta(t) = \\ &= \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \int_{u-t}^\infty v(x)dx d\delta(t) + \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_0^\infty v(x)dx d\delta(t) = \\ &= \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \int_{u-t}^\infty v(x)dx d\delta(t) + \frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_0^\infty v(x)dx \cdot \psi(u). \end{aligned}$$

Άρα η λύση της $m_{1,\delta}(u)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} m_{1,\delta}(u) &= \frac{\int_0^u m(x)dx}{\int_0^\infty m(x)dx} = \frac{\frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \int_{u-t}^\infty v(x)dx d\delta(t)}{\int_0^\infty \frac{v(x)dx}{1-\varphi}} + \frac{\frac{1}{1-\varphi} \cdot \int_0^\infty v(x)dx \cdot \psi(u)}{\int_0^\infty \frac{v(x)dx}{1-\varphi}} \Rightarrow \\ m_{1,\delta}(u) &= \int_{0-}^u v_{1,\delta}(u-t)d\delta(t) + \psi(u). \quad (19) \end{aligned}$$

3.4 Ειδικές Μορφές της Ολοκληρώσιμης Συνάρτησης των Gerber - Shiu

Στη συνέχεια μελετάμε τις διάφορες μορφές της ολοκληρώσιμης αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης πονής των Gerber-Shiu .

Καθώς ισχύει $\lim_{u \rightarrow \infty} m_\delta(u) = 0$, οι παρακάτω λόγοι είναι κατανομές.

1. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ και $\delta=0$.

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η 1η κατανομή ισορροπίας της πιθανότητας χρεοκοπίας.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

2. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = 1$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

3. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

4. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

5. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y)$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

6. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y)$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

7. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

8. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) \leq x)$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) \leq x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

9. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

10. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

11. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

12. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(U(T-) = x)$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(U(T-) = x) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

13. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

14. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(|U(T)| = y) \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

15. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = e^{-s_1 \cdot x - s_2 \cdot y} = e^{-s_1 \cdot x} \cdot e^{-s_2 \cdot y}$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T - s_1 \cdot x - s_2 \cdot y} \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T - s_1 \cdot x - s_2 \cdot y} \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

16. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j \cdot |U(T)|^k$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[U(T-)^j \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[U(T-)^j \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

17. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j \cdot |U(T)|^k$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

18. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[U(T-)^j \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[U(T-)^j \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

19. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = U(T-)^j$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot U(T-)^j \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

20. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = |U(T)|^k$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[|U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[|U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

21. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = |U(T)|^k$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot |U(T)|^k \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

22. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = (U(T-) + |U(T)|)^d$ και $\delta=0$.

$$\bar{m}_{1,0}(u) = \frac{\int_u^\infty E[(U(T-) + |U(T)|)^d \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[(U(T-) + |U(T)|)^d \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

23. Έστω $w(U(T-), |U(T)|) = (U(T-) + |U(T)|)^d$ και $\delta > 0$.

$$\bar{m}_{1,\delta}(u) = \frac{\int_u^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot (U(T-) + |U(T)|)^d \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}{\int_0^\infty E[e^{-\delta \cdot T} \cdot (U(T-) + |U(T)|)^d \cdot I(T < \infty)|U(0) = x]dx}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ

4.1 Ανάλυση και Μαθηματικός Τύπος της Κατανομής του Ελλείμματος

Το 1987 οι Gerber, Goovaerts, Kaas εισήγαγαν την κατανομή του ελλείμματος η οποία δηλώνει την πιθανότητα να εμφανιστεί χρεοκοπία δοθέντος ότι έχουμε αρχικό αποθεματικό u και το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας δεν ξεπερνά το y . Η κατανομή του ελλείμματος δίνεται από τη σχέση

$$G(u, y) = Pr[|U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u], \quad (20)$$

με ουρά

$$\bar{G}(u, y) = \psi(u) - G(u, y) = Pr[|U(T)| > y, T < \infty | U(0) = u]. \quad (21)$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y) = \bar{G}(u, 0) = \psi(u)$ που σημαίνει ότι η $\bar{G}(u, y)$ αποτελεί μία γενίκευση της $\psi(u)$.

Επιπλέον, η κατανομή του ελλείμματος αποτελεί ειδική περίπτωση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber - Shiu καθώς, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 3, η $m_\delta(u)$ για $\delta = 0$ και $w(U(T-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ γίνεται

$$m_0(u) = E[I(|U(T)| \leq y) \cdot I(T < \infty) | U(0) = u] = Pr[|U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u]. \quad (22)$$

Στο κλασικό μοντέλο η κατανομή του ελλείμματος ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής

$$G(u, y) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \int_0^u G(u-t, y) dP_1(t) + \frac{1}{1+\theta} \cdot (\bar{P}_1(u) - \bar{P}_1(u+y)). \quad (23)$$

Χρησιμοποιώντας την 21, η ουρά της κατανομής του ελλείμματος ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{G}(u, y) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \int_0^u \bar{G}(u-t, y) dP_1(t) + \frac{1}{1+\theta} \cdot \bar{P}_1(u+y). \quad (24)$$

Γενικότερα, για το ανανεωτικό μοντέλο, Willmot (2002), η κατανομή του ελλείμματος ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$G(u, y) = \varphi \cdot \int_0^u G(u-t, y) dF(t) + \varphi \cdot (\bar{F}(u) - \bar{F}(u+y)). \quad (25)$$

Η ουρά της κατανομής του ελλείμματος, στο ανανεωτικό μοντέλο, ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{G}(u, y) = \varphi \cdot \int_0^u \bar{G}(u-t, y) dF(t) + \varphi \cdot \bar{F}(u+y). \quad (26)$$

Η λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$\bar{G}(u, y) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_0^u \bar{F}(u+y-t) d\delta(t). \quad (27)$$

Θεώρημα 4.1 : Στο ανανεωτικό μοντέλο η ουρά της κατανομής του ελλείμματος μπορεί να εκφραστεί από την λύση της ελλειμματικής εξίσωσης 26 με την εξής σχέση

$$\bar{G}(u, y) = \frac{\varphi}{1+\varphi} \cdot \int_0^t \bar{F}(u+y-t) d\delta(t).$$

Απόδειξη :

Ισχύει ότι,

$$\bar{G}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi) \cdot \varphi^n \cdot \bar{F}^{*n}(u). \quad (28)$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής των κλιμακωτών υψών ισούται με

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} dF(y) = \int_0^{\infty} e^{-sy} \cdot f(y) dy.$$

Από την (28), παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(e^{-sL}) &= \int_0^{\infty} e^{-su} d\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi) \cdot \varphi^n \cdot [\tilde{f}(s)]^n = \\ \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi) \cdot [\varphi \cdot \tilde{f}(s)]^n &= (1-\varphi) \cdot \frac{1}{1-\varphi \cdot \tilde{f}(s)} = \frac{1-\varphi}{1-\varphi \cdot \tilde{f}(s)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Από τη σχέση (26)

$$\bar{G}(u, y) = \varphi \cdot \int_0^u \bar{G}(u-t, y) dF(t) + \varphi \cdot \bar{F}(u+y),$$

παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μέλος πρόκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-su} \cdot \bar{G}(u, y) du = \varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-su} \cdot \bar{G}(u, y) du \cdot \int_0^{\infty} e^{-su} dF(t) + \varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-su} \cdot \bar{F}(u+y) du.$$

Θυμίζουμε ότι έχουμε $\int_0^{\infty} e^{-su} dF(t) = \tilde{f}(s)$.

Επομένως

$$\int_0^{\infty} e^{-su} \cdot \bar{G}(u, y) du = \frac{\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-su} \cdot \bar{F}(u+y) du}{1-\varphi \cdot \tilde{f}(s)}. \quad (30)$$

Από την σχέση (29),η (30) γίνεται

$$\int_0^\infty e^{-su} \cdot \bar{G}(u, y) du = \frac{1}{1-\varphi} \cdot \varphi \cdot \int_0^\infty e^{-su} \cdot \bar{F}(u + y) du \cdot \int_0^\infty e^{-st} d\delta(t). \quad (31)$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (31) τελικά καταλήγουμε στην λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης που εκφράζει την ουρά της κατανομής του ελλείμματος

$$\bar{G}(u, y) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_0^t \bar{F}(u + y - t) d\delta(t) .$$

Το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία δίνεται από τον τύπο

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{G}(u,y)}{\psi(u)} = Pr[|U(T)| > y | T < \infty, U(0) = u]. \quad (32)$$

4.2 Αριθμητικά Αποτελέσματα για την Εκθετική Κατανομή

Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι εφικτός. Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα, βλέπε Πολίτης (2007), για τον ακριβή υπολογισμό της $\psi(u)$ στην περίπτωση που η κατανομή P των αποζημιώσεων είναι μείξη δύο εκθετικών κατανομών.

Μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(y) = w_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot y} + w_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot y} , w_1, w_2 > 0 \text{ και } w_1 + w_2 = 1 ,$$

ονομάζεται μείξη δύο εκθετικών κατανομών με βάρη w_1, w_2 και παραμέτρους λ_1, λ_2 .

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη δύο εκθετικών κατανομών δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u) = C_1 \cdot e^{-r_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-r_2 \cdot u}, \quad (33)$$

όπου :

- r_1, r_2 : οι λύσεις της εξίσωσης Lundberg .
- C_1, C_2 : σταθερές.

Παράδειγμα 4.1 :

Θεωρούμε τα εξής δεδομένα :

- $\lambda = 2$.
- $c = 3$.
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$.

- $\delta = 0$.
- $w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}$.

Για τα παραπάνω δεδομένα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων ισούται με

$$p(y) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{-y} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^{-4y}$$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων ισούται με

$$m_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \Rightarrow m_1 = \frac{5}{8}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων

$$M_Y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4-t} = \frac{1}{2-2t} + \frac{2}{4-t}.$$

Για την εύρεση του περιθωρίου ασφαλείας θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot m_1} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{3}{2 \cdot \frac{5}{8}} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{7}{5}.$$

Λύνουμε την εξίσωση του Lundberg για την εύρεση των τιμών r_1, r_2

$$1 + (1 + \theta) \cdot r \cdot m_1 = M_Y(r) \Rightarrow$$

$$1 + (1 + \frac{7}{5}) \cdot r \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{2-2r} + \frac{2}{4-r} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{5}{8}r + \frac{7}{8}r = \frac{1}{2-2r} + \frac{2}{4-r} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{12}{8}r = \frac{4-r+4-4r}{8-2r-8r+2r^2} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{12}{8}r = \frac{8-5r}{8-10r+2r^2} \Rightarrow$$

$$(1 + \frac{12}{8}r) \cdot (8 - 10r + 2r^2) = 8 - 5r \Rightarrow$$

$$7r - 13r^2 + 3r^3 = 0.$$

Η μία ρίζα είναι το μηδέν, η οποία απορρίπτεται. Για $r \neq 0$ προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$7 - 13r + 3r^2 = 0.$$

Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση βρίσκουμε τις ρίζες $r_1 = 0,630076$ και $r_2 = 3,703256$.

Για την εύρεση των C_1, C_2 , Πολίτης (2007), θα λύσουμε το σύστημα

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta}$$

και

$$r_1 \cdot C_1 + r_2 \cdot C_2 = \frac{\theta}{(1+\theta)^2 \cdot m_1} .$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτουν οι εξής τιμές $C_1 = \frac{5}{12}$ και $C_2 = \frac{7}{18}$.

Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi(u) = \frac{7}{18} \cdot e^{-4u} + \frac{5}{12} \cdot e^{-u} .$$

Η επίλυση του παραπάνω παραδείγματος με την χρήση του Mathematica δίνεται στο Παράρτημα : Παράδειγμα 4.1.

Παρακάτω θα βρούμε την κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, Willmot (2002), για το ανανεωτικό μοντέλο όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείζη εκθετικών κατανομών.

Παράδειγμα 4.2 :

Έστω ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μείζη εκθετικών κατανομών με ουρά

$$\bar{P}(y) = q \cdot e^{-\lambda_1 y} + (1 - q) \cdot e^{-\lambda_2 y}, y \geq 0, \quad (34)$$

όπου :

- $q, (1 - q) \in (0, 1)$: βάρη της μείζης των εκθετικών κατανομών.
- λ_1, λ_2 : παράμετροι της μείζης των εκθετικών κατανομών.

Η μέση τιμή είναι $E(Y) = \frac{q}{\lambda_1} + \frac{1-q}{\lambda_2}$.

Επιπλέον, η εξίσωση του Lundberg δίνεται από τη σχέση (8) : $\tilde{k}(cr) \cdot \tilde{p}(-r) = 1$.

Η παραπάνω σχέση μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί και ως εξής : $y_1(r) = y_2(r)$, όπου

- $\tilde{p}(-r)$: ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων.
- $\tilde{k}(cr)$: ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων.
- $y_1(r) = \lambda_1 + \lambda_2 - r$.
- $y_2(r) = [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \cdot \tilde{k}(cr) + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot [1 - \tilde{k}(cr)]}{r}$.

Επειδή για την ορθή λειτουργία ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων πρέπει τα έσοδα να υπερβαίνουν τα έξοδα προκύπτει ότι $y_2(0) > y_1(0)$. Επίσης ισχύει ότι $y'_2(r) < 0$ και $y''_2(r) > 0$.

Άρα ισχύει ότι $y_2(\lambda_1) < y_1(\lambda_2)$ και $y_2(\lambda_2) > y_1(\lambda_2)$. Επομένως η εξίσωση του Lundberg έχει δύο θετικές ρίζες $r_1, r_2 (r_1 \neq r_2)$. Ισχύει η ανισοτική σχέση $0 < r_1 < \lambda_1 < r_2 < \lambda_2$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2 = y_2 \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} \right] < y_1 \cdot \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} \right] = \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} .$$

Απόδειξη :

$$\triangleright \text{Ισχύει ότι } y_2(r) = [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \cdot \tilde{k}(cr) + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot [1 - \tilde{k}(cr)]}{r} .$$

Για $r = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} y_2\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right) &= [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \cdot \tilde{k}\left(c \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} \right]\right) + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot [1 - \tilde{k}\left(c \left[\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} \right]\right)]}{\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}} \\ &= [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \tilde{k}\left[\frac{c \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right] + \frac{[q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \cdot [\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \left(\frac{c \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right)]}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \\ &= [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \tilde{k}\left[\frac{c \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right] + [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] + [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \\ &\quad - [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \cdot \tilde{k}\left[\frac{c \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right] \\ &\Rightarrow y_2\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right) = q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2 . \end{aligned}$$

$$\triangleright \text{Ισχύει ότι } y_1(r) = \lambda_1 + \lambda_2 - r .$$

Για $r = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$y_1\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} .$$

Για να αποδειχθεί ότι $y_2\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right) < y_1\left(\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2}\right)$ αρκεί να δειχθεί ότι :

$$q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2 < \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} .$$

Ισχύει ότι $0 < q < 1$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Άρα,

$$q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2 < \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} - (q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \cdot (1 - q) + \lambda_2 \cdot q + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \cdot (1 - q) \cdot (q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2) + \lambda_2 \cdot q \cdot (q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2) + \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$q \cdot (\lambda_1^2 + \frac{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 - \lambda_1^2 \cdot q - \lambda_1 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot q + \lambda_2^2 - \lambda_2^2 \cdot q) > 0, q > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1^2 + \frac{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q} - \lambda_1 \cdot \lambda_2 - \lambda_1^2 \cdot q - \lambda_1 \cdot \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot q + \lambda_2^2 - \lambda_2^2 \cdot q > 0 .$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει καθώς

- $\lambda_1^2 > 0 .$
- $\frac{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q} > 0 .$
- $\frac{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{q} > 2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 .$
- $\lambda_1^2 > \lambda_1^2 \cdot q .$
- $2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot q > 0 .$
- $\lambda_2^2 > 0 .$
- $\lambda_1^2 > \lambda_1^2 \cdot q .$

Προφανώς ισχύει ότι $\lambda_1 < \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1-q) \cdot \lambda_2} < \lambda_2$ και $\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{q \cdot \lambda_1 + (1-q) \cdot \lambda_2} < r_2 < \lambda_2$.

Ισχύει ότι, βλέπε Asmussen (1987), ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης Lundberg δίνεται από τον τύπο

$$E[e^{-sL}] = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot (s + \lambda_1) \cdot (s + \lambda_2)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (s + r_1) \cdot (s + r_2)} . \quad (35)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης χρεοκοπίας ισούται με

$$\tilde{\psi}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \cdot \psi(u) du = \frac{1 - E[e^{-sL}]}{s} . \quad (36)$$

Με την μέθοδο των μερικών κλασμάτων μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{C_1}{s + r_1} + \frac{C_2}{s + r_2} , \quad (37)$$

όπου :

$$C_1 = \frac{r_2 \cdot (\lambda_1 - r_1) \cdot (\lambda_2 - r_1)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} . \quad (38)$$

$$C_2 = \frac{r_1 \cdot (r_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - r_2)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} . \quad (39)$$

Πρόταση 4.1 : Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείζη δύο εκθετικών κατανομών, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας για $u = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$\psi(0) = 1 - \frac{r_1 \cdot r_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} . \quad (40)$$

Απόδειξη :

Καθώς οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείζη εκθετικών κατανομών, η πιθανότητα χρεοκοπίας περιγράφεται από τον τύπο :

$$\psi(u) = C_1 \cdot e^{-r_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-r_2 \cdot u} .$$

Από την (40) για $u = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \frac{r_2 \cdot (\lambda_1 - r_1) \cdot (\lambda_2 - r_1)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} \cdot e^0 + \frac{r_1 \cdot (r_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - r_2)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} \cdot e^0 = \frac{(r_2 \cdot \lambda_1 - r_1 \cdot r_2) \cdot (\lambda_2 - r_1) + (r_1 \cdot r_2 - \lambda_1 \cdot r_1) \cdot (\lambda_2 - r_1)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} \\ &= \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot r_2 + r_1^2 \cdot r_2 - r_1 \cdot r_2^2 - \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot r_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} = 1 + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_1 - r_2)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} = 1 - \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (r_2 - r_1)} = 1 - \frac{r_1 \cdot r_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} . \end{aligned}$$

$$\text{Ισχύει ότι } E[e^{-sL}] = \int_0^\infty e^{-su} d\delta(u) = \frac{1 - \varphi}{1 - \varphi \cdot f(s)} . \quad (41)$$

Για $\varphi = \psi(0)$ και $E[e^{-sL}] = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot (s + \lambda_1) \cdot (s + \lambda_2)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (s + r_1) \cdot (s + r_2)}$, προκύπτει ότι

$$\tilde{f}(s) = \frac{q_1 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{(1 - q_1) \cdot \lambda_2}{\lambda_2 + s}, \quad (42)$$

$$\text{όπου } q_1 = \frac{\lambda_2 \cdot (\lambda_1 - r_1) \cdot (\lambda_2 - r_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2 - r_1 \cdot r_2)}, \quad 0 < q_1 < 1. \quad (43)$$

Παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace κατά μέλη στην $\tilde{f}(s)$ προκύπτει η ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών

$$\bar{F}(y) = q_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot y} + (1 - q_1) \cdot e^{-\lambda_2 \cdot y}, \quad y \geq 0. \quad (44)$$

$$\text{Ορίζουμε την ουρά } \bar{F}_u(y) = \frac{\bar{F}(u+y)}{\bar{F}(u)}. \quad (45)$$

Προκύπτει ότι

$$\bar{F}_u(y) = q_1(u) \cdot e^{-\lambda_1 \cdot y} + (1 - q_1(u)) \cdot e^{-\lambda_2 \cdot y}, \quad y \geq 0, \quad (46)$$

$$\text{όπου } q_1(u) = \frac{q_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot u}}{q_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot u} + (1 - q_1) \cdot e^{-\lambda_2 \cdot u}}. \quad (47)$$

Επομένως τα κλιμακωτά ύψη ακολουθούν επίσης μείζη εκθετικών κατανομών με βάρη $q_1(u)$, $(1 - q_1(u))$ και παραμέτρους λ_1, λ_2 .

Όπως προαναφέραμε το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία δίνεται από τον τύπο

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{G}(u,y)}{\psi(u)} = Pr[|U(T)| > y | T < \infty, U(0) = u] .$$

Ισχύει ότι, βλέπε Willmot (2002)

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\int_{0-}^u \bar{F}_{u-t}(y) \cdot \bar{F}(u-t) d\delta(t)}{\int_{0-}^u \bar{F}(u-t) d\delta(t)}. \quad (48)$$

Από την (46)

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\int_{0-}^u [q_1 \cdot (u-t) \cdot e^{-\lambda_1 y} + (1-q_1) \cdot (u-t) \cdot e^{-\lambda_2 y}] \cdot \bar{F}(u-t) d\delta(t)}{\int_{0-}^u \bar{F}(u-t) d\delta(t)}.$$

Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\bar{G}_u(y) = q(u) \cdot e^{-\lambda_1 y} + (1 - q(u)) \cdot e^{-\lambda_2 y}, \quad (49)$$

$$\text{όπου } q(u) = \frac{\int_{0-}^u q_1(u-t) \cdot \bar{F}(u-t) d\delta(t)}{\int_{0-}^u \bar{F}(u-t) d\delta(t)}. \quad (50)$$

Άρα η κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών με βάρη $q(u)$, $1 - q(u)$ και παραμέτρους λ_1, λ_2 .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\bar{G}(u) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0-}^u \bar{F}(u-t) d\delta(t),$$

προκύπτει ότι

$$q(u) = \frac{\psi(0)}{\delta(0) \cdot \psi(0)} \cdot [\delta(0) \cdot \bar{F}(u) \cdot q_1(u) + \int_0^u \delta'(t) \cdot \bar{F}(u-t) \cdot q_1(u-t) dt]. \quad (51)$$

Εφαρμογή 4.2 :

Παρακάτω θα δούμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος 4.2 στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη εκθετικών κατανομών και οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Weibull . Για την εύρεση των αριθμητικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το Mathematica . Ο κώδικας δίνεται στο Παράρτημα : Εφαρμογή 4.2.

Θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μείξη εκθετικών με βάρη $q = \frac{1}{2}$, $1 - q = \frac{1}{2}$ και παραμέτρους $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, αντίστοιχα.

Η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων ισούται με $\bar{P}(y) = \frac{e^{-2y}}{2} + \frac{e^{-3y}}{2}$.

Η μέση τιμή με $E(Y) = \frac{5}{12}$, και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων περιγράφεται από τη σχέση $p(y) = \frac{3 \cdot e^{-3y}}{2} + e^{-2y}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων δίνεται από τον τύπο $\hat{p}(s) = \int_0^\infty e^{-su} \cdot p(u)du = \frac{3}{2(3+s)} + \frac{1}{2+s}$.

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εκφράζονται από μια κατανομή Weibull με παραμέτρους $c = 1, g = 3$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εκφράζεται από τη σχέση $k(y) = \frac{e^{-\frac{y}{3}}}{3}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων ισούται με $\hat{k}(s) = \frac{1}{1+3s}$.

Λύνοντας την εξίσωση

$$\lambda_1 + \lambda_2 - r = y_1(r) = y_2(r) = [q \cdot \lambda_1 + (1 - q) \cdot \lambda_2] \cdot \tilde{k}(cr) + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot [1 - \tilde{k}(cr)]}{r},$$

βρίσκουμε τις θετικές ρίζες $r_1 = 1, 80628, r_2 = 2, 86038$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης του Lundberg ισούται με

$$\hat{l}(s) = \frac{0,861108 \cdot (2+s) \cdot (3+s)}{(1,80628+s) \cdot (2,86038+s)}.$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1 - \frac{0,861108 \cdot (2+s) \cdot (3+s)}{(1,80628+s) \cdot (2,86038+s)}}{s}.$$

Καθώς ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας εκφράζεται και από τη σχέση

$$\hat{\psi}(s) = \frac{C_1}{s+r_1} + \frac{C_2}{s+r_2}, \text{ θα βρούμε τις τιμές των } C_1, C_2 \text{ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (38), (39).}$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι $C_1 = 0, 104585, C_2 = 0, 0343076$.

Τα κλιμακωτά ύψη ακολουθούν επίσης μείζη εκθετικών κατανομών με ουρά κατανομής

$$\bar{F}(y) = 0, 9026324e^{-3y} + 0, 0973676e^{-2y}.$$

Προκύπτει ότι η κατανομή του ελλείμματος δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία, δίνεται από τη σχέση

$$\bar{G}_u(y) = \frac{0,0811416 \cdot \left(\frac{e^{-2u}}{6} + 0,0220757 \cdot (-e^{-2,86038u} + e^{-2u}) + 0,0188742 \cdot (e^{-2u} + e^{-1,80628u})\right)}{0,0343076 \cdot e^{-2,86038u} + 0,0104585 \cdot e^{-1,80628u}} \cdot e^{-y} + \frac{0,0811416 \cdot \left(\frac{e^{-2u}}{6} + 0,0220757 \cdot (-e^{-2,86038u} + e^{-2u}) + 0,0188742 \cdot (e^{-2u} + e^{-1,80628u})\right)}{0,0343076 \cdot e^{-2,86038u} + 0,0104585 \cdot e^{-1,80628u}} \cdot e^{-4y}.$$

4.3 Ολοκληρώσιμη Μορφή της Κατανομής του Ελλείμματος

4.3.1 Ολοκληρώσιμη Μορφή της Κατανομής του Ελλείμματος ως προς y

Ο Willmot (2002), μελέτησε την κατανομή ισορροπίας της κατανομής του ελλείμματος, η οποία είναι η ολοκληρώσιμη μορφή της κατανομής του ελλείμματος ως προς y .

Η κατανομή ισορροπίας της κατανομής του ελλείμματος συμβολίζεται με $G_{1,u}(y)$ και ισούται με

$$G_{1,u}(y) = \frac{\int_0^y \bar{G}(u,t) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(u,t) dt}. \quad (52)$$

Η ουρά της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τον τύπο

$$\bar{G}_{1,u}(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{G}(u,t) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(u,t) dt}. \quad (53)$$

$$\text{Για } u = 0 \text{ έχουμε } \bar{G}_{1,0}(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{G}(0,t) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(0,t) dt} = \frac{\int_y^\infty \bar{F}(u) dt}{\int_0^\infty \bar{F}(u) dt} = \bar{F}_1(u),$$

όπου $\bar{F}_1(u)$ είναι η κατανομή ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών.

4.3.2 Ολοκληρώσιμη Μορφή της Κατανομής του Ελλείμματος ως προς u

Ο Psarrakos (2012), μελέτησε την ολοκληρώσιμη μορφή της κατανομής του ελλείμματος ως προς u . Η χρησιμότητα αυτής της μορφής είναι μεγάλη καθώς, ολοκληρώνοντας ως προς u , μπορούμε να συνδέσουμε την κατανομή του ελλείμματος με την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu.

Συμβολίζουμε αυτή την ποσότητα με $H_y(u)$ και ισχύει η σχέση

$$H_y(u) = \frac{\int_0^u \bar{G}(t,y) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(t,y) dt}. \quad (54)$$

Η ουρά δίνεται από τον τύπο

$$\bar{H}_y(u) = \frac{\int_u^\infty \bar{G}(t,y) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(t,y) dt}. \quad (55)$$

Θεώρημα 4.2 : Για $y = 0$ στην (55) παίρνουμε $\bar{H}_0(u) = \frac{\int_u^\infty \bar{G}(t,0) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(t,0) dt} = \frac{\int_0^\infty \psi(t) dt}{\int_0^\infty \psi(t) dt} = \psi_1(u)$, δηλαδή προκύπτει η ουρά της κατανομής ισορροπίας της $\delta(u) = 1 - \psi(u)$. Επιπλέον ο παρανομαστής $\int_0^\infty \psi(t) dt = E(L)$ είναι η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας.

Η $\bar{H}_y(u)$ μπορεί να ορισθεί και ως εξής

$$\bar{H}_y(u) = \int_{0-}^u \frac{\bar{F}_1(u+y-t)}{\bar{F}_1(y)} d\delta(t) + \psi(u). \quad (56)$$

Απόδειξη :

$$\text{Όπως προαναφέραμε } \bar{H}_y(u) = \frac{\int_u^\infty \bar{G}(t,y) dt}{\int_0^\infty \bar{G}(t,y) dt}.$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_u^\infty \bar{G}(z,y) dz$.

Αντικαθιστώντας την $\bar{G}(z,y)$ με την λύση της, βλέπε σχέση 27, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \bar{G}(z,y) dz &= \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_{0+}^z \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \varphi \cdot \int_u^\infty \bar{F}(z+y) dz \\ &= \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_{0+}^u \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_u^z \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \varphi \cdot \int_u^\infty \bar{F}(z+y) dz . \end{aligned}$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \bar{G}(z,y) dz &= \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0+}^u \int_u^\infty \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_t^\infty \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \varphi \cdot \int_u^\infty \bar{F}(z+y) dz \\ &= \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0+}^u \int_u^\infty \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_t^\infty \bar{F}(z+y-t) d\delta(t) dz + \varphi \cdot \int_{u+y}^\infty \bar{F}(z) dz \\ &= \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_{0+}^u \int_{u+y-t}^\infty \bar{F}(z) d\delta(t) dz + \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \int_u^\infty \int_y^\infty \bar{F}(z) d\delta(t) dz + \varphi \cdot \int_{u+y}^\infty \bar{F}(z) dz. \quad (57) \end{aligned}$$

Ισχύει ότι η ουρά της κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών δίνεται από τον τύπο

$$\bar{F}_1(u) = \frac{\int_u^\infty \bar{F}(z) dz}{\int_0^\infty \bar{F}(z) dz} = \frac{\int_u^\infty \bar{F}(z) dz}{\mu_{1,1}} \Rightarrow \int_u^\infty \bar{F}(z) dz = \mu_{1,1} \cdot \bar{F}_1(u). \quad (58)$$

Επομένως η (57) γίνεται

$$\int_u^\infty \bar{G}(z,y) dz = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \mu_{1,1} \int_{0+}^u \bar{F}_1(u+y-t) d\delta(t) + \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot \mu_{1,1} \int_u^\infty \bar{F}_1(y) d\delta(t) + \varphi \cdot \mu_{1,1} \cdot \bar{F}_1(u+y). \quad (59)$$

Η σχέση (59) για $u = 0$ γίνεται

$$\int_0^\infty \bar{G}(z,y) dz = \varphi \cdot \mu_{1,1} \cdot \bar{F}_1(y) \cdot \left(\frac{\varphi}{1-\varphi} + 1 \right) = \frac{\varphi \cdot \mu_{1,1}}{1-\varphi} \cdot \bar{F}_1(y) ,$$

όπου : $\frac{\varphi \cdot \mu_{1,1}}{1-\varphi}$ η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L .

Άρα η $\bar{H}_y(u)$ ικανοποιεί την σχέση

$$\bar{H}_y(u) = \int_{0-}^u \frac{\bar{F}_1(u+y-t)}{\bar{F}_1(y)} d\delta(t) + \psi(u) .$$

Ορίζουμε $\bar{F}_{1,y}(u) = \frac{\bar{F}_1(u+y)}{\bar{F}_1(u)}$, επομένως η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\bar{H}_y(u) = \int_{0-}^u \bar{F}_{1,y}(u-t) d\delta(t) + \psi(u). \quad (60)$$

Ο Psarrakos (2013), απέδειξε ότι υπάρχει μία σχέση η οποία συνδέει την $\bar{G}_1(u, y)$ με την $\bar{H}_y(u)$.

Θεώρημα 4.3 : Για κάθε $u, y \geq 0$ ισχύει ότι :

$$\bar{G}_{1,u}(y) = \frac{\bar{F}_1(y) \cdot [\bar{H}_y(u) - \psi(u)]}{\psi_1(u) - \psi(u)}. \quad (61)$$

Θεώρημα 4.4 : Θεωρούμε ότι ένα άτομο ή αντικείμενο είναι ηλικίας t και η υπολειπόμενη ζωή του μετά τη χρονική στιγμή t είναι τυχαία. Αυτή η αναμενόμενη τιμή της υπολειπόμενης ζωής ονομάζεται μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής στη χρονική στιγμή t . Καθώς ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ορίζεται για κάθε t , μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, βλέπε Guess and Proschan (1985).

Έστω B μία κατανομή για την οποία ισχύει ότι $B(t) = 0, t < 0$, και έχει ουρά $\bar{B}(t) = 1 - B(t)$. Έστω R μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής B . Η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ορίζεται ως

$$\begin{aligned} mrl(t) &= E[R - r | R > t] \text{ για } \bar{B}(t) > 0, t \geq 0 \\ &\text{και} \\ mrl(t) &= 0 \text{ για } \bar{B}(t) = 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι ο εξής

$$mrl(t) = \int_0^\infty \frac{\bar{B}(r+t)}{\bar{B}(t)} dr, \bar{B}(t) > 0.$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή V_y η οποία ακολουθεί την $H_y(u)$.

Η μέση τιμή της V_y ισούται με το άθροισμα του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της κατανομής ισορροπίας των κλιμακωτών υψών και της μέσης τιμής της μέγιστης σωρευτικής απώλειας.

Για σταθερό y θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή V_y με ουρά $\bar{H}_y(u)$. Τότε μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

- Για το κλασικό μοντέλο : $E(V_y) = mrlP_2(y) + E(L)$. (62)

- Για το ανανεωτικό μοντέλο : $E(V_y) = mrlF_1(y) + E(L)$. (63)

Απόδειξη :

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση για το ανανεωτικό μοντέλο. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (60) προκύπτει

$$\begin{aligned} E(V_y) &= \int_0^\infty Pr(V_y > u)du = \int_0^\infty \bar{H}_y(u)du = \int_0^\infty (\int_{0-}^u \bar{F}_{1,y}(u-t)d\delta(t) + \psi(u))du \\ &= \int_0^\infty \int_{0-}^u \bar{F}_{1,y}(u-t)d\delta(t)du + \int_0^\infty \psi(u)du . \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\int_0^\infty \psi(u)du = E(L)$, επομένως, κάνοντας και αλλαγή ορίων έχουμε

$$E(V_y) = \int_{0-}^\infty \int_0^\infty \bar{F}_{1,y}(u)dud\delta(t) + E(L) = \int_0^\infty \bar{F}_{1,y}(u)du \int_{0-}^\infty d\delta(t) + E(L) .$$

Όμως $\int_{0-}^\infty d\delta(t) = 1$. Άρα,

$$E(V_y) = \int_0^\infty \bar{F}_{1,y}(u)du + E(L),$$

όπου $\int_0^\infty \bar{F}_{1,y}(u)du = mrlF_1(y)$.

Επομένως, τελικά $E(V_y) = mrlF_1(y) + E(L)$.

Θα δούμε εφαρμογές του παραπάνω τύπου για διάφορες κατανομές στο Κεφάλαιο 5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά θα εξετάσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά ορισμένων χρήσιμων κατανομών.

Συγκεκριμένα, θα δούμε κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν το ύψος της αποζημίωσης που προκύπτει δεδομένου ότι έχει συμβεί ο κίνδυνος.

Για κάθε μία από τις κατανομές δίνονται τα εξής στοιχεία:

- Μαθηματικός Τύπος Συνάρτησης Κατανομής.
- Μαθηματικός Τύπος Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας.
- Μέση Τιμή.
- Διασπορά .
- Χρήσιμες Παρατηρήσεις.
- Τυπικά Διαγράμματα.

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το Mathematica θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα.

1. Δεξιά ουρά της Συνάρτησης Κατανομής.
2. Μέση Τιμή.
3. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής.
4. Δεξιά ουρά της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.
5. Μέση Τιμή της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.
6. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.
7. Δεξιά ουρά της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.
8. Μέση Τιμή της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.
9. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.
10. Μέση Τιμή της Μέγιστης Σωρευτικής Απώλειας $E(L) = \frac{\varphi \cdot \mu_{1,1}}{1-\varphi}$.

Όπου :

$$(\alpha') \varphi = \frac{\lambda \cdot m_1}{c - \lambda \cdot m_1}.$$

$$(\beta') \mu_{1,1} = \frac{m_2}{2 \cdot m_1}.$$

Επομένως :

$$E(L) = \frac{\lambda \cdot m_2}{2 \cdot (c - \lambda \cdot m_1)}.$$

11. Μέση Τιμή της τυχαίας μεταβλητής $V_y : E(V_y) = E(L) + mrlP_2(y)$.

Στις επόμενες εφαρμογές θα θεωρήσουμε το κλασικό μοντέλο, επομένως οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιολόγων ενδεχομένων ακολουθούν εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$. Θα θεωρήσουμε ότι $\lambda = 2$ και ότι το περιθώριο ασφαλείας ισούται με $\theta = 0,2$.

Οι κώδικες που χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση των αποτελεσμάτων για κάθε κατανομή δίνονται στο Παράρτημα.

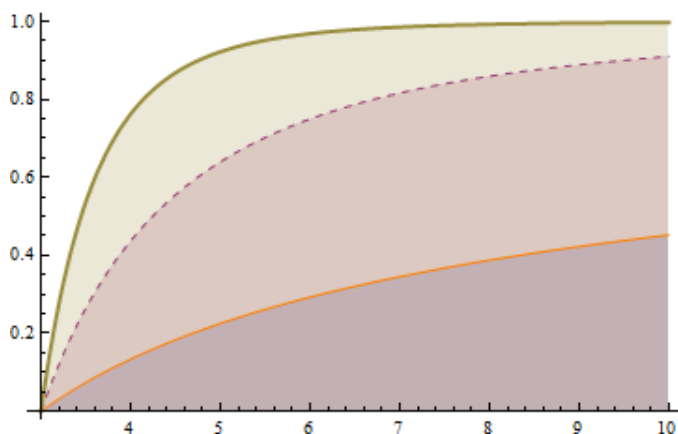
Κατανομή Pareto

Έστω Y μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $P(y) = 1 - \left(\frac{k}{k+y}\right)^{a+1}$, και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(y) = \frac{(a+1) \cdot k^{a+1}}{(k+y)^{a+2}}$. Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $(a+1), k > 0$. Η μέση τιμή της Y δίνεται από τη σχέση $E(Y) = \frac{k}{a}$, $a > 0$ και η διακύμανση από τη $Var(Y) = \frac{(a+1) \cdot k^2}{(a-1) \cdot a^2}$, $a > 1$.

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για την κατανομή Pareto.

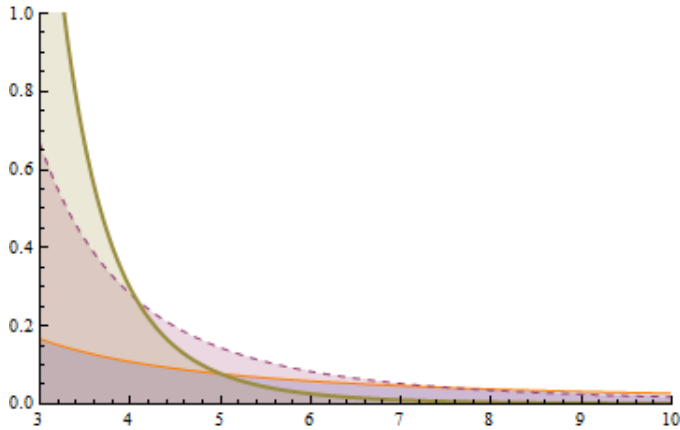
- Η 1η κατανομή ισορροπίας είναι επίσης κατανομή Pareto με παραμέτρους a, k . Το ίδιο ισχύει και για την 2η κατανομή ισορροπίας με παραμέτρους $(a-1), k$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι κατανομές ισορροπίας οι οποίες προέρχονται από κατανομή Pareto είναι επίσης Pareto με μια λιγότερη τάξης ροπή.
- Έστω μία τυχαία μεταβλητή M η οποία ακολουθεί εκθετική κατανομή και μία τυχαία μεταβλητή N η οποία ακολουθεί κατανομή Gamma. Τότε η τυχαία μεταβλητή $\frac{M}{N}$ ακολουθεί κατανομή Pareto.

Σχήματα



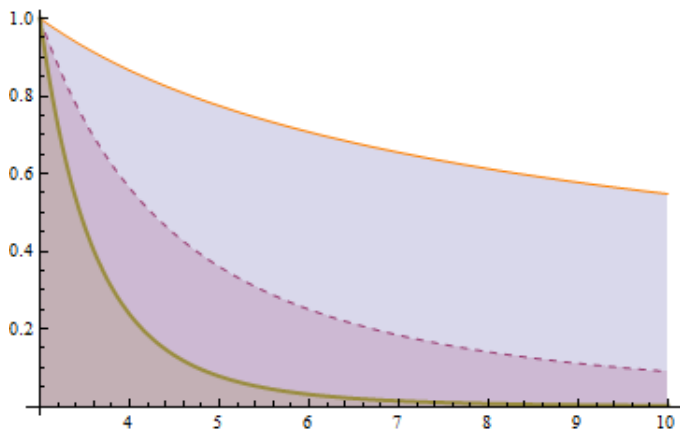
Σχήμα 5.1 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $k = 3$ και $a = 0.5, 2, 5$.

Στο Σχήμα 5.1 βλέπουμε τη συνάρτηση κατανομής στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $a + 1, k$. Η λεπτή πορτοκαλί γραμμή απεικονίζει την περίπτωση που η κατανομή Pareto έχει παραμέτρους $(1.5, 3)$. Η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει την περίπτωση που η κατανομή Pareto έχει παραμέτρους $(3, 3)$. Τέλος, η έντονη γραμμή απεικονίζει την περίπτωση που οι παραμέτροι είναι οι $(6, 3)$.



Σχήμα 5.2 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $k = 3$ και $a = 0.5, 2, 5$.

Στο Σχήμα 5.2 βλέπουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $a + 1, k$. Η λεπτή πορτοκαλί γραμμή απεικονίζει την περίπτωση που η κατανομή Pareto έχει παραμέτρους $(1.5, 3)$, η διακεκομμένη την περίπτωση που οι παράμετροι είναι $(3, 3)$ και η έντονη γραμμή την περίπτωση που οι παράμετροι είναι $(6, 3)$.



Σχήμα 5.3 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $k = 3$ και $a = 0.5, 2, 5$.

Στο Σχήμα 5.3 βλέπουμε τη συνάρτηση επιβίωσης στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $a + 1, k$. Η λεπτή πορτοκαλί γραμμή απεικονίζει

την περίπτωση που η κατανομή Pareto έχει παραμέτρους (1.5, 3), η διακεκομμένη την περίπτωση που οι παράμετροι είναι (3, 3) και η έντονη γραμμή την περίπτωση που οι παράμετροι είναι (6, 3).

Πριν προχωρήσουμε στην χρήση του Mathematica, για την εύρεση της 1ης και 2ης κατανομής ισορροπίας, καθώς και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για την κάθε περίπτωση, θα βρούμε τα προαναφερθέντα ζητούμενα θεωρητικά.

1. Συνάρτηση Επιβίωσης της Κατανομής.

$$\bar{P}(y) = \frac{k^{a+1}}{(k+y)^{a+1}}.$$

2. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής.

Ισχύει ότι

$$mrlP(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\bar{P}(y)}.$$

Αρχικά θα λύσουμε το ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt$.

$$\begin{aligned} \int_y^\infty \bar{P}(t) dt &= \int_y^\infty \frac{k^{a+1}}{(k+t)^{a+1}} dt = (k^{a+1}) \cdot \int_y^\infty (k+t)^{-(a+1)} dt = \\ &= \frac{-k^{a+1}}{a} \cdot \int_y^\infty [(k+t)^{-a}]' dt = \frac{-k^{a+1}}{a} \cdot [0 - (k+y)^{-a}] = \frac{k^{a+1}}{a} \cdot \frac{1}{(k+y)^a}. \end{aligned}$$

Άρα ο Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της Συνάρτησης Επιβίωσης δίνεται από τον τύπο

$$mrlP(y) = \frac{\frac{k^{a+1}}{a \cdot (k+y)^a}}{\frac{k^{a+1}}{(k+y)^{a+1}}} = \frac{k+y}{a} = \frac{1}{a} \cdot y + \frac{k}{a}.$$

3. Δεξιά ουρά της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.

Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\int_0^\infty \bar{P}(t) dt}.$$

Αντικαθιστώντας $y \Rightarrow 0$ στο ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt$ προκύπτει ότι $\int_0^\infty \bar{P}(t) dt = \frac{k}{a}$.

Επομένως η 1η Κατανομή Ισορροπίας της Συνάρτησης Επιβίωσης ισούται με

$$\bar{P}_1(y) = \frac{\frac{k^{a+1}}{a \cdot (k+y)^a}}{\frac{k}{a}} \Rightarrow \bar{P}_1(y) = \frac{k^a}{(k+y)^a}.$$

4. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.

$$mrlP_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt}{P_1(y)}.$$

Αρχικά θα λύσουμε το ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt$.

$$\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt = \int_y^\infty \frac{k^a}{(k+t)^a} dt = (k^a) \cdot \int_y^\infty (k+t)^{-(a)} dt =$$

$$\frac{-k^a}{a-1} \cdot \int_y^\infty [(k+t)^{-(a-1)}]' dt = \frac{k^a}{a-1} \cdot \frac{1}{(k+y)^{(a-1)}}.$$

$$\text{Επομένως } mrlP_1(y) = \frac{\frac{k^a}{a-1} \cdot \frac{1}{(k+y)^{(a-1)}}}{\frac{k^a}{(k+y)^a}} = \frac{k+y}{a-1} = \frac{1}{a-1} \cdot y + \frac{k}{a-1}.$$

5. Δεξιά ουρά της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.

Δίνεται από τον εξής τύπο

$$\bar{P}_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt}{\int_0^\infty \bar{P}_1(t) dt}.$$

Αντικαθιστώντας $y \Rightarrow 0$ στο ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt$ προκύπτει ότι $\int_0^\infty \bar{P}_1(t) dt = \frac{k}{a-1}$.

Επομένως η 2η Κατανομή Ισορροπίας της Συνάρτησης Επιβίωσης ισούται με

$$\bar{P}_2(y) = \frac{\frac{k^a}{(a-1) \cdot (k+y)^{a-1}}}{\frac{k}{a-1}} \Rightarrow \bar{P}_2(y) = \frac{k^{a-1}}{(k+y)^{a-1}}.$$

6. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.

$$mrlP_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_2(t) dt}{P_2(y)}.$$

Θα λύσουμε το ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}_2(t) dt$.

$$\int_y^\infty \bar{P}_2(t) dt = \int_y^\infty \frac{k^{a-1}}{(k+t)^{a-1}} dt = (k^{a-1}) \cdot \int_y^\infty (k+t)^{-(a-1)} dt =$$

$$\frac{-k^{a-1}}{a-2} \cdot \int_y^\infty [(k+t)^{-(a-2)}]' dt = \frac{k^{a-1}}{a-2} \cdot \frac{1}{(k+y)^{(a-2)}}.$$

Επομένως προκύπτει ότι

$$mrlP_2(y) = \frac{\frac{k^{a-1}}{a-2} \cdot \frac{1}{(k+y)^{(a-2)}}}{\frac{k^{a-1}}{(k+y)^{a-1}}} = \frac{k+y}{a-2} = \frac{1}{a-2} \cdot y + \frac{k}{a-2}.$$

Στην συνέχεια με την χρήση του Mathematica, (Παράρτημα : Εφαρμογή 5.1) θα βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους $k = 3, a = 5$.

Για τις παραμέτρους $k = 3, a = 5$, η δεξιά ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από τη σχέση $\bar{P}(y) = \frac{729}{(3+y)^6} = \frac{3^6}{(3+y)^6}$.

Η μέση τιμή είναι ίση με $m_1 = \frac{3}{5}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP(y) = \frac{3+y}{5}$.

Η κατανομή των κλιμακωτών υψών (1η κατανομή ισορροπίας) ακολουθεί επίσης την κατανομή Pareto με παραμέτρους $k = 3, a = 4$.

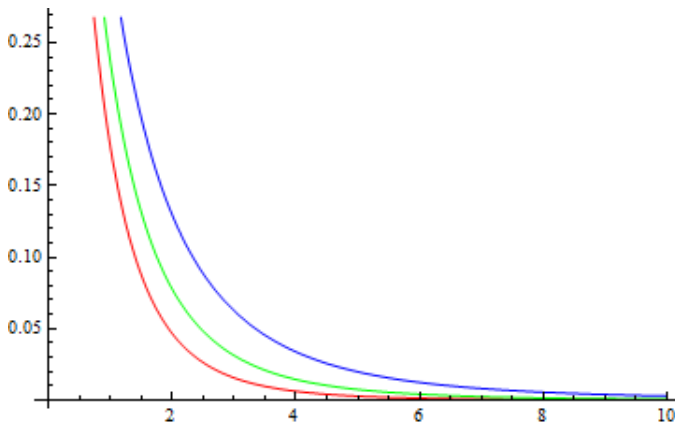
Η συνάρτηση επιβίωσης των κλιμακωτών υψών ισούται με $\bar{P}_1(y) = \frac{243}{(3+y)^5} = \frac{3^5}{(3+y)^5}$.

Η μέση τιμή είναι ισούται με $\mu_{1,1} = \frac{3}{4}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP_1(y) = \frac{3+y}{4}$.

Τέλος, η 2η κατανομή ισορροπίας των κλιμακωτών υψών ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $k = 3, a = 3$.

Η δεξιά ουρά της 2ης κατανομής ισορροπίας δίνεται από τη σχέση $\bar{P}_2(y) = \frac{81}{(3+y)^4} = \frac{3^4}{(3+y)^4}$.

Η μέση τιμή είναι ίση με $\mu_{2,1} = 1$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP_2(y) = \frac{3+y}{3}$.



Σχήμα 5.4 : Διάγραμμα της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, της 1ης και 2ης κατανομής ισορροπίας.

Στο Σχήμα 5.4 η κόκκινη γραμμή αναπαριστά τη συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, η πράσινη γραμμή απεικονίζει τη συνάρτηση επιβίωσης των κλιμακωτών υψών και η μπλε γραμμή τη συνάρτηση επιβίωσης της 2ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο μικραίνει η τιμή της παραμέτρου a , τόσο πιο βαριά είναι η ουρά της κατανομής

Pareto .

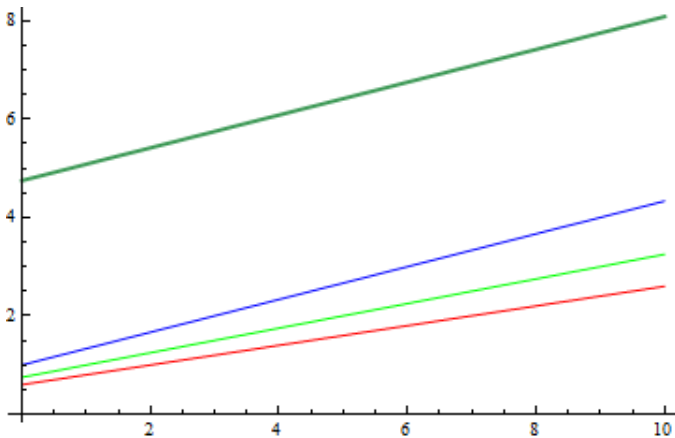
Η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας δίνεται από τον τύπο

$$E(L) = \frac{\lambda \cdot m_2}{2 \cdot (c - \lambda \cdot m_1)} .$$

Επομένως για τον υπολογισμό της θα πρέπει πρώτα να βρούμε τον ρυθμό είσπραξης των ασφαλιστρών c , ο οποίος δίνεται από τον τύπο $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot m_1 = 1,44$.

Επίσης η 2η ροπή των αποζημιώσεων είναι ίση με $m_2 = \frac{9}{10}$. Άρα η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι $E(L) = 3,75$.

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y είναι ίση με $E(V_y) = E(L) + mrlP_2(y) = 3,75 + \frac{3+y}{3}$.



Σχήμα 5.5 : Διάγραμμα των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής και της $E(V_y)$.

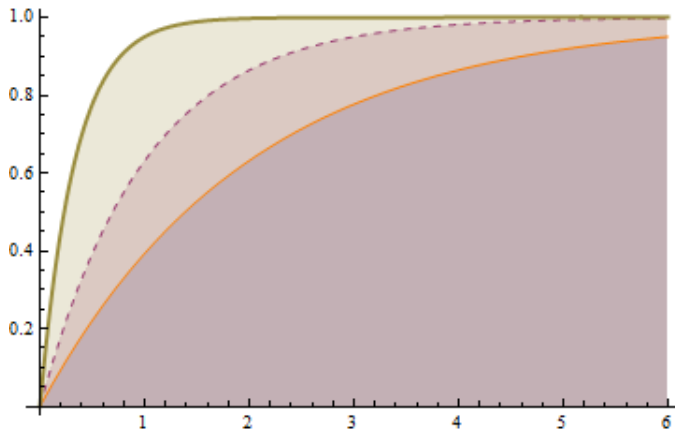
Στο Σχήμα 5.5 η κόκκινη γραμμή αναπαριστά το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων, η πράσινη γραμμή απεικονίζει το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής των κλιμακωτών υψών, η μπλε γραμμή το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων και η έντονη γραμμή τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y . Τέλος, παρατηρούμε ότι οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής και η $E(V_y)$ είναι γραμμικές συναρτήσεις ως προς y .

Εκθετική Κατανομή

Έστω Y η τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο d . Η συνάρτηση κατανομής της Y ισούται με $P(y) = 1 - e^{-d \cdot y}$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με $p(y) = d \cdot e^{-d \cdot y}$. Η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση $E(Y) = \frac{1}{d}$ και η διακύμανση ισούται με $Var(Y) = \frac{1}{d^2}$.

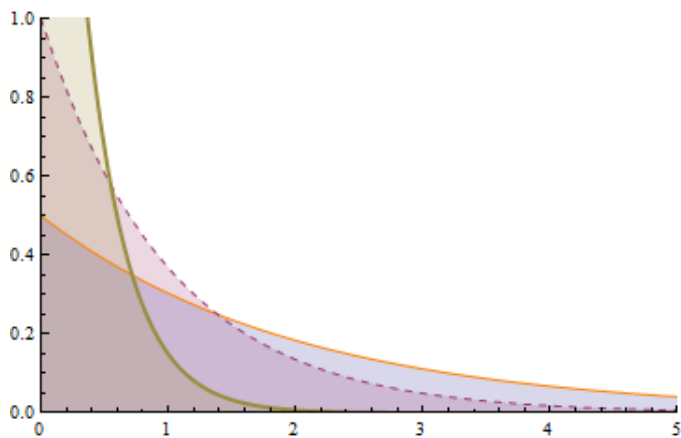
Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για την εκθετική κατανομή.

- Η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται κυρίως όταν μελετάμε το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος.
- Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο d , τότε και η κατανομή ισορροπίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο d .
- Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της εκθετικής κατανομής είναι σταθερός.
- Σχήματα



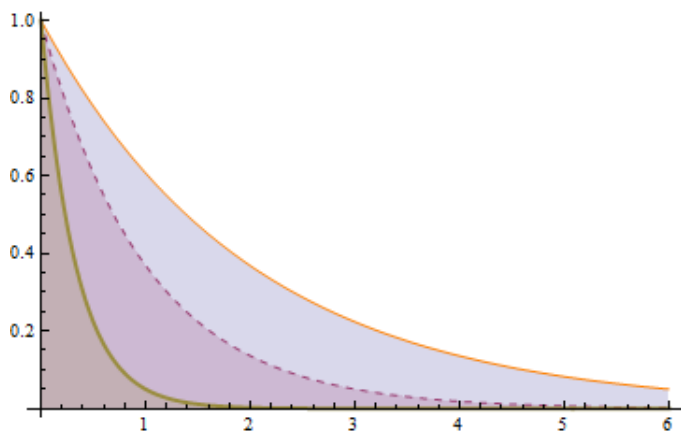
Σχήμα 5.6 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $d = 0.5, 1, 3$.

Στο Σχήμα 5.6 βλέπουμε τη συνάρτηση κατανομής όταν η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο d . Η λεπτή πορτοκαλί γραμμή απεικονίζει την εκθετική κατανομή με παράμετρο 0.5, η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει την περίπτωση που η εκθετική κατανομή έχει παράμετρο 1 και η έντονη γραμμή την περίπτωση που η παράμετρος της εκθετικής κατανομής είναι ίση με 3.



Σχήμα 5.7 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $d = 0.5, 1, 3$.

Στο Σχήμα 5.7 βλέπουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο d . Η λεπτή πορτοκαλί γραμμή απεικονίζει την περίπτωση που η εκθετική κατανομή έχει παράμετρο 0.5, η διακεκομμένη την περίπτωση που η παράμετρος είναι 1 και η έντονη γραμμή την περίπτωση που η παράμετρος είναι 3.



Σχήμα 5.8 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $d = 0.5, 1, 3$.

Στο Σχήμα 5.8 βλέπουμε τη συνάρτηση επιβίωσης στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο d . Η λεπτή πορτοκαλί γραμμή απεικονίζει την περίπτωση που η εκθετική κατανομή έχει παράμετρο 0.5, η διακεκομμένη την περίπτωση που η παράμετρος είναι ίση με 1 και η έντονη γραμμή την περίπτωση που η παράμετρος είναι ίση με 3.

Θα βρούμε την 1η και 2η κατανομή ισορροπίας της εκθετικής κατανομής καθώς και τους μέσους υπολειπόμενους χρόνους ζωής τους θεωρητικά.

1. Συνάρτηση Επιβίωσης της Κατανομής.

$$\bar{P}(y) = e^{-d \cdot y} .$$

2. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής.

$$\text{Ισχύει ότι } mrlP(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\bar{P}(y)} .$$

Αρχικά θα λύσουμε το ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt$.

$$\int_y^\infty \bar{P}(t) dt = \int_y^\infty e^{-d \cdot t} dt = \frac{-1}{d} \cdot \int_y^\infty [e^{-d \cdot t}]' dt = \frac{-1}{d} \cdot [0 - e^{(-d \cdot y)}] = \frac{e^{-d \cdot y}}{d} .$$

Άρα ο Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της Συνάρτησης Επιβίωσης δίνεται από τον τύπο

$$mrlP(y) = \frac{1}{d} .$$

3. Δεξιά ουρά της 1ης Κατανομής Ισορροπίας. Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\int_0^\infty \bar{P}(t) dt} .$$

Αντικαθιστώντας $y \Rightarrow 0$ στο ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt$ προκύπτει ότι $\int_0^\infty \bar{P}(t) dt = \frac{1}{d}$.

Επομένως η 1η Κατανομή Ισορροπίας της Συνάρτησης Επιβίωσης ισούται με

$$\bar{P}_1(y) = e^{-d \cdot y} = \bar{P}(y) .$$

4. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.

$$mrlP_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt}{\bar{P}_1(y)} .$$

Καθώς $\bar{P}_1(y) = \bar{P}(y)$, είναι $mrlP_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\bar{P}(y)}$.

Επομένως ισχύει ότι $mrlP_1(y) = mrlP(y) = \frac{1}{d}$.

5. Δεξιά ουρά της 2ης Κατανομής Ισορροπίας . Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt}{\int_0^\infty \bar{P}_1(t) dt}.$$

Ισχύει ότι $\bar{P}_1(y) = \bar{P}(y)$, επομένως

$$\bar{P}_2(y) = e^{-d \cdot y}.$$

6. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 2ης Κατανομής Ισορροπίας .

$$mrlP_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_2(t) dt}{\bar{P}_2(y)}.$$

Ισχύει ότι $\bar{P}_2(y) = \bar{P}(y)$, επομένως $mrlP_2(y) = \frac{1}{d}$.

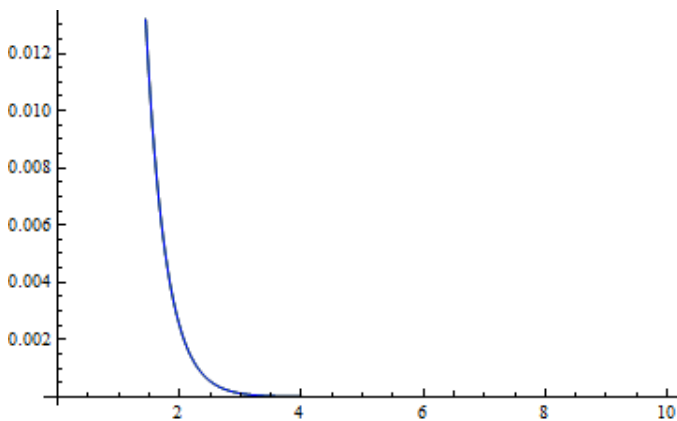
Στην συνέχεια με την χρήση του Mathematica, (Παράρτημα : Εφαρμογή 5.2) θα βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα για $d = 3$.

Στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο d , η 1η κατανομή ισορροπίας (κατανομή των κλιμακωτών υψών) και η 2η κατανομή ισορροπίας ακολουθούν επίσης την εκθετική κατανομή με παράμετρο d .

Στην εφαρμογή έχουμε επιλέξει $d = 3$.

Άρα : $\bar{P}(y) = \bar{P}_1(y) = \bar{P}_2(y) = e^{-3y}$.

Η παραπάνω σχέση φαίνεται και στο σχήμα



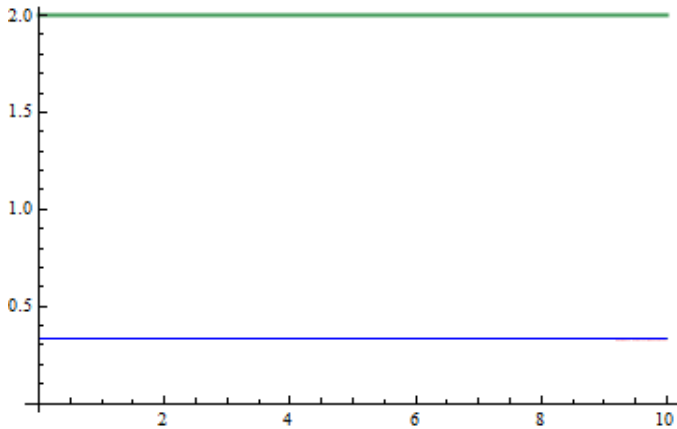
Σχήμα 5.9 : Διάγραμμα της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, της 1ης και 2ης κατανομής ισορροπίας.

Στο Σχήμα 5.9 επιβεβαιώνεται και γραφικά ότι η κατανομή των αποζημιώσεων, η 1η κατανομή ισορροπίας και η 2η κατανομή ισορροπίας ακολουθούν την ίδια κατανομή, δηλαδή την εκθετική κατανομή με παράμετρο $d = 3$, καθώς συμπίπτουν μεταξύ τους.

Καθώς οι κατανομές ισορροπίας ακολουθούν την ίδια κατανομή που περιγράφει τις αποζημιώσεις ισχύει ότι $m_1 = \mu_{1,1} = \mu_{2,1} = \frac{1}{3}$ και $mrlP(y) = mrlP_1(y) = mrlP_2(y) = \frac{1}{3}$.

Η μέση τιμή των κλιμακωτών υψών είναι ίση με $E(L) = 1,66667$.

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y ισούται με $E(V_y) = 2$.



Σχήμα 5.10 : Διάγραμμα των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής και της $E(V_y)$.

Από το Σχήμα 5.10 παρατηρούμε ότι οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής και η $E(V_y)$, στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή είναι στάσιμοι (περιγράφονται από μια ευθεία γραμμή παράλληλη του άξονα x). Αυτή η στασιμότητα οφείλεται στην αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής.

Πρόταση 5.1 : Η αμνήμονη ιδιότητα αναφέρει ότι για κάθε $s, t > 0$ ισχύει ότι :

$$Pr(Y > s + t | Y > t) = Pr(Y > s) .$$

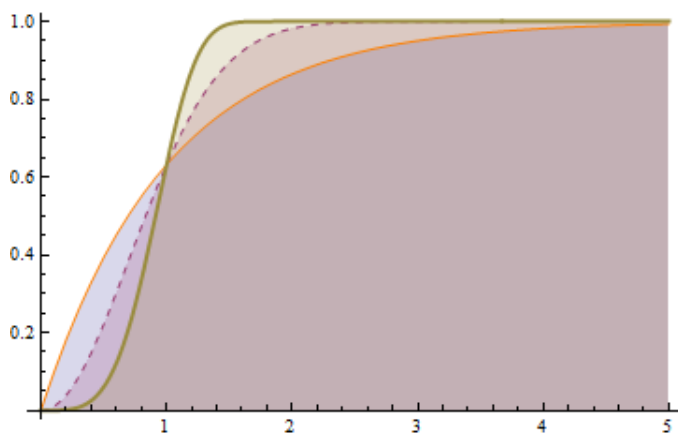
Κατανομή Weibull

Έστω Y μία τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους c, g . Η συνάρτηση κατανομής της Y δίνεται από τον τύπο $P(y)=1 - e^{-cy^g}, g \geq 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας από τον τύπο $p(y)=g \cdot c \cdot (cy)^{g-1} \cdot e^{-cy^g}, g \geq 1$. Η μέση τιμή δίνεται από την σχέση $E(Y)=\frac{\Gamma(1+\frac{1}{g})}{c}$ και η διακύμανση ισούται με $Var(Y)=\frac{\Gamma(1+\frac{2}{g})}{c^2} - (E(Y))^2$.

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για την κατανομή Weibull .

- $Y \sim Weibull(c, g) \implies Y^b \sim Exponential(\frac{1}{c})$.
- Η παράμετρος c ονομάζεται παράμετρος μορφής. Όταν το c αυξάνεται, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται στενότερη.
- Η παράμετρος g ονομάζεται παράμετρος κλίμακας.
- Για $g = 1 \implies Weibull(c, 1) \sim Exponential(\frac{1}{c})$.
- Για $g = 1, g > 1, g < 1$ ισχύουν τα παρακάτω :
 - Για $b = 1$, η κατανομή Weibull ισοδυναμεί με την εκθετική κατανομή και, κατά συνέπεια, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι σταθερός.
 - Για $g > 1$ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι φθίνουσας μορφής.
 - Για $0 < g < 1$ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι αυξανόμενος.

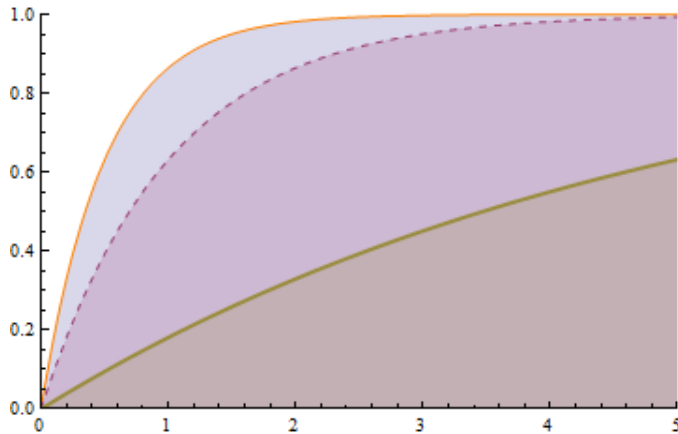
• Σχήματα



Σχήμα 5.11 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $g = 1$ και $c = 1, 2, 4$.

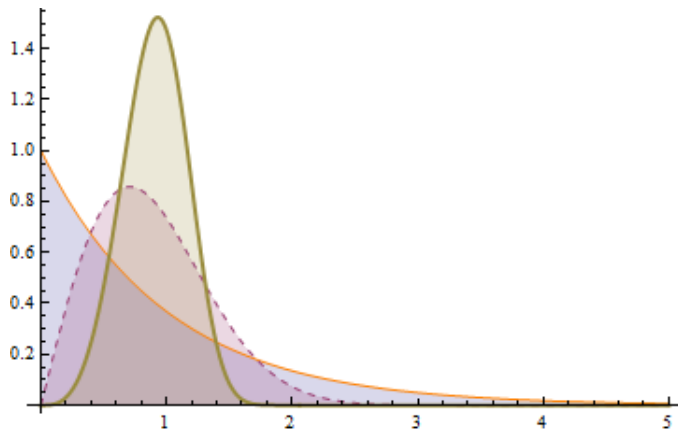
Στο Σχήμα 5.11 απεικονίζεται η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Weibull στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $g = 1$ και $c = 1$ (λεπτή πορτοκαλί γραμμή), $c = 2$ (διακεκομμένη

γραμμή) και $c = 4$ (έντονη γραμμή).



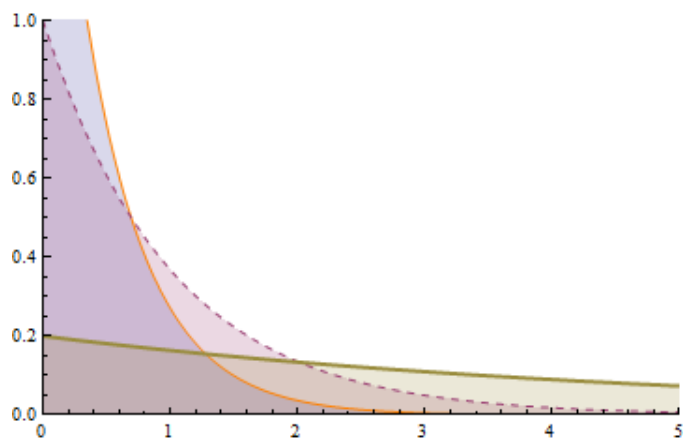
Σχήμα 5.12 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $c = 1$ και $g = 0.5, 1, 5$.

Στο Σχήμα 5.12 απεικονίζεται η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Weibull στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $c = 1$ και $g = 0.5$ (λεπτή πορτοκαλί γραμμή), $g = 1$ (διακεκομμένη γραμμή) και $g = 5$ (έντονη γραμμή).



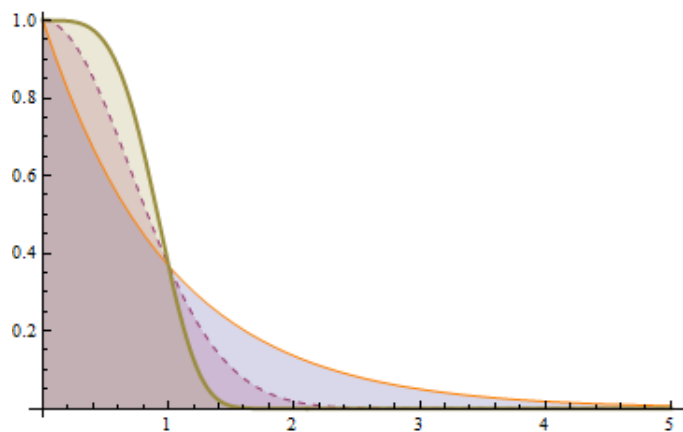
Σχήμα 5.13 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $g = 1$ και $c = 1, 2, 4$.

Στο Σχήμα 5.13 απεικονίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $g = 1$ και $c = 1$ (λεπτή πορτοκαλί γραμμή), $c = 2$ (διακεκομμένη γραμμή) και $c = 4$ (έντονη γραμμή).



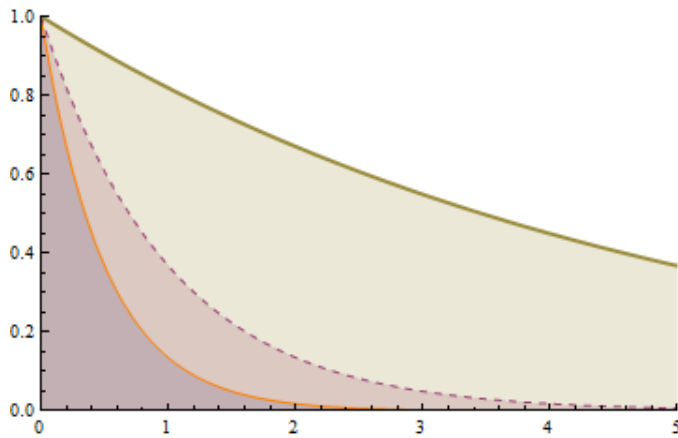
Σχήμα 5.14 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $c = 1$ και $g = 0.5, 1, 5$.

Στο Σχήμα 5.14 απεικονίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $c = 1$ και $g = 0.5$ (λεπτή πορτοκαλί γραμμή), $g = 1$ (διακεκομμένη γραμμή) και $g = 5$ (έντονη γραμμή).



Σχήμα 5.15 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $g = 1$ και $c = 1, 2, 4$.

Στο Σχήμα 5.15 απεικονίζεται η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Weibull στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $g = 1$ και $c = 1$ (λεπτή πορτοκαλί γραμμή), $c = 2$ (διακεκομμένη γραμμή) και $c = 4$ (έντονη γραμμή).



Σχήμα 5.16 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $c = 1$ και $g = 0.5, 1, 5$.

Στο Σχήμα 5.16 απεικονίζεται η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Weibull στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $c = 1$ και $g = 0.5$ (λεπτή πορτοκαλί γραμμή), $g = 1$ (διακεκομμένη γραμμή) και $g = 5$ (έντονη γραμμή).

Πριν προχωρήσουμε στην χρήση του Mathematica, για την εύρεση της 1ης και 2ης Κατανομής Ισορροπίας, καθώς και του Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής για την κάθε περίπτωση, θα βρούμε τα προαναφερθέντα ζητούμενα θεωρητικά.

1. Συνάρτηση Επιβίωσης της Κατανομής.

Ισχύει ότι

$$\bar{P}(y) = e^{-c^g}.$$

Για $c = 1, g = 2 \implies \bar{P}(y) = e^{(-y)^2}$.

Για αυτές τις παραμέτρους θα γίνουν οι παρακάτω υπολογισμοί.

2. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής.

Ισχύει ότι

$$mrlP(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{P(y)}.$$

Αρχικά θέλουμε να βρούμε το ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt$.

Ισχύει ότι

$$\int_0^\infty \bar{P}(t)dt = \int_0^y \bar{P}(t)dt + \int_y^\infty \bar{P}(t)dt.$$

Επομένως $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_0^y e^{-t^2} dt + \int_y^\infty e^{-t^2} dt$.

- Υπολογισμός του $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$. Ονομάζουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.
- $I^2 = (\int_0^\infty e^{-t^2} dt)^2 = (\int_0^\infty e^{-t^2} dt) \cdot (\int_0^\infty e^{-x^2} dx) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+x^2)} dt dx$.

Επίσης ισχύουν τα παρακάτω :

- Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων $r^2 = t^2 + x^2$.

- Jacobian Συντελεστής Διόρθωσης $rdrd\theta$.

Άρα $I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta$.

Συμβολίζω $u \rightarrow -r^2 \implies \frac{1}{2} du = -r dr$.

$$\implies I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^{(-r^2)}]_0^\infty d\theta = \frac{-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [0 - 1] d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Επομένως βρήκαμε ότι $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Υπολογισμός του $\int_0^y e^{-t^2} dt$.
Ισχύει ότι η Gauss Error Function ορίζεται από τον παρακάτω τύπο (Edward W.Ng , Murray Geller , 1968)

$$erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^y e^{-t^2} dt .$$

Άρα $\int_0^y e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot erf(y)$.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot erf(y) + \int_y^\infty e^{-t^2} dt \implies \int_y^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - erf(y)) .$$

Ισχύει ότι $1 - erf(y) = erfc(y)$.

(Οι συναρτήσεις $erf(y)$ και $erfc(y)$ υπάρχουν στο υπολογιστικό πακέτο Mathematica .)

Επομένως $\int_y^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot erfc(y)$.

Τελικά προκύπτει ότι $mrlP(y) = \frac{\int_y^\infty e^{-t^2} dt}{e^{-y^2}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot erfc(y)}{e^{-y^2}}$.

3. Δεξιά ουρά της 1ης Κατανομής Ισορροπίας .
Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t)dt}{\int_0^\infty \bar{P}(t)dt} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \text{erfc}(y)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \implies \bar{P}_1(y) = \text{erfc}(y) .$$

4. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 1ης Κατανομής Ισορροπίας .

$$\text{mrl}P_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t)dt}{\bar{P}_1(y)} = \frac{\int_y^\infty \text{erfc}(t)dt}{\text{erfc}(y)} .$$

- Υπολογισμός του $\int_y^\infty \text{erfc}(t)dt$.

$$\int_y^\infty \text{erfc}(t)dt = \int_y^\infty \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du \right] dt .$$

Αντικαθιστούμε $dv = dt$ και το u ισούται με τον όρο στο εσωτερικό ολοκλήρωμα.

Άρα ολοκληρώνοντας κατά μέλη $\int u dv = u - \int v du$.

Επομένως $v = t$ και το du γίνεται $\frac{-2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2}$.

Για τα παραπάνω αποτελέσματα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του Leibniz

$$\frac{d}{dt} \left[\int_a^b f(u)du \right] = \int_a^b \frac{d}{dt} f(u)du + f \frac{db}{dt} - f \frac{da}{dt} .$$

Τότε

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\int_t^\infty \frac{d}{dt} (e^{-u^2} du) + e^{-\infty^2} \cdot 0 - e^{-t^2} \cdot 1 \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[0 + 0 - e^{-t^2} \right] .$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_y^\infty \text{erfc}(t)dt &= \left[t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_t^\infty e^{-u^2} du \right]_y^\infty + \int_y^\infty t \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2} \right] dt \\ &= \left[t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_t^\infty e^{-u^2} du \right]_y^\infty - \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2} \right]_y^\infty \\ &= \left[0 - y \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_y^\infty e^{-u^2} du \right] - \left[0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \right] = -y \cdot \text{erfc}(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} . \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_y^\infty \text{erfc}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} - y \cdot \text{erfc}(y) .$$

Επομένως

$$\text{mrl}P_1(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} - y \cdot \text{erfc}(y)}{\text{erfc}(y)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2}}{\text{erfc}(y)} - y \implies \text{mrl}P_1(y) = \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi} \cdot \text{erfc}(y)} - y .$$

5. Δεξιά ουρά της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.
Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt}{\int_0^\infty \bar{P}_1(t) dt} = \frac{\int_y^\infty \text{erfc}(t) dt}{\int_0^\infty \text{erfc}(t) dt} .$$

Ισχύει ότι (Edward W.Ng , Murray Geller , 1968) $\int_0^\infty \text{erfc}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Άρα

$$\bar{P}_2(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} - y \cdot \text{erfc}(y)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \Rightarrow \bar{P}_2(y) = e^{-y^2} - \sqrt{\pi} \cdot y \cdot \text{erfc}(y) .$$

6. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.

$$mrlP_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_2(t) dt}{\bar{P}_2(y)} .$$

Ισχύουν τα εξής

$$\begin{aligned} \int_y^\infty \bar{P}_2(t) dt &= \int_y^\infty \left[e^{-t^2} - \sqrt{\pi} \cdot t \cdot \text{erfc}(t) \right] dt \\ &= \int_y^\infty e^{-t^2} dt - \sqrt{\pi} \cdot \int_y^\infty t \cdot \text{erfc}(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (1 - \text{erfc}(y)) - \sqrt{\pi} \cdot \int_y^\infty t \cdot \text{erfc}(t) dt . \end{aligned}$$

Η παράγωγος της $\text{erfc}(t)$ ισούται με $\frac{d}{dt} \text{erfc}(t) = \frac{-2 \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$.

$$\int_y^\infty t \cdot \left[\frac{-2 \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \right] dt = (y \cdot \text{erfc}(y)) - \int_y^\infty \text{erfc}(t) dt = (y \cdot \text{erfc}(y)) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} .$$

Επομένως

$$\int_y^\infty = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \text{erfc}(y) - \sqrt{\pi} \cdot \left(2y \text{erfc}(y) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} \right) .$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι

$$mrlP_2(y) = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \text{erfc}(y) - 2\sqrt{\pi} \cdot y \cdot \text{erfc}(y) + e^{-y^2}}{e^{-y^2} - \sqrt{\pi} \cdot y \cdot \text{erfc}(y)} .$$

Στην συνέχεια με την χρήση του Mathematica, (Παράρτημα : Εφαρμογή 5.3) θα βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα .

Για $c = 1, g = 2$, οι αποζημιώσεις εκφράζονται από την εξής συνάρτηση επιβίωσης $\bar{P}(y) = e^{-y^2}$.

Με μέση τιμή $m_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $mrlP(y) = \frac{1}{2} \cdot e^{y^2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot Erfc[y]$.

Η δεξιά ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών είναι η $\bar{P}_1(y) = Erfc[y]$.

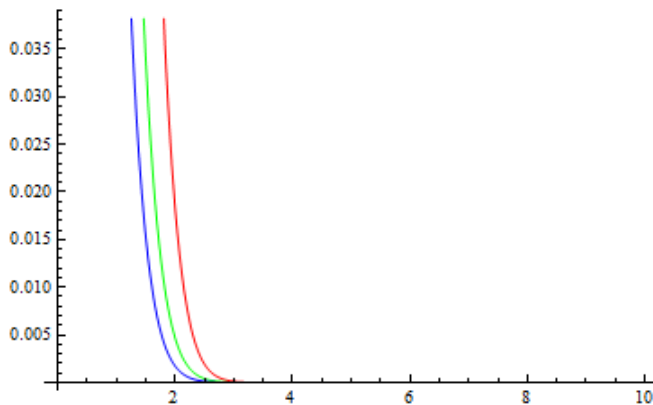
Η μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας ισούται με $\mu_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος

ζωής με $mrlP_1(y) = \frac{\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \cdot Erf[y]}{Erfc[y]}$.

Η 2η κατανομή ισορροπίας της κατανομής των αποζημιώσεων έχει δεξιά ουρά η οποία δίνεται από τον τύπο $\bar{P}_2(y) = \sqrt{\pi} \cdot (\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \cdot Erf[y])$.

Η μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας είναι ίση με $\mu_{2,1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος

ζωής με $mrlP_2(y) = \frac{-2 \cdot e^{-y^2} \cdot y + \sqrt{\pi} \cdot (1+2y^2) \cdot Erfc[y]}{4\sqrt{\pi} \cdot (\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \cdot Erf[y])}$.



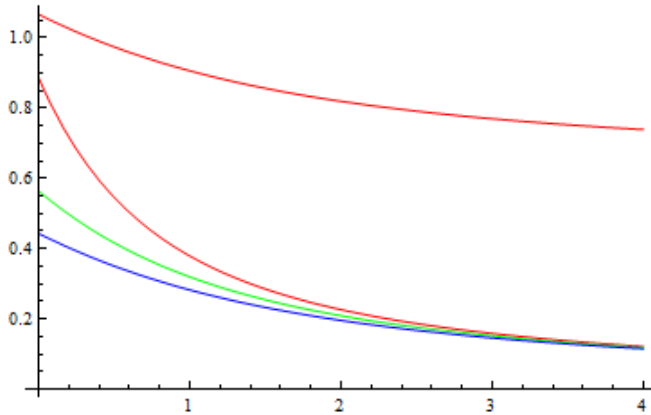
Σχήμα 5.17 :Διάγραμμα της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, της 1ης και 2ης κατανομής ισορροπίας.

Στο Σχήμα 5.17 βλέπουμε την μορφή των $\bar{P}(y)$ (κόκκινη γραμμή), $\bar{P}_1(y)$ (πράσινη γραμμή) και $\bar{P}_2(y)$ (μπλε γραμμή).

Ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών είναι ίσος με 2,12694.

Επιπλέον, η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας ισούται με $E(L) = 0,623566$.

Τέλος, η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y δίνεται από τη σχέση

$$E(V_y) = 0,623566 + \frac{-2 \cdot e^{-y^2} \cdot y + \sqrt{\pi} \cdot (1+2y^2) \cdot \text{Erfc}[y]}{4\sqrt{\pi} \cdot (\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \cdot \text{Erf}[y])}$$


Σχήμα 5.18 : Διάγραμμα των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής και της $E(V_y)$.

Στο Σχήμα 5.18 απεικονίζονται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων (κόκκινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας (πράσινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής των αποζημιώσεων (μπλε γραμμή) και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y (έντονη γραμμή). Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y είναι παράλληλη με τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας και μετατοπισμένη κατά τη μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας.

Κατανομή Γάμμα

Έστω μία τυχαία μεταβλητή Y με συνάρτηση κατανομής $P(y) = \frac{\gamma(a, by)}{\Gamma(a)}$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot y^{a-1} \cdot e^{-by}$,

όπου:

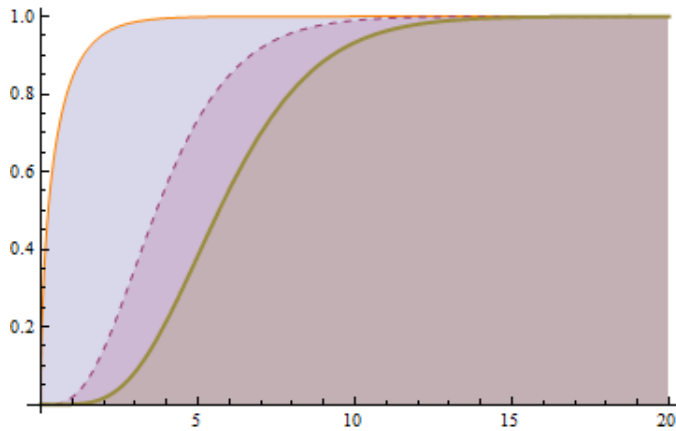
Συνάρτηση Γάμμα : $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} \cdot e^{-y} dy$.

Ελειπής Συνάρτηση Γάμμα : $\gamma(a, t) = \int_0^t y^{a-1} \cdot e^{-y} dy$.

Τότε, η Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους a, b . Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο $E(Y) = \frac{a}{b}$ και η διακύμανση από τον τύπο $Var(Y) = \frac{a}{b^2}$.

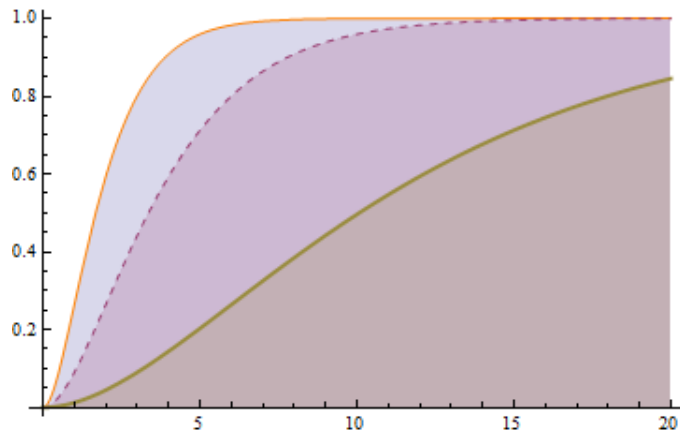
Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για την κατανομή Γάμμα.

- Η κατανομή Γάμμα αντιπροσωπεύει μια ποικιλία ασύμμετρων κατανομών, γεγονός το οποίο εξαρτάται από τις παραμέτρους a, b . Συγκεκριμένα :
 - $b < 1$: Συμπιέζει την $p(y)$ στον άξονα y .
 - $b = 1$: Προκύπτει η Τυπική Γάμμα κατανομή.
 - $b > 1$: Εκτείνει την $p(y)$ στον άξονα x .
 - $a \leq 1$: Η $p(y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.
 - $a \geq 1$: Η $p(y)$ είναι αύξουσα μέχρι ένα μέγιστο και μετά φθίνει.
- Για $a = 1$: $Gamma(1, b) \simeq Exponential(\frac{1}{b})$.
- Σχήματα



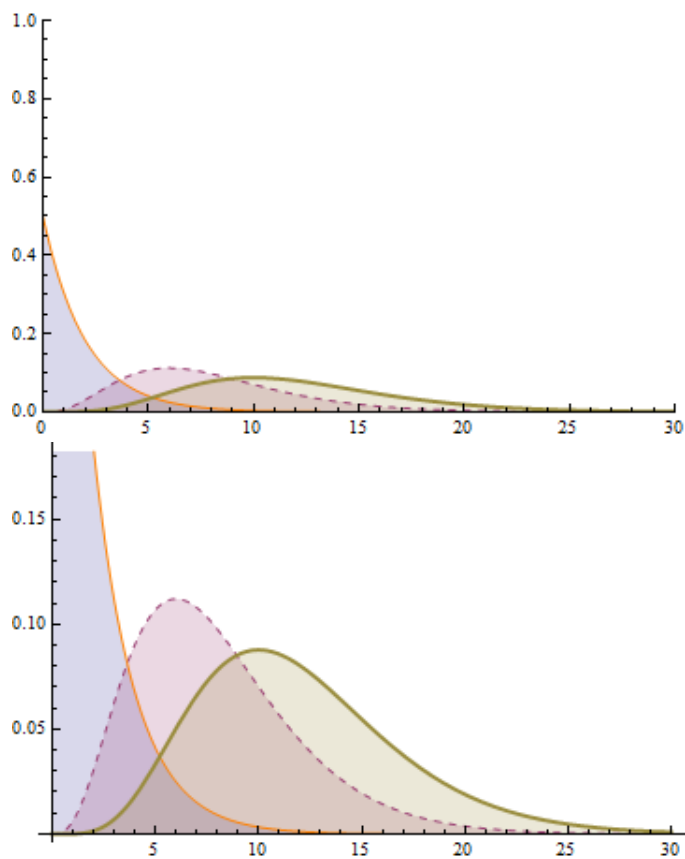
Σχήμα 5.19 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $b = 2$ και $a = 1, 4, 6$.

Στο Σχήμα 5.19 βλέπουμε τη συνάρτηση κατανομής της κατανομής Γάμμα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι $b = 2$ και $a = 1$ (λεπτή ποροκαλί γραμμή), $a = 4$ (διακεκομμένη γραμμή) και $a = 6$ (έντονη γραμμή).



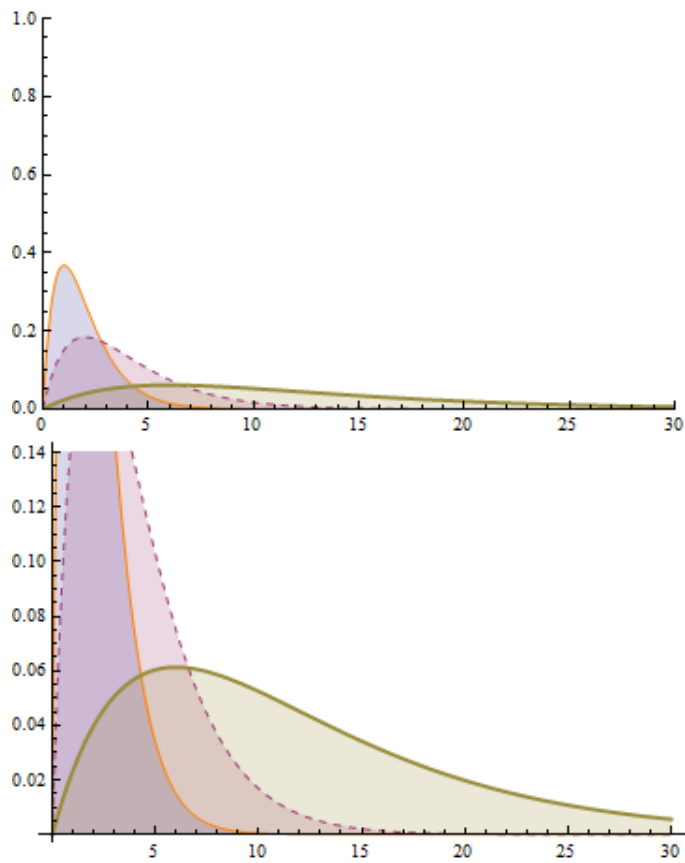
Σχήμα 5.20 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $a = 2$ και $b = 1, 2, 6$.

Στο Σχήμα 5.20 βλέπουμε τη συνάρτηση κατανομής της κατανομής Γάμμα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι $a = 2$ και $b = 1$ (λεπτή ποροκαλί γραμμή), $b = 2$ (διακεκομμένη γραμμή) και $b = 6$ (έντονη γραμμή).



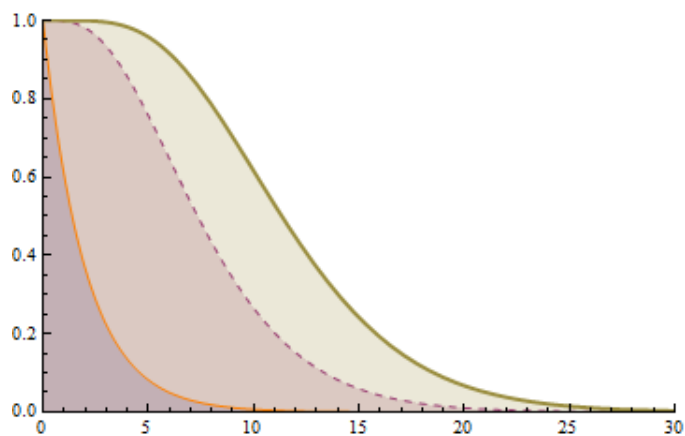
Σχήμα 5.21 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $b = 2$ και $a = 1, 4, 6$.

Στο Σχήμα 5.21 απεικονίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Γάμμα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $b = 2$ και $a = 1$ (λεπτή ποροκαλί γραμμή), $a = 4$ (διακεκομμένη γραμμή) και $a = 6$ (έντονη γραμμή).



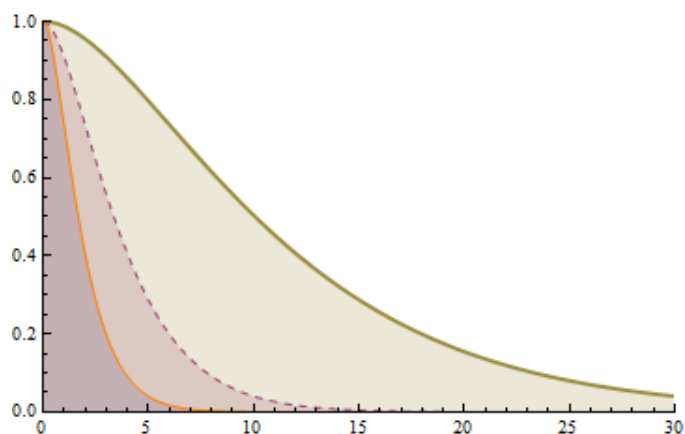
Σχήμα 5.22 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $a = 2$ και $b = 1, 2, 6$.

Στο Σχήμα 5.22 απεικονίζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Γάμμα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι $a = 2$ και $b = 1$ (λεπτή ποροκαλί γραμμή), $b = 2$ (διακεκομμένη γραμμή) και $b = 6$ (έντονη γραμμή).



Σχήμα 5.23 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $b = 2$ και $a = 1, 4, 6$.

Στο Σχήμα 5.23 βλέπουμε τη συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Γάμμα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι ίσοι με $b = 2$ και $a = 1$ (λεπτή ποροκαλί γραμμή), $a = 4$ (διακεκομένη γραμμή) και $a = 6$ (έντονη γραμμή).



Σχήμα 5.24 : Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $a = 2$ και $b = 1, 2, 6$.

Στο Σχήμα 5.24 απεικονίζεται η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής Γάμμα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι $a = 2$ και $b = 1$ (λεπτή ποροκαλί γραμμή), $b = 2$ (διακεκομένη γραμμή) και $b = 6$ (έντονη γραμμή).

Πριν προχωρήσουμε στην χρήση του Mathematica, για την εύρεση της 1ης και 2ης Κατανομής Ισορροπίας, καθώς και του Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής για την κάθε περίπτωση, θα βρούμε τα προαναφερθέντα ζητούμενα θεωρητικά. Η επίλυση θα γίνει για τις παραμέτρους $a = 3, b = 2$.

1. Συνάρτηση Επιβίωσης της Κατανομής.

$$\bar{P}(y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \int_y^\infty t^{a-1} \cdot e^{-bt} dt .$$

Για $a = 3, b = 2$ η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από τη σχέση $\bar{P}(y) = \frac{2^3}{\Gamma(3)} \cdot \int_y^\infty t^{3-1} \cdot e^{-2t} dt$.

Ισχύει ότι $\Gamma(n) = (n - 1)!$, στην περίπτωση που το n είναι ακέραιος αριθμός.

Επομένως $\bar{P}(y) = \frac{2^3}{(3-1)!} \cdot \int_y^\infty t^2 \cdot e^{-2t} dt = 4 \cdot \int_y^\infty t^2 \cdot e^{-2t} dt$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση $p(y) = \frac{2^3}{2!} \cdot y^2 \cdot e^{-2y} = 4 \cdot y^2 \cdot e^{-2y}$.

Ισχύει η σχέση $\bar{P}(y) = \int_y^\infty p(t) dt$.

Άρα $\bar{P}(y) = \int_y^\infty 4 \cdot t^2 \cdot e^{-2t} dt = -2[\int_y^\infty t^2(e^{-2t})' dt]$

$= -2[[t^2 \cdot e^{-2t}]_y^\infty - 2 \int_y^\infty t \cdot e^{-2t} dt] = -2[0 - y^2 \cdot e^{-2y} - 2 \int_y^\infty t \cdot e^{-2t} dt]$

$= 2 \cdot y^2 \cdot e^{-2y} + 4 \int_y^\infty t \cdot e^{-2t} dt = 2 \cdot y^2 \cdot e^{-2y} - 2 \int_y^\infty t \cdot (e^{-2t})' dt$

$= 2 \cdot y^2 \cdot e^{-2y} - 2[[t \cdot e^{-2t}]_y^\infty - \int_y^\infty e^{-2t} dt] = 2 \cdot y^2 \cdot e^{-2y} + 2 \cdot y \cdot e^{-2y} + e^{-2y} = e^{-2y} \cdot (2y^2 + 2y + 1)$.

Επομένως $\bar{P}(y) = e^{-2y} \cdot (2y^2 + 2y + 1)$.

2. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής.

Ισχύει ότι

$$mrlP(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\bar{P}(y)} .$$

Αρχικά θα λύσουμε το ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt = \int_y^\infty e^{-2t} \cdot (2t^2 + 2t + 1) dt$ μέσω του Mathematica.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί με την μορφή $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt = \int_y^\infty 2t^2 \cdot e^{-2t} dt + \int_y^\infty 2t \cdot e^{-2t} dt + \int_y^\infty e^{-2t} dt$.

- Το $\int_y^\infty 2t^2 \cdot e^{-2t} dt$ ισούται με $\frac{e^{-2y}}{2} \cdot (2y^2 + 2y + 1)$.
- Το $\int_y^\infty 2t \cdot e^{-2t} dt$ ισούται με $\frac{e^{-2y}}{2} \cdot (2y + 1)$.
- Το $\int_y^\infty e^{-2t} dt$ είναι ίσο με $\frac{e^{-2y}}{2}$.

Επομένως

$$\int_y^\infty \bar{P}(t) dt = \frac{e^{-2y}}{2} \cdot (2y^2 + 2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{2} \cdot (2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{2} = \frac{e^{-2y}}{2} \cdot (2y^2 + 4y + 3).$$

Άρα

$$mrlP(y) = \frac{2y^2 + 4y + 3}{4y^2 + 4y + 2}.$$

3. Δεξιά ουρά της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.

Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}(t) dt}{\int_0^\infty \bar{P}(t) dt}.$$

Αντικαθιστώντας $y \Rightarrow 0$ στο ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt$ προκύπτει ότι $\int_y^\infty \bar{P}(t) dt = \frac{3}{2}$.

Επομένως η 1η Κατανομή Ισορροπίας της Συνάρτησης Επιβίωσης ισούται με

$$\bar{P}_1(y) = \frac{e^{-2y}}{3} \cdot (2y^2 + 4y + 3).$$

4. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 1ης Κατανομής Ισορροπίας.

$$mrlP_1(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt}{\bar{P}_1(y)}.$$

- Το $\int_y^\infty \frac{2}{3}t^2 \cdot e^{-2t} dt$ ισούται με $\frac{e^{-2y}}{6} \cdot (2y^2 + 2y + 1)$.
- Το $\int_y^\infty \frac{4}{3}t \cdot e^{-2t} dt$ ισούται με $\frac{e^{-2y}}{3} \cdot (2y + 1)$.
- Το $\int_y^\infty e^{-2t} dt$ είναι ίσο με $\frac{e^{-2y}}{2}$.

Επομένως

$$\int_y^\infty \bar{P}_1(t) dt = \frac{e^{-2y}}{6} \cdot (2y^2 + 2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{3} \cdot (2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{2} = e^{-2y} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot (2y^2 + 2y + 1) + \frac{1}{3} \cdot (2y + 1) + \frac{1}{2} \right) = e^{-2y} \cdot \left(\frac{y^2}{3} + y + 1 \right).$$

Άρα

$$mrlP_1(y) = \frac{y^2+3y+3}{2y^2+4y+3}.$$

5. Δεξιά ουρά της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.
Δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_1(t)dt}{\int_0^\infty \bar{P}_1(t)dt}.$$

Αντικαθιστώντας $y \Rightarrow 0$ στο ολοκλήρωμα $\int_y^\infty \bar{P}_1(t)dt$ προκύπτει ότι $\int_y^\infty \bar{P}_1(t)dt = 1$.

Επομένως η 2η Κατανομή Ισορροπίας της Συνάρτησης Επιβίωσης ισούται με

$$\bar{P}_2(y) = \frac{e^{-2y}}{3} \cdot (y^2 + 3y + 3).$$

6. Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής της 2ης Κατανομής Ισορροπίας.

$$mrlP_2(y) = \frac{\int_y^\infty \bar{P}_2(t)dt}{\bar{P}_2(y)}.$$

- Το $\int_y^\infty \frac{1}{3}t^2 \cdot e^{-2t} dt$ ισούται με $\frac{e^{-2y}}{12} \cdot (2y^2 + 2y + 1)$.
- Το $\int_y^\infty t \cdot e^{-2t} dt$ ισούται με $\frac{e^{-2y}}{4} \cdot (2y + 1)$.
- Το $\int_y^\infty e^{-2t} dt$ είναι ίσο με $\frac{e^{-2y}}{2}$.

Επομένως

$$\int_y^\infty \bar{P}_2(t)dt = \frac{e^{-2y}}{12} \cdot (2y^2 + 2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{4} \cdot (2y + 1) + \frac{e^{-2y}}{2} = e^{-2y} \cdot \left(\frac{y^2}{6} + \frac{y}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2y}}{6} \cdot (y^2 + 4y + 5).$$

Άρα

$$mrlP_2(y) = \frac{y^2+4y+5}{2y^2+6y+6}.$$

Με την χρήση του Mathematica θα βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα για τις παραμέτρους $a = 3, b = 2$, (Παράρτημα : Εφαρμογή 5.4).

Στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις εκφράζονται από την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $a = 3, b = 2$, η δεξιά ουρά της κατανομής δίνεται από τη σχέση $\bar{P}(y) = e^{-2y} \cdot (2y^2 + 2y + 1)$.

Η μέση τιμή ισούται με $m_1 = 6$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP(y) = \frac{2y^2+4y+3}{4y^2+4y+2}$.

Η δεξιά ουρά της 1ης κατανομής της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από τον τύπο

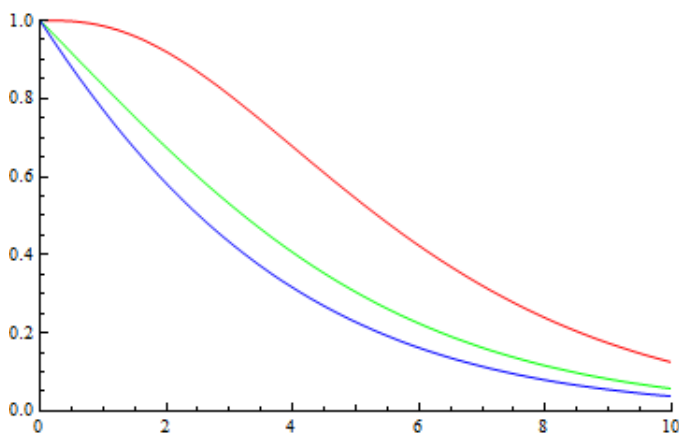
$$\bar{P}_1(y) = \frac{e^{-2y}}{3} \cdot (2y^2 + 4y + 3) .$$

Η μέση τιμή της $P_1(y)$ είναι ίση με $\mu_{1,1} = 4$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP_1(y) = \frac{y^2+3y+3}{2y^2+4y+3}$.

Τέλος, η δεξιά ουρά της 2ης κατανομής της κατανομής των αποζημιώσεων δίνεται από τον τύπο

$$\bar{P}_2(y) = \frac{e^{-2y}}{3} \cdot (y^2 + 3y + 3) .$$

Η μέση τιμή της $P_2(y)$ δίνεται από την σχέση $\mu_{2,1} = \frac{10}{3}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP_2(y) = \frac{y^2+4y+5}{2y^2+6y+6}$.

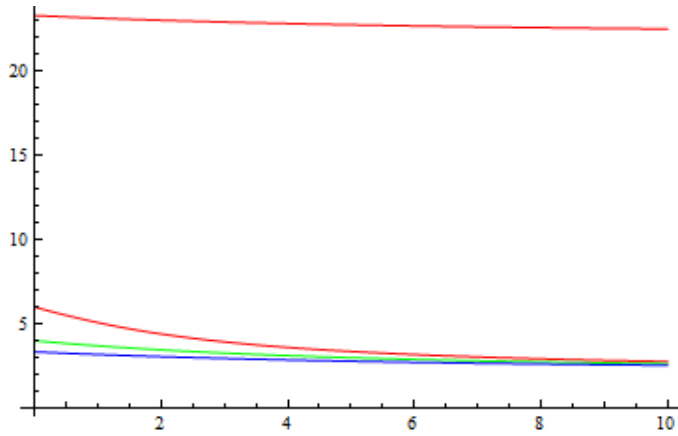


Σχήμα 5.25 : Διάγραμμα της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, της 1ης και 2ης κατανομής ισορροπίας.

Στο Σχήμα 5.25 απεικονίζεται η μορφή των $\bar{P}(y)$ (κόκκινη γραμμή), $\bar{P}_1(y)$ (πράσινη γραμμή) και $\bar{P}_2(y)$ (μπλε γραμμή).

Η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι ίση με $E(L) = 20$.

Με βάση τα παραπάνω, η μέση τιμή της τυχαιάς μεταβλητής V_y ισούται με $E(V_y) = 20 + mrlP_2(y) = \frac{y^2+4y+5}{2y^2+6y+6}$.



Σχήμα 5.26 : Διάγραμμα των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής και της $E(V_y)$.

Στο Σχήμα 5.26 απεικονίζονται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων (κόκκινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας (πράσινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής των αποζημιώσεων (μπλε γραμμή) και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y (έντονη γραμμή). Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y είναι παράλληλη με τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας και μετατοπισμένη κατά τη μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας. Επίσης είναι σχεδόν σταθερή καθώς είναι σχεδόν παράλληλη στον άξονα x .

Μείξη Εκθετικών Κατανομών

Θα μελετήσουμε τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη δύο εκθετικών κατανομών με βάρη $q = \frac{1}{2}$, $1 - q = \frac{1}{2}$ και παραμέτρους $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Αρχικά θα βρούμε αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή (κλασικό μοντέλο), και έπειτα θα δούμε δύο παραδείγματα όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Weibull και την κατανομή Γάμμα (ανανεωτικό μοντέλο). Οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των παρακάτω αποτελεσμάτων δίνονται στο Παράρτημα : Εφαρμογή 5.5.

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή

Θεωρώντας ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη δύο εκθετικών κατανομών με βάρη $q = \frac{1}{2}$, $1 - q = \frac{1}{2}$ και παραμέτρους $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από τη σχέση $\bar{P}(y) = \frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-3y}}{2}$.

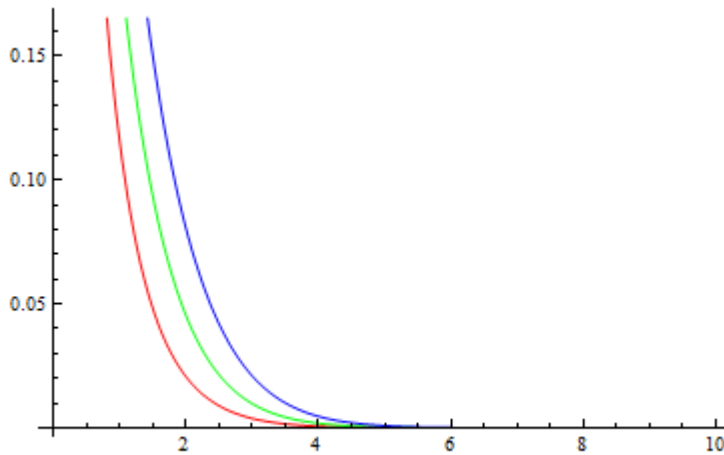
Η μέση τιμή ισούται με $m_1 = \frac{2}{3}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP(y) = \frac{e^{-3y} \cdot (1 + 3e^{2y})}{6 \cdot (\frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-3y}}{2})}$.

Η συνάρτηση επιβίωσης της 1ης κατανομής ισορροπίας (κατανομής των κλιμακωτών υψών) εκφράζεται από τη σχέση $\bar{P}_1(y) = \frac{1}{4} \cdot e^{-3y} \cdot (1 + 3e^{2y})$.

Η μέση τιμή είναι ίση με $\mu_{1,1} = \frac{5}{6}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP_1(y) = \frac{1 + 9e^{2y}}{3 \cdot (1 + 3e^{2y})}$.

Η συνάρτηση επιβίωσης της 2ης κατανομής ισορροπίας δίνεται από τη σχέση $\bar{P}_2(y) = \frac{1}{10} \cdot e^{-3y} \cdot (1 + 9e^{2y})$.

Η μέση τιμή είναι ίση με $\mu_{2,1} = \frac{14}{15}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP_2(y) = \frac{1 + 27e^{2y}}{3 \cdot (1 + 9e^{2y})}$.

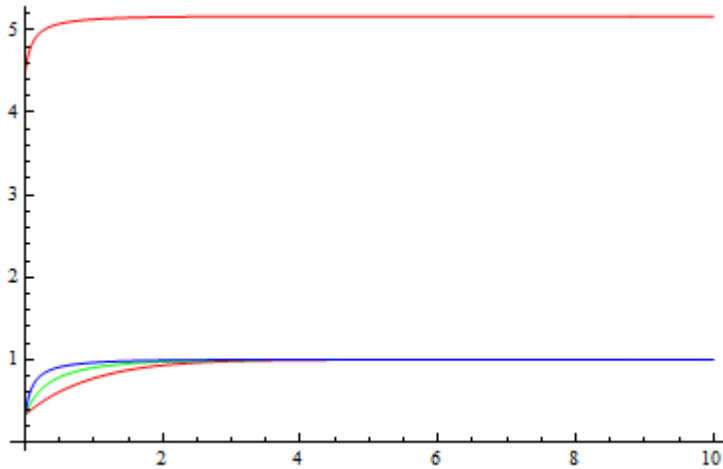


Σχήμα 5.27 : Διάγραμμα της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, της 1ης και 2ης κατανομής ισορροπίας.

Στο Σχήμα 5.27 απεικονίζεται η μορφή των $\bar{P}(y)$ (κόκκινη γραμμή), $\bar{P}_1(y)$ (πράσινη γραμμή) και $\bar{P}_2(y)$ (μπλε γραμμή).

Η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι ίση με $E(L) = 4,16667$.

Με βάση τα παραπάνω η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y είναι ίση με $E(V_y) = 4,16667 + \frac{1+27e^{2y}}{3(1+9e^{2y})}$.



Σχήμα 5.28 : Διάγραμμα των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής και της $E(V_y)$.

Στο Σχήμα 5.28 απεικονίζονται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων (κόκκινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας (πράσινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής των αποζημιώσεων (μπλε γραμμή) και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y (έντονη γραμμή). Η μέση τιμή της V_y είναι παράλληλη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας και μετατοπισμένη κατά τη μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας. Επίσης, παρατηρούμε ότι μετά από το σημείο 3 του άξονα x οι μέσοι υπολειπόμενοι χρόνοι ζωής και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y είναι σταθεροί καθώς είναι παράλληλοι ως προς τον άξονα x .

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή Weibull

Οι αποζημιώσεις ακολουθούν μείξη δύο εκθετικών κατανομών με βάρη $q = \frac{1}{2}$, $1-q = \frac{1}{2}$ και παραμέτρους $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, επομένως η συνάρτηση επιβίωσης δίνεται από τη σχέση $\bar{P}(y) = \frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-3y}}{2}$.

Η μέση τιμή ισούται με $m_1 = \frac{2}{3}$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlP(y) = \frac{e^{-3y} \cdot (1+3e^{2y})}{6 \cdot (\frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-3y}}{2})}$.

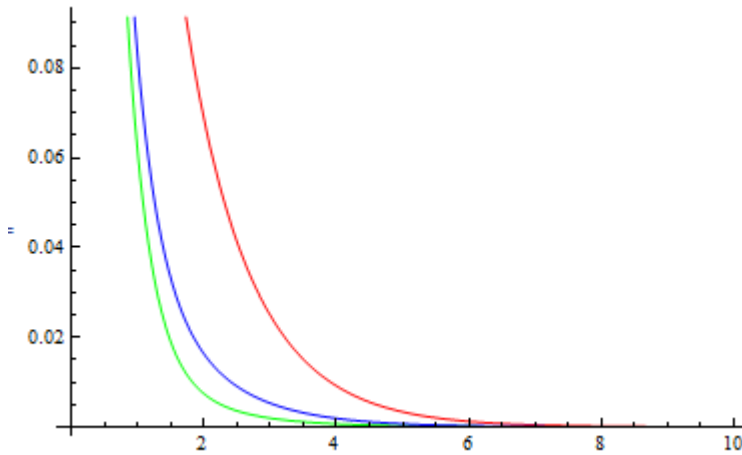
Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εκφράζονται από μία κατανομή Weibull με παραμέτρους $c = 1$, $g = 5$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση $k(y) = \frac{e^{-\frac{y}{5}}}{5}$. Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace των ενδιάμεσων χρόνων ισούται με $\tilde{k}(s) = \frac{1}{1+5s}$.

Τα κλιμακωτά ύψη εκφράζονται επίσης από μία μείξη δύο εκθετικών κατανομών με ουρά κατανομής $\bar{F}(y) = 0,037406e^{-y} + 0,962593e^{-3y}$.

Η μέση τιμή ισούται με $\mu_{1,1} = 0,358271$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlF(y) = \frac{e^{-3y} \cdot (0,320864 + 0,037406e^{2y})}{0,962593e^{-3y} + 0,037406e^{-y}}$.

Η συνάρτηση επιβίωσης της 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών δίνεται από τη σχέση $\bar{F}_1(y) = 0,104566e^{-y} + 0,895578e^{-3y}$.

Η μέση τιμή είναι ίση με $\mu_{2,1} = 0,40294$ και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής με $mrlF_1(y) = \frac{0,358271 \cdot (0,29853 + 0,104409e^{2y})}{0,320864 + 0,037406e^{2y}}$.



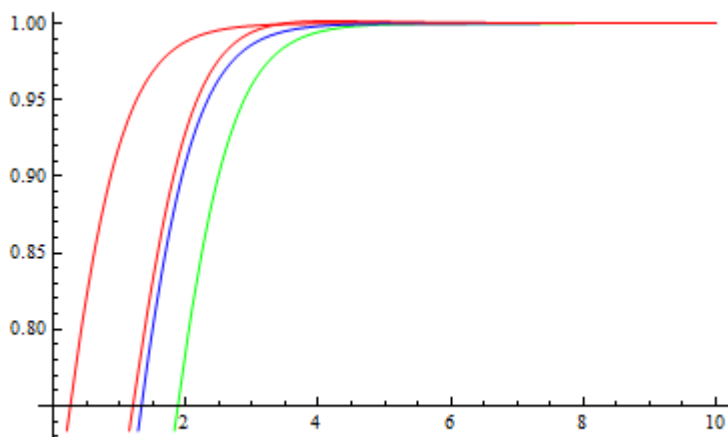
Σχήμα 5.29 : Διάγραμμα της συνάρτησης επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων, της κατανομής των κλιμακωτών υψών και 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών.

Στο Σχήμα 5.29 απεικονίζεται η μορφή των $\bar{P}(y)$ (κόκκινη γραμμή), $\bar{F}(y)$ (πράσινη γραμμή) και $\bar{F}_1(y)$ (μπλε γραμμή).

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με $\psi(u) = 0,026865e^{-2,90499u} + 0,106468e^{-0,895013u}$.

Η μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας δίνεται από τον τύπο $E(L) = \int_y^\infty \psi(t)dt$ και ισούται με $E(L) = 0,009248e^{-2,90499y} + 0,118956e^{-0,895013y}$.

Με βάση τα παραπάνω η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y είναι ίση με $E(V_y) = 0,009248e^{-2,90499y} + 0,118956e^{-0,895013y} + \frac{0,358271 \cdot (0,29853 + 0,104409e^{2y})}{0,320864 + 0,0374068e^{2y}}$.



Σχήμα 5.30 : Διάγραμμα των μέσων υπολειπόμενων χρόνων ζωής και της $E(V_y)$.

Στο Σχήμα 5.30 απεικονίζονται ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων (κόκκινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των κλιμακωτών υψών (πράσινη γραμμή), ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής των κλιμακωτών υψών (μπλε γραμμή) και η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής V_y (έντονη γραμμή).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. Σημειώσεις Κ.Πολίτη (2007), μάθημα “ Θεωρία Χρεοκοπίας ”, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
2. Σημειώσεις Ε. Χατζηκωνσταντινίδη (2009), μάθημα “ Θεωρία Κινδύνου ΙΙ ”, ΠΜΣ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
3. Χρυσοφίνου Ο. (2011), “ Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελιξίες ”, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. Psarrakos, G. (2012), “ On the Integrated Tail of the Deficit in the Renewal Risk Model ”, Submitted.
2. Psarrakos, G. (2013), “ On the Integrated Gerber-Shiu Penalty Function ”, Preprint.
3. Willmot, G. (2002), “ Compound Geometric Residual Lifetime Distributions and the Deficit at Ruin ”, Insurance: Mathematics and Economics 30, 421-438.
4. Thorin, O. (1974), “ Some Comments of the Sparre Andersen Model in the Risk Theory ”, ASTIN Bulletin: International journal for actuarial studies in non-life insurance and risk theory, 104.
5. Gerber, H. Shiu, E. (1998), “ On the Time Value of Ruin ”, North American Actuarial Journal 2, 48-78.
6. Dickson, D. Hipp, C. (2001), “ On the Time of Ruin for Erlang (2) Risk Processes ”, Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-344.
7. Gerber, H. , Goovaerts, M.J. Kaas, R. (1987), “ On the Probability and Severity of Ruin ”, ASTIN Bulletin 17, 151-163.
8. Asmussen, S. (1987), “ Applied Probability and Queues ”, Wiley, New York.
9. Burneck, K., Misiolek, A. and Weron, R. (2010), “ Loss Distributions ”, MPRA Paper 22163, University Library of Munich, Germany.
10. Straub, W.O. (2009), “ A Brief Look at Gaussian Integrals ”, Pasadena, California.
11. Conrad, K. (2010), “ The Gaussian Integral ”.
12. Lehtinen, N.G. (2010), “ Error Functions ”.
13. Ng Edward W. and Geller, M. (1968), “ A Table of Integrals of the Error Functions ”, National Bureau of Standards.

14. Guess, F. and Proschan, F. (1985), " Mean Residual Life: Theory and Applications " , North Carolina State Univeristy and Florida State University, FSU Statistics Report M702 AFOSR Technical Report No. 85-178.
15. Lin, X. and Willmot, G. (1999), " Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory " ,Insurance: Mathematic and Economics 25, No. 63-84.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράδειγμα 4.1

1. Επιλογή παραμέτρων. :

```
λ = 2;  
c = 3;  
λ1 = 1; λ2 = 4;  
δ = 0;  
w1 = 1 / 2; w2 = 1 / 2;
```

2. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μείξη δύο εκθετικών κατανομών. :

```
p[y_] := w1 * λ1 * Exp[-λ1 * y] + w2 * λ2 * Exp[-λ2 * y]  
p[y]  
 $2 e^{-4y} + \frac{e^{-y}}{2}$ 
```

3. Μέση τιμή της μείξης δύο εκθετικών κατανομών. :

```
mean[y] = Integrate[y * p[y], {y, 0, Infinity}]  
  
 $\frac{5}{8}$ 
```

4. Ροπογεννήτρια της μείξης δύο εκθετικών κατανομών. :

```
MY[t_] := w1 * (λ1 / (λ1 - t)) + w2 * (λ2 / (λ2 - t))  
MY[t]  
 $\frac{1}{2(1-t)} + \frac{2}{4-t}$ 
```

5. Υπολογισμός του περιθωρίου ασφαλείας. :

$$\theta = c / (\lambda * \text{mean}[y]) - 1$$

$$\frac{7}{5}$$

6. Επίλυση της εξίσωσης του Lundberg . :

$$\text{Solve}[1 + (1 + \theta) * r * \text{mean}[y] == \text{MY}[r], r]$$

$$\{ \{r \rightarrow 0\}, \{r \rightarrow \frac{1}{6} (13 - \sqrt{85})\}, \{r \rightarrow \frac{1}{6} (13 + \sqrt{85})\} \}$$

Αποθηκεύω τις ρίζες r_1, r_2 :

$$r1 = 1/6 * (13 - \text{Sqrt}[85]) // N$$

$$r2 = 1/6 * (13 + \text{Sqrt}[85]) // N$$

$$0.630076$$

$$3.70326$$

7. Επίλυση του συστήματος $C_1 + C_2 = \frac{1}{1+\theta}$ και $r_1 \cdot C_1 + r_2 \cdot C_2 = \frac{\theta}{(1+\theta)^2 \cdot m_1}$. :

$$A = \{\{1, 1\}, \{0.630076, 3.70326\}\};$$

$$b = \{1 / (1 + \theta), \theta / ((1 + \theta)^2 * (5 / 8))\};$$

$$\text{sol} = \text{Solve}[A, b]$$

$$\text{Solve}[\{\{1, 1\}, \{0.630076, 3.70326\}\}, \{\frac{5}{12}, \frac{7}{18}\}]$$

Αποθηκεύω τις λύσεις C_1, C_2 :

$$C1 = 5/12$$

$$C2 = 7/18$$

8. Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας. :

$$\Psi[u] := C1 * \text{Exp}[-\lambda1 * u] + C2 * \text{Exp}[-\lambda2 * u]$$
$$\Psi[u]$$

$$\frac{7 e^{-4u}}{18} + \frac{5 e^{-u}}{12}$$

Εφαρμογή 4.2

1. Επιλογή παραμέτρων .:

$$q = 1/2;$$

$$\lambda_1 = 2;$$

$$\lambda_2 = 3;$$

$$\lambda = 6;$$

$$c = 1/4;$$

$$\delta = 0;$$

2. Ουρά της κατανομής της μείξης δύο εκθετικών κατανομών. :

$$\begin{aligned} \text{tailP}[y] &:= q * \text{Exp}[-\lambda_1 * y] + (1 - q) * \text{Exp}[-\lambda_2 * y] \\ \text{tailP}[y] \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-3y}}{2} + \frac{e^{-2y}}{2}$$

3. Μέση τιμή της μείξης δύο εκθετικών κατανομών. :

$$E(Y) = (q / \lambda_1) + ((1 - q) / \lambda_2)$$

$$\frac{5}{12}$$

4. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μείξη δύο εκθετικών κατανομών. :

$$\begin{aligned} p[y] &:= q * \lambda_1 * \text{Exp}[-\lambda_1 * y] + (1 - q) * \lambda_2 * \text{Exp}[-\lambda_2 * y] \\ p[y] \end{aligned}$$

$$\frac{3 e^{-3y}}{2} + e^{-2y}$$

5. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των αποζημιώσεων. :

```
Laplace[s_] := LaplaceTransform[p[y], y, s]
Laplace[s]
```

$$\frac{1}{2+s} + \frac{3}{2(3+s)}$$

6. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων. :

```
Wpdf = PDF[WeibullDistribution[1, 3], y]
```

$$\begin{cases} \frac{e^{-y/3}}{3} & y > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
k[y] = (Exp[-(y/3)]) / 3
```

$$\frac{e^{-y/3}}{3}$$

7. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων. :

```
kLaplace[s_] := LaplaceTransform[Wpdf, y, s]
kLaplace[s]
```

$$\frac{1}{1+3s}$$

8. Επίλυση της εξίσωσης Lundberg για την εύρεση των ριζών r_1, r_2 . :

```
Solve[λ1 + λ2 - s == (q * λ1 + (1 - q) * λ2) * kLaplace[s] + (λ1 * λ2 * (1 - kLaplace[s])) / s, s]
```

$$\left\{ \left\{ s \rightarrow \frac{1}{6} (14 - \sqrt{10}) \right\}, \left\{ s \rightarrow \frac{1}{6} (14 + \sqrt{10}) \right\} \right\}$$

9. Αποθήκευση των ριζών r_1, r_2 . :

```
r1 = 1.80628
r2 = 2.86038
1.80628
2.86038
```

10. Μετασχηματισμός Laplace της εξίσωσης του Lundberg. :

```
LundLaplace[s_] := (r1 * r2 * (s + λ1) * (s + λ2)) / (λ1 * λ2 * (s + r1) * (s + r2))
LundLaplace[s]

0.861108 (2 + s) (3 + s)
-----
(1.80628 + s) (2.86038 + s)
```

11. Μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας. :

```
ruinLaplace[s_] := (1 - LundLaplace[s]) / s
ruinLaplace[s]

1 - 0.861108 (2+s) (3+s)
-----
s (1.80628+s) (2.86038+s)
```

12. Εύρεση των σταθερών C_1, C_2 . :

```
C1 = (r2 * (λ1 - r1) * (λ2 - r1)) / (λ1 * λ2 * (r2 - r1))
C2 = (r1 * (r2 - λ1) * (λ2 - r2)) / (λ1 * λ2 * (r2 - r1))
0.104585
0.0343076
```

13. Εύρεση του q_1 . :

$$q_1 = (\lambda_2 * (\lambda_1 - r_1) * (\lambda_2 - r_2)) / ((\lambda_2 - \lambda_1) * ((\lambda_1 * \lambda_2) - (r_1 * r_2)))$$
$$0.0973676$$

14. Ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών. :

$$\text{tailF}[\underline{y}] := q_1 * \text{Exp}[-\lambda_1 * \underline{y}] + (1 - q_1) * \text{Exp}[-\lambda_2 * \underline{y}]$$
$$\text{tailF}[\underline{y}]$$
$$: 0.902632 e^{-3\underline{y}} + 0.0973676 e^{-2\underline{y}}$$

15. Εύρεση του $q_1[u]$. :

$$q_1[u] = (q_1 * \text{Exp}[-\lambda_1 * u]) / ((q_1 * \text{Exp}[-\lambda_1 * u]) + ((1 - q_1) * \text{Exp}[-\lambda_2 * u]))$$
$$\frac{0.0973676 e^{-2u}}{0.902632 e^{-3u} + 0.0973676 e^{-2u}}$$

16. Εύρεση του $q[u]$. :

$$a = (q1 * (\lambda1 * \lambda2 - r1 * r2)) / (C1 * \text{Exp}[-r1 * u] + C2 * \text{Exp}[-r2 * u])$$

$$\frac{0.0811416}{0.0343076 e^{-2.86038 u} + 0.104585 e^{-1.80628 u}}$$

$$b = (\text{Exp}[-\lambda1 * u]) / (\lambda1 * \lambda2) + (C1 * (\text{Exp}[-r1 * u] + \text{Exp}[-\lambda1 * u])) / (r2 * (\lambda1 - r1)) + (C2 * (\text{Exp}[-\lambda1 * u] - \text{Exp}[-r2 * u])) / (r1 * (r2 - \lambda1))$$

$$\frac{e^{-2u}}{6} + 0.0220757 (-e^{-2.86038 u} + e^{-2u}) + 0.188742 (e^{-2u} + e^{-1.80628 u})$$

$$qu = a * b$$

$$\frac{0.0811416 \left(\frac{e^{-2u}}{6} + 0.0220757 (-e^{-2.86038 u} + e^{-2u}) + 0.188742 (e^{-2u} + e^{-1.80628 u}) \right)}{0.0343076 e^{-2.86038 u} + 0.104585 e^{-1.80628 u}}$$

17. Εύρεση της κατανομής του ελλείμματος δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία. :

$$\text{tailGu}[y_] := qu * \text{Exp}[-\lambda1 * y] + (1 - qu) * \text{Exp}[-\lambda2 * y]$$

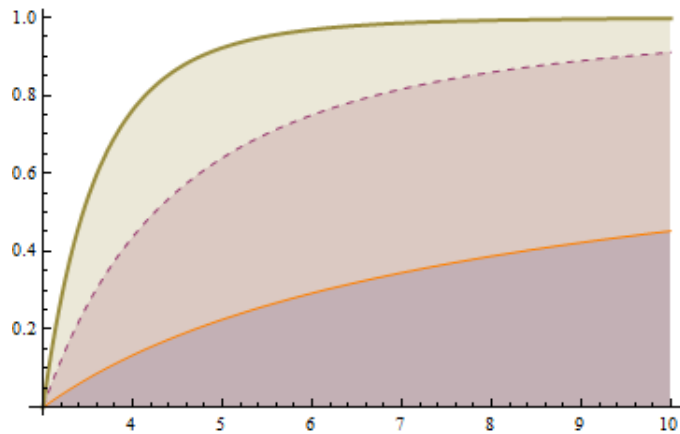
$$\text{tailGu}[y]$$

$$\frac{0.0811416 e^{-2y} \left(\frac{e^{-2u}}{6} + 0.0220757 (-e^{-2.86038 u} + e^{-2u}) + 0.188742 (e^{-2u} + e^{-1.80628 u}) \right)}{0.0343076 e^{-2.86038 u} + 0.104585 e^{-1.80628 u}} + e^{-3y} \left(1 - \frac{0.0811416 \left(\frac{e^{-2u}}{6} + 0.0220757 (-e^{-2.86038 u} + e^{-2u}) + 0.188742 (e^{-2u} + e^{-1.80628 u}) \right)}{0.0343076 e^{-2.86038 u} + 0.104585 e^{-1.80628 u}} \right)$$

Εφαρμογή 5.1 : Pareto Distribution

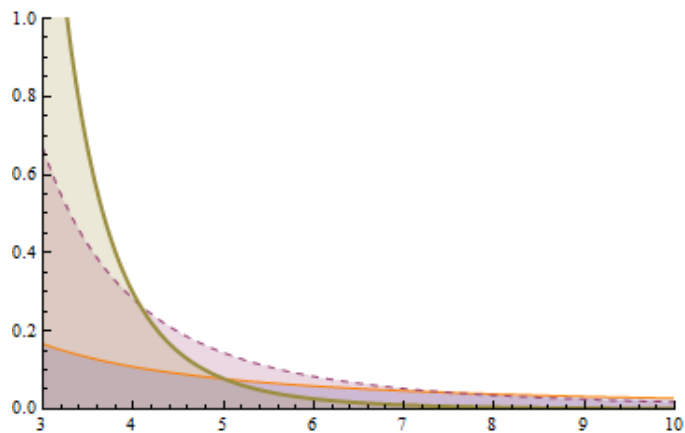
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $k = 3$ και $a = 0.5, 2, 5$.

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[ParetoDistribution[3,  $\alpha + 1$ ],  $y$ ], { $\alpha$ , {.5, 2, 5}}],  
{ $y$ , 3, 10}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



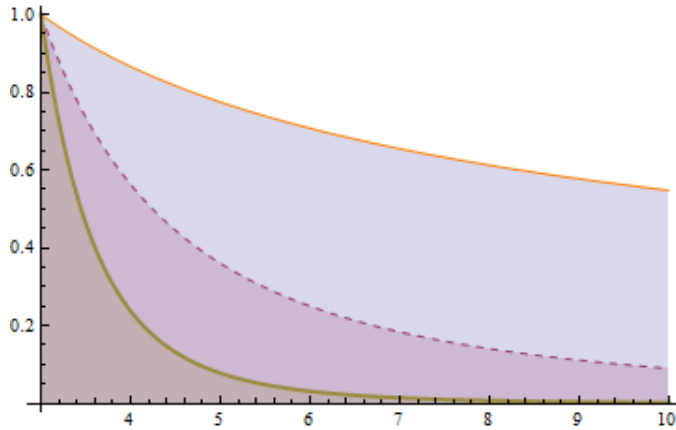
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $k = 3$ και $a = 0.5, 2, 5$.

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[ParetoDistribution[3,  $\alpha + 1$ ],  $y$ ], { $\alpha$ , {.5, 2, 5}}],  
{ $y$ , 3, 10}, PlotRange -> {{3, 10}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},  
Filling -> Axis]
```



- Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $k = 3$ και $a = 0.5, 2, 5$.

```
Plot[Evaluate@Table[SurvivalFunction[ParetoDistribution[3,  $\alpha + 1$ ],  $y$ ],
  { $\alpha$ , {.5, 2, 5}}, { $y$ , 3, 10}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



1. Επιλογή παραμέτρων .:

```
k = 3; a = 5;
```

2. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
tailP[ $y_$ ] :=  $k^{a+1} / (k+y)^{a+1}$ 
```

```
tailP[ $y$ ]
```

$$\left\{ \frac{729}{(3+y)^6} \right\}$$

3. Μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
meanP = Integrate[tailP[ $y$ ], { $y$ , 0, Infinity}]
```

$$\left\{ \frac{3}{5} \right\}$$

4. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων . :

$$\begin{aligned} \text{mrlP}[y] &:= \text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] / \text{tailP}[y] \\ \text{mrlP}[y] & \\ & \left\{ \text{ConditionalExpression}\left[\frac{3+y}{5}, \text{Im}[y] \neq 0 \mid\mid y > -3\right] \right\} \end{aligned}$$

5. Δεξιά ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας (της κατανομής των κλιμακωτών υψών) . :

$$\begin{aligned} \text{tailP1}[y] &:= k^{a} / (k + y)^{a} \\ \text{tailP1}[y] & \\ & \left\{ \frac{243}{(3 + y)^5} \right\} \end{aligned}$$

6. Μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\begin{aligned} \text{meanP1} &= \text{Integrate}[\text{tailP1}[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}] \\ & \\ & \left\{ \frac{3}{4} \right\} \end{aligned}$$

7. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\begin{aligned} \text{mrlP1}[y] &:= \text{Integrate}[\text{tailP1}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] / \text{tailP1}[y] \\ \text{mrlP1}[y] & \\ & \left\{ \text{ConditionalExpression}\left[\frac{3+y}{4}, \text{Im}[y] \neq 0 \mid\mid y > -3\right] \right\} \end{aligned}$$

8. Δεξιά ουρά της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\begin{aligned} \text{tailP2}[y] &:= k^{a-1} / (k + y)^{a-1} \\ \text{tailP2}[y] & \\ & \left\{ \frac{81}{(3 + y)^4} \right\} \end{aligned}$$

9. Μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας .:

```
meanP2 = Integrate[tailP2[y], {y, 0, Infinity}]
```

```
{1}
```

10. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας .:

```
mrlP2[y_] := Integrate[tailP2[t], {t, y, Infinity}] / tailP2[y]
```

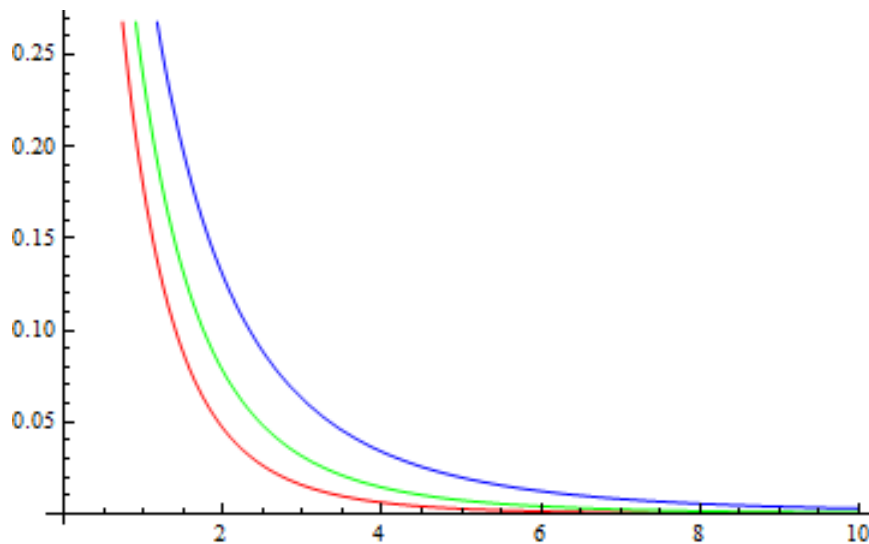
```
mrlP2[y]
```

```
{ConditionalExpression[ $\frac{3+y}{3}$ , Im[y] ≠ 0 || y > -3]}
```

11. Διάγραμμα των $tailP(y), tailP_1(y), tailP_2(y)$:

```
Plot[{tailP[y], tailP1[y], tailP2[y]}, {y, 0, 10},
```

```
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



12. Μέση τιμή των κλιμακωτών υψών .:

Θεωρήσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.2$.

```
l = 2; θ = 0.2;
```


(α') Εύρεση του ρυθμού είσπραξης των ασφαλιστρων c :

$$c = (1 + \theta) * 1 * \text{meanP}$$
$$\{1.44\}$$

(β') Εύρεση της 2ης ροπής των αποζημιώσεων m_2 :

$$q = y * \text{tailP}[y]$$

$$\left\{ \frac{729 y}{(3 + y)^6} \right\}$$

$$m = \text{Integrate}[q, \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\left\{ \frac{9}{20} \right\}$$

$$m2 = 2 * m$$

$$\left\{ \frac{9}{10} \right\}$$

$$\text{meanL} = (1 * m2) / (2 * (c - (1 * \text{meanP})))$$

$$\{3.75\}$$

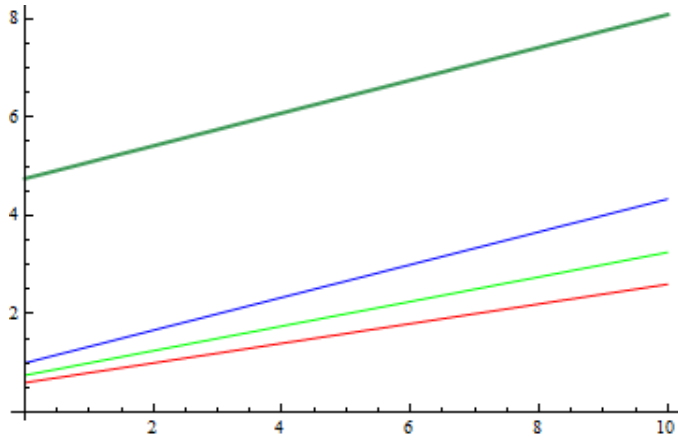
13. Μέση τιμή της V_y .:

$$\text{meanVy} = \text{meanL} + \text{mrlP2}[y]$$

$$\left\{ \text{ConditionalExpression}\left[3.75 + \frac{3 + y}{3}, \text{Im}[y] \neq 0 \mid\mid y > -3\right] \right\}$$

14. Διάγραμμα των $mrlP(y)$, $mrlP_1(y)$, $mrlP_2(y)$, $E(V_y)$:

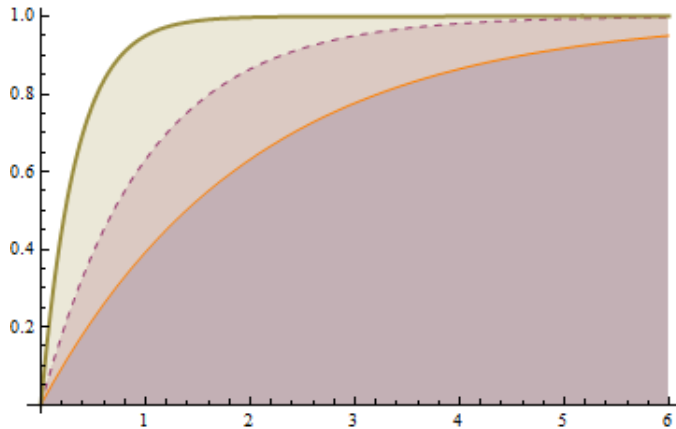
```
Plot[{mrlP[y], mrlP1[y], mrlP2[y], meanVy}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], Thick}]
```



Εφαρμογή 5.2 : Exponential Distribution

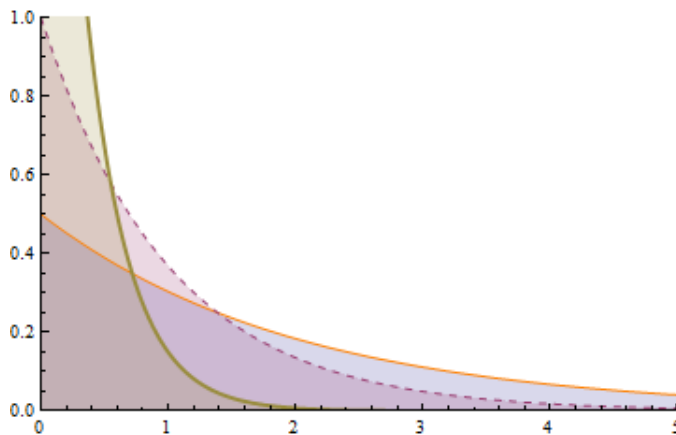
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $d = 0.5, 1, 3$.

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[ExponentialDistribution[λ], y], {λ, {.5, 1, 3}}],  
{y, 0, 6}, PlotStyle → {Orange, Dashed, Thick}, Filling → Axis]
```



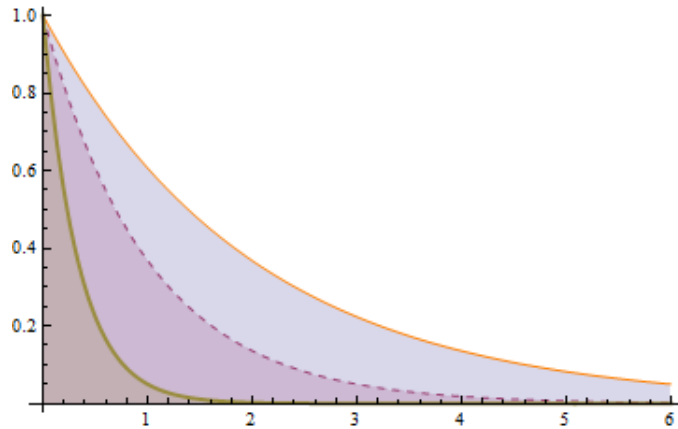
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $d = 0.5, 1, 3$.

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[ExponentialDistribution[λ], y], {λ, {.5, 1, 3}}],  
{y, 0, 5}, PlotRange → {{0, 5}, {0, 1}}, PlotStyle → {Orange, Dashed, Thick},  
Filling → Axis]
```



- Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $d = 0.5, 1, 3$.

```
Plot[Evaluate@Table[SurvivalFunction[ExponentialDistribution[λ], y], {λ, {.5, 1, 3}},
  {y, 0, 6}, PlotStyle → {Orange, Dashed, Thick}, Filling → Axis]
```



1. Επιλογή παραμέτρων .:

```
d = 3;
```

2. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
tailP[y_] := Exp[-(d * y)]
```

```
tailP[y]
```

$$e^{-3y}$$

3. Μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
meanP = Integrate[tailP[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\frac{1}{3}$$

4. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων . .:

```
mrlP[y_] := Integrate[tailP[t], {t, y, Infinity}] / tailP[y]
```

```
mrlP[y]
```

$$\frac{1}{3}$$

5. Δεξιά ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας (της κατανομής των κλιμακωτών υψών) . :

$$\text{tailP1}[y] := \frac{\text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}]}{\text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, 0, \text{Infinity}\}]}$$
$$\text{tailP1}[y]$$
$$e^{-3y}$$

6. Μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\text{meanP1} = \text{Integrate}[\text{tailP1}[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

7. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\text{mrlP1}[y] := \frac{\text{Integrate}[\text{tailP1}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}]}{\text{tailP1}[y]}$$
$$\text{mrlP1}[y]$$

$$\frac{1}{3}$$

8. Δεξιά ουρά της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\text{tailP2}[y] := \frac{\text{Integrate}[\text{tailP1}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}]}{\text{Integrate}[\text{tailP1}[t], \{t, 0, \text{Infinity}\}]}$$
$$\text{tailP2}[y]$$
$$e^{-3y}$$

9. Μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

$$\text{meanP2} = \text{Integrate}[\text{tailP2}[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

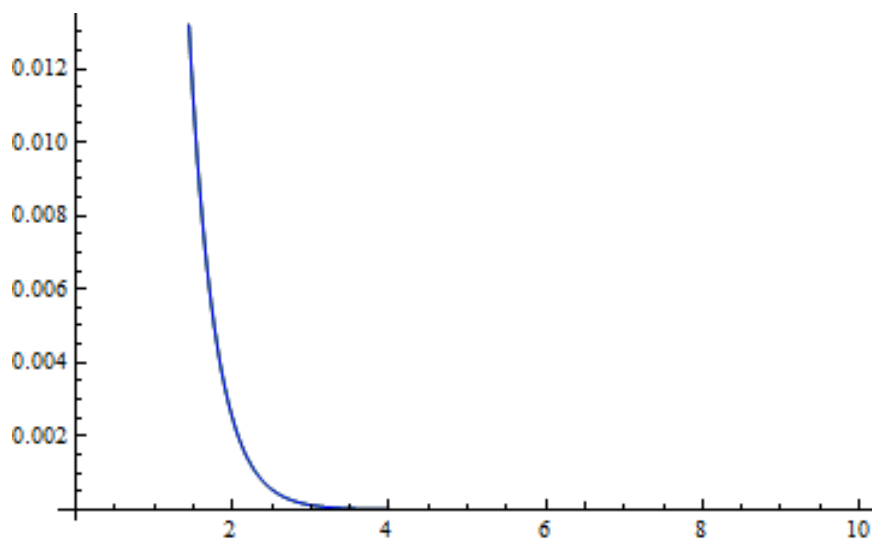
10. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
mrlP2[y_] := Integrate[tailP2[t], {t, y, Infinity}] / tailP2[y]
mrlP2[y]
```

$$\frac{1}{3}$$

11. Διάγραμμα των $tailP(y), tailP_1(y), tailP_2(y)$:

```
Plot[{tailP[y], tailP1[y], tailP2[y]}, {y, 0, 10},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



12. Μέση τιμή των κλιμακωτών υψών .:

Θεωρήσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.2$.

```
l = 2; u = 0.2;
```

(α') Εύρεση του ρυθμού είσπραξης των ασφαλιστρων c :

```
c = (1 + u) * l * meanP
```

```
0.8
```

(β') Εύρεση της 2ης ροπής των αποζημιώσεων m_2 :

$$q = y * \text{tailP}[y]$$

$$e^{-3y} y$$

$$m = \text{Integrate}[q, \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{1}{9}$$

$$m_2 = 2 * m$$

$$\frac{2}{9}$$

$$\text{meanL} = (1 * m_2) / (2 * (c - (1 * \text{meanP})))$$

$$1.66667$$

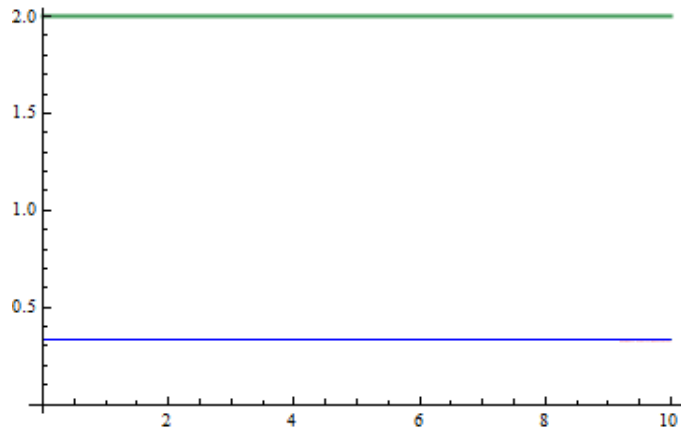
13. Μέση τιμή της V_y .:

$$\text{meanVy} = \text{meanL} + \text{mr1P2}[y]$$

$$2.$$

14. Διάγραμμα των $mrlP(y)$, $mrlP_1(y)$, $mrlP_2(y)$, $E(V_y)$:

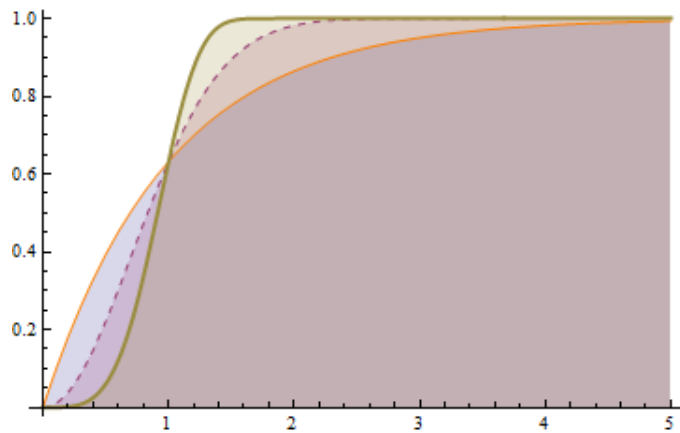
```
Plot[{mrlP[y], mrlP1[y], mrlP2[y], meanVy}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], Thick}]
```



Εφαρμογή 5.3 : Weibull Distribution

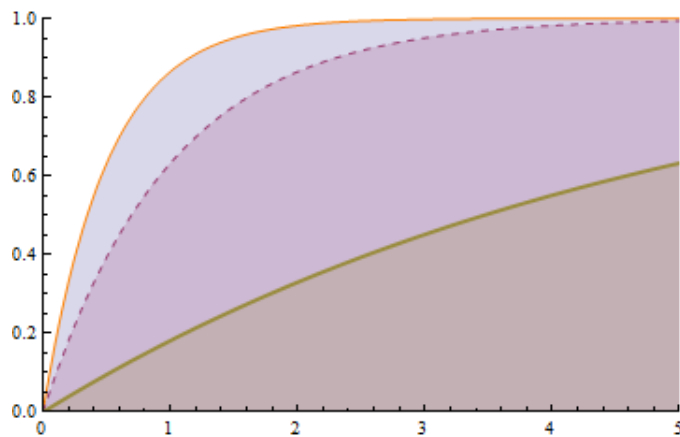
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $g = 1$ και $c = 1, 2, 4$.

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[WeibullDistribution[ $\alpha$ , 1],  $y$ ], { $\alpha$ , {1, 2, 4}}],  
{ $y$ , 0, 5}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



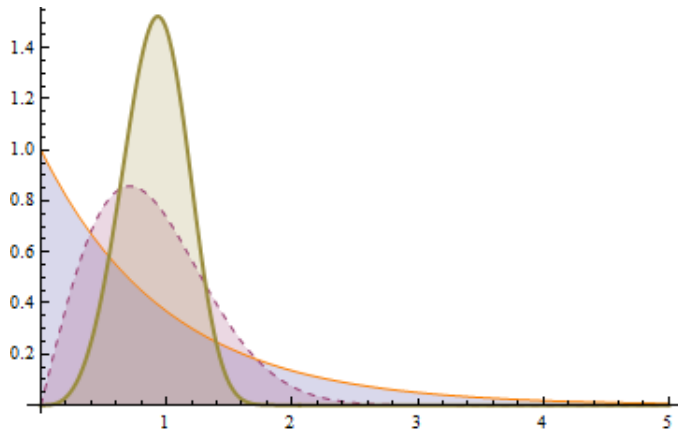
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $c = 1$ και $g = 0.5, 1, 5$.

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[WeibullDistribution[1,  $\beta$ ],  $y$ ], { $\beta$ , {.5, 1, 5}}],  
{ $y$ , 0, 5}, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},  
Filling -> Axis]
```



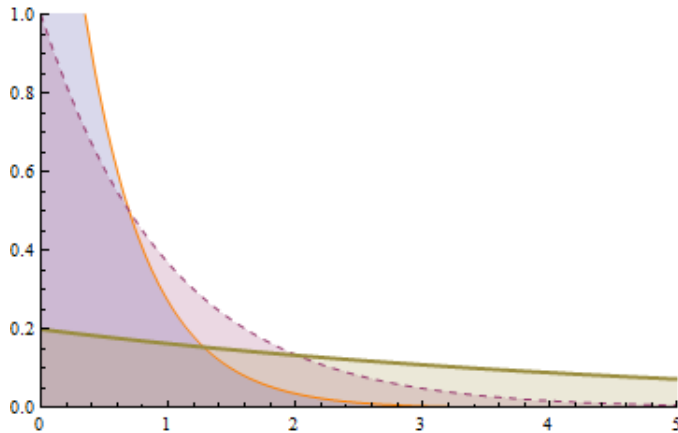
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $g = 1$ και $c = 1, 2, 4$.

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[WeibullDistribution[α, 1], y], {α, {1, 2, 4}}],
  {y, 0, 5}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



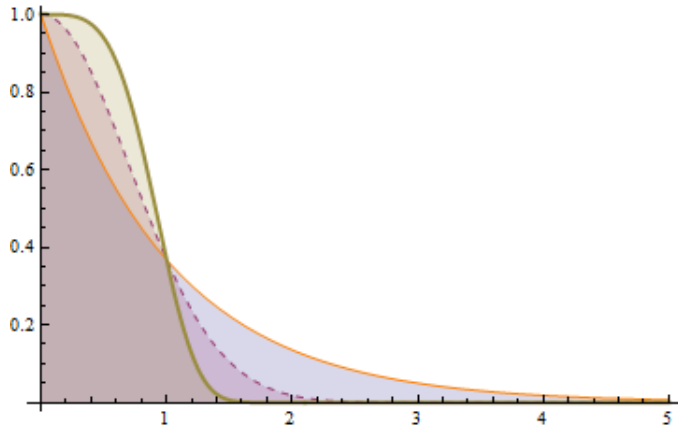
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $c = 1$ και $g = 0.5, 1, 5$.

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[WeibullDistribution[1, β], y], {β, {.5, 1, 5}}],
  {y, 0, 5}, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},
  Filling -> Axis]
```



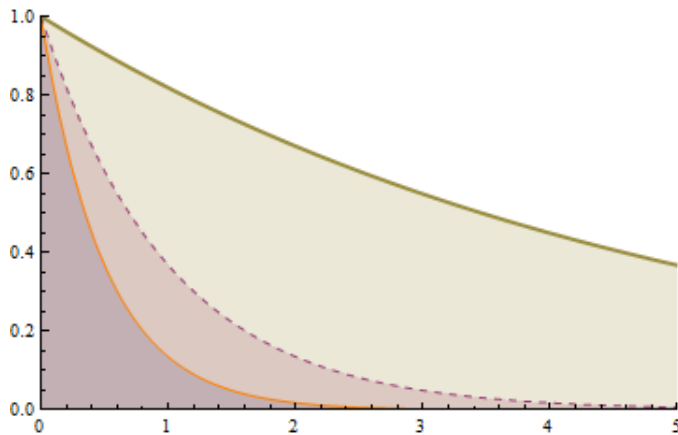
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $g = 1$ και $c = 1, 2, 4$.

```
Plot[Evaluate@Table[SurvivalFunction[WeibullDistribution[ $\alpha$ , 1],  $y$ ], { $\alpha$ , {1, 2, 4}}],
  { $y$ , 0, 5}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



- Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $c = 1$ και $g = 0.5, 1, 5$.

```
Plot[Evaluate@Table[SurvivalFunction[WeibullDistribution[1,  $\beta$ ],  $y$ ], { $\beta$ , {.5, 1, 5}}],
  { $y$ , 0, 5}, PlotRange -> {{0, 5}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},
  Filling -> Axis]
```



1. Επιλογή παραμέτρων .:

```
c = 1; g = 2;
```

2. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
tailP[y_] := Exp[-(c*y)^{g}]  
tailP[y]
```

$$\{e^{-y^2}\}$$

3. Μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
meanP = Integrate[tailP[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}$$

4. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
mrlP[y_] := Integrate[tailP[t], {t, y, Infinity}] / tailP[y]  
mrlP[y]
```

$$\left\{\frac{1}{2} e^{y^2} \sqrt{\pi} \operatorname{Erfc}[y]\right\}$$

5. Δεξιά ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας (της κατανομής των κλιμακωτών υψών) .:

```
tailP1[y_] := Integrate[tailP[t], {t, y, Infinity}] /  
Integrate[tailP[t], {t, 0, Infinity}]  
tailP1[y]
```

$$\{\operatorname{Erfc}[y]\}$$

6. Μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας .:

```
meanP1 = Integrate[tailP1[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

7. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

```
mr1P1[y_] := Integrate[tailP1[t], {t, y, Infinity}] / tailP1[y]
mr1P1[y]
```

$$\left\{ \frac{\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \operatorname{Erf}[y]}{\operatorname{Erfc}[y]} \right\}$$

8. Δεξιά ουρά της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
tailP2[y_] := Integrate[tailP1[t], {t, y, Infinity}] /
  Integrate[tailP1[t], {t, 0, Infinity}]
tailP2[y]
```

$$\left\{ \sqrt{\pi} \left(\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \operatorname{Erf}[y] \right) \right\}$$

9. Μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
meanP2 = Integrate[tailP2[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right\}$$

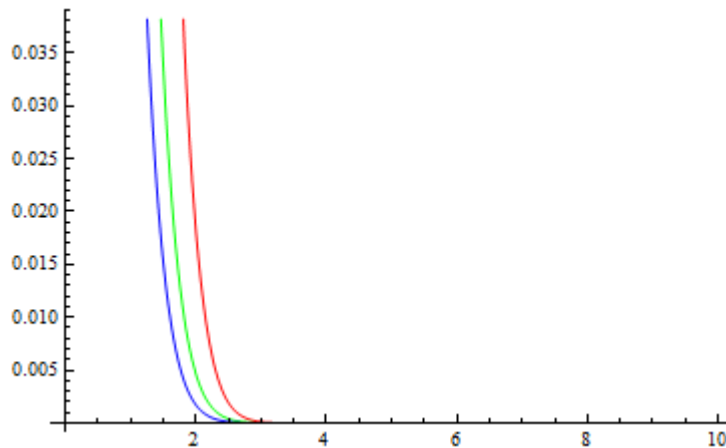
10. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
mr1P2[y_] := Integrate[tailP2[t], {t, y, Infinity}] / tailP2[y]
mr1P2[y]
```

$$\left\{ \frac{-2 e^{-y^2} y + \sqrt{\pi} (1 + 2 y^2) \operatorname{Erfc}[y]}{4 \sqrt{\pi} \left(\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \operatorname{Erf}[y] \right)} \right\}$$

11. Διάγραμμα των $tailP(y), tailP_1(y), tailP_2(y)$:

```
Plot[{tailP[y], tailP1[y], tailP2[y]}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



12. Μέση τιμή των κλιμακωτών υψών .:

Θεωρήσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.2$.

```
l = 2; u = 0.2;
```

(α') Εύρεση του ρυθμού είσπραξης των ασφαλίσεων c :

```
c = (1 + u) * l * meanP
```

```
{2.12694}
```

(β') Εύρεση της 2ης ροπής των αποζημιώσεων m_2 :

$$q = y * \text{tailP}[y]$$

$$\{e^{-4.52389 y^2} y\}$$

$$m = \text{Integrate}[q, \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\{0.110524\}$$

$$m2 = 2 * m$$

$$\{0.221049\}$$

$$\text{meanL} = (1 * m2) / (2 * (c - (1 * \text{meanP})))$$

$$\{0.623566\}$$

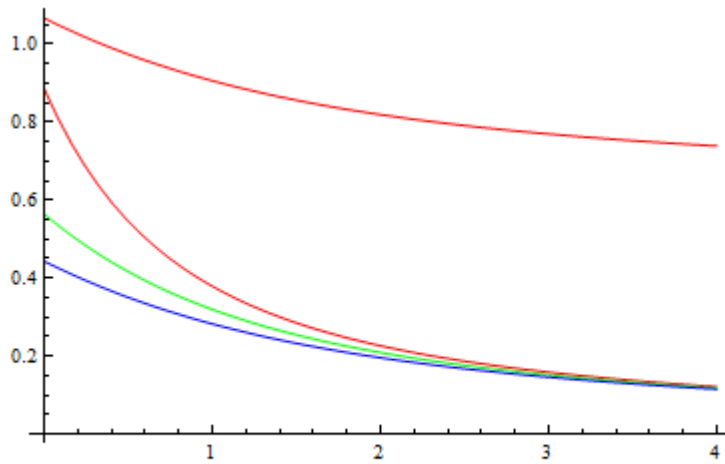
13. Μέση τιμή της V_y .:

$$\text{meanVy} = \text{meanL} + \text{mr1P2}[y]$$

$$0.623566 + \frac{-2 e^{-y^2} y + \sqrt{\pi} (1 + 2 y^2) \text{Erfc}[y]}{4 \sqrt{\pi} \left(\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y + y \text{Erf}[y] \right)}$$

14. Διάγραμμα των $mrlP(y)$, $mrlP_1(y)$, $mrlP_2(y)$, $E(V_y)$:

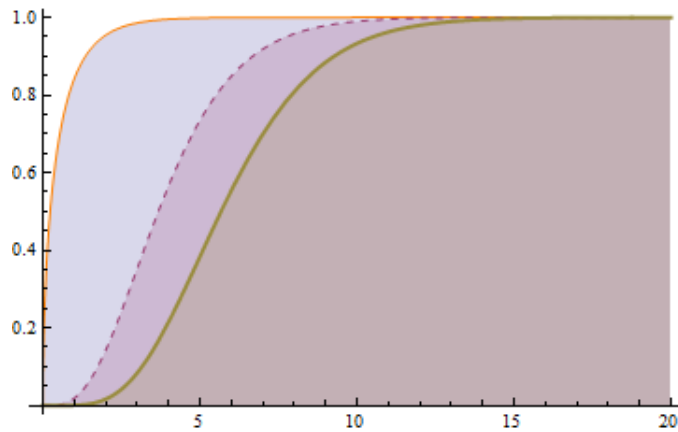
```
Plot[{mrlP[y], mrlP1[y], mrlP2[y], meanVy}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], Thick}]
```



Εφαρμογή 5.4 : Gamma Distribution

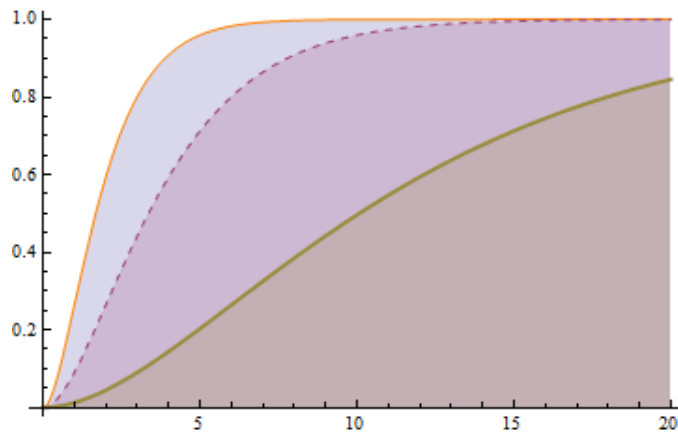
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $b = 2$ και $a = 1, 4, 6$.

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[GammaDistribution[ $\alpha$ , 2],  $y$ ], { $\alpha$ , {.5, 4, 6}}],  
{ $y$ , 0, 20}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



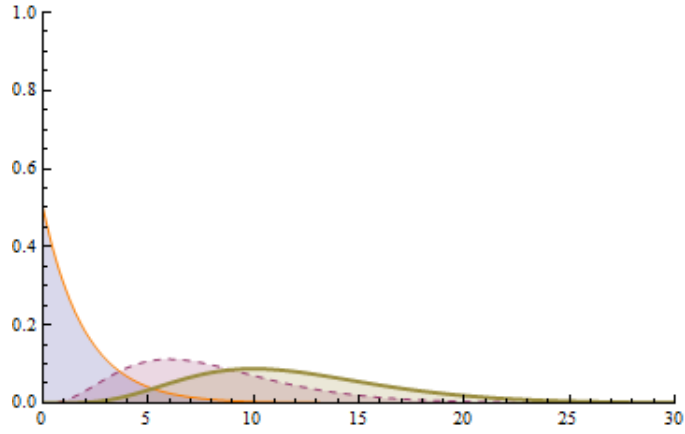
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Κατανομής για $a = 2$ και $b = 1, 2, 6$.

```
Plot[Evaluate@Table[CDF[GammaDistribution[2,  $\beta$ ],  $y$ ], { $\beta$ , {1, 2, 6}}],  
{ $y$ , 0, 20}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```

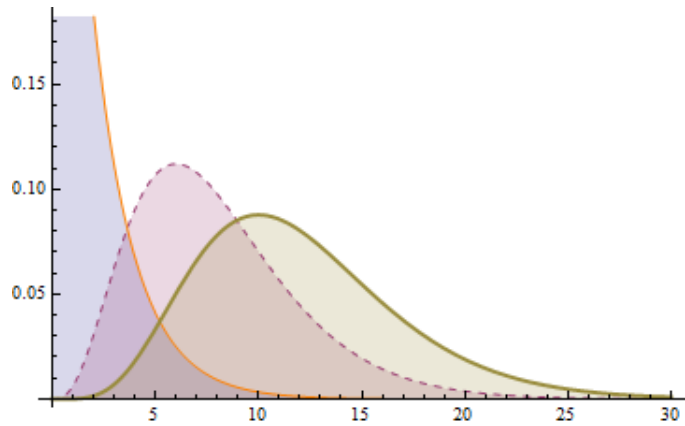


- Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $b = 2$ και $a = 1, 4, 6$.

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[GammaDistribution[ $\alpha$ , 2],  $y$ ], { $\alpha$ , {1, 4, 6}}],
{ $y$ , 0, 30}, PlotRange -> {{0, 30}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},
Filling -> Axis]
```

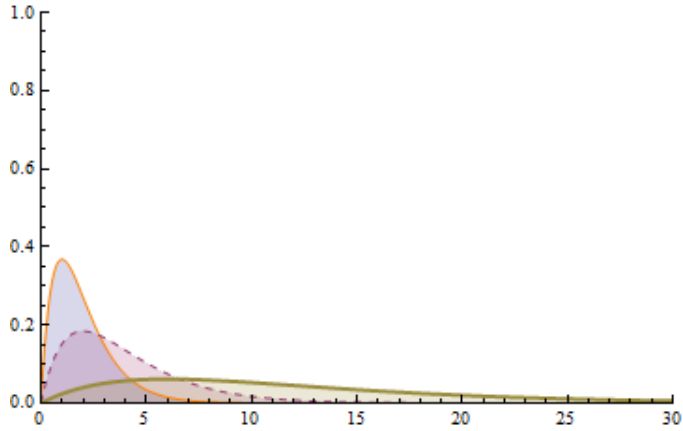


```
Plot[Evaluate@Table[PDF[GammaDistribution[ $\alpha$ , 2],  $y$ ], { $\alpha$ , {1, 4, 6}}],
{ $y$ , 0, 30}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```

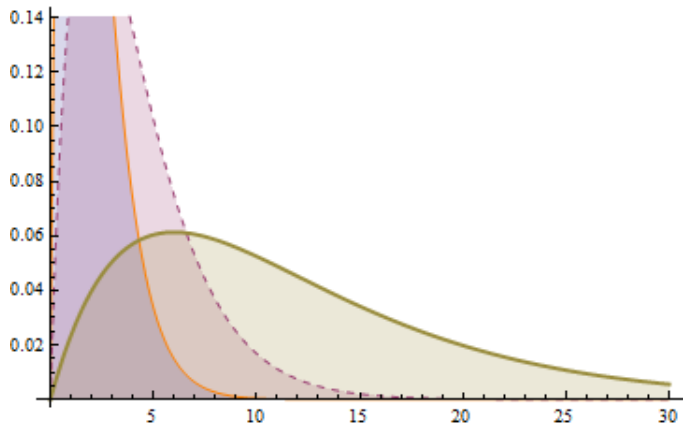


- Διάγραμμα της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας για $a = 2$ και $b = 1, 2, 6$.

```
Plot[Evaluate@Table[PDF[GammaDistribution[2,  $\beta$ ],  $y$ ], { $\beta$ , {1, 2, 6}},
{ $y$ , 0, 30}, PlotRange -> {{0, 30}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},
Filling -> Axis]
```

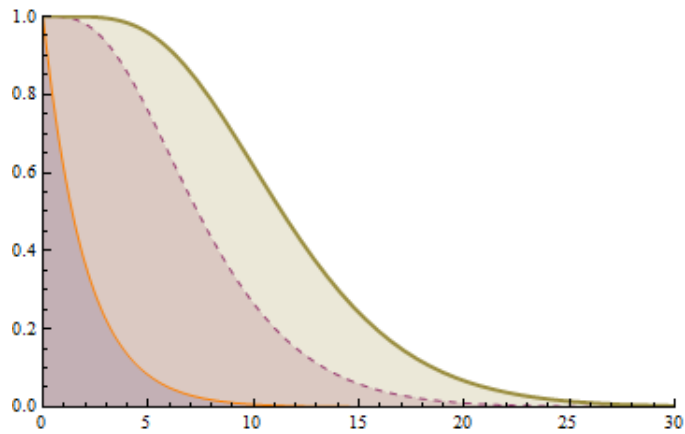


```
Plot[Evaluate@Table[PDF[GammaDistribution[2,  $\beta$ ],  $y$ ], { $\beta$ , {1, 2, 6}},
{ $y$ , 0, 30}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick}, Filling -> Axis]
```



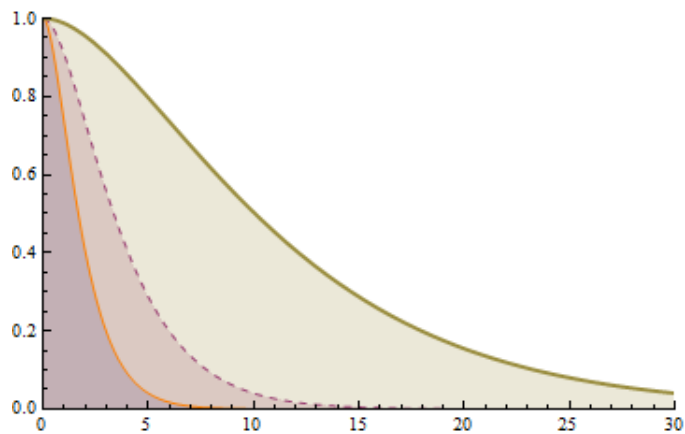
- Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $b = 2$ και $a = 1, 4, 6$.

```
Plot[Evaluate@Table[SurvivalFunction[GammaDistribution[α, 2], y], {α, {1, 4, 6}}],
  {y, 0, 30}, PlotRange -> {{0, 30}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},
  Filling -> Axis]
```



- Διάγραμμα της Συνάρτησης Επιβίωσης για $a = 2$ και $b = 1, 2, 6$.

```
Plot[Evaluate@Table[SurvivalFunction[GammaDistribution[2, β], y], {β, {1, 2, 6}}],
  {y, 0, 30}, PlotRange -> {{0, 30}, {0, 1}}, PlotStyle -> {Orange, Dashed, Thick},
  Filling -> Axis]
```



1. Επιλογή παραμέτρων .:

```
a = 3 ; b = 2;
```

2. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
CDF[GammaDistribution[3, 2], y]
{ GammaRegularized[3, 0, y/2] y > 0
  0 True
```

```
tailP[y_] := 1 - (GammaRegularized[3, 0, (y/2)])
tailP[y]
1 - GammaRegularized[3, 0, y/2]
```

3. Μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
meanP = Integrate[tailP[y], {y, 0, Infinity}]
6
```

4. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων .:

```
mr1P[y_] := Integrate[tailP[t], {t, y, Infinity}] / tailP[y]
mr1P[y]
```

$$\frac{e^{-y/2} (24 + y (8 + y))}{4 (1 - \text{GammaRegularized}[3, 0, \frac{y}{2}])}$$

5. Δεξιά ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας (της κατανομής των κλιμακωτών υψών) .:

```
tailP1[y_] := Integrate[tailP[t], {t, y, Infinity}] /
  Integrate[tailP[t], {t, 0, Infinity}]
tailP1[y]
\frac{1}{24} e^{-y/2} (24 + y (8 + y))
```

6. Μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας .:

```
meanP1 = Integrate[tailP1[y], {y, 0, Infinity}]
```

4

7. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας .:

```
mrlP1[y_] := Integrate[tailP1[t], {t, y, Infinity}] / tailP1[y]  
mrlP1[y]
```

$$\frac{2 (48 + y (12 + y))}{24 + y (8 + y)}$$

8. Δεξιά ουρά της 2ης κατανομής ισορροπίας .:

```
tailP2[y_] := Integrate[tailP1[t], {t, y, Infinity}] /  
Integrate[tailP1[t], {t, 0, Infinity}]  
tailP2[y]
```

$$\frac{1}{48} e^{-y/2} (48 + y (12 + y))$$

9. Μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας .:

```
meanP2 = Integrate[tailP2[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\frac{10}{3}$$

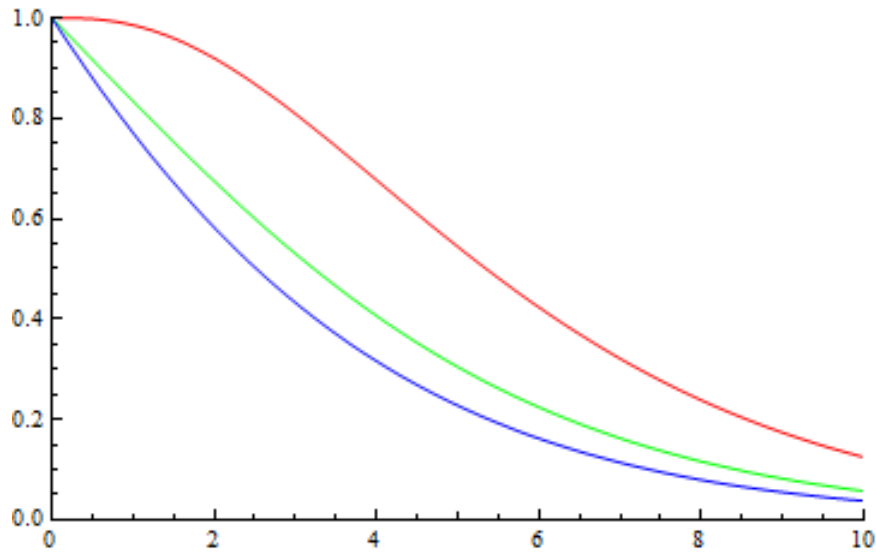
10. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας .:

```
mrlP2[y_] := Integrate[tailP2[t], {t, y, Infinity}] / tailP2[y]  
mrlP2[y]
```

$$\frac{2 (80 + y (16 + y))}{48 + y (12 + y)}$$

11. Διάγραμμα των $tailP(y), tailP_1(y), tailP_2(y)$:

```
Plot[{tailP[y], tailP1[y], tailP2[y]}, {y, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 1}},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



12. Μέση τιμή των κλιμακωτών υψών .:

Θεωρήσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.2$.

$\lambda = 2; u = 0.2;$

(α') Εύρεση του ρυθμού είσπραξης των ασφαλιστρων c :

$c = (1 + u) * \lambda * \text{meanP}$

14.4

(β') Εύρεση της 2ης ροπής των αποζημιώσεων m_2 :

```
q = y * tailP[y]
```

```
y (1 - GammaRegularized[3, 0,  $\frac{y}{2}$ ])
```

```
m = Integrate[q, {y, 0, Infinity}]
```

```
24
```

```
m2 = 2 * m
```

```
48
```

```
meanL = (1 * m2) / (2 * (c - (1 * meanP)))
```

```
20.
```

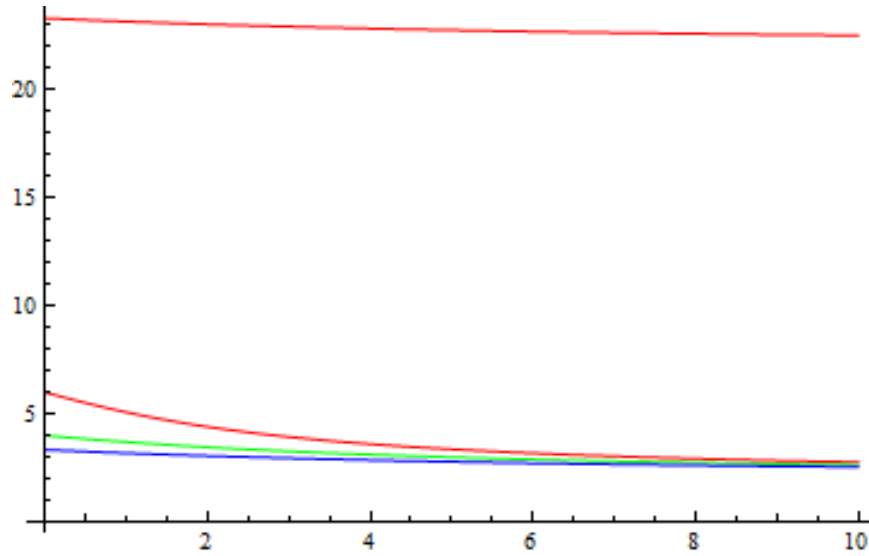
13. Μέση τιμή της V_y .:

```
meanVy = meanL + mrlP2[y]
```

$$20. + \frac{2 (80 + y (16 + y))}{48 + y (12 + y)}$$

14. Διάγραμμα των $mrlP(y)$, $mrlP_1(y)$, $mrlP_2(y)$, $E(V_y)$:

```
Plot[{mrlP[y], mrlP1[y], mrlP2[y], meanVy}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Εφαρμογή 5.5 : Mixture Of Exponential Distributions

Οι ενδιαίμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή

1. Επιλογή παραμέτρων .:

$$q = 1/2;$$

$$\lambda_1 = 1;$$

$$\lambda_2 = 3;$$

2. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων .:

$$\text{tailP}[y] := q \cdot \text{Exp}[-\lambda_1 \cdot y] + (1 - q) \cdot \text{Exp}[-\lambda_2 \cdot y]$$

$$\text{tailP}[y]$$

$$\frac{e^{-3y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2}$$

3. Μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων .:

$$\text{meanP} = (q / \lambda_1) + ((1 - q) / \lambda_2)$$

$$= \frac{2}{3}$$

4. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων . .:

$$\text{mrlP}[y] := \text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] / \text{tailP}[y]$$

$$\text{mrlP}[y]$$

$$\frac{e^{-3y} (1 + 3 e^{2y})}{6 \left(\frac{e^{-3y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2} \right)}$$

5. Δεξιά ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας (της κατανομής των κλιμακωτών υψών) . .:

$$\text{tailP1}[y] := \text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] /$$

$$\text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\text{tailP1}[y]$$

$$\frac{1}{4} e^{-3y} (1 + 3 e^{2y})$$

6. Μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

```
meanP1 = Integrate[tailP1[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\frac{5}{6}$$

7. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας . :

```
mrlP1[y_] := Integrate[tailP1[t], {t, y, Infinity}] / tailP1[y]  
mrlP1[y]
```

$$\frac{1 + 9 e^{2y}}{3 (1 + 3 e^{2y})}$$

8. Δεξιά ουρά της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
tailP2[y_] := Integrate[tailP1[t], {t, y, Infinity}] /  
Integrate[tailP1[t], {t, 0, Infinity}]  
tailP2[y]
```

$$\frac{1}{10} e^{-3y} (1 + 9 e^{2y})$$

9. Μέση τιμή της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
meanP2 = Integrate[tailP2[y], {y, 0, Infinity}]
```

$$\frac{14}{15}$$

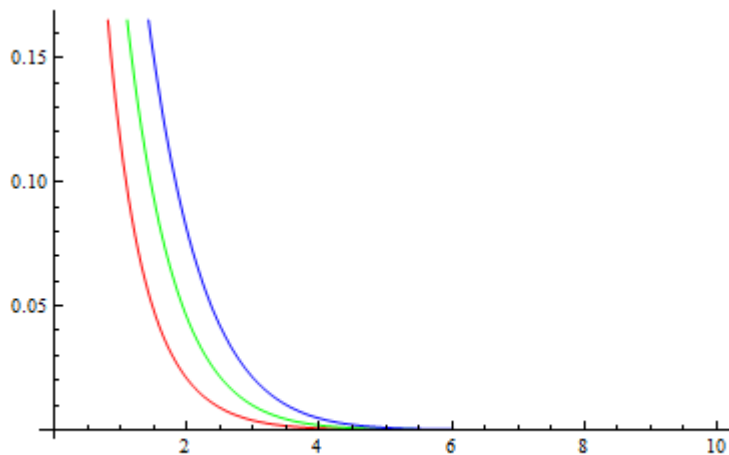
10. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 2ης κατανομής ισορροπίας . :

```
mrlP2[y_] := Integrate[tailP2[t], {t, y, Infinity}] / tailP2[y]  
mrlP2[y]
```

$$\frac{1 + 27 e^{2y}}{3 (1 + 9 e^{2y})}$$

11. Διάγραμμα των $tailP(y)$, $tailP_1(y)$, $tailP_2(y)$:

```
Plot[{tailP[y], tailP1[y], tailP2[y]}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



12. Μέση τιμή των κλιμακωτών υψών .:

Θεωρήσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta = 0.2$.

```
l = 2; u = 0.2;
```

(α') Εύρεση του ρυθμού είσπραξης των ασφαλιστρων c :

```
c = (1 + u) * l * meanP
```

```
1.6
```

(β') Εύρεση της 2ης ροπής των αποζημιώσεων m_2 :

$$q = y * \text{tailP}[y]$$

$$: \left(\frac{e^{-3y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2} \right) y$$

:

$$m = \text{Integrate}[q, \{y, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$: \frac{5}{9}$$

$$: m2 = 2 * m$$

$$: \frac{10}{9}$$

:

$$\text{meanL} = (1 * m2) / (2 * (c - (1 * \text{meanP})))$$

$$: 4.16667$$

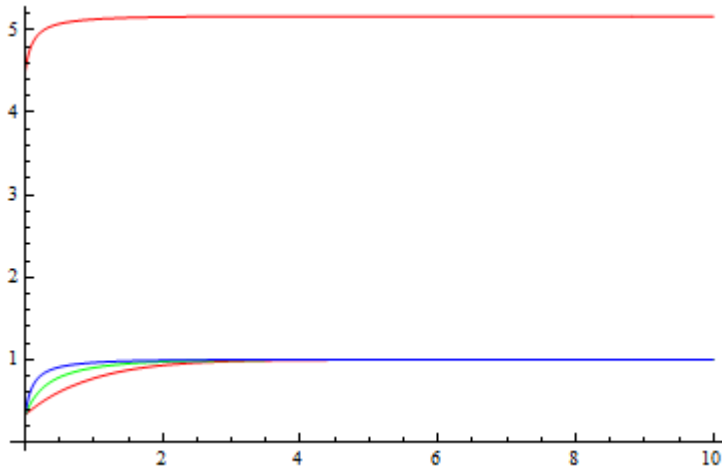
13. Μέση τιμή της V_y :

$$\text{meanVy} = \text{meanL} + \text{mr1P2}[y]$$

$$4.16667 + \frac{1 + 27 e^{2y}}{3 (1 + 9 e^{2y})}$$

14. Διάγραμμα των $mrlP(y)$, $mrlP_1(y)$, $mrlP_2(y)$, $E(V_y)$:

```
Plot[{mrlP[y], mrlP1[y], mrlP2[y], meanVy}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την κατανομή *Weibull*

1. Επιλογή παραμέτρων .:

$$q = 1/2;$$

$$\lambda 1 = 1;$$

$$\lambda 2 = 3;$$

2. Συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής των αποζημιώσεων .:

$$\text{tailP}[y] := q \cdot \text{Exp}[-\lambda 1 \cdot y] + (1 - q) \cdot \text{Exp}[-\lambda 2 \cdot y]$$

$$\text{tailP}[y]$$

$$\frac{e^{-3y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2}$$

3. Μέση τιμή της κατανομής των αποζημιώσεων .:

$$\text{meanP} = (q / \lambda 1) + ((1 - q) / \lambda 2)$$

$$\frac{2}{3}$$

4. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των αποζημιώσεων . .:

$$\text{mrlP}[y] := \text{Integrate}[\text{tailP}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] / \text{tailP}[y]$$

$$\text{mrlP}[y]$$

$$\frac{e^{-3y} (1 + 3 e^{2y})}{6 \left(\frac{e^{-3y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2} \right)}$$

5. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων . .:

$$\text{wpdf} = \text{PDF}[\text{WeibullDistribution}[1, 5], y]$$

$$\begin{cases} \frac{e^{-y/5}}{5} & y > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

$$k[y] = (1/5) \cdot \text{Exp}[-(y/5)]$$

$$\frac{e^{-y/5}}{5}$$

6. Μετασχηματισμός Laplace των ενδιάμεσων χρόνων .:

```

kLaplace[s_] := LaplaceTransform[Wpdf, y, s]
kLaplace[s]

$$\frac{1}{1 + 5 s}$$


```

7. Επίλυση της εξίσωσης του Lundberg .:

```

Solve[λ1 + λ2 - s == (q * λ1 + (1 - q) * λ2) * kLaplace[s] + (λ1 * λ2 * (1 - kLaplace[s])) / s, s]

```

```

{{s ->  $\frac{1}{10} (19 - \sqrt{101})$ }, {s ->  $\frac{1}{10} (19 + \sqrt{101})$ }}

```

Αποθηκεύω τις ρίζες r_1, r_2 :

```

r1 = 0.895013
r2 = 2.904987
0.895013
2.90499

```

8. Εύρεση των C_1, C_2 .:

```

C1 = (r2 * (λ1 - r1) * (λ2 - r1)) / (λ1 * λ2 * (r2 - r1))
C2 = (r1 * (r2 - λ1) * (λ2 - r2)) / (λ1 * λ2 * (r2 - r1))
0.106468
0.0268654

```


9. Δεξιά ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών . :

$$q1 = (\lambda2 * (\lambda1 - r1) * (\lambda2 - r2)) / ((\lambda2 - \lambda1) * ((\lambda1 * \lambda2) - (r1 * r2)))$$

0.0374068

```
tailF[y_] := q1 * Exp[-λ1 * y] + (1 - q1) * Exp[-λ2 * y]
tailF[y]
```

$$0.962593 e^{-3y} + 0.0374068 e^{-y}$$

10. Μέση τιμή της κατανομής των κλιμακωτών υψών .:

```
meanF = Integrate[tailF[y], {y, 0, Infinity}]
```

0.358271

11. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της κατανομής των κλιμακωτών υψών . :

```
mrlF[y_] := Integrate[tailF[t], {t, y, Infinity}] / tailF[y]
```

```
mrlF[y]
```

$$\frac{e^{-3y} (0.320864 + 0.0374068 e^{2y})}{0.962593 e^{-3y} + 0.0374068 e^{-y}}$$

12. Δεξιά ουρά της 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών . :

```
tailF1[y_] := Integrate[tailF[t], {t, y, Infinity}] /
```

```
Integrate[tailF[t], {t, 0, Infinity}]
```

```
tailF1[y]
```

$$2.79118 e^{-3y} (0.320864 + 0.0374068 e^{2y})$$

13. Μέση τιμή της 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών . :

```
meanF1 = Integrate[tailF1[y], {y, 0, Infinity}]
```

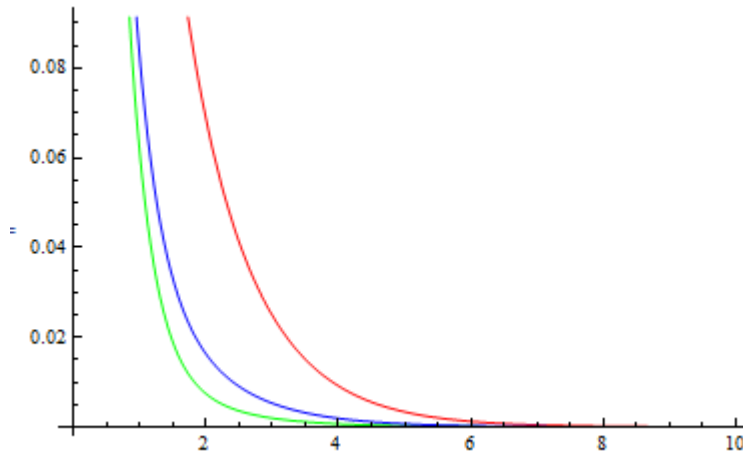
0.40294

14. Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής της 1ης κατανομής ισορροπίας της κατανομής των κλιμακωτών υψών . :

$$\begin{aligned} \text{mrlF1}[y] &:= \text{Integrate}[\text{tailF1}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] / \text{tailF1}[y] \\ \text{mrlF1}[y] & \\ & \frac{0.358271 (0.29853 + 0.104409 e^{2y})}{0.320864 + 0.0374068 e^{2y}} \end{aligned}$$

15. Διάγραμμα των $\text{tailP}(y), \text{tailF}(y), \text{tailF}_1(y)$:

```
Plot[{tailP[y], tailF[y], tailF1[y]}, {y, 0, 10},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



16. Πιθανότητα χρεοκοπίας . :

$$\begin{aligned} \text{psi}[u] &:= C1 * \text{Exp}[-r1 * u] + C2 * \text{Exp}[-r2 * u] \\ \text{psi}[u] & \\ & 0.0268654 e^{-2.90499 u} + 0.106468 e^{-0.895013 u} \end{aligned}$$

17. Μέση τιμή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας . :

$$\begin{aligned} \text{meanL} &= \text{Integrate}[\text{psi}[t], \{t, y, \text{Infinity}\}] \\ & \\ & 0.00924801 e^{-2.90499 y} + 0.118956 e^{-0.895013 y} \end{aligned}$$

18. Μέση τιμή της V_y :

$$\text{mean}V_y = \text{mrlF1}[y] + \text{meanL}$$

$$0.00924801 e^{-2.90499 y} + 0.118956 e^{-0.895013 y} + \frac{0.358271 (0.29853 + 0.104409 e^{2y})}{0.320864 + 0.0374068 e^{2y}}$$

19. Διάγραμμα των $\text{mrlP}(y), \text{mrlF}(y), \text{mrlF}_1(y), E(V_y)$:

```
Plot[{mrlP[y], mrlF[y], mrlF1[y], meanVy}, {y, 0, 10},  
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

