



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
Μ.Π.Σ. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ**

Causality: Definitions, Tests and Empirical Evidence

**ΚΟΥΚΟΣ ΑΓΓΕΛΟΣ
ΜΧΑΝ/0921**

**ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: ΕΠΙΚΟΥΡΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Χ. ΧΡΙΣΤΟΥ
ΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ: ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ν. ΚΟΥΡΟΓΕΝΗΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π. ΣΤΑΪΚΟΥΡΑΣ**

**ΠΕΙΡΑΙΑΣ
2011**

Summary

This project involves the presentation of various definitions that have been proposed for the concept of causality, with an emphasis in the field of Finance and Econometrics, and various statistical tests which have been used or used in recent years checking the existence of causal relationships. The last piece of work is devoted to an empirical study between industrial production of Germany and USA and stock indices DAX30 and S&P500 respectively, in order to check whether there is any causal relationship.

Specifically, the first chapter begins with a historical overview showing the main "instigators" of the concept of causality and continues giving the precise definitions that have been given. The second section deals with the various statistical tests have been used or used in recent years, while in the third section we present the empirical study, which based on the concept of causality developed by Granger.

Keywords: Causality, causality, Granger Causality, Long-Short run Causality, VAR model, cointegration

Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο την παρουσίαση διαφόρων ορισμών που έχουν κατά καιρούς προταθεί για την έννοια της αιτιότητας (Causality), με έμφαση στον κλάδο των Χρηματοοικονομικών και την Οικονομετρία, καθώς και των διαφόρων στατιστικών τεστ τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί ή χρησιμοποιούνται τα τελευταία χρόνια για τον έλεγχο ύπαρξης της. Το τελευταίο κομμάτι της εργασίας, είναι αφιερωμένο σε μια εμπειρική μελέτη ανάμεσα στη βιομηχανική παραγωγή της Γερμανίας και των ΗΠΑ και τις αποδόσεις των δεικτών DAX30 και S&P500 αντίστοιχα, προκειμένου να ελέγξουμε αν υφίσταται κάποια αιτιώδης σχέση.

Συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο ξεκινάει με μια ιστορική αναδρομή παρουσιάζοντας τους κυριότερους “εμπνευστές” της έννοιας της αιτιότητας και συνεχίζει παραθέτοντας τους ακριβείς ορισμούς που έχουν δοθεί. Στο δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύονται οι διάφοροι στατιστικοί έλεγχοι που έχουν χρησιμοποιηθεί ή χρησιμοποιούνται τα τελευταία χρόνια, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση της εμπειρικής μελέτης, η οποία βασίζεται στην έννοια της αιτιότητας που ανέπτυξε ο Granger.

Λέξεις-Κλειδιά: Causality, αιτιότητα, Granger Causality, Long-Short run Causality, VAR model, συνολοκλήρωση

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Ιστορική Αναδρομή

1.1 Εισαγωγή.....σελ. 6	σελ. 6
1.2 Μελέτη του Simon.....σελ. 8	σελ. 8
1.3 Μελέτη των Basmann-Strotz-Wold	σελ. 9
1.4 Αιτιότητα κατά Wiener-Granger	σελ. 10

Κεφάλαιο 2: Ορισμοί Αιτιότητας

2.1 Ορισμοί αιτιότητας κατά Granger	σελ. 14
2.2 Ορισμοί μη-αιτιότητας κατά Hsiao	σελ. 16
2.3 Ορισμοί μη-αιτιότητας κατά Dufour-Renault	σελ. 17
2.4 Υπόδειγμα Αυτοπαλίνδρομου Διανύσματος (Vector AutoRegressive (VAR) Model)	σελ. 21
2.5 Η έννοια της συνολοκλήρωσης (cointegration)	σελ. 23
2.6 Υπόδειγμα Διόρθωσης Λαθών (Vector Error Correction Model [VEC]).....σελ. 24	σελ. 24

Κεφάλαιο 3: Τεστ Αιτιότητας

3.1 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Granger	σελ. 25
3.2 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Sims	σελ. 27
3.3 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Feige and Pearce	σελ. 30
3.4 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Pierce and Haugh	σελ. 31
3.5 Εναλλακτικά τεστ για την ύπαρξη αιτιότητας	σελ. 33
3.6 Έλεγχοι μη αιτιότητας κατά Dufour-Pelletier-Renault	σελ. 35
3.6.1 Εκτίμηση ενός (p,h)-αυτοπαλίνδρομου μοντέλου... σελ. 37	σελ. 37
3.6.2 Τεστ αιτιότητας βασιζόμενοι σε στάσιμη (p,h)- αυτοπαλινδρόμηση.....σελ. 38	σελ. 38

3.6.3 Τεστ Αιτιότητας βασιζόμενοι σε μη-στάσιμη (p,h)- αυτοπαλινδρόμηση.....σελ.	43
3.7 Μέτρα αιτιότητας κατά Dufour-Taamouti	σελ. 46

Κεφάλαιο 4: Εμπειρική Μελέτη

4.1 Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας.....σελ.	49
4.2 Επιλογή κατάλληλου VAR μοντέλου.....σελ.	54
4.3 Έλεγχος για συνολοκλήρωση.....σελ.	62
Βιβλιογραφία.....σελ.	61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ιστορική Αναδρομή

1.1 Εισαγωγή

Η έννοια της αιτιότητας (Causality) δεν είναι καινούρια. Ήδη από την αρχαιότητα είχε κυρίαρχο ρόλο στην επιστημονική σκέψη, αφού ο άνθρωπος πάντα προσπαθούσε να βρει την αιτία πίσω από τα γεγονότα. Άλλωστε, το πρώτο βήμα για την εξήγηση ενός γεγονότος είναι ο εντοπισμός των αιτίων που το προκαλούν. Ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος Αριστοτέλης με την θεωρία των τεσσάρων αιτίων (ύλη, μορφή, ενέργεια, σκοπός) που ανέπτυξε, αναλύει την άποψή του ότι η αιτιότητα αποτελεί τη βάση για την επιστημονική εξήγηση. Σε μία απ' τις πρώτες σελίδες του εγχειριδίου του Stigler περί θεωρίας τιμών (Price Theory) το 1949 αναφέρει ότι «Ο σημαντικός σκοπός ενός επιστημονικού νόμου είναι το να επιτρέψει να γίνει πρόβλεψη, και η πρόβλεψη είναι σημαντική με τη σειρά της γιατί μας επιτρέπει να ελέγξουμε τα φαινόμενα. Το γιατί ένας τέτοιος έλεγχος χρειάζεται την πρόβλεψη, είναι αυταπόδεικτο. Αν κάποιος δεν γνωρίζει τι προκαλεί ένα συγκεκριμένο φαινόμενο, δεν μπορεί και να επηρεάσει ή να εμποδίσει την εμφάνισή του.». Στη μελέτη των Koopmans και Hood [Studies in Econometric Method, 1953] υπάρχει ένα άρθρο του Simon για τη φύση των αιτιωδών ταξινομήσεων. Ο Feigl (1953) σ' ένα άρθρο του ορίζει την αιτιότητα σε όρους πρόβλεψης με βάσει κάποιον νόμο. Το σημαντικό σ' αυτόν τον ορισμό είναι το γεγονός ότι συνδέει την αιτιότητα με την δυνατότητα πρόβλεψης στηριζόμενοι όμως σε κάποιο νόμο ή σύνολο νόμων. Σε αυτό ακριβώς στηρίζονται πολλά τεστ για τον έλεγχο της ύπαρξης αιτιώδους σχέσεως. Ο Wiener το 1956 [The theory of prediction, In: E.F. Beckenback, ed., McGraw-Hill, New York (Chapter 8)] αναφέρθηκε στην αιτιότητα, αλλά ο Granger το 1969 ήταν αυτός που συνέδεσε το νόημα της αιτιότητας με την δυνατότητα υπολογισμών. Η αιτιότητα (Causality) σύμφωνα με τον Granger, που στη συνέχεια θα τη χρησιμοποιούμε ως «Αιτιότητα κατά Granger», αναφέρεται στην ικανότητα πρόβλεψης μια μεταβλητής $X(t)$, όπου t ένας ακέραιος, χρησιμοποιώντας το «παρελθόν» της ίδιας μεταβλητής $X(t)$, μία άλλη

μεταβλητή $Y(t)$ και πιθανόν ένα διάνυσμα βοηθητικών μεταβλητών $Z(t)$ μία περίοδο μπροστά. Με άλλα λόγια, λέμε ότι η Y προκαλεί την X κατά Granger αν η παρατήρηση της Y μέχρι τον χρόνο t ($Y(\tau) : \tau \leq t$) μπορεί να μας βοηθήσει στο να προβλέψουμε την τιμή της X μια περίοδο μετά ($X(t+1)$) με δεδομένο ότι είναι διαθέσιμες οι παρατηρήσεις των μεταβλητών X, Z ($X(\tau), Z(\tau) : \tau \leq t$). Πιο επίσημα, λέμε ότι η Y αιτιάζεται (causes) την X αν η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης της X χρησιμοποιώντας παρελθούσες παρατηρήσεις της Y είναι μικρότερη από το σφάλμα πρόβλεψης της X χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την Y .

Ωστόσο, με το πέρασμα των χρόνων, άρχισε να δημιουργείται μία ευρύτερη έννοια για τον όρο «Causality». Ενώ δηλαδή ο Granger αναφερόταν σε μια επίδραση η οποία θα εμφανιζόταν την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο στην μεταβλητή ενδιαφέροντος, με αποτέλεσμα να μπορούμε σε μεγάλο βαθμό να προβλέψουμε την τιμή της, κάποιοι επιστήμονες (Sims 1980, Hsiao 1982, Lutkepohl 1993, Dufour and Renault 1998) σκέφτηκαν ότι αυτή η επίδραση μπορεί να μην είναι εμφανής την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο, αλλά κάποιες περιόδους αργότερα σε έναν ορίζοντα χρόνου h , όπου h είναι ακέραιος και μπορεί να είναι άπειρος ($1 \leq h \leq \infty$). Για παράδειγμα, οι παρατηρήσεις της μεταβλητής $Y(\tau)$ μέχρι τον χρόνο t μπορεί να μη μας βοηθούν καθόλου στο να προβλέψουμε την τιμή της μεταβλητής $X(t)$ την χρονική στιγμή $t+1$ (X_{t+1}) αλλά να μας βοηθούν στην πρόβλεψη μια άλλης μεταβλητής $Z(\tau)$ στο $t+1$ η οποία με τη σειρά της να επιδρά με κάποιο τρόπο στην $X(t)$ σε κάποια επόμενη περίοδο και έτσι έμμεσα να μπορούμε να προβλέψουμε την τιμή της.

1.2 Μελέτη του Simon “Αιτιώδεις Ταξινομήσεις και Αναγνωρισιμότητα”

Ο Simon στο άρθρο του “Causal Ordering and Identifiability” (1953) χρησιμοποιεί μια πιο στενή έννοια για την αιτιότητα λέγοντας ότι «οι αιτιώδεις ταξινομήσεις είναι απλά χαρακτηριστικά που δίνει ο κάθε επιστήμονας στο μοντέλο που κατασκευάζει και μπορεί να μεταβάλλονται προκειμένου να ταιριάζει καλύτερα το μοντέλο στα νέα δεδομένα.». Η έννοια αυτή της αιτιότητας ταιριάζει και σε πιθανοθεωρητικά αλλά και σε ντετερμινιστικά μοντέλα. Ο Simon προσπαθεί να εντοπίσει αν υπάρχουν αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ δύο μεταβλητών ή μιας ομάδας μεταβλητών σε ένα μοντέλο και όχι στον πραγματικό κόσμο . Έτσι η στενότερη αυτή έννοια διαφέρει από αυτήν του Feigl που αναφέρεται σε δυνατότητα πρόβλεψης αποτελεσμάτων που παρατηρούνται στον πραγματικό κόσμο. Παρόλο που η έννοια της αιτιότητας του Simon μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει λογικά τους “νόμους” που αναφέρει ο Feigl δεν προϋποθέτει κάποια σχέση με τις συνέπειες που εμφανίζονται στον πραγματικό κόσμο. Επίσης, τονίζεται στην ανάλυσή του ότι δεν είναι απαραίτητη η χρονική υστέρηση μεταξύ της μεταβλητής που αιτιάζεται και αυτής που δέχεται την επίδραση. Προκειμένου να καταλάβουμε λίγο καλύτερα την ανάλυση του Simon, παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα που χρησιμοποίησε.

Θεωρεί το παρακάτω σύστημα γραμμικών ντετερμινιστικών εξισώσεων

$$a_{11}x_1 = a_{10} \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{20} \quad (2)$$

$$a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{30} \quad (3)$$

όπου x_1 είναι ένας δείκτης που μετρά κατά πόσο ο καιρός ευνοεί την ανάπτυξη του σιταριού, x_2 είναι το μέγεθος της σοδειάς του σιταριού, x_3 είναι η τιμή του και τα a_{i0} , $i=1,2,3$ είναι παράμετροι. Στη συνέχεια, γράφει ο Simon, “Υποθέτουμε ότι ο καιρός εξαρτάται μόνο από μία παράμετρο. Τότε το μέγεθος

της σοδειάς ως προς τον καιρό (αγνοώντας τυχόν εξάρτηση απ'την τιμή)...”(σελ.58)

Αφού η τιμή της x_1 μπορεί να προσδιοριστεί απ'την (1) μόνο, αντικαθιστούμε αυτήν την τιμή στις (2) και (3) και παίρνουμε ένα μειωμένο σύστημα που περιλαμβάνει τις x_2, x_3 . Η αντικατάσταση της (1) στη (2) μια δίνει μια σχέση με την οποία προσδιορίζουμε την x_2 και στη συνέχεια αντικαθιστούμε αυτή με τη σειρά της στην (3) και προκύπτει η τιμή της x_3 . Ο Simon ερμηνεύει την παραπάνω διαδικασία ως πρωτοπορία της (1) ως προς την (2) και η (2) έναντι της (3) και πιο συγκεκριμένα η (1) έχει ευθεία επίδραση στην (2) και αντίστοιχα η (2) στην (3).

1.3 Η μελέτη των Basmann-Strotz-Wold για την αιτιότητα

Σύμφωνα με την άποψη των Strotz-Wold που εξέδωσαν τρία άρθρα το 1960 με τίτλο “A triptych on causal chain systems”, «η z είναι μία αιτία της y , βάσει υπόθεσης, αν είναι ή θα μπορούσε να είναι δυνατόν, ελέγχοντας την z έμμεσα να μπορούμε να ελέγξουμε και την y έστω στοχαστικά. Αλλά, μπορεί να μην είναι δυνατόν ελέγχοντας με κάποιον τρόπο την y να ελέγξουμε έμμεσα την z . Τότε, η αιτιώδης σχέση είναι ασύμμετρη και συνεπώς σε κάθε πραγματοποίηση θα υπάρχει ασυμμετρία. Μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να είναι αναστρέψιμη και συμμετρική η παραπάνω αιτιώδης σχέση. Αυτές είναι οι περιπτώσεις που μια ελεγχόμενη μεταβολή στη z μπορεί να προκαλέσει μια αλλαγή στην y και μια άλλη χρονική στιγμή μια ελεγχόμενη μεταβολή στη y μπορεί να προκαλέσει μια μεταβολή στη z , αλλά οι y και z δεν μπορούν να υποστούν ταυτόχρονα μια ελεγχόμενη μεταβολή ανεξάρτητη η μία απ'την άλλη χωρίς να παραβιαστεί η μεταξύ τους αιτιώδης σχέση.”. Όπως παρατηρούμε στον παραπάνω ορισμό, αυτός διαφέρει απ'τον ορισμό του Feigl καθώς προστίθεται η ιδέα των ελεγχόμενων αλλαγών στις μεταβλητές. Έτσι, η αιτιότητα του Feigl μπορεί να εφαρμοστεί σε τομείς της επιστήμης στους οποίους δεν υπάρχουν ελεγχόμενες μεταβλητές, αλλά και σε περιπτώσεις όπου

κάποιοι “νόμοι” ή μοντέλα περιέχουν μεταβλητές οι οποίες είναι δυνατόν να ελεγχθούν με κάποιον τρόπο.

Στο σχόλιό του ο Basmann (1963) στο πιο πάνω άρθρο δίνει έναν δικό του ορισμό για την αιτιότητα. “Υποθέτουμε ότι ο μηχανισμός τον οποίο προσπαθούμε να ερευνήσουμε μπορεί να απομονωθεί από όλες τις συστηματικές, μη-τυχαίες εξωτερικές επιδράσεις. Υποθέτουμε ότι ο μηχανισμός μπορεί να ξεκινήσει επανειλημμένα υπό οποιαδήποτε αρχική συνθήκη. Αν κάθε φορά ο μηχανισμός ξεκινά από κατά προσέγγιση την ίδια αρχική συνθήκη και αυτό οδηγεί στο να παρατηρείται κατά προσέγγιση η ίδια ακολουθία γεγονότων, τότε ο μηχανισμός λέγεται ότι διακατέχεται από αιτιώδεις σχέσεις.” Τον ορισμό αυτό ακολουθεί η παρακάτω άποψη : “Κάθε μοντέλο που α) απεικονίζει έναν απομονωμένο μηχανισμό από μη-τυχαίες εξωτερικές επιδράσεις και 2) επιβεβαιώνει ότι όταν ξεκινάμε από κατά προσέγγιση τις ίδιες αρχικές συνθήκες ο μηχανισμός πάντα τείνει να δίνει κατά προσέγγιση την ίδια ακολουθία γεγονότων, είναι ένα μοντέλο αιτιότητας το οποίο εκφράζει μια υπόθεση αιτιότητας σχετικά με τον μηχανισμό που θέλουμε να ερευνήσουμε.”(σελ.442).

Αν συγκρίνουμε την ιδέα του Feigl περί “νόμου ή σύνολο νόμων” βάσει των οποίων μπορούμε να προχωρήσουμε σε προβλέψεις, με αυτήν του Basmann που αναφέρεται σε κάποιο μοντέλο το οποίο αναπαριστά έναν μηχανισμό καθώς και στην έννοια της προβλεψιμότητας του Feigl με την ίδια “ακολουθία γεγονότων” που επικαλείται ο Basmann, παρατηρούμε ότι δεν απέχουν πολύ.

1.4 Αιτιότητα κατά Wiener-Granger

Ο Granger το 1969 εισήγαγε μια έννοια για την αιτιότητα όπου “κυρίαρχο ρόλο έπαιζαν, η στοχαστική φύση των μεταβλητών και η κατεύθυνση της κίνησης του χρόνου.” Αναφερόταν λοιπόν σε μη-ντετερμινιστικές μεταβλητές με την βασική υπόθεση ότι το μέλλον δεν μπορεί να επηρεάσει το παρελθόν. Εδώ έγκειται και η πρώτη διαφορά μεταξύ της έννοιας που προσπάθησε να αναπτύξει ο Granger και των θεωριών που ήδη υπήρχαν. Πουθενά στις προηγούμενες αναλύσεις δεν υπήρχε διαχωρισμός μεταξύ στοχαστικών ή μη μεταβλητών, αφήνοντας να εννοηθεί ότι όσα γραφότουσαν ίσχυαν και για τις δύο κατηγορίες. Επίσης, η έννοια της χρονικής ασυμμετρίας εισήχθη απ’τον

Granger στην θεωρία της αιτιότητας. Πιο συγκεκριμένα, οι Granger και Newbold το 1977 γράφουν: “a) Το μέλλον δεν μπορεί να αιτιάζεται το παρελθόν. Κατά την αυστηρή έννοια της αιτιότητας, μόνο το παρελθόν μπορεί να αιτιάζεται το παρόν ή το μέλλον. b) Είναι λογικό να εξετάζεται η αιτιότητα μόνο σε μια ομάδα στοχαστικών διαδικασιών και όχι μεταξύ δύο ντετερμινιστικών.”(σελ.224-225)

Ο Granger θεώρησε μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία X_t και συμβολίζει με X_t' της ιστορικές τιμές της και με X_t'' το σύνολο των ιστορικών και τρεχουσών τιμών. Επιπλέον, θέτει $X_t'^{(k)}$ το σύνολο $\{X_{t-j}, j = k, k+1, \dots, \infty\}$. Ακόμα, προσπαθεί να εκτιμήσει τον βέλτιστο αμερόληπτο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων της X_t χρησιμοποιώντας τις τιμές της Y_t μέσω της δεσμευμένης πιθανότητας $P_t(X|Y)$ και το αναμενόμενο σφάλμα ως $E_t(X|Y) = X_t - P_t(X|Y)$ καθώς και την διακύμανση του $E_t(X|Y)$ με $\sigma^2(X|Y)$. Επομένως, ο Granger γράφει: “Συμβολίζουμε με U_t όλη την διαθέσιμη πληροφορία μέχρι τη χρονική στιγμή $t-1$ και συμβολίζουμε με $U_t - Z_t$ όλη την παραπάνω πληροφορία εκτός απ'την σειρά Z_t . Έχουμε τότε τις ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 1: Αιτιότητα.

Αν

$$\sigma^2(X|U) < \sigma^2(X|U - Z') \quad (4)$$

λέμε ότι η Y αιτιάζεται την X και συμβολίζουμε $Z_t \Rightarrow X_t$.

Λέμε ότι η Z_t αιτιάζεται την X_t εάν η πρόβλεψη που κάνουμε χρησιμοποιώντας όλη την διαθέσιμη πληροφορία U_t είναι καλύτερη από αυτή που θα κάναμε αν χρησιμοποιούσαμε την διαθέσιμη πληροφορία εξαιρώντας την Z_t .

Ορισμός 2: Ανάδραση (feedback).

Εάν ισχύει

$$\sigma^2(X | U) < \sigma^2(X | U - Z) \quad (5)$$

$$\sigma^2(Z | U) < \sigma^2(Z | U - X) \quad (6)$$

τότε λέμε ότι έχουμε αμφίδρομη αιτιότητα και συμβολίζεται με $Z_t \Leftrightarrow X_t$, δηλαδή η Z_t αιτιάται την X_t , αλλά και η X_t αιτιάται την Z_t .

Ορισμός 3: Στιγμιαία αιτιότητα (Instantaneous Causality).

Αν

$$\sigma^2(X | U, Z) < \sigma^2(X | U) \quad (7)$$

λέμε ότι έχουμε στιγμιαία αιτιότητα $Z_t \Rightarrow X_t$. Δηλαδή, η τρέχουσα τιμή της X_t μπορεί να προβλεφθεί καλύτερα αν η παρούσα τιμή της Z_t συμπεριληφθεί στην πρόβλεψη παρά αν δεν την συμπεριλάβουμε.

Ορισμός 4: Αιτιότητα με υστέρηση (Causality Lag).

Αν $Z_t \Rightarrow X_t$, ορίζουμε την αιτιότητα με υστέρηση m περιόδων, όπου m ακέραιος, να είναι ελάχιστη τιμή του k ώστε να ισχύει

$$\sigma^2(X | U - Z(k)) < \sigma^2(X | U - Z(k+1)) \quad (8)$$

Έτσι, γνωρίζοντας τις τιμές της Z_{t-j} , $j = 0, 1, \dots, m-1$ δεν θα μας βοηθήσει στο να κάνουμε καλύτερη πρόβλεψη για το X_t .

Σύμφωνα λοιπόν με τον πρώτο ορισμό, αν η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης, στηριζόμενοι σ'έναν αμερόληπτο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων, μια στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας η οποία βασίζεται σε όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες μέχρι τη στιγμή $t-1$ είναι μικρότερη από τη διακύμανση του

σφάλματος πρόβλεψης αν χρησιμοποιήσουμε όλη τη διαθέσιμη πληροφορία εκτός απ' τις ιστορικές τιμές της Z_t , τότε η Z αιτιάται την X .

Το μεγαλύτερο πρόβλημα στους παραπάνω ορισμούς είναι το ότι δεν υπάρχει συγκεκριμένος τρόπος για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε επακριβώς το σύνολο της διαθέσιμης πληροφορίας. Γι' αυτόν τον λόγο ο Granger άλλαξε λίγο αργότερα την διατύπωση αυτή και αναφέρθηκε σε "κάθε σχετική πληροφορία" προσπαθώντας να κάνει τον ορισμό του πιο εύκολο να εξεταστεί στην πράξη. Παρόλα αυτά οι Granger και Newbold δεν κατάφεραν να εξηγήσουν και να αναφέρουν με σαφήνεια πώς οι οικονομικοί νόμοι και θεωρίες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο προσδιορισμό της κάθε σχετικής πληροφορίας. Μια άλλη αδυναμία του ορισμού του Granger είναι ότι χρησιμοποιείται ως κριτήριο επιβεβαίωσης της ύπαρξης αιτιώδους σχέσεως, η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης, γιατί σε διαδικασίες που δεν έχουν πεπερασμένες ροπές δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Επίσης, δεν είναι πάντα δυνατό να βρούμε τον βέλτιστο εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων και έτσι ο Granger συμπλήρωσε ότι οι χρησιμοποιούμενες σειρές θα πρέπει να κατανέμονται κανονικά ώστε να μπορούμε να έχουμε γραμμικούς εκτιμητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ορισμοί αιτιότητας

2.1 Ορισμοί αιτιότητας κατά Granger

Ο Granger το 1980 (Testing for Causality [Journal of Economic Dynamics and Control 2] προσπάθησε να δώσει συγκεκριμένους και ίσως καταλληλότερους για στατιστικό έλεγχο ορισμούς για την αιτιότητα και έτσι πρότεινε τα παρακάτω.

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν η μεταβλητή Y προκαλεί την X . Την χρονική στιγμή t η τιμή X_{t+1} θα είναι γενικά μια τυχαία μεταβλητή και κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε $\text{Prob}(X_{t+1} \in A)$, όπου A είναι ένα διάστημα.

Γενικός Ορισμός: Λέμε ότι η Y_t αιτιάζεται (cause) την X_{t+1} αν

$$P(X_{t+1} \in A | F_t) \neq P(X_{t+1} \in A | F_t - Y_t) \quad (9)$$

για κάποιο A

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτή η επίδραση θα πρέπει η $Y(t)$ να περιέχει κάποια ιδιαίτερη πληροφορία για το ποια τιμή θα λάβει η $X(t+1)$ στο κοντινό μέλλον.

Ο παραπάνω ορισμός είναι γενικός και γι'αυτόν τον λόγο δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην πράξη, όταν δηλαδή έχουμε πραγματικά δεδομένα. Έτσι θα δώσουμε έναν νέο ορισμό πιο λειτουργικό απ'τον προηγούμενο.

Υποθέτουμε ότι ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα ότι ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών Y_t αιτιάζεται ένα άλλο διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών X_t . Έστω J_n ένα σύνολο πληροφοριών που είναι διαθέσιμο τη χρονική στιγμή n το οποίο αποτελείται από όρους του διανύσματος Z_t .

$$J_n : Z_{n-j}, \quad j \geq 0$$

Το J_n θεωρείται ότι είναι το κατάλληλο σύνολο πληροφοριών όσον αφορά την X_t , αν η X_t περιλαμβάνεται στη Z_t . Επιπλέον, θεωρούμε ότι η Z_t δεν

περιλαμβάνει κανένα στοιχείο της Y_t και κατά συνέπεια η τομή των Z_t, Y_t είναι το μηδενικό σύνολο. Ακόμα, ορίζουμε

$$J'_n : Z_{n-j}, Y_{n-j}, j \geq 0$$

Δηλαδή, J'_n είναι το σύνολο των πληροφοριών J_n συν τις τιμές της Y_t απ'το παρελθόν μέχρι σήμερα.

Συμβολίζουμε με $F(X_{n+1} | J_n)$ τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X_{n+1} δοθέντος της J_n με μέσο $E[X_{n+1} | J_n]$.

Ορισμός 1: Η Y_n δεν αιτιάζεται την X_{n+1} ως προς J'_n εάν

$$F(X_{n+1} | J_n) = F(X_{n+1} | J'_n) \quad (10)$$

Δηλαδή η επιπλέον πληροφορία που περιέχεται στην J'_n δεν επηρεάζει την δεσμευμένη κατανομή. Η αναγκαία συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει είναι:

$$E[X_{n+1} | J_n] = E[X_{n+1} | J'_n] \quad (11)$$

Ορισμός 2: Εάν $J'_n \equiv \Omega_n$ είναι το πλήρες σύνολο πληροφοριών και αν

$$F(X_{n+1} | \Omega_n) \neq F(X_{n+1} | \Omega_n - Y_n) \quad (12)$$

τότε, λέμε ότι η Y_n αιτιάζεται (cause) την X_{n+1}

Ορισμός 3 : Εάν

$$F(X_{n+1} | J'_n) \neq F(X_{n+1} | J_n) \quad (13)$$

λέμε ότι η Y_n αιτιάζεται (cause) κατ'αρχήν (prima facie) την X_{n+1} ως προς το σύνολο πληροφοριών J'_n .

Ορισμός 4: Λέμε ότι η Y_n δεν αιτιάζεται την X_{n+1} στο μέσο ως προς την πληροφορία J_n' αν

$$\mathcal{D}_{n+1}(J_n') = E[X_{n+1} | J_n'] - E[X_{n+1} | J_n] = 0 \quad (14)$$

Ο ορισμός 2 είναι ισοδύναμος με τον γενικό ορισμό που παρουσιάσαμε παραπάνω και έχει παρουσιαστεί από τους Granger και Newbold το 1977.

2.2 Ορισμοί μη-αιτιότητας κατά Hsiao

Έστω $\{Y_t, t \in I\}$ είναι $n \times 1$ πολυμεταβλητή στοχαστική διαδικασία στους ακεραίους I με πεπερασμένες δεύτερες ροπές. $Y_t = (Y_{1,t}', Y_{2,t}', Y_{3,t}')'$ όπου $Y_{i,t} = (Y_{i1,t}', \dots, Y_{in_i,t}')'$, $i = 1, 2, 3$. Επιπλέον, $H_y(t)$ είναι ο χώρος του Hilbert που προέρχεται από τις συνιστώσες της Y_τ για $\tau \leq t$, $H_{y \setminus y_3}(t)$ είναι ο κλειστός υποχώρος του $H_y(t)$ που προέρχεται απ' τις συνιστώσες $(Y_{1,\tau}', Y_{2,\tau}')'$. Ομοίως, ορίζει $H_{y \setminus y_2}$ και έστω $H_{y \setminus y_2 y_3}(t)$ είναι κλειστός υποχώρος του $H_y(t)$ που προέρχονται απ' τις συνιστώσες της $Y_{1,\tau}$ για $\tau \leq t$. Για κάθε κλειστό υποχώρο, M , της $H_y(t)$ και για $1 \leq i \leq n_1$, συμβολίζει $(Y_{1i,t+k} | M)$ την ορθογώνια προβολή της $Y_{1i,t+k}$ στο M και

$$(Y_{1,t+k} | M) = [(Y_{11,t+k} | M), \dots, (Y_{1n_1,t+k} | M)]' \quad (15)$$

Ομοίως για $(Y_{2,t+k} | M)$.

Ορισμός 1: Το διάνυσμα Y_3 δεν αιτιάζεται κατά Granger την Y_1 ως προς $H_y(t)$ αν

$$(Y_{1,t+1} | H_y(t)) = (Y_{1,t+1} | H_{y \setminus y_3}(t)) \quad \forall t \in I. \quad (16)$$

Παρατηρείται ότι η παραπάνω συνθήκη δεν είναι αρκετή για να αποκλείσει κάθε σχέση αιτιότητας απ' την Y_3 στην Y_1 . Η συγκεκριμένη συνθήκη μπορεί να ικανοποιείται και η πληροφορία απ' το παρελθόν και το παρόν ίσως είναι ακόμα χρήσιμη στην πρόβλεψη της Y_1 περισσότερο από μια περίοδο μπροστά.

Διαισθητικά, αυτό μπορεί να συμβαίνει επειδή η Y_3 έχει μια επίδραση στην Y_2 η οποία με τη σειρά της ίσως επηρεάζει την Y_1 (indirect causality).

Ορισμός 2: Το διάνυσμα Y_3 δεν αιτιάζεται κατά Hsiao την Y_1 ως προς το $H_y(t)$ όταν συμβαίνει ένα απ'τα παρακάτω

$$i) (Y_{1,t+1} | H_y(t)) = (Y_{1,t+1} | H_{y \setminus y_2, y_3}(t)) \quad \forall t \in I \quad (17)$$

ή

$$ii) (Y_{1,t+1} | H_y(t)) = (Y_{1,t+1} | H_{y \setminus y_3}(t)) \quad (18)$$

και

$$(Y_{2,t+1} | H_y(t)) = (Y_{2,t+1} | H_{y \setminus y_3}(t)) \quad \forall t \in I \quad (19)$$

2.3 Ορισμοί μη-αιτιότητας κατά Dufour-Renault

Σύμφωνα με τους Dufour-Renault (1998) η μη-αιτιότητα ορίζεται σε όρους ορθογώνιων συνθηκών μεταξύ υποχώρων του χώρου Hilbert τυχαίων μεταβλητών. Συμβολίζουμε $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$ τον χώρο του Hilbert που αποτελείται από πραγματικές τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες δεύτερες ροπές ορισμένο στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$. Αν E και F είναι δύο υποχώροι του Hilbert απ'το L^2 , συμβολίζουν με $E+F$ τον μικρότερο υποχώρο του L^2 ο οποίος περιέχει το E αλλά και το F , ενώ το $E \setminus F$ αντιπροσωπεύει τον μικρότερο υποχώρο του Hilbert απ'το L^2 το οποίο περιέχει τη διαφορά

$$E - F = E \cap F' = \{x : x \in E, x \notin F\}$$

Η πληροφορία που είναι διαθέσιμη τη χρονική στιγμή t που ορίζεται από έναν υποχώρο του L^2 και την συμβολίζουμε με $I(t)$, όπου t είναι ακέραιος.

Θεωρούμε μια ακολουθία I από τους παραπάνω υποχώρους

$I = \{I(t) : t \in \mathbb{Z}, t > \omega\}$ και $t < t' \Rightarrow I(t) \subseteq I(t') \quad \forall t > \omega$, όπου $I(t)$ είναι υποχώρος του Hilbert του L^2 , $\omega \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ αποτελεί το σημείο έναρξης και το \mathbb{Z}

είναι το σύνολο των ακεραίων. Θεωρούν επίσης, τρεις πολυμεταβλητές στοχαστικές διαδικασίες

$$X = \{X(t) : t \in Z, t > \omega\} \quad Y = \{Y(t) : t \in Z, t > \omega\}$$

$$Z = \{Z(t) : t \in Z, t > \omega\}$$

όπου $X(t) = (x_1(t), \dots, x_{m_1}(t))'$, $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_{m_2}(t))'$, $Z(t) = (z_1(t), \dots, z_{m_3}(t))'$, $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$, $m_3 \geq 0$ και $x_i(t) \in L^2$, $y_i(t) \in L^2$, $z_i(t) \in L^2$ για όλα τα i . Επιπλέον, το H είναι (πιθανόν άδειος) υποχώρος του Hilbert του L^2 , του οποίου τα στοιχεία αντιπροσωπεύουν την διαθέσιμη πληροφορία κάθε στιγμή ως ανεξάρτητες μεταβλητές του χρόνου και ντετερμινιστικές διαδικασίες (ντετερμινιστικές τάσεις). Συμβολίζουν με $X(\omega, t]$ τον χώρο του Hilbert χωρισμένο απ'τα στοιχεία $x_i(\tau)$, $i = 1, \dots, m_1$ του $X(\tau)$ με $\omega < \tau \leq t$ και ομοίως για $Y(\omega, t]$ και $Z(\omega, t]$. Τα $X(\omega, t]$, $Y(\omega, t]$, $Z(\omega, t]$ αντιπροσωπεύουν την πληροφορία που περιέχεται στην "ιστορία" των μεταβλητών X, Y, Z αντίστοιχα μέχρι τον χρόνο t . Τέλος, τα σύνολα της πληροφορίας που παρατηρείται προσθέτοντας το $X(\omega, t]$ στο $I(t)$ και το $Y(\omega, t]$ στο $I_X(t)$ ορίζονται ως

$$I_X(t) = I(t) + X(\omega, t], \quad I_{XY}(t) = I_X(t) + Y(\omega, t]$$

και ομοίως για $I_Y(t), I_Z(t), I_{XZ}(t)$ κτλ. Σε αρκετές περιπτώσεις το σύνολο πληροφοριών $I(t)$ περιλαμβάνει το $Z(\omega, t]$, αλλά μπορεί να μην περιέχει το $X(\omega, t]$ ή το $Y(\omega, t]$.

Για κάθε σύνολο πληροφοριών B_t (υποχώρος του Hilbert) και θετικό ακέραιο h , συμβολίζουν $P[x_i(t+h) | B_t]$ την καλύτερη γραμμική πρόβλεψη του $x_i(t+h)$ βασιζόμενοι στο σύνολο πληροφοριών B_t ,

$$u[x_i(t+h) | B_t] = x_i(t+h) - P[x_i(t+h) | B_t] \quad (20)$$

είναι το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης και

$$\sigma^2[x_i(t+h) | B_t] = E \left\{ u[x_i(t+h) | B_t]^2 \right\} \quad (21)$$

Τότε, η καλύτερη γραμμική πρόβλεψη του $X(t+h)$ είναι

$$P[X(t+h) | B_t] = (P[x_1(t+h) | B_t], \dots, P[x_{m_1}(t+h) | B_t])' \quad (22)$$

και το αντίστοιχο διάνυσμα των σφαλμάτων πρόβλεψης

$$U[X(t+h) | B_t] = (u[x_1(t+h) | B_t], \dots, u[x_{m_1}(t+h) | B_t])' \quad (23)$$

Ορισμός: Μη-αιτιότητας σε χρονικό ορίζοντα h (Non-causality at Horizon h):
Έστω $h \geq 1$.

i) Η Y δεν αιτιάζεται την X σε ορίζοντα h δοθέντος του I ($Y \not\rightarrow_h X | I$) αν

$$P[X(t+h) | I_X(t)] = P[X(t+h) | I_{XY}(t)] \quad (24)$$

για $t > \omega$, όπου $I_X(t) = I(t) + X(\omega, t]$ και $I_{XY}(t) = I_X(t) + Y(\omega, t]$

ii) Η Y δεν αιτιάζεται την X μέχρι τον ορίζοντα h δοθέντος του I ($Y \not\rightarrow_{(h)} X | I$)

αν

$$Y \not\rightarrow_k X | I \text{ για } k = 1, 2, \dots, h$$

iii) Η Y δεν αιτιάζεται την X σε κάθε ορίζοντα δοθέντος του I ($Y \not\rightarrow_{(\infty)} X | I$)

αν

$$Y \not\rightarrow_k X | I \text{ για όλα τα } k = 1, 2, \dots$$

Ορισμός: Μη-αιτιότητα σε διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες:

Για $h \in \mathbb{N}$ λέμε ότι:

α) η Y δεν αιτιάζεται την X στον ορίζοντα h δοθέντος της πληροφορίας I και το συμβολίζουμε $Y \not\rightarrow_h X | I$ αν

$$P[X_{t+h} | I_t] = P[X_{t+h} | I_t + Y_{(\omega, t]}], \quad \forall t > \omega \quad (25)$$

β) η Y δεν αιτιάζεται την X μέχρι τον ορίζοντα h δοθέντος της I και το συμβολίζουμε $Y \not\rightarrow_{(h)} X | I$ αν

$$Y \not\rightarrow_k X | I \text{ για } k = 1, 2, \dots, h$$

γ) η Y δεν αιτιάζεται την X σε κάθε ορίζοντα δοθέντος της I και το συμβολίζουμε $Y \not\rightarrow_{(\infty)} X | I$ αν

$$Y \not\rightarrow_k X | I \quad \text{για όλα τα } k \in \mathbb{N}$$

Ορισμός: Αδέσμευτη μη-αιτιότητα σε ορίζοντα h (Unconditional Non-causality at Horizon h)

Έστω $h \geq 1$.

i) Η Y δεν αιτιάζεται την X στον ορίζοντα h δοθέντος της πληροφορίας I , χωρίς δέσμευση ως προς το Z ($Y \not\rightarrow_h X | I_{(Z)}$) εάν

$$P[X(t+h) | I_{(Z)X}(t)] = P[X(t+h) | I_{(Z)XY}(t)], \quad \forall t > \omega \quad (26)$$

όπου $I_{(Z)X}(t) = I_{(Z)}(t) + X(\omega, t]$, $I_{(Z)XY}(t) = I_{(Z)X}(t) + Y(\omega, t]$ και

$$I_{(Z)}(t) = I(t) \setminus Z(\omega, t]$$

ii) Η Y δεν αιτιάζεται την X μέχρι τον ορίζοντα h δοθέντος του I , χωρίς δέσμευση ως προς το Z αν

$$Y \not\rightarrow_k X | I_{(Z)} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots, h$$

iii) Η Y δεν αιτιάζεται την X σε κάθε ορίζοντα δοθέντος του I , χωρίς δέσμευση ως προς το Z [$Y \not\rightarrow_{(\infty)} X | I_{(Z)}$] αν

$$Y \not\rightarrow_k X | I \quad \text{για όλα τα } k = 1, 2, \dots$$

Αν το Z είναι κενό ($m_3 = 0$) δεν υπάρχει αποτελεσματική συνθήκη και χρησιμοποιείται $I_{(Z)X}(t) = I_X(t)$ και $I_{(Z)XY}(t) = I_{XY}(t)$.

Βάσει των παραπάνω ορισμών, μπορούν να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

α) Η μελέτη των Dufour-Renault (1998) μπορεί να θεωρηθεί ως μια προέκταση της μελέτης του Hsiao (1982), καθώς αυτός ήταν ο πρώτος που έκανε λόγο για “έμμεσες αιτιώδεις σχέσεις και επιδράσεις” μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιώντας μια τρίτη βοηθητική μεταβλητή.

β) Στην περίπτωση που εξετάζουμε αν υπάρχει αιτιώδης σχέση στον ορίζοντα ένα ($h = 1$), ουσιαστικά ελέγχουμε αν παρατηρείται αιτιότητα κατά Granger.

γ) Αναφέρονται σε “short-run” αιτιότητα όταν το h είναι σχετικά μικρό και σε “long-run” αιτιότητα όταν το h είναι σχετικά μεγάλο. Ο χρονικός ορίζοντας h προσδιορίζει το πόσο “μακριά” μπορεί κανείς να πραγματοποιήσει μια πρόβλεψη.

δ) Δεν υπάρχει περιορισμός για την ετεροσκεδαστικότητα των διαταρακτικών όρων.

ε) Αν αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει αιτιότητα κατά Granger ($h = 1$), αυτό δεν σημαίνει ότι δεν παρατηρείται αιτιότητα σε κάποιο μεγαλύτερο h .

στ) Παρότι η έννοια της μη-αιτιότητας σε όλους τους ορίζοντες ομοιάζει με αυτή που ανέπτυξε ο *Lütkepohl* (1993), δεν είναι ακριβώς ίδια, επειδή αυτή βασίζεται στην απουσία των επιδράσεων των διαταρακτικών όρων της μιας μεταβλητής στην άλλη (μηδενικοί συντελεστές στους όρους του κινητού μέσου MA) αντί της απουσίας των παρελθοντικών τιμών της μιας μεταβλητής στην βέλτιστη πρόβλεψη μιας άλλης.

ζ) Η μη στασιμότητα δεν αποτελεί πρόβλημα.

2.4 Υπόδειγμα Αυτοπαλίνδρομου Διανύσματος (Vector AutoRegressive (VAR) Model)

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί ένα υπόδειγμα Αυτοπαλίνδρομου Διανύσματος (VAR), καθώς θα χρησιμοποιηθεί αρκετά στη συνέχεια. Τα VAR μοντέλα, χρησιμοποιούνται ευρέως στην ανάλυση χρονοσειρών και προσπαθούν να εξηγήσουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των

μεταβλητών λαμβάνοντας υπόψη και την ενδογένεια. Πρέπει να σημειωθεί πως για να εφαρμοστεί ένα VAR μοντέλο, θα πρέπει οι σειρές να είναι στάσιμες. Η συνήθης εμφάνιση ενός διανυσματικού αυτοπαλίνδρομου μοντέλου τάξης p είναι

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + B I_t + \varepsilon_t, \quad (27)$$

όπου

y_t : διάνυσμα ενδογενών μεταβλητών

I_t : διάνυσμα εξωγενών μεταβλητών

A_1, \dots, A_p και B : μήτρες συντελεστών

ε_t : το διάνυσμα των σφαλμάτων ή διαταρακτικών όρων

Η εκτίμηση των παραμέτρων, εφόσον εμφανίζονται μόνο ενδογενείς μεταβλητές με χρονική υστέρηση στο δεξί μέλος των εξισώσεων, γίνεται με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares (OLS)).

Στην περίπτωση που έχουμε δύο μεταβλητές, το VAR μοντέλο παίρνει την μορφή

$$y_t = c_1 + \sum_{i=1}^p \delta_{1,i} y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_{1,j} x_{t-j} + u_{1,t} \quad (28)$$

$$x_t = c_2 + \sum_{i=1}^p \delta_{2,i} y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_{2,j} x_{t-j} + u_{2,t} \quad (29)$$

με

$$\begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{bmatrix} \sim N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

2.5 Η έννοια της συνολοκλήρωσης (cointegration)

Η έννοια της συνολοκλήρωσης αναπτύχθηκε απ'τους Granger και Engle το 1987 και αναφέρεται στην ύπαρξη μιας σταθερής σχέσης ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες μεταβλητές μακροχρόνια. Αυτό βέβαια, δεν αποκλείει βραχυχρόνια να παρατηρείται ανισορροπία η οποία απεικονίζεται μέσω των σφαλμάτων (διαταρακτικών όρων).

Έστω ότι έχουμε, δύο ή περισσότερες μη στάσιμες σειρές του ίδιου βαθμού ολοκληρωσιμότητας d (integrated, $I(d)$). Τότε, ονομάζονται συνολοκληρωμένες (cointegrated), αν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός ή διάνυσμα γραμμικών τους συνδυασμών που να είναι βαθμού ολοκλήρωσης c , μικρότερου απ'τον d που έχουν από μόνες τους οι μεταβλητές ενδιαφέροντος.

Σύμφωνα με τον αυστηρότερο ορισμό που δόθηκε απ'τους Granger και Engle, οι μεταβλητές $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}$ χαρακτηρίζονται συνολοκληρωμένες τάξεως d, b και συμβολίζεται $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt} \quad CI(d, b)$ όταν ισχύουν τα παρακάτω:

- 1) Όλες οι μεταβλητές είναι ολοκληρωμένες τάξεως d
- 2) Υπάρχει ένα διάνυσμα $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ τέτοιο ώστε ο γραμμικός συνδυασμός $\beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_n x_{nt}$ να είναι ολοκληρωμένος τάξεως $d-b$, $b > 0$.

Το διάνυσμα β ονομάζεται διάνυσμα συνολοκλήρωσης και πρέπει να σημειωθεί ότι δεν είναι μοναδικό. Αν υπάρχουν " k " μεταβλητές, τότε μπορεί να υπάρχουν το πολύ " $k-1$ " γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα συνολοκλήρωσης. Ο αριθμός αυτών των διανυσμάτων, καλείται τάξη συνολοκλήρωσης των σειρών. Επίσης, αν δεχθούμε ότι υπάρχει μια μακροχρόνια σχέση ισορροπίας, θα πρέπει τα σφάλματα ισορροπίας (κατάλοιπα παλινδρόμησης) να σχηματίζουν μια στάσιμη σειρά και αυτό αποτελεί έναν έλεγχο για την ύπαρξη συνολοκλήρωσης.

2.6 Υπόδειγμα Διόρθωσης Λαθών (Vector Error Correction Model [VEC])

Στην περίπτωση που δύο σειρές βρεθεί ότι είναι συνολοκληρωμένες, τότε χρησιμοποιείται το Υπόδειγμα Διόρθωσης Λαθών (VEC). Το υπόδειγμα VEC, ουσιαστικά αποτελεί μια προέκταση του VAR (Vector AutoRegressive) μοντέλου στο οποίο προσθέτουμε σαν επεξηγηματική μεταβλητή τον μηχανισμό διόρθωσης σφαλμάτων που προκύπτει απ'την συνολοκλήρωση των σειρών. Αν λοιπόν, δύο μεταβλητές x_t, y_t είναι συνολοκληρωμένες το μοντέλο VEC(p), έχει την μορφή

$$\Delta y_t = c_1 + \rho_1(y_{t-1} - a - \beta x_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \delta_{1,i} \Delta y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_{1,j} \Delta x_{t-j} + u_{1,t} \quad (30)$$

$$\Delta x_t = c_2 + \rho_2(y_{t-1} - a - \beta x_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \delta_{2,i} \Delta y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_{2,j} \Delta x_{t-j} + u_{2,t} \quad (31)$$

όπου β είναι η παράμετρος του διανύσματος συνολοκλήρωσης, τα διανύσματα $u_{1,t}, u_{2,t}$ είναι λευκοί θόρυβοι (white noise) και τα $c_1, c_2, \rho_1, \rho_2, \delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}$ είναι παράμετροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΕΣΤ ΓΙΑ ΤΟΝ ΈΛΕΓΧΟ ΑΙΤΙΟΤΗΤΑΣ

3.1 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Granger

Ο πρώτος τρόπος που χρησιμοποιήθηκε για να εντοπιστεί μια σχέση αιτιότητας μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών ήταν η μέθοδος των Box-Jenkins. Η μέθοδος αυτή βασιζόταν στον προσδιορισμό του κατάλληλου μοντέλου ARMA (AutoRegressive Moving Average) που μπορούσε να περιγράψει καλύτερα τις κινήσεις της κάθε μεταβλητής και στη συνέχεια γινόταν έλεγχος για την ανεξαρτησία των καταλοίπων των παλινδρομήσεων. Αργότερα όμως, αυτή η μέθοδος δέχτηκε επικρίσεις καθώς πολλές φορές οδηγούσε σε λανθασμένα συμπεράσματα για την μονόδρομη αιτιότητα ενώ και η στατιστική του ισχύς δεν ήταν δεδομένη.

Έτσι, χρησιμοποιείται το κριτήριο του Granger για τον εντοπισμό αιτιώδους σχέσεως ανάμεσα σε δυο μεταβλητές, η παρουσίαση του οποίου ακολουθεί.

Έστω ότι έχουμε την διπλή παλινδρόμηση

$$Y_t = c_1 + \sum_{i=1}^p \delta_{1i} y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_{1j} x_{t-j} + u_{1t} \quad (32)$$

$$X_t = c_2 + \sum_{i=1}^p \delta_{2i} y_{t-i} + \sum_{j=1}^p \gamma_{2j} x_{t-j} + u_{2t} \quad (33)$$

όπου p είναι το πλήθος των υστερήσεων, ενώ τα σφάλματα ικανοποιούν τις υποθέσεις της παλινδρόμησης

$$E(u_{1t})=E(u_{2t})=0 \text{ και } \text{Cov}(u_{1s}, u_{1t}) = \text{Cov}(u_{2s}, u_{2t}) = 0, \text{ με } t \neq s$$

Από τις δύο παραπάνω παλινδρομήσεις, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- 1) Εάν στην πρώτη παλινδρόμηση (32) οι συντελεστές γ_{1j} δεν είναι στατιστικά σημαντικοί (δηλαδή δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση ότι είναι μηδέν) για όλα τα $j=1,2,\dots,p$ ενώ στη δεύτερη (33) οι συντελεστές δ_{2i} είναι στατιστικά σημαντικοί (δηλαδή έχουμε ενδείξεις για

παραβίαση της μηδενικής υπόθεσης ότι είναι μηδέν) για $i=1,2,\dots,p$ λέμε ότι η Y_t αιτιάζεται κατά Granger την X_t .

- 2) Αν οι συντελεστές γ_{1j} στην πρώτη παλινδρόμηση είναι στατιστικά σημαντικοί για $j=1,2,\dots,p$ ενώ οι δ_{2i} στη δεύτερη παλινδρόμηση δεν είναι στατιστικά σημαντικοί, λέμε ότι η X_t αιτιάζεται κατά Granger την Y_t .
- 3) Αν οι συντελεστές γ_{1j} στην πρώτη παλινδρόμηση είναι στατιστικά σημαντικοί και το ίδιο ισχύει για τους συντελεστές δ_{2i} στη δεύτερη παλινδρόμηση, υπάρχει αμφίδρομη αιτιότητα κατά Granger
- 4) Αν οι συντελεστές γ_{1j} στην πρώτη παλινδρόμηση δεν είναι στατιστικά σημαντικοί και το ίδιο ισχύει για τους συντελεστές δ_{2i} στη δεύτερη, οι μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες.

Ο έλεγχος των παραπάνω υποθέσεων πραγματοποιείται με τη χρήση της στατιστικής συνάρτησης F που ορίζεται

$$F = \frac{(SSE^* - SSE) / p}{SSE / (n - k)} \quad (34)$$

όπου,

SSE^* : το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων (residuals) στην παλινδρόμηση με περιορισμό, όταν δηλαδή δεν περιλαμβάνονται οι p όροι X_{t-j} Y_{t-i}

SSE : το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων χωρίς περιορισμό

n : το μέγεθος του δείγματος

k : ο αριθμός των παραμέτρων στην παλινδρόμηση

Η στατιστική συνάρτηση F ακολουθεί F -κατανομή με p και $(n-k)$ βαθμούς ελευθερίας

$$F \sim F(p, n - k)$$

3.2 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Sims

Ο Sims το 1972 θεώρησε τις μεταβλητές X_t, Y_t για τα χρήματα και το εισόδημα αντίστοιχα, και επειδή δεν ήταν στάσιμες αυτές οι σειρές, χρησιμοποίησε τους λογαρίθμους τους με αποτέλεσμα να έχει τις νέες μεταβλητές x_t, y_t οι οποίες βέβαια, είναι στάσιμες. Στη συνέχεια θεώρησε το παρακάτω αυτοπαλίνδρομο των x_t, y_t .

$$\begin{pmatrix} b_{11}(L) & b_{12}(L) \\ b_{21}(L) & b_{22}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \quad (35)$$

όπου $b_{ij}(L)$ είναι ένα πολυώνυμο του γεννήτορα υστερήσεων L , $i, j=1,2$ και u_t, v_t είναι ασυσχέτιστα σφάλματα λευκού θορύβου (white noise errors). Όπως σημειώνει ο Sims (1972, σελ. 544), ο Granger είχε δείξει ότι αν υπάρχει μια μορφή αυτοπαλινδρόμησης σαν την παραπάνω, η απουσία αιτιότητας, κατά Granger, είναι ισοδύναμη με την συνθήκη ότι $b_{12}(L) \equiv 0$, οπότε έχουμε

$$b_{11}(L)x_t = u_t \quad (36)$$

$$b_{22}(L)y_t + b_{21}(L)x_t = v_t \quad (37)$$

Οι διαταρακτικοί παράγοντες u_t και v_t είναι αμοιβαία ασυσχέτιστοι και δεν έχουν αυτοσυσχέτιση. Έχουμε την δυναμική παλινδρόμηση για το y_t

$$y_t = -\frac{b_{21}(L)}{b_{22}(L)}x_t + \frac{1}{b_{22}(L)}v_t = V(L)x_t + \frac{1}{b_{22}(L)}v_t \quad (38)$$

$$\text{με } V(L) \equiv -\frac{b_{21}(L)}{b_{22}(L)}.$$

Παρατηρούμε ότι ο διαταρακτικός παράγοντας είναι στη μορφή ενός “moving average” $b_{22}^{-1}(L)v_t$ και έτσι μπορεί γενικά να έχει αυτοσυσχέτιση. Στην ειδική περίπτωση που δεν έχουμε χρονικές υστερήσεις για τον όρο $b_{22}(L)$, δεν παρουσιάζεται αυτοσυσχέτιση στον v_t . Απ’την άλλη, αν οι μη-στάσιμες σειρές

X_t , Y_t είναι σχετιζόμενες με μια σχέση $Y_t = V(L)X_t + w_t$ και ένα φίλτρο $C(L)$ εφαρμόζεται και στα δύο μέλη, έχουμε $C(L)Y_t = C(L)V(L)X_t + C(L)w_t$ ή $y_t = V(L)x_t + C(L)w_t$.

Τότε, αν $w_t = \frac{v_t}{C(L)}$, $y_t = V(L)x_t + v_t$

Ο διαταρακτικός παράγοντας v_t στην τελευταία εξίσωση διαφέρει από το $b_{22}^{-1}(L)v_t$ που είχαμε βρει παραπάνω. Έτσι, σε όρους του συστήματος (37) με $x_t = C(L)Y_t$ και $y_t = C(L)Y_t$, το αποτέλεσμα στην (38) μας δείχνει ότι οι διαταρακτικοί όροι, στην γενική περίπτωση, θα έχουν αυτοσυσχέτιση. Αν λοιπόν η σχέση $Y_t = V(L)X_t + w_t$ θεωρηθεί το σημείο εκκίνησης, σίγουρα δεν προέρχεται απ'το σύστημα (37) και αν πολλαπλασιαστούν και τα δύο μέλη με $C(L)$ θα'χει αυτοσυσχετιζόμενα κατάλοιπα. Ο ίδιος ο Sims είχε παραδεχτεί (1972 σελ. 549) πως υπήρχαν αμφιβολίες ως προς την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μέσω της F κατανομής, για τους συντελεστές της παλινδρόμησης.

Επίσης, σκεπτόμενος το συμπέρασμα της συνθήκης $e(L) = 0$ για την προβολή του y_t σε σχέση με τις τρέχουσες και παρελθοντικές τιμές της x_t γράφει

$$y_t = f_1(L)x_t + u_t = \sum_{s=0}^{\infty} f_{1s}x_{t-s} + u_t \quad (39)$$

$$\text{COV}(u_t, x_{t-s}) = 0, \quad s \geq 0 \quad (40)$$

και για την προβολή του y_t στο μέλλον σε σχέση με τις τρέχουσες και παρελθοντικές τιμές της x_t

$$y_t = f_2(L)x_t + v_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_{2s}x_{t-s} + v_t \quad (41)$$

$$\text{COV}(v_t, x_{t-s}) = 0, \quad \forall s \quad (42)$$

Έδειξε ότι $e(L) = 0$, π.χ. η Y_t δεν αιτιάζεται την x_t , αν και μόνο αν στον δεύτερο τύπο έχουμε μόνο τρέχουσες και παρελθοντικές τιμές, δηλαδή $f_1(L) = f_2(L)$. Έτσι, ουσιαστικά, το τεστ του Sims έγκειται ακριβώς στο να ελέγξουμε την υπόθεση $f_1(L) = f_2(L)$ αν ενδιαφερόμαστε για την υπόθεση ότι η Y_t δεν αιτιάζεται την x_t . Ο περιορισμός $f_1(L) = f_2(L)$ στηρίζεται στο ισοδύναμο $u_t = v_t$.

Εάν κάτω απ'την παραπάνω υπόθεση το $f_2(L)$ είναι πολυώνυμο με όρους $L^{-p}, \dots, L^{-1}, 0, L, \dots, L^q$ τότε το τεστ μπορεί να βασιστεί στις παλινδρομήσεις

$$y_t = F_1(L)x_t + U_t = \sum_{s=0}^q F_{1s}x_{t-s} + U_t \quad (43)$$

$$y_t = F_2(L)x_t + V_t = \sum_{s=-p}^q F_{2s}x_{t-s} + V_t \quad (44)$$

Όταν χρησιμοποιείται απ'την αρχή ένα "φίλτρο" για να μπορούμε ν' ανταπεξέλθουμε στην σειριακή συσχέτιση (serial correlation), τα Y_t και x_t αντικαθίστανται από $y_t^* = R(L)y_t$ και $x_t^* = R(L)x_t$ αντίστοιχα. Οι παλινδρομήσεις τότε, μπορούν να εκτιμηθούν με την κλασσική μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (OLS) και το τεστ $F_1(L) = F_2(L)$ διεξάγεται χρησιμοποιώντας ένα συμβατό στατιστικό τεστ Wald.

Σε έναν τυπικό, δύο βημάτων εκτιμητή, η δεύτερη παλινδρόμηση εκτιμάται με την κλασσική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Υποθέτουμε ότι $\Omega_n^v = \text{var}(V_1, \dots, V_n) = \Omega_n^v(a_v)$

όπου η συνάρτηση $\Omega^v(\cdot)$ είναι γνωστή αλλά το $m_v \times 1$ διάνυσμα a_v είναι άγνωστο. Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας \hat{a}_v της a_v υπολογίζεται αγνοώντας τις διαφορές μεταξύ των καταλοίπων που προήλθαν απ'την παλινδρόμηση (με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων) και της V_t . Το διάνυσμα

των συντελεστών \hat{F}_2 εκτιμάται μέσω της γενικευμένης μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (Generalized Least Squares), αντικαθιστώντας Ω_n^v με $\Omega_n^v(\hat{a}_v)$ το οποίο μας δίνει ένα διάνυσμα καταλοίπων V . Για να σχηματίσουμε το Wald test, εκτιμάμε την πρώτη παλινδρόμηση μέσω της γενικευμένης μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων, αντικαθιστώντας το Ω_n^u με $\Omega_n^u(\hat{a}_v)$ παίρνοντας ένα διάνυσμα καταλοίπων U . Το στατιστικό τεστ είναι

$$T^{(SW)} = \hat{U}'_v (\Omega_n^v(\hat{a}_v))^{-1} \hat{U}_v - \hat{V}' (\Omega_n^v(\hat{a}_v))^{-1} \hat{V} \quad (45)$$

Το στατιστικό τεστ μέσω του πολλαπλασιαστή LaGrange σχηματίζεται αντικαθιστώντας την (44) με την (43) με σκοπό να παρατηρήσουμε μια δομή σειριακής συσχέτισης (serial correlation) των διαταραχών. Έτσι, η στατιστική συνάρτηση θα έχει τη μορφή

$$T^{(SL)} = \hat{U}' (\Omega_n^u(\hat{a}_u))^{-1} \hat{U} - \hat{V}'_u (\Omega_n^u(\hat{a}_u))^{-1} \hat{V}_u \quad (46)$$

Κάτω απ'την μηδενική υπόθεση οι κατανομές των (45),(46) συγκλίνουν στην $\chi^2(p)$

3.3 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Feige and Pearce

Αντίθετα απ'τον Sims, οι Feige and Pearce (1976) και Pierce (1977) δεν εκτιμούν απευθείας μια δυναμική παλινδρόμηση. Η διαδικασία που ακολουθούν είναι η εξής: α) χρησιμοποιούν πρώτες ή δεύτερες διαφορές ώστε να γίνουν οι σειρές τους στάσιμες, β) σχηματίζουν αυτοπαλίνδρομα κινητού μέσου (AutoRegressive Moving Average (ARMA)) μοντέλα για τις “νέες” στάσιμες σειρές, όπου

$$\text{ARMA}(p,q): Y_t = c + p_1 y_{t-1} + \dots + p_p y_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \dots + \theta_q u_{t-q} + u_t \quad (47)$$

και γ) υπολογίζουν τις σταυροειδείς συσχετίσεις τόσο με χρονική υστέρηση όσο και χωρίς υστέρηση, των εκτιμωμένων καταλοίπων απ'τα ARMA μοντέλα, για να ελέγξουν την ύπαρξη συσχέτισης. Επίσης, στο (γ) ένας μεγάλος αριθμός

δοκιμαστικών χ^2 -τεστ εφαρμόζονται για να ελέγξουν την υπόθεση ότι οι σταυροειδείς συσχετίσεις του “πληθυσμού” είναι όλες μηδέν. Το τελευταίο βήμα, σύμφωνα με τον Pierce (1977) σχετίζεται στενά, αλλά δεν είναι ακριβώς το ίδιο με την ανάλυση ενός δυναμικού μοντέλου παλινδρόμησης που εφάρμοσε ο Sims (1972).

3.4 Έλεγχος ύπαρξης αιτιότητας κατά Pierce and Haugh

Οι Pierce και Haugh το 1977 πρότειναν μια διαδικασία για τον έλεγχο αιτιότητας στον οποίο η κάθε μεταβλητή είναι μετασχηματισμένη είτε παίρνοντας πρώτες διαφορές είτε παίρνοντας λογαριθμικές μορφές ώστε ν'αποκτήσουν οι σειρές μας σταθερό μέσο και διακύμανση και στη συνέχεια υπολογίζονται ARMA (AutoRegressive-Moving Average) μοντέλα για κάθε μία απ'τις μετασχηματισμένες μεταβλητές. Για παράδειγμα, ένα μοντέλο ARIMA για την μεταβλητή X είναι

$$\varphi_p(L)(1-L)^d X_t = a + \varphi_q(L)u_t, \quad (48)$$

όπου φ_p και φ_q είναι αυτοπαλίνδρομα και κινητού μέσου (moving average) πολυώνυμα με χρονικές υστερήσεις p και q , d είναι το πόσες φορές παίρνουμε πρώτες διαφορές, ενώ a είναι ένας σταθερός όρος.

Οι Pierce και Haugh το 1977 πρότειναν και μια διαφορετική λύση για τον έλεγχο unidirectional αιτιότητας μέσω μιας τεχνικής που είναι γνωστή ως Box-Jenkins δυναμικά μοντέλα παλινδρόμησης (Dynamic Regression Models (DRM)) της μορφής

$$Y_t = V(L)X_{t-b} + \frac{\theta(L)}{\varphi(L)}e_t \quad (49)$$

όπου $V(L) = \delta^{-1}(L)\omega(L)$ είναι παράμετροι του μοντέλου με την μετασχηματισμένη μεταβλητή, $\theta(L)$ και $\varphi(L)$ είναι κινητού μέσου και αυτοπαλίνδρομα πολυώνυμα αντίστοιχα, ενώ το L συμβολίζει τις χρονικές υστερήσεις. Το e_t είναι λευκός θόρυβος (white noise) και το b παράμετρος υστέρησης για το X .

Η μέθοδος ξεκινάει προσδιορίζοντας το μοντέλο DRM είτε μέσω της διαδικασίας που προτείνουν οι Haugh-Box (1977) είτε μέσω των μεθόδων των Box και Jenkins (1970 σελ.379-380). Στην τελευταία μέθοδο εφαρμόζονται δύο διαγνωστικοί έλεγχοι. Στον πρώτο, γίνεται έλεγχος για το αν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα (e_t) του μοντέλου που έχουμε χρησιμοποιήσει, και στον δεύτερο ελέγχεται αν υπάρχει σταυροειδής συσχέτιση μεταξύ των καταλοίπων και κάποιας ή κάποιων εκ των μεταβλητών εισόδου. Αν επιλεγθεί ένα λάθος μοντέλο, τότε θα παρατηρείται αυτοσυσχέτιση στα κατάλοιπα αλλά και σταυροειδής συσχέτιση με τη μεταβλητή εισόδου. Οι αυτοσυσχετίσεις $r^2(\hat{e}, \hat{e}; k)$ για χρονικές υστερήσεις k και σταυροειδείς συσχετίσεις $r^2(a, \hat{e}; k)$ για τις ίδιες υστερήσεις, μπορούν να ελεγχθούν για τη σημαντικότητά τους μέσω των στατιστικών τεστ

$$Q = n \sum_{k=1}^m r^2(\hat{e}, \hat{e}; k) \quad (50)$$

και

$$S = n \sum_{k=0}^m r^2(a, \hat{e}; k) \quad (51)$$

όπου “ n ” είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων, “ m ” είναι ο αριθμός των χρονικών υστερήσεων που θεωρούμε, τα οποία ακολουθούν χ^2 κατανομή με $k-p-q$ βαθμούς ελευθερίας για την Q και $k-r-s$ βαθμούς ελευθερίας για την S και τα οποία ελέγχουν την μηδενική υπόθεση απουσίας όλων των αυτοσυσχετίσεων και σταυροειδών συσχετίσεων αντίστοιχα.

Σημειώνεται, ότι σε περιπτώσεις που διαθέτουμε μικρά δείγματα, χρησιμοποιούνται τα Modified Q (Ljung and Box (1978)) και Modified S (Pierce (1972))

$$MQ = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} [r(\hat{e}, \hat{e}; k)]^2 - x^2(k-p-q) \quad (52)$$

$$MS = n^2 \sum_{k=0}^m (n-k)^{-1} [r(a, \hat{e}; k)]^2 - x^2(k-r-s) \quad (53)$$

Το τεστ για μονόδρομη αιτιότητα που προτάθηκε απ’τους Pierce and Haugh (1977) στηρίχτηκε σε αυτή την ανάλυση. Πρότειναν ότι ένα ασυμπτωτικό έγκυρο τεστ για την μηδενική υπόθεση της μονόδρομης αιτιότητας έναντι της

εναλλακτικής της ανάδρασης (feedback) (ή πιο συγκεκριμένα ένα τεστ για την μηδενική υπόθεση ότι η Y δεν αιτιάζεται την X έστω και αν στιγμιαία φαίνεται $X \rightarrow Y$) μπορεί να στηριχτεί στην χ^2 σχηματισμένη για σταυροειδείς συσχετίσεις και αρνητικές χρονικές υστερήσεις. Η βασική υπόθεση πίσω από αυτό το τεστ είναι ότι τα παρελθοντικά κατάλοιπα δεν περιέχουν καμία πληροφορία που μπορεί να επηρεάσει την μεταβλητή εισόδου “ a ”. Αν περιέχει κάποια σημαντική πληροφορία (χ^2 στατιστικά σημαντικό), τότε μια ανάδραση (feedback) απ’το Y στο X είναι πιθανόν να ισχύει.

Σύμφωνα με τον Gupta (Testing Causality, International Journal of Forecasting 3 (1987)), υπάρχουν αρκετά προβλήματα στο κατά πόσο τα αποτελέσματα απ’τα παραπάνω τεστ μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστα.

Πρώτον, απ’τη στιγμή που εφαρμόζουμε δυναμικά μοντέλα παλινδρόμησης έχουμε ήδη κάνει μια θεωρητική κρίση, ξεχωρίζοντας την αιτία απ’το αποτέλεσμα.

Δεύτερον, το να προσδιορίσουμε το κατάλληλο μοντέλο ARIMA είναι περισσότερο “τέχνη”, καθώς δεν υπάρχει βέλτιστο κριτήριο ούτε για την επιλογή του μοντέλου, αλλά ούτε και για της μεταβλητές εισόδου.

Τρίτον, ακόμα και αν, έστω τυχαία, έχουμε επιλέξει το καταλληλότερο μοντέλο και μεταβλητές εισόδου, το αποτέλεσμα του τεστ που περιγράφηκε είναι πολύ ευαίσθητο στα δεδομένα και στην επιλογή των χρονικών υστερήσεων που χρησιμοποιούμε στις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και σταυροειδών συσχετίσεων. Είναι συχνό φαινόμενο ν’απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση για κάποιον αριθμό υστερήσεων, αλλά όχι για κάποιον άλλον.

3.5 Εναλλακτικά τεστ για την ύπαρξη αιτιότητας

Οι Geweke, Meese, Dent (Journal of Econometrics 21 (1983)) πρότειναν κάποια εναλλακτικά τεστ για τον έλεγχο της απουσίας αιτιότητας, τα οποία θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Αναφέρουν, ότι στα ακόλουθα υποθέτουν πως οι σειρές x_t και y_t είναι στάσιμες σειρές (Gaussian) και έχουν μέσο μηδέν. Τότε, ο περιορισμός ότι οι ιστορικές τιμές των x_t, y_t είναι γραμμικές, δεν έχει μεγάλη σημασία, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error) γίνεται χρήσιμο εργαλείο για την σύγκριση των προβλέψεων και η συνάρτηση πιθανότητας είναι γνωστή.

Ένα τεστ του Granger για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι η y_t δεν αιτιάται την x_t είναι ένας έλεγχος του $e(L) = 0$ στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(L) & e(L) \\ a(L) & b(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \delta_t \end{pmatrix} \quad (54)$$

Αν γραφεί το x_t σε μονοπαριγοντική αυτοπαλινδρόμηση θα έχουμε

$$x_t = c(L)x_t + \zeta_t \quad (55)$$

και τότε το $e(L) = 0$ θα είναι ισοδύναμο με $\{\varepsilon_t\} = \{\zeta_t\}$ και $c(L) = d(L)$.

Αν υποθέσουμε ότι το $d(L)$ είναι πολυώνυμο τάξης l και $e(L)$ είναι πολυώνυμο τάξης k , τότε ο έλεγχος του $e(L) = 0$ μπορεί να στηριχτεί στο άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων από μια εκτίμηση βάσει ελαχίστων τετραγώνων των παλινδρομήσεων

$$x_t = C(L)x_t + F_t = \sum_{s=1}^l C_s x_{t-s} + F_t \quad (56)$$

$$x_t = D(L)x_t + E(L)y_t + \varepsilon_t = \sum_{s=1}^l D_s x_{t-s} + \sum_{s=1}^k E_s y_{t-s} + \varepsilon_t \quad (57)$$

Αν $\hat{\sigma}_F^2$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της $Var(F_t)$ στην (56)

και $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της $Var(\varepsilon_t)$ στην (57), τότε κάτω απ' την μηδενική υπόθεση, η κατανομή της κάθε στατιστικής συνάρτησης

$$T_n^{GW} = \frac{n(\hat{\sigma}_F^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2)}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \quad (58)$$

$$T_n^{GR} = \frac{n \log(\hat{\sigma}_F^2)}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \quad (59)$$

$$T_n^{GL} = \frac{n(\hat{\sigma}_F^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2)}{\hat{\sigma}_F^2} \quad (60)$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $x^2(k)$ η οποία διαφέρει καθώς το μέγεθος του δείγματος n μεγαλώνει. Σύμφωνα με την ορολογία του Silvey (1959), ένα τεστ που βασίζεται στο T_n^{GW} ονομάζεται “Wald test”, ενώ τα τεστ που βασίζονται στα T_n^{GR} και T_n^{GL} ονομάζονται “Likelihood ratio test” και “LaGrange multiplier test” αντίστοιχα.

Στην πραγματικότητα, τα k, l δεν είναι γνωστά ούτε γνωρίζουμε αν είναι πεπερασμένα. Επιπλέον, τονίζεται, ότι δεν υπάρχουν γνωστές σχέσεις μεταξύ των l και n που να εγγυώνται την ομοιόμορφη σύγκλιση στην $x^2(k)$ των (56), (57), (58) κάτω απ’την μηδενική υπόθεση, επομένως η επιλογή τους είναι κάπως αυθαίρετη.

3.6 Έλεγχοι μη αιτιότητας κατά Dufour-Pelletier-Renault

Αρκετά πρόσφατα, οι Dufour, Pelletier, Renault (Journal of Econometrics 132 (2006)) προτείνουν για τον έλεγχο της μη-αιτιότητας σε ποικίλους ορίζοντες ανεξάρτητα απ’το αν είναι στάσιμες οι σειρές ή όχι, την παρακάτω μεθοδολογία στηριζόμενοι σε γραμμικές παλινδρομήσεις. Κατ’αρχήν, θεωρούνε μία διαδικασία VAR(p) της μορφής

$$W(t) = \mu(t) + \sum_{k=1}^p \pi_k W(t-k) + a(t) \quad t=1,2,\dots,T \quad (61)$$

όπου $W(t) = (w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})'$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα m -όρων, $\mu(t)$ είναι ντετερμινιστικός όρος που δηλώνει την τάση και ισχύει

$$\begin{aligned} E[a(s) a(t)'] &= \Omega \text{ αν } s=t, \\ &= 0 \text{ αν } s \neq t, \det(\Omega) \neq 0 \end{aligned}$$

Έτσι, η (1) μπορεί να θεωρηθεί μία αυτοπαλινδρόμηση σε ορίζοντα 1.

Επομένως για τη χρονική στιγμή $t+h$ έχουμε:

$$W(t+h) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{k=1}^p \pi_k^{(h)} W(t+1-k) + \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j a(t+h-j), \quad (62)$$

$$t = 0, \dots, T-h$$

όπου $\psi_0 = I_m$ και $h < T$ ενώ

$$\pi_k^{(h+1)} = \pi_{k+h} + \sum_{l=1}^h \pi_{h-l+1} \pi_k^{(l)} = \pi_{k+1}^{(h)} + \pi_1^{(h)} \pi_k \quad (63)$$

$$\pi_1^{(0)} = I_m \quad \pi_k^{(1)} = \pi_k$$

$$\mu^{(h)}(t) = \sum_{k=0}^{h-1} \pi_1^{(k)} \mu(t+h-k) \quad (64)$$

$$\psi_h = \pi_1^{(h)} \quad \forall h \geq 0$$

Ο πίνακας ψ_h είναι το “impulse response” των συντελεστών της διαδικασίας που υπολογίζονται από

$$\psi(z) = \pi(z)^{-1} = I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k z^k \quad (65)$$

$$\pi(z) = I_m - \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k z^k \quad (66)$$

Άρα η (62) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} W(t+h)' &= \mu^{(h)}(t)' + \sum_{k=1}^p W(t+1-k)' \pi_k^{(h)'} + u^{(h)}(t+h)' \\ &= \mu^{(h)}(t)' + W(t,p)' \pi^{(h)} + u^{(h)}(t+h)', \quad t=0, \dots, T-h \quad (67) \end{aligned}$$

όπου $W(t,p)' = [W(t)', W(t-1)', \dots, W(t-p+1)']$, $\pi^{(h)} = [\pi_1^{(h)}, \dots, \pi_p^{(h)}]'$

$$u^{(h)}(t+h)' = [u_1^{(h)}(t+h), \dots, u_m^{(h)}(t+h)] = \sum_{j=0}^{h-1} a(t+h-j)' \psi_j' \quad (68)$$

Καλούν την (67) “αυτοπαλινδρόμηση τάξης p στον ορίζοντα h ” ή ένα (p,h) -αυτοπαλίνδρομο μοντέλο. Θεωρούν ότι ο ντετερμινιστικός παράγοντας σε κάθε

αυτοπαλινδρόμηση είναι μια γραμμική συνάρτηση ενός διανύσματος πεπερασμένων παραμέτρων, δηλαδή

$$\mu^{(h)}(t) = \gamma(h)D^{(h)}(t), \quad (69)$$

όπου $\gamma(h)$ είναι μία $m \times n$ μήτρα παραμέτρων και $D^{(h)}(t)$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα ντετερμινιστικών ερμηνευτικών μεταβλητών. Αν το $\mu(t)$ είναι σταθερό το συμβολίζουμε απλά “ μ ” ή πιθανόν να εξαρτάται απ’το h , οπότε

$$\mu^{(h)}(t) = \mu_h$$

3.6.1 Εκτίμηση ενός (ρ, h)-αυτοπαλίνδρομου μοντέλου

Θεωρούν μια αυτοπαλινδρόμηση τάξης p στο χρονικό ορίζοντα h της μορφής

$$w_h(h) = \bar{W}_p(h)\Pi^{(h)} + U_h(h) \quad h = 1, \dots, H \quad (70)$$

Η παραπάνω αυτοπαλινδρόμηση, μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (OLS), απ’την οποία προέρχεται ο εκτιμητής

$$\hat{H}^{(h)} = [\bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h)]^{-1} \bar{W}_p(h)' w_h(h) = \Pi^{(h)} + [\bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h)]^{-1} \bar{W}_p(h)' U_h(h) \quad (71)$$

επομένως,

$$\sqrt{T}[\hat{\Pi}^{(h)} - \Pi^{(h)}] = \left[\frac{1}{T} \bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h) \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \bar{W}_p(h)' U_h(h) \quad (72)$$

όπου

$$\frac{1}{T} \bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-h} W_p(t) W_p(t)' \quad (73)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \bar{W}_p(h)' U_h(h) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=0}^{T-h} W_p(t) u^{(h)}(t+h)' \quad (74)$$

Υποθέτουν τώρα ότι

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-h} W_p(t) W_p(t)' \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \Gamma_p \text{ και } \det(\Gamma_p) \neq 0$$

Αυτό θα ισχύει στην περίπτωση που η διαδικασία $W(t)$ είναι στάσιμη δευτέρου βαθμού, μη-ντετερμινιστική και θα έχουμε

$$E[W_p(t)W_p(t)'] = \Gamma_p \quad \forall t$$

Επίσης, επειδή

$$u^{(h)}(t+h) = a(t+h) + \sum_{k=1}^{h-1} \psi_k a(t+h-k) \quad (75)$$

(όπου κάθε άθροισμα της μορφής $\sum_{k=1}^{h-1}$ με $h < 2$ είναι μηδέν), ισχύει

$$E[W_p(t)u^{(h)}(t+h)'] = 0 \quad \text{για } h = 1, 2, \dots \quad (76)$$

$$V\{\text{vec}[W_p(t)u^{(h)}(t+h)']\} = \Delta_p(h) \quad (77)$$

Αν η διαδικασία $W(t)$ είναι στάσιμη με την ισχυρή έννοια και οι διαταρακτικοί όροι $a(t)$ είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι (i.i.d.), μπορεί να γραφεί

$$E[W_p(s)u_i^{(h)}(s+h)u_j^{(h)}(t+h)W_p(t)'] = \Gamma_{ij}(p, h, t-s) = \Gamma_{ij}(p, h, s-t) \quad (78)$$

με $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ και

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(p, h, 0) &= E[W_p(t)u_i^{(h)}(t+h)u_j^{(h)}(t+h)W_p(t)'] \\ &= \sigma_{ij}(h)E[W_p(t)W_p(t)'] = \sigma_{ij}(h)\Gamma_p \end{aligned} \quad (79)$$

$$\Gamma_{ij}(p, h, t-s) = 0 \quad \text{αν } |t-s| \geq h$$

3.6.2 Τεστ αιτιότητας βασιζόμενοι σε στάσιμη (p,h)-αυτοπαλινδρόμηση

Θεωρούμε την i -οστή εξίσωση ($1 \leq i \leq m$)

$$\bar{w}_i(h) = \bar{W}_p(h)\beta_i(h) + \bar{u}_i(h), \quad 1 \leq i \leq m \quad (80)$$

όπου $\bar{w}_i(h) = w_i(h, h)$ και $\bar{u}_i(h) = u_i(h, h)$ και

$$\mathcal{W}_h(k) = \begin{pmatrix} W(0+h)' \\ W(1+h)' \\ \cdot \\ \cdot \\ W(T-k+h)' \end{pmatrix} = [\mathcal{W}_1(h,k), \dots, \mathcal{W}_m(h,k)] \quad (81)$$

$$\mathcal{U}_h(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(h)}(0+h)' \\ \mathbf{u}^{(h)}(1+h)' \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}^{(h)}(T-k+h)' \end{pmatrix} = [\mathbf{u}_1(h,k), \dots, \mathbf{u}_m(h,k)] \quad (82)$$

$$\mathbf{u}_i(h,k) = [\mathbf{u}_i^{(h)}(0+h), \mathbf{u}_i^{(h)}(1+h), \dots, \mathbf{u}_i^{(h)}(T-k+h)]' \quad (83)$$

Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση:

$$H_0(h) : R\beta_i(h) = r, \quad (84)$$

όπου R είναι μια μήτρα $q \times (n+mp)$ τάξης q . Συγκεκριμένα, αν θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η \mathcal{W}_{jt} δεν αιτιάζεται την \mathcal{W}_{it} σε ορίζοντα h (σύμφωνα με την έννοια των Dufour and Renault (1998), $\mathcal{W}_j \not\rightarrow_h \mathcal{W}_i | \mathbf{I}_{(j)}$, όπου $\mathbf{I}_{(j)}(t)$ είναι ο χώρος του Hilbert που παράγεται από το βασικό σύνολο πληροφοριών $\mathbf{I}(t)$ και η μεταβλητές $\mathcal{W}_{k\tau}$, $\omega < \tau \leq t$, $k \neq j$, ω είναι ο κατάλληλος χρόνος έναρξης ($\omega \leq -p+1$)), ο περιορισμός παίρνει την παρακάτω μορφή

$$H_{j \not\rightarrow i}^{(h)} : \boldsymbol{\pi}_{ijk}^{(h)} = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

όπου $\boldsymbol{\pi}_k^{(h)} = [\boldsymbol{\pi}_{ijk}^{(h)}]_i$, $j=1, \dots, m$, $k=1, \dots, p$.

Με άλλα λόγια η μηδενική υπόθεση παίρνει την μορφή του μηδενισμού των συντελεστών του $\beta_i(h)$ με

$$\Pi^{(h)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{(h)'} \\ \boldsymbol{\pi}^{(h)} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\beta}_1(h), \boldsymbol{\beta}_2(h), \dots, \boldsymbol{\beta}_m(h)] \quad (85)$$

Ο πίνακας των περιορισμών R σε αυτή την περίπτωση παίρνει την μορφή $R=R(j)$, όπου $R(j) = [\delta_1(j), \delta_2(j), \dots, \delta_p(j)]'$ είναι ένας πίνακας $p \times (n+pm)$ και $\delta_k(j)$ είναι ένα $(n+pm) \times 1$ διάνυσμα του οποίου οι όροι είναι όλοι ίσοι με το μηδέν εκτός από την τιμή στη θέση $n+(k-1)m+j$, για παράδειγμα

$$\delta_k(j) = [\delta(1, n+(k-1)m+j), \dots, \delta(n+pm, n+(k-1)m+j)]',$$

$$k=1, \dots, p \text{ με } \delta(i, j) = 1 \text{ αν } i=j \text{ και } \delta(i, j) = 0 \text{ αν } i \neq j.$$

Σημειώνεται ότι η σύνδεση της υπόθεσης $H_{j \neq i}^{(h)}$, $h=1, \dots, (m-2)p+1$ είναι επαρκής για να παρατηρήσουμε μη-αιτιότητα σε όλους τους ορίζοντες (Dufour and Renault 1998. Section 4). Μη-αιτιότητα μέχρι τον ορίζοντα H είναι η σύνδεση της υπόθεσης $H_{j \neq i}^{(h)}$, $h=1, \dots, H$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_i(h) &= \beta_i(h) + [\bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h)]^{-1} \bar{W}_p(h)' \bar{u}_i(h) \Rightarrow \\ \sqrt{T}[\hat{\beta}_i(h) - \beta_i(h)] &= \left[\frac{1}{T} \bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h) \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=0}^{T-h} \bar{W}_p(t) \mathbf{u}_i^{(h)}(t+h) \quad (86) \end{aligned}$$

Κάτω από συνθήκες τυπικής κανονικότητας (White, 1999, Κεφ 5-6)

$$\sqrt{T}[\hat{\beta}_i(h) - \beta_i(h)] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L} N[0, V(\hat{\beta}_i)] \quad (87)$$

με $\det[V(\hat{\beta}_i)] \neq 0$, όπου η $V(\hat{\beta}_i)$ μπορεί να εκτιμηθεί

$$\hat{V}_T(\hat{\beta}_i) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p} V(\hat{\beta}_i)$$

Σημειώνεται επίσης ότι

$$\Gamma_p = p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h), \quad (88)$$

$$\det[\Gamma_p] \neq 0$$

$$V_{ip}(T) = \text{Var} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \bar{W}_p(h)' \bar{u}_i(h) \right] = \frac{1}{T} \text{Var} \left[\sum_{t=0}^{T-h} W_p(t) u_i^{(h)}(t+h) \right] \quad (89)$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t=0}^{T-h} E \left[W_p(t) u_i^{(h)}(t+h) u_i^{(h)}(t+h) W_p(t)' \right] + \sum_{\tau=1}^{h-1} \sum_{t=\tau+1}^{T-h} \left[E \left[W_p(t) u_i^{(h)}(t+h) u_i^{(h)}(t-\tau+h) W_p(t-\tau)' \right] + E \left[W_p(t-\tau) u_i^{(h)}(t-\tau+h) u_i^{(h)}(t+h) W_p(t)' \right] \right\}$$

Υποθέτουν ότι

$$V_{ip}(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} V_{ip}, \quad (90)$$

$$\det(V_{ip}) \neq 0$$

όπου το V_{ip} μπορεί να εκτιμηθεί από έναν εκτιμητή $\hat{V}_{ip}(T)$

$$\hat{V}_{ip}(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} V_{ip} \quad (91)$$

Τότε

$$\sqrt{T} \left[\hat{\beta}_i(h) - \beta_i(h) \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} N[0, \Gamma_p^{-1} V_{ip} \Gamma_p^{-1}] \quad (92)$$

$$\text{έτσι ώστε } V(\hat{\beta}_i) = \Gamma_p^{-1} V_{ip} \Gamma_p^{-1}$$

Επιπλέον σε αυτή την περίπτωση

$$\hat{V}_T(\hat{\beta}_i) = \hat{\Gamma}_p^{-1} \hat{V}_{ip}(t) \hat{\Gamma}_p^{-1} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} V(\hat{\beta}_i)$$

$$\hat{\Gamma}_p = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-h} W_p(t) W_p(t)' = \frac{1}{T} \bar{W}_p(h)' \bar{W}_p(h) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \Gamma_p$$

Με βάση τα προηγούμενα οι Dufour, Pelletier, Renault (2006) βρίσκουν την ασυμπτωτική κατανομή του κριτηρίου που χρησιμοποιεί για να εντοπίσει την μη-αιτιότητα σε ορίζοντα h σε ένα στάσιμο VAR μοντέλο ως εξής:

Υποθέτοντας ότι ασυμπτωτικά ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων σ'ένα στάσιμο VAR μοντέλο ακολουθεί την κανονική κατανομή και ισχύουν οι (5),(6), τότε κάτω από οποιαδήποτε υπόθεση της μορφής $H_0(h)$ στην (4), η ασυμπτωτική κατανομή της

$$W[H_0(h)] = T \left[R \hat{\beta}_i(h) - r \right]' \left[R V_T(\hat{\beta}_i) R' \right]^{-1} \left[R \hat{\beta}_i(h) - r \right] \quad (93)$$

είναι $x^2(q)$. Συγκεκριμένα, κάτω απ' την υπόθεση $H_{j \not\rightarrow i}^{(h)}$ της μη-αιτιότητας σε ορίζοντα h από w_{jt} σε w_{it} ($w_j \not\rightarrow_h w_i | I_{(j)}$), η ασυμπτωτική κατανομή της αντίστοιχης στατιστικής συνάρτησης $W[H_0(h)]$ είναι $x^2(p)$.

Επομένως, το πρόβλημα μετατοπίζεται στο να εκτιμηθεί το V_{ip} .

Έστω $\hat{u}_i(h) = [\hat{u}_i(t+h) : t = 0, \dots, T-h]'$ το διάνυσμα των καταλοίπων της παλινδρόμησης (80)

$$\hat{g}_i^{(h)}(t+h) = W_p(t) \hat{u}_i^{(h)}(t+h) \quad (94)$$

και βάζουν

$$R_i^{(h)}(\tau) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=\tau}^{T-h} \hat{g}_i^{(h)}(t+h) \hat{g}_i^{(h)}(t+h-\tau)' \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (95)$$

Αν οι διαταρακτικοί όροι είναι i.i.d. (independent and identically distributed) δηλαδή ανεξάρτητοι και ισόνομοι, τότε ένας φυσικός εκτιμητής για το V_{ip} ο οποίος θα λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι τα σφάλματα πρόβλεψης $u^{(h)}(t+h)$ ακολουθούν μια MA(h-1) διαδικασία δίνεται από:

$$\hat{V}_{ip}^{(W)}(T) = R_i^{(h)}(0) + \sum_{\tau=1}^{h-1} \left[R_i^{(h)}(\tau) + R_i^{(h)}(\tau)' \right] \quad (96)$$

Κάτω από συνθήκες κανονικότητας που μελετήθηκαν απ' τον White (1999, Κεφ 6.3)

$$\hat{V}_{ip}^{(W)}(T) - V_{ip} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p} 0.$$

Ένα πρόβλημα με το $\hat{V}_{ip}^{(W)}$ είναι ότι δεν είναι απαραίτητα θετικός και πεπερασμένος.

Ένας εναλλακτικός εκτιμητής ο οποίος είναι αυτόματα θετικός και ημι-πεπερασμένος είναι ο παρακάτω που προτάθηκε από τους Doan and Litterman (1983), Gallant (1987) και Newey and West (1987)

$$\hat{V}_{ip}^{(NW)}(T) = R_i^{(h)}(0) + \sum_{\tau=1}^{m(T)-1} \kappa(\tau, m(T)) \left[R_i^{(h)}(\tau) + R_i^{(h)}(\tau)' \right] \quad (97)$$

$$\text{όπου } \kappa(\tau, m) = 1 - \left[\frac{\tau}{m+1} \right], \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{m(T)}{T^{1/4}} \right] = 0$$

Κάτω από κανονικές συνθήκες που δόθηκαν απ'τους Newey and West (1987)

$$\hat{V}_{ip}^{(NW)}(T) - V_{ip} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

3.6.3 Τεστ Αιτιότητας βασιζόμενοι σε μη-στάσιμη (p,h)-αυτοπαλινδρόμηση

Στην περίπτωση που έχουμε μη-στάσιμες ή integrated σειρές, προσαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία ως εξής:

Υποθέτουμε ότι

$$W(t) = \mu(t) + \eta(t), \quad (98)$$

$$\mu(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \dots + \delta_q t^q \quad (99)$$

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^p \pi_k \eta(t-k) + a(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (100)$$

όπου $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q$ είναι σταθερά $m \times 1$ διανύσματα και η διαδικασία $\eta(t)$ είναι το πολύ $I(d)$ όπου d είναι ένας ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος με το μηδέν. Σημειώνεται ότι αυτές οι υποθέσεις ισχύουν είτε υπάρχει συνολοκλήρωση είτε όχι.

Με δεδομένες τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε:

$$W(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_q t^q + \sum_{k=1}^p \pi_k W(t-k) + a(t) \quad t = 1, \dots, T \quad (101)$$

όπου $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_q$ είναι $m \times 1$ σταθερά διανύσματα που εξαρτώνται από τα

$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q$ και $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ (Toda and Yamamoto 1995). Κάτω απ'τη σχέση

(7) έχουμε

$$W(t+h) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{k=1}^p \pi_k^{(h)} W(t+1-k) + u^{(h)}(t+h), \quad (102)$$

$$t = 0, \dots, T-h$$

όπου $\mu^{(h)}(t) = \gamma_0^{(h)} + \gamma_1^{(h)}t + \dots + \gamma_q^{(h)}t^q$ και $\gamma_0^{(h)}, \gamma_1^{(h)}, \dots, \gamma_q^{(h)}$ είναι $m \times 1$ σταθερά διανύσματα. Για $h = 1$ η (8) είναι ίδια με την (7). Για $h \geq 2$ τα σφάλματα $u^{(h)}(t+h)$ ακολουθούν μια διαδικασία $MA(h-1)$ (Moving Average). Για κάθε ακέραιο j , έχουμε:

$$W(t+h) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \pi_k^{(h)} [W(t+1-k) - W(t+1-j)] \\ + \left(\sum_{k=1}^p \pi_k^{(h)} \right) W(t+1-j) + u^{(h)}(t+h) \quad (103)$$

$$W(t+h) - W(t+1-j) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \pi_k^{(h)} [W(t+1-k) - W(t+1-j)] \\ - \left(I_m - \sum_{k=1}^p \pi_k^{(h)} \right) W(t+1-j) + u^{(h)}(t+h) \quad (104)$$

για $t = 0, \dots, T-h$. Οι δυο πιο πάνω εκφράσεις μπορούν να θεωρηθούν ως προέκταση του μοντέλου (p, h) -αυτοπαλινδρόμησης που παρουσιάστηκε απ'τους Dolado and *Lütkepohl* (1996,σελ.372-373) για διαδικασίες VAR(p). Θέτοντας $j=p+1$ στην (9) βλέπουμε ότι

$$W(t+h) - W(t-p) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{k=1}^p A_k^{(h)} \Delta W(t+1-k) \\ + B_p^{(h)} W(t-p) + u^{(h)}(t+h) \quad (105)$$

όπου $\Delta W(t) = W(t) - W(t-1)$, $A_k^{(h)} = \sum_{j=1}^k \pi_j^{(h)}$, $B_k^{(h)} = A_k^{(h)} - I_m$. Η

(10) μπορεί να ερμηνευτεί σαν μια μορφή διόρθωσης του σφάλματος (error-correction form) στον ορίζοντα h με βάση $W(t-p)$.

Ακολουθως, θεωρεί την εκτεταμένη αυτοσυσχέτιση

$$W(t+h) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{k=1}^p \pi_k^{(h)} W(t+1-k) + \sum_{k=p+1}^{p+d} \pi_k^{(h)} W(t+1-k) + u^{(h)}(t+h) \quad (106)$$

$t = d, \dots, T-h$. Με βάση το μοντέλο (7), οι πραγματικές τιμές των πινάκων των συντελεστών $\pi_{p+1}^{(h)}, \dots, \pi_{p+d}^{(h)}$ είναι ίσες με το μηδέν, αλλά θα πρέπει να εκτιμήσουμε την (p,h)-αυτοπαλινδρόμηση χωρίς κανέναν περιορισμό στα $\pi_{p+1}^{(h)}, \dots, \pi_{p+d}^{(h)}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η διαδικασία $\eta(t)$ είναι είτε I(0) είτε I(1) και παίρνουμε $d=1$ στην (10). Τότε, αντικαθιστώντας το p με $p+1$ και θέτοντας $j=p$ στο (9) βλέπουμε ότι

$$W(t+h) - W(t-p-1) = \mu^{(h)}(t) + \sum_{k=1}^p \pi_k^{(h)} [W(t+1-k) - W(t-p-1)] - B_{p+1}^{(h)} W(t-p-1) + u^{(h)}(t+h) \quad (107)$$

όπου $B_{p+1}^{(h)} = I_m - \sum_{k=1}^{p+1} \pi_k^{(h)}$. Στην τελευταία εξίσωση οι $\pi_1^{(h)}, \dots, \pi_p^{(h)}$ επηρεάζουν

τις στάσιμες μεταβλητές που έχουν κάποια τάση. Χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία με τους Sims et al. (1990), Park and Phillips (1989) και

Dolado and Lütkepohl (1996), συνάγεται ότι οι εκτιμήσεις των

$\pi_1^{(h)}, \dots, \pi_p^{(h)}$ που βασίζονται στον τύπο (107) χρησιμοποιώντας ελάχιστα

τετράγωνα (χωρίς περιορισμούς $B_{p+1}^{(h)}$) ή ισοδύναμα οι εκτιμήσεις απ'το (106)

χωρίς περιορισμούς $\pi_{p+1}^{(h)}$, είναι ασυμπτωτικά κανονικά κατανομημένες και

έχουν τον ίδιο ασυμπτωτικό πίνακα συνδιακυμάνσεων με αυτόν που έχει μια στάσιμη διαδικασία όπως εξετάστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Συμπερασματικά, η ασυμπτωτική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης

$W[H_{j \rightarrow i}^{(h)}]$ για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_{j \rightarrow i}^{(h)}$ της μη-αιτιότητας δηλαδή στον ορίζοντα h από το W_j στο W_i ($w_j \xrightarrow{h} w_i | I_{(j)}$) βασιζόμενοι στον τύπο εκτίμησης (106), είναι $\chi^2(p)$.

Επισημαίνεται, ότι εάν η διαδικασία $\eta(t)$ είναι ολοκληρωμένη (integrated) μεγαλύτερου βαθμού από d , $d \geq 0$, μπορούμε ν'ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, προσθέτοντας d επιπλέον χρονικές υστερήσεις στο VAR μοντέλο που μελετήθηκε πιο πάνω. Τέλος, επειδή τα στατιστικά τεστ που χρησιμοποιούνται είναι ασυμπτωτικά, θεωρείται σκόπιμο να εφαρμόζονται μέθοδοι bootstrap για καλύτερα αποτελέσματα.

3.7 Μέτρα αιτιότητας κατά Dufour-Taamouti

Οι Dufour και Taamouti (Journal of Econometrics 154 (2010)) ανέπτυξαν κάποια μέτρα για την ισχύ της αιτιότητας σε διάφορους ορίζοντες, τα οποία μπορούν να εντοπίσουν έμμεσες αιτιώδεις σχέσεις που εμφανίζονται μόνο μετά την παρέλευση κάποιων περιόδων. Ουσιαστικά, αυτά αποτελούν γενικεύσεις των μέτρων που προτάθηκαν απ'τον Geweke (1982) για ορίζοντα 1. Δύο σημαντικές ιδιότητες για τα μέτρα που προτείνονται είναι ότι δεν μπορεί να είναι αρνητικά και ακυρώνονται μόνο αν δεν υπάρχει αιτιότητα στον συγκεκριμένο ορίζοντα. Επίσης, $\ln(\frac{0}{0}) = 0$ και $\ln(\frac{x}{0}) = +\infty$ για $x > 0$

Ορισμός: Μέτρο της μέσης τετραγωνικής αιτιότητας σε ορίζοντα h σε σχέση με ένα σύνολο πληροφοριών (Mean-square Causality Measure at Horizon h Relative to an Information set).

Για $h \geq 1$

$$C_L(Y \xrightarrow{h} X | I) = \ln \left[\frac{\det\{\sum [X(t+h) | I_X(t)]\}}{\det\{\sum [X(t+h) | I_{XY}(t)]\}} \right] \quad (108)$$

είναι το μέτρο της μέσης τετραγωνικής αιτιότητας (ή η ένταση της αιτιότητας) απ' την Y στη X σε ορίζοντα h , δοθέντος του I .

Επειδή θεωρούν μόνο μέτρα μέσου τετραγώνου, η έννοια “μέτρο μέσης τετραγωνικής αιτιότητας”, μπορεί να γραφεί “μέτρο αιτιότητας”. Ειδικά

$$C_L(Y \xrightarrow{h} X | I) = 0 \quad \text{αν } Y(\omega, t) \subseteq I_X(t),$$

επομένως το $C_L(Y \xrightarrow{h} X | I)$ μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες κυρίως όταν $Y(\omega, t) \not\subseteq I(t)$. Για $m_1 = m_2 = 1$ ο παραπάνω ορισμός γίνεται

$$C_L(Y \xrightarrow{h} X | I) = \ln \left[\frac{\sigma^2[X(t+h) | I_X(t)]}{\sigma^2[X(t+h) | I_{XY}(t)]} \right] \quad (109)$$

δηλαδή, το $C_L(Y \xrightarrow{h} X | I)$ μετράει την αιτιώδη επίδραση της Y στην X σε ορίζοντα h δοθέντος του I και τον παρελθοντικών τιμών του X . Σε όρους προβλεψιμότητας μπορεί κανείς να το σκεφτεί σαν το μέγεθος της πληροφορίας που έχουμε απ' το παρελθόν της Y το οποίο μπορεί να καλυτερέψει την πρόβλεψη μας για το $X(t+h)$. Σύμφωνα με τον Geweke (1982) το μέτρο αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως η αναλογική μείωση της διακύμανσης του σφάλματος πρόβλεψης για την $X(t+h)$ που παρατηρείται λαμβάνοντας υπόψη τις παρελθοντικές τιμές της Y . Αυτή η αναλογία είναι ίση με

$$\frac{\sigma^2[X(t+h) | I_X(t)] - \sigma^2[X(t+h) | I_{XY}(t)]}{\sigma^2[X(t+h) | I_X(t)]} = 1 - \exp[-C_L(Y \xrightarrow{h} X | I)] \quad (110)$$

Ορισμός : Αδέσμευτο μέτρο μέσης τετραγωνικής αιτιότητας σε ορίζοντα h (Unconditional Mean-square Causality Measure at Horizon h).

Για $h \geq 1$

$$C_L(Y \xrightarrow{h} X | I_{(Z)}) = \ln \left[\frac{\det\{\sum [X(t+h) | I_{(Z)X}(t)]\}}{\det\{\sum [X(t+h) | I_{(Z)XY}(t)]\}} \right] \quad (111)$$

είναι το Z -αδέσμευτο μέτρο μέσης τετραγωνικής αιτιότητας από το Y στο X σε ορίζοντα h δοθέντος του I .

Ορισμός: Μέτρο της στιγμιαίας αιτιότητας σε ορίζοντα h (Measure of Instantaneous Causality at Horizon h).

Για $h \geq 1$

$$C_L(Y \xrightarrow{h} X | I) = \ln \left[\frac{\det\{\sum [X(t+h) | I_{XY}(t)]\} \det\{\sum [Y(t+h) | I_{XY}(t)]\}}{\det\{\sum [X(t+h), Y(t+h) | I_{XY}(t)]\}} \right] \quad (112)$$

όπου

$$\sum [X(t+h), Y(t+h) | I_{XY}(t)] = E\{U[W(t+h) | I_{XY}(t)]U[W(t+h) | I_{XY}(t)]'\}$$

$$\text{και } W(t) = (X(t)', Y(t)')$$

Για $m_1 = m_2 = 1$ και δεδομένου ότι το $I(t)$ περιλαμβάνει μια σταθερή μεταβλητή, ισχύει

$$\begin{aligned} \det\{\sum [(X(t+h), Y(t+h)) | I_{XY}(t)]\} &= \\ &= \sigma^2[X(t+h) | I_{XY}(t)]_{\chi} \sigma^2[Y(t+h) | I_{XY}(t)] - (\text{cov}[(X(t+h), Y(t+h)) | I_{XY}(t)])^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_L(Y \xrightarrow{h} X | I) &= \ln \left[\frac{1}{1 - \rho[X(t+h), Y(t+h) | I_{XY}(t)]^2} \right] \\ &= \ln \left[\frac{\sigma^2[X(t+h) | I_{XY}(t)]}{\sigma^2[X(t+h) | I_{XY}(t)] + I_{Y(t+h)}} \right] \\ &= \ln \left[\frac{\sigma^2[Y(t+h) | I_{XY}(t)]}{\sigma^2[Y(t+h) | I_{XY}(t)] + I_{X(t+h)}} \right] \quad (113) \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \rho[X(t+h), Y(t+h) | I_{XY}(t)] = \frac{\text{cov}[X(t+h), Y(t+h) | I_{XY}(t)]}{\sigma[X(t+h) | I_{XY}(t)]\sigma[Y(t+h) | I_{XY}(t)]}$$

είναι ο δεσμευμένος συντελεστής συσχέτισης μεταξύ $X(t+h)$ και $Y(t+h)$ δοθέντος του πληροφοριακού συνόλου $I_{XY}(t)$, $I_{Y(t+h)}$ αντιπροσωπεύει τον υποχώρο του Hilbert που αποτελείται απ'τα στοιχεία $Y(t+h)$ και ομοίως για το $I_{X(t+h)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εμπειρική Μελέτη

Για την εμπειρική μας μελέτη έχουμε χρησιμοποιήσει τις μηνιαίες τιμές για τον δείκτη Sp500 από την 15/1/1965 έως 15/10/2010 και τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής για τις ΗΠΑ το ίδιο χρονικό διάστημα, καθώς και τις τιμές του δείκτη Dax 30 και τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής για την Γερμανία για τη ίδια περίοδο. Το πρώτο βήμα για την ανάλυση χρονολογικών σειρών, είναι το να διαπιστώσουμε αν είναι στάσιμες (έχουν δηλαδή σταθερό μέσο), ή αν έχουν μοναδιαία ρίζα. Το βήμα αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί στην περίπτωση που έχουμε μη στάσιμες σειρές, οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση μιας παλινδρόμησης δεν είναι συνεπείς και επομένως τα αποτελέσματά μας δεν είναι αξιόπιστα. Ο έλεγχος για την ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας γίνεται μέσω του τεστ Dickey-Fuller (1979) το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω.

4.1 Τεστ για την ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας Dickey-Fuller (1979)

Θεωρούμε το αυτοπαλίνδρομο πρώτης τάξης (AR(1))

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

ή υποθέτοντας ότι υπάρχει κάποια τάση έχουμε το αυτοπαλίνδρομο

$$y_t = \alpha_0 + \rho y_{t-1} + u_t$$

ή υποθέτοντας ότι υπάρχει τάση και ντετερμινιστική μεταβλητή του χρόνου

$$y_t = \alpha_0 + \rho y_{t-1} + \alpha_1 t + u_t$$

όπου y_t είναι η μεταβλητή ενδιαφέροντος, ρ , α_0 και α_1 είναι παράμετροι που θα εκτιμηθούν και u_t είναι οι διαταρακτικοί όροι λευκού θορύβου.

Παίρνοντας πρώτες διαφορές, δηλαδή αφαιρώντας και απ'τα δύο μέλη τον όρο y_{t-1} προκύπτουν αντίστοιχα

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \delta y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \delta y_{t-1} + \alpha_1 t + u_t$$

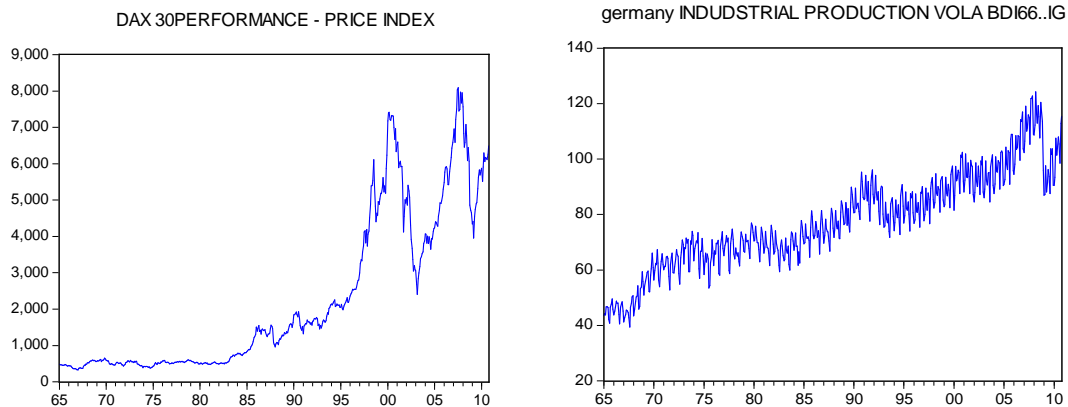
$$\text{όπου } \Delta y_t = y_t - y_{t-1} \text{ και } \delta = \rho - 1$$

Ο στατιστικός έλεγχος θα βασιστεί στην μηδενική υπόθεση $\delta = 0$ ($H_0 : \delta = 0$) έναντι της εναλλακτικής $\delta < 0$ ($H_1 : \delta < 0$) και η εκτίμηση θα

γίνει μέσω του t-τεστ για το δ δηλαδή $t_\delta = \frac{\hat{\delta}}{se(\hat{\delta})}$, όπου $\hat{\delta}$ είναι η εκτίμηση

του δ και το $se(\hat{\delta})$ είναι το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης. Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που η σειρά δεν περιγράφεται από ένα αυτοπαλίνδρομο πρώτης τάξης που υποθέσαμε παραπάνω, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το εκτενέστερο κριτήριο των Dickey-Fuller (Augment Dickey-Fuller test) που αναφέρεται σε αυτοπαλίνδρομο περισσότερων χρονικών υστερήσεων. Ο Fuller απέδειξε πως η ασυμπτωτική κατανομή του t-test για το δ είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των υστερήσεων που περιλαμβάνονται στο εκτενέστερο κριτήριο. Επίσης, οι Said και Dickey (1984) απέδειξαν ότι το επαυξημένο τεστ ισχύει ασυμπτωτικά ακόμα και αν οι σειρές περιγράφονται και με μοντέλο κινητού μέσου (Moving Average), με την προϋπόθεση να έχουν συμπεριληφθεί αρκετοί όροι υστερήσεως.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν κάποιο λογισμικό (enviews) μπορούμε να δούμε το γράφημα των σειρών μας. Ξεκινάμε με τις τιμές του δείκτη DAX30 και τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας.



Από τα παραπάνω γραφήματα είναι έκδηλο ότι οι σειρές που μας ενδιαφέρουν δεν είναι στάσιμες, αφού φαίνεται να παρουσιάζουν κάποια τάση. Ωστόσο, προχωράμε και στον επίσημο έλεγχο των Dickey-Fuller.

Έλεγχος Μοναδιαίας ρίζας για τις τιμές του δείκτη DAX30

Null Hypothesis: DAX30 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.257805	0.9282
Test critical values:		
1% level	-3.442032	
5% level	-2.866585	
10% level	-2.569517	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Έλεγχος Μοναδιαίας ρίζας για τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας

Null Hypothesis: GERMANY IND. PRODUCTION has a unit root

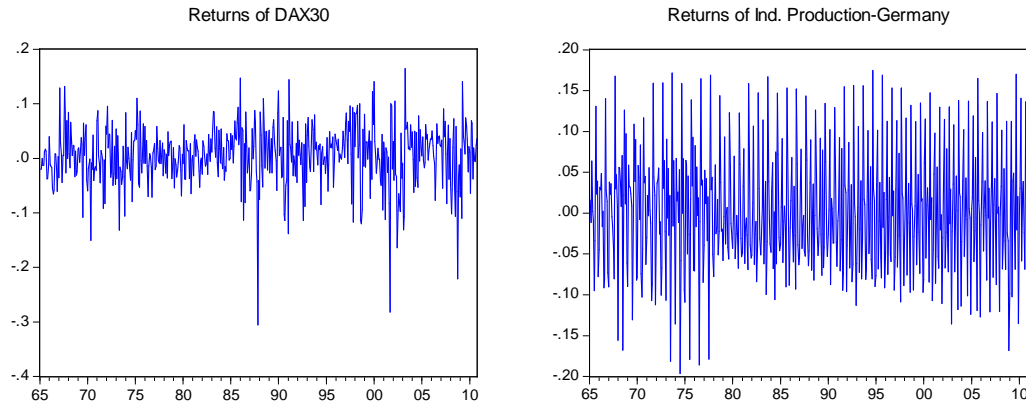
Exogenous: Constant

Lag Length: 15 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.106559	0.7147
Test critical values:		
1% level	-3.442367	
5% level	-2.866733	
10% level	-2.569596	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Παρατηρούμε λοιπόν, όπως αναμενόταν, ότι οι σειρές μας δεν είναι στάσιμες. Παίρνουμε επομένως, πρώτες διαφορές των λογαρίθμων τους (που έχει και οικονομική έννοια καθώς αποτελούν τις αποδόσεις) και ξανακάνουμε τον έλεγχο για την ύπαρξη μοναδιαίες ρίζας.



Τώρα, φαίνεται ότι είναι στάσιμες και θα το επιβεβαιώσουμε με το τεστ που χρησιμοποιήσαμε και πιο πάνω.

Έλεγχος Μοναδιαίας ρίζας για τις αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας

Null Hypothesis: Returns of Ind. Production-Germany has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 14 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-5.192900	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.442367	
5% level	-2.866733	
10% level	-2.569596	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

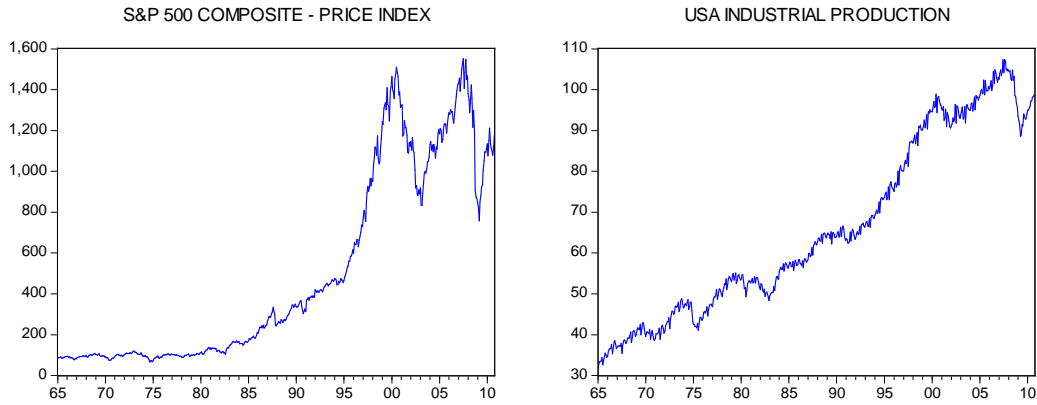
Έλεγχος Μοναδιαίας ρίζας για τις αποδόσεις του δείκτη DAX30

Null Hypothesis: Returns of DAX30 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

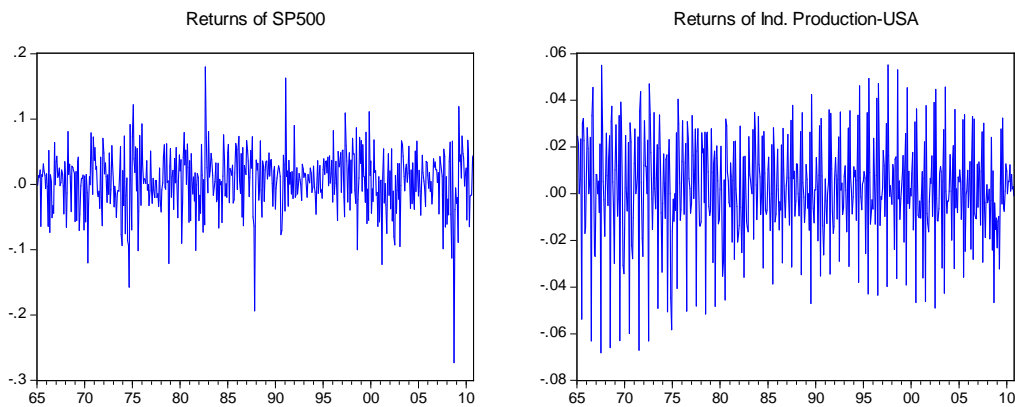
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-21.96698	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.442054	
5% level	-2.866595	
10% level	-2.569522	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τις τιμές του δείκτη S&P500 και τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ.



Όπως και πριν, οι σειρές δεν είναι στάσιμες και χρησιμοποιούμε τις πρώτες διαφορές των λογαρίθμων τους που αποδεικνύεται πως δεν έχουν μοναδιαία ρίζα.



Έλεγχος Μοναδιαίας ρίζας για τις αποδόσεις του δείκτη SP500

Null Hypothesis: RET_SP500 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-22.79520	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.442054	
5% level	-2.866595	
10% level	-2.569522	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

**Έλεγχος Μοναδιαίας ρίζας για τις αποδόσεις
της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ**

Null Hypothesis: RET_Ind.Prod-USA has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 14 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-6.257871	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.442367	
5% level	-2.866733	
10% level	-2.569596	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

4.2 Επιλογή κατάλληλου VAR μοντέλου

Εφαρμόζουμε ένα VAR μοντέλο ανάμεσα στις λογαριθμικές αποδόσεις του DAX30 και της γερμανικής βιομηχανικής παραγωγής. Προκειμένου ν'αποφασίσουμε τον αριθμό των χρονικών υστερήσεων που θα πρέπει να συμπεριλάβουμε στο μοντέλο, εμπιστευόμαστε το κριτήριο Akaike το οποίο μας οδηγεί σ'ένα VAR(15) μοντέλο.

Κριτήρια για την απόφαση αριθμού χρονικών υστερήσεων στο VAR μοντέλο

VAR Lag Order Selection Criteria

Endogenous variables: Returns of DAX30 Returns of Ind.Production-Germany

Exogenous variables: C

Date: 19/02/11 Time: 14:17

Sample: 1965M01 2010M10

Included observations: 529

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	1422.034	NA	1.60e-05	-5.368748	-5.352601	-5.362427
1	1427.001	9.878479	1.59e-05	-5.372405	-5.323963	-5.353443
2	1465.487	76.24385	1.40e-05	-5.502786	-5.422049	-5.471182
3	1497.894	63.95642	1.25e-05	-5.610185	-5.497153	-5.565939
4	1523.689	50.71157	1.16e-05	-5.692584	-5.547258	-5.635697
5	1566.157	83.17123	9.99e-06	-5.838024	-5.660402	-5.768494
6	1568.077	3.745079	1.01e-05	-5.830159	-5.620243	-5.747988
7	1572.735	9.051656	1.00e-05	-5.832646	-5.590435	-5.737833
8	1596.611	46.21841	9.32e-06	-5.907794	-5.633288	-5.800339
9	1598.621	3.873943	9.39e-06	-5.900267	-5.593466	-5.780170
10	1647.028	92.97145	7.94e-06	-6.068159	-5.729063	-5.935420
11	1758.038	212.3679	5.30e-06	-6.472735	-6.101345	-6.327355
12	1929.699	327.0963	2.81e-06	-7.106613	-6.702928	-6.948591
13	1964.778	66.57671	2.50e-06	-7.224113	-6.788133*	-7.053450*
14	1966.302	2.880311	2.52e-06	-7.214751	-6.746476	-7.031446
15	1979.187	24.25988*	2.44e-06*	-7.248342*	-6.747773	-7.052396
16	1979.739	1.035428	2.47e-06	-7.235307	-6.702443	-7.026719
17	1980.838	2.053581	2.50e-06	-7.224341	-6.659182	-7.003111
18	1983.826	5.557422	2.51e-06	-7.220514	-6.623060	-6.986642
19	1985.270	2.675791	2.53e-06	-7.210852	-6.581103	-6.964338

20 1990.124 8.954748 2.53e-06 -7.214079 -6.552035 -6.954924

* indicates lag order selected by the criterion

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)

FPE: Final prediction error

AIC: Akaike information criterion

SC: Schwarz information criterion

HQ: Hannan-Quinn information criterion

Απ'την παρακάτω εκτίμηση του VAR μοντέλου, κρατάμε μόνο τους συντελεστές που η απόλυτη τιμή του t-test είναι μεγαλύτερη του 1,96 καθώς τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση ότι ο συντελεστής είναι ίσος με το μηδέν.

Συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με y τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη DAX30 και με x τις λογαριθμικές αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας θα έχουμε

$$y_t = 0.005598 + (-0.136786)x_{t-6} + (-0.182922)x_{t-8}$$

$$x_t = 0.067640y_{t-3} + 0.068576y_{t-9} + (-0.495649)x_{t-1} + (-0.139880)x_{t-2} + (-0.108909)x_{t-4} + (-0.118546)x_{t-5} + (-0.094318)x_{t-7} + (-0.078485)x_{t-9} + (-0.147448)x_{t-10} + (-0.100973)x_{t-11} + 0.751212x_{t-12} + 0.330779x_{t-13} + (-0.194760)x_{t-15}$$

VAR μοντέλο των αποδόσεων του δείκτη DAX30 και των αποδόσεων της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας

Vector Autoregression Estimates		
Date: 19/02/11 Time: 00:08		
Sample (adjusted): 1966M05 2010M10		
Included observations: 534 after adjustments		
Standard errors in () & t-statistics in []		
	RET_DAX30	RET_ Ind.Prod-GER
RET_DAX30(-1)	0.047854 (0.04448) [1.07586]	0.039748 (0.02220) [1.79067]
RET_DAX30 (-2)	0.065374 (0.04461) [1.46531]	0.002763 (0.02226) [0.12411]
RET_DAX30 (-3)	0.045768 (0.04463) [1.02555]	0.067640 (0.02227) [3.03710]
RET_DAX30 (-4)	0.001853 (0.04506) [0.04113]	0.023275 (0.02249) [1.03501]
RET_DAX30 (-5)	0.015565 (0.04496) [0.34617]	0.035976 (0.02244) [1.60329]

RET_DAX30 (-6)	-0.002758	0.041090
	(0.04506)	(0.02248)
	[-0.06121]	[1.82749]
RET_DAX30 (-7)	-0.044393	0.027050
	(0.04505)	(0.02248)
	[-0.98549]	[1.20328]
RET_DAX30 (-8)	-0.009074	0.010651
	(0.04517)	(0.02254)
	[-0.20088]	[0.47251]
RET_DAX30 (-9)	0.040692	0.068576
	(0.04517)	(0.02254)
	[0.90092]	[3.04236]
RET_DAX30 (-10)	0.009994	0.017956
	(0.04555)	(0.02273)
	[0.21940]	[0.78991]
RET_DAX30 (-11)	0.053810	-0.017545
	(0.04553)	(0.02272)
	[1.18192]	[-0.77221]
RET_DAX30 (-12)	0.028972	0.022805
	(0.04564)	(0.02278)
	[0.63482]	[1.00129]
RET_DAX30 (-13)	0.029070	-0.000719
	(0.04552)	(0.02272)
	[0.63865]	[-0.03166]
RET_DAX30 (-14)	-0.005671	0.005406
	(0.04515)	(0.02253)
	[-0.12561]	[0.23993]
RET_DAX30 (-15)	-0.079079	-0.024289
	(0.04513)	(0.02252)
	[-1.75226]	[-1.07847]
RET_Ind.Prod-GER(-1)	0.053754	-0.495649
	(0.08757)	(0.04370)
	[0.61384]	[-11.3417]
RET_Ind.Prod-GER (-2)	0.097919	-0.139880
	(0.09773)	(0.04877)
	[1.00189]	[-2.86792]
RET_Ind.Prod-GER (-3)	-0.111004	0.028106
	(0.09431)	(0.04706)
	[-1.17701]	[0.59717]
RET_Ind.Prod-GER (-4)	-0.032261	-0.108909
	(0.06647)	(0.03317)
	[-0.48532]	[-3.28309]
RET_Ind.Prod-GER (-5)	-0.037670	-0.118546
	(0.06693)	(0.03340)
	[-0.56278]	[-3.54890]

RET_ Ind.Prod-GER (-6)	-0.136786	-0.039917
	(0.06635)	(0.03311)
	[-2.06156]	[-1.20552]
RET_ Ind.Prod-GER (-7)	-0.061679	-0.094318
	(0.06626)	(0.03306)
	[-0.93093]	[-2.85256]
RET_ Ind.Prod-GER (-8)	-0.182922	-0.055626
	(0.06626)	(0.03307)
	[-2.76080]	[-1.68233]
RET_ Ind.Prod-GER (-9)	-0.071139	-0.078485
	(0.06614)	(0.03301)
	[-1.07554]	[-2.37774]
RET_ Ind.Prod-GER (-10)	-0.071677	-0.147448
	(0.06625)	(0.03306)
	[-1.08193]	[-4.45984]
RET_ Ind.Prod-GER (-11)	-0.091716	-0.100973
	(0.06637)	(0.03312)
	[-1.38184]	[-3.04846]
RET_ Ind.Prod-GER (-12)	-0.107587	0.751212
	(0.06636)	(0.03311)
	[-1.62137]	[22.6853]
RET_ Ind.Prod-GER (-13)	-0.160485	0.330779
	(0.09338)	(0.04660)
	[-1.71856]	[7.09785]
RET_ Ind.Prod-GER (-14)	-0.116937	-0.053249
	(0.09710)	(0.04846)
	[-1.20431]	[-1.09890]
RET_ Ind.Prod-GER (-15)	0.002518	-0.194760
	(0.08728)	(0.04356)
	[0.02885]	[-4.47149]
C	0.005598	0.000820
	(0.00252)	(0.00126)
	[2.21829]	[0.65104]
R-squared	0.074716	0.870283
Adj. R-squared	0.019530	0.862547
Sum sq. resids	1.482896	0.369310
S.E. equation	0.054296	0.027096
F-statistic	1.353897	112.4894
Log likelihood	813.9554	1185.116
Akaike AIC	-2.932417	-4.322532
Schwarz SC	-2.683930	-4.074045
Mean dependent	0.005084	0.001612
S.D. dependent	0.054835	0.073086
Determinant resid covariance (dof adj.)		2.16E-06
Determinant resid covariance		1.92E-06
Log likelihood		1999.074
Akaike information criterion		-7.254958

Schwarz criterion	-6.757983
-------------------	-----------

Χρησιμοποιώντας τον βέλτιστο αριθμό υστερήσεων βάσει του πιο πάνω VAR μοντέλου, κάνουμε τον έλεγχο για την ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger και έχουμε το αποτέλεσμα

Τεστ αιτιότητας κατά Granger μεταξύ των αποδόσεων του δείκτη DAX30 και των αποδόσεων της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας

Pairwise Granger Causality Tests

Date: 19/02/11 Time: 22:34

Sample: 1965M01 2010M10

Lags: 15

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
RET_Ind.Prod-Ger does not Granger Cause RET_DAX30	534	1.65084	0.0573
RET_DAX30 does not Granger Cause RET_Ind.Prod-Ger		2.62879	0.0008

το οποίο μας δείχνει ότι οι αποδόσεις του δείκτη DAX30 αιτώνται κατά Granger τις αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής, καθώς $p\text{-value} < 0,05$ και συνεπώς δεν μπορούμε να δεχθούμε την μηδενική υπόθεση περί μη ύπαρξης αιτιότητας, ενώ το αντίστροφο δεν επιβεβαιώνεται.

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 και τις λογαριθμικές αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ και έχουμε:

Κριτήρια για την απόφαση αριθμού χρονικών υστερήσεων στο VAR μοντέλο

VAR Lag Order Selection Criteria

Endogenous variables: RET_SP500 RET_Ind.Prod-USA

Exogenous variables: C

Date: 19/02/11 Time: 23:10

Sample: 1965M01 2010M10

Included observations: 529

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	2162.442	NA	9.72e-07	-8.168021	-8.151873	-8.161700
1	2189.116	53.04623	8.92e-07	-8.253746	-8.205304	-8.234784
2	2204.537	30.55152	8.55e-07	-8.296928	-8.216191	-8.265324
3	2209.998	10.77568	8.50e-07	-8.302448	-8.189416	-8.258202
4	2218.752	17.21058	8.35e-07	-8.320422	-8.175096	-8.263535
5	2223.132	8.579144	8.34e-07	-8.321862	-8.144240	-8.252332
6	2231.005	15.35900	8.21e-07	-8.336504	-8.126588	-8.254333
7	2241.480	20.35618	8.02e-07	-8.360985	-8.118774	-8.266172
8	2247.437	11.53013	7.96e-07	-8.368382	-8.093876	-8.260927
9	2252.966	10.66181	7.91e-07	-8.374164	-8.067364	-8.254068
10	2255.809	5.459116	7.95e-07	-8.369788	-8.030692	-8.237050
11	2355.677	191.0520	5.53e-07	-8.732238	-8.360848	-8.586858

12	2574.561	417.0790	2.45e-07	-9.544653	-9.140968*	-9.386631
13	2584.281	18.44762	2.40e-07	-9.566278	-9.130298	-9.395615
14	2594.013	18.39760	2.35e-07	-9.587951	-9.119676	-9.404646*
15	2599.471	10.27604	2.34e-07*	-9.593462*	-9.092893	-9.397516
16	2602.861	6.356878	2.34e-07	-9.591156	-9.058291	-9.382567
17	2603.732	1.626967	2.37e-07	-9.579326	-9.014167	-9.358096
18	2606.732	5.581262	2.38e-07	-9.575547	-8.978093	-9.341676
19	2608.438	3.159426	2.40e-07	-9.566872	-8.937124	-9.320359
20	2613.788	9.870689*	2.39e-07	-9.571976	-8.909933	-9.312821

* indicates lag order selected by the criterion

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)

FPE: Final prediction error

AIC: Akaike information criterion

SC: Schwarz information criterion

HQ: Hannan-Quinn information criterion

Βάσει του κριτηρίου Akaike, επιλέγουμε ξανά VAR(15), όπου κρατάμε τους συντελεστές που έχουν απόλυτο t-statistic μεγαλύτερο από 1,96 γιατί τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση περί μη στατιστικά σημαντικών συντελεστών. Συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με y τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 και με x τις λογαριθμικές αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ θα έχουμε

$$y_t = -0,428284x_{t-3}$$

$$x_t = 0.000699 + 0.039736y_{t-2} + 0.033171y_{t-3} + 0.030457y_{t-4} + 0.030991y_{t-6} + 0.020439y_{t-7} + 0.061749x_{t-6} + (-0.116316)x_{t-10} + (-0.173144)x_{t-11} + 0.697827x_{t-12} + (-0.131652)x_{t-13} + (-0.162625)x_{t-14} + (-0.093992)x_{t-15}$$

VAR μοντέλο των αποδόσεων του δείκτη S&P500 και των αποδόσεων της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ

Vector Autoregression Estimates		
Date: 19/02/11 Time: 23:51		
Sample (adjusted): 1966M05 2010M10		
Included observations: 534 after adjustments		
Standard errors in () & t-statistics in []		
	RET_ SP500	RET_ Ind.Prod-USA
RET_ SP500(-1)	0.030275 (0.04440) [0.68193]	0.009606 (0.00982) [0.97806]
RET_ SP500 (-2)	-0.013833 (0.04432) [-0.31211]	0.039736 (0.00980) [4.05281]
RET_ SP500 (-3)	0.031864 (0.04503) [0.70766]	0.033171 (0.00996) [3.33014]

RET_ SP500 (-4)	0.049358	0.030457
	(0.04553)	(0.01007)
	[1.08398]	[3.02367]
RET_ SP500 (-5)	0.081951	0.013151
	(0.04589)	(0.01015)
	[1.78594]	[1.29552]
RET_ SP500 (-6)	-0.035689	0.030991
	(0.04595)	(0.01017)
	[-0.77667]	[3.04878]
RET_ SP500 (-7)	-0.036745	0.020439
	(0.04642)	(0.01027)
	[-0.79149]	[1.99020]
RET_ SP500 (-8)	0.033449	-0.008355
	(0.04667)	(0.01032)
	[0.71673]	[-0.80932]
RET_ SP500 (-9)	-0.013599	0.019452
	(0.04670)	(0.01033)
	[-0.29119]	[1.88291]
RET_ SP500 (-10)	-0.043132	0.002981
	(0.04674)	(0.01034)
	[-0.92289]	[0.28836]
RET_ SP500 (-11)	0.067066	-0.002499
	(0.04655)	(0.01030)
	[1.44074]	[-0.24267]
RET_ SP500 (-12)	-0.005311	0.018400
	(0.04663)	(0.01032)
	[-0.11389]	[1.78362]
RET_ SP500 (-13)	-0.020875	0.014343
	(0.04642)	(0.01027)
	[-0.44973]	[1.39680]
RET_ SP500 (-14)	0.043507	-0.014506
	(0.04641)	(0.01027)
	[0.93744]	[-1.41289]
RET_ SP500 (-15)	-0.071957	-0.002658
	(0.04660)	(0.01031)
	[-1.54420]	[-0.25786]
RET_ Ind.Prod-USA(-1)	0.055725	-0.072634
	(0.20075)	(0.04441)
	[0.27759]	[-1.63558]
RET_ Ind.Prod-USA (-2)	-0.041642	0.019955
	(0.19787)	(0.04377)
	[-0.21045]	[0.45589]
RET_ Ind.Prod-USA (-3)	-0.428284	0.028031
	(0.19545)	(0.04324)
	[-2.19130]	[0.64831]

RET_ Ind.Prod-USA (-4)	-0.042145	0.000199
	(0.13327)	(0.02948)
	[-0.31625]	[0.00673]
RET_ Ind.Prod-USA (-5)	0.071582	0.037545
	(0.12970)	(0.02869)
	[0.55190]	[1.30854]
RET_ Ind.Prod-USA (-6)	-0.003699	0.061749
	(0.12818)	(0.02835)
	[-0.02886]	[2.17773]
RET_ Ind.Prod-USA (-7)	0.059347	0.048457
	(0.12839)	(0.02840)
	[0.46226]	[1.70615]
RET_ Ind.Prod-USA (-8)	0.130798	0.005860
	(0.12850)	(0.02843)
	[1.01785]	[0.20613]
RET_ Ind.Prod-USA (-9)	-0.016596	-0.039370
	(0.12716)	(0.02813)
	[-0.13051]	[-1.39952]
RET_ Ind.Prod-USA (-10)	-0.101109	-0.116316
	(0.12519)	(0.02769)
	[-0.80767]	[-4.20016]
RET_ Ind.Prod-USA (-11)	-0.091650	-0.173144
	(0.12497)	(0.02765)
	[-0.73338]	[-6.26302]
RET_ Ind.Prod-USA (-12)	-0.158244	0.697827
	(0.12719)	(0.02814)
	[-1.24417]	[24.8015]
RET_ Ind.Prod-USA (-13)	-0.229692	-0.131652
	(0.18821)	(0.04164)
	[-1.22038]	[-3.16197]
RET_ Ind.Prod-USA (-14)	-0.182584	-0.162625
	(0.18761)	(0.04150)
	[-0.97319]	[-3.91832]
RET_ Ind.Prod-USA (-15)	0.282359	-0.093992
	(0.19232)	(0.04254)
	[1.46820]	[-2.20929]
C	0.005664	0.000699
	(0.00230)	(0.00051)
	[2.46710]	[1.37559]
R-squared	0.051879	0.800568
Adj. R-squared	-0.004669	0.788673
Sum sq. resids	1.042126	0.050999
S.E. equation	0.045517	0.010069
F-statistic	0.917434	67.30531
Log likelihood	908.1353	1713.730
Akaike AIC	-3.285151	-6.302361

Schwarz SC	-3.036663	-6.053874
Mean dependent	0.004772	0.001859
S.D. dependent	0.045411	0.021904
Determinant resid covariance (dof adj.)	2.10E-07	
Determinant resid covariance	1.86E-07	
Log likelihood	2622.040	
Akaike information criterion	-9.588165	
Schwarz criterion	-9.091190	

Χρησιμοποιώντας τον βέλτιστο αριθμό υστερήσεων βάσει του πιο πάνω VAR μοντέλου, κάνουμε τον έλεγχο για την ύπαρξη αιτιότητας κατά Granger και παρατηρούμε ότι ο δείκτης S&P500 αιτιάζεται κατά Granger τις αποδόσεις τις βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ.

Τεστ αιτιότητας κατά Granger μεταξύ των αποδόσεων του δείκτη S&P500 και των αποδόσεων της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ

Pairwise Granger Causality Tests

Date: 19/02/11 Time: 23:15

Sample: 1965M01 2010M10

Lags: 15

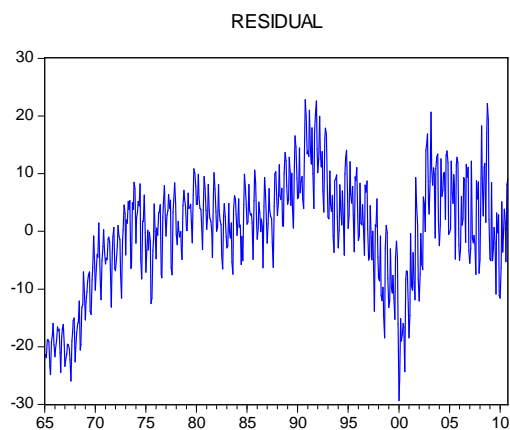
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
RET_Ind.Prod does not Granger Cause RET_SP500	534	0.68844	0.7969
RET_SP500 does not Granger Cause RET_Ind.Prod		4.36233	1.E-07

4.3 Έλεγχος για συνολοκλήρωση

Εφόσον δείξαμε ότι οι αποδόσεις του δείκτη DAX30 αιτώνται κατά Granger τις αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας, θα εκτελέσουμε μία παλινδρόμηση με ανεξάρτητη μεταβλητή τις τιμές του δείκτη DAX30 και εξαρτημένη μεταβλητή τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής. Όπως δείξαμε παραπάνω, και οι δύο σειρές δεν είναι στάσιμες και συνεπώς μπορούμε να κάνουμε τον έλεγχο για συνολοκλήρωση εξετάζοντας αν τα σφάλματα της πιο πάνω παλινδρόμησης σχηματίζουν μια στάσιμη σειρά.

Εκτίμηση παλινδρόμησης μεταξύ των τιμών της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας και των τιμών του δείκτη DAX30

Dependent Variable: Ind.Prod-Germany				
Method: Least Squares				
Date: 19/02/11 Time: 18:44				
Sample: 1965M01 2010M10				
Included observations: 550				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	62.49331	0.596232	104.8138	0.0000
DAX30	0.006751	0.000192	35.24357	0.0000
R-squared	0.693873	Mean dependent var	77.64818	
Adjusted R-squared	0.693315	S.D. dependent var	17.49083	
S.E. of regression	9.686274	Akaike info criterion	7.382927	
Sum squared resid	51415.50	Schwarz criterion	7.398599	
Log likelihood	-2028.305	Hannan-Quinn criter.	7.389051	
F-statistic	1242.109	Durbin-Watson stat	0.383573	
Prob(F-statistic)	0.000000			



Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας

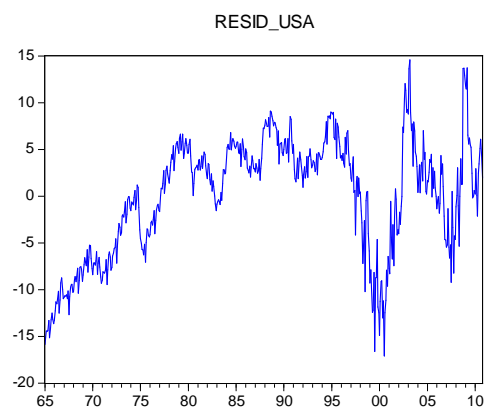
Null Hypothesis: RESID_GER has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 15 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-2.832140	0.0545
Test critical values:				
	1% level		-3.442367	
	5% level		-2.866733	
	10% level		-2.569596	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				

Όπως παρατηρούμε, η σειρά των καταλοίπων περιέχει μοναδιαία ρίζα και επομένως δεν υπάρχει ένδειξη για συνολοκλήρωση και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο διόρθωσης σφαλμάτων (VEC).

Επίσης, επειδή είδαμε ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 αιτιώνται κατά Granger τις λογαριθμικές αποδόσεις της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ, εφαρμόζουμε μία γραμμική παλινδρόμηση με ανεξάρτητη μεταβλητή τις τιμές του S&P500 και εξαρτημένη τις τιμές της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ. Αν αποδειχθεί ότι τα κατάλοιπα δημιουργούν μια στάσιμη σειρά, μπορούμε να δεχθούμε ότι υπάρχει συνολοκλήρωση μεταξύ των δύο μεταβλητών ενδιαφέροντος, ενώ σε αντίθετη περίπτωση δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε κάτι τέτοιο.

Εκτίμηση παλινδρόμησης μεταξύ των τιμών του δείκτη S&P500 και των τιμών της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ

Dependent Variable: Ind.Prod USA				
Method: Least Squares				
Date: 23/02/11 Time: 18:54				
Sample: 1965M01 2010M10				
Included observations: 550				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	43.89991	0.390182	112.5113	0.0000
S&P500	0.044772	0.000571	78.34761	0.0000
R-squared	0.918042	Mean dependent var	66.11291	
Adjusted R-squared	0.917892	S.D. dependent var	21.93973	
S.E. of regression	6.286702	Akaike info criterion	6.518380	
Sum squared resid	21658.40	Schwarz criterion	6.534052	
Log likelihood	-1790.555	Hannan-Quinn criter.	6.524505	
F-statistic	6138.348	Durbin-Watson stat	0.110304	
Prob(F-statistic)	0.000000			



Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας

Null Hypothesis: RESID_USA has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 15 (Automatic based on SIC, MAXLAG=18)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-2.865522	0.0502
Test critical values:	1% level		-3.442367	
	5% level		-2.866733	
	10% level		-2.569596	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				

Όπως αποδεικνύεται απ'το παραπάνω τεστ και το διάγραμμα, τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης δεν έχουν σχηματίσει μια στάσιμη σειρά και συνεπώς δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι υπάρχει συνολοκλήρωση μεταξύ των τιμών του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 και της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ.

Ολοκληρώνοντας την εμπειρική μας μελέτη συνοψίζουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε. Σύμφωνα λοιπόν με αυτά υπάρχει αιτιώδης σχέση μεταξύ των αποδόσεων του δείκτη DAX30 και των αποδόσεων της βιομηχανικής παραγωγής της Γερμανίας και συγκεκριμένα, ο δείκτης αιτιάται κατά Granger την βιομηχανική παραγωγή, ενώ δεν παρατηρείται συνολοκλήρωση.

Επίσης, βρέθηκε ότι υπάρχει αιτιώδης σχέση μεταξύ των αποδόσεων του δείκτη S&P500 και των αποδόσεων της βιομηχανικής παραγωγής των ΗΠΑ και συγκεκριμένα, ο δείκτης αιτιάται κατά Granger την βιομηχανική παραγωγή, ενώ και εδώ όπως πριν, δεν παρατηρείται συνολοκλήρωση.

Βιβλιογραφία

Dickey, D. A., Fuller, W. A., 1981. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica* 49, 1057-1072.

Dufour and Renault (1998). Short run and long run causality in time series: Theory, *Econometrica*, Vol.66, No5, 1099-1125

Dufour-Pelletier-Renault (2006). Short run and long run causality in time series: Inference, *Journal of Econometrics* 132, 337-362

Dufour-Tamouti (2010). Short and long run causality measures: Theory and Inference, *Journal of Econometrics* 154, 42-58.

Engle F.R, Granger C.W (1987). Co-Integration and error correction: representation, estimation and testing, *Econometrica*, vol.55, No.2, 251-276.

Feigl, H., (1953). "Notes on Causality", Readings in the Philosophy of Science, eds. H. Feigl and M. Brodbeck. New York: Appleton-Century-Crofts, Inc.

Geweke-Meese-Dent (1983). Comparing alternative tests of causality in temporal systems, *Journal of Econometrics* 21, 161-194.

Geweke, J., (1984). Inference and causality in economic time series. In: Griliches, Intrilligator, *Handbook of Econometrics*, vol.2. North-Holland, Amsterdam, 1102-1144.

Granger C.W (1969). Investigation causal relations by econometrics models and cross-spectral methods, *Econometrica*, Vol.37,424-39.

Granger C.W (1988). Some recent developments in a concept of causality, *Journal of Econometrics*, 39,199-211.

Gupta S., (1987). Testing Casality: Some Caveats and a Suggestion. *International Journal of Forecasting* 3, 195-209

Hsiao Cheng (1979). Causality tests in econometrics, *Journal of Economic Dynamics and control* 1, 321-346.

Lutkepohl, H., (1991). *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin.

Lutkepohl, H., (1993). Testing for causation between two variables in higher dimensional VAR models. In: Schneeweiss, H., Zimmermann, K., *Studies in Applied Econometrics*. Springer, Heidelberg.

McCrorie-Chambers (2006). Granger causality and the sampling of economic processes, *Journal of Econometrics* 132, 311-336

Pierce, D.A., Haugh, L.D., (1977). Causality in temporal systems: characterizations and servey. *Journal of Econometrics* 5, 265-293.

Simon, H., (1953). "Causal Ordering and Identifiability", *Studies in Econometric Method*, Cowles Commission Monograph No.14, eds. W.C Hood and T.C. Koopmans, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Sims, C., (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica* 48, 1-48.

Wiener, N. (1956). The Theory of Prediction, in: E.F. Beckenback, ed., *Modern Mathematics for Engineers*.

Zellner, A. Causality and Econometrics