ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΉΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΙΙ ΣΤΗΝ ΑΣΦΑΛΙΣΗ ΖΩΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΙΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Χαράλαμπος Ν. Σίμου

Πειραιάς

Ιούνιος 2013

PIRAEUS UNIVERSITY

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE

POSTGRADUATE IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

SOLVENCY II IN LIFE INSURANCE

ANALYSIS OF BIOMETRIK RISK

Charalampos N. Simou

PIRAEUS

June 2013

Περίληψη

Η παρούσα Διατριβή έχει ως στόχο να παρουσιάσει το νέο κανονιστικό πλαίσιο για την φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιρειών, το οποίο ονομάζεται, Solvency II. Η μελέτη επικεντρώνεται στη φερεγγυότητα των Ασφαλιστικών Επιχειρήσεων Ζωής και ειδικότερα γίνεται ανάλυση του βιομετρικού κινδύνου της θνησιμότητας, της μακροβιότητας και της ανικανότητας. Αρχικά γίνεται μια ιστορική αναδρομή της φερεγγυότητας, ορίζεται ο βιομετρικός κίνδυνος και περιγράφεται η αποτίμησή τους σύμφωνα με την τελευταία ποσοτική μελέτη QIS 5. Στη συνέχεια παρουσιάζονται και περιγράφονται, σύμφωνα με τα πιο πρόσφατα δημοσιευμένα άρθρα, μοντέλα αποτίμησης του βιομετρικού κινδύνου. Τέλος γίνεται αριθμητική εφαρμογή με τη χρήση του πακέτου της γλώσσας R, LifeContigencies, όπου γίνεται υπολογισμός του κεφαλαίου φερεγγυότητας με διάφορες προσεγγίσεις σε διάφορους τύπους ασφαλιστηρίων συμβολαίων.

ABSTRACT

This thesis aims to introduce the new regulatory framework for the solvency of insurance companies, called Solvency II. The study focuses on the solvency of the Life Insurance Business and in particular on analysis of biometric risk of mortality, longevity and disability. Initially a historical background about solvency is presented, then the biometric risk is defined and finally a description of its evaluation according to the latest quantitative study QIS 5 is included. Furthermore, the evaluation models of biometric risk are presented and described, according to the most recently published articles. Finally, a numerical implementation is taking place by the utilization of LifeContigencies, a R language packet, which calculates solvency capital with various approaches in different types of policies.

Στους Γονείς μου

και στη Μαρία

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή και Ιστορική Αναδρομή 10
1.1 Εισαγωγή 10
1.2 Έννοια της φερεγγυότητας 10
1.3 Ορισμός ασφαλιστικών κινδύνων και βιομετρικού κινδύνου 12
1.4 Solvency 0 και Solvency 1 12
1.5 Αδυναμίες του Solvency I και βήματα προς Solvency II 14
2 Μοντελοποίηση ενός προτύπου 17
2.1 Η βασική ιδέα πίσω από την αξιολόγηση της φερεγγυότητας. 17
2.2 Τα δύο επίπεδα κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας 17
2.3 Κίνδυνοι ασφαλιστικών επιχειρήσεων και η διαφοροποίησή τους 18
2.4 Μέτρα κινδύνου 20
2.5 Αποτιμήσεις 21
2.6 Σκοποί της αποτίμησης 21
2.7 Βέλτιστη εκτίμηση υποχρεώσεων και τεχνικές προβλέψεις 22
2.8 Η δίκαιη τιμή σε ένα περιβάλλον λογιστικών προτύπων 23
2.9 Η δίκαιη τιμή σε ένα περιβάλλον από λογιστικά πρότυπα και κανόνες φερεγγυότητας 25
2.9.1 Τα μελλοντικά κέρδη από ένα χαρτοφυλάκιο 26
2.9.2 Η στιγμιαία αξία ενός χαρτοφυλακίου τη στιγμή της συναλλαγής 26
2.9.3 Αγοραία Αξία των Υποχρεώσεων (Market Value,MV) 27
2.9.4 Αποτίμηση των ασφαλιστικών υποχρεώσεων 28
2.9.5 Κόστος κεφαλαίου για ασφαλιστικές επιχειρήσεις 28
2.9.6 Η σχέση μεταξύ MVM , MCR και SCR 29
2.10 Μέτρα κινδύνου 29
2.10.1 Υπόθεση κανονικότητας 30
2.10.2 Standard Deviation Principle (SDP) 30
2.11 Υπόθεση μη κανονικότητας 31
2.11.1 Μέτρα κινδύνου βασισμένα σε μια NP προσέγγιση 31
2.12 Η τυπική προσέγγιση με τα αποτελέσματα της QIS 5 32
3 Βιομετρικός κίνδυνος φερεγγυότητας σε χαρτοφυλάκια Γενικών Ασφαλίσεων Ζωής. 35
3.1 Απλό συμβόλαιο ζωής με πολλαπλές αιτίες εξόδου 35

3.2 Συμβόλαια ασφαλίσεων ζωής με πολλαπλές αιτίες εξόδου διακριτού χρόνου 38

3.3 Το κεφάλαιο φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου ασφαλίσεων ζωής με τη μέθοδο VaR και CVaR 40

3.4 Σύγκριση της τυπικής προσέγγισης με διάφορες στοχαστικές προσεγγίσεις 44

4 Βιομετρικός κίνδυνος φερεγγυότητας σε χαρτοφυλάκια συμβολαίων Γενικευμένων Ασφαλίσεων Ζωής (GLIFE) με προσέγγιση Μαρκοβιανών Αλυσίδων (Markov Chain Approach). 48

4.1 Μια γενική προοπτική προσέγγιση του κεφαλαίου φερεγγυότητας του ασφαλιστικού κινδύνου 48

4.2 Προσέγγιση Μαρκοβιανών αλυσίδων σε ασφαλιστήρια συμβόλαια ζωής 52

4.3 Το κεφάλαιο φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου ασφαλίσεων ζωής με τη μέθοδο VaR και CVaR. 56

4.4 Σύγκριση της τυπικής προσέγγισης με διάφορες στοχαστικές προσεγγίσεις 61

4.5 Ασφαλίσεις προικοδότησης με απαλλαγή των ασφαλίστρων λόγω ανικανότητας .69

5 Ανάλυση κινδύνου μακροβιότητας και αναπηρίας με αυξανόμενες ράντες ζωής 75

5.1.1 Πιθανοτικό πλαίσιο 76

5.1.2 Δημογραφικά σενάρια 79

5.1.3 Αναλογιστικές τιμές 80

5.1.4 Ανάλυση δημογραφικού κινδύνου 82

5.1.5 Απαιτήσεις βασισμένες στον κίνδυνο 84

5.1.6 Αντασφάλιση Ανακοπής Ζημιάς (Stop-loss) 87

6 Αριθμητική εφαρμογή 89

6.1 Περιγραφή Αριθμητικής εφαρμογής 89

6.2 Μεικτή Ασφάλιση Ζωής 10 ετών 93

6.3 Ασφάλιση Προικοδότησης ή Μελλοντικού κεφαλαίου 10 ετών 96

6.4 Μειούμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών 99

6.5 Αυξανόμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών 102

6.6 Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών 105

6.7 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 5 ετών 108

6.8 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 10 ετών 111

6.9 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών 114

6.10 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 5 ετών 117

6.11 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 10 ετών 120

6.12 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών 123

6.13 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 5 ετών 126

6.14 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 10 ετών 129
6.15 Σταθερό ποσό παροχής πριν την ηλικία συνταξιοδότησης 132
6.16 Αυξανόμενη Ράντα Ζωής 10 ετών..135
6.17 Συμπεράσματα 138
7 Βιβλιογραφία 139

1 Εισαγωγή και Ιστορική Αναδρομή

1.1 Εισαγωγή

Η Διατριβή αυτή έχει ως σκοπό τη μελέτη των μεθόδων μέτρησης της φερεγγυότητας για συμβόλαια ασφάλισης ζωής. Εξετάζεται αναλυτικά το κανονιστικό πλαίσιο για τα συγκεκριμένα προϊόντα που σχετίζεται με την εποπτεία και τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας σύμφωνα με τις οδηγίες του Solvency II καθώς και με τα κυριότερα μέτρα που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο βιομετρικό κίνδυνο ενώ θα γίνει περιγραφή και ων υπόλοιπων κινδύνων. Επίσης θα γίνει αναλυτική εφαρμογή.

1.2 Έννοια της φερεγγυότητας

Σύμφωνα με τον Sandstrom (2006) ο ασφαλιστικός τομέας μεταβαίνει από ένα σύστημα άμεσης εποπτείας ελέγχου σε ένα περισσότερο απελευθερωμένο περιβάλλον. Αυτό το βήμα απαιτεί νέα συστήματα ελέγχου και διαχείρισης των κινδύνων. Οι εποπτικές αρχές χρειάζονται νέες και βελτιωμένες τεχνικές για τον έλεγχο των ασφαλιστικών εταιρειών. Δεδομένου ότι αυτά τα θεσμικά όργανα είναι και μεγάλοι επενδυτές, η ευρωστία τους έχει σαφείς επιπτώσεις στη χρηματιστηριακή αγορά. Το βασικότερο σημείο αναφοράς μιας ασφαλιστικής επιχείρησης είναι η φερεγγυότητα της ή η οικονομική της ευρωστία. Άλλοι όροι που χρησιμοποιούνται είναι οικονομική υγεία ή σταθερότητα. Οι κύριες υποχρεώσεις μιας ασφαλιστικής επιχείρησης είναι οι αναμενόμενες απαιτήσεις και τα συνδεδεμένα έξοδα τους. Αυτά υπολογίζονται με αναλογιστικές μεθόδους, με βάση τους εν ισχύ κανονισμούς. Αυτοί οι υπολογισμοί προέρχονται από εκτιμήσεις οι οποίες εμπεριέχουν ανάλογα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται και το αντίστοιχο σφάλμα εκτίμησης. Προκειμένου να προστατευτούν οι ασφαλισμένοι και να διασφαλιστεί η σταθερότητα των χρηματοοικονομικών αγορών απαιτείται από τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις να κατέχουν ένα ορισμένο ποσό επιπλέον των περιουσιακών στοιχείων τους το οποίο ονομάζεται περιθώριο φερεγγυότητας (Solvency Margin,SM).

Η έννοια του περιθωρίου φερεγγυότητας ορίστηκε το 1930 ως η ικανότητα να πληρώνεις όλα τα νομικά χρέη.

Αυτή η έννοια της φερεγγυότητας γεννάει ερωτήματα, όπως:

- Πόσο μεγάλο θα είναι αυτό το ποσό του περιθωρίου φερεγγυότητας ;

- Ποιός είναι ο χρονικός ορίζοντας υπολογισμού;

- Τι είδους περιουσιακά στοιχεία θα περιλαμβάνει;

Σύμφωνα με τον Pentikainen (1952) το περιθώριο φερεγγυότητας ισούται με την διαφορά των υποχρεώσεων από τα περιουσιακά στοιχεία, δηλαδή, SM=A-L(A=Assets και L=Liabilities). Αν βάλουμε και κάποιους περιορισμούς επί των περιουσιακών στοιχείων όπως η ποιότητα αυτών τότε θα μιλάμε για το Διαθέσιμο περιθώριο φερεγγυότητας (ASM). Η θεωρητική κεφαλαιακή απαίτηση είναι το ελάχιστο ποσό που απαιτείται από τις εποπτικές αρχές, προκειμένου μια ασφαλιστική επιχείρηση να μπορεί να λειτουργεί.

Στην Οδηγία Solvency II αυτή η θεωρητική κεφαλαιακή απαίτηση αναφέρεται ως Κεφαλαιακή Απαίτηση Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement ή SCR) και η ελάχιστη απαίτηση ως Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση (Minimum Capital Requirement,MCR). Στο Solvency II ισχύει MCR≤ SCR≤ ASM .Το 1967 ο Pentikainen παρουσιάζει δυο διαφορετικούς τρόπους εξετάζοντας την έννοια της φερεγγυότητας.

1) Από τη πλευρά της διοίκησης της εταιρείας : Η συνέχιση της λειτουργίας και η ύπαρξη της πρέπει να εξασφαλιστεί.
2) Από την πλευρά των εποπτικών αρχών: Τα οφέλη των ασφαλισμένων πρέπει να εξασφαλιστούν.

Σύμφωνα με τον IAIS μια ασφαλιστική επιχείρηση είναι φερέγγυα εάν είναι σε θέση να εκπληρώσει όλες τις υποχρεώσεις που απορρέουν από όλες τις συμβάσεις κάτω υπό κανονικές συνθήκες.

Στις ασφαλίσεις ζωής είναι απαραίτητο ότι πέραν των τεχνικών προβλέψεων η ασφαλιστική επιχείρηση θα πρέπει να διαθέτει ένα πρόσθετο αποθεματικό γνωστό ως περιθώριο φερεγγυότητας που αντιστοιχεί στα ελεύθερα βαρών περιουσιακά στοιχεία και σύμφωνα με τις αρμόδιες αρχές στα τεκμαρτά περιουσιακά στοιχεία τα οποία θα χρησιμεύουν ως ρυθμιστής έναντι των διακυμάνσεων των υποχρεώσεων. Ο χρονικός ορίζοντας είναι σύμφωνος με την παραδοχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας (going concern). Το μέγεθος του διαθέσιμου περιθωρίου φερεγγυότητας εξαρτάται από το χρονικό ορίζοντα υπολογισμού. Μπορούμε να ορίσουμε το μέγεθος σύμφωνα με το καθεστώς άμεσης εκκαθάρισης (run-off) που ισχύει στις Η.Π.Α ή με μια κατάσταση όπου όλες οι πληρωμές γίνονται ως ώριμα χρέη (προσέγγιση going concern), που ισχύει στην Ε.Ε.

1.3 Ορισμός ασφαλιστικών κινδύνων και βιομετρικού κινδύνου

Ο ασφαλιστικός κίνδυνος ζωής αφορά στο κίνδυνο που πηγάζει από την ανάληψη ασφαλιστικών κινδύνων ζωής και αναφέρεται τόσου στους καλυπτόμενους κινδύνους όσο και στη διαδικασία που ακολουθείται για τη διεξαγωγή των ασφαλιστικών εργασιών ζωής. Ο ασφαλιστικός κίνδυνος ζωής μπορεί να επιμεριστεί στους εξής επιμέρους κινδύνους:

- Βιομετρικός (θνησιμότητας, μακροβιότητας, αναπηρίας)
- Ακυρωσιμότητας / Εξαγοράς
- Εξόδων
- Καταστροφικών γεγονότων

Ο κίνδυνος θνησιμότητας αντανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της θνησιμότητας, στο βαθμό που δεν λαμβάνονται υπόψη στα τεχνικά αποθέματα. Εφαρμόζεται στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από θνησιμότητα του ασφαλισμένου, δηλαδή αφορούν στη περίπτωση που οι παροχές σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου υπερβαίνουν το ύψος τεχνικών προβλέψεων.

Ο κίνδυνος μακροβιότητας αντανακλά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της θνησιμότητας, στο βαθμό που δεν λαμβάνονται υπόψη στα τεχνικά αποθέματα. Εφαρμόζεται στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από την μακροβιότητα του ασφαλισμένου, δηλαδή όταν δεν υπάρχει παροχή θανάτου ή σε περίπτωση θανάτου καταβάλλεται παροχή που υπολείπεται της τεχνικής πρόβλεψης.

Ο κίνδυνος ανικανότητας αντανακλά την αβεβαιότητα στη τάση και στις παραμέτρους της ανικανότητας ή νοσηρότητας στο βαθμό που δεν λαμβάνονται υπόψη στα τεχνικά αποθέματα. Εφαρμόζεται στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από το ενδεχόμενο ανικανότητας.

1.4 Solvency 0 και Solvency 1

Το 1948 ο καθηγητής Campagne δημοσίευσε μια έκθεση για την αξιολόγηση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών επιχειρήσεων ζωής, βασισμένος σε δέκα γερμανικές ασφαλιστικές επιχειρήσεις ζωής στο χρονικό διάστημα 1926-1945 και λίγα χρόνια αργότερα μετά από αίτηση της Ε.Ε., το 1961, δημοσίευσε μια άλλη προσέγγιση παρόμοια με την προηγούμενη. Επειδή ο κίνδυνος επενδύσεων είναι ο πιο σημαντικός παράγοντας για τις εταιρίες ζωής και οι τεχνικές προβλέψεις είναι το σημαντικότερο επενδυόμενο ποσό, θεώρησε ένα ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας ως ποσοστό των τεχνικών προβλέψεων. Ο Campagne επίσης ασχολήθηκε και με άλλες πιθανότητες όπως το ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας να είναι ως ποσοστό του ασφαλισμένου κεφαλαίου ή ως άθροισμα των κινδύνων. Αν ο δείκτης ζημιών (Loss Ratio-LR) είναι το ποσοστό των ζημιών (L) προς τις τεχνικές προβλέψεις (TP) δηλαδή LR=L/T, τότε η αναλογία του ελευθέρου αποθεματικού (Free Reserve-FR=A/TP, όπου A=Assets) πρέπει να είναι τέτοια ώστε P(LR>FR)≤ε. Αυτό ορίζεται ως η Αξία σε Κίνδυνο του LR ή VaRLR. O Campagne πρότεινε ε= 0,05 και ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας 4% επί των τεχνικών προβλέψεων.

Μετά την ίδρυση της ΕΟΚ το 1957 ξεκίνησε μια συνεργασία μεταξύ των εποπτικών αρχών για ασφαλιστικά θέματα και κυρίως για την ελεύθερη ασφαλιστική αγορά. Μετά από συζητήσεις των εποπτικών αρχών και της ασφαλιστικής βιομηχανίας ανατέθηκε στον καθηγητή De Mori που ήταν μέλος της ομάδας του Campagne να αναπτύξει κριτήρια για το ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας (De Mori,1965). Στην εργασία αυτή σύμφωνα με τον Schlude (1979) προταθήκαν τρεις αναλογίες ή κριτήρια για το ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας:

1. Τα ελευθέρα βάρους περιουσιακά στοιχεία προς τα ασφάλιστρα κατά το τελευταίο έτος.
2. Τα ελευθέρα βάρους περιουσιακά στοιχεία προς τον μέσο όρο των απαιτήσεων που προέκυψαν τα τρία τελευταία έτη.
3. Τα ελευθέρα βάρους περιουσιακά στοιχεία προς τις τεχνικές προβλέψεις.

Το 1970 δημοσιεύτηκε η πρώτη οδηγία και ακολούθησαν άλλες δύο μέχρι το 1990. Η ΕΕ είχε σκοπό να αναπτύξει μια ενιαία αγορά ασφαλιστικών προϊόντων και να εξασφαλίσει την προστασία των ασφαλισμένων. Στις 5 Μαρτίου 2002 θεσμοθετείται η Φερεγγυότητα Ι και στα τέλη του 2004 τίθεται σε ισχύ. Το καθεστώς αυτό βασίζεται στην εργασία του Muller και παρέχει κανόνες που αφορούν τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Ο υπολογισμός του περιθωρίου φερεγγυότητας ήταν παρόμοιος με τις προηγούμενες οδηγίες απλά ο εποπτικός έλεγχος έγινε πιο ενεργός και αυστηρός. Επίσης το διαθέσιμο περιθώριο φερεγγυότητας που αντιπροσωπεύει τα τεχνικά αποθέματα πρέπει να είναι καλής ποιότητας. Η ομάδα του Muller επίσης προσδιόρισε τρείς ομάδες κινδύνου(τεχνικούς , επενδυτικούς και μη τεχνικούς) από 20 συνολικά κατηγορίες κινδύνου.

Για τις ασφαλίσεις ζωής το περιθώριο φερεγγυότητας ορίζεται ως έξης:

Πρώτο αποτέλεσμα: Ποσοστό 4% των μαθηματικών αποθεμάτων που αφορούν πρωτασφαλιστικές εταιρείες (χωρίς να αφαιρεθούν οι αντασφαλιστές εκχωρήσεις) και αντασφαλίστηκες αποδοχές, πολλαπλασιάζεται με τον κατά την τελευταία οικονομική χρήση λόγο του συνόλου των μαθηματικών αποθεμάτων (μετά την αφαίρεση των αντασφαλιστήκαν εκχωρήσεων) προς τα ακαθάριστα συνολικά μαθηματικά αποθέματα πριν αφαιρεθούν οι αντασφαλίστηκες εκχωρήσεις. Ο λόγος αυτός δεν μπορεί να είναι μικρότερος του 85% .

Το δεύτερο αποτέλεσμα: Για τα ασφαλιστήρια συμβόλαια των οποίων το κεφάλαιο δεν είναι αρνητικό, ποσοστό 0,3% από αυτό το κεφάλαιο , το οποίο έχει ασφαλιστεί από την επιχείρηση, πολλαπλασιάζεται με τον κατά την τελευταία χρήση λόγο του συνολικού κεφαλαίου κίνδυνου με ιδία κράτηση της επιχείρησης μετά την αφαίρεση των ανταασφαλιστικών εκχωρήσεων και αντεκχωρήσεων, προς το συνολικό κεφάλαιο κινδύνου στο οποίο περιλαμβάνονται και οι αντασφαλίσεις. Ο λόγος αυτός δεν πρέπει να είναι μικρότερος του 50% .

1.5 Αδυναμίες του Solvency I και βήματα προς Solvency II

Η ανάγκη αναθεώρησης της οδηγίας Solvency I προέκυψε για τους εξής λόγους:

- Το υπάρχον πλαίσιο είναι 30 ετών.
- Αποτελεσματική εποπτεία των ασφαλιστικών επιχειρήσεων.
- Εναρμόνιση των ποιοτικών και ποσοτικών εποπτικών μεθόδων.
- Έλλειψη ευαισθησίας στον κίνδυνο. Δεν παρέχει κίνητρα στους ασφαλιστές να διαχειριστούν αποτελεσματικά τους κινδύνους. Δεν λαμβάνει υπόψη τους κινδύνους όπως πιστωτικός, αγοράς, λειτουργικός, συγκέντρωσης, αντισυμβαλλομένου, παρά μόνο τον κίνδυνο underwriting.
- Δεν διευκολύνει την βέλτιστη κατανομή των κεφαλαίων.

Το Solvency I παρέχει μια ομοιομορφία στον υπολογισμό της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών επιχειρήσεων που βασίζεται κυρίως σε χρηματοοικονομικούς παράγοντες χωρίς να δίνει έμφαση σε επιμέρους κινδύνους που θα επηρεάσουν την φερεγγυότητα των ασφαλιστικών επιχειρήσεων. Επίσης επειδή οι μέθοδοι αποτίμησης των στοιχειών του ενεργητικού και του παθητικού και κυρίως των τεχνικών προβλέψεων διαφέρουν από χώρα σε χώρα θεωρήθηκε ότι το πλαίσιο αυτό δεν εξυπηρετούσε την ενιαία ελεύθερη αγορά των ασφαλιστικών προϊόντων και υπηρεσιών. Έτσι κρίθηκε απαραίτητη μια νέα οδηγία-πλαίσιο για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις που θα βασίζεται σε μια αντίστοιχη οδηγία για την κεφαλαιακή επάρκεια των τραπεζικών ιδρυμάτων, το σύμφωνο της Βασιλείας ΙΙ. Το νέο αυτό πλαίσιο θα ονομαστεί Φερεγγυότητα ΙΙ και ενώ θα στηρίζεται στο υπάρχον νομοθετικό πλαίσιο Φερεγγυότητα Ι θα ενσωματωθούν σε αυτό στοιχεία που θα αξιολογούν τους οικονομικούς κινδύνους των ασφαλιστικών επιχειρήσεων.

Το πλαίσιο Φερεγγυότητα ΙΙ περιλαμβάνει δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση 2001-2003 δημοσιεύονται αρκετές μελέτες με κυριότερες την μελέτη της KPMG και την μελέτη του Paul Sharma. Η μελέτη της KPMG στηρίχτηκε στην δομή των τριών πυλώνων του νομοθετικού πλαισίου για την επάρκεια των τραπεζικών ιδρυμάτων, Βασιλεία ΙΙ. Οι τρεις πυλώνες περιλαμβάνουν:

1. Ποσοτικές απαιτήσεις.
2. Εποπτικές δραστηριότητες.
3. Εποπτική αναφορά και δημοσιοποίηση.

Η μελέτη του Sharma εισηγείται τις αρχές στις οποίες θα πρέπει να βασιστεί ο εσωτερικός έλεγχος του κινδύνου, ενώ οι ευθύνες, τα καθήκοντα και η ιεραρχία σε κάθε εταιρία θα πρέπει να είναι ξεκάθαρες για να διασφαλιστεί η λειτουργία του συστήματος.

Σημαντικό ρόλο για την υλοποίηση της πρώτης φάσης του πλαισίου Φερεγγυότητα ΙΙ έπαιξαν οι θεσμικοί παράγοντες CEIOPS, IAA, IASB και CEA.

Έτσι μετά την ολοκλήρωση της πρώτης φάσης ορίστηκαν ως στόχοι:

- Εισαγωγή ενός πλαισίου τριών πυλώνων αντίστοιχο της οδηγίας για τις τράπεζες, Βασιλεία ΙΙ.
- Αποτίμηση ενεργητικού και παθητικού λαμβάνοντας υπόψη όλους του κινδύνους.
- Υιοθέτηση ενός ελάχιστου ποσού φερεγγυότητας (MCR) και του απαιτούμενου πόσου φερεγγυότητας. .
- Πιο αποτελεσματική και ενεργή εποπτεία.

Την 22/4/ 2009 η Ευρωπαϊκή Επιτροπή και το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο προχώρησαν στην αναδιατύπωση των 14 υφιστάμενων οδηγιών για ασφαλίσεις/αντασφαλίσεις σε ένα ενιαίο κείμενο βασισμένο στην αρχιτεκτονική του Lamfalussy, την οδηγία 2009/138/ΕΚ, γνωστή ως Φερεγγυότητα ΙΙ.

Το δεύτερο λοιπόν στάδιο του πλαισίου φερεγγυότητα ΙΙ στηρίζεται στην νομοθετική διαδικασία Lamfalussy σύμφωνα με την οποία ακολουθούνται οι εξής διαδικασίες σε τέσσερα επίπεδα:

Επίπεδο 1 (οδηγία πλαίσιο): περιλαμβάνει την συγκέντρωση υφιστάμενων οδηγιών και κανονισμών καθώς και προτάσεις για μελλοντικές οδηγίες οι οποίες παρουσιάζονται στο συμβούλιο υπουργών της Ε.Ε. καθώς και στο Ευρωπαϊκό κοινοβούλιο για να υπάρχει η σύμφωνη γνώμη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής.

Επίπεδο 2 (εκτελεστικά μέτρα): Λαμβάνονται υπόψη μέτρα για τις τεχνικές προδιαγραφές που αφορούν την υιοθέτηση των νομοθετικών μέτρων του πρώτου επιπέδου. Η Κομισιόν ετοιμάζει λεπτομερείς προδιαγραφές βασιζόμενες στις απόψεις του CEIOPS και του EIOPS .

Επίπεδο 3: Ο CEIOPS σε συνεργασία με την συμβουλευτική επιτροπή (ειδικοί της ασφαλιστικής αγοράς) παρέχει επίβλεψη και αξιολόγηση για τα μέτρα του δεύτερου επιπέδου ως την έκδοση της τελικής οδηγίας.

Επίπεδο 4: Αυστηρή εφαρμογή της Ευρωπαϊκής νομοθεσίας από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή.

Η τελική μορφή του νέου πλαισίου δεν έχει υλοποιηθεί μέχρι σήμερα και συνεχώς υπόκεινται σε νέες προσθήκες και σημαντικές τροποποιήσεις. Σήμερα βρισκόμαστε ανάμεσα στο δεύτερο και τρίτο επίπεδο της διαδικασίας Lamfalussy ενώ αναμένεται να εφαρμοστεί την 1/1/2014.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το πλαίσιο Φερεγγυότητα II έχει παρόμοια δομή με αρκετά ισχύον πλαίσια διαφόρων χωρών όπως της Αυστραλίας, του Ηνωμένου Βασιλείου αλλά κυρίως το πλαίσιο της Ελβετίας γνωστό ως Solvency Swiss Test,SST που βρίσκεται σε ισχύ από το 2006 στην Ελβετία. Το μοντέλο SST βασίζεται στον υπολογισμό δυο ποσοτήτων:

I. Ενός ελάχιστου περιθωρίου φερεγγυότητας.
II. Ενός Κεφαλαίου Στόχου για περίοδο ενός έτους.

Το μοντέλο επίσης θεωρεί ποσοτικούς όλους τους κινδύνους εκτός από τον λειτουργικό που τον θεωρεί ποιοτικό και τους λαμβάνει υπόψη.

2 Μοντελοποίηση ενός προτύπου

2.1 Η βασική ιδέα πίσω από την αξιολόγηση της φερεγγυότητας.

Η βασική ιδέα πίσω από την αξιολόγηση της φερεγγυότητας μπορεί να θεωρηθεί ως οι δυο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Από τη μια έχουμε την αξιολόγηση της φερεγγυότητας και την προσέγγισή της και από την άλλη τη λογιστική αποτίμηση. Η έννοια του περιθωρίου φερεγγυότητας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επιπλέον ποσό πάνω από τα ελεύθερα περιουσιακά στοιχεία που καλύπτουν τις υποχρεώσεις. Αυτό το επιπλέον ποσό πρέπει να περιέχει καλής ποιότητας περιουσιακά στοιχεία και το μέγεθος του να εξαρτάται από ένα χρονικό ορίζοντα. Για παράδειγμα μπορεί να έχουμε χρονικό ορίζοντα ενός έτους που αντιστοιχεί σε μια λογιστική περίοδο.

Από τη μια πλευρά μπορεί να έχουμε ένα καθεστώς άμεσης εκκαθάρισης (προσέγγιση run-off) και από την άλλη μια κατάσταση όπου όλες οι πληρωμές γίνονται ως ώριμα χρέη, δηλαδή μια κατάσταση συνεχιζόμενης δραστηριότητας (προσέγγιση going concern).Στο πλαίσιο του IASB οι τεχνικές προβλέψεις υπολογίζονται με τη χρήση της δίκαιης τιμής (Fair Value). Επειδή αυτή είναι λογιστική έννοια, ο υπολογισμός των τεχνικών προβλέψεων σε ένα πλαίσιο φερεγγυότητας θα γίνεται με τη βέλτιστη εκτίμηση (Best Estimate) των υποχρεώσεων.

Σύμφωνα με τα λογιστικά πρότυπα η δίκαιη τιμή ισούται με τη βέλτιστη εκτίμηση συν ένα περιθώριο κινδύνου γνωστό ως περιθώριο κινδύνου αγοράς (Market Value Margin,MVM). Σε ένα περιβάλλον όπου υπάρχουν και κανονισμοί αξιολόγησης φερεγγυότητας η MVM μπορεί να προσεγγιστεί από μια συνάρτηση απαιτούμενης κεφαλαιακής φερεγγυότητας.

2.2 Τα δύο επίπεδα κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας

Στη δεύτερη φάση της οδηγίας Φερεγγυότητα II η Ευρωπαϊκή Επιτροπή εισήγαγε δυο διαφορετικά επίπεδα φερεγγυότητας. Το ανώτερο επίπεδο γνωστό ως Απαιτούμενο Κεφάλαιο Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement,SCR) και ένα κατώτερο γνωστό ως Ελάχιστο Κεφάλαιο Φερεγγυότητας (Minimum Capital Requirement,MCR). Το SCR μπορεί να γραφεί ως η διαφορά μεταξύ του επιπέδου των κεφαλαιακών απαιτήσεων και της βέλτιστης εκτίμησης των τεχνικών προβλέψεων. Το SCR είναι το επιθυμητό κεφάλαιο που θα πρέπει να κατέχει μια ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου να μην χρεοκοπήσει. Το SCR αντιπροσωπεύει το επιθυμητό επίπεδο κεφαλαίων που επιτρέπει σε μια εταιρεία να απορροφήσει σημαντικές και απρόβλεπτες ζημιές, δίνοντας παράλληλα μια λογική επιβεβαίωση στους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων ότι η εταιρεία θα είναι σε θέση να καλύψει τις υποχρεώσεις της. Οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις που θα είναι σε θέση να καλύψουν το SCR θα βρίσκονται σε θέση ισχύος και θα έχουν την ελευθερία να διοικούν την επιχείρηση και τις εργασίες τους χωρίς περιορισμούς ή παρεμβάσεις από τις εποπτικές αρχές. Οι εταιρείες αυτές θα υπόκεινται μόνο σε τακτικούς ελέγχους. Το MCR είναι το χαμηλότερο επίπεδο στο σύστημα φερεγγυότητας, κάτω του οποίου η ασφαλιστική επιχείρηση οδηγείται σε εποπτική παρέμβαση και πιθανή ανάκληση αδείας. Σκοπός του MCR είναι να θέσει ένα επίπεδο ελέγχου στο οποίο το ενεργητικό της εταιρείας θα υπερβαίνει κατά ένα επαρκές περιθώριο την αξία των υποχρεώσεων της εταιρείας απέναντι στους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων και θα διασφαλίζει τη βραχυχρόνια επιβίωση της εταιρείας, μέχρι δηλαδή να μπορέσει να μεταφέρει το χαρτοφυλάκιο της σε μια άλλη εταιρεία ή μέχρι να συλλέξει τα αναγκαία κεφάλαια για την επιβίωσή της. Ανάμεσα στο MCR και το SCR υπάρχουν κλίμακες που αντανακλούν τον αντίστοιχο βαθμό εποπτείας.

2.3 Κίνδυνοι ασφαλιστικών επιχειρήσεων και η διαφοροποίησή τους

Κίνδυνοι λαμβάνουν χώρα σε όλη την ασφαλιστική δραστηριότητα, από τη τιμολόγηση, το σχεδιασμό, την ανάληψη κινδύνων (underwriting), τον υπολογισμό των τεχνικών προβλέψεων μέχρι την επιλογή των περιουσιακών στοιχείων για την κάλυψη των τεχνικών προβλέψεων και τη στρατηγική πολιτική της εταιρείας.

Σύμφωνα με τη μελέτη του IAA (2004) οι κίνδυνοι μπορούν να ταξινομηθούν σε τρία κυρίως επίπεδα:

1. Κίνδυνοι που προέρχονται από επίπεδο οντότητας (διαφοροποιήσιμοι).
2. Κίνδυνοι που αντιμετωπίζονται από την ασφαλιστική βιομηχανία (συστηματικοί και συνήθως μη διαφοροποιήσιμοι).
3. Κίνδυνοι που αντιμετωπίζονται από ολόκληρη την οικονομία και ολόκληρη την κοινωνία (συστηματικοί και μη διαφοροποιήσιμοι).

Ως διαφοροποιήσιμους εννοούμε τους κινδύνους που μπορούν να υποδιαιρεθούν σε κατηγορίες κινδύνων και η τελική επιβάρυνση του κινδύνου δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των κατηγοριών του κινδύνου, δηλαδή, αν X ,Y δυο υποκατηγορίες κινδύνων τότε $\Phi(X+Y) \leq \Phi(X)+\Phi(Y)$.
Το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης μπορεί να ταξινομηθεί σε τέσσερα βασικά επίπεδα.

Επίπεδο 0: Μεταξύ των αναλαμβανόμενων κινδύνων, για παράδειγμα, μεταβλητότητα και μη μεταβλητότητα σε μια γραμμή παραγωγής ή κατηγορίες ενεργητικού (διαφορετικοί κίνδυνοι).

Επίπεδο 1: Μεταξύ των υποχαρτοφυλακίων σε μια κατηγορία κινδύνων μιας επιχειρηματικής μονάδας (π.χ. κατηγορίες ενεργητικού).
Επίπεδο 2: Μεταξύ των κύριων κινδύνων και υποκατηγοριών των κινδύνων (π.χ. μπορεί να έχουμε πέντε κύριες κατηγορίες όπου κάθε μια να αποτελείται από μια ή περισσότερες υποκατηγορίες).
Επίπεδο 3: Μεταξύ επιχειρηματικών μονάδων ενός ομίλου ετερογενών δραστηριοτήτων (π.χ. ένας χρηματοπιστωτικός όμιλος μπορεί να έχει μια ή περισσότερες ασφαλιστικές επιχειρήσεις).
Στις ασφαλίσεις ζωής και στο επίπεδο 0, οι κίνδυνοι μπορούν να χωριστούν σε μεταβλητότητας, μεγάλων καταστροφών, τάσης αβεβαιότητας και επίπεδο αβεβαιότητας. Τα κύρια συστατικά του κινδύνου σύμφωνα με τον IAA(2004) είναι:

I. Αβεβαιότητα : Ο κίνδυνος το μοντέλο να έχει εκτιμηθεί λανθασμένα. Είναι μη διαφοροποιήσιμος κίνδυνος καθώς δεν μπορεί να μειωθεί από μια αύξηση του αριθμού των ασφαλισμένων.
II. Μεταβλητότητα: Ο κίνδυνος της διακύμανσης της συχνότητας και της σοβαρότητας του κινδύνου. Είναι διαφοροποιήσιμος κίνδυνος αφού όσο αυξάνεται ο αριθμός των ασφαλισμένων, η μεταβλητότητα του μέσου όρου των απαιτήσεων μειώνεται (ανεξάρτητοι κίνδυνοι).
III. Ακραία γεγονότα : Κίνδυνοι με χαμηλή συχνότητα εμφάνισης, αλλά μεγάλη σοβαρότητα.

Στο επίπεδο 1 χωρίζουμε τα περιουσιακά στοιχεία ενός χαρτοφυλακίου σε ομολογίες, μετοχές, ακίνητα, μετρητά κ.ά.
Στο επίπεδο 2 προτάθηκαν πέντε κύριες κατηγορίες κινδύνων από τον IAA .

- Underwriting
- Πιστωτικός
- Αγοράς
- Λειτουργικός
- Ρευστότητας

Αυτές οι κύριες κατηγορίες κινδύνων μπορούν να διαιρεθούν σε επιμέρους κατηγορίες, για παράδειγμα, ο πιστωτικός μπορεί να διαιρεθεί σε κίνδυνο πτώχευσης, βάσης (spread), χώρας, αντισυμβαλλόμενου και συγκέντρωσης.

Στο τρίτο επίπεδο, δηλαδή, μεταξύ δυο επιχειρηματικών μονάδων του ίδιου ομίλου μπορεί να έχουμε δυο ασφαλιστικές επιχειρήσεις του ίδιου ομίλου που η μια να είναι αντασφαλιστική επιχείρηση και να έχει αναλάβει τον εκχωρούμενο κίνδυνο της άλλης, άρα έχουμε ένα είδος κινδύνου αντισυμβαλλόμενου (αντασφαλιστή) σε περίπτωση που αθετήσει τη συμφωνία ή χρεοκοπήσει. Επίσης μπορεί να έχουμε μια τράπεζα και μια ασφαλιστική επιχείρηση, οπότε υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος αν η τράπεζα πτωχεύσει ή αθετήσει τις πληρωμές της προς την ασφαλιστική.

2.4 Μέτρα κινδύνου

Σε ένα οικονομικό περιβάλλον βασισμένο στον κίνδυνο τα θετικά αποτελέσματα από τα συστατικά του κάθε κινδύνου που περιλαμβάνονται σε ένα μοντέλο συσσωρεύονται σε ένα συνολικό κεφάλαιο απαιτήσεων. Ένα μέτρο κινδύνου πρέπει να αντανακλά τις κεφαλαιακές χρεώσεις που μια εταιρεία χρειάζεται για να πληρώσει τις εκθέσεις των υποχρεώσεων της.

Σύμφωνα με τους Artzner et al (1999) ορίστηκαν ως συνεπή μέτρα κινδύνων εκείνα τα μέτρα P τα οποία ικανοποιούν τα παρακάτω τέσσερα αξιώματα.

1. Subadditivity: $P(X+Y) \leq P(X)+P(Y)$. Δείχνει το αποτέλεσμα της διαφοροποίησης και ότι μια συγχώνευση δεν δημιουργεί επιπλέον κίνδυνο

2. Monotonicity: Αν $X \leq Y$ για όλα τα θετικά αποτελέσματα, τότε $P(X) \leq P(Y)$. Δείχνει ότι αν μια ζημιά είναι μικρότερη από μια άλλη τότε και η χρέωση του κινδύνου πρέπει να έχει την ίδια σχέση.
3. Positive homogeneity: Για κάθε σταθερά $\lambda > 0, P(\lambda \times X) = \lambda \times P(X)$. Δείχνει αν μια ζημιά είναι χρεωμένη με ένα θετικό παράγοντα, τότε η χρέωση είναι ανάλογη του μεγέθους αυτής.
4. Translation invariance: Για κάθε σταθερά $\alpha > 0$, $P(\alpha + X) = \alpha + P(X)$. Δείχνει αν μια ζημιά αλλάζει κατά α, τότε και η χρέωση του κινδύνου θα αλλάζει κατά την ίδια ποσότητα.

Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας έχουμε τρία διαφορετικά μέτρα κινδύνου

I. Η αρχή της τυπικής απόκλισης (Standard Deviation Principle,SDP) που βασίζεται στην έννοια ενός διαστήματος εμπιστοσύνης 1-α , 0<α<1,
$$SDP_\alpha(X) = E(X) + k_{1-\alpha} \times \sigma_x, \qquad k_{1-\alpha} > 0$$
Δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου διότι παραβιάζεται η υπόθεση μονοτονικότητας.
II. Value at Risk-VaR ή Αξία σε Κίνδυνο είναι το πιο διαδεδομένο μέτρο κινδύνου και χρησιμοποιείται για την έκθεση σε οικονομικό κίνδυνο. Η VaR δίνει το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται για να εξασφαλιστεί ότι μια εταιρεία είναι φερέγγυα σε μεγάλο βαθμό. Ορίζεται ως το α-ποσοστιαίο σημείο που είναι η μικρότερη τιμή ικανοποίησης.
$$VaR_\alpha(X) = inf\{x \in R : P(X > x) \leq \alpha\}, \qquad 0 < \alpha < 1$$
Περιγράφει τη μέγιστη δυνατή ζημιά που μπορεί να καταγράψει μια εταιρεία με πιθανότητα 1-α. Είναι και αυτό μη συνεπές μέτρο κινδύνου.
III. Expected Shortfall or TailVaR (Αναμενόμενη απώλεια ή ουρά της VaR)
$$ES_\alpha(X) = E(X|X > VaR_\alpha(X)), 0 < \alpha < 1$$
Ορίστηκε από τον Wirch (1997) και είναι συνεπές μέτρο κινδύνου.

2.5 Αποτιμήσεις

Στη συζήτηση εντός της ΕΕ σχετικά με το νέο καθεστώς φερεγγυότητας και της ανάπτυξης των νέων λογιστικών προτύπων για την ασφάλιση προτάθηκαν από τον IASB δυο έννοιες 1) η έννοια της Βέλτιστης Εκτίμησης (Best estimate,BE) και 2) η έννοια της Δίκαιης Τιμής (Fair Value,FR) για τον υπολογισμό και των υποχρεώσεων και των περιουσιακών στοιχείων. Τα νέα λογιστικά πρότυπα πιθανών να υιοθετήσουν μια προσέγγιση πλήρη ισολογισμού με τα στοιχεία του ενεργητικού να αποτιμώνται με τη δίκαιη τιμή και καθώς ο υπολογισμός των τεχνικών προβλέψεων δεν είναι λογιστική έννοια αυτές να αποτιμώνται με τη βέλτιστη εκτίμηση.
Σύμφωνα με τον IASB δίκαιη τιμή είναι το ποσό για το οποίο ένα στοιχείο ενεργητικού μπορεί να ανταλλαγεί ή μια υποχρέωση να διευθετηθεί μεταξύ ατόμων πρόθυμων να συνεργαστούν με ίσους όρους. Για τα στοιχεία του ενεργητικού συνήθως υπάρχει αγορά ενώ για αυτά του παθητικού όχι . Σύμφωνα με τους Clark et al (2003) το μέρος των υποχρεώσεων είναι το ποσό το οποίο η επιχείρηση θα πρέπει να πληρώσει σε ένα τρίτο μέρος κατά την ημερομηνία αποτίμησης για να αναλάβει τις υποχρεώσεις. Επειδή δεν υπάρχει αγορά θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια κατάσταση άμεσης εκκαθάρισης, όπως στο Ελβετικό μοντέλο SST.
Το περιθώριο κινδύνου ορίζεται έτσι ώστε ένας δεύτερος ασφαλιστής να μπορούσε να αποζημιωθεί για τον κίνδυνο που έχουν τα στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού που αναλαμβάνει.
Σε μια ιδανική κατάσταση, όπου τα στοιχεία ενεργητικού και του παθητικού μπορούσαν να διαπραγματευθούν σε μια βαθιά και ρευστοποιήσιμη αγορά, η έννοια της δίκαιης τιμής θα ήταν ισοδύναμη με την τιμή αγοράς (Market Value,MV). Όμως η πλειοψηφία των ασφαλιστικών υποχρεώσεων δεν διαπραγματεύεται σε μια τέτοια αγορά. Έτσι η λογιστική αξία μιας υποχρέωσης θα είναι μια υπολογισμένη τιμή, χρησιμοποιώντας παραδοχές, όπως μελλοντικά γεγονότα, θνησιμότητα, προεξοφλητικό παράγοντα (επιτόκια) κ.ά., στην οποία ένας ανεξάρτητος αγοραστής θα μπορούσε να καθορίσει τη χρέωση για να αποκτήσει την υποχρέωση. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει δευτερογενής αγορά ασφαλιστικών υποχρεώσεων, συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει μοναδική δίκαιη τιμή μεταξύ πρόθυμων ατόμων στην αγορά.

2.6 Σκοποί της αποτίμησης

Διαφορετικές υποθέσεις και προσεγγίσεις συνήθως χρησιμοποιούνται εάν μια εταιρεία πρόκειται να αποτιμηθεί με την παραδοχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας (going concern) ή με την παραδοχή μιας κατάστασης άμεσης εκκαθάρισης (run off). Θα μπορούσε επίσης να γίνει αποτίμηση για γενικούς

σκοπούς όπως η οικονομική πρόοδος, το καθεστώς φερεγγυότητας, η ικανότητα της επιχείρησης να αντιμετωπίζει ακραίες καταστάσεις κ.ά.
Υπάρχουν τρείς τουλάχιστον βασικοί λόγοι για υποβολή εκθέσεων :

1. Αναφορά στους μετόχους και όσους ενδιαφέρονται για την γενικότερη πρόοδο της επιχείρησης, που χρειάζονται μια ρεαλιστική εκτίμηση των υποχρεώσεων και μια συνεπή αποτίμηση των περιουσιακών στοιχειών. Η αποτίμηση πρέπει να γίνεται με την παραδοχή going concern και ο βαθμός σύνεσης πρέπει να είναι τόσος όσο χρειάζεται για λογιστικούς σκοπούς.
2. Αναφορά για τους ασφαλισμένους και τις ρυθμιστικές αρχές για τους οποίους χρειάζεται μια συνεπή αποτίμηση και να δείχνει το καθεστώς φερεγγυότητας της επιχείρησης. Θα πρέπει να δείχνει την οικονομική της δύναμη και την κεφαλαιακή της θέση είτε με την παραδοχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας είτε με ένα καθεστώς άμεσης εκκαθάρισης.
3. Αναφορά στις φορολογικές και εποπτικές αρχές ανάλογα με το καθεστώς της κάθε χώρας.

2.7 Βέλτιστη εκτίμηση υποχρεώσεων και τεχνικές προβλέψεις

Η βέλτιστη εκτίμηση των ασφαλιστικών υποχρεώσεων και ως εκ τούτου των τεχνικών προβλέψεων θα πρέπει να είναι η βέλτιστη εκτίμηση των μελλοντικών υποχρεώσεων της εταιρείας, ανάλογα με τις γνώσεις όπως οι αλλαγές των επιτοκίων και οι υποτιθέμενες εξελίξεις στη μακροζωία. Καθώς αυτές οι υποθέσεις είναι προγνώσεις πάντα θα υπάρχουν αποκλίσεις από τα πραγματικά αποτελέσματα. Οι υποχρεώσεις από ένα ασφαλιστικό συμβόλαιο περιλαμβάνουν στοιχεία αβεβαιότητας για το χρόνο και μέγεθος των χρηματικών ροών και ένα μακρύ χρονικό ορίζοντα. Οι δυο κύριες πηγές των αποκλίσεων ανάμεσα στην υπόθεση της βέλτιστης εκτίμησης και του πραγματικού αποτελέσματος είναι

- Αβεβαιότητα στις υποθέσεις της βέλτιστης εκτίμησης
- Μεταβλητότητα της εμπειρίας γύρω από τις υποθέσεις της βέλτιστης εκτίμησης

Ως βέλτιστη εκτίμηση των υποχρεώσεων χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή της κατανομής, δηλαδή την αναμενόμενη τιμή. Η λογιστική έννοια της δίκαιης τιμής όπως χρησιμοποιείται από τον IASB έχει υψηλότερη τιμή από τη βέλτιστη εκτίμηση γιατί περιλαμβάνει ένα περιθώριο κινδύνου την MVM .

Η βέλτιστη εκτίμηση των ασφαλιστικών υποχρεώσεων θα πρέπει να αντανακλά τα εδικά χαρακτηριστικά και τους ειδικούς κινδύνους της κάθε ασφαλιστικής σύμβασης στις οποίες περιλαμβάνονται εγγυήσεις και ενσωματωμένες επιλογές (embedded options).

Απαραίτητο βήμα για το καθορισμό της βέλτιστης εκτίμησης των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι ο υπολογισμός όλων των αναμενόμενων χρηματικών ροών προεξοφλημένες με ένα επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk free interest rate).

Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου υπάρχει μόνο στη θεωρία, αλλά στη πράξη, για παράδειγμα, τα βραχυπρόθεσμα κρατικά ομόλογα θεωρούνται μηδενικού κινδύνου καθώς η πιθανότητα μια κυβέρνηση να κηρύξει πτώχευση είναι πολύ χαμηλή (για χώρες με ισχυρή οικονομία). Η έννοια του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου είναι ένα σημαντικό θέμα της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου. Εάν ένας επενδυτής λαμβάνει επιπλέον κίνδυνο πρέπει να ανταμειφθεί με ένα επιτόκιο υψηλότερο από αυτό του μηδενικού κινδύνου.

2.8 Η δίκαιη τιμή σε ένα περιβάλλον λογιστικών προτύπων

Υποθέτουμε ότι οι χρηματικές ροές των υποχρεώσεων περιλαμβάνουν ένα περιθώριο κινδύνου, πέραν της βέλτιστης εκτίμησης που είναι το ποσό που θα χρεώσει η αγορά για τους μη διαφοροποιήσιμους κινδύνους. Αυτό το περιθώριο σε ένα περιβάλλον δίκαιης τιμής καλείται περιθώριο αγοραίας τιμής (Market Value Margin,MVM). Αυτό δεν είναι το συνηθισμένο αναλογιστικό περιθώριο, αλλά ένα περιθώριο που καθορίζεται από την αγορά, αναγνωρίζοντας πως οι χρηματικές ροές δεν είναι ακίνδυνες. Το MVM συνεπώς θα απεικονίζει ένα ασφάλιστρο (premium) που απαιτείται από έναν συμμετέχων στην αγορά για την αβεβαιότητα που υπάρχει στις χρηματικές ροές. Η δίκαιη τιμή δεν επηρεάζεται από τη φύση ή την απόδοση των περιουσιακών στοιχείων.

Σύμφωνα με μελέτη του IAA (2000) οι χρηματικές ροές και το MVM μπορούν να προεξοφληθούν χρησιμοποιώντας την απόδοση ενός αναπαραγόμενου χαρτοφυλακίου του οποίου οι χρηματικές ροές να αναπαράγουν πολύ κοντά τις χρηματικές ροές των υποχρεώσεων (συμπεριλαμβανομένου του MVM).

Στους Clark et al (2003) συζητήθηκαν διάφοροι μέθοδοι εκτίμησης όπως η ντετερμινιστική προσέγγιση (ανάλυση ευαισθησίας και bootstrapping) και η στοχαστική προσέγγιση.

Σύμφωνα με τον Girard (2002) το MVM μπορεί να θεωρηθεί ως η διαφορά ανάμεσα σε δυο μέτρα αναμενόμενων χρηματικών ροών, το αναμενόμενο μέτρο Q (Q-measure) όπου προεξοφλούμε με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και το μέτρο P (P-measure) όπου προεξοφλούμε με το πραγματικό επιτόκιο.

Σε περίπτωση που είναι δύσκολο να βρεθεί ένα αναπαραγόμενο χαρτοφυλάκιο για τις χρηματικές ροές των υποχρεώσεων τότε είναι απαραίτητη η χρήση στοχαστικών μεθόδων. Μια σύγχρονη μέθοδος που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι ο αποπληθωριστής τιμών από το κράτος (Jarvis et al ,2001). Σύμφωνα με τους Abbink and Soker (2002) αυτοί οι αποπληθωριστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένα στοχαστικό επιτόκιο για τη προεξόφληση της δίκαιης τιμής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων.

Όταν χρησιμοποιείται ένα στοχαστικό μοντέλο εκτελείται το αποτέλεσμα θα περιλαμβάνει έναν αποπληθωριστή για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε σενάριο. Οι ταμειακές ροές των υποχρεώσεων θα προβάλλονται και θα προσαρμόζονται για μη χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Για κάθε προσομοίωση ο αποπληθωριστής εφαρμόζεται στις ταμειακές ροές για κάθε χρονικό σημείο και οι τιμές αυτές προστίθενται μεταξύ όλων των προβαλλόμενων βημάτων. Η δίκαιη τιμή των υποχρεώσεων είναι η μέση τιμή της αποπληθωρισμένης χρηματικής ροής.

Αν C_t είναι οι στοχαστικές χρηματικές ροές στο χρόνο t, τότε η Παρούσα Αξία (Present Value,PV) PV_t χρησιμοποιώντας τον στοχαστικό παράγοντα D_t είναι $PV_t=E[D_t \times C_t]$, ενώ με μια αναλογιστική μέθοδο θα είναι $PV_t=u^t \times E[C_t]$, όπου u^t είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας τη στιγμή t (Jarvis et al, 2001).

Το FASB σε μια εργασία για την μέτρηση της δίκαιης τιμής το 2004 υπέγραψε μνημόνιο συμφωνίας με το IASB για τη μείωση των διαφορών ανάμεσα στα IFRS και το CAAP (Η.Π.Α.) και την επιτάχυνση της προόδου προς την επίτευξη των παγκόσμιων λογιστικών προτύπων. Το συμβούλιο διευκρίνισε ότι:

- Η μέτρηση της δίκαιης τιμής προϋποθέτει ότι η οντότητα θα πρέπει να αποτιμάται σύμφωνα με την παραδοχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας (going concern) χωρίς τη πρόθεση ή την ανάγκη να εκκαθαριστεί.
- Όλοι οι συμμετέχοντες στην αγορά πρέπει να είναι πρόθυμοι και σε θέση να συναλλαγούν έχοντας την νομική και οικονομική δυνατότητα.

Μια ιεραρχία εκτίμησης της δίκαιης τιμής θα πρέπει να είναι η εξής:

Επίπεδο 1: Εκτιμήσεις που λαμβάνονται από την αγορά για ίδια περιουσιακά στοιχεία ή υποχρεώσεις στην οποία έχει πρόσβαση.

Επίπεδο 2: Εκτιμήσεις που λαμβάνονται χρησιμοποιώντας αναφερόμενες τιμές από παρόμοια περιουσιακά στοιχεία ή υποχρεώσεις σε ενεργές αγορές.

Επίπεδο 3: Εκτιμήσεις βασισμένες στα αποτελέσματα τεχνικών αποτίμησης με τη μέθοδο της Παρούσας Αξίας των μελλοντικών χρηματικών ροών περιλαμβάνοντας κατάλληλη στάθμιση για τον κίνδυνο.

Σύμφωνα με την μελέτη του IAA (2002) οι αρχές που Θα πρέπει να ισχύουν στα παραπάνω επίπεδα είναι:

Αρχή 1: Αν δεν υπάρχει κίνδυνος τότε προεξόφληση με επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Αρχή 2: Αν υπάρχει κίνδυνος στις χρηματικές ροές τότε η εκτίμηση της Παρούσας Αξίας πρέπει να περιλαμβάνει μια προσαρμογή του κινδύνου ώστε να αντικατοπτρίζει τη τιμή αγοράς του κινδύνου.

Αρχή 3: Να περιλαμβάνονται όλες οι χρηματικές ροές.

Ο υπολογισμός του MVM ακολουθείται από τα παρακάτω βήματα

1. Αρχικά υπολογίζουμε το MVM της τελικής περιόδου (n)
2. $MVM_n = C_n \times (\frac{r_f - r_L}{1+r_l})$,

όπου

r_f= risk free rate (επιτόκιο μηδενικού κινδύνου)

r_L=discount rate (προεξοφλητικός παράγοντας)

r_l=growth rate for liabilities(ποσοστό επένδυσης υποχρεώσεων)

3. Βρίσκουμε τη δίκαιη τιμή της τελικής περιόδου

$$L_{n-1} = \left[\frac{C_n + MVM_n}{1 + r_f}\right]$$

4. Υπολογίζουμε το MVM της προηγούμενης περιόδου

$$MVM_{n-1} = (L_{n-1} + C_{n-1}) \times \left[\frac{r_f - r_L}{1 + r_l}\right]$$

5. Βρίσκουμε τη δίκαιη τιμή της περιόδου n-1

$$L_{n-2} = \left(\frac{L_{n-1} + C_{n-1} + MVM_{n-1}}{1 + r_f}\right)$$

6. Πηγαίνουμε στο βήμα 3 και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 ως 5 όσες φορές χρειάζεται.

2.9 Η δίκαιη τιμή σε ένα περιβάλλον από λογιστικά πρότυπα και κανόνες φερεγγυότητας.

Με τα λογιστικά πρότυπα η δίκαιη τιμή είναι η βέλτιστη εκτίμηση συν ένα περιθώριο φερεγγυότητας. Σε ένα περιβάλλον όπου έχουμε και λογιστικά πρότυπα και κανονισμούς φερεγγυότητας η δίκαιη τιμή μπορεί να συνδεθεί με το SCR.

Χωρίς να σκεφτόμαστε τα λογιστικά πρότυπα έστω μια εταιρεία Α θέλει να πουλήσει ένα χαρτοφυλάκιο από ασφαλιστήρια συμβόλαια σε μια άλλη εταιρεία Β. Η Β θέλει τα στοιχεία του ενεργητικού να αντιστοιχούν στις τεχνικές προβλέψεις ως βέλτιστη εκτίμηση συν ένα περιθώριο κινδύνου για να αναλάβει τις υποχρεώσεις. Την ίδια στιγμή και οι δυο εταιρείες πρέπει να ικανοποιούν την αρχή της φερεγγυότητας. Το SCR πρέπει να είναι καλυμμένο σε κάθε χρονική στιγμή.

Έστω ότι PV[BE(L)]=PV[BE(TP)], δηλαδή, ότι η Παρούσα Αξία της βέλτιστης εκτίμησης των υποχρεώσεων είναι ίση με τη Παρούσα Αξία της βέλτιστης εκτίμησης των τεχνικών προβλέψεων. Αυτή η υποθετική συναλλαγή μεταξύ των δυο εταιρειών Α (πωλητής) και Β (αγοραστής) χωρίζεται σε δύο μέρη:

- Μελλοντικά κέρδη (Future earnings,FE) από ένα χαρτοφυλάκιο για t>0
- Τη στιγμιαία αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή της συναλλαγής t=0

Όπου t=0 θεωρούμε είτε την ημερομηνία συναλλαγής είτε τη χρονική περίοδο μεταξύ της συναλλαγής και της επόμενης λογιστικής αποτίμησης (μικρότερη από ένα έτος).

2.9.1 Τα μελλοντικά κέρδη από ένα χαρτοφυλάκιο

Καταρχήν υπάρχουν καθαρά κέρδη και κόστη σε όρους ασφαλίστρων και αποζημιώσεων. Επιπλέον η εταιρεία πρέπει να υπολογίσει την οριακή επίδραση του περιθωρίου φερεγγυότητας $\Delta SCR_{t>0}$ εξαιτίας των αλλαγών του χαρτοφυλακίου. Η αξία μιας επιχείρησης εν ισχύ (Value in Force,VIF) υπολογίζεται ως η προεξοφλημένη Παρούσα Αξία των μελλοντικών κερδών από ένα χαρτοφυλάκιο εν ισχύ, μείον το κόστος κεφαλαίου που απαιτούνται για τη συμμόρφωση του απαιτούμενου περιθωρίου φερεγγυότητας εξαιτίας των αλλαγών του χαρτοφυλακίου , δηλαδή,

$$VIF = PV\left[FE \mid t > 0\right] - PV\left[k \times \Delta SCR_{t>0} \mid t > 0\right]$$

όπου FE τα μελλοντικά κέρδη και k το κόστος κεφαλαίου. $\Delta SCR_{t>0}$ είναι το άθροισμα των μελλοντικών αλλαγών του περιθωρίου φερεγγυότητας εξαιτίας των αλλαγών στο χαρτοφυλάκιο.

2.9.2 Η στιγμιαία αξία ενός χαρτοφυλακίου τη στιγμή της συναλλαγής

Αυτό που απαιτείται από την εταιρεία Β(αγοραστή) για να αναλάβει τις υποχρεώσεις της εταιρείας Α (πωλητής) είναι να πάρει τα στοιχεία του ενεργητικού που αντιστοιχούν στις τεχνικές προβλέψεις συμπεριλαμβανομένων και των εξόδων διαχείρισης τους. Την ίδια στιγμή η εταιρεία πρέπει να εκπληρώσει τις απαιτήσεις φερεγγυότητας. Η μεταβολή του περιθωρίου φερεγγυότητας για την εταιρεία Β εξαιτίας της συναλλαγής είναι:

$$\Delta SCR_{t>0} = SCR \text{ (after traiding)} - SCR \text{ (before traiding)}$$

Το κεφάλαιο που χρειάζεται η εταιρεία Β για τη συναλλαγή μπορεί να γραφεί ως (Value At Time,VAT),

$$VAT = PV\big[BE(TP) \mid t = 0\big] + PV\big[c \times \Delta SCR_{t>0} \mid t = 0\big]$$

δηλαδή τα στοιχεία του ενεργητικού που αντιστοιχούν στη παρούσα αξία της βέλτιστης εκτίμησης των τεχνικών προβλέψεων συν τη παρούσα αξία του κόστους κεφαλαίου που απαιτείται για τη συμμόρφωση των αλλαγών στο περιθώριο φερεγγυότητας εξαιτίας της συναλλαγής.

2.9.3 Αγοραία Αξία των Υποχρεώσεων (Market Value,MV)

Επειδή οι υποχρεώσεις των ασφαλιστηρίων συμβολαίων είναι η διαφορά μεταξύ της αγοραίας αξίας τη στιγμή της συναλλαγής και των μελλοντικών κερδών, ορίζουμε την αγοραία αξία των υποχρεώσεων κατά τη στιγμή της συναλλαγής ως:

$$MV = PV\big[BE(TP) \mid t = 0\big] + PV\big[k \times \Delta SCR_{t>0} \mid t > 0\big] -$$

$$PV\big[FE \mid t > 0\big] + PV\big[c \times \Delta SCR_{t>0} \mid t = 0\big]$$

$$= PV\big[BE(TP) \mid t = 0\big] + MVM + PV\big[k \times \Delta SCR_{t>0} \mid t > 0\big]$$

Οι πρώτοι δυο όροι της παραπάνω σχέσης είναι η δίκαιη τιμή της συναλλαγής. Έχοντας ένα πλαίσιο φερεγγυότητας με μια απλή τυπική προσέγγιση για την αποτίμηση του SCR όπως μια προσέγγιση παράγοντα κινδύνου οι αλλαγές στο SCR μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, ειδικά αν υπάρχουν τα κατάλληλα δεδομένα. Η αλλαγή στο περιθώριο φερεγγυότητας φυσικά εξαρτάται από τους κινδύνους της εταιρείας και το περιβάλλον φερεγγυότητας. Και τα δυο κόστη k, c μπορούν να αποτιμηθούν σύμφωνα με την οικονομική θεωρία. Η πραγματική αγοραία αξία θα εξαρτάται τις τιμές των παραμέτρων. Η αγοραία αξία του κόστους κεφαλαίου είναι αποτέλεσμα της προσφοράς και της ζήτησης σε μια αγορά κεφαλαίου κινδύνου. Η αγοραία αξία των αλλαγών του SCR εξαρτάται από τους κανόνες φερεγγυότητας και τους συμμετέχοντες στην αγορά. Σε μια αγορά όπου οι κανόνες φερεγγυότητας είναι ανεξάρτητοι της οντότητας (όπως να έχουμε το SCR ως ποσοστό των ασφαλίστρων ή των τεχνικών προβλέψεων) η αξία του SCR ορίζεται από αυτούς τους κανόνες. Σε ένα πιο εξεζητημένο καθεστώς φερεγγυότητας όπου οι απαιτήσεις φερεγγυότητας ακολουθούν το πραγματικό κίνδυνο της επιχείρησης η αξία του SCR ακολουθεί τη πιθανότητα από έναν συμμετέχων στην αγορά να διαφοροποιήσει τον κίνδυνο που αναλαμβάνει. Στην οικονομική θεωρία, πλήρης διαφοροποίηση είναι πολύ πιθανή, όχι όμως στη πραγματικότητα. Οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις δεν μπορούν να διαφοροποιήσουν ελεύθερα τους κινδύνους εκτός της ασφάλισης.

2.9.4 Αποτίμηση των ασφαλιστικών υποχρεώσεων

Θα αποτιμήσουμε ένα πλήρες ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο για χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Η ημερομηνία αποτίμησης είναι t=0. Η δίκαιη τιμή των ασφαλιστικών υποχρεώσεων ορίζεται ως η βέλτιστη εκτίμηση των τεχνικών προβλέψεων συν το κόστος κεφαλαίου C που απαιτείται για τη συμμόρφωση του περιθωρίου φερεγγυότητας σύμφωνα με τους κανόνες φερεγγυότητας. Υποθέτουμε ότι η τυπική προσέγγιση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του τελικού μέρους και όχι για κάποιο εσωτερικό μοντέλο. Ο υπολογισμός της δίκαιης τιμής γίνεται δοθέντος της αξίας του SCR όπου υποθέτουμε ότι είναι σταθερό.

$$FV_{t=0} = BE_{t=0}(TP) + C \times SCR_{t=0}$$

Όπου t=0 η ημερομηνία υπολογισμού της δίκαιης τιμής. Η αποστροφή κινδύνου της εταιρείας εκφράζεται από ένα σταθερό SCR και είναι συνεπής με τη κατάταξη (rating) της εταιρείας.

2.9.5 Κόστος κεφαλαίου για ασφαλιστικές επιχειρήσεις

Εξαιτίας της ανάπτυξης των τεχνικών ALM (Asset Liability Management) και του υπολογισμού της δίκαιης τιμής υπάρχει ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους εκτίμησης του κόστους κεφαλαίου (Cost of Capital-COC) για τις ασφαλιστικές εταιρείες. Έχει αναγνωριστεί ότι το COC ποικίλει μεταξύ των βιομηχανιών εξαιτίας της ετερογένειας των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις. Στους Cummins and Phillips (2003) μοντέλα κόστους κεφαλαίου αναπτύσσονται για να εκφράσουν τα χαρακτηριστικά των κλάδων μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Παρατηρείται μια αντίστροφη σχέση του COC και του μεγέθους μιας εταιρείας και ότι οι εμπορικές γραμμές με βαριές ουρές τείνουν να έχουν μεγαλύτερο COC από τις γραμμές με ελαφριές ουρές. Διάφοροι μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του COC,όπως για παράδειγμα, το μοντέλο αποτίμησης των περιουσιακών στοιχείων CAPM, Fama French 3 Factor (Cummins and Philips,2003).

2.9.6 Η σχέση μεταξύ MVM , MCR και SCR

Από τη σχέση (2) συνεπάγεται ότι

$$MVM = C \times SCR_{t=0} < SCR_{t=0}$$

Όπως έχουμε αναφέρει το MCR μπορεί να είναι ένα ποσοστό της βέλτιστης εκτίμησης των τεχνικών προβλέψεων. Από την παραπάνω ανισότητα φαίνεται ότι το MCR μπορεί να οριστεί ως ποσοστό του SCR και ότι θα είναι μεγαλύτερο από το MVM,δηλαδή,

$$MVM < MCR = k \times SCR_{t=0}$$

Άρα

$$MVM = C \times SCR_{t=0} < MCR = k \times SCR_{t=0} < SCR_{t=0} \,, \qquad C < k < 1$$

2.10 Μέτρα κινδύνου

Αν μια εταιρεία θέλει να κατασκευάσει το δικό της μοντέλο για να υπολογίσει το επίπεδο κεφαλαίου στόχο η τοπική εποπτική αρχή θα πρέπει να βελτιώσει αυτό το μοντέλο αντί να κάνει χρήση της τυπικής προσέγγισης. Αυτά τα μοντέλα καλούνται εσωτερικά μοντέλα (internal models). Αν μια εταιρεία επενδύσει σε ένα εσωτερικό μοντέλο θα πρέπει να κρατά ένα χαμηλότερο κεφάλαιο φερεγγυότητας από ότι στη τυπική προσέγγιση. Για λόγους σύγκρισης η εταιρεία θα πρέπει επίσης να υπολογίζει το SCR σύμφωνα με την τυπική προσέγγιση.

Γνωρίζουμε ότι

$$SDP_{\alpha}(X) = E(X) + K_{1-\alpha} \times \sigma_x, \qquad k_{1-\alpha} > 0$$

$$VaR_{\alpha}(X) = inf\{x \in R : \ P(X > x) \leq \alpha\}, 0 < \alpha < 1$$

$$ES_{\alpha}(X) = E(X|X > VaR_{\alpha}(X)), 0 < \alpha < 1$$

Έστω $ES_{\alpha}(X) = \mu$ το επίπεδο της βέλτιστης εκτίμησης των στοιχείων ενεργητικού, τότε σε όρους χρέωσης κινδύνου το SCR μπορεί να γραφεί:

$$SCR\ 1 = SDP_{\alpha}(X) - E(X) = k_{1-\alpha} \times \sigma_x \quad \text{με SDP}$$

$$SCR\ 2 = VaR_{\alpha}(X) - E(X) \quad \text{με VaR}$$

$$SCR\ 3 = ES_{\alpha}(X) - E(X) \quad \text{με TailVaR}$$

2.10.1 Υπόθεση κανονικότητας

Έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \sum_i Y_i$ με μέση τιμή $E(Y)$, διασπορά $Var(Y) = \sigma_Y^2$ και $Var(Y_i) = \sigma_{Y_i}^2$

Έστω Y είναι το συνολικό SCR ή είναι ένας κίνδυνος ο οποίος διαιρείται σε r επιμέρους κινδύνους. Ο κίνδυνος μπορεί να διαιρεθεί σε διαφορετικές γραμμές της επιχείρησης (lines of business-LOBs). Για αυτό

$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{r} Y_i)$,$Var(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 + \sum_{i\neq j}^{r} \sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

Όπου ρ_{ij} η συσχέτιση μεταξύ Y_{i}, Y_j.

Έστω X τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma 2)$ και έστω $\varphi(\chi)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$ και $\Phi(\chi)$ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$.

2.10.2 Standard Deviation Principle (SDP)

Είδαμε ότι το SCR σύμφωνα με την αρχή της τυπικής απόκλισης (SDP) γράφεται ως:

$$SCR = SDP_\alpha(X) - E(X) = k_{1-\alpha} \times \sigma_x.$$

Δηλαδή το επίπεδο κεφαλαίου φερεγγυότητας μείον τη βέλτιστη εκτίμηση είναι ένας παράγοντας κ επί την τυπική απόκλιση, όπου $k_{099} = 2{,}33$ και k_{0995}=2,58 για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% και 95% αντίστοιχα. Αν ο συνολικός κίνδυνος ορίζεται όπως στην παραπάνω σχέση τότε η Var(Y) δείχνει ότι ο κίνδυνος μπορεί να χωριστεί σε ένα άθροισμα από τα συστατικά του κινδύνου λαμβάνοντας υπόψη τις επιμέρους συσχετίσεις. Όταν η τυπική απόκλιση χρησιμοποιείται ως μέτρο κινδύνου και οι κεφαλαιακές απαιτήσεις είναι ένα πολλαπλάσιο της τυπικής απόκλισης

$$C_j = k_{1-\alpha} \times \sigma_j$$

τότε οι κεφαλαιακές απαιτήσεις για τον συνολικό κίνδυνο μπορούν να γραφούν ως άθροισμα των r επιμέρους κινδύνων.

$$SCR = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j} = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j} = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 + \sum_{i\neq j}^{r} \sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

Αν η κατανομή είναι ασύμμετρη δηλαδή έχει μια βαριά δεξιά ουρά ο παράγοντας $k_{1-\alpha}$ είναι μεγαλύτερος από αυτόν της κανονικής κατανομής. Ο $k_{1-\alpha}$ μπορεί να διαφέρει για διαφορετικούς κινδύνους.

Value at Risk σε περίπτωση κανονικότητας

$$SCR = E(X) + k_{1-\alpha} \times \sigma_x - E(X) = k_{1-\alpha} \times \sigma_x$$

Expected Shortfall or TailVaR σε περίπτωση κανονικότητας

Η σ.π.π. της τ.μ. X είναι

$$g(y) = (1/\sigma)\,\Phi\big[\big(Y - E(Y)\big)/\sigma\big]/[1 - \Phi(z_{1-\alpha})] \quad \text{για} \;\; \chi_\alpha < Y < \infty$$

και $g(y\,)$=0 , διαφορετικά ,με

$$z_{1-\alpha} = \frac{[\mathrm{x}_\alpha - \mathrm{E}(\mathrm{x}_\alpha)]}{\sigma}$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της τροποποιημένης κανονικής κατανομής δίνονται από (Johnson and Kotz,1970)

$$E_{CT}(\alpha) = E(\alpha) + \frac{\sigma}{R(Z_{1-\alpha})}$$

$$\sigma_t^2 = \sigma\{1 + z_{1-\alpha}R^{-1}(z_{1-\alpha}) - R^{-2}(z_{1-\alpha})\}$$

$R(z_{1-\alpha}) = R(((x_\alpha - E(x_\alpha))/\sigma)$ είναι η αναλογία Mills .

Αν $\kappa_{1-\alpha}^* = 1/R\,(z_{1-\alpha})$, τότε $\mathrm{ESa}(X) = E(X) + \kappa_{1-\alpha}^*\sigma$

και $\sigma_t^2 = \sigma\{1 + z_{1-\alpha}z_{1-\alpha} - \kappa_{1-\alpha}^{*2}\sigma\}$

2.11 Υπόθεση μη κανονικότητας

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άγνωστη θετικά ασύμμετρη κατανομή. Αν έχουμε κάποια ιδέα για την ασυμμετρία της άγνωστης κατανομής τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια Normal Power (NP) προσέγγιση στη χρέωση του κινδύνου για να φτάσουμε στο συνολικό απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας. Η NP προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε την VaR και την TaiVaR σε όρους SPD.

2.11.1 Μέτρα κινδύνου βασισμένα σε μια NP προσέγγιση

Μια NP προσέγγιση βοηθά να εκφράσουμε τα percentiles από μια περίπλοκη ασύμμετρη κατανομή F(.) χρησιμοποιώντας τα ποσοστημόρια της τυπικής κανονικής κατανομής. Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη σχέση των Cornish-Fisher έχουμε:

Έστω X τ.μ. που έχει σ.κ. F(X) με μέση τιμή E(X) και διακύμανση σ^2 και ασυμμετρία

$$\gamma 1 = E[(X - E(X))\text{^}3]/\sigma^3 = E[(X - E(X))\text{^}3]/E[(X - E(X))\text{^}2]\text{^}(3/2)$$

Έστω φ(Y) η σ.π.π. της τυπικής κανονικής κατανομής δηλαδή $E(Y) = 0$ και $\sigma^2_{Y=1} = 1$

$$u_a = \frac{[\chi_\alpha - E(\chi_\alpha)]}{\sigma_\chi}$$

και $\kappa_{1-\alpha}$να είναι το $100 \times (1-\alpha)$ percentiles της $F(.)$ και $\varphi(.)$ αντίστοιχα, δηλαδή,

$$F(u_\alpha) = \Phi(\kappa_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

Χρησιμοποιώντας τους πρώτους δυο όρους από την αντίστροφη σχέση των Cornish-Fisher παίρνουμε

$$u_\alpha = \kappa_{1-\alpha} + (\gamma 1/\sigma)(\kappa^2_{1-\alpha} - 1) \text{ ή}$$

$$x_\alpha = E(X) + \sigma_\chi(\kappa_{1-\alpha} + (\gamma 1/\sigma)(\kappa^2_{1-\alpha} - 1)) = E(X) + \sigma_\chi \kappa_{1-\alpha}(\gamma 1)$$

όπου $\kappa_{1-\alpha}$ εξαρτάται από την ασυμμετρία της κατανομής.

2.12 Η τυπική προσέγγιση με τα αποτελέσματα της QIS 5

Το νέο πλαίσιο Φερεγγυότητα ΙΙ αναπτύχθηκε με απώτερο σκοπό την προστασία των κατόχων ασφαλιστηρίων συμβολαίων έναντι των ασφαλιστικών επιχειρήσεων με τις οποίες έχουν συνάψει ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Το νέο πλαίσιο θα περιορίσει τις ευκαιρίες κερδοσκοπίας λόγω της προώθησης της διαφάνειας. Επειδή το νέο καθεστώς λαμβάνει υπόψη όλους τους κινδύνους που αντιμετωπίζει η επιχείρηση και υιοθετεί τεχνικές διαχείρισης κινδύνων ,εταιρικής διακυβέρνησης και διαφάνειας εξασφαλίζεται η παγίωση δίκαιων και σταθερών αγορών και ενισχύεται η ανταγωνιστικότητα των ασφαλιστικών επιχειρήσεων σε διεθνές επίπεδο. Επειδή οι ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές επιχειρήσεις είναι θεσμικοί επενδυτές και έχουν σημαντικό ρόλο στην χρηματοοικονομική αγορά θα εξασφαλιστεί η σταθερότητά της. Φυσικά αυτά τα πλεονεκτήματα θα επιφέρουν ένα κόστος στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις και διαμέσου αυτών στους ασφαλισμένους με αύξηση των ασφαλίστρων. Στην νέα ενιαία αγορά την ευθύνη για τη διαχείριση της εταιρίας την έχει η διοίκηση της εταιρίας.

Η δομή του νέου πλαισίου βασίζεται σε τρις πυλώνες. Στο πρώτο πυλώνα έχουμε τις ποσοτικές απαιτήσεις φερεγγυότητας, όπου η αποτίμηση του συνολικού ισολογισμού γίνεται σε ενοποιημένη βάση, δηλαδή τα στοιχεία ενεργητικού και παθητικού αποτιμώνται με τον ίδιο τρόπο. Τα στοιχεία του ενεργητικού αποτιμώνται στο ποσό το οποίο μπορούν να ανταλλαγούν, ενώ εκείνα του παθητικού στο ποσό με το οποίο μπορούν να μεταβιβαστούν μεταξύ καλώς πληροφορημένων ατόμων που είναι πρόθυμοι και ικανοί να συναλλαγούν με ίσους όρους και με τη παραδοχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας(going concern).Για ακριβώς ίδια στοιχεία ενεργητικού και παθητικού η αποτίμηση γίνεται με άμεση χρήση αγοραίων τιμών από αγορές που έχει πρόσβαση η εταιρία (mark to market), ενώ για παρόμοια γίνεται η χρήση ενός μοντέλου υποδείγματος (mark to model), όπου γίνεται χρήση της μέγιστης πληροφορίας από τη αγορά.

Στο πρώτο πυλώνα επίσης γίνεται υπολογισμός των τεχνικών προβλέψεων ως βέλτιστη εκτίμηση (Best Estimate,BE) και περιθωρίου κινδύνου (Risk Margin,RM) και βασίζεται στην τρέχουσα αξία ρευστοποίησης, δηλαδή στο ποσό που θα έπρεπε να πληρώσουν οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις για να παραχωρήσουν τις υποχρεώσεις τους σε μια άλλη ασφαλιστική επιχείρηση. Στον ίδιο πυλώνα περιλαμβάνεται και ο καθορισμός των ιδίων κεφαλαίων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης καθώς και η στρατηγική των επενδύσεων. Τα ιδία κεφάλαια ισούνται με τη διαφορά των υποχρεώσεων από τα περιουσιακά στοιχεία και είναι το επιπλέον ποσό, πέρα των τεχνικών προβλέψεων που πρόκειται να απορροφήσει μελλοντικές ζημιές πέρα των αναμενόμενων. Τα ιδία κεφάλαια περιλαμβάνουν τα στοιχεία ισολογισμού (οικονομικό κεφάλαιο και δάνεια μειωμένης εξασφάλισης ή βασικά ιδία κεφάλαια) και τα στοιχεία εκτός ισολογισμού (επικουρικά κεφάλαια, όπως εγγυητικές επιστολές). Τα ιδία κεφάλαια ταξινομούνται σε τρις κατηγορίες (Tier I ,Tier II,Tier III) αναλόγως της δυνατότητάς τους να απορροφούν ζημιές .

Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας(Solvency Capital Requirements,SCR) είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk, VaR) των βασικών ιδίων κεφαλαίων με επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5% για χρονική περίοδο ενός έτους υπό την παραδοχή της συνεχιζόμενης δραστηριότητας, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους μετρήσιμους κινδύνους, όπως αγοράς, πιστωτικό, ασφαλιστικό, λειτουργικό για οποιαδήποτε μεταβολή στην αξία του ενεργητικού-παθητικού σε διάστημα ενός έτους.

Οι ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις (Minimum Capital Requirements,MCR) είναι η αξία σε κίνδυνο(Value at Risk,VaR) των βασικών ιδίων κεφαλαίων με επίπεδο εμπιστοσύνης 85% για χρονική περίοδο ενός έτους.

Οι εταιρίες θα μπορούν να υπολογίζουν το SCR αναπτύσσοντας δικά τους εσωτερικά μοντέλα (μερικώς ή πλήρης) τα οποία θα εγκρίνονται από την εποπτική αρχή δεδομένου ότι ικανοποιούν κάποια κριτήρια.

Οι επενδύσεις θα πρέπει να γίνονται με γνώμονα το συμφέρον των ασφαλισμένων και σύμφωνα με την προσέγγιση του συνετού επενδυτή, δηλαδή οι εταιρίες θα πρέπει να επενδύουν σε περιουσιακά στοιχεία τα οποία θα μπορούν να μετρήσουν και να διαχειριστούν τους κινδύνους που περιέχουν.

Ο δεύτερος πυλώνας καθορίζει τις ποιοτικές προδιαγραφές της φερεγγυότητας, δηλαδή τις αρχές εσωτερικού ελέγχου για την αξιολόγηση των κινδύνων (σύστημα εταιρικής διακυβέρνησης, ORSA).

Ο τρίτος πυλώνας καθορίζει τις απαιτήσεις δημοσίευσης και διαφάνειας των στοιχείων της εταιρίας.

3 Βιομετρικός κίνδυνος φερεγγυότητας σε χαρτοφυλάκια Γενικών Ασφαλίσεων Ζωής.

Όπως γνωρίζουμε ο υπολογισμός του απαιτούμενου κεφαλαίου φερεγγυότητας (SCR) γίνεται είτε με χρήση της τυποποιημένης προσέγγισης είτε με τη χρήση εσωτερικών μοντέλων(μερικώς ή ολικώς). Η ανάγκη για την ανάπτυξη των εσωτερικών μοντέλων είναι απαραίτητη κυρίως στις μεγάλες ασφαλιστικές επιχειρήσεις διότι είναι πολύ πιθανό μετά από σωστή εφαρμογή στρατηγικών διοικητικής κινδύνου και διαδικασίας ανάληψης κινδύνων το τελικό απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας να είναι χαμηλότερο από αυτό της τυποποιημένης προσέγγισης.
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της τελευταίας μελέτης QIS 5 του CEIOPS το SCR εξαρτάται μόνο από το χρόνο αποτίμησης και όχι από το μέγεθος του χαρτοφυλακίου (αριθμός συμβολαίων). Αυτό εξηγεί την αβεβαιότητα του συστηματικού κινδύνου αλλά αγνοεί την διαδικασία κινδύνου δηλαδή τις διακυμάνσεις στη συχνότητα και σοβαρότητα των υποχρεώσεων.

3.1 Απλό συμβόλαιο ζωής με πολλαπλές αιτίες εξόδου

Σε ένα άρθρο του ο Werner Hurlimann (2010) για τον υπολογισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου φερεγγυότητας των υποχρεώσεων των ασφαλιστικών επιχειρήσεων για τους βιομετρικούς κινδύνους, περιγράφει εσωτερικά μοντέλα τα οποία υπολογίζουν το SCR των βιομετρικών κινδύνων από ένα απλό χαρτοφυλάκιο Γενικευμένων Ασφαλίσεων Ζωής (GLIFE) με πολλά αίτια εξόδου. Ο υπολογισμός αυτού του κεφαλαίου που είναι βασισμένος σε μια προσέγγιση συνολικού ισολογισμού γίνεται με τα μέτρα της Αξίας σε Κίνδυνο(VaR) και της υπό συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο (CVaR).

Ο Hurlimann αρχικά δίνει μια γενική προσέγγιση για το SCR των υποχρεώσεων με τη χρήση ενός στοχαστικού μοντέλου ασφαλίσεων διακριτού χρόνου. Οι δυο βασικές στοχαστικές διαδικασίες είναι

i) τα περιουσιακά στοιχεία (Assets,A) τη στιγμή t και
ii) οι αναλογιστικές υποχρεώσεις (Liabilities,L) τη στιγμή t.

Οι τιμές των παραπάνω διαδικασιών περιγράφουν τις ταμειακές εισροές και εκροές μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Έστω ότι :

P_{t-1}: τα επιβαρυμένα ασφάλιστρα (loaded premiums) τη στιγμή t

X_t: τα ασφαλιστικά κόστη (αποζημιώσεις, έξοδα ,προμήθειες κ.ά.) τη στιγμή t

R_t: ο παράγοντας συσσώρευσης των επενδύσεων τη χρονική περίοδο (t-1,t]

$R_{s,t} = \prod_{j=s+1}^{t} R_j$: ο συσσωρευμένος παράγοντας συσσώρευσης τη χρονική περίοδο t > s.

$r_t = E\left[R_t \,\middle|\, F_{t-1}\right]$:ο αναμενόμενος παράγοντας συσσώρευσης, όπου F_t η διαθέσιμη πληροφορία τη στιγμή t.

$r_{s,t} = \prod_{j=s+1}^{t} r_j, 1 \leq s < t$: ο αναμενόμενος συσσωρευμένος παράγοντας συσσώρευσης.

$d_{s,t} = r_{s,t}^{-1} o \leq s \prec t$: το αναμενόμενο προεξοφλητικό επιτόκιο, τότε η στοχαστική διαδικασία :

$$\mathrm{CF}_{t+j} = d_{t+j,t+j+1} X_{t+j+1} - P_{t+j}, j = 0,1,..,T-t-1 \ ,$$

είναι οι μελλοντικές ασφαλιστικές ταμειακές ροές με βάση την πληροφορία που έχουμε τη στιγμή t, F_t.

Αν υποθέσουμε μια αναλογιστική αποτίμηση συνεπή με την αγορά (market-consistent actuarial valuation), δηλαδή οι προεξοφλητικοί μας παράγοντες να είναι συνεπείς με τη δομή των επιτοκίων τότε η τυχαία μεταβλητή της Παρούσας Αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών τη στιγμή t θα δίνεται την σχέση:

$$L_t = \sum_{j=0}^{T-t-1} d_{t,t+j} \mathrm{CF}_{t+j} t = 0,1,\ldots,T-1$$

και θα ονομάζεται προοπτική ασφαλιστική υποχρέωση τη στιγμή t.

Από την άλλη πλευρά, τα περιουσιακά στοιχεία για χρονικό ορίζοντα [0,T] πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση: $A_t = (A_{t-1} + P_{t-1})R_t - X_t$ και θεωρώντας αυτήν με ντετερμινιστικές αποδόσεις έχουμε:

$$A_{t+\tau} = (A_{t+\tau-1} - \mathrm{CF}_{t+\tau-1}) r_{t,t+1}, \tau = 0,1,\ldots,T-1,$$

$$\text{άρα} \quad A_{t+\tau} = (A_t - \sum_{j=0}^{\tau-1} d_{t,t+j} \mathrm{CF}_{t+j}) r_{t,t+1} \,.$$

Ακολουθώντας μια προσέγγιση συνολικού ισολογισμού απαιτείται τα περιουσιακά στοιχεία να υπερβαίνουν τις υποχρεώσεις με μεγάλη πιθανότητα για κάθε μελλοντική στιγμή για έναν χρονικό ορίζοντα T. Δοθέντος μιας πιθανότητας χρεοκοπίας ε>0 , όπου ε=0,5% για να είναι σε συμφωνία με την μελέτη QIS5 της και με αρχικό απαιτούμενο κεφάλαιο A_t τη στιγμή t, πρέπει να ισχύει η σχέση :

$$P\left(A_{t+\tau} \geqslant L_{t+\tau}, \tau = 0,1,\ldots,T-t-1 \,\middle|\, F_t\right) \geqslant 1-\epsilon \qquad \textbf{(1)}$$

Από την σχέση

$$d_{t+\tau,t+\tau+\kappa} = r_{t,t+\tau} d_{t,t+\tau+\kappa} \ ,$$

έχουμε ότι

$$L_{t+\tau} = r_{t,t+\tau} \sum_{j=\tau}^{T-t-1} d_{t,t+j} \mathrm{CF}_{t+j}$$

άρα

$$A_{t+\tau} - L_{t+\tau} = r_{t,t+\tau}(A_t - L_t)$$

από την οποία συνεπάγεται η ισοδύναμη σχέση της (1),

$$P\left(A_t \geqslant L_t \,\middle|\, F_t\right) \geqslant 1 - \epsilon \qquad \textbf{(2)}$$

ενός κριτηρίου Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) που λέει ότι δοθέντος ενός αρχικού περιουσιακού στοιχείου A_t τη στιγμή t, η αξία αυτού του ποσού πρέπει να υπερβαίνει την παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών με πιθανότητα τουλάχιστον 1-ε. Έστω ότι η ελάχιστη λύση της (2) είναι η

$$A_t^{\mathrm{VaR}} = \mathrm{VaR}_{1-\epsilon}[L_t|F_t].$$

Από τη μεριά των υποχρεώσεων έστω ότι η βέλτιστη εκτίμηση των υποχρεώσεων τη στιγμή t συμπίπτει με το αναλογιστικό αποθεματικό V_t, δηλαδή, $E\left[L_t \,\middle|\, F_t\right] = V_t$. Τότε το κεφαλαίο φερεγγυότητας των υποχρεώσεων με βάση το VaR ορίζεται ως

$$\mathrm{SC}_t^{\mathrm{VaR}} = A_t^{\mathrm{VaR}} - V_t,$$

που αντιπροσωπεύει το διαθέσιμο κεφάλαιο φερεγγυότητας για την αντιμετώπιση των ασφαλιστικών κινδύνων των υποχρεώσεων με μεγάλη πιθανότητα. Για να είμαστε σύμφωνοι με το άρθρο 76 του Solvency II Directive πρέπει να προσθέσουμε ένα περιθώριο κινδύνου (Risk Premium or Market Value margin,MVM) ο υπολογισμός του οποίου γίνεται με τη χρήση του κόστους κεφαλαίου, COC (και σύμφωνα με τον CEIOPS το επιτόκιο του κόστους κεφαλαίου είναι i_{coc}=6%) ως εξής:

$$\mathrm{RM}_t^{\mathrm{VaR}} = i_{\mathrm{coc}} \sum_{\kappa=1}^{T-t} u_f^{\kappa} \mathrm{SC}_{t+\kappa}^{\mathrm{VaR}}$$

όπου u_f^{κ} ο προεξοφλητικός παράγοντας του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου(risk free rate). Έτσι το κεφαλαίο στόχος των υποχρεώσεων με βάση το VaR(liability value at risk target capital) ορίζεται ως :

$$\mathrm{TC}_t^{\mathrm{VaR}} = \mathrm{SC}_t^{\mathrm{VaR}} + \mathrm{RM}_t^{\mathrm{VaR}}$$

και η αναλογία του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση το VaR(value at risk solvency capital ratio) ως :

$$\mathrm{SR}_t^{\mathrm{VaR}} = \frac{\mathrm{SC}_t^{\mathrm{VaR}}}{V_t}$$

Ένα άλλο μέτρο το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι η υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (CVaR). Αν θέσουμε

$$\mathrm{CVaR}_{1-\epsilon}[L_t \mid F_t] = E[L_t \mid L_t \geqslant \mathrm{VaR}_{1-\epsilon}[L_t \mid F_t]]$$

τότε το κεφαλαίο στόχος των υποχρεώσεων με βάση το CVaR ορίζεται ως :

$$\mathrm{TC}_t^{\mathrm{CVaR}} = \mathrm{SC}_t^{\mathrm{CVaR}} + \mathrm{RM}_t^{\mathrm{CVaR}}$$

και η αναλογία του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση το CVaR (conditional value at risk solvency capital ratio) ως :

$$\mathrm{SR}_t^{\mathit{C}\mathrm{VaR}} = \frac{\mathrm{SC}_t^{\mathrm{CVaR}}}{V_t}$$

3.2 Συμβόλαια ασφαλίσεων ζωής με πολλαπλές αιτίες εξόδου διακριτού χρόνου

Σε ένα συμβόλαιο γενικευμένων ασφαλίσεων ζωής (GLIFE) ενός ατόμου που ασφαλίζεται στην ηλικία (x) με m αιτίες αποχώρησης υπάρχει ένα ποσό πληρωμής $b_{j,k}$ από την ασφαλιστική προς τον ασφαλισμένο στο τέλος του k έτους συμβολαίου από την j αιτία (j=1,2,…,m). Από την άλλη ο ασφαλισμένος πληρώνει στην αρχή κάθε έτους (k) το ποσό a_k (καθαρό ασφάλιστρο). Θεωρώντας ένα σταθερό επιτόκιο i και τον προεξοφλητικό του παράγοντα $u = 1/1 + i$ η τ.μ. $L(x)$ παριστά την ασφαλιστική ζημιά ενός χαρτοφυλακίου από GLIFE συμβάσεις, όπου

$$L(x) = u^{K(x)+1} b_{j,K(x)+1} - \sum_{\kappa=0}^{K(x)} u^k a_k$$

και K ο ακέραιος μελλοντικός χρόνος ζωής. Χρησιμοποιώντας μια δείκτρια συνάρτηση I(x), οι ταμειακές ροές τη στιγμή t ορίζονται ως :

$$C_\kappa(x) = u \sum_{j=1}^{m} b_{j,k+1}\, I(K(x) = k, J = j) - a_k I(K(x) \geqslant k),$$

άρα

$$L(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} u^k C_k(x),$$

δηλαδή η ασφαλιστική ζημιά συμπίπτει με την παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών. Η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της ορίζει το αναλογιστικό αποθεματικό V_t τη στιγμή t=0,1,… με

$$V_\tau(x) = E\big[L_\tau(x) \,\big|\, K(x) \geqslant \tau\big] \qquad \textbf{(3)}$$

Το αρχικό αναλογιστικό αποθεματικό είναι $V_0(x) = E[L(x)]$ όπου $L_0(x) = L(x)$.

Μια οπισθοδρομική σχέση που ισχύει για την ασφαλιστική ζημιά είναι η

$$L_\tau(x) = C_t(x) + uL_{\tau+1}(x)$$

που αν την αντικαταστήσουμε στην (3) παίρνουμε τελικά

$$V_\tau(x) = u\sum_{j=1}^{m} b_{j,\tau+1}\, q_{j,x+\tau} - a_\tau + uV_{\tau+1}(x)p_{x+\tau}\ ,$$

όπου $q_{j,x+\tau}$ είναι η πιθανότητα ένας ασφαλισμένος ηλικίας (x+t) να αποχωρήσει λόγω της αιτίας j μέσα στο έτος. Σύμφωνα με τις σχέσεις του Gerber (1986,1997)

$$a_\tau = \pi_\tau^R(x) + \pi_\tau^S(x)$$

$$\pi_\tau^R(x) = \sum_{j=1}^{m}(b_{j,\tau+1} - V_{\tau+1}(x))\mathrm{u}\mathrm{q}_{j,x+\tau}\ ,$$

$$\pi_\tau^S(x) = \mathrm{u}\mathrm{V}_{\tau+1}(x) - V_\tau(x),$$

όπου το $b_{j,\tau+1} - V_{\tau+1}(x)$ είναι τα ποσά σε κίνδυνο εξαιτίας της αιτίας j και $\pi_\tau^S(x)$ είναι το πλεόνασμα των ασφαλίστρων που προσαρμόζει το αναλογιστικό αποθεματικό. Εισάγοντας αυτές τις σχέσεις στην ασφαλιστική ζημιά $L(x)$ παίρνουμε $L(x) - V_0(x) = u^{K(x)+1}(b_{j,K(x)+1} - V_{K(x)+1}(x)) - \sum_{\kappa=0}^{K(x)} u^\kappa \pi_\kappa^R(x)$.

Αν θέσουμε

$$\Lambda_\kappa(x) = u(b_{j,\kappa+1} - V_{\kappa+1}(x))I(K(x) = \kappa) - I(K(x) \geqslant \kappa)\pi_\kappa^R(x)$$

που αντιπροσωπεύει την ασφαλιστική ζημιά ενός έτους για ένα χαρτοφυλάκιο GLIFE στο $(\kappa + 1)$ έτος συμβολαίου τότε

$$L(x) - V_0(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} u^\kappa \Lambda_\kappa(x) \Rightarrow L_t(x) - V_t(x)I(K(x) \geqslant t) = \sum_{\kappa=t}^{\infty} u^{\kappa-t}\Lambda_\kappa(x) \qquad \textbf{(4)}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα το Hattendorf (1868), αν $\{\Lambda_\kappa(x)\}$ είναι μια ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων ασφαλιστικών ζημιών ,δηλαδή,

$E\lfloor \Lambda_j(x)\rfloor = 0, \mathrm{Cov}\lfloor \Lambda_j(x), \Lambda\kappa(x\rfloor = 0,\ 0 \leq j < \kappa$,τότε

$$E[L(x)] = V_0, \mathrm{Var}[L(x)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathrm{Var}[\Lambda_{\mathrm{k}}(x) \mid K(x) \geqslant k] u^{2k}{}_{\kappa}p_x \tag{5}$$

Όπου, $\mathrm{Var}\left[\Lambda\kappa(x) \mid K(x) \geqslant k\right] = \sum_{j=1}^{m} \left(b_{j,k+1} - V_{k+1}(x)\right)^2 u^2 q_{j,x+k} - \pi_k^R(x)^2$

αν m=1 τότε , $\mathrm{Var}[L(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} u^{2(\kappa+1)}[(b_{k+1} - V_{k+1}(x)]^2{}_{k+1}p_x q_{x+k}$).

3.3 Το κεφάλαιο φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου ασφαλίσεων ζωής με τη μέθοδο VaR και CVaR

Αν ένα συμβόλαιο GLIFE έχει μελλοντικές ταμειακές ροές $\{C_k(x)\}$ όπως ορίστηκαν παραπάνω και αν υποθέσουμε ότι α ασφαλισμένος βρίσκεται στη ζωή τη στιγμή t δηλαδή K(x)≥t, τότε η τυχαία μεταβλητή της Παρούσας Αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} u^j C_{t+j}(x) t = 0,1,\ldots$συμπίπτει με την τυχαία ασφαλιστική ζημιά δηλαδή $Z_t = \Lambda_t(x)$, όπου συνεπάγεται ότι

$$E\left[Z_t \mid K(x) \geqslant t\right] = V_t(x) \tag{6}$$

όπου $V_t(x)$ το αναλογιστικό αποθεματικό τη στιγμή t. Από τις (4),(5) προκύπτει ότι

$$\mathrm{Var}\left[Z_t \mid K(x) \geqslant t\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\left(b_{j,t+k+1} - V_{t+k+1}(x)\right)^2 u^2 q_{j,x+t+k} - \pi_{t+k}^R(x)^2\right) \times$$
$$\times\, u^{2k}{}_k p_{x+t}.$$

Εάν τώρα έχουμε ένα GLIFE χαρτοφυλάκιο με n ασφαλισμένους τη στιγμή t, τότε για το i (i=1,2,…,n) συμβόλαιο του χαρτοφυλακίου έχουμε τις εξής μελλοντικές ταμειακές ροές $\left\{C_k^{(i)}(x_i)\right\}$, η παρούσα αξία των οποίων συμπίπτει με την ασφαλιστική ζημιά $L_{t_i}^{(i)}(x)$. Το αναλογιστικό αποθεματικό του χαρτοφυλακίου είναι

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} V_{t_i}^{(i)}(x_i)$$

και η VaR και CVaR του κεφαλαίου φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου ισούται με

$$SC_t^{VaR} = VaR_{1-\varepsilon}\langle Z_t | k(x_i) \geq t_i \rangle,$$

$$\mathrm{SC}_t^{\mathrm{CVaR}} = \mathrm{CVaR}_{1-\epsilon}\left[Z_t \mid K(x_i) \geqslant t_i\right] - V_t\,,$$

ενώ οι αντίστοιχες αναλογίες κεφαλαίου φερεγγυότητας είναι

$$\mathrm{SR}_t^{\mathrm{VaR}} = \frac{\mathrm{SC}_t^{\mathrm{VaR}}}{V_t} \quad \text{και} \quad \mathrm{SR}_t^{C\mathrm{VaR}} = \frac{\mathrm{SC}_t^{\mathrm{CVaR}}}{V_t}$$

Για να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες πρέπει να προσδιορίσουμε τη κατανομή Z_t της τυχαίας μεταβλητής της Παρούσας Αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών, δεδομένου ότι όλοι οι ασφαλισμένοι είναι ζωντανοί τη στιγμή t και ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Η δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά είναι:

$$E[Z_t|K(x_i) \geqslant t_i] = V_t$$

$$\mathrm{Var}[Z_t|K(x) \geqslant t_i] = \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(b_{j,t_i+k+1}^{(i)} - V_{t_i+k+1}^{(i)}(x_i)\right)^2 \times u^2 q_{j,x+t+\kappa} - \pi_{t_i+\kappa}^{R}(x)^2)u^{2\kappa}{}_{\kappa}p_{x_i+t_i}\right]$$

Αν και το θεώρημα του Hatendorf ορίζει ότι οι ασφαλιστικές ενός έτους $\left\{\Lambda_k^{(i)}(\chi_i)\right\}$ είναι ασυσχέτιστες τ.μ., ωστόσο δεν είναι όλες ανεξάρτητες. Συνήθως στις ασφαλίσεις ζωής μια προσέγγιση από την Γάμμα κατανομή είναι κατάλληλη όμως για πολύ μικρά χαρτοφυλάκια η κατανομή πρέπει να προσδιοριστεί ακριβέστερα. Η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα είναι

$$F_t(x) = G(\beta_i x; \alpha_t) = (1/\Gamma\,(\alpha_i))\int_0^{\beta_i x} t^{a_t - 1}e^{-t}\,dt \ ,\ \alpha_t = 1/k_t^2\,, \beta_t = 1/k_t^2\,\mu_t$$

όπου μ_t, k_t δηλώνουν την δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά από τις σχέσεις (7). Αν αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (4.23 του Hurlimann 2002c) τότε

$$\mathrm{SR}_t^{\mathrm{VaR}} = z_{1-\epsilon}(k_t^{-2})k_t^2 - 1 \quad \text{και}$$

$$\mathrm{SR}_t^{\mathrm{CVaR}} = z_{1-\epsilon}(k_t^{-2})k_t^2\,(g(z_{1-\epsilon}(k_t^{-2}); k_t^{-2}))/\epsilon$$

όπου $z_{1-\epsilon}(\alpha) = G^{-1}(1-\epsilon; \alpha)$, δηλώνει το $1-\epsilon$ ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης Γάμμα κατανομής $G(x; \alpha)$ και $g(x; \alpha)$ τη σ.π.π.

Σε ένα συνεχώς αυξανόμενο μέγεθος χαρτοφυλακίου οι συντελεστές διασποράς αναμένεται να μικραίνουν. Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) αν αυτοί τείνουν στο μηδέν τότε η κατανομή Γάμμα συγκλίνει στην κανονική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι οι αντίστοιχες αναλογίες $\mathrm{SR}_t^{\mathrm{VaR}}$ και $\mathrm{SR}_t^{C\mathrm{VaR}}$ συγκλίνουν στις αναλογίες από κανονική κατανομή και έχουμε:

$$\lim_{k_t \to 0} \mathrm{SR}_t^{\mathrm{VaR}} = \lim_{k_t \to 0} \Phi^{-1}(1-\varepsilon)k_t = 0$$

$$\lim_{k_t \to 0} \mathrm{SR}_t^{\mathrm{CVaR}} = \lim_{k_t \to 0} \varphi[\Phi^{-1}(1-\varepsilon)/\varepsilon]k_t = 0$$

Όμως η παραπάνω προσέγγιση είναι βασισμένη μόνο στη διαδικασία κινδύνου. Για να έχουμε πλήρη κάλυψη του βιομετρικού κινδύνου πρέπει να καλύψουμε και τη διαδικασία κινδύνου αλλά και τον συστηματικό κίνδυνο.

Σύμφωνα με την τυποποιημένη προσέγγιση το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας ισούται με

$$SCR_t = V_t^{\Delta} - V_t$$

και το κεφάλαιο στόχος

$$TC_t = SCR_t + RM_t \ ,$$

$$RM_t = i_{\mathrm{coc}} \sum_{\kappa=1}^{T-t} u_f^{\kappa} \mathrm{SCR}_{t+\kappa},$$

ενώ η αναλογία του κεφαλαίου φερεγγυότητας ως

$$\mathrm{SR}_t = \frac{SCR_t}{V_t},$$

όπου V_t^{Δ} είναι η αξία του αναλογιστικού αποθεματικού μετά από ένα βιομετρικό shock Δ και Δ= (Δ_1, Δ_2, …..) είναι το διάνυσμα από τα shock, για παράδειγμα, Δ_1 =0,15 (μόνιμη αύξηση της θνησιμότητας 15% σε κάθε ηλικία για τον κίνδυνο θνησιμότητας), Δ_2=-0,20 (μόνιμη μείωση της θνησιμότητας 20% σε κάθε ηλικία για τον κίνδυνο μακροζωίας), Δ_3=0,25% (πιο συγκεκριμένα αύξηση 35% στα ποσοστά αναπηρίας για το επόμενο έτος, μαζί με μια μόνιμη αύξηση 25% στα ποσοστά αναπηρίας τα επόμενα έτη για τον κίνδυνο αναπηρίας). Οι αντίστοιχες σχέσεις για τα αποθεματικά και το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας μετά την επέλευση του shock είναι:

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} V_{t_i}^{(i)}(x_i) \quad ,$$

$$V_{t_i}^{(i)}(x_i) = u \sum_{j=1}^{m} b_{j,t_{i+1}}^{(i)} q_{j,x_{i+t_i}} - \alpha_{t_i}^{(i)} + u V_{t_i+1}^{(i)}(x_i) p_{x_{i+t_i}},$$

$$V_t^{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} V_{t_i}^{(i),\Delta}(x_i), \tag{8}$$

$$V_{t_i}^{(i),\Delta}(x_i) = u \sum_{j=1}^{m} b_{j,t_{i+1}}^{(i)} {q^{\Delta \mathrm{j}}}_{j,x_{i+t_i}} - \alpha_{t_i}^{(i)} + u V_{t_i+1}^{(i),\Delta}(x_i) {p^{\Delta \mathrm{j}}}_{x_{i+t_i}},$$

$$SCR_t = V_t^{\Delta} - V_t,$$

$$TC_t = SCR_t + RM_t$$

Αν θεωρήσουμε ότι Z_t^{Δ} είναι οι τροποποιημένες μελλοντικές ταμειακές ροές ενός χαρτοφυλακίου τότε δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά είναι:

$E\left[Z_t^{\Delta} \,\middle|\, K^{\Delta}(x_i) \geqslant t_i\right] = V_t^{\Delta}$,

$Var[Z_t|K(x) \geqslant t_i] =$ **(9)**

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(b_{j,t_i+k+1}^{(i)} - V_{t_i+k+1}^{(i),\Delta}(x_i)\right)^2 \times u^2 q^{\Delta_j}{}_{j,x+t+\kappa} - \pi_{t_i+\kappa}^{R,\Delta}(x)^2)u^{2\kappa}{}_{\kappa}p^{\Delta}{}_{x_i+t_i}\right]$$

Όπου $K^{\Delta}(x)$ είναι ο τροποποιημένος ακέραιος μελλοντικός χρόνος ζωής εξαιτίας του j shock. Η Z_t^{Δ} προσεγγίζεται ξανά από μια Γάμμα κατανομή

$$F_t^{\Delta}(x) = G(\beta_t^{\Delta}x; \alpha_t^{\Delta}),$$

όπου $\alpha_t^{\Delta} = (k_t^{\Delta})^{-2}, \beta_t^{\Delta} = (k_t^{\Delta})^{-2}/\mu_t^{\Delta}$ από τις σχέσεις (9). Τότε το απαιτούμενο κεφαλαίο φερεγγυότητας με βάση τις η VaR και CVaR μετά το shock δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathrm{SC}_t^{\Delta,\mathrm{VaR}} = \mathrm{VaR}_{1-\epsilon}\left[Z_t^{\Delta} \,\middle|\, K^{\Delta}(x_i) \geqslant t_i\right] - V_t =$$

$$\mathrm{SCR}_t + (z_{1-\epsilon}(k_t^{\Delta})^{-2})(k_t^{\Delta})^2 - 1) + V_t^{\Delta},$$

(10)

$$\mathrm{SC}_t^{\Delta,\mathrm{CVaR}} = \mathrm{CVaR}_{1-\epsilon}\left[Z_t^{\Delta} \,\middle|\, K^{\Delta}(x_i) \geqslant t_i\right] - V_t =$$

$$= \mathrm{SCR}_t + (z_{1-\epsilon}(k_t^{\Delta})^{-2}) \times \left[\frac{g(z_{1-\epsilon}(k_t^{\Delta})^{-2}); (k_t^{\Delta})^{-2}}{\epsilon}\right] \times V_t^{\Delta}$$

Αν έχουμε ένα συνεχώς αυξανόμενο χαρτοφυλάκιο τότε σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα οι συντελεστές μεταβλητότητας τείνουν στο μηδέν και η κατανομή Γάμμα συγκλίνει στην κανονική κατανομή. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{SC}_t^{\Delta,\mathrm{VaR}} = \mathrm{SCR}_t + \Phi^{-1}(1-\epsilon)k_t^{\Delta}V_t^{\Delta},$$

$$\mathrm{SC}_t^{\Delta,\mathrm{CVaR}} = \mathrm{SCR}_t + [\phi[\Phi^{-1}(1-\epsilon)]/\epsilon]k_t^{\Delta}V_t^{\Delta}$$ **(11)**

Αν οι συντελεστές μεταβλητότητας τείνουν στο μηδέν τότε οι αναλογίες

$$\lim_{k_\tau^{\Delta}} SC_t^{\Delta,VaR} = \lim_{k_\tau^{\Delta}} SC_t^{\Delta,CVaR} = \frac{SCR_t}{V_t}$$

του απαιτούμενου κεφαλαίου φερεγγυότητας συγκλίνουν στις αντίστοιχες της τυποποιημένης προσέγγισης. Άρα η διαδικασία κινδύνου έχει διαφοροποιηθεί εντελώς αλλά ο συστηματικός κίνδυνος παραμένει.

3.4 Σύγκριση της τυπικής προσέγγισης με διάφορες στοχαστικές προσεγγίσεις

Αν τώρα υποθέσουμε ένα στοχαστικό μοντέλο με διακυμάνσεις στις βασικές πιθανότητες, όπως ένα Bayesian μοντέλο Gamma-Poisson έτσι ώστε ο αριθμός των αποχωρήσεων να ακολουθούν την κατανομή Poisson και η δεσμευμένη πιθανότητα αποχώρησης μια Γάμμα κατανομή με αποτέλεσμα η αδέσμευτη κατανομή του αριθμού των αποχωρήσεων να ακολουθεί μια αρνητική διωνυμική κατανομή.

Για σκοπούς μοντελοποίησης διαδικασίας κινδύνου και ταυτόχρονα συστηματικού κινδύνου θεωρούμε ένα μοντέλο Gamma-Poisson που εξαρτάται από το χρόνο (Olivieri and Pitacco,2009a). Αυτό το μοντέλο έχει την ικανότητα να ανανεώνει τις εμπειρικές παραμέτρους. Δοθέντος ενός σταθερού χρονικού σημείου t=0,1,…,ω-x (ω= μέγιστη δυνατή ηλικία) και ενός βιομετρικού πίνακα ζωής $\{q_x\}$ για έναν ασφαλισμένο στην ηλικία x για δεδομένη αιτία αποχώρησης από μια ομάδα με αρχικό μέγεθος l_{x+t} τη στιγμή t.

Έστω $D_{x+t+\tau-1}$ η τ.μ. του αριθμού των αποχωρήσεων από μια ομάδα τη χρονική περίοδο (t+τ-1,t+τ] ,τ=1,2,…

Τη πρώτη χρονική περίοδο επειδή δεν υπάρχει διαθέσιμη πληροφορία υποθέτουμε ότι ο αριθμός των αποχωρήσεων ακολουθεί Poisson κατανομή, δηλαδή

$$D_{x+t} \sim Po(l_{x+t} Q_{x+t}),$$

$$Q_{x+t} \sim Gamma(\alpha, \frac{\beta}{q_{x+t}})$$

Ισχύει ότι η αδέσμευτη κατανομή του αριθμού των αποχωρήσεων στη πρώτη περίοδο κατανέμεται ως μια αρνητική διωνυμική

$$D_{x+t} \sim NB\left(\alpha, \frac{\theta 1}{\theta 1+1}\right), \quad \theta 1 = \frac{\beta}{l_{x+t} q_{x+t}}$$

Σε αντίθεση με τον αναμενόμενο αριθμό αποχωρήσεων $l_{x+t} q_{x+t}$ που προβλέπεται από έναν βιομετρικό πίνακα ζωής ισχύει ότι

$$E[D_{x+t}] = \frac{\alpha}{\beta} l_{x+t} q_{x+t} \qquad \textbf{(12)}$$

Για να μοντελοποιήσουμε μια συστηματική απόκλιση από έναν προβλεπόμενο πίνακα ζωής υποθέτουμε ότι το πηλίκο α/β είναι διάφορο του 1 ,για παράδειγμα, είναι μεγαλύτερο του 1 για τον κίνδυνο θνησιμότητας και αναπηρίας και μικρότερος του 1 για τον κίνδυνο μακροζωίας. Αν υποθέσουμε ότι τη στιγμή t+1 ο αριθμός των αποχωρήσεων είναι d_{x+t} και ο αριθμός αυτών που παρέμειναν στην ομάδα είναι

$l_{x+t+1} = l_{x+t} - d_{x+t}$,τότε μια κατάλληλη κατανομή για την δεσμευμένη πιθανότητα αποχωρήσεων Q_{x+t} με την πληροφορία ότι $D_{x+t} = d_{x+t}$ είναι η κατανομή Γάμμα. Έτσι έχουμε

$$Q_{x+t} \Big| d_{x+t} \sim Gamma(\alpha + d_{x+t}, \frac{\beta + l_{x+t}q_{x+t}}{q_{x+t}})$$

η οποία δείχνει ότι οι αρχικοί παράμετροι του συστηματικού κινδύνου ανανεώνονται ως εξής:

$$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha + d_{x+t}, \beta + l_{x+t}q_{x+t})$$

Έτσι τη στιγμή $t + \tau - 1, \tau \geq 2$ έχοντας τον παρατηρούμενο αρχικό αριθμό αποχωρήσεων $d_{x+t}, d_{x+t+1}, \dots, d_{x+t+\tau-2}$ το μέγεθος της ομάδας την επόμενη χρονική περίοδο είναι

$$l_{x+t+k-1} = l_{x+t+k-2} - d_{x+t+k-2}\,,\ k = 2,3, \dots, \tau\,.$$

Επομένως έχουμε

$$D_{x+t+\tau-1} \Big| d_{x+t}, d_{x+t-1}, \dots, d_{x+t+\tau-2} \sim NB(\alpha + \sum_{k=1}^{\tau-1} d_{x+t+k}, \frac{\theta_\tau}{\theta_\tau + 1})\,,$$

$$\theta_\tau = \frac{\beta + \sum_{k=1}^{\tau-1} l_{x+t+k}q_{x+t+k-1}}{l_{x+t+\tau-1}q_{x+t+\tau-1}}$$

(13)

$$E[D_{x+t+\tau-1} \,|\, d_{x+t}, d_{x+t+1}, \dots, d_{x+t+\tau-2}]$$

$$= \frac{\alpha + \sum_{k=1}^{\tau-1} d_{x+t+k-1}}{\beta + \sum_{k=1}^{\tau-1} l_{x+t+k-1}qx + t + k - 1} l_{x+t+k-1}q_{x+t+\tau-1} \leq, \geq$$

$$E[D_{x+t+\tau-1}] = l_{x+t+\tau-1}q_{x+t+\tau-1}$$

Αν η βιομετρική εμπειρία είναι συνεπής με το ότι αναμένεται τότε το πηλίκο και από τις δυο αναμενόμενες τιμές παραμένει σταθερό. Αν η εμπειρία είναι καλύτερη από ότι αναμένεται τότε το πηλίκο θα αυξάνεται, ενώ αν είναι χειρότερη θα μειώνεται.

Στην πράξη, δοθέντος ενός σταθερού χρονικού σημείου $\tau \in \{0,1, \dots, \omega - \chi\}$, θεωρούμε για κάθε αιτία αποχώρησης μια πιθανότητα αποχώρησης Gamma-Poisson που προέρχεται από τις σχέσεις (12) και (13).

Για να βρούμε το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου με βάση τις VaR και CVaR, με την προσέγγιση Gamma-Poisson αντικαθιστούμε τον εκθέτη Δ_j με PG και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$q_{x+t}^{PG} = \frac{\alpha}{\beta} q_{x+t}, q_{x+t+\tau}^{PG} = \frac{\alpha + \sum_{k=1}^{\tau} d_{x+t+k-1}}{\beta + \sum_{k=1}^{\tau} l_{x+t+k-1} q_{x+t+k-1}} q_{x+t+\tau} \ , \ \tau = 1,2, \dots$$

$$p_{x+t+\tau}^{PG} = 1 - q_{x+t+\tau}^{PG} \ , \ \ \tau = 0,1,2, \dots \tag{14}$$

Ο Hurlimann εφάρμοσε τα παραπάνω μοντέλα σε ένα χαρτοφυλάκιο με συνταξιοδοτικά προγράμματα τα οποία ενέχουν κίνδυνο μακροζωίας. Υπέθεσε ότι αν όλοι οι συμμετέχοντες στο πρόγραμμα είναι ηλικίας s τη στιγμή t=0 και ω η μέγιστη δυνατή ηλικία, τότε το αναλογιστικό αποθεματικό τη στιγμή $\tau = 0,1,\cdots,\omega - s$ είναι

$$V_t = \sum_{k=0}^{\omega-(s+t)} u^k p_{s+t}^k \tag{15}$$

Από τον βιομετρικό πίνακα ζωής των Heligman and Pollard (1980) ο οποίος βασίζεται σε μια αναλυτική συνάρτηση 8 μη αρνητικών παραμέτρων (A,B,C,D,E,F,G,H) ισχύει ότι

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D \times exp\left\{-E \times (\ln\left(\frac{x}{F}\right))^2\right\} + G \times H^X \tag{16}$$

Ο πρώτος όρος του μοντέλου είναι μια ραγδαία μειούμενη εκθετική κατανομή, η οποία αντανακλά την πτώση της θνησιμότητας στην ηλικία κάτω των 10 ετών. Ο δεύτερος όρος είναι όμοιος με μια Λογαριθμική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που περιγράφει τη μέση ζωή θνησιμότητας. Ο τρίτος και τελευταίος όρος είμαι η εκθετική συνάρτηση του Gompetz (1825) που αντικατοπτρίζει την αύξηση της θνησιμότητας σε ενήλικες και ηλικιωμένους. Επειδή εστιαζόμαστε μόνο στον κίνδυνο μακροβιότητας, υποθέτουμε πέραν της ηλικίας συνταξιοδότησης άρα έχουμε,

$$\frac{q_x}{p_x} = G \times H^x \quad , x \geq s. \tag{17}$$

Η παράμετρος G περιγράφει το επίπεδο θνησιμότητας γήρανσης και η Η το ποσοστό αύξησης της θνησιμότητας γήρανσης. Ο Hurlimann συγκρίνει τα στοχαστικά μοντέλα με το μοντέλο της τυποποιημένης προσέγγισης του πλαισίου Φερεγγυότητα ΙΙ για τον κίνδυνο μακροβιότητας ή μακροζωίας (longevity risk). Ειδικότερα έθεσε στη σχέση (17) $G = 2.005 \times e^{-0.06}$ και $H = 1.130$ τα οποία είναι οι βέλτιστες εκτιμήσεις από Ιταλούς άνδρες που ήταν γεννημένοι το 1955 (Olivieri and Pitacco,2009b). Ένας απλός τρόπος ο οποίος είναι συνεπής με τη τυπική προσέγγιση αποτελείται από την υπόθεση ότι η μελλοντική θνησιμότητα αποκλίνει συστηματικά από τον πίνακα ζωής σύμφωνα με το προβλεπόμενο σοκ μακροβιότητας Δ=0,20 το οποίο ορίζει ότι :

$$l_{s+t+k} = l_{s+t+k-1} - d_{s+t+k-1},$$
$$d_{s+t+k-1} = (1-\Delta) \times l_{s+t+k-1} q_{s+t+k-1} \quad , k = 1,2,\ldots \tag{18}$$

Αυτή η επιλογή είναι σύμφωνη με τον αναμενόμενο αριθμό θανάτων της πρώτης περιόδου $E[D_{s+t}] = d_{s+t}$, αν στην (18) θέσουμε α=(1-Δ)β. Αν υποθέσουμε ότι β=100 τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας για την D_{s+t} είναι ίσος με 10%. Φαίνεται ότι η επιλογή της σχέσεις (18) με α=(1-Δ)β, συνεπάγεται ότι ο βιομετρικός πίνακας ζωής συμπίπτει με τον τροποποιημένο πίνακα ζωής. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι το στοχαστικό μοντέλο Gamma-Poisson είναι πιο αποτελεσματικό επειδή επιτρέπει τη χρήση αποτελεσματικού αριθμού παρατηρημένων αποχωρήσεων με το πέρασμα του χρόνου. Επομένως καλύπτει και τη διαδικασία του κινδύνου και τον συστηματικό κίνδυνο. Η έρευνα του Hurlimann έδειξε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος του χαρτοφυλακίου και ο χρόνος αποτίμησης τόσο μειώνεται το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου με βάση την VaR και την CVaR για τον κίνδυνο μακροζωίας. Αυτό είναι ένα κίνητρο για τις ασφαλιστικές με αυξανόμενα μεγέθη χαρτοφυλακίων να αναπτύξουν εσωτερικά μοντέλα για την μέτρηση των κινδύνων αφού απαιτούνται μικρότερα ποσά από αυτά της τυπικής προσέγγισης.

4 Βιομετρικός κίνδυνος φερεγγυότητας σε χαρτοφυλάκια συμβολαίων Γενικευμένων Ασφαλίσεων Ζωής (GLIFE) με προσέγγιση Μαρκοβιανών Αλυσίδων (Markov Chain Approach).

Σε ένα άρθρο του ο Werner Hurlimann (2012) για τον υπολογισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου φερεγγυότητας των υποχρεώσεων των ασφαλιστικών επιχειρήσεων για τους βιομετρικούς κινδύνους, γίνεται αναφορά σε εσωτερικά μοντέλα τα οποία υπολογίζουν το SCR των βιομετρικών κινδύνων από ένα απλό ή πολλαπλό χαρτοφυλάκιο Γενικευμένων Ασφαλίσεων Ζωής (GLIFE) με πολλά αίτια εξόδου (ή αποχωρήσεων). Ο υπολογισμός αυτού του κεφαλαίου που είναι βασισμένος σε μια προσέγγιση συνολικού ισολογισμού γίνεται με τα μέτρα της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) και της υπό συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο (CVaR). Ειδικότερα γίνεται αναφορά στους βιομετρικούς κινδύνους της θνησιμότητας και της αναπηρίας και κυρίως σε ασφαλιστικά συμβόλαια προικοδότησης με απαλλαγή των ασφαλίστρων σε περίπτωση ανικανότητας του ασφαλισμένου. Αυτοί οι κίνδυνοι για ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλίσεων ζωής απαιτούν ένα Μαρκοβιανό μοντέλο τριών καταστάσεων διακριτού χρόνου.

4.1 Μια γενική προοπτική προσέγγιση του κεφαλαίου φερεγγυότητας του ασφαλιστικού κινδύνου

Στην τελευταία μελέτη του πλαισίου για την Φερεγγυότητα II QIS 5 (σελίδες 147-163) περιγράφεται ένα μοντέλο για τον υπολογισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου φερεγγυότητας (SCR) το οποίο εξαρτάται μόνο από τον χρονικό ορίζοντα αποτίμησης και όχι από το μέγεθος του χαρτοφυλακίου (αριθμός ασφαλιστηρίων συμβολαίων). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να λαμβάνεται υπόψη μόνο η αβεβαιότητα στις τάσεις και τις παραμέτρους, δηλαδή μόνο ο συστηματικός κίνδυνος ή ο κίνδυνος παραμέτρου αλλά όχι τις τυχαίες μεταβλητές των διακυμάνσεων της συχνότητας και της σοβαρότητας των υποχρεώσεων, δηλαδή της διαδικασίας του κινδύνου. Εξαιτίας της απλοϊκότητας της σχέσης της τυποποιημένης προσέγγισης η διαδικασία του κινδύνου έχει περιληφθεί ως συστατικό του συστηματικού κινδύνου. Όμως σε ένα περιβάλλον ολοκληρωμένης διαχείρισης των κινδύνων και για σκοπούς μοντελοποίησης εσωτερικών μοντέλων απαιτείται να λάβουμε υπόψη μας όλους τους κινδύνους και τις παραμέτρους αυτών και κυρίως των βιομετρικών κινδύνων που θα μελετήσουμε.

Μια γενική προοπτική προσέγγιση για το κεφάλαιο φερεγγυότητας του κινδύνου των ασφαλιστικών υποχρεώσεων για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις ζωής γίνεται με τη χρήση ενός στοχαστικού μοντέλου διακριτού χρόνου πολλών περιόδων. Δοθέντος ενός χρονικού ορίζοντα T και ενός χώρου πιθανοτήτων (Ω,F,P) με $(F_t)_{t=0}{}^{T}$ τέτοιο ώστε $F_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ και $F_T = F$.Οι δυο βασικές στοχαστικές διαδικασίες είναι τα περιουσιακά στοιχεία (assets) A_t και οι αναλογιστικές υποχρεώσεις (actuarial liabilities) L_t τη στιγμή t.

Σε μια προσέγγιση συνολικού ισολογισμού οι τιμές των παραπάνω στοχαστικών διαδικασιών περιγράφουν τις τυχαίες μεταβλητές των εισροών και εκροών μιας ασφαλιστικής επιχείρησης.

Έστω:

P_{t-1}: τα επιβαρυμένα ασφάλιστρα (loaded premiums) που πληρώνονται τη στιγμή t-1 (επενδύονται τη στιγμή t-1).

X_t: τα ασφαλιστικά κόστη (insurance costs)που πληρώνονται τη στιγμή t (όπως ασφαλιστικές παροχές, έξοδα και αμοιβές που πραγματοποιούνται την χρονική περίοδο (t-1,t]).

R_t: παράγοντας συσσώρευσης (accumulation factor) για την απόδοση των επενδύσεων την χρονική περίοδο (t-1,t]).

Υποθέτουμε ότι X_t είναι μετρήσιμα ως προς τη διήθηση F_t και R_t είναι μετρήσιμα ως προς τη διήθηση F_{t-1}. Η τυχαία μεταβλητή του συσσωρευμένου παράγοντα συσσώρευσης (cumulated accumulation factor)των αποδόσεων στην χρονική περίοδο (s,t], όπου $0 \leq s \leq t \leq T$ ορίζεται ως $R_{s,t} = \prod_{j=s+1}^{t} R_j$.

Επειδή η R_t είναι μετρήσιμη ως προς τη διήθηση F_{t-1} η $R_{s,t}$ είναι μετρήσιμη ως προς τη διήθηση F_{t-1} επομένως η $\{R_{s,t}, t > s\}$ είναι μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία.

$D_{s,t} = R_{s,t}^{-1}$: είναι η τυχαία μεταβλητή του προεξοφλητικού επιτοκίου.

Θεωρούμε ως F_{t+j+1} μετρήσιμη ως προς τη διήθηση την στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου

$$\{CF_{t+j}, j = 0,1, \dots, T - t - 1\}$$

των μελλοντικών ασφαλιστικών ταμειακών ροών (future insurance cash-flows) η οποία ορίζεται ως:

$$CF_{t+j} = D_{t+j,t+j+1} \cdot X_{t+j+1} - P_{t+j} \ , j = 0,1, \dots, T - t - 1 \qquad \textbf{(1)}$$

L_t: προοπτικές υποχρεώσεις τη στιγμή t οι οποίες ισούται με την τυχαία μεταβλητή της Παρούσας Αξίας όλων των μελλοντικών ασφαλιστικών ταμειακών ροών τη στιγμή t και ορίζεται ως:

$$L_t = \sum_{j=0}^{T-t-1} D_{t,t+j} \cdot CF_{t+j} \,, t = 0,1, \dots, T-1 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις (1),(2) και χρήση της σχέσης $D_{t,t+1+k} = D_{t,t+1}D_{t+1,t+1+k}$ παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$L_{t+1} = (L_t + P_t)R_{t+1} - X_{t+1} \quad , t = 1, \dots, T-1.$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε την τυχαία μεταβλητή των περιουσιακών στοιχείων που πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική εξίσωση για τον χρονικό ορίζοντα [0,T]:

$$A_{t+1} - L_{t+1} = (A_t - L_t)R_{t+1}, t = 1, \dots, T-1 \qquad \textbf{(3)}$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα ότι $L_T = 0$ η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$P(A_T \geq 0 | F_t) \geq 1 - \epsilon \qquad \textbf{(4)}$$

$$P(A_{t+\tau} \geq L_{t+\tau} \,, \tau = 1,2, \dots, T-t-1 | F_t) \geq 1 - \epsilon \qquad \textbf{(5)}$$

$$P(A_t \geq L_t | F_t) \geq 1 - \epsilon \qquad \textbf{(6)}$$

Δοθέντος μιας πιθανότητας χρεοκοπίας ε>0, όπου ε=0,5% για να υπάρχει συμφωνία με την τελευταία μελέτη QIS 5 του πλαισίου για την φερεγγυότητα II, το κριτήριο φερεγγυότητας των υποχρεώσεων με βάση την Αξία σε Κίνδυνο (VaR) λέει ότι το αρχικό απαιτούμενο κεφάλαιο A_t πρέπει να υπερβαίνει την τυχαία μεταβλητή της Παρούσας Αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών με πιθανότητα τουλάχιστον 1-ε.

Από τις (4),(5) το παραπάνω κριτήριο συνεπάγεται ότι τα περιουσιακά στοιχεία θα πρέπει να υπερβαίνουν τις ασφαλιστικές υποχρεώσεις για κάθε χρονική στιγμή εντός του χρονικού ορίζοντα [0,T] με την ίδια πιθανότητα.

Έστω ότι $A_t^{VaR} = VaR_{1-\varepsilon}(L_t | F_t)$ είναι η μικρότερη λύση της (6) και ότι βέλτιστη εκτίμηση των ασφαλιστικών υποχρεώσεων συμπίπτει με το καθαρό αποθεματικό ασφαλίστρων (net premium reserves) τη στιγμή t, δηλαδή,

$$E(L_t | F_t) = V_t^Z.$$

Τότε το κεφάλαιο φερεγγυότητας των ασφαλιστικών υποχρεώσεων με βάση το VaR (liability VaR solvency capital) είναι

$$SC_t^{VaR} = A_t^{VaR} - V_t^Z = VaR_{1-\varepsilon}(L_t | F_t) - V_t^Z$$

Η σχέση αυτή αντιπροσωπεύει το διαθέσιμο κεφάλαιο που πρέπει να έχει η ασφαλιστική επιχείρηση τη στιγμή t για να αντιμετωπίσει τον κίνδυνο των ασφαλιστικών υποχρεώσεων με αρκετά μεγάλη πιθανότητα. Για να είμαστε σύμφωνοι με το πλαίσιο της Φερεγγυότητας II πρέπει να προσθέσουμε στο παραπάνω ποσό και ένα περιθώριο κινδύνου (risk margin). Στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας II το απαιτούμενο κεφάλαιο και το περιθώριο κινδύνου καθορίζουν τις τεχνικές προβλέψεις του Παθητικού. Έτσι και εδώ το κεφάλαιο στόχος των υποχρεώσεων με βάση την VaR είναι το άθροισμα του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση την VaR συν το περιθώριο κινδύνου με βάση την VaR και ορίζεται ως:

$$TC_t^{VaR} = SC_t^{VaR} + RM_t^{VaR} \tag{7}$$

Το περιθώριο κινδύνου υπολογίζεται με την χρήση της προσέγγισης του κόστους κεφαλαίου(Cost of Capital,CoC),όπου το επιτόκιο του κόστους κεφαλαίου ορίζεται να είναι σύμφωνα με τον CEIOPS $i_{coc} = 6\%$.Το περιθώριο κινδύνου ισούται με:

$$RM_t^{VaR} = i_{coc} \sum_{k=1}^{T-t} u_f^k SC_{t+k}^{VaR} \tag{8}$$

Η παράμετρος T δηλώνει τον χρονικό ορίζοντα και u_f είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου(risk free rate).

Για να συγκρίνουμε το κεφάλαιο αυτό με άλλα μέτρα αλλά και με την τυποποιημένη προσέγγιση θεωρούμε τον λόγο του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση την VaR (solvency capital ratio) ως:

$$SR_t^{VaR} = \frac{SC_t^{VaR}}{V_t^Z} \tag{9}$$

Ένα άλλο μέτρο το οποίο είναι και συνεπές μέτρο κινδύνου είναι η υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (CVaR). Έστω ότι η υπό συνθήκη αξία σε κίνδυνο της τυχαίας μεταβλητής των μελλοντικών ταμειακών ροών με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-ε με δεδομένη την διαθέσιμη πληροφορία τη στιγμή t, F_t ορίζεται ως:

$$CVaR_{1-\varepsilon}(L_t|F_t) = E(L_t|L_t > VaR_{1-\varepsilon}(L_t|F_t), F_t)$$

Τότε το κεφάλαιο στόχος των υποχρεώσεων με βάση την CVaR (target capital) ισούται με:

$$TC_t^{CVaR} = (CVaR_{1-\varepsilon}(L_t|F_t)) - V_t^Z + RM_t^{CVaR} = SC_t^{CVaR} + RM_t^{CVaR}$$

Ο αντίστοιχος λόγος του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση την CVaR είναι :

$$SR_t^{CVaR} = \frac{SC_t^{CVaR}}{V_t^Z} \tag{10}$$

4.2 Προσέγγιση Μαρκοβιανών αλυσίδων σε ασφαλιστήρια συμβόλαια ζωής

Έστω τώρα ένα μοντέλο Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου από συμβόλαια γενικευμένων ασφαλίσεων ζωής (GLIFE) με διακριτό χώρο καταστάσεων S. Ο χώρος καταστάσεων S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων όπου ανήκει ένα συμβόλαιο κατά τη διάρκεια της ζωής του, δηλαδή μέχρι την λήξη του. Στο μοντέλο αυτό υπάρχουν αυθαίρετες πληρωμές στις οποίες ανήκουν δυο είδη γεγονότων:

Τύπου 1: πληρωμές που γίνονται στην κύρια (αρχική) κατάσταση

Τύπου 2: πληρωμές που γίνονται λόγω μετάβασης σε άλλη κατάσταση

Το διάνυσμα συνάρτησης πληρωμών ενός συμβολαίου τη στιγμή k=0,1,2,…. ορίζεται ως:

$a(k) = \{a_i(k), a_{ij}(k) | i \neq j \in S\}$, όπου οι συναρτήσεις πληρωμών ορίζονται ως

Τύπου 1: $a_i(k), i \in S$ είναι η πληρωμή αν το συμβόλαιο τη στιγμή k είναι στη κατάσταση i.

Τύπου 2: $a_{ij}(k)$, $i \neq j \in S$ είναι η πληρωμή αν το συμβόλαιο τη στιγμή $k-1$ ήταν στη κατάσταση i και τη στιγμή k είναι στη κατάσταση j. Για ευκολία ορίζουμε $a_{ij}(0) = 0$ για $i \neq j \in S$ και $a_{ij}(k) = 0$ για $i = j \in S$.

Οι πληρωμές $a_i(k)$ διαχωρίζονται σε δυο μέρη, το μέρος παροχών (benefit part) και το μέρος ασφαλίστρων (premium part) έτσι ώστε

$a_i(k) = b_i(k) - \pi_i(k)$, όπου $\pi_i(k)$ δηλώνει το μη αρνητικό ασφάλιστρο που πληρώνεται τη στιγμή k όταν το συμβόλαιο είναι στην κατάσταση i.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις το ασφάλιστρο $\pi_i(k) = 0$ αν η κατάσταση i είναι διαφορετική από τη κατάσταση active (ενεργός) γιατί τα ασφάλιστρα πληρώνονται μόνο αν ο ασφαλισμένος είναι ενεργός, δηλαδή, δεν έχει πεθάνει ή είναι ανίκανος. Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας για τον βιομετρικό κίνδυνο , θα θεωρήσουμε ένα σταθερό επίπεδο επιτοκίων με ένα ετήσιο επιτόκιο i και προεξοφλητικό παράγοντα u=1/(1+i). Η κατάσταση ενός συμβολαίου GLIFE για κάθε χρονική στιγμή k =0,1,2,… περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία $(X_k)_{k=0,1,2,..}$ με τιμές στον χώρο καταστάσεων S. Το γεγονός $\{X_k = s\}$ σημαίνει ότι το συμβόλαιο τη στιγμή k είναι στην κατάσταση s. Υποθέτουμε ότι είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα στην οποία συνεπάγεται ότι η από κοινού κατανομή της τυχαίας μεταβλητής των χώρων καταστάσεων μπορεί να περιγραφεί ως ένας πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων σε ένα βήμα (one step transition probability matrix), $p(k) = (p_{ij}(k)_{i,j\in S}$ που ορίζεται ως:

$$p(k) = P(X_k = j|X_k = i), k = 0,1,2,\dots \qquad \textbf{(11)}$$

Κάνοντας χρήση μιας δείκτριας συνάρτησης $I(x)$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή των ταμειακών ροών ενός συμβολαίου GLIFE τη χρονική περίοδο $(k, k+1)$ υπολογισμένο τη χρονική στιγμή k =0,1,2,… ,που ορίζεται ως :

$$C_k = \sum_{i\in S}\{b_i(k) - \pi_i(k)\}\cdot I(X_k = i) + u\cdot \sum_{i\neq j\in S} a_{ij}(k+1)\cdot I(X_k = i\wedge X_{k+1} = j) \qquad \textbf{(12)}$$

Η τυχαία μεταβλητή της ασφαλιστικής ζημιάς ενός συμβολαίου GLIFE ορίζεται ως:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} u^k\, C_k \qquad \textbf{(13)}$$

Αυτό προσδιορίζει την ασφαλιστική ζημιά με την τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών. Έτσι για μια μη αρνητική παράμετρο τ=0,1,2,…, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή της προοπτικής ασφαλιστικής ζημιάς τη στιγμή τ ως:

$$L_\tau = (1+i)^\tau \sum_{k=\tau}^{\infty} u^k C_k \qquad \textbf{(14)}$$

της οποίας η δεσμευμένη μέση τιμή ορίζει το αναλογιστικό αποθεματικό

$$V_\tau = E(L_\tau|X_\tau) = \sum_{k\in S} V_\tau^k, \quad V_\tau^k = E(L_\tau|X_\tau = k) \qquad \textbf{(15)}$$

Η ποσότητα V_τ^k καλείται αναλογιστικό αποθεματικό χρόνου t και κατάστασης k με $L_0 = L$ και $V_0 = E[L]$, το αρχικό αναλογιστικό αποθεματικό.

Γνωρίζουμε ότι ισχύει για την τυχαία μεταβλητή της προοπτικής ζημιάς, η οπισθοδρομική σχέση,

$$L_\tau = C_\tau + u\cdot L_{\tau+1} \qquad \textbf{(16)}$$

Έστω ότι ένα συμβόλαιο είναι στην κατάσταση k τη στιγμή τ. Εισάγοντας την σχέση (16) στην σχέση (15) παίρνουμε

$$V_\tau^k = E(C_\tau|X_\tau = k) + u\cdot E(L_{\tau+1}|X_\tau = k) \qquad \textbf{(17)}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (12) στο πρώτη έκφραση της σχέσης (17) έχουμε:

$u\ \sum_{i\neq j\in S} a_{ij}(\tau+1)\cdot P(X_\tau \wedge X_{\tau+1}=j|X_\tau=k)+\sum_{i\in S}\{b_i(\tau)-\pi_i(\tau)\}\cdot$
$P(X_\tau=i|X_\tau=k)=u\cdot\sum_{j\neq k\in S} a_{kj}(\tau+1)\cdot p_{kj}(\tau)+b_k(\tau)-\pi_k(\tau).$

Η πρώτη έκφραση της σχέσης (17) ισούται με:

$E(L_{\tau+1}|X_\tau=k)=\sum_{j\in S} E(L_{\tau+1}|X_{\tau+1}=j)\cdot P(X_{\tau+1}=j|X_\tau=k)=\sum_{j\in S} V_{\tau+1}^{j}\cdot p_{kj}(\tau)$

Έτσι η σχέση (17) με τη βοήθεια των δυο παραπάνω εκφράσεων και των σχέσεων

$$\alpha_{kk}(\tau+1)=0,\ \sum_{j\in S} p_{kj}(\tau)=1,$$

γίνεται

$$V_\tau^k=\sum_{j\in S} p_{kj}(\tau)\cdot\left\{u\cdot V_{\tau+1}^{j}+u\cdot a_{kj}(\tau+1)+b_k(\tau)\right\}-\pi_k(\tau) \qquad \textbf{(18)}$$

Το αναλογιστικό αποθεματικό τη στιγμή τ δοθέντος ότι βρίσκεται στην κατάσταση ισούται με το ενός έτους προεξοφλημένο άθροισμα όλων των πιθανών καταστάσεων από

- Τα αναλογιστικά αποθεματικά τη στιγμή τ-1,
- Τις πληρωμές τη στιγμή τ+1 εξαιτίας της μετάβασης σε άλλη κατάσταση,
- Τις πληρωμές τη στιγμή τ εάν είναι στην κύρια κατάσταση,

το οποίο είναι σταθμισμένο με τις πιθανότητες μετάβασης με ένα βήμα και μειούμενο από το πληρωμένο ασφάλιστρο τη στιγμή τ όταν το συμβόλαιο είναι στην κατάσταση k.

Η σχέση (18) είναι μια έκφραση της διαφορικής εξίσωσης του Thiele. Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι ένα απλό παράδειγμα της οπισθοδρομικής σχέσης του Kolmogorov η οποία είναι ένα βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό των δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών στις Μαρκοβιανές αλυσίδες (π.χ. Norberg, 2001).

Για να πάρουμε μια ανάλογη σχέση Μαρκοβιανής αλυσίδας από τη σχέση (18) θα διαχωρίσουμε το ασφάλιστρο σε ασφάλιστρο κινδύνου (risk premium) και ασφάλιστρο αποταμίευσης (saving premium) (Gerber,1986,1997).

Σύμφωνα με το θεώρημα του Gerber το ασφάλιστρο $\pi_k(\tau)$ τη στιγμή τ εάν το συμβόλαιο είναι στην κατάσταση k είναι το άθροισμα των saving premium και risk premium, τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$\pi_k^S(\tau) = u \cdot V_{\tau+1}^k - V_\tau^k \qquad \textbf{(19)}$$

$$\pi_k^R(\tau) = b_k(\tau) - u \cdot V_{\tau+1}^k + u \cdot \sum_{j \in S} p_{kj}(\tau) \cdot \left\{a_{kj}(\tau+1) + V_{\tau+1}^j\right\} \qquad \textbf{(20)}$$

Το saving premium αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη αλλαγή στο αναλογιστικό αποθεματικό τη στιγμή τ για ένα συμβόλαιο που είναι στην κατάσταση k, ενώ το risk premium είναι η αναμενόμενη τιμή ενός συμβολαίου που είναι στην κατάσταση k τη στιγμή τ που απαιτείται για να καλύψει τον ασφαλιστικό κίνδυνο την χρονική περίοδο $(\tau, \tau+1]$. Ξαναγράφοντας τη σχέση (20) έχουμε

$$\pi_k^R(\tau) = b_k(\tau) + u \cdot \sum_{j \epsilon S} p_{kj}(\tau) \cdot \left\{a_{kj}(\tau+1) + V_{\tau+1}^j - V_{\tau+1}^k\right\} \qquad \textbf{(21)}$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι το risk premium είναι το άθροισμα των παροχών τη στιγμή t για ένα συμβόλαιο που βρίσκεται στη κατάσταση k και του σταθμισμένου με πιθανότητες αθροίσματος του αθροίσματος σε κίνδυνο,

$$\left\{a_{kj}(\tau+1) + V_{\tau+1}^j - V_{\tau+1}^k\right\}$$

εξαιτίας της μετάβασης από την κατάσταση k στη κατάσταση j τη στιγμή $\tau+1$. Το ποσό σε κίνδυνο είναι ένα ποσό που πιστώνεται στο συμβόλαιο του ασφαλισμένου κατά την μετάβαση, δηλαδή ένα εφάπαξ ποσό που πληρώνεται αμέσως συν την προσαρμογή του αναλογιστικού αποθεματικού. Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής της ασφαλιστικής ζημιάς ενός χαρτοφυλακίου με GLIFE συμβάσεις θα ακολουθήσουμε μια προσέγγιση martingale του θεωρήματος του Hattendorf (Buhlmann[1976],Gerber[1979],[2003]).

Ορίζουμε ένα σύνολο συμβολαίων τ+1 με καταστάσεις $S_\tau = \left\{X_\eta \;, \eta = 0,1, \ldots, \tau\right\}$ τη στιγμή τ και την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών

$$Y_\tau = E(L|S_\tau), \quad \tau = 1,2, \ldots, \; Y_0 = E[L\,] = V_0 \qquad \textbf{(22)}$$

Αυτή η στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου $\{Y_\tau\}$, είναι μια διαδικασία martingale όσον αφορά την $\{S_\tau\}$. Οι διαφορές martingale

$$Y_{\tau+1} - Y_\tau = u^\tau \cdot \Lambda_\tau\,, \qquad \tau = 0,1,2, \ldots,$$

αντιπροσωπεύουν τις ενός έτους προεξοφλημένες ασφαλιστικές ζημιές και αποτελούν μια ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε

$$E\left[\Lambda_\eta\right] = 0, \qquad Cov\left[\Lambda_\eta, \Lambda_\tau\right] = 0, \qquad 0 \le \eta \le \tau \qquad \textbf{(23)}$$

$$L - V_0 = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{\tau} \cdot \Lambda_{\tau}$$

Από το θεώρημα του Hattendorf η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής της ασφαλιστικής ζημιάς ορίζεται ως:

$$Var[L] = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \cdot Var[C_{\tau}] \quad \textbf{(24)}$$

Όπου

$$Var[C_{\tau}] = \sum_{k \in S} E(C_{\tau}^2 | X_{\tau} = k) \cdot P(X_{\tau} = k) - \pi^S(\tau)^2 \quad ,$$

$$\pi^S(\tau) = \sum_{k \in S} \pi_k^S(\tau) \quad \textbf{(25)}$$

$$E(C_{\tau}^2 | X_{\tau} = k) = \quad \textbf{(26)}$$

$$= [b_k(\tau) - \pi_k(\tau)]^2 + \sum_{j \in S} u \cdot a_{kj}(\tau+1) \cdot [b_k(\tau) - \pi_k(\tau) + u \cdot a_{kj}(\tau+1)] \cdot p_{kj}(\tau)$$

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι ο τύπος της διακύμανσης του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να συγκριθεί με αυτόν από ένα συμβόλαιο GLIFE με μια ή παραπάνω ζωές και πολλαπλές αιτίες αποχωρήσεων όπως έχουμε αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα. Έτσι η σχέση (25) για την περίπτωση μιας μόνο ζωής είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη σχέση

$$Var[C_{\tau}] = \sum_{k \in S} [\sum_{j \in S} \big(a_{kj}(\tau+1) + V_{\tau+1}^{j} - V_{\tau+1}^{k})^2 u^2 p_{kj}(\tau) - \pi_k^R(\tau)^2\big] \cdot P(X_{\tau} = k)$$

(27)

4.3 Το κεφάλαιο φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου ασφαλίσεων ζωής με τη μέθοδο VaR και CVaR.

Για τον υπολογισμό του κινδύνου σε ένα απλό συμβόλαιο GLIFE με τυχαία μεταβλητή των μελλοντικών ταμειακών ροών $\{C_k\}$ όπως ορίστηκε παραπάνω θεωρούμε ότι ο χώρος καταστάσεων αποτελείται μόνο από το κενό σύνολο δηλαδή,$\{X_k = \emptyset\}$ το οποίο σημαίνει ότι το συμβόλαιο έχει τερματιστεί τη στιγμή k. Επίσης υποθέτουμε ένα συμβόλαιο επιβίωσης δηλαδή ότι ένα συμβόλαιο είναι εν ισχύ την στιγμή της αποτίμησης τ, το οποίο σημαίνει ότι το γεγονός $E_t = \{X_t \neq \emptyset\}$ εκπληρείται. Τότε η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών τη στιγμή t ορίζεται ως:

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} u^j C_{t+j} \,, \quad t = 0,1,2,\dots, \tag{28}$$

Αυτή η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών τη στιγμή τα συμπίπτει με την προοπτική ζημιά τη στιγμή t, όπως ορίστηκε στη σχέση (14)

$$Z_t = L_t \,, t = 0,1,2,\dots$$

Επομένως , η αναμενόμενη τιμή δοθέντος ενός συμβολαίου επιβίωσης ισούται με :

$$V_t^Z = E(Z_t|E_t) = \sum_{k\in S} V_t^k \cdot P(X_t = k|E_t) = \sum_{k\in S} V_t^k \cdot \frac{P(X_t = k)}{P(E_t)} \tag{29}$$

Σε αντίθεση με τη σχέση (15) το αποθεματικό της σχέσης (29) είναι ανεξάρτητο από το χώρο καταστάσεων και καλείται καθαρό αποθεματικό ασφαλίστρων (net premium reserve). Ακολουθώντας τη γενική προσέγγιση υπολογισμού που αναπτύξαμε αρχικά η τιμή αυτού του αποθεματικού μπορεί να επιλεχθεί ως η βέλτιστη εκτίμηση των υποχρεώσεων ενός συμβολαίου.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το κίνητρο για αποθεματικά που είναι ανεξάρτητα από τον χώρο καταστάσεων χρησιμοποιείται στις ασφαλίσεις ζωής second to die, όπου ο ασφαλιστής δεν έχει την πληροφορία για τον πρώτο θάνατο. Στα συμβόλαια ασφάλισης προικοδότησης με απαλλαγή των ασφαλίστρων κατά τη διάρκεια της αναπηρίας φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω έννοια, επειδή δεν μπορεί να υποστηριχτεί ότι ο ασφαλιστής δεν γνωρίζει εάν ο χώρος καταστάσεων δεν απασχολείται, ενώ το ασφάλιστρο απαλλάσσεται. Επομένως, για μια τυχαία αποτίμηση οι μελλοντικές καταστάσεις των συμβολαίων είναι άγνωστες και φαίνεται λογικό να υποθέσουμε αρχικά, ότι τα αποθέματα θα είναι ανεξάρτητα του χώρου καταστάσεων για το σχεδιασμό μιας γενικής μεθόδου.

Τα αποθεματικά που είναι ανεξάρτητα του χώρου καταστάσεων έχουν εισαχθεί από τον Frasier(1978) για την κατάσταση τελευταίου επιζώντος. Η επιλογή στο αν ο χώρος καταστάσεων θα είναι ανεξάρτητος ή όχι εξαρτάται από το πότε θα αναγνωριστεί η ζημιά στον ισολογισμό της ασφαλιστικής επιχείρησης(αναγνώριση ή όχι της αλλαγής κατάστασης). Οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις με αποθεματικά ανεξαρτήτου χώρου καταστάσεων, διαχειρίζονται συμβόλαια σαν να μην είχαν καμία γνώση για οποιαδήποτε αιτία αποχώρησης για όσο διάστημα το συμβόλαιο δεν είχε αναγγελθεί. Γενικεύοντας τη σχέση (23) παίρνουμε:

$$L_t - V_t \cdot I(E_t) = \sum_{k=t}^{\infty} u^{k-t} \cdot \Lambda_k \qquad \textbf{(30)}$$

Παρατηρώντας ότι $Z_t = L_t, \quad t = 0,1, \dots$, από την παραπάνω σχέση παίρνουμε τον τύπο της δεσμευμένης διακύμανσης:

$$Var(z_t|E_t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \cdot Var(C_{t+\tau}|E_t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \cdot (\frac{E[C_{t+\tau}^2] \cdot P(E_t) - E[C_{t+\tau}]^2}{P(E_t)^2}),$$

όπου

$$E[C_{t+\tau}^2] = \sum_{k \in S} E(C_{t+\tau}^2 | X_{t+\tau} = k) \cdot P(X_{t+\tau} = k),$$

$$E[C_{t+\tau}] = \pi^S(t+\tau) = \sum_{k \in S} \pi_k^S(t+\tau),$$

(31)

$$E(C_{t+\tau}^2 | X_{t+\tau} = k) = [b_k(t+\tau) - \pi_k(t+\tau)]^2 +$$

$$+ \sum_{j \in S} u \cdot a_{kj}(t+\tau+1) \cdot [b_k(t+\tau) - \pi_{k\pi}(t+\tau) + u \cdot a_{kj}(t+\tau+1)] \cdot p_{kj}(t+\tau)$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του κεφαλαίου στόχου και του λόγου του κεφαλαίου φερεγγυότητας από ένα χαρτοφυλάκιο με GLIFE συμβάσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλες προσεγγίσεις για την τυχαία μεταβλητή της κατανομής της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών ενός χαρτοφυλακίου υπό την υπόθεση ότι όλα τα συμβόλαια είναι εν ισχύ.

Έστω τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με συμβόλαια GLIFE. Για να υπολογίσουμε το κεφάλαιο φερεγγυότητας και τον αντίστοιχο λόγο του κεφαλαίου φερεγγυότητας θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλίσεων ζωής το οποίο περιλαμβάνει n ασφαλισμένους που είναι ζωντανοί τη στιγμή t. Για κάθε συμβόλαιο i υπάρχουν τα εξής δεδομένα:

- Η διάρκεια του συμβολαίου t_i τη στιγμή t
- Ο χώρος καταστάσεων $S^{(i)}$.
- Η κατάσταση $(X_k^{(i)})_{k=0,1,\dots}$ του συμβολαίου κάθε στιγμή με τιμές στο $S^{(i)}$.
- Η συνθήκη για το συμβόλαιο επιβίωσης $E_{t_i}^{(i)} = \left\{X_{t_i}^{(i)} \neq \emptyset\right\}$ τη στιγμή t.
- Οι πιθανότητες μετάβασης με ένα βήμα

$p_{rs}^{(i)}(k) = P\left(X_{k+1}^{(i)} = s \middle| X_k^{(i)} = r\right),\ k = 0,1,\dots$

ορίζοντας ένα μοντέλο Μαρκοβιανών αλυσίδων για ένα συμβόλαιο.

Ένα διάνυσμα συνάρτησης πληρωμών

$a^{(i)}(k) = \left\{a_r^{(i)}(k), a_{rs}^{(i)}(k) \middle| r \neq s \in S^{(i)}\right\}$

από ένα συμβόλαιο τη στιγμή k=0,1,… με δυο είδη πληρωμών:

Τύπου 1: $a_r^{(i)}(k), r \in S^{(i)}$,είναι η πληρωμή εάν το συμβόλαιο τη στιγμή k είναι στη κατάσταση r.

Τύπου 2: $a_{rs}^{(i)}(k),\ r \neq s \in S^{(i)}$,είναι η πληρωμή εάν το συμβόλαιο τη στιγμή k-1 ήταν στην κατάσταση r και τη στιγμή k είναι στην κατάσταση s.

- Ο διαχωρισμός $a_r^{(i)}(k) = b_r^{(i)}(k) - \pi_r^{(i)}(k),\ r \in S^{(i)}$ σε μέρος παροχών και σε μέρος ασφαλίστρων .

Για το i συμβόλαιο υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της τυχαίας μεταβλητής των μελλοντικών ταμειακών ροών$\left\{C_k^{(i)}\right\}$, όπως ορίστηκε στην σχέση (12) της τυχαίας μεταβλητής της προοπτικής ζημιάς $L_{t_i}^{(i)}$ τη στιγμή t_i και καθαρού αποθεματικού ασφαλίστρων

$$V_{t_i}^{(i)} = E\left(L_{t_i}^{(i)} \middle| E_{t_i}^{(i)}\right)$$

όπως ορίστηκε στην σχέση (29).

Η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών ενός χαρτοφυλακίου προέρχεται αν αθροίσουμε την σχέση (28) για κάθε i, δηλαδή

$$Z_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} u^j C_{j+t_i}^{(i)} = \sum_{j=o}^{\infty} u^j \left(\sum_{i=1}^{n} C_{j+t_i}^{(i)}\right)\ ,\ \ t = 0,1,\dots \qquad \textbf{(32)}$$

Με τον ίδιο τρόπο αν προσθέσουμε τα καθαρά αποθεματικά ασφαλίστρων για όλα τα συμβόλαια παίρνουμε:

$$V_t^Z = \sum_{i=1}^{n} V_{t_i}^{Z,(i)} \qquad \textbf{(33)}$$

Έτσι ορίζουμε το κεφάλαιο φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου με βάση την VaR ως:

$$SC_t^{VaR} = VaR_{1-\varepsilon}\left(Z_t \middle| E_{t_i,}^{(i)}\ i = 1,2,\dots,n\right) - V_t^Z \qquad \textbf{(34)}$$

και το αντίστοιχο κεφάλαιο φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου με βάση την CVaR ως:

$$SC_t^{CVaR} = CVaR_{1-\varepsilon}\left(Z_t \middle| E_{t_i,}^{(i)} i = 1,2,\dots,n\right) - V_t^Z \tag{35}$$

Ο λόγος του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση την VaR ορίζεται ως:

$$SR_t^{VaR} = \frac{SC_t^{VaR}}{V_t^Z} \tag{36}$$

και ο αντίστοιχος λόγος του κεφαλαίου φερεγγυότητας του χαρτοφυλακίου με βάση την CVaR ως:

$$SR_t^{CVaR} = \frac{SC_t^{CVaR}}{V_t^Z} \tag{37}$$

Για να καθορίσουμε αυτές τις ποσότητες είναι απαραίτητο να καθορίσουμε την δεσμευμένη κατανομή Z_t ενός συμβολαίου επιβίωσης τη στιγμή t και υπό την υπόθεση ότι όλα τα παραμένων στη ζωή συμβόλαια είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Γενικεύοντας τους τύπους της σχέσης (31) για όλα τα συμβόλαια παίρνουμε:

$$E\left(Z_t \middle| E_{t_i}^{(i)}, i = 1,2,\dots,n\right) = V_t^Z$$

$$Var\left(Z_t \middle| E_{t_i}^{(i)}, i = 1,2,\dots,n\right) = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \sum_{i=1}^{n} Var[C_{\tau+t_i}^{(i)}] =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{E[\left(C_{\tau+t_i}^{(i)}\right)^{2]} \cdot P\left(E_{t_i}^{(i)}\right) - E[C_{\tau+t_i}^{(i)}]^2}{P(E_{t_i}^{(i)})^2}$$

(38)

$$E\left[C_{\tau+t_i}^{(i)}\right] = \pi^{S,(i)}(t_i + \tau) = \sum_{k \in S^{(i)}} \pi_k^{S,(i)}(t_i + \tau),$$

$$E[\left(C_{\tau+t_i}^{(i)}\right)]^2 = \sum_{k \in S^{(i)}} E\left((C_{\tau+t_i}^{(i)})^2 \middle| X_{\tau+t_i}^{(i)} = k\right) \cdot P(X_{\tau+t_i}^{(i)} = k)$$

Βασισμένοι στην υπό συνθήκη μέση τιμή και διασπορά προσεγγίζουμε την συνάρτηση κατανομής της Z_t με μια Γάμμα κατανομή. Αυτή η προσέγγιση γίνεται με την δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής

$$F_t(x) = Pr\left(Z_t \leq x \middle| E_{t_i}^{(i)}, i = 1,2,\dots,n\right).$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της Γάμμα είναι

$$F_t(x) = G(\beta_t x; a_t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_t)} \cdot \int_0^{x\cdot\beta_t} t^{a_t-1} e^{-t}\, dt,$$

$$\alpha_t = \frac{1}{k_t^2}, \qquad \beta_t = \frac{1}{k_t^2 \mu_t} \tag{39}$$

Όπου μ_t, k_t είναι η υπό συνθήκη μέση τιμή και συντελεστής μεταβλητότητας της τυχαίας μεταβλητής που παρέχονται από τις σχέσεις (37),(38). Έτσι ο λόγος του κεφαλαίου φερεγγυότητας παίρνει την μορφή:

$$SR_t^{CaR} = z_{1-\varepsilon}(k_t^{-2}) \cdot k_t^2 - 1 \ ,$$

$$SR_t^{CVaR} = z_{1-\varepsilon}(k_t^{-2}) \cdot k_t^2 \cdot \frac{g(z_{1-\varepsilon}(k_t^{-2}); k_t^{-2})}{\varepsilon} \tag{40}$$

όπου $z_{1-\varepsilon}(\alpha) = G^{-1}(1-\varepsilon; \alpha)$, δηλώνει το 1-ε ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης Γάμμα κατανομής $G(x,a)$ και $g(x,a)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της.

Για ένα χαρτοφυλάκιο με συνεχώς αυξανόμενο μέγεθος οι συντελεστές μεταβλητότητας τείνουν στο μηδέν. Τότε η κατανομή Γάμμα συγκλίνει στην κανονική κατανομή και ο λόγος του κεφαλαίου φερεγγυότητας τείνει στο μηδέν. Αυτό ισχύει στις παρακάτω περιπτώσεις. Αν τα συμβόλαια είναι ανεξάρτητα και όμοια κατανεμημένα και αν το μέγεθος του χαρτοφυλακίου είναι αρκετά μεγάλο, τότε ο λόγος των παρατηρούμενων καταστάσεων μετάβασης του μέγεθος του χαρτοφυλακίου είναι κοντά στις δεδομένες τιμές μετάβασης με μεγάλη πιθανότητα. Αυτή η υπόθεση είναι γνωστή ως διαδικασία κινδύνου (process risk), η οποία περιγράφει την τυχαία μεταβλητή των διακυμάνσεων σε ένα βιομετρικό πίνακά πιθανοτήτων μετάβασης. Διαφορετικά, εάν ο λόγος των παρατηρούμενων καταστάσεων μετάβασης του μέγεθος του χαρτοφυλακίου δεν είναι κοντά στα δεδομένα ποσοστά μετάβασης, εκτός από ένα μεγάλο μέγεθος χαρτοφυλακίου, τότε ο συστηματικός κίνδυνος παραμένει (Olivieri and Pitacco,2009). Σε αυτές τις περιπτώσεις τα ποσοστά μετάβασης είναι αβέβαια και τυχαία. Τότε απαιτείται η χρήση ενός στοχαστικού μοντέλου το οποίο περιλαμβάνει και την διαδικασία κινδύνου και τον συστηματικό κίνδυνο.

4.4 Σύγκριση της τυπικής προσέγγισης με διάφορες στοχαστικές προσεγγίσεις

Γνωρίζουμε ότι στην τελευταία μελέτη του πλαισίου Φερεγγυότητα II, QIS 5, ο βιομετρικός κίνδυνος λαμβάνει υπόψη την αβεβαιότητα στις τάσεις και τις παραμέτρους, δηλαδή τον συστηματικό κίνδυνο και το κίνδυνο παραμέτρων, αλλά δεν λαμβάνει υπόψη τις τυχαίες διακυμάνσεις στη συχνότητα και σοβαρότητα του κινδύνου, δηλαδή την διαδικασία του κινδύνου. Για πλήρη κάλυψη του βιομετρικού κινδύνου πρέπει είτε να τροποποιήσουμε έναν βιομετρικό πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων, είτε να χρησιμοποιήσουμε ένα βιομετρικό στοχαστικό μοντέλο με τυχαίες μεταβλητές τα ποσά του βιομετρικού πίνακα μετάβασης.

Σύμφωνα με την τυποποιημένη προσέγγιση του πλαισίου Φερεγγυότητα II για να υπολογίσουμε τα καθαρά αποθεματικά ασφαλίστρων χρησιμοποιούμε την βέλτιστη εκτίμηση από έναν βιομετρικό πίνακα ζωής. Σε ένα μοντέλο Μαρκοβιανών αλυσίδων ο πίνακας ζωής αντικαθίσταται από ένα πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων με ένα βήμα $p_{ij}(k) = P(X_{k+1} = j|X_k = i)\,, k = 0,1,\ldots$

Δοθέντος ότι ένα απλό συμβόλαιο ζωής έχει τη στιγμή της αποτίμησης t, καθαρό αποθεματικό ασφαλίστρων V_t^Z, δηλώνουμε με $V_t^{Z,\Delta}$ την τιμή των αποθεματικών που υπόκεινται σε ένα βιομετρικό shock Δ. Το ενός έτους απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) για αυτό το συμβόλαιο ορίζεται ως:

$$SCR_t = V_t^{Z,\Delta} - V_t^Z \tag{41}$$

Με τον ίδιο τρόπο το κεφάλαιο στόχος του Solvency II (όπου S2 ο δείκτης για την τυποποιημένη προσέγγιση) είναι:

$$TC_t^{S2} = SCR_t + RM_t \tag{42}$$

$$RM_t = i_{coc} \cdot \sum_{k=1}^{T-t} u_f^k \cdot SCR_{t+k}\ \ , i_{coc} = 6\% \tag{43}$$

όπου T δηλώνει τον χρονικό ορίζοντα, ο οποίος εξαρτάται από το συμβόλαιο ενώ u_f είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου (risk free rate). Για σύγκριση της τυποποιημένης προσέγγισης με τα διάφορα εσωτερικά μοντέλα που αναπτύσσονται ορίζουμε το λόγο του κεφαλαίου φερεγγυότητας της τυποποιημένης προσέγγισης του Solvency II τη στιγμή t ως:

$$SR_t^{S2} = \frac{SCR_t}{V_t^Z} \tag{44}$$

Χρησιμοποιώντας ένα πίνακα μετάβασης από shock $\Delta = (\Delta_{ij})$ παίρνουμε μια σχέση για ένα μοντέλο Μαρκοβιανών αλυσίδων. Θεωρούμε τον τροποποιημένο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$p_{ij}^{\Delta_{ij}}(k) \tag{45}$$

ο οποίος συνδέεται με το $p_{ij}^{\Delta}(k)$ για μια μόνιμα τροποποιημένη ποσότητα Δ_{ij}, για όλα τα συμβόλαια και έτη k=0,1,2,….

Με τις τρέχουσες προδιαγραφές έχουμε:

$\Delta_{AD} = 0.15$, δηλαδή μόνιμη αύξηση 15% στα ποσοστά θνησιμότητας για κάθε ηλικία για άλμα από την κατάσταση ενεργός (active) “A” στην κατάσταση νεκρός (dead) “D”, για τον κίνδυνο θνησιμότητας(mortality risk), επιπλέον

$\Delta_{AD} = 0.20$,δηλαδή μόνιμη μείωση 20% στα ποσοστά θνησιμότητας για κάθε ηλικία για άλμα από την κατάσταση ενεργός (active) “A” στην κατάσταση νεκρός (dead) “D”, για τον κίνδυνο μακροζωίας(longevity risk), αντίστοιχα,

$\Delta_{AJ} = 0.35$, δηλαδή αύξηση 35% στα ποσοστά αναπηρίας για τον επόμενο χρόνο και $\Delta_{\mathrm{AJ}} = 0.25$, δηλαδή μόνιμη αύξηση 25% στα ποσοστά αναπηρίας για κάθε έτος μετά από το άλμα από την κατάσταση “A”στην κατάσταση αναπηρίας”J”,για τον κίνδυνο αναπηρίας(disability risk).

Για να υπολογίσουμε το αποθεματικό του χαρτοφυλακίου της σχέσης (33) και το αντίστοιχο τροποποιημένο αποθεματικό $V_t^{Z,(i)}$κάτω από μια μήτρα από σοκ $\Delta = (\Delta_{ij})$ θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (28) και τον τύπο της οπισθοδρομικής σχέσης (18). Τότε έχουμε:

$$V_t^Z = \sum_{i=1}^{n} V_{t_i}^{Z,(i)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in S} V_{t_i}^{k,(i)} \cdot P\left(X_{t_i}^{(i)} = k \middle| E_{t_i}^{(i)}\right)$$

$$V_{t_i}^{k,(i)} = \sum_{j \in S} p_{kj}(t_i) \cdot \left\{u \cdot V_{1+t_i}^{j,(i)} + u \cdot a_{kj}^{(i)}(t_i + 1) + b_k^{(i)}(t_i)\right\} - \pi_k^{(i)}(t_i), \tag{46}$$

$$V_t^{Z,\Delta} = \sum_{i=1}^{n} V_{t_i}^{Z,(i),\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in S} V_{t_i}^{k,(i),\Delta} \cdot P\left(X_{t_i}^{(i),\Delta} = k \middle| E_{t_i}^{(i),\Delta}\right),$$

$$V_{t_i}^{k,(i),\Delta} = \sum_{j \in S} p_{kj}^{\Delta_{kj}}(t_i) \cdot \left\{u \cdot V_{1+t_i}^{j,(i),\Delta} + u \cdot a_{kj}^{(i)}(t_i + 1) + b_k^{(i)}(t_i)\right\} - \pi_k^{(i),\Delta}(t_i) \tag{47}$$

Συνεπώς θα είναι:

$$SCR_t = V_t^{Z,\Delta} - V_t^Z$$
$$TC_t^{S2} = SCR_t - RM_t \tag{48}$$

$$RM_t = i_{CoC} \cdot \sum_{k=1}^{max\{\omega-(x_i+t_i)\}} u_f^k \cdot SCR_{t+k},$$

$$SR_t^{S2} = \frac{SCR_t}{V_t^Z}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ορίσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής της παρούσας αξίας των τροποποιημένων μελλοντικών ταμειακών ροών ενός χαρτοφυλακίου τη στιγμή t ως:

$$E\left(Z_t^{\Delta} \middle| E_{t_i}^{(i),\Delta}, i = 1,2,\ldots,n\right) = V_t^{Z,\Delta}$$

(49)

$$Var\left(Z_t^{\Delta} \middle| E_{t_i}^{(i),\Delta}, i = 1,2,\ldots,n\right) = \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var[C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta}]$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} u^{2\tau} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[\left(C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta}\right)^2\right] \cdot P\left(E_{t_i}^{(i),\Delta}\right) - E[C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta}]^2}{P(E_{t_i}^{(i),\Delta})^2}$$

$$E\left[C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta}\right] = \pi^{S,(i)}(t_i+\tau) = \sum_{k\in S^{(i)}} \pi_k^{S,(i)}(t_i+\tau),$$

$$E\left[\left(C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta}\right)^2\right] = \sum_{k\in S^{(i)}} E\left((C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta})^2 \middle| X_{\tau+t_i}^{(i),\Delta} = k\right) \cdot P\left(X_{\tau+t_i}^{(i),\Delta} = k\right),$$

(50)

$$E\left(\left(C_{\tau+t_i}^{(i),\Delta}\right)^2 \middle| X_{\tau+t_i}^{(i),\Delta} = k\right) = \left[b_k^{(i)}(t_i+\tau) - \pi_k^{(i),\Delta}(t_i+\tau)\right]^2 +$$

$$\sum_{j\in S^{(i)}} u \cdot a_{kj}^{(i)}(t_i+\tau+1) \times [b_k^{(i)}(t_i+\tau) - \pi_k^{(i),\Delta}(t_i+\tau) + u \cdot a_{kj}^{(i)}(t_i+\tau+1)]$$

$$\cdot p_{kj}^{(i),\Delta_{kj}}(t_i+\tau)$$

Η κατανομή της δεσμευμένης κατανομής Z_τ^{Δ} ενός συμβολαίου επιβίωσης τη στιγμή t προσεγγίζεται από μια Γάμμα κατανομή που ορίζεται ως:

$F_t^{\Delta}(x) = G(\beta_t^{\Delta} x; a_t^{\Delta})$, όπου $a_t^{\Delta} = (k_t^{\Delta})^{-2}$, $\beta_t^{\Delta} = (k_t^{\Delta})^{-2}/\mu_t^{\Delta}$,όπου η δεσμευμένη μέση τιμή και συντελεστής διασποράς $\mu_t^{\Delta}, k_t^{\Delta}$ της κατανομής Z_t^{Δ} προέρχονται από τις σχέσεις (49),(50).Έτσι τα κεφάλαια φερεγγυότητας ενός χαρτοφυλακίου με βάση την VaR και την CVaR κάτω από ένα τροποποιημένο βιομετρικό πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} SC_t^{\Delta,VaR} &= VaR_{1-\varepsilon}\left(Z_t^{\Delta}\middle| E_{t_i}^{(i),\Delta}, i = 1,2,\dots,n\right) - V_t^{Z,\Delta} \\ &= SCR_t + \left(z_{1-\varepsilon}\left([k_t^{\Delta}]^{-2}\right) \cdot [k_t^{\Delta}]^{-2} - 1\right) \cdot V_t^{Z,\Delta}, \end{aligned} \qquad \textbf{(51)}$$

$$\begin{aligned} SC_t^{\Delta,CVaR} &= CVaR_{1-\varepsilon}\left(Z_t^{\Delta}\middle| E_{t_i}^{(i),\Delta}, i = 1,2,\dots,n\right) - V_t^{Z,\Delta} = \\ &= SCR_t + z_{1-\varepsilon}\left([k_t^{\Delta}]^{-2}\right) \cdot [k_t^{\Delta}]^{-2} \cdot \frac{g\left(z_{1-\varepsilon}\left([k_t^{\Delta}]^{-2}\right); [k_t^{\Delta}]^{-2}\right)}{\varepsilon} \cdot V_t^{Z,\Delta} \end{aligned} \qquad \textbf{(52)}$$

Όταν οι συντελεστές μεταβλητότητας είναι μικροί τότε η Γάμμα κατανομή συγκλίνει στην κανονική κατανομή και τα κεφάλαια φερεγγυότητας συγκλίνουν στα αντίστοιχα της κανονικής κατανομής, δηλαδή,

$$\begin{aligned} SC_t^{\Delta,VaR} &= SCR_t + \Phi^{-1}(1-\varepsilon) \cdot k_t^{\Delta} V_t^{Z,\Delta} \\ SC_t^{\Delta,CVaR} &= SCR_t + \frac{\varphi[\Phi^{-1}(1-\varepsilon)]}{\varepsilon} k_t^{\Delta} V_t^{Z,\Delta} \end{aligned} \qquad \textbf{(53)}$$

Ασυμπτωτικά, οι αναλογίες των κεφαλαίων φερεγγυότητας τείνουν στην ελάχιστη τιμή

$$\lim_{k_t^{\Delta} \to 0} SR_t^{\Delta,VaR} = \lim_{k_t^{\Delta} \to 0} SR_t^{\Delta,CVaR} = \frac{SCR_t}{V_t^Z} \qquad \textbf{(54)}$$

Όταν οι συντελεστές μεταβλητότητας μηδενιστούν οι αναλογίες του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση την VaR και την CVaR συγκλίνουν στον λόγο του κεφαλαίου φερεγγυότητας της τυποποιημένης προσέγγισης του πλαισίου Φερεγγυότητα ΙΙ. Τότε η διαδικασία κινδύνου έχει διαφοροποιηθεί και υπάρχει μόνο ο συστηματικός κίνδυνος.

Έστω τώρα ότι οι καταστάσεις i,j από έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης είναι σταθερές. Τότε εάν ο λόγος των παρατηρούμενων μεταβάσεων του μεγέθους του χαρτοφυλακίου δεν είναι κοντά στα δοσμένα ποσά μετάβασης, ακόμα και για μεγάλα μεγέθη χαρτοφυλακίων, συστηματικός κίνδυνος παραμένει. Σε αυτή την περίπτωση τα ποσά μετάβασης θεωρούνται αβέβαια και τυχαία και απαιτείται η μοντελοποίηση από ένα Μπειζυανό μοντέλο Poisson-Gamma στο οποίο ο αριθμός των μεταβάσεων ακολουθεί την κατανομή Poisson και την τυχαία μεταβλητή των πιθανοτήτων μετάβασης να ακολουθεί την κατανομή Gamma. Αυτό έχει σαν συνέπεια η αδέσμευτη κατανομή του αριθμού των μεταβάσεων να ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή. Θεωρούμε ένα μοντέλο Poisson-Gamma το οποίο εξαρτάται από τον χρόνο (Olivieri and Pitacco,2009) και ανανεώνει τις εμπειρικές παραμέτρους. Δοθέντος ενός σταθερού χρονικού σημείου t και ενός πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων $p_{ij}(k), k = 0,1,2, \ldots$για τις δεδομένες σταθερές καταστάσεις που βασίζεται σε μια αρχική ομάδα μεγέθους l_t τη στιγμή t, ορίζουμε με $D_{t+\tau-1}$ την τυχαία μεταβλητή του αριθμού των μεταβάσεων από την αμάδα την χρονική περίοδο (t+τ-1 ,t+τ], τ=1,2,… .Για την πρώτη περίοδο, επειδή δεν έχουμε διαθέσιμη πληροφορία υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των μεταβάσεων ακολουθεί την κατανομή Poisson, δηλαδή,

$$D_t \sim Po(l_t Q_t)\,, \qquad Q_t \sim Gamma\left(a, \frac{\beta}{p_{ij}(t)}\right) \tag{55}$$

Τότε η αδέσμευτη κατανομή του αριθμού των μεταβάσεων την πρώτη χρονική περίοδο ακολουθεί μια αρνητική διωνυμική κατανομή τέτοια ώστε

$$D_t \sim NB\left(a, \frac{\theta_1}{1+\theta_1}\right), \quad \theta_1 = \frac{\beta}{p_{ij}(t)} \tag{56}$$

Από την άλλη για τον αναμενόμενο αριθμό μεταβάσεων $l_t p_{ij}(t)$ που παράγεται από έναν βιομετρικό πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων ισχύει

$$E[D_t] = \frac{\alpha}{\beta} \cdot l_t p_{ij}(t) \tag{57}$$

Για να μοντελοποιήσουμε την συστηματική απόκλιση από την αναμενόμενη υποθέτουμε ότι το πηλίκο α/β είναι διαφορετικό από τη μονάδα. Εάν είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα παράγεται για τους κινδύνους θνησιμότητας και αναπηρίας, ενώ αν είναι μικρότερο της μονάδος παράγεται για τον κίνδυνο μακροζωίας.

Έστω ότι την στιγμή t+1 είναι διαθέσιμος ο αριθμός των μεταβάσεων d_t που παρατηρούνται από μια ομάδα κατά την διάρκεια της πρώτης περιόδου και έστω

$l_{t+1} = l_t - d_t$ είναι το μέγεθος της ομάδας τη στιγμή t+1. Με διαθέσιμη την πληροφορία ότι $D_t = d_t$ μια κατάλληλη κατανομή για την τυχαία μεταβλητή της πιθανότητας μετάβασης Q_t είναι η κατανομή Γάμμα, δηλαδή,

$$Q_t \,\big|\, d_t \sim Gamma(\alpha + d_t, \frac{\beta + l_t p_{ij}(t)}{p_{ij}(t)}) \quad \textbf{(58)}$$

Έτσι οι παράμετροι του συστηματικού κινδύνου του μοντέλου ανανεώνονται ως εξής:

$$(\alpha, \beta) \to (\alpha + d_t, \beta + l_t p_{ij}(t)) \quad \textbf{(59)}$$

Όμοια για την δεύτερη περίοδο (t+1 ,t+2] υποθέτουμε ότι

$$D_{t+1|}\, d_t \sim Po(l_{t+1} Q_{t+1}), \quad Q_{t+1} \,\big|\, d_t \sim Gamma(\alpha + d_t. \frac{\beta + l_t p_{ij}(t)}{p_{ij}(t+1)}) \quad \textbf{(60)}$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται μια προγνωστική αρνητική κατανομή τύπου

$$D_{t+1} \,\big|\, d_t \sim NB\left(\alpha + d_t, \frac{\theta_2}{1 + \theta_2}\right), \qquad \theta_2 = \frac{\beta + l_t p_{ij}(t)}{l_{t+1} p_{ij}(t)} \quad \textbf{(61)}$$

Επαναλαμβάνοντας τη παραπάνω διαδικασία του Bayesian μοντέλου για τη στιγμή $t + \tau - 1, \tau \geq 2$, με δεδομένους τους ετήσιους αριθμούς μεταβάσεων $d_t, d_{t+1}, \dots, d_{t+\tau-2,}$ το μέγεθος της ομάδας την επόμενη χρονική περίοδο (t+τ-1 , t+τ] θα είναι $l_{t+\tau-1} = l_{t+k-2} - d_{t+k-2}$, $k = 2,3, \dots, \tau$ και η αρνητική διωνυμική κατανομή του αριθμού των μεταβάσεων θα δίνεται από

$$D_{t+\tau-1} d_t, d_{t+1}, \dots, d_{t+\tau-2} \sim NB(\alpha + \sum_{k=0}^{\tau-2} d_{t+k}, \frac{\theta_\tau}{1 + \theta_\tau}),$$

$$\theta_\tau = \frac{\beta + \sum_{k=1}^{\tau-1} l_{t+k-1} p_{ij}(t + k - 1)}{l_{t+\tau-1} p_{ij}(t + \tau - 1)} \quad \textbf{(62)}$$

Ο δεσμευμένος αναμενόμενος αριθμός των μεταβάσεων είναι:

$$E(D_{t+\tau-1} | d_t, d_{t+1}, \dots, d_{t+\tau-2}) =$$

$$= \frac{\alpha + \sum_{k=1}^{\tau-1} d_{t+k-1}}{\beta + \sum_{k=1}^{\tau-1} l_{t+k-1} p_{ij}(t + k - 1)} l_{t+\tau-1} p_{ij}(t + \tau - 1) \quad \textbf{(63)}$$

$$\leq, \geq E[D_{t+\tau-1}] = l_t \cdot p_{ij}(t) p_{ij}(t + \tau - 1)$$

Αν η βιομετρική εμπειρία είναι συνεπής με ότι αναμένεται, το πηλίκο και των δυο αναμενόμενων τιμών παραμένει σταθερό κάθε στιγμή. Διαφορετικά, εάν η εμπειρία είναι καλύτερη από ότι αναμένεται, τότε το πηλίκο θα αυξάνει με το χρόνο, ενώ αν είναι χειρότερη τότε το πηλίκο θα μειώνεται με το χρόνο. Ειδικότερα, δοθέντος σταθερού χρόνου t θεωρούμε για κάθε ζευγάρι των σταθερών καταστάσεων μια μετάβαση πιθανοτήτων Poisson-Gamma από τις σχέσεις (57) και (63) που ορίζονται ως:

$$p_{ij}^{PG}(t) = \tfrac{\alpha}{\beta} \cdot p_{ij}(t) \ ,$$

$$p_{ij}^{PG}(t+\tau) = \frac{\alpha + \sum_{k=1}^{r} d_{t+k-1}}{\beta + \sum_{k=1}^{r} l_{t+k-1} p_{ij}(t+k-1)} \cdot p_{ij}(t+\tau), \quad \tau = 1,2,\ldots, \tag{64}$$

$${}_{k}p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{PG}}(t+\tau) = {}_{k-1}p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{PG}}(t+\tau)(1 - p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{PG}}(t+\tau+k-1))$$

$${}_{0}p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{PG}}(0) = 1, \quad \tau = 0,1,\ldots$$

Αντικαθιστώντας παντού στους τύπους (49)-(52) τις εκφράσεις Δ_{ij} με PG για τις σχετικές πιθανότητες μετάβασης και χρησιμοποιώντας την σχέση (64) παίρνουμε τους τύπους του κεφαλαίου φερεγγυότητας με βάση τις και για ένα χαρτοφυλάκιο κάτω από το μοντέλο Poisson-Gamma των βιομετρικών μεταβάσεων, όμοια με τις σχέσεις (51),(52). Για να είμαστε συνεπής με την τυποποιημένη προσέγγιση του πλαισίου Φερεγγυότητα ΙΙ, υποθέτουμε ότι οι μελλοντικές μεταβάσεις αποκλίνουν συστηματικά από τον βιομετρικό πίνακα ζωής σύμφωνα με το shock Δ= Δ_{ij} για τις δεδομένες σταθερές καταστάσεις, έτσι ώστε

$$\begin{gathered} l_{s+t+k} = l_{s+t+k-1} - d_{s+t+k-1}, \\ d_{s+t+k-1} = (1-\Delta) \cdot l_{s+t+k-1} q_{s+t+k-1}, \\ \kappa = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{65}$$

Αυτή η επιλογή είναι συνεπής με τον αναμενόμενο αριθμό μεταβάσεων της πρώτης περιόδου $E[D_{s+t}] = d_{s+t}$,αν στη σχέση (57) θέσουμε α=(1-Δ)β. Αν υποθέσουμε και β=100, τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας της τυχαίας μεταβλητής του αριθμού των μεταβάσεων D_{s+t} ισούται με 10%. Η σχέση (65) με α=(1-Δ)β συμπίπτει με τις τροποποιημένες καταχωρήσεις στον βιομετρικό πίνακα ζωής. Τότε παρατηρούμε ότι το στοχαστικό μοντέλο Poisson-Gamma παρέχει τα ίδια αποτελέσματα με τον τροποποιημένο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Όμως το στοχαστικό μοντέλο είναι πιο αποτελεσματικό και ευέλικτο γιατί επιτρέπει την χρήση του παρατηρούμενου αριθμού των μεταβάσεων όσο ο χρόνος μεσολαβεί.

4.5 Ασφαλίσεις προικοδότησης με απαλλαγή των ασφαλίστρων λόγω ανικανότητας

Έστω τώρα ένα Μαρκοβιανό μοντέλο για τους κινδύνους θνησιμότητας και αναπηρίας. Το μοντέλο αυτό έχει τρις καταστάσεις, ενεργός(active), ανάπηρος(disabled), νεκρός(dead). Ο ασφαλισμένος τη χρονική στιγμή t>0 είναι ηλικίας x. Οι πιθανές αλλαγές καταστάσεων συμβαίνουν με τις ακόλουθες πιθανότητες

i_{x+t} : η ενός έτους πιθανότητα ο ενεργός να γίνει ανάπηρος τη στιγμή t

q_{x+t}^{a} : η ενός έτους πιθανότητα ο ενεργός να πεθάνει τη στιγμή t

q_{x+t}^{i} : η ενός έτους πιθανότητα ένας ανάπηρος να πεθάνει τη στιγμή t

r_{x+t} : η ενός έτους πιθανότητα ένας ανάπηρος να επανακάμψει την στιγμή t

Το σύνολο του χώρου καταστάσεων είναι $S = \{1,2,3\} = \{a, i, d\}$, όπου

$\alpha = \varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma\acute{o}\varsigma,\ i = \alpha\nu\acute{\alpha}\pi\eta\rho o\varsigma,\ d = \nu\varepsilon\kappa\rho\acute{o}\varsigma$. Οι ενός έτους πιθανότητες μετάβασης δίνονται από την μήτρα

$$p_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 - i_{x+k} - q_{x+k}^{a} & i_{x+k} & q_{x+k}^{a} \\ r_{x+k} & 1 - r_{x+k} - q_{x+k}^{i} & q_{x+k}^{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$i, j \in \{1,2,3\}, \qquad k = 0,1,2, \dots$$

Για ένα συμβόλαιο προικοδότησης n-ετών με απαλλαγή των ασφαλίστρων λόγω αναπηρίας χωρίς ανάκαμψη από την αναπηρία ισχύει ότι $r_{x+k} = 0,\ k = 1,2, \dots, n$

Αυτή η παραδοχή συνήθως γίνεται διότι ο αριθμός των αναπήρων που επανακάμπτουν είναι πολύ μικρός. Το Swiss Federal Insurance Pension παρέχει ένα τέτοιο μοντέλο και χρησιμοποιεί έναν βιομετρικό πίνακα ζωής γνωστό ως “EVK Table”(Koller, 2008,Chuard,2000).

Το καθαρό ασφάλιστρο μιας ασφάλισης προικοδότησης n-ετών με απαλλαγή των ασφαλίστρων λόγω αναπηρίας και πληρωμή 1 νομισματική μονάδα στον ασφαλισμένο ηλικίας x μετά από n-έτη, εάν είναι ζωντανός συμβολίζεται με $P^{a} = P^{a}(x : n)$, όπου ο δείκτης πάνω δεξιά δηλώνει ότι το ασφάλιστρο πληρώνεται αν το συμβόλαιο παραμένει στην κατάσταση ενεργός. οι συναρτήσεις πληρωμής (payment functions) ενός συμβολαίου χωρίζονται σε δυο τύπους:

Τύπου 1:

$$a_1(k) = \begin{cases} -P^a, k = 0,1,2, \dots, n-1 \\ 1, \qquad\qquad k = n \end{cases}, a_2(k) = \begin{cases} o, \ k = 1,2, \dots, n-1 \\ 1, \qquad\qquad k = n \end{cases}, a_3(k) = 0$$

Τύπου 2:

$$a_{12}(k) = \begin{cases} 0, \ k = 1, \dots, n-1 \\ 1, \qquad\qquad k = n \end{cases}, \quad a_{13}(k) = 1, k = 1,2, \dots, n, \quad a_{21}(k) = 0 .$$

Αν ω είναι η μέγιστη δυνατή ηλικία που μπορεί να φτάσει ένας ασφαλισμένος ,τότε οι πιθανότητες επιβίωσης στην κατάσταση ενεργός (active survival probabilities) ενός ασφαλισμένου ηλικίας x να παραμείνει στη ζωή στην ηλικία x+k (χωρίς να γίνει ανάπηρος) ορίζονται ως:

$$_kp_x^a = {}_{k-1}p_x^a(1 - q_{x+k-1}^a), \qquad {}_0p_x^a = 1, k = 1, \dots, \omega - x \qquad \textbf{(67)}$$

Οι πιθανότητες επιβίωσης στην κατάσταση αναπηρίας (disabled survival probabilities) ενός αναπήρου ηλικίας x να παραμείνει ανάπηρος στην ηλικία x+k χωρίς να επανακάμψει ορίζονται ως:

$$_kp_x^i = {}_{k-1}p_x^i\left(1 - q_{x+k-1}^i\right), \qquad {}_0p_x^i = 1, \qquad k = 1, \dots, \omega - x \qquad \textbf{(68)}$$

Αυτές οι πιθανότητες συνδέονται με τις πρόσκαιρες ράντες ζωής n-ετών ενός ασφαλισμένου, εάν είναι ενεργός ή ανάπηρος, των οποίων οι αναλογιστικές παρούσες αξίες ορίζονται ως:

$a^a(x : n) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k {}_kp_x^a$, για ράντα ζωής n-ετών ενεργού **(69)**

$a^i(x : n) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k {}_kp_x^i$, για ράντα ζωής n-ετών αναπήρου **(70)**

Η αναλογιστική παρούσα αξία (Actuarial Present Value, APV) των μελλοντικών παροχών μιας ασφάλισης προικοδότησης n-ετών με απαλλαγή των ασφαλίστρων και πληρωμή 1 νομισματική μονάδα στον ασφαλισμένο ηλικίας χ μετά από n-έτη, εάν είναι ζωντανός δηλώνεται ως $A^a(x : n)$ και αν είναι ανάπηρος ως $A^i(x : n)$. Μια οπισθοδρομική σχέση για τα αναλογιστικά αποθεματικά που εξαρτώνται από τον χώρο καταστάσεων είναι η εξής:

$$V_k^1 = u(q_{x+k}^a + p_{x+k}^a V_{k+1}^1 + i_{x+k} V_{k+1}^2) - P^a, \qquad \textbf{(71)}$$

$$k = 0,1,\ldots,n-1, \;\; V_n^1 = 1$$
$$V_k^2 = u\left(q_{x+k}^i + p_{x+k}^i V_{k+1}^2\right), \qquad k = 2,3,\ldots,n-1, \qquad V_n^2 = 1$$
$$V_k^3 = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

Έχουμε $V_0^2 = 0$ διότι τη στιγμή t=0 ασφαλισμένος είναι στην κατάσταση ενεργός και $V_1^2 = 0$ διότι ο ασφαλισμένος μπορεί να μείνει ανάπηρος μετά από τουλάχιστον ένα έτος. Επίσης η τρίτη σχέση ισχύει γιατί αν ο ασφαλισμένος είναι νεκρός δεν θα είχαμε για αυτόν αναλογιστικά αποθεματικά. Γνωρίζουμε ότι τα αναλογιστικά αποθεματικά είναι η διαφορά μεταξύ της αναλογιστικής παρούσας αξίας των μελλοντικών παροχών και της αναλογιστικής παρούσας αξίας των μελλοντικών ασφαλίστρων. Έτσι έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_k^1 = A^a(x+k:n-k) - P^a(x:n)a^a(x+k:n-k),$$
$$k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{72}$$
$$V_k^2 = A^i(x+k:n-k), \quad k = 2,3,\ldots,n-1$$

Όμως οι αναλογιστικές παρούσες αξίες των ραντών ζωής της κατάστασης ενεργός ικανοποιούν τις εκφράσεις

$$a^a(x+k:n-k) = 1 + \mathrm{u}p_{x+k}^a a^a(x+k+1:n-k-1),$$
$$k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{73}$$

Βάζοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις στην σχέση (71) παίρνουμε μια οπισθοδρομική σχέση για τις αναλογιστικές παρούσες αξίες, δηλαδή έχουμε τα εξής:

$$A^a(x+n+k:k) = u(q_{x+n-k}^a + p_{x+n-k}^a A^a(x+n-k+1:k-1) +$$
$$+ i_{x+n-k} A^i(x+n-k+1:k-1)), \quad k = 2,3,\ldots,n \tag{74}$$

$$A^i(x+n+k:k) = u\left(q_{x+n-k}^i + p_{x+n-k}^i A^i(x+n-k+1:k-1)\right),$$
$$k = 2,3,\ldots,n-1$$

με αρχικές τιμές $A^a(x+n-1:1) = A^i(x+n-1:1) = u$

φαίνεται ότι η δεύτερη σχέση της (74) ικανοποιείται από την εξίσωση

$$A^i(x+n+k:k) = 1 - da^i(x+n-k:k), k = 1,2,\ldots,n-1 \tag{75}$$

Η τελευταία θυμίζει τον τύπο του Gerber(1986) για μια ασφάλιση προικοδότησης με την αναπηρία ως μοναδική αιτία εξόδου και με τη βοήθεια της σχέσης (70) παίρνουμε

$$A^i(x+n+k:k)=\sum_{j=0}^{k-1} u^j\,{}_{j-1}p^i_{x+n-k}q^i_{x+n-k+j-1}+u^k\,{}_{k-1}p^i_{x+n-k}, \qquad k=2,3,\dots,n-1 \quad \textbf{(76)}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και συνεχίζοντας με τη μέθοδο της επαγωγής προς τα πίσω παίρνουμε τον παρακάτω τύπο για τον υπολογισμό της αναλογιστικής παρούσας αξίας των μελλοντικών παροχών για έναν ασφαλισμένο που είναι στην κατάσταση ενεργός

$$A^a(x:n)=\sum_{k=1}^{n-1} u^k\,{}_{k-1}p^a_x q^a_{x+k-1}+u^n\,{}_{n-2}p^a_x(1-q^a_{x+n-2})+$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} u^k\cdot\left(\sum_{j=0}^{k-2} {}_jp^a_x i_{x+j}\,{}_{k-2-j}p^i_{x+j+1}\right)+u^n\sum_{j=0}^{n-3} {}_jp^a_x i_{x+j}\,{}_{n-2-j}p^i_{x+j+1} \quad \textbf{(77)}$$

Το καθαρό ασφάλιστρο καθορίζεται από την αρχή της αναλογιστικής ισοδυναμίας, η οποία δηλώνει ότι $V_0^1=0$. Από τη σχέση (72) και χρησιμοποιώντας τα τελευταία αποτελέσματα παίρνουμε ότι

$$P^a(x:\ n)=\frac{A^a(x:\ n)}{a^a(x:\ n)} \quad \textbf{(78)}$$

Στη συνέχεια θα καθορίσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της προοπτικής ασφαλιστικής ζημιάς τη στιγμή t ως

$$Z_t=\sum_{k=0}^{n-1-t} u^k C_{t+k}\,,\ t=0,1,\dots,n-1.$$

Έστω επίσης το καθαρό αποθεματικό ασφαλίστρων το οποίο συμπίπτει με τη δεσμευμένη μέση τιμή

$$V_t^Z=E(Z_t|E_t)=V_t^1\cdot P(X_t=a|E_t)+V_t^2P(X_t=i|E_t) \quad \textbf{(79)}$$

$$=V_t^1\cdot\frac{P(X_t=a)}{P(E_t)}+V_t^2\cdot\frac{P(X_t=i)}{P(E_t)}==\frac{V_t^1\,{}_tp^\alpha_x+V_t^2 i_x\cdot{}_{t-1}p^i_{x+1}}{{}_tp^\alpha_x+i_x\cdot{}_{t-1}p^i_{x+1}},\ \ t=0,1,\dots,n-1$$

καθώς επίσης και ότι

$$P(X_t=a)={}_tp^\alpha_x, \qquad \mathrm{t}=0,1,\dots,n-1$$

$$P(E_t)={}_tp^\alpha_x+i_x\cdot{}_{t-1}p^i_{x+1}, \quad \mathrm{t}=1,\dots,n-1\ , \qquad \mathrm{P(E_0)}=0. \quad \textbf{(80)}$$

$$P(X_t=i)=i_x\cdot{}_{t-1}p^i_{x+1}\,,\ \mathrm{t}=1,\dots,n-1, P(X_0=\mathrm{i})=0$$

Βασιζόμενοι στο θεώρημα του Gerber έχουμε για την δεσμευμένη διασπορά

$$(\sigma_t^Z)^2 = Var(Z_t|E_t) = \sum_{k=0}^{n-1-k} u^{2k} \cdot (\frac{E[C_{t+k}^2]\cdot P(E_k) - \pi^S(t+k)^2}{P(E_k)^2}),\ t = 0,1,\dots,n-1$$

$$E[C_0^2] = P^a(x:\ n)^2 + u\big(u + P^a(x:\ n)\big)q_x^a$$

$$E[C_k^2] = \big[P^a(x:\ n)^2 + u\big(u + P^a(x:\ n)\big)\cdot q_{x+k}^a\big]\cdot {}_kp_x^\alpha + u^2 i_x \cdot {}_{k-1}p_{x+1}^i \cdot q_{x+k}^i$$

$$k = 1,\dots.,n-2, \quad \textbf{(81)}$$

$$E[C_{n-1}^2] = \big[P^a(x\ :n)^2 + u\big(u + P^a(x\ :n)\big)\cdot(1 - p_{x+n-1}^a)\big]_{n-1}p_x^\alpha +$$

$$+u^2 i_x \cdot {}_{n-2}p_{x+1}^i \cdot q_{x+n-1}^i,$$

όπου τα ασφάλιστρα καθορίζονται από

$$\pi^S(0) = uV_1^1,$$

$$\textbf{(82)}$$

$$\pi^S(k) = u\Big(V_{k+1}^1 + A^i(x+k+1:\ n-k-1)\Big) - \Big(V_k^1 + A^i(x+k:\ n-k)\Big)$$

$$k = 1,\dots,n-1$$

και οι πιθανότητες $P(E_\kappa)$ ορίζονται στη σχέση (80). Περιορίζοντας τους πιθανοτικούς όρους $i_x \cdot {}_{k-1}p_{x+1}^i \cdot q_{x+k}^i$ έχουμε τις εξής προσεγγίσεις:

$$E[C_k^2] = \big[P^a(x:\ n)^2 + u\big(u + P^a(x:\ n)\big)\cdot q_{x+k}^a\big]\cdot {}_kp_x^\alpha, k = 0,\dots.,n-2,$$

$$\textbf{(83)}$$

$$E[C_{n-1}^2] = \big[P^a(x:\ n)^2 + u\big(u + P^a(x:\ n)\big)\cdot(1 - p_{x+n-1}^a)\big]_{n-1}p_x^\alpha$$

O Hurlimann υπέθεσε ότι όλοι οι ασφαλισμένοι είναι ηλικίας x=30 ή x=40 τη στιγμή $t \in \{0,1,2,3,4,5,10,15,18\}$ με διάρκεια συμβολαίου n=20 έτη. Τροποποίησε τον βιομετρικό πίνακα “EVK Table 1950”με τις προδιαγραφές του πλαισίου Φερεγγυότητα II, δηλαδή 20% μείωση της πιθανότητας θνησιμότητας ενός ενεργού (κίνδυνος μακροβιότητας), 15% αύξηση της πιθανότητας θνησιμότητας ενός ανίκανου(κίνδυνος θνησιμότητας), 35% αύξηση της πιθανότητας αναπηρίας για το πρώτο χρόνο και 25% αύξηση τα επόμενα έτη (κίνδυνος νοσηρότητας/ανικανότητας). Ορίζοντας επιτόκιο 3% έδειξε ότι οι συντελεστές μεταβλητότητας της προοπτικής ασφαλιστικής ζημιάς μειώνονται όσο το μέγεθος του χαρτοφυλακίου και η διάρκεια του συμβολαίου αυξάνεται. Επίσης οι δείκτες του κεφαλαίου φερεγγυότητας με τις προσεγγίσεις VaR CVaR, για μια ασφάλιση προικοδότησης με απαλλαγή των ασφαλίστρων λόγω ανικανότητας, μειώνονται όσο αυξάνεται το μέγεθος του χαρτοφυλακίου και η διάρκεια του συμβολαίου. Έτσι η στοχαστική προσέγγιση τιμωρεί τις μικρές ασφαλιστικές ενώ είναι ελκυστική για επιχειρήσεις με μεσαίο προς μεγάλο μέγεθος χαρτοφυλακίου, επειδή η τυπική προσέγγιση του πλαισίου για τη Φερεγγυότητα ΙΙ δεν λαμβάνει υπόψη τη διαδικασία του κινδύνου.

5 Ανάλυση κινδύνου μακροβιότητας και αναπηρίας με αυξανόμενες ράντες ζωής

Σε μια μελέτη των Levantesi-Menzietti αναλύονται ο κίνδυνος της μακροβιότητας και της αναπηρίας μέσω των αυξανόμενων ραντών ζωής. Αυτές οι ράντες ζωής αυξάνονται όταν ο ασφαλισμένος γίνει μακροχρόνια ανίκανος/ανάπηρος (Long Term Care,LTC). Οι Levantesi και Menzietti χρησιμοποίησαν τα εθνικά στοιχεία υγείας και θνησιμότητας από την Ιταλία για να περιγράψουν τον δημογραφικό κίνδυνο που πηγάζει από το προσδόκιμο ζωής και αναπηρίας. Προβάλλοντας τα ποσοστά θνησιμότητας και αναπηρίας υπολόγισαν διαφορετικά προβλεπόμενα σενάρια από αυτά τα στοιχεία. Για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου έκαναν χρήση ενός κινδύνου αποθεματικού (risk reserve) και θεωρώντας διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης και διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες υπολογίζουν το απαιτούμενο κεφάλαιο βασισμένο στον κίνδυνο (Risk-Based Capital requirements,RBC). Στόχος της έρευνάς τους είναι να δείξουν πώς οι διακυμάνσεις σε δημογραφικούς παράγοντες επηρεάζουν το απαιτούμενο κεφάλαιο βασισμένο στον κίνδυνο (RBC) και πώς μπορεί να μειωθεί αυτό με διάφορους τρόπους όπως επιπλέον ασφάλιστρο (safety loading), στρατηγικές κατανομής του κεφαλαίου (capital allocation strategies) και αντασφάλιση (reinsurance).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο όρος LTC έχει να κάνει με άτομα μεγάλης ηλικίας τα οποία είναι ανίκανα να φροντίσουν τον εαυτό τους χωρίς τη βοήθεια ενός άλλου ατόμου. Οι παροχές ασφάλισης LTC πραγματοποιούνται με τη χρήση ραντών και καταβάλλονται όταν ο ασφαλισμένος γίνει ανάπηρος και για όσο διάστημα μείνει σε αυτή την κατάσταση. Ο συνηθέστερος τρόπος εφαρμογής αυτών των προϊόντων γίνεται σε συνδυασμό με ασφαλιστήρια συμβόλαια ζωής. Στη μελέτη των Levantesi-Menzietti γίνεται λόγος για τις αυξανόμενες ράντες ζωής (Enhanced Life Annuity,ELA) που αποτελούνται από μια αναβαλλόμενη ράντα που αυξάνεται όταν ο ασφαλισμένος γίνει μακροχρόνια άνεργος (LTC). Μια αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA) επηρεάζεται τόσο από τους δημογραφικούς κινδύνους της μακροβιότητας και της αναπηρίας όσο και από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους που είναι η αξιολόγηση του ασφαλιστή να κάνει σωστή προεξόφληση, δηλαδή να κάνει σωστή επιλογή επιτοκίων. Η έρευνα έχει επικεντρωθεί μόνο στους δημογραφικούς κινδύνους, ενώ ο κίνδυνος των επενδύσεων έχει παραληφθεί.

Δεδομένου ότι η διάρκεια ζωής και αναπηρίας επηρεάζονται από τις δημογραφικές τάσεις θα ήταν λογικό να γίνουν προβολές στα ποσοστά θνησιμότητας και αναπηρίας. Αυτές οι προβολές θα γίνουν μέσω προβαλλόμενων μοντέλων τα οποία θα αντιπροσωπεύουν το συστηματικό μέρος των περιοδικών αποκλίσεων στις δημογραφικές τάσεις. Αυτές οι αποκλίσεις μπορεί να προέρχονται από το προσδόκιμο ζωής ενός υγιούς ή ενός μακροχρόνια ανίκανου (LTC), την αβεβαιότητα στις τιμές των παραμέτρων της προβολής του μοντέλου και στην αναποτελεσματικότητα του ίδιου του μοντέλου να αναπαριστά σωστά τις τάσεις της θνησιμότητας και της αναπηρίας. Στη περίπτωση που μιλάμε για αποκλίσεις στο προσδόκιμο ζωής έχουμε την διαδικασία του κινδύνου (process risk),ενώ όταν αναφερόμαστε στην αβεβαιότητα των τιμών των παραμέτρων έχουμε τον παραμετρικό ή συστηματικό κίνδυνο (parameter risk). Εάν το μοντέλο μας είναι αναποτελεσματικό τότε μιλάμε για κίνδυνο μοντέλου (model risk). Η έρευνα της εργασίας επικεντρώνεται μόνο στην διαδικασία του κινδύνου και τον παραμετρικό κίνδυνο.

Η επιλογή του μοντέλου είναι ζωτικής σημασίας για τη τις τάσεις της θνησιμότητας και της αναπηρίας. Διαμέσου αυτού του μοντέλου ορίζουμε ένα σύνολο από διαφορετικά σενάρια με τη χρήση είτε ντετερμινιστικών προσεγγίσεων (ανάλυση σεναρίου),είτε στοχαστικών προσεγγίσεων. Παρόμοια έρευνα έχει γίνει από τους Ferri-Olivieri (2000) και Olivieri-Pitacco(2001) από δεδομένα υγείας και θνησιμότητας του Ηνωμένου Βασιλείου.

5.1.1 Πιθανοτικό πλαίσιο

5.1.1.1 Πολλαπλό μοντέλο καταστάσεων

Μια ασφάλιση μακροχρόνιας φροντίδας όπως η LTC διαμορφώνεται με τη βοήθεια ενός μοντέλου πολλαπλών καταστάσεων. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή του χώρου των καταστάσεων $S(t)$ που παριστά την κατάσταση που έχει ο ασφαλισμένος τη στιγμή t ≥ 0, όπου t η παράμετρος που αντιπροσωπεύει την διάρκεια του συμβολαίου και 0 είναι η χρονική στιγμή εισόδου στο συμβόλαιο. Ο χώρος καταστάσεων S μπορεί να πάρει τρις τιμές με τιμή 1=ενεργός (active or healthy), τιμή 2=μακροχρόνια ανίκανος/ανάπηρος(LTC disabled) και τιμή 3=νεκρός(dead). Επίσης θεωρούμε μόνο ένα επίπεδο ανικανότητας και $S(0) = 1$, δηλαδή ότι τη στιγμή υπογραφής του συμβολαίου ο ασφαλισμένος βρίσκεται στην κατάσταση 1=ενεργός. Υποθέτουμε ακόμη ότι η πιθανότητα ένας ασφαλισμένος που βρίσκεται στην κατάσταση 2= μακροχρόνια ανίκανος/ανάπηρος (LTC) να επανακάμψει, δηλαδή να επιστρέψει στην αρχική κατάσταση 1, είναι μηδενική εξαιτίας του μακροχρόνιου χαρακτήρα της αναπηρίας.

Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία $\{S(t); t \geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα τριών καταστάσεων, διακριτού χρόνου και χρονικά ανομοιογενής. Τότε οι πιθανότητες μετάβασης ορίζονται ως εξής:

$$P_{ij}(t,u) = Pr\{S(u) = j|S(t) = i\} \;\; 0 \leq t \leq u, \;\; i,j \in \{1,2,3\} \qquad \textbf{(1)}$$

και οι εντάσεις μεταβάσεως ως:

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{u \to t} \frac{P_{ij(t,u)}}{u - t}, \quad t \geq 0, \quad i,j \in \{1,2,3\}, \qquad i \neq j \tag{2}$$

Για το παραπάνω μοντέλο που περιγράψαμε ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov για τις πιθανότητες μετάβασης και τις μόνιμες πιθανότητες αντίστοιχα:

$$\frac{dP_{ij}(t,u)}{du} = \sum\nolimits_{k;k \neq j} P_{ik}(t,u)\mu_{kj}(u) - P_{ij}(t,u)\mu_j(u) \tag{3}$$

$$\frac{dP_{ii}(t,u)}{du} = -P_{ii}(t,u)\mu_i(u) \tag{4}$$

όπου $\mu_i(u) = \sum_{j;j \neq i} \mu_{ij}(u)$.

οι λύσεις των σχέσεων (3) και (4) δίνονται από τις παρακάτω πιθανότητες:

$$P_{11}(t,u) = \exp\left(-\int_t^u \mu_{12}(s) + \mu_{13}(s)ds\right) \tag{5}$$

$$P_{22}(t,u) = \exp\left(-\int_t^u \mu_{23}(s)ds\right) \tag{6}$$

$$P_{12}(t,u) = \int_t^u P_{11}(t,s)\mu_{12}(s)P_{22}(s,u)ds \tag{7}$$

$$P_{13}(t,u) = \int_t^u P_{11}(t,s)\mu_{13}(s) + P_{12}(t,s)\mu_{23}(s)ds \tag{8}$$

$$P_{23}(t,u) = \int_t^u P_{22}(t,s)\mu_{23}(s)ds \tag{9}$$

5.1.1.2 Εκτίμηση εντάσεων μετάβασης

Επειδή αυτά τα ασφαλιστικά προϊόντα είναι σχετικά καινούργια δεν υπάρχουν διαθέσιμες πληροφορίες από εμπειρικά δεδομένα για να γίνει σωστή τιμολόγηση και αποθεματοποίηση. Έτσι τα δεδομένα της έρευνας ήταν οι μέχρι εκείνη τη στιγμή καλύτερες εκτιμήσεις από την εθνική στατιστική εταιρία της Ιταλίας και κυρίως από τον πίνακα “Italian Life-Table” (SIM 1999).

Οι παραπάνω πιθανότητες $P_{11}(t,u), P_{12}(t,u), P_{13}(t,u)$, είναι υπολογισμένες για κάθε ακέραιο (t,u) αρχίζοντας από τα ποσοστά επικράτησης των μακροχρόνια αναπήρων(επειδή αυτά τα ποσοστά είναι από ηλικιακές ομάδες, ενώ χρειαζόνται ετήσιες εκτιμήσεις πιθανοτήτων, γίνεται υπόθεση σταθερών ποσοστών σε κάθε ομάδα και προσαρμογή των αρχικών ποσοστών με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, με αποτέλεσμα μια εκθετική κατανομή). Επίσης λόγω έλλειψης δεδομένων υποθέτουμε ότι η πιθανότητα θνησιμότητας ενός μακροχρόνια αναπήρου είναι ανάλογη με την πιθανότητα θνησιμότητας ενός ενεργού, δηλαδή ότι ισχύει :

$$P_{23}(t,t+1) = k(t)P_{13}(t,t+1) \qquad \textbf{(10)}$$

Ο συντελεστής $k(t)$ παίρνει τιμές από εμπειρικά δεδομένα ή από μια αντασφαλιστική εταιρία. Οι αντίστοιχες εντάσεις μετάβασης $\mu_{ij}(t)$ εκτιμώνται από τις σχέσεις (5),(6) και (7) με τις παρακάτω προσεγγίσεις:

$$\mu_{13}(t) = -\mu_{12}(t) - 0{,}5[\ln P_{11}(t-1,t) + \ln P_{11}(t,t+1)] \qquad \textbf{(11)}$$

$$\mu_{13}(t) = -0{,}5[\ln P_{22}(t-1,t) + \ln P_{22}(t,t+1)] \qquad \textbf{(12)}$$

$$\mu_{12}(t) = 0{,}5[\frac{P_{12}(t-1,t)}{P_{11}(t-1,t)} + \frac{P_{12}(t,t+1)}{P_{22}(t,t+1)}] \qquad \textbf{(13)}$$

Υποθέτουμε ότι χ=50 είναι η ηλικία του ασφαλισμένου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η θνησιμότητα των ενεργών προσεγγίζεται με το νόμο του Weibull. Αντίθετα η ένταση μετάβασης $\mu_{12}(t)$ φαίνεται να ακολουθεί τον εκθετικό νόμο του Gompertz, δηλαδή,

$$\mu_{13}(t) = \frac{\beta}{\alpha}(\frac{x+t}{\alpha})^{\beta-1}, \qquad \alpha,\beta > 0 \qquad \textbf{(14)}$$

$$\mu_{12}(t) = \eta e^{\lambda(x+t)}\ , \qquad \eta,\lambda > 0 \qquad \textbf{(15)}$$

Η ένταση θνησιμότητας των μακροχρόνια αναπήρων $\mu_{23}(t)$ εκφράζεται μέσω της έντασης θνησιμότητας των ενεργών $\mu_{13}(t)$ και του εξαρτώμενου χρονικά συντελεστή $k(t)$, ο οποίος προσεγγίζεται από την συνάρτηση $\exp\,(c_0 + c_1 t + c_2 t^2)$,δηλαδή:

$$\mu_{23}(t) = k(t)\mu_{13}(t) \qquad \textbf{(16)}$$

5.1.2 Δημογραφικά σενάρια

Όσον αφορά τις παροχές ραντών των μακροχρόνια αναπήρων απαιτείται να υπολογιστεί από τους αναλογιστές η αβεβαιότητα που προέρχεται από τη διάρκεια της αναπηρίας, δηλαδή το χρονικό διάστημα που θα παραμείνει στην κατάσταση μακροχρόνιας αναπηρίας ο ανάπηρος. Για αυτό το λόγο είναι απαραίτητο να γίνουν κάποιες παραδοχές που αφορούν τη σχέση της θνησιμότητας και της αναπηρίας/νοσηρότητας. Υπάρχουν τρις βασικές θεωρίες που αναφέρονται σε αυτή τη σχέση, η θεωρία της πανδημίας, η θεωρία της ισορροπίας και η θεωρία της συμπίεσης.

Η παραπάνω αβεβαιότητα μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε διάφορα προβλεπόμενα σενάρια για τον υπολογισμό των παροχών. Σύμφωνα με τις παραπάνω θεωρίες θα ορίσουμε κάποια λογικά σενάρια τα οποία περιλαμβάνουν τις προβαλλόμενες τιμές της θνησιμότητας και της ανικανότητας. Ορίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο που θα μείνει στην κατάσταση j για ένα άτομο που είναι στη κατάσταση i τη στιγμή t ως:

$$\bar{e}_{ij}(t) = \int_t^{\infty} P_{ij}(t,u)du \qquad \textbf{(17)}$$

Για το χρόνο που θα δαπανήσει ένα άτομο στη κατάσταση ενεργός και μακροχρόνια ανάπηρος απαιτείται ο υπολογισμός των $\bar{e}_{11}(t), \bar{e}_{12}(t)$ και $\bar{e}_{22}(t)$. Το συνολικό προσδόκιμο ζωής ενός υγιούς ατόμου ορίζεται ως:

$$\bar{e}_{1.}(t) = \bar{e}_{11}(t) + \bar{e}_{12}(t)$$

Οι τρις θεωρίες μπορεί να εκφραστούν σε όρους προσδόκιμου ζωής ως:

Συμπίεσης: το συνολικό προσδόκιμο ζωής $\bar{e}_{1.}(t)$ αυξάνεται με τη πάροδο του χρόνου με σημαντική συνεισφορά από τον αναμενόμενο χρόνο $\bar{e}_{11}(t)$.

Ισορροπίας: και οι δυο αναμενόμενοι χρόνοι $\bar{e}_{11}(t), \bar{e}_{12}(t)$ αυξάνονται με τη πάροδο του χρόνου κατά το ίδιο ποσό.

Πανδημίας: το συνολικό προσδόκιμο ζωής $\bar{e}_{1.}(t)$ αυξάνεται με τη πάροδο του χρόνου με σημαντική συνεισφορά από τον αναμενόμενο χρόνο $\bar{e}_{12}(t)$.

Η κατασκευή των προβλεπόμενων σεναρίων έχει στηριχθεί στο βασικό σενάριο S_B που ορίστηκε από τα δεδομένα της στατιστικής εταιρίας της Ιταλίας (ISTAT). Η ISTAT έχει διαμορφώσει προβλεπόμενα σενάρια θνησιμότητας και έχει κατηγοριοποιήσει με τρις υποθέσεις, χαμηλή, κύρια και υψηλή. Κάθε προβλεπόμενο σενάριο έχει υπολογιστεί από ένα σύνολο παραμέτρων (α,β)από την κατανομή του Weibull ,ενώ για κάθε πρόβλεψη έχει υποτεθεί ένας σταθερός λόγος $k(t)$ ανάμεσα στη θνησιμότητα των ενεργών και τη θνησιμότητα των μακροχρόνια αναπήρων. Για την ένταση μετάβασης $\mu_{12}(t)$ έχουν οριστεί για κάθε σενάριο τρία διαφορετικά σύνολα παραμέτρων (η,λ) από το νόμο του Gompertz αρχίζοντας από το βασικό σενάριο S_B. Η μόνη διαθέσιμη πληροφορία την αρχική στιγμή t = 0 είναι ότι η παράμετρος λ είναι μια σταθερά παράμετρος, ενώ η παράμετρος η έχει οριστεί να αντιπροσωπεύει σε σχέση με το βασικό σενάριο, μια αλλαγή στα ποσοστά αναπηρίας η οποία ισούται με 40% αύξηση (υπόθεση 1), 10% μείωση (υπόθεση 2) και 20% αύξηση (υπόθεση 3).

Έτσι συνδυάζοντας τις προβαλλόμενες τιμές από την θνησιμότητα και την ανικανότητα παίρνουμε εννέα σενάρια, με πιθανότητα να πραγματοποιηθούν $p(S_i)$. Επίσης έχει υποτεθεί ότι δεν υπάρχει καμία συσχέτιση ανάμεσα στις παραμέτρους της θνησιμότητας και της ανικανότητας και ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν θα είναι διαφορετικά για διαφορετικές υποθέσεις.

5.1.3 Αναλογιστικές τιμές

Μια αυξανόμενη ράντα ζωής (enhanced life annuity,ELA) είναι ένα ασφαλιστικό προϊόν που συναντάται σε συμβόλαια όπου αντιμετωπίζουν τον κίνδυνο της μακροβιότητας και τον κίνδυνο να χρειαστεί φροντίδα ένας ασφαλισμένος που θα μείνει ανάπηρος. Είναι μια ράντα ζωής που αυξάνεται μόνο εάν ο ασφαλισμένος γίνει ανάπηρος. Μια αυξανόμενη ράντα ζωής παρέχει τις παρακάτω παροχές προς τους ασφαλισμένους:

1) Μια αναβαλλόμενη ράντα ζωής πληρώνει ένα ετήσιο ποσό $b_1(t)$, όταν ο ασφαλισμένος είναι υγιής.
2) Μια αυξανόμενη αναβαλλόμενη ράντα ζωής πληρώνει ένα ετήσιο ποσό $b_2(t) > b_1(t)$,όταν ο ασφαλισμένος γίνει άτομο με μακροχρόνια αναπηρία.

Οι παροχές είναι σταθερές και η διαφορά $b_2(t) - b_1(t)$ παριστά την αυξανόμενη παροχή αναπηρίας. Εάν $b_1(t) = 0$ τότε το συμβόλαιο γίνεται μια αυξανόμενη αναβαλλόμενη ράντα μακροχρόνιας αναπηρίας (LTC annuity,LTCA).
Εάν n είναι η περίοδος αναβολής και ω είναι η μέγιστη διάρκεια του συμβολαίου που συνδέονται με τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής στην ηλικία x ,τότε τη στιγμή s η παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας τη στιγμή t είναι

$$u(s,t) = \prod_{h=s+1}^{t} u(h-1,h)$$

Η αναλογιστική αξία των παροχών την χρονική στιγμή 0 ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \Pi(0,\omega) &= b_1 P_{11}(0,n)u(0,n)a_{11}(n,\omega) + \\ &+ b_2[P_{11}(0,n)a_{12}(n,\omega) + P_{12}(0,n)a_{22}(n,\omega)]u(0,n) \end{aligned} \qquad \mathbf{(18)}$$

όπου

$$a_{ij}(t,u) = \sum_{s=t}^{u-t-1} P_{ij}(t,s)u(s,t) \ \forall\ i,j \in 1{,}2$$

έστω π να είναι το ετήσιο σταθερό ασφάλιστρο και π^T να είναι το ετήσιο σταθερό μεικτό ασφάλιστρο που πληρώνει ένας ασφαλισμένος που είναι υγιής. Το μεικτό ασφάλιστρο ορίζεται ως:

$$\pi^T = \frac{\pi}{1 - \frac{\alpha}{\alpha_{11}(o,n)} - \beta - \gamma \frac{\alpha_{11}(0,\omega) + \alpha_{12}(0,\omega)}{\alpha_{11}(0,n)}} \qquad \mathbf{(19)}$$

όπου α,β και γ αντιπροσωπεύουν την επιβάρυνση του ασφαλίστρου για τα έξοδα πρόσκτησης(premium loading for acquisition), το δεδουλευμένο ασφάλιστρο (premium earned) και τα γενικά έξοδα (general expenses) αντίστοιχα.

Το καθαρό ασφάλιστρο ορίζεται ως: $\pi = \frac{\Pi(0.\omega)}{\alpha_{11}(0,n)}$.

Το αποθεματικό για ένα άτομο στην κατηγορία ενεργός ορίζεται ως:

$$V_1(t) = \begin{cases} \Pi(t,\omega) + \epsilon_1(t) - \pi^T a_{11}(t,n), & t < n \\ b_1 a_{11}(t,\omega) + b_2 a_{12}(t,\omega) + \epsilon_1(t), & t \geq n \end{cases} \qquad \mathbf{(20)}$$

όπου ϵ_1 είναι μια επιβάρυνση των εξόδων (expense loading) ενός υγιούς

$$\epsilon_1(t) = \pi^T \begin{cases} \alpha + \beta a_{11}(t,n) + \gamma[a_{11}(t,\omega) + a_{12}(t,\omega)]\,, & t = 0 \\ \beta a_{11}(t,n) + \gamma[a_{11}(t,\omega) + a_{12}(t,\omega)], & 1 \leq t < n \\ \gamma[a_{11}(t,\omega) + a_{12}(t,\omega)] & t \geq n \end{cases} \qquad \mathbf{(21)}$$

Το αποθεματικό για έναν μακροχρόνια ανάπηρο ορίζεται ως:

$$V_2(t) = \begin{cases} b_2 P_{22}(t,n)u(t,n)a_{22}(n,\omega) + \epsilon_2(t), & t < n \\ b_2 a_{22}(t,\omega) + \epsilon_2(t), & t \geq n \end{cases} \qquad \mathbf{(22)}$$

όπου ϵ_2 είναι μια επιβάρυνση των εξόδων(expense loading) ενός μακροχρόνια αναπήρου LTC:

$$\epsilon_2(t) = \gamma a_{22}(t,\omega) + \epsilon_2(t) \quad \forall t > 0 \qquad \mathbf{(23)}$$

Στην έρευνα αυτή οι Levantesi και Menzietti χρησιμοποίησαν τις ακόλουθες παραδοχές:

- Η ηλικία των ασφαλισμένων είναι x=50 ετών τη στιγμή t=0
- Μέγιστη ηλικία ασφαλισμένων ω=70 έτη
- Διάρκεια συμβολαίου n=15 έτη
- Παροχές προς τους μακροχρόνια ανάπηρους b_2 =200 νομισματικές μονάδες
- Έξοδα πρόσκτησης α=60%
- Δεδουλευμένο ασφάλιστρο β=2%
- Γενικά έξοδα γ=8%
- Επιτόκιο i=3%
- $b_1 = 0{,}5 \cdot b_2$.

Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση της ποσοστιαίας απόκλισης κάθε ποσοστού ασφαλίστρων με εκείνη του κεντρικού σεναρίου, που έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα πραγματοποίησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η μεταβλητότητα του ποσοστού των ασφαλίστρων μεταξύ των διαφορετικών σεναρίων είναι μεγαλύτερη για τους μακροχρόνια ανάπηρους(LTC) μόνο, σε σχέση με μια αυξανόμενη ράντα (ELA). Αυτή η μεταβλητότητα δείχνει ότι ο βιομετρικός κίνδυνος είναι μεγαλύτερος για μια ράντα μακροχρόνιων αναπήρων LTCA.

5.1.4 Ανάλυση δημογραφικού κινδύνου

Η ανάλυση του δημογραφικού κινδύνου έχει σκοπό να μετρήσει την αβεβαιότητα στα ποσοστά θνησιμότητας και ανικανότητας. Για αυτό το σκοπό ορίζουμε ένα αποθεματικό κινδύνου ή περιθώριο φερεγγυότητας (solvency margin) στο τέλος κάθε έτους t, το οποίο δίνεται από τη σχέση :

$$U(t) = U(t-1) + P^T(t) + J(t) - E(t) - B(t) - \Delta V(t) - K(t) \qquad \textbf{(24)}$$

όπου P^Tείναι το καθαρό έσοδο ασφαλίστρων ,$J(t)$ η απόδοση των στοιχείων του ενεργητικού, $E(t)$ τα έξοδα, $B(t)$ οι παροχές, $\Delta V(t)$ η προσαύξηση των αποθεματικών και $K(t)$ οι ροές του κεφαλαίου(αν $K(t) > 0$,τότε η ασφαλιστική εταιρία θα διανέμει μέρισμα, ενώ αν $K(t) < 0$ οι μέτοχοι θα πρέπει να κάνουν αύξηση μετοχικού κεφαλαίου.

Το περιθώριο κινδύνου αντιπροσωπεύει την ικανότητα της ασφαλιστικής εταιρίας να αντιμετωπίσει το κίνδυνο των υποχρεώσεών της και να διατηρήσει την φερεγγυότητά της απέναντι στους ασφαλισμένους.

Επειδή η ασφαλιστική εταιρία θέλει να έχει θετικό περιθώριο κινδύνου εστιάζουμε στην αριστερή ουρά της κατανομής του αποθεματικού κινδύνου. Η ανάλυση του κινδύνου θα γίνει και με την ντετερμινιστική μέθοδο και με την στοχαστική προσέγγιση. Με την ντετερμινιστική προσέγγιση επιλέγουμε ένα βασικό σενάριο και γίνεται η ανάλυση του σύμφωνα με αυτό. Με τη στοχαστική προσέγγιση κάθε σενάριο S_i μπορεί να θεωρηθεί ως πιθανό αποτέλεσμα με μια δεδομένη πιθανότητα $p(S_i)$. Υποθέτουμε ότι μια ομάδα ασφαλισμένων έχει την ίδια ηλικία x=50, την ίδια στιγμή εισόδου στο συμβόλαιο, τα ίδια ποσά παροχών και την ίδια κατηγορία κινδύνου. Για μέγιστη διάρκεια συμβολαίου, η περίοδος αναβολής, τα επιβαρυμένα έξοδα και τα ποσά παροχών είναι ίδια με αυτά που περιγράψαμε παραπάνω, ενώ οι ροές των κεφαλαίων υποθέτουμε ότι είναι μηδενικές, δηλαδή $K(t) = 0 \ \forall\, t$.

Για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα από διαφορετικά δεδομένα ορίζουμε ένα δείκτη που είναι ο λόγος του αποθεματικού κινδύνου ή περιθωρίου φερεγγυότητας προς την αναλογιστική τιμή των μελλοντικών παροχών τη στιγμή t=0, υπό το κεντρικό σενάριο S_{2b} που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί. Αυτός ο δείκτης θα συμβολίζεται με u(t).

Τα αποτελέσματα σε έρευνα από ένα χαρτοφυλάκιο χιλίων ατόμων για το περιθώριο φερεγγυότητας έδειξαν ότι η ράντα των ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA), με την υπόθεση ότι δεν λαμβάνουμε επιπλέον ασφάλιστρο, περιέχει μεγαλύτερο κίνδυνο με την στοχαστική προσέγγιση σε σχέση με την ντετερμινιστική, διότι η τελευταία ενσωματώνει τις συστηματικές αποκλίσεις του κεντρικού σεναρίου. Αντίστοιχα στην ίδια έρευνα προέκυψε ότι μια αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA) είναι επίσης πιο επικίνδυνη με τη στοχαστική προσέγγιση σε σχέση με την ντετερμινιστική.

Παρατηρώντας ότι και η στοχαστική και η ντετερμινιστική προσέγγιση είναι πιο επικίνδυνη σε μια ράντα ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA) σε σχέση με μια αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA) είναι λογικό να συνδυάσουμε μια ασφάλιση LTC με μια ράντα ζωής σε ένα ενιαίο συμβόλαιο από ότι μια ασφάλιση LTC μόνη της. Όταν η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα χαρτοφυλάκιο δέκα χιλιάδων ασφαλισμένων παρατηρήθηκε ότι μια μείωση της μεταβλητότητας. Επειδή η θνησιμότητα έχει μεγαλύτερο βάρος από την ανικανότητα φαίνεται τα τρία από τα εννέα σενάρια να επηρεάζουν περισσότερο. Επομένως με την αύξηση των ασφαλισμένων φαίνεται να έχουμε μείωση στη τυχαία μεταβλητή των διακυμάνσεων (διαδικασία του κινδύνου), ενώ ο συστηματικός κίνδυνος παραμένει.

Η παραπάνω έρευνα έγινε με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει επιπλέον ασφάλιση. Εάν τώρα υποθέσουμε ότι θα λάβουμε μια επιπλέον ασφάλιση η οποία θα μειώσει κατά 10% τις πιθανότητες θανάτου με κόστος μια αύξηση του ασφαλίστρου κατά 4,6%. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε μια αύξηση του περιθωρίου φερεγγυότητας μειώνοντας την επικινδυνότητα του χαρτοφυλακίου, χωρίς όμως να μειώνεται η μεταβλητότητα του.

Έστω τώρα ότι μια ασφαλιστική εταιρία θέλει να ακολουθήσει την παρακάτω ροή κεφαλαίων:

$$K(t) = \begin{cases} U(t) - 0.08V(t) & \dfrac{U(t)}{V(t)} \geq 0.1 \\ 0.5[U(t) - 0.06V(t)] & 0.06 \leq \dfrac{U(t)}{V(t)} \geq 0.1 \\ 0 & 0.04 \leq \dfrac{U(t)}{V(t)} < 0.06 \\ U(t) - 0.04V(t) & \dfrac{U(t)}{V(t)} < 0.04 \end{cases} \qquad \textbf{(25)}$$

Από τη παραπάνω σχέση, εάν ο λόγος $\frac{U(t)}{V(t)}$ είναι μικρότερος από 4% (έχει επιλεχθεί αυτό το ποσοστό για να είναι σε συμφωνία με το περιθώριο φερεγγυότητας που δίνεται από την ΕΕ για το πλαίσιο της Φερεγγυότητας Ι), τότε οι μέτοχοι θα πρέπει να κάνουν αύξηση μετοχικού για να επαναφέρουν την οικονομική ισορροπία της ασφαλιστικής επιχείρησης και να διατηρήσει την φερεγγυότητά της απέναντι στους ασφαλισμένους. Εάν ο λόγος $\frac{U(t)}{V(t)}$ είναι μεγαλύτερος από 4%, τότε αυξάνεται η μερισματική πολιτική της εταιρίας και το περιθώριο φερεγγυότητας να επιβάλει την οικονομική ισορροπία με αυτοχρηματοδότηση.

Για να υπολογίσουμε το κεφάλαιο με το οποίο θα πρέπει να συμμετάσχουν οι επενδυτές, θα πρέπει να υπολογίσουμε την τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας των μελλοντικών ταμειακών ροών τη στιγμή 0, η ποία ορίζεται ως :

$$Y^K(0,T) = -\sum_{s=0}^{T} K(s)u(0,s). \qquad \textbf{(26)}$$

Για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του κεφαλαίου το οποίο θα πρέπει να επενδύσουν οι επενδυτές για να διασφαλίσουν τη φερεγγυότητα με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-ε, δηλαδή το 1-ε ποσοστιαίο σημείο της $Y^K(0,T)$.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το απαιτούμενο κεφάλαιο επενδύσεων κυμαίνεται μεταξύ 6%-10% των ασφαλίστρων και ότι η παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές για Τ=15 έτη αν και ο κίνδυνος μακροβιότητας εμφανίζεται μετά την περίοδο αναβολής. Αυτό συμβαίνει γιατί το κεφάλαιο κράτησης που απαιτείται πρέπει να είναι τουλάχιστον το 4% των αποθεμάτων.

5.1.5 Απαιτήσεις βασισμένες στον κίνδυνο

Το απαιτούμενο κεφάλαιο που βασίζεται στον κίνδυνο (Risk Based Capital requirements,RBC) είναι μια μέθοδος για την αξιολόγηση της φερεγγυότητας μιας ασφαλιστικής εταιρίας και ο υπολογισμός του απαιτούμενου κεφαλαίου αντικατοπτρίζει το συνολικό κίνδυνο της εταιρίας.

Αν θεωρήσουμε τις απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένο στον κίνδυνο ως μια κατανομή του περιθωρίου φερεγγυότητας, τότε αυτές οι απαιτήσεις δίνουν τιμές συνοψίζοντας τη πληροφορία που περιέχεται στην αριστερή ουρά της κατανομής. Παρακάτω θα αναπτύξουμε δυο διαφορετικά σημεία αναφοράς.

5.1.5.1 Απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο σε T έτη

Θα ορίσουμε τις απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο με τα μέτρα Value at Risk, VaR και TailVaR ή TVaR για την κατανομή του αποθεματικού κινδύνου ή περιθωρίου φερεγγυότητας.

Έστω $U_\epsilon(t)$ να είναι το ϵ-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής του αποθεματικού κινδύνου τη στιγμή t. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή $U(0) = 0$, τότε η VaR και TVaR για χρονικό ορίζοντα (0,T) με επίπεδο εμπιστοσύνης 1- ϵ ορίζονται ως:

$$VaR_{1-\epsilon}(0,T) = -U_\epsilon(T) \qquad \textbf{(27)}$$

$$TVaR_{1-\epsilon}(0,T) = E[-U(T) \,\big|\, -U(T) \geq VaR_{1-\epsilon}(0,T) \qquad \textbf{(28)}$$

Η παράμετρος ϵ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ανοχής του κινδύνου μιας ασφαλιστικής εταιρίας και πρέπει να λαμβάνει πολύ μικρές τιμές έως το πολύ 5%. Η TVaR είναι η αναμενόμενη τιμή της $-U(T)$ δεδομένου ότι αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη VaR.

Επειδή οι αποδόσεις των επενδύσεων προέρχονται από το αρχικό κεφάλαιο, οι απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο με βάση τις VaR και TVaR δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$RBC_{1-\epsilon}^{VaR}(0,T) = VaR_{1-\epsilon}(0,T)u(0,T) \qquad \textbf{(29)}$$

$$RBC_{1-\epsilon}^{TVaR}(0,T) = TVaR_{1-\epsilon}(0,T)u(0,T) \qquad \textbf{(30)}$$

Εάν το αρχικό κεφάλαιο $U(0)$ δίνεται, τότε όλες οι απαιτήσεις αυξάνονται κατά αυτό το ποσό. Οι απαιτήσεις που δίνονται από τις προηγούμενες σχέσεις υπολογίζονται με τη στοχαστική προσέγγιση ερευνώντας την επίδραση των τριών διαφορετικών επιπέδων εμπιστοσύνης : 98%, 99%, 99.5%.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ορίζονται ως ποσοστό της αναλογιστικής αξίας των μελλοντικών παροχών υπό το κεντρικό σενάριο και συμβολίζονται ως $rbc_{1-\epsilon}^{VaR}(0,T)$, $rbc_{1-\epsilon}^{TVaR}(0,T)$.

Στην αριθμητικοί εφαρμογή θεωρήθηκαν τρις διαφορετικοί χρονικοί ορίζοντες

- μια μικρή περίοδος αναβολής (0,15)
- ένας μεσοπρόθεσμος χρονικός ορίζοντας κοντά στο προσδόκιμο ζωής(0,30).
- ένας μακροχρόνιος χρονικός ορίζοντας πολύ κοντά στην μέγιστη ηλικία (0,50).

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ράντα των ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA)εμπεριέχει μεγαλύτερο κίνδυνο σε σχέση με μια αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA). Οι αναλογιστικές παρούσες αξίες rbc της ράντας των ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA), είναι πέντε φορές μεγαλύτερη από τις αναλογιστικές παρούσες αξίες της αυξανόμενης ράντας ζωής (ELA).

Αν συμπεριλάβουμε και μια περιθώριο ασφαλείας (safety loading) οι απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στο κίνδυνο θα μειώνονται πολύ έντονα. Ο ρυθμός της μείωσης αυξάνεται όσο αυξάνεται ο χρονικός ορίζοντας. Πιο συγκεκριμένα η μείωση εκδηλώνεται πιο πολύ στην αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA), για παράδειγμα, με $rbc_{0,99}^{VaR}(0{,}30)$ πετυχαίνει μείωση 27% για τη ράντα των ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA), έναντι μείωσης 42% για την αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA).

5.1.5.2 Απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο σε χρονικό ορίζοντα (t,T)

Προηγουμένως αναλύσαμε τις απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο σε χρονικό ορίζοντα T, ενώ τώρα θα θεωρήσουμε χρονικό ορίζοντα (t,T). Η φερεγγυότητα της ασφαλιστικής εταιρίας μπορεί να επαληθευθεί αν το περιθώριο φερεγγυότητας δεν είναι αρνητικό για όλους τους ακέραιους $s \in (t, T)$. Τότε οι απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο σε χρονικό ορίζοντα (t,T) με επίπεδο εμπιστοσύνης 1- ϵ ορίζονται ως:

$$RBC_{1-\epsilon}(t,T) = inf\left\{U(t) \geq 0 \middle| Pr\left\{\bigcap_{s=t}^{T} U(s) \geq 0\right\}\right\} \geq 1-\epsilon \qquad \textbf{(31)}$$

Οι απαιτήσεις που δίνονται από τη προηγούμενη σχέση υπολογίζονται με τη στοχαστική προσέγγιση ερευνώντας την επίδραση των τριών διαφορετικών επιπέδων εμπιστοσύνης: 98% ,99%, 99.5%.

Τα αποτελέσματα εκφράζονται ως ποσοστά των αναλογιστικών τιμών των μελλοντικών παροχών τη στιγμή t σύμφωνα με το κεντρικό σενάριο. Παρατηρούμε ότι οι κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο σε μια ασφάλιση LTC μειώνεται με μείωση του χρόνου. Για την αυξανόμενη ράντα ζωής (ELA) υπάρχει μείωση στις απαιτήσεις μέχρι t=15 και μετά υπάρχει μια αύξηση.

Αν t=o οι τιμές $rbc_{1-\epsilon}(t,T)$ είναι μεγαλύτερες ή ίσες από τις $rbc_{1-\epsilon}^{VaR}(0,T)$. Για t>0 προκύπτει ότι οι απαιτήσεις για τη ράντα των ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA) είναι μεγαλύτερες από εκείνες για την αυξανόμενη ράντα ζωής(ELA).

Όπως παρατηρούμε η διαχείριση του υψηλού επιπέδου κινδύνου που εμπεριέχουν οι ασφαλίσεις ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTC) δεν μπορεί να διασφαλιστεί με επιπλέον ασφάλιση ή στρατηγικές κατανομής του κεφαλαίου. Ένας άλλος τρόπος είναι η μερική εκχώρηση του κινδύνου σε μια αντασφαλιστική επιχείρηση.

5.1.6 Αντασφάλιση Ανακοπής Ζημιάς (Stop-loss)

Η εκχώρηση του κινδύνου μιας ασφαλιστικής εταιρίας σε μια αντασφαλιστική εταιρία μειώνει τον κίνδυνο του underwriting και επιτρέπει καλύτερη διαχείριση του συνολικού κινδύνου, διότι με τη στρατηγική αυτή μεταφέρεται ο κίνδυνος θνησιμότητας και ανικανότητας σε ένα επιθυμητό επίπεδο για την ασφαλιστική εταιρία. Ο πιο συνήθης τρόπος αντασφάλισης για τα προϊόντα ασφάλισης ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTC), είναι οι συμβάσεις quota share όπου οι ασφαλιστικές εταιρίες μπορούν να εκχωρήσουν έως το 70% του κινδύνου του χαρτοφυλακίου τους. Οι αντασφαλιστικές συμβάσεις όμως που είναι γνωστές για τη μείωση της μεταβλητότητας του κινδύνου που διατηρεί η ασφαλιστική επιχείρηση είναι η ανακοπής ζημιάς.

Η αντασφάλιση ανακοπής ζημιάς προστατεύει την ασφαλιστική εταιρία οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ειδικότερα η ασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει τον ασφαλιστικό κίνδυνο μέχρι ενός συγκεκριμένου ποσού και το υπόλοιπο εκχωρείται στην αντασφαλιστική εταιρία. Αυτού του τύπου κίνδυνοι βρίσκονται στην άκρη της ουράς της κατανομής που είναι το πιο μεταβλητό μέρος από μια ράντα ατόμων με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA).

Στην μελέτη των Levantesi-Menzietti η αντασφάλιση stop-loss εφαρμόστηκε σε χίλια άτομα με μακροχρόνια αναπηρία (LTCA) και εφαρμόστηκε υποθέτοντας ότι η παρέμβαση του αντασφαλιστή συνδέεται με τη ζημιά που υπέστη ο ασφαλιστής σε όρους αποθεματικού του κινδύνου. Έστω τώρα ότι οι συμβάσεις stop-loss καλύπτουν h χρόνια και έστω $L(T)$ να είναι η ασφαλιστική ζημιά ενός χαρτοφυλακίου για χρονικό ορίζοντα $(0,T),(T=h,2h,\dots)$

$$L(T)=\frac{U(0)}{u(o,T)}-U(T) \qquad \textbf{(32)}$$

Έστω r να είναι το ποσό ιδίας κράτησης (retention) της ασφαλιστικής και $E[V(t)]$ το αναμενόμενο αναλογιστικό αποθεματικό τη στιγμή $t=h,2h,\dots,T$ δεδομένης της πληροφορίας τη στιγμή 0. Οι πιθανές πληρωμές του αντασφαλιστή προς τον ασφαλιστή στο τέλος του έτους t ορίζονται ως:

$$B^{SL}(t) = max\{0; L(t) - rE[V(t)]\} \quad \textbf{(33)}$$

Το αντασφάλιστρο για την περίοδο (t-h,t) , πληρώνεται από τον ασφαλιστή προς τον αντασφαλιστή την αρχική στιγμή t-h υπολογίζεται θεωρώντας το 1-γ ποσοστιαίο σημείο της κατανομής $B^{SL}(t)$ και συμβολίζεται ως $P^{SL}_{1-\gamma}(t)$. Όταν μια σύμβαση stop-loss είναι σε ισχύ το αποθεματικό κινδύνου τη στιγμή T γίνεται:

$$U^{SL}(T) = U(T) + \sum_{s=h}^{T} \left(\frac{B^{SL}(s)}{u(s,T)} - \frac{P^{SL}_{1-\gamma}(s)}{u(s-h,T)}\right) \quad \textbf{(34)}$$

Η παραπάνω αντασφαλιστική σύμβαση αφορά τον χρονικό ορίζοντα (0,T). Στην πράξη τα αποτελέσματα της αντασφάλισης αξιολογούνται με την στοχαστική προσέγγιση και ο συντελεστής ιδίας κράτησης r είναι σταθερός και ίσος με 4% για να είναι συνεπής με το ελάχιστο περιθώριο φερεγγυότητας που ορίζει το πλαίσιο της ΕΕ Φερεγγυότητα Ι, ενώ η παράμετρος γ είναι σταθερή και ίση με 5%. Το αντασφάλιστρο $P^{SL}_{1-\epsilon}(t)$ για ένα χαρτοφυλάκιο με χίλιους ασφαλισμένους που είναι μακροχρόνια ανίκανους, είναι μεγαλύτερο από όσο μεγαλύτερη είναι η συμμετοχή του αντασφαλιστή, ενώ οι πληρωμές του αντασφαλιστή είναι περισσότερες στο διάστημα $t \in (20{,}45)$ με μέγιστο $t = 30$. Οι απαιτήσεις φερεγγυότητας μετά από τη σύμβαση stop-loss υπολογίζονται με τα μέτρα VaR και TVaR τη στιγμή T με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-ε. Τα αποτελέσματα εκφράζονται ως ποσοστό των αναλογιστικών αξιών των μελλοντικών παροχών τη στιγμή 0, υπό το κεντρικό σενάριο.

Μεγαλύτερες μειώσεις στις απαιτήσεις κεφαλαίου βασισμένες στον κίνδυνο (RBC), είτε με τη μέθοδο VaR είτε με τη μέθοδο TVaR παρέχονται για μικρές τιμές του ϵ. Τα αποτελέσματα της αντασφάλισης είναι πιο ισχυρά στην $rbc^{TVaR}_{1-\epsilon}(0,T)$ σε σχέση με την $rbc^{VaR}_{1-\epsilon}(0,T)$, επειδή η σύμβαση ανακοπής ζημιάς κόβει την ουρά της κατανομής του αποθεματικού κινδύνου όπως συμβαίνει με την TVaR . Επειδή η επικινδυνότητα μιας αυξανόμενης ράντας ζωής (ELA) είναι μικρότερη από μια ράντα LTCA, η χρήση της αντασφάλισης δεν είναι απαραίτητη σε αυτή την περίπτωση.

6 Αριθμητική εφαρμογή

6.1 Περιγραφή Αριθμητικής εφαρμογής

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στην αριθμητική εφαρμογή που έχει ως στόχο τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων από διαφορετικούς τύπους ασφαλιστηρίων συμβολαίων.

Ο υπολογισμός των αναλογιστικών ποσοτήτων που θα αναλύσουμε παρακάτω γίνεται με τη χρησιμοποίηση του ελεύθερου κώδικα προγραμματισμού του πακέτου R που βασίζεται στην ευρέως γνωστή γλώσσα προγραμματισμού C + + . Ειδικότερα γίνεται χρήση της κλάσης LifeContigencies του πακέτου του R.

Οι ποσότητες που θα υπολογιστούν είναι η Βέλτιστη Εκτίμηση (Best Estimate,BE) των τεχνικών προβλέψεων, η Αξία σε Κίνδυνο (VaR), η Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (CVaR),το κεφάλαιο φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Capital, SC-VaR), το κεφάλαιο φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Υπό Συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Capital, SC-CVaR), ο δείκτης φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Ratio,SR-VaR), ο δείκτης φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Υπό Συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Ratio, SR-CVaR) και το περιθώριο κινδύνου (Risk Margin,RM).

Η Βέλτιστη Εκτίμηση (Best Estimate,BE) των τεχνικών προβλέψεων ορίζεται ως η μέση τιμή της κατανομής των τεχνικών προβλέψεων των ασφαλιστικών υποχρεώσεων του εκάστοτε χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής επιχείρησης, δηλαδή, περιγράφει την καλύτερη εκτίμηση των υποχρεώσεων μας κατά μέσο όρο.

Η Αξία σε Κίνδυνο (VaR) που είναι το μέγιστο ποσό νομισματικών μονάδων που μπορεί να χαθεί σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος (π.χ. ένα έτος), δοθέντος ενός επιπέδου εμπιστοσύνης (συνήθως 95%, 99%, 99,5%). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε επίπεδο εμπιστοσύνης α=99,5%. Στην εφαρμογή μας ορίζεται ως το quintile α=99,5% της κατανομής των τεχνικών προβλέψεων των ασφαλιστικών υποχρεώσεων, δηλαδή,

$$VaR_{\alpha}(X) = inf\{x \in R : P(X > x) \leq \alpha\}, 0 < \alpha < 1$$

Η Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο(CVaR) είναι η μέση τιμή των ασφαλιστικών υποχρεώσεων, δεδομένου ότι οι υποχρεώσεις υπερβαίνουν την Αξία σε Κίνδυνο (VaR). Κι εδώ θα χρησιμοποιήσουμε επίπεδο εμπιστοσύνης α=99,5%.

$$ES_{\alpha}(X) = E(X|X > VaR_{\alpha}(X)), 0 < \alpha < 1$$

Το κεφάλαιο φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Capital –SC.VaR) ορίζεται ως η διαφορά της Βέλτιστης Εκτίμησης (Best Estimate,BE) των τεχνικών προβλέψεων από την Αξία σε Κίνδυνο (VaR) με επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5%, δηλαδή,

$$SC.VaR = VaR99.5 - Best\ Estimate$$

Το κεφάλαιο φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Υπό Συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο(Solvency Capital,SC-VaR) ορίζεται ως η διαφορά της Βέλτιστης Εκτίμησης (Best Estimate-BE) των τεχνικών προβλέψεων από την Υπό Συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (CVaR) με επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5%, δηλαδή,

$$SC.CVaR = CVaR99.5 - Best\ Estimate$$

Ο δείκτης φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Αξίας σε Κίνδυνο(Solvency Ratio – SR.VaR) είναι το πηλίκο του κεφαλαίου φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Capital,SC-VaR) προς τη Βέλτιστη Εκτίμηση (Best Estimate,BE) των τεχνικών προβλέψεων, δηλαδή,

$$SR.VaR = \frac{SC.VaR}{Best\ Estimate}$$

Ο δείκτης φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Υπό Συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο (Solvency Ratio,SR-CVaR) είναι το πηλίκο του κεφαλαίου φερεγγυότητας με τη προσέγγιση της Υπό Συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο(Solvency Capital,SC-CVaR) προς τη Βέλτιστη Εκτίμηση (Best Estimate,BE) των τεχνικών προβλέψεων, δηλαδή,

$$SR.CVaR = \frac{SC.CVaR}{Best\ Estimate}$$

Το περιθώριο κινδύνου(Risk Margin,RM) θα υπολογιστεί μέσω της διαφοράς της Βέλτιστης Εκτίμησης (Best Estimate,BE) των τεχνικών προβλέψεων από την Αξία σε Κίνδυνο(VaR) με επίπεδο εμπιστοσύνης 75%(σύμφωνα με το εσωτερικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε και όχι με τη προσέγγιση του κόστους κεφαλαίου),δηλαδή,

$$Risk\ Margin = VaR75 - Best\ Estimate$$

Το κεφάλαιο φερεγγυότητας που υπολογίζουμε είναι μόνο για τον βιομετρικό κίνδυνο που περιέχει το κάθε χαρτοφυλάκιο και όχι το συνολικό. Υπάρχει κεφάλαιο φερεγγυότητας για τον κίνδυνο αγοράς που περιέχει το κεφάλαιο φερεγγυότητας για τον κίνδυνο των επιτοκίων καθώς και κεφάλαιο φερεγγυότητας για κάθε στοιχείο του ενεργητικού στο οποίο έχουν επενδυθεί τα ασφάλιστρα των ασφαλισμένων καθώς και τα κέρδη των προηγούμενων ετών.

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων έχει γίνει χρήση του βιομετρικού αναλογιστικού πίνακα θνησιμότητας της Ένωσης Ελλήνων Αναλογιστών ΕΑΕ των ανδρών του1990 που αντιπροσωπεύει μια αμερόληπτη περιγραφή της θνησιμότητας των ανδρών του ελληνικού πληθυσμού.

Το επιτόκιο που χρησιμοποιούμε για την προεξόφληση των χρηματικών ροών των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι σταθερό και ίσο με 3%, γιατί η εργασία επικεντρώνεται στην ανάλυση του βιομετρικού κινδύνου και όχι στο κίνδυνο των επιτοκίων που ανήκει στον κίνδυνο αγοράς (market risk).

Επίσης υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει δυνατότητα εξαγοράς των συμβολαίων.

Η ηλικία Χ των εργαζομένων είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με ελάχιστη ηλικία αυτή των 25 ετών και μέγιστη αυτή των 65 ετών που είναι και η ηλικία συνταξιοδότησης ,δηλαδή $X \backsim U(25{,}65)$.

Η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποχωρήσεων, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μόνο η αιτία του θανάτου, αρχικά, θα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο d_x και με παράμετρο $d_x * 1.10$,όπου $d_x = l_x \cdot q_x$ με l_x, q_x να δίνονται από τον πίνακα της ΕΑΕ 1990.

Στη συνέχεια η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αποχωρήσεων θα ακολουθεί μια σύνθετη κατανομή

$$Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)$$

$$q_x \sim Gamma(1, 1)$$

$$\text{και } q_x \sim Gamma(1.10, 1).$$

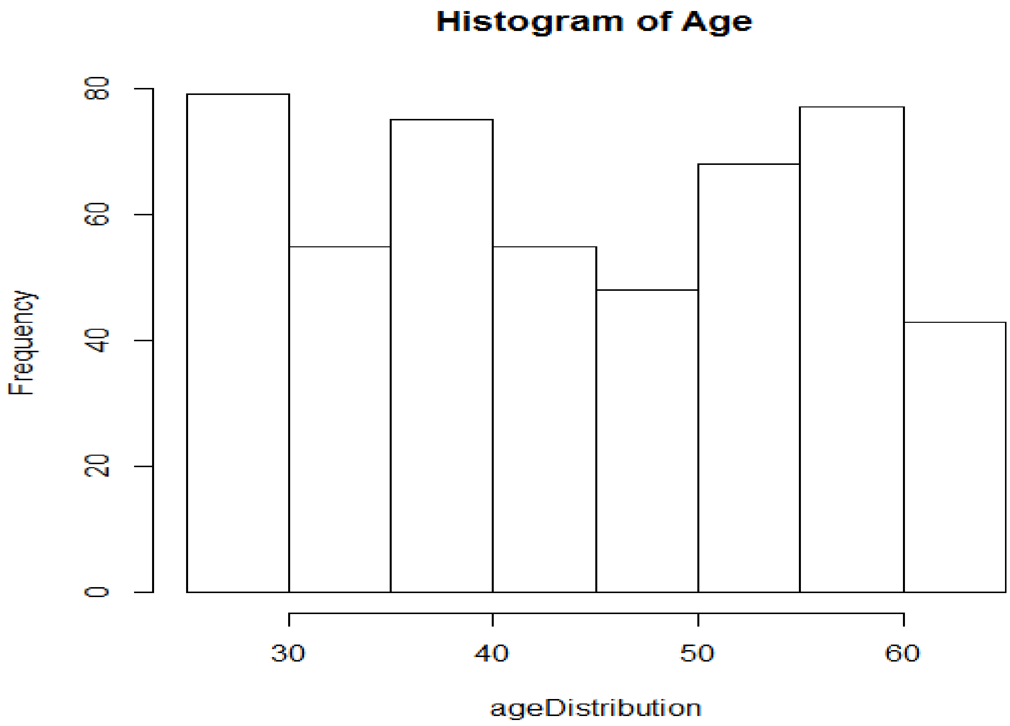
Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε με τα παρακάτω συμβόλαια

1) Μεικτή Ασφάλιση ζωής 10 ετών
2) Ασφάλιση Προικοδότησης ή Μελλοντικού Κεφαλαίου 10 ετών
3) Μειούμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών
4) Αυξανόμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών
5) Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών
6) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 5 ετών
7) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 10 ετών
8) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών
9) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 5 ετών
10) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 10 ετών
11) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών
12) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 5 ετών
13) Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 10 ετών

14) Σταθερό Ποσό Παροχής πριν την ηλικία συνταξιοδότησης
15) Αυξανόμενη Ράντα Ζωής 10 ετών

Ο αριθμός των ασφαλισμένων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι N=500 και η κατανομή των ηλικιών θα είναι η ακόλουθη:

Εικόνα 1 $X \backsim U(25, 65)$.



Τα περιγραφικά στατιστικά της κατανομής της ηλικίας των ασφαλισμένων είναι τα παρακάτω:

Ελάχιστο=25

Μέσος= 44.5

Διάμεσος=44

Μέγιστο=65

6.2 Μεικτή Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

(10-year endowment insurance)

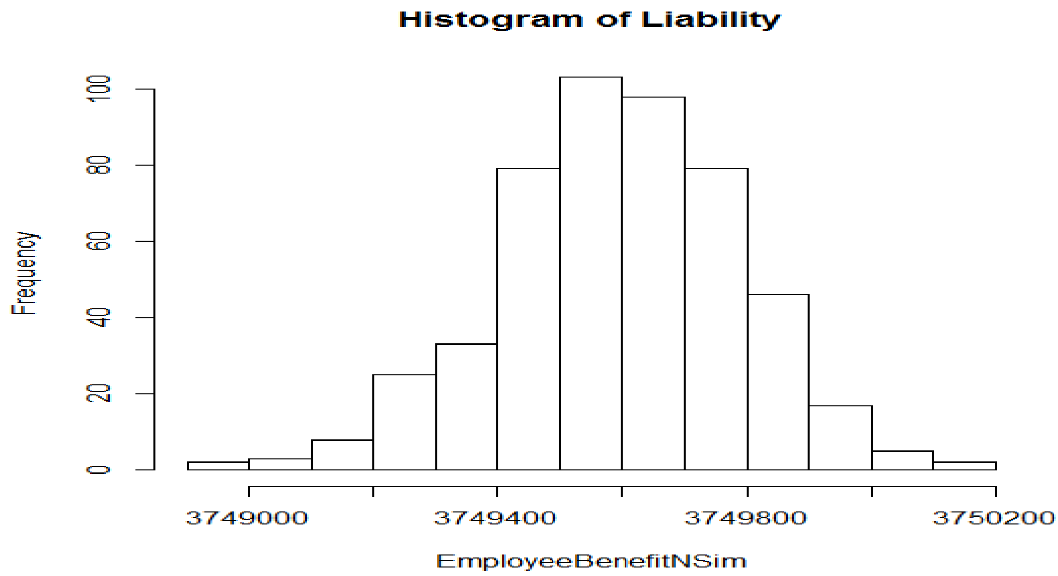
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στον ασφαλισμένο το σταθερό ποσό των € 10.000, εφάπαξ, εάν αυτός επιζήσει για τα επόμενα 10 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου ή εάν πεθάνει εντός του διαστήματος των 10 ετών οι κληρονόμοι του να λάβουν το εφάπαξ ποσό των € 10.000.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

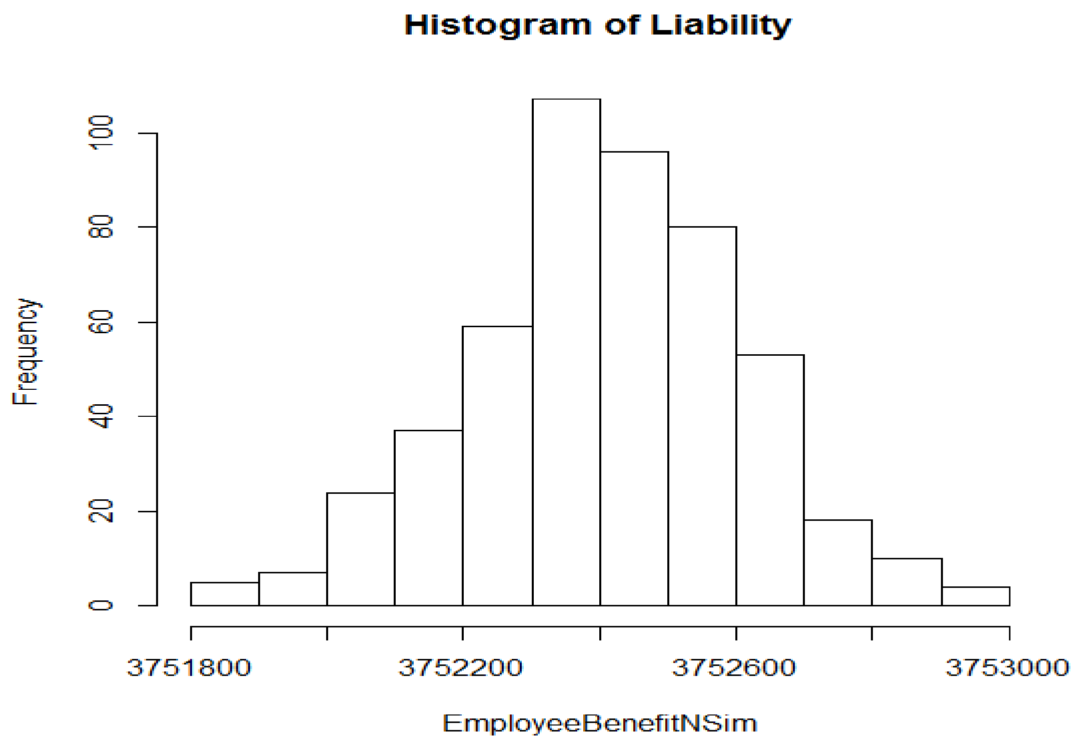
Πίνακας 1.Μεικτή Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson$(d_x \cdot 1.10)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1{,}1)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1.10{,}1)$ N=500
Best Estimate	3.749.594	3.752.413	3.749.788	3.752.382
VaR99.5%	3.750.081	3.752.915	3.768.128	3.769.101
CVaR99.5%	3.750.120	3.752.948	3.774.604	3.772.549
SCR -VaR	486,81	502,27	18.339	16.719
SCR-CVaR	526,75	534,98	24.815	20.166
SR-VaR	0,0129%	0,01338%	0,48%	0,445%
SR-CVaR	0,014%	0,0142%	0,66%	0,537%
VaR75%	3.749.733	3.752.545	3.753.382	3.755.936
Risk Margin	139,47	132,57	3.593,77	3.553,61

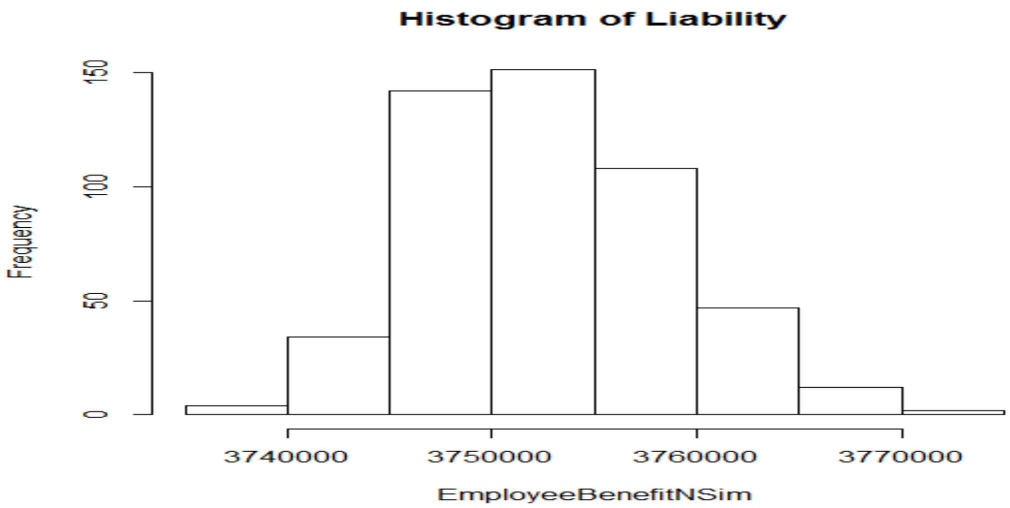
Γράφημα 1. Poisson (d_x)



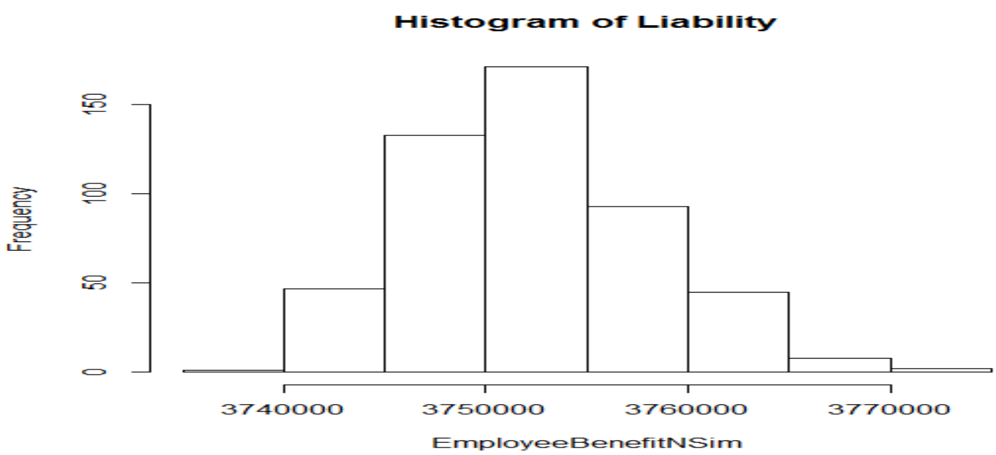
Γράφημα 2. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 3. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1,1)}$



Γράφημα 4. $\mathbf{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1.10,1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995, το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνονται. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά περισσότερες χρηματικές μονάδες επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας, ο οποίος αυξάνεται κατά μέσο όρο €2.819 στην Poisson μετά την αύξηση της θνησιμότητας κατά 10% και €2.594 στην Gamma- Poisson. Ενώ βλέπουμε να αυξάνονται κατά μέσο όρο οι υποχρεώσεις της, δηλαδή η Βέλτιστη εκτίμηση και στην Poisson και στην Gamma-Poisson το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) και με τις δυο προσεγγίσεις (VaR995, CVaR995) αυξάνεται στην Poisson κατά €16 και €8 αντίστοιχα, ενώ μειώνεται στην Gamma- Poisson κατά €1.620 και €4.649 αντίστοιχα, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές πριν την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson, ενώ είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Poisson.

6.3 Ασφάλιση Προικοδότησης ή Μελλοντικού κεφαλαίου 10 ετών

(10-years term pure endowment)

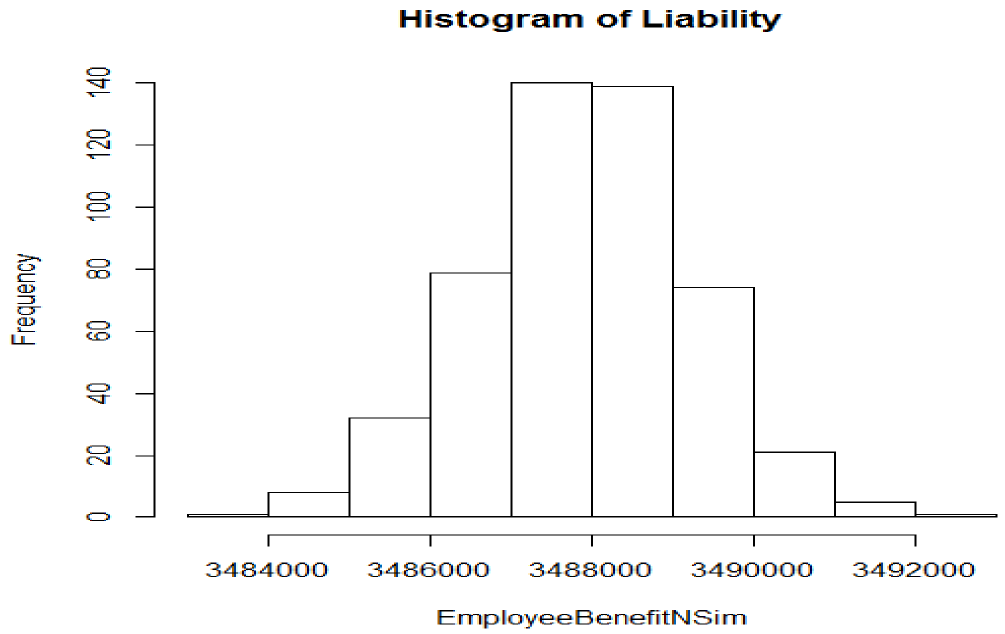
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στον ασφαλισμένο το σταθερό ποσό των € 10.000 ,εφάπαξ, εάν αυτός επιζήσει για τα επόμενα 10 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Εάν πεθάνει εντός του διαστήματος των 10 ετών δεν υπάρχει παροχή προς τους κληρονόμους του ασφαλισμένου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

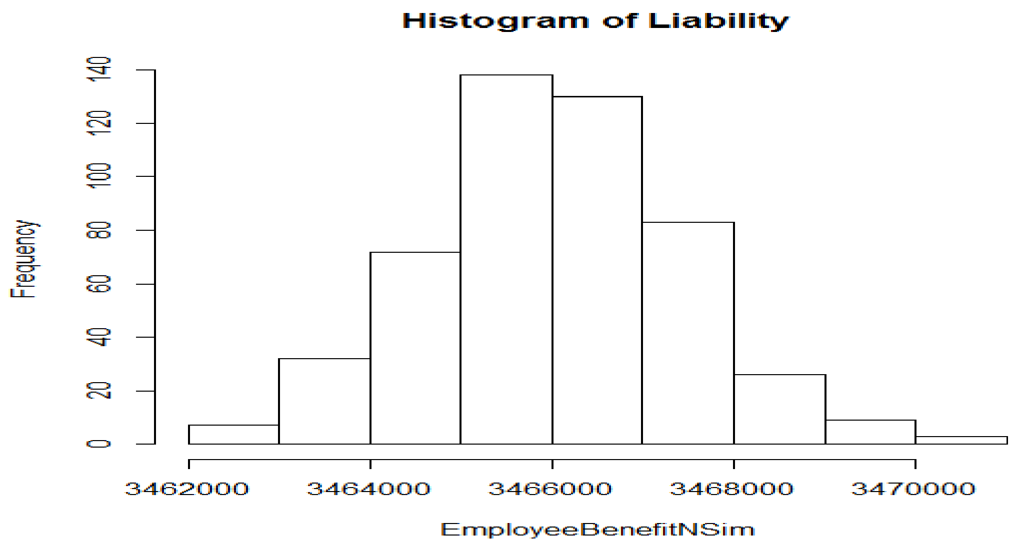
Πίνακας 2. Ασφάλιση Προικοδότησης 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson$(d_x \cdot 1.10)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	3.487.880	3.466.054	3.486.913	3.465.233
VaR99.5%	3.491.296	3.469.972	3.583.111	3.565.336
CVaR99.5%	3.491.714	3.470.402	3.591.239	3.570.206
SCR -VaR	3.415,88	3.917,99	96.198,22	100.102
SCR-CVaR	3.834	4.348	104.325,97	104.973
SR-VaR	0,097%	0,113%	2,758%	2,88%
SR-CVaR	0,10%	0,1254%	2,99%	3,029%
VaR75%	3.488.792	3.466.946	3.515.672	3.493.860
Risk Margin	911,74	892,22	28.759,54	28.627,71

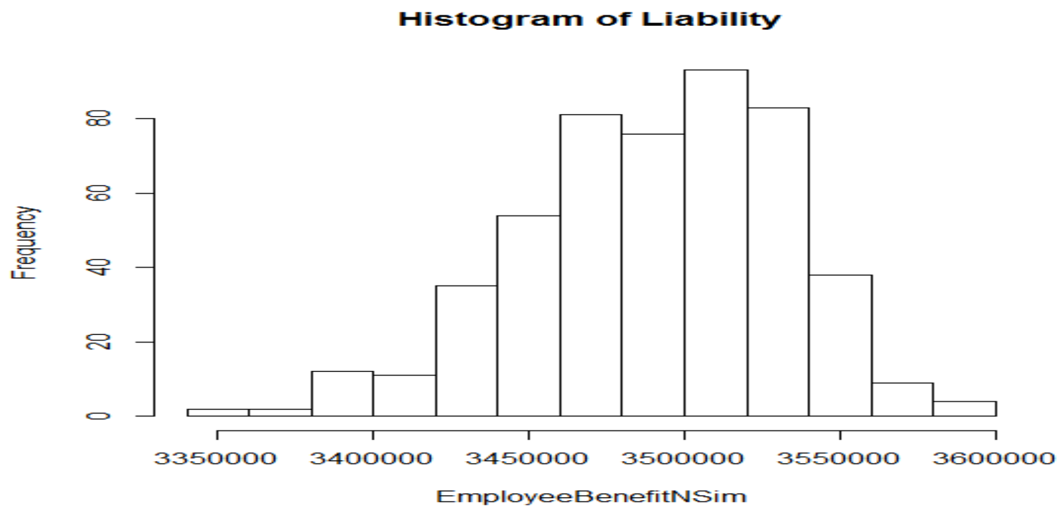
Γράφημα 5. Poisson (d_x)



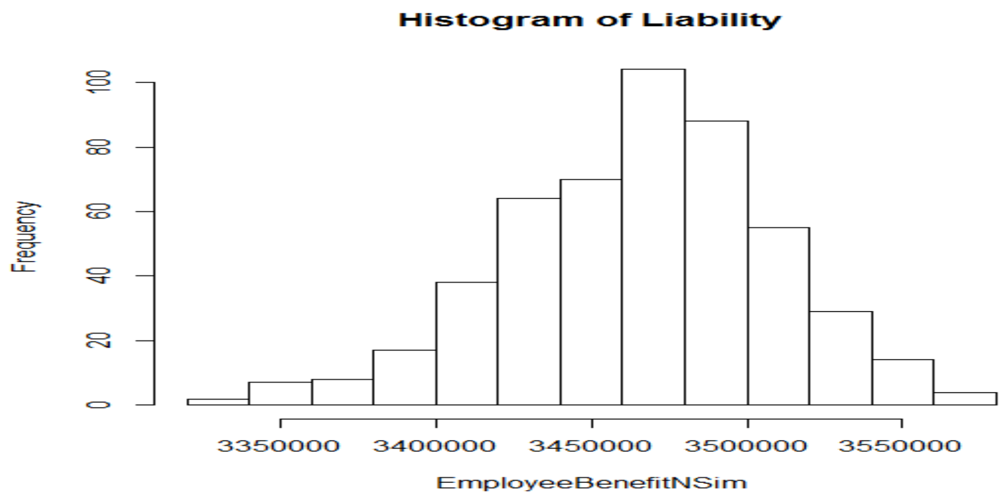
Γράφημα 6. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 7. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\ ,q_x{\sim}Gamma(1,1)}$



Γράφημα 8. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\ ,q_x{\sim}Gamma(1.10,1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €21.826, €21.324,€21.312, αντίστοιχα και κατά €21.680, €17.775, €21.033, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €503, €514, αντίστοιχα και κατά €3.904, €648, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.4 Μειούμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

(10-years term Decreasing Life Insurance)

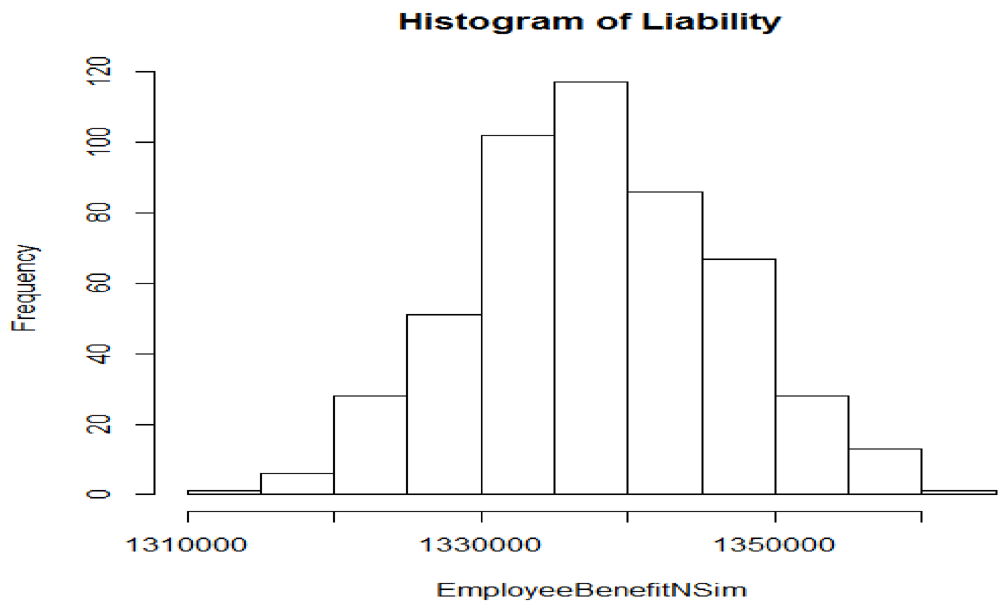
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους κληρονόμους του ασφαλισμένου το ποσό των € 10.000 εάν ο ασφαλισμένος πεθάνει εντός του πρώτου έτους, το ποσό των € 9.000 εάν πεθάνει μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου έτους, ενώ εάν πεθάνει μεταξύ του ένατου και δέκατου έτους οι κληρονόμοι θα λάβουν το ποσό των € 1.000.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

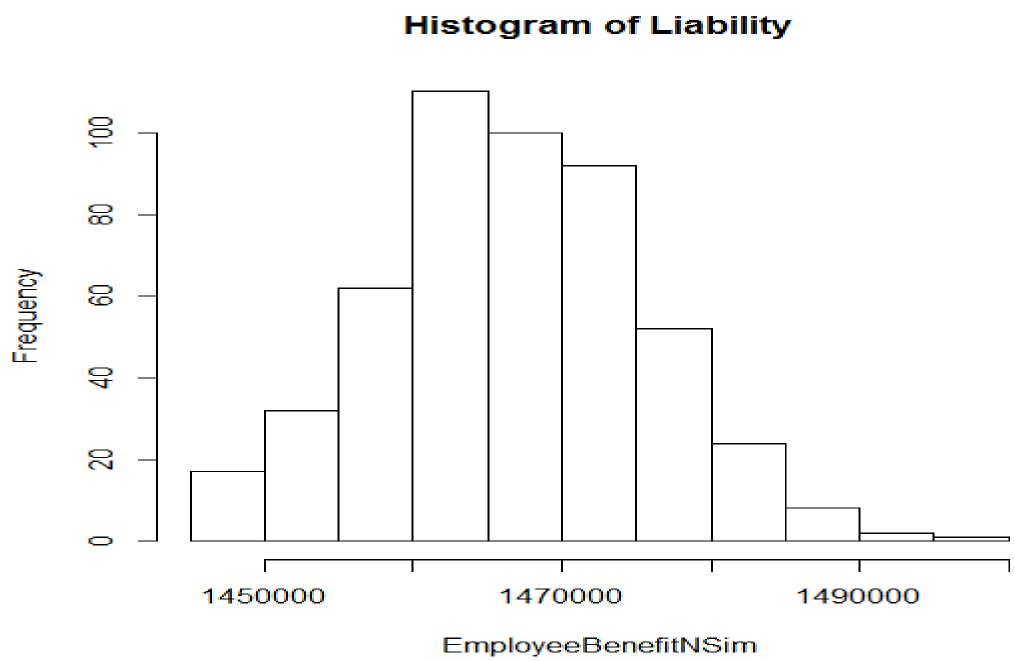
Πίνακας 3. Μειούμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1{,}1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10{,}1)$ N=500
Best Estimate	1.338.020	1.466.698	1.325.568	1.469.674
VaR99.5%	1.359.154	1.489.606	2.037.115	2.269.879
CVaR99.5%	1.360.068	1.492.514	2.171.965	2.349.633
SCR -VaR	21.134	22.907	711.546	800.205
SCR-CVaR	22.047	25.815	846.397	879.959
SR-VaR	1,57%	1,56%	53,67%	54,44%
SR-CVaR	1,64%	1,76%	63,85%	59,874%
VaR75%	1.343.841	1.472.661	1.482.832	1.623.475
Risk Margin	5.820,55	5.962,70	157.263	153.800

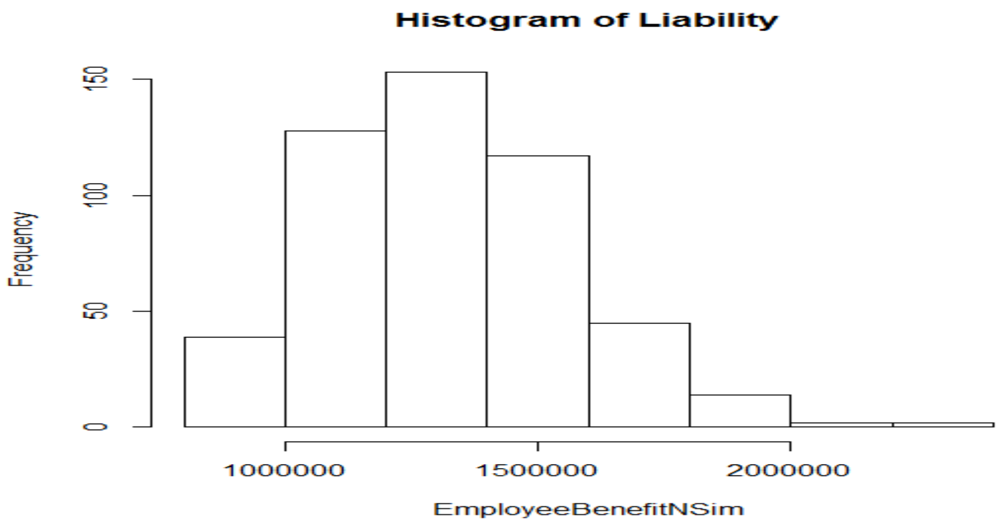
Γράφημα 9. Poisson (d_x)



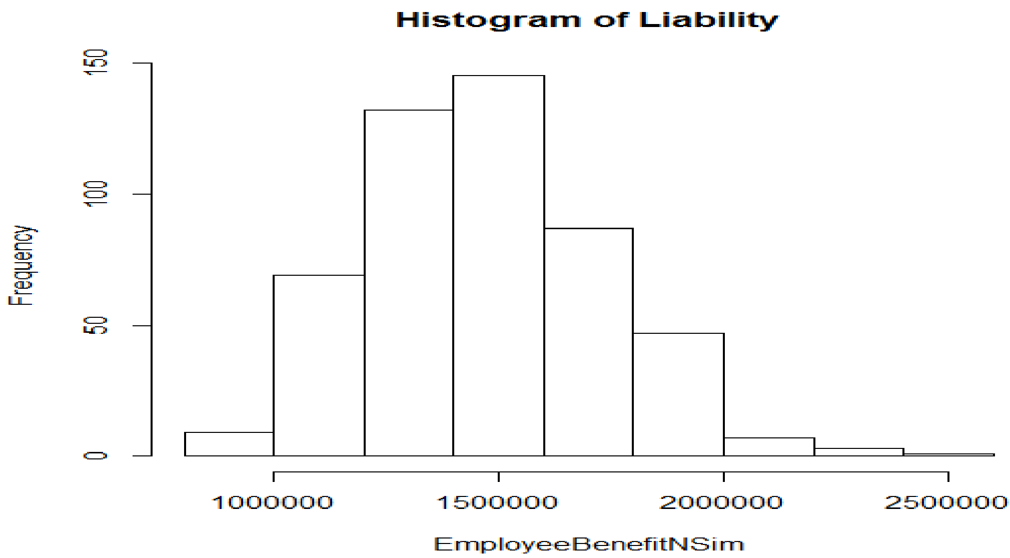
Γράφημα 9. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 11. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1,1)}$



Γράφημα 12. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1.10,1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €128.678, €130.452,€132.446, αντίστοιχα και κατά €144.106, €232.764, €177.668, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €1.773, €3.768, αντίστοιχα και κατά €88.659, €33.562, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά περισσότερες χρηματικές μονάδες επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας.

6.5 Αυξανόμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

(10-years term Increasing Life Insurance)

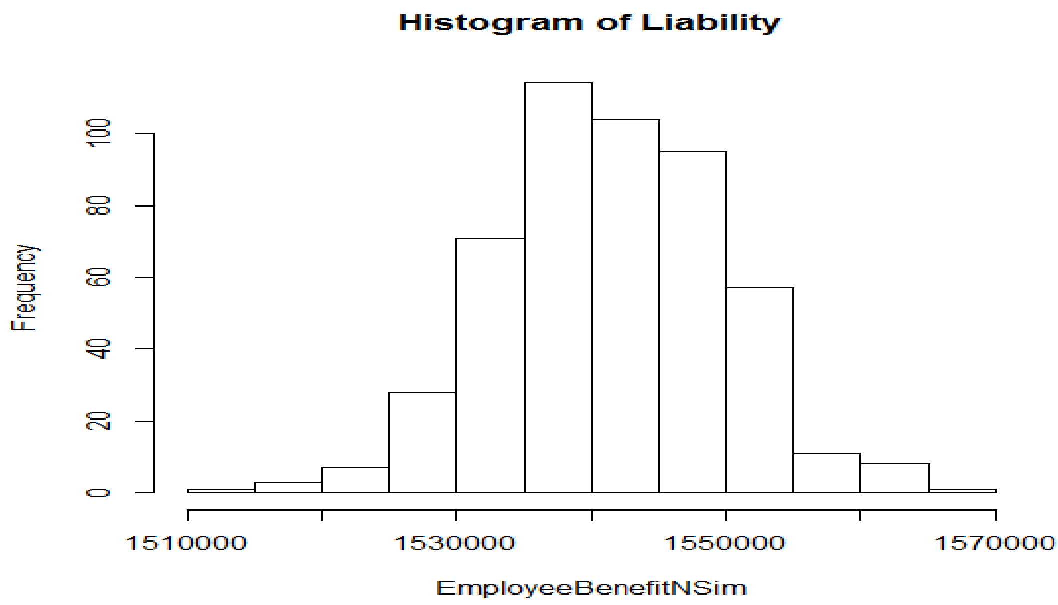
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους κληρονόμους του ασφαλισμένου το ποσό των € 1.000 εάν ο ασφαλισμένος πεθάνει εντός του πρώτου έτους, το ποσό των € 2.000 εάν πεθάνει μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου έτους, ενώ εάν πεθάνει μεταξύ του ένατου και δέκατου έτους οι κληρονόμοι θα λάβουν το ποσό των € 10.000.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

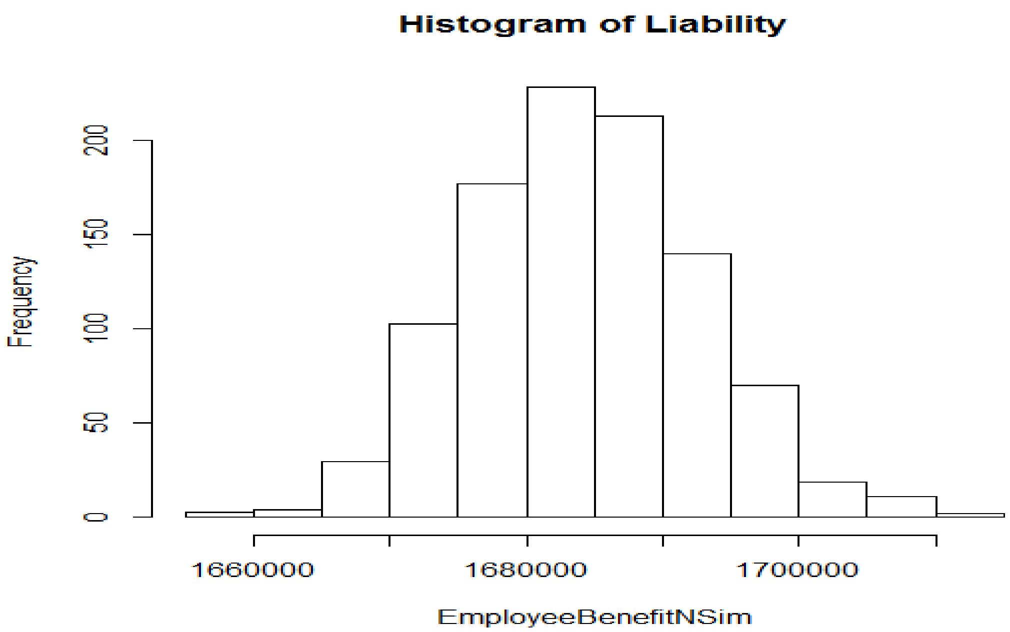
Πίνακας 3.Αυξανόμενη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1{,}1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10{,}1)$ N=500
Best Estimate	1.541.498	1.684.220	1.541.841	1.678.928
VaR99.5%	1.563.291	1.707.722	2.437.399	2.548.308
CVaR99.5%	1.565.361	1.709.839	2.493.174	2.725.037
SCR -VaR	21.793	23.501	895.557	869.380
SCR-CVaR	23.863	25.619	951.333	1.046.109
SR-VaR	1,41%	1,39%	58,08%	51,781%
SR-CVaR	1,548%	1,53%	61,70%	62,308%
VaR75%	1.547.329	1.689.807	1.713.923	1.867.179
Risk Margin	5.831	5.586,90	17.2081,54	188.250,66

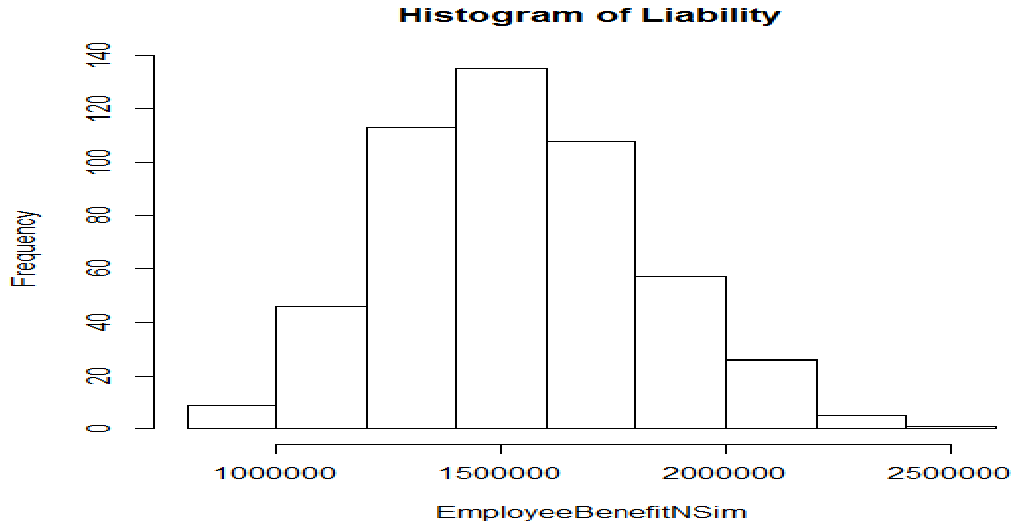
Γράφημα 10. Poisson (d_x)



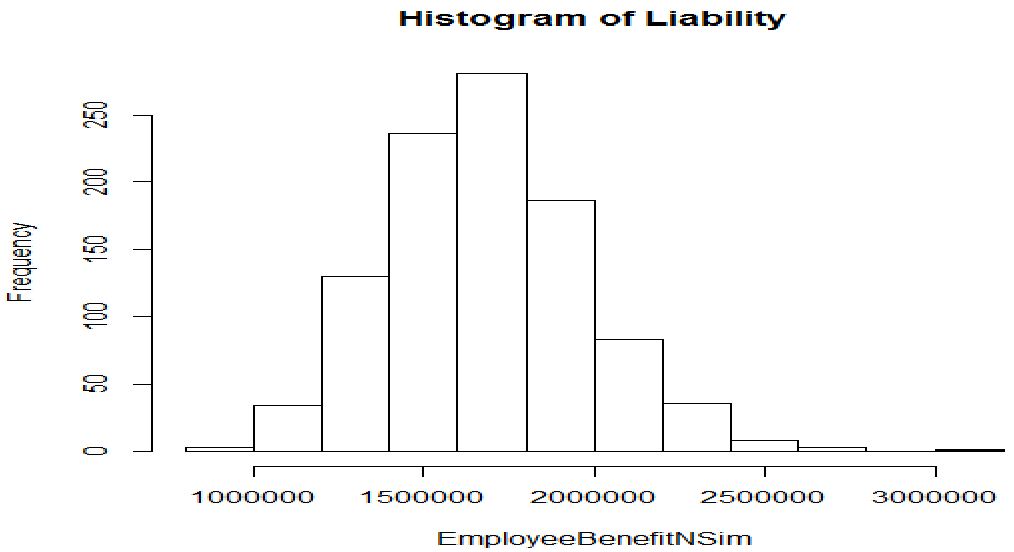
Γράφημα 11. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 12. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1, 1)$



Γράφημα 13. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10, 1)$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €142.722, €144.431,€144.478, αντίστοιχα και κατά €137.087, €110.909, €231.863, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €1.708, €1.756, αντίστοιχα και κατά €-26.177(λόγω πιο ελαφριάς ουράς της κατανομής μετά την αύξηση θνησιμότητας κατά 10%), €94.776, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά περισσότερες χρηματικές μονάδες επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας.

6.6 Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

(10 years term Life Insurance)

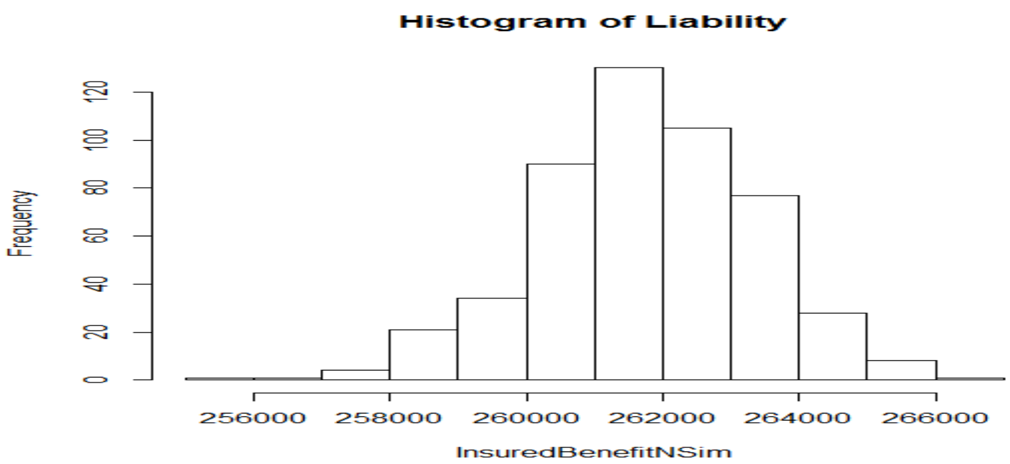
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν συγκεκριμένο αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική έχει την υποχρέωση να καταβάλει στον κληρονόμο ή τους κληρονόμους του ασφαλισμένου, στο τέλος του έτους του θανάτου του ασφαλισμένου, το εφάπαξ ποσό των € 10.000 σε περίπτωση που ο ασφαλισμένος αποβιώσει εντός του χρονικού διαστήματος των 10 ετών από τη στιγμή υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

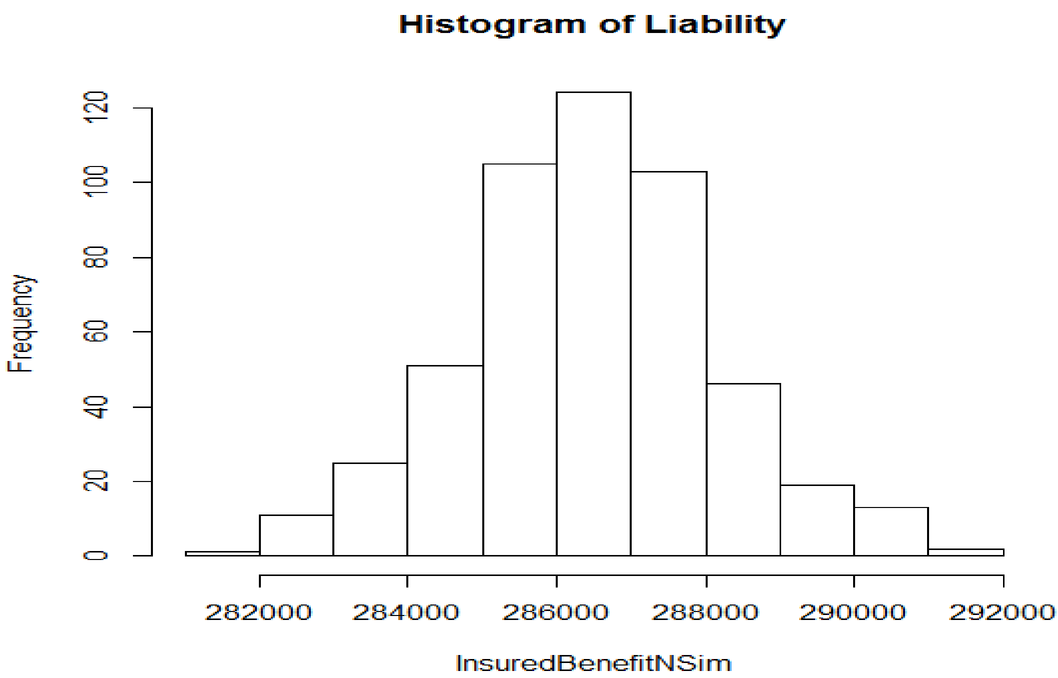
Πίνακας 5. Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	261.760	286.448	261.817	287.160
VaR99.5%	265.742	290.849	400.474	428.779
CVaR99.5%	266.165	291.089	406.665	444.021
SCR -VaR	3.981,65	4.400,71	138.657	141.619
SCR-CVaR	4.405,01	4.640,93	144.848	156.861
SR-VaR	1,52%	1,536%	53,12%	49,3%
SR-CVaR	1,68%	1,62%	55,32%	54,6%
VaR75%	262.845	287.485	292.016	317.589
Risk Margin	1.084,60	1.037,58	30.199,71	30.429,12

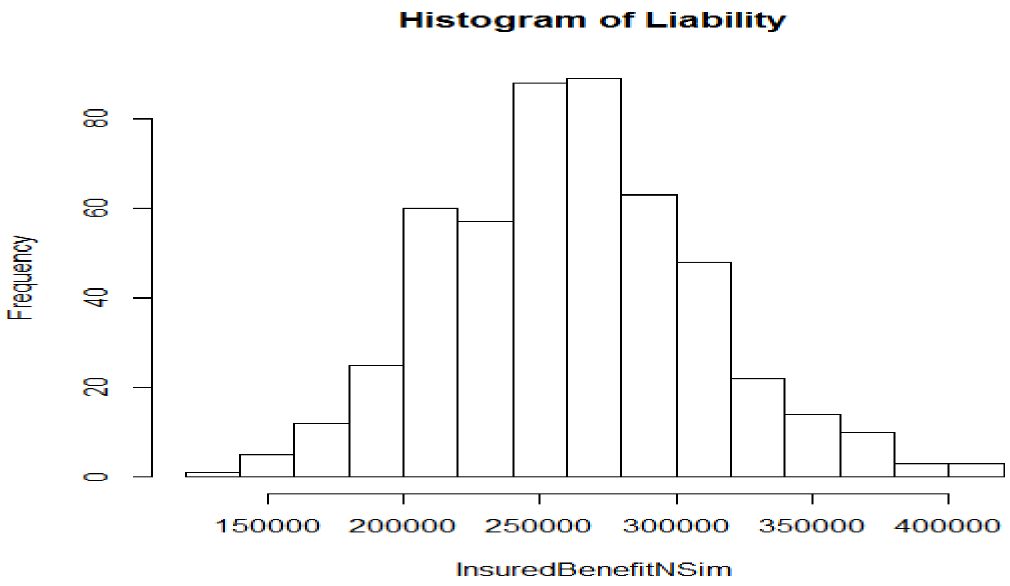
Γράφημα 17. Poisson (d_x)



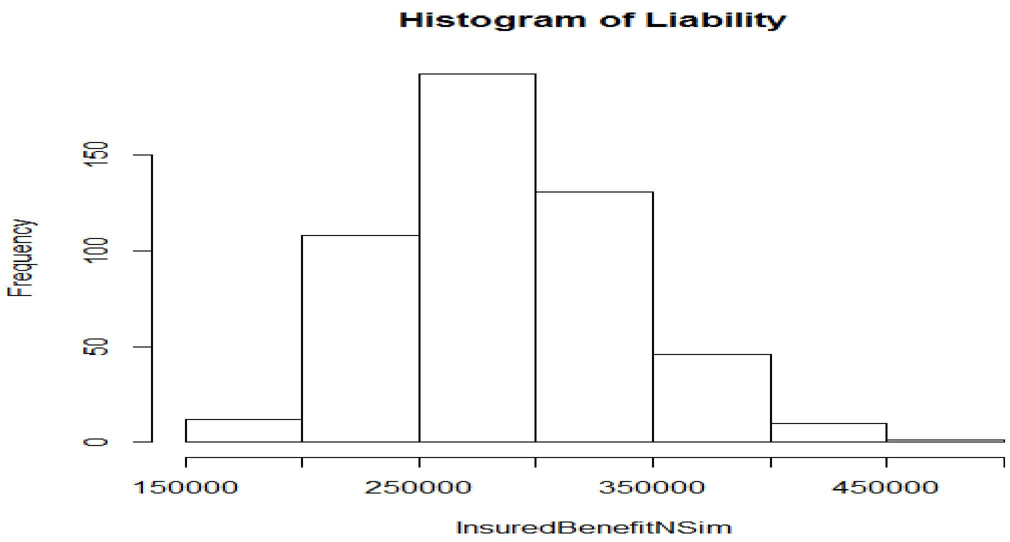
Γράφημα 18. Poisson ($d_x \cdot 1.10$).



Γράφημα 19. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\ , q_x \sim Gamma(1, 1)}$



Γράφημα 20. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\ , q_x \sim Gamma(1.10, 1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €24.688, €25.107, €24.924, αντίστοιχα και κατά €25.343, €28.305, €37.356, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €419, €235, αντίστοιχα και κατά €2.962, €12.013, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά περισσότερες χρηματικές μονάδες επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας.

6.7 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 5 ετών

(5-years term life annuity deferred 5 years)

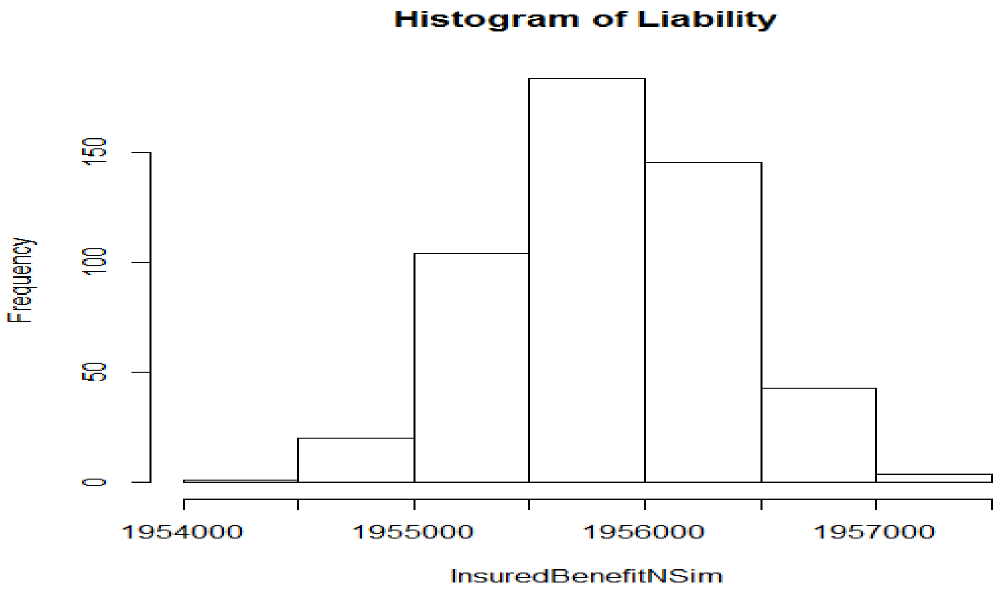
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στην ασφαλισμένο €1.000 ετησίως για διάστημα 5 ετών, εφόσον έχει επιζήσει για 5 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

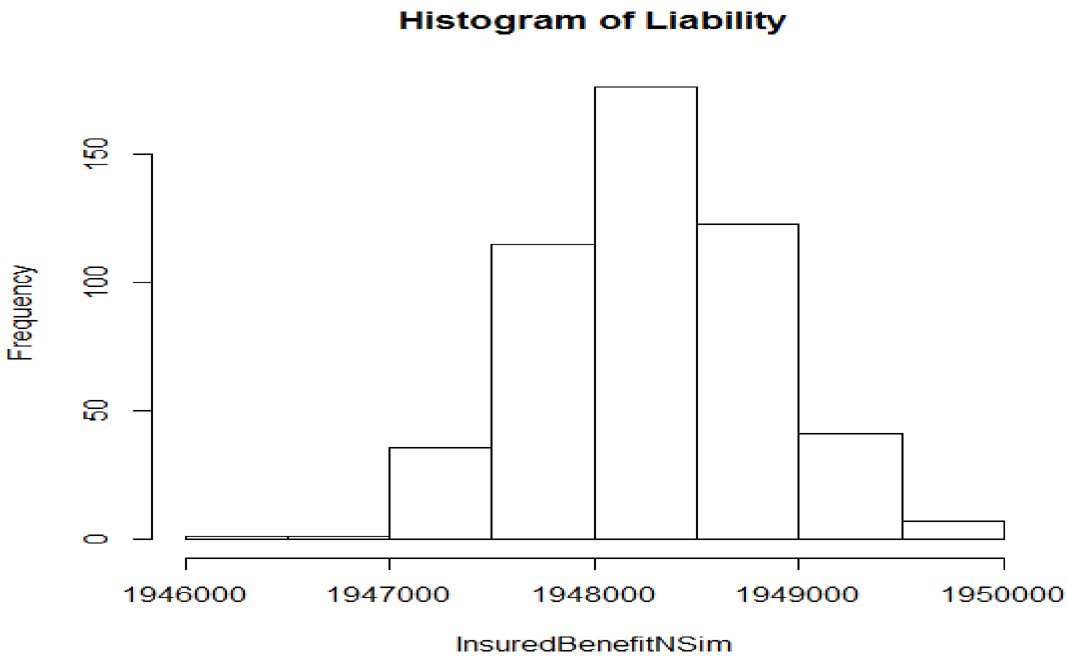
Πίνακας 6. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 5 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson$(d_x \cdot 1.10)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	1.955.853	1.948.282	1.955.677	1.950.411
VaR99.5%	1.957.150	1.949.634	1.987.199	1.986.005
CVaR99.5%	1.957.262	1.949.774	1.994.211	1.989.032
SCR -VaR	1.297,00	1.351,90	31.522,41	35.594,88
SCR-CVaR	1.409,51	1.491,32	38.534,11	38.620,91
SR-VaR	0,066%	0,07%	1,61%	1,82%
SR-CVaR	0,072%	0,076%	1,97%	1,98%
VaR75%	1.956.176	1.948.658	1965733.5	1.960.943
Risk Margin	323.2	375,60	10.056,21	10.531,81

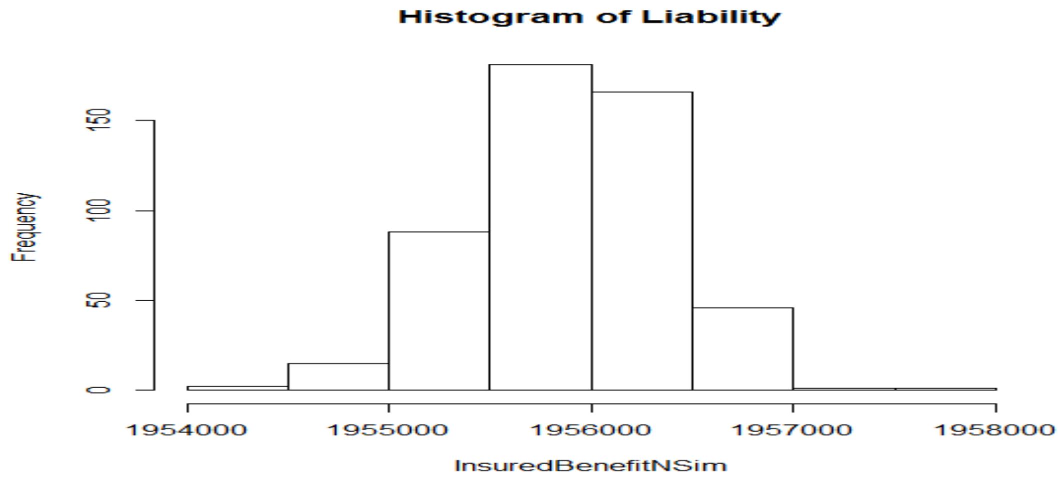
Γράφημα 21. Poisson (d_x)



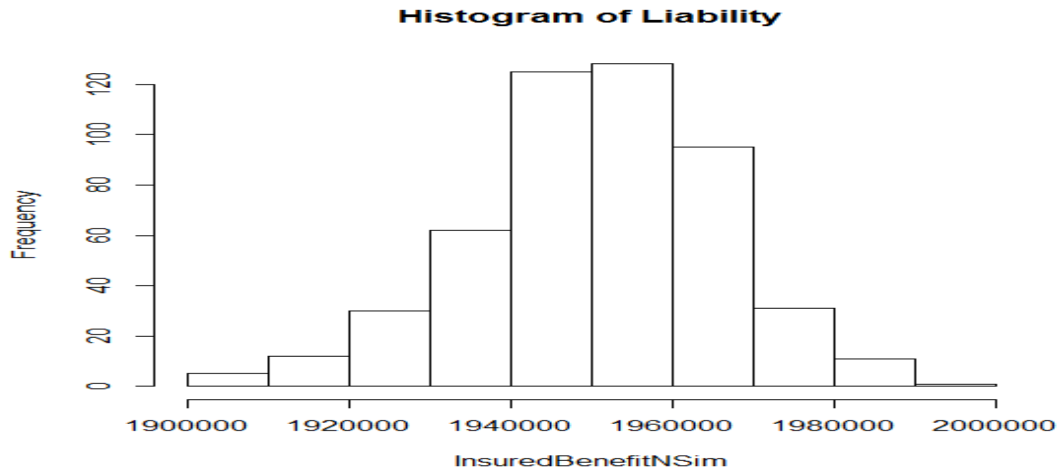
Γράφημα 22. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 23. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1, 1)$



Γράφημα 24. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10, 1)$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €7.571, €7.516, €7.488, αντίστοιχα και κατά €5.266, €1.194, €5.179, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €54, €82, αντίστοιχα και κατά €4.072, €86, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.8 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 10 ετών

(5-years term life annuity 10-years deferred)

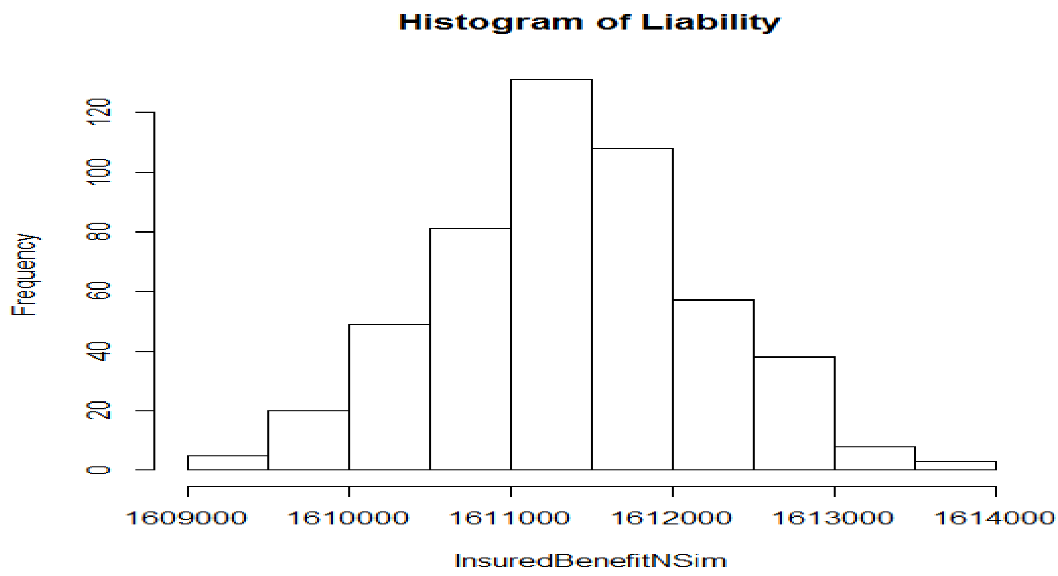
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στην ασφαλισμένο €1.000 ετησίως για διάστημα 5 ετών, εφόσον έχει επιζήσει για 10 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

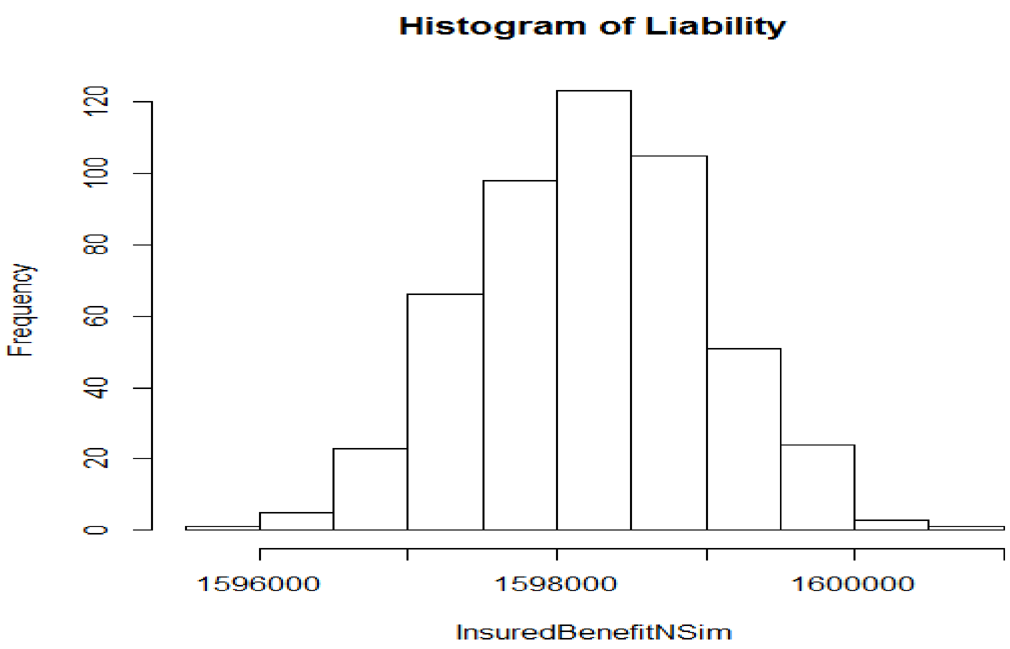
Πίνακας 7. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 5 ετών Μέλλουσα 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	1.611.374	1.598.216	1.613.304	1.598.529
VaR99.5%	1.613.440	1.600.095	1.670.328	1.652.578
CVaR99.5%	1.613.716	1.600.368	1.673.590	1.654.131
SCR -VaR	2.065,88	1.879,11	57.023	54.049,51
SCR-CVaR	2.342,00	2.152,74	60.286	55.602,01
SR-VaR	0,128%	0,118%	3,53%	3,381%
SR-CVaR	0,145%	0,135%	3,73%	3,478%
VaR75%	1.611.915	1598.721	1.630.771	1.613.922
Risk Margin	541,55	505,70	17.466,25	15.392,71

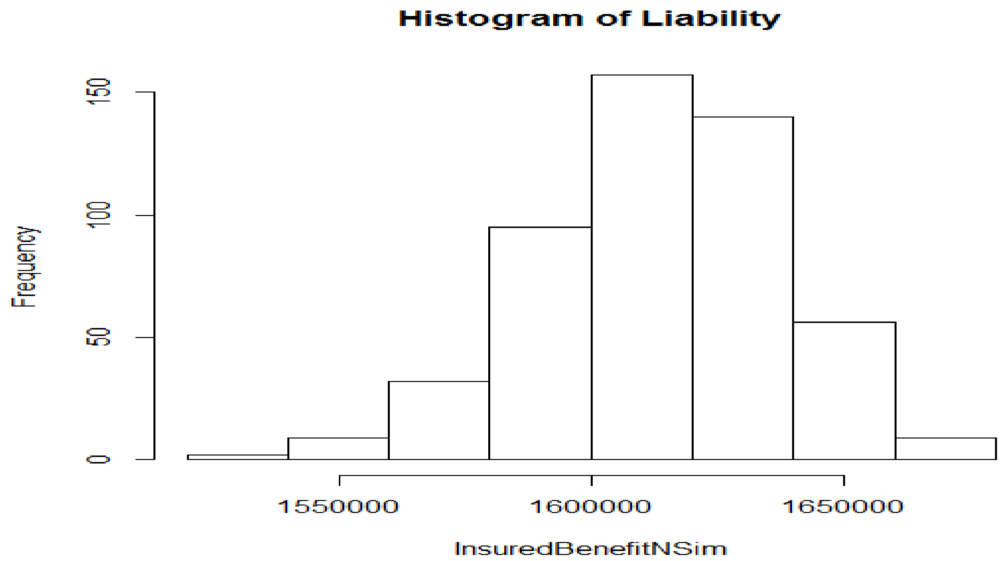
Γράφημα 25. Poisson (d_x)



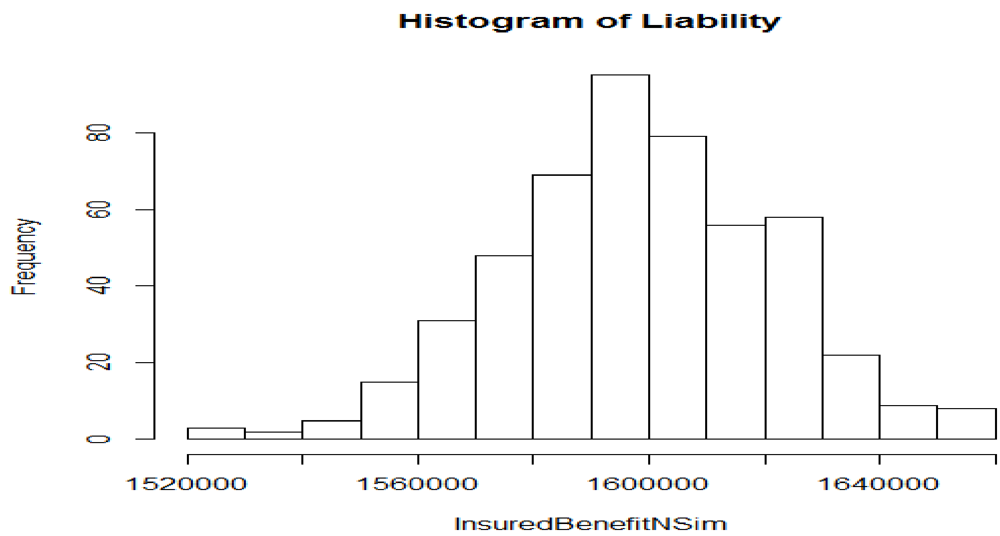
Γράφημα 26. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 27. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1, 1)$



Γράφημα 28. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10, 1)$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €13.158, €13.345, €13.348, αντίστοιχα και κατά €14.775, €17.750, €19.459, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 μειώνεται στην Poisson κατά €186, €190, αντίστοιχα και κατά €2.974, €4.684, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο ελαφριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας, ενώ το μειωμένο SCR λόγω μεγάλης χρονικής αναβολής (10 έτη).

6.9 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών

(10-years term life annuity)

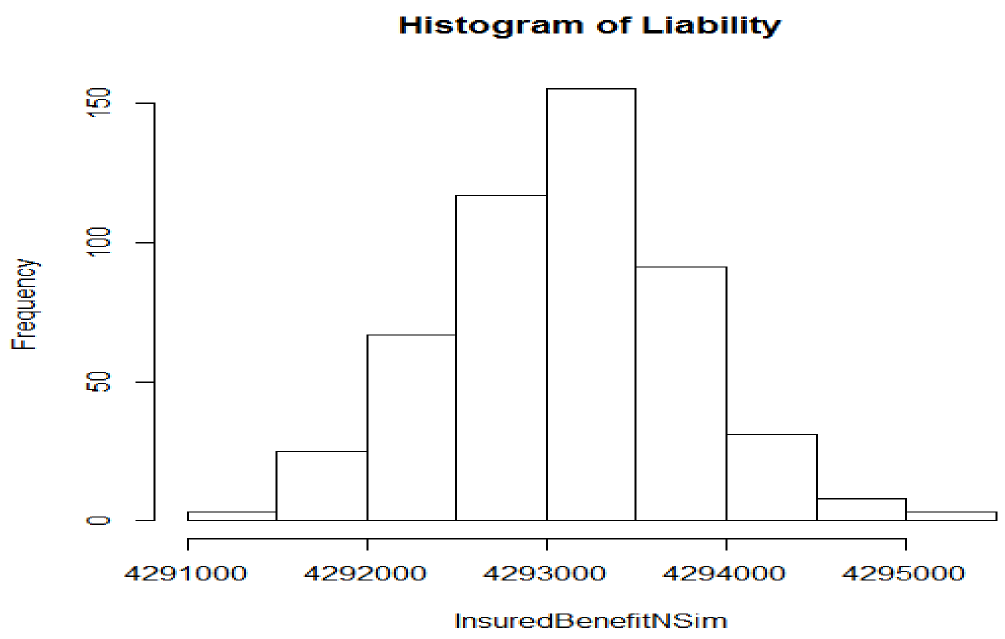
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους ασφαλισμένους €1.000 ετησίως για διάστημα 10 ετών μετά την υπογραφή του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

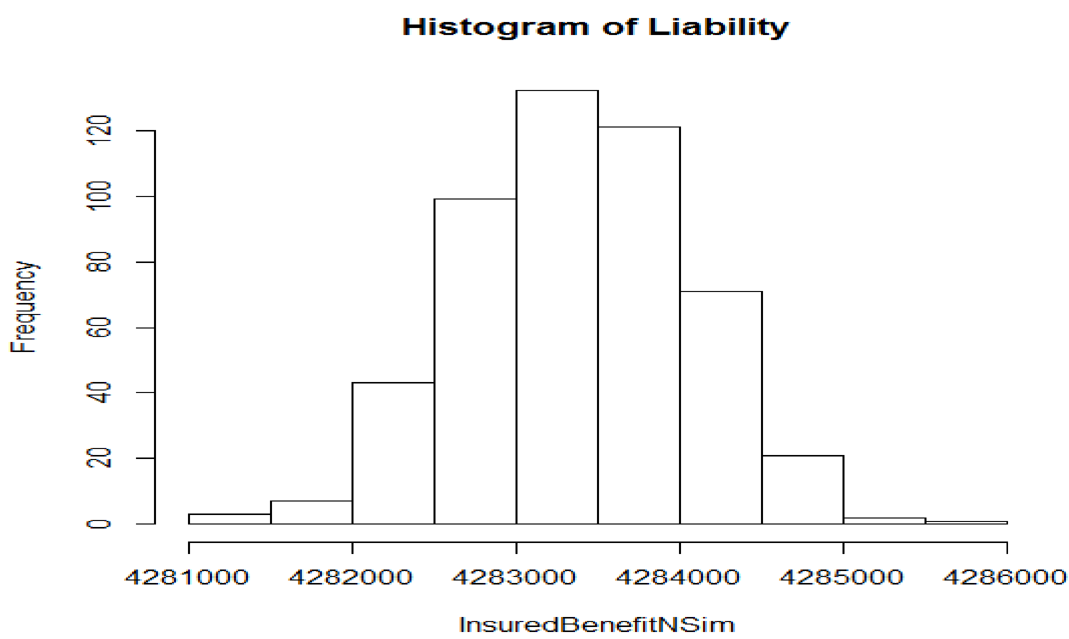
Πίνακας 8. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson($d_x \cdot 1.10$) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1{,}1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10{,}1)$ N=500
Best Estimate	4.293.098	4.283.383	4.292.723	4.281.076
VaR99.5%	4.294.998	4.284.965	4.337.579	4.326.334
CVaR99.5%	4.295.104	4.285.294	4.338.202	4.327.734
SCR -VaR	1.900,21	1.582,27	44.856,00	45.258,11
SCR-CVaR	2.006,55	1.910,72	45.479,11	46.658,26
SR-VaR	0,044%	0,037%	1,04%	1,057%
SR-CVaR	0,046%	0,045%	1,05%	1,089%
VaR75%	4.293.528	4.283.896	4.305.812	4.295.255
Risk Margin	430,40	513,47	13.088,71	14.179,,9

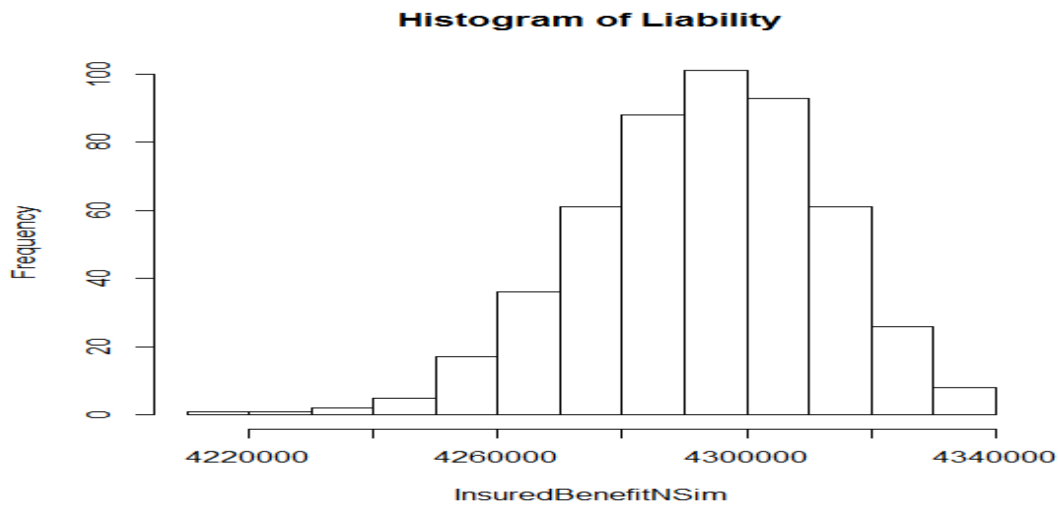
Γράφημα 29. Poisson (d_x)



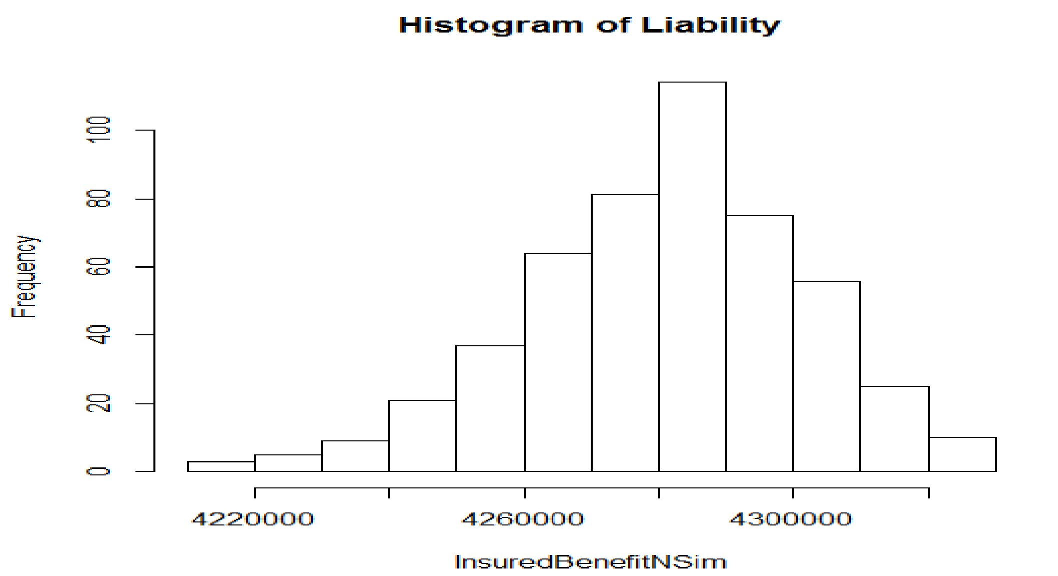
Γράφημα 30. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 31. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,q_x \sim Gamma(1,1)}$



Γράφημα 32. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,q_x \sim Gamma(1.10,1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €9.715, €10.033, €9.810, αντίστοιχα και κατά €11.647, €11.245, €10.468, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 μειώνεται στην Poisson κατά €318, €96, αντίστοιχα και αυξάνεται κατά €402, €1.179, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο ελαφριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Poisson και πιο βαριές στην Gamma-Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.10 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 5 ετών

(10-years term life annuity 5-years deferred)

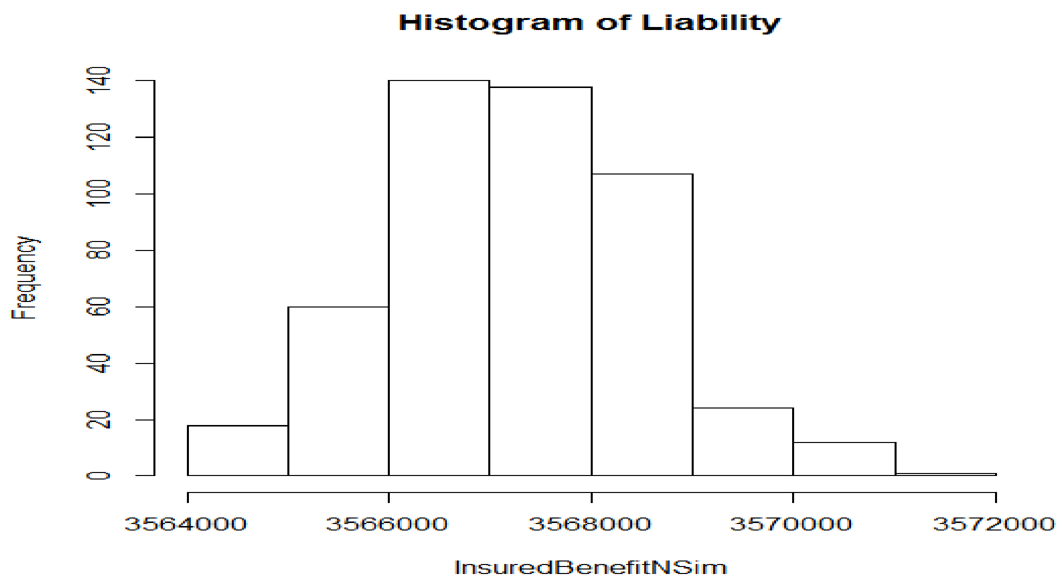
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στην ασφαλισμένο €1.000 ετησίως για διάστημα 10 ετών, εφόσον έχει επιζήσει για 5 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

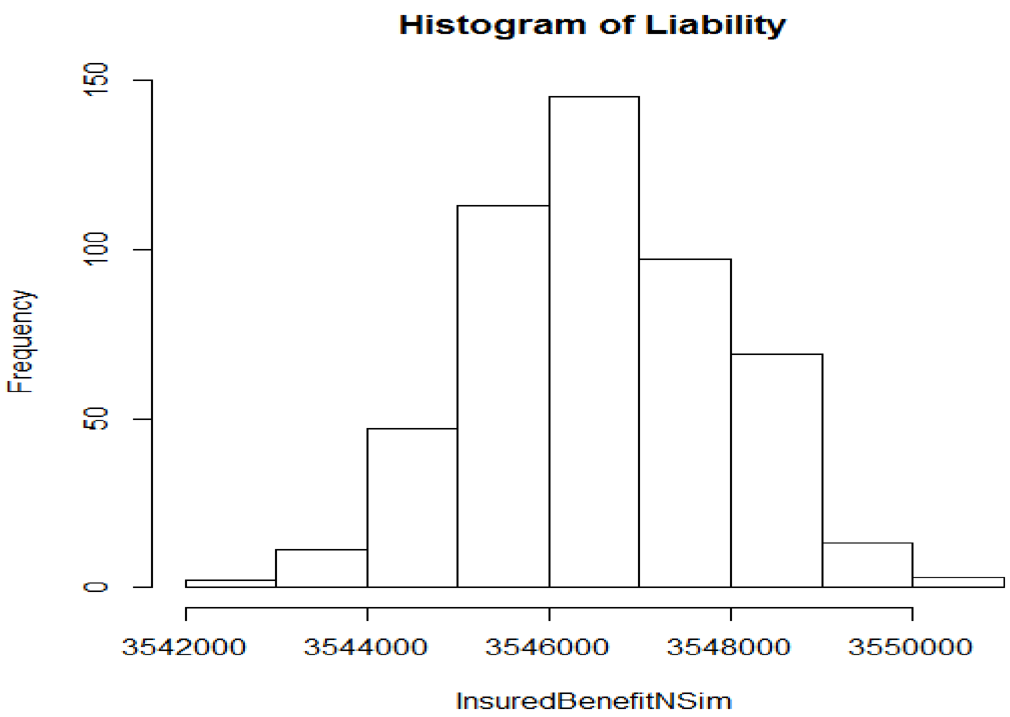
Πίνακας 9. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 5 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson($d_x \cdot 1.10$) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	3.567.243	3.546.593	3.565.171	3.546.164
VaR99.5%	3.570.782	3.549.998	3.651.192	3.629.135
CVaR99.5%	3.571.020	3.550.359	3.655.165	3.630.958
SCR -VaR	3.538,99	3.405,56	86.021,32	82.971,11
SCR-CVaR	3.777,56	3.766,46	89.994,31	84.794,25
SR-VaR	0,099%	0,096%	2,41%	2,339%
SR-CVaR	0,105%	0,106%	2,52%	2,391%
VaR75%	3.568.089	3.547.571	3.595.059	3.576.191
Risk Margin	846,33	978,81	29.888,81	30.026,51

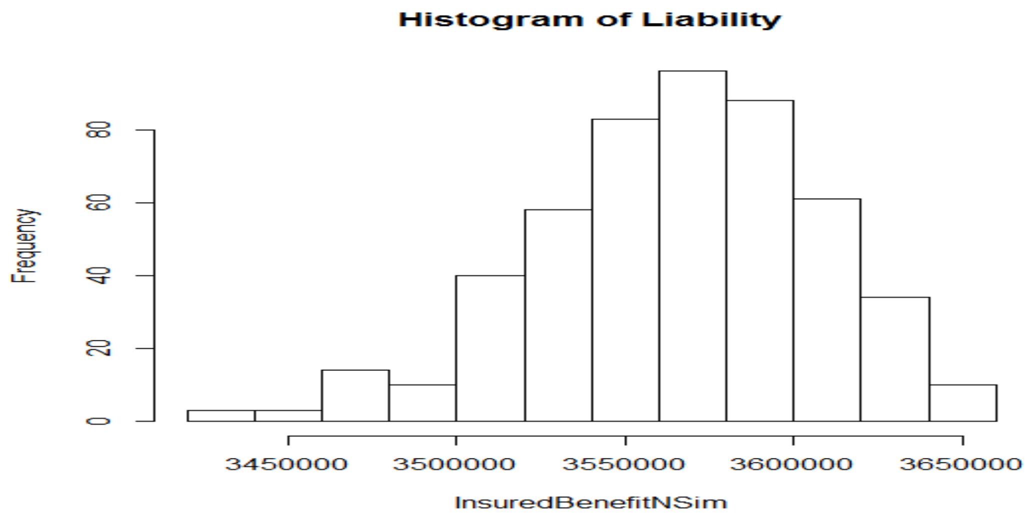
Γράφημα 33. Poisson (d_x)



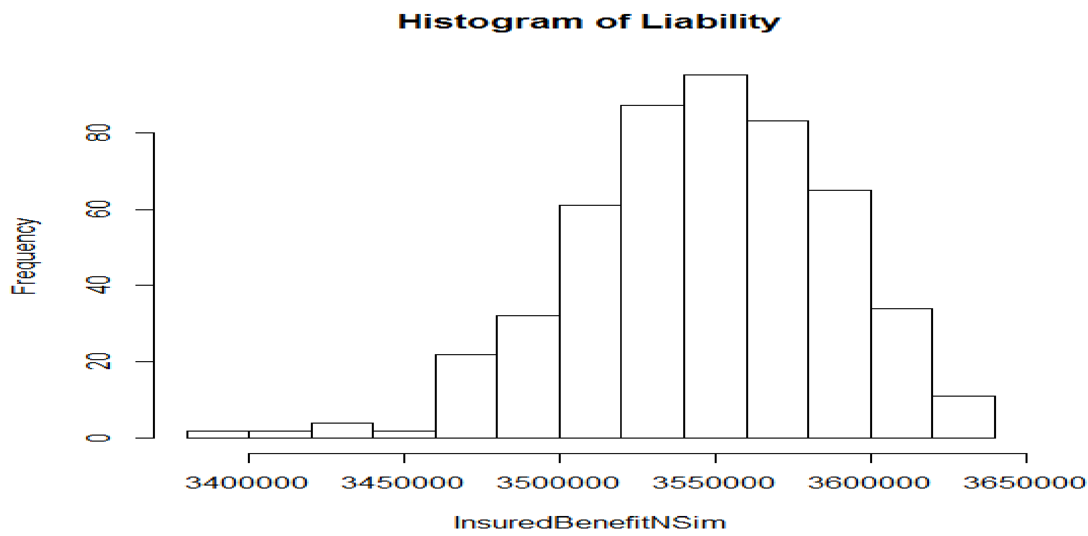
Γράφημα 34. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 35. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1, 1)$



Γράφημα 14. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10, 1)$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €20.650, €20.784, €20.661, αντίστοιχα και κατά €19.007, €22.057, €24.207, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 μειώνεται στην Poisson κατά €134, €11, αντίστοιχα και κατά €3.050, €5.200, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο ελαφριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.11 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 10 ετών

(10-years term annuity 10-years deferred)

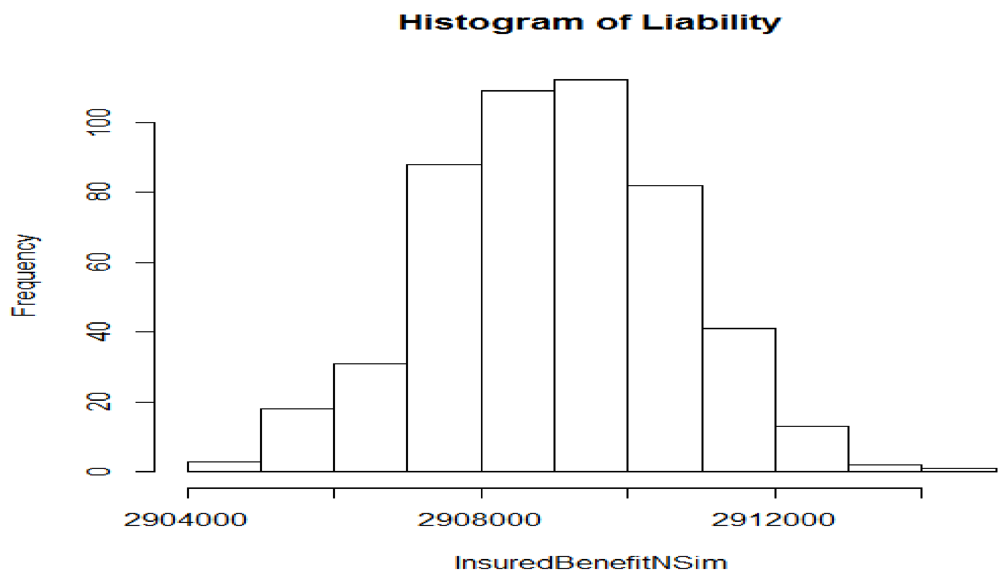
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στην ασφαλισμένο €1.000 ετησίως για διάστημα 10 ετών, εφόσον έχει επιζήσει για 10 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

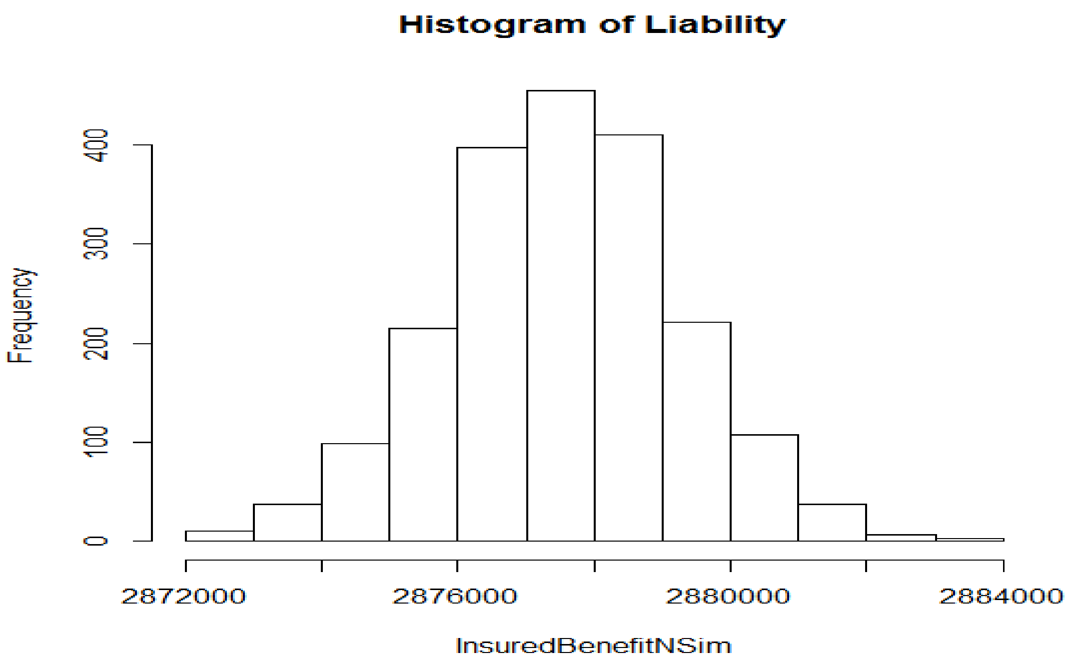
Πίνακας 10. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 10 ετών Μέλλουσα 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson$(d_x \cdot 1.10)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	2.909.024	2.877.526	2.908.497	2.879.400
VaR99.5%	2.913.039	2.881.990	3.037.613	2.992.528
CVaR99.5%	2.913.798	2.882.644	3.048.013	3.000.306
SCR -VaR	4.015,00	4.464,21	129.115	113.128
SCR-CVaR	4.773,24	5.117,53	139.515	120.905
SR-VaR	0,138%	0,15%	4,43%	3,92%
SR-CVaR	0,164%	0,178%	4,79%	4,19%
VaR75%	2.910.174	2.878.645	2.950.473	2.919.648
Risk Margin	1.149,1	1.118,89	41.975,27	40.247,99

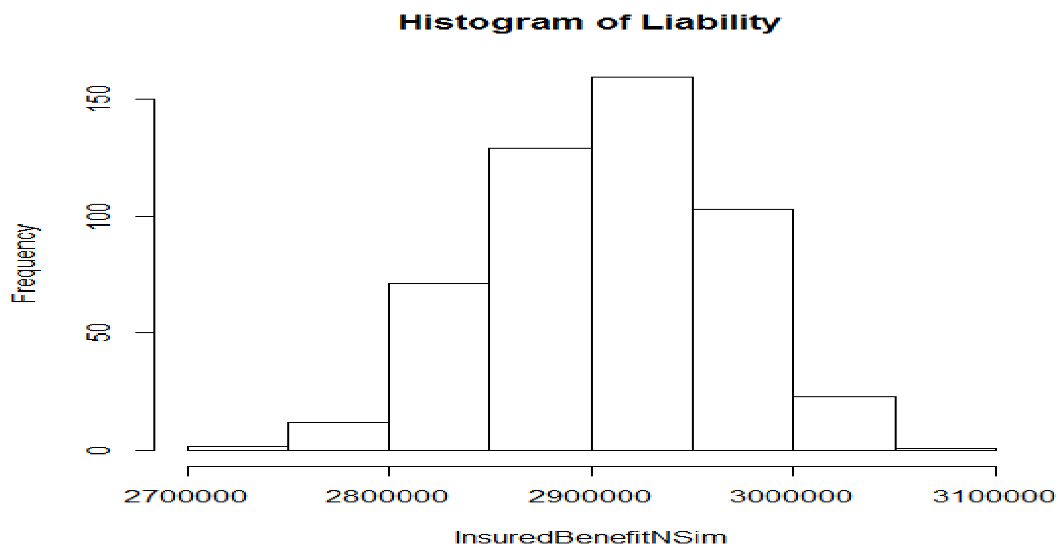
Γράφημα 37. Poisson (d_x)



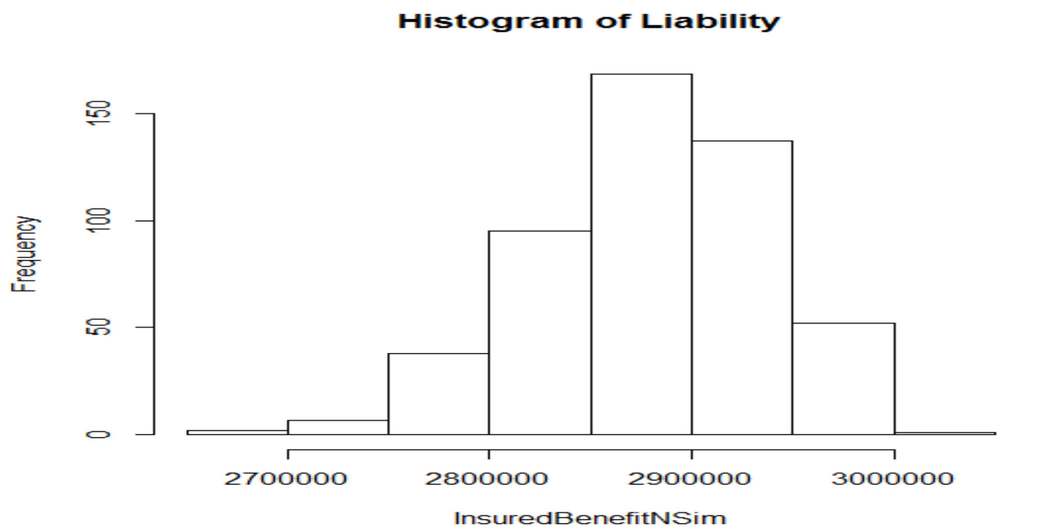
Γράφημα 38. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 39. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1, 1)}$



Γράφημα 40. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1.10, 1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €31.498, €31.049, €31.154, αντίστοιχα και κατά €11.097, €45.085, €47.707, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνεται στην Poisson κατά €449, €344, αντίστοιχα και μειώνεται κατά €15.987, €18.610, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο ελαφριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma-Poisson και πιο βαριές στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο

επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.12 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών

(20-years term life annuity)

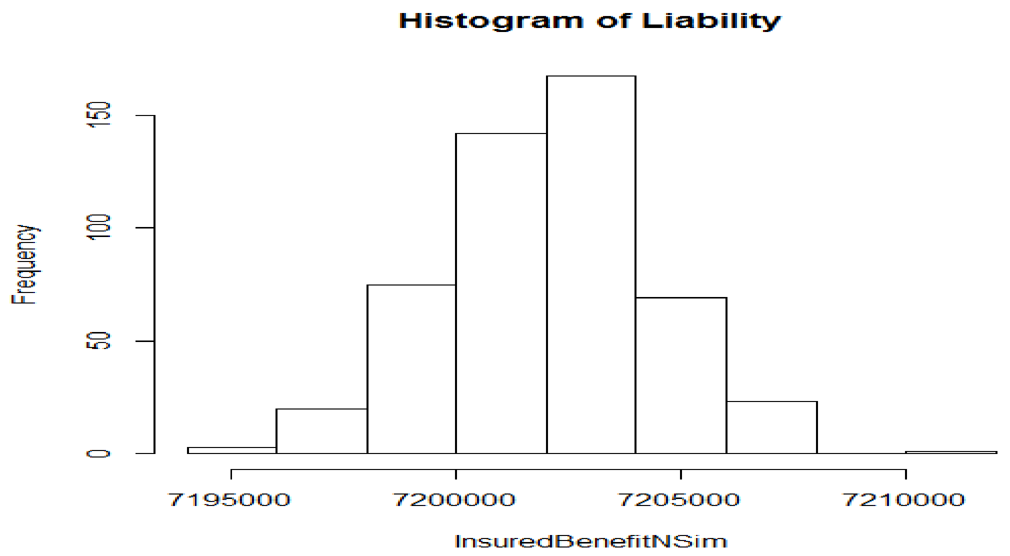
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στους ασφαλισμένους €1.000 ετησίως για διάστημα 20 ετών μετά την υπογραφή του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

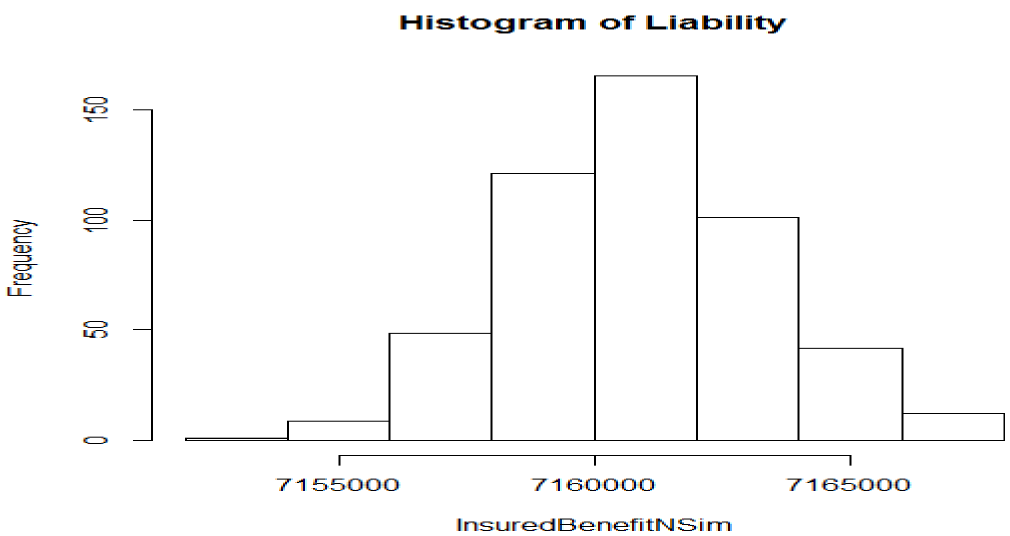
Πίνακας 11. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	7.202.035	7.160.878	7.201.775	7.162.846
VaR99.5%	7.207.677	7.166.535	7.373.110	7.327.576
CVaR99.5%	7.208.744	7.166.849	7.398.899	7.341.834
SCR -VaR	5.641,97	5.656,85	171.334	164.729
SCR-CVaR	6.709,00	5.971,14	197.123	178.987
SR-VaR	0,078%	0,078%	2,37%	2,29%
SR-CVaR	0,09%	0,083%	2,73%	2,49%
VaR75%	7.203.492	7.162.386	7.252.559	7.220.566
Risk Margin	1.457,33	1.508,165	50.783,27	57.719,36

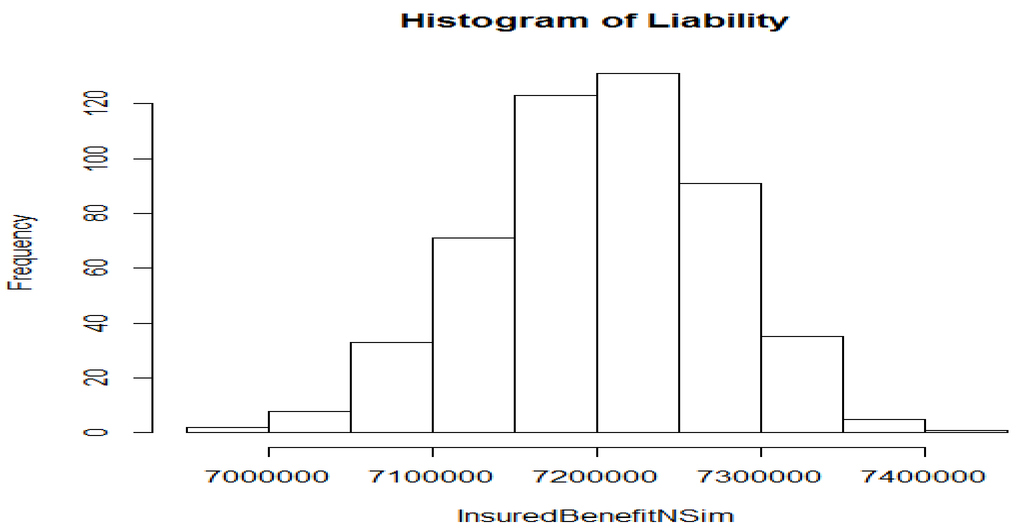
Γράφημα 41. Poisson (d_x)



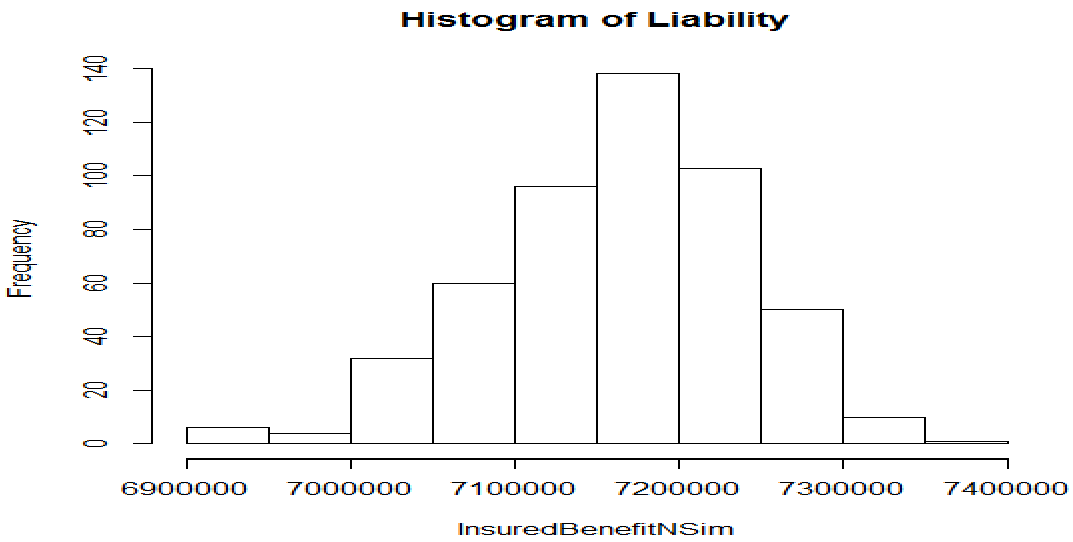
Γράφημα 42. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 43. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1, 1)}$



Γράφημα 44. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10, 1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €41.157, €41.142, €41.895, αντίστοιχα και κατά €38.929, €45.534, €57.065, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνεται στην Poisson κατά €15, €-738 (μείωση με CVaR995), αντίστοιχα και μειώνεται κατά €6.605, €18.136, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο ελαφριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο

επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.13 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 5 ετών

(20-years term life annuity 5-years deferred)

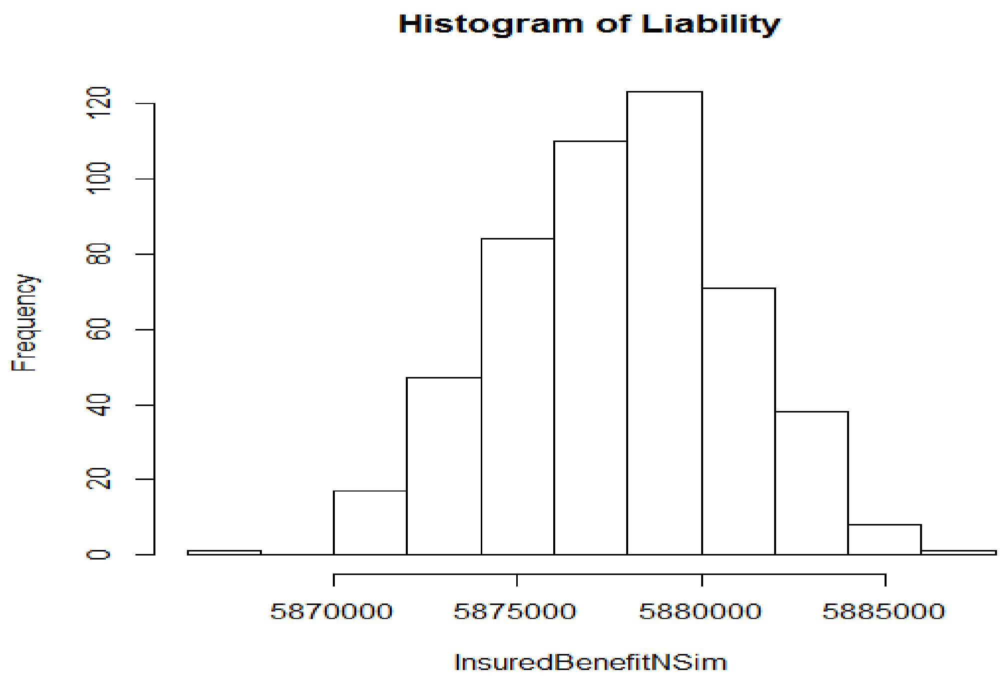
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στην ασφαλισμένο €1.000 ετησίως για διάστημα 20 ετών, εφόσον έχει επιζήσει για 5 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

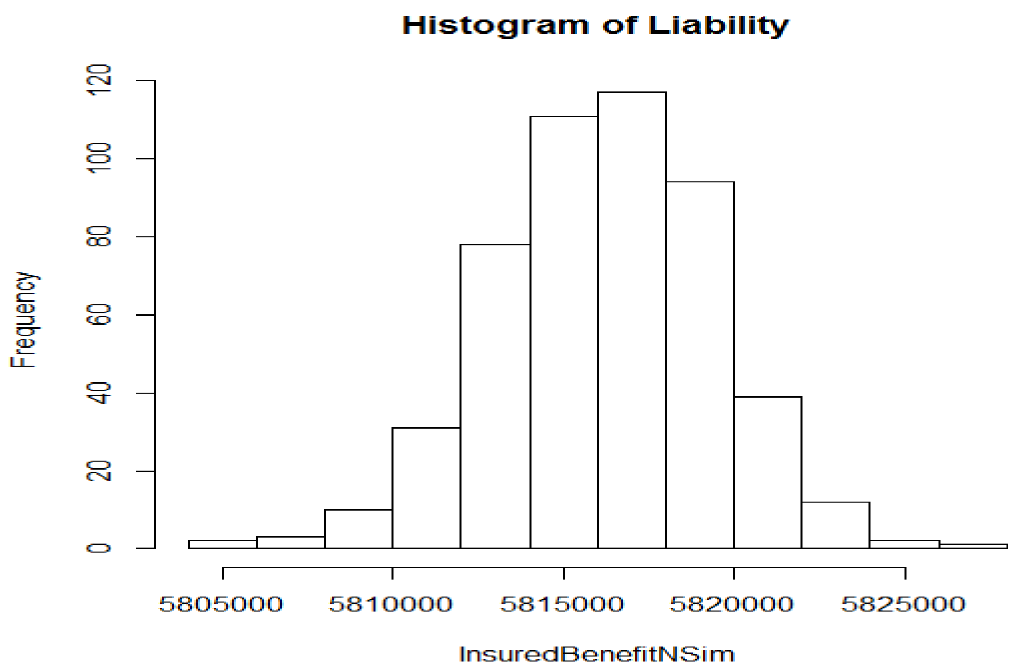
Πίνακας 12. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 5 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson$(d_x \cdot 1.10)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G$(d_x \cdot q_x)$ $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	5.877.709	5.816.196	5.880.058	5.814.807
VaR99.5%	5.885.541	5.824.074	6.096.067	6.064.329
CVaR99.5%	5.885.940	5.825.321	6.107.684	6.095.545
SCR -VaR	7.831,95	7.878,78	216.008	249.522
SCR-CVaR	8.231,26	9.125,17	227.626	280.738
SR-VaR	0,133%	0,135%	3,67%	4,29%
SR-CVaR	0,14%	0,156%	3,87%	4,827%
VaR75%	5.879.901	5.818.545	5.949.953	5.894.433
Risk Margin	2.192,12	2.349,101	69.894,91	79.626,00

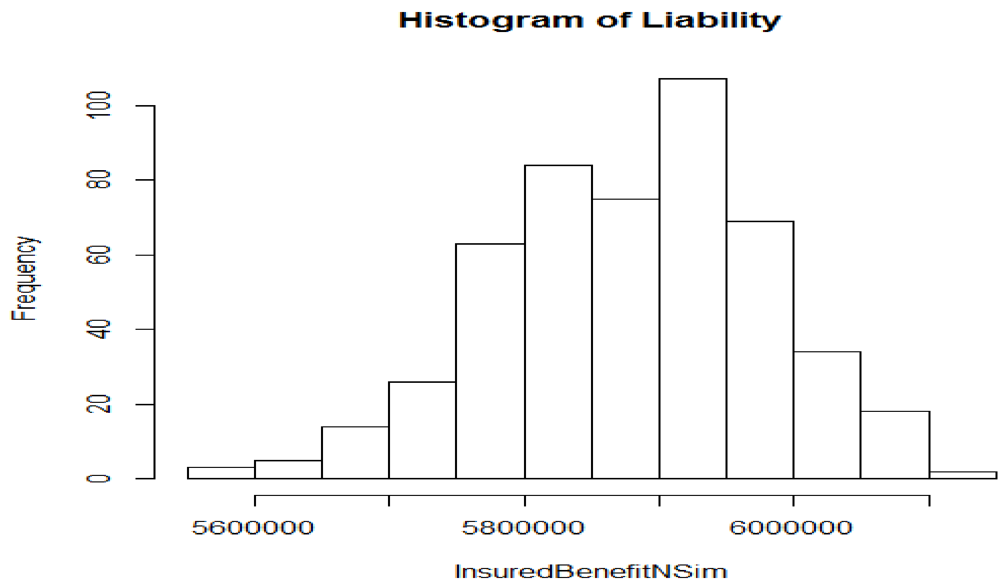
Γράφημα 45. Poisson (d_x)



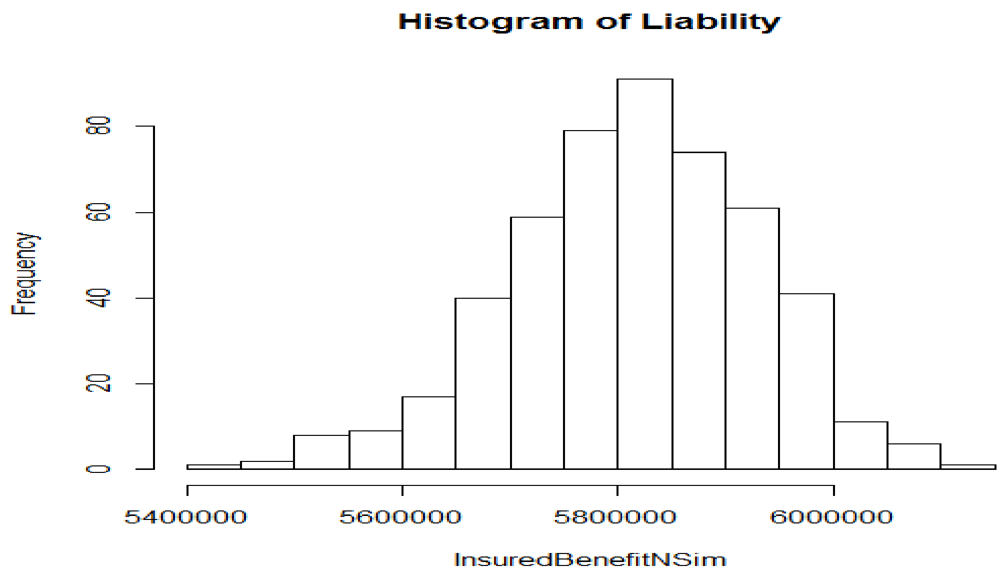
Γράφημα 46. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 47. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1, 1)$



Γράφημα 48. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10, 1)$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €61.513, €61.467, €60.619, αντίστοιχα και κατά €65.251, €31.738, €12.139, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνεται στην Poisson κατά €47, €894, αντίστοιχα και κατά €33.514, €53.112, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson.

Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.14 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 10 ετών

(20-years term life annuity 10-years deferred)

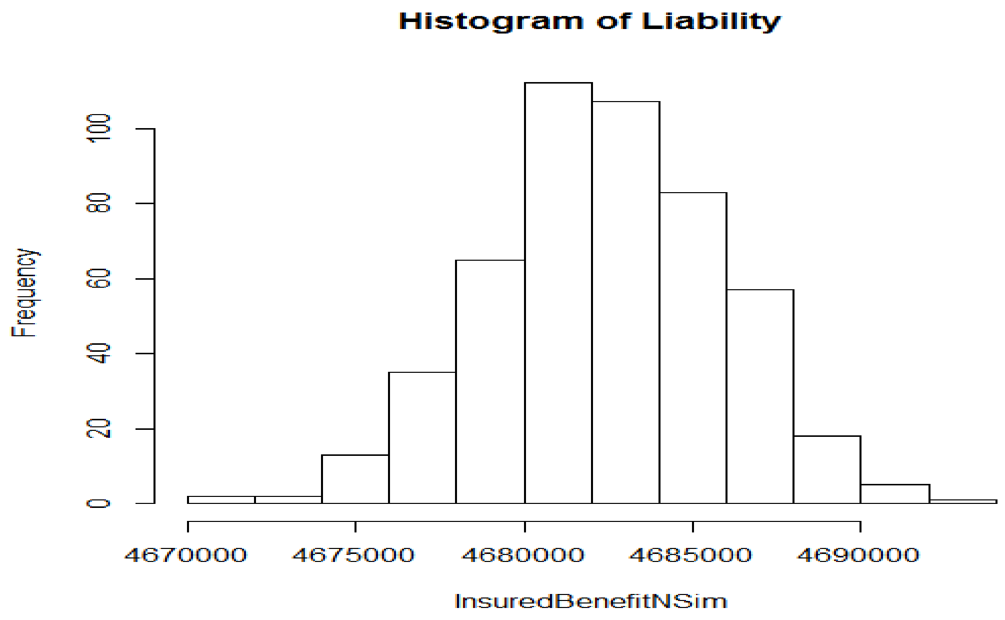
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η εταιρεία αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στην ασφαλισμένο €1.000 ετησίως για διάστημα 20 ετών, εφόσον έχει επιζήσει για 10 έτη από την ημερομηνία υπογραφής του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

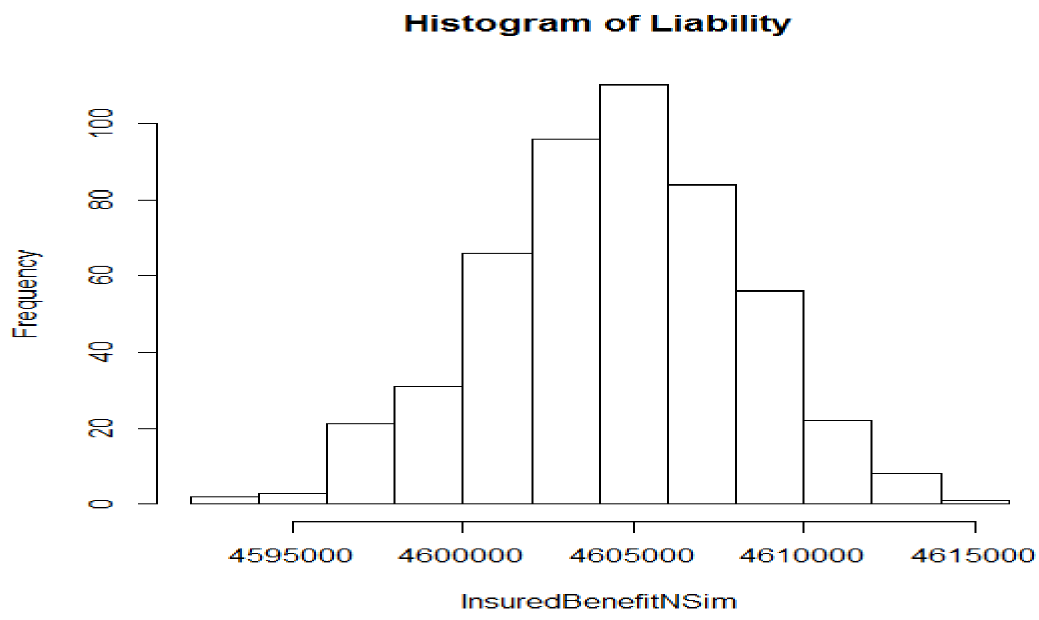
Πίνακας 13. Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής 20 ετών Μέλλουσα 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	4.682.416	4.604.492	4.684.472	4.609.621
VaR99.5%	4.691.006	4.613.171	4.994.283	4.932.321
CVaR99.5%	4.692.185	4.613.660	5.040.668	4.939.620
SCR -VaR	8.589,89	8.679,71	309.811	322.699
SCR-CVaR	9.768,00	9.168,56	356.196	329.998
SR-VaR	0,183%	0,189%	6,61%	7,00%
SR-CVaR	0,208%	0,199%	7,60%	7,16%
VaR75%	4.684.877	4.606.888	4.766.645	4.698.472
Risk Margin	2.460,66	2.396,15	82.172,99	88.850,22

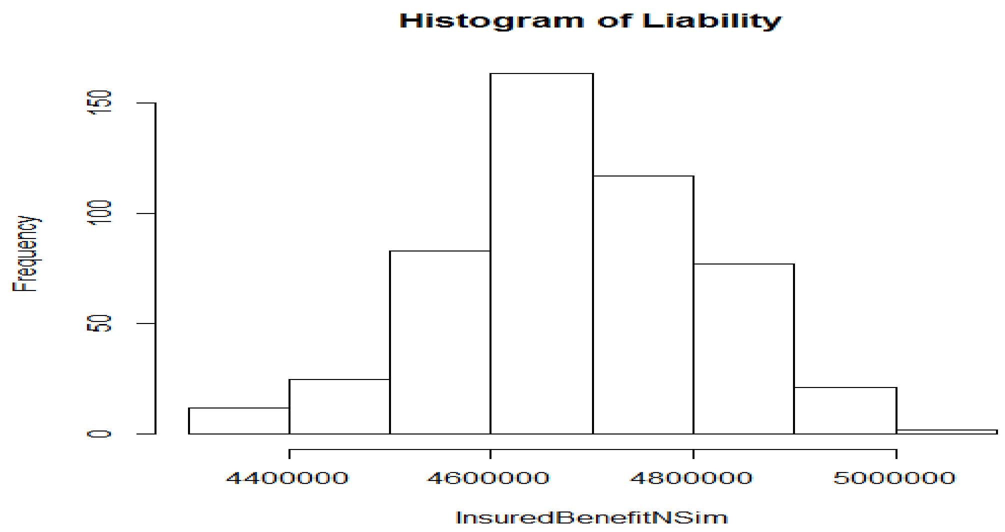
Γράφημα 49. Poisson (d_x)



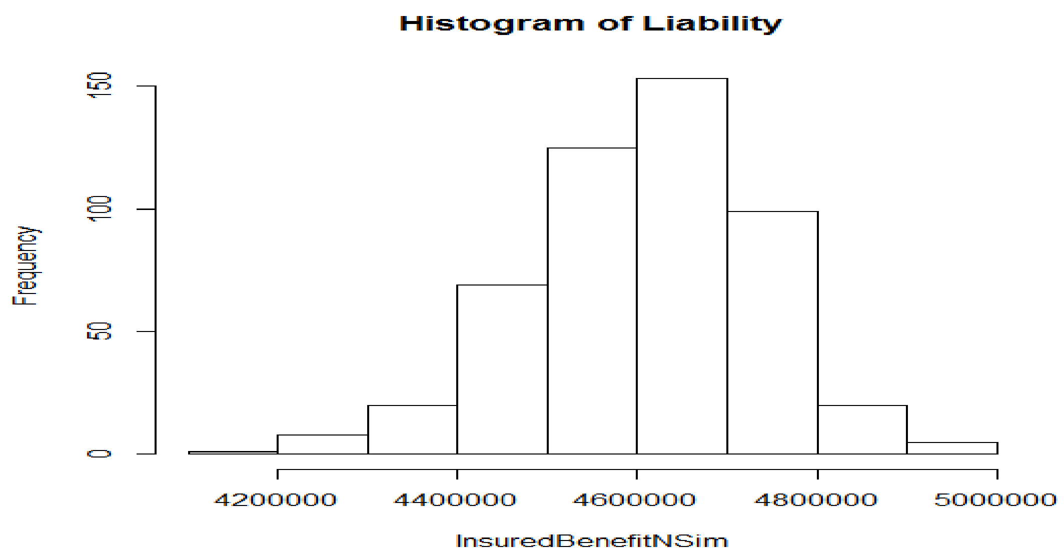
Γράφημα 50. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 51. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1,1)$



Γράφημα 52. $Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,, q_x \sim Gamma(1.10,1)$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €77.924, €77.835, €78.525, αντίστοιχα και κατά €74.851, €61.962, €101.048, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνεται στην Poisson κατά €90, €-600 (μείωση με την CVaR995), αντίστοιχα και κατά €12.888, €-26.198 (μείωση με την CVaR995), αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Gamma- Poisson και στην Poisson και γίνονται πιο ελαφριές στο δεξί άκρο των κατανομών. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο

επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.15 Σταθερό ποσό παροχής πριν την ηλικία συνταξιοδότησης

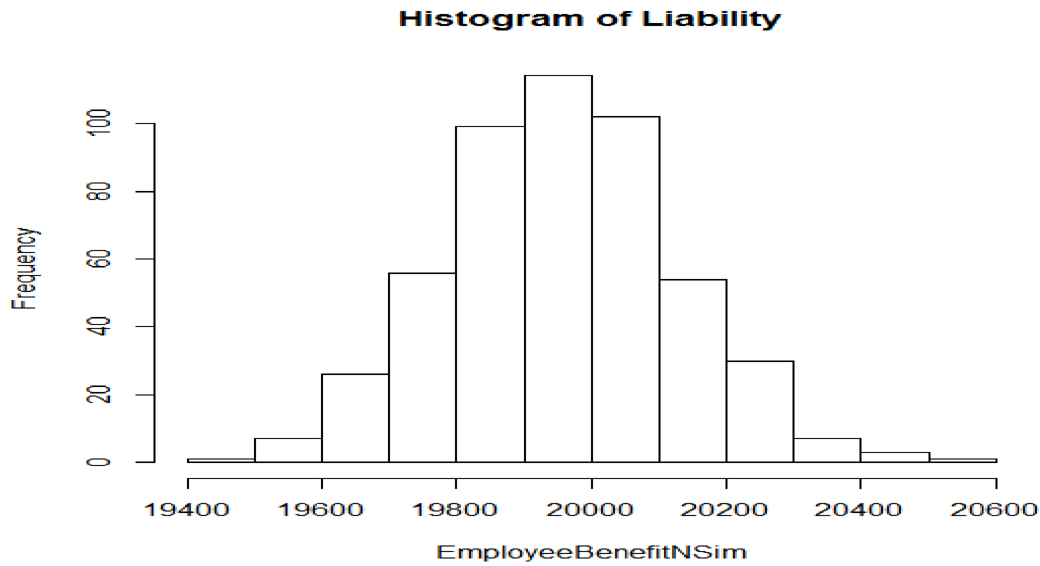
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό εργαζομένων (ασφαλισμένων) μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στον κληρονόμο (ή τους κληρονόμους) του εργαζομένου (ασφαλισμένου) το σταθερό ποσό των € 10.000, εφάπαξ, εάν ο ασφαλισμένος πεθάνει πριν την ηλικία συνταξιοδότησης που είναι αυτή των 65 ετών.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

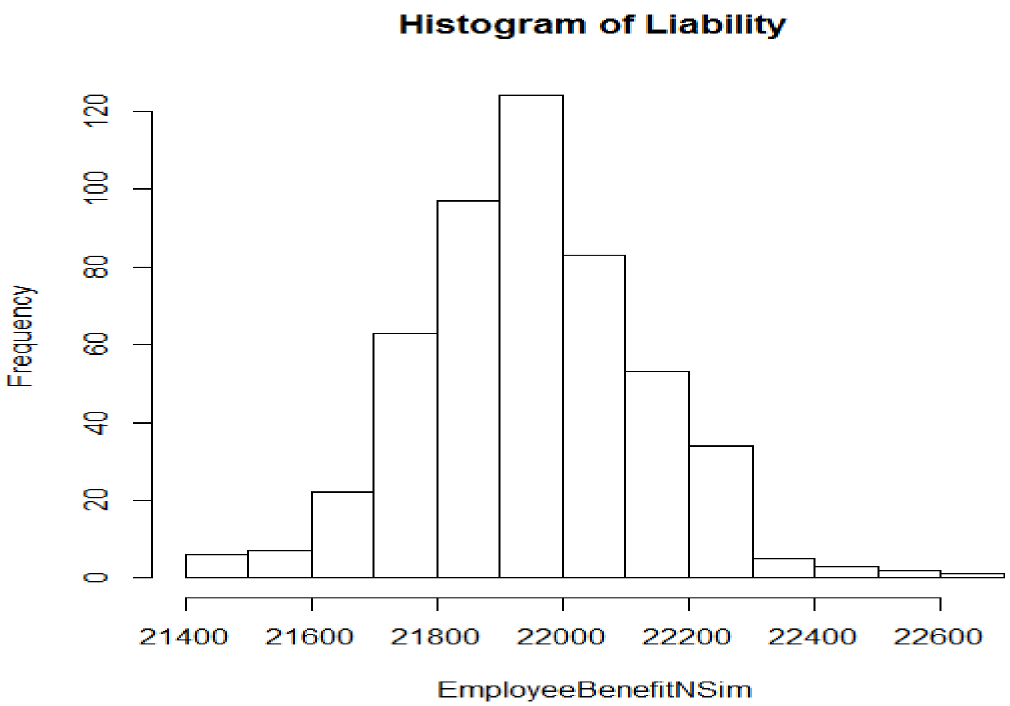
Πίνακας 14. Σταθερό ποσό παροχής πριν την ηλικία συνταξιοδότησης

	Poisson (d_x) N=500	Poisson(d_x ·1.10) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1,1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10,1)$ N=500
Best Estimate	19.955	21.950	19.985	22.181
VaR99.5%	20.420	22.486	35.058	36.803
CVaR99.5%	20.470	22.605	38.249	37.903
SCR -VaR	464,26	535,68	15.073	14.622
SCR-CVaR	514,80	654,70	18.264	15.722
SR-VaR	2,326%	2,44%	75,42%	65,92%
SR-CVaR	2,579%	2,982%	91,388%	70,88%
VaR75%	20.074,28	22.066,59	22.645,95	2.5036
Risk Margin	118,47	116,21	2.660,86	2.854,8

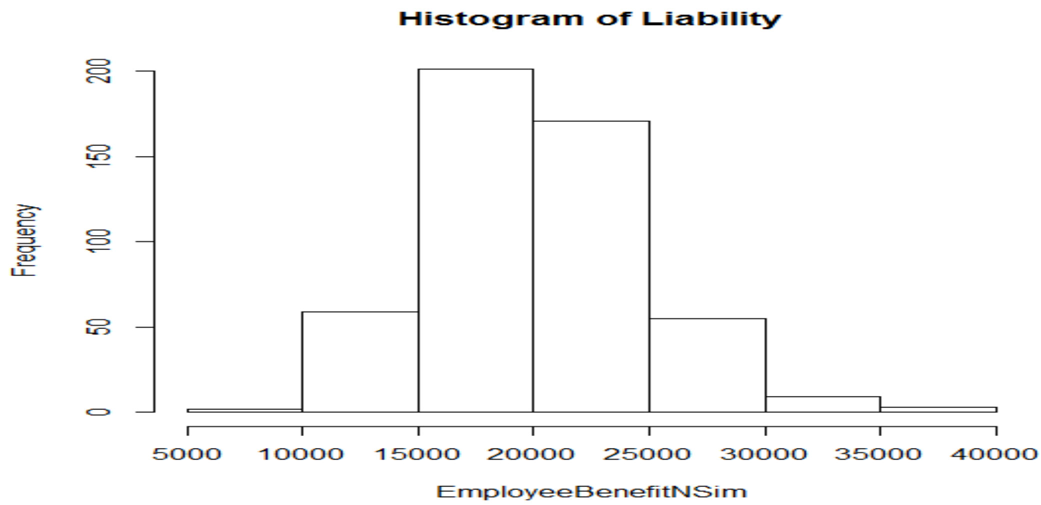
Γράφημα 53. Poisson (d_x)



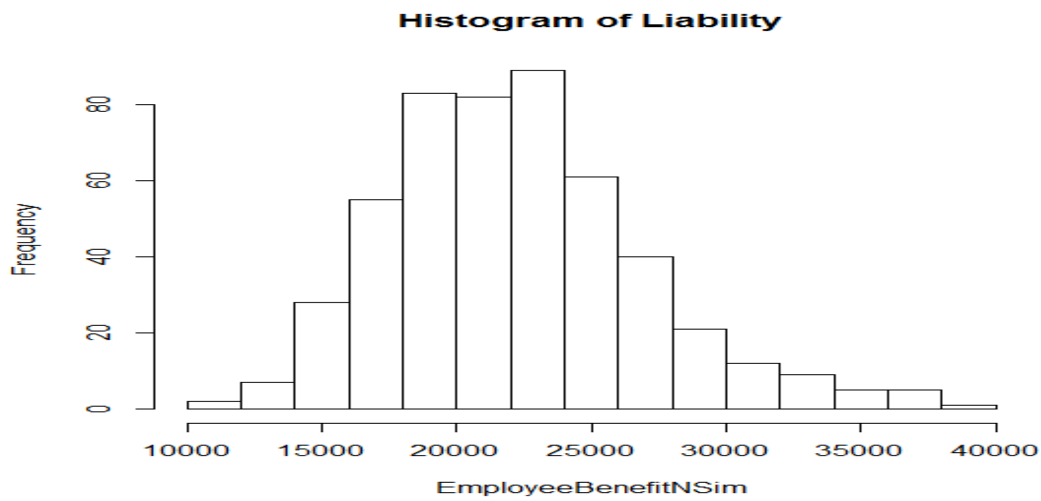
Γράφημα 54. Poisson ($d_x \cdot 1.10$)



Γράφημα 55. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1,1)}$



Γράφημα 56. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,\, q_x \sim Gamma(1.10,1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 αυξάνονται στην Poisson κατά €1.195, €2.066, €2.135, αντίστοιχα και κατά €2.196, €1.745, €-346, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνεται στην Poisson κατά €71, €140, αντίστοιχα και μειώνεται κατά €451, €2.542, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην Poisson και στην Gamma-Poisson και γίνονται πιο ελαφριές. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά περισσότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας.

6.16 Αυξανόμενη Ράντα Ζωής 10 ετών

(10-years term Increasing annuity)

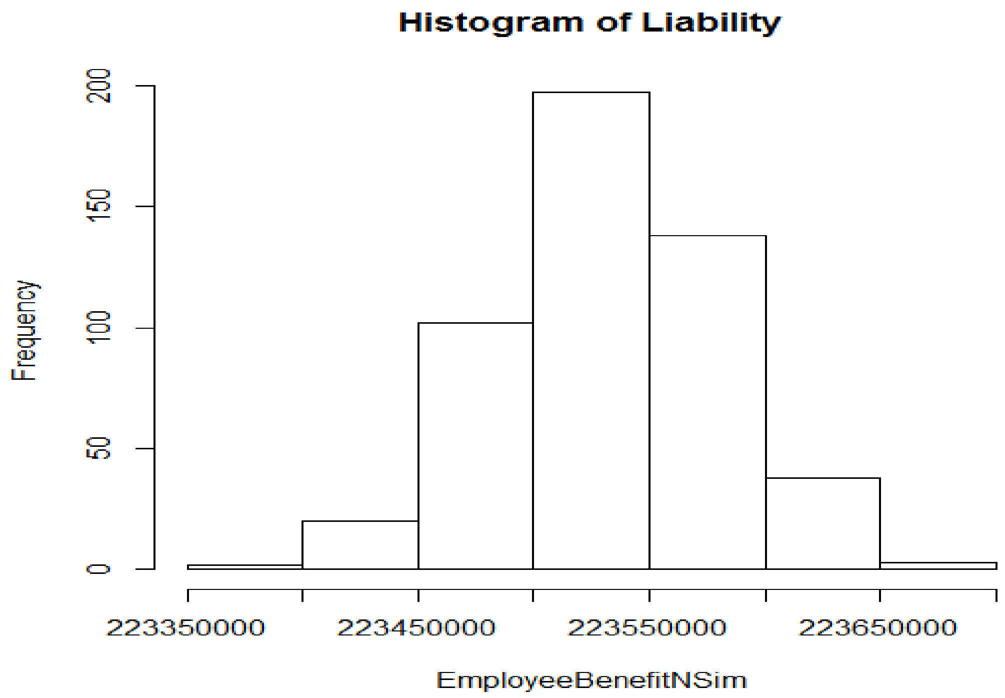
Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει έναν αριθμό ασφαλισμένων μια δεδομένη χρονική στιγμή. Η ασφαλιστική αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει στον ασφαλισμένο το ποσό των € 1.000 εάν ο ασφαλισμένος παραμείνει στη ζωή εντός του πρώτου έτους, το ποσό των € 2.000 εάν παραμείνει στη ζωή εντός του δεύτερου έτους, ενώ εάν παραμείνει στη ζωή μεταξύ του ένατου και δέκατου έτους θα λάβει το ποσό των € 10.000.

Ο υπολογισμός των ποσοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω και τα διαγράμματα της κατανομής των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι:

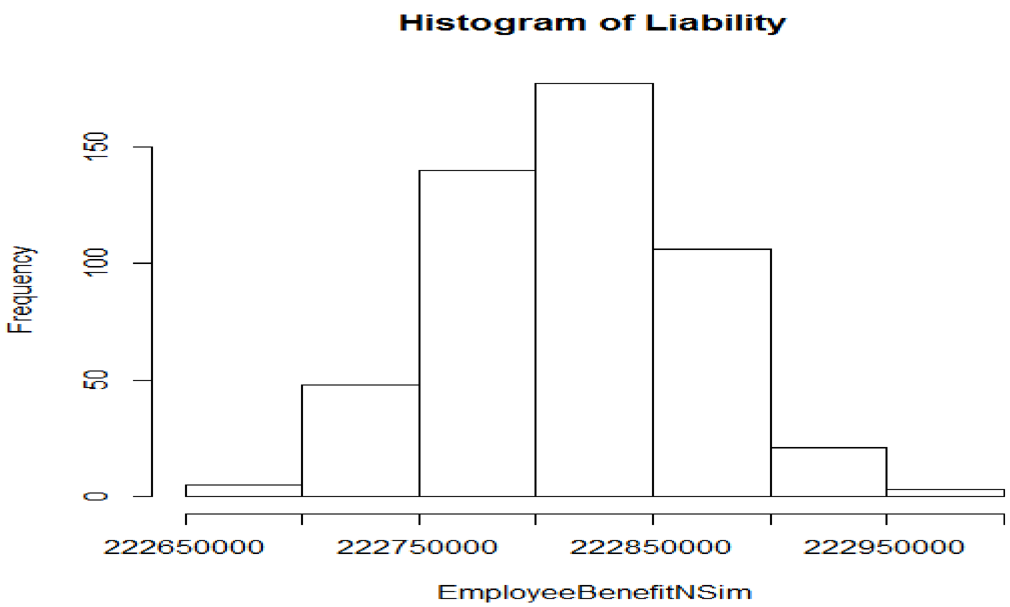
Πίνακας 4. Αυξανόμενη Ράντα Ζωής 10 ετών

	Poisson (d_x) N=500	Poisson($d_x \cdot 1.10$) N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1{,}1)$ N=500	P-G($d_x \cdot q_x$) $q_x \sim Gamma(1.10{,}1)$ N=500
Best Estimate	223.532.906	222.815.112	223.510.946	222.642.406
VaR99.5%	223.649.345	222.949.228	226.178.811	225.952.355
CVaR99.5%	223.672.132	222.955.514	226.373.032	226.246.291
SCR -VaR	116.438	134.116	2.667.864	3.309.949
SCR-CVaR	139.226	140.402	2.862.086	3.603.884
SR-VaR	0,052%	0,06019%	1,19%	1,486%
SR-CVaR	0,062%	0,06301%	1,28%	1,618%
VaR75%	223.566.399	222.853.105	224.515.063	223.625.820
Risk Margin	33493	37993.88	1004117	983413.9

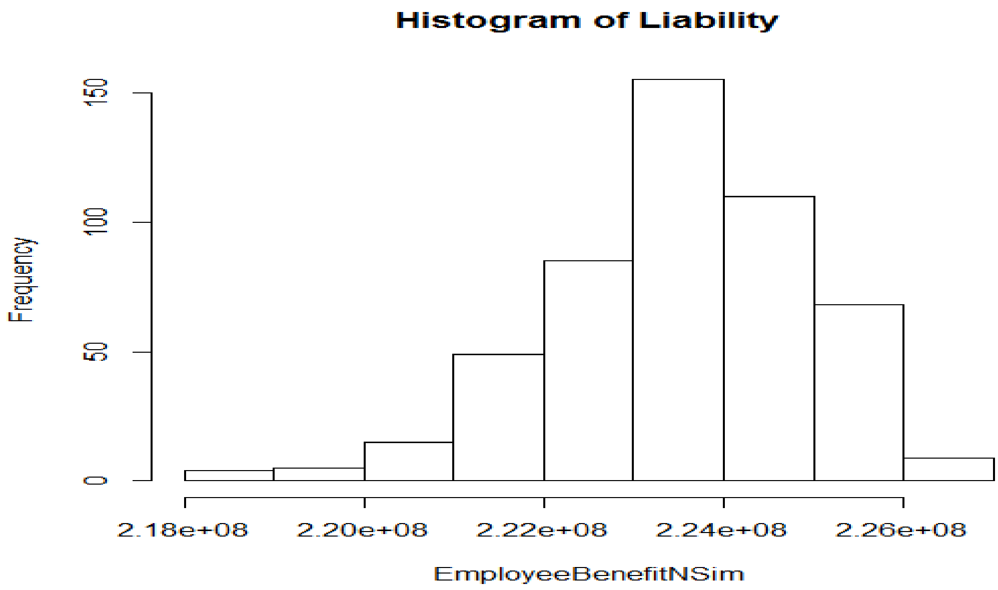
Γράφημα 15. Poisson (d_x)



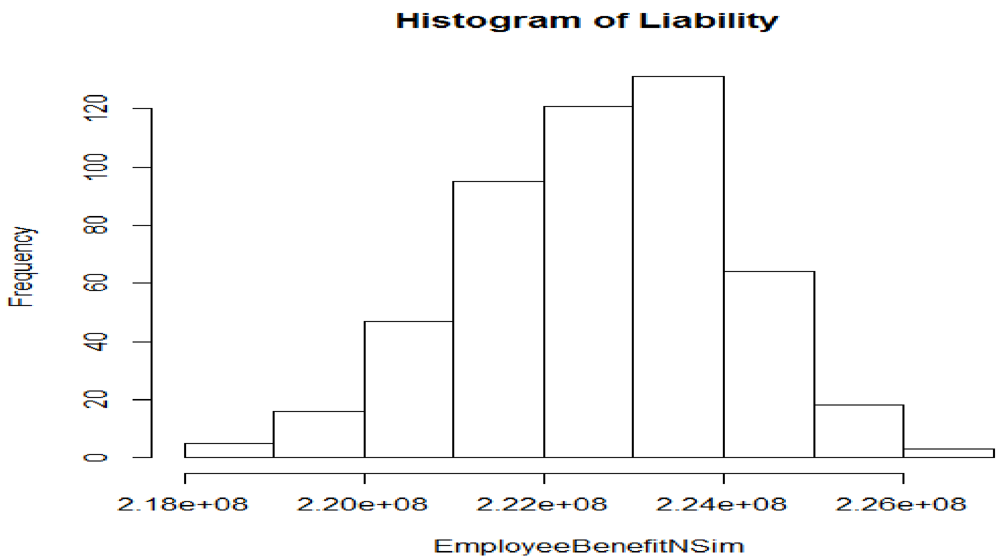
Γράφημα 16 Poisson ($d_x \cdot 1.10$).



Γράφημα 17. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,q_x \sim Gamma(1,1)}$



Γράφημα 18. $\boldsymbol{Poisson - Gamma(d_x \cdot q_x)\,,q_x \sim Gamma(1.10,1)}$



Όπως βλέπουμε από τον παραπάνω πίνακα και τα σχετικά γραφήματα, όταν αυξάνεται η πιθανότητα θνησιμότητας κατά 10% η Βέλτιστη Εκτίμηση, το VaR995 και CVaR995 μειώνονται στην Poisson κατά €717.794, €700.117, €716.618, αντίστοιχα και κατά €828.540, €226.456, €126.741, αντίστοιχα στην Gamma- Poisson, ενώ το κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) με τη προσέγγιση VaR995 και CVaR995 αυξάνεται στην Poisson κατά €17.678, €1.176, αντίστοιχα και κατά €642.085, €741.798, αντίστοιχα στην Gamma-Poisson, γιατί οι δεξιές ουρές των κατανομών των υποχρεώσεων είναι πιο βαριές μετά την αύξηση κατά 10% της θνησιμότητας στην

Gamma-Poisson και στην Poisson. Αυτό οφείλεται στο ότι αν αυξηθεί η θνησιμότητα η ασφαλιστική θα πρέπει να κρατά λιγότερες χρηματικές μονάδες κατά μέσο όρο επειδή ο βιομετρικός κίνδυνος που έχει το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο είναι ο κίνδυνος μακροβιότητας.

6.17 Συμπεράσματα

Βασικός στόχος της εφαρμογής μας ήταν να υπολογίσουμε το απαιτούμενο κεφάλαιο φερεγγυότητας (SCR) για διαφορετικούς τύπους ασφαλιστηρίων συμβολαίων με δυο διαφορετικές προσεγγίσεις, αυτήν της Αξίας σε Κίνδυνο(VaR) και της Υπό Συνθήκης Αξίας σε Κίνδυνο (CVaR). Προσομοιώνοντας στοχαστικά τον αριθμό των θανάτων από τον βιομετρικό πίνακα της ΕΑΕ 1990, μέσω της κατανομής 1) Poisson με μέση τιμή α) τον αριθμό των θανάτων και β) τον αριθμό των θανάτων προσθέτοντας μια μεταβλητότητα 10% επί αυτών και 2) Gamma-Poisson, όπου η Poisson έχει μέση τιμή τον αριθμό των θανάτων d_x επί την πιθανότητα θανάτουq_x, α) όπου $q_x \sim Gammaa(1{,}1)$ και β) $q_x \sim Gammaa(1.10{,}1)$. Το μοντέλο Gamma-Poisson με τη επιπλέον μεταβλητότητα 10% της θνησιμότητας δείχνει να απαιτεί περισσότερα κεφάλαια σε σχέση με αυτό της Poisson στα περισσότερα συμβόλαια που αναλύσαμε παραπάνω. Αυτό το ποσό όμως δεν είναι απαγορευτικό αφού το ποσοστό της συμμετοχής (SCR) προς τη Βέλτιστη Εκτίμηση των ασφαλιστικών υποχρεώσεων είναι αρκετά μικρό στα περισσότερα συμβόλαια. Άρα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η ασφαλιστική να είναι φερέγγυα, ως προς τις ασφαλιστικές υποχρεώσεις, στους ασφαλισμένους της.

7 Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

1. Panjer, H. (2002): Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates. Paper presented at AFIR/ICA, Cancun.

2. Sharma (2002): Prudential Supervision of Insurance Undertakings. Paper presented at Conference of Insurance Supervisory Services of the Member States of the European Union (now CEIOPS), December (the working group chaired by Paul Sharma, UK).

3. MARKT (2004e): Solvency II: Proposed Second Wave of Specific Calls for Advice from CEIOPS, MARKT/2519/04, November 2004.

4. MARKT (2005): Solvency II: Consultative Document, Draft Specific Calls for Advice from CEIOPS (Third Wave), MARKT/2501/05, February 2005.

5. Móller report (1997): Report of the Working Group "Solvency of Insurance Undertakings" Set Up by the Conference of the European Union Member States.

6. KPMG (2002): Study into the Methodologies to Assess the Overall Financial Position of an Insurance Undertaking from the Perspective of Prudential Supervision, Contract ETD/2000/BS-3001/C/45. KPMG, May.

7. Jarvis, S., F. Southall, and E. Varnell (2001): Modern Valuation Techniques IAIS (2005): Towards a Common Structure and Common Standards for the Assessment of Insurer Solvency. Cornerstones for the Formulation of Regulatory Financial Requirements, Draft 11. IAIS, February.

8. IASB (2001): Draft Statement of Principles (DSOP) on Insurance Contracts. IASB, November 16.

9. IASB (2003): Exposure Draft ED 5 Insurance Contracts. IASB.

10. IASB (2004): IFRS 4 Insurance Contracts. IASB (including IFRS 4 Insurance Contracts, Basis for Conclusions; and Implementation Guidance).

11. IAA (2004): *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*. IAA, Ontario.

12. Arne Sandström : Swedish Insurance Federation, Stockholm, Published in 2006 by Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group.

13. Hürlimann, W. : Biometric solvency risk for portfolios of general life contracts (I)MULTIPLE DECREMENT CASE,2010.

14. Hürlimann, W.: Biometric solvency risk for portfolios of general life contracts (II) The Markov Chain Approach, 2010.

15. QIS5 (2010). Technical Specifications QIS5 – CEIOPS Quantitative Impact Study 5. 2010 July 5.

16. Gerber, H.U. : Life Insurance Mathematics. 3rd ed. Berlin: Springer; 1997.

17. Bühlmann, H.: A probabilistic approach to long-term insurance (typically life insurance).Trans. 20th Int. Congress of Actuaries. 1976; vol. 4: 267-276.

18. Gerber, H.U; Leung, B.P.K., Shiu, E.S.W.: Indicator function and Hattendorff theorem. North Amer. Actuarial J. 2003; 7(1): 38-47.

19. Olivieri, A., Pitacco, E. : Stochastic mortality: the impact on target capital. ASTIN Bulletin.2009; 39(2): 541-563.

20. Christiansen, M.: Biometric worst-case scenarios for multi-state life insurance policies, Insurance: Math. and Economics. 2010; 47(2): 190-197.

21. Hürlimann, W.: 2009, Actuarial Analysis of the Multiple Life Endowment Insurance Contract. 3rd IAA LIFE Colloquium, Munich, September 6–9.

22. Hürlimann, W.: 2010a. Actuarial Analysis of Dependent Lives in Solvency II.

23. OLIVIERI, A., AND E. PITACCO: 2009b. Solvency Requirements for Life Annuities Allowing for Mortality Risks: Internal Models vs. Standard.

24. Levantesi S. , Menzietti M.: Longevity and disability risk analysis in enhanced life annuities,(2011).

25. Ferri, S., Olivieri, A.: Technical bases for LTC covers including mortality and disability projections. In: Proceedings of the 31st International ASTIN Colloquium, Porto Cervo (Italy) (2000).

26. Haberman S., Pitacco E.: Actuarial Models for Disability Insurance. Chapman &Hall, London (1999).

27. Levantesi, S., Menzietti, M.: Biometric Risk Analysis and Solvency Requirements in LTC Insurance. Working paper n.30, Dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie, University of Rome ’La Sapienza’ (2006).

28. Olivieri, A., Pitacco, E.: Facing LTC risks. In: Proceedings of the 32nd International ASTIN Colloquium, Washington (2001).

29. Spedicato G.A.: The lifecontingencies Package. A Package to Perform Financial and Actuarial Mathematics Calculations in R.(2012).

Ελληνική

Πέτρος Κιόχος : Ασφαλιστικά Μαθηματικά ,1996.