



Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	Μοντέλα Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων σε παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων.
Όνοματεπώνυμο Φοιτητή	Κοπελιάρη Ε. Μαρία
Αριθμός Μητρώου	ΜΠΣΠ/09047
Κατεύθυνση	Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων
Επιβλέπων	Δημήτρης Κ. Δεσπότης, Καθηγητής

Ημερομηνία Παράδοσης **Δεκέμβριος 2013**

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Κοπελιάρη Ε. Μαρία

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Δ. Αποστόλου

Επικ. Καθηγητής

Δ. Δεσπότης

Καθηγητής

Χ. Κωνσταντόπουλος

Επικ. Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Περίληψη

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων αποτελεί μια από τις σπουδαιότερες μη-παραμετρικές τεχνικές εκτίμησης της αποδοτικότητας των μονάδων απόφασης σε ένα σύστημα. Τα τελευταία χρόνια, τα μοντέλα Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν στην αποτίμηση της αποδοτικότητας μονάδων απόφασης με εσωτερικές δομές. Οι εσωτερικές δομές ποικίλουν από μια απλή παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων ως ένα σύνθετο σύστημα. Σε αυτή την εργασία, μελετώνται οι παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων ως προς τη δομή τους, την εκτίμηση της συνολικής και επιμέρους αποδοτικότητας αλλά και ως προς την αποτελεσματική εύρεση προβολών προς το σύνορο αποδοτικότητας. Επίσης μελετώνται και ταξινομούνται εφαρμογές πάνω σε παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων ως προς τη μέθοδο που υιοθετούν αλλά και τα πεδία εφαρμογής.

Abstract

Data Envelopment Analysis is considered as one of the most important non-parametric techniques to evaluate the efficiency scores of Decision Making Units. Recently, network DEA models have been developed to examine the efficiency of DMUs with internal structures. The internal network structures range from a simple two-stage process to a complex system. In this current work, two-stage networks DEA are discussed with respect to the estimation of overall and divisional efficiency and projections. Furthermore, we study and categorize two-stage network DEA applications, based on the approach they use and their scope of application.

Πίνακας περιεχομένων

1.Εισαγωγή	6
1.1 Γενικά.....	6
1.2 Βασικές έννοιες	7
1.3 Βασικά μοντέλα.....	9
1.3.1 Το CCR μοντέλο	10
1.3.2 Το BCC μοντέλο	12
1.3.3 Το Additive μοντέλο	13
1.4 Παραγωγικές διαδικασίες πολλών σταδίων	14
2. Τύποι παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων	15
2.1 Τυπική παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων.....	15
2.1.1 Πολλαπλασιαστικό μοντέλο (Kao et al. 2008)	16
2.1.2 Προσθετικό μοντέλο (Chen et al. 2009).....	20
2.1.3 Despotis et al (2012).....	25
2.1.4 Slack Based Measure.....	29
2.2 Παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο.....	35
2.2.1 Liang et al (2006)	35
2.2.2 Li et al (2009).....	37
2.2.3 Amirteimoori et al (2012).....	40
2.3 Παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ των δύο σταδίων	43
2.3.1 Chen et al (2006)	43
2.3.2 Chen et al (2010b)	45
2.4 Παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές, ενδιάμεσες εκροές και αποκλειστικές εισροές.....	50
2.4.1 Chen et al (2010b)	50

3. Εφαρμογές παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων	54
4. Συμπεράσματα	60
5. Βιβλιογραφία	62

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

1. Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων-ΠΑΔ (Data Envelopment Analysis - DEA) αποτελεί μια μη παραμετρική μέθοδο γραμμικού προγραμματισμού για την εκτίμηση της σχετικής αποδοτικότητας των Μονάδων Απόφασης –ΜΑ (Decision Making Units - DMU) οι οποίες καταναλώνουν πολλαπλές εισροές (inputs) και παράγουν πολλαπλές εκροές (outputs). Από την εφαρμογή της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων, δημιουργείται ένα σύνολο μέγιστων παραγωγικών δυνατοτήτων το οποίο περικλείει όλες τις υπό διερεύνηση μονάδες, οι οποίες ταξινομούνται σύμφωνα με την αποδοτικότητά τους. Βάση αυτού του συνόρου οι μη αποδοτικές μονάδες συγκρίνονται με κάποιες αποδοτικές μονάδες οι οποίες καλούνται σύνολο αναφοράς. Η κάθε μονάδα μπορεί να βελτιώσει την αποδοτικότητά της, είτε μειώνοντας τις εισροές της, είτε αυξάνοντας τις εκροές της ή και τα δύο. Η μεθοδολογία της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το 1978 από τους Charnes, Cooper και Rhodes (CCR) και αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Banker et al (1984)-(BCC). Οι δύο παραπάνω προσπάθειες είχαν συνέπεια τη δημιουργία των δύο βασικών μοντέλων της μεθοδολογίας που είναι το CCR και το BCC, όπως ονομάστηκαν από τα αρχικά των συγγραφέων. Η διαφορά των δύο μοντέλων έγκειται στο ότι το CCR βρίσκει εφαρμογή υπό την υπόθεση σταθερών αποδόσεων κλίμακας (Constants Returns to Scale-CRS), ενώ το BCC υπό την υπόθεση μεταβλητών αποδόσεων κλίμακας (Variable Returns to Scale-VRS). Βασικά πλεονεκτήματα της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων είναι ότι δεν προϋποθέτει τη γνώση της συνάρτησης παραγωγής, ώστε να γίνει ανάλυση, σε αντίθεση με άλλες τεχνικές αποτίμησης αποδοτικότητας, που στηρίζονται στη στατιστική (regression analysis). Επίσης δεν χρειάζεται να ορισθούν από την αρχή τα βάρη (weights), αφού η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων υπολογίζει μόνη της τα βέλτιστα βάρη για κάθε μονάδα.

Η αποδοτικότητα μπορεί να εκτιμηθεί ως το ηλίκο της εκροής προς την εισροή. Για την εκτίμηση π.χ. της αποδοτικότητας των καταστημάτων μιας αλυσίδας, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ηλίκο των κερδών του καταστήματος ανά πλήθος υπαλλήλων. Η προσέγγιση της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων, δεν προϋποθέτει την επιλογή των βαρών που θα χρησιμοποιηθούν. Συγκεκριμένα, τα βάρη που χρησιμοποιούνται στη Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων, προκύπτουν από τα ίδια τα δεδομένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να βελτιστοποιούν την αποδοτικότητα της εκάστοτε μονάδας σε σύγκριση με τις υπόλοιπες μονάδες του συστήματος ώστε για κάθε μονάδα να επιλέγονται τα καλύτερα δυνατά βάρη.

Η Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων αποτελεί βασικό εργαλείο για την αποτίμηση της αποδοτικότητας παραγωγικών μονάδων και οργανισμών. Έχει εφαρμοστεί σε ευρεία κλίμακα στον τραπεζικό τομέα [(Avkiran, et al. 2009), (Cook et al. 2000), (Seiford et al. 1999)] και στην οργάνωση παραγωγής σύνθετων οργανισμών όπως εργοστάσια και δίκτυα καταστημάτων (Du J et al. 2010). Επίσης, εφαρμόζεται στην αξιολόγηση ξενοδοχειακών συγκροτημάτων (Hsieh et al. 2010), την αποτίμηση της χρεοκοπίας (Premachandra et al. 2011) στον επιχειρηματικό τομέα, τα μέσα μαζικής μεταφοράς, όπως τα αεροδρόμια (Yu MM 2010), οι σιδηρόδρομοι (Yu MM 2009b), λεωφορεία [(Yu MM 2009a), (Yu MM et al. 2009)] κ.ά. Επίσης, σημαντική εφαρμογή έχει στην αξιολόγηση του τομέα της εκπαίδευσης (Thanassoulis et al. 1994), των δημόσιων βιβλιοθηκών (Hammond 2002), των τηλεπικοινωνιακών μονάδων (Uri 2001), των δασών (Kao et al. 1993) και στον τομέα της υγείας (Chilingerian et al. 1990).

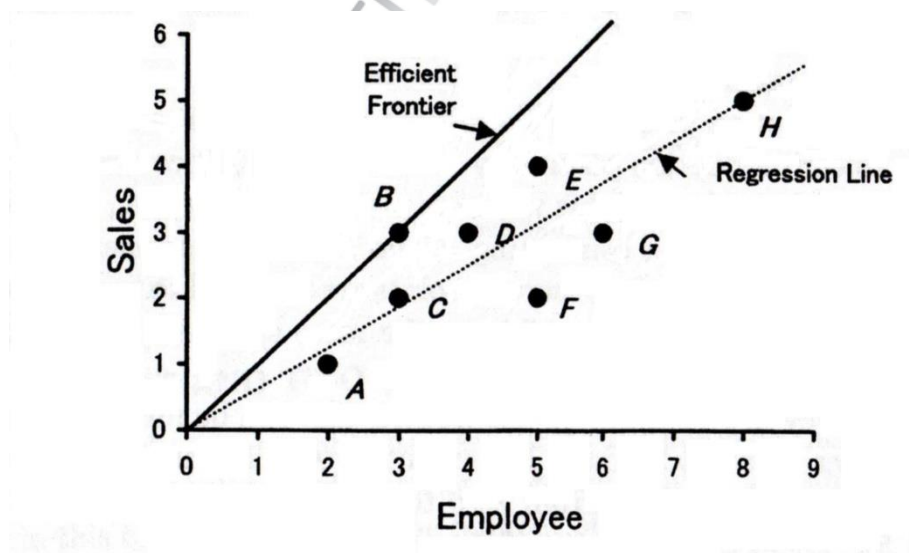
1.2 Βασικές έννοιες

Για την καλύτερη κατανόηση των βασικών εννοιών της ΠΑΔ, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα (William W. Cooper, Lawrence M. Seiford and Kaoru Tone, Data Envelopment Analysis). Στο ακόλουθο παράδειγμα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 1, οχτώ καταστήματα (Α-Η). Ως εισροή θεωρούμε τους υπαλλήλους και ως εκροή τις πωλήσεις.

Κατάστημα	A	B	C	D	E	F	G	H
Υπάλληλοι	2	3	3	4	5	5	6	8
Πωλήσεις	1	3	2	3	4	2	3	5
Πωλήσεις/Υπαλλήλους	0.5	1	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

Πίνακας 1: Παράδειγμα οχτώ καταστημάτων

Σε κάθε στήλη αναγράφεται το πλήθος των υπαλλήλων και των πωλήσεων του αντίστοιχου καταστήματος. Επίσης, στην τελευταία γραμμή αναγράφεται ο λόγος των πωλήσεων ανά πλήθος υπαλλήλων. Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το κατάστημα (μονάδα απόφασης) Β είναι το πιο αποδοτικό. Στην εικόνα 1 απεικονίζονται στο επίπεδο τα παραπάνω δεδομένα, όπου ο οριζόντιος άξονας αντιπροσωπεύει το πλήθος των υπαλλήλων και ο κάθετος τις πωλήσεις. Επίσης, απεικονίζεται και η ευθεία παλινδρόμησης.



Εικόνα 1: Σύνορο αποδοτικότητας και γραμμή παλινδρόμησης

Η κλίση της ευθείας που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και περνά από τις παρατηρήσεις αντιστοιχεί στο λόγο πωλήσεις ανά υπαλλήλους, του εκάστοτε καταστήματος (Εικόνα 1). Η παρατήρηση Β βρίσκεται πάνω στην ευθεία που αποτελεί το σύνορο αποδοτικότητας (efficient frontier). Παρατηρώντας την Εικόνα 1, αντιλαμβανόμαστε ότι το σύνορο αποδοτικότητας περιβάλλει τις υπόλοιπες μη-αποδοτικές μονάδες και από αυτή την ιδιότητα προήλθε και η ονομασία της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων. Επιπλέον ο χώρος των σημείων που περιβάλλεται από το σύνορο αποδοτικότητας ονομάζεται χώρος παραγωγικών δυνατοτήτων.

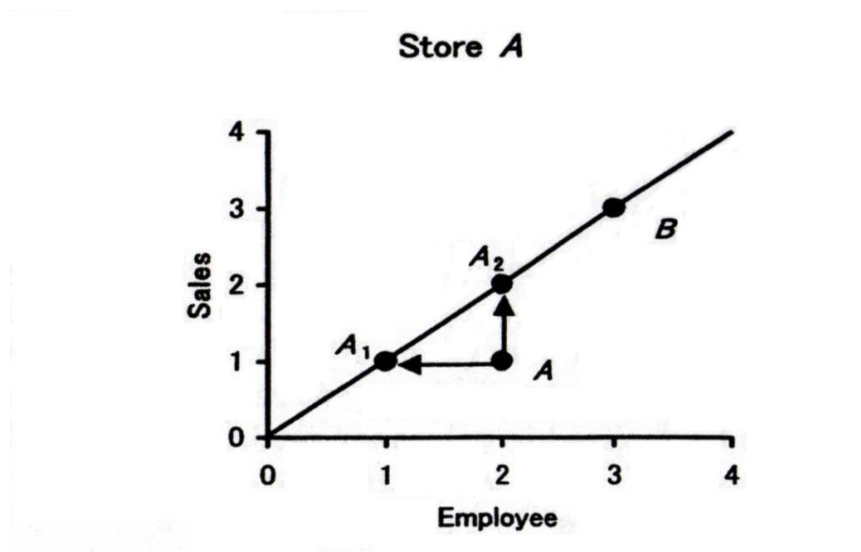
Η ευθεία παλινδρόμησης διέρχεται από το κέντρο των παρατηρήσεων, οπότε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις παρατηρήσεις που βρίσκονται πάνω από αυτήν την ευθεία αποδοτικές, ενώ όσες βρίσκονται από κάτω μη αποδοτικές και ο βαθμός της αποδοτικότητας τους θα μπορούσε να υπολογιστεί με βάση την απόσταση τους από την ευθεία της παλινδρόμησης. Αντίθετα, στην ΠΑΔ το σύνορο αποδοτικότητας διέρχεται από τις βέλτιστες παρατηρήσεις και υπολογίζει την αποδοτικότητα των υπόλοιπων μονάδων με βάση την απόσταση που έχουν από αυτήν. Με αυτό τον τρόπο διαμορφώνεται μια θεμελιώδη διαφορά στη στατιστική προσέγγιση των δύο παραπάνω μεθοδολογιών. Η γραμμική παλινδρόμηση παρουσιάζει την κεντρική τάση που έχουν οι παρατηρήσεις σε αντίθεση με την ΠΑΔ που αναδεικνύει τις καλύτερες παρατηρήσεις. Είναι σαφές ότι οι δύο αυτές τεχνικές οδηγούν σε σημαντικές διαφορές εκτίμησης της αποδοτικότητας καθώς ακόμα και σε διαφορετικούς τρόπους βελτιστοποίησης των μη-αποδοτικών παρατηρήσεων.

Όσον αφορά, λοιπόν, στις μη-αποδοτικές μονάδες (Α, C, D, E, F, G, H) μπορούμε να εκτιμήσουμε την αποδοτικότητα τους με βάση την αποδοτικότητα της μονάδας Β με την ακόλουθη σχέση:

$$0 \leq \frac{\text{πωλήσεις ανα υπαλλήλους της } i \text{ μονάδας}}{\text{πωλήσεις ανα υπαλλήλους της } B \text{ μονάδας}} \leq 1, \quad i = (A, C, D, E, F, G, H)$$

Αξίζει ακόμα να σημειωθεί ότι στο παραπάνω παράδειγμα η απεικόνιση του συνόρου αποδοτικότητας στηρίζεται στην υπόθεση περί κλίμακας σταθερών αποδόσεων. Για το λόγο αυτό έχει νόημα να θεωρούμε ότι η ευθεία του συνόρου αποδοτικότητας έχει σταθερή κλίση και μπορεί να επεκτείνεται ως το άπειρο. Υπό την υπόθεση κλίμακας μεταβλητών αποδόσεων, το σύνορο αποδοτικότητας πλέον είναι μια κυρτή τεθλασμένη γραμμή που διέρχεται από τις αποδοτικές μονάδες.

Σχετικά με το πρόβλημα της μετάβασης μιας μη-αποδοτικής μονάδας στο σύνορο αποδοτικότητας, δηλαδή από μη-αποδοτική μπορεί να γίνει αποδοτική, είτε μειώνοντας την εισροή της (προσανατολισμός προς τις εισροές – input oriented) είτε αυξάνοντας την εκροή της (προσανατολισμός προς τις εκροές – output oriented). Όπως φαίνεται στην εικόνα 2, οποιαδήποτε μεταφορά της μονάδας Α στο διάστημα Α1-Α2, του συνόρου αποδοτικότητας την καθιστά αποδοτική.



Εικόνα 2: Βελτίωση του καταστήματος A

1.3 Βασικά μοντέλα

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε συνοπτικά τα βασικά μοντέλα της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων, όπως είναι το CCR, BCC και Additive.

1.3.1 Το CCR μοντέλο

Το CCR αποτελεί το βασικότερο μοντέλο της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων, το οποίο προτάθηκε από τους Charnes, Cooper και Rhodes το 1978. Στηρίζεται στο γραμμικό προγραμματισμό και στην υπόθεση περί κλίμακας σταθερών αποδόσεων. Επιπλέον, ανάλογα με τον προσανατολισμό προς τις εισροές ή εκροές διακρίνουμε δύο μοντέλα, το μοντέλο που είναι προσανατολισμένο προς τις εισροές (input oriented) και το μοντέλο που είναι προσανατολισμένο προς τις εκροές (output oriented).

Ας θεωρήσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την αποδοτικότητα n μονάδων απόφασης ενός συστήματος, όπου κάθε μονάδα έχει m εισροές και s εκροές. Θεωρούμε τις X εισροές και Y εκροές. Η εκτίμηση της αποδοτικότητας μίας μονάδας, υπό σταθερές αποδόσεις κλίμακας γίνεται με το ακόλουθο μοντέλο.

Το γραμμικό πρόγραμμα (Προσανατολισμένο στις εισροές):

$$\max \theta = u y_0$$

s. t.

$$vx_0 = 1 \quad (1)$$

$$uX - vY \geq 0$$

$$u, v \geq 0$$

Έστω (θ^*, u^*, v^*) μια βέλτιστη λύση του παραπάνω γραμμικού προγράμματος.

Ορισμός: Η MA_0 θα ονομάζεται CCR-αποδοτική αν το $\theta^* = 1$ και αν υπάρχει τουλάχιστον ένα βέλτιστο $(u^*, v^* \neq 0)$. Διαφορετικά, η MA_0 θα ονομάζεται CCR μη αποδοτική, δηλαδή $\theta^* < 1$ ή $\theta^* = 1$ και τουλάχιστον ένα στοιχείο του (u^*, v^*) είναι μηδέν για κάθε βέλτιστη λύση του. Το δυϊκό του παραπάνω γραμμικού προγράμματος είναι το ακόλουθο:

Envelopment Model

$$\min \varphi$$

s. t.

$$Y\lambda \geq y_0 \quad (2)$$

$$\varphi x_0 - X\lambda \geq 0$$

$$\lambda \geq 0, \varphi \text{ free}$$

Το παραπάνω μοντέλο στην τυπική του μορφή είναι το ακόλουθο:

(Φάση 1)

$$\min \varphi$$

s. t.

$$Y\lambda - s^+ = y_0 \quad (3)$$

$$\varphi x_0 - X\lambda - s^- = 0$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0 \quad \varphi \text{ free}$$

Εκτιμώντας τη βέλτιστη λύση του ϕ της φάσης 1, η οποία είναι και η CCR-αποδοτικότητα, την ενσωματώνουμε στη δεύτερη φάση:

(Φάση 2)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \omega = s^- + s^+ \\
 \text{s. t.} \quad & \\
 & -X\lambda - s^- = \varphi^* x_0 \\
 & Y\lambda - s^+ = y_0 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Έστω $(\varphi^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ μια βέλτιστη λύση των δύο γραμμικών προγραμμάτων (Φάση 1 και 2).

Ορισμός: Μια μονάδα απόφασης θα είναι CCR-αποδοτική αν $\varphi^* = 1$ και $s^{-*} = 0, s^{+*} = 0$. Διαφορετικά η μονάδα απόφασης θα ονομάζεται μη αποδοτική.

Ορισμός: Για μια μη αποδοτική μονάδα απόφασης «ο» ορίζεται το σύνολο αναφοράς της (reference set) με βάση τα γνησίως θετικά λ^* ($\lambda^* > 0$).

Η προβολή της μη αποδοτικής μονάδας απόφασης (x_0, y_0) στο σύνολο αποδοτικότητας θα ορίζεται ως:

$$\widehat{x}_0 = \varphi^* x_0 - s^{-*} = \lambda^* X \leq x_0$$

$$\widehat{y}_0 = y_0 + s^{+*} = \lambda^* Y \geq y_0$$

1.3.2 Το BCC μοντέλο

Το BCC (Banker-Charnes-Cooper) μοντέλο προτάθηκε το 1984 και θεωρείται ως μια από τις βασικότερες παραλλαγές του CCR καθώς στηρίζεται στην υπόθεση περί κλίμακας μεταβλητών αποδόσεων σε αντίθεση με το CCR.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, στα πλαίσια της Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων η εκτίμηση της BCC αποδοτικότητας μιας μονάδας μπορεί να γίνει με το:

Multiplier Model

$$\begin{aligned} \max z &= uy_0 - u_0 \\ \text{s. t.} \\ vx_0 &= 1 & (5) \\ vX - uY - u_0e &\geq 0 \\ u, v &\geq 0, u_0 \text{ free} \end{aligned}$$

Envelopment Model

$$\begin{aligned} \min E^b \\ \text{s. t.} \\ Y\lambda &\geq y_0 & (6) \\ E^b x_0 - X\lambda &\geq 0 \\ e\lambda &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά στα μοντέλα (1) και (5) είναι η προθήκη της επιπλέον μεταβλητής u_0 στο τελευταίο, ενώ η διαφορά στα μοντέλα (2) και (6) είναι ο επιπλέον περιορισμός $e\lambda = 1$.

1.3.3 Το αθροιστικό μοντέλο

Το αθροιστικό μοντέλο (additive) στοχεύει στη μεγιστοποίηση των χαλαρών μεταβλητών που αντιστοιχούν στις εισροές και στις εκροές μιας μονάδας απόφασης. Η λύση του προκύπτει από το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \max z &= s^- + s^+ \\ \text{s. t.} \\ X\lambda + s^- &= x_0 \\ Y\lambda - s^+ &= y_0 \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ορισμός: Μια μονάδα απόφασης καλείται additive αποδοτική αν και μόνο αν $s^- = 0$ και $s^+ = 0$.

Το Additive μοντέλο έχει το ίδιο σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων με τα αντίστοιχα μοντέλα του CCR και BCC, όμως δεν παρέχει ένα δείκτη αποδοτικότητας αλλά διαχωρίζει μόνο τις μονάδες σε αποδοτικές και μη αποδοτικές. Σημειώνουμε ότι εισάγοντας τον περιορισμό κυρτότητας στο παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα προκύπτει το additive μοντέλο υπό μεταβλητές αποδόσεις κλίμακας (VRS).

1.4 Παραγωγικές διαδικασίες πολλών σταδίων

Τα παραπάνω μοντέλα εφαρμόζονται υπό την υπόθεση μιας απλής παραγωγικής διαδικασίας, όπου μια μονάδα απόφασης μετασχηματίζει κάποιες εισροές σε εκροές (ένα στάδιο). Πρόσφατα, το ενδιαφέρον της έρευνας έχει στραφεί σε περισσότερο σύνθετες διαδικασίες (περισσότερα από ένα στάδια) όπου οι εκροές κάποιων σταδίων λειτουργούν ως εισροές για κάποιο άλλο στάδιο. Σημαντικές μελέτες που αφορούν παραγωγικές διαδικασίες πολλών σταδίων έχουν εκπονηθεί από τους Färe et al (1996b), Seiford et al (1999), Kao et al (2008), Chen et al (2009), Castelli (2010) and Chen et al (2013). Ειδικότερα, οι Kao & Hwang (2008) μελέτησαν μια παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων (βλέπε εικόνα 3) όπου οι εισροές που καταναλώνονται από την πρώτη υπό-διαδικασία (πρώτο στάδιο) μετασχηματίζονται σε εκροές οι οποίες λειτουργούν ως εισροές (ενδιάμεσα μεγέθη) για τη δεύτερη υπό-διαδικασία (δεύτερο στάδιο). Πρότειναν μια καινοτόμα προσέγγιση για την εκτίμηση της συνολικής απόδοσης της παραπάνω παραγωγικής διαδικασίας, ως το γινόμενο των αποδοτικότητας των δύο επιμέρους υπό-διαδικασιών (σταδίων). Η προσέγγισή τους βασίστηκε στην υπόθεση ότι τα βάρη των ενδιάμεσων μεγεθών μεταξύ των δύο σταδίων είναι τα ίδια, είτε λειτουργούν ως εκροές του πρώτου είτε ως εισροές του δεύτερου. Οι Chen et al (2009) διατηρώντας την παραπάνω υπόθεση (ίδια βάρη για τα ενδιάμεσα μεγέθη) πρότεινε μια προσέγγιση για την εκτίμηση της συνολικής απόδοσης της παραπάνω παραγωγικής διαδικασίας, ως σταθμισμένο μέσο των αποδοτικότητας των δύο επιμέρους υπό-διαδικασιών (σταδίων). Οι παραπάνω μέθοδοι, αρχικά, υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα της διαδικασίας και στη συνέχεια την αναλύουν στις αποδόσεις των επιμέρους σταδίων. Αργότερα, οι Tone & Tsutsui (2009) επέκτειναν το μοντέλο SBM, το οποίο είχε προταθεί από τον Tone (2001), ώστε να εφαρμόζεται σε παραγωγικές διαδικασίες πολλών σταδίων και περισσότερο σύνθετες. Μελέτες που αφορούν σύνθετες διαδικασίες δύο σταδίων προτάθηκαν από τους Chen et al (2010b) και Zha et al (2010), όπου οι εισροές της παραγωγικής διαδικασίας διαμοιράζονται μεταξύ των δύο υπό- διαδικασιών. Οι Chen et al (2010a) και Chen et al (2013) διαπίστωσαν ότι τα μοντέλα που είχαν προταθεί μέχρι τότε δεν παρέχουν ικανή πληροφορία ώστε οι μη αποδοτικές μονάδες να καταστούν αποδοτικές. Ειδικότερα, η προσαρμογή των εισροών και των εκροών βάσει των αποδόσεων δεν επαρκεί για τον υπολογισμό προβολών προς το σύνολο αποδοτικότητας. Επιπλέον, οι Cook et al (2010) και οι Chen et al (2013) εξέτασαν την αδυναμία κάποιων μοντέλων να εφαρμοστούν υπό μεταβλητές αποδόσεις κλίμακας.

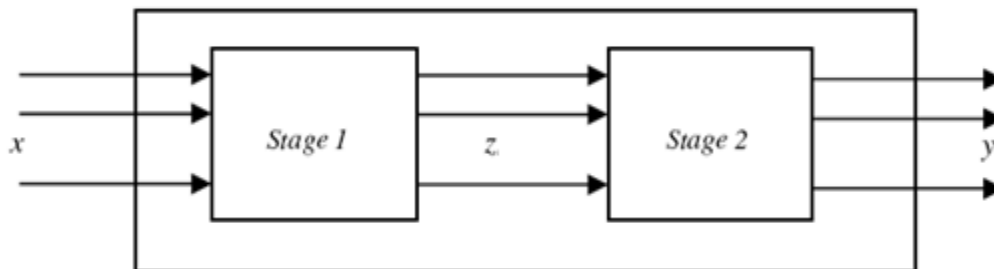
Η υπόλοιπη εργασία οργανώνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται αναλυτικά οι τύποι παραγωγικών διαδικασιών που μελετώνται. Στο Κεφάλαιο 3 παραθέτονται χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογών των παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το τελικό συμπέρασμα της εργασίας.

2. Τύποι παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι βασικοί τύποι παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων όπως αυτοί έχουν προταθεί μέσα από μελέτες διαφορετικών ερευνητικών ομάδων.

2.1. Τυπική παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων

Στην Εικόνα 3 παρουσιάζεται ένα γενικευμένο μοντέλο παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων. Σε αυτό κάθε μονάδα απόφασης αποτελείται από δύο διαδοχικά στάδια όπου οι εκροές του πρώτου σταδίου καταναλώνονται ως εισροές από το δεύτερο στάδιο.



Εικόνα 3: Απλή μορφή παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων

Από τους πρώτους που εφήρμοσαν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας ήταν οι Wang et al (1997), κατά τον υπολογισμό της συνολικής απόδοσης βασίστηκε αποκλειστικά τις εισροές του πρώτου σταδίου και τις εκροές το δεύτερου σταδίου με το ακόλουθο μοντέλο:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & E^{\circ} = uY_0 \\
 \text{s. t.} \quad & vX_0 = 1 \\
 & uY - vX \leq 0 \\
 & u, v \geq 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Οι Seiford και Zhu (1999) μελέτησαν μια μέθοδο για την αξιολόγηση 55 κορυφαίων Αμερικανικών εμπορικών τραπεζών, εφήρμοσαν τα υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, μοντέλα (8), (9), (10) για να υπολογίσουν τη συνολική αποδοτικότητα αλλά και την αποδοτικότητα των επιμέρους σταδίων.

$$\max E_1^{\circ} = wZ_0$$

$$\max E_2^{\circ} = uY_0$$

$$\begin{array}{ll}
 s. t. & vX_0 = 1, \\
 & wZ - vX \leq 0 \\
 & w, v \geq 0
 \end{array}
 \quad (9)
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 s. t. & wZ_0 = 1, \\
 & uY - wZ \leq 0 \\
 & u, w \geq 0
 \end{array}
 \quad (10)$$

Σε αυτή την εργασία, αναφέρθηκαν τα προβλήματα που δημιουργούνται από την ύπαρξη των ενδιάμεσων μεγεθών. Συγκεκριμένα, μια μονάδα για να καταστεί αποδοτική στο πρώτο στάδιο χρειαζόταν να αυξήσει τις εκροές της, το οποίο λειτουργεί ανασταλτικά για το δεύτερο στάδιο όπου μια μονάδα για να καταστεί αποδοτική θα πρέπει να μειώσει τα ενδιάμεσα μεγέθη. Αυτές οι ενέργειες, προκαλούν διαταράξεις στην αποδοτικότητα των δύο σταδίων.

$$\begin{array}{ll}
 \max & E^\circ = \frac{1}{2} \left[\frac{w_1 Z^\circ}{v X_1^\circ} + \frac{u Y_2^\circ}{w_2 Z^\circ} \right] \\
 s. t. & \\
 & \frac{w_1 Z}{v X_1} \leq 1 \\
 & \frac{u Y_2}{w_2 Z} \leq 1 \\
 & u, v, w_1, w_2 \geq 0
 \end{array}
 \quad (11)$$

Από τα πρώτα μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τα ενδιάμεσα μεγέθη στον δύο σταδίων είναι αυτό που εισάγει ο Liang et al (2006). Στο μοντέλο (11) η συνολική αποδοτικότητα υπολογίζεται ως αριθμητικός μέσος των δύο επιμέρους αποδόσεων, χωρίς όμως να απεικονίζει επαρκώς τη πραγματική συμβολή των δύο σταδίων σε όλη τη διαδικασία.

2.1.1 Πολλαπλασιαστικό μοντέλο (Kao και Hwang et al. 2008)

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι Kao et al (2008) μελέτησαν την παραγωγική διαδικασία της εικόνας 3. Βασίστηκαν στην υπόθεση ότι τα βάρη για τα ενδιάμεσα μεγέθη είναι ίδια και για τα δύο στάδια. Ο υπολογισμός της συνολικής απόδοσης μιας μονάδας απόφασης προκύπτει από το γινόμενο των αποδόσεων των επιμέρους σταδίων. Δηλαδή, ορίζεται ως $E_0 = E_1 \times E_2$. Έστω $X_{ij}, i = 1, \dots, m$ και $Y_{rj}, r = 1, \dots, s$ οι εισροές και εκροές αντίστοιχα, μιας μονάδας απόφασης $MA_j, j = 1, \dots, n$. Το μοντέλο που πρότειναν για τον υπολογισμό της συνολικής αποδοτικότητας της μονάδας απόφασης k , βασίζεται στην κλίμακα σταθερών αποδόσεων (CRS). Για τον υπολογισμό της συνολικής αποδοτικότητας E_0 και των επιμέρους αποδοτικότητων E_1, E_2 χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$E_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}} \leq 1,$$

$$E_1 = \sum_{p=1}^q w_p^* Z_{pk} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik} \leq 1$$

$$E_2 = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk} / \sum_{p=1}^q w_p^* Z_{pk} \leq 1$$
(12)

Επομένως, η συνολική αποδοτικότητα της MA_k υπολογίζεται από το ακόλουθο μοντέλο (13):

$$E_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i X_{ik}$$

s. t.

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^q w_p Z_{pj} / \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} / \sum_{p=1}^q w_p Z_{pj} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i, w_p \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m; \quad p = 1, \dots, q.$$
(13)

Το μοντέλο (13) είναι ένα κλασματικό πρόγραμμα το οποίο μετασχηματίζεται στο αντίστοιχο γραμμικό του (14):

$$E_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk}$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^q w_p Z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$
(14)

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p Z_{pj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i, w_p \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m; \quad p = 1, \dots, q.$$

Η επίλυση του μοντέλου (14) παρέχει τα βέλτιστα βάρη u_r^*, w_p^*, v_i^* και τη συνολική αποδοτικότητα $E_0 = \max \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk}$. Όπως αναφέρουν, οι Kao et al (2008) τα βέλτιστα βάρη u_r^*, w_p^*, v_i^* του (14) μπορεί να μην είναι μοναδικά, οπότε και η ανάλυση της αποδοτικότητας στα δύο επιμέρους στάδια ενδέχεται να μην είναι μοναδική. Για τον έλεγχο της μοναδικότητας Kao et al (2008) προτείνουν την εύρεση της μέγιστης απόδοσης ενός από τα δύο επιμέρους στάδια, ενώ ταυτόχρονα διατηρούν σταθερή την τιμή της συνολικής αποδοτικότητας E_0 . Η μέγιστη αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου δίνεται από το μοντέλο (15):

$$E_1^+ = \max \sum_{p=1}^q w_p Z_{pk}$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - E_k \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{15}$$

$$\sum_{p=1}^q w_p Z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p Z_{pj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i, w_p \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m; \quad p = 1, \dots, q.$$

Έχοντας υπολογίσει τη μέγιστη αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου E_1^+ , υπολογίζεται η ελάχιστη αποδοτικότητα του δεύτερου σταδίου E_2^- από τη σχέση: $E_2^- = E_0 / E_1^+$. (Ανάλογη είναι η διαδικασία για των υπολογισμό της μέγιστης αποδοτικότητας του δεύτερου σταδίου). Σύμφωνα με τους Kao et al (2008) αν $E_1^+ = E_1^-$ ή αν $E_2^- = E_2^+$ τότε η ανάλυση της αποδοτικότητας των δύο επιμέρους σταδίων είναι μοναδική. Το αντίστοιχο δυικό πρόγραμμα του (15) είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& s. t. \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) z_{dj} \geq 0, \quad d = 1, 2, \dots, D \quad \mu_j, \lambda_j \geq 0, \theta \leq 1
\end{aligned} \tag{16}$$

Ωστόσο, όπως αναφέρουν οι Chen et al (2010a) το μοντέλο (16) δε δίνει επαρκή πληροφορία για τον υπολογισμό προβολών προς το σύνολο αποδοτικότητας. Για το λόγο αυτό προτείνουν το ακόλουθο τροποποιημένο μοντέλο του (16), έτσι ώστε να δοθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& s. t. \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} \leq z_{d0}, \quad d = 1, \dots, D \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} \leq z_{d0}, \quad d = 1, \dots, D \\
& z_{d0} \geq 0, \quad d = 1, \dots, D \\
& \mu_j, \lambda_j \geq 0, \theta \leq 1, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{17}$$

Το μοντέλο των Kao και Hwang (2008) δεν είναι επεκτάσιμο υπό μεταβλητές αποδόσεις κλίμακας (VRS).

2.1.2 Προσθετικό μοντέλο (Chen et al. 2009)

Οι Chen et al (2009) μελέτησαν την ίδια παραγωγική διαδικασία και βασίζονται στην υπόθεση των Kao et al (2008), όπου τα βάρη των ενδιάμεσων μεγεθών είναι ίδια και για τα δύο στάδια. Πρότειναν μια

μέθοδο στην οποία η συνολική απόδοση υπολογίζεται ως σταθμισμένος μέσος των αποδόσεων των επιμέρους σταδίων. Ορίζουν τα βάρη w_1 και w_2 , για τα οποία ισχύει $w_1 + w_2 = 1$. Ο υπολογισμός της συνολικής απόδοσης μιας μονάδας απόφασης προκύπτει από τη σχέση:

$$E_0 = w_1 E_1 + w_2 E_2$$

Έστω n MA και κάθε MA_j ($j=1,2,\dots,n$) έχει m εισροές στο πρώτο στάδιο x_{ij} , όπου ($i=1,2,\dots,m$) και D εκροές z_{dj} , όπου ($d=1,2,\dots,D$). Οι D εκροές του πρώτου σταδίου γίνονται οι εισροές στο δεύτερο (ενδιάμεσα μεγέθη). Οι εκροές από το δεύτερο στάδιο είναι s και ορίζονται ως y_{rj} , όπου ($r=1,2,\dots,s$).

$$E_1 = \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}}{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}$$

Το μοντέλο που πρότειναν για τον υπολογισμό της συνολικής αποδοτικότητας, υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, είναι το ακόλουθο:

$$\max[w_1 * \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}} + w_2 * \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}}{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}]$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad (18)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj}} \leq 1$$

$$u_r, v_i, \eta_d \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Για τη μετατροπή του παραπάνω προγράμματος σε γραμμικό, οι Chen et al (2009) χρησιμοποίησαν τα ακόλουθα βάρη, που όπως αναφέρουν, αναπαριστούν το μέγεθος κάθε σταδίου.

$$w_1 = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}$$

και

$$w_2 = \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}$$

Συνεπώς, η αντικειμενική συνάρτηση του (18) παίρνει τη μορφή :

$$\max \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0} + \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}} \quad (19)$$

Η συνολική αποδοτικότητα της MA_j , υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, υπολογίζεται ακολούθως:

$$E_0 = \max \left[\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0} + \sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}} \right]$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad (20)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj}} \leq 1$$

$$u_r, v_i, \eta_d \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Με τη χρήση του μετασχηματισμού Charnes-Cooper, το μοντέλο (20) γίνεται το ακόλουθο:

$$E_0 = \max \sum_{r=1}^S \mu_r y_{rj_0} + \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0}$$

s. t.

$$\sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij} \leq 0 \quad (21)$$

$$\sum_{r=1}^S \mu_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj} \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} = 1$$

$$\pi_d, \mu_r, \omega_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Από την επίλυση του μοντέλου (21) προκύπτει η συνολική απόδοση του συστήματος E_0 . Σύμφωνα με τους Chen et al (2009) η αποδοτικότητα των δύο επιμέρους σταδίων E_1 και E_2 υπολογίζεται με μια μέθοδο παρόμοια με αυτή των Kao et al (2008), διότι η ανάλυση της ολικής αποδοτικότητας σε επιμέρους στάδια μπορεί να μην είναι μοναδική. Δοθείσας της ολικής αποδοτικότητας E_0 υπολογίζεται η αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου (ή αντίστοιχα του δεύτερου) και στη συνέχεια υπολογίζεται και η αποδοτικότητα άλλου σταδίου. Στην περίπτωση που δίνεται προτεραιότητα στο πρώτο στάδιο. Το ακόλουθο μοντέλο (21α) παρέχει την αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου (E_1^*), διατηρώντας σταθερή την ολική αποδοτικότητα E_0 .

$$E_1^* = \max \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad (21\alpha)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj}} \leq 1$$

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}} = \theta_0$$

$$u_r, v_i, \eta_d \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Ή το αντίστοιχο γραμμικό του:

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

$$\begin{aligned}
E_1^* &= \max \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} \\
s. t. \\
\sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj} - \sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij} &\leq 0 \\
\sum_{r=1}^S \mu_r y_{rj} - \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj} &\leq 0 \\
(1 - \theta_0) \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} + \sum_{r=1}^S \mu_r y_{rj_0} &= 1 \\
\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} &= 0 \\
\pi_d, \mu_r, \omega_i &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{21\beta}$$

Στην συνέχεια, η αποδοτικότητα για το δεύτερο στάδιο E_2 , υπολογίζεται από τη σχέση $E_2 = \frac{E_0 - E_1^* w_1^*}{w_2^*}$ όπου w_1^* και w_2^* τα βέλτιστα βάρη όπως προκύπτουν από το μοντέλο (20). Στην περίπτωση που ισχύει $E_1 = E_1^*$ και $E_2^* = E_2$ τότε έχει επιτευχθεί μοναδική ανάλυση της αποδοτικότητας στις επιμέρους των δυο σταδίων. (Δίνοντας προτεραιότητα στο δεύτερο στάδιο ακολουθείται παρόμοια διαδικασία.)

Το μοντέλο που παρουσιάζουν οι Chen et al (2009) επεκτείνεται και υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS. Οι VRS αποδοτικότητες των δύο επιμέρους σταδίων ορίζονται από τα ακόλουθα μοντέλα:

$$\max E_1 = \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d^A z_{dj_0} + u^A}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d^A z_{dj} + u^A}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta_d^A, v_i > 0 \quad u^A \text{ free}$$

και

$$\max E_2 = \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0} + u^B}{\sum_{d=1}^D \eta_d^B z_{dj_0}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj} + u^B}{\sum_{d=1}^D \eta_d^B z_{dj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta_d^B, u_r > 0 \quad u^B \text{ free}$$

Παρόμοια με την περίπτωση της κλίμακας σταθερών αποδόσεων CRS, Οι Chen et al (2009) υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα, υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, βασιζόμενοι στα βάρη w_1 και w_2 που ορίστηκαν στην πρώτη.

$$w_1 = \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}} \text{ και } w_2 = \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0}}{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}}$$

Υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS ορίζουν το ακόλουθο κλασματικό πρόγραμμα (22) για την εκτίμηση της συνολικής αποδοτικότητας.

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0} + u^A + \sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0} + u^B}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0} + u^A}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}} \leq 1 \\ & \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{rj_0} + u^B}{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj_0}} \leq 1 \\ & n_d, v_i, u_r > 0 \quad j = 1, \dots, n \quad u^A, u^B \text{ free} \end{aligned} \tag{22}$$

Για να μετασχηματιστεί το μοντέλο (22) σε γραμμικό πρόγραμμα, χρησιμοποιούν όπως και νωρίτερα τα βάρη w_1 και w_2 . Το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα του (22) είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} E_0 = \max \quad & \sum_{r=1}^S \mu_r y_{rj_0} + u^1 + \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} + u^2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} + u^1 - \sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij_0} \leq 0 \\ & \sum_{r=1}^S \mu_r y_{rj_0} - \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} + u^2 \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij_0} + \sum_{d=1}^D \pi_d z_{dj_0} = 1 \\ & \pi_d, \mu_r, \omega_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & u^1, u^2 \text{ free} \end{aligned} \tag{23}$$

Επειδή μπορεί η απόδοση των επιμέρους σταδίων να μην είναι μοναδική, ακολουθούν παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση του, υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων, CRS μοντέλου.

Η envelopment μορφή του μοντέλου, υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων, CRS δεν αποδίδει επαρκή πληροφορία για τον υπολογισμό προβολών στο σύνορο αποδοτικότητας. Αποτελεί πεδίο που χρήζει περαιτέρω έρευνας.

2.1.3 Despotis et al (2012)

Οι Despotis et al (2012) μελετούν την απλή παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων (εικόνα 3). Βασίζονται στην υπόθεση ότι τα βάρη των ενδιάμεσων μεγεθών είναι ίδια, όπως οι Kao et al (2008) και οι Chen et al (2009). Στη μέθοδο που εισάγουν, το πρώτο στάδιο χρησιμοποιεί τις εισροές για να παράγει τις εκροές (ενδιάμεσα μεγέθη), οι οποίες με τη σειρά τους γίνονται εισροές για το δεύτερο στάδιο. Για το πρώτο στάδιο επιλέγεται ο προσανατολισμός προς τις εκροές (output oriented) ενώ για το δεύτερο ο προσανατολισμός προς τις εισροές (input oriented). Η επιλογή αυτή, καθιστά δυνατό τον συνδυασμό των αποδοτικότητας των δύο επιμέρους σταδίων. Το προτεινόμενο μοντέλο, αρχικά, υπολογίζει την αποδοτικότητα κάθε σταδίου, ενώ η συνολική αποδοτικότητα της διαδικασίας υπολογίζεται ως αριθμητικός μέσος των δύο επιμέρους. Ωστόσο, επειδή υπολογίζουν αρχικά τις επιμέρους αποδοτικότητες, δύναται να χρησιμοποιηθούν και άλλοι τρόποι υπολογισμού της απόδοσης, όπως το γινόμενο των δύο επιμέρους (Kao et al. 2008).

Έστω n MA και κάθε MA_j ($j=1,2,\dots,n$) έχει m εισροές στο πρώτο στάδιο x_{ij} , όπου ($i=1,2,\dots,m$) και D εκροές z_{pj} , όπου ($p=1,2,\dots,q$). Οι q εκροές του πρώτου σταδίου γίνονται οι εισροές στο δεύτερο (ενδιάμεσα μεγέθη). Οι εκροές από το δεύτερο στάδιο είναι s και ορίζονται ως y_{rj} , όπου ($r=1,2,\dots,s$). Η αποδοτικότητα της MA_{j_0} , υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, στο πρώτο στάδιο δίνεται από το ακόλουθο μοντέλο:

Στάδιο 1: output oriented

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \min \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} \\
 s. t. \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj_0} &= 1 \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 w_p, v_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m; p = 1, \dots, q
 \end{aligned} \tag{24}$$

Και αντίστοιχα για το δεύτερο στάδιο :

Στάδιο 2: input oriented

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
 s. t. \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj_0} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 w_p, u_r &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s; p = 1, \dots, q
 \end{aligned} \tag{25}$$

Σύμφωνα με τους Despotis et al (2012), προσαρτώντας στο μοντέλο (24) τον περιορισμό $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} \leq 0, j = 1, \dots, n$ προκύπτει το ακόλουθο επαυξημένο:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \min \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} \\
 \text{s. t.} \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj_0} &= 1 \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, j = 1, \dots, n \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} &\leq 0, j = 1, \dots, n \\
 w_p, u_r, v_i &\geq 0, r = 1, \dots, s; p = 1, \dots, q; i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{26}$$

Παρόμοια, προσαρτώντας στο μοντέλο (25) τον περιορισμό $\sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, j = 1, \dots, n$ προκύπτει το ακόλουθο επαυξημένο:

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
 \text{s. t.} \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj_0} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} &\leq 0, j = 1, \dots, n \\
 \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, j = 1, \dots, n \\
 w_p, u_r, v_i &\geq 0, r = 1, \dots, s; p = 1, \dots, q; i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{27}$$

Μία βέλτιστη λύση του (24) είναι βέλτιστη λύση και στο (26). Ανάλογα, μία βέλτιστη λύση του (25) είναι βέλτιστη λύση και στο (27). Τα μοντέλα (26) και (27) έχουν κοινούς περιορισμούς. Συνεπώς, συναθροίζοντας τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned}
\min F &= \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} \\
s. t. & \\
\sum_{p=1}^q w_p z_{pj_0} &= 1 \\
\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
\sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
w_p, u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s; p = 1, \dots, q; i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{28}$$

Έστω (u_r^*, v_i^*, w_p^*) μια βέλτιστη λύση του μοντέλου (28) η αποδοτικότητα για τη μονάδα απόφασης j_0 στο πρώτο και δεύτερο στάδιο, αντίστοιχα, είναι:

$$E_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij_0}} \quad \text{και} \quad E_2 = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj_0}$$

Η μονάδα απόφασης j_0 είναι αποδοτική αν και μόνο αν η βέλτιστη λύση της αντικειμενικής συνάρτησης του μοντέλου (27) είναι μηδενική, δηλαδή $F^* = 0$. Η προσέγγιση των Despotis et al (2012), δεν προϋποθέτει τον ορισμό της συνολικής αποδοτικότητας και την ανάλυση αυτής στις επιμέρους, σε αντίθεση με τις προσεγγίσεις των Kao et al (2008) και Chen et al (2009). Σε αυτή την μελέτη, αφού υπολογίζονται οι επιμέρους αποδόσεις, προτείνεται ο υπολογισμός της συνολικής απόδοσης της διαδικασίας ως αριθμητικός μέσος των δύο επιμέρους αποδόσεων:

$$E_0 = (E_1 + E_2)/2$$

Επιπλέον, η επιλογή του προσανατολισμού στις εκροές για το πρώτο στάδιο και στις εισροές για το δεύτερο δίνει τη δυνατότητα αξιολόγησης της αποδοτικότητας των δύο σταδίων χωρίς να χρειάζεται να ορισθούν βάρη εκ των προτέρων σε αντίθεση με τους Chen et al (2009). Παρόλα αυτά, αν χρειαστεί να δοθεί διαφορετική βαρύτητα σε κάποιο από τα στάδια μπορούν να οριστούν τα βάρη α_1, α_2 ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) και η συνολική αποδοτικότητα της μονάδας j_0 να προκύπτει ως:

$$E_0 = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$$

Τα βάρη α_1, α_2 ορίζονται από την αρχή της μεθόδου και είναι κοινά για όλες τις μονάδες απόφασης. Το μοντέλο (28) μπορεί να έχει πολλαπλές βέλτιστες λύσεις, οπότε η ανάλυση της συνολική αποδοτικότητας στις επιμέρους μπορεί να μην είναι μοναδική. Για την ανάλυση της αποδοτικότητας οι Despotis et al (2012), ακολουθούν παρόμοια διαδικασία με αυτή των Kao et al (2008) και Chen et al (2009). Αρχικά, αναζητείται η μέγιστη τιμή αποδοτικότητας στο πρώτο στάδιο ή το δεύτερο στάδιο (ανάλογα σε πιο έχει δοθεί προτεραιότητα), ενώ διατηρείται η βέλτιστη τιμή F^* της αντικειμενικής συνάρτησης στο μοντέλο (28). Συγκεκριμένα, αν δοθεί προτεραιότητα στο πρώτο στάδιο, από το μοντέλο (26) (ενσωματώνοντας τον επιπλέον περιορισμό $F^* = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}$) λαμβάνουμε την υψηλότερη αποδοτικότητα E_1 για τη μονάδα j_0 . Αν η βέλτιστη λύση που προκύπτει είναι (u_r^1, v_i^1, w_p^1) τότε η αποδοτικότητα για τη μονάδα απόφασης j_0 στο πρώτο και δεύτερο στάδιο, αντίστοιχα, είναι:

$$E_1^1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i^1 x_{ij_0}} \quad \text{και} \quad E_2^1 = \sum_{r=1}^s u_r^1 y_{rj_0}$$

Ανάλογη διαδικασία ακολουθείται αν δοθεί προτεραιότητα στο δεύτερο στάδιο. Συμπερασματικά, αν ισχύει $E_1^1 = E_2^1$ ή $E_2^1 = E_1^1$ η ανάλυση της αποδοτικότητας στα δύο επιμέρους στάδια είναι μοναδική.

Οι Despotis et al (2012), επεκτείνουν το μοντέλο τους και υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS. Συγκεκριμένα, το αντίστοιχο, υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, μοντέλο του (27) μπορεί να προκύψει από τα αντίστοιχα, υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, μοντέλα των (23) και (24) με διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθήθηκε στην κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS. Σύμφωνα με τα παραπάνω το μοντέλο που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} - d_1 - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} - d_2 \\ \text{s. t.} \\ \sum_{p=1}^q w_p z_{pj_0} &= 1 \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - d_2 &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_1 &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ w_p, u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s; p = 1, \dots, q; i = 1, \dots, m \\ d_2, d_1, &\text{free} \end{aligned} \tag{29}$$

Οι Despotis et al (2012) δεν εξετάζουν αν το μοντέλο που προτείνουν παρέχει προβολές για τις μη αποδοτικές μονάδες στο σύνολο αποδοτικότητας.

2.1.4. SLACK BASED MEASURE (SBM)

Οι Tone & Tsutsui (2009) επέκτειναν το μοντέλο SBM, το οποίο είχε προταθεί από τον Tone (2001), ώστε να εφαρμόζεται σε παραγωγικές διαδικασίες πολλών σταδίων και περισσότερο σύνθετες. Το SBM είναι ένα (non-radial) μέτρο για την αποτίμηση της αποδοτικότητας όπου οι εισροές και οι εκροές του συστήματος μεταβάλλονται μη αναλογικά. Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα ανάθεσης εξωγενών βαρών σε κάθε τμήμα (Division) ανάλογα της σημαντικότητας του. Το μοντέλο SBM έχει εφαρμοσθεί εκτός των άλλων και στην αξιολόγηση του επιχειρησιακού και τραπεζικού τομέα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εφαρμογή του Ankan (2009) για την αξιολόγηση εμπορικών τραπεζών στα Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα.

Οι Tone & Tsutsui (2009) ονόμασαν τα στάδια της παραγωγικής διαδικασίας ως Divisions και τα ενδιαμέσα μεγέθη ως Links. Στο μοντέλο SBM δεν υπάρχει προσανατολισμός (non-oriented). Η μη ύπαρξη προσανατολισμού εξασφαλίζει την ταυτόχρονη μείωση των εισροών και την αύξηση των εκροών. Συγκεκριμένα, για η μονάδες απόφασης ($j=1, \dots, n$) οι οποίες αποτελούνται από k τμήματα ($k=1, \dots, K$). Επιπλέον, m_k και r_k το πλήθος των εισροών και των εκροών του τμήματος k , αντίστοιχα. Ο σύνδεσμος (link) που οδηγεί από ένα τμήμα k σε ένα άλλο τμήμα h ορίζεται ως (k, h) και το σύνολο των συνδέσμων αυτών ορίζεται ως L .

Για μια διαδικασία όπως στην εικόνα 3, τα δεδομένα προς παρατήρηση είναι: οι εισροές της MA_j που ορίζονται ως x_j^k ($k = 1, \dots, K; j = 1, \dots, n$), οι εκροές της MA_j που ορίζονται ως y_j^k ($k = 1, \dots, K; j = 1, \dots, n$), τα ενδιαμέσα μεγέθη $z_j^{(k,h)}$ ($j = 1, \dots, n; (k, h) \in L$) από το τμήμα k στο τμήμα h , όπου $t_{(k,h)}$ το πλήθος των στοιχείων στο σύνδεσμο (k, h) . Το σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων, υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, $\{x^k, y^k, z^{(k,h)}\}$ ορίζεται ως:

$$x^k \geq \sum_{j=1}^n x_j^k \lambda_j^k, (k = 1, \dots, K),$$

$$y^k \leq \sum_{j=1}^n y_j^k \lambda_j^k, (k = 1, \dots, K),$$

$$z^{(k,h)} = \sum_{j=1}^n z_j^{(k,h)} \lambda_j^k, (\forall (k, h)) \text{ (ως εκροές από το τμήμα } k) \quad (30)$$

$$z^{(k,h)} = \sum_{j=1}^n z_j^{(k,h)} \lambda_j^h, (\forall (k, h)) \text{ (ως εισροές στο τμήμα } h)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 1, (\forall k), \quad \lambda_j^k \geq 0 (\forall (j, k))$$

Όπου λ^k το διάνυσμα έντασης (intensity vector) του τμήματος k . Η μονάδα απόφασης MA_o ($o=1, \dots, n$) αναπαριστάται ως:

$$x_o^k = X^k \lambda^k + s^{k-} \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$y_o^k = Y^k \lambda^k + s^{k+} \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$e \lambda^k = 1 \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$\lambda^k, s^{k-}, s^{k+} \geq 0, (\forall k)$$

Όπου:

$$X^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in R^{m_k \times n},$$

$$Y^k = (y_1^k, \dots, y_n^k) \in R^{r_k \times n}.$$

Και s^{k-} και s^{k+} τα διανύσματα χαλαρών μεταβλητών, που αντιστοιχούν στις εισροές και τις εκροές.

Για τα ενδιάμεσα μεγέθη διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

- Η περίπτωση "free link", όπου στα ενδιάμεσα μεγέθη δίνεται η ελευθερία να προκύψουν από τη διαδικασία βελτιστοποίησης, δηλαδή μπορούν να αυξηθούν ή να μειωθούν από τις αρχικές τους τιμές:

$$Z^{(k,h)} \lambda^h = Z^{(k,h)} \lambda^k, (\forall (k, h))$$

Όπου

$$Z^{(k,h)} \lambda^h = (Z_1^{(k,h)}, \dots, Z_n^{(k,h)}), \in R^{t_{(k,h)} \times n}$$

- Η περίπτωση του "fixed link", όπου τα ενδιάμεσα μεγέθη διατηρούνται στις αρχικές τους τιμές, δηλαδή:

$$Z_0^{(k,h)} = Z^{(k,h)} \lambda^h \quad (\forall (k, h))$$

$$Z_0^{(k,h)} = Z^{(k,h)} \lambda^k \quad (\forall (k, h))$$

Αν σε όλα τα ενδιάμεσα μεγέθη εφαρμοστεί αυτή η υπόθεση τότε, κάθε στάδιο της παραγωγικής διαδικασίας εξετάζεται ανεξάρτητα αφού διακόπτεται η σύνδεση με τα υπόλοιπα. Σύμφωνα με τους Tone et al (2009), ο υπολογισμός της συνολικής απόδοσης της MA_o προκύπτει από το ακόλουθο μοντέλο:

$$\rho_o^* = \min_{\lambda^k, s^{k-}, s^{k+}} \frac{\sum_{k=1}^K W^k [1 - \frac{1}{m_k} (\sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_i^{k-}}{x_{io}^k})]}{\sum_{k=1}^K W^k [1 + \frac{1}{r_k} (\sum_{i=1}^{r_k} \frac{s_i^{k+}}{y_{ro}^k})]}$$

$$s.t. \quad x_o^k = X^k \lambda^k + s^{k-} \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$y_o^k = Y^k \lambda^k + s^{k+} \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$e \lambda^k = 1 \quad (k = 1, \dots, K),$$

(31)

$$Z^{(k,h)} \lambda^k = Z^{(k,h)} \lambda^k, \forall (k, h)$$

$$\lambda^k, s^{k-}, s^{k+} \geq 0, (\forall k)$$

Όπου $\sum_k^K W^k = 1$, $W^k \geq 0 \forall k$ και W^k το σχετικό βάρος του τμήματος k . Σύμφωνα με τους Tone et al (2009):

- Ο όρος ρ_o^* ορίζεται ως η συνολική αποδοτικότητα της MA_o . Αν ισχύει $\rho_o^* = 1$ τότε η MA_o είναι ολικά αποδοτική.
- Η επιμέρους αποδοτικότητα για κάθε τμήμα k ορίζεται ως:

$$\rho_k = \frac{1 - \frac{1}{m_k} \left(\sum_{i=1}^{m_k} \frac{s_i^{k-*}}{x_{io}^k} \right)}{1 - \frac{1}{r_k} \left(\sum_{r=1}^{r_k} \frac{s_r^{k+*}}{y_{ro}^k} \right)} \quad (k = 1, \dots, K), \quad (32)$$

Όπου s^{k-*} και s^{k+*} οι βέλτιστες χαλαρές μεταβλητές (slacks) για τις εισροές και τις εκροές, αντίστοιχα από το μοντέλο (31). Μια μονάδα απόφασης είναι αποδοτική αν και μόνο αν είναι αποδοτική και σε όλα τα τμήματα της.

- Έστω $(\lambda^{k*}, s^{k-*}, s^{k+*})$ μια βέλτιστη λύση του μοντέλου (31). Η προβολή στο σύνορο αποδοτικότητας, ορίζεται ακολούθως:

$$x_o^{k*} = x_o^k s^{k-*}, \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$y_o^{k*} = y_o^k s^{k+*}, \quad (k = 1, \dots, K),$$

$$z_o^{(k,h)*} = Z^{(k,h)} \lambda^{k*}, \quad (\forall (j, k))$$

Οι Chen et al (2013) παρουσιάζουν μια τροποποιημένη μορφή της μεθόδου SBM. Βασιζόμενοι στην εφαρμογή των Tone et al (2009) πρότειναν το ακόλουθο μοντέλο σε envelopment μορφή. Για την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων της εικόνας 3, το τροποποιημένο μοντέλο δίνεται ακολούθως:

$$\max \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{ro}}$$

s. t.

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^-, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (33)$$

$$y_{ro} = \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} - s_r^+ \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} \geq \tilde{z}_{d0}, \quad (d = 1, \dots, D)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \leq \tilde{z}_{d0}, \quad (d = 1, \dots, D)$$

Όπου \tilde{z}_{d0} οι άγνωστες μεταβλητές απόφασης για τα ενδιάμεσα μεγέθη.

Μια radial μορφή του παραπάνω μοντέλου είναι η ακόλουθη:

$$\min \alpha - \beta$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \alpha x_{i0}, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (34) \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \leq \beta y_{r0} \quad (r = 1, \dots, s),$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{dj} \geq \tilde{z}_{d0}, \quad (d = 1, \dots, D)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \leq \tilde{z}_{d0}, \quad (d = 1, \dots, D)$$

$$\tilde{z}_{d0} \geq 0, \quad d = 1, \dots, D, \alpha \leq 1, \beta \geq 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

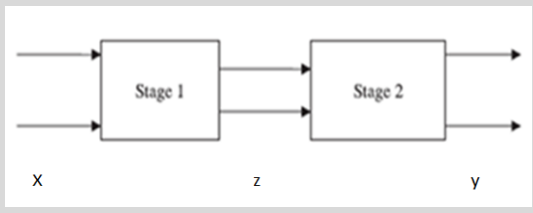
Όπου οι μεταβλητές α και β απεικονίζουν τις επιμέρους αποδοτικότητες για το πρώτο και δεύτερο στάδιο, αντίστοιχα. Παρόλα αυτά, όπως αναφέρουν οι Chen et al (2013), η μεταβλητή α^* είναι πάντα ίση με τη μονάδα ενώ από τη β^* προκύπτει η συνολική αποδοτικότητα της παραγωγικής διαδικασίας. Συνεπώς, οι α και β δεν αναπαριστούν τις επιμέρους αποδοτικότητες των δύο σταδίων. Σύμφωνα με τους Chen et al (2013), η παραπάνω διαπίστωση αποδεικνύει ότι τη μέθοδος SBM δε μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς στις παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων. Προτείνουν ένα συνδυασμό της μεθόδου SBM (υπολογισμός προβολών μη αποδοτικών μονάδων) και μιας multiplier-based προσέγγισης (υπολογισμός αποδοτικότητας μονάδων).

Οι Πίνακες 2 και 3 παρουσιάζουν συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά των τεσσάρων μεθόδων που μελετήθηκαν σε αυτή την ενότητα. Κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με τον προσανατολισμό (Πίνακας 2) των μοντέλων προς τις εισροές ή προς τις εκροές.

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ	ΣΤΙΣ ΕΙΣΡΟΕΣ	ΣΤΙΣ ΕΚΡΟΕΣ	ΧΩΡΙΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ
<i>Kao et al (2008)</i>	✓	✓	X
<i>Chen et al (2009)</i>	✓	✓	X
<i>Despotis et al (2012)</i>	X	X	✓
<i>SBM</i>	X	X	✓

Πίνακας 2: Προσανατολισμός μοντέλων

Στον Πίνακα 3 παραθέτουμε, συνοπτικά, τα βασικότερα χαρακτηριστικά των τεσσάρων μεθόδων που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα. Πιο συγκεκριμένα, και οι τέσσερις αναπτύσσονται υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS. Επίσης, όλες οι μέθοδοι μπορούν να επεκταθούν στην κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS εκτός από αυτή των Kao et al (2008). Επιπλέον, οι μέθοδοι εκτός από αυτή του SBM υπολογίζουν τη συνολική και τις επιμέρους αποδόσεις.

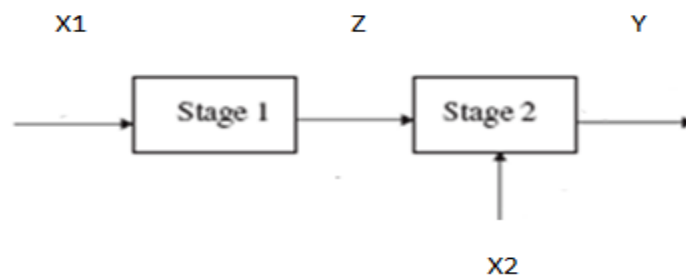
ΜΕΘΟΔΟΣ		
<i>Kao et al (2008)</i>	CRS	✓
	VRS	X
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	✓
<i>Chen et al (2009)</i>	CRS	✓
	VRS	✓
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	X
<i>Despotis et al (2012)</i>	CRS	✓
	VRS	✓

	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	Χ
<i>SBM</i>	CRS	✓
	VRS	✓
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	Χ
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	✓

Πίνακας 3: Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδων

2.2 Παραγωγική διαδικασία με επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο

Άλλη μια μορφή παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων παρουσιάζεται στην εικόνα 4, η οποία αποτελεί επέκταση της βασικής που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Ειδικότερα σε αυτήν, το δεύτερο στάδιο, εκτός από τα ενδιάμεσα μεγέθη, δέχεται και επιπλέον εισροές.



Εικόνα 4: Παραγωγική διαδικασία με επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο

2.2.1 Liang et al (2006)

Οι Liang et al (2006) εξέτασαν την παραγωγική διαδικασία της Εικόνας 4. Στο μοντέλο που προτείνουν το πρώτο και δεύτερο στάδιο έχουν την ίδια βαρύτητα στην παραγωγική διαδικασία και η συνολική απόδοση υπολογίζεται ως αριθμητικός μέσος των δύο επιμέρους σταδίων. Στόχος της προσέγγισης τους είναι η μεγιστοποίηση της αποδοτικότητας των δύο σταδίων, δεδομένου ότι τα βάρη των ενδιάμεσων μεγεθών είναι ίδια μεταξύ των δύο σταδίων. Στο πρώτο στάδιο, αντιστοιχεί το διάνυσμα των εισροών X_{S0} και το διάνυσμα των εκροών Y_{S0} . Επιπλέον, Y_{S0} και X_{M0} τα διανύσματα των εισροών στο δεύτερο στάδιο και Y_{M0} το διάνυσμα των εκροών του. Το μοντέλο που προτείνουν, υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, είναι το ακόλουθο:

$$E_0 = \max \frac{1}{2} \left[\frac{c^T Y_{S0}}{V_S^T X_{S0}} * \frac{U_M^T Y_{M0}}{c^T Y_{S0} + V_M^T X_{M0}} \right]$$

s. t.

$$\frac{c^T Y_{S0}}{V_S^T X_{S0}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (35)$$

$$\frac{U_M^T Y_{M0}}{c^T Y_{S0} + V_M^T X_{M0}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$c^T, V_S^T, U_M^T, V_M^T \geq 0$$

Εφαρμόζοντας στο παραπάνω μοντέλο το μετασχηματισμό των Charnes και Cooper

$$\omega_S^T = t_1 V_S^T \quad (t_1 = 1/V_S^T X_{S0}), \quad \omega_M^T = t_2 V_M^T \quad (t_2 = 1/c^T Y_{S0} + V_M^T X_{M0}), \quad \mu_M^T = t_2 U_M^T$$

$$c_S^T = t_1 c^T \quad \text{και} \quad c_M^T = t_2 c^T. \quad \text{Μεταξύ των } c_M^T \text{ και } c_S^T \text{ υπάρχει γραμμική σχέση οπότε υποθέτουν } c_M^T = k c_S^T.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει το μοντέλο (36):

$$E_0 = \max \frac{1}{2} [c_S^T Y_{S0} + \mu_M^T Y_{M0}]$$

s. t.

$$\omega_S^T X_{Sj} - c_S^T Y_{Sj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\omega_M^T X_{Mj} + c_M^T Y_{Sj} - \mu_M^T Y_{Mj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (36)$$

$$\omega_S^T X_{S0} = 1$$

$$\omega_M^T X_{M0} + k c_M^T Y_{S0} = 1$$

$$c_M^T = k c_S^T$$

$$\omega_S^T, \omega_M^T, c_M^T, c_S^T, \mu_M^T, k \geq 0$$

Το μοντέλο (36) είναι μη γραμμικό, μετασχηματίζεται στο ακόλουθο παραμετρικό γραμμικό πρόγραμμα:

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

$$\begin{aligned}
E_0 &= \max \frac{1}{2} [c_S^T Y_{S0} + \mu_M^T Y_{M0}] \\
s. t. \\
\omega_S^T X_{Sj} - c_S^T Y_{Sj} &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
\omega_M^T X_{Mj} + c_M^T Y_{Sj} - \mu_M^T Y_{Mj} &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
\omega_S^T X_{S0} &= 1 \\
\omega_M^T X_{M0} + k c_S^T Y_{S0} &= 1 \\
\omega_S^T, \omega_M^T, c_M^T, c_S^T, \mu_M^T, k &\geq 0
\end{aligned} \tag{37}$$

Στο μοντέλο (36) λόγω της παραμέτρου $k c_S^T$, χρησιμοποιούν μια ευρετική μέθοδο για την απόκτηση βέλτιστης λύσης. Ειδικότερα λόγω των περιορισμών $\omega_M^T X_{M0} + k c_S^T Y_{S0} = 1$, $c_S^T Y_{S0} \leq 1$ και $\omega_M^T X_{M0} > 0$ για τη μεταβλητή k ισχύει, $k = \frac{1 - \omega_M^T X_{M0}}{c_M^T Y_{S0}} < \frac{1}{c_M^T Y_{S0}}$.

Ως E_M^* ορίζεται η αποδοτικότητα που μπορεί να επιτευχθεί στο δεύτερο στάδιο εφόσον το πρώτο στάδιο έχει επιτύχει τη βέλτιστη απόδοση. Συνεπώς, η μέγιστη απόδοση του πρώτου σταδίου ($c_S^T Y_{S0}$) δε μπορεί να είναι μικρότερη του E_M^* , δηλαδή:

$$0 \leq k \leq \frac{1}{E_M^*} \tag{38}$$

Από τη σχέση (38) προκύπτει το άνω και κάτω όριο της παραμέτρου k . Αρχικά, οι Liang et al (2006) θέτουν $k = \frac{1}{E_M^*}$, και λύνουν το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα και στη συνέχεια, αρχίζουν να μειώνουν το k κατά $k_t = \frac{1}{E_M^*} - \epsilon$ - ετ για κάθε βήμα t , όπου ϵ ένας πολύ μικρός αριθμός. Σύμφωνα με την τιμή που δίνεται στο k_t , λύνεται κάθε φορά και το ανάλογο γραμμικό πρόγραμμα. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η βέλτιστη ευρετική λύση για το μοντέλο (35). Στη βέλτιστη κατάσταση, οι αποδοτικότητες του πρώτου και δεύτερου σταδίου είναι, $E_1^* = c_S^T Y_{S0}$ και $E_2^* = \mu_M^T Y_{M0}$. Συμπερασματικά, με τη συνεργατική προσέγγιση των Liang et al (2006) υπολογίζεται η συνολική απόδοση της παραγωγικής διαδικασίας ως αριθμητικός μέσος των αποδόσεων των επιμέρους σταδίων.

2.2.2. Li et al (2012)

Η παραγωγική διαδικασία με επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο μελετάται και από τους Li et al (2012). Η προσέγγιση τους στηρίζεται στο μοντέλο των Kao et al (2008). Συγκεκριμένα, η συνολική αποδοτικότητα της διαδικασίας υπολογίζεται ως γινόμενο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων. Έστω n MA και κάθε MA_j ($j=1,2,\dots,n$) έχει m εισροές στο πρώτο στάδιο x_{ij} , όπου ($i=1,2,\dots,m$) και D εκροές z_{dj} , όπου ($d=1,2,\dots,D$). Οι D εκροές του πρώτου σταδίου γίνονται οι εισροές στο δεύτερο

(ενδιάμεσα μεγέθη). Επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο είναι οι x_{hj}^2 ($h=1,2,\dots,H$). Οι εκροές από το δεύτερο στάδιο είναι s και ορίζονται ως y_{rj} , όπου ($r=1,2,\dots,s$). Το μοντέλο για τον υπολογισμό της συνολικής αποδοτικότητας, υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, δίνεται ακολούθως:

$$\theta^{overall} = \max \theta_0^1 * \theta_0^2$$

$$\theta^{overall} = \max \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}} * \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0} + \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_0}^{-2}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \quad (39)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r_j}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} + \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_j}^{-2}} \leq 1, \quad \forall j$$

$$v_i, w_d, Q_h, u_r \geq 0, \quad \forall i, d, h, r.$$

Όπου θ_0^1 και θ_0^2 οι αποδοτικότητες των σταδίων 1 και 2 αντίστοιχα. Επίσης, οι Li et al (2012) υιοθετούν την υπόθεση ότι εφαρμόζονται τα ίδια βάρη (w_d) στα ενδιάμεσα μεγέθη (z_{d_j}) και για τα δύο στάδια. Εξαιτίας των επιπλέον εισροών $\sum_{h=1}^H Q_h x_{h_j}^2$ στο δεύτερο στάδιο το μοντέλο (39) δε μπορεί να μετασχηματιστεί σε γραμμικό οπότε προτείνουν μια ευρετική μέθοδο για την επίλυση του προγράμματος.

Με το ακόλουθο μοντέλο υπολογίζεται η αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου:

$$\theta_0^{1max} = \max \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \quad (40)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r_j}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} + \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_j}^2} \leq 1, \quad \forall j$$

$$v_i, w_d, Q_h, u_r \geq 0, \quad \forall i, d, h, r.$$

Οι περιορισμοί του μοντέλου (39) είναι ίδιοι με αυτούς του μοντέλου (40), οι οποίοι διασφαλίζουν ότι οι αποδοτικότητες του πρώτου και του δεύτερου σταδίου δε θα υπερβούν τη μονάδα. Η μέγιστη απόδοση για το πρώτο στάδιο είναι η θ_0^{1max} , οπότε η απόδοση του πρώτου σταδίου $\theta_0^1 \in [0, \theta_0^{1max}]$. Το μοντέλο (40) μετατρέπεται σε γραμμικό μέσω του μετασχηματισμού Charnes και Cooper:

$$\theta_0^{1max} = \max \sum_{d=1}^D w_d z_{d_0}$$

s.t.

$$\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad \forall j \quad (41)$$

$$\sum_{r=1}^S u_r y_{r_j} - \sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} - \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_j}^2 \leq 0, \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0} = 1$$

$$v_i, w_d, Q_h, u_r \geq 0, \quad \forall i, d, h, r.$$

Επομένως, όπως αναφέρουν οι Li et al (2012), η αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια μεταβλητή $\theta_0^1 \in [0, \theta_0^{1max}]$ και η συνολική αποδοτικότητα $\theta^{overall}$ να υπολογισθεί ως συνάρτηση αυτής.

Το μοντέλο (39) μετασχηματίζεται στο ακόλουθο:

$$\theta^{overall} = \max \theta_0^1 * \frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{r_0}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0} + \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_0}^2}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j$$

$$\frac{\sum_{r=1}^S u_r y_{r_j}}{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} + \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_j}^2} \leq 1, \quad \forall j \quad (42)$$

$$\theta_0^1 = \max \frac{\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}} \quad \theta_0^1 \in [0, \theta_0^{1*}]$$

$$v_i, w_d, Q_h, u_r \geq 0, \quad \forall i, d, h, r.$$

Με το αντίστοιχο παραμετρικό γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned}
\theta^{overall} &= \max \theta_0^1 * \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0} \\
s.t. \\
\sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, \quad \forall j \\
\sum_{r=1}^s u_r y_{r_j} - \sum_{d=1}^D w_d z_{d_j} - \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_j}^2 &\leq 0, \quad \forall j \\
\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0} + \sum_{h=1}^H Q_h x_{h_0}^2 &= 1 \\
\sum_{d=1}^D w_d z_{d_0} + \theta_0^1 \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0} &= 0 \\
v_i, w_d, Q_h, u_r &\geq 0, \quad \forall i, d, h, r. \quad \theta_0^1 \in [0, \theta_0^{1max}]
\end{aligned} \tag{43}$$

Για την επίλυση του παραμετρικού μοντέλου (43) οι Li et al (2012) προτείνουν την ακόλουθη ευρετική μέθοδο. Έστω, $\theta_0^1 = \theta_0^{1max} - k\Delta\epsilon$, όπου $\Delta\epsilon$ το βήμα και $k = 0, 1, \dots, [k^{max}] + 1$ όπου ($[k^{max}]$) ο μέγιστος ακέραιος όποιος είναι μικρότερος ή ίσος του $\theta_0^{1max}/k\Delta\epsilon$. Συνεπώς, δοθείσας κάθε θ_0^{1max} το μοντέλο (43) μπορεί να λυθεί ως γραμμικό πρόγραμμα. Κατά την επίλυση του μοντέλου (43), η τιμή k αρχικοποιείται στο κάτω όριο της, δηλαδή $k = 0$. Στη συνέχεια το k αυξάνεται για κάθε βήμα και ανάλογα με την τιμή που παίρνει το θ_0^{1max} λύνεται και το αντίστοιχο γραμμικό πρόγραμμα. Από αυτή τη διαδικασία προκύπτει η βέλτιστη τιμή $\theta^{overall}(k)$ που μπορεί να βρεθεί για το μοντέλο (43). Επομένως, η συνολική αποδοτικότητα του συστήματος μπορεί να εκτιμηθεί ως $\hat{\theta}^{overall} = \max \theta^{overall}(k)$. Στην παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων, δοθείσας της $\hat{\theta}^{overall}$, η μέγιστη αποδοτικότητα για το πρώτο στάδιο είναι $\hat{\theta}_0^{1+} = \theta_0^1(k^*)$, όπου $k^* = \min\{k | \hat{\theta}^{overall} = \theta^{overall}(k)\}$. Η ελάχιστη αποδοτικότητα για το δεύτερο στάδιο θα είναι $\hat{\theta}_0^{2-} = \hat{\theta}^{overall} / \hat{\theta}_0^{1+}$. (Ανάλογη είναι η περίπτωση στην οποία η αποδοτικότητα του δεύτερου σταδίου λαμβάνεται ως παράμετρος.) Η ανάλυση της αποδοτικότητας στις επιμέρους αποδόσεις των δύο σταδίων είναι μοναδική αν $\hat{\theta}_0^{1-} = \hat{\theta}_0^{1+}$ και $\hat{\theta}_0^{2-} = \hat{\theta}_0^{2+}$.

2.2.3 Amirteimoori et al (2011)

Οι Amirteimoori et al (2011) προτείνουν μια διαφορετική προσέγγιση για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας σε παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων με επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο. Μελέτησαν την περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας όπου το πρώτο στάδιο αποτελεί τον προμηθευτή (Supplier) ενώ το δεύτερο τον κατασκευαστή (Manufacturer). Ειδικότερα, για η MA_j ($j=1, \dots, n$), όπου κάθε MA_j αποτελείται από το πρώτο στάδιο με m εισροές x_{ij} ($i=1, \dots, m$) και s εκροές y_{rj} ($r=1, \dots, s$). Οι s εκροές y_{rj} γίνονται εισροές στο δεύτερο στάδιο με τις επιπλέον εισροές z_{dj} ($d=1, \dots, D$). Οι τελικές εκροές του δεύτερου σταδίου είναι οι q_{lj} ($l=1, \dots, L$). Επίσης, χρησιμοποιούν το κλασικό προσθετικό (Additive) μοντέλο Charnes et al (1985).

Συγκεκριμένα:

To Additive μοντέλο

Amirteimoori et al (2011)

$$\begin{aligned}
z_0 &= \max s^- + s^+ & z_0 &= \min s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \\
\text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- &= x_0 & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s_1 &= x_0 \\
\sum_{j=1}^n \mu_j q_j - s^+ &= q_0 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + s_2 &= y_0 \\
\lambda_j, s^-, s^+ &\geq 0 & \sum_{j=1}^n \mu_j z_j + s_3 &= z_0 \\
& & \sum_{j=1}^n \mu_j q_j - s_4 &= q_0 \\
& & \lambda_j, \mu_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\
& & s_1, s_3, s_4 &\geq 0, s_2 \text{ free}
\end{aligned} \tag{44}$$

Σύμφωνα με τους Amirteimoori et al (2011):

- Το πρώτο στάδιο θεωρείται αποδοτικό αν και μόνο αν $s_1 + s_2 = 0$.
- Το δεύτερο στάδιο θεωρείται αποδοτικό αν και μόνο αν $s_2 + s_3 + s_4 = 0$.
- Η MA_0 θεωρείται αποδοτική αν και μόνο αν $z_0 = 0$

Για μια μη αποδοτική μονάδα $S_0(x_0, y_0)$ στο πρώτο στάδιο ορίζονται οι προβολές:

$$\widehat{x}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j - s_1$$

$$\widehat{y}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + s_2$$

Για μια μη αποδοτική μονάδα $M_0(y_0, z_0, q_0)$ στο δεύτερο στάδιο ορίζονται οι προβολές:

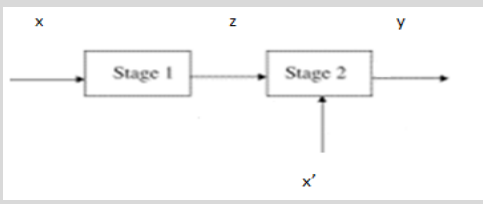
$$\widehat{y}_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + s_2$$

$$\widehat{z}_0 = \sum_{j=1}^n \mu_j z_j - s_3$$

$$\widehat{q}_0 = \sum_{j=1}^n \mu_j q_j + s_4$$

Οι Amirteimoori et al (2011) βασίζονται στο ότι τα στάδια μπορούν να καταστούν αποδοτικά καταργώντας τις πλεονάζουσες εισροές και αυξάνοντας τις ελλειμματικές εκροές. Το διάνυσμα s_2 αφήνεται ελεύθερο, αφού ο ρόλος του είναι αντικρουόμενος, διότι αντιστοιχεί στα ενδιάμεσα μεγέθη τα οποία λειτουργούν ως εκροές του πρώτου και ως εισροές του δεύτερου σταδίου. Με αυτό τον τρόπο τα ενδιάμεσα μεγέθη θα μειωθούν ή αυξηθούν, αν η αντίστοιχη χαλαρή μεταβλητή λάβει θετική ή αρνητική τιμή.

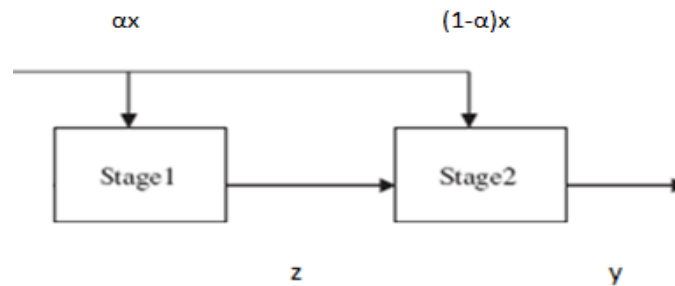
Στον Πίνακα 4 παραθέτουμε, συνοπτικά, τα βασικότερα χαρακτηριστικά των τριών μεθόδων που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα. Πιο συγκεκριμένα, και οι τρεις χρησιμοποιήθηκαν υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, ενώ δεν αναφέρεται αν μπορούν να επεκταθούν στην κλίμακα VRS. Επιπλέον, όλες οι μέθοδοι υπολογίζουν τη συνολική αλλά και τις επιμέρους αποδόσεις των δύο σταδίων εκτός από αυτή των Amirteimoori et al (2011).

ΜΕΘΟΔΟΣ		
<i>Liang et al (2006)</i>	CRS	✓
	VRS	X
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	X
<i>Li et al (2012)</i>	CRS	✓
	VRS	X
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	X
<i>Amirteimoori et al. (2011)</i>	CRS	✓
	VRS	X
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	X
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	X
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	✓

Πίνακας 4: Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδων

2.3 Παραγωγική διαδικασία με διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ των δύο σταδίων

Άλλη μια μορφή παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων είναι η περίπτωση όπου οι εισροές διαμοιράζονται μεταξύ των δύο σταδίων. Όπως φαίνεται από την Εικόνα 5 το πρώτο στάδιο καταναλώνει ένα ποσοστό α από τις συνολικές εισροές x ώστε να παράγει τα ενδιάμεσα μεγέθη z που στη συνέχεια μαζί με το ποσοστό $(1-\alpha)$ θα χρησιμοποιηθούν από το δεύτερο στάδιο για την παραγωγή των τελικών εκροών y .



Εικόνα 5: Παραγωγική διαδικασία με διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ των δύο σταδίων

2.3.1 Chen et al (2006)

Οι Chen et al (2006) μελέτησαν μια παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων, όπως αυτή που παρουσιάστηκε παραπάνω, στον τραπεζικό τομέα. Ειδικότερα, σε αυτή τη διαδικασία οι εισροές συνδέονται άμεσα και με τα στάδια αφού είναι απαραίτητοι πόροι και των δύο. Οι εισροές i) F (fixed assets) διαχωρίζονται σε αF και $(1-\alpha)F$, ($\alpha \leq 1$), ii) I (IT budget) διαχωρίζονται σε βI και $(1-\beta)I$, ($\beta \leq 1$), iii) E (employees) χωρίζονται σε γE και $(1-\gamma)E$, ($\gamma \leq 1$), αντίστοιχα. Το πρώτο στάδιο καταναλώνει ένα ποσοστό α από τις συνολικές εισροές ώστε να παράγει τα ενδιάμεσα μεγέθη D που στη συνέχεια μαζί με το ποσοστό $(1-\alpha)$ θα χρησιμοποιηθούν από το δεύτερο στάδιο για την παραγωγή των τελικών εκροών $\left(\frac{P}{R}\right)$. Χρησιμοποιούν το ακόλουθο μοντέλο υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, όπου η συνολική απόδοση του συστήματος υπολογίζεται ως αριθμητικός μέσος των αποδόσεων των δύο σταδίων.

$$\max \frac{1}{2} \left[\frac{U_D D_0}{V_F \alpha F_0 + V_I \beta I_0 + V_E \gamma E_0} + \frac{U_L^T \left(\frac{P_0}{R_0}\right)}{V_F (1-\alpha) F_0 + V_I (1-\beta) I_0 + V_E (1-\gamma) E_0 - U_D D_0} \right]$$

s. t.

$$\frac{U_D D_j}{V_F \alpha F_j + V_I \beta I_j + V_E \gamma E_j} \leq 1 \quad (45)$$

$$\frac{U_L^T(P_j)}{V_F(1-\alpha)F_0 + V_I(1-\beta)I_j + V_E(1-\gamma)E_j - U_D D_j} \leq 1$$

$$1 \geq \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

$$V_F, V_I, V_E, U_D, U_L^T \geq 0$$

Το μοντέλο (45) προκύπτει από το συνδυασμό δύο CRS μοντέλων για το πρώτο στάδιο:

$$e_1 = \frac{U_D D_0}{V_F \alpha F_0 + V_I \beta I_0 + V_E \gamma E_0}$$

Για το δεύτερο στάδιο:

$$e_2 = \frac{U_L^T(P_0)}{V_F(1-\alpha)F_0 + V_I(1-\beta)I_0 + V_E(1-\gamma)E_0 - U_D D_0}$$

Το μοντέλο (45) μετασχηματίζεται στο αντίστοιχο γραμμικό παραμετρικό γραμμικό, έπειτα από μια σειρά μετασχηματισμών:

$$\max \frac{1}{2} [\mu_D D_0 + \mu_L^T(P_0)]$$

s. t.

$$\omega'_{DF} F_j + \omega'_{DI} I_j + \omega'_{DE} E_j - \mu_D D_j \geq 0$$

$$\omega'_{DF} F_0 + \omega'_{DI} I_0 + \omega'_{DE} E_0 = 1$$

$$(\omega_{DF} - \omega'_{DF}) F_j + (\omega_{DI} - \omega'_{DI}) I_j + (\omega_{DE} - \omega'_{DE}) E_j + \mu_D D_j - k' \mu_L^T(P_j) \geq 0$$

$$\omega_{DF} F_0 + \omega_{DI} I_0 + \omega_{DE} E_0 + \mu_D D_0 - k' = 1 \tag{46}$$

$$\omega_{DF} - \omega'_{DF} \geq 0$$

$$\omega_{DI} - \omega'_{DI} \geq 0$$

$$\omega_{DE} - \omega'_{DE} \geq 0$$

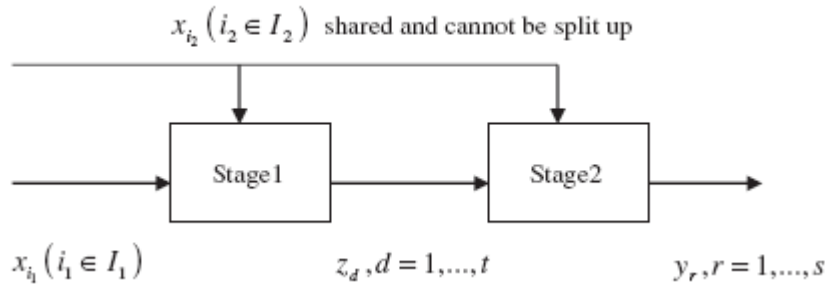
$$\omega_{DF}, \omega_{DI}, \omega_{DE}, \omega'_{DF}, \omega'_{DI}, \omega'_{DE}, \mu_D, k', \mu_L^T \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Επειδή $\omega_{DF} F_0 + \omega_{DI} I_0 + \omega_{DE} E_0 + \mu_D D_0 = 1 + 1/k = 1 + k'$ τότε $\omega_{DF} F_0 + \omega_{DI} I_0 + \omega_{DE} E_0 \geq \omega_{DF}^* F_0 + \omega_{DI}^* I_0 + \omega_{DE}^* E_0 = 1$, επομένως, $1 < k \leq \mu_D D_0$. Οι Chen et al (2006) χρησιμοποιούν μια παραμετρική τεχνική, παρόμοια με αυτή των Liang et al (2006), ώστε να υπολογίσουν τη συνολική απόδοση αλλά και αυτή των επιμέρους σταδίων. Επίσης, αναφέρουν πως στην περίπτωση ύπαρξης ενός

ενδιάμεσου μεγέθους, το αρχικό μη γραμμικό μοντέλο μπορεί να μετατραπεί άμεσα σε γραμμικό (χωρίς τη χρήση παραμέτρου).

2.3.2 Chen et al (2010b)

Οι Chen et al (2010b), επεκτείνουν την προσέγγιση των Chen et al (2009) και παρουσιάζουν μια μέθοδο υπολογισμού της συνολικής απόδοσης παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές. Μια τέτοια διαδικασία παρουσιάζεται στην Εικόνα 6. Έστω ότι υπάρχουν n ΜΑ και κάθε ΜΑ _{j} ($j=1,2,\dots,n$) έχει m εισροές x_{ij} , όπου ($i=1,2,\dots,m$) για όλη τη διαδικασία. Κάποιες από τις m εισροές χρησιμοποιούνται από το πρώτο στάδιο, ενώ οι υπόλοιπες διαμοιράζονται από κοινού στα δύο στάδια. Οι δύο αυτοί τύποι εισροών δηλώνονται ως εισροές x_{i_1j} ($i_1 \in I_1$) και διαμοιραζόμενες εισροές x_{i_2j} ($i_2 \in I_2$), αντίστοιχα, όπου $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, m\}$. Επίσης, οι εκροές του πρώτου σταδίου z_{dj} ($d = 1, \dots, t$) χρησιμοποιούνται ως εισροές στο δεύτερο (ενδιάμεσα μεγέθη). Οι εκροές από το δεύτερο στάδιο είναι s και ορίζονται ως y_{rj} , όπου ($r=1,2,\dots,s$). Αφού οι εισροές $i_2 \in I_2$ διαμοιράζονται στα δύο στάδια, όλες οι x_{i_2j} ($i_2 \in I_2$) χωρίζονται σε $\alpha_{i_2j}x_{i_2j}$ και $(1 - \alpha_{i_2j})x_{i_2j}$ ($0 \leq \alpha_{i_2j} \leq 1$) για το πρώτο και το δεύτερο στάδιο αντίστοιχα. Με α_{i_2j} ($i_2 \in I_2, j = 1, 2, \dots, n$), $L_{i_2j}^1 \leq \alpha_{i_2j} \leq L_{i_2j}^2$.



Εικόνα 6: Παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ των δύο σταδίων

Η απόδοση της ΜΑ _{0} , υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, δίνεται από το μοντέλο (47):

$$\theta^1 = \max \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d^1 z_{d0} + u^A}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_10} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^1 \alpha_{i_20} x_{i_20}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d^1 z_{dj} + u^A}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1j} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^1 \alpha_{i_2j} x_{i_2j}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (47)$$

$$L_{i_2j}^1 \leq \alpha_{i_2j} \leq L_{i_2j}^2, \quad i_2 \in I_2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta_d^1, v_{i_1}, v_{i_2}^1 \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; \quad u^A \text{ free}$$

και στο δεύτερο στάδιο δίνεται από το μοντέλο (48):

$$\theta^2 = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + u^B}{\sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 (1 - \alpha_{i_2 0}) x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d^2 z_{d0}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u^B}{\sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 (1 - \alpha_{i_2 j}) x_{i_2 j} + \sum_{d=1}^t \eta_d^2 z_{dj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (48)$$

$$L_{i_2 j}^1 \leq \alpha_{i_2 j} \leq L_{i_2 j}^2, \quad i_2 \in I_2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta_d^2, u_r, v_{i_2}^2 \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, \quad r = 1, \dots, s \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; \quad u^A \text{ free}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν τεθεί $u^A = u^B = 0$ τα παραπάνω μοντέλα μετατρέπονται σε μοντέλα υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS. Για τον υπολογισμό της συνολικής αποδοτικότητας θεωρείται ότι τα βάρη για τα ενδιάμεσα μεγέθη είναι ίδια μεταξύ των δύο σταδίων. Επίσης, όπως στους Chen et al (2009), υποθέτουν ότι η συνολική απόδοση της παραγωγικής διαδικασίας υπολογίζεται ως σταθμισμένος μέσος των επιμέρους αποδόσεων των δύο σταδίων. Έστω δύο βάρη w_1 και w_2 όπου $w_1 + w_2 = 1$. Παρόμοια με τους Chen et al (2009), ο υπολογισμός της συνολικής αποδοτικότητας των δύο σταδίων δίνεται από τη σχέση:

$$\theta_0 = w_1 * \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d^1 z_{d0} + u^A}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^1 \alpha_{i_2 0} x_{i_2 0}} + w_2 * \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + u^B}{\sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 (1 - \alpha_{i_2 0}) x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d^2 z_{d0}},$$

Τα w_1, w_2 αντιπροσωπεύουν το μέγεθος του κάθε σταδίου και χρησιμοποιούνται ώστε να γίνει γραμμικό το πρόγραμμα. Ορίζονται ως:

$$w_1 = \frac{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} \alpha_{i_2 0} x_{i_2 0}}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0}} \quad \text{και} \quad w_2 = \frac{\sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} (1 - \alpha_{i_2 0}) x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0}}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0}}$$

Τα βάρη w_1 και w_2 δεν είναι μεταβλητές βελτιστοποίησης. Για την εύρεση της συνολικής απόδοσης, υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, ορίζουν το ακόλουθο κλασματικό πρόγραμμα:

$$\theta_0 = \max \frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{d0} + u^A + \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + u^B}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{d=1}^D \eta_d z_{dj} + u^A}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1} x_{i_1 j} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} \alpha_{i_2 j} x_{i_2 j}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u^B}{\sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2} (1 - \alpha_{i_2 j}) x_{i_2 j} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{dj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (49)$$

$$L_{i_2j}^1 \leq \alpha_{i_2j} \leq L_{i_2j}^2, \quad i_2 \in I_2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\eta_d, u_r, v_{i_1}, v_{i_2} \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, \quad r = 1, \dots, s \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; \quad u^A, u^B \text{ free}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Charnes-Cooper στο μοντέλο (49) προκύπτει το μοντέλο (50):

$$\theta_0 = \max \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r_0} + u^1 + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_0} + u^2$$

s. t.

$$\sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_j} + u^1 - \left(\sum_{i=1}^m \omega_{i_1} x_{i_1j} + \sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2} \alpha_{i_2j} x_{i_2j} \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + u^2 - \left[\sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2} (1 - \alpha_{i_2j}) x_{i_2j} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_j} \right] \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1} x_{i_1,0} + \sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2} x_{i_2,0} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_0} = 1 \quad (50)$$

$$L_{i_2j}^1 \omega_{i_2} \leq \beta_{i_2j} \leq L_{i_2j}^2 \omega_{i_2}, \quad i_2 \in I_2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\pi_d, \mu_r, \omega_{i_1}, \omega_{i_2} \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, \quad r = 1, \dots, s \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; \quad u^1, u^2 \text{ free}$$

Το μοντέλο (50) εξακολουθεί να είναι μη γραμμικό εξαιτίας των $\omega_{i_2} \alpha_{i_2j} x_{i_2j}$.

Για το λόγο αυτό οι Chen et al (2010b) θέτουν $\beta_{i_2j} = \alpha_{i_2j} \omega_{i_2}$, ($j=1, \dots, n$) και το μοντέλο (50) μετατρέπεται στο ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\theta_0 = \max \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r_0} + u^1 + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_0} + u^2$$

s. t.

$$\sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_j} + u^1 - \left(\sum_{i=1}^m \omega_{i_1} x_{i_1j} + \sum_{i_2 \in I_2} \beta_{i_2j} x_{i_2j} \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + u^2 - \left[\sum_{i_2 \in I_2} (\omega_{i_1} - \beta_{i_2j}) x_{i_2j} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_j} \right] \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1} x_{i_1,0} + \sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2} x_{i_2,0} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d_0} = 1 \quad (51)$$

$$L_{i_2j}^1 \omega_{i_2} \leq \beta_{i_2j} \leq L_{i_2j}^2 \omega_{i_2}, \quad i_2 \in I_2, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\pi_d, \mu_r, \omega_{i_1}, \omega_{i_2} \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, \quad r = 1, \dots, s \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; \quad u^1, u^2 \text{ free}$$

Στο μοντέλο χρησιμοποιούνται άνω και κάτω φράγματα που αφορούν τα ποσοστά των διαμοιραζόμενων εισροών μεταξύ των δύο σταδίων.

Από την επίλυση του μοντέλου (50) προκύπτει η βέλτιστη απόδοση θ_0 . Σύμφωνα με τους Chen et al (2010) μπορεί να υπολογισθεί και η αποδοτικότητα των δύο επιμέρους σταδίων θ_0^1 και θ_0^2 . Ωστόσο, η ανάλυση της συνολικής αποδοτικότητας σε επιμέρους στάδια μπορεί να μην είναι μοναδική. Για το λόγο αυτό, προτείνουν την ακόλουθη διαδικασία. Δοθείσας της ολικής αποδοτικότητας θ_0^* υπολογίζεται η

αποδοτικότητα (θ_0^1) του πρώτου σταδίου (ή αντίστοιχα του δεύτερου) και στη συνέχεια εκτιμάται και η αποδοτικότητα του άλλου σταδίου.

Έστω w_1^* και w_2^* τα βέλτιστα βάρη που προκύπτουν από το μοντέλο (51). Και επειδή ισχύει $\sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1}^* x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2}^* x_{i_2 0} + \sum_{d=1}^t \pi_d^* z_{d0} = 1$, θα είναι $w_1^* = \sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1}^* x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} \beta_{i_2 0}^* x_{i_2 0}$ και $w_2^* = 1 - w_1^*$, όπου $\omega_{i_1}^*, \omega_{i_2}^*, \beta_{i_2 0}^*, \pi_d^*$ ($d = 1, \dots, t, i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$) οι βέλτιστες τιμές των $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \beta_{i_2 0}, \pi_d$ στο μοντέλο (51). Στην περίπτωση που δίνεται προτεραιότητα στο πρώτο στάδιο. Το μοντέλο (51α) παρέχει την αποδοτικότητα του πρώτου σταδίου (θ_0^1), διατηρώντας σταθερή την ολική αποδοτικότητα θ_0^* .

$$\theta_0^{1max} = \max \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d0} + u^1$$

s. t.

$$\sum_{d=1}^t \pi_d z_{dj} + u^1 - (\sum_{i=1}^m \omega_{i_1} x_{i_1 j} + \sum_{i_2 \in I_2} \beta_{i_2 j} x_{i_2 j}) \leq 0, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + u^1 - [\sum_{i_2 \in I_2} (\omega_{i_2} - \beta_{i_2 j}) x_{i_2 j} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{dj}] \leq 0, j = 1, \dots, n$$

$$(1 - \theta_0^*) \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d0} + \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + u^1 + u^2 - \theta_0^* (\sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2} x_{i_2 0}) = 0$$

$$w_1^* (\sum_{d=1}^t \pi_d z_{d0} + u^1) \leq \theta_0^*$$

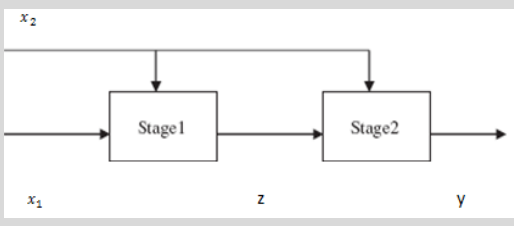
$$\sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1} x_{i_1 0} + \sum_{i_2 \in I_2} \beta_{i_2 0} x_{i_2 0} = 1 \quad (51\alpha)$$

$$L_{i_2 j}^1 \omega_{i_2} \leq \beta_{i_2 j} \leq L_{i_2 j}^2 \omega_{i_2}, i_2 \in I_2, j = 1, \dots, n$$

$$\pi_d, \mu_r, \omega_{i_1}, \omega_{i_2} \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, r = 1, \dots, s \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; u^1, u^2 \text{ free}$$

Στην συνέχεια, οι Chen et al (2010b) υπολογίζουν την αποδοτικότητα για το δεύτερο στάδιο θ_0^2 από τη σχέση $\theta_0^2 = \frac{\theta_0^* - \theta_0^* w_1^*}{w_2^*}$ όπου w_1^* και w_2^* τα βέλτιστα βάρη όπως προκύπτουν από το μοντέλο (51). Στην περίπτωση που ισχύει $\theta_0^1 = \theta_0^{1max}$ και $\theta_0^2 = \theta_0^{2max}$ τότε έχει επιτευχθεί μοναδική ανάλυση της αποδοτικότητας. Αν δοθεί προτεραιότητα στο δεύτερο στάδιο ακολουθείται παρόμοια διαδικασία, αντίστοιχα, για το πρώτο στάδιο η αποδοτικότητα της MA_0 υπολογίζεται ως $\theta_0^1 = \frac{\theta_0^* - w_2^* \theta_0^{2*}}{w_1^*}$.

Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά των δύο μεθόδων που μελετήθηκαν σε αυτή την ενότητα.

ΜΕΘΟΔΟΣ		
<i>Chen et al (2006)</i>	CRS	✓
	VRS	X
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	X
<i>Chen et al. (2010b)</i>	CRS	✓
	VRS	✓
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ	X

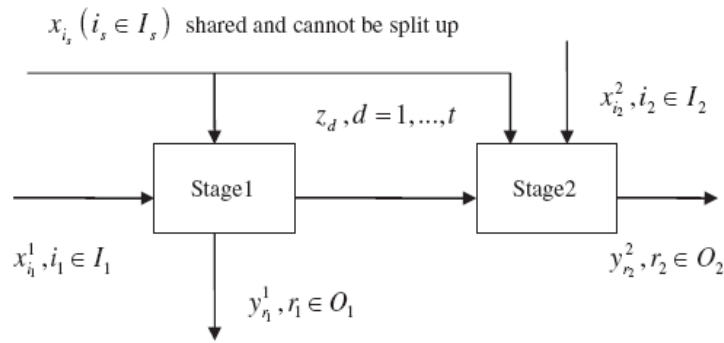
Πίνακας 5: Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδων

2.4 Παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές, ενδιάμεσες εκροές και αποκλειστικές εισροές

2.4.1 Chen et al (2010b)

Οι Chen et al (2010b), επιπλέον εξετάζουν μια περισσότερο σύνθετη μορφή παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων, η οποία εκτός από διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ των σταδίων, περιλαμβάνει τη χρήση κάποιων εισροών αποκλειστικά από κάθε στάδιο και την παραγωγή εκροών (Εικόνα 7). Έστω ότι υπάρχουν n ΜΑ και κάθε ΜΑ _{j} ($j=1,2,\dots,n$) έχει m εισροές x_{ij} , όπου ($i=1,2,\dots,m$) για όλη τη διαδικασία. Κάποιες εισροές χρησιμοποιούνται αποκλειστικά από το πρώτο στάδιο, κάποιες αποκλειστικά από το

δεύτερο στάδιο, ενώ οι υπόλοιπες διαμοιράζονται από κοινού στα δύο στάδια. Οι τρεις αυτοί τύποι εισροών δηλώνονται ως εισροές $x_{i_1j}(i_1 \in I_1)$, $x_{i_2j}(i_2 \in I_2)$ και διαμοιραζόμενες εισροές $x_{i_sj}(i_s \in I_s)$. Επίσης, οι εκροές του πρώτου σταδίου z_{dj} ($d = 1, \dots, t$) χρησιμοποιούνται ως εισροές στο δεύτερο στάδιο (ενδιάμεσα μεγέθη). Οι εκροές του πρώτου σταδίου $y_{r_1}^1$, ($r_1 \in O_1$) δε χρησιμοποιούνται από το δεύτερο στάδιο ως εισροές και αφήνουν το σύστημα. Οι εκροές του δεύτερου σταδίου είναι s και ορίζονται ως $y_{r_2}^2$, ($r_2 \in O_2$). Τέλος, το δεύτερο στάδιο δέχεται και τις επιπλέον εισροές $x_{i_2}^2$ ($i_2 \in I_2$). Αφού οι εισροές $i_s \in I_s$ διαμοιράζονται στα δύο στάδια, όλες οι x_{i_sj} ($i_s \in I_s$) χωρίζονται σε $\alpha_{i_sj}x_{i_sj}$ και $(1 - \alpha_{i_sj})x_{i_sj}$ ($0 \leq \alpha_{i_sj} \leq 1$) για το πρώτο και το δεύτερο στάδιο αντίστοιχα. Με α_{i_sj} ($i_s \in I_s, j = 1, 2, \dots, n$), $L_{i_sj}^1 \leq \alpha_{i_sj} \leq L_{i_sj}^2$.



Εικόνα 7. Παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές, ενδιάμεσες εκροές και αποκλειστικές εισροές

Όπως οι Chen et al (2010b) στην προηγούμενη ενότητα, η συνολική απόδοση του συστήματος (υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS) ορίζεται ως ένας σταθμισμένος μέσος των επιμέρους αποδοτικότητας των σταδίων.

$$e_0 = w_1 * \frac{\sum_{r_1 \in O_1} u_{r_1}^1 y_{r_1}^1 + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0}}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1}^1 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} \alpha_{i_s,0} x_{i_s,0}} +$$

$$w_2 * \frac{\sum_{r_2 \in O_2} u_{r_2}^2 y_{r_2}^2 + u^B}{\sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} (1 - \alpha_{i_s,0}) x_{i_s,0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2,0}^2}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν τεθεί $u^A = u^B = 0$ τα παραπάνω μοντέλα μετατρέπονται σε μοντέλα υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS. Για τον υπολογισμό της συνολικής απόδοσης θεωρείται ότι τα βάρη για τα ενδιάμεσα μεγέθη είναι ίδια μεταξύ των δύο σταδίων. Έστω δύο βάρη που w_1 και w_2 που ορίζονται έτσι ώστε $w_1 + w_2 = 1$.

Όπου τα βάρη:

$$w_1 = \frac{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1 0}^1 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} \alpha_{i_s 0} x_{i_s 0}}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1 0}^1 + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2 0}^2 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} x_{i_s 0}}$$

Και

$$w_2 = \frac{\sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2 0}^2 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} (1 - \alpha_{i_s 0}) x_{i_s 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0}}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1 0}^1 + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2 0}^2 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} x_{i_s 0}}$$

Η συνολική απόδοση της MA_0 , υπό την κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS, από το ακόλουθο κλασματικό πρόγραμμα (52):

$$\theta_0 = \max \frac{\sum_{r_1 \in I_1} u_{r_1}^1 y_{i_1 0}^1 + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0} + u^A + \sum_{r_2 \in O_2} u_{r_2}^2 y_{r_2 0}^2 + u^B}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1 0}^1 + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{d0} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2 0}^2 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} x_{i_s 0}}$$

s. t.

$$\frac{\sum_{r_1 \in I_1} u_{r_1}^1 y_{i_1 j}^1 + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{dj} + u^A}{\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1 j}^1 + \sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} \alpha_{i_s j} x_{i_s j}} \leq 1, j = 1, \dots, n \quad (52)$$

$$\frac{\sum_{r_2 \in O_2} u_{r_2}^2 y_{r_2 0}^2 + u^B}{\sum_{i_s \in I_s} v_{i_s} (1 - \alpha_{i_s j}) x_{i_s 0} + \sum_{d=1}^t \eta_d z_{dj} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2 j}^2} \leq 1, j = 1, \dots, n$$

$$L_{i_s j}^1 \leq \alpha_{i_s j} \leq L_{i_s j}^2, \quad i_s \in I_s, j = 1, \dots, n$$

$$u_{r_1}^1, u_{r_2}^2, \eta_d, v_{i_1}^1, v_{i_2}^2 \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t,$$

$$i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, i_s \in I_s; \quad r_1 \in O_1, r_2 \in O_2, u^A, u^B \text{ free}$$

Το οποίο μετασχηματίζεται στο ακόλουθο γραμμικό:

$$\theta_0 = \max \sum_{r_1 \in I_1} \mu_{r_1}^1 y_{i_1 0}^1 + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d0} + u^1 + \sum_{r_2 \in O_2} \mu_{r_2}^2 y_{r_2 0}^2 + u^2$$

s. t.

$$\sum_{r_1 \in I_1} \mu_{r_1}^1 y_{i_1 j}^1 + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{dj} + u^1 - (\sum_{i_1 \in I_1} v_{i_1}^1 x_{i_1 j}^1 + \sum_{i_s \in I_s} \beta_{i_s j} x_{i_s j}) \leq 0, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r_2 \in O_2} \mu_{r_2}^2 y_{r_2 j}^2 + u^2 - [\sum_{i_s \in I_s} (\omega_{i_1} - \beta_{i_s j}) x_{i_s j} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{dj} + \sum_{i_2 \in I_2} v_{i_2}^2 x_{i_2 j}^2] \leq 0, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i_1 \in I_1} \omega_{i_1}^1 x_{i_1 0}^1 + \sum_{i_2 \in I_2} \omega_{i_2}^2 x_{i_2 0}^2 + \sum_{i_s \in I_s} \omega_{i_s} x_{i_s 0} + \sum_{d=1}^t \pi_d z_{d0} = 1 \quad (53)$$

$$L_{i_2 j}^1 \omega_{i_2} \leq \beta_{i_2 j} \leq L_{i_2 j}^2 \omega_{i_2}, \quad i_2 \in I_2, j = 1, \dots, n \quad r_1 \in O_1, r_2 \in O_2$$

$$\pi_d, \mu_{r_1}^1, \mu_{r_2}^2, \omega_{i_1}^1, \omega_{i_2}^2, \omega_{i_s} \geq \varepsilon \quad d = 1, \dots, t, r = 1, \dots, s \quad i_1 \in I_1, i_2 \in I_2; u^1, u^2 \text{ free}$$

Για τον υπολογισμό της αποδοτικότητας των επιμέρους σταδίων ακολουθείται παρόμοια διαδικασία με την ενότητα 3.3.2. Συγκεκριμένα, δοθείσας της συνολικής αποδοτικότητας θ_0^* υπολογίζεται η αποδοτικότητα (θ_0^1) του πρώτου σταδίου (ή αντίστοιχα του δεύτερου) και στη συνέχεια εκτιμάται και η αποδοτικότητα του άλλου σταδίου.

Ο Πίνακας 6 παρουσιάζει συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου που μελετήθηκαν σε αυτή την ενότητα.

ΜΕΘΟΔΟΣ			
<i>Chen et al (2010b)</i>	CRS		✓
	VRS		✓
	ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΑΠΟΔΟΣΗ		✓
	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ		✓
	ΠΡΟΒΟΛΕΣ		X

Πίνακας 6: Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδων

Ο Πίνακας 7 παρουσιάζει τη μέθοδο υπολογισμού της συνολικής απόδοσης μιας παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων, με τις προσεγγίσεις που μελετήθηκαν σε αυτή την ενότητα.

Συνολική Απόδοση	<i>Αριθμητικός Μέσος</i>	<i>Τετράγωνο του γεωμετρικού μέσου</i>	<i>Σταθμισμένος Μέσος</i>
<i>Kao et al (2008)</i>		✓	
<i>Chen et al (2009)</i>			✓

<i>Despotis et al (2012)</i>	√		
<i>Liang et al (2006)</i>	√		
<i>Li et al (2006)</i>		√	
<i>Chen et al (2006)</i>	√		√
<i>Chen et al (2010b)</i>			√

Πίνακας 7: Μέθοδος υπολογισμού συνολικής απόδοσης παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων

3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε μερικές εφαρμογές που μελέτησαν παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων.

Wang et al (1997)

Οι Wang et al (1997) ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας επιχειρήσεων του τραπεζικού κλάδου, υπό την επίδραση της τεχνολογίας. Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3. Για το πρώτο στάδιο, οι εισροές είναι οι «fixed assets», « number of employees» και « IT budget». Οι αντίστοιχες εκροές του πρώτου σταδίου είναι τα «deposits». Στο δεύτερο στάδιο, οι τράπεζες χρησιμοποιούν τα «deposits» δηλαδή τις καταθέσεις σε δολάρια ως πηγές για να επενδύσουν σε ασφάλειες και να μπορέσουν να προσφέρουν δάνεια. Οι εκροές από το δεύτερο στάδιο είναι τα κέρδη «profits» και το ποσοστό των δανείων που ανακτώνται από την τράπεζα «fraction of loans recovered». Τα δεδομένα αφορούν 22 επιχειρήσεις μεταξύ των ετών 1987-1989. Τα δεδομένα για τα «IT budgets» προήλθαν από την ετήσια έρευνα του “Computer World” και για τα «fraction of loans recovered» και τα «deposits» προήλθαν από την “Standard and Poor’s Industry Surveys”. Τα υπόλοιπα δεδομένα προήλθαν από τη βάση δεδομένων “Compustat”. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, η συνολική αποδοτικότητα υπολογίζεται από τις εισροές του πρώτου σταδίου και τις εκροές του δεύτερου χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα ενδιάμεσα μεγέθη.

Seiford et al (1999)

Οι Seiford et al (1999) στα πλαίσια της αξιολόγησης της αποδοτικότητας τραπεζών μελέτησαν μια παραγωγική διαδικασία που αποτελείται από δύο στάδια, το «profitability» και το «marketability» (Εικόνα 3). Στο πρώτο στάδιο αντιστοιχούν οι εισροές «employees», «assets» και «stockholders' equity» και οι εκροές «revenues» και «profits». Εν συνεχεία, το δεύτερο στάδιο δέχεται ως εισροές τις «revenues» και «profits» (ενδιάμεσα μεγέθη). Όσον αφορά τις εκροές του δεύτερου σταδίου είναι οι «market value», «total return to investors» και «earnings per share». Τα παραπάνω δεδομένα αφορούν 55 εμπορικές τράπεζες των Η.Π.Α και προήλθαν από το «Fortune 1000» (Απρίλιος, 1996). Η συνολική αποδοτικότητα υπολογίζεται από τις εισροές του πρώτου σταδίου και τις εκροές του δεύτερου χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα ενδιάμεσα μεγέθη.

Sexton et al (2003)

Οι Sexton et al (2003) μελέτησαν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας ομάδων μπέιζμπολ (Major League Baseball TEAMS). Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια, το «acquisition» και το «production» (Εικόνα 3). Οι εισροές του πρώτου σταδίου είναι οι «total player salaries» και χρησιμοποιούνται για την απόκτηση παιχτών ενώ οι εκροές του πρώτου σταδίου αφορούν την αγωνιστική πορεία των ομάδων και είναι οι «total bases gained» και «total bases surrender». Οι εισροές για το δεύτερο στάδιο είναι οι «total bases gained» και «total bases surrender» και οι εκροές οι «games won» και «market population». Τα δεδομένα αφορούν 30 ομάδες μπέιζμπολ (Major League Baseball TEAMS) κατά την αγωνιστική περίοδο του 1999. Τα δεδομένα που αφορούν τους μισθούς των παικτών «player salary» προήλθαν από την ιστοσελίδα «USA Today» (USA Today, 2000). Τα δεδομένα για την αγωνιστική πορεία των ομάδων, «total bases gained», «total bases won» και «games won» πάρθηκαν από τη βάση δεδομένων «Baseball Archive Database» (1999). Οι πληροφορίες για τα πληθυσμιακά στοιχεία των αγορών «market population» ανακτήθηκαν από το U.S. Census Bureau web site (U.S. Census Bureau, 2000). Οι Sexton et al (2003) υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα στο δεύτερο στάδιο, χρησιμοποιώντας ως εισροές τα ενδιάμεσα μεγέθη που έχουν προέλθει από το πρώτο στάδιο, όταν αυτό βρίσκεται στη βέλτιστη κατάσταση.

Lozano et al (2008)

Οι Lozano et al (2008) στα πλαίσια της αξιολόγησης της αποδοτικότητας αεροδρομίων μελέτησαν μια παραγωγική διαδικασία που αποτελείται από δύο στάδια, το "movement of the aircrafts" και το "loading of airplanes" (Εικόνα 4). Οι εισροές του πρώτου σταδίου είναι η συνολική έκταση του διαδρόμου σε τετραγωνικά μέτρα «RUNAREA», το πλήθος των χώρων στάθμευσης «APRON» και ο αριθμός των πυλών επιβίβασης «BOARDG», ενώ τα ενδιάμεσα μεγέθη είναι οι «Aircraft Traffic Movements». Το δεύτερο στάδιο, εκτός από τα ενδιάμεσα μεγέθη «Aircraft Traffic Movements», δέχεται τις εισροές «CHECKIN»

και «BAGB». Όσον αφορά τις εκροές του δεύτερου σταδίου είναι η ετήσια επιβατική κίνηση «Annual Passenger Movement» και η συνολική διακίνηση φορτίων «CARGO». Η εφαρμογή των Lozano et al (2008) εξετάζει 39 Ισπανικά Αεροδρόμια. Τα δεδομένα προήλθαν από το "Spanish National Air Navigation Authority (AENA, <http://www.aena.es>)" και από την υπηρεσία Eurocontrol (http://www.eurocontrol.int/eatm/public/standard_page/coda.html).

Kao & Hwang (2008)

Οι Kao και Hwang (2008) μελέτησαν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας 24 μη ασφαλιστικών εταιριών ζωής της Ταϊβάν. Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3. Οι εισροές του πρώτου σταδίου αφορούν τα έξοδα της εταιρίας και είναι οι «Operation expenses» και «Insurance expenses». Οι εκροές του πρώτου σταδίου αφορούν τα ασφάλιστρα και είναι οι «Direct written premiums» και «Reinsurance premiums». Τα ενδιάμεσα μεγέθη, «Direct written premiums» και «Reinsurance premiums», είναι οι εισροές του δεύτερου σταδίου και οι αντίστοιχες εκροές του είναι οι «Underwriting profit» και «Investment profit». Τα παραπάνω δεδομένα προήλθαν από το Insurance Institute of Taiwan (2003). Οι Kao και Hwang (2008), υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα ως γινόμενο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων.

Chen et al (2009)

Οι Chen et al (2009), μελέτησαν, επίσης, την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας 24 μη ασφαλιστικών εταιριών ζωής της Ταϊβάν. Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3, όπου οι εισροές και εκροές είναι οι ίδιες με αυτές της εφαρμογής των Kao & Hwang (2008). Υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα ως σταθμισμένο μέσο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων.

Chen et al (2010b)

Οι Chen et al (2010), μελέτησαν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας επιχειρήσεων του τραπεζικού κλάδου, υπό την επίδραση της τεχνολογίας. Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 5. Οι εισροές «fixed assets», «number of employees» και «IT budget» διαμοιράζονται από κοινού στα δύο στάδια. Οι εκροές του πρώτου σταδίου είναι τα «deposits» (ενδιάμεσα μεγέθη). Το δεύτερο στάδιο δέχεται τις επιπλέον εισροές «deposits» και οι εκροές του είναι οι «profits» και «fraction of loans recovered». Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται προήλθαν από την εφαρμογή των Wang et al (1997). Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα ως σταθμισμένο μέσο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων.

Zhu (2011)

Ο Zhu (2011), στα πλαίσια της αξιολόγησης της αποδοτικότητας αεροπορικών εταιριών μελέτησε μια παραγωγική διαδικασία που αποτελείται από δύο στάδια, όπως παρουσιάζεται στην εικόνα 3. Οι εισροές του πρώτου σταδίου αφορούν τα έξοδα της εταιρίας και είναι οι: «cost per available seat mile», «salaries, wages, and benefits per available seat mile», «fuel expense per available seat mile», «fuel cost», «gallons of fuel used» και οι εκροές του οι: «fleet size» και «load factor». Στο δεύτερο στάδιο οι εισροές «fleet size» και «load factor» μετασχηματίζονται στις εκροές «revenue passenger miles» και «passenger revenue» που αποτελούν τα έσοδα της εταιρίας. Τα δεδομένα αφορούν 21 αεροπορικές εταιρίες κατά την περίοδο 2007 και 2008 και προήλθαν από την ιστοσελίδα “www.wikinvest.com”. Ο Zhu (2011) υπολογίζει τη συνολική αποδοτικότητα ως γινόμενο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων (Kao et al. 2008).

Chialin Chen et al (2012)

Οι Chialin Chen et al (2012), μελέτησαν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων στα πλαίσια αξιολόγησης της αποδοτικότητας αυτοκινητοβιομηχανιών. Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια το “industrial design process” και το “bio design” (Εικόνα 3). Οι εισροές του πρώτου σταδίου αφορούν τεχνικά χαρακτηριστικά και είναι οι «cubic inch displacement» «rated horsepower» «compression ratio», «axle ratio» και οι αντίστοιχες εκροές «fuel economy» και «equivalent test weight»(ενδιάμεσα μεγέθη). Τα ενδιάμεσα μεγέθη «fuel economy» και «equivalent test weight» είναι οι εισροές του δεύτερου σταδίου. Οι εκροές του δεύτερου σταδίου αφορούν τις περιβαλλοντικές επιδράσεις, δηλαδή «levels of hydrocarbon», «emissions», «carbon monoxide emissions», «carbon dioxide Emissions», «nitrogen oxide emissions». Τα δεδομένα προήλθαν από 534 σειρές αυτοκινήτων που παρουσιάστηκαν στη Βόρεια Αμερική το έτος 2009 και δημοσιεύτηκαν από το US EPA (2009). Οι Chialin Chen et al (2012) υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα ως γινόμενο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων (Kao et al. 2008).

Athker et al (2013)

Οι Athker et al (2013), χρησιμοποίησαν μια προσανατολισμένη συνάρτηση απόστασης (directional technology distance function) και τη μέθοδο SBM για την αξιολόγηση του τραπεζικού τομέα του Μπανγκλαντές κατά την περίοδο 2005-2008. Η παραγωγική διαδικασία αποτελείται από δύο στάδια όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3. Οι εισροές του πρώτου σταδίου αφορούν το ανθρώπινο δυναμικό «labor» και το κεφάλαιο «capital». Οι εκροές του πρώτου σταδίου αφορούν τις καταθέσεις «deposits». Οι εισροές του δεύτερου σταδίου είναι τα «deposits». Τέλος, οι εκροές του δεύτερου σταδίου είναι οι

«loans» και «securities investments». Η εφαρμογή αφορά 19 ιδιωτικές και 2 κυβερνητικές τράπεζες του Μπανγκλαντές. Τα δεδομένα παραχωρήθηκαν από τις ίδιες τις τράπεζες.

Monfared et al (2013)

Οι Monfared et al (2013) στα πλαίσια της αξιολόγησης των Πανεπιστημίων μελέτησαν μια παραγωγική διαδικασία που αποτελείται από δύο στάδια, το “teaching”, που αφορά τη διδασκαλία, και το “research”, που αφορά την έρευνα (Εικόνα 5). Οι εισροές, «number of lecturers and assistant professors» και «number of associate professors and professors», αφορούν το διδακτικό προσωπικό του πανεπιστημίου και διαμοιράζονται από κοινού στα δύο στάδια. Οι εκροές του πρώτου σταδίου αφορούν το πλήθος των προπτυχιακών φοιτητών και είναι οι «number of undergraduate students». Το δεύτερο στάδιο, δέχεται, επιπλέον, τις εισροές «number of undergraduate students». Οι εκροές του δεύτερου σταδίου είναι οι «total internal and external grants» και οι «number of awarded researchers and the number of presented papers at international venues». Τα δεδομένα αφορούν το Ιρανικό Πανεπιστήμιο Alzahra που αποτελείται από 41 τμήματα από τα οποία 34 προσφέρουν προπτυχιακές και μεταπτυχιακές σπουδές και 10 διδακτορικές σπουδές. Οι Monfared et al (2013) υπολογίζουν τη συνολική αποδοτικότητα ως γινόμενο των αποδόσεων των δύο επιμέρους σταδίων.

Ο Πίνακας 8 παρουσιάζει συνοπτικά όλες τις εφαρμογές που αναφέρθηκαν σε αυτή την ενότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	Τράπεζες	Ασφαλ. εταιρίες	Αεροδρόμια / Αεροπορικές εταιρίες	Αθλήματα	Αυτοκινητοβιομηχανία	Πανεπιστήμια
Wang et al (1997)	√					
Seiford et al (1999)	√					
Sexton et al. (2003)				√		
Lozano et al (2008)			√			
Kao et al (2008)		√				

Chen et al (2009)		✓				
Chen et al (2010b)	✓					
Zhu (2011)			✓			
Chialin Chen et al (2012)					✓	
Athker et al (2013)	✓					
Monfared et al (2013)						✓

Πίνακας 8: Εφαρμογές παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων

Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της συνολικής απόδοσης του συστήματος σε κάθε εφαρμογή.

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ	ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ	ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΟΣ ΜΕΣΟΣ
Wang et al (1997)	✓		
Seiford et al (1999)	✓		
Sexton et al. (2003)	✓		
Kao et al (2008)		✓	
Chen et al (2009)			✓
Chen et al (2010b)			✓
Zhu (2011)		✓	

Chialin Chen et al (2012)		✓	
Monfared et al (2013)		✓	

Πίνακας 9: Μέθοδοι υπολογισμού της συνολικής απόδοσης

4. Συμπεράσματα

Η παραπάνω εργασία αποτελεί μια μελέτη των μοντέλων Περιβάλλουσας Ανάλυσης Δεδομένων σε παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων. Συγκεκριμένα, σε αυτή παρουσιάζονται τέσσερις τύποι παραγωγικών διαδικασιών δύο σταδίων. Καθένας από τους τύπους εξετάζεται ως προς τα βασικά χαρακτηριστικά του. Ο απλός τύπος παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων μελετάται από τους Kao et al (2008), Chen et al (2009), Despotis et al (2012). Και οι τέσσερις προσεγγίσεις αναπτύσσονται υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS. Επίσης, όλες μπορούν να επεκταθούν στην κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS εκτός από αυτή των Kao et al (2008). Επιπλέον, όλες οι μέθοδοι εκτός από αυτή των Tone και Tsutsui (2009) υπολογίζουν τη συνολική και τις επιμέρους αποδόσεις. Οι Liang et al (2006), Li et al (2012) και Amirteimoori et al (2011) μελετούν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με επιπλέον εισροές στο δεύτερο στάδιο. Και οι τρεις προσεγγίσεις αναπτύχθηκαν υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, ενώ δεν αναφέρεται αν μπορούν να επεκταθούν στην κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS. Επιπλέον, όλες υπολογίζουν τη συνολική αλλά και τις επιμέρους αποδόσεις των δύο σταδίων εκτός από αυτή των Amirteimoori et al (2011). Οι Chen et al (2006) και Chen et al (2010b), μελετούν την παραγωγική διαδικασία δύο σταδίων με διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ αυτών. Και οι δύο προσεγγίσεις αναπτύχθηκαν υπό την κλίμακα σταθερών αποδόσεων CRS, ενώ αυτή των Chen et al (2010b) μπορεί να επεκταθεί στην υπό κλίμακα μεταβλητών αποδόσεων VRS. Επιπλέον, υπολογίζουν τη συνολική αλλά και τις επιμέρους αποδόσεις των δύο σταδίων. Οι Chen et al (2010b), εξετάζουν μια περισσότερο σύνθετη μορφή παραγωγικής διαδικασίας δύο σταδίων, η οποία εκτός από διαμοιραζόμενες εισροές μεταξύ των σταδίων, περιλαμβάνει τη χρήση κάποιων εισροών αποκλειστικά από κάθε στάδιο και την παραγωγή εκροών. Η προσέγγισή τους αναπτύσσεται υπό την κλίμακα σταθερών και μεταβλητών αποδόσεων και εκτιμά τη συνολική αλλά και τις επιμέρους αποδόσεις των δύο σταδίων. Τέλος, παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές που μελέτησαν τις παραγωγικές διαδικασίες δύο σταδίων που παρουσιάστηκαν στην εργασία.

5. Βιβλιογραφία

- [1] Σημειώσεις μαθήματος «Μοντέλα Αποφάσεων», Μ.Π.Σ. «Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής».
- [2] Amirteimoori Alireza, Leila Khoshandam (2011): A Data Envelopment Analysis Approach to Supply Chain Efficiency. ADS 2011.
- [3] Akther Syed, Hirofumi Fukuyama, William L. Weber. Estimating two-stage network Slacks-based inefficiency: An application to Banladesh banking. Omega 41(2013) 88-96.
- [4] Avkiran, N.K., (2009). Opening the black box of efficiency analysis: an illustration with UAE banks. Omega, Vol. 37 (4), 930–941.
- [5] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. Management Science 30, 1078–1092.
- [6] Castelli, L. Pesenti, R. and Ukovich, W. (2010). A classification of DEA models when the internal structure of the decision making units is considered. Annals of Operations Research, Vol. 173, 207-235.
- [7] Charnes, A., W.W. Cooper, B. Golany, L.M. Seiford and J. Stutz, “Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions,” Journal of Econometrics, Vol. 30, pp. 91-107, 1985
- [8] Chen Yao, Liang Liang, Feng Yang. A DEA game model approach to supply chain efficiency (2006) Springer Science & Business Media, LLC 2006
- [9] Chen, Y. Cook, W. D. Li, N. and Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two stage DEA. European Journal of Operational Research, Vol. 196, 1170–1176.
- [10] Chen, Y. Cook, W. D. and Zhu, J. (2010a). Deriving the DEA frontier for two-stage processes. European Journal of Operational Research, Vol. 202, 138–142.
- [11] Chen Y., Du J., Sherman H. D. and Zhu J. (2010b). DEA model with shared resources and efficiency decomposition. European Journal of Operational Research, Vol. 207, 339–349.
- [12] Chen Yao, Wade D. Cook, Chiang Kao, Joe Zhu. (2013) Network DEA pitfalls divisional efficiency and frontier projection under general network structures. European Journal of Operational Research Volume 226, Issue 3, 1 May 2013, Pages 507–515

- [13] Chialin Chen, Joe Zhu, Jiun-Yu Yu, Hamid Noori, A new methodology for evaluating sustainable product design performance with two-stage network data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research* 221 (2012) 348–359.
- [14] Chilingirian, J.A., Sherman, H.D., 1990. Managing physician efficiency and effectiveness providing hospital services. *Health Service Management Research* 3 (1), 3–15
- [15] Cook, W.D., Hababou, M. and Tuenter, H.J.H. (2000). Multicomponent efficiency measurement and shared inputs in DEA: an application to sales and service performance in bank branches. *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 14 (3), 209–224.
- [16] Cook, W. D., Zhu, J., Bi, G., and Yang, F. (2010). Network DEA: Additive efficiency decomposition. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 1122-1129
- [17] Despotis Dimitris, Koronakos Gregory and Sotiros Dimitris, Additive decomposition in two-stage DEA: An alterntive approach. MPRA 2012.
- [18] Du J, Liang L, Chen Y, Bi GB. DEA-based production planning. *Omega* 2010;38;105-12.
- [19] Färe, R. and Grosskopf, S. (1996a). Productivity and intermediate products: A frontier approach. *Economics Letters*, Vol. 50, 65–70.
- [20] Hammond, C.J., 2002. A data envelopment analysis of UK public library systems. *Applied Economics* 34 (5), 649–657.
- [21] Hsieh, L.F. and Lin, L.H. (2010). A performance evaluation model for international tourist hotels in Taiwan—an application of the relational network DEA. *International Journal of Hospitality Management*, Vol. 29 (1), 14–24.
- [22] Kao, C., Chang, P.L., Hwang, S.N., 1993. Data envelopment analysis in measuring the efficiency of forest management. *Journal of Environmental Management* 38 (1),73–83.
- [23] Kao, C. and Hwang, S.-N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, Vol. 185, 418–429.
- [24] Li Yongjun, Yao Chen, Liang Liang, Jianhui Xie (2012). DEA models for extended two-stage network structures. *Omega*, Vol. 40 (2012) 611–618.
- [25] Liang, L. Yang, F. Cook, W.D. and Zhu J. (2006). DEA models for supply chain efficiency evaluation. *Annals of Operations Research*, Vol. 145, 35–49.
- [26] Lozano Sebastián, Ester Gutiérrez and José Luís Salmerón (2008),«Network DEA models in transportation. Application to airports» Dept. of Industrial Management, University of Seville Escuela Superior de Ingeniería, University Pablo de Olavide
- [27] Monfared Mohammad Ali Saniee and Mahsa Safi Network DEA: an application to analysis of academic performance. *Journal of Industrial Engineering International* 2013, 9:15 <http://www.jiei-tsb.com/content/9/1/15>
- [28] Seiford, L. and Zhu, J. (1999). Profitability and marketability of the top 55 u.s. commercial banks. *Management Science*, Vol. 45(9), 1270–1288.
- [29] Sexton, T. R., and Lewis, H. F. (2003). Two stage DEA: An application to major league baseball. *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 19, 227-249.
- [30] Thanassoulis, E., Dunstan, P., 1994. Guiding schools to improved performance using data envelopment analysis: an illustration with data from a local education authority. *The Journal of the Operational Research Society* 45 (11), 1247–1262

- [31] Tone, K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research* 130 (2001) 498–509.
- [32] Tone, K., Tsutsui, M., (2009). Network DEA: a slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, Vol. 197 (1), 243–252.
- [33] Uri, N.D., 2001. Changing productive efficiency in telecommunications in the United States. *International Journal of Production Economics* 72 (2), 121–137.
- [34] Premachandra IM, Chen Y, Watson J. DEA as a tool for predicting corporate failure and success: A case of bankruptcy assessment. *Omega* 2011;39:620-6.
- [35] Wang, C.H. Gopal, R. and Zionts, S. (1997). Use of data envelopment analysis in assessing information technology impact on firm performance. *Annals of Operations Research*, Vol.73, 191–213.
- [36] Yu, M.M. (2008a). Measuring the efficiency and return to scale status of multi-mode bus transit—evidence from Taiwan’s bus system. *Applied Economics Letters*, Vol. 15, 647-653.
- [37] Yu, M.M. (2008b). Assessing the technical efficiency, service effectiveness, and technical effectiveness of the world’s railways through NDEA analysis. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, Vol. 42 (10), 1283-1294.
- [38] Yu, M.M. and Fan, C.K. (2009). Measuring the performance of multimode bus transit: a mixed structure network DEA model. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 45 (3), 501–515.
- [39] Yu, M.M. (2010) Assessment of airport performance using the SBM-NDEA model, *Omega*, Vol. 38(6), 440-452.
- [40] Zha, Y. and Liang, L. (2010). Two-stage cooperation model with input freely distributed among the stage, *European Journal of Operational Research*, Vol. 205(2), 332–338.
- [41] Zhu, J. (2011). Airlines Performance via Two-Stage Network DEA Approach. *Worcester Polytechnic Institute, Worcester, MA, USA*.