ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΤΟΜΟΣ Ι

## ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ 1976

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εἰσαγωγή

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

Σελίς



## Μέρος Δεύτερον

## ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ

### ΚΕΦ. 4: ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ



### ΚΕΦ. 5: ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ ΕΙΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ

Σελίς



ΚΕΦ. 6: ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΕΙΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ



ΚΕΦ. 7: ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΕΙΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ



Μ έ ρ ο ς Τ ρ ί τ ο ν

ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΙ ΣΕΙΡΑΙ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΑΙ

ΚΕΦ. 8: ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΙ ΣΕΙΡΑΙ

## Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

(Τεχνικὴ τῆς Συλλογῆς, Ἐπεξεργασίας καὶ Ὀργανώσεως Στατιστικῶν Στοιχείων. Μέθοδος Παρουσιάσεως καὶ Ἀναλύσεως αὐτῶν)

## Ἡ Στατιστικὴ ὡς Ἐφηρμοσμένη Ἐπιστήμη

Ἡ Σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ὁρίζεται σήμερον ὡς ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία πραγματεύεται ἀφ' ἑνός τήν τεχνικήν καί τούς τρόπους σ υ λ λ ο γ ῆ ς, ἐ π ε ξ ε ρ γ α σ ί α ς καί μ η χ α ν ο γ ρ α φ ι κ ῆ ς ὀ ρ γ α ν ώ σ ε ω ς διαφόρων ἀριθμητικῶν - κατά κανόνα - δεδομένων καί ἀφ'ἑτέρου τάς μεθόδους τῆς καταλλήλου π α ρ ο υ σ ι ά σ ε ω ς καί ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς αὐτῶν πρός τόν σκοπόν τῆς συστηματικῆς μελέτης των καί ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων χρησίμων ἐν γένει εἰς τήν δ ι α δ ι κ α σ ί α ν λ ή ψ ε ω ς ἀ π ο φ ά σ ε ω ν.

Κατ'ἐξοχήν ἐπιστήμη ἐφαρμογῆς ἡ Στατιστική χρησιμοποιεῖται σήμερον εὐρέως εἰς τήν διερεύνησιν προβλημάτων τῶν πλείστων, ἄν ὄχι ὅλων, τῶν τομέων τῆς ἀνθρωπίνης δραστηριότητος. Οὕτω, ἐφαρμογαί τῆς Στατιστικῆς ὑπό τήν μίαν ἤ τήν ἄλλην μορφήν λαμβάνουν χώραν πέραν τοῦ Κοινωνικοῦ καί Οἰκονομικοῦ τομέως, εἰς τήν Ἰατρικήν καί τήν Ψυχολογίαν, τήν Φυσικήν καί τήν Βιολογίαν, τήν Γεωργίαν καί τήν Βιομηχανίαν, εὐρυτάτη δέ εἶναι σήμερον ἡ χρῆσις στατιστικῶν μεθόδων εἰς τάς λεγομένας "ἐρεύνας ἀγορᾶς" ὡς καί τήν ἐν γένει διερεύνησιν ἀ ν θ ρ ω π ί ν ω ν ἰ δ ε ῶ ν καί π ρ ο θ έ σ ε ω ν.

Πρός κατανόησιν τῆς ἀκολουθουμένης διαδικασίας καί τοῦ τρόπου παρεμβολῆς τῆς στατιστικῆς εἰς τό κύκλωμα λήψεως ἀποφάσεων εἴτε εἰς τόν δημόσιον εἴτε εἰς τόν ἰδιωτικόν ἐν γένει τομέα παραθέτομεν τό κατωτέρω διάγραμμα (Σχ. 0.1).


Σχ.0,1

Ἐνταῦθα δέον νά τονισθῆ ὅτι τόσον κατά τήν θέσιν ἑνός προβλήματος καί τήν διευκρίνισιν τῶν λεπτομερειῶν του, ὅσον καί κατά τήν ἀνάλυσιν τῶν δεδομένων καί τήν ἑρμηνείαν τῶν σχετικῶν συμπερασμάτων, ἰδιαιτέρως δέ κατά τήν κατάρτισιν τῆς εἰσηγήσεως ἐπί τῶν ληπτέων ἀποφάσεων καί μέτρων, τυγχάνει ἐντελῶς ἀπαραίτητος ἡ συνεργασία τοῦ ἐπιστήμονος Στατιστικοῦ μετά τῶν ἁρμοδίων του ἀντιστοίχου φορέως ὡς καί εἰδικῶν ἐπί τοῦ διερευνωμένου προβλήματος ἐπιστημόνων.

Τά διά στατιστικῶν μεθόδων μελετώμενα δεδομένα, παρατηρήσεις ἤ ἄλλαι ἐν γένει πληροφορίαι, δηλαδή τό πρωτογενές στατιστικόν ὑλικόν ἤ ἄλλως τά *στατιστικά στοιχεῖα*, ἀναφέρονται συνήθως εἴτε εἰς διάφορα *χαρακτηριστικά* καί *ἰδιότητας τῶν ἐπί μέρους μονάδων διαφόρων συνόλων* – γνωστῶν εἰς τήν στατιστικήν ὁρολογίαν ὡς *πληθυσμῶν* – εἴτε εἰς *χαρακτηριστικά* διαφόρων κοινωνικῶν, οἰκονομικῶν ἤ ἄλλων *φαινομένων* καί *καταστάσεων*. Οὕτω, τό φῦλον, ἡ ἡλικία, τό εἰσόδημα καί τό ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας, τό παραγόμενον γάλα καί τό βάρος τῶν ἀγελάδων μιᾶς κτηνοτροφικῆς ἐκμεταλλεύσεως, ὁ ἀριθμός τῶν δωματίων καί αἱ ἀνέσεις τῶν κατοικιῶν μιᾶς πόλεως, ἡ ἐγκατεστημένη ἰσχύς καί ὁ ἀριθμός τῶν ἀπασχολουμένων τῶν ἐργοστασίων μιᾶς χώρας ἤ τέλος ἡ διάρκεια ζωῆς τῶν παραγομένων ὑπό τινος ἐργοστασίου λαμπτήρων, εἶναι χαρακτηριστικά τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἀνθρωπίνων ὁμάδων καί συνόλων ζώων ἤ πραγμάτων τά ὁποῖα δύνανται νά ἀποτελέσουν ἀντικείμενον στατιστικῆς ἐρεύνης. Ἐξ ἄλλου, αἱ γεννήσεις, οἱ θάνατοι, ἡ μεταναστευτική καί τουριστική κίνησις μιᾶς χώρας, αἱ εἰσαγωγαί καί ἐξαγωγαί ἐμπορευμάτων, τά τροχαῖα ἀτυχήματα, ἡ ἐγκληματικότης, ἡ ἐν γένει περίθαλψις τοῦ πληθυσμοῦ ἤ τέλος ἡ θερμοκρασία, ἡ βροχόπτωσις καί ἡ μόλυνσις τοῦ περιβάλλοντος ἀποτελοῦν μερικά μόνον παραδείγματα φαινομένων ἤ ἄλλων ἐν γένει καταστάσεων τῶν ὁποίων ἡ παρακολούθησις καί συστηματική διερεύνησις γίνεται σήμερον τῇ βοηθείᾳ στατιστικῶν μεθόδων.

Ὁ ὅρος Στατιστική, προερχόμενος ἐκ τῆς λατινικῆς λέξεως Status (κράτος, πολιτεία), ἐχρησιμοποιεῖτο ἀρχικῶς πρός ὑποδήλωσιν αὐτῶν τούτων τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων ὡς π.χ. στοιχείων ἀναφερομένων εἰς τόν πληθυσμόν, τάς γεννήσεις καί τούς θανάτους μιᾶς χώρας ἤ τήν ἔκτασιν αὐτῆς. Ὑπό τήν ἔννοιαν αὐτήν γίνεται χρῆσις τῆς λέξεως, εἰς περιωρισμένην βεβαίως κλίμακα, ἀκόμη καί σήμερον. Οὕτω, πολλάκις ἀπαντῶνται ἐκφράσεις ὡς "Στατιστική τοῦ Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου" πρός ὑποδήλωσιν τῶν ἀναφερομένων εἰς τάς εἰσαγωγάς καί ἐξαγωγάς μιᾶς χώρας ἀριθμητικῶν δεδομένων, "Στατιστική τῆς Δικαιοσύνης" ἤ "Τουριστική Στατιστική" μέ προφανές ἀνάλογον περιεχόμενον.

Τέλος, ἡ λέξις "Στατιστική" χρησιμοποιεῖται ὑπό μίαν ἀκόμη, καθαρῶς τεχνικήν, ἔννοιαν καί συγκεκριμένως πρός ὑποδήλωσιν μιᾶς συναρτήσεως τυχαίων μεταβλητῶν π.χ. ἑνός μέσου ὅρου ἤ ἑνός συντελεστοῦ συσχετίσεως, τῆς ὁποίας αἱ ἐμπειρικαί τιμαί δύνανται νά ὑπολογισθοῦν ἐκ τῶν ἑκάστοτε δεδομένων τῆς παρατηρήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

# ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

## 1.1 Στατιστικοί Πληθυσμοί

Ὡς ἤδη ἐλέχθη στατιστικαί μέθοδοι χρησιμοποιοῦνται σήμερον τόσον εἰς τήν μελέτην χαρακτηριστικῶν ἀνθρωπίνων ὁμάδων ὅσον καί πρός διερεύνησιν ἰδιοτήτων ἀναφερομένων εἰς σύνολα ζώων, πραγμάτων ἤ οἱωνδήποτε ἄλλων μονάδων ὡς π.χ. νοικοκυριῶν, ἐπιχειρήσεων κλπ.

Πλήθη ἀνθρωπίνων ἤ ἄλλων ὄντων ἤ οἱαδήποτε ἄλλα σύνολα πραγμάτων ἤ ἄλλων ὀντοτήτων τῶν ὁποίων μία ἤ περισσότεραι ἰδιότητες ἀποτελοῦν ἀντικείμενον μελέτης διά στατιστικῶν μεθόδων λέγονται σ τ α τ ι σ τ ι κ ο ί π λ η θ υ σ μ ο ί. Ἀκριβέστερον π λ η θ υ σ μ ό ς ὑπό στατιστικήν ἔννοιαν καλεῖται τό σύνολον τῶν μ ε τ ρ ή σ ε ω ν ἤ τῶν ἐν γένει π α ρ α τ η ρ ή σ ε ω ν αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς ἕν χαρακτηριστικόν τῶν ἐπί μέρους μονάδων τοῦ ὑπό μελέτην πλήθους καί οὐχί αὐταί αὗται αἱ μονάδες αὐτοῦ. Στατιστικοί Πληθυσμοί π.χ. εἶναι αἱ μετρήσεις (τά ἀριθμητικά δεδομένα) αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τά ἐτήσια εἰσοδήματα ἤ τάς ἡλικίας τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας, αἱ σχετικαί μέ τήν οἰκογενειακήν κατάστασιν ἤ τό φῦλον αὐτῶν παρατηρήσεις, οὐχί δέ αὐτοί αὗτοι οἱ κάτοικοι.

Οἱ στατιστικοί πληθυσμοί διακρίνονται εἰς π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο υ ς καί ἀ π ε ί ρ ο υ ς ἀναλόγως ἐάν τό πλῆθος τῶν μονάδων ἤ ἀκριβέστερον τῶν μετρήσεων τάς ὁποίας περιλαμβάνουν εἶναι πεπερασμένον ἤ ἄπειρον. Τόσον τά ἡμερομίσθια τῶν ἐργατῶν ἑνός ἐργοστασίου ὅσον καί αἱ ἡλικίαι τῶν κατοίκων τῶν Ἰνδιῶν ἀποτελοῦν παραδείγματα πεπερασμένων πληθυσμῶν. Οἱ ἄπειροι πληθυσμοί, μή ὑφιστάμενοι εἰς τήν πραγματικότητα, εἶναι ἰ δ ε α τ ο ί πληθυσμοί ὡς π.χ. ὁ πληθυσμός τῶν ἡλικιῶν εἰς τάς ὁποίας εἶναι δυνατόν νά πεθάνη ἕν ἄτομον, ὁ πληθυσμός τῶν ἀποστάσεων εἰς τάς ὁποίας εἶναι δυνατόν νά ἐκτοξευθῆ ἡ ὀβίς ἑνός πυροβόλου ἤ τέλος ὁ πληθυσμός τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων (κορῶνα-γράμματα) εἰς τάς διαδοχικάς ρίψεις ἑνός νομίσματος.

## 1.2 Μεταβληταί. Μετρήσεις. Τιμαί

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι τά διά στατιστικῶν μεθόδων πραγματευόμενα δεδομένα (μετρήσεις, παρατηρήσεις ἤ ἄλλαι ἐν γένει πληροφορίαι) ἀναφέρονται εἰς ἰδιότητας ἤ χαρακτηριστικά τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός στατιστικοῦ πληθυσμοῦ ἤ εἰς τοιαῦτα διαφόρων φαινομένων ἤ ἄλλων καταστάσεων.

Ἰδιότητες ἤ χαρακτηριστικά ὡς τά ἀνωτέρω ἀποτελοῦντα ἀντικείμενον στατιστικῆς μελέτης καλοῦνται - χρησιμοποιουμένης καί ἐνταῦθα τῆς ἀντιστοίχου μαθηματικῆς ὁρολογίας - μ ε τ α β λ η τ α ί αἱ δέ ἀριθμητικαί ἤ ἄλλαι συμβολικαί ἐκφράσεις αὐτῶν τ ι μ α ί ἐν γένει τῆς μεταβλητῆς.

Αἱ μεταβληταί, τοῦ ὅρου χρησιμοποιουμένου πλέον ὡς συνωνύμου τῶν λέξεων ἰδιότης, χαρακτηριστικόν κλπ, συμβολίζονται συνήθως διά τῶν κεφαλαίων γραμμάτων Χ, Ψ, Ζ,... αἱ δέ τιμαί ἤ οἱονεί τιμαί αὐτῶν διά τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν γραμμάτων χ, ψ, z, .....

Μία μεταβλητή δυναμένη νά λάβη μίαν καί μόνον τιμήν λέγεται σ τ α θ ε ρ ά.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἐννοιῶν τῆς μεταβλητῆς καί τῶν τιμῶν αὐτῆς, ὡς αὗται χρησιμοποιοῦνται ἐν γένει εἰς τήν στατιστικήν, παραθέτομεν τά κατωτέρω παραδείγματα.

| Μεταβληταί | Τιμαί |
|---|---|
| Μέγεθος (ἀριθμός δωματίων) κατοικιῶν | Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί 1,2, 3,4,... |
| Ἐτήσιον εἰσόδημα φυσικῶν προσώπων | Οἱοσδήποτε μή ἀρνητικός ἀριθμός |
| Γενική κατάστασις ὑγείας ἀτόμων | Κακή (1), μετρία (2), καλή (3), λίαν καλή (4), ἀρίστη (5) |
| Φῦλον ἀτόμων | Ἄρρεν, θῆλυ |

| | |
|---|---|
| Οἰκογενειακή κατάστασις ἀτόμων | Ἄγαμος, ἔγγαμος, χῆρος, διαζευγμένος |
| Ἡμερήσια τροχαῖα ἀτυχήματα μιᾶς πόλεως | Οἱ ἀριθμοί 0,1,2,3,... |
| Ἐτησία βροχόπτωσις μιᾶς πόλεως | Οἱοσδήποτε μή ἀρνητικός ἀριθμός |
| Μόλυνσις περιβάλλοντος | Ἀσήμαντος (1), μικρή (2), αἰσθητή (3), ὑπερβολική (4). |

Βασικόν γνώρισμα τῶν διαφόρων μεταβλητῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ περιεχομένου καί τῆς φύσεως αὐτῶν, εἶναι ἡ ποσοτική ἤ ποιοτική μεταβολή των εἴτε ἀπό μονάδα εἰς μονάδα προκειμένου περί πληθυσμῶν, εἴτε χρονικῶς ἤ γεωγραφικῶς, προκειμένου περί χαρακτηριστικῶν διαφόρων φαινομένων ἤ ἄλλων καταστάσεων. Κατά συνέπειαν διά τήν μελέτην μιᾶς οἱασδήποτε μεταβλητῆς πρωταρχικῆς σημασίας τυγχάνει ἡ μέτρησις αὐτῆς - ὑπό γενικήν ἔννοιαν - ἤτοι ἡ ἔκφρασις τῶν διαφόρων τιμῶν της δι᾽ἀριθμῶν ἤ ἄλλων συμβόλων.

Αἱ δυνατότητες (τό ἐπίπεδον) μετρήσεως καί ὁ τρόπος ἐκφράσεως τῶν ἐν γένει τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ποικίλλουν εὐρύτατα, ἐξαρτῶνται δέ κατά βάσιν ἐκ τῆς φύσεως τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς.

Ἀναλόγως τῆς μετρήσεως τήν ὁποίαν ἐπιδέχονται αἱ διάφοροι μεταβληταί διακρίνονται εἰς κατηγορικάς, ποιοτικάς καί ποσοτικάς τοιαύτας.

### 1.2.1 Κατηγορικαί Μεταβληταί

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τοιούτων μεταβλητῶν εἶναι τό φῦλον, ἡ οἰκογενειακή κατάστασις, τό θρήσκευμα, ἡ φυλή, τό ἐπάγγελμα κλπ. Αἱ κατηγορικαί μεταβληταί ἐπιδέχονται τήν πλέον ὑποτυπώδη καί ἀσθενῆ μέτρησιν. Αἱ "τιμαί" αὐτῶν ἐκφράζονται διά *λέξεων* ἤ ἄλλων ἀριθμητικῶν ἤ μή *συμβόλων* ἐπιτρέπουν δέ ἁπλῶς τήν *κατάταξιν* τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ εἰς διακεκριμένας ἀλλήλων *κατηγορίας*.

Ἑκάστη τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἀνήκει ὁπωσδήποτε εἰς μίαν καί μόνον κατηγορίαν ἡ δέ πληροφόρησις τήν ὁποίαν δυνάμεθα νά ἔχωμεν περί ἑνός τοιούτου χαρακτηριστικοῦ συνίσταται εἰς τήν ἁπλῆν ἀ*παρίθμησιν* τῶν μονάδων - μελῶν - ἑκάστης κατηγορίας. Αἱ τιμαί π.χ. τῆς μεταβλητῆς "φυλή" εἶναι *λευκός*, *μαῦρος*, *κίτρινος* καί *ἐρυθρόδερμος* ἐπιτρέπουν δέ ἁπλῶς τήν ἀντίστοιχον ὁμαδοποίησιν τῶν κατοίκων τῆς γῆς εἰς τάς ἐν λόγῳ κατηγορίας.

Δέον νά σημειωθῇ ὅτι αἱ "τιμαί" τῶν κατηγορικῶν μεταβλητῶν εἰς οὐδεμίαν σχέσιν εὑρίσκονται μεταξύ των μή ἐπιδεχόμεναι ἔστω καί ἁ*πλῆν ἱεράρχησιν*, κατάταξιν δηλαδή κατ' αὔξουσαν ἤ φθίνουσαν τάξιν μεγέθους.

### 1.2.2 Ποιοτικαὶ Μεταβληταὶ

Παραδείγματα τοιούτων μεταβλητῶν ἀποτελοῦν ἡ "σοβαρότης ἑνός ἀτυχήματος" ἡ "κατάστασις τῆς ὑγείας ἑνός ἀτόμου", ἡ "κοινωνική θέσις", ὁ "βαθμός ἐν οἱαδήποτε ἱεραρχίᾳ", ἡ "ποιότης προϊόντων" κ.ο.κ.

Αἱ ποιοτικαί μεταβληταί ἐπιδέχονται μέτρησιν ἀνωτέρου ἐπιπέδου ἐν σχέσει πρός τάς κατηγορικάς τοιαύτας. Οὕτω αἱ τιμαί αὐτῶν ἐκφράζονται μέν διά λέξεων ἤ ἄλλων συμβόλων, πέραν ὅμως τῆς κατατάξεως τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ εἰς διακεκριμένας ἀλλήλων κατηγορίας ἐπιτρέπουν καί τήν *ἱεράρχησιν* αὐτῶν. Συγκεκριμένως, αἱ διάφοροι τιμαί τῶν ποιοτικῶν μεταβλητῶν δύνανται νά τεθοῦν κατά τάξιν μεγέθους αὐξανομένου χρησιμοποιουμένου - ὑπό γενικήν ἔννοιαν - τοῦ συμβόλου τῆς ἀνισότητος > ἤ < καί ἐκφράσεων ὡς "σοβαρώτερον", "χειρότερον", "ἀνώτερον", "μεγαλύτερον", "καλλίτερον", κ.ο.κ. Ἡ κατάταξις π.χ. ἑνός συνόλου ἀτόμων συμφώνως πρός τήν "κοινωνικήν θέσιν" των εἰς τάς ὁμάδας "κατωτάτη", "κατωτέρα", "ἀνωτέρα" καί "ἀνωτάτη" ἐνέχει καί τό στοιχεῖον τῆς ἱεραρχήσεως, οἱ ἀνήκοντες δηλαδή εἰς τήν "ἀνωτέρα" τάξιν εὑρίσκονται εἰς ὑψηλοτέραν κοινωνικήν θέσιν ἐκείνων τῆς κατωτέρας ἤ κατωτάτης τάξεως.

Δέον νά σημειωθῆ ὅμως ὅτι πέραν τῆς ἱεραρχήσεως τῶν τιμῶν μιᾶς ποιοτικῆς μεταβλητῆς δέν εἶναι δυνατή οἱαδήποτε μέτρησις τῆς ἀ π ο σ τ ά σ ε ω ς ἤ ἄλλως τῆς δ ι α φ ο ρ ᾶ ς αὐτῶν. Γνωρίζομεν π.χ. ὅτι οἱ ἔχοντες μετρίαν ὑγείαν εἶναι εἰς χειροτέραν θέσιν ἐκείνων οἱ ὁποῖοι ἔχουν "καλήν" ὑγείαν ἀλλά δέν γνωρίζομεν κ α τ ά π ό σ ο ν χειροτέραν καί ἀκόμη ἄν αὐτή ἡ ἄγνωστος ἀπόστασις εἶναι μεγαλυτέρα ἤ μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως μεταξύ τῶν ἐχόντων "καλήν" καί "λίαν καλήν" ὑγείαν ἀντιστοίχως. Πρός ἀποφυγήν τυχόν παρανοήσεων δέον νά τονισθῆ ὅτι τά ἀνωτέρω ἰσχύουν καί ἐάν αἱ τιμαί τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν ἐκφράζονται διά συμβολικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω ἡ ἀπόστασις μεταξύ ὑπαλλήλων 1ου καί 2ου βαθμοῦ δέν εἶναι δυνατόν νά συγκριθῆ μέ τήν διαφοράν μεταξύ ὑπαλλήλων 2ου καί 3ου βαθμοῦ.

### 1.2.3 Ποσοτικαὶ Μεταβληταὶ

Ἡ ἡλικία, τό εἰσόδημα καί αἱ ὧραι ἑβδομαδιαίας ἀπασχολήσεως ἀτόμων, τό βάρος ἀγελάδων, τό μέγεθος κατοικιῶν, ἡ παραγωγή τῶν ἐργοστασίων, ὁ ἀριθμός τέκνων τῶν νοικοκυριῶν, ἡ ἐτησία βροχόπτωσις, αἱ εἰσαγωγαί καί ἐξαγωγαί ἀποτελοῦν μερικά μόνον παραδείγματα ποσοτικῶν μεταβλητῶν.

Π ο σ ο τ ι κ α ί λέγονται ἐκεῖναι αἱ μεταβληταί αἱ ὁποῖαι ἐπιδέχονται μέτρησιν - ὑπό τήν κυρίαν σημασίαν τῆς λέξεως - καί αἱ τιμαί αὐτῶν ἐκφράζονται ἀποκλειστικῶς δι' ἀριθμῶν καί εἰς συγκεκριμένας μονά-δας. Τό ὕψος π.χ. ἑνός ἀτόμου εἰς ἑκατοστάτοῦ μέ-τρου, τό εἰσόδημα αὐτοῦ εἰς συγκεκριμένας νομισμα-τικάς μονάδας κ.ο.κ.

Αἱ ποσοτικαί μεταβληταί, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τήν μεγίστην πλειοψηφίαν τῶν διά στατιστικῶν μεθό-δων ἐρευνωμένων χαρακτηριστικῶν, πέραν τῆς ὁ μ α-δ ο π ο ι ή σ ε ω ς καί ἱ ε ρ α ρ χ ή σ ε ω ς ἐπι-τρέπουν τήν πληροφόρησιν ἐπί τῶν ὑφισταμένων ἀ π ο-σ τ ά σ ε ω ν ἤ δ ι α φ ο ρ ῶ ν μεταξύ τῶν θ έ-σ ε ω ν δύο μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ ἤ δύο φαινομέ-νων, ἐπιπροσθέτως δέ τήν γνῶσιν τῆς ἀ π ο λ ύ τ ο υ θέσεως αὐτῶν ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἀ ρ χ ή με-τρήσεως εἶναι γνωστή καί δεδομένη.

Αἱ ποσοτικαί μεταβληταί διακρίνονται εἰς σ υ-ν ε χ ε ῖ ς καί ἀ σ υ ν ε χ ε ῖ ς ἤ ἀ π α ρ ι θ μ η-τ α ς μεταβλητάς.

Σ υ ν ε χ ε ῖ ς λέγονται αἱ μεταβληταί αἱ ὁ-ποῖαι δύνανται νά λάβουν - θεωρητικῶς τουλάχιστον-οἱανδήποτε τιμήν μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ὅλας δηλαδή τάς τιμάς ἑνός διαστήματος (α, β). Ἡ ἡλικία, τό βάρος, τό ἀνάστημα, τό εἰσόδημα, αἱ δαπάναι εἶναι τυπικά παραδείγματα συνεχῶν μετα-βλητῶν.

Ἀ σ υ ν ε χ ε ῖ ς ἤ ἀ π α ρ ι θ μ η τ α ί λέ-γονται ἀντιθέτως ἐκεῖναι αἱ μεταβληταί αἱ ὁποῖαι δύ-νανται νά λάβουν π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν μόνον πλῆ-θος τιμῶν ἤ ἄ π ε ι ρ ο ν τοιοῦτον ἀλλά ἀ ρ ι θ μ ή-σ ι μ ο ν. Συνήθως αἱ τιμαί αὐτῶν ἐκφράζονται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμός π.χ. τῶν ἀρρένων μελῶν ἑνός 5μελοῦς νοικοκυριοῦ εἶναι μία ἀπαριθμητή μετα-βλητή δυναμένη νά λάβη ὡς τιμάς τούς πεπερασμένους τῷ πλῆθος ἀριθμούς 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ὁ ἀριθμός τῶν τροχαίων ἀτυχημάτων τά ὁποῖα συμβαίνουν ἐτησίως εἰς μίαν χώραν εἶναι μία ἄλλη ἀπαριθμητή μεταβλητή δυ-ναμένη προφανῶς νά λάβη τάς τιμάς 0, 1, 2,... αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ὡς γνωστόν ἄπειρον μέν ἀλλά ἀπα-ριθμήσιμον σύνολον.

## 1.3 Συλλογή, Ἐπεξεργασία καί Ὀργάνωσις Στατιστικῶν Στοιχείων

Η μελέτη ἑνός προβλήματος τῇ βοηθείᾳ στατιστικῶν μεθόδων προϋποθέτει, ὡς εἶναι φυσικόν, τήν ὕπαρξιν τῶν ἀπαιτουμένων πρός τοῦτο στατιστικῶν στοιχείων καί δή ὀργανωμένων κατά τρόπον ἐπιτρέποντα τήν πλήρη καί ὀρθολογικήν ἀξιοποίησίν των. Τό πρῶτον συνεπῶς βῆμα εἰς οἱανδήποτε στατιστικήν μελέτην (ἔρευναν, πείραμα κλπ) εἶναι ἡ βάσει προκαθωρισμένου σχεδίου συλλογή τῶν ἀπαραιτήτων δεδομένων καί ἐν συνεχείᾳ ἡ ἐπεξεργασία καί κατάλληλος ὀργάνωσις αὐτῶν. Ὁ ἐνδεδειγμένος καί κατ᾽ἐπιστημονικόν τρόπον σχεδιασμός καί ἡ ὀρθή ἐκτέλεσις τῶν ἐν λόγῳ ἐργασιῶν εἶναι κεφαλαιώδους σημασίας διά τήν ὅλην μελέτην καί ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέραν προσοχήν καί προσπάθειαν καθ᾽ὅσον ψευδῆ, ἐλλειπῆ ἤ καθ᾽ οἱονδήποτε τρόπον ἀκατάλληλα ἤ κακῶς ὀργανωμένα δεδομένα δέν εἶναι δυνατόν παρά νά ὁδηγήσουν εἰς ἐσφαλμένα καί μή ἐφαρμόσιμα συμπεράσματα ἀνεξαρτήτως τῆς τελειότητος τῶν χρησιμοποιηθησομένων ἐν συνεχείᾳ μεθόδων παρουσιάσεως καί ἀναλύσεως αὐτῶν.

Πρός τούτοις, πρό πάσης ἄλλης ἐνεργείας του - ὁπωσδήποτε δέ πρό τῆς διενεργείας τῆς συλλογῆς τῶν ἀπαραιτήτων δεδομένων - ὁ ὑπεύθυνος στατιστικός θά πρέπει νά διευκρινήση ζητήματα ἀφορῶντα εἰς τάς γενικάς κατευθυντηρίους γραμμάς τῆς ὅλης μελέτης, νά ἀπαντήση εἰς συναφῆ ἐρωτήματα, νά ἀποφασίση ἐπί ὑφισταμένων τυχόν προβλημάτων καί ἐν γένει νά προβῆ εἰς πλείστας ὅσας ἀπαιτουμένας προπαρασκευαστικάς ἐνεργείας. Οὕτω, εἰς τό στάδιον αὐτό καθορίζονται ἐπακριβῶς ὁ γενικός σκοπός τῆς ἐρεύνης, οἱ τυχόν ειδικώτεροι στόχοι αὐτῆς - συνήθως ὑπό μορφήν μερικωτέρων στατιστικῶν προβλημάτων - τέλος δέ ἐν πάσει λεπτομερείᾳ ποῖα εἶναι ἀκριβῶς τά ἀπαιτούμενα δεδομένα καί ὑπό ποίαν μ ο ρ φ ή ν. Κατά τήν φάσιν αὐτήν δέον ἐπίσης νά ἀποφασισθῆ ἡ Γ ε ω γ ρ α φ ι κ ή, Π λ η θ υ σ μ ι α κ ή καί Χ ρ ο ν ι κ ή κάλυψις τῆς ἐρεύνης, δηλαδή ἡ γεωγραφική περιοχή, ὁ πληθυσμός ὡς καί ἡ χρονική στιγμή ἤ περίοδος ἀναφορᾶς τῶν δεδομένων, ὅπου φυσικά τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον.

Ὁ ἐρευνητής δέον ἐπίσης νά ἐξετάση ἐάν τυχόν μερικά - καί ποῖα - ἐκ τῶν ἀπαιτουμένων στοιχείων ὑφίστανται ἤδη ὡς ὑ π ο π ρ ο ϊ ό ν τῆς λειτουργίας διαφόρων ὑπηρεσιῶν - δ ι ο ι κ η τ ι κ ῶ ν π η γ ῶ ν - καί νά ὀργανώση καταλλήλως τήν χρησιμοποίησίν των. Γενικώτερον, ἐν προκειμένῳ, τυγχάνει ἐντελῶς ἀπαραίτητος ἡ διερεύνησις καί κατάλληλος ἀξιοποίησις τῆς ὑφισταμένης ἐπί τοῦ θέματος ἐ μ π ε ι ρ ί α ς (σχεδιασμός, ἐκτέλεσις καί ἀποτελέσματα προγενεστέρων συναφῶν μελετῶν, χρησιμοποιηθέντα ἐρωτηματολόγια, ἐφαρμοσθεῖσα μεθοδολογία κλπ).

Τέλος κατά τήν φάσιν αὐτήν καταρτίζεται τόσον ὁ ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ό ς ὅσον καί ὁ χ ρ ο ν ι κ ό ς (τό χρονοδιάγραμμα διεξαγωγῆς) π ρ ο ϋ π ο λ ο γ ι σ μ ό ς τῆς ὅλης μελέτης καί μέ βασικόν γνώμονα τόν διαθέσιμον χ ρ ό ν ο ν, τ ά ο ἰ κ ο ν ο μ ι κ ά μ έ σ α καί τό ὑπάρχον ἀ ν θ ρ ώ π ι ν ο ν δ υ ν α μ ι κ ό ν ἀποφασίζεται ἡ μ έ θ ο δ ο ς καί ὁ τ ρ ό π ο ς ἤ ἄλλως τά ὄ ρ γ α ν α συλλογῆς τῶν στοιχείων.

Βασικῶς αἱ μέθοδοι συλλογῆς στοιχείων εἶναι αἱ Ἀ π ο γ ρ α φ α ί καθ'ἅς τά στοιχεῖα συγκεντροῦνται ἐξ ὅλων τῶν μονάδων τοῦ ὑπό μελέτην πληθυσμοῦ καί αἱ Δ ε ι γ μ α τ ο λ η ψ ί α ι ἤ Δ ε ι γ μ α τ ο λ η π τ ι κ α ί Ἔ ρ ε υ ν α ι καθ'ἅς - διά λόγους βασικῶς χ ρ ό ν ο υ καί χ ρ ή μ α τ ο ς - αἱ πληροφορίαι συλλέγονται μόνον ἐκ μικροῦ συνήθως ἀριθμοῦ μονάδων - τοῦ δ ε ί γ μ α τ ο ς - ἐπιλεγομένων ἐκ τοῦ ὑπό μελέτην πληθυσμοῦ διά καταλλήλων ἐπιστημονικῶν μεθόδων οὕτως ὥστε τό δεῖγμα ἀφ'ἑνός νά εἶναι ἀ ν τ ι π ρ ο σ ω π ε υ τ ι κ ό ν τοῦ πληθυσμοῦ ὡς μία μ ι κ ρ ο φ ω τ ο γ ρ α φ ί α α ὐ τ ο ῦ καί ἀφ'ἑτέρου νά ἐπιτρέπη τήν γενίκευσιν τῶν ἐξ αὐτοῦ συναγο-

## 1.4 Παρουσίασις καὶ Στατιστικὴ Ἀνάλυσις Στατιστικῶν Στοιχείων

Μετά τήν ἐπεξεργασίαν καί μηχανογραφικήν ὀργάνωσιν τοῦ συλλεγέντος πρωτογενοῦς στατιστικοῦ ὑλικοῦ, ἀκολουθεῖ ἡ διαδικασία τῆς καταλλήλου συνοπτικῆς παρουσιάσεως τῶν ἀποτελεσμάτων ἐν συνεχείᾳ δέ ἡ εἰς βάθος περαιτέρω ἀνάλυσις τῶν δεδομένων πρός τόν σκοπόν ἐξαγωγῆς λεπτομερεστέρων καί ἀμέσως ἐφαρμοσίμων συμπερασμάτων ἀπαραιτήτων συνήθως εἰς τήν λῆψιν συγκεκριμένων ἀποφάσεων.

Ἀναλόγως τοῦ ἐπιδιωκομένου ἑκάστοτε σκοποῦ, ἡ παρουσίασις στατιστικῶν στοιχείων γίνεται πρῶτον, διά τῶν καλουμένων στατιστικῶν πινάκων, ὅπου ἀριθμητικά συνήθως δεδομένα κατατάσσονται συστηματικῶς ἐπί τῇ βάσει ὡρισμένων κριτηρίων καί παρατίθενται εἰς στήλας καί γραμμάς κατά τρόπον διευκολύνοντα τήν μελέτην καί τήν ἐν γένει ἀξιολόγησιν αὐτῶν, δεύτερον, διά γραφικῶν παραστάσεων ἤ ἄλλως διαγραμμάτων, ὅπου τά δεδομένα ἀναπαρίστανται διά γεωμετρικῶν σχημάτων ἤ ἄλλων ἐν γένει ἀπεικονίσεων καί τρίτον, διά συνοπτικῶν ἐκθέσεων ἤ ἀναφορῶν εἰς τό κείμενον τῶν ὁποίων ἐνσωματοῦνται συνήθως τά σημαντικώτερα τῶν ἀποτελεσμάτων, σχολιάζεται ἡ σημασία αὐτῶν καί αἱ τυχόν ἐφαρμογαί των καί ἐν γένει συνοψίζονται τά προκύπτοντα ἐκ τῆς ὅλης μελέτης συμπεράσματα. Χρῆσις στατιστικῶν πινάκων γίνεται συνήθως πρός παρουσίασιν στοιχείων μέ ἀκρίβειαν καί λεπτομερείας ἀπαραιτήτους διά τήν περαιτέρω μελέτην καί ἀνάλυσιν αὐτῶν πρός ἐξαγωγήν ὀρθολογικῶν, χρησίμων καί ἐφαρμοσίμων συμπερασμάτων. Ἀντιθέτως, σκοπός ἑνός διαγράμματος, εἰς τό ὁποῖον τά διάφορα μεγέθη ἀπεικονίζονται συνήθως κατά προσέγγισιν, εἶναι βασικῶς νά παράσχῃ εἰς τόν μελετητήν κατά τρόπον ἁπλοῦν καί εὔληπτον γενικάς μόνον ἐντυπώσεις περί τοῦ μελετωμένου φαινομένου τάς ὁποίας νά δύναται οὗτος νά ἀντιληφθῇ ἀμέσως καί νά συγκρατήσῃ. Αἱ στατιστικαί ἐκθέσεις χρησιμοποιοῦνται συνήθως ἀπό κοινοῦ μετά λεπτομερῶν πινάκων καί συναφῶν γραφικῶν ἀπεικονίσεων κατά κανόνα δέ ὡς ἐπεξηγηματικά σημειώματα εἰς τήν δημοσίευσιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ὅλης μελέτης.

Πρός ἀπόκτησιν σαφοῦς ἀντιλήψεως τῆς ἐννοίας, τῶν διαφόρων μορφῶν, τῶν μεθόδων καί κριτηρίων καταρτίσεως ὡς καί τῆς ποικιλίας τῶν τρόπων χρησιμοποιήσεως τῶν στατιστικῶν πινάκων, γραφικῶν ἀπεικονίσεων, ἐκθέσεων κλπ. ὁ ἀναγνώστης παραπέμπεται εἰς τά διάφορα δημοσιεύματα τῆς 'Εθνικῆς Στατιστικῆς 'Υπηρεσίας ἰδιαιτέρως δέ εἰς τό "Μηνιαῖον Στατιστικόν Δελτίον" καί τήν "Συνοπτικήν 'Επετηρίδα τῆς 'Ελλάδος".

'Η καθ'οἱονδήποτε τρόπον (πίνακες, διαγράμματα, ἐκθέσεις) συνοπτική παρουσίασις τῶν στατιστικῶν στοιχείων σκοποῦσα συνήθως εἰς τήν ἀνάγλυφον καί ἀποκαλυπτικήν π ε ρ ι γ ρ α φ ή ν τῶν ἐρευνωμένων χαρακτηριστικῶν ἑνός πληθυσμοῦ ἤ ἄλλου τινός φαινομένου ὡς καί τήν ἀ ξ ι ο λ ό γ η σ ι ν - τῇ βοηθείᾳ καταλλήλων σ υ γ κ ρ ί σ ε ω ν - τῆς σημασίας τῶν διαφόρων ὑπό μελέτην συναφῶν μεγεθῶν, ἀποτελεῖ τήν π ρ ώ τ η ν σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η μ ο ρ φ ή ν σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς αὐτῶν. Πρός ἐπίτευξιν τῶν ἐν λόγῳ ἐπιδιώξεων ἡ ἐμφάνισις τῶν δεδομένων εἰς πίνακας ἤ εἰς ἀντίστοιχα διαγράμματα γίνεται συνήθως τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ἤ περισσοτέρων ἐκ τῶν κάτωθι κ α τ α τ ά ξ ε ω ν αὐτῶν, ἐφαρμοζομένων πρός τοῦτο προφανῶν ἀντιστοίχων κριτηρίων.

## 1.4.1 Γεωγραφικαί Κατατάξεις

Πρός διαπίστωσιν τῆς τυχόν γ ε ω γ ρ α φ ι κ ῆ ς δ ι α φ ο ρ ο π ο ι ή σ ε ώ ς των, αἱ τιμαί μιᾶς μεταβλητῆς - αἱ ἀναφερόμεναι κυρίως εἰς χαρακτηριστικά ἑνός φαινομένου ἤ ἄλλης τινός καταστάσεως - κατατάσσονται συνήθως βάσει τοῦ τ ό π ο υ, τῆς πραγματοποιήσεως τῶν φαινομένων καί παρατίθενται καταλλήλως εἰς τούς καλουμένους Γ ε ω γ ρ α φ ι κ ο ύ ς πίνακας ἤ διαγράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ ἐν λόγῳ τοπικαί διαφοροποιήσεις εἶναι δυνατόν νά μελετηθοῦν περαιτέρω. Δύο ἁπλᾶ παραδείγματα γεωγραφικῶν πινάκων παρατίθενται κατωτέρω.

Πίναξ 1.1
Βροχόπτωσις κατά τό ἔτος 1970

| Σταθμός παρατηρήσεων | Ὕψος εἰς χιλ. |
|---|---|
| Ἀθῆναι | 240 |
| Ἡράκλειον | 262 |
| Θεσσαλονίκη | 428 |
| Ἰωάννινα | 1.016 |
| Καλαμάτα | 762 |
| Λάρισα | 211 |
| Πάτραι | 608 |
| Ρόδος | 504 |
| Τρίπολις | 758 |
| Χανιά | 424 |

Πηγή: ΕΣΥΕ, Στατιστική Ἐπετηρίς 1971

Πίναξ 1.2
Ποσοστιαία διάρθρωσις τοῦ ἀκαθαρίστου ἐγχωρίου προϊόντος κατά τό ἔτος 1969 εἰς τάς χώρας τῆς Εὐρωπαϊκῆς Οἰκονομικῆς Κοινότητος (ΕΟΚ)

| Χῶραι | Γεωργία | Βιομηχανία | Ὑπηρεσίαι |
|---|---|---|---|
| Ἀγγλία | 3 | 48 | 49 |
| Βέλγιον | 6 | 44 | 50 |
| Γαλλία | 7 | 50 | 43 |
| Γερμανία | 4 | 57 | 39 |
| Δανία | 11 | 47 | 42 |
| Ἰρλανδία | 19 | 36 | 45 |
| Ἰταλία | 12 | 41 | 47 |
| Λουξ/γον | 6 | 54 | 40 |
| Ὁλλανδία | 8 | 45 | 47 |
| ΕΛΛΑΣ | 19 | 34 | 47 |

Πηγή: ΕΣΥΕ, Ἐθνικοί Λογαριασμοί τῆς Ἑλλάδος, 1948-70

Τά ἀντίστοιχα γ ε ω γ ρ α φ ι κ ά δ ι α γ ρ ά μ μ α τ α εἶναι συνήθως ἁπλοῖ χ ά ρ τ α ι (μιᾶς χώρας, ὁλοκλήρου ἠπείρου ἤ οἱασδήποτε ἄλλης περιοχῆς) τά ἐπί μέρους τμήματα τῶν ὁποίων παρουσιάζονται μέ διάφορα χρώματα ἤ ποικιλομόρφους γραμμοσκιάσεις ἡ σημασία τῶν ὁποίων διευκρινίζεται εἰς σχετικόν ὑ π ό μ ν η μ α. Οὕτω αἱ τυχόν ὑφιστάμεναι τοπικαί διαφοροποιήσεις τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου καθίστανται ἀμέσως ἀντιληπταί δι'ἁπλῆς ἀναγνώσεως τοῦ χάρτου - διαγράμματος.

### 1.4.2 Χρονολογικαί Κατατάξεις

Χ ρ ο ν ο λ ο γ ι κ ή κ α τ ά τ α ξ ι ς λέγεται ἡ παρουσίασις ἀριθμητικῶν δεδομένων - τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ἐπίσης ἀναφερομένων συνήθως εἰς χαρακτηριστικά ἑνός φαινομένου ἤ ἄλλης τινός καταστάσεως - ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρός τάς χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους πραγματοποιήσεώς των. Οἱ χ ρ ο ν ο λ ο γ ι κ ο ί π ί ν α κ ε ς ἤ τα ἀντίστοιχα χ ρ ο ν ο γ ρ ά μ μ α τ α ἐπιτρέπουν ἀφ'ἑνός τήν παρακολούθησιν τῆς δ ι α χ ρ ο ν ι κ ῆ ς ἐξελίξεως τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου καί ἀφ'ἑτέρου, συνήθως ἐν σ υ ν δ υ α σ μ ῷ πρός γ ε ω γ ρ α φ ι κ ο ύ ς π ί ν α κ α ς, τήν ἀξιολόγησιν τῆς σχετικῆς σημασίας τῶν διαφόρων ἐπί μέρους μεγεθῶν.

Τάς χρονολογικάς κατατάξεις καί τούς τρόπους τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως αὐτῶν πραγματευόμεθα λεπτομερέστερον εἰς τό κεφάλαιον περί χρονολογικῶν σειρῶν.

### 1.4.3 Κατηγορικαί, Ποιοτικαί καί Ποσοτικαί Κατατάξεις

Αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τάς ἐπί μέρους μονάδας ἑνός πληθυσμοῦ τιμαί μιᾶς οἱασδήποτε μεταβλητῆς - συνήθως πολυπληθεῖς - εἶναι λίαν δυσχερές,ἐάν ὄχι ἐντελῶς ἀνέφικτον, νά μελετηθοῦν καί νά χρησιμοποιηθοῦν κεχωρισμένως. Τοῦτο θά ἦτο ἄλλωστε ἄσκοπον δεδομένου ὅτι τά τυχόν ἐξαγόμενα συμπεράσματα θά ἐστεροῦντο οἱασδήποτε γενικωτέρας σημασίας.

Οὕτω στατιστικά δεδομένα - ἀριθμητικά ἤ μή - ἀναφερόμενα εἰς ἕν χαρακτηριστικόν τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ ὁ μ α δ ο π ο ι ο ῦ ν τ α ι συνήθως διά καταλλήλων μεθόδων καί ἐμφανίζονται τῇ βοηθείᾳ εἰδικῶν συνοπτικῶν κ α τ α τ ά ξ ε ω ν τῶν μονάδων τοῦ ὑπό μελέτην πληθυσμοῦ, τῶν γνωστῶν εἰς τήν στατιστικήν ὁρολογίαν ὡς κ α τ α ν ο μ ῶ ν σ υ χ ν ό τ η τ ο ς.

Αἱ ἐν λόγῳ κατατάξεις ἤ κατανομαί συχνότητος, καλούμεναι κ α τ η γ ο ρ ι κ α ί, π ο ι ο τ ι κ α ί ἤ π ο σ ο τ ι κ α ί ἀναλόγως τῆς φύσεως τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς, παρέχουν κατά τρόπον ἁπλοῦν καί συνοπτικόν ἀνάγλυφον τήν εἰκόνα τῆς ἀντιστοίχου δ ο μ ῆ ς τοῦ πληθυσμοῦ καί ὡς ἐκ τούτου ἀποτελοῦν βασικῆς χρησιμότητος ὄργανα τόσον διά τήν π ε ρ ι γ ρ α φ ή ν ὅσον καί διά τήν περαιτέρω σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ν ἀ ν ά λ υ σ ι ν διαφόρων πληθυσμιακῶν χαρακτηριστικῶν.

Πρός τούτοις, κατανομαί συχνότητος παρατιθέμεναι εἰς κάπως πολυπλοκωτέρους πίνακας ἐν ἀντιστοιχίᾳ - ὡς καί τά ἁπλᾶ χαρακτηριστικά ἑνός φαινομένου ἤ ἄλλης τινός καταστάσεως - πρός τόν χ ρ ό ν ο ν ἤ τόν τ ό π ο ν ἀναφορᾶς των, ἐπιτρέπουν τήν μελέτην τῆς δ ι α χ ρ ο ν ι κ ῆ ς ἐξελίξεως ἤ τῆς γ ε ω γ ρ α φ ι κ ῆ ς διαφοροποιήσεως τῆς ἀντιστοίχου πρός τό ὑπό μελέτην χαρακτηριστικόν δ ο μ ῆ ς τοῦ πληθυσμοῦ.

Τέλος ἡ διερεύνησις τυχόν ὑφισταμένων διαφορῶν μεταξύ ὑποομάδων ἑνός πληθυσμοῦ - ὑποπληθυσμῶν - βασίζεται πολλάκις εἰς τήν συγκριτικήν μελέτην κατανομῶν συχνότητος ἀναφερομένων εἰς τούς ἐν λόγῳ πληθυσμούς.

Τάς κατανομάς συχνότητος καί τάς ἀντιστοίχους πρός αὐτάς γραφικάς παραστάσεις πραγματευόμεθα διεξοδικῶς εἰς τό ἑπόμενον Κεφάλαιον.

Ἡ παρουσίασις τῶν δεδομένων μιᾶς ἐρεύνης ἤ γενικώτερον μιᾶς οἱασδήποτε στατιστικῆς μελέτης δέν ἀποτελεῖ συνήθως καί τό πέρας τῆς ὅλης ἐργασίας. Πέραν τῶν *περιληπτικῶν* πινακοποιήσεων, τῶν γραφικῶν παραστάσεων καί τῶν συνοπτικῶν εἰσηγητικῶν ἐκθέσεων ἤ ἀναφορῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξυπηρετοῦν βασικῶς τούς σκοπούς τῆς παρουσιάσεως τῶν ἀποτελεσμάτων, καταρτίζονται συνήθως - τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ἤ περισσοτέρων τῶν ἀνωτέρω κατατάξεων - λεπτομερέστεροι καί πολυπλοκώτεροι (*ἀναλυτικοί*, *πολλαπλῆς εἰσόδου* κλπ.) στατιστικοί πίνακες οἱ ὁποῖοι ἐπιτρέπουν τήν περαιτέρω διερεύνησιν τῶν στοιχείων καί τήν ἐξαγωγήν τῶν ἀπαιτουμένων εἰς τήν λῆψιν ἀποφάσεων συγκεκριμένων *ποσοτικῶν* ἤ *ποιοτικῶν* συμπερασμάτων. Ἡ ἐν λόγῳ εἰς βάθος διερεύνησις τῶν δεδομένων γίνεται τῇ βοηθείᾳ καταλλήλων στατιστικῶν μεθόδων ἡ συστηματική ἐφαρμογή τῶν ὁποίων εἰς τά ἐμπειρικά δεδομένα ἀποτελεῖ τήν καλουμένην *στατιστικήν ἀνάλυσιν* τῶν στοιχείων, τήν πεμπτουσίαν τῆς Στατιστικῆς ὡς ἐπιστήμης.

Μολονότι, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τά ὅρια μεταξύ παρουσιάσεως καί στατιστικῆς ἀναλύσεως τῶν δεδομένων δέν εἶναι σαφῆ, προκειμένου νά δώσωμε μίαν, ἔστω καί χονδρικήν, ἰδέαν τῶν συνήθως χρησιμοποιουμένων ἀναλυτικῶν μεθόδων παραθέτομεν ἐνδεικτικῶς τά ἑξῆς:

*Γεωγραφικαί* καί *Χρονολογικαί* συγκρίσεις ἐπί τῶν δεδομένων ἑνός πίνακος πρός διαπίστωσιν τυχόν τοπικῶν διαφοροποιήσεων' τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου ἤ ἀντιστοίχως πρός μελέτην τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως ἑνός μεγέθους ἤ τῆς δομῆς ἑνός πληθυσμοῦ ἀποτελοῦν, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τάς πλέον στοιχειώδεις καί ἁπλᾶς μορφάς ἀναλυτικῆς ἐργασίας. Αἱ ἐν λόγῳ συγκρίσεις ἐπιτρέπουν ἐπίσης ὀρθολογικήν ἀξιολόγησιν τῆς σχετικῆς σημασίας τῶν τιμῶν τάς ὁποίας λαμβάνει μία μεταβλητή εἰς διαφόρους *χρονικάς στιγμάς* ἤ *γεωγραφικάς περιοχάς*. Ἐξ ἄλλου, *συγκρίσεις* τῆς δομῆς ὡς πρός ἕν ἤ περισσότερα χαρακτηριστικά διαφόρων ὑποομάδων ἑνός πληθυσμοῦ - *ὑποπληθυ-*

σ μ ῶ ν - διευκολύνουν πολλάκις τήν ἀποκάλυψιν τῶν τυχόν προβληματικῶν τοιούτων καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι λίαν συνήθεις εἰς τήν ἀνάλυσιν δεδομένων προερχομένων κυρίως ἐξ ἀπογραφῶν ἤ δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν.

Αἱ ἀνωτέρω συγκρίσεις καί γενικώτερον τό ἔργον τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως διευκολύνονται πολλάκις ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ ὡρισμένων π α ρ α γ ώ γ ω ν μεγεθῶν ὡς π.χ. λ ό γ ω ν, ἀ ν α λ ο γ ι ῶ ν, π ο σ ο σ τ ῶ ν κλπ. Τά ἐν λόγῳ μεγέθη ἀποκαλύπτουν κατά τόν καλλίτερον δυνατόν τρόπον τάς σ χ έ σ ε ι ς μεταξύ δύο μεταβλητῶν ἤ μεταξύ δύο τιμῶν τῆς ἰδίας μεταβλητῆς ἀναφερομένων εἰς δύο γεωγραφικάς περιοχάς ἤ χρονικας περιόδους ἤ ἀκόμη τήν δ ι ά ρ θ ρ ω σ ι ν μιᾶς ὁλότητος καί τό σχετικόν μέγεθος τῶν ἐπί μέρους συνθετικῶν της.

Αἱ κατανομαί συχνότητος τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ὑπό μελέτην χαρακτηριστικόν ἐπιτρέπουσαι τήν συνοπτικήν παρουσίασιν καί μελέτην τῆς ἀντιστοίχου δομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ἀποτελοῦν ἐπίσης βασικά ὄργανα περιγραφῆς ὅσον καί ἀναλυτικά τοιαῦτα.

Περαιτέρω ὁ ὑπολογισμός ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν διά τόν ἑκάστοτε ὑπό μελέτην πληθυσμῶν μεγεθῶν - γνωστῶν συνήθως ὡς π α ρ α μ έ τ ρ ω ν - ὡς π.χ. μ έ σ ω ν τ ι μ ῶ ν (τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς), μ έ τ ρ ω ν δ ι α σ π ο ρ ᾶ ς ἐν γένει, ἄλλων τινῶν παραμέτρων ἀποκαλυπτικῶν τῆς μορφῆς τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς (μέτρων ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς, κ υ ρ τ ό τ η τ ο ς ἤ ἄλλων ρ ο π ῶ ν ἀνωτέρας τάξεως) ἤ τέλος διαφόρων ἐν γένει δ ε ι κ τ ῶ ν διευκολύνει ἀφ' ἑνος τήν ἔτι συνοπτικωτέραν παρουσίασιν τῶν δεδομένων καί ἀφ' ἑτέρου τήν ἁπλοποίησιν εἰς σημαντικόν βαθμόν τῆς ὅλης ἀναλυτικῆς ἐργασίας ἰδιαιτέρως δέ οἱασδήποτε σ υ γ κ ρ ι τ ι κ ῆ ς μελέτης τῶν στοιχείων.

Ἐξ ἄλλου κατανομαί συχνότητος ὡς πρός δύο ἤ περισσοτέρας μεταβλητάς ἤ γενικώτερον στατιστικοί πίνακες δ ι π λ ῆ ς ἤ π ο λ λ α π λ ῆ ς εἰσόδου ἐπιτρέπουν τόσον τήν περιγραφήν τῆς δομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ἐν σχέσει πρός δύο ἤ περισσοτέρας μεταβλητάς ταυτοχρόνως, ὅσον καί - τό οὐσιωδέστερον - τήν ἀποκάλυψιν τῆς τυχόν ὑφισταμένης ἀλληλεξαρτήσεως μεταξύ τῶν ὑπό μελέτην μεταβλητῶν, πολλάκις δέ καί τόν ὑπολογισμόν μέτρων ἀποκαλυπτικῶν τῆς ἰσχύος τοῦ ἐν λόγῳ δεσμοῦ (συσχετίσεως).

Τέλος, ἡ προσαρμογή εἰς τά ἐμπειρικά δεδομένα μαθηματικῶν προτύπων ἤ ἄλλως θεωρητικῶν ὑποδειγμάτων ὡς π.χ. θεωρητικῶν κατανομῶν συχνότητος ὡς πρός μίαν ἤ περισσοτέρας μεταβλητάς, ἐξισώσεων ἤ ἄλλως γραμμῶν καί ἐπιφανειῶν παλινδρομήσεως ἤ ἀκόμη ἀντιστοίχων τοιούτων καταλλήλων διά τόν χειρισμόν δεδομένων χρονολογικῶν σειρῶν ἀποτελεῖ ἐπίσης σειράν ἐξειδικευμένων στατιστικῶν μεθόδων περιγραφῆς καί ἀναλύσεως δεδομένων. Πράγματι τά ἐν λόγῳ ὑποδείγματα περιγράφουν συνοπτικῶς καί ἀποκαλύπτουν τά κύρια χαρακτηριστικά ἑνός φαινομένου ἤ τήν δομήν - εἰς γενικάς γραμμάς - ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός ἕν ἤ περισσότερα χαρακτηριστικά, τάς σχέσεις μεταξύ δύο ἤ περισσοτέρων μεταβλητῶν ἤ τέλος τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν ἑνός φαινομένου, πληροφορίας ἐξαιρετικῶς χρησίμους εἰς τήν ἐν γένει πρόβλεψιν τῶν ἀποτελεσμάτων μιᾶς ἐνεργείας ἤ ἀποφάσεως ἤ ἀντιστοίχως τῆς κατά προσέγγισιν μελλοντικῆς ἐξελίξεως ἑνός φαινομένου.

Αἱ ἀναλυτικαί μέθοδοι τάς ὁποίας ἁπλῶς καί μόνον ἐσκιαγραφήσαμεν ἀνωτέρω ἐνέχουσαι καί τό στοιχεῖον τῆς περιγραφῆς θά μᾶς ἀπασχολήσουν διεξοδικῶς, ἀπό κοινοῦ μετά τῶν βασικῶν τρόπων παρουσιάσεως τῶν δεδομένων, εἰς τά ἑπόμενα κεφάλαια τοῦ παρόντος.

## 1.5 Περιγραφική καί Ἐπαγωγική Στατιστική

Εἰς τήν ἀρχήν τοῦ παρόντος κεφαλαίου ἡ Στατιστική ὡρίσθη ὡς ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία πραγματεύεται τά τῆς συλλογῆς, ἐπεξεργασίας καί ὀργανώσεως, παρουσιάσεως καί τέλος τῆς ἀναλύσεως ἀριθμητικῶν ἤ ἄλλων δεδομένων ἐπί τῷ σκοπῷ ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων χρησίμων ἐν γένει εἰς τήν λῆψιν ἀποφάσεων.

Ἐάν ἡ ἐν λόγῳ διαδικασία ἀναφέρεται εἰς τήν ἔρευναν διαφόρων χαρακτηριστικῶν τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός συνόλου, ὁ ἀντικειμενικός σκοπός τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως τῶν στοιχείων δυνατόν νά εἶναι, εἴτε ἡ ἐξαγωγή συμπερασμάτων ἀναφερομένων ἀποκλειστικῶς εἰς τό ἐρευνηθέν σύνολον (ἐπέχοντος πλέον θέσιν π λ η θ υ σ μ ο ῦ) ἄνευ οἱωνδήποτε γ ε ν ι κ ε ύ σ ε ω ν ἤ κατ'ἀναλογίαν ἀποφάσεων, εἴτε ἡ ἀ ν α γ ω γ ή καί γ ε ν ί κ ε υ σ ι ς τῶν ἐξαγομένων ἐκ τοῦ ἐρευνηθέντος συνόλου συμπερασμάτων εἰς μίαν εὐρυτέραν ὁμάδα ὁμοειδῶν μονάδων ἤτοι τόν ἀ ρ χ ι κ ό ν πληθυσμόν ἐκ τοῦ ὁποίου τό ἐρευνηθέν σύνολον ἐπελέγη ὡς δ ε ῖ γ μ α.

Ἐξ ἄλλου, ἐάν ἡ ὅλη στατιστική μελέτη ἀφορᾶ ἕν φαινόμενον ἤ ἄλλην τινά κατάστασιν οἱ συνήθεις ἀντικειμενικοί σκοποί αὐτῆς εἶναι εἴτε ἡ π ε ρ ι γ ρ α φ ή τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου καί τῆς δ ι α χ ρ ο ν ι κ ῆ ς ἐ ξ ε λ ί ξ ε ω ς ἤ γ ε ω γ ρ α φ ι κ ῆ ς δ ι α φ ο ρ ο π ο ι ή σ ε ω ς αὐτῶν, εἴτε ἡ π ρ ό β λ ε ψ ι ς τῆς μελλοντικῆς διαμορφώσεως τῶν ἐν λόγῳ χαρακτηριστικῶν ἐκ τῆς κατά τό παρελθόν ἐν γένει συμπεριφορᾶς των.

Οὕτω, ἀναλόγως τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ ἡ στατιστική διακρίνεται εἰς π ε ρ ι γ ρ α φ ι κ ή ν καί ἐ π α γ ω γ ι κ ή ν τοιαύτην.

Μολονότι ἡ διάκρισις καί τά μεταξύ των ὅρια δέν εἶναι σαφῆ δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι:

Ἡ π ε ρ ι γ ρ α φ ι κ ή στατιστική πραγματεύεται κυρίως τάς μεθόδους ἐξαγωγῆς π ε ρ ι γ ρ α φ ι κ ῶ ν ἐν γένει συμπερασμάτων ἀναφερομένων ἀποκλειστικῶς εἰς τόν ἐρευνηθέντα πληθυσμόν ἤ τό μελετηθέν φαινόμενον ἀποκλειομένων

οἱωνδήποτε γ ε ν ι κ ε ύ σ ε ω ν, π ρ ο β λ έ-
ψ ε ω ν ἢ ἄλλων τυχόν κ α τ' ἀ ν α λ ο γ ί α ν
ἀποφάσεων, ἐνῶ ἀντιθέτως

Ἡ ἐ π α γ ω γ ι κ ή στατιστική ἢ ἄλλως
στατιστική σ υ μ π ε ρ α σ μ α τ ο λ ο γ ί α
ἀσχολεῖται βασικῶς μέ τάς μεθόδους αἱ ὁποῖαι κα-
θιστοῦν δυνατήν τήν γ ε ν ί κ ε υ σ ι ν δειγμα-
τοληπτικῶν συμπερασμάτων εἰς τόν ἀρχικόν πλη-
θυσμόν, τήν π ρ ό β λ ε ψ ι ν τῆς μελλοντικῆς
διαμορφώσεως τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ἢ τῆς ἐ-
ξελίξεως τῆς σχέσεως δύο μεταβλητῶν ἐκ τῶν ἀν-
τιστοίχων δεδομένων τοῦ παρελθόντος ἢ τέλος τήν
ἐν γένει λῆψιν ἀποφάσεων ὑπό συνθήκας σ χ ε τ ι-
κ ῆ ς ἀ β ε β α ι ό τ η τ ο ς.

Αἱ πλέον σημαντικαί καί συνήθως χρησιμοποιούμε-
ναι π ε ρ ι γ ρ α φ ι κ α ί στατιστικαί μέθοδοι εἶ-
ναι:

α) Αἱ μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ α ί κ α τ α ν ο μ α ί
σ υ χ ν ό τ η τ ο ς καί αἱ ἀντίστοιχοι γραφικαί
ἀπεικονίσεις αὐτῶν. Αὗται ἐμφανίζουν συνοπτικῶς
τήν δομήν τοῦ πληθυσμοῦ διά τῆς κατατάξεως τῶν
ἐπί μέρους μονάδων αὐτοῦ ἐπί τῇ βάσει τῶν διαφό-
ρων τιμῶν μιᾶς κατηγορικῆς, ποιοτικῆς ἢ ποσοτι-
κῆς μεταβλητῆς.

β) Ὁ ὑπολογισμός ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν
- π α ρ α μ έ τ ρ ω ν - ὡς π.χ. μέσων τιμῶν, μέ-
τρων διασπορᾶς ἢ ἄλλων συναφῶν δεικτῶν ἀποκαλυ-
πτικῶν ἀντιστοίχως τῆς θ έ σ ε ω ς, τοῦ ε ὔ-
ρ ο υ ς καί τῆς ἐν γένει μ ο ρ φ ῆ ς τῆς ἀν-
τιστοίχου κατανομῆς

γ) Αἱ δ ι μ ε τ α β λ η τ α ί ἢ π ο λ υ μ ε τ α-
β λ η τ α ί κατανομαί συχνότητος ὅπου αἱ μονά-
δες ἑνός πληθυσμοῦ κατατάσσονται ὡς πρός δύο ἢ
περισσότερα ταυτοχρόνως χαρακτηριστικά (μεταβλη-
τάς), διά τῶν ὁποίων καθίσταται δυνατή ἡ διερεύ-
νησις τῆς ἀλληλεξαρτήσεως (ἀ λ λ η λ ο υ χ ί α ς,

συναφείας, συσχετίσεως) τῶν ὑπεισερχομένων μεταβλητῶν καί ἡ τυχόν ἐπίδρασις τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης ἤ τῶν ἄλλων

δ) Ὁ ὑπολογισμός ἐκ τῶν ὡς ἄνω κατανομῶν ὡρισμένων ἀκόμη παραμέτρων ὡς π.χ. συντελεστῶν συσχετίσεων, δεικτῶν συναφείας κλπ. ἀποκαλυπτικῶν τοῦ βαθμοῦ ἀλληλεξαρτήσεως ὡς καί τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖον συμμεταβάλλονται αἱ ὑπό μελέτην μεταβληταί

ε) Ἡ προσαρμογή εἰς τά ἐμπειρικά δεδομένα ὡρισμένων μαθηματικῶν ὑποδειγμάτων ὡς π.χ. θεωρητικῶν τινῶν μονομεταβλητῶν ἤ πολυμεταβλητῶν κατανομῶν συχνότητος καταλλήλων διά τήν περιγραφήν τῆς ἀντιστοίχου δομῆς καί τήν ἀποκάλυψιν τυχόν ἰδιαζόντων χαρακτηριστικῶν ἑνός πληθυσμοῦ, ἤ διαφόρων ἐξισώσεων (γραμμῶν ἤ ἐπιφανειῶν) καλουμένων ἐξισώσεων παλινδρομήσεως καταλλήλων διά τήν συνοπτικήν περιγραφήν τῆς μορφῆς καί τοῦ βαθμοῦ ἐξαρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς ἀπό ἑτέραν ἤ ἑτέρας τοιαύτας

στ) Αἱ χρονολογικαί κατατάξεις (σειραί) καί τά ἀντίστοιχα χρονογράμματα πρός διαπίστωσιν, περιγραφήν καί μελέτην τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως ἑνός φαινομένου

ζ) Ἡ προσαρμογή εἰς τά ἐμπειρικά δεδομένα τῶν καλουμένων γραμμῶν τάσεως (ἐξισώσεων ὅπου αἱ τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς ἐμφανίζονται ὡς συναρτήσεις τοῦ χρόνου) καταλλήλων διά τήν περιγραφήν τῆς μακροχρονίου συμπεριφορᾶς τοῦ φαινομένου, ὡς ἐπίσης ὁ ὑπολογισμός ὡρισμένων δεικτῶν χαρακτηριστικῶν τῆς τυχόν ἐποχικῆς ἤ γενικώτερον περιοδικῆς συμπεριφορᾶς αὐτοῦ

η) Ἡ κατάρτισις διαφόρων ἀριθμοδεικτῶν ὡς π.χ. τιμαρίθμων, δεικτῶν ὄγκου, δεικτῶν παραγωγικότητος, ἀπασχολήσεως κλπ. οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνήθως διά τήν παρακολούθησιν τῆς διαχρονικῆς ἤ τῆς ἀπό τόπου εἰς τόπον (γεωγραφικῆς) μεταβολῆς ἑνός συνθέτου μεγέθους ἤ ἄλλως ἑνός πλήθους μεταβλητῶν θεωρουμένων ἀπό κοινοῦ κ.ο.κ.

Ἡ συστηματική καί ἐν πάσει λεπτομερείᾳ παρουσίασις τῶν ὡς ἄνω μεθόδων καί ὀργάνων τῆς περιγραφικῆς στατιστικῆς ἀποτελεῖ τό ἀντικείμενον τοῦ παρόντος καί γίνεται μέ τήν ἀνωτέρω περίπου σειράν εἰς τά ἀκολουθοῦντα κεφάλαια.

Ἡ ἐπαγωγική στατιστική ἤ ἄλλως στατιστική συμπερασματολογία πραγματεύεται κατά κύριον λόγον τήν θεωρίαν τῶν στατιστικῶν ἐκτιμήσεων ἤτοι τάς ἀρχάς καί τάς μεθόδους αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν δυνατόν τόν κατά προσέγγισιν ὑπολογισμόν - ἐκτίμησιν δεδομένης ἀκριβείας - διαφόρων χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν - παραμέτρων - ἑνός πληθυσμοῦ ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ἑνός δείγματος ὡς ἐπίσης τήν θεωρίαν τοῦ λεγομένου ἐλέγχου στατιστικῶν ὑποθέσεων ἤτοι τῆς διερευνήσεως τοῦ κατά πόσον τά δεδομένα τῆς ἐμπειρίας συμφωνοῦν μέ τά θεωρητικά τοιαῦτα ἤ ἀφίστανται τόσον πολύ αὐτῶν ὥστε τοῦτο νά ἀποτελῆ τουλάχιστον ἰσχυράν ἔνδειξιν δι' ἀπόρριψιν τῆς γενομένης θεωρητικῆς ὑποθέσεως.

Πέραν τῶν ἀνωτέρω, εἰς τόν εὐρύτερον κύκλον τῶν ἀντικειμένων τῆς ἐπαγωγικῆς στατιστικῆς ἀνήκουν αἱ παντός εἴδους προβλέψεις ὡς π.χ. τῆς μελλοντικῆς ἐξελίξεως ἑνός φαινομένου ἐπί τῇ βάσει τῶν δεδομένων τοῦ παρελθόντος (χρονολογικαί σειραί) ἤ τῆς ἀναμενομένης τιμῆς μιᾶς μεταβλητῆς ὑπό τήν προϋπόθεσιν συγκεκριμένης μεταβολῆς ἑτέρων μεταβλητῶν ἐκ τῶν ὁποίων αὕτη ἐξαρτᾶται (παλινδρόμησις - συσχέτισις) κ.ο.κ.

Ἡ στατιστική συμπερασματολογία ποιεῖ εὐρείαν χρῆσιν ὡρισμένων μαθηματικῶν μεθόδων ἰδιαιτέρως δέ τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων μολονότι ἡ τελευταία εἶναι καθαρῶς ἐ π α γ ω γ ι κ ή ἐπιστήμη ἐξάγουσα δηλαδή συμπεράσματα ἐκ τοῦ ὅλου (πληθυσμός κλπ.) διά τό μέρος (δεῖγμα).

Τάς μεθόδους καί τά ἀντικείμενα τῆς θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων θά πραγματευθῶμεν εἰς τόν δεύτερον τόμον, ἐνῶ ἡ Ἐπαγωγική Στατιστική θά ἀποτελέση τό ἀντικείμενον τοῦ τρίτου τόμου τοῦ παρόντος ἔργου.

# ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

## ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ

(Μελέτη Πληθυσμιακῶν Χαρακτηριστικῶν θεωρουμένων κεχωρισμένως)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

# ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΟΣ

## 2.1 Μελέτη Πληθυσμῶν ὡς πρὸς μίαν Μεταβλητὴν

Εἰς τήν διά στατιστικῶν μεθόδων μελέτην διαφόρων χαρακτηριστικῶν τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός οἱουδήποτε *συνόλου* - ἐπέχοντος διά τούς σκοπούς τοῦ παρόντος θέσιν στατιστικοῦ *πληθυσμοῦ* - ἡ κατάλληλος *κατάταξις* καί συστηματική *ὁμαδοποίησις* τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς ἑκάστοτε ὑπό μελέτην *μεταβλητῆς* (χαρακτηριστικοῦ, ἰδιότητος) ἀποτελεῖ τό πρῶτον βῆμα διά τήν συνοπτικήν παρουσίασιν τῶν δεδομένων καί βασικήν συνήθως προϋπόθεσιν διά τήν περαιτέρω στατιστικήν ἀνάλυσιν αὐτῶν. Τήν ὁμαδοποίησιν τῶν δεδομένων ὑπαγορεύει συνήθως τό *μέγα πλῆθος* τῶν ἐπί μέρους μονάδων τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ καί κατά συνέπειαν ἡ ἀδυναμία ἰδιαιτέρου χειρισμοῦ μιᾶς ἑκάστης τῶν πολυαρίθμων τιμῶν τῆς ἀντιστοίχου μεταβλητῆς. Ἐξ ἄλλου, παρά τήν *μείωσιν* - λόγῳ ὁμαδοποιήσεως - τῆς σχετικῆς *ἀκριβείας* τῶν δεδομένων καί τήν *ἀπώλειαν λεπτομερῶν πληροφοριῶν* δέον νά τονισθῆ ὅτι ἡ κατάλληλος κατάταξις καί παρουσίασις τῶν δεδομένων ἐνδείκνυται ὡς διευκολύνουσα συνήθως σημαντικῶς τήν κατανόησιν τῆς ἐν γένει συμπεριφορᾶς τῆς μεταβλητῆς, τήν μελέτην τῆς δομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ὑπό ἔρευναν χαρακτηριστικόν ὡς ἐπίσης καί τήν ἀποκάλυψιν τυχόν ὑφισταμένων συναφῶν ἰδιομορφιῶν.

Διά τήν παρουσίασιν τῶν καταλλήλως ὁμαδοποιημένων τιμῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰδικαί κατατάξεις τῶν ἐπί μέρους μονάδων τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ καλούμεναι *κατανομαί συχνότητος*.

Τάς κατανομάς συχνότητοςτῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι καλοῦνται κατηγορικαί, ποιοτικαί ἤ ποσοτικαί ἀναλόγως τῆς φύσεως τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς,ὡς καί τάς ἀντιστοίχους γραφικάς ἀπεικονίσεις αὐτῶν, πραγματευόμεθα λεπτομερῶς εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους.

Συγκεκριμένως, εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὑποθέτομεν ὅτι ἐνδιαφερόμεθα διά τήν μελέτην μιᾶς μεταβλητῆς Χ τῆς ὁποίας αἱ ἐπί μέρους τιμαί $x_1, x_2, \ldots, x_N$,ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τάς Ν μονάδας τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ, εἶναι εἴτε ἀριθμοί ἐκπεφρασμένοι εἰς συγκεκριμένας μονάδας - ἐάν ἡ μεταβλητή Χ εἶναι μία ποσοτική ἤ τοιαύτη (συνεχής ἤ ἀπαριθμητή) - εἴτε ἄλλαι συμβολικαί ἐκφράσεις εἰς τάς περιπτώσεις ποιοτικῶν καί ἰδιαιτέρως κατηγορικῶν μεταβλητῶν.

## 2.2 Κατηγορικαὶ Κατανομαὶ Συχνότητος

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὑπό μελέτην μεταβλητή Χ εἶναι μία κατηγορική τοιαύτη ὡς π.χ. τό φῦλον, ἡ φυλή, ἡ ὁμάς αἵματος, τό θρήσκευμα, ἡ οἰκογενειακή κατάστασις ἤ τό ἐπάγγελμα τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας ἤ τέλος ἡ ὕπαρξις ἤ μή ἠλεκτρισμοῦ, ὕδατος, λουτροῦ, ἀποχετεύσεως ἤ ἄλλων ἀνέσεων εἰς τάς κατοικίας μιᾶς πόλεως. Αἱ "τιμαί" μιᾶς τοιαύτης μεταβλητῆς, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τάς ἐπί μέρους μονάδας τοῦ ὑπό μελέτην πληθυσμοῦ,εἶναι συνήθως συμβολικαί ἐκφράσεις ὡς π.χ. ἄρρεν-θῆλυ διά τήν μεταβλητήν φῦλον, ἄγαμος-ἔγγαμος-χῆρος-διαζευγμένος διά τήν οἰκογενειακήν κατάστασιν, ναί-ὄχι διά τήν ὕπαρξιν ἤ μή ἠλεκτρισμοῦ, τά δέ ἀποτελέσματα τῆς συναφοῦς κατατάξεως παρουσιάζονται συνοπτικῶς διά τῶν καλουμένων κατηγορικῶν κατανομῶν συχνότητος παραδείγματα τῶν ὁποίων παρατίθενται εἰς τούς κάτωθι πίνακας (2.1 καί 2.2).

Πίναξ 2.1

Κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τήν Οἰκογενειακήν Κατάστασιν
('Απογραφή 1971)

| Οἰκογενειακή Κατάστασις | Ἀριθμός εἰς χιλιάδας | Ποσοστόν (%) |
|---|---|---|
| "Αγαμοι | 3.848 | 43,9 |
| "Εγγαμοι | 4.287 | 48,7 |
| Χῆροι | 563 | 6,4 |
| Διαζευγμ. | 71 | 1,0 |
| Σύνολον | 8.769 | 100,0 |

Πίναξ 2.2

Κατανομή τοῦ οἰκονομικῶς ἐνεργοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τόν Κλάδον Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος
('Απογραφή 1971)

| Κλάδος Δραστηριότητος | Οἰκονομικῶς 'Ενεργοί | Ποσοστόν (%) |
|---|---|---|
| Γεωργία | 1.331.000 | 40 |
| Βιομηχανία | 586.000 | 18 |
| Κατασκευαί | 255.000 | 8 |
| 'Εμπόριον | 350.000 | 11 |
| 'Υπηρεσίαι | 762.000 | 23 |
| Σύνολον | 3.284.000 | 100 |

'Η κατάρτισις τῶν ἐν λόγῳ κατανομῶν ὡς καί τῶν ἀντιστοίχων στατιστικῶν πινάκων εἶναι ἁπλουστάτη. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν αἱ ἐπί μέρους μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ κατατάσσονται ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτάς τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς διακεκριμένας ἀλλήλων *κατηγορίας* (*τάξεις*, *ὁμάδας*) καί ἐν συνεχείᾳ αἱ μονάδες ἑκάστης κατηγορίας *ἀπαριθμοῦνται*.

Οὕτω, αἱ κατηγορικαί κατανομαί συνίστανται βασικῶς ἐκ τῶν "τιμῶν" - συμβολικῶν ἐκφράσεων - τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι καλοῦνται συνήθως *κατηγορίαι* ἤ *τάξεις* καί τῶν παρατιθεμένων ἔναντι ἑκάστης ἐξ αὐτῶν ἀριθμητικῶν ἐκφράσεων αἱ ὁποῖαι ὑποδηλοῦν τήν *συχνότητα* ἐμφανίσεως τῆς ἀντιστοίχου "τιμῆς" τῆς μεταβλητῆς εἰς τόν ὑπό μελέτην πληθυσμόν ἤ ἁπλούστερον τό πλῆθος τῶν μονάδων ἑκάστης κατηγορίας καί καλοῦνται *ἀπόλυτοι συχνότητες*.

Πολλάκις, ἀντί τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων ἤ παραλλήλως πρός αὐτάς παρατίθενται ἔναντι τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς αἱ καλούμεναι σ χ ε τ ι κ α ί συχνότητες. Αὗται προκύπτουν διά τῆς ἐκφράσεως τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων ὡς ποσοστῶν - συνήθως ἐπί τοῖς % ἤ τοῖς ‰ - τῆς σ υ ν ο λ ι κ ῆ ς ἀπολύτου συχνότητος ὑποδηλοῦν δέ τό σχετικόν μέγεθος ἑκάστης κατηγορίας ἤ ἄλλως τήν κατ'ἀναλογίαν συχνότητα ἐμφανίσεως τῶν διαφόρων τιμῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς.

'Η χρῆσις τῶν ἀπολύτων ἤ τῶν σχετικῶν συχνοτήτω ὑπαγορεύεται ὑπό τοῦ ἑκάστοτε ἐπιδιωκομένου σκοποῦ 'Η ἐν γένει μελέτη τῆς δ ο μ ῆ ς ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τινα κατηγορικήν μεταβλητήν - ἡ κατανόησις δη λαδή τοῦ σχετικοῦ μεγέθους ἑκάστης κατηγορίας καί κατ συνέπειαν τῆς σημασίας αὐτῆς ἐν σχέσει πρός τάς ὑπο λοίπους, ὡς ἐπίσης γεωγραφικαί, χρονολογικαί ἤ οἱαι δήποτε ἄλλαι σ υ γ κ ρ ί σ ε ι ς ἀπαιτοῦν ἀπαραιτή τως τόν ὑπολογισμόν καί τήν χρησιμοποίησιν τῶν σχ ε τ ι κ ῶ ν συχνοτήτων.

'Αντιθέτως αἱ ἀπόλυτοι συχνότητες ἐπιτρέπουσαι σα φῆ ἀντίληψιν τῶν πραγματικῶν μεγεθῶν ὡς καί τήν ἀκρ βῆ ἐκτίμησιν τῆς σημασίας διαφόρων καταστάσεων εἶνι ἀπαραίτητοι εἰς τήν λῆψιν συγκεκριμένων ἀποφάσεων κ χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τόν π ρ ο γ ρ α μ μ τ ι σ μ ό ν τῶν ἀντιστοίχων μέτρων καί ἐνεργειῶν. Δ τόν προϋπολογισμόν π.χ. τῆς δαπάνης ἡ ὁποία ἀπαιτε ται διά τήν ἠλεκτροδότησιν τῶν στερουμένων ἠλεκτρ σμοῦ κατοικιῶν μιᾶς χώρας δέν ἀρκεῖ ἡ γνῶσις τοῦ π σοστοῦ αὐτῶν ἀλλ'ἀπαιτεῖται ὁ ἀπόλυτος ἀριθμός αὐτῶ 'Οπωσδήποτε ὅμως δέον νά λεχθῆ ὅτι εἰς τήν στατιστ κήν ἀνάλυσιν αἱ σχετικαί συχνότητες - ἀποτελοῦσαι θά ἴδωμεν ἀργότερον ἐμπειρικάς ἐκφράσεις ἤ ἄλλως ἐκτ μήσεις τῆς ἀντιστοίχου ἐννοίας τῆς π ι θ α ν ό τ τ ο ς - χρησιμοποιοῦνται πολύ εὐρύτερον τῶν ἀπολύ τοιούτων.

Εἰς τούς ἀνωτέρω πίνακας - οἱ ὁποῖοι ἐμφαίν τόν τρόπον καταρτίσεως καί παρουσιάσεως τῶν κατη ρικῶν κατανομῶν - παρατίθενται δι'εὐνοήτους λόγους σον αἱ ἀπόλυτοι ὅσον καί αἱ σχετικαί συχνότητες.

## Γραφική 'Απεικόνισις Κατηγορικῶν Κατανομῶν

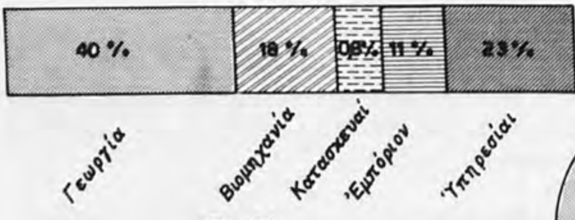
Διά τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν τῶν κατηγορικῶν κατανομῶν χρησιμοποιοῦνται συνήθως τά ἁ π λ ᾶ καί τά κ υ κ λ ι κ ά διαγράμματα.

Τά ἁ π λ ᾶ διαγράμματα εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα τά ὁποῖα ὑποδιαιροῦνται εἰς μικρότερα τοιαῦτα ἀντιστοίχως πρός τάς κατηγορίας (τάξεις) τῆς ὑπό ἀπεικόνισιν κατανομῆς. Τά κ υ κ λ ι κ ά διαγράμματα εἶναι κύκλοι ὑποδιαιρούμενοι ὁμοίως εἰς κυκλικούς τομεῖς. Αἱ συνολικαί διαστάσεις τόσον τῶν ἁπλῶν ὅσον καί τῶν κυκλικῶν διαγραμμάτων εἶναι ἐν γένει αὐθαίρετοι πάντοτε ὅμως προσηρμοσμέναι καταλλήλως εἰς τούς σκοπούς τῆς ἑκάστοτε ἀπεικονίσεως. Πρός διαφοροποίησιν τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τάς ἐπί μέρους τάξεις τῆς κατανομῆς μικροτέρων ὀρθογωνίων ἤ κυκλικῶν τομέων χρησιμοποιοῦνται συνήθως διάφορα χρώματα ἤ γραμμοσκιάσεις ἡ σημασία τῶν ὁποίων ἐπεξηγεῖται εἴτε ἐπί τοῦ διαγράμματος εἴτε εἰς σχετικόν ἐπεξηγηματικόν ὑπόμνημα.

Τόσον τά ἁπλᾶ ὅσον καί τά κυκλικά διαγράμματα ἀνήκουν εἰς τήν κατηγορίαν τῶν καλουμένων ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν διαγραμμάτων ἤτοι γραφικῶν παραστάσεων εἰς τάς ὁποίας ἡ ἀπεικόνισις τῶν διαφόρων μεγεθῶν γίνεται διά γεωμετρικῶν ἤ ἄλλων σχημάτων ἐφαρμοζομένης τῆς ἀ ρ χ ῆ ς τῆς ἀ ν α λ ο γ ί α ς, γίνεται δηλαδή ἀναλογική - ὑπό κλίμακαν - ἀπεικόνισις τῶν πραγματικῶν μεγεθῶν καί διατηρεῖται ἡ μεταξύ αὐτῶν σχέσις καί εἰς τό διάγραμμα.

Οὕτω, τόσον τά μικρά ὀρθογώνια ὅσον καί οἱ κυκλικοί τομεῖς οἱ ὁποῖοι ἀναπαριστοῦν τάς διαφόρους τάξεις τῆς κατανομῆς ἔχουν ἐμβαδά ἀνάλογα πρός τάς ἀντιστοιχούσας εἰς τάς ἐν λόγῳ τάξεις συχνότητας.

Κατωτέρω (Σχ. 2.1 καί 2.2) παραθέτομεν τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν τῆς κατανομῆς τοῦ πίνακος (2.2) τόσον δι'ἑνός ἁ π λ ο ῦ ὅσον καί δι'ἑνός κ υ κ λ ι κ ο ῦ διαγράμματος.




Σχ. 2,1


Σχ. 2,2

## 2.3 Ποιοτικαί Κατανομαί Συχνότητος

Ἐνταῦθα ὑποθέτομεν ὅτι ἡ στατιστική μελέτη ἀφορᾶ μίαν ποιοτικήν μεταβλητήν Χ ὡς π.χ. τήν γενικήν κατάστασιν τῆς ὑγείας τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας, τήν σοβαρότητα τῶν τροχαίων ἀτυχημάτων μιᾶς πόλεως, τήν κατάστασιν τῶν κτιρίων μιᾶς περιοχῆς κλπ.

Αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῶν ποιοτικῶν μεταβλητῶν ὅπως καί τῶν κατηγορικῶν τοιούτων εἶναι συνήθως συμβολικαί ἐκφράσεις ἤ συμβολικοί (κωδικοί) ἀριθμοί πέραν ὅμως τῆς κατατάξεως τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ εἰς διακεκριμένας ἀλλήλων κατηγορίας ἐπιτρέπουν καί κάποιαν ἱεράρχησιν αὐτῶν ὑπό τήν ἔννοιαν τοῦ μεγαλυτέρου, σοβαρωτέρου, χειροτέρου κ.ο.κ.

Ἡ συνοπτική παρουσίασις δεδομένων συναφῶν πρός μίαν ποιοτικήν μεταβλητήν ὡς αἱ ἀνωτέρω γίνεται συνήθως διά τῶν καλουμένων ποιοτικῶν κατανομῶν συχνότητος. Τόσον ἡ διαδικασία τῆς κατατάξεως τῶν ἐπί μέρους μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τάς διακεκριμένας ἀλλήλων κατηγορίας - "τιμάς" τῆς ποιοτικῆς μεταβλητῆς - καί ἡ ἀπαρίθμησις αὐτῶν, ὅσον καί ἡ μορφή τῶν ποιοτικῶν κατανομῶν καί τά συστατικά μέρη αὐτῶν (αἱ τάξεις τῆς μεταβλητῆς καί αἱ ἔναντι αὐτῶν ἀπόλυτοι καί σχετικαί συχνότητες) οὐδόλως διαφέρουν - πλήν τῆς ἱεραρχήσεως - τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων τῶν κατηγορικῶν κατανομῶν καί δέν θά μᾶς ἀπασχολήσουν περισσότερον.

Παρά ταῦτα δέον νά τονισθῆ ὅτι μεταξύ ποιοτικῶν καί κατηγορικῶν κατανομῶν ὑφίσταται - πέραν τῆς δυνατότητος ἱεραρχήσεως - ἡ ἑξῆς οὐσιαστική διαφορά. Ὁ καθορισμός τῶν τάξεων μιᾶς ποιοτικῆς κατανομῆς ὡς καί αἱ πληροφορίαι περί τῶν ἐπί μέρους "τιμῶν" τῆς ἀντιστοίχου μεταβλητῆς ἐνέχουν συνήθως - ἀντιθέτως πρός τάς περιπτώσεις κατηγορικῶν μεταβλητῶν - εἰς σημαντικόν βαθμόν τό στοιχεῖον τῆς ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ό τ η τ ο ς καί ὡς ἐκ τούτου τά ἐκ ποιοτικῶν κατανομῶν στοιχεῖα ἔχουν πολλάκις ἐνδεικτικόν μόνον χαρακτῆρα. Τοῦτο καθίσταται σαφέστερον ἐκ τῶν παρατιθεμένων κατωτέρω παραδειγμάτων.

Πίναξ 2.3

Γενική κατάστασις ὑγείας (κατά δήλωσιν) δείγματος 6.800 κατοίκων τῆς Καλιφορνίας (1966)

| Ὑγεία | Ἀριθμός | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| Ἀρίστη | 1.702 | 25 |
| Καλή | 3.803 | 56 |
| Μετρία | 1.087 | 16 |
| Κακή | 208 | 3 |
| Σύνολον | 6.800 | 100 |

Πίναξ 2.4

Τροχαῖα ἀτυχήματα περιοχῆς Πρωτευούσης κατά βαθμόν σοβαρότητος (1970)

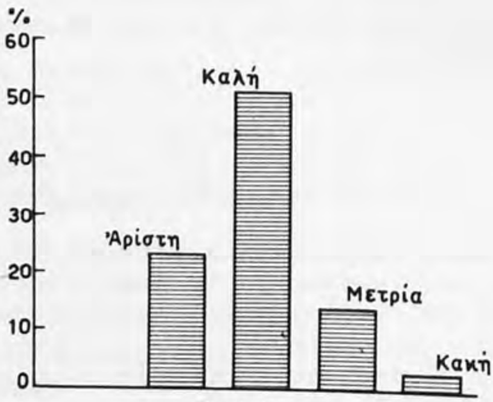
| Ἀτυχήματα | Ἀριθμός | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| Θανατηφόρα | 269 | 2,1 |
| Βαρέα | 1.278 | 9,9 |
| Ἐλαφρά | 11.360 | 88,0 |
| Σύνολον | 12.907 | 100,0 |

Πηγή: ΕΣΥΕ, Στατιστική Ἐπετηρίς 1971

**Γραφική Ἀπεικόνισις Ποιοτικῶν Κατανομῶν**

Μία ἄλλη μορφή γραφικῆς παραστάσεως ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται πολλάκις διά τήν ἀπεικόνισιν τῶν ποιοτικῶν κατανομῶν - πέραν τῶν ἁπλῶν καί κυκλικῶν διαγραμμάτων - εἶναι τά καλούμενα ἀ κ ι δ ω τ ά διαγράμματα. Ταῦτα ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τήν κατηγορίαν τῶν ἀριθμητικῶν διαγραμμάτων συνίστανται δέ ἐξ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων - τόσων ὅσαι καί αἱ τάξεις τῆς κατανομῆς - μέ ἴσας συνήθως βάσεις καί ὕψη ἀνάλογα τῶν συχνοτήτων (ἀπολύτων ἤ σχετικῶν) τῶν ἀντιστοίχων τάξεων.

Ἡ γραφική ἀπεικόνισις τῆς κατανομῆς τοῦ πίνακος (2.3) δι'ἑνός ἀκιδωτοῦ διαγράμματος δίδεται κατωτέρω (Σχ. 2.3).




Σχ. 2,3

## 2.4 Ποσοτικαὶ Κατανομαὶ Συχνότητος

Π ο σ ο τ ι κ α ί ἤ ἄλλως Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ α ί κατανομαί συχνότητος καλοῦνται αἱ συστηματικαί κατατάξεις τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ εἰς διακεκριμένας ἀλλήλων κ α τ η γ ο ρ ί α ς (τ ά ξ ε ι ς) ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν μιᾶς π ο σ ο τ ι κ ῆ ς μεταβλητῆς ὡς π.χ. τό μέγεθος (ἀριθμός δωματίων) τῶν κατοικιῶν μιᾶς πόλεως, τό ἀνάστημα τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας, τό εἰσόδημα νοικοκυριῶν κ.ο.κ.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ποσοτικαί λέγονται αἱ μεταβληταί αἱ ὁποῖαι ἐπιδέχονται μέτρησιν - ὑπό τήν στενήν ἔννοιαν τῆς λέξεως - αἱ δέ τιμαί αὐτῶν ἐκφράζονται δι'ἀριθμῶν καί δή εἰς συγκεκριμένας μονάδας μετρήσεως. Οὕτω ἡ πληροφόρησις τήν ὁποίαν ἔχομεν ἐν προκειμένῳ, πέραν τῆς κατατάξεως εἰς διακεκριμένας κατηγορίας καί τῆς ἱεραρχήσεως τῶν μονάδων τοῦ ὑπό μελέτην πληθυσμοῦ, ἐπιτρέπει ἀκόμη τήν γνῶσιν τῆς ἀκριβοῦς διαφορᾶς (ἀποστάσεως) μεταξύ αὐτῶν ἐκπεφρασμένην εἰς τάς συγκεκριμένας μονάδας μετρήσεως. Ἐκ τῶν ἀναστημάτων π.χ. δύο ἀτόμων γνωρίζομεν - πέραν τῶν ἄλλων - πόσα ἀκριβῶς ἑκατοστά εἶναι ὑψηλότερον τό ἕν ἄτομον ἀπό τό ἄλλον, ἐνῶ δεδομένου ὅτι ἕν ἄτομον ἔχει ὑγείαν καλήν καί ἕν ἄλλο μετρίαν δέν ἔχομεν πληροφόρησιν ἀναφορικῶς πρός τό πόσον ἀκριβῶς καλλιτέρα εἶναι ἡ ὑγεία τοῦ πρώτου ἀπό ἐκείνην τοῦ δευτέρου.

Αἱ ποσοτικαί κατανομαί διακρίνονται εἰς ἀσυνεχεῖς ἤ ἀπαριθμητάς καί συνεχεῖς τοιαύτας ἀναλόγως τῆς φύσεως τῆς ποσοτικῆς μεταβλητῆς εἰς τήν ὁποίαν ἀναφέρονται. Ὡς γνωστόν, αἱ ποσοτικαί μεταβληταί, καλοῦνται ἀσυνεχεῖς ἤ ἀπαριθμηταί ἐάν δύνανται νά λάβουν πεπερασμένον μόνον πλῆθος τιμῶν ἤ ἄπειρον ἀλλ' ἀριθμήσιμον τοιοῦτον καί συνεχεῖς, ἐάν ἔστω καί θεωρητικῶς δύνανται νά λάβουν οἱανδήποτε τιμήν εἰς τό διάστημα μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν (α, β).

Ἡ μορφολογία καί τά συστατικά μέρη τῶν ποσοτικῶν κατανομῶν οὐδόλως διαφέρουν ἐκείνων τῶν κατηγορικῶν καί ποιοτικῶν τοιούτων. Οὕτω, αἱ τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς καταλλήλως ὁμαδοποιημέναι ἀποτελοῦν καί ἐν προκειμένῳ τάς διαφόρους κατηγορίας καλουμένας συνήθως τάξεις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ἔναντι δέ αὐτῶν παρατίθενται ἐπίσης αἱ ἀπόλυτοι συχνότητες καί αἱ ἐξ αὐτῶν ὑπολογιζόμεναι σχετικαί τοιαῦται ὑποδηλοῦσαι ἀντιστοίχως τόν ἀριθμόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ ὁποῖαι ἐμπίπτουν εἰς ἑκάστην τάξιν καί τήν ἀναλογικήν συχνότητα ἐμφανίσεως εἰς τόν πληθυσμόν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι ὁμαδοποιήθησαν εἰς τήν ἀντίστοιχον τάξιν.

Ἡ μορφολογία καί τά συστατικά μέρη μιᾶς ἀσυνεχοῦς ποσοτικῆς κατανομῆς φαίνονται κατωτέρω εἰς τόν πίνακα (2.5), ἐνῶ εἰς τούς πίνακας (2.6) καί (2.7) παρατίθενται ἀντιστοίχως δύο συνεχεῖς κατανομαί.

Πίναξ 2.5

Κατανομή 1.207 κατοικιῶν τῆς Πρωτευούσης ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν δωματίων τῶν (Δειγματοληπτική Ἔρευνα ἔτους 1958)

| Δωμάτια | Ἀριθμός κατοικιῶν | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| 1 | 242 | 20,1 |
| 2 | 396 | 32,8 |
| 3 | 287 | 23,8 |
| 4 | 166 | 13,7 |
| 5 | 68 | 5,6 |
| 6 | 30 | 2,5 |
| 7 | 18 | 1,5 |
| Σύνολον | 1.207 | 100,0 |

Πηγή: ΕΣΥΕ, "Ερευνα Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν 1958

Παρά τήν ὑφισταμένην ὁμοιομορφίαν εἰς τήν παρουσίασιν τῶν διαφόρων κατανομῶν συχνότητος, ἡ διαδικασία καταρτίσεως τῶν ποσοτικῶν κατανομῶν - ἰδιαιτέρως τῶν συνεχῶν - εἶναι οὐσιωδῶς διάφορος τῆς ἐφαρμοζομένης εἰς τάς κατηγορικάς καί ποιοτικάς τοιαύτας. Συγκεκριμένως, ἡ διαφορά ἔγκειται εἰς τόν τ ρ ό π ο ν ὁ μ α δ ο π ο ι ή σ ε ω ς τῶν τιμῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς πρός καθορισμόν τῶν ἀντιστοίχων κατηγοριῶν ἤ τάξεων.

Πίναξ 2.6

Κατανομή δείγματος 6.297 ένηλίκων άνδρῶν ὡς πρός τό ἀνάστημά των

| Ἀνάστημα εἰς ἑκ. | Ἀριθμός ἀτόμων | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| 140 - 145 | 4 | 0,1 |
| 145 - 150 | 9 | 0,2 |
| 150 - 155 | 60 | 1,0 |
| 155 - 160 | 357 | 5,7 |
| 160 - 165 | 1.092 | 17,3 |
| 165 - 170 | 1.802 | 28,6 |
| 170 - 175 | 1.696 | 26,9 |
| 175 - 180 | 925 | 14,6 |
| 180 - 185 | 272 | 4,3 |
| 185 - 190 | 69 | 1,1 |
| 190 - 195 | 11 | 0,2 |
| Σύνολον | 6.297 | 100,0 |

Πηγή: ΕΛΚΕΠΑ, Σωματομετρική ἔρευνα 1972

Πίναξ 2.7

Κατανομή φορολογουμένων ὡς πρός τό δηλωθέν εἰσόδημα ἐξ οἰκοδομῶν ἔτους 1971

| Εἰσόδημα εἰς χιλ.δρχ. | Ἀριθμός φορολογουμένων | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| Μέχρι καί 2 | 10.993 | 4,9 |
| 2- 4 | 19.171 | 8,5 |
| 4- 10 | 58.762 | 26,1 |
| 10- 20 | 55.023 | 24,4 |
| 20- 40 | 41.863 | 18,5 |
| 40- 80 | 23.806 | 10,6 |
| 80- 150 | 9.512 | 4,2 |
| 150- 400 | 5.258 | 2,3 |
| 400-1.000 | 975 | 0,4 |
| ἄνω τῶν 1.000 | 146 | 0,1 |
| Σύνολον | 225.509 | 100,0 |

Πηγή: ΕΣΥΕ, Στατιστική τοῦ Δηλωθέντος Εἰσ.Φυσ.Προσ.1972

Εἰς τάς κατηγορικάς καί ποιοτικάς κατανομάς αἱ ἐπί μέρους τιμαί - συμβολικαί ἐκφράσεις - τῆς μεταβλητῆς ἀποτελοῦν κατά κανόνα καί τάς ἀντιστοίχους διακεκριμένας κατηγορίας ἤ τάξεις. Εἰς αὐτάς κατατάσσονται αἱ μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ καί ἐν συνεχείᾳ ἀπαριθμοῦνται προκειμένου νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀπόλυτοι καί ἐξ αὐτῶν αἱ σχετικαί συχνότητες ἑκάστης τάξεως. Εἰς ἐξαιρετικάς μόνον περιπτώσεις - κυρίως ὅταν αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς εἶναι πολυάριθμοι ἤ μερικαί ἐξ αὐτῶν σπάνιαι, μικρᾶς δηλαδή συχνότητος - δύο ἤ περισσότεραι τιμαί τῆς μεταβλητῆς ὁμαδοποιοῦνται καί ἀποτελοῦν μίαν κατηγορίαν.

Ἡ ἰδία περίπου διαδικασία δηλαδή τοῦ αὐτομάτου κατά κάποιον τρόπον καθορισμοῦ τῶν κατηγοριῶν ἤ τάξεων τῆς κατανομῆς ἐφαρμόζεται συνήθως καί εἰς τάς περιπτώσεις ἀσυνεχῶν ποσοτικῶν κατανομῶν. Αἱ πεπερασμέναι συνήθως τῷ πλῆθος τιμαί τῆς μεταβλητῆς ὑπαγορεύουν τόν τρόπον ὁμαδοποιήσεως τῶν δεδομένων καί καθιστοῦν σχεδόν δεδομένας τάς ἀντιστοίχους τάξεις τῆς κατανομῆς ὅπως ἀκριβῶς καί εἰς τάς περιπτώσεις τῶν κατηγορικῶν καί ποιοτικῶν μεταβλητῶν (ἴδε πίνακα 2.5).

Ἀντιθέτως εἰς τάς περιπτώσεις σ υ ν ε χ ῶ ν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν ἤ καλλίτερον δύνανται νά λάβουν οἱανδήποτε τιμήν εἰς ἕν διάστημα μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν (α,β), αἱ τάξεις τῆς κατανομῆς δέν προσδιορίζονται αὐτομάτως καί ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων. Αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῆς μεταβλητῆς, ἀποτελοῦσαι μή ἀριθμήσιμον σύνολον, εἶναι ἀδύνατον - ἔστω καί θεωρητικῶς - νά ἀποτελέσουν χωριστάς τάξεις. Οὕτω, ἡ κατάλληλος ὁμαδοποίησις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς πρός καθορισμόν τῶν τάξεων τῆς κατανομῆς εἶναι ἐν προκειμένῳ ἐπιβεβλημένη.

Κατά π ο ῖ ο ν τ ρ ό π ο ν πρέπει νά γίνῃ ἡ ἐν λόγῳ ὁμαδοποίησις καί εἰς π ό σ α ς τ ά ξ ε ι ς ; Λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς μεταβλήτῆς εἶναι προφανές ὅτι ἡ ὁμαδοποίησις τῶν τιμῶν της δύναται νά γίνῃ κατ'ἀ π ε ί ρ ο υ ς τρόπους καί εἰς ο ἱ ο ν δ ή π ο τ ε ἀ ρ ι θ μ ό ν τάξεων. Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ ἀπάντησις εἰς τά ἐν λόγῳ ἐρωτήματα ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς καί τῶν τυχόν ἰδιαιτέρων ἀντικειμενικῶν σκοπῶν τῆς ὑπό κατάρτισιν κατανομῆς. Δύο *βασικά κριτήρια* τά ὁποῖα λαμβάνονται συνήθως ὑπ'ὄψιν εἰς τόν τρόπον ὁμαδοποιήσεως τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καί τόν καθορισμόν τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τῶν τάξεων μιᾶς συνεχοῦς κατανομῆς εἶναι τά κριτήρια τῆς *ὁμοιογενείας* τῶν δεδομένων καί τῆς *ἁπλότητος* ἤ ἄλλως τῆς *συνοπτικότητος* τῆς ἐμφανίσεως αὐτῶν.

Μέ κριτήριον τήν *ὁμοιογένειαν* τήν ὁποίαν πρέπει νά παρουσιάζουν αἱ μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ αἱ ὁποῖαι κατατάσσονται εἰς τήν αὐτήν τάξιν, ὁδηγούμεθα προφανῶς εἰς ὁμαδοποίησιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχοῦσαν εἰς *ὑποδιαίρεσιν* τοῦ διαστήματος (α, β) - καλουμένου *συνολικοῦ εὔρους μεταβολῆς* τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - εἰς *πολλά* καί *μικροῦ πλάτους* ὑποδιαστήματα.

Ἀντιθέτως μέ κριτήριον τήν *ἁπλότητα* καί *συνοπτικότητα* τῆς ἐμφανίσεως τῶν δεδομένων, δέον νά προτιμηθῆ ἡ ὑποδιαίρεσις τοῦ συνολικοῦ εὔρους (α, β) εἰς *ὀλίγα* καί κατά συνέπειαν *μεγαλυτέρου πλάτους* ὑποδιαστήματα.

Θεωρητική λύσις εἰς τό πρόβλημα τῆς ἀρίστης ὑποδιαιρέσεως τοῦ διαστήματος (α, β) - τοῦ συνολικοῦ εὔρους μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς - εἰς τάξεις δέν ὑφίσταται. Ὡρισμένοι ἐμπειρικοί τύποι πρός καθορισμόν τοῦ πλάτους τῶν τάξεων καί κατ'ἐπέκτασιν καί τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν ἔχουν ἐφαρμογήν εἰς ὡρισμένας ἐντελῶς ἐξειδικευμένας περιπτώσεις καί κατά συνέπειαν ἡ χρησιμότης αὐτῶν - ἐάν ὑφίσταται - εἶναι λίαν περιωρισμένη.

Εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων - ὑποδιαστημάτων τοῦ συνολικοῦ εὔρους (α, β) - καθορίζεται κατά κανόνα ἐμπειρικῶς ἐπί τῇ βάσει τῶν ὡς ἄνω κριτηρίων, ἐνδεικτικῶς δέ ἀναφέρεται ὅτι ποικίλλει συνήθως μεταξύ 5 καί 20 ἀναλόγως τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ.

Οὕτω, ἐάν πρωτίστως ἐνδιαφέρει ἡ ἁ π λ ό τ η ς τῆς κατανομῆς - προοριζομένης π.χ. νά παράσχη γενικάς μόνον ἐντυπώσεις περί τῆς ἀντιστοίχου δομῆς τοῦ πληθυσμοῦ - ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων εἶναι μικρός. Ἀντιθέτως, ἐάν τά στοιχεῖα προορίζονται διά λεπτομερεστέραν ἀνάλυσιν καί προέχει ἡ ὁ μ ο ι ο γ έ ν ε ι α καί ἀ κ ρ ί β ε ι α αὐτῶν ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων εἶναι σημαντικῶς μεγαλύτερος.

Κατά τήν ὁμαδοποίησιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς πέραν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τάξεων πρέπει νά καθορισθῆ καί τό π λ ά τ ο ς αὐτῶν. Θά εἶναι δηλαδή ὅλαι αἱ τάξεις τοῦ αὐτοῦ πλάτους ἤ τό πλάτος αὐτῶν θά ποικίλλη ἐν συνδυασμῷ πρός τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς; Ἡ ὑποδιαίρεσις εἰς τάξεις τοῦ αὐτοῦ πλάτους ἐφαρμόζεται κατά κανόνα εἰς τάς περιπτώσεις μεταβλητῶν τῶν ὁποίων τό συνολικόν εὗρος μεταβολῆς (α, β) εἶναι σχετικῶς μικρόν ἤ τουλάχιστον π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν (ἴδε πίνακα 2.6).

Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ χρῆσις τῶν κατανομῶν ἴ σ ο υ π λ ά τ ο υ ς εἶναι εὐρυτάτη δεδομένου ὅτι δι'αὐτῶν διευκολύνεται σημαντικά ἡ περαιτέρω ἀνάλυσις τῶν δεδομένων.

Ἀντιθέτως, ἐάν τό συνολικόν εὗρος (α, β) εἶναι ἄ π ε ι ρ ο ν ἤ σχετικῶς μεγάλον καθίσταται ἀναγκαῖον τό πλάτος τῶν τάξεων νά ποικίλλη - διευρυνόμενον συνήθως μετά τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς - διότι ἄλλως εἶναι ἀδύνατον νά ἔχωμεν ἀφ'ἑνός ὀλιγαρίθμους τάξεις καί ἀφ'ἑτέρου ὁμοιογενεῖς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μονάδας εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν (ἴδε πίνακα 2.7). Αἱ κατανομαί ἀ ν ί σ ο υ π λ ά τ ο υ ς χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς ἐξειδικευμένας περιπτώσεις ὅπου τοῦτο καθίσταται ἀναγκαῖον (κατανομαί εἰσοδημάτων, δαπανῶν, ἡμερῶν ἀνεργίας, νοσηλείας κλπ).

Προκειμένου νά περιγράψωμεν λεπτομερέστερον τήν πρακτικήν τῆς καταρτίσεως τῶν διαφόρων κατανομῶν συχνότητος, παραθέτομεν κατωτέρω ἕν συγκεκριμένον παράδειγμα ἀναφερόμενον εἰς τά ὡριαίας ταχύτητας μέ τάς ὁποίας 200 - τυχαίως ἐπιλεγέντα - αὐτοκίνητα διῆλθον ἐξ ἑνός σημείου ἐλέγχου ταχυτήτων τῆς πόλεως τῶν Ἀθηνῶν.

Τά συλλεγέντα πρωτογενῆ στοιχεῖα ἔχουν ὡς ἑξῆς:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 58 | 63 | 65 | 61 | 72 | 55 | 60 | 66 | 59 | 65 |
| 53 | 64 | 62 | 63 | 53 | $\boxed{83}$ | 74 | 68 | 64 | 65 |
| 57 | 78 | 58 | 65 | 59 | 63 | 56 | 61 | 60 | 68 |
| 70 | 51 | 56 | 65 | 57 | 67 | 63 | 52 | 64 | 65 |
| 67 | 71 | 43 | 47 | 59 | 67 | 60 | 69 | 48 | 66 |
| 59 | 58 | 65 | 60 | 67 | 63 | 54 | 67 | 74 | 60 |
| 65 | 66 | 62 | 68 | 76 | 62 | 66 | 62 | 60 | 66 |
| 56 | 64 | 64 | 62 | 63 | 54 | 66 | 63 | 62 | 77 |
| 73 | 63 | 55 | 61 | 70 | 72 | 54 | 69 | 57 | 59 |
| 69 | 61 | 48 | 58 | 64 | 69 | 63 | 56 | 61 | 71 |
| 59 | 64 | 62 | 59 | 57 | 64 | 55 | 68 | 71 | 64 |
| 66 | 63 | 59 | 64 | 67 | 58 | 65 | 67 | 57 | 69 |
| 64 | 68 | 53 | 65 | 62 | 56 | 63 | 73 | 63 | 52 |
| 62 | 65 | 56 | 70 | 66 | 60 | 61 | 67 | 63 | 68 |
| 64 | 58 | 55 | 66 | 72 | 57 | 63 | 56 | 68 | 54 |
| $\boxed{40}$ | 79 | 57 | 60 | 67 | 61 | 71 | 66 | 63 | 60 |
| 57 | 45 | 56 | 66 | 57 | 63 | 58 | 71 | 64 | 58 |
| 57 | 62 | 61 | 52 | 61 | 65 | 63 | 75 | 65 | 63 |
| 54 | 66 | 75 | 63 | 69 | 64 | 62 | 66 | 70 | 55 |
| 67 | 61 | 65 | 68 | 50 | 65 | 70 | 59 | 64 | 62 |

Ἡ ἀπαιτουμένη διαδικασία διά τήν κατάρτισιν τῆς ἀντιστοίχου συνεχοῦς κατανομῆς συνίσταται εἰς τά ἑξῆς:

(α) Εὑρίσκομεν τήν μεγίστην (M=83) καί τήν ἐλαχίστην (m=40) ἐκ τῶν παρατηρηθεισῶν τιμῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς καί ἐξ αὐτῶν τό εὖρος μεταβολῆς αὐτῆς, R=M-m=83-40=43.

(β) Δεδομένου ὅτι τό εὖρος R εἶναι πεπερασμένον καί σχετικῶς μικρόν, εἶναι προφανές ὅτι ὀκτώ ἕως δέκα ἴσου πλάτους τάξεις ἱκανοποιοῦν ἐπαρκῶς τόσον τό κριτήριον τῆς ἁ π λ ό τ η τ ο ς ὅσον καί τῆς ὁ μ ο ι ο γ ε ν ε ί α ς. Ἐξυπακούεται ὅτι ἀναλόγως τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ αἱ τάξεις εἶναι δυνατόν νά γίνουν μόνον πέντε ἤ δέκα πέντε. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀπεφασίσθη νά ὑποδιαιρέσωμεν τό ὡς ἄνω συνολικόν εὖρος εἰς ἐννέα ἴσου πλάτους τάξεις. Διά λόγους ἁπλότητος ὅσον καί καλαισθησίας τῆς ἐμφανίσεως τῶν δεδομένων τό πλάτος τῶν τάξεων λαμβάνεται εἰς τήν πρᾶξιν κατά προσέγγισιν ἴσον πρός 5 καί ὄχι ἀκριβῶς ἴσον πρός τό πηλίκον 43:9. Διά τούς ἰδίους λόγους τά ὅρια μεταβολῆς τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς στρογγυλοποιοῦνται καί καθορίζονται αἱ τάξεις αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνονται εἰς τόν κατωτέρω βοηθητικόν πίνακα.

(γ) Μετά τόν καθορισμόν τῶν τάξεων καί μάλιστα κατά τρόπον ὥστε ἑκάστη τῶν παρατηρήσεων νά ἀνήκη εἰς μ ί α ν καί μ ό ν ο ν μ ί α ν τάξιν - ὑποδιαίρεσιν δηλαδή τοῦ συνολικοῦ εὔρους εἰς τάξεις ἄνευ ἐ π ι κ α λ ύ ψ ε ω ν ἤ κ ε ν ῶ ν - ἀκολουθεῖ ἡ καταμέτρησις καί καταγραφή τῶν μονάδων αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς ἑκάστην τάξιν καί τέλος ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων κατά τήν διαδικασίαν ἡ ὁποία ἐπίσης παρατίθεται εἰς τόν βοηθητικόν πίνακα.

Βοηθητικός Πίναξ

| Ταχύτης (χλμ.) | Καταμέτρησις | Ἀριθμός Αὐτοκινήτων |
|---|---|---|
| 40,01 - 45 | | 2 |
| 45,01 - 50 | | 4 |
| 50,01 - 55 | | 13 |
| 55,01 - 60 | | 40 |
| 60,01 - 65 | | 65 |
| 65,01 - 70 | | 52 |
| 70,01 - 75 | | 18 |
| 75,01 - 80 | | 5 |
| 80,01 - 85 | | 1 |
| Σύνολον | | 200 |

Μετά τό πέρας τῆς ὡς ἄνω διαδικασίας τά δεδομένα παρουσιάζονται συνήθως εἰς πίνακας (ὡς ὁ κατωτέρω πίναξ 2.8) ὑπό τήν γνωστήν μορφήν τῶν κατανομῶν συχνότητος.

Πίναξ 2.8

Κατανομή 200 αὐτοκινήτων ὡς πρός τήν ταχύτηταν διελεύσεως αὐτῶν ἔκ τινος σημείου ἐλέγχου

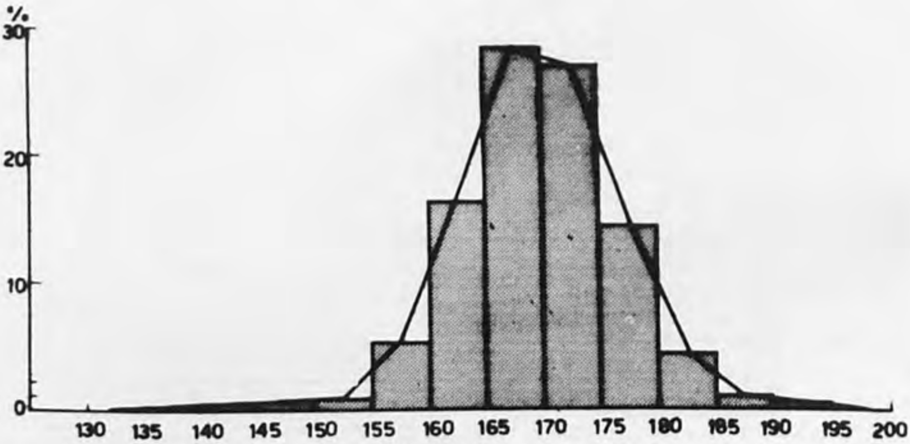
| Ταχύτης (χλμ.) | 'Αριθμός Αὐτοκινήτων | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| 40 - 45 | 2 | 1,0 |
| 45 - 50 | 4 | 2,0 |
| 50 - 55 | 13 | 6,5 |
| 55 - 60 | 40 | 20,0 |
| 60 - 65 | 65 | 32,5 |
| 65 - 70 | 52 | 26,0 |
| 70 - 75 | 18 | 9,0 |
| 75 - 80 | 5 | 2,5 |
| 80 - 85 | 1 | 0,5 |
| Σύνολον | 200 | 100,0 |

Σημείωσις: Τά πρῶτα (ἐλάσσονα) ὅρια τῶν τάξεων δέν περιλαμβάνονται εἰς αὐτάς.

## Γραφική 'Απεικόνισις Ποσοτικῶν Κατανομῶν

Διά τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν τῶν ποσοτικῶν κατανομῶν χρησιμοποιοῦνται κατά κανόνα δύο εἴδη εἰδικῶν διαγραμμάτων καλούμενα ἱ σ τ ό γ ρ α μ μ ο ν καί π ο λ ύ γ ω ν ο ν σ υ χ ν ό τ η τ ο ς. 'Αμφότερα ἀνήκουν εἰς τήν κατηγορίαν τῶν ἀριθμητικῶν διαγραμμάτων δηλαδή ἐφαρμόζεται διά τήν κατασκευήν των ἡ ἀρχή τῆς ἀ ν α λ ο γ ί α ς καί κατά τήν χάραξιν αὐτῶν διατηροῦνται αἱ μεταξύ τῶν πρός ἀπεικόνισιν μεγεθῶν ὑφιστάμεναι σχέσεις. Εἰς ὅλως ἐξειδικευμένας περιπτώσεις - κυρίως πρός ἀπεικόνισιν πολύ μικρῶν καί μεγάλων μεγεθῶν ἀπό κοινοῦ - χρησιμοποιοῦνται τά καλούμενα λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ά διαγράμματα εἰς τά ὁποῖα ἀντί τῶν πραγματικῶν μεγεθῶν ἀπεικονίζονται οἱ λ ο γ ά ρ ι θ μ ο ι α ὐ τ ῶ ν. Ταῦτα θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἐκτενέστερον εἰς τό κεφάλαιον περί χρονολογικῶν σειρῶν.

Παραθέτομεν κατωτέρω (Σχ. 2.4) τό ἱστόγραμμον καί τό πολύγωνον συχνότητος τῆς συνεχοῦς καί ἴσου πλάτους κατανομῆς τῶν ἀναστημάτων (Πίναξ 2.6).



Σχ. 2.4

Ἡ χάραξις τοῦ ἱστογράμμου γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἐπί τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος - ἄξονος τῶν τετμημένων - ὅπου συνήθως μετρᾶται καί ἀπεικονίζεται ἡ ὑπό μελέτην μεταβλητή Χ καί ἐν προκειμένῳ τό ἀνάστημα, λαμβάνομεν διαδοχικῶς ἴσα τμήματα ἀναπαριστῶντα τάς ἴσου πλάτους τάξεις τῆς κατανομῆς. Τό μῆκος τῶν ἐν λόγῳ τμημάτων ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς χρησιμοποιουμένης κλίμακος εἶναι αὐθαίρετον καί καθορίζεται ἀποκλειστικῶς ἐκ τοῦ σκοποῦ καί τοῦ χώρου διά τόν ὁποῖον προορίζεται τό διάγραμμα. Ἐν συνεχείᾳ ἐφ'ἑκάστου τῶν ἐν λόγῳ τμημάτων ὑψοῦται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον - ἱ σ τ ό ς, ἐξ οὗ καί ἡ ὀνομασία ἱ σ τ ό γ ρ α μ μ ο ν-ἐμβαδοῦ ἴσου πρός τήν ἀντίστοιχον συχνότητα (συνήθως τήν σ χ ε τ ι κ ή ν).

Δεδομένου ὅτι αἱ βάσεις τῶν ἐν λόγῳ ἱστῶν εἶναι ἴσαι, τά ἐμβαδά αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ὑψῶν των καί κατά συνέπειαν εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν - τῶν κατανομῶν ἴσου πλάτους - δυνάμεθα νά κατασκευάζομεν ἱστούς μέ ὕψη ἴσα, ὑπό κλίμακα φυσικά, πρός τάς ἀντιστοίχους συχνότητας. Ἡ χρησιμοποιουμένη κλίμαξ εἰς τόν κατακόρυφον ἄξονα εἶναι αὐθαίρετος. Παρά ταῦτα κατά τήν ἐπιλογήν τῆς ἐν λόγῳ κλίμακος ἀπαιτεῖται κάποια προσοχή καί ἐναρμονισμός αὐτῆς πρός τήν κλίμακα τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος καθαρῶς διά λόγους καλαισθησίας καί πρός ἀποφυγήν ἐσφαλμένων ἐντυπώσεων ὀφειλομένων εἴτε εἰς *φαινομενικήν ἐξομάλυνσιν* τῶν *διαφορῶν* εἴτε ἀντιθέτως εἰς *ὑπερβολικήν προβολήν* των.

Διά τήν χάραξιν τοῦ πολυγώνου συχνότητος, εἰς τό μέσον ἑκάστης τῶν βάσεων τῶν ὡς ἄνω ἱστῶν ὑψοῦται κάθετος μήκους ἴσου πρός τήν συχνότητα τῆς ἀντιστοίχου τάξεως ἐν συνεχείᾳ δέ τά ἄκρα τῶν ἐν λόγῳ καθέτων ἑνοῦνται διαδοχικῶς δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἡ προκύπτουσα τεθλασμένη γραμμή ἀπεικονίζει τήν κατανομήν καί λέγεται *πολύγωνον συχνότητος*. Συνήθως τά ἄκρα τῆς ἐν λόγῳ τεθλασμένης γραμμῆς ἑνοῦνται μέ τά μέσα τῶν δύο γειτονικῶν τμημάτων - τοῦ προηγουμένου τῆς πρώτης τάξεως καί τοῦ ἑπομένου τῆς τελευταίας - παριστώντων *οἱονεί* τάξεις, προκύπτοντος οὕτω τοῦ *κλειστοῦ* πολυγώνου συχνότητος.

Εἶναι προφανές ὅτι τόσον τό *συνολικόν ἐμβαδόν* τοῦ *ἱστογράμμου* ὅσον καί τό ὑπό τό *κλειστόν πολύγωνον συχνότητος* τοιοῦτον - ἴσα μεταξύ των ἐκ κατασκευῆς - ἀπεικονίζουν τήν συνολικήν σχετικήν ἤ ἀπόλυτον συχνότητα τῆς κατανομῆς. Οὕτω τό ἐν λόγῳ συνολικόν ἐμβαδόν - εἰς τήν περίπτωσιν ἀπεικονίσεως τῶν σχετικῶν συχνοτήτων - ἰσοῦται πάντα πρός 100% ἤ παριστᾶ τήν μονάδα ἐάν αἱ σχετικαί συχνότητες ἔχουν ἐκφρασθῆ ἁπλῶς ὡς κλάσματα τῆς συνολικῆς καί οὐχί ὡς ποσοστά (%).

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἐάν τό πλάτος ἑκάστης τάξεως ἐλαττωθῆ σημαντικά καί ἀντιστοίχως αὐξηθῆ ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων ἡ πολυγωνική γραμμή συχνότητος καθίσταται π λ έ ο ν ὁ μ α λ ή. Ἡ διαδικασία αὐτή - τῆς συνεχοῦς δηλαδή μειώσεως τοῦ πλάτους ἑκάστης τάξεως καί αὐξήσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τάξεων - ὁδηγεῖ ὁριακῶς εἰς ἀντικατάστασιν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὑπό μιᾶς ὁμαλῆς καμπύλης καλουμένης κ α μ π ύ λ η ς σ υ χ ν ό τ η τ ο ς.

Προφανῶς, τό ὑπό τήν καμπύλην συχνότητος ἐμβαδόν εἶναι ἐπίσης ἴσον πρός τήν συνολικήν συχνότητα τῆς κατανομῆς καί προκειμένου περί σχετικῶν συχνοτήτων ἰσοῦται πρός τήν μονάδα (ἤ ἄλλως ποσοστόν 100%).

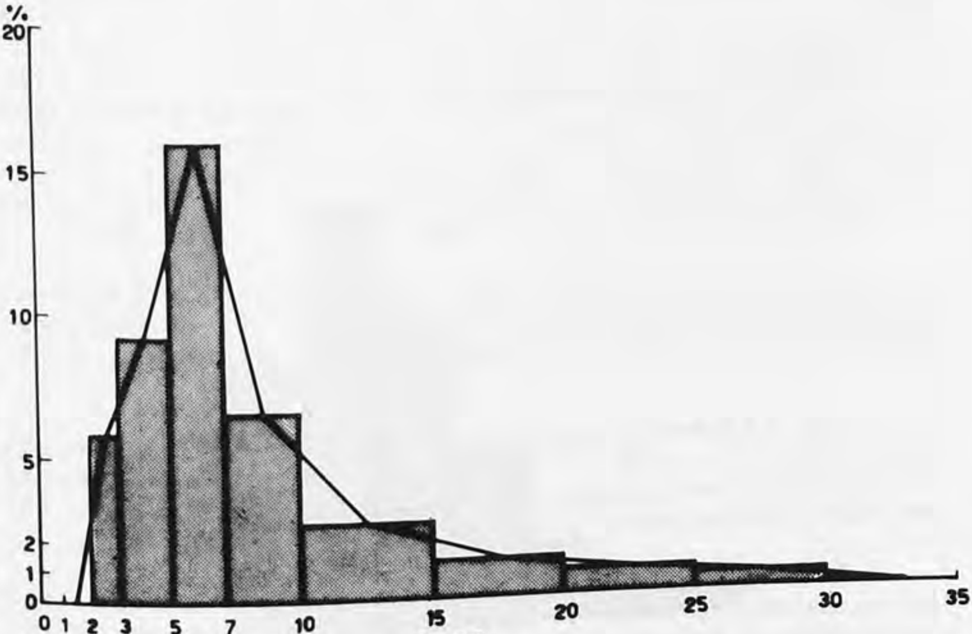
Μετά τάς ἀνωτέρω λεπτομερεῖς ἐπεξηγήσεις τοῦ τρόπου κατασκευῆς καί τῆς μορφῆς τοῦ ἱστογράμμου καί τοῦ πολυγώνου (ἤ καμπύλης) συχνότητος μιᾶς συνεχοῦς κατανομῆς ἴσου πλάτους, παραθέτομεν κατωτέρω (Σχ. 2.5) συνοπτικῶς τά τῆς κατασκευῆς τοῦ ἱστογράμμου καί τοῦ πολυγώνου συχνότητος τῆς συνεχοῦς κατανομῆς ἀ ν ί σ ο υ πλάτους τοῦ κατωτέρω πίνακος (2.9).

Πίναξ 2.9

Κατανομή τῶν ὑπαλλήλων μιᾶς ἐπιχειρήσεως ὡς πρός τόν μηνιαῖον μισθόν των

| Μηνιαῖος μισθός εἰς δραχμάς | Ἀριθμός ὑπαλλήλων | Ποσοστόν % |
|---|---|---|
| 2.000 - 3.000 | 72 | 6 |
| 3.000 - 5.000 | 216 | 18 |
| 5.000 - 7.000 | 384 | 32 |
| 7.000 - 10.000 | 252 | 21 |
| 10.000 - 15.000 | 180 | 15 |
| 15.000 - 20.000 | 72 | 6 |
| 20.000 - 24.000 | 24 | 2 |
| Σύνολον | 1.200 | 100 |

Σημείωσις: Τά πρῶτα ὅρια τῶν τάξεων δέν περιλαμβάνονται εἰς αὐτάς




Σχ. 2.5

Διά τήν χάραξιν τοῦ ἱστογράμμου εἰς τήν περίπτωσιν συνεχῶν κατανομῶν ἀνίσου πλάτους ἐπί τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος - καί ὑπό αὐθαίρετον ἐπίσης κλίμακα - λαμβάνονται ἄνισα διαστήματα ἀνάλογα τοῦ πλάτους τῶν ἀντιστοίχων τάξεων. Δεδομένου ὅτι τό συνολικόν ἐμβαδόν τοῦ ἱστογράμμου δέον νά ἰσοῦται πάντοτε πρός τήν συνολικήν συχνότητα, ἐπί τῶν ὡς ἄνω διαστημάτων ὑψοῦνται ἐπίσης ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα (ἱστοί) ἐμβαδοῦ ἴσου πρός τάς συχνότητας τῆς ἀντιστοίχου τάξεως. Φυσικά τά ὕψη τῶν ἐν λόγῳ ἱστῶν - δεδομένου ὅτι αἱ βάσεις τῶν ὀρθογωνίων γίνονται συνήθως μεγαλύτεραι μετά τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς - εἶναι κατάλληλα ὑποπολλαπλάσια τῶν ἀντιστοίχων συχνοτήτων - καί συγκεκριμένως ἴσα πρός τό πηλίκον τῆς συχνότητος διά τῆς ἀντιστοίχου βάσεως, ἐκπεφρασμένης κατά κανόνα ὡς πολλαπλάσιον τῆς μικροτέρας τοιαύτης - οὕτως ὥστε τά ἐμβαδά τῶν ἱστῶν νά εἶναι τελικῶς ἴσα πρός τάς συχνότητας.

Ἡ χάραξις τοῦ ἀντιστοίχου πολυγώνου συχνότητος γίνεται ὡς καί προηγουμένως διά τῆς ἑνώσεως δι'εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ἄκρων τῶν νοητῶν καθέτων αἱ ὁποῖαι ὑψοῦνται εἰς τό μέσον τῶν ἀπεικονιζόντων τάς διαφόρους τάξεις τμημάτων καί ἔχουν μῆκος ὑπολογιζόμενον ὡς καί τά ὕψη τῶν ἀντιστοίχων ἱστῶν.

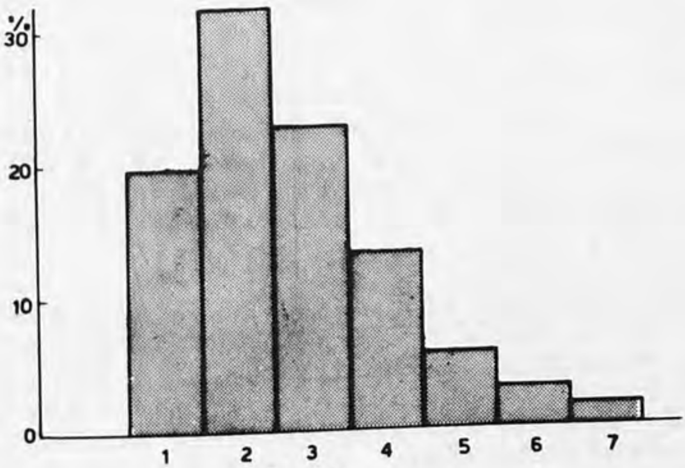
Ἐάν τό ἱστόγραμμον ἔχει ἤδη χαραχθῆ, τό πολύγωνον συχνότητος προκύπτει ἁπλούστατα δι'ἑνώσεως δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν μέσων τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ἱστῶν.

Ὅσα ἐλέχθησαν προηγουμένως - εἰς τάς κατανομάς ἴσου πλάτους - διά τό ἐμβαδόν τοῦ ἱστογράμμου, τό ὑπό τό κλειστόν πολύγωνον συχνότητος ἐμβαδόν ὡς καί τήν καμπύλην συχνότητος ἰσχύουν καί ἐν προκειμένῳ.

Τέλος, δέον νά σημειωθῆ ὅτι διά τήν χάραξιν τοῦ ἱστογράμμου καί τοῦ πολυγώνου συχνότητος τόσον εἰς τάς περιπτώσεις κατανομῶν ἴσου πλάτους ὅσον καί διά τάς ἀντιστοίχους ἀνίσου πλάτους κατανομάς τυγχάνει ἀπαραίτητον ὅπως αἱ κατανομαί εἶναι κ λ ε ι σ τ α ί δηλαδή νά εἶναι καθωρισμένα τά ὅρια τῶν τάξεων ὡς π.χ. εἰς τούς πίνακας (2.6), (2.8) καί (2.9). Εἰς τήν περίπτωσιν ἀ ν ο ι κ τ ῶ ν κατανομῶν ὡς ἐκείνη τοῦ πίνακος (2.7) ὅπου τό μεῖζον ὅριον τῆς τελευταίας τάξεως εἶναι ἄγνωστον, ἡ ἀπεικόνισις αὐτῶν δι'ἱστογράμμου ἤ πολυγώνου συχνότητος εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀ ν έ φ ι κ τ ο ς.

Πρός ὁλοκλήρωσιν τῶν γραφικῶν ἀπεικονίσεων τῶν ποσοτικῶν κατανομῶν παραθέτομεν κατωτέρω (Σχ.2.6) τό ἱστόγραμμον τῆς κατανομῆς τῶν κατοικιῶν τοῦ πίνακος (2.5).

Ἡ κατασκευή τοῦ ἐν λόγῳ ἱστογράμμου εἶναι προφανής καί ἁπλουστάτη. Ἐπί τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος λαμβάνονται ἴσα τμήματα παριστῶντα τάς τάξεις τῆς κατανομῆς καί ἐπ'αὐτῶν ὑψοῦνται ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα μέ ἐμβαδά καί κατά συνέπειαν καί ὕψη ἴσα πρός τάς συχνότητας τῶν ἀντιστοίχων τάξεων. Αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς ἀναγράφονται ἐν προκειμένῳ εἰς τό μέσον ἑκάστης βάσεως καί ὄχι εἰς τά ὅρια αὐτῆς ὡς συμβαίνει εἰς τήν περίπτωσιν τῶν συνεχῶν κατανομῶν.




Σχ. 2,6

Εἶναι προφανές ὅτι προκειμένου περί ἀσυνεχῶν κατανομῶν - λόγῳ τῆς φύσεως τῆς ἀντιστοίχου μεταβλητῆς - δέν ἔχει νόημα ἡ χρησιμοποίησις τῶν πολυγώνων συχνότητος τά ὁποῖα προϋποθέτουν σ υ ν έ χ ε ι α ν τῆς μεταβλητῆς. Διά νά ἀκριβολογήσωμεν ἄλλωστε καί τό ἱστόγραμμον ἐν προκειμένῳ χρησιμοποιεῖται εἰς τήν θέσιν ἀ κ ι δ ω τ ο ῦ δ ι α γ ρ ά μ μ α τ ο ς.

## 2.5 Ἀθροιστικαὶ ἢ Συσσωρευτικαὶ Κατανομαὶ

Αἱ ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί συχνότητες αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἐπί μέρους τάξεις μιᾶς οἱασδήποτε κατανομῆς - τ α ξ ι κ α ί συχνότητες - ἐπιτρέπουν ὡς ἤδη ἐλέχθη τήν διερεύνησιν τῆς δομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ὑπό μελέτην χαρακτηριστικόν ὡς καί τήν κατανόησιν τῆς σημασίας καί τοῦ μεγέθους τυχόν ὑφισταμένων τ ο π ι κ ῶ ν - εἰς διαφόρους περιοχάς τοῦ πεδίου τιμῶν τῆς μεταβλητῆς - ἰδιομορφιῶν.

Πολλάκις ὅμως ἐνδιαφερόμεθα διά μίαν γενικωτέραν θεώρησιν - μ α κ ρ ο σ κ ο π ι κ ή ν ἀντίληψιν - τῆς ἐν γένει συμπεριφορᾶς τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ὑπό μελέτην χαρακτηριστικόν διά τήν ὁποίαν, πέραν τῶν ταξικῶν συχνοτήτων ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ - σ υ σ σ ω ρ ε υ τ ι κ ῶ ς - διά τάς ὁποίας αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς μεταβλητῆς εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ α ι ἤ ἴ σ α ι δηλαδή <u>μ έ χ ρ ι κ α ί</u> δοθείσης συγκεκριμένης τιμῆς τῆς μεταβλητῆς (ἤ εἰς ἄλλας περιπτώσεις μ ε γ α λ ύ τ ε ρ α ι αὐτῆς).

Ἄμεσον ἀπάντησιν εἰς τά ἐρωτήματα αὐτά δίδουν αἱ καλούμεναι ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ α ί ἤ σ υ σ σ ω ρ ε υ τ ι κ α ί συχνότητες - ἀ π ό λ υ τ ο ι ἤ σ χ ε τ ι κ α ί - αἱ ὁποῖαι δηλοῦν ἀντιστοίχως τόν ἀριθμόν ἤ τό ποσοστόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ διά τάς ὁποίας αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ α ι ἤ ἴ σ α ι δοθείσης - σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η ς ἑ κ ά σ τ ο τ ε - τιμῆς αὐτῆς.

Αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ὅρια τῶν τάξεων μιᾶς οἱασδήποτε σ υ ν ε χ ο ῦ ς ποσοτικῆς κατανομῆς εὑρίσκονται κατ'ἁπλούστατον τρόπον ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ταξικῶν ἀπολύτων ἤ σχετικῶν συχνοτήτων τῆς κατανομῆς. Οἱ ἀπαιτούμενοι πρός τοῦτο ὑπολογισμοί ἐμφαίνονται εἰς τούς κατωτέρω πίνακας (2.6.α) καί (2.9.α) ἀποτελοῦντας συνέχειαν τῶν πινάκων (2.6) καί (2.9) ἀντιστοίχως.

Ἡ σειρά τῶν ἀπολύτων ἀθροιστικῶν συχνοτήτων λέγεται καί ἀ π ό λ υ τ ο ς ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ή σ ε ι ρ ά ἡ δέ ἀντίστοιχος τῶν σχετικῶν τοιούτων σ χ ε τ ι κ ή ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ή σ ε ι ρ ά.

Ἕκαστος τῶν ὅρων τῶν ἐν λόγῳ ἀθροιστικῶν σειρῶν εὑρίσκεται ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀμέσως προηγουμένου τοιού-

Πίναξ 2.6.α

'Αθροιστική Κατανομή 'Αναστημάτων

| 'Ανάστημα εἰς ἑκατοστά | 'Αριθμός ἀτόμων | Ποσοστόν % | 'Ανάστημα εἰς ἑκατοστά | 'Αριθμός ἀτόμων ἀθροιστικῶς | Ποσοστόν % ἀθροιστικῶς |
|---|---|---|---|---|---|
| 140-145 | 4 | 0,1 | Μέχρι καί 145 | 4 | 0,1 |
| 145-150 | 9 | 0,2 | -150 | 13 | 0,3 |
| 150-155 | 60 | 1,0 | -155 | 73 | 1,3 |
| 155-160 | 357 | 5,7 | -160 | 430 | 7,0 |
| 160-165 | 1.092 | 17,3 | -165 | 1.522 | 24,3 |
| 165-170 | 1.802 | 28,6 | -170 | 3.324 | 52,9 |
| 170-175 | 1.696 | 26,9 | -175 | 5.020 | 79,8 |
| 175-180 | 925 | 14,6 | -180 | 5.945 | 94,4 |
| 180-185 | 272 | 4,3 | -185 | 6.217 | 98,7 |
| 185-190 | 69 | 1,1 | -190 | 6.286 | 99,8 |
| 190-195 | 11 | 0,2 | -195 | 6.297 | 100,0 |
| Σύνολον | 6.297 | 100,0 | - | - | - |

Πίναξ 2.9.α

'Αθροιστική Κατανομή Μηνιαίων Μισθῶν

| Μηνιαῖος μισθός εἰς δραχμάς | 'Αριθμός ὑπαλλήλων | Ποσοστόν % | Μηνιαῖος μισθός εἰς δραχμάς | 'Αριθμός ὑπαλλήλων ἀθροιστικῶς | Ποσοστόν % ἀθροιστικῶς |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.000- 3.000 | 72 | 6 | Μέχρι καί 3.000 | 72 | 6 |
| 3.000- 5.000 | 216 | 18 | - 5.000 | 288 | 24 |
| 5.000- 7.000 | 384 | 32 | - 7.000 | 672 | 56 |
| 7.000-10.000 | 252 | 21 | -10.000 | 924 | 77 |
| 10.000-15.000 | 180 | 15 | -15.000 | 1.104 | 92 |
| 15.000-20.000 | 72 | 6 | -20.000 | 1.176 | 98 |
| 20.000-30.000 | 24 | 2 | -30.000 | 1.200 | 100 |
| Σύνολον | 1.200 | 100 | - | - | - |

του καί τῆς ἔναντι τοῦ ὑπολογιζομένου ὅρου ταξικῆς συχνότητος (π.χ. 5.020=3.324+1.696, κ.ο.κ.) παρέχει δέ ἀμέσως τόν ἀριθμόν ἤ ἀντιστοίχως τό ποσοστόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ μέ ἀνάστημα μ έ χ ρ ι κ α ί ἑνός δοθέντος τοιούτου. Οὕτω, μεταξύ τοῦ συνόλου τῶν ἐρευνηθέντων 6.297 ἐνηλίκων ἀνδρῶν 5.020 ἤ ποσοστόν 79,8% ἔχουν ἀνάστημα μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ν ἤ ἴ σ ο ν τῶν 175 ἐκ. κ.ο.κ.

Εἶναι προφανές ὅτι ἐκ τῶν δεδομένων τῶν ὡς ἄνω ἀθροιστικῶν σειρῶν - καλουμένων πολλάκις δ ε ξ ι ο σ τ ρ ό φ ω ν* ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτάς διαγραμμάτων - εἶναι δυνατόν νά ἀπαντήσωμεν ἀμέσως καί εἰς τό ἐρώτημα "ποῖος ἀριθμός ἀτόμων ἤ ποῖον ποσοστόν αὐτῶν ἔχει ἀνάστημα μεγαλύτερον ἑνός συγκεκριμένου τοιούτου π.χ. 170 ἐκ;" Πρός τούτοις ἀφαιροῦμεν τόν ἀριθμόν τῶν ἀτόμων μέ ἀνάστημα μ έ χ ρ ι κ α ί τοῦ 170 ἤτοι τόν ἀριθμόν 3.324 ἀπό τό σύνολον 6.297 (ἤ τό ποσοστόν 52,9% ἀπό τό 100%) καί εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι 2.973 ἄτομα ἤ 47,1% ἐξ αὐτῶν ἔχουν ἀνάστημα μεγαλύτερον τῶν 170 ἐκ.

Εἰς τάς περιπτώσεις ἀσυνεχῶν ποσοτικῶν κατανομῶν αἱ ἀθροιστικαί σειραί - ἀπόλυτοι καί σχετικαί - καταρτίζονται κατά τόν αὐτόν ὡς ἄνω τρόπον, οἱ ὅροι ὅμως αὐτῶν - αἱ ἐπί μέρους δηλαδή ἀθροιστικαί συχνότητες - ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς διακεκριμένας τιμάς τῆς

---

* Εἴς τινας περιπτώσεις - ὁπωσδήποτε ὄχι συνήθεις - εἴτε διότι θέλομεν νά ἔχωμεν ἀπ'εὐθείας τάς ἀπαντήσεις εἰς ἐρωτήματα τῆς μορφῆς τοῦ "μεγαλύτερον" εἴτε διότι εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν νά ὑπολογίσωμεν τήν δεξιόστροφον ἀθροιστικήν σειράν - ὡς π.χ. εἰς ἀ ν ο ι κ τ ά ς π ρ ό ς τ ά ἄ ν ω κατανομάς τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος (2.7) - καταρτίζομεν δι'ἀναλόγων ὑπολογισμῶν τάς καλουμένας ἀ ρ ι σ τ ε ρ ο σ τ ρ ό φ ο υ ς ἀθροιστικάς σειράς.

ὑπό μελέτην μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν καί τάς τάξεις τῆς κατανομῆς καί φυσικά ὄχι εἰς τά - μή ὑφιστάμενα ἄλλωστε - δεύτερα ὅρια τῶν τάξεων.

Οἱ ἀπαιτούμενοι ἐν προκειμένῳ ὑπολογισμοί ἐμφαίνονται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (2.5.α), συνέχειαν καί συμπλήρωμα τοῦ πίνακος (2.5).

Πίναξ 2.5.α

'Αθροιστική Κατανομή Κατοικιῶν

| Δωμάτια | 'Αριθμός κατοικιῶν | Ποσοστόν % | Δωμάτια | 'Αριθμός κατοικιῶν ἀθροιστικῶς | Ποσοστόν % ἀθροιστικῶς |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 242 | 20,1 | Μέχρι καί 1 | 242 | 20,1 |
| 2 | 396 | 32,8 | -2 | 638 | 52,9 |
| 3 | 287 | 23,8 | -3 | 925 | 76,7 |
| 4 | 166 | 13,7 | -4 | 1.091 | 90,4 |
| 5 | 68 | 5,6 | -5 | 1.159 | 96,0 |
| 6 | 30 | 2,5 | -6 | 1.189 | 98,5 |
| 7 | 18 | 1,5 | -7 | 1.207 | 100,0 |
| Σύνολον | 1.207 | 100,0 | - | - | - |

'Αθροιστικαί σειραί - ὑπό εὐρεῖαν ἔννοιαν - εἶναι δυνατόν νά καταρτισθοῦν - δι'ἀναλόγων μεθόδων - καί διά τάς π ο ι ο τ ι κ ά ς κατανομάς. Πράγματι δεδομένου ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι ποιοτικαί μεταβληταί ἐπιτρέπουν ἱ ε ρ ά ρ χ η σ ι ν εἶναι ἐφικτόν νά τεθοῦν ἐρωτήματα τῆς μορφῆς τοῦ "μέχρι καί" ἤ "μεγαλύτερον" - ὑπό τήν γενικήν φυσικά ἔννοιαν τῶν λέξεων - καί νά τύχουν ἀναλόγου ἀπαντήσεως.

Εἰς τάς περιπτώσεις κατηγορικῶν κατανομῶν εἶναι προφανές ὅτι αἱ ἀθροιστικαί σειραί δέν ἔχουν νόημα καί φυσικά οὔτε εἶναι δυνατόν νά καταρτισθοῦν.

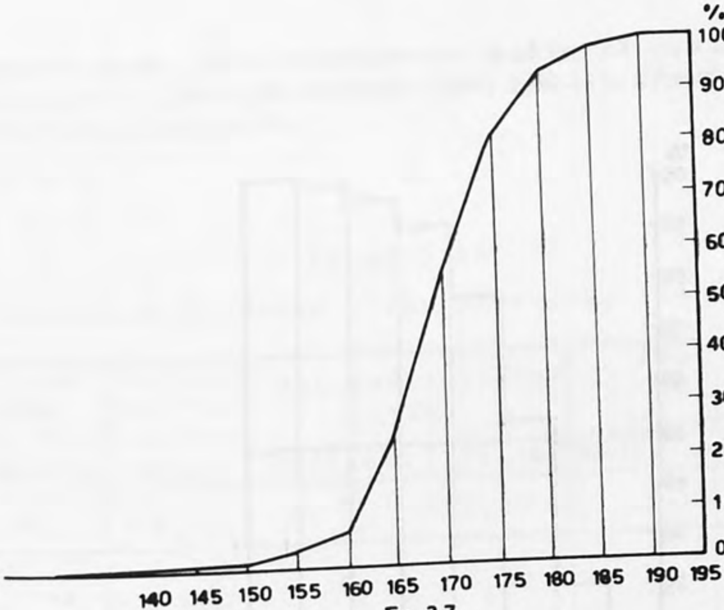
**Γραφική Ἀπεικόνισις Ἀθροιστικῶν Κατανομῶν**

Διά τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν τῶν ἀθροιστικῶν σειρῶν χρησιμοποιοῦνται κατά κανόνα κατάλληλοι πολυγωνικαί γραμμαί καλούμεναι ἐν γένει ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ά δ ι α γ ρ ά μ μ α τ α ἤ κ α μ π ύ λ α ι.

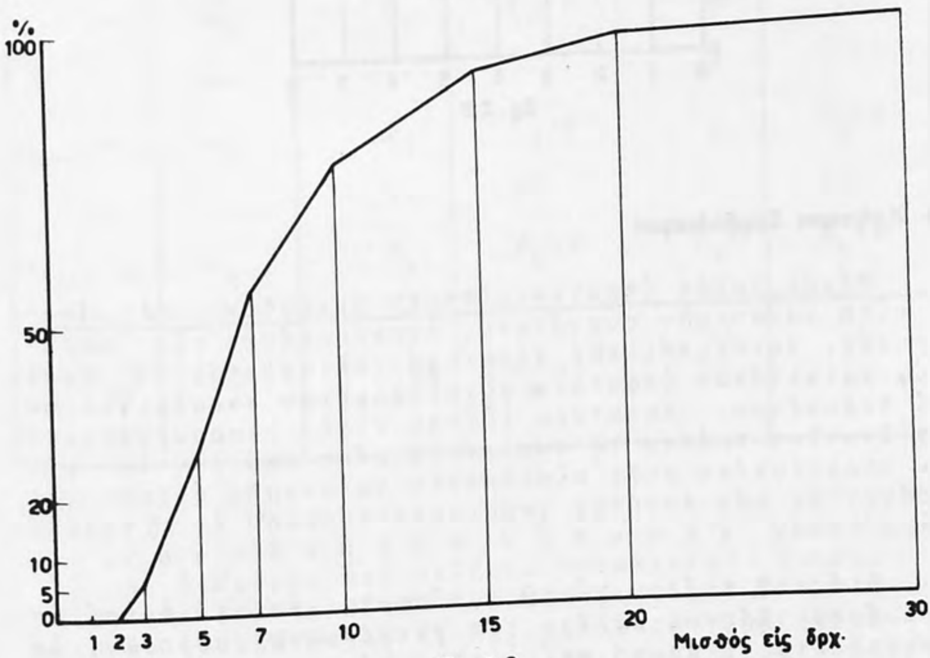
Τά ἐν λόγῳ διαγράμματα ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τήν κατηγορίαν τῶν ἀριθμητικῶν διαγραμμάτων ἡ δέ κατασκευή των εἶναι ἀνάλογος ἐκείνης τῶν πολυγώνων συχνότητος. Οὕτω, προκειμένου περί συνεχῶν κατανομῶν ἀπεικονίζονται κατ'ἀρχήν ἐπί τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος (τῶν τετμημένων) αἱ ἴσου ἤ ἀνίσου πλάτους τάξεις δι' ἀναλόγων πρός αὐτάς διαδοχικῶν τμημάτων, ἐν συνεχείᾳ δέ εἰς τό π έ ρ α ς (μεῖζον ὅριον) ἑκάστης τάξεως ὑψοῦνται (νοηταί) κάθετοι μήκους ἴσου - ὑπό κλίμακα φυσικά - πρός τήν ἀντίστοιχον ἀθροιστικήν - ἀπόλυτον ἤ σχετικήν - συχνότητα. Δι'ἑνώσεως τῶν ἄκρων τῶν ἐν λόγῳ καθέτων δι'εὐθυγράμμων τμημάτων προκύπτει ἡ πολυγωνική (τεθλασμένη) γραμμή ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἀντιστοίχως τό δ ε ξ ι ό σ τ ρ ο φ ο ν ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ό ν δ ι ά γ ρ α μ μ α. Ὅπως εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ πολυγώνου συχνότητος οὕτω καί ἐν προκειμένῳ ἐάν τό πλάτος ἑκάστης τάξεως τείνει εἰς τό μηδέν ὁ δέ ἀριθμός τῶν τάξεων εἰς τό ἄπειρον αἱ ἐν λόγῳ ἀθροιστικαί πολυγωνικαί γραμμαί ἐξομαλύνονται καί ὁριακῶς καταλήγουν εἰς τάς καλουμένας ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ά ς (σ υ σ σ ω ρ ε υ τ ι κ ά ς) κ α μ π ύ λ α ς.

Τά ἀθροιστικά διαγράμματα τῶν σχετικῶν ἀθροιστικῶν σειρῶν τῶν πινάκων (2.6.α) καί (2.9.α) παρατίθενται κατωτέρω εἰς τά Σχ.(2.7) καί(2.8) ἀντιστοίχως.

Ἡ χάραξις τῶν διαγραμμάτων τῶν ἀθροιστικῶν σειρῶν αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς ἀσυνεχεῖς κατανομάς γίνεται κατά τόν αὐτόν ὡς ἄνω τρόπον. Ἡ λαμβανομένη ὅμως εἰκών εἶναι ἐλαφρῶς διάφορος καί συγκεκριμένα ἀνήκει εἰς τήν κατηγορίαν τῶν καλουμένων κ λ ι μ α κ ω τ ῶ ν γραμμῶν. Ἡ κατασκευή τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν ἐν ὄψει τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς σημείων ἀ σ υ ν ε χ ε ί α ς αὐτῶν ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέ-

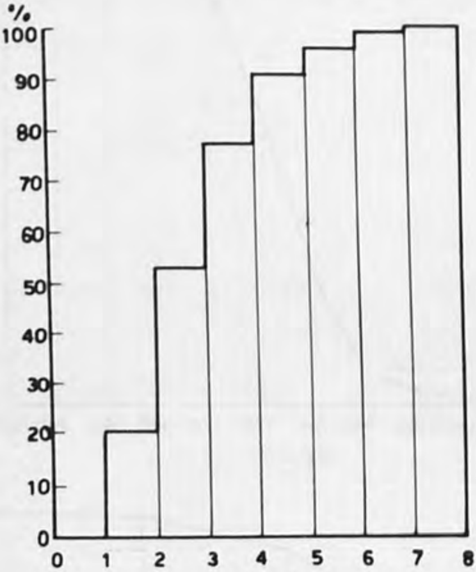

%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
140 145 150 155 160 165 170 175 180 185 190 195

Σχ. 2,7


%
100
50
20
10
5
0
1 2 3 5 7 10 15 20 30
Μισθός είς δρχ.

Σχ. 2,8

ραν προσοχήν. Κατωτέρω παραθέτομεν τήν ἀπεικόνισιν τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς τοῦ πίνακος (2.5.α).




Σχ. 2,9

## 2.6 Χρήσιμοι Συμβολισμοί

Μέχρι τοῦδε ἐπραγματεύθημεν διεξοδικῶς τά διάφορα εἴδη κατανομῶν συχνότητος ἀναφερομένων εἰς κατηγορικάς, ποιοτικάς καί ποσοτικάς μεταβλητάς τῇ βοηθείᾳ καταλλήλων ἑκάστοτε συγκεκριμένων παραδειγμάτων καί δεδομένων. Κατωτέρω (Πίναξ 2.10) παρουσιάζομεν κατ' ἑνιαῖον τρόπον τά συστατικά μέρη καί τήν ἐν γένει μορφολογίαν μιᾶς οἱασδήποτε κατανομῆς συχνότητος εἰσάγοντες τόν συνήθως χρησιμοποιούμενον ἐν τῇ πράξει ἀπαραίτητον γ ε ν ι κ ό ν σ υ μ β ο λ ι κ ό ν.

Διά τοῦ τρόπου αὐτοῦ καθίσταται ἐφικτή ἡ ἐπί ὁμοιομόρφου βάσεως μελέτη τῶν ποικίλων μεταβλητῶν, ἁπλουστεύεται ἡ μορφή καί ἡ τεχνική καταρτίσεως διαφόρων σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ν τ ύ π ω ν καί ἐν γένει διευκολύνεται σημαντικῶς ἡ ἐξαγωγή συμπερασμάτων γενικωτέρας ἐφαρμογῆς.

Πίναξ 2.10

Συμβολική Παράστασις τῶν Κατανομῶν Συχνότητος

| Τάξεις Τιμῶν τῆς Μεταβλητῆς | Κεντρικαί τιμαί τῶν τάξεων | Ταξικαί Συχνότητες | | Ἀθροιστικαί Συχνότητες (Δεξιόστροφοι) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Ἀπόλυτοι | Σχετικαί | Ἀπόλυτοι | Σχετικαί |
| $X$ | $x_i$ | $f_i$ | $f_i:N$ | $F_i$ | $F_i:N$ |
| $\alpha_0-\alpha_1$ | $x_1$ | $f_1$ | $f_1:N$ | $F_1$ | $F_1:N$ |
| $\alpha_1-\alpha_2$ | $x_2$ | $f_2$ | $f_2:N$ | $F_2$ | $F_2:N$ |
| ..... | .. | .. | .... | .. | .... |
| $\alpha_{i-1}-\alpha_i$ | $x_i$ | $f_i$ | $f_i:N$ | $F_i$ | $F_i:N$ |
| ..... | .. | .. | .... | .. | .... |
| $\alpha_{k-1}-\alpha_k$ | $x_k$ | $f_k$ | $f_k:N$ | $F_k$ | $F_k:N$ |
| Σύνολα | -- | $\sum_{i=1}^{k} f_i=N$ | $\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{N}=1$ | -- | -- |

Αἱ διάφοροι ὑπό μελέτην μεταβληταί - ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως αὐτῶν - συμβολίζονται διά τῶν κεφαλαίων γραμμάτων X, Y, Z,.... αἱ δέ τιμαί αὐτῶν - εἴτε εἶναι ἀριθμοί, εἴτε ἄλλαι συμβολικαί ἐκφράσεις - διά τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν γραμμάτων $x_i$, $y_i$, $z_i$,.... τοῦ δείκτου i=1,2,3,...,N ὑποδηλοῦντος τήν μονάδα τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τήν ὁποίαν αἱ ἐν λόγῳ τιμαί ἀναφέρονται.

Ἡ πρώτη στήλη τοῦ πίνακος (2.10) - τάξεις τιμῶν τῆς μεταβλητῆς - ὑφίσταται οὐσιαστικῶς μόνον εἰς τάς περιπτώσεις κατανομῶν σ υ ν ε χ ῶ ν μεταβλητῶν.

Τό διάστημα ($\alpha_o$, $\alpha_k$) - ἀ ν ο ι κ τ ό ν ἤ κ λ ε ι σ τ ό ν - εἰς τό ὁποῖον μεταβάλλεται ἡ ὑπό μελέτην μεταβλητή X λέγεται συνολικόν ε ὖ ρ ο ς μεταβολῆς αὐτῆς. Ἐάν ἡ X δύναται νά λάβη καί τάς ὁριακάς τιμάς $\alpha_o$ καί $\alpha_k$ - περίπτωσις κλειστοῦ διαστήματος [$\alpha_o$, $\alpha_k$] - αὗται καλοῦνται ἀντιστοίχως ἐ λ α χ ί σ τ η καί μ ε γ ί σ τ η τιμή τῆς μεταβλητῆς.

Τό συνολικόν εὖρος - διάστημα ($\alpha_o$, $\alpha_k$) - ὑποδιαιρεῖται εἰς k ὑποδιαστήματα ($\alpha_{i-1}$, $\alpha_i$), i=1, 2, 3,...,k καλούμενα τ ά ξ ε ι ς. Ἡ ὑποδιαίρεσις γίνεται κατά τρόπον ὥστε οἱαδήποτε δυνατή - ἔστω καί θεωρητικῶς - τιμή τῆς μεταβλητῆς νά ἀνήκη εἰς μ ί α ν κ α ί μ ό ν ο ν μ ί α ν τάξιν (ἀποκλειομένων δηλαδή ἐ π ι κ α λ ύ ψ ε ω ν ἤ κ ε ν ῶ ν μεταξύ τῶν τάξεων).

Ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων k καθορίζεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, μέ γνώμονα ἀφ'ἑνός τήν ἐπιθυμητήν ἁ π λ ό τ η τ α καί ἀφ'ἑτέρου τήν ἀπαιτουμένην ὁ μ ο ι ο γ έ ν ε ι α ν τῶν δεδομένων. Εἰς τήν πρᾶξιν ἀναλόγως τοῦ ἐπιδιωκομένου ἑκάστοτε σκοποῦ ποικίλλει συνήθως μεταξύ 5 καί 20.

Οἱ ἀριθμοί $\alpha_{i-1}$ καί $\alpha_i$, i=1, 2, 3,...,k καλοῦνται ὅ ρ ι α τῶν τάξεων - ἔ λ α σ σ ο ν καί μ ε ῖ ζ ο ν ἤ π ρ ῶ τ ο ν καί δ ε ύ τ ε ρ ο ν - ἡ δέ διαφορά αὐτῶν $\delta_i=\alpha_i-\alpha_{i-1}$, i=1,2,3,...,k π λ ά τ ο ς τῆς ἀντιστοίχου τάξεως. Τό ἕν ἐκ τῶν δύο ὁρίων ἑκάστης τάξεως - συνήθως τό πρῶτον - δέν ἀνήκει εἰς αὐτήν, αἱ τάξεις δηλαδή εἶναι διαστήματα **ἡ μ ι α ν ο ι κ τ ά**. Εἰς τήν πράξιν τοῦτο διευκρινίζεται συνήθως διά καταλλήλων ὑποσημειώσεων ἤ διά τῆς μορφῆς ἡ ὁποία δίδεται εἰς τάς τάξεις (προκει-μένου π.χ. εἰς τόν πίνακα (2.6) νά διευκρινισθῆ εἰς ποίαν τάξιν ἀνήκουν τά πρῶτα ὅρια εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθῆ ἡ γραφή 140,01-145, 145,01-150 κοκ).

'Εάν ὅλαι αἱ τάξεις τῆς κατανομῆς ἔχουν τό αὐ-τό πλάτος, δηλαδή $\delta_i=\delta$, $i=1, 2, 3, \ldots, k$ ἡ κατανο-μή λέγεται *ἴσου πλάτους*, ἐν ἐναντίᾳ δέ περιπτώσει *ἀνίσου πλάτους*.

Πολλάκις, τό *ἔλασσον* ὅριον τῆς πρώτης τάξεως $\alpha_0$ ἤ τό μεῖζον τῆς τελευταίας $\alpha_k$ ἤ ἀμφότερα δέν εἶναι *πεπερασμένοι* ἀριθμοί ἀλλ' ἀν-τιστοίχως $-\infty$ ἤ $+\infty$. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἡ κατανομή λέγεται *ἀνοικτή* πρός τά *κάτω* ἤ πρός τά *ἄνω* ἀντιστοίχως. 'Αντιθέτως ἐάν ἀμφό-τερα τά ὅρια τοῦ συνολικοῦ εὔρους $(\alpha_0, \alpha_k)$ εἶναι *πεπερασμένοι* ἀριθμοί ἡ κατανομή καλεῖ-ται *κλειστή*.

Μετά τήν ὁμαδοποίησιν τῶν ἐπί μέρους μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἤ καλλίτερον τῶν ἀναφερομένων εἰς αὐ-τάς μετρήσεων καί τήν κατάταξιν αὐτῶν εἰς τάς ἀν-τιστοίχους τάξεις τῆς κατανομῆς, ἔχομεν φυσικά ἐ-πιτύχη τήν συνοπτικήν παρουσίασιν τῶν δεδομένων - τήν *ἁπλότητα* - ἀλλ' ἔχομεν χάσει τάς ἐπί μέ-ρους - ἀτομικάς - πληροφορίας. Γνωρίζομεν π.χ. ἐκ τοῦ πίνακος (2.6) ὅτι 60 ἐκ τῶν ἐρευνηθέντων ἐνηλί-κων ἀνδρῶν ἔχουν ἀνάστημα μεταξύ 150 καί 155 ἑκ., ἀλλά δέν δυνάμεθα νά γνωρίζωμεν τό ἀκριβές ἀνάστη-μα ἑνός ἑκάστου. Οὕτω ἀναγκαζόμεθα - κατ' οἰκονο-μίαν - νά συμβιβασθῶμεν μέ τήν ὑπόθεσιν ὅτι ἅπαν-τες οἱ ἀνήκοντες εἰς τήν τάξιν αὐτήν ἔχουν ἀνάστη-μα ἴσον πρός 152,5 ἑκ. δηλαδή τήν *κεντρικήν τιμήν* τῆς τάξεως ἡ ὁποία ὡς γνωστόν ἰσοῦται πρός τό ἡμιάθροισμα τῶν ὁρίων τοῦ ἀντιστοίχου δια-στήματος. 'Ο συμβιβασμός οὗτος ἀποτελεῖ τό *ἀντάλ-λαγμα* - τήν *τιμήν* - δηλαδή τήν ὁποίαν πλη-ρώνομεν - διά τήν *συνοπτικότητα* καί *ἁ-πλότητα* τήν ὁποίαν ἐπετύχομεν. 'Ο λόγος διά τόν ὁποῖον χρησιμοποιεῖται πρός τοῦτο ἡ κεντρική καί ὄχι οἱαδήποτε ἄλλη τιμή τῆς τάξεως εἶναι προφανής.

'Ελπίζομεν ὅτι τά διαπραττόμενα κατά τόν τρόπον αὐτόν σφάλματα - θετικαί καί ἀρνητικαί ἀποκλίσεις τῶν πραγματικῶν δεδομένων ἀπό τήν κεντρικήν τιμήν τῆς τάξεως - ἀλληλοαναιροῦνται ἄν ὄχι πλήρως κατά τό μέγιστον τουλάχιστον μέρος αὐτῶν.

Αἱ ὡς ἄνω κεντρικαί τιμαί τῶν τάξεων - οἱονεί τιμαί τῆς μεταβλητῆς X - παρατίθενται εἰς τήν δευτέραν στήλην τοῦ πίνακος. Αὗται συμβολίζονται διά τῶν $x_i$, $i=1,2,3,..,k$ ὑπολογίζονται δέ ὡς ἡμιάθροισμα τῶν ὁρίων τῆς ἀντιστοίχου τάξεως ἤτοι $x_i=(\alpha_{i-1}+\alpha_i):2$, $i=,1,2,3,..,k$.

Εἰς τάς ὑπολοίπους στήλας τοῦ πίνακος παρατίθενται αἱ τ α ξ ι κ α ί καί ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ α ί συχνότητες ἀ π ό λ υ τ ο ι ἤ σ χ ε τ ι κ α ί.

Αἱ ἀ π ό λ υ τ ο ι σ υ χ ν ό τ η τ ε ς $f_i$, $i=1,2,3,...,k$ - τρίτη στήλη - συμβολίζουν τόν ἀριθμόν τῶν ἐπί μέρους μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τήν ἀντίστοιχον τάξιν, τάς μονάδας δηλαδή τῶν ὁποίων αἱ τιμαί περιλαμβάνονται εἰς τά διαστήματα $(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i=1,2,3,...,k$. Τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων

$$\sum_{i=1}^{k} f_i$$

λέγεται σ υ ν ο λ ι κ ή σ υ χ ν ό τ η ς καί προφανῶς εἶναι ἴσον πρός τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ N.

Αἱ σ χ ε τ ι κ α ί σ υ χ ν ό τ η τ ε ς $f_i:N$, $i=1,2,3,...,k$ - τετάρτη στήλη - εἶναι πηλῖκον τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων συχνοτήτων $f_i$ διά τῆς συνολικῆς συχνότητος N καί συμβολίζουν τήν ἀναλογίαν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τήν ἀντίστοιχον τάξιν ἤ ἄλλως τό σχετικόν μέγεθος αὐτῆς. Αἱ σχετικαί συχνότητες ἐκφράζονται συνήθως ὡς ποσοστά ἐπί τοῖς %, τό ἄθροισμα δέ αὐτῶν εἶναι ἴσον πρός τήν μονάδα ἤ ἀντιστοίχως τό 100%.

Αἱ ἀ π ό λ υ τ ο ι ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ α ί σ υ χ ν ό τ η τ ε ς $F_i$, $i=1,2,3,...,k$ - πέμπτη στήλη -

συμβολίζουν (συσσωρευτικῶς) τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ τιμαί τῶν ὁποίων εἶναι *μικρότεραι* ἤ *ἴσαι* δοθείσης ἑκάστοτε τιμῆς τῆς μεταβλητῆς καί συγκεκριμένως ἐν προκειμένῳ τῶν δευτέρων ὁρίων τῶν ἀντιστοίχων τάξεων. Οὕτω,

$$F_i=\sum_{j=1}^{i} f_j=F_{i-1}+f_i,\quad i=1,2,3,\ldots,k$$

Ἐκ τούτων καθίσταται προφανές ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς *δεξιοστρόφου* ἀθροιστικῆς σειρᾶς εἶναι ἴσος πρός τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἤτοι

$$F_k=\sum_{j=1}^{k} f_j=N$$

Αἱ *σχετικαί ἀθροιστικαί συχνότητες* $F_i:N$, $i=1,2,3,\ldots,k$ - τελευταία στήλη - εἶναι πηλῖκον τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων τοιούτων διά τῆς συνολικῆς συχνότητος N καί συμβολίζουν τήν ἀναλογίαν (ἤ τό ποσοστόν ἐπί τοῖς %) τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ τιμαί τῶν ὁποίων εἶναι *μικρότεραι* ἤ *ἴσαι* τῶν δευτέρων ὁρίων τῶν ἀντιστοίχων τάξεων. Αὗται ὑπολογίζονται κατά τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων ἀθροιστικῶν συχνοτήτων ἤτοι $F_i:N=F_{i-1}:N+f_i:N$, $i=1,2,\ldots,k$) ὁ τελευταῖος δέ ὅρος τῆς σειρᾶς των εἶναι ἴσος πρός τήν μονάδα ἤ 100%.

Χρῆσις *ἀριστεροστρόφων* ἀθροιστικῶν σειρῶν - ἀπολύτων ἤ σχετικῶν - γίνεται ὡς ἤδη ἐλέχθη σπανίως καί τοῦτο διότι αἱ σχετικαί πληροφορίαι προκύπτουν ἀμέσως ἐκ τῶν δεξιοστρόφων σειρῶν δι'ἁπλῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀντιστοίχων ὅρων αὐτῶν εἴτε ἀπό τήν συνολικήν συχνότητα N εἴτε ἀπό τήν μονάδα (ἤ 100%) ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως.

Τά λεχθέντα ἀνωτέρω περί τῆς σημασίας τῶν συμβόλων καί τοῦ περιεχομένου τῶν ἐπί μέρους στηλῶν τοῦ πίνακος (2.10), πέραν τῶν συνεχῶν κατανομῶν ἰσχύουν ἐν γένει καί διά τάς ἀσυνεχεῖς ποσοτικάς κατανομάς ὡς ἐπίσης καί διά τάς κατηγορικάς ἤ ποιοτικάς τοιαύτας. Προκειμένου περί ἀσυνεχῶν ποσοτικῶν κατανομῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Πρῶτον, αἱ ἐπί μέρους - δυναταί - τιμαί τῆς ὑπό μελέτην ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς νά εἶναι ἄ π ε ι ρ ο ι τῷ πλῆθος ἤ π ο λ υ ά ρ ι θ μ ο ι καί κατά συνέπειαν αἱ πλεῖσται ἐξ αὐτῶν μικρᾶς συχνότητος. Δεύτερον, ἡ μεταβλητή νά δύναται νά λάβη ὀλιγαρίθμους μόνον τιμάς. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἡ συνοπτική παρουσίασις τῶν δεδομένων καθιστᾶ ἀναγκαίαν - ὡς καί εἰς τάς περιπτώσεις συνεχῶν μεταβλητῶν - τήν ὁμαδοποίησιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καί τήν παρουσίασιν αὐτῶν εἰς τάξεις ἀναλόγους ἐκείνων τῆς πρώτης στήλης τοῦ πίνακος. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ σημασία τῶν συμβόλων καί τό περιεχόμενον τῶν ὑπολοίπων στηλῶν τοῦ πίνακος οὐδόλως διαφέρει τῶν ἤδη ἐκτεθέντων. Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν, ὅπου συνήθως οὐδείς λόγος ὑφίσταται διά τήν ὁμαδοποίησιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ἡ πρώτη στήλη τοῦ πίνακος (2.10) δέν ὑφίσταται. Ἐν προκειμένῳ, αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῆς μεταβλητῆς - ταυτιζόμεναι μέ τάς κεντρικάς τιμάς τῆς δευτέρας στήλης - ἀποτελοῦν συνήθως καί τάς διακεκριμένας τάξεις (κατηγορίας) τῆς κατανομῆς. Αἱ ταξικαί καί ἀθροιστικαί συχνότητες (ἀπόλυτοι καί σχετικαί) ὁρίζονται καί συμβολίζονται κατά τόν αὐτόν ὡς ἄνω τρόπον, μέ μόνην τήν διαφοράν ὅτι αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες δέν ἀντιστοιχοῦν πλέον εἰς τά δεύτερα ὅρια τῶν - μή ὑφισταμένων ἄλλωστε - τάξεων ἀλλά εἰς αὐτάς ταύτας τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς.

Τέλος, τά συστατικά μέρη καί ἡ ἐν γένει μορφολογία τῶν κατηγορικῶν καί ποιοτικῶν κατανομῶν παρουσιάζονται εἰς τήν δευτέραν, τρίτην καί τετάρτην στήλην τοῦ πίνακος(2.10). Οὕτω, αἱ ἐπί μέρους τιμαί - συμβολικαί συνήθως ἐκφράσεις - τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν ἀποτελοῦσαι καί τάς διακεκριμένας κατηγορίας τῶν ἀντιστοίχων κατανομῶν παρατίθενται - ἀντί τῶν κεντρικῶν τιμῶν - εἰς τήν δευτέραν στήλην, ἔναντι δέ αὐτῶν αἱ ταξικαί συχνότητες ἀπόλυτοι καί σχετικαί εἰς τήν τρίτην καί τεταρτην στήλην ἀντιστοίχως.

Προκειμένου περί κατηγορικῶν ἐν γένει δέ καί ποιοτικῶν κατανομῶν εἶναι περιττόν νά λεχθῆ ὅτι αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες οὐδέν νόημα ἔχουν καί φυσικά αἱ ἀθροιστικαί σειραί - στῆλαι 5 & 6 - δέν ὑφίστανται.

'Ο παρατιθέμενος εἰς τόν πίνακα(2.10) συμβολισμός θά χρησιμοποιηθῆ κατ'ἐπανάληψιν εἰς τά ἑπόμενα κεφάλαια ὅπου θά μᾶς ἀπασχολήση περαιτέρω ἡ μελέτη τῶν διαφόρων κατανομῶν συχνότητος καί ἰδιαιτέρως τῶν ποσοτικῶν - συνεχῶν καί ἀσυνεχῶν - τοιούτων. 'Ιδιαιτέρως θά χρησιμοποιηθοῦν εὐρύτατα αἱ στῆλαι τῶν κεντρικῶν τιμῶν $x_i$, τῶν ταξικῶν ἀπολύτων συχνοτήτων $f_i$, ὡς καί τῶν ἀθροιστικῶν τοιούτων $F_i$. Σημειωτέον ὅτι εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ, ἐφαρμοζομένων τῶν διεθνῶς κρατούτων, σπανίως θά ἐφαρμοσθῆ ὁ παρατιθέμενος εἰς τόν πίνακα(2.10) συμβολισμός τῶν σχετικῶν - ταξικῶν καί ἀθροιστικῶν - συχνοτήτων. 'Αντ'αὐτοῦ θά χρησιμοποιῆται ὁ αὐτός ὡς καί διά τάς ἀπολύτους συχνότητας συμβολισμός διευκρινιζομένου ἁπλῶς εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἐάν πρόκειται περί ἀπολύτων συχνοτήτων ὅτε τό ἄθροισμα αὐτῶν θά εἶναι τό συνολικόν πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ N ἤ ἐάν πρόκειται περί σχετικῶν συχνοτήτων ὅτε τό ἄθροισμα αὐτῶν θά εἶναι ἡ μονάς ἤ τό 100%.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

# ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

## 3.1 Γενικαὶ Ἔννοιαι καὶ Ὁρισμοὶ

Τό πρῶτον βῆμα εἰς τήν ὅλην διαδικασίαν τῆς διά στατιστικῶν μεθόδων μελέτης δεδομένων - πολυπληθῶν ἐν γένει τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς - ἀναφερομένων εἰς ἕν οἱονδήποτε χαρακτηριστικόν τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ συνίσταται ὡς εἴδομεν εἰς τήν κατάλληλον ὁμαδοποίησιν αὐτῶν καί τήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συνοπτικήν παρουσίασίν των ὑπό μορφήν κατανομῶν συχνότητος. Διά τῶν ἐν λόγῳ κατανομῶν περιγράφεται κατά τρόπον ἁπλοῦν καί εὔληπτον ἡ δομή τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ, καθίσταται ἐφικτή ἡ διερεύνησις καί λεπτομερής ἀνάλυσις τῆς συμπεριφορᾶς τῶν μονάδων αὐτοῦ ὡς πρός τήν ἑκάστοτε ὑπό μελέτην μεταβλητήν, ἐν γένει δέ ἁπλουστεύεται ὁ χειρισμός τῶν - πολυπληθῶν - πρωτογενῶν δεδομένων καί διευκολύνεται σημαντικῶς ἡ ἐξαγωγή τῶν ἀπαιτουμένων συμπερασμάτων.

Παρά τήν πρωταρχικήν σημασίαν καί τάς εὐρυτάτας ἐφαρμογάς τῶν μονομεταβλητῶν κατανομῶν - εἴτε ὡς περιγραφικῶν εἴτε ὡς ἀναλυτικῶν ὀργάνων - εἰς τήν ὅλην διαδικασίαν τῆς μελέτης διαφόρων πληθυσμιακῶν ἰδιοτήτων, εἰς τάς πλείστας τῶν περιπτώσεων - ἄν ὄχι πάντοτε - καθίσταται ἀναγκαία ἤ τουλάχιστον ἐπιθυμητή καί συμφέρουσα ἡ περαιτέρω συμπύκνωσις τῶν ὑφισταμένων πληροφοριῶν καί ἡ ἔτι συνοπτικωτέρα παρουσίασις τῶν δεδομένων.

Οἱ συνηγοροῦντες πρός τοῦτο λόγοι εἶναι κατά κανόνα ἀφ᾽ ἑνός αἱ ὑφιστάμεναι - συνήθως ἐξ ἀντικειμένου - δυσχέρειαι διά τήν συγκράτησιν πολυπληθῶν στοιχείων καί τήν πλήρη κατανόησιν τῆς σημασίας τῶν παρατιθεμένων εἰς μακροσκελεῖς πίνακας δεδομένων καί ἀφ'ἑτέρου τό γεγονός ὅτι εἰς πολλάς περιπτώσεις, ἁπλῶς δέν ἀπαιτοῦνται τόσον λεπτομερεῖς πληροφορίαι καί ἡ παρουσίασις τοιούτων καθίσταται περιττή πολυτέλεια. Ἐξ ἄλλου, ἕνας τρίτος - ἴσως ὁ σημαντικώτερος - λόγος διά τήν δραστικήν συμπύκνωσιν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων εἰ δυνατόν εἰς ὀλίγας ἁπλᾶς ἀριθμητικάς ἐκφράσεις εἶναι τό γεγονός ὅτι αἱ διάφοροι κατανομαί συχνότητος - παρά τόν συνοπτικόν χαρακτῆρα αὐτῶν - δέν προσφέρονται πάντοτε ἤ τουλάχιστον δυσχεραίνουν σημαντικά τάς γενομένας κατά τήν ἀναλυτικήν διαδικασίαν παντοειδεῖς σ υ γ κ ρ ί σ ε ι ς. Εἶναι προφανές ἄλλωστε ὅτι τόσον αἱ γεωγραφικαί καί χρονολογικαί συγκρίσεις ὅσον καί οἱαιδήποτε ἄλλαι συγκρίσεις ὡς π.χ. μεταξύ συγκεκριμένων ὑποομάδων τοῦ ἀρχικοῦ πληθυσμοῦ - ὑποπληθυσμῶν - καθίστανται πολύ ἁπλούστεραι ἐάν ἀναφέρονται εἰς ὀλίγα ἁπλᾶ ἀριθμητικά μεγέθη καί ὄχι εἰς ὁλοκλήρους - μακροσκελεῖς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον - κατανομάς συχνότητος.

Ἡ συμπύκνωσις τῶν ἀρχικῶν πληροφοριῶν καί ἡ συνοπτικωτέρα παρουσίασις τῶν δεδομένων - ἀναγκαία ἤ τουλάχιστον χρήσιμος διά τούς προαναφερθέντας λόγους - πραγματοποιοῦνται συνήθως διά τοῦ ὑπολογισμοῦ ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν γνωστῶν ὡς π α ρ α μ έ τ ρ ω ν τοῦ πληθυσμοῦ ἤ τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς συχνότητος αὐτοῦ ὡς πρός τήν ὑπό μελέτην μεταβλητήν. Αἱ ἐν λόγῳ παράμετροι εἶναι ἐν γένει ἀριθμητικαί ἐκφράσεις χαρακτηρίζουσαι τήν θ έ σ ι ν, τήν δ ι α σ π ο ρ ά ν καί τήν ἐν γένει μ ο ρ φ ο λ ο γ ί α ν τῆς ἀντιστοίχου μονομεταβλητῆς κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ.

Συγκεκριμένως διά τῶν ὡς ἄνω παραμέτρων

(α) καθορίζεται ἡ θ έ σ ι ς ἐν γένει τῆς κατανομῆς ἤ ἄλλως τό σ η μ ε ῖ ο ν σ υ γ κ ε ν τ ρ ώ σ ε ω ς δηλαδή μία τιμή τῆς μεταβλητῆς περί τήν ὁποίαν τείνουν νά συγκεντρωθοῦν αἱ ἐπί μέρους μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ.

(β) μετρᾶται ἡ δ ι α σ π ο ρ ά ἤ ἄλλως ἡ ἀ ν ο μ ο ι ο μ ο ρ φ ί α τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς (κατά πόσον δηλαδή αἱ ἐν λόγῳ τιμαί τῆς μεταβλητῆς εἶναι ἐντόνως ἤ ὄχι συγκεντρωμέναι) καί κατά συνέπειαν ὁ βαθμός ὁ μ ο ι ο γ ε ν ε ί α ς τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τήν ὑπό μελέτην μεταβλητήν.

(γ) μετρᾶται ἡ ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α τῆς κατανομῆς, ὁ βαθμός δηλαδή ἀποκλίσεως τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης συχνότητος ἀπό μίαν σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή ν περί τό σημεῖον συγκεντρώσεως καμπύλην καί τέλος

(δ) μετρᾶται ἡ κ ύ ρ τ ω σ ι ς τῆς κατανομῆς δηλαδή τό π ε π λ α τ υ σ μ έ ν ο ν ἤ μή (ἤ ἀντιστοίχως ἡ α ἰ χ μ η ρ ό τ η ς) τῆς καμπύλης συχνότητος περί τό σημεῖον συγκεντρώσεως ἤ τό σημεῖον τό ὁποῖον παρουσιάζει τήν μεγίστην συχνότητα.

Τά ὡς ἄνω μέτρα θ έ σ ε ω ς, δ ι α σ π ο ρ ᾶ ς, ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς καί κ υ ρ τ ό τ η τ ο ς πραγματευόμεθα διεξοδικῶς κατωτέρω. Δεδομένου ὅτι τά ἐν λόγῳ μέτρα ἐκφράζονται ἐν γένει ὡς συναρτήσεις ὡρισμένων ἄλλων χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν - τῶν ρ ο π ῶ ν - τῶν ἀντιστοίχων κατανομῶν συχνότητος θά ἀσχοληθῶμεν μέ αὐτάς εἰς ἰδιαιτέραν παράγραφον. Ὁ ὑπολογισμός τῶν ὡς ἄνω παραμέτρων εἶναι ἐξ ἀντικειμένου ἀδύνατος εἰς τάς περιπτώσεις κατηγορικῶν καί ποιοτικῶν μεταβλητῶν καί ὡς ἐκ τούτου κατωτέρω περιοριζόμεθα μόνον εἰς περιπτώσεις π ο σ ο τ ι κ ῶ ν - συνεχῶν καί ἀσυνεχῶν - κατανομῶν.

Κατά τούς ὑπολογισμούς τῶν ἐν λόγῳ παραμέτρων θά διακρίνωμεν τάς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

(α) Ὅταν αἱ τιμαί τῆς ποσοτικῆς μεταβλητῆς Χ, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τάς N ἐπί μέρους μονάδας τοῦ ὑπό μελέτην πληθυσμοῦ, θεωροῦνται μ ε μ ο ν ω μ έ ν ω ς (περίπτωσις ἁ π λ ῶ ν δεδομένων) καί

(β) Ὅταν αἱ ἐν λόγῳ τιμαί ὁμαδοποιοῦνται καί τά δεδομένα παρουσιάζονται ὑπό μορφήν μιᾶς συνεχοῦς ἤ ἀσυνεχοῦς κατανομῆς συχνότητος (περίπτωσις τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων).

Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς Χ συμβολίζομεν μέ $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N$ ἤ συνοπτικώτερον $x_i$, $i=1,2,3,\ldots,N$. Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν χρησιμοποιοῦμεν διά τήν ἀντίστοιχον κατανομήν τόν κατωτέρω συμβολισμόν.

Πίναξ 3.1

| Τάξεις Τιμῶν τῆς Μεταβλητῆς | Κεντρικαί Τιμαί τῶν Τάξεων | Συχνότητες | |
|---|---|---|---|
| | | Ταξικαί | Ἀθροιστικαί |
| Χ | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
| $\alpha_o - \alpha_1$ | $x_1$ | $f_1$ | $F_1$ |
| $\alpha_1 - \alpha_2$ | $x_2$ | $f_2$ | $F_2$ |
| .... | .. | .. | .. |
| $\alpha_{i-1} - \alpha_i$ | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
| .... | .. | .. | .. |
| $\alpha_{k-1} - \alpha_k$ | $x_k$ | $f_k$ | $F_k$ |

Τά σύμβολα $f_i$ καί $F_i$ θά χρησιμοποιοῦνται ἀπό τοῦδε τόσον διά τάς ἀπολύτους ὅσον καί διά τάς σχετικάς - ταξικάς καί ἀθροιστικάς ἀντιστοίχως - συχνότητας δεδομένου ὅτι οὐδείς λόγος ὑφίσταται διά τήν διαφοροποίησιν ἀπολύτων καί σχετικῶν συχνοτήτων εἰς τούς παρατιθεμένους κατωτέρω στατιστικούς τύπους. Τό ἄθροισμα αὐτῶν θά εἶναι φυσικά ἴσον πρός Ν ἤ ἴσον πρός τήν μονάδα (ἤ 100%) ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως.

## 3.2 Μέτρα Θέσεως ἤ Μέσοι Ὅροι

Τό σημαντικώτερον καί συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον εἰς τήν πρᾶξιν μέτρον θ έ σ ε ω ς (καλούμενον πολλάκις δι' εὐνοήτους λόγους καί μέτρον κ ε ν τ ρ ι κ ῆ ς τ ά σ ε ω ς) εἶναι ὁ ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς μ έ σ ο ς ὅ ρ ο ς ἤ ἄλλως μ έ σ ο ς ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς. Ἐν ἄλλοι, ἐπίσης εὐρείας ἐφαρμογῆς καί χρησιμότητος μέτρον θέσεως, εἶναι ἡ δ ι ά μ ε σ ο ς τ ι μ ή ἤ ἁπλῶς δ ι ά μ ε σ ο ς. Πέραν αὐτῶν εἰς ἄκρως ἐξειδικευμένας περιπτώσεις χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης ὁ μ έ σ ο ς γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ό ς, ὁ μ έ σ ο ς ἁ ρ μ ο ν ι κ ό ς καί ἡ ἐ π ι κ ρ α τ ο ῦ σ α τ ι μ ή ἤ σ η μ ε ῖ ο ν μ ε γ ί σ τ η ς σ υ χ ν ό τ η τ ο ς.

### 3.2.1 Ἀριθμητικὸς Μέσος Ὅρος

Μ έ σ ο ς Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς (Μ.Α.) δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται τό πηλῖκον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διά τοῦ πλήθους των. Ὁ Μ.Α. συμβολίζεται συνήθως διά τοῦ γράμματος μ καί ὑπολογίζεται ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως ὡς ἑξῆς:

α) <u>Περίπτωσις ἁ π λ ῶ ν δεδομένων</u>

Αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς X εἶναι $x_1$, $x_2$, $x_3$,...,$x_N$ ἤ ἄλλως $x_i$, $i=1,2,3,\ldots,N$. Ὁ μέσος ἀριθμητικός ὑπολογίζεται εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν διά τοῦ τύπου

$$\mu=\frac{1}{N}(x_1+x_2+\ldots+x_N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3.1}$$

Παράδειγμα: Ἐάν τά ἀναστήματα πέντε (N=5) ἐνηλίκων ἀνδρῶν εἰς ἑκατοστά τοῦ μέτρου εἶναι 172, 166, 171, 178, 158 ὁ μέσος (ἀριθμητικός) αὐτῶν εἶναι

$$\mu=\frac{1}{5}(172+166+171+178+158) = 169$$ ἑκατοστά.

β) Περίπτωσις τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων

Αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς X εἶναι ὁμαδοποιημέναι καί τά δεδομένα παρουσιάζονται εἰς τήν κατανομήν τοῦ πίνακος (3.1).

Δεδομένου ὅτι ἀγνοοῦμεν πλέον τάς ἀκριβεῖς καί συγκεκριμένας τιμάς τῆς μεταβλητῆς X, ὑποθέτομεν, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὅτι ἅπασαι αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως ἔχουν ὡς τιμήν τήν ἀντίστοιχον κεντρικήν τιμήν τῆς τάξεως. Οὕτω, αἱ $f_i$ μονάδες τῆς i τάξεως ($i=1,2,3,\ldots,k$) συμβάλλουν εἰς τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν δεδομένων τ ό π ο σ ό ν $x_i$ ἐ π α ν α λ α μ β α ν ό μ ε ν ο ν ὡ ς π ρ ο σ θ ε τ έ ο ν $f_i$ φ ο ρ ά ς, ἤτοι συμβάλλουν συνολικῶς κατά τό ποσόν $f_i x_i$. Κατά συνέπειαν εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων ὁ Μ.Α. δέον νά ὑπολογίζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου:

$$\mu=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_kx_k}{f_1+f_2+\ldots+f_k}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (3.2)$$

Διευκρινίζεται διά μίαν ἀκόμη φοράν ὅτι τό σύμβολον $f_i$ εἶναι δυνατόν νά παριστᾷ εἴτε ἀπολύτους εἴτε σχετικάς συχνότητας καθ'ὅσον ἡ διαίρεσις ἀριθμητοῦ καί παρονομαστοῦ τοῦ ὡς ἄνω κλάσματος διά τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ N οὐδόλως ὡς γνωστόν μεταβάλλει τήν τιμήν τοῦ κλάσματος. Προφανῶς εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν τό ἄθροισμα

$$\sum_{i=1}^{k} f_i$$

εἶναι τό συνολικόν πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ N, ἐνῶ εἰς τήν δευτέραν εἶναι ἡ μονάς ἤ ὁ ἀριθμός 100 ἐάν αἱ συχνότητες ἔχουν ἐκφρασθῆ εἰς ποσοστόν ἐπί τοῖς %.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, δεδομένου ὅτι κατά τόν ὑπολογισμόν τοῦ Μ.Α. ἑκάστη κεντρική τιμή $x_i$ παρουσιάζει ἰδίαν σημασίαν - ἰδιαίτερον β ά ρ ο ς - ἀντανακλώμενον εἰς τήν συχνότητα $f_i$ τῆς ἀντιστοίχου τάξεως, δηλαδή εἰς τόν ἀριθμόν τῶν ἐπαναλήψεων ἑκάστης κεντρικῆς τιμῆς ὡς προσθετέου εἰς τό γενικόν ἄθροισμα τῶν δεδομένων, ὁ Μ.Α. καλεῖται συνήθως σ τ α θ μ ι κ ό ς ἐν ἀντιθέσει πρός ἐκεῖνον τῆς περιπτώσεως τῶν ἁπλῶν δεδομένων ὁ ὁποῖος λέγεται ἀ π λ ο ῦ ς ἤ ἀ σ τ ά θ μ η τ ο ς.

Κατωτέρω παραθέτομεν παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τοῦ σταθμικοῦ Μ.Α. ἐκ ταξινομημένων δεδομένων εἰς ἀσυνεχεῖς καί συνεχεῖς - ἴσου καί ἀνίσου πλάτους - κατανομάς εἰς τά ὁποῖα ἐμφαίνονται οἱ ἀπαιτούμενοι ὑπολογισμοί καί ἡ ἐφαρμοζομένη συνήθως τεχνική. Εἰς ἅπαντα τά παραδείγματα χρησιμοποιοῦμεν σχετικάς συχνότητας ἐκπεφρασμένας εἰς ποσοστά ἐπί τοῖς %.

Πίναξ 3.2

Ποσοστιαία κατανομή τῶν παραγομένων ὑπό τινος ἐργοστασίου κυτίων τῶν 25 φυσιγγίων ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ (X) τῶν σκάρτων φυσιγγίων εἰς αὐτά

| Δεδομένα | | Ὑπολογισμοί |
|---|---|---|
| $X_i$ | $f_i$(%) | $f_i x_i$ |
| 0 | 25 | 0 |
| 1 | 30 | 30 |
| 2 | 22 | 44 |
| 3 | 16 | 48 |
| 4 | 5 | 20 |
| 5 | 2 | 10 |
| | 100 | 152 |

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (3.2) λαμβάνομεν:

$\mu=\frac{152}{100}$ = 1,52 σκάρτα φυσίγγια κατά κυτίον.

Πίναξ 3.3

Ποσοστιαία κατανομή 900 μαθητῶν ἀναλόγως τοῦ βάρους (X) αὐτῶν εἰς κιλά

| Δεδομένα | | | Ὑπολογισμοί |
|---|---|---|---|
| Τάξεις τῆς X | Κεντρική Τιμή $X_i$ | $f_i$(%) | $f_i x_i$ |
| 45 - 50 | 47,5 | 2 | 95,0 |
| 50 - 55 | 52,5 | 4 | 210,0 |
| 55 - 60 | 57,5 | 15 | 862,5 |
| 60 - 65 | 62,5 | 21 | 1.312,5 |
| 65 - 70 | 67,5 | 32 | 2.160,0 |
| 70 - 75 | 72,5 | 17 | 1.232,5 |
| 75 - 80 | 77,5 | 5 | 387,5 |
| 80 - 85 | 82,5 | 3 | 247,5 |
| 85 - 90 | 87,5 | 1 | 87,5 |
| | | 100 | 6.595,0 |

Σημείωσις: Τά πρῶτα ὅρια τῶν τάξεων δέν περιλαμβάνονται εἰς αὐτάς.

Ἐνταῦθα ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (3.2) λαμβάνομεν:

$$\mu = \frac{6.595,0}{100} = 65,95 \text{ κιλά}$$

Πίναξ 3.4

Ποσοστιαία κατανομή τῶν νοικοκυριῶν μιᾶς χώρας ὡς πρός τό μηνιαῖον εἰσόδημα αὐτῶν (X)

| Δεδομένα | | | Ὑπολογισμοί |
|---|---|---|---|
| Τάξεις τῆς (X) | $X_i$ | $f_i$(%) | $f_i x_i$ |
| 0- 200 | 100 | 6 | 600 |
| 200- 500 | 350 | 18 | 6.300 |
| 500- 1.000 | 750 | 28 | 21.000 |
| 1.000- 2.000 | 1.500 | 21 | 31.500 |
| 2.000- 5.000 | 3.500 | 15 | 52.500 |
| 5.000-10.000 | 7.500 | 8 | 60.000 |
| 10.000-20.000 | 15.000 | 4 | 60.000 |
| | | 100 | 231.900 |

Σημείωσις: Τά πρῶτα ὅρια τῶν τάξεων δέν περιλαμβάνονται εἰς αὐτάς.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.2) λαμβάνομεν:

$$\mu = \frac{231.900}{100} = 2.319$$

'Εκ τοῦ τύπου (3.2) ὡς καί τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων καθίσταται προφανές ὅτι προκειμένου περί ἀ ν ο ι κ τ ῶ ν κατανομῶν, ὅπου δέν εἶναι γνωσταί αἱ κεντρικαί τιμαί ὅλων τῶν τάξεων, ὁ ὑπολογισμός τοῦ Μ.Α. εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ς. 'Εξ ἄλλου, εἰς πολλάς περιπτώσεις ταξινομημένων δεδομένων καί ἰδιαιτέρως ὅταν αἱ κεντρικαί τιμαί τῶν τάξεων εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί - ὡς π.χ. ἐκεῖνοι τοῦ πίνακος (3.3) - ὁ ὑπολογισμός τοῦ Μ.Α. καθίσταται δυσχερής λόγῳ τῶν ἀπαιτουμένων μακροσκελῶν πράξεων. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς πρός ἁπλούστευσιν τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν ἐφαρμόζεται πολλάκις ἡ καλουμένη ἔ μ μ ε σ ο ς μέθοδος ὑπολογισμοῦ τοῦ Μ.Α., ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τόν μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ό ν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων διά τῆς μ ε τ α φ ο ρ ᾶ ς τῆς ἀ ρ χ ῆ ς τῶν μετρήσεων καί τῆς ἀ λ λ α γ ῆ ς τῆς ἀντιστοίχου μ ο ν ά δ ο ς. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν χρησιμοποιοῦμεν κατά κανόνα ὡς ἀρχήν μετρήσεως μία τῶν κ ε ν τ ρ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν - συνήθως μίαν ἐκ τῶν μεσαίων τοιούτων πρός ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἁπλουστεύσεως - καί μετροῦμεν πλέον τάς ἀποκλίσεις τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἤ καλλίτερον τῶν ὑπολοίπων κεντρικῶν τιμῶν ἀπό αὐτήν μέ μονάδα μετρήσεως τό κοινόν πλάτος τῶν τάξεων. Εἰς τήν περίπτωσιν π.χ. τοῦ πίνακος (3.3) ἐνδείκνυται ἡ χρησιμοποίησις ὡς ἀρχῆς τῶν μετρήσεων τῆς κεντρικῆς τιμῆς 67,5 καί ὡς μονάδος μετρήσεως τῶν βαρῶν τό πλάτος τῶν τάξεων ἤτοι τά 5 κιλά. Δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ἔμμεσος μέθοδος, μολονότι δύναται νά χρησιμοποιηθῇ καί εἰς τάς περιπτώσεις κατανομῶν ἀνίσου πλάτους, ἐφαρμόζεται κατά κανόνα μόνον εἰς κατανομάς ἴ σ ο υ πλάτους διότι ἐκεῖ τά ἐξ αὐτῆς πλεονεκτήματα - πραγματοποιούμεναι ἁπλουστεύσεις - εἶναι πράγματι σημαντικά.

Οὕτω, ἐάν $x_o$ συμβολίζει τήν ἐπιλεγεῖσαν ὡς νέαν ἀρχήν τῶν μετρήσεων κεντρικήν τιμήν καί δ τό κοινόν πλάτος τῶν τάξεων τῆς κατανομῆς, εἰς τήν οἱανδήποτε κεντρικήν τιμήν $x_i$, $i=1,2,3,\dots,k$ θά ἀντιστοιχῇ ὡς νέα τιμή ἡ μετασχηματισμένη τοιαύτη $t_i$ προκύπτουσα ἐκ τοῦ κατωτέρω τύπου μετασχηματισμοῦ.

$$t_i=\frac{x_i-x_o}{\delta} \qquad (3.3)$$

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.3) ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι

$$x_i = x_o + \delta t_i \tag{3.4}$$

ὁ τύπος (3.2) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_o + \delta t_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{x_o \sum_{i=1} f_i + \delta \sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$ καί τελικῶς

$$\mu = x_o + \delta \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = x_o + \delta \bar{t} \tag{3.5}$$

ὅπου $\bar{t}$ συμβολίζει ἕνα βοηθητικόν Μ.Α., τόν σταθμικόν Μ.Α. τῶν μετασχηματισμένων - βοηθητικῶν - τιμῶν $t_i$.

Ὁ τρόπος ἐφαρμογῆς τῆς ἐμμέσου μεθόδου - τοῦ τύπου δηλαδή (3.5) - διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ Μ.Α. καί αἱ πραγματοποιούμεναι ἁπλοποιήσεις ἐμφαίνονται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (3.3.α) χρησιμοποιουμένων καί πάλιν τῶν δεδομένων τῆς κατανομῆς τοῦ πίνακος (3.3).

Πίναξ 3.3.α

Ποσοστιαία κατανομή βαρῶν 900 μαθητῶν

| Τάξεις τῆς (X) | $x_i$ | $f_i$(%) | $t_i$ | $f_i t_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 45 - 50 | 47,5 | 2 | -4 | - 8 |
| 50 - 55 | 52,5 | 4 | -3 | -12 |
| 55 - 60 | 57,5 | 15 | -2 | -30 |
| 60 - 65 | 62,5 | 21 | -1 | -21 |
| 65 - 70 | 67,5 | 32 | 0 | 0 |
| 70 - 75 | 72,5 | 17 | 1 | 17 |
| 75 - 80 | 77,5 | 5 | 2 | 10 |
| 80 - 85 | 82,5 | 3 | 3 | 9 |
| 85 - 90 | 87,5 | 1 | 4 | 4 |
| | | 100 | | -31 |

Κατά τήν έφαρμογήν τῆς έμμέσου μεθόδου είς τά δεδομένα τοῦ πίνακος (3.3.α) έπελέγη ὡς νέα άρχή τῶν μετρήσεων ἡ κεντρική τιμή $x_o$=67,5 καί ὡς νέα μονάς μετρήσεως τό κοινόν πλάτος τῶν τάξεων δ=5 τῇ βοηθείᾳ δέ τοῦ τύπου (3.3) ύπελογίσθησαν αί μετασχηματισμέναι - βοηθητικαί - τιμαί $t_i$. Οὕτω, είς τήν κεντρικήν τιμήν $x_5$=67,5 άντιστοιχεῖ ἡ νέα τιμή

$$t_5=\frac{x_5-x_o}{\delta}=\frac{67,5-67,5}{5}=0$$

είς τήν $x_6$=72,5 ἡ τιμή $t_6=\frac{72,5-67,5}{5}=1$

είς τήν $x_2$=52,5 ἡ τιμή $t_2=\frac{52,5-67,5}{5}=-3$ κ.ο.κ.

Ἐν συνεχείᾳ ύπελογίσθησαν τά γινόμενα $f_it_i$, τό ἄθροισμα $\Sigma f_it_i=-31$, ὁ βοηθητικός μέσος

$$\bar{t}=\frac{\Sigma f_it_i}{\Sigma f_i}=\frac{-31}{100}=-0,31$$

καί δι'έφαρμογῆς πλέον τοῦ τύπου (3.5) προέκυψεν ὁ Μ.Α. τῆς ύπ'ὄψιν κατανομῆς ἤτοι

$$\mu=67,5-5\times 0,31=67,5-1,55=65,95$$

ὁ ὁποῖος φυσικά εἶναι ὁ αύτός μέ τόν ύπολογισθέντα προηγουμένως δι'έφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.2) - ἄ μ ε σ ο ς μέθοδος - Μ.Α. τῆς κατανομῆς.

**Ἰδιότητες τοῦ Μέσου Ἀριθμητικοῦ**

Παραθέτομεν κατωτέρω ὡρισμένας χαρακτηριστικάς ἰ δ ι ό τ η τ α ς τοῦ Μ.Α. - ἁ π λ ο ῦ ἤ σ τ α θ μ ι κ ο ῦ - είς μίαν τῶν ὁποίων βασίζεται καί ἡ έκτεθεῖσα άνωτέρω ἔμμεσος μέθοδος ύπολογισμοῦ αύτοῦ.

(α) Ἐάν ἡ μεταβλητή Χ εἶναι μία σ τ α θ ε ρ ά, έάν δηλαδή $x_1=x_2=\ldots=x_N=\alpha$ τότε ὁ Μ.Α. ἰσοῦται πρός

τήν σταθεράν, ἤτοι $\mu=\alpha$.
'Απόδειξις: 'Εκ τοῦ τύπου (3.1) ἔχομεν

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha=\frac{1}{N}N\alpha=\alpha$$

(β) 'Ο Μ.Α. $\mu$ εἶναι πάντοτε μεταξύ τῆς ἐλαχίστης καί μεγίστης τιμῆς τῆς μεταβλητῆς, ἤτοι

$$\min(x_i) < \mu < \max(x_i),\ i=1,2,\ldots,N$$

'Απόδειξις: Πάλιν ἐκ τοῦ τύπου (3.1) ἔχομεν

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i < \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max(x_i) = \frac{1}{N}N\max(x_i)$$

καί συνεπῶς $\mu<\max(x_i)$. 'Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\min(x_i)<\mu$.

(γ) Τό ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων (διαφορῶν) τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀπό τοῦ Μ.Α. $\mu$ εἶναι πάντοτε ἴσον πρός 0.
'Απόδειξις: 'Εφαρμόζοντες γνωστάς ἰδιότητας τῶν ἀθροιστῶν καί τόν τύπον (3.1) ἔχομεν

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu) = \sum_{i=1}^{N}x_i-N\mu = N\mu-N\mu = 0$$

Εἰς περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν τόν τύπον (3.2) ὅτε

$$\sum_{i=1}^{k}f_i(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{k}f_ix_i-\mu\sum_{i=1}^{k}f_i=0.$$

(δ) 'Εάν α καί β δύο οἱοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί καί $\mu_X$ ὁ Μ.Α. τῆς μεταβλητῆς Χ, τότε ὁ Μ.Α. τῆς μεταβλητῆς Υ ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τοῦ γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ $Y=\alpha+\beta X$ εἶναι $\mu_Y=\alpha+\beta\mu_X$.
'Απόδειξις: 'Εκ τοῦ τύπου (3.1) προκύπτει ὅτι

$$\mu_Y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\alpha+\beta x_i) =$$

$$= \frac{1}{N}N\alpha+\beta\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \alpha+\beta\mu_x.$$

'Αλλά καί εἰς περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων ἐκ τοῦ τύπου (3.2) ἔχομεν

$$\mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i y_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(\alpha+\beta x_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i} =$$

$$= \frac{\alpha \sum_{i=1}^{k} f_i+\beta \sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \alpha+\beta\mu_x.$$

'Εκ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς προκύπτουν τά ἑξῆς δύο μερικώτερα πορίσματα

(i) 'Εάν ὅλαι αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς X αὐξηθοῦν κατά σταθεράν ποσότητα α καί ὁ Μ.Α. αὐξάνει κατά τήν αὐτήν ποσότητα. Τοῦτο φαίνεται ἐάν θέσωμεν ἀνωτέρω β=1.

(ii) 'Εάν ὅλαι αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς X πολλαπλασιασθοῦν ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν β - τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρός σταθεράν π ο σ ο σ τ ι α ί α ν αὔξησιν ἤ μείωσιν αὐτῶν - καί ὁ Μ.Α. πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν αὐτόν ἀριθόν β. Τοῦτο καθίσταται προφανές ἄν θέσωμεν ἀνωτέρω α=0.

'Επί τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος (δ) βασίζεται προφανῶς ἡ ἔμμεσος μέθοδος. Πράγματι αἱ βοηθητικαί τιμαί $t_i$ προκύπτουν ἐκ τῶν $x_i$ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τόν ὡς ἄνω μετασχηματισμόν

$\alpha=-\frac{x_o}{\delta}$ καί $\beta=\frac{1}{\delta}$ ὅτε $t_i=\alpha+\beta x_i=\frac{-x_o}{\delta}+\frac{1}{\delta}x_i=\frac{x_i-x_o}{\delta}$

(ε) 'Εάν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ εἶναι οἱ Μ.Α. ὁμάδων - ὑποπληθυσμῶν - περιλαμβανουσῶν ἀντιστοίχους $N_1, N_2, \ldots, N_k$ μονάδας, ὁ Μ.Α. τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁμάδων πληθυσμοῦ, μεγέθους προφανῶς $N = N_1+N_2+\ldots+N_k$, εὑρίσκεται ὡς σταθμικός μέσος τῶν ὡς ἄνω ἐπί μέρους Μ.Α. διά τοῦ κατωτέρω τύπου

$$\mu = \frac{N_1\mu_1+N_2\mu_2+\ldots+N_k\mu_k}{N_1+N_2+\ldots+N_k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i\mu_i \qquad (3.6)$$

'Απόδειξις: 'Ως προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (3.1) ἡ ποσότης $N_i\mu_i$, $i=1,2,\ldots,k$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς τόν ὑποπληθυσμόν $i=1,2,\ldots,k$. Συνεπῶς

$$\sum_{i=1}^{k} N_i\mu_i$$

εἶναι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς τόν σύνθετον πληθυσμόν καί τό πηλίκον αὐτοῦ διά Ν - τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων του - δίδει τόν Μ.Α. τοῦ συνθέτου πληθυσμοῦ.

Ἕν παράδειγμα ἐπί τῆς τελευταίας ἰδιότητος θά διευκρινίσῃ ἴσως καλλίτερον τήν χρησιμότητα καί τάς ἐφαρμογάς της. 'Υποθέσωμεν ὅτι εἰς ἕν ἐργοστάσιον ἐργάζονται 80 εἰδικευμένοι ἄνδρες μέ μέσον ἡμερομίσθιον $\mu_1=200$ δρχ., 120 εἰδικευμέναι ἐργάτριαι μέ μέσον ἡμερομίσθιον $\mu_2=140$ δρχ. καί 50 μαθητευόμενοι μέ μέσον ἡμερομίσθιον $\mu_3 = 80$ δρχ. καί ζητοῦμεν τό μέσον ἡμερομίσθιον μ ὅλων τῶν ἐργατῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἐργοστασίου.

Προφανῶς $\mu = \frac{80\times200+120\times140+50\times80}{80+120+50} = \frac{36.800}{250} = 147{,}2$ δρχ.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων προκύπτει ὅτι ὁ Μ.Α. εἶναι ἕν ἁπλούστατον - εἰς τόν ὑπολογισμόν καί τήν κατανόησιν - μέτρον θέσεως τό ὁποῖον δηλοῖ τό σημεῖον ἤ ἄλλως τήν τιμήν τῆς μεταβλητῆς περί τήν ὁποίαν τείνουν νά συγκεντρωθοῦν αἱ ἐπί μέρους τιμαί αὐτῆς καί ἐν γένει τήν θέσιν τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς κατά μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων ὅπου καί μετρᾶται ἡ ὑπό μελέτην μεταβλητή. Διά τούς λόγους αὐτούς, μολονότι παρουσιάζει ὡρισμένα μειονεκτήματα τά ὁποῖα θά ἀναφέρωμεν κατωτέρω εἰς τά περί διαμέσου, ὁ Μ.Α. εἶναι τό συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον μέτρον πρός συνοψισμόν καί ἀντιπροσώπευσιν τοῦ συνόλου τῶν ἐπί μέρους τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς.

### 3.2.2 Διάμεσος

Διάμεσος Τιμή ἤ ἁπλῶς Διάμεσος δοθέντων ἀριθμῶν - τιμῶν ἐν γένει μιᾶς μεταβλητῆς X - καλεῖται μία τιμή τῆς μεταβλητῆς τοιαύτη ὥστε τό ἥμισυ τῶν δεδομένων τιμῶν νά εἶναι μικρότεραι ἤ ἴσαι αὐτῆς καί τό ἄλλο ἥμισυ μεγαλύτεραι.

Ἡ διάμεσος συμβολίζεται συνήθως διά τοῦ γράμματος M καί ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

α) Περίπτωσις ἁπλῶν δεδομένων

Τά δεδομένα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ - αἱ N τιμαί τῆς μεταβλητῆς - διατάσσονται κατά τάξιν μεγέθους αὐξανομένου ἤ γενικώτερον μή ἐλαττουμένου. Ἡ διάμεσος M εἶναι τότε - συμφώνως πρός τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν - ὁ ὅρος ὁ κατέχων τήν $\frac{N+1}{2}$ τάξιν ἐάν τά δεδομένα εἶναι περιττά τῷ πλῆθος, ἤ ὁ ὅρος ὁ κατέχων τήν $\frac{N}{2}$ τάξιν ἐάν τά δεδομένα εἶναι ἄρτια τῷ πλῆθος.

Οὕτω, ἐάν $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(N)}$ εἶναι τά δεδομένα διατεταγμένα κατ' ἀνιοῦσαν τάξιν μεγέθους, ἐάν δηλαδή τό $x_{(1)}$ συμβολίζει τήν ἐλαχίστην ἐκ τῶν τιμῶν $x_i$, $i=1,2,\ldots,N$, τό $x_{(2)}$ τήν ἀμέσως μεγαλυτέραν κ.ο.κ. ἡ διάμεσος M εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

$M=x_{(\lambda+1)}$ ἐάν $N=2\lambda+1$ (περιττός) καί

$M=x_{(\lambda)}$ ἐάν $N=2\lambda$ (ἄρτιος)

Παράδειγμα: ('Η διάμεσος Μ σημειοῦται ἐντός πλαισίου ☐ )

(i) 4,7,8,$\boxed{12}$,13,17,20 διότι N=7 περιττός, $\frac{N+1}{2}=4$

(ii) 14,18,$\boxed{22}$,25,40,60 " N=6 ἄρτιος, $\frac{N}{2}=3$

(iii) 2,3,3,3,4,$\boxed{4}$,5,6,6,7,8 " N=11 περιττός, $\frac{N+1}{2}=6$

(iv) 3,4,4,$\boxed{5}$,5,5,6,6 " N=8 ἄρτιος, $\frac{N}{2}=4$

Εἶναι προφανές ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν ἀρτίων τῷ πλῆθος δεδομένων θά ἠδυνάμεθα - ἐφαρμόζοντες τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν - νά θεωρήσωμεν ὡς διάμεσον Μ καί οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν μεταξύ τῶν δύο μεσαίων ὅρων τῆς διατεταγμένης ἀκολουθίας τῶν δεδομένων ἤ τουλάχιστον οἱονδήποτε ἀκέραιον τοιοῦτον ἐάν τυχόν ἡ μεταβλητή δύναται νά λάβη ἀκεραίας μόνον τιμάς. Οὕτω εἰς τό παράδειγμα (ii) θά ἠδυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς διάμεσον τούς ἀριθμούς 23,24 κλπ. Πρός ἄρσιν τῆς ἐν λόγῳ ἀ ο ρ ι σ τ ί α ς χρησιμοποιεῖται πολλάκις ὡς διάμεσος τό ἡ μ ι ά θ ρ ο ι σ μ α τῶν δύο μεσαίων ὅρων, ἤτοι $\frac{22+25}{2}=23,5$. Δεδομένου ὅτι ἡ ἀκολουθητέα λύσις εἶναι καθαρῶς ζήτημα συμφωνίας, ὡς διάμεσος θά λαμβάνεται πάντοτε ὁ ὅρος ὁ κατέχων τήν $\frac{N}{2}$ τάξιν ἤτοι ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δύο μεσαίων τοιούτων ὡς ἄλλωστε ἐγένετο καί εἰς τό ἐν λόγῳ παράδειγμα (ii).

Μία ἄλλη ἀοριστία κατά τόν ὑπολογισμόν τῆς διαμέσου εἶναι δυνατόν νά προκύψη εἰς τάς περιπτώσεις ὑπάρξεως δ ε σ μ ῶ ν δηλαδή ταυτότητος δύο ἤ περισσοτέρων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ὡς εἰς τά παραδείγματα (iii) καί (iv). Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἡ διάμεσος ὑπολογιζομένη ἐπί τῇ βάσει τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ εἶναι δυνατόν νά μή χωρίζη τά δεδομένα ἀκριβῶς εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδας. Καί ἐν προκειμένῳ ὅμως ἡ λύσις εἶναι καθαρῶς σ υ μ β α τ ι κ ή καί ὡς διάμεσος θά λαμβάνεται ὁ ὅρος ὁ κατέχων τ υ π ι κ ῶ ς τήν $\frac{N+1}{2}$ ἤ $\frac{N}{2}$ τάξιν ἀντιστοίχως, ἀνεξαρτήτως ἐάν ὁ ἴδιος ὅρος κατέχει καί ἄλλας θέσεις διαφόρου τάξεως (παραπλεύρως πρός τά ἀριστερά ἤ τά δεξιά). Τοῦτο ἐμφαίνηται εἰς τά παραδείγματα (iii) καί (iv).

β) Περίπτωσις τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς ὁμαδοποιημέναι καταλλήλως παρουσιάζονται ὑπό μορφήν μιᾶς κατανομῆς συχνότητος - συνεχοῦς ἤ ἀσυνεχοῦς - ὡς ἐκείνη τοῦ Πίνακος (3.1).

Ἐν προκειμένῳ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καί πρός ὑπολογισμόν τῆς διαμέσου M ἐργαζόμεθα ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς:

1) Περίπτωσις σ υ ν ε χ ῶ ν κατανομῶν
(ὑφίσταται ἡ πρώτη στήλη τοῦ Πίνακος 3.1)

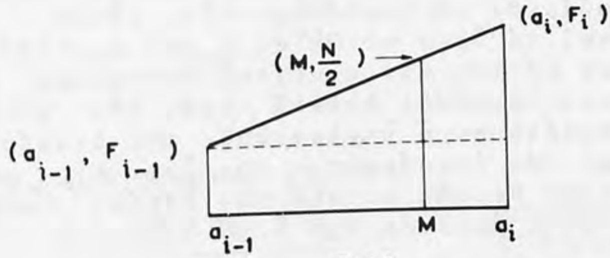
Καταρτίζομεν τήν ἀθροιστικήν σειράν $F_1, F_2, \ldots, F_N$ καί ἐπισημαίνομεν τούς ὅρους αὐτῆς μεταξύ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ ἀριθμός $\frac{N}{2}$ (ἤ ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί 0,5 ἤ 50% ἐάν ἐργαζόμεθα μέ τάς σχετικάς συχνότητας).

Ἔστω ὅτι $F_{i-1} < \frac{N}{2} < F_i$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ διάμεσος M περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ὁρίων $\alpha_{i-1}$ καί $\alpha_i$ τῆς τάξεως $(\alpha_{i-1}-\alpha_i)$ ἡ ὁποία εἶναι ἔναντι τοῦ μ ε γ α λ υ τ έ ρ ο υ ἐκ τῶν ὡς ἄνω δύο ὅρων τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς δηλαδή ἔναντι τοῦ ὅρου $F_i$. Πράγματι, δεδομένου ὅτι μ έ χ ρ ι  κ α ί τοῦ ὁρίου $\alpha_{i-1}$ ἀντιστοιχοῦν μόνον $F_{i-1}$ μονάδες, ὀλιγώτεραι δηλαδή τῶν ἀπαιτουμένων $\frac{N}{2}$, ἡ διάμεσος M δέον νά εὑρίσκεται κάπου μεταξύ τῶν ὡς ἄνω ὁρίων, ἤτοι $\alpha_{i-1} < M < \alpha_i$. (Ἐξυπακούεται ὅτι ἐάν εἶναι ἀκριβῶς

$$\frac{N}{2} = F_{i-1} \quad ἤ \quad \frac{N}{2} = F_i$$

τότε ἡ διάμεσος M ταυτίζεται μέ τό ἕν ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἤτοι $M = \alpha_{i-1}$ ἤ $M = \alpha_i$ ἀντιστοίχως).

Προκειμένου νά ὑπολογίσωμεν ἐν συνεχείᾳ τήν συγκεκριμένην τιμήν τῆς διαμέσου M ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες μεταβάλλονται μετά τῆς μεταβλητῆς X γ ρ α μ μ ι κ ῶ ς - τοῦτο ἰσχύει ἐν γένει μόνον κατά προσέγγισιν - ἤτοι ὅτι τά σημεῖα $(\alpha_{i-1}, F_{i-1})$, $(M, \frac{N}{2})$ καί $(\alpha_i, F_i)$ εὑρίσκονται ἐπί εὐθείας γραμμῆς, (ἴδε Σχ. 3.1).




Σχ. 3,1

ὅτε ἔχομεν $\dfrac{M-\alpha_{i-1}}{\alpha_i-\alpha_{i-1}} = \dfrac{\frac{N}{2}-F_{i-1}}{F_i-F_{i-1}}$ .

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\alpha_i-\alpha_{i-1}=\delta_i$ (πλάτος τῆς i τάξεως) καί $F_i-F_{i-1}=f_i$ (συχνότης ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν i τάξιν) προκύπτει ὁ κατωτέρω τύπος

$$M = \alpha_{i-1} + \frac{\delta_i}{f_i}\left[\frac{N}{2} - F_{i-1}\right] \qquad (3.7)$$

ὅπου $\alpha_{i-1}$, $\delta_i$ καί $f_i$ τό ἔλασσον ὅριον, τό πλάτος καί ἡ συχνότης τῆς i τάξεως $(\alpha_{i-1}-\alpha_i)$ ἐντός τῶν ὁρίων τῆς ὁποίας εὑρέθη ὅτι ἀνήκει ἡ διάμεσος M κατά τόν προκαταρκτικόν ἐντοπισμόν τῶν ὅρων $F_{i-1}$ καί $F_i$ τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς μεταξύ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ἀντιστοίχως ὁ ἀριθμός $\frac{N}{2}$.

2) Περίπτωσις ἀ σ υ ν ε χ ῶ ν κατανομῶν
(δέν ὑφίσταται ἡ πρώτη στήλη τοῦ πίνακος 3.1)

'Εν προκειμένῳ ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῆς διαμέσου εἶναι πολύ ἁπλουστέρα. Δεδομένου ὅτι δέν ὑφίστανται τάξεις τιμῶν τῆς μεταβλητῆς - ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἐφαρμόζονται κατ'ἀναλογίαν τά λεχθέντα ἀνωτέρω - δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι αὗται ἔχουν συρρικνωθῆ καί τά ὅρια αὐτῶν $\alpha_{i-1}$ καί $\alpha_i$, $i=1,2,\ldots k$ συμπίπτουν μέ τάς ἀντιστοίχους κεντρικάς τιμάς $x_i$ μέ τάς διακεκριμένας δηλαδή τιμάς τῆς μεταβλητῆς. Κατά συνέπειαν ὁ ὑπολογισμός τῆς διαμέσου M περατοῦται μέ τήν ἐπισήμανσιν τῶν ὅρων $F_{i-1}$ καί $F_i$ τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς μεταξύ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός $\frac{N}{2}$ (ἤ ὁ ἀριθμός 0,5 ἤ τό 50%).

Πράγματι συμφώνως πρός τά λεχθέντα ἀνωτέρω ἡ διάμεσος M εὑρισκομένη μεταξύ τῶν ταυτιζομένων ὁρίων $\alpha_{i-1}$ καί $\alpha$ ἰσοῦται πρός τήν τιμήν $x_i$ τῆς μεταβλητῆς εἰς τήν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ὁ δεύτερος ἐκ τῶν ὡς ἄνω ὅρων τῆς ἀθροιστικῆς σειράς ἤτοι ὁ ὅρος $F_i$.

Τό ὅτι, ἐάν $F_{i-1} < \frac{N}{2} < F_i$ θά ἔχωμεν

$$M = x_i \tag{3.8}$$

ὅπου $x_i$ ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς ἔναντι τοῦ ὅρου $F_i$ τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς, καθίσταται προφανές ἄλλωστε καί ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ τιμή $x_i$ εἶναι ἡ κατέχουσα τήν θέσιν τάξεως $\frac{N}{2}$ εἰς τήν διατεταγμένην κατ' ἀνιοῦσαν τάξιν μεγέθους ἀκολουθίαν τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ὅπου ἡ τιμή $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ ἐπαναλαμβάνεται $f_i$ φοράς κ.ο.κ.

'Εφαρμόζοντες τά ἀνωτέρω εἰς τά δεδομένατῶν πινάκων (3.2), (3.3) καί (3.4) λαμβάνομεν:

α) 'Εκ τοῦ Πίνακος (3.2)

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 25 | 25 |
| 1 | 30 | 55 $>50$ |
| 2 | 22 | 77 |
| 3 | 16 | 93 |
| 4 | 5 | 98 |
| 5 | 2 | 100 |
| | 100 | |

Δεδομένου ὅτι $25<50<55$ ἡ διάμεσος $M=1$ (Τύπος 3.8)

β) 'Εκ τοῦ Πίνακος (3.3)

| X | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 45 - 50 | 2 | 2 |
| 50 - 55 | 4 | 6 |
| 55 - 60 | 15 | 21 |
| 60 - 65 | 21 | 42 |
| 65 - 70 | 32 | 74 $>50$ |
| 70 - 75 | 17 | 91 |
| 75 - 80 | 5 | 96 |
| 80 - 85 | 3 | 99 |
| 85 - 90 | 1 | 100 |
| | 100 | |

Δεδομένου ὅτι $42<50<74$ ἡ διάμεσος M περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ὁρίων τῆς τάξεως 65-70. Κατά συνέπειαν ἐφαρμόζοντες τόν τύπον (3.7) καί θέτοντες $\alpha_{i-1} = 65$, $\delta_i = 5$, $f_i = 32$, $F_{i-1} = 42$ λαμβάνομεν

$$M = 65 + \frac{5}{32}(50-42) = 65 + \frac{40}{32} = 66{,}25$$

γ) 'Εκ τοῦ Πίνακος (3.4)

| X | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|
| 0- 200 | 6 | 6 |
| 200- 500 | 18 | 24 |
| 500- 1.000 | 28 | 52 $>50$ |
| 1.000- 2.000 | 21 | 73 |
| 2.000- 5.000 | 15 | 88 |
| 5.000-10.000 | 8 | 96 |
| 10.000-20.000 | 4 | 100 |
| | 100 | |

Δεδομένου ὅτι $24<50<52$ ἡ διάμεσος M εὑρίσκεται εἰς τό διάστημα $500<M<1.000$. Κατά συνέπειαν $\alpha_{i-1}=500$, $\delta_i = 500$, $f_i = 28$, $F_i = 24$ καί ἐκ τοῦ τύπου (3.7) λαμβάνομεν

$$M = 500 + \frac{500}{28}(50-24) \simeq 964{,}3.$$

'Εκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω καθίστανται προφανῆ τά ἑξῆς δύο πλεονεκτήματα τῆς διαμέσου:

α) Ἡ διάμεσος - ἀντιθέτως πρός τόν μέσον ἀριθμητικόν - ὑπολογίζεται καί δι' ἀ ν ο ι κ τ ά ς κατανομάς δεδομένου ὅτι πρός τοῦτο ἀπαιτοῦνται μόνον αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ὅρια τῶν τάξεων καί ὄχι αἱ κεντρικαί τιμαί.

β) Ἡ διάμεσος - ἀντιθέτως πρός τόν μέσον ἀριθμητικόν - οὐδόλως ἐπηρεάζεται ἀπό τυχόν ἀκραίας-πολύ μεγάλας ἤ πολύ μικράς - τιμάς, δεδομένου ὅτι εἰς τόν ὑπολογισμόν αὐτῆς λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν μόνον ἡ ἱ ε ρ ά ρ χ η σ ι ς τῶν δεδομένων καί ὄχι τό πραγματικόν μέγεθος αὐτῶν. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ κάτωθι παραδείγματος:

Ὁ Μ.Α. τῶν δεδομένων 10, 12, 15, 17, 26 εἶναι μ=16. Ἐάν τό 26 γίνῃ 526, ὁ Μ.Α. τῶν δεδομένων 10, 12, 15, 17, 526 γίνεται μ=116 ἐνῶ ἡ διάμεσος εἶναι καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις Μ=15.

**Τεταρτημόρια, Δεκατημόρια, Ἑκατοστημόρια**

Εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις, προκειμένου νά ἐμβαθύνωμεν περισσότερον καί νά μελετήσωμεν λεπτομερέστερον καί συστηματικώτερον τήν δομήν ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός μίαν μεταβλητήν, καθίσταται ἀπαραίτητον ἤ τουλάχιστον ἀποδεικνύεται χρήσιμον ὅπως πέραν τῆς διαμέσου ὑπολογισθοῦν ὡρισμένα ἀκόμη παρεμφερῆ πρός αὐτήν χαρακτηριστικά μεγέθη - παράμετροι ἐν τῇ εὑρείᾳ ἐννοίᾳ - τῆς κατανομῆς, γνωστά ὡς τ ε τ α ρ τ η μ ό ρ ι α - π ρ ῶ τ ο ν καί τ ρ ί τ ο ν - δ ε κ α τ η μ ό ρ ι α, ἑ κ α τ ο σ τ η μ ό ρ ι α κ.ο.κ. Συγκεκριμένως τά ἐν λόγῳ μεγέθη ὁρίζονται καί ὑπολογίζονται ὡς ἑξῆς:

Π ρ ῶ τ ο ν τ ε τ α ρ τ η μ ό ρ ι ο ν ($Q_1$) καλεῖται μία τιμή τῆς μεταβλητῆς τοιαύτη ὥστε τό ἕν τέταρτον ($\frac{N}{4}$ ἤ 25%) τῶν δεδομένων τιμῶν νά εἶναι μι-κρότεραι ἤ ἴσαι αὐτῆς.

Τρίτον τεταρτημόριον ($Q_3$) καλεῖται μία τιμή τῆς μεταβλητῆς τοιαύτη ὥστε τά τρία τέταρτα ($\frac{3N}{4}$ ἤ 75%) τῶν δεδομένων τιμῶν νά εἶναι μικρότεραι ἤ ἴσαι αὐτῆς.

k-Δεκατημόριον ($D_k$) καλεῖται μία τιμή τῆς μεταβλητῆς τοιαύτη ὥστε τά k δέκατα ($\frac{kN}{10}$ ἤ 10k%) τῶν δεδομένων τιμῶν νά εἶναι μικρότεραι ἤ ἴσαι αὐτῆς.

k-Ἑκατοστημόριον ($P_k$) καλεῖται μία τιμή τῆς μεταβλητῆς τοιαύτη ὥστε τά k ἑκατοστά ($\frac{kN}{100}$ ἤ k%) τῶν δεδομένων τιμῶν νά εἶναι μικρότεραι ἤ ἴσαι αὐτῆς.

Ὁ ὑπολογισμός τῶν ἐν λόγῳ παραμέτρων γίνεται τόσον διά τάς συνεχεῖς κατανομάς ὅσον καί διά τάς ἀσυνεχεῖς τοιαύτας κατά τόν αὐτόν τρόπον πρός ἐκεῖνον τῆς διαμέσου καί δι'ἐφαρμογῆς ἀναλόγων τύπων.

Πρός διευκρίνησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ k-ἑκατοστημορίου $P_k$. Ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διαμέσου ἐπισημαίνομεν τούς δύο διαδοχικούς ὅρους τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς μεταξύ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός $\frac{kN}{100}$ ἤ τό ποσοστόν k%. Ὑποθέσωμεν ὅτι

$$F_{i-1} < \frac{kN}{100} < F_i$$

Ἀκολουθοῦντες τόν συλλογισμόν τόν ὁποῖον ἐχρησιμοποιήσαμεν προκειμένου περί τῆς διαμέσου συμπεραίνομεν ὅτι τό k-ἑκατοστημόριον $P_k$ εὑρίσκεται μεταξύ τῶν ὁρίων τῆς i-τάξεως (ἐκείνης ἡ ὁποία εἶναι ἔναντι τοῦ δευτέρου ἐκ τῶν ὡς ἄνω ὅρων τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς $F_i$) ἤτοι

$$\alpha_{i-1} < P_k < \alpha_i$$

ἐν συνεχείᾳ δέ διά καταλλήλου γραμμικῆς παρεμβολῆς (ἀναλόγου ἐκείνης τῆς διαμέσου) καταλήγομεν διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ $P_k$ εἰς τόν κατωτέρω τύπον:

$$P_k = \alpha_{i-1} + \frac{\delta_i}{f_i}\left(\frac{kN}{100} - F_{i-1}\right) \qquad (3.9)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ τύπος (3.9) ἐφαρμοζόμενος διά k=25, 50, 75 δίδει ἀντιστοίχως τό πρῶτον ($Q_1$), δεύτερον (διάμεσον M) καί τρίτον ($Q_3$) τεταρτημόριον. Ἐπίσης διά k=10, 20,...,90 δίδει τό πρῶτον ($D_1$), δεύτερον ($D_2$),.......καί ἔνατον ($D_9$) δεκατημόριον, κ.ο.κ.

Εἰς τάς περιπτώσεις ἀσυνεχῶν κατανομῶν αἱ ὡς ἄνω παράμετροι ὡς καί ἡ διάμεσος εὑρίσκονται ἀμέσως - δι' ἁπλῆς παρατηρήσεως - μετά τήν ἐπισήμανσιν τῶν ὅρων $F_{i-1}$ καί $F_i$ τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς μεταξύ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται ὁ ἀριθμός $\frac{kN}{100}$ κλπ. καί εἶναι ἡ ἔναντι τοῦ δευτέρου ὅρου $F_i$ τιμή τῆς μεταβλητῆς $x_i$ ἤτοι

$$P_k = x_i \qquad (3.10)$$

Ἐφαρμόζοντες τά ἀνωτέρω εἰς τά δεδομένα τῶν Πινάκων (3.2), (3.3) καί (3.4) λαμβάνομεν

α) Διά τήν κατανομήν τοῦ Πίνακος (3.2)

$Q_1=0 \quad Q_3=2 \quad D_4=1 \quad P_{86} = 3$ κ.ο.κ.

β) Διά τήν κατανομήν τοῦ Πίνακος (3.3)

$$Q_1=\alpha_{i-1}+\frac{\delta_i}{f_i}\left(\frac{N}{4}-F_{i-1}\right) = 60+\frac{5}{21}(25-21) \simeq 60{,}9$$

$$Q_3=\alpha_{i-1}+\frac{\delta_i}{f_i}\left(\frac{3N}{4}-F_{i-1}\right) = 70+\frac{5}{17}(75-74) \simeq 70{,}3$$

$$D_3=\alpha_{i-1}+\frac{\delta_i}{f_i}\left(\frac{3N}{10}-F_{i-1}\right) = 60+\frac{5}{21}(30-21) \simeq 62{,}1 \text{ κοκ.}$$

γ) Διά τήν κατανομήν τοῦ Πίνακος (3.4)

$$Q_1=500+\frac{500}{28}(25-24) \simeq 518$$

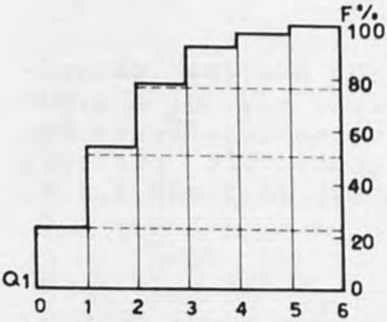
$$Q_3 = 2.000 + \frac{3.000}{15}(75-73) = 2.400$$

$$P_{95} = 5.000 + \frac{5.000}{8}(95-88) = 9.375 \quad \text{κοκ.}$$

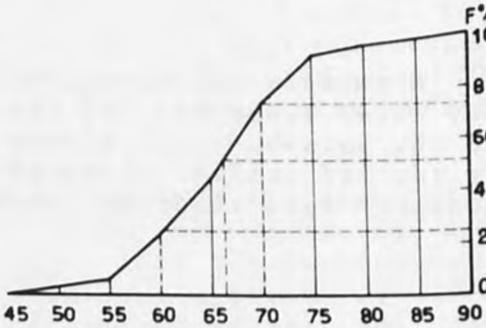
Ἡ σημασία καί χρησιμότης τῶν ἀνωτέρω παραμέτρων εἶναι προφανής. Ἐκ τῆς τιμῆς π.χ. $Q_3 = 2.400$ διά τήν κατανομήν τοῦ πίνακος 4, συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τόν ὑπό μελέτην πληθυσμόν μόνον "εἷς εἰς τούς τέσσαρες" ἔχει εἰσόδημα ὑπερβαῖνον τό 2.400 κ.ο.κ.

**Γραφικὸς Προσδιορισμὸς τῆς Διαμέσου**

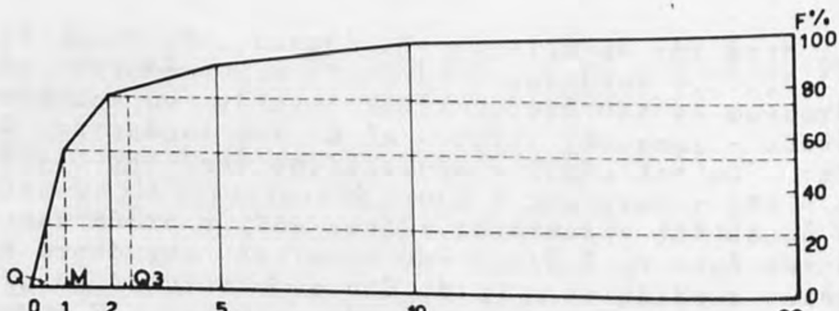
Μετά τήν κατάρτισιν τῆς ἀθροιστικῆς σειρᾶς $F_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ χαράσσομεν τό ἀντίστοιχον ἀθροιστικόν διάγραμμα εκ τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθοῦν - γραφικῶς πλέον - αἱ ὡς ἄνω παράμετροι ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ μέσου - προκειμένου περί τῆς διαμέσου - τῆς τεταγμένης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τό μεῖζον ὅριον τῆς τελευταίας τάξεως καί ἡ ὁποία παριστᾶ τόν ὅρον $F_k$ ἤ ἄλλως τήν συνολικήν συχνότητα N, φέρομεν παράλληλον πρός τόν ἄξονα τῶν τετμημένων μέχρις ὅτου τμήση τήν ἀθροιστικήν καμπύλην. Ἡ προβολή τοῦ ἐν λόγῳ σημείου τομῆς ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων καθορίζει προφανῶς τήν τιμήν τῆς μεταβλητῆς τῆς ὁποίας προηγοῦνται τά 50% τῆς συνολικῆς συχνότητος δηλαδή τήν δ ι ά μ ε σ ο ν M. Ἀναλόγως γίνεται ὁ γραφικός προσδιορισμός τῶν τεταρτημορίων (ἀρχίζοντες ἀπό τό ἕν τέταρτον ἤ τά τρία τέταρτα τῆς ὡς ἄνω τεταγμένης) τῶν δεκατημορίων κλπ. Πρός πλήρη κατανόησιν τῶν σχετικῶν λεπτομερειῶν παραθέτομεν τά ἀθροιστικά διαγράμματα τῶν κατανομῶν τῶν πινάκων (3.2), (3.3) καί (3.4) καί προσδιορίζομεν - γραφικῶς - ἐπ'αὐτῶν τήν διάμεσον καί τά ἀντίστοιχα τεταρτημόρια (ἴδε κατωτέρω Σχ. 3.2, 3.3 καί 3.4).




Σχ. 3,2




Σχ. 3,3




Σχ. 3,4

## 3.3 Μέτρα Διασπορᾶς

Ὁ Μέσος Ἀριθμητικός, ἡ Διάμεσος καί τά λοιπά Μέτρα Θέσεως - ἤ ἄλλως Μέσοι Ὅροι ἐν γένει - τά ὁποῖα ἐπραγματεύθημεν εἰς τήν προηγουμένης παράγραφον ἔχουν, ὡς εἴδομεν, σκοπόν τήν συνοπτικήν περιγραφήν ἑνός συνόλου δεδομένων καί τήν ἀντιπροσώπευσιν αὐτῶν δι'ἑνός μόνου ἁπλοῦ ἀριθμοῦ ὑποδηλοῦντον τήν θ έ σ ι ν ἐν γένει τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς ἤ ἄλλως τό σ η μ ε ῖ ο ν - τιμήν τῆς μετα-

βλητῆς - περί τό ὁποῖον σ υ γ κ ε ν τ ρ ο ῦ ν τ α ι
κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον τά ἐπί μέρους δεδομένα. Εἶ-
ναι εὐνόητον ὅμως ὅτι ἡ σημασία καί ἡ χρησιμότης
τῶν ἐν λόγῳ μέτρων ὡς δ ε ι κ τ ῶ ν συνοπτικῆς πα-
ρουσιάσεως καί ἀντιπροσωπεύσεως ἑνός συνόλου δεδο-
μένων ἐξαρτᾶται σοβαρῶς ἐκ τοῦ βαθμοῦ συγκεντρώ-
σεως τῶν ἐπί μέρους δεδομένων περί τόν χρησιμοποι-
ούμενον κατά περίπτωσιν μέσον ὅρον (μέτρον θέσεως).
Προφανῶς, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ μ ε τ α β λ η τ ι-
κ ό τ η ς τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς (χαρακτηρι-
στικοῦ) καί κατά συνέπειαν ἡ δ ι α σ π ο ρ ά ἤ ἄλ-
λως ἡ ἀ ν ο μ ο ι ο γ έ ν ε ι α τῶν ἐπί μέρους δε-
δομένων περί τόν ἀντίστοιχον μέσον ὅρων των, τόσον
μικροτέρα καθίσταται ἡ ἀξία καί ἡ ἀντιπροσωπευτικό-
της αὐτοῦ. Οὕτω, ἐάν ἡ διασπορά τῶν δεδομένων πε-
ρί τόν μέσον ὅρον των εἶναι μεγάλη, αἱ παρεχόμεναι
ὑπ'αὐτοῦ πληροφορίαι εἶναι συνήθως ἀνεπαρκεῖς εἰς
τό νά δώσουν μίαν ἱκανοποιητικήν εἰκόνα τοῦ ἐρευνω-
μένου φαινομένου καί νά ἐπιτρέψουν τήν λῆψιν οἱασ-
δήποτε ἀποφάσεως.

"Ας ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἡ μέση ἐτησία θερμοκρα-
σία μιᾶς πόλεως εἶναι $20^0$. 'Η πληροφορία αὐτή εἶναι
προφανῶς ἀνεπαρκής προκειμένου νά ἀποφασίση κάποι-
ος ἐάν πρέπει ἤ ὄχι νά ἀγοράση θερμάστρα. Πρός τοῦ-
το τυγχάνει ἀπαραίτητος ἡ γνῶσις τῶν ἐπί μέρους ἐ-
ποχιακῶν θερμοκρασιῶν ἤ τουλάχιστον ἕν μέτρον τῆς
μεταβλητικότητος τῆς θερμοκρασίας κατά τήν διάρκειαν
τοῦ ἔτους τό ὁποῖον νά φανερώνη τόν βαθμόν συγκεν-
τρώσεως ἤ διασπορᾶς τῶν διαφόρων ἐποχιακῶν θερμο-
κρασιῶν περί τήν μέση ἐτησίαν τοιαύτην. Οὕτω, ὁ ὑ-
ποψήφιος ἀγοραστής θά ἀπεφάσιζε πιθανώτατα νά ἀγο-
ράση θερμάστραν ἐάν ἐγνώριζε ὅτι αἱ θερμοκρασίαι
κατά τάς τέσσαρας ἐποχάς εἶναι $2^0$, $14^0$, $38^0$ καί $26^0$,
ἐνῶ θά κατέληγε ἴσως εἰς τήν ἀντίθετον ἀπόφασιν ἐάν
τά ἀντίστοιχα δεδομένα ἦσαν $16^0$, $18^0$, $24^0$ καί $22^0$.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανής ἡ ἀνάγκη
μετρήσεως τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐπί μέρους δεδομένων
ἀπό τοῦ μέσου ὅρου των καί ὁ ὑπολογισμός ἑνός δεί-
κτου - μέτρου διασπορᾶς - χαρακτηρίζοντος τόν βα-
θμόν συγκεντρώσεως (ἤ διασπορᾶς) αὐτῶν. Ἐν τοιοῦ-

του μέτρου, προσδιοριστικόν τῆς ἀντιπροσωπευτικότητος καί τῆς ἐν γένει ἀξιοπιστίας τῶν ἀντιστοίχων μέτρων θέσεως, ἀποτελεῖ συνήθως ἀπαραίτητον ἤ τουλάχιστον ἐπιθυμητόν συμπλήρωμα τῶν ἐν λόγῳ μέτρων κατά τήν χρησιμοποίησιν αὐτῶν εἰς τάς διαφόρους ἐφαρμογάς καί τήν ἐν γένει λῆψιν ἀποφάσεων.

Τά σημαντικώτερα καί συνηθέστερον χρησιμοποιούμενα μέτρα διασπορᾶς εἶναι ἡ διακύμανσις καί ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα τυπική ἀπόκλισις χαρακτηριστικά τοῦ ἀπολύτου μεγέθους τῆς διασπορᾶς τῶν δεδομένων ἤ τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς αὐτῶν καί ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος διά τοῦ ὁποίου μετρᾶται ἡ σχετική σημασία τῆς διασπορᾶς. Ἄλλα μέτρα διασπορᾶς - ἥσσονος σημασίας καί χρησιμότητος - ἐφαρμοζόμενα συνήθως εἰς εἰδικάς μόνον περιπτώσεις εἶναι ἡ μέση ἀπόκλισις, τό εὖρος μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς, τό ἡμιενδοτεταρτημοριακόν εὖρος, ἡ μέση διαφορά κλπ.

### 3.3.1 Διακύμανσις καὶ Τυπικὴ Ἀπόκλισις

Διακύμανσις δοθέντων ἀριθμῶν - τιμῶν ἐν γένει μιᾶς μεταβλητῆς X - καλεῖται ὁ μέσος (ἀριθμητικός) τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν ἀπό τοῦ μέσου (ἀριθμητικοῦ) των. Συμβολίζεται συνήθως διά τοῦ $\sigma^2$ ἤ $V(X)$.

Τυπική Ἀπόκλισις δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται ἀντιστοίχως ἡ - θετική - τετραγωνική ρίζα τῆς διακυμάνσεως αὐτῶν καί κατ' ἀκολουθίαν συμβολίζεται αὔτη διά τοῦ σ ἤ $\sqrt{V(X)}$.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ, δεδομένου ὅτι οἱ τύποι καί αἱ ἀριθμητικαί ἐκφράσεις τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ προκύπτουν εὐκόλως διά τῆς ἐξαγωγῆς τῆς - θετικῆς - τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων τῆς διακυμάνσεως $\sigma^2$, θά μᾶς ἀπασχολήση μόνον ἡ διακύμανσις καί τά περί αὐτήν.

α) Περίπτωσις ἁ π λ ῶ ν δεδομένων

Ἐάν $x_1, x_2, \ldots, x_N$ εἶναι αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῆς μεταβλητῆς X - τά διαθέσιμα ἁ π λ ᾶ δεδομένα - καί μ ὁ Μ.Α. αὐτῶν ὑπολογιζόμενος διά τοῦ τύπου (3.1), ἡ διακύμανσις $\sigma^2$ τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων δίδεται, συμφώνως πρός τόν ὡς ἄνω ὁρισμόν, ὑπό τοῦ κάτωθι τύπου.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 \qquad (3.11)$$

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=7$, $x_4=8$, $x_5=1$ τά δεδομένα. Ὁ Μ.Α. αὐτῶν εἶναι

$$\mu=\frac{1}{5}\ (3+2+7+8+1)= \frac{21}{5} = 4,2.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.11) λαμβάνομεν

$$\sigma^2=\frac{1}{5}\left[(3-4,2)^2+(2-4,2)^2+(7-4,2)^2+(8-4,2)^2+(1-4,2)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left[(-1,2)^2+(-2,2)^2+2,8^2+3,8^2+(-3,2)^2\right] =$$

$$=\frac{1}{5}\left[1,44+4,84+7,84+14,44+10,24\right] = \frac{38,80}{5}=$$

$$= 7,76 \text{ καί φυσικά}$$

$$\sigma = \sqrt{7,76} = 2,78.$$

Οὕτω, πρός μέτρησιν τῆς διασπορᾶς τῶν δεδομένων $x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ λαμβάνονται ἐν προκειμένῳ ὑπ' ὄψιν αἱ ἐπί μέρους ἀποκλίσεις αὐτῶν ἀπό τοῦ Μ.Α. των, ἤτοι αἱ διαφοραί $(x_i-\mu)$, $i=1,2,\ldots,N$ αἱ ὁποῖαι μετροῦν τάς ἀ π ο σ τ ά σ ε ι ς ἑκάστου τῶν $x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ ἀπό τοῦ μέσου αὐτῶν μ, ἐν συνεχείᾳ δέ εὑρίσκεται ὁ μέσος (ἀριθμητικός) τῶν τετραγώνων $(x_i-\mu)^2$, $i=1,2,\ldots,N$ τῶν ἐν λόγῳ ἀποκλίσεων (διαφορῶν).

Εἶναι προφανές ὅτι ἀντί τῆς διακυμάνσεως $\sigma^2$, θά ἦτο φυσικώτερον καί περισσότερον εὔλογον νά χρησιμοποιηθῆ ὡς μέτρον τῆς διασπορᾶς τῶν ὡς ἄνω δεδομένων ὁ Μ.Α. τῶν ἁ π λ ῶ ν - θετικῶν ἤ ἀρνητικῶν - διαφορῶν $(x_i-\mu)$, $i=1,2,\ldots,N$, ἤτοι ἡ ποσότης

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει κατά τρόπον ἄμεσον τήν "μέσην" ἀπόστασιν τῶν $x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ ἀπό τοῦ μέσου των $\mu$.

Τό μέτρον ὅμως αὐτό, δεδομένου ὅτι "τό ἄθροισμα $\Sigma(x_i-\mu)$ τῶν ἀποκλίσεων οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀπό τοῦ Μ.Α. αὐτῶν εἶναι πάντοτε ἴσον πρός μηδέν" στερεῖται οἱασδήποτε σημασίας. Οὕτω, πρός ἀποφυγήν τοῦ ἀλληλοσυμψηφισμοῦ τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν διαφορῶν $(x_i-\mu)$, $i=1,2,\ldots,N$ λαμβάνονται συνήθως εἴτε αἱ ἀ π ό λ υ τ ο ι τ ι μ α ί αὐτῶν - καί εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὡς μέτρον διασπορᾶς χρησιμοποιεῖται ἡ μ έ σ η ἀ π ό κ λ ι σ ι ς - εἴτε τά τετράγωνά των $(x_i-\mu)^2$, $i=1,2,\ldots,N$ χρησιμοποιουμένης πλέον ὡς μέτρου διασπορᾶς τῆς διακυμάνσεως $\sigma^2$ καί τῆς ἐξ αὐτῆς προκυπτούσης - δι'ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης - τυπικῆς ἀποκλίσεως σ. Ἐνταῦθα δέον νά τονισθῆ ὅτι τόσον ὁ τετραγωνισμός τῶν ἀποκλίσεων $(x_i-\mu)$ ὅσον καί ὁ ἐν συνεχείᾳ ὑπολογισμός τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ δι'ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς διακυμάνσεως, μολονότι ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνονται κάπως ἐπίπλαστα καί τεχνητά μέσα, πέραν τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ - τοῦ μή ἀλληλοσυμψηφισμοῦ δηλαδή τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν διαφορῶν - παρουσιάζουν ὡς θά ἴδωμεν ἀργότερον καί ἄλλα - θεωρητικά κυρίως - πλεονεκτήματα. Ὡς ἐκ τούτου ἡ διακύμανσις καί κυρίως ἡ τυπική ἀπόκλισις θεωροῦνται καί εἶναι τά κατ' ἐξοχήν μέτρα διασπορᾶς καί ὡς τοιαῦτα χρησιμοποιοῦνται πολύ εὐρύτερον οἱωνδήποτε ἄλλων τοιούτων.

Ἡ ἐφαρμογή τοῦ τύπου (3.11) διά τόν ὑπολογισμόν τῆς διακυμάνσεως ὁδηγεῖ πολλάκις - τοῦτο καθίσταται φανερόν καί ἐκ τοῦ παρατεθέντος παραδείγματος - εἰς μακροσκελεῖς πράξεις. Διά τόν λόγον αὐτόν εἰς τούς ὑπολογισμούς χρησιμοποιεῖται συνήθως ἡ ἑξῆς μετασχηματισμένη μορφή τοῦ ὡς ἄνω τύπου:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2 \quad (3.12)$$

Ὁ τύπος (3.12) προκύπτει ἐκ τοῦ (3.11) δι' ἀναπτύξεως τοῦ τετραγώνου $(x_i-\mu)^2$ καί παραλλήλου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.1) τοῦ Μ.Α. Οὕτω,

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{N} x_i+N\mu^2$$

καί ἐπειδή $\sum_{i=1}^{N} x_i=N\mu$ λαμβάνομεν τελικῶς

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\mu^2$$

διαιρῶντας δέ ἀμφότερα τά μέλη διά Ν ἔχομεν τόν τύπον (3.12).

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.12) εἰς τά δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος λαμβάνομεν

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}(3^2+2^2+7^2+8^2+1^2)-\left(\frac{21}{5}\right)^2 = \frac{127}{5} - \frac{441}{25} = \frac{635-441}{25} = \frac{194}{25} =$$

$$= 7,76.$$

β) <u>Περίπτωσις ταξινομημένων δεδομένων</u>

Ὑποθέτομεν ἐνταῦθα ὅτι αἱ τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς εἶναι ὁμαδοποιημέναι καί τά δεδομένα παρουσιάζονται εἰς μίαν κατανομήν συχνότητος ἀνάλογον ἐκείνης τοῦ πίνακος (3.1). Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό νά ἔχωμεν $N=\Sigma f_i$ ἁπλᾶ δεδομένα μεταξύ τῶν ὁποίων αἱ κεντρικαί τιμαί $x_i$ ἐπαναλαμβάνονται ἀντιστοίχως $f_i$ φοράς ὅπου $i=1,2,...,k$.

Κατά συνέπειαν, εκάστη τῶν τετραγωνικῶν ἀποκλίσεων $(x_i-\mu)^2$, $i=1,2,\ldots,k$ θά ἐπαναλαμβάνεται εἰς τό ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ τύπου (3.11) ἀντιστοίχως $f_i$ φοράς καί ἡ διακύμανσις $\sigma^2$ τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων θά δίδεται πλέον ὑπό τοῦ κατωτέρω (σταθμικοῦ) τύπου.

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \tag{3.13}$$

ὅπου $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ αἱ κεντρικαί τιμαί τῶν τάξεων, $f_i$ αἱ ἀντίστοιχοι ταξικαί - ἀδιάφορον ὡς ἤδη ἐλέχθη ἐάν εἶναι ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί - συχνότητες καί μ ὁ (σταθμικός) Μ.Α. ὑπολογιζόμενος φυσικά διά τοῦ τύπου (3.2).

Ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων οὕτω καί ἐνταῦθα, διά τόν ὑπολογισμόν τῆς διακυμάνσεως χρησιμοποιεῖται - ἐπίσης πρός ἀποφυγήν δυσχερῶν ὑπολογισμῶν - ἡ κάτωθι μετασχηματισμένη μορφή τοῦ τύπου (3.13)

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-\mu^2=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2 \tag{3.14}$$

ἡ ὁποία προκύπτει κατά τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου τῆς ἀποδείξεως τοῦ τύπου (3.12), Οὕτω,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-2\mu x_i+\mu^2)=\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{k} f_i x_i+$$

$$+\mu^2\sum_{i=1}^{k} f_i=\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-2\mu^2\sum_{i=1}^{k} f_i+\mu^2\sum_{i=1}^{k} f_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-\mu^2\sum_{i=1}^{k} f_i$$

καί διά διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διά τῆς συνολικῆς συχνότητος $\Sigma f_i$ προκύπτει ὁ τύπος (3.14).

Πρός κατανόησιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.14) ὑπολογίζομεν κατωτέρω τάς διακυμάνσεις τῶν κατανομῶν τῶν πινάκων (3.2) καί (3.4).

Ἡ διακύμανσις τῆς κατανομῆς ἴσου πλάτους τοῦ πίνακος (3.3) θά ὑπολογισθῆ ἐν συνεχείᾳ τῇ βοηθείᾳ τῆς καλουμένης ἐ μ μ έ σ ο υ μ ε θ ό δ ο υ.

Οἱ παρατιθέμενοι εἰς τούς πίνακας ὑπολογισμοί - ὑπο-στῆλαι $f_ix_i$, $f_ix_i^2$, ἀθροίσματα αὐτῶν κλπ. - ὑποδεικνύονται προφανῶς ἐκ τοῦ ἐφαρμοζομένου ἀντιστοίχως τύπου (3.14).

α) Δεδομένα τοῦ Πίνακος (3.2)

| $x_i$ | $f_i$ | $f_ix_i$ | $f_ix_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 0 | 0 |
| 1 | 30 | 30 | 30 |
| 2 | 22 | 44 | 88 |
| 3 | 16 | 48 | 144 |
| 4 | 5 | 20 | 80 |
| 5 | 2 | 10 | 50 |
| | 100 | 152 | 392 |

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.14) λαμβάνομεν

$$\sigma^2 = \frac{392}{100} - \left(\frac{152}{100}\right)^2 = 3{,}92 - 1{,}52^2 = 3{,}92 - 2{,}31 = 1{,}61$$

καί φυσικά

$$\sigma = \sqrt{1{,}61} = 1{,}26.$$

β) Δεδομένα τοῦ Πίνακος (3.4)

| Τάξεις τῆς X | $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0- 200 | 100 | 6 | 600 | 60.000 |
| 200- 500 | 350 | 18 | 6.300 | 2.205.000 |
| 500- 1.000 | 750 | 28 | 21.000 | 15.750.000 |
| 1.000- 2.000 | 1.500 | 21 | 31.500 | 47.250.000 |
| 2.000- 5.000 | 3.500 | 15 | 52.500 | 183.750.000 |
| 5.000-10.000 | 7.500 | 8 | 60.000 | 450.000.000 |
| 10.000-20.000 | 15.000 | 4 | 60.000 | 900.000.000 |
| | | 100 | 231.900 | 1.599.015.000 |

Συνεπῶς, $\sigma^2 = \frac{1.599.015.000}{100} - \left(\frac{231.900}{100}\right)^2 = 15.990.150-$

$$-2.319^2 = 15.990.150 - 5.377.761 = 10.612.389$$

καί $\sigma = \sqrt{10.612.389} = 3.257.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων καθίσταται φανερόν ὅτι οἱ ἀπαιτούμενοι πρός εὕρεσιν τῆς διακυμάνσεως ὑπολογισμοί εἶναι συνήθως μακροσκελεῖς καί πολύπλοκοι. Οὕτω, πρός ἁπλοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ πράξεων ἐφαρμόζεται συνήθως καί ἐν προκειμένῳ ἡ γνωστή ἔ μ μ ε σ ο ς μ έ θ ο δ ο ς ὑπολογισμοῦ. Αὕτη εἶναι ἀνάλογος ἐκείνης ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ Μ.Α., βασίζεται ἐπί τοῦ ἰδίου μετασχηματισμοῦ (τύπος 3.3) καί χρησιμοποιεῖται κατά κανόνα ἐπίσης εἰς περιπτώσεις συνεχῶν κατανομῶν ἴ σ ο υ πλάτους, ὅπου αἱ προκύπτουσαι βελτιώσεις-ἁπλοποιήσεις πράξεων κλπ. - εἶναι πράγματι σημαντικαί.

Προκειμένου νά ἐφαρμοσθῇ ἡ ἔμμεσος μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς διακυμάνσεως $\sigma^2$, χρησιμοποιουμένων τῶν ὑπολογιζομένων διά τοῦ τύπου (3.3) βοηθητικῶν κεντρικῶν τιμῶν $t_i$, οἱ τύποι (3.13) καί (3.14) μετασχηματίζονται ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῶν τύπων (3.4) καί (3.5) ἔχομεν

$$x_i = x_o + \delta t_i \qquad \text{ὅπου } \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$\mu = x_o + \delta \bar{t}$$

καί δι' ἀφαιρέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν $(x_i - \mu) = \delta(t_i - \bar{t})$, ὅτε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τόν τύπον (3.13) προκύπτει

$$\sigma^2 = \delta^2 \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (t_i - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \tag{3.15}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει κατά τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου τῆς ἀποδείξεως τοῦ τύπου (3.14) ἐκ τοῦ (3.13) ὁ κατωτέρω τύπος (3.16) ὁ ὁποῖος καί ἐφαρμόζεται συνήθως εἰς τούς ὑπολογισμούς.

$$\sigma^2 = \delta^2 \left[ \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \left( \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \right)^2 \right] \tag{3.16}$$

Πρός κατανόησιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.16) ὑπολογίζομεν ἐνταῦθα τήν διακύμανσιν τῆς κατανομῆς τοῦ πίνακος (3.3). Οὕτω, ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (3.3) λαμβάνομεν

| Τάξεις τῆς X | $x_i$ | $f_i$ | $t_i$ | $f_i t_i$ | $f_i t_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 45-50 | 47,5 | 2 | -4 | - 8 | 32 |
| 50-55 | 52,5 | 4 | -3 | -12 | 36 |
| 55-60 | 57,5 | 15 | -2 | -30 | 60 |
| 60-65 | 62,5 | 21 | -1 | -21 | 21 |
| 65-70 | 67,5 | 32 | 0 | 0 | 0 |
| 70-75 | 72,5 | 17 | 1 | 17 | 17 |
| 75-80 | 77,5 | 5 | 2 | 10 | 20 |
| 80-85 | 82,5 | 3 | 3 | 9 | 27 |
| 85-90 | 87,5 | 1 | 4 | 4 | 16 |
| | | 100 | | -31 | 229 |

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.16) λαμβάνομεν

$\sigma^2=5^2\left| \frac{229}{100} - (\frac{-31}{100})^2 \right| = 25(2,29-0,0009)=57,25$ καί

$\sigma = \sqrt{57,25} = 7,56.$

**Ἰδιότητες τῆς Διακυμάνσεως**

α) Ἡ διακύμανσις σταθερᾶς ποσότητος εἶναι μηδέν, ἤτοι ἐάν αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῆς μεταβλητῆς X εἶναι $x_1=x_2=...=x_N=\alpha$ ἡ διακύμανσις αὐτῆς ἰσοῦται πρός μηδέν.

Ἀπόδειξις: Συμφώνως πρός γνωστήν ἰδιότητα τοῦ Μ.Α. εἶναι $\mu=\alpha$ καί κατά συνέπειαν

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\alpha-\alpha)^2=0$$

Εἰς περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων ἔχομεν ἐπίσης

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(\alpha-\alpha)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = 0$$

β) Ἐάν ἡ μεταβλητή Y εἶναι γραμμικός μετασχηματισμός τῆς μεταβλητῆς X, ἤτοι ἐάν $Y=\alpha+\beta X$, ὅπου α καί β δύο οἱοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί θά εἶναι $V(Y)=\beta^2 V(X)$, ὅπου V(X), V(Y) συμβολίζουν ὡς ἤδη ἐλέχθη τάς διακυμάνσεις τῶν μεταβλητῶν X καί Y ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις: Συμφώνως πρός γνωστήν ἰδιότητα ὁ Μ. Α. τῆς μεταβλητῆς Y δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $\mu_y=\alpha+\beta\mu_x$ καί κατά συνέπειαν

$$V(Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_y)^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(\alpha+\beta x_i)-(\alpha+\beta\mu_x)\right]^2=\beta^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2=$$

$$=\beta^2 V(X).$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων ἔχομεν ὁμοίως

$$V(Y)=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(y_i-\mu_y)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\left[(\alpha+\beta x_i)-(\alpha+\beta\mu_x)\right]^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}=$$

$$=\beta^2\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu_x)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}=\beta^2 V(X).$$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἐάν θέσωμεν $\beta=1$ ἤ $\alpha=0$ προκύπτουν ἀντιστοίχως αἱ ἑξῆς δύο μερικώτεραι ἰδιότητες (πορίσματα).

(i) Ἐάν ὅλαι αἱ τιμαί μιᾶς μεταβλητῆς X αὐξηθοῦν (ἤ ἐλαττωθοῦν) κατά σταθεράν ποσότητα α, ἡ διακύμανσις δέν μεταβάλλεται, ἤτοι

$$V(X\pm\alpha)=V(X)$$

(ii) Ἐάν ὅλαι αἱ τιμαί μιᾶς μεταβλητῆς X πολλαπλασιασθοῦν (ἤ διαιρεθοῦν) μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν β - ἤτοι τύχουν σταθερᾶς π ο σ ο σ τ ι α ί α ς αὐξήσεως (ἤ μειώσεως) - ἡ διακύμανσις πολλαπλασιάζεται ἐπί τό τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, ἤτοι

$$V(\beta X)=\beta^2 V(X)$$

γ) Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐπί μέρους τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς X ἀπό οἱονδήποτε δοθέντα ἀριθμόν λ καθίσταται ἐλάχιστον ὅταν ὁ ἀριθμός λ συμπίπτει πρός τόν μέσον ἀριθμητικόν μ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς X.

'Απόδειξις: Έστω

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \lambda)^2$$

Ώς γνωστόν ή ποσότης $\varepsilon$ έλαχιστοποιεῖται δι' ἐκείνην τήν τιμήν τοῦ $\lambda$ ἡ ὁποία μηδενίζει τήν πρώτην παράγωγον τῆς $\varepsilon$ ὡς πρός $\lambda$. Οὕτω, ἐξισοῦντες πρός μηδέν τήν $\vartheta\varepsilon:\vartheta\lambda$ λαμβάνομεν

$$-2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\lambda)=0 \quad \text{ἤ} \quad \sum_{i=1}^{N}x_i-N\lambda=0 \text{ καί } \lambda=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i=\mu$$

Συνεπῶς ἡ διακύμανσις

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ἐ λ α χ ί σ τ η μέση τετραγωνική ἀπόκλισις.

δ) Ἡ διακύμανσις $\sigma^2$ ἑνός πληθυσμοῦ ἀπαρτιζομένου ἐκ $k$ ὑποομάδων - ὑποπληθυσμῶν - μεγέθους $N_i$, $i=1,2,\ldots,k$ ἀντιστοίχως, δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i\sigma_i^2+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i(\mu_i-\mu)^2 \tag{3.17}$$

ὅπου $\mu_i$ καί $\sigma_i^2$ ὁ Μ.Α. καί ἡ διακύμανσις τοῦ $i=1,2,\ldots,k$ ὑποπληθυσμοῦ, $N=\Sigma N_i$ τό μέγεθος τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ καί $\mu$ ὁ Μ.Α. αὐτοῦ **προκύπτων** - συμφώνως πρός γνωστήν ἰδιότητα - ἐκ τῆς σχέσεως

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i\mu_i$$

'Απόδειξις: Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ διακύμανσις $\sigma_i^2$ τοῦ $i=1,2,\ldots,k$ ὑποπληθυσμοῦ δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-\mu_i)^2$$

καί ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων $\Sigma(x_{ij}-\mu_i)=0$ εἰς ἕκαστον ὑποπληθυσμόν $i=1,2,\ldots,k$ ἔχομεν

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-\mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}\Big[(x_{ij}-\mu_i)+$$

$$+(\mu_i-\mu)\Big]^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i\sigma_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i(\mu_i-\mu)^2$$

καθ' ὅσον

$$2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-\mu_i)\times(\mu_i-\mu) = 2\sum_{i=1}^{k}(\mu_i-\mu)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-\mu_i) = 2\sum_{i=1}^{k}(\mu_i-\mu)\times 0 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-\mu_i)^2 = N_i\sigma_i^2 \text{ καί } \sum_{j=1}^{N_i}(\mu_i-\mu)^2 = N_i(\mu_i-\mu)^2$$

Παράδειγμα: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἐργάτες ἑνός ἐργοστασίου ἀποτελοῦνται ἐκ 300 ἀνδρῶν καί 200 γυναικῶν, τῶν ὁποίων τά μέσα ἡμερομίσθια εἶναι ἀντιστοίχως $\mu_1=160$ καί $\mu_2=120$ καί αἱ διακυμάνσεις $\sigma_1^2=250$ καί $\sigma_2^2=150$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τό μέσον ἡμερομίσθιον $\mu$ ὅλων τῶν ἐργατῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἐργοστασίου εἶναι

$$\mu = \frac{1}{500}(300\times160+200\times120)=144$$

καί ἡ διακύμανσις $\sigma^2$ ὅλων τῶν ἡμερομισθίων

$$\sigma^2=\frac{1}{500}(300\times250+200\times150)+\frac{1}{500}\Big[300\times$$

$$\times(160-144)^2+200(120-144)^2\Big]=594.$$

'Εξετέθη ἀνωτέρω ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῆς διακυμάνσεως τόσον ἐξ ἁπλῶν, ὅσον καί ἐκ ταξινομημένων δεδομένων καί παρετέθησαν οἱ τύποι ὁρισμοῦ αὐτῆς καί αἱ πλέον χρήσιμοι τῶν ἰδιοτήτων της. 'Η τ υ π ι κ ή ἀ π ό κ λ ι σ ι ς ἡ ὁποία ἀποτελεῖ, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τό βασικώτερον καί συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον μέτρον διασπορᾶς προκύπτει ἐκ τῆς διακυμάνσεως δι' ἁπλῆς ἐξαγωγῆς τῆς θετικῆς τετραγωνικῆς ρίζης αὐτῆς καί διά τόν λόγον αὐτόν δέν μᾶς ἀπησχόλησε ἰδιαιτέρως. Δέον νά σημειωθῇ ὅτι, τόσον ἡ διακύμανσις ὅσον καί ἡ τυπική ἀπόκλισις χαρακτηρίζουν τήν διασποράν τῶν ἐπί μέρους ἀριθμητικῶν δεδομένων - τῶν τιμῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - ἤ τῆς κατανομῆς αὐτῶν, μέ βάσιν τάς ἀ π ο σ τ ά σ ε ι ς - ἀποκλίσεις, διαφορᾶς - τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων ἀπό τοῦ Μ.Α. αὐτῶν. Ἕν παρόμοιον μέτρον διασπορᾶς - βασιζόμενον εἰς τάς ἀπολύτους ἀποστάσεις τῶν ἐπί μέρους δεδομένων ἀπό τοῦ Μ.Α. αὐτῶν - εἶναι ἡ μ έ σ η (ἀ π ό λ υ τ ο ς) ἀ π ό κ λ ι σ ι ς $d$ ὑπολογιζομένη εἰς τήν περίπτωσιν ἁπλῶν δεδομένων διά τοῦ τύπου

$$d=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-\mu| \qquad (3.18)$$

καί εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων τοιούτων διά τοῦ τύπου

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i|x_i-\mu|}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (3.19)$$

Πέραν αὐτῶν, εἰς εἰδικάς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦνται ἐνίοτε καί ἄλλα μέτρα διασπορᾶς τά ὁποῖα βασίζονται εἴτε εἰς τήν ἀπόστασιν δύο χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν τῆς κατανομῆς: ὡς π.χ. τό εὖρος μεταβολῆς, τό ἡμιενδοτεταρτημοριακόν εὖρος τῆς μεταβλητῆς ἤτοι

$$R=\max(x_i)-\min(x_i) \tag{3.20}$$

$$Q=\frac{1}{2}(Q_3-Q_1) \tag{3.21}$$

κλπ., εἴτε εἰς τάς ἀποστάσεις (διαφορᾶς) μεταξύ αὐτῶν τούτων τῶν δεδομένων (μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ) λαμβανομένων ἀνά δύο ὡς π.χ. ἡ μ έ σ η (ἀ π ό λ υ τ ο ς) δ ι α φ ο ρ ά (Gini) κ.ο.κ.

## 3.3.2 Συντελεστής Μεταβλητικότητος ἤ Σχετική Τυπική Ἀπόκλισις

Ἡ τυπική ἀπόκλισις καί τά λοιπά μέτρα διασπορᾶς τά ὁποῖα ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω ἐκφράζονται ὡς εἴδομεν - τοῦτο ἄλλωστε προκύπτει ἀμέσως καί ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν - εἰς τάς ἰδίας μονάδας μετρήσεως μέ τήν ἑκάστοτε ὑπό μελέτην μεταβλητήν. Ὡς ἐκ τούτου ἡ χρησιμοποίησις τῶν ἐν λόγῳ μέτρων πρός σύγκρισιν τῆς διασπορᾶς δύο κατανομῶν ἤ ἄλλως τῆς ἀνομοιογενείας δεδομένων ἀναφερομένων εἰς δύο ἑτεροειδεῖς (μή ἐκφραζομένας διά τῶν ἰδίων μονάδων μετρήσεως) μεταβλητάς, καθίσταται ἐντελῶς ἀ δ ύ ν α τ ο ς.

Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἡ κατανομή τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας ὡς πρός τό ἀνάστημά των παρουσιάζει Τυπικήν Ἀπόκλισιν $\sigma_1=8$ ἐκ. ἐνῶ ἡ ἀντίστοιχος κατανομή αὐτῶν ὡς πρός τό βάρος των ἔχει $\sigma_2=5$ κιλά. Εἶναι δυνατόν νά εἴπωμεν ποία ἐκ τῶν δύο κατανομῶν παρουσιάζει μεγαλυτέραν **διασποράν**; Προφανῶς ἡ ἀπάντησις εἶναι ἀρνητική λόγῳ ἀδυναμίας συγκρίσεως τῶν ἐκπεφρασμένων εἰς ἑτεροειδεῖς μονάδας Τυπικῶν Ἀποκλίσεων.

'Αλλ' ἄς εἴδωμεν ἕν ἄλλον παράδειγμα εἰς τό ὁποῖον αἱ Τυπικαί 'Αποκλίσεις εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς τάς ἰδίας μονάδας. 'Υποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἡ κατανομή τῶν ἀρρένων βιομηχανικῶν ἐργατῶν ὡς πρός τό ἡμερομίσθιον αὐτῶν ἔχει Μέσον 'Αριθμητικόν μ=160 δρχ. καί Τυπικήν 'Απόκλισιν σ=15 δρχ. ἐνῶ ἡ ἀντίστοιχος κατανομή τῶν θηλέων βιομηχανικῶν ἐργατῶν ἐπίσης ὡς πρός τό ἡμερομίσθιον αὐτῶν ἔχει Μέσον 'Αριθμητικόν μ=120 δρχ. καί Τυπικήν 'Απόκλισιν σ=12 δρχ. Εἶναι δυνατόν ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο Τυπικῶν 'Αποκλίσεων νά εἴπωμεν ὅτι ἡ κατανομή τῶν ἀρρένων παρουσιάζει μεγαλυτέραν διασποράν ἐκ μόνου τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ Τυπική 'Απόκλισις αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου Τυπικῆς 'Αποκλίσεως τῆς κατανομῆς τῶν θηλέων; Καί πάλιν ἡ ἀπάντησις εἶναι ἀρνητική ἐν προκειμένῳ ὅμως ὄχι διότι αἱ μονάδες εἰς τάς ὁποίας ἐκφράζονται αἱ Τυπικαί 'Αποκλίσεις εἶναι διάφοροι ἀλλά ἐκ τοῦ λόγου ὅτι ἡ "σημασία" αὐτῶν - ἀναφερομένη εἰς διάφορα μεγέθη - δέν εἶναι ἡ αὐτή.

Πέραν τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς Τυπικῆς 'Αποκλίσεως ὡς καί τῶν ὑπολοίπων ἀπολύτων μέτρων διασπορᾶς τά ὁποῖα ἐπραγματεύθημεν μέχρι τοῦδε ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων κατά περίπτωσιν μονάδων μετρήσεως. Οὕτω, ἡ Τυπική 'Απόκλισις τῆς κατανομῆς τῶν βαρῶν (Πίναξ 3.3) ἡ ὁποία ὑπελογίσθη ἀνωτέρω εἰς 7,56 κιλά ἐάν ἡ μεταβλητή "βάρος" ἐμετρᾶτο καί ἐξεφράζετο εἰς γραμμάρια ἀντί κιλῶν θά ἦτο - συμφώνως πρός γνωστήν ἰδιότητα τῆς διακυμάνσεως - σ=7.560 γραμμάρια. Τό γεγονός τοῦτο δυσχεραίνει πολλάκις σοβαρῶς τήν ἀξιολόγησιν - ἐκ μόνης τῆς τιμῆς τῆς Τυπικῆς 'Αποκλίσεως - τῆς σημασίας τῆς ὑποδηλουμένης διασπορᾶς καί ἀντιστοίχως τήν ἀπόκτησιν σαφοῦς ἀντιλήψεως περί τοῦ βαθμοῦ ἀνομοιογενείας τῶν ἐπί μέρους δεδομένων.

Πρός ἀντιμετώπισιν τῶν ἀνωτέρω δυσκολιῶν ἐπενοήθησαν καί χρησιμοποιοῦνται ὡς **Μέτρα Διασπορᾶς** δεῖκται οἱ ὁποῖοι ἔχουν τάς ἑξῆς ἰδιότητας:

α) Εἶναι - χρησιμοποιουμένης τῆς σχετικῆς ὁρολογίας ἐκ τῆς Φυσικῆς - κ α θ α ρ ο ί ἀ ρ ι θ μ ο ί μή ἐκπεφρασμένοι δηλαδή εἰς συγκεκριμένας μονάδας καί κατά συνέπειαν πάντοτε συγκρίσιμοι

β) 'Εκφράζουν τήν σχετικήν - καί ὄχι τήν ἀπόλυτον - σημασίαν τῆς ἀντιστοίχου διασπορᾶς καί

γ) Αἱ ἀριθμητικαί τιμαί αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητοι τῶν χρησιμοποιουμένων ἑκάστοτε μονάδων.

Τό σημαντικώτερον καί συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον ἐκ τῶν ἐν λόγῳ μέτρων - δεικτῶν - τῆς σχετικῆς διασπορᾶς εἶναι ὁ Συντελεστής Μεταβλητικότητος ἤ ἄλλως Σχετική Τυπική 'Απόκλισις.

'Ο Συντελεστής Μεταβλητικότητος τῆς μεταβλητῆς X (ἤ τῆς κατανομῆς αὐτῆς) συμβολίζεται συνήθως c.v(X) καί ὁρίζεται ὡς τό πηλῖκον τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως αὐτῆς διά τοῦ Μέσου 'Αριθμητικοῦ της ἤτοι

$$c.v(X)=\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{V(X)}}{\mu} \qquad (3.22)$$

'Ο Συντελεστής Μεταβλητικότητος διά λόγους ἁπλουστεύσεως καί καλλιτέρας κατανοήσεως ἐκφράζεται συνήθως ὡς ποσοστόν ἐπί τοῖς %.

Οὕτω, εἰς τό πρῶτον τῶν ὡς ἄνω παραδειγμάτων ὅπου $\sigma_1=8$ ἐκ. (κατανομή ἀναστημάτων) καί $\sigma_2=5$ κιλά (κατανομή βαρῶν) ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι μέσοι ἀριθμητικοί εἶναι $\mu_1=160$ ἐκ. καί $\mu_2=50$ κιλά οἱ συντελεσταί μεταβλητικότητος εἶναι

$$c.v(X_1)=\frac{8}{160} \cdot 100 = 5\% \quad \text{καί} \quad c.v(X_2)=\frac{5}{50} \cdot 100 = 10\%$$

καί κατά συνέπειαν συμπεραίνομεν ὅτι ἡ δευτέρα κατανομή παρουσιάζει μεγαλυτέραν σχετικῶς διασποράν.

Εἰς τό δεύτερον παράδειγμα ἔχομεν ἀντιστοίχως διά τούς ἄρρενας καί διά τάς θήλεις τούς ἑξῆς συντελεστάς μεταβλητικότητος:

$$\text{Άρρενες} \quad \frac{15}{160} \cdot 100 = 9{,}25\%$$

$$\text{Θήλεις} \quad \frac{12}{120} \cdot 100 = 10\%$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ὅτι ἡ ἀνομοιογένεια τῶν ἡμερομισθίων εἶναι σχετικῶς σοβαρωτέρα μεταξύ τῶν θηλέων.

Ἕν σημαντικόν μειονέκτημα τοῦ Συντελεστοῦ Μεταβλητικότητος εἶναι τό ἑξῆς. Ἡ ἀριθμητική τιμή αὐτοῦ ἐπιρρεάζεται ἐντόνως ἀπό τήν τιμήν τοῦ Μέσου Ἀριθμητικοῦ καί εἶναι δυνατόν διά πολύ μικράς τιμάς τοῦ μ ὁ Συντελεστής Μεταβλητικότητος νά λαμβάνη τεραστίας τιμάς (ἐάν π.χ. μ=0 ὁ cv γίνεται ∞) καί οὕτω νά ἔχωμεν ψ ε υ δ ῆ εἰκόνα τῆς διασπορᾶς τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς. Διά τόν λόγον αὐτόν ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἐν λόγῳ μέτρου δέον νά γίνεται μετά πολλῆς προσοχῆς καί εἰ δυνατόν εἰς περιπτώσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω νά ἀποφεύγεται.

Πέραν τοῦ Συντελεστοῦ Μεταβλητικότητος, ὡς μέτρα τῆς σχετικῆς διασπορᾶς - ἥσσονος σημασίας καί λίαν περιωρισμένης χρησιμότητος καί ἐφαρμογῆς - χρησιμοποιοῦνται εἰς μερικάς περιπτώσεις καί τά ἑξῆς:

- Τό πηλῖκον τῆς Μέσης Ἀποκλίσεως διά τοῦ Μέσου Ἀριθμητικοῦ ἤ τῆς Διαμέσου ἤτοι

$$\frac{d}{\mu} \quad \text{ἤ} \quad \frac{d}{M}$$

- Τό πηλῖκον τοῦ Ἡμιενδοτεταρτημοριακοῦ Εὔρους διά τῆς Διαμέσου ἤ τοῦ ἡμιαθροίσματος πρώτου καί τρίτου τεταρτημορίου ἤτοι

$$\frac{\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)}{M} \quad ή \quad \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} \quad κ.ο.κ.$$

## 3.4 Μέτρα Ἀσυμμετρίας

Μέχρι τοῦδε ἐπραγματεύθημεν δύο βασικάς κατηγορίας πληθυσμιακῶν παραμέτρων. Πρῶτον τά μέτρα θέσεως, τά ὁποῖα ὡς ἤδη ἐλέχθη εἶναι δεῖκται χαρακτηρίζοντες τήν ἐν γένει θέσιν μιᾶς κατανομῆς συχνότητος κατά μῆκος τοῦ ἄξονος μετρήσεως τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς ἤ ἄλλως δεῖκται ἐκφράζοντες μίαν τιμήν τῆς μεταβλητῆς περί τήν ὁποίαν τείνουν νά συγκεντροῦνται τά ἐπί μέρους δεδομένα καί δεύτερον τά σημαντικώτερα τῶν μέτρων διασπορᾶς, δεικτῶν δηλαδή δηλωτικῶν τοῦ βαθμοῦ συγκεντρώσεως μιᾶς κατανομῆς περί ἕν μέτρον θέσεως ἤ ἄλλως τοῦ βαθμοῦ ἀνομοιογενείας (ἤ μεταβλητικότητος) τῶν ὑπό μελέτην δεδομένων (τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς).

Αἱ ἀνωτέρω δύο κατηγορίαι παραμέτρων χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς καί συνήθως εἶναι ἐπαρκεῖς διά τήν ἀντιμετώπισιν τῶν πλείστων ἐκ τῶν ἀναφυομένων στατιστικῶν προβλημάτων. Πολλάκις ὅμως προκειμένου νά περιγράφωμεν λεπτομερέστερον τήν ἐν γένει συμπεριφοράν τῶν ἐπί μέρους δεδομένων καί νά ἀποκτήσωμεν σαφεστέραν εἰκόνα μιᾶς κατανομῆς συχνότητος, αἱ ἀνωτέρω παράμετροι ἀποδεικνύονται ἀνεπαρκεῖς. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἀπαιτεῖται ὁ ὑπολογισμός καί ἡ χρησιμοποίησις ὡρισμένων προσθέτων πληθυσμιακῶν παραμέτρων ἀναφερομένων - πέραν τῆς θέσεως καί τῆς διασπορᾶς - εἰς τήν ἐν γένει μορφολογίαν τῆς ὑπό μελέτην κατανομῆς καί συγκεκριμένως εἰς τήν ἀσυμμετρίαν αὐτῆς - τόν βαθμόν δηλαδή ἀποκλίσεως τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης συχνότητος ἀπό μίαν πρότυπον συμμετρικήν καμπύλην - ὡς καί τήν κυρτότητα τῆς κατανομῆς, δηλαδή τό πεπλατυσμένον ἤ ἀντιστοίχως τήν αἰχμηρότητα τῆς καμπύλης συχνότητος περί τό σημεῖον μεγίστης συχνότητος. Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον πραγματευόμεθα τά σημαντικώτερα τῶν μ έ τ ρ ω ν ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς καί εἰς τήν ἑπομένην τά ἀντίστοιχα μ έ τ ρ α κ υ ρ τ ό τ η τ ο ς.

### 3.4.1 Συντελεστής Ἀσυμμετρίας τοῦ Pearson

Ὁ ἐν λόγῳ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ή ς ἤ δ ε ί κ τ η ς ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς ὀφείλεται εἰς τόν Karl Pearson καί δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{3.23}$$

ὅπου σ ἡ τυπική ἀπόκλισις τῆς μεταβλητῆς (ἤ ἄλλως τῆς κατανομῆς αὐτῆς) καί $\mu_3$ μία ἐπίσης π λ η θ υ σ μ ι α κ ή π α ρ ά μ ε τ ρ ο ς καλουμένη, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, τ ρ ί τ η κ ε ν τ ρ ι κ ή ρ ο π ή καί ὁριζομένη ὑπό τῆς σχέσεως

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^3 \tag{3.24}$$

ἐάν πρόκειται περί ἁ π λ ῶ ν δεδομένων ἤ ὑπό τῆς σχέσεως

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \tag{3.25}$$

ἐάν πρόκειται περί τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων.

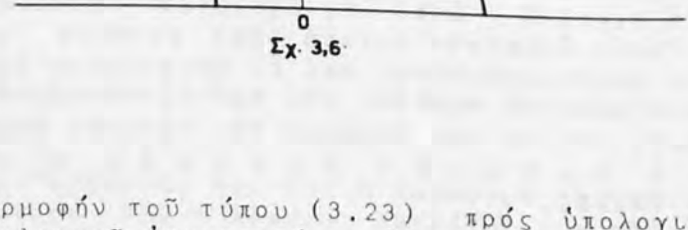
Εἶναι προφανές ὅτι ἐάν ἡ κατανομή συχνότητος - ἤ καλλίτερον ἐάν ἡ καμπύλη συχνότητος - τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς εἶναι σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή περί τόν Μ.Α. - δηλαδή περί τό σημεῖον μ - ἤτοι, ἐάν αἱ ἰσαπέχουσαι ἀπό τοῦ μέσου μ τιμαί $x_i$ παρουσιάζουν τήν αὐτήν συχνότητα, τότε αἱ θετικαί καί ἀρνητικαί διαφοραί $(x_i-\mu)^3$ συμψηφίζουν ἀλλήλας καί ἡ τιμή τῆς $\mu_3$ εἶναι μηδέν. Ἀντιθέτως, ἐάν ἡ καμπύλη συχνότητος παρουσιάζει ο ὐ ρ ά ν (ἴδε Σχ. 3.5) πρός τά δεξιά ἤ πρός τά ἀριστερά (δ ε ξ ι ά ν ἤ ἀ ρ ι σ τ ε ρ ά ν ἤ ἄλλως θ ε τ ι κ ή ν ἤ ἀ ρ ν η τ ι κ ή ν ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ν) ὑπερέχουν ἀντιστοίχως αἱ θετικαί ἤ αἱ ἀρνητικαί διαφοραί $(x_i-\mu)^3$ καί ἡ τιμή τῆς $\mu_3$ εἶναι θετική ἤ ἀρνητική ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως.


Σχ. 3.5

Κατά συνέπειαν ἡ ποσότης $\mu_3$ - ἡ τρίτη κεντρική ροπή δηλαδή - ἀποτελεῖ αὐτή καθ' ἑαυτήν ἕν μ έ τ ρ ο ν τῆς ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης. Πρός ἀποφυγήν ὅμως τῶν παρατεθέντων εἰς τήν παράγραφον (3.3.2) συναφῶς πρός τά ἀπόλυτα μέτρα διασπορᾶς μειονεκτημάτων καί δυσκολιῶν καί διά τούς ἰδίους λόγους διά τούς ὁποίους χρησιμοποιεῖται ἡ σχετική - ἀντί τῆς ἀπολύτου - τυπική ἀπόκλισις (πρός ἀποφυγήν δηλαδή τῶν μονάδων μετρήσεων κλπ.) χρησιμοποιεῖται καί ἐν προκειμένῳ ὡς μέτρον ἀσυμμετρίας τό πηλῖκον τῆς τρίτης κεντρικῆς ροπῆς $\mu_3$ πρός τήν τρίτην δύναμιν τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως $\sigma^3$ ἤτοι ὁ κ α θ α ρ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς $\beta_1$ τῆς σχέσεως (3.23).

Ὁ ἀνωτέρω συντελεστής ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς $\beta_1$ δύναται νά χρησιμοποιηθῆ μέ πολύ ἱκανοποιητικά ἀποτελέσματα διά μίαν εὐρυτάτην κατηγορίαν κατανομῶν συχνότητος - τάς καλουμένας κ α τ α ν ο μ ά ς P e a r s o n - καί ὡς ἐκ τούτου ἀποτελεῖ τόν σημαντικώτερον καί συνήθως τόν ἀκριβέστερον δείκτην τῆς ἀσυμμετρίας. Ὡς ἤδη ἐλέχθη ἐάν ἡ κατανομή εἶναι σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι $\beta_1=0$, ἀντιστοίχως δέ εἰς τάς περιπτώσεις ἀσυμμετρικῶν (μέ οὐράν πρός τά δεξιά ἤ πρός τά ἀριστερά) κατανομῶν εἶναι $\beta_1>0$ ἤ $\beta_1<0$ ὅτε ὁμιλοῦμεν περί θ ε τ ι κ ῆ ς ἤ ἀ ρ ν η τ ι κ ῆ ς ἀσυμμετρίας.

Ἐξυπακούεται ὅτι ὅσον ἡ ἀσυμμετρία (θετική ἤ ἀρνητική) γίνεται περισσότερον ἔντονος τόσον ὁ συντελεστής $\beta_1$ ἀποκλίνει περισσότερον τοῦ μηδενός. Ἐν προκειμένῳ ὅμως πρέπει νά τονισθῆ καί τό ἀντίστροφον. Συγκεκριμένως, δέν εἶναι πάντοτε δυνατόν ἐκ μόνης τῆς τιμῆς τοῦ $\beta_1$ νά συμπεράνωμεν μέ ἀπόλυτον βεβαιότητα περί τῆς συμμετρικότητος ἤ μή τῆς καμπύλης συχνότητος. Εἶναι δυνατόν π.χ. νά εἶναι $\beta_1 = 0$ καί ἡ καμπύλη οὐδεμίαν συμμετρίαν νά παρουσιάζη (ἴδε Σχῆμα 3.6). Διά τόν λόγον αὐτόν ἡ χρησιμοποίησις καί τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου πρέπει νά γίνεται μετά πολλῆς προσοχῆς.




Σχ. 3,6

Ἐφαρμοφήν τοῦ τύπου (3.23) πρός ὑπολογισμόν τοῦ συντελεστοῦ ἀσυμμετρίας εἰς συγκεκριμένα ἀριθμητικά παραδείγματα παραθέτομεν ἀπό κοινοῦ μετ' ἄλλων ὑπολογισμῶν - ροπῶν, συντελεστοῦ κυρτότητος κλπ. - εἰς τό τέλος τῆς παραγράφου 3.6 (περί ροπῶν).

### 3.4.2 Ἕτεροι Συντελεσταὶ Ἀσυμμετρίας

Εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς μᾶς ἀρκεῖ πολλάκις μία κατά προσέγγισιν - χονδρική κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον - ἐκτίμησις τοῦ βαθμοῦ ἀσυμμετρίας. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς χρησιμοποιοῦμεν κατά κανόνα μέτρα - δείκτας ἀσυμμετρίας - ἐννοιολογικῶς ἁπλᾶ καί εὔκολα εἰς τόν ὑπολογισμόν. Τά χρησιμοποιούμενα συνηθέστερον πρός τόν σκοπόν αὐτόν μέτρα ἀσυμμετρίας δίδονται ὑπό τῶν κάτωθι τύπων.

$$S_k = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} \qquad (3.26)$$

$$S_k = \frac{\mu - M}{\sigma} \qquad (3.27)$$

Ἅπαντα τά ὡς ἄνω μέτρα εἶναι καθαροί ἀριθμοί ἐκφράζοντες τήν σχετικήν (θετικήν ἤ ἀρνητικήν) ἀσυμμετρίαν τῆς κατανομῆς τῇ βοηθείᾳ (συναρτήσει) ἄλλων παραμέτρων αὐτῆς.

Ἐννοιλογικῶς τά ἀνωτέρω μέτρα ἀσυμμετρίας βασίζονται εἰς τά ἑξῆς. Εἶναι προφανές ὅτι ἐάν ἡ κατανομή εἶναι ἀπολύτως συμμετρική ὁ Μ.Α. καί ἡ Διάμεσος ταυτίζονται. Ἐξ ἄλλου εἰς τάς συμμετρικάς κατανομάς τό πρῶτον καί τρίτον τεταρτημόριον ἰσαπέχουν τῆς ἀντιστοίχου Διαμέσου. Κατά συνέπειαν ἀμφότεροι οἱ ἀνωτέρω δεῖκται, ἐάν ἡ κατανομή εἶναι συμμετρική, λαμβάνουν τήν τιμήν "μηδέν".

Ἀντιθέτως ἐάν ἡ κατανομή παρουσιάζει οὐράν πρός τά δεξιά ἤ τά ἀριστερά (θετική ἤ ἀρνητική ἀσυμμετρία) οἱ ἀνωτέρω δεῖκται λαμβάνουν ἀντιστοίχως θετικάς ἤ ἀρνητικάς τιμάς. Πράγματι, ἐάν π.χ. ἡ κατανομή παρουσιάζει οὐράν πρός τά δεξιά, ἡ διαφορά

$(Q_3-M)$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς $(M-Q_1)$ καί ἐκ τοῦ τύπου (3.26) προκύπτει θετική τιμή τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ ἀσυμμετρίας. Ὁμοίως - εἰς περίπτωσιν δεξιᾶς ἀσυμμετρίας - ὁ Μ.Α. (ἴδε Σχ. 3.5) εὑρίσκεται δεξιώτερον τῆς Διαμέσου καί ὡς ἐκ τούτου ἐκ τοῦ τύπου (3.27) προκύπτει ἐπίσης θετικός δείκτης ἀσυμμετρίας. Ἀνάλογα πρός τό ἀνωτέρω δύνανται νά λεχθοῦν καί εἰς τήν περίπτωσιν ἀρνητικῆς ἀσυμμετρίας.

Παραθέτομεν κατωτέρω ἐφαρμογήν τῶν τύπων (3.26) καί (3.27) εἰς τά δεδομένα τοῦ πίνακος 3.4 (κατανομή νοικοκυριῶν ὡς πρός τό μηνιαῖον εἰσόδημα αὐτῶν).

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος ὑπελογίσθησαν ἡ Διάμεσος καί τό Πρῶτον καί Τρίτον Τεταρτημόριον ὡς ἀκολούθως:

$$M=964 \qquad Q_1=518 \qquad Q_3=2.400$$

Ἐπίσης εἶχον ὑπολογισθῆ διά τήν αὐτήν ὡς ἄνω κατανομήν ὁ Μ.Α. καί ἡ Τυπική Ἀπόκλισις

$$\mu=2.319 \qquad \sigma=3.257$$

Χρησιμοποιοῦντες τά ἀνωτέρω δεδομένα λαμβάνομεν:

Ἐκ τοῦ τύπου (3.26)

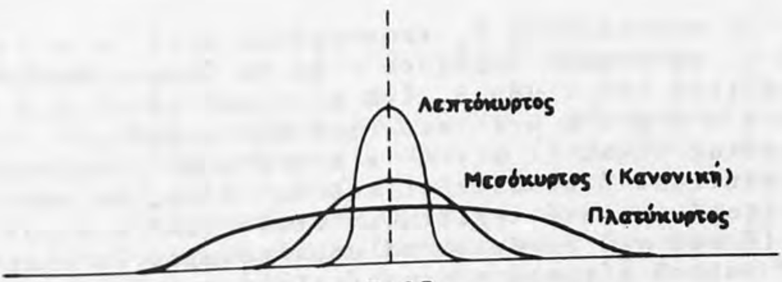
$$S_k=\frac{(2.400-964)-(964-518)}{(2.400-964)+(964-518)}=\frac{1.436-446}{1.436+446}=0,53$$

καί ἐκ τοῦ τύπου (3.27)

$$S_k=\frac{2.319-964}{3.257}=0,41$$

## 3.5 Μέτρα Κυρτότητος

Προκειμένου νά χαρακτηρίσωμεν τήν *κυρτότητα* μιᾶς κατανομῆς συχνότητος, τήν *αἰχμηρότητα* δηλαδή ἤ τό *πεπλατυσμένον* ἤ μή τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης συχνότητος, χρησιμοποιοῦμεν συνήθως ὡς *πρότυπον* συγκρίσεως μίαν εἰδικήν καμπύλην συχνότητος (ἴδε Σχῆμα 3.7) τήν ὁποίαν θά πραγματευθῶμεν διεξοδικῶς εἰς τόν δεύτερον τόμον τοῦ παρόντος ἔργου καί ἡ ὁποία εἶναι γνωστή ὡς *κανονική* καμπύλη (ἤ κατανομή). Οὕτω, μία καμπύλη συχνότητος ἡ ὁποία παρουσιάζει αἰχμηρότητα *μεγαλυτέραν*, *ἴσην* ἤ *μικροτέραν* τῆς τοιαύτης τῆς κανονικῆς καμπύλης, χαρακτηρίζεται ἀντιστοίχως ὡς *λεπτόκυρτος*, *μεσόκυρτος* ἤ *πλατύκυρτος*.




Σχ. 3,7

Διά τήν *μέτρησιν* τῆς κυρτότητος μιᾶς κατανομῆς - ἤ ἄλλως τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης συχνότητος - χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ *συντελεστής* ἤ *δείκτης κυρτότητος* τοῦ Pearson. Ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι *καθαρός ἀριθμός* καί ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad \text{ἤ} \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad (3.28)$$

ὅπου σ ἡ τυπική ἀπόκλισις τῆς κατανομῆς καί $\mu_4$ μία ἄλλη πληθυσμιακή παράμετρος - καλουμένη τ ε τ ά ρ τ η κ ε ν τ ρ ι κ ή ρ ο π ή - ὑπολογιζομένη ἐκ τοῦ τύπου

$$\mu_4=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^4 \qquad (3.29)$$

εἰς περίπτωσιν ἁ π λ ῶ ν δεδομένων, ἤ ἐκ τοῦ τύπου

$$\mu_4=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)^4}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (3.30)$$

εἰς περίπτωσιν τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων.

Ὁ συντελεστής $\beta_2$ προκειμένου περί κ α ν ο ν ι κ ῶ ν κατανομῶν λαμβάνει - ὡς θά ἴδωμεν ἀργότερον - πάντοτε τήν τιμήν 3, ἐνῶ αἱ τιμαί αὐτοῦ διά λ ε π τ ο κ ύ ρ τ ο υ ς καί π λ α τ υ κ ύ ρ τ ο υ ς καμπύλας εἶναι κ α τ ά κ α ν ό ν α ἀντιστοίχως μεγαλύτεραι ἤ μικρότεραι τοῦ 3. Οὕτω, ἐκ τῶν ὑπολογιζομένων κατά περίπτωσιν τιμῶν τοῦ συντελεστοῦ $\beta_2$ (ἤ τοῦ $\gamma_2$) δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν ἐν γένει περί τοῦ βαθμοῦ αἰχμηρότητος καί τῆς ἀντιστοίχου μορφῆς τῆς καμπύλης συχνότητος καί συγκεκριμένως νά θεωροῦμεν τήν ὑπό μελέτην κατανομήν

ὡς λ ε π τ ό κ υ ρ τ ο ν ἐάν $\beta_2>3$ ἤ ἀντιστοίχως $\gamma_2>0$,
ὡς μ ε σ ό κ υ ρ τ ο ν " $\beta_2=3$ " " $\gamma_2=0$,
ὡς π λ α τ ύ κ υ ρ τ ο ν " $\beta_2<3$ " " $\gamma_2<0$.

Ἐξυπακούεται φυσικά ὅτι ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀπόκλισις τοῦ συντελεστοῦ $\beta_2$ ἀπό τό 3 (ἤ ἀντιστοίχως τοῦ $\gamma_2$ ἀπό τό 0) τόσον μεγαλυτέρα εἶναι, κατά κανόνα, ἡ αἰχμηρότης ἤ τό ἐπίπλατες τῆς καμπύλης συχνότητος. Δέον ὅμως ἐν προκειμένῳ νά τονισθῆ ὅτι, μολονότι τά ὡς ἄνω συμπεράσματα ἰσχύουν διά τάς πλείστας τῶν συνήθων περιπτώσεων καί ἐφαρμογῶν, δέν εἶ-

ναι πάντοτε καί μετά βεβαιότητος ἀσφαλῆ. Ὑφίσταν-
ται δηλαδή περιπτώσεις κατανομῶν διά τάς ὁποίας ἐνῶ
ἡ τεταγμένη εἰς τό σημεῖον μεγίστης συχνότητος εἶ-
ναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου τῆς κανονικῆς καμ-
πύλης (δηλαδή ἔχομεν λ ε π τ ό κ υ ρ τ ο ν καμπύ-
λην) ὁ συντελεστής τοῦ Pearson εἶναι $\beta_2<3$ καί ἀν-
τιστρόφως περιπτώσεις π λ α τ υ κ ύ ρ τ ω ν κατα-
νομῶν μέ $\beta_2>3$.

Διά τούς λόγους αὐτούς ἡ χρησιμοποίησις καί τοῦ ἐν λόγῳ μέτρου δέον νά γίνεται μετά πολλῆς προσο-χῆς.

Ἐφαρμογήν τῶν τύπων (3.28) καί ὑπολογισμόν τοῦ συντελεστοῦ κυρτότητος $\beta_2$ ἤ $\gamma_2$ εἰς συγκεκριμένα ἀ-ριθμητικά παραδείγματα παραθέτομεν εἰς τήν ἑπομέ-νην παράγραφον (περί τῶν ροπῶν) ἀπό κοινοῦ μετ'ἄλ-λων συναφῶν ὑπολογισμῶν.

## 3.6 Ροπαί

Τά σημαντικώτερα τῶν μέτρων θέσεως καί διασπο-ρᾶς (Μ.Α., Διακύμανσις, Τυπική Ἀπόκλισις κλπ.) ὡς ἐπίσης καί οἱ βασικοί δεῖκται ἀσυμμετρίας καί κυρ-τότητος μιᾶς κατανομῆς συχνότητος εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθοῦν τῇ βοηθείᾳ (συναρτήσει) ὡρισμένων χαρα-κτηριστικῶν μεγεθῶν - π α ρ α μ έ τ ρ ω ν - τῆς κα-τανομῆς τά ὁποῖα καλοῦνται - χρησιμοποιουμένης καί ἐνταῦθα τῆς ἀντιστοίχου ὁρολογίας τῆς Φυσικῆς - Ρο-π α ί.

Συγκεκριμένως, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ὁ Μ.Α. ἐκφράζεται διά τῆς π ρ ώ τ η ς ροπῆς, ἡ Διακύμαν-σις καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ Τυπική Ἀπόκλισις διά τῆς π ρ ώ τ η ς καί δ ε υ τ έ ρ α ς τοιαύτης, ἡ Ἀ-συμμετρία (δείκτης $\beta_1$) διά τῶν ροπῶν μέχρι καί τ ρ ί-τ η ς τ ά ξ ε ω ς καί τέλος ἡ Κύρτωσις (δείκτης $\beta_2$) διά τῶν ροπῶν μέχρι καί τ ε τ ά ρ τ η ς τ ά-ξ ε ω ς. Κατά συνέπειαν, τά βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα μιᾶς κατανομῆς συχνότητος, τά ἀναφερό-μενα τουλάχιστον εἰς τήν θ έ σ ι ν, τήν δ ι α σ π ο-ράν, τήν ἀσυμμετρίαν καί τήν κυρτότητα αὐτῆς εἶναι δυνατόν νά περιγραφοῦν διά τῶν τεσσάρων πρώτων ροπῶν τῆς κατανομῆς.

Γενικώτερον ὅμως - καί εἰς τοῦτο ἀκριβῶς ὀφείλεται ἡ τόσον ἰδιάζουσα θεωρητική σημασία τῶν ἐν λόγῳ πληθυσμιακῶν παραμέτρων ὅσον καί ἡ εὐρυτάτη χρησιμοποίησις αὐτῶν εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς - ἀποδεικνύεται ὅτι "χρησιμοποιουμένων τῶν πάσης τάξεως ροπῶν μιᾶς κατανομῆς συχνότητος εἶναι δυνατόν νά περιγραφῆ ἐπακριβῶς ἡ μορφή τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης συχνότητος καί κατ'ἀκολουθίαν οἱαδήποτε ἰδιότης (χαρακτηριστικόν γνώρισμα) τῆς κατανομῆς". Ἐν προκειμένῳ δέον νά τονισθῆ ὅτι τά ἀνωτέρω ἰσχύουν ὑπό ὡρισμένας προϋποθέσεις αἱ ὁποῖαι ὅμως πληροῦνται κατά κανόνα εἰς τάς πλείστας τῶν συνήθως ἀντιμετωπιζομένων εἰς τήν πρᾶξιν περιπτώσεων. Ἡ ἀκριβής περιγραφή τῶν ἐν λόγῳ προϋποθέσεων ὡς καί ἡ αὐστηρά διατύπωσις τοῦ σχετικοῦ θεωρήματος παρατίθεται εἰς τόν δεύτερον τόμον τοῦ παρόντος ἔργου (Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων).

Ἐξ ὅσων ἐλέχθησαν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν χρησιμοποιουμένων ροπῶν τόσον καλλιτέρα εἶναι ἡ προσέγγισις εἰς τήν περιγραφήν τῆς ἀντιστοίχου (συναρτήσεως) καμπύλης συχνότητος καί φυσικά τόσον μεγαλύτερος ὁ ἀριθμός τῶν περιγραφομένων συναφῶν ἰδιοτήτων τῆς κατανομῆς. Οὕτω π.χ., ὡς ἤδη ἐλέχθη ἀνωτέρω, διά τῆς πρώτης ροπῆς εἶναι δυνατόν νά περιγραφῆ μόνον ἡ θέσις τῆς κατανομῆς, προστιθεμένης καί τῆς δευτέρας ροπῆς λαμβάνομεν πληροφορίας καί περί τῆς διασπορᾶς αὐτῆς. Ἐάν ἐπιπροσθέτως χρησιμοποιηθῆ ἡ τρίτη καί ἐν συνεχείᾳ ἡ τετάρτη ροπή προκύπτει ἀντιστοίχως, πέραν τῶν ἀνωτέρω, ἡ ἀσυμμετρία καί ἡ κύρτωσις τῆς κατανομῆς. Αἱ ἐν λόγῳ τέσσαρες πρῶται ροπαί εἶναι καί αἱ συνήθως χρησιμοποιούμεναι.

'Η ἀκριβής ἔννοια τῶν ροπῶν μιᾶς κατανομῆς, οἱ σχετικοί τύποι, ὁ τρόπος ἐφαρμογῆς αὐτῶν καί οἱ ἀπαιτούμενοι ὑπολογισμοί διά τήν εὕρεσιν τῶν ροπῶν δοθείσης κατανομῆς παρατίθενται κατωτέρω.

Εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς χρησιμοποιοῦνται συνήθως αἱ ἑξῆς δύο κατηγορίαι ροπῶν:

α) **αἱ ροπαί περί τήν ἀρχήν** (μετρήσεως) καί

β) **αἱ ροπαί περί τόν μέσον** ἤ **ἄλλως κεντρικαί ροπαί.**

**Ροπή τ-τάξεως περί τήν ἀρχήν μετρήσεως** ἤ ἁπλῶς τ-**Ροπή** δοθείσης μεταβλητῆς (ἤ κατανομῆς) καλεῖται ὁ μέσος ἀριθμητικός τῶν τ δυνάμεων ($\tau=0,1,2,\ldots.$) τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

'Η τ-ροπή συμβολίζεται συνήθως $\nu_\tau$ καί δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\nu_\tau=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\tau} \qquad (3.31)$$

$$\nu_\tau=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (3.32)$$

ἀναλόγως ἐάν πρόκειται περί **ἁπλῶν** ἤ **ταξινομημένων** δεδομένων.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων διά $\tau=0$ καί $\tau=1$ προκύπτει ὅτι $\nu_0=1$, ἡ μηδενική δηλαδή ροπή εἶναι πάντοτε ἴση πρός τήν μονάδα καί $\nu_1=\mu$, ἤτοι ὅτι ἡ **πρώτη ροπή - περί τήν ἀρχήν - ἰσοῦται** πρός τόν Μ.Α. Αἱ ροπαί - περί τήν ἀρχήν - οἱασδήποτε ἄλλης τάξεως προκύπτουν ἐκ τῆς σχέσεως (3.31) ἤ (3.32) - ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως - θέτοντας τήν κατάλληλον τιμήν τοῦ τ. Αἱ σταθμικαί π.χ. ῥοπαί δ ε υ τ έ ρ α ς, τ ρ ί τ η ς καί τ ε τ ά ρ τ η ς τάξεως εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\nu_2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i} \qquad \nu_3=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^3}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i} \qquad \nu_4=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^4}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}$$

Παράδειγμα: Ἐάν $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=1$, $x_4=3$, $x_5=0$, εἶναι αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῆς μεταβλητῆς X (περίπτωσις ἁπλῶν δεδομένων), δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.31) λαμβάνομεν

$$\nu_0=1$$

$$\nu_1=\frac{1}{5}(2+4+1+3+0)=2 \quad \text{ἤ} \quad \mu=2$$

$$\nu_2=\frac{1}{5}(2^2+4^2+1^2+3^2+0^2)=6$$

$$\nu_3=\frac{1}{5}(2^3+4^3+1^3+3^3+0^3)=20$$

$$\nu_4=\frac{1}{5}(2^4+4^4+1^4+3^4+0^4)=70{,}8 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἕν ἀριθμητικόν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.32) δίδεται κατωτέρω ἀπό κοινοῦ μετ'ἄλλων ὑπολογισμῶν.

Ρ ο π ή τ-τ ά ξ ε ω ς π ε ρ ί τ ό ν μ έ σ ο ν ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ν ἤ ἁπλῶς τ-κ ε ν τ ρ ι κ ή ρ ο π ή δοθείσης μεταβλητῆς (ἤ κατανομῆς), καλεῖται ὁ Μ.Α. τῶν τ δυνάμεων (τ=0,1,2,...) τῶν ἀποκλίσεων (διαφορῶν) τῶν ἐπί μέρους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἀπό τοῦ Μ.Α. των.

Ἡ τ κεντρική ῥοπή συμβολίζεται συνήθως $\mu_\tau$ καί δίδεται, συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω, ἐκ τῆς σχέσεως

$$\mu_\tau=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^\tau \qquad (3.33)$$

$$\text{ἤ} \qquad \mu_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)^\tau}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (3.34)$$

ἀναλόγως ἐάν αὕτη ἀφορᾶ ἁ π λ ᾶ ἤ τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν α δεδομένα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων προκύπτει ἀμέσως (θέτοντες $\tau=0,1,2,3,4$) ὅτι:

Ἡ μ η δ ε ν ι κ ή κεντρική ροπή εἶναι πάντοτε ἴση πρός τήν μονάδα, ἤτοι $\mu=1$

Ἡ π ρ ώ τ η κεντρική ροπή εἶναι πάντοτε ἴση πρός τό μηδέν, ἤτοι $\mu_1=0$

Ἡ δ ε υ τ έ ρ α κεντρική ροπή εἶναι πάντοτε ἴση πρός τήν διακύμανσιν, ἤτοι $\mu_2=\sigma^2$

ἐνῶ ἡ τ ρ ί τ η καί τ ε τ ά ρ τ η κεντρική ροπή $\mu_3$ καί $\mu_4$ εἶναι οἱ ἀριθμηταί εἰς τάς σχέσεις (3.23) καί (3.28) αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἀντιστοίχως τόν συντελεστήν ἀσυμμετρίας $\beta_1$ καί τόν συντελεστήν κυρτότητος $\beta_2$.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (3.33) εἰς τά δεδομένα τοῦ προηγουμένου παραδείγματος λαμβάνομεν

$$\mu_0=1$$
$$\mu_1=0$$
$$\mu_2=\frac{1}{5}\left[(2-2)^2+(4-2)^2+(1-2)^2+(3-2)^2+(0-2)^2\right]=2 \text{ ἤ } \sigma^2=2$$
$$\mu_3=\frac{1}{5}\left[(2-2)^3+(4-2)^3+(1-2)^3+(3-2)^3+(0-2)^3\right]=3,6$$
$$\mu_4=\frac{1}{5}\left[(2-2)^4+(4-2)^4+(1-2)^4+(3-2)^4+(0-2)^4\right]=6,8.$$

Οὕτω, ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ παραδείγματος τούτου ἔχομεν διά τάς συνήθως χρησιμοποιουμένας πληθυσμιακάς παραμέτρους ὅτι:

ὁ Μ.Α. εἶναι $\mu=\nu_1=2$

ἡ διακύμανσις $\sigma^2=\mu_2=2$, κατ' ἀκολουθίαν ἡ τυπική ἀπόκλισις $\sigma=\sqrt{2}=1,4$ καί ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος $\frac{\sigma}{\mu}=0,7$ ἤ 70%

ἡ ἀσυμμετρία $\beta_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{3,6}{2,8}=1,3$ καί

ἡ κύρτωσις $\beta_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}=\frac{6,8}{4}=1,7$ ἤ $\gamma_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=-1,3$ κ.ο.κ.

### 3.6.1 Σχέσεις Κεντρικῶν Ροπῶν καὶ Ροπῶν περὶ τὴν Ἀρχὴν

Αἱ κεντρικαί ροπαί $\mu_\tau$ ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν ἁπλῶν ροπῶν περί τήν ἀρχήν $\nu_\tau$ διά τῆς κατωτέρω γενικῆς σχέσεως

$$\mu_\tau=\nu_\tau-\binom{\tau}{1}\nu_{\tau-1}\mu+\binom{\tau}{2}\nu_{\tau-2}\mu^2-\ldots\pm\binom{\tau}{\lambda}\nu_{\tau-\lambda}\mu^\lambda\mp\ldots\pm\mu^\tau \qquad (3.35)$$

ὅπου $\binom{\tau}{\lambda}=\frac{\tau!}{\lambda!(\tau-\lambda)!}$ οἱ συνδυασμοί τῶν τ ἀνά λ, ($\lambda=0,1,2,\ldots\tau$) ἤ συνοπτικώτερον διά τῆς συμβολικῆς σχέσεως

$$\mu_\tau=(\nu-\mu)^\tau \qquad (3.36)$$

ὅπου κατά τήν ἀνάπτυξιν τοῦ διωνύμου $(\nu-\mu)^\tau$ οἱ ἐκθέται τοῦ ὅρου ν χρησιμοποιοῦνται ὡς δεῖκται πρός ὑποδήλωσιν τῆς ἀντιστοίχου ροπῆς περί τήν ἀρχήν.

Ἡ σχέσις (3.35) προκύπτει ἐκ τῶν τύπων (3.33) ἤ (3.34) - ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως - δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ διωνύμου $(x_i-\mu)^\tau$ διά τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ, ἤτοι

$$(x_i-\mu)^\tau=x_i^\tau-\binom{\tau}{1}x_i^{\tau-1}\mu+\binom{\tau}{2}x_i^{\tau-2}\mu^2-\ldots\pm\binom{\tau}{\lambda}x_i^{\tau-\lambda}\mu^\lambda\mp\ldots\pm\mu^\tau$$

καί ἐφαρμογῆς ἐν συνεχείᾳ τῶν τύπων (3.31) καί (3.32).

Διά τήν δ ε υ τ έ ρ α ν π.χ. κεντρικήν ροπήν ἔχομεν ὅτι

$$\mu_2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x_i-\mu)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2)}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}-2\mu\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}+\mu^2$$

καί τελικῶς, δεδομένου ὅτι

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}=\mu,$$

λαμβάνομεν $\mu_2=\nu_2-\nu_1^{\,2}$ ἤ ἄλλως $\mu_2=\nu_2-\mu^2$ ἤ ὑπό ἄλλην μορφήν - δεδομένου ὅτι ἡ διακύμανσις $\sigma^2=\mu_2$ - ἔχομεν τούς χρησιμοποιουμένους διά τόν ὑπολογισμόν τῆς διακυμάνσεως γνωστούς ἤδη τύπους

$$\sigma^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}\right)^2 \quad \text{ἤ ἄλλως} \quad \sigma^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}-\mu^2 \qquad (3.37)$$

Ὁμοίως διά τήν τ ρ ί τ η ν καί τ ε τ ά ρ τ η ν κεντρικήν ροπήν $\mu_3$ καί $\mu_4$ ἀναπτύσσοντες τό διώνυμον τοῦ τύπου (3.36) λαμβάνομεν

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\mu+3\nu_1\mu^2-\mu^3$$

ἤ ἄλλως, δεδομένου ὅτι

$$\nu_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i}=\mu$$

λαμβάνομεν $\mu_3=\nu_3-3\nu_2\mu+2\mu^3$ ἤ

$$\mu_3=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-3\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\times\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}+2\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^3 \qquad (3.38)$$

ἀντιστοίχως δέ διά τήν 4ην κεντρικήν ροπήν, ἔχομεν

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\mu+6\nu_2\mu^2-4\nu_1\mu^3+\mu^4 \quad \text{ἤ}$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\mu+6\nu_2\mu^2-3\mu^4 \quad \text{ἤ}$$

$$\mu_4=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^4}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-4\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\times\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}+6\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\times \qquad (3.39)$$

$$\times\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2-3\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^4$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι οἱαδήποτε κεντρική ροπή εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν ἀντιστοίχου τάξεως ἁπλῶν ροπῶν περί τήν ἀρχήν καί κατ'ἀκολουθίαν τό αὐτό ἰσχύει καί διά τάς συνηθέστερον χρησιμοποιουμένας πληθυσμιακάς παραμέτρους ὡς ὁ Μ.Α., ἡ διακύμανσις, οἱ δεῖκται ἀσυμμετρίας καί κυρτότητος κ.ο.κ.

Δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων - διά καταλλήλου ἐπιλύσεως αὐτῶν - εἶναι δυνατόν καί τό ἀντίστροφον, ἤτοι αἱ ἁπλαῖ ροπαί νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν ἀντιστοίχων κεντρικῶν τοιούτων.

### 3.6.2 Ἄμεσος καί Ἔμμεσος Μέθοδος Ὑπολογισμοῦ τῶν Ροπῶν

Αἱ ἀπαιτούμεναι πράξεις διά τόν ὑπολογισμόν τῶν διαφόρων ροπῶν εἶναι συνήθως μακροσκελεῖς καί ἐπίπονοι. Πρός ἁπλοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ ὑπολογισμῶν χρησιμοποιεῖται καί ἐν προκειμένῳ ἡ ἔ μ μ ε σ ο ς μ έ θ ο δ ο ς ἡ ὁποία ἐφηρμόσθη ἤδη διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ Μ.Α. καί τῆς διακυμάνσεως.

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν, τά ἀρχικά δεδομένα- κυρίως εἰς τήν περίπτωσιν κατανομῶν ἴ σ ο υ πλάτους - μετασχηματίζονται διά τοῦ γνωστοῦ ἤδη τύπου

$t_i = \dfrac{x_i - x_o}{\delta}$ ὅπου δ τό κοινόν πλάτος τῶν τάξεων καί οἱ ὑπολογισμοί πλέον γίνονται ἐπί τῶν ἁπλουστέρων βοηθητικῶν τιμῶν $t_i$.

Πρός ἐφαρμογήν τῆς ἐμμέσου μεθόδου διά τόν ὑπολογισμόν τῶν κεντρικῶν ροπῶν $\mu_\tau$ ὁ τύπος (3.34) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς: Δεδομένου ὅτι $x_i = x_o + \delta t_i$ καί $\mu = x_o + \delta\bar{t}$ ἔχομεν $x_i - \mu = \delta(t_i - \bar{t})$ καί κατά συνέπειαν ἐκ τοῦ τύπου (3.34) λαμβάνομεν

$$\mu_\tau = \delta^\tau \times \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (t_i - \bar{t})^\tau}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad (3.40)$$

ὅπου
$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

ὁ Μ.Α. ἤ ἄλλως ἡ πρώτη ροπή τῶν βοηθητικῶν τιμῶν $t_i$.

Τέλος, προκειμένου νά ἐκφράσωμεν τήν κεντρικήν ροπήν $\mu_\tau$ συναρτήσει τῶν ἁπλῶν ροπῶν τῶν βοηθητικῶν τιμῶν - τῶν ἁπλῶν β ο η θ η τ ι κ ῶ ν ρ ο π ῶ ν συμβολιζομένων συνήθως $\nu'_\tau$ - ἀναπτύσσομεν τό διώνυμον $(t_i-\bar{t})$ καί λαμβάνομεν τάς κατωτέρω - ἀνα-λόγους τῶν (3.35) καί (3.36) σχέσεις.

$$\mu_\tau=\delta^\tau\left[\nu'_\tau-\binom{\tau}{1}\nu'_{\tau-1}\bar{t}+\binom{\tau}{2}\nu'_{\tau-2}\bar{t}^2-\ldots\pm\bar{t}^\tau\right] \qquad (3.41)$$

ἤ συνοπτικώτερον $\mu_\tau=\delta^\tau(\nu'-\bar{t})^\tau$ (3.42)

ὅπου $\nu'_\tau=\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ ἡ τ βοηθητική ροπή (περί τήν ἀρχήν).

Χρησιμοποιοῦντες π.χ. τάς βοηθητικάς ροπάς $\nu'_\tau$ εἰς τάς περιπτώσεις τῆς διακυμάνσεως, τρίτης καί τετάρτης κεντρικῆς ροπῆς οἱ τύποι (3.37), (3.38) καί (3.39) γίνονται ἀντιστοίχως

$$\sigma^2=\delta^2(\nu'_2-\bar{t}^2) = \delta^2\left[\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2\right] \qquad (3.43)$$

$$\mu_3=\delta^3\left[\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-3\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\times\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}+2\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^3\right] \qquad (3.44)$$

$$\mu_4=\delta^4\left[\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^4}{\sum_{i=1}^{k} f_i}-4\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^3}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\times\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}+6\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^2-3\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}\right)^4\right] \qquad (3.45)$$

εἶναι δέ προφανές ὅτι διαφέρουν τῶν ἀρχικῶν τύπων μ ό ν ο ν κατά τόν παράγοντα δ ὑψωμένον εἰς τήν κατάλληλον δύναμιν.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω, ἐφαρμόζομεν τήν ἔμμεσον μέθοδον πρός ὑπολογισμόν τῶν ροπῶν μέχρι καί τετάρτης τάξεως εἰς τά δεδομένα τοῦ κατωτέρω πίνακος (3.5). Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν βάσει τῶν παρατεθέντων τύπων τάς συναφεῖς πληθυσμιακάς παραμέτρους $\mu$, $\sigma^2$, $\beta_1$, $\beta_2$ κλπ.

Πίναξ 3.5

Κατανομή 350 ἀρρένων ὡς πρός τήν ἡλικίαν των

| Τάξεις Ἡλικιῶν | $x_i$ | $f_i$ | $t_i$ | $f_i t_i$ | $f_i t_i^2$ | $f_i t_i^3$ | $f_i t_i^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15-20 | 17,5 | 11 | -2 | - 22 | 44 | - 88 | 176 |
| 20-25 | 22,5 | 107 | -1 | -107 | 107 | -107 | 107 |
| 25-30 | 27,5 | 138 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30-35 | 32,5 | 51 | 1 | 51 | 51 | 51 | 51 |
| 35-40 | 37,5 | 18 | 2 | 36 | 72 | 144 | 288 |
| 40-45 | 42,5 | 10 | 3 | 30 | 90 | 270 | 810 |
| 45-50 | 47,5 | 6 | 4 | 24 | 96 | 384 | 1.536 |
| 50-55 | 52,5 | 5 | 5 | 25 | 125 | 625 | 3.125 |
| 55-60 | 57,5 | 4 | 6 | 24 | 144 | 864 | 5.184 |
| Σύνολον | - | 350 | - | 61 | 729 | 2.143 | 11.277 |

Σημείωσις: Τά πρῶτα ὅρια τῶν τάξεων δέν περιλαμβάνονται εἰς αὐτάς.

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ ἀνωτέρω πίνακος εἰς τόν ὁποῖον περιλαμβάνονται καί οἱ ἀπαιτούμενοι βοηθητικοί ὑπολογισμοί (μέ τήν αὐθαίρετον ἀρχήν ληφθεῖσαν ἔναντι τῆς μεγίστης συχνότητος καί ὄχι ἔναντι τῆς μεσαίας τάξεως πρός διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν) προκύπτουν αἱ ζητούμεναι παράμετροι ὡς κάτωθι:

'Ο μέσος ἀριθμητικός ἐκ τοῦ τύπου (3.5)

$$\mu = 27,5 + 5 \times \frac{61}{350} = 28,4$$

'Η διακύμανσις καί κατ'ἀκολουθίαν ἡ τυπική ἀπόκλισις ἐκ τοῦ τύπου (3.43)

$$\sigma^2 = 25 \left[ \frac{729}{350} - \left(\frac{61}{350}\right)^2 \right] = 51,25 , \quad \sigma = \sqrt{51,25} = 7,1$$

καί ἑπομένος ὁ $c.v = \frac{\sigma}{\mu} 100 = \frac{7,1}{28,4} 100 = 25\%$

'Η τρίτη κεντρική ροπή $\mu_3$ ἐκ τοῦ τύπου (3.44)

$$\mu_3 = 125 \left[ \frac{2.143}{350} - 3 \frac{729}{350} \times \frac{61}{350} + 2 \left(\frac{61}{350}\right)^3 \right] = 635$$

καί ἐξ αὐτῆς ὁ συντελεστής ἀσυμμετρίας $\beta_1$ ἐκ τοῦ τύπου (3.23)

$$\beta_1 = \frac{635}{364} = 1,74$$

Τέλος, ἡ τετάρτη κεντρική ροπή $\mu_4$ ἐκ τοῦ τύπου (3.45)

$$\mu_4 = 625 \left[ \frac{11.277}{350} - 4 \frac{2.143}{350} \times \frac{61}{350} + 6 \frac{729}{350} \left(\frac{61}{350}\right)^2 - 3 \left(\frac{61}{350}\right)^4 \right] =$$

$$= 17.750 \quad (\text{περίπου})$$

καί ἐξ αὐτῆς ὁ συντελεστής κυρτότητος $\beta_2$ ἤ $\gamma_2$ ἐκ τοῦ τύπου (3.28)

$$\beta_2 = \frac{17.750}{2.626} = 7,66 \quad ἤ \quad \gamma_2 = 3,77$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν προκύπτει ὅτι ἡ κατανομή αὔτη παρουσιάζει ἀρκετά ἔντονον διασποράν, σημαντικήν ἀσυμμετρίαν πρός τά δεξιά (θετικήν) καί εἶναι λίαν αἰχμηρά (λεπτόκυρτος).

### 3.6.3 Σφάλματα Ὁμαδοποιήσεως. Διορθώσεις κατὰ Sheppard

Κατά τήν ὁμαδοποίησιν τῶν ἐπί μέρους πρωτογενῶν δεδομένων - τιμῶν ἐν γένει τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - καί τήν συνοπτικήν παρουσίασιν αὐτῶν ὑπό μορφήν μιᾶς κατανομῆς συχνότητος γίνεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ ὑπόθεσις - ἔστω καί ἐμμέσως - ὅτι τά δεδομένα ἑκάστης τάξεως συμπίπτουν μέ τήν κεντρικήν τιμήν τῆς τάξεως. Ὡς γνωστόν, ἡ ὑπόθεσις αὕτη - καθαρῶς συμβατική - δέν ἀνταποκρίνεται κατά κανόνα εἰς τήν πραγματικότητα καί ὡς ἐκ τούτου αἱ ὑπολογιζόμεναι ἐκ ταξινομημένων δεδομένων (σταθμικαί) ροπαί ἀποκλίνουν (διαφέρουν) ἐν γένει τῶν πραγματικῶν τοιούτων, ἐκείνων δηλαδή αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν ἁπλῶν δεδομένων.

Πρός ἀποφυγήν τῶν ἐν λόγῳ σφαλμάτων - γνωστῶν ὡς σφαλμάτων ὁμαδοποιήσεως - ἤ τουλάχιστον πρός βελτίωσιν τῆς ἀντιστοίχου προσεγγίσσεως χρησιμοποιοῦνται πολλάκις εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ὡρισμέναι διορθώσεις γνωσταί - ἐκ τοῦ προτείναντος αὐτάς - ὡς διορθώσεις κατά Sheppard. Αἱ διορθώσεις αὗται ἐφαρμόζονται κυρίως ἐπί τῆς ἐκ ταξινομημένων δεδομένων ὑπολογιζομένης διακυμάνσεως*, σπανιώτερον ἐπί τῆς τετάρτης κεντρικῆς ροπῆς*, προκύπτουν δέ ἀντιστοίχως ὑπό τῶν σχέσεων:

Διά τήν διακύμανσιν $$\sigma_*^2 = \sigma^2 - \frac{\delta^2}{12} \qquad (3.46)$$

---

*Διά τόν Μ.Α. καί τήν 3ην κεντρικήν ροπήν δέν ἀπαιτεῖται συνήθως τοιαύτη διόρθωσις.

Διά τήν 4ην κεντρικήν ροπήν $\mu^*_4 = \mu_4 - \frac{\sigma^2\delta^2}{2} + \frac{7\delta^4}{240}$ (3.47)

ὅπου, δι'ἀστερίσκου σημειοῦνται αἱ δ ι ο ρ θ ω μ έ ν α ι ροπαί καί δ δηλοῖ τό πλάτος τῶν τάξεων τῆς κατανομῆς ἐκ τῆς ὁποίας ὑπολογίζονται αἱ ἀντίστοιχοι ἀρχικαί - κατά π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν - ροπαί $\sigma^2$ (διακύμανσις) καί $\mu_4$ (τετάρτη κεντρική ροπή).

Οὕτω, ἡ διακύμανσις $\sigma^2$ καί ἡ τετάρτη κεντρική ροπή $\mu_4$ αἱ ὁποῖαι ὑπελογίσθησαν ἐκ τῶν δεδομένων τῆς κατανομῆς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος (3.5), διορθοῦνται συμφώνως πρός τάς σχέσεις (3.46) καί (3.47) ὡς ἑξῆς:

$$\sigma_*^2 = 51{,}25 - \frac{25}{12} = 49{,}17$$

$$\mu^*_4 = 17.750 - \frac{51{,}25 \times 25}{2} + \frac{7 \times 625}{240} = 17.750 - 64{,}8 + 18 = 17.703{,}2$$

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ὡς ἄνω διορθωτικῶν σχέσεων ἀπαιτεῖ τήν γνῶσιν ὡρισμένων περαιτέρω ἐννοιῶν - ἐκ τῆς Μαθηματικῆς κυρίως Στατιστικῆς - καί ὡς ἐκ τούτου δέν θά μᾶς ἀπασχολήση ἐνταῦθα. Πρός ἀποφυγήν ὅμως τυχόν παρανοήσεων καί ἰδιαιτέρως σφαλμάτων ἐφαρμογῆς αὐτῶν, θεωροῦμεν σκόπιμον νά τονίσωμεν ἐν προκειμένῳ τάς - κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον π ε ρ ι ο ρ ι σ τ ι κ ά ς - προϋποθέσεις ὑπό τάς ὁποίας προκύπτουν καί κατά συνέπειαν δέον νά ἐφαρμόζωνται αἱ ἐν λόγῳ διορθώσεις.

Αἱ προϋποθέσεις (συνθῆκαι) αὗται αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τήν ἀρχικήν κατανομήν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς καί τήν ἀντίστοιχον καμπύλην συχνότητος εἶναι αἱ ἑξῆς:

(α) Τό διάστημα τιμῶν (α,β) τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς δέον νά εἶναι π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν.

(β) Ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη συχνότητος δέον νά εἶναι μ ο ν ο κ ό ρ υ φ ο ς καί κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή καί (γ) Αἱ οὐραί τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης π λ η σ ι ά ζ ο υ ν έ ν τ ό ν ω ς τόν ἄξονα τῶν τετμημένων (ἄξονα μετρήσεων τῆς μεταβλητῆς) εἰς ἀμφότερα τά πέρατα τοῦ διαστήματος (α,β).

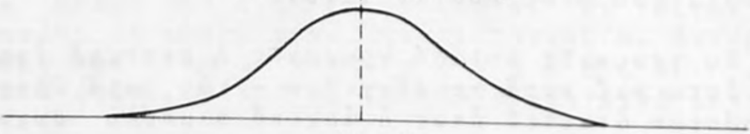
Ἐν γενικαῖς δηλαδή γραμμαῖς ἡ σχετική ἐφαρμογή - ἔστω καί κατά προσέγγισιν - τῶν κατά Sheppard διορθώσεων ἀπαιτεῖ ὅπως ἡ ἀρχική καμπύλη συχνότητος εἶναι περίπου τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος (3.8). Ἀντιθέτως - καί δι'αὐτόν ἀκριβῶς τόν λόγον ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέραν προσοχήν - ἡ ἐφαρμογή τῶν ἐν λόγῳ διορθώσεων εἰς περιπτώσεις ὅπου δέν πληροῦνται αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι ὡς π.χ. ἐκεῖναι τῶν σχημάτων (3.9-3.15) εἶναι δυνατόν νά ὁδηγήση εἰς τά ἀκριβῶς ἀντίθετά ἀποτελέσματα, εἰς τήν δ ι ε ύ ρ υ ν σ ι ν δηλαδή τοῦ σφάλματος ὁμαδοποιήσεως ἀντί τῆς ἐξαλείψεως αὐτοῦ. Ἡ διακύμανσις π.χ. ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἐκ ταξινομημένων δεδομένων εἰς τάς περιπτώσεις τῶν σχημάτων (3.9-3.15) εἶναι συνήθως μικροτέρα τῆς πραγματικῆς τοιαύτης καί κατά συνέπειαν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ὅρου $\delta^2:12$ αὐξάνει τό γεγόμενον σφάλμα ἀντί νά μειώση αὐτό.

Ἐξ ἄλλου, δέον νά τονισθῆ ὅτι καί εἰς τάς περιπτώσεις ὅπου εἶναι ἐπιτρεπτή ἡ ἐφαρμογή τῶν ὡς ἄνω διορθώσεων ἡ σημασία αὐτῶν εἶναι λίαν περιωρισμένη διά τούς ἑξῆς λόγους: Ὡς θά εἴδωμεν ἀργότερον εἰς τά περί κανονικῆς κατανομῆς εἰς τάς περιπτώσεις καμπύλων συχνότητος ὡς ἐκεῖναι τοῦ σχήματος (3.8) τό συνολικόν εὖρος μεταβολῆς (α,β) εἶναι περίπου 6-πλάσιον τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ τῆς κατανομῆς. Οὕτω, ἐάν π.χ. ὑποτεθῆ ὅτι τό ἐν λόγῳ διάστημα ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 ἴσου πλάτους τάξεις, τό κοινόν πλάτος δ αὐτῶν θά εἶναι ἴσον πρός σ:2 καί κατά συνέπειαν ἡ διορθωμένη διακύμανσις $\sigma_*^2$, συμφώνως πρός τήν σχέσιν (3.46), θά εἶναι

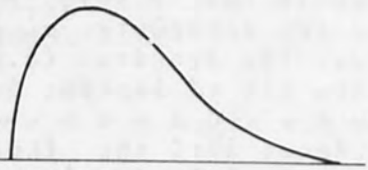
$$\sigma_*^2=\sigma^2-\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2:12 = \sigma^2\left(1-\frac{1}{48}\right)$$

ἡ διόρθωσις δηλαδή θά ἀντιπροσωπεύη μόλις τό 2% τῆς ὑπολογισθείσης ἐκ τῶν ταξινομημένων δεδομένων διακυμάνσεως $\sigma^2$. Διά τούς ἀνωτέρω λόγους ἡ σημασία καί ἡ ἐφαρμογή εἰς τήν πρᾶξιν τῶν ὡς ἄνω διορθώσεων εἶναι λίαν περιωρισμένη.

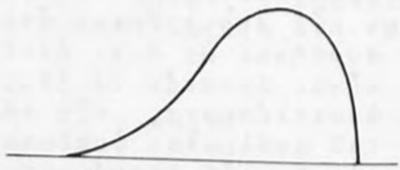
Κωδωνοειδής συμμετρική



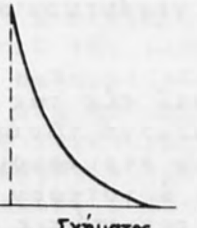
Σχ. 3,8



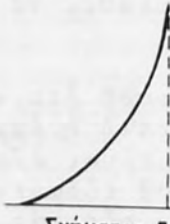
Ἀσύμμετρος δεξιά
Σχ. 3,9



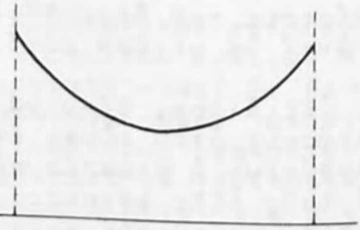
Ἀσύμμετρος ἀριστερά
Σχ. 3,10



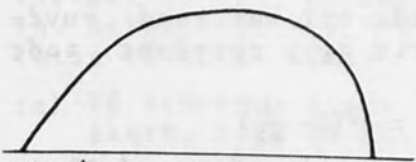
Σχήματος ἀντιστρόφου J
Σχ. 3,11



Σχήματος J
Σχ. 3,12



Σχήματος U
Σχ. 3,13



Ὁμοιόμορφος - Κωδωνοειδής
Σχ. 3,14

Δικόρυφος
Σχ. 3,15

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ

(Μελέτη Δύο ἢ Περισσοτέρων Πληθυσμιακῶν Χαρακτηριστικῶν λαμβανομένων ἀπὸ κοινοῦ καὶ ἐξεταζομένων συγχρόνως)

**ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4**

# ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ

## 4.1 Μελέτη Πληθυσμῶν ὡς πρὸς Δύο ἢ Περισσοτέρας Μεταβλητὰς

Εἰς τό πρῶτον μέρος τοῦ παρόντος ἠσχολήθημεν ἀποκλειστικῶς μέ τήν περιγραφικήν ἀνάλυσιν μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ ῶ ν πληθυσμῶν, ἐπραγματεύθημεν δηλαδή μεθόδους διά τῶν ὁποίων εἶναι δυνατόν νά μελετηθοῦν στατιστικῶς διάφορα χαρακτηριστικά τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι ἑκάστη τῶν ὑπό μελέτην μεταβλητῶν λαμβάνεται καί διερευνᾶται κ ε χ ω ρ ι σ μ έ ν ω ς.

Συνήθως ὅμως, εἰς τήν στατιστικήν διερεύνησιν τῶν χαρακτηριστικῶν ἑνός οἱουδήποτε πληθυσμοῦ πέραν τῆς κ α τ' ἰ δ ί α ν μελέτης μιᾶς ἑκάστης τῶν ὑπό ἔρευναν μεταβλητῶν, ἐνδιαφερόμεθα καί διά τήν συμπεριφοράν δύο ἤ περισσοτέρων ἐξ αὐτῶν λαμβανομένων ἀ π ό κ ο ι ν ο ῦ, θεωρουμένων δηλαδή σ υ γ χ ρ ό ν ω ς καί ἐξεταζομένων ἐ ν σ χ έ σ ε ι π ρ ό ς ἀ λ λ ή λ α ς. Σκοπός τῆς τοιαύτης συνεξετάσεως δύο (ἤ περισσοτέρων) μεταβλητῶν εἶναι κατά κανόνα ἡ διερεύνησις τοῦ "ἐ ά ν", "κ α τ ά π ό σ ο ν" καί "π ο ῖ ο ν τ ρ ό π ο ν" ἡ διαμόρφωσις (τῶν τιμῶν) τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν σ χ ε τ ί ζ ε τ α ι πρός ἤ ἐ π ι ρ ρ ε ά ζ ε τ α ι ἐκ τῆς διαμορφώσεως (τῶν τιμῶν) καί τῶν μεταβολῶν τῆς ἄλλης (ἤ τῶν ἄλλων). Ἐν ἄλλοις λόγοις ἐνδιαφερόμεθα ἐν προκειμένῳ νά μελετήσωμεν τήν τυχόν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν σ υ ν ά φ ε ι α ν (ἀλληλουχίαν, δεσμόν) καί γενικώτερον τήν καθ᾽οἱονδήποτε τρόπον ἀ λ λ η λ ε ξ ά ρ τ η σ ι ν αὐτῶν.

Εἰδικώτερον, διά τῆς συγχρόνου καί ἀπό κοινοῦ μελέτης δύο μεταβλητῶν ἐπιδιώκονται τά ἑξῆς:

α) Ὁ προσδιορισμός μιᾶς σ χ έ σ ε ω ς ἤ ἄλλως μιᾶς μαθηματικῆς ἐξισώσεως - καλουμένης ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς - διά τῆς ὁποίας ἀφ'ἑνός νά περιγράφεται συνοπτικῶς ὁ τρόπος τῆς ἀ λ λ η λ ε ξ α ρ τ ή σ ε ω ς τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, ἡ νομοτέλεια δηλαδή ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς ἐν σχέσει πρός τάς τιμάς καί τάς μεταβολάς τῆς ἄλλης καί ἀφ'ἑτέρου νά καθορίζεται μία συγκεκριμένη π ο σ ο τ ι κ ή διαδικασία ἐπιτρέπουσα ἐκ τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς τῶν μεταβλητῶν - καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ο υ ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ῆ ς - νά ὑπολογίζονται - ἔστω καί κατά π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν - ἀντίστοιχοι ο ἱ ο ν ε ί τιμαί τῆς ἄλλης, καλουμένης κατ'ἀναλογίαν ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ς.

β) Ὁ ὑπολογισμός ὡρισμένων ποσοτικῶν ἐκφράσεων - καλουμένων ἐν γένει δ ε ι κ τ ῶ ν σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς - διά τῶν ὁποίων ἀφ'ἑνός νά μετρᾶται ὁ β α θ μ ό ς σ υ ν α φ ε ί α ς, τό πόσον δηλαδή ἔντονος εἶναι ὁ ὑφιστάμενος μεταξύ τῶν μεταβλητῶν δεσμός καί ἀφ'ἑτέρου νά καθορίζεται εἰ δυνατόν ὁ τρόπος σ υ μ μ ε τ α β ο λ ῆ ς αὐτῶν (συναυξάνονται, μεταβάλλονται ἀντιρρόπως καί πῶς).

Τάς μεθόδους προσδιορισμοῦ ἐξισώσεων π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς εἰς δ ι μ ε τ α β λ η τ ο ύ ς στατιστικούς πληθυσμούς, τούς τρόπους ἀξιοποιήσεως αὐτῶν ὡς καί τά ἀναφυόμενα ἐν προκειμένῳ προβλήματα, πραγματευόμεθα λεπτομερῶς εἰς τό ἑπόμενον κεφάλαιον.

Ἐξ ἄλλου ὁ ὑπολογισμός διαφόρων δεικτῶν σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς καί γενικώτερον προβλήματα ἀναφερόμενα ἐν γένει εἰς τόν τρόπον συμμεταβολῆς καί τήν συνάφειαν δύο οἱωνδήποτε μεταβλητῶν, θά μᾶς ἀπασχολήσουν εἰς τό κεφάλαιον 6.

Τέλος, προβλήματα παλινδρομήσεως καί συσχετίσεως ἀναφυόμενα κατά τήν ἀπό κοινοῦ θεώρησιν καί συνεξέτασιν περισσοτέρων τῶν δύο μεταβλητῶν - π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ ῶ ν στατιστικῶν πληθυσμῶν - ἀποτελοῦν τό ἀντικείμενον τοῦ κεφαλαίου 7.

Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά μᾶς ἀπασχολήση ἡ λεπτομερής μελέτη (κατάρτισις, παρουσίασις, διερεύνησις καί ἀξιοποίησις) τῶν καλουμένων διμεταβλητῶν ἤ πολυμεταβλητῶν κατανομῶν. Δέον νά σημειωθῆ ὅτι αἱ χρησιμοποιούμεναι ἐν προκειμένῳ μέθοδοι, ὄργανα καί διαδικασίαι, πέραν τοῦ ὅτι ἐπιτρέπουν μίαν κατ' ἀρχήν διερεύνησιν τόσον τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὅσον καί τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας, ἀποτελοῦν ἐπίσης τό ἀπαραίτητον ὑπόβαθρον διά τήν περαιτέρω εἰς βάθος π ο σ ο τ ι κ ή ν μελέτην τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων παλινδρομήσεως καί συσχετίσεως. Παρά τήν βασικήν ὅμως σημασίαν τήν ὁποίαν παρουσιάζουν αἱ παρατιθέμεναι ἐνταῦθα μέθοδοι διά τήν ἐν γένει διερεύνησιν διμεταβλητῶν ἤ πολυμεταβλητῶν πληθυσμῶν, δέον νά λεχθῆ ἀπό τοῦδε ὅτι τά ἐξαγόμενα δι' αὐτῶν συμπεράσματα - π ο ι ο τ ι κ ο ῦ συνήθως χαρακτῆρος - ἀποτελοῦν ἐν γένει χ ο ν δ ρ ι κ ά ς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἐνδείξεις καί ὡς ἐκ τούτου ἡ σημασία αὐτῶν διά τήν λῆψιν ἀποφάσεων εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς εἶναι μᾶλλον περιωρισμένη.

## 4.2 Κατάρτισις Διμεταβλητῶν Κατανομῶν· Πίνακες Διπλῆς Εἰσόδου

Κατ'ἀναλογίαν καί γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τῶν μονομεταβλητῶν κατανομῶν συχνότητος - αἱ ὁποῖαι καταρτίζονται ὡς γνωστόν δι'ὁμαδοποιήσεως τῶν μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτάς τιμῶν μ ι ᾶ ς μ ό ν ο ν μεταβλητῆς - αἱ δ ι μ ε τ α β λ η τ α ί (καί γενικώτερον αἱ π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ α ί) κατανομαί ἀποτελοῦν συστηματικάς κατατάξεις τῶν μονάδων τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ ὡς πρός δ ύ ο (ἤ περισσοτέρας) σ υ γ χ ρ ό ν ω ς μεταβλητάς. Διά τήν κατάρτισιν μιᾶς διμεταβλητῆς (καί γενικώτερον πολυμεταβλητῆς) κατανομῆς συχνότητος ἀκολουθεῖται κατά κανόνα ἡ ἑξῆς διαδικασία:

Κατ'ἀρχήν ἀποφασίζεται ὁ ἀ ρ ι θ μ ό ς, τ ό π λ ά τ ο ς καί ἐν γένει ἡ σ υ γ κ ρ ό τ η σ ι ς τῶν τ ά ξ ε ω ν - ὁ τρόπος δηλαδή ὁμαδοποιήσεως τῶν τ ι μ ῶ ν - ἑκάστης τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν γνωστῶν κριτηρίων ὁ μ ο ι ο γ ε ν ε ί α ς καί ἁ π λ ό τ η τ ο ς ὡς ἐπίσης καί τῶν ἐπιδιωκομένων κ α τ ά π ε ρ ί π τ ω σ ι ν σ κ ο π ῶ ν. Ἀκολούθως αἱ ἐπί μέρους μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ ὁμαδοποιοῦνται ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτάς τιμῶν μιᾶς - τῆς πρώτης - τῶν μεταβλητῶν καί κατατάσσονται εἰς τάς καθορισθείσας συναφῶς πρός τήν μεταβλητήν ταύτην τάξεις. Ἐν συνεχείᾳ αἱ μονάδες ἑκάστης τῶν προηγουμένων τάξεων κατατάσσονται ἐπί τῇ βάσει τῶν τιμῶν των ὡς πρός τήν δευτέραν μεταβλητήν εἰς τάς ἀντιστοίχους πρός αὐτήν τάξεις. Εἰς τήν περίπτωσιν τριμεταβλητῶν (καί γενικώτερον πολυμεταβλητῶν) κατανομῶν ἀνάλογος διαδικασία ἀκολουθεῖται διά τάς μονάδας τῶν ὑποομάδων τῆς ἑκάστοτε προηγουμένης φάσεως αἱ ὁποῖαι κατατάσσονται ὡς πρός τήν τρίτην κατά σειράν μεταβλητήν κ.ο.κ. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ σ ε ι ρ ά μέ τήν ὁποίαν λαμβάνονται αἱ διάφοροι μεταβληταί εἶναι αὐθαίρετος καί οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχει ἐπί τῆς τελικῆς μορφῆς τῆς ἀντιστοίχου διμεταβλητῆς (ἤ πολυμεταβλητῆς) κατανομῆς.

Τά ἀποτελέσματα τῶν ὡς ἄνω συστηματικῶν κατατάξεων, αἱ διμεταβληταί δηλαδή (καί πολυμεταβληταί) κατανομαί παρουσιάζονται συνήθως τῇ βοηθείᾳ τῶν καλουμένων - δι'εὐνοήτους λόγους - πινάκων δ ι π λ ῆ ς (ἤ π ο λ λ α π λ ῆ ς) εἰσόδου. Ἡ τυπική μορφή μιᾶς οἱασδήποτε δ ι μ ε τ α β λ η τ ῆ ς κατανομῆς ἤ καλλίτερον τοῦ ἀντιστοίχου πίνακος δ ι π λ ῆ ς ε ἰ σ ό δ ο υ παρατίθεται κατωτέρω (Πίναξ 4.1).

Ἀνάλογος εἶναι ἡ συμβολική παρουσίασις τ ρ ι μ ε τ α β λ η τ ῶ ν καί γενικώτερον π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ ῶ ν κατανομῶν.

Πίναξ 4.1

Συμβολική Παράστασις Διμεταβλητῶν Κατανομῶν Συχνότητος

| X \ Y | | $\beta_0-\beta_1$ $y_1$ | $\beta_1-\beta_2$ $y_2$ | ... | $\beta_{j-1}-\beta_j$ $y_j$ | ... | $\beta_{\lambda-1}-\beta_\lambda$ $y_\lambda$ | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_0-\alpha_1$ | $x_1$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | ... | $f_{1j}$ | ... | $f_{1\lambda}$ | $f_{1.}$ |
| $\alpha_1-\alpha_2$ | $x_2$ | $f_{21}$ | $f_{22}$ | ... | $f_{2j}$ | ... | $f_{2\lambda}$ | $f_{2.}$ |
| . . . | . . . | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\alpha_{i-1}-\alpha_i$ | $x_i$ | $f_{i1}$ | $f_{i2}$ | ... | $\boxed{f_{ij}}$ | ... | $f_{i\lambda}$ | $f_{i.}$ |
| . . . | . . . | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $\alpha_{k-1}-\alpha_k$ | $x_k$ | $f_{k1}$ | $f_{k2}$ | ... | $f_{kj}$ | ... | $f_{k\lambda}$ | $f_{k.}$ |
| Σύνολον | | $f_{.1}$ | $f_{.2}$ | ... | $f_{.j}$ | ... | $f_{.\lambda}$ | $f_{..}$ |

Εἰς τόν ἀνωτέρω πίνακα - κατ'ἀναλογίαν πρός τήν συμβολικήν παράστασιν τῶν μονομεταβλητῶν κατανομῶν συχνότητος - αἱ τάξεις τιμῶν τῆς μεταβλητῆς X καί αἱ κεντρικαί τιμαί αὐτῶν συμβολίζονται ἀντιστοίχως εἰς τάς δύο πρώτας στήλας διά τῶν $(\alpha_{i-1}-\alpha_i)$ καί $x_i$ ὅπου $i=1,2,\ldots,k$ (k-τάξεις). Ἐξ ἄλλου, αἱ τάξεις τιμῶν τῆς ἑτέρας μεταβλητῆς Y καί αἱ ἀντίστοιχοι πρός αὐτάς κεντρικαί τιμαί παρίστανται εἰς τάς δύο πρώτας γραμμάς τοῦ πίνακος διά τῶν συμβόλων $(\beta_{j-1}-\beta_j)$ καί $y_j$ ὅπου $j=1,2,\ldots,\lambda$ (λ-τάξεις). Ἄς σημειωθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων τιμῶν τῶν δύο μεταβλητῶν δέν εἶναι ὁ αὐτός καί ἐν γένει $k\neq\lambda$.

Εἰς τά κλ φ α τ ν ί α (τετραγωνίδια) τοῦ κυρίου σώματος τοῦ πίνακος παρατίθενται αἱ ἀ π ό λ υ τ ο ι ἤ σ χ ε τ ι κ α ί συχνότητες $f_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$, ὁ ἀριθμός δηλαδή ἤ τό ποσοστόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ ὁποῖαι ἐπί τῇ βάσει τῶν τιμῶν των ὡς πρός τήν μεταβλητήν X ἀνήκουν εἰς τήν i-γ ρ α μ μ ή ν τοῦ πίνακος ἤτοι τήν i τάξιν τῆς X, ἐνῶ σ υ γ χ ρ ό ν ω ς ἐπί τῇ βάσει τῶν τιμῶν των ὡς πρός Y ἀνήκουν εἰς τήν j-στήλην, τήν j δηλαδή τάξιν τῆς Y. Ἐξυπακούεται ὅτι τό γ ε ν ι κ ό ν ἄθροισμα τῶν ἐν λόγῳ συχνοτήτων, ἤτοι τό ἄθροισμα

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij} = \sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{i=1}^{k} f_{ij} = f_{..} \qquad (4.1)$$

εἶναι ἴσον πρός τήν συνολικήν συχνότητα N - τό πλῆθος δηλαδή τῶν μονάδων τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ - ἤ ἴσον πρός τήν μονάδα (ἤ 100% ἤ 1.000 ‰) ἀναλόγως ἐάν τά $f_{ij}$ παριστοῦν ἀ π ο λ ύ τ ο υ ς ἤ σ χ ε τ ι κ ά ς συχνότητας ἀντιστοίχως. Τέλος, εἶναι προφανές ὅτι τά ἀθροίσματα τῶν ἀνωτέρω συχνοτήτων $f_{ij}$ λαμβανόμενα κατά γ ρ α μ μ ά ς ἤ κατά σ τ ή λ α ς καί συμβολιζόμενα

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,k \quad \text{καί} \quad f_{.j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij}, \; j=1,2,\ldots\lambda \qquad (4.2)$$

ὁρίζουν ἀντιστοίχως τάς μονομεταβλητάς κατανομάς τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τάς ὑπό ἔρευναν μεταβλητάς X καί Y, θεωρουμένας κεχωρισμένως.

Μολονότι ἡ παρατιθεμένη ἀνωτέρω συμβολική παράστασις τῶν διμεταβλητῶν κατανομῶν προσιδιάζει περισσότερον εἰς τάς περιπτώσεις ὅπου ἀμφότεραι αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι π ο σ ο τ ι κ α ί (καί δή σ υ ν ε χ ε ῖ ς τοιαῦται) δέον νά τονισθῆ ἐνταῦθα ὅτι ἡ ἐν γένει μορφολογία καί τά συστατικά μέρη τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παραμένουν οὐσιαστικῶς τά αὐτά ἀνεξαρτήτως τῆς φ ύ σ ε ω ς τῶν παρατιθεμένων καί συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Ἐξυπακούεται φυσικά ὅτι προκειμένου περί κ α τ η γ ο ρ ι κ ῶ ν ἤ π ο ι ο τ ι κ ῶ ν μεταβλητῶν αἱ τάξεις $(\alpha_{i-1}-\alpha_i)$ $i=1, 2, \ldots, k$ καί $(\beta_{j-1}-\beta_j)$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ ἀντικαθίστανται διά τῶν συναφῶν πρός τάς ὑπό ἔρευναν μεταβλητάς κ α τ η γ ο ρ ι ῶ ν αἱ δέ κεντρικαί τιμαί $x_i$ καί $y_j$ διά τῶν καταλλήλων ἀριθμητικῶν ἤ ἄλλων συμβολικῶν ἐκφράσεων.

Πρός σαφεστέραν ἀντίληψιν τῆς μορφολογίας καί τῶν συστατικῶν μερῶν ἑνός πίνακος διπλῆς εἰσόδου παραθέτομεν κατωτέρω τρία συγκεκριμένα παραδείγματα.

Πίναξ 4.2

Κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας κατά περιοχάς καί ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως

(εἰς χιλιάδας)

| Περιοχαί | Ἐπίπεδον Ἐκπαιδεύσεως | | | | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ἀπόφοιτοι Ἀνωτάτων Σχολῶν | Ἀπόφοιτοι Μέσης Ἐκπαιδεύσεως | Ἀπόφοιτοι Δημοτικοῦ | Μή Ἀποφοιτήσαντες Δημοτικοῦ | |
| Ἀστικαί | 174 | 692 | 1.989 | 980 | 3.835 |
| Ἡμιαστικαί | 15 | 46 | 432 | 315 | 808 |
| Ἀγροτικαί | 22 | 52 | 1.193 | 1.136 | 2.403 |
| Σύνολον | 211 | 790 | 3.614 | 2.431 | 7.046 |

Πίναξ 4.3

Κατανομή τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν τῆς Χώρας ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν μελῶν αὐτῶν καί τόν ἀριθμόν τῶν δωματίων τῆς κατοικίας των

(Νοικοκυριά εἰς χιλιάδας)

| Ἀριθμός Μελῶν | Ἀριθμός Δωματίων | | | | | | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 58 | 48 | 38 | 22 | 8 | 3 | 177 |
| 2 | 28 | 66 | 94 | 75 | 30 | 11 | 304 |
| 3 | 13 | 49 | 99 | 100 | 43 | 17 | 321 |
| 4 | 9 | 43 | 99 | 120 | 56 | 23 | 350 |
| 5 | 3 | 16 | 39 | 54 | 28 | 14 | 154 |
| 6 | 1 | 5 | 12 | 18 | 10 | 7 | 53 |
| 7 | - | 2 | 4 | 7 | 5 | 3 | 21 |
| Σύνολον | 112 | 229 | 385 | 396 | 180 | 78 | 1.380 |

Πίναξ 4.4

Κατανομή τῶν μαθητῶν ἑνός Γυμνασίου ὡς πρός τό Ἀνάστημα καί τό βάρος των

| Ἀνάστημα εἰς ἑκατοστά | Βάρος εἰς κιλά | | | | | | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 45-55 | 55-65 | 65-75 | 75-85 | 85-95 | 95-105 | |
| 145-155 | 4 | 15 | 10 | 3 | - | - | 32 |
| 155-165 | 2 | 17 | 29 | 24 | 13 | 4 | 89 |
| 165-175 | - | 8 | 45 | 120 | 58 | 12 | 243 |
| 175-185 | - | 3 | 15 | 40 | 65 | 25 | 148 |
| 185-195 | - | - | 2 | 10 | 24 | 17 | 53 |
| Σύνολον | 6 | 43 | 101 | 197 | 160 | 58 | 565 |

Τόν τρόπον χρησιμοποιήσεως διμεταβλητῶν κατανομῶν ὡς οἱ ἀνωτέρω καί γενικώτερον μερικάς ἁπλᾶς μεθόδους ἀναλύσεως τῶν δεδομένων καί ἐξαγωγῆς ἀντιστοίχων συμπερασμάτων πραγματευόμεθα εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους.

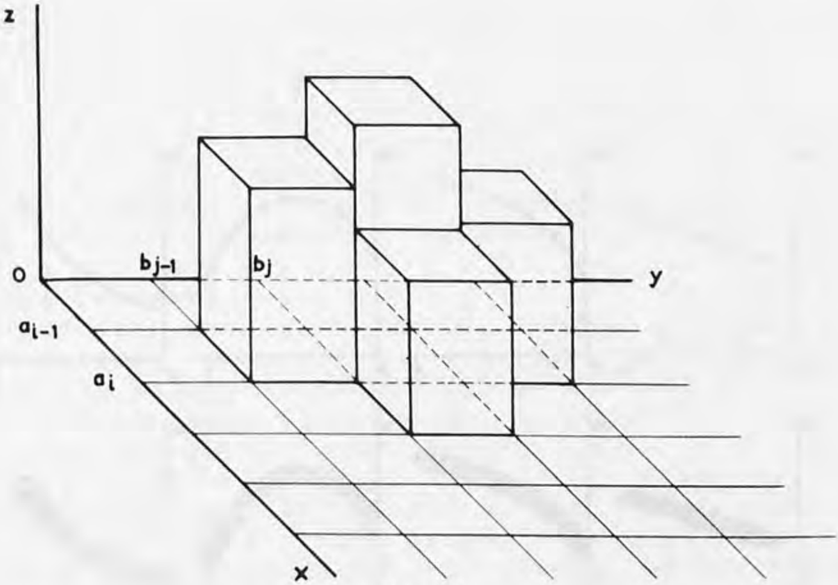
## 4.3 Γραφικαὶ Ἀπεικονίσεις Διμεταβλητῶν Κατανομῶν

Κατ'ἀναλογίαν πρός τό ἱστόγραμμον, τό πολύγωνον συχνότητος καί τήν καμπύλην συχνότητος τά ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται, ὡς εἴδομεν, διά τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν ποσοτικῶν μονομεταβλητῶν κατανομῶν, ἡ γραφική ἀπεικόνισις μιᾶς διμεταβλητῆς κατανομῆς ἀναφερομένης ἐπίσης εἰς ποσοτικάς μεταβλητάς X καί Y, δύναται νά γίνη ἀντιστοίχως δι'ἑνός ἀναγλύφου τρισδιαστάτου ἱστογράμμου, μιᾶς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας συχνότητος καί ἐν κατακλεῖδι (ὁριακῶς) διά μιᾶς ἐπιφανείας συχνότητος.

Ἡ κατασκευή τῶν ἐν λόγῳ ἀναγλύφων διαγραμμάτων γίνεται - θεωρητικῶς τουλάχιστον - κατά τρόπον ἀνάλογον τοῦ ἐφαρμοζομένου εἰς τάς μονομεταβλητάς κατανομάς. Οὕτω πρός τόν σκοπόν αὐτόν χρησιμοποιεῖται τό τρισδιάστατον - ἀντί τοῦ δισδιαστάτου - καρτεσιανόν σύστημα τῶν συντεταγμένων 0,xyz, καί ἐπί τῶν ἀξόνων x, y καί z (τετμημένων, τεταγμένων καί κατηγμένων) αὐτοῦ, μετρῶνται ἀντιστοίχως ἡ μεταβλητή X, ἡ μεταβλητή Y καί αἱ συχνότητες $f_{ij}$ τῆς συγκατανομῆς τοῦ ζεύγους (X,Y). Συγκεκριμένως ἐπί τῶν ἀξόνων x καί y λαμβάνονται ἀντιστοίχως διαδοχικά εὐθύγραμμα τμήματα μέ μῆκος ἀνάλογον πρός τό πλάτος τῶν τάξεων τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X καί Y καί ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῶν - ὁρίων ἑκάστης τάξεως - χαράσσονται παράλληλοι πρός τόν ἕτερον τῶν ἀξόνων (y καί x ἀντιστοίχως).

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον δημιουργεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Oxy ἕν δικτυωτόν - πλέγμα - ἀποτελούμενον ἐν γένει ἐξ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων τοῦ ἰδίου ἤ ποικίλλοντος ἐμβαδοῦ ἀναλόγως ἐάν αἱ τάξεις τιμῶν τόσον τῆς μεταβλητῆς X ὅσον καί τῆς Y εἶναι ἴσαι ἤ ὄχι. Ἐφ'ἑνός ἑκάστου τῶν ἐν λόγῳ ὀρθογωνίων ὑψοῦται ἐν συνεχείᾳ ἕν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον - ἱστός - μέ ὄ γ κ ο ν ἀνάλογον τῆς συχνότητος $f_{ij}$ τῆς ἀντιστοιχούσης συγχρόνως εἰς τάς τάξεις i καί j ($i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$) αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τό ὀρθογώνιον τῆς βάσεως. Φυσικά τά ὕψη τῶν ἐν λόγῳ ἱ σ τ ῶ ν εὑρίσκονται διά διαιρέσεως τῶν συχνοτήτων $f_{ij}$ διά τοῦ ἐ μ β α δ ο ῦ τῆς ἀντιστοίχου βάσεως - οὕτως ὥστε ὁ ὄ γ κ ο ς τῶν παραλληλεπιπέδων νά ἀντιστοιχῆ εἰς τήν $f_{ij}$ - καί μόνον ἐάν ἅπαντα τά ὀρθογώνια τοῦ ἐπιπέδου Oxy ἔχουν τό αὐτό ἐμβαδόν τά ὕψη τῶν παραλληλεπιπέδων λαμβάνονται ἀπ' εὐθείας ἀνάλογα τῶν συχνοτήτων $f_{ij}$.

Τό οὕτω προκῦπτον ἀνάγλυφον διάγραμμα ἀποτελεῖ τό τ ρ ι σ δ ι ά σ τ α τ ο ν ἱ σ τ ό γ ρ α μ μ ο ν. Ἐάν τό κέντρον ἑκάστης τῶν ἄνω ἑδρῶν τῶν ἱστῶν - παραλληλεπιπέδων - τοῦ τρισδιαστάτου ἱστογράμμου ἑνωθῆ δι'εὐθυγράμμων τμημάτων μετά τῶν ἀντιστοίχων κέντρων τῶν τεσσάρων ἐφαπτομένων ἱστῶν δημιουργεῖται μία πολυεδρική ἐπιφάνεια καλουμένη π ο λ υ ε δ ρ ι κ ή ἐ π ι φ ά ν ε ι α σ υ χ ν ό τ η τ ο ς ἡ ὁποία κατ'ἀναλογίαν πρός τό πολύγωνον συχνότητος ἀναπαριστᾷ ἐπίσης τήν διμεταβλητήν κατανομήν. Ὁ ὄγκος τοῦ κατασκευαζομένου κατά τήν ἀνωτέρω διαδικασίαν τρισδιαστάτου ἱστογράμμου ἰσοῦται πρός τήν συνολικήν συχνότητα N ἤ τήν μονάδα (ἤ 100% κλπ.) ἀντιστοίχως ἐάν διά τήν κατασκευήν του ἐχρησιμοποιήθησαν ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί συχνότητες. Τό αὐτό ἰσχύει καί διά τόν ὄγκον ὁ ὁποῖος περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας συχνότητος καί τοῦ ἐπιπέδου Oxy. Τέλος, ἡ ἐ π ι φ ά ν ε ι α σ υ χ ν ό τ η τ ο ς προκύπτει δι' ἐξομαλύνσεως τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας καί ἀποτελεῖ τήν ὁ ρ ι α κ ή ν μορφήν αὐτῆς ὅταν αἱ τάξεις ὡς πρός τάς μεταβλητάς X καί Y αὐξάνονται συνεχῶς - ἀριθμητικῶς τείνουν εἰς τό ἄπειρον - ἐνῶ τό πλάτος ἑκάστης ἐξ αὐτῶν μειοῦται (τείνει εἰς τό μηδέν). Τήν τυπικήν μορφήν ἑνός τρισδιαστάτου ἱστογράμμου παραθέτομεν κατωτέρω (Σχ. 4.1).

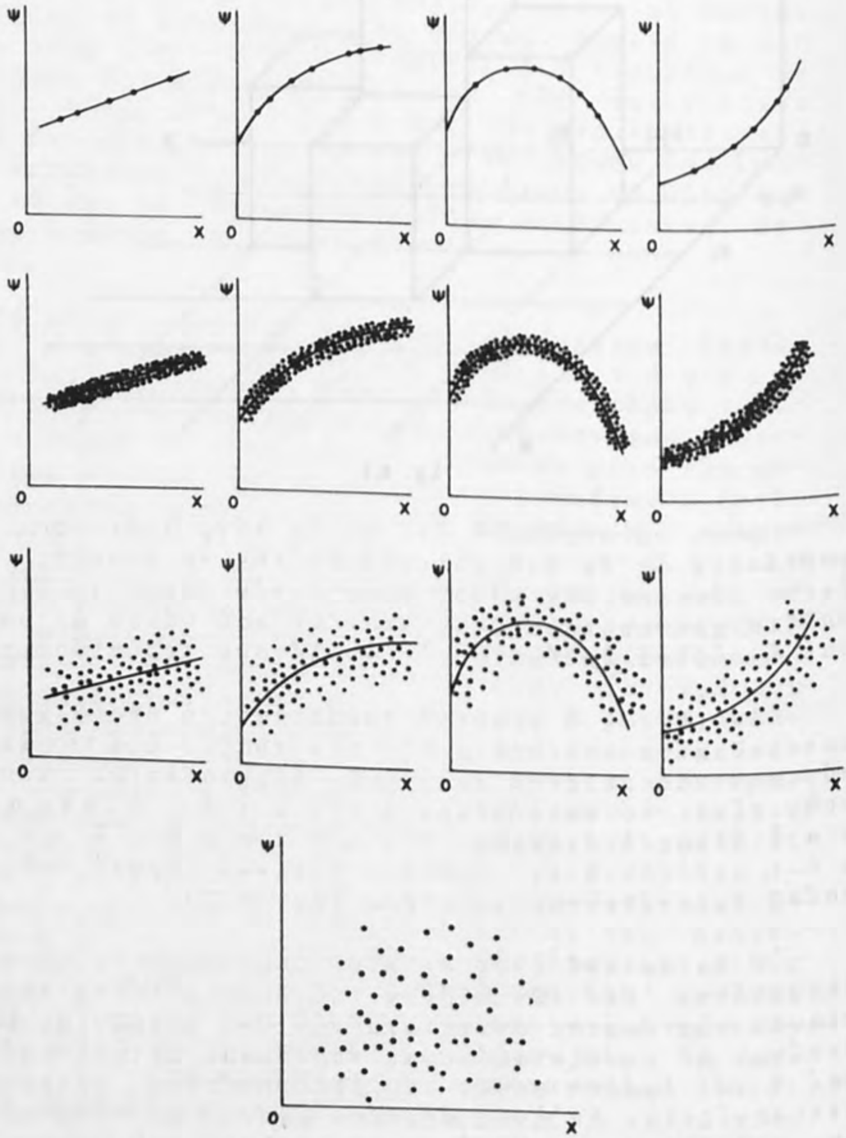



Σχ. 4,1

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι αἱ ἐν λόγῳ ἀνάγλυφοι παραστάσεις ὡς ἐκ τοῦ πολυπλόκου τῆς κατασκευῆς των ἔχουν οὐσιαστικῶς μόνον θεωρητικήν σημασίαν. Εἰς τήν πρᾶξιν χρησιμοποιοῦνται σπανίως καί μόνον ὡς μακέται ἤ εἰδικά ἐκθέματα εἰς ἀναλόγους περιπτώσεις.

Ἀντιθέτως ἡ γραφική παράστασις ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται συνηθέστατα εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν ἀπεικόνισιν καί μελέτην ποσοτικῶν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν εἶναι τό καλούμενον σ τ ι κ τ ό ν διάγραμμα ἤ ἄλλως διάγραμμα δ ι α σ π ο ρ ᾶ ς ἤ σ υ μ μ ε τ α β ο λ ῆ ς, μερικαί τυπικαί μορφαί τοῦ ὁποίου παρατίθενται κατωτέρω (Σχ. 4.2).

Ἡ κατασκευή ἑνός στικτοῦ διαγράμματος εἶναι ἁπλουστάτη. Ἐπί τῶν ἀξόνων τοῦ δισδιαστάτου καρτεσιανοῦ συστήματος συντεταγμένων Oxy μετρῶνται ἀντιστοίχως αἱ συνεξεταζόμεναι ποσοτικαί μεταβληταί X καί Y καί ἑκάστη μονάς τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ ἀπεικονίζεται δι' ἑνός σημείου ἔχοντος συντεταγμένας $(x_i, y_i)$ $i=1,2,...,N$ τάς τιμάς δηλαδή τοῦ ζεύγους τῶν μεταβλητῶν (X,Y) αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν ἐν




Σχ. 4,2

λόγῳ μονάδα. Τό οὕτω δημιουργούμενον ν έ φ ο ς τῶν Ν σημείων - ὅσαι καί αἱ μονάδες τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ - χαρακτηρίζει κατά τρόπον ἁπλοῦν καί εὔληπτον τόσον τόν τ ρ ό π ο ν ἀ λ λ η λ ε ξ α ρ τ ή σ ε ω ς τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὅσον καί τόν β α θ μ ό ν τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν σ υ ν α φ ε ί α ς. Πράγματι, ἡ "ἐ γ γ ύ τ η ς" τῶν ἐπί μέρους σημείων τοῦ στικτοῦ διαγράμματος πρός μίαν ἰ δ ε α τ ή ν γραμμήν - καλουμένην κατωτέρω κ α μ π ύ λ η ν π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς - ἡ ὁποία συνοψίζει κατά π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν τήν μορφήν τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους, παρέχει μία σαφῆ - παρ' ὅτι καθαρῶς π ο ι ο τ ι κ ο ῦ χαρακτῆρος - ἔνδειξιν περί τοῦ βαθμοῦ συναφείας τῶν μεταβλητῶν Χ καί Υ. Οὕτω, ἡ συνάφεια (ἀλληλουχία, συσχέτισις, δεσμός) τῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζονται εἰς οἱονδήποτε στικτόν διάγραμμα τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ Σχ. 4.2 δύναται νά χαρακτηρισθῆ ὡς π λ ή ρ η ς (ἀπόλυτος). Εἰς τήν δευτέραν σειράν διαγραμμάτων ἡ συνάφεια μεταξύ τῶν μεταβλητῶν δύναται νά θεωρηθῆ ὡς "ἰ σ χ υ ρ ά" ἀλλ' ὁπωσδήποτε ὄχι ἀπόλυτος. 'Αντιθέτως εἰς τήν τρίτην καί τετάρτην σειράν δυνάμεθα ἀντιστοίχως νά ὁμιλοῦμεν περί "ἀ σ θ ε ν ο ῦ ς" καί "ἀ ν υ π ά ρ κ τ ο υ" συναφείας.

'Εξ ἄλλου, τό σ χ ῆ μ α ἤ ἄλλως ἡ μ ο ρ φ ή τῆς ὡς ἄνω ἰδεατῆς γραμμῆς χαρακτηρίζει ἐν γένει τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Οὕτω, εἰς τήν πρώτην στήλην τῶν διαγραμμάτων (Σχ. 4.2) ἡ ὑφισταμένη μεταξύ τῶν μεταβλητῶν σχέσις δύναται νά χαρακτηρισθῆ ὡς ε ὐ θ ύ γ ρ α μ μ ο ς ἤ γ ρ α μ μ ι κ ή. 'Αντιθέτως διά τήν περιγραφήν τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τά διαγράμματα τῶν ὑπολοίπων στηλῶν θά εἶναι ἴσως προτιμωτέρα ἡ χρῆσις ἄλλων γραμμῶν ὡς π.χ. π α ρ α β ο λ ῶ ν δευτέρου ἤ ἀνωτέρου βαθμοῦ (π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ῶ ν καμπύλων), ὑ π ε ρ β ο λ ῶ ν ἤ τέλος ἐ κ θ ε τ ι κ ῶ ν ἤ ἄλλης πολυπλοκωτέρας μορφῆς γραμμῶν.

Πέραν τῶν στικτῶν διαγραμμάτων, τά ὁποῖα λόγῳ τῆς ἁπλότητος τῆς κατασκευῆς των καί τῆς σχεδόν αὐτομάτου ἐξαγωγῆς τῶν ἀπαιτουμένων συμπερασμάτων χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα διά μίαν κατ'ἀρχήν τουλάχιστον διερεύνησιν τῶν ποσοτικῶν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν, εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς γίνεται χρῆσις καί πολυπληθῶν ἄλλων γραφικῶν ἀπεικονίσεων αἱ ὁποῖαι ὅμως λόγῳ τῆς μᾶλλον περιωρισμένης καί εἰς ἐξειδικευμένας μόνον περιπτώσεις ἐφαρμογῆς των δέν θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἐνταῦθα. Αἱ σημαντικώτεραι ἄλλωστε ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τάς περιπτώσεις μονομεταβλητῶν κατανομῶν τάς ὁποίας περιεγράψαμεν ἤδη εἰς τό πρῶτον μέρος τοῦ παρόντος.

## 4.4 Ἀθροιστικαί ἤ Συσσωρευτικαί Διμεταβληταί Κατανομαί

Κατά τήν στατιστικήν διερεύνησιν ἑνός διμεταβλητοῦ πληθυσμοῦ πέραν τῶν τυχόν τοπικῶν ἰδιομορφιῶν τάς ὁποίας παρουσιάζει ἡ συγκατανομή τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X, Y καί αἱ ὁποῖαι ἀποκαλύπτονται συνήθως ἐκ τῶν ταξικῶν συχνοτήτων $f_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$, ἐνδιαφερόμεθα πολλάκις διά μίαν γενικωτέραν - μακροσκοπικήν - θεώρησιν τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς τῶν μεταβλητῶν (X,Y) εἰς ὁλόκληρον τήν περιοχήν τῆς ἀπό κοινοῦ μεταβολῆς των. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν, ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν μονομεταβλητῶν κατανομῶν, χρησιμοποιοῦνται συνήθως αἱ καλούμεναι ἀθροιστικαί ἤ συσσωρευτικαί συχνότητες $F_{\xi\eta}$ - ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί - αἱ ὁποῖαι δηλοῦν ἀντιστοίχως τόν ἀριθμόν ἤ τό ποσοστόν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ αἱ τιμαί τῶν ὁποίων ὡς πρός X καί ὡς πρός Y πληροῦν συγχρόνως τάς ἀνισότητας $x<\xi$ καί $y<\eta$, δέν ὑπερβαίνουν δηλαδή τάς προκαθωρισμένας ἑκάστοτε συγκεκριμένας τιμάς $\xi$ καί $\eta$. Αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται ἐκ τῶν δεδομένων - τῶν ταξικῶν συχνοτήτων $f_{ij}$ - ἑνός πίνακος διπλῆς εἰσόδου ἀναλόγου πρός τόν (4.1), ἀναφέρονται συνήθως εἰς τά δεύτερα (μείζονα) ὅρια τῶν τάξεων $(\alpha_i, \beta_j)$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ καί ὡς ἐκ τούτου συμβολίζονται $F_{ij}$ καί ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων

$$F_{ij} = \sum_{i=1}^{i}\sum_{j=1}^{j} f_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,k, \quad j=1,2,\ldots, \qquad (4.3)$$

Οὕτω, π.χ. $F_{11}=f_{11}$, $F_{12}=f_{11}+f_{12}$, $F_{32}=f_{11}+f_{12}+$ $+f_{21}+f_{22}+f_{31}+f_{32}$ κ.ο.κ.

'Εκ τοῦ τύπου (4.2) προκύπτουν εὐκόλως αἱ ἀκόλουθοι χαρακτηριστικαί τιμαί (ἰ δ ι ό τ η τ ε ς) τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων.

- $F_{oo}=0$, $F_{oj}=0$, $j=1,2,\ldots,\lambda$, $F_{io}=0$, $i=1,2,\ldots,k$.

- $F_{1\lambda}=\sum_{j=1}^{\lambda} f_{1j}=f_{1.}$ , $F_{k1}=\sum_{i=1}^{k} f_{i1}=f_{.1}$

- $F_{i\lambda}=\sum_{i'=1}^{i}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{i'j}=\sum_{i=1}^{i} f_{i.}=F_{i.}$, $F_{kj}=F_{.j}$

- $F_{k\lambda}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}=f_{..}$

Πρός τούτοις αἱ σχέσεις

$$f_{ij}=F_{ij}-F_{i,j-1}-F_{i-1,j}+F_{i-1,j-1} \tag{4.4}$$

$i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$

αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐπίσης ἐκ τῶν (4.3), ἐπιτρέπουν τόν ὑπολογισμόν τῶν ταξικῶν συχνοτήτων $f_{ij}$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἀθροιστικῶν τοιούτων καί ἀποκαλύπτουν πλήρως τήν ὑφήν τῶν ὑφισταμένων μεταξύ αὐτῶν σχέσεων.

Αἱ οὕτω ὑπολογιζόμεναι kλ τῷ πλῆθος ἀθροιστικαί - ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί - συχνότητες $F_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ ὁρίζουν ἀντιστοίχως τήν καλουμένην ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ή ν ἤ σ υ σ σ ω ρ ε υ τ ι κ ή ν δ ι μ ε τ α β λ η τ ή ν κ α τ α ν ο μ ή ν. Συγκεκριμένα ἀριθμητικά παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ἀθροιστικῶν συχνοτήτων ἐκ τῶν δεδομένων ἑνός πίνακος διπλῆς εἰσόδου παρατίθενται εἰς τήν παράγραφον (4.10).

## 4.5 Περιθωριακαὶ Κατανομαὶ ἢ Ὑποκατανομαὶ

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, δι'ἀθροίσεως κ α τ ά γ ρ α μ μ ά ς (ὁ ρ ι ζ ο ν τ ί ω ς) τῶν ταξικῶν συχνοτήτων $f_{ij}$ μιᾶς οἱασδήποτε διμεταβλητῆς κατανομῆς προκύπτουν εἰς τό π ε ρ ι θ ώ ρ ι ο ν τοῦ κυρίως πίνακος - ἴδε τελευταία στήλη πίνακος (4.1) - αἱ συχνότητες

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,k \tag{4.5}$$

αἱ ὁποῖαι προφανῶς καθορίζουν τήν κατανομήν τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ ὡς πρός μ ό ν η ν τήν μεταβλητήν X. Ὁμοίως, δι'ἀθροίσεως τῶν $f_{ij}$ κ α τ ά σ τ ή λ α ς (κ α τ α κ ο ρ ύ φ ω ς) προκύπτουν ἐπίσης εἰς τό περιθώριον - τελευταία γραμμή - αἱ συχνότητες

$$f_{.j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij}, \quad j=1,2,\ldots,\lambda \tag{4.6}$$

αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἀντιστοίχως τήν κατανομήν τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τήν ἑτέραν μεταβλητήν Y.

Αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐκ μιᾶς δ ι μ ε τ α β λ η τ ῆ ς κατανομῆς συχνότητος μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ α ί κατανομαί καλοῦνται συνήθως ὑ π ο κ α τ α ν ο μ α ί ἤ ἐ π ί μ έ ρ ο υ ς κατανομαί. Αἱ ἐν λόγῳ κατανομαί παρατιθέμεναι κατά κανόνα - εἰς τήν περίπτωσιν τουλάχιστον τῶν πινάκων διπλῆς εἰσόδου - εἰς τά π ε ρ ι θ ώ ρ ι α τοῦ κυρίως πίνακος εἶναι γνωσταί καί ὡς π ε ρ ι θ ω ρ ι α κ α ί κατανομαί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι δοθείσης τῆς σ υ γ κ α τ α ν ο μ ῆ ς ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ζ ε ῦ γ ο ς τῶν μεταβλητῶν (X,Y) - δοθείσης δηλαδή μιᾶς δ ι μ ε τ α β λ η τ ῆ ς κατανομῆς - εἶναι δυνατόν νά προκύψουν αἱ ἀντίστοιχοι ὑ π ο κ α τ α ν ο μ α ί - αἱ μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ α ί δηλαδή κατανομαί ὡς πρός X καί ὡς πρός Y κ ε χ ω ρ ι σ μ έ ν ω ς - δι' ἁπλῶν συνήθως ἀθροίσεων. Δέον ὅμως ἐν προκειμένῳ νά τονισθῆ ὅτι κ α τ ά κ α ν ό-να τό ἀντίστροφον δέν ἀληθεύει. Ἐκ τῶν ἐπί μέρους δηλαδή - μονομεταβλητῶν - κατανομῶν ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τάς μεταβλητάς X καί Y (κεχωρισμένως) δέν εἶναι ἐν γένει δυνατόν νά προσδιορισθῆ ἡ συγκατανομή τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ζεῦγος (X,Y).

Γενικώτερον, εἰς τάς περιπτώσεις τριμεταβλητῶν ἤ πολυμεταβλητῶν κατανομῶν συχνότητος εἶναι δυνατόν, διά καταλλήλων πάντοτε ἀθροίσεων, ἐκ τῆς συγκατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό σύνολον τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, νά προκύψη ἡ κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός ἕν οἱονδήποτε ὑποσύνολον αὐτῶν ἤτοι ὡς πρός μερικάς μόνον τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Αἱ ἐν λόγῳ κατανομαί, ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἀναφέρονται εἰς ὑποσύνολα ἐν γένει τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, καλοῦνται ὑποκατανομαί ἤ ἐπί μέρους κατανομαί τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός μίαν, δύο ἤ περισσοτέρας - ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως - μεταβλητάς.

Ἐξυπακούεται καί ἐν προκειμένῳ ὅτι ἡ συγκατανομή ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τρεῖς ἤ περισσοτέρας μεταβλητάς δέν εἶναι ἐν γένει δυνατόν νά προσδιορισθῆ ἐκ μόνων τῶν ἀντιστοίχων ὑποκατανομῶν αὐτῆς.

Συναφῶς πρός τά ἀνωτέρω ἄς ἴδωμεν τά δεδομένα τοῦ πίνακος (4.2). Οἱ παρατιθέμενοι εἰς τό κυρίως σῶμα τοῦ πίνακος ἀριθμοί παρουσιάζουν τήν κατανομήν τοῦ πληθυσμοῦ ταυτοχρόνως ὡς πρός τό ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως καί τήν περιοχήν διαμονῆς. Οὕτω π.χ. εἰς τάς Ἀστικάς περιοχάς τῆς χώρας εὑρέθησαν 174 χιλ. πτυχιοῦχοι ἀνωτάτων σχολῶν, εἰς τάς Ἀγροτικάς 52 χιλ. ἀπόφοιτοι γυμνασίου κ.ο.κ. Ἀντιθέτως τά δεδομένα τῆς τελευταίας - περιθωριακῆς - γραμμῆς τά ὁποῖα προέκυψαν δι'ἀντιστοίχων κατακορύφων ἀθροίσεων μᾶς πληροφοροῦν μόνον διά τήν κατανομήν τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως. Οὕτω, ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων βλέπομεν ὅτι οἱ ἀπόφοιτοι γυμνασίου ὁλοκλήρου τῆς χώρας εἶναι 790 χιλ. δέν δυνάμεθα ὅμως νά εἴπωμεν τά περί τοῦ τόπου διαμονῆς αὐτῶν. Προφανές εἶναι ἐπίσης ὅτι ἡ γνῶσις τῶν δύο περιθωριακῶν κατανομῶν δέν ἀρκεῖ διά τήν κατάρτισιν τῆς ἀντιστοίχου διμεταβλητῆς κατανομῆς τοῦ ὑπ' ὄψιν δηλαδή πίνακος διπλῆς εἰσόδου.

## 4.6 Δεσμευμέναι ἢ ὑπὸ Συνθήκην Κατανομαὶ

Τά δεδομένα - αἱ συχνότητες - τῆς περιθωριακῆς γραμμῆς τοῦ πίνακος (4.2) ὁρίζουν, ὡς εἴδομεν, τήν κατανομήν ὡς πρός τήν μεταβλητήν "'Επίπεδον 'Εκπαιδεύσεως" ὁ λ ο κ λ ή ρ ο υ τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ.

'Αντιθέτως, τά δεδομένα μιᾶς οἱασδήποτε ἐκ τῶν τριῶν γραμμῶν τοῦ κυρίου σώματος τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος καθορίζουν τήν κατανομήν ἐ π ί σ η ς ὡς πρός τό ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως ἀλλ' ἑ ν ό ς μ ό ν ο ν μ έ ρ ο υ ς τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ, ὡρισμένου δηλαδή ὑποπληθυσμοῦ αὐτοῦ. Συγκεκριμένως, ἡ πρώτη γραμμή παρουσιάζει τήν κατανομήν ὡς πρός τό ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως ἀτόμων διαβιούντων εἰς τάς 'Αστικάς περιοχάς, ἡ δευτέρα ἀτόμων διαβιούντων εἰς τάς Ἡμιαστικάς περιοχάς καί ἡ τρίτη τήν ἰδίαν κατανομήν ἀλλά ἐκείνων μόνον τῶν ἀτόμων τά ὁποῖα διαβιοῦν εἰς τάς 'Αγροτικάς περιοχάς τῆς χώρας. 'Εκάστη δηλαδή τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν δίδει τήν κατανομήν ὡς πρός τήν μεταβλητήν "'Επίπεδον 'Εκπαιδεύσεως" ὄχι ὁλοκλήρου τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ ἀλλ' ἑνός μόνον ὑποπληθυσμοῦ αὐτοῦ αἱ μονάδες τοῦ ὁποίου πληροῦν ὡρισμένην συνθήκην (δ έ σ μ ε υ σ ι ν) καί ἐν προκειμένῳ τήν δέσμευσιν νά διαβιοῦν ἀντιστοίχως εἰς τάς 'Αστικάς, 'Ημιαστικάς καί 'Αγροτικάς περιοχάς τῆς χώρας.

Τάς ἐν λόγῳ κατανομάς καλοῦμεν ὡς ἐκ τούτου δ ε σ μ ε υ μ έ ν α ς (ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η ν) κατανομάς συχνότητος.

Γενικώτερον ἡ κατανομή ἑνός οἱουδήποτε συνόλου ὡς πρός μίαν μεταβλητήν Y θά καλεῖται δ ε σ μ ε υ-μ έ ν η (ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η ν) ἐάν ὅλαι αἱ ἐπί μέρους μονάδες τοῦ συνόλου ἔχουν ἕν κ ο ι ν ό ν χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ό ν - τήν αὐτήν τιμήν ὡς πρός ἑτέραν μεταβλητήν X - πληροῦν δηλαδή ἅπασαι ὡρισμένην συνθήκην.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι τά δεδομένα τῆς i - ὅπου $i=1,2,\ldots,k$-γραμμῆς τοῦ συμβολικοῦ πίνακος (4.1) αἱ συχνότητες δηλαδή

$f_{i1},f_{i2},\ldots,f_{i\lambda}$ ἤ συνοπτικῶς $f_{ij}$ ὅπου $j=1,2,\ldots,\lambda$

καθορίζουν τήν δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ν (ὑ π ό σ υ ν θ ή κ η ν) κατανομήν ὡς πρός τήν μεταβλητήν Y ἑνός ὑποσυνόλου τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ καί συγκεκριμένως τοῦ ὑποπληθυσμοῦ τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ μονάδες πληροῦν τήν συνθήκην νά ἀνήκουν εἰς τήν i τάξιν τῆς ἑτέρας τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X.

'Εξυπακούεται ὅτι τά λεχθέντα ἀναφορικῶς πρός τάς γ ρ α μ μ ά ς τοῦ πίνακος (4 .2) ἤ γενικώτερον τοῦ συμβολικοῦ πίνακος (4.1), ἰσχύουν κατ'ἀναλογίαν καί διά τάς σ τ ή λ α ς αὐτῶν. Οὕτω, τά δεδομένα τῆς j - ὅπου $j=1,2,\ldots,\lambda$ - στήλης τοῦ πίνακος (4.1) αἱ συχνότητες δηλαδή

$f_{ij},f_{2j},\ldots,f_{kj}$ ἤ συνοπτικῶς $f_{ij}$ ὅπου $i=1,2,\ldots,k$

ὁρίζουν ἐν προκειμένῳ τήν δεσμευμένην κατανομήν ὡς πρός τήν μεταβλητήν X τοῦ ὑποπληθυσμοῦ τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες ἀνήκουν εἰς τήν j τάξιν τῆς Y ἤ ἄλλως ἔχουν τήν τιμήν $y_j$. Τά δεδομένα π.χ. τῆς πρώτης στήλης τοῦ πίνακος (4.2) παρουσιάζουν τήν κατανομήν τῶν ἀποφοίτων 'Ανωτάτων Σχολῶν ὡς πρός τόν βαθμόν ἀστικότητος τῆς περιοχῆς εἰς τήν ὁποίαν διαβιοῦν, μίαν δεσμευμένην δηλαδή κατανομήν δεδομένου ὅτι ἅπασαι αἱ μονάδες τοῦ ἐν λόγῳ ὑποπληθυσμοῦ πληροῦν τήν συνθήκην νά εἶναι ἀπόφοιτοι 'Ανωτάτων Σχολῶν.

Αἱ σ χ ε τ ι κ α ί συχνότητες, αἱ ἁ θ ρ ο ι σ τ ι κ α ί τοιαῦται ὡς ἐπίσης καί ἅπασαι αἱ πληθυσμιακαί παράμετροι - ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω - μιᾶς δεσμευμένης κατανομῆς ὑπολογίζονται ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν οἱασδήποτε ἄλλης μονομεταβλητῆς κατανομῆς. Οὕτω π.χ. αἱ σχετικαί συχνότητες τῆς δεσμευμένης κατανομῆς τῆς i γραμμῆς τοῦ πίνακος (4.1) προκύπτουν διά διαιρέσεως ἑκάστης ἐκ τῶν παρατιθεμένων εἰς τόν εἰς τόν πίνακα συχνοτήτων $f_{ij}$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ - ἀνεξαρτήτως ἐάν αὗται εἶναι ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί συχνότητες ἀναφορικῶς πρός τήν συγκατανομήν τοῦ ζεύγους μεταβλητῶν (X, Y) - διά τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $f_{i.}$, εἶναι δηλαδή τά πηλίκα

$$\frac{f_{ij}}{f_{i.}},\ j=1,2,\ldots,\lambda \qquad \text{ὅπου} \quad f_{i.} = \sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}$$

ἐκπεφρασμένα συνήθως εἰς ποσοστά ἐπί τοῖς ἑκατόν. Ὁμοίως αἱ σχετικαί συχνότητες αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τήν δεσμευμένην κατανομήν τῆς j - ὅπου $j=1,2,\ldots,\lambda$ - στήλης τοῦ πίνακος (4.1) δίδονται ὑπό τῶν πηλίκων

$$\frac{f_{ij}}{f_{.j}},\ i=1,2,\ldots,k \qquad \text{ὅπου} \quad f_{.j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij}$$

ἐκπεφρασμένων ἐπίσης κατά κανόνα εἰς ποσοστά ἐπί τοῖς ἑκατόν.

Αἱ δεσμευμέναι κατανομαί παρουσιάζουν ἐν γένει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον καί εἶναι πρωταρχικῆς χρησιμότητος εἰς τήν διερεύνησιν καί διαπίστωσιν τῶν τυχόν ὑφισταμένων διαφοροποιήσεων μεταξύ ὑποσυνόλων - ὑποπληθυσμῶν - ἑνός πληθυσμοῦ ἀναφορικῶς πρός τήν κατανομήν αὐτῶν ὡς πρός μίαν μεταβλητήν. Τά δεδομένα π.χ. τοῦ πίνακος (4.2) καί συγκεκριμένως αἱ τρεῖς ὁριζόνται δεσμευμέναι κατανομαί μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἴδωμεν κατά πόσον ἡ κατανομή ὡς πρός τό ἐπίπεδον ἐκπαιδεύσεως διαφοροποιεῖται ἤ ἐπιρρεάζεται ἀντιστοίχως ἐκ τοῦ τόπου διαμονῆς.

Πρός ἀποφυγήν τυχόν παρανοήσεων δέον νά τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι δεσμευμέναι κατανομαί εἶναι δυνατόν νά ἀναφέρωνται εἰς π ε ρ ι σ σ ο τ έ ρ α ς τ ῆ ς μ ι ᾶ ς μ ε τ α β λ η τ ῆ ς, νά εἶναι δηλαδή διμεταβληταί ἤ πολυμεταβληταί κατανομαί.

Ὡσαύτως αἱ σ υ ν θ ῆ κ α ι (δεσμεύσεις) τάς ὁποίας πληροῦν ἀπό κοινοῦ ἅπασαι αἱ ἐπί μέρους μονάδες μιᾶς δεσμευμένης κατανομῆς εἶναι δυνατόν νά εἶναι περισσότεραι τῆς μιᾶς. Ἐξυπακούεται ὅτι τοιαῦται δεσμευμέναι κατανομαί εἶναι δυνατόν νά προκύψουν ἐκ τριμεταβλητῶν καί γενικώτερον πολυμεταβλητῶν μόνον κατανομῶν.

Περισσοτέρας λεπτομερείας ἐπί τῆς σημασίας τῶν δεσμευμένων κατανομῶν ὡς καί τῆς χρησιμότητος αὐτῶν εἰς τήν ἀνάλυσιν τῶν δεδομένων πινάκων διπλῆς εἰσόδου παραθέτομεν κατωτέρω ὑπό μορφήν ἑνός συγκεκριμένου ἀριθμητικοῦ παραδείγματος (ἴδε παράγραφον 4.10).

## 4.7 Παράμετροι Δεσμευμένων Μονομεταβλητῶν Κατανομῶν

Τά διάφορα μέτρα θ έ σ ε ω ς, δ ι α σ π ο ρ ᾶ ς, ἀ σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς καί κ υ ρ τ ό τ η τ ο ς τά ὁποῖα ἐπραγματεύθημεν ἤδη συναφῶς πρός μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ ά ς κατανομάς συχνότητος, ὁρίζονται καί ὑπολογίζονται, ὡς εἶναι φυσικόν, κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον καί εἰς τάς περιπτώσεις τῶν μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ ῶ ν ὑ π ο κ α τ α ν ο μ ῶ ν συχνότητος ὡς ἐπίσης καί τῶν δ ε σ μ ε υ μ έ ν ω ν μ ο ν ο μ ε τ α β λ η τ ῶ ν κατανομῶν μέ τάς ὁποίας ἠσχολήθημεν ἀνωτέρω.

Προκειμένου νά εἰσάγωμεν τόν ἀπαιτούμενον ἐν προκειμένῳ συμβολισμόν παραθέτομεν κατωτέρω τούς τύπους οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνήθως διά τόν ὁρισμόν καί ὑπολογισμόν τῶν σημαντικωτέρων ἐκ τῶν ὡς ἄνω παραμέτρων - μέσου ἀριθμητικοῦ, διακυμάνσεως, ροπῶν ἀνωτέρας τάξεως κλπ. - ἀναφορικῶς πρός τάς μονομεταβλητάς δ ε σ μ ε υ μ έ ν α ς κατανομάς αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ μιᾶς οἱασδήποτε διμεταβλητῆς κατανομῆς ὡς αὕτη παρουσιάζεται εἰς τόν συμβολικόν πίνακα (4.1). Εἰς τήν παράγραφον (4.10) χρησιμοποιοῦμεν τούς παρατιθεμένους ἐνταῦθα τύπους ἐπί συγκεκριμένων ἀριθμητικῶν δεδομένων πρός πληρεστέραν κατανόησιν ἀφ' ἑνός τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς αὐτῶν καί ἀφ'ἑτέρου τῆς σημασίας καί χρησιμότητος τῶν ἐν λόγῳ παραμέτρων εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς.

Ὡς εἴδομεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, τά δεδομένα τῆς i γραμμῆς - ὅπου i=1,2,...,k - τῆς διμεταβλητῆς κατανομῆς τοῦ πίνακος (4.1), καθορίζουν τήν δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ν κατανομήν ὡς πρός τήν μεταβλητήν Y τοῦ ὑποπληθυσμοῦ - ὑποσυνόλου τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ - τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ μονάδες πληροῦν τήν συγκεκριμένην δ έ σ μ ε υ σ ι ν νά ἀνήκουν εἰς τήν i τάξιν τῆς μεταβλητῆς X ἤ ἄλλως νά ἔχουν - συμβατικῶς - τιμήν ὡς πρός X τήν κεντρικήν τιμήν $x_i$ τῆς ἐν λόγῳ τάξεως. Ἀνάλογα, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἰσχύουν καί διά τάς στήλας τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος.

Κατά συνέπειαν, εἰς τόν συμβολισμόν οἱασδήποτε παραμέτρου μιᾶς δεσμευμένης κατανομῆς, δέον νά λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν πέραν τῆς μεταβλητῆς εἰς τήν ὁποίαν αὕτη ἀναφέρεται καί ἡ σ υ ν θ ή κ η τήν ὁποίαν πληροῦν αἱ μονάδες της.

Οὕτω, ὁ δ ε σ μ ε υ μ έ ν ο ς μέσος ἀριθμητικός (δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ἀ ν α μ ε ν ο μ έ ν η τ ι μ ή), ἡ δ ε σ μ ε υ μ έ ν η δ ι α κ ύ μ α ν σ ι ς καί ἡ δ ε σ μ ε υ μ έ ν η ἁπλῆ ροπή τ τάξεως τῆς κατανομῆς ἡ ὁποία καθορίζεται ἐκ τῶν δεδομένων τῆς i γραμμῆς τοῦ πίνακος (4.1), ἤτοι τῆς δεσμευμένης κατανομῆς ὡς πρός τήν μεταβλητήν Y τοῦ ὑποπληθυσμοῦ τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες ἔχουν ὡς πρός X τήν τιμήν $x_i$, συμβολίζονται ἀντιστοίχως

$$E(Y/x_i), \qquad V(Y/x_i) \quad \text{καί} \quad E(Y^\tau/x_i)$$

καί ὑπολογίζονται διά τῶν κάτωθι τύπων

α) Δεσμευμένος Μέσος Ἀριθμητικός

$$E(Y/x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}} \tag{4.7}$$

β) Δεσμευμένη Διακύμανσις

$$V(Y/x_i)=\frac{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\left[y_j-E(Y/x_i)\right]^2}{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}} \quad (4.8)$$

$$\text{ἤ } V(Y/x_i)=\frac{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}y_j^2}{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}y_j}{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}}\right)^2 \quad (4.9)$$

γ) Δεσμευμένη Ροπή τ τάξεως

$$E(Y^\tau/x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}y_j^\tau}{\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}} \quad (4.10)$$

Ἐξυπακούεται ὅτι ἐκ τῶν ὡς ἄνω τύπων διά $i=1, 2,\ldots,k$ προκύπτουν αἱ δεσμευμέναι παράμετροι αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς k γραμμάς τοῦ πίνακος (4.1). Κατ'ἀναλογίαν πρός τά ἀνωτέρω ὁρίζονται ἐπίσης αἱ δεσμευμέναι παράμετροι

$$E(X/y_j), \qquad V(X/y_j) \quad \text{καί} \quad E(X^\tau/y_j)$$

αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν $j=1,2,\ldots,\lambda$ στήλην τοῦ πίνακος (4.1).

## 4.8 Συναρτησιακαὶ καὶ Στοχαστικαὶ Σχέσεις

Αἱ ὑφιστάμεναι μεταξύ δύο μεταβλητῶν σχέσεις διακρίνονται κατά βάσιν εἰς τάς καλουμένας συναρτησιακάς ἤ μαθηματικάς καί εἰς τάς σ τ ο χ α σ τ ι κ ά ς ἤ σ τ α τ ι σ τ ι κ ά ς τοιαύτας.

Λέγομεν ἐν γένει ὅτι μία μεταβλητή Υ ἐ ξ α ρ τ ᾶ τ α ι σ υ ν α ρ τ η σ ι α κ ῶ ς ἐξ ἑτέρας μεταβλητῆς Χ ἐάν μεταξύ αὐτῶν ὑφίσταται μ ο ν ο σ ή μ α ν τ ο ς ἀ ν τ ι σ τ ο ι χ ί α·ἄρρηκτος δηλαδή δεσμός τοιοῦτος ὥστε εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς Χ νά ἀντιστοιχῆ μ ί α κ α ί μ ό ν ο ν τιμή τῆς Υ.

Εἰς περιπτώσεις ἐξαρτήσεων αὐτοῦ τοῦ εἴδους ὑφίσταται κατά κανόνα καί εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθῆ διά καταλλήλων μεθόδων μία μαθηματική ἐξίσωσις

$$y = \varphi(x) \tag{4.11}$$

ἡ ὁποία συνδέουσα τάς δύο μεταβλητάς ἀφ'ἑνός μέν περιγράφει συνοπτικῶς τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως αὐτῶν, ἀφ'ἑτέρου δέ ἐπιτρέπει ἐκ τῶν τιμῶν τῆς Χ -καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ο υ μεταβλητῆς - νά ὑπολογίζονται ἐ π α κ ρ ι β ῶ ς αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς Υ, καλουμένης κατ' ἀναλογίαν ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ς μεταβλητῆς.

Συναρτησιακαί σχέσεις συνδέουν π.χ. τόν ὄγκον V καί τήν ἀκμήν α ἑνός κύβου ($V=\alpha^3$), τήν περίμετρον Π καί τήν πλευράν α ἑνός τετραγώνου (Π=4α), τό ἐμβαδόν Ε καί τήν ἀκτίνα r ἑνός κύκλου ($E=\pi r^2$), τόν τόκον Τ καί τόν χρόνον Χ ἤ τό ἐπιτόκιον ε(Τ= ΚεΧ), τόν ἀριθμόν x τῶν τηλεφωνημάτων τά ὁποῖα πραγματοποιεῖ κατά μῆνα ἕν νοικοκυριόν καί τό καταβλητέον ὑπ'αὐτοῦ ποσόν y (εἶναι π.χ. $y=50+0,7x$) κ.ο.κ.

Τοιαῦται ὅμως σχέσεις σπανίως ἀπαντῶνται εἰς τήν πρᾶξιν κατά κανόνα δέ μόνον εἰς τά Μαθηματικά καί γενικώτερον εἰς τάς καλουμένας Θετικάς 'Επιστήμας (Φυσικήν, Χημείαν, 'Αστρονομίαν κλπ.).'Αντιθέτως, εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν καί δή τῶν συναφῶν πρός οἰκονομικά, κοινωνικά, δημογραφικά καί λοιπά φαινόμενα, ὡς ἐπίσης εἰς τάς περιπτώσεις τῶν καλουμένων σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ν π ε ι ρ α μ ά τ ω ν εἰς τήν Γεωργίαν ἤ τήν Βιομηχανίαν, μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὑφίστανται κατά κανόνα ὡρισμέναι "χ α λ α ρ ώ τ ε ρ α ι" γενικωτέρου χαρακτῆρος σχέσεις, γνωσταί ἐν γένει ὡς σ τ ο χ α σ τ ι κ α ί ἤ σ τ α τ ι σ τ ι κ α ί σχέσεις.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατά βάσιν - δι'εὐνοήτους λόγους - σχέσεις αὐτοῦ καί μόνον τοῦ εἴδους.

Λέγομεν ἐν γένει ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y συνδέονται μεταξύ των διά μιᾶς σ τ ο χ α σ τ ι κ ῆ ς ἤ ἄλλως σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς σχέσεως ἐάν μεταξύ αὐτῶν δ έ ν ὑ φ ί σ τ α τ α ι μ ο ν ο σ ή μ α ν τ ο ς ἀ ν τ ι σ τ ο ι χ ί α ἀλλ'εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς μεταβλητῆς X - καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ο υ ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ῆ ς - ἀντιστοιχεῖ π λ ῆ θ ο ς τιμῶν τῆς Y ἡ κ α τ α ν ο μ ή σ υ χ ν ό τ η τ ο ς τῶν ὁποίων - καλουμένη ὡς γνωστόν δ ε σ μ ε υ μ έ ν η κατανομή - ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς X καί μεταβάλλεται μετ'αὐτῆς καθ' ὡρισμένον τρόπον.

Εἶναι γνωστόν π.χ. ὅτι αἱ ἐν γένει "δαπάναι" τῶν νοικοκυριῶν μολονότι δέν καθορίζονται μονοσημάντως ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου"εἰσοδήματος" αὐτῶν, ἐπιρρεάζονται σοβαρῶς ὑπ'αὐτοῦ καί διαφοροποιοῦνται ἀπό τῆς μιᾶς εἰς τήν ἄλλην εἰσοδηματικήν τάξιν. Κατά συνέπειαν, αἱ ἐν λόγῳ μεταβληταί συνδέονται ὁπωσδήποτε διά κάποιας στοχαστικῆς σχέσεως. 'Αντιθέτως, εἶναι δύσκολον νά φαντασθῶμεν ὅτι τό "εἰσόδημα" ἑκάστου τῶν νοικοκυριῶν τῆς χώρας καί τό "ἀνάστημα" τοῦ ἀρχηγοῦ αὐτῶν ἔχουν μεταξύ των κάποιαν σχέσιν ἤ ἀλληλοεπιρρεάζονται καθ'οἱονδήποτε τρόπον καί ὡς ἐκ τούτου αἱ μεταβληταί αὗται ἐκ προοιμίου δύνανται νά θεωρηθοῦν στατιστικῶς ἄσχετοι ἤ γενικώτερον ἀνεξάρτητοι.

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι προκειμένου περί συναρτησιακῶν σχέσεων ὁ τρόπος ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν περιγράφεται κατά κανόνα ὑπό μιᾶς μαθηματικῆς ἐξισώσεως $y=\varphi(x)$ ἡ ὁποία συνδέουσα τάς δύο μεταβλητάς ἐπιτρέπει τόν ὑπολογισμόν τῶν τιμῶν τῆς Y ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς X μέ ἀπόλυτον ἀκρίβειαν. Εἰς τάς περιπτώσεις στοχαστικῶν σχέσεων ἡ ὕπαρξις μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι προφανῶς - ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων - ἀδύνατος.

Ἐν προκειμένῳ πρός ἀπόκτησιν μιᾶς ὅσον τό δυνατόν σαφεστέρας καί ἀκριβεστέρας ἀντιλήψεως τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Υ σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς Χ, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νά προσφύγωμεν εἰς τήν περιγραφήν - ὅπου φυσικά τοῦτο εἶναι δυνατόν - τοῦ νόμου μέ τόν ὁποῖον αἱ δ ε σ μ ε υ μ έ ν α ι κ α τ α ν ο μ α ί τῆς Υ ἐ ξ α ρ τ ῶ ν τ α ι ἐκ (τῶν τιμῶν) τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς Χ.

Ἡ περιγραφή τοῦ ἐν λόγῳ νόμου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι μία οἱαδήποτε μονομεταβλητή κατανομή καθορίζεται κατά κανόνα πλήρως ὑπό τῶν ροπῶν* της, δύναται - θεωρητικῶς τουλάχιστον - νά ἐπιτευχθῆ δι'ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$E(Y^{\tau}/x)=\varphi_{\tau}(x),\quad \tau=1,2,\ldots \tag{4.12}$$

αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουσαι τάς ροπάς τῶν δεσμευμένων κατανομῶν τῆς μεταβλητῆς Υ (δεσμευμένας ροπάς) ὡς συναρτήσεις τῆς ἀνεξαρτήτου τοιαύτης Χ, ἐπιτρέπουν τόν ὑπολογισμόν αὐτῶν δι'ἑκάστην τιμήν τῆς Χ μονοσημάντως καί μέ ἀπόλυτον ἀκρίβειαν. Ἡ δυσκολία ἐν προκειμένῳ ἔγκειται φυσικά εἰς τόν προσδιορισμόν τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως.

Μεταξύ τῶν πάσης φύσεως στοχαστικῶν σχέσεων ἤ ἐξαρτήσεων αἱ ὁποῖαι δύνανται νά ὁρισθοῦν διά καταλλήλου ἐπιλογῆς τῶν ἐξισώσεων (4.12), ἰδιάζουσαν σημασίαν διά τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ἔχει ἡ περίπτωσις τῶν σ τ ο χ α σ τ ι κ ῶ ς σ υ σ χ ε τ ι σ μ έ ν ω ν μεταβλητῶν τήν ὁποίαν πραγματευόμεθα κατωτέρω. Εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον θά μᾶς ἀπασχολήση ἐπίσης λεπτομερῶς ἡ ἔννοια τῆς σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς δύο μεταβλητῶν.

---

*Ἴδε τά περί Ροπῶν εἰς τό πρῶτον μέρος τοῦ παρόντος

## 4.9 Στατιστικῶς Ἀνεξάρτητοι καὶ Ἐξηρτημέναι Μεταβληταί. Συνθῆκαι Ἀνεξαρτησίας

Λέγομεν ἐν γένει ὅτι ἡ μεταβλητή Y εἶναι στοχαστικῶς ἤ ἄλλως στατιστικῶς ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς X ἐάν ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y δέν ἐπιρρεάζεται οὔτε σχετίζεται καθ'οἱονδήποτε τρόπον πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς X.

Ἀντιθέτως, ἐάν εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς X ἀντιστοιχεῖ μέν πλῆθος τιμῶν τῆς Y ἀλλ'ἡ δεσμευμένη κατανομή αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἐκ (τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν) τῆς X καί μεταβάλλεται μετ'αὐτῆς καθ'ὡρισμένον τρόπον, λέγομεν ὅτι ἡ μεταβλητή Y εἶναι στατιστικῶς ἐξηρτημένη ἐκ τῆς X.

Οὕτω, ἐάν μία οἱαδήποτε τῶν δεσμευμένων ροπῶν $E(Y^{\tau}/x)$ ἐξαρτᾶται συναρτησιακῶς ἐκ τῆς X, ἤτοι ἐάν διά μίαν ἤ περισσοτέρας τιμάς τοῦ τ ἔχωμεν

$$E(Y^{\tau}/x)=\varphi(x) \qquad (4.13)$$

ἡ μεταβλητή Y εἶναι στατιστικῶς ἐξηρτημένη ἐκ τῆς X, ἐνῶ ἐάν ἅπασαι αἱ δεσμευμέναι ροπαί $E(Y^{\tau}/x)$, $\tau=1,2,\ldots$ δέν ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς X εἶναι δηλαδή σταθεραί ποσότητες, ἤτοι

$$E(Y^{\tau}/x)=C_{\tau} \qquad \tau=1,2,\ldots \qquad (4.14)$$

ἡ μεταβλητή Y εἶναι στατιστικῶς ἀνεξάρτητος τῆς X.

Μία εἰδική περίπτωσις στατιστικῶς ἐξηρτημένων μεταβλητῶν ἡ ὁποία εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμος καί μᾶς ἀπασχολεῖ ἰδιαιτέρως εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι αἱ στατιστικῶς συσχετισμέναι μεταβληταί. Οὕτω, λέγομεν ὅτι ἡ μεταβλητή Y εἶναι στατιστικῶς συσχετισμένη ἤ ἄλλως ὅτι εὑρίσκεται ἐν στατιστικῇ συσ χ ε τ ί σ ε ι πρός τήν μεταβλητήν X έάν ή πρώτη ροπή ή ἄλλως ή (δεσμευμένη) μέση τιμή τῶν δεσμευμένων κατανομῶν τῆς Y ἐξαρτᾶται συναρτησιακῶς ἐκ τῆς X, ἤτοι ἐάν

$$E(Y/x)=\varphi(x) \qquad (4.15)$$

'Αντιθέτως ἐάν ἡ ἐν λόγῳ μέση τιμή δέν ἐξαρτᾶται καθ'οἱονδήποτε τρόπον ἐκ τῆς X εἶναι δηλαδή μία σταθερά, ἤτοι

$$E(Y/x) \equiv C \qquad (4.16)$$

ἡ μεταβλητή Y εἶναι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ς πρός τήν X.

'Η ἐξίσωσις (4.15) ἀποτελεῖ τήν καλουμένην συνήθως σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ἐ ξ ί σ ω σ ι ν π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς τῆς μεταβλητῆς Y ὡς πρός τήν ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ν ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ή ν τοιαύτην X, ὁ λόγος δέ διά τόν ὁποῖον ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἔχει ἰδιάζουσαν σημασίαν εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς εἶναι ὁ ἑξῆς.

'Ελέχθη ἤδη ἀνωτέρω ὅτι εἰς τάς περιπτώσεις στοχαστικῶν σχέσεων ἡ ὕπαρξις καί ὁ προσδιορισμός μιᾶς ἐξισώσεως ἀναλόγου πρός τήν (4.11) ἡ ὁποία νά ἐπιτρέπη τόν ἐπακριβῆ ὑπολογισμόν τῶν τιμῶν τῆς Y ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων τῆς X εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατος. Κατά συνέπειαν εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς εἶναι φυσικόν νά περιορίσωμεν - εἰς μίαν πρώτην προσέγγισιν τοῦ προβλήματος - τάς ἀπαιτήσεις μας καί νά ἐπιδιώξωμεν τουλάχιστον τόν ἐπακριβῆ ὑπολογισμόν τοῦ μ έ σ ο υ ὅ ρ ο υ τῶν τιμῶν τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν τῆς X τοῦτο δέ καθίσταται δυνατόν μόνον ἐάν ἡ Y εἶναι στοχαστικῶς συσχετισμένη πρός τήν X καί ἡ ἐξίσωσις (4.15) εἶναι γνωστή.

'Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ὡς ἄνω ἐννοιῶν προκύπτουν ἀκόμη τά ἑξῆς.

α) 'Εάν ἡ μεταβλητή Y εἶναι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς τῆς X εἶναι κ α τ' ἀν ά γ κ η ν καί ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ς πρός αὐτήν, ἐνῶ τό ἀντίστροφον δ έ ν ἀληθεύει ἀπαραιτήτως.

β) Ἐάν ἡ μεταβλητή Y εἶναι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς σ υ σ χ ε τ ι σ μ έ ν η πρός τήν X εἶναι κ α τ' ἀ ν ά γ κ η ν καί στατιστικῶς ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ἐξ αὐτῆς. Καί πάλιν τό ἀντίστροφον δ έ ν ἀ λ η θ ε ύ ε ι ἀπαραιτήτως.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἐν λόγῳ συμπερασμάτων εἶναι ἁπλῆ (ἄμεσος συνέπεια τῶν ἀντιστοίχων ὁρισμῶν) καί ἀφίεται εἰς τόν ἀναγνώστην.

Μετά τόν ὁρισμόν τῆς σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς ὡς καί τῆς καθ'οἱονδήποτε τρόπον στατιστικῆς ἐ ξ α ρ τ ή σ ε ω ς δύο μεταβλητῶν θά μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐνταῦθα ὁ τρόπος διαπιστώσεως τῆς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς ἤ μή τῶν μεταβλητῶν X καί Y εἰς τήν πρᾶξιν καί συγκεκριμένως ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως τά ὁποῖα παρατιθέμενα εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ἀνάλογον τοῦ (4.1) καθορίζουν τήν ἀντίστοιχον συγκατανομήν τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δεσμευμέναι κατανομαί ὡς πρός Y αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἐκ τῶν δεδομένων ἑκάστης τῶν k γραμμῶν τοῦ πίνακος (4.1) τ α υ τ ί ζ ο ν τ α ι μεταξύ των πλήρως. Τοῦτο σημαίνει φυσικά ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι σχετικαί συχνότητες τῶν ἐν λόγῳ κατανομῶν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἤτοι

$$\frac{f_{1j}}{f_{1.}} = \frac{f_{2j}}{f_{2.}} = \ldots = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \ldots = \frac{f_{kj}}{f_{k.}} \quad \text{διά } j=1,2,\ldots,\lambda \qquad (4.17)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ συμπεριφορά τῶν ὑποπληθυσμῶν οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς k τάξεις τῆς X ἀναφορικῶς πρός τήν μεταβλητήν Y εἶναι ἡ ἰδία. Ἡ δομή δηλαδή τῶν ἐν λόγῳ ὑποπληθυσμῶν - ἤ ἄλλως ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῶν ἐπί μέρους μονάδων των - ὡς πρός τήν μεταβλητήν Y δέν ἐπιρρεάζεται - εἶναι ἀνεξάρτητος - ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς X καί κατά συνέπειαν ἡ μεταβλητή Y εἶναι σ τ α-τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς τῆς X. Ἀντιστρόφως, ἐάν δ έ ν ἰσχύουν αἱ σχέσεις (4.17), αἱ δεσμευμέναι κατανομαί ὡς πρός Y τῶν ὑποπληθυσμῶν οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς διαφόρους τάξεις τῆς X διαφέρουν μεταξύ των, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ δομή ὡς πρός Y τῶν ἐν λόγῳ ὑποπληθυσμῶν ἐπιρρεάζεται ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς X. Κατά συνέπειαν εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐν γένει διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς Y ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς X ἤ ἄλλως ὅτι ἡ μεταβλητή Y εἶναι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ἐκ τῆς X.

Προφανῶς, ὅσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ δ ι α φ ο ρ α ί - αἱ ἀποκλίσεις - τῶν δεσμευμένων κατανομῶν τάς ὁποίας ὁρίζουν αἱ k γραμμαί τοῦ πίνακος, ὅσον δηλαδή μεγαλυτέρα εἶναι ἡ μ ε τ α β λ η τ ι κ ό τ η ς - ἡ ἀνομοιομορφία - τῶν σχετικῶν συχνοτήτων,

$$\frac{f_{1j}}{f_{1.}}, \frac{f_{2j}}{f_{2.}}, \ldots, \frac{f_{ij}}{f_{i.}}, \ldots, \frac{f_{kj}}{f_{k.}}$$

ἐντός ἑκάστης στήλης $j=1,2,\ldots,\lambda$ τοῦ πίνακος τούτου, τόσον ἐντονωτέρα εἶναι ἐν γένει ἡ ἐ ξ ά ρ τ η σ ι ς τῆς μεταβλητῆς Y ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X.

Ἐν συμπεράσματι λοιπόν, δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἡ ἰ σ χ ύ ς ἤ μ ή τῶν σχέσεων (4.17) εἶναι ἀντιστοίχως δηλωτική τοῦ κατά πόσον ἡ μεταβλητή Y εἶναι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀνεξάρτητος ἤ ἐξηρτημένη ἐκ τῆς X.

Ἐξ ἄλλου, ἐάν ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (4.17) ἀποδεικνύονται εὐκόλως καί αἱ βασικαί σχέσεις (4.14) ἤτοι ἡ ἀνεξαρτησία τῶν δεσμευμένων ροπῶν $E(Y^{\tau}/x)$, $\tau=1,2,\ldots$ ἐκ τῆς X.

Πράγματι, ἐκ τῶν (4.17) δι'ἐφαρμογῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἀναλογιῶν προκύπτουν αἱ σχέσεις

$$\frac{f_{1j}}{f_{1.}} = \frac{f_{2j}}{f_{2.}} = \ldots = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \ldots = \frac{f_{kj}}{f_{k.}} = \frac{f_{1j}+f_{2j}+\ldots+f_{kj}}{f_{1.}+f_{2.}+\ldots+f_{k.}} = \frac{f_{.j}}{f_{..}}, \; j=1,2,\ldots\lambda.$$

ἤ συνοπτικώτερον αἱ σχέσεις

$$\frac{f_{ij}}{f_{i.}}=\frac{f_{.j}}{f_{..}}\quad i=1,2,\ldots,k,\quad j=1,2,\ldots,\lambda \tag{4.18}$$

Λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (4.18) ὡς καί τοῦ γεγονότος ὅτι

$$\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}=f_{i.}$$

ἐκ τοῦ τύπου (4.10) ἔχομεν

$$E(Y^{\tau}/x_i)=\sum_{j=1}^{\lambda}\frac{f_{ij}}{f_{i.}}y_j^{\tau}=\sum_{j=1}^{\lambda}\frac{f_{.j}}{f_{..}}y_j^{\tau}=E(Y^{\tau})=C_{\tau}$$

ἤτοι ὅτι ἡ τ-τάξεως ροπή (τ=1,2,...) τῆς δεσμευμένης κατανομῆς τῆς Y τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τήν i=1,2,...,k τάξιν τῆς X εἶναι σταθερά ποσότης (ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς $x_i$, i=1,2,...,k) καί δή ἴση πρός τήν τ-τάξεως ροπήν τῆς ἀντιστοίχου περιθωριακῆς κατανομῆς (ὑποκατανομῆς) ὡς πρός τήν μεταβλητήν Y).

Θά ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι "ἐ ά ν ἡ μ ε τ α β λ η τ ή Y ε ἶ ν α ι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς τ ῆ ς X τ ό τ ε κ α ί ἡ μ ε τ α β λ η τ ή X ε ἶ ν α ι σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς τ ῆ ς Y".

Πρός τούτοις ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι τά στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς τοῦ πίνακος (4.1) εἶναι ἀνάλογα τῶν στοιχείων τῆς περιθωριακῆς γραμμῆς τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος, ἤτοι κατ'ἀναλογίαν πρός τήν (4.17) νά ἀποδείξωμεν τάς σχέσεις

$$\frac{f_{i1}}{f_{.1}}=\frac{f_{i2}}{f_{.2}}=\ldots=\frac{f_{ij}}{f_{.j}}=\ldots=\frac{f_{i\lambda}}{f_{.\lambda}}\quad \text{διά } i=1,2,\ldots,k \tag{4.19}$$

Πράγματι, ἡ ἀνωτέρω σχέσις (4.18) δι' ἐφαρμογῆς ἐπίσης γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἀναλογιῶν γράφεται

$$\frac{f_{ij}}{f_{.j}}=\frac{f_{i.}}{f_{..}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας διά $j=1,2,\ldots,\lambda$ προκύπτουν προφανῶς αἱ σχέσεις (4.19).

Τέλος, ἐκ τῆς (4.18) προκύπτουν ἀκόμη αἱ σχέσεις

$$f_{ij}=\frac{f_{i.}\times f_{.j}}{f_{..}} \quad \text{ἤ ἄλλως} \quad \frac{f_{ij}}{f_{..}}=\frac{f_{i.}}{f_{..}}\times\frac{f_{.j}}{f_{..}} \tag{4.20}$$

(ὅπου φυσικά $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$) αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσαι τήν ἐμπειρικήν ἔκφρασιν τῶν γενικῶν συνθηκῶν ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς δύο μεταβλητῶν ἐπιτρέπουν τήν ἐξαγωγήν τοῦ κάτωθι συμπεράσματος.

<u>Θεώρημα:</u>
Ἐάν ἡ μεταβλητή Y εἶναι ἀνεξάρτητος - πάντοτε ὑπό στατιστικήν ἔννοιαν - τῆς X τότε καί ἡ μεταβλητή X εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς Y αἱ δέ σχετικαί συχνότητες $f_{ij}:f_{..}$ τῆς συγκατανομῆς τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ ὡς πρός τό ζεῦγος (X, Y) εἶναι ἴσαι πρός τό γινόμενον τῶν σχετικῶν συχνοτήτων $f_{i.}:f_{..}$ καί $f_{.j}:f_{..}$ τῶν ἀντιστοίχων ὡς πρός X καί ὡς πρός Y ὑποκατανομῶν (περιθωριακῶν κατανομῶν).

Τό ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ν τοῦ ὡς ἄνω θ ε ω ρ ή μ α τ ο ς ε ἶ ν α ι ἐ π ί σ η ς ἀ λ η θ ές. Ἐάν δηλαδή ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (4.20) ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἀληθεύουν ἐπίσης αἱ σχέσεις (4.17) καί (4.19) καί κατά συνέπειαν ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν X καί Y εἶναι στατιστικῶς ἀνεξάρτητος τῆς ἄλλης ἤ ἄλλως εἶναι μεταξύ των σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ι.

Ἐπανερχόμενοι ἐνταῦθα εἰς τήν παράγραφον (4.5) - περί ὑ π ο κ α τ α ν ο μ ῶ ν - ὅπου ἐλέχθη ὅτι "ἐνῶ δοθείσης τῆς συγκατανομῆς ὡς πρός τό ζεῦγος (X, Y) εἶναι δυνατόν νά προκύψουν αἱ ἐπί μέρους ὡς πρός X καί ὡς πρός Y ὑποκατανομαί, τό ἀντίστροφον δέν ἀληθεύει ἐ ν γ έ ν ε ι" διευκρινίζομεν ἐνταῦθα ὅτι "κ α ί τ ό ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ν ε ἶ ν α ι δ υ ν α τ ό ν ἀ λ λ ά μ ό ν ο ν ε ἰ ς τ ή ν π ε ρ ί π τ ω σ ι ν σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν μ ε τ α β λ η τ ῶ ν" Οὕτω ἐάν αἱ μεταβληταί X καί Y ὑποτεθοῦν σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ι ἐκ τῶν ὑποκατανομῶν αὐτῶν ὡς πρός X καί Y κεχωρισμένως, ἤτοι ἐκ τῶν συχνοτήτων $f_{i.}$ $i=1,2,\ldots,k$ καί $f_{.j}$ $j=1,2,\ldots,\lambda$ τῆς περιθωριακῆς στήλης καί γραμμῆς τοῦ πίνακος (4.1), δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τάς συχνότητας $f_{ij}$ τῆς συγκατανομῆς ὡς πρός τό ζεῦγος (X, Y) τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (4.20).

Ὡρισμένα ἀριθμητικά παραδείγματα ἐπί τῶν ἀνωτέρω παρατίθενται εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

## 4.10 Ἀριθμητικὸν Παράδειγμα Διερευνήσεως Διμεταβλητῶν Κατανομῶν

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἐκτεθέντων εἰς τάς προηγουμένας παραγράφους θά ἀσχοληθῶμεν ἐνταῦθα μέ τήν διερεύνησιν συγκεκριμένων ἀριθμητικῶν δεδομένων καί τήν ἐφαρμογήν εἰς αὐτά τῶν παρατιθεμένων ἀνωτέρω στατιστικῶν τύπων καί λοιπῶν ἐννοιῶν.

Ἄς θεωρήσωμεν τόν πίνακα (4.3). Διά τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος τούτου καθορίζεται ἡ ἀπό κοινοῦ κατανομή - ἡ σ υ γ κ α τ α ν ο μ ή - τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν τῆς χώρας σ υ γ χ ρ ό ν ω ς ὡς πρός τό μέγεθος αὐτῶν X (ἀριθμός μελῶν) καί τό μέγεθος τῆς κατοικίας των Y (ἀριθμός δωματίων), παρουσιάζεται δηλαδή ἡ δ ο μ ή τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ - τῶν 1.380.000 ἀστικῶν νοικοκυριῶν - ἤ ἄλλως ἡ συμπεριφορά τῶν ἐπί μέρους μονάδων του ἀναφορικῶς πρός τάς ἀνωτέρω μεταβλητάς θεωρουμένας ἀπό κοινοῦ.

Αἱ ἀπόλυτοι συχνότητες εἰς τά 7×6=42 φ α τ ν ί α τοῦ κυρίου σώματος τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος δηλοῦν τόν ἀ ρ ι θ μ ό ν - π ό σ α ι δηλαδή - τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἔχουν σ υ γ χ ρ ό ν ω ς ὡς πρός X καί Y σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν α ς τιμάς. Οὕτω π.χ. ἡ συχνότης 43 δηλοῖ ὅτι 43 χιλ. ἐκ τῶν ἐρευνηθέντων μονάδων εἶναι τετραμελῆ νοικοκυριά τά ὁποῖα κατοικοῦν εἰς κατοικίας τῶν δύο δωματίων, ἐνῶ ἡ συχνότης 56 σημαίνει ὅτι 56 χιλ. ἐκ τῶν ἐρευνηθέντων νοικοκυριῶν εἶναι ἐπίσης τετραμελῆ ἀλλά κατοικοῦν εἰς κατοικίας τῶν 5 δωματίων.

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῶν ἐν λόγῳ συχνοτήτων καθίσταται προφανές ὅτι μεταξύ "μεγέθους κατοικίας" καί "μεγέθους νοικοκυριοῦ" ὑφίσταται ὁπωσδήποτε κάποια κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἔντονος σχέσις καί ὅτι τά μεγαλύτερα νοικοκυριά τείνουν νά κατοικοῦν πρός μεγαλυτέρας ἐν γένει κατοικίας.

Διά διαιρέσεως τῶν παρατιθεμένων εἰς τά 42 φατνία τοῦ πίνακος ἀριθμῶν τῶν ἀπολύτων δηλαδή συχνοτήτων $f_{ij}$, διά τῆς συνολικῆς συχνότητος $f_{..}=1.380$, προκύπτουν ὡς γνωστόν αἱ σχετικαί συχνότητες

$$f_{ij}:f_{..} \qquad i=1,2,\ldots,7, \quad j=1,2,\ldots,6$$

Τάς ἐν λόγῳ σχετικάς συχνότητας ἐκπεφρασμένας εἰς ποσοστά ἐπί τοῖς $^0/_{00}$ παραθέτομεν εἰς τόν κατωτέρω πίνακα.

Πίναξ 4.3α

Ποσοστιαία κατανομή τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν μελῶν των (Χ) καί ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν δωματίων τῆς κατοικίας των (Υ)

| Χ \ Υ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 42 | 35 | 28 | 16 | 6 | 2 | 129 |
| 2 | 20 | 48 | 67 | 54 | 22 | 8 | 219 |
| 3 | 9 | 36 | 72 | 73 | 31 | 12 | 233 |
| 4 | 7 | 31 | 72 | 86 | 41 | 17 | 254 |
| 5 | 2 | 12 | 28 | 39 | 20 | 10 | 111 |
| 6 | 1 | 4 | 9 | 13 | 7 | 5 | 39 |
| 7 | - | 1 | 3 | 5 | 4 | 2 | 15 |
| Σύνολον | 81 | 167 | 279 | 286 | 131 | 56 | 1.000 |

Ἡ σημασία τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (4.3α) εἶναι προφανής. Οὕτω π.χ. 86‰ τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν εἶναι τετραμελῆ καί κατοικοῦν εἰς κατοικίας τῶν 4 δωματίων, 9‰ εἶναι τριμελῆ καί κατοικοῦν εἰς ἕν δωμάτιον κ.ο.κ. Τά δεδομένα ἐξ ἄλλου τοῦ πίνακος τούτου - αἱ σχετικαί δηλαδή συχνότητες - δίδουν ἀναμφιβόλως μίαν σαφεστέραν εἰκόνα τῆς δομῆς τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ καί εἶναι ἐκεῖνα τά ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται κατά κανόνα προκειμένου νά μελετηθῆ ἡ συμπεριφορά τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τάς μεταβλητάς X καί Y θεωρουμένας ἀπό κοινοῦ.

'Εξ ἄλλου δι'ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (4.3)

$$F_{ij} = \sum_{i'=1}^{i} \sum_{j'=1}^{j} f_{i'j'}$$

εἰς τά δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω πίνακος (ἤ τοῦ ἀντιστοίχου τοιούτου 4.3) δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν ἁπάσας τάς ἀ π ό κ ο ι ν ο ῦ ἀθροιστικάς σχετικάς (ἤ ἀπολύτους) συχνότητας $F_{ij}$ $i=1,2,\ldots,7$, $j=1,2,\ldots,6$. Οὕτω, π.χ. $F_{22}=42+35+20+48 = 145$

$F_{32}=42+35+20+48+9+36 = 190$

ἤτοι 145 ‰ τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν ἔχουν ἕν ἤ τό πολύ δύο μέλη καί κατοικοῦν εἰς οἰκίας τοῦ ἑνός ἤ τό πολύ δύο δωματίων, ἐνῶ 190 ‰ ἐξ αὐτῶν ἔχοντα τό πολύ μέχρι τρία μέλη διαμένουν εἰς οἰκίας μέ δύο τό πολύ δωμάτια κ.ο.κ.

Εἰς τήν περιθωριακήν γραμμήν καί στήλην τόσον τοῦ πίνακος (4.3) ὅσον καί τοῦ πίνακος (4.3α), παρατίθενται αἱ ὑ π ο κ α τ α ν ο μ α ί τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ κεχωρισμένως ὡς πρός τό μέγεθος τῆς κατοικίας (Y) καί ὡς πρός τό μέγεθος τοῦ νοικοκυριοῦ (X), αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ὡς γνωστόν δι'ἀθροίσεως κατά στήλας ἤ κατά γραμμάς τῶν δεδομένων τῆς συγκατανομῆς ὡς πρός τό ζεῦγος (X, Y). Οὕτω π.χ. διαπιστοῦται ὅτι 112 χιλ. ἐκ τῶν 1.380 χιλ. νοικοκυριῶν (Πίναξ 4.3) ἤ ἄλλως 81 ‰ τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν (Πίναξ 4.3α) κατοικοῦν εἰς ἕν δωμάτιον κ.ο.κ.

Προκειμένου νά διαπιστώσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν ἀσκεῖ τό μέγεθος τῶν νοικοκυριῶν ἐπί τοῦ μεγέθους τῆς κατοικίας αὐτῶν συγκρίνομεν ὡς ἤδη ἐλέχθη τάς δεσμευμένας κατανομάς (ὡς πρός Y) αἱ ὁποῖαι παρατίθενται εἰς τάς διαφόρους γραμμάς τοῦ πίνακος (4.3) ἤ καλλίτερον τάς δεσμευμένας κατανομάς τῶν γραμμῶν τοῦ κατωτέρω πίνακος (4.3β) ὅπου παρατίθενται ἀντί τῶν ἀπολύτων αἱ ἀντίστοιχοι σχετικαί συχνότητες.

Πίναξ 4.3β

Ποσοστιαῖαι κατανομαί νοικοκυριῶν διαφόρων μεγεθῶν ὡς πρός τό μέγεθος τῆς κατοικίας αὐτῶν

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | -- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 33 | 27 | 22 | 12 | 4 | 2 | 100 |
| 2 | 9 | 22 | 30 | 25 | 10 | 4 | 100 |
| 3 | 4 | 15 | 31 | 32 | 13 | 5 | 100 |
| 4 | 3 | 12 | 28 | 34 | 16 | 7 | 100 |
| 5 | 2 | 11 | 25 | 35 | 18 | 9 | 100 |
| 6 | 3 | 10 | 23 | 33 | 18 | 13 | 100 |
| 7 | - | 7 | 20 | 33 | 27 | 13 | 100 |
| - | 8 | 17 | 28 | 28 | 13 | 6 | 100 |

Τά δεδομένα τοῦ πίνακος (4.3β) προκύπτουν, συμφώνως πρός ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τά περί δεσμευμένων κατανομῶν, διά διαιρέσεως τῶν συχνοτήτων $f_{ij}$ ἑκάστης γραμμῆς τοῦ πίνακος (4.3) διά τοῦ ἀντιστοίχου ἀθροίσματος αὐτῶν $f_{i.}$ καί ἐκφράζονται ὡς ποσοστά ἐπί τοῖς %. Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῶν ἐν λόγῳ δεσμευμένων κατανομῶν καθίσταται προφανές ὅτι αὐξανομένου τοῦ μεγέθους τῶν νοικοκυριῶν ὑφίσταται μία τάσις συσσωρεύσεως τῆς πλειονότητος αὐτῶν πρός μεγαλυτέρας κατοικίας.

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ μεγέθους τῶν νοικοκυριῶν (X) ἐπί τοῦ μεγέθους τῆς κατοικίας αὐτῶν (Y) φαίνεται καλλίτερον ἐκ τῶν δεσμευμένων μέσων ὅρων $E(Y/x_i)$, δηλαδή τῶν μέσων μεγεθῶν τῆς κατοικίας τά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τά διάφορα μεγέθη νοικοκυριῶν. Οἱ ἐν λόγῳ δεσμευμένοι μέσοι ὅροι ὑπολογίζονται δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (4.7) διά $x_i = 1,2,\ldots,7$. Οὕτω τό μέσον μέγεθος τῆς κατοικίας τῶν μονομελῶν νοικοκυριῶν ὑπολογίζεται - χρησιμοποιουμένων τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (4.3β) - ὡς ἑξῆς:

$$E(Y/1) = \frac{1}{100}\,(33\times1+27\times2+22\times3+12\times4+4\times5+2\times6)=2{,}33 \text{ δωμάτια.}$$

Κατά τόν αὐτόν τρόπον ὑπολογίζομεν τά μέσα μεγέθη τῆς κατοικίας διμελῶν, τριμελῶν κλπ. νοικοκυριῶν καί ἔχομεν

| | | |
|---|---|---|
| $E(Y/2)=3,17$ | $E(Y/3)=3,50$ | $E(Y/4)=3,69$ |
| $E(Y/5)=3,83$ | $E(Y/6)=3,92$ | $E(Y/7)=4,19$ |

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν διαπιστοῦται ἡ ὑφισταμένη μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y σχέσις. Ἐκ τῶν ἰδίων ὡς ἄνω δεσμευμένων κατανομῶν καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (4.9) εἶναι δυνατόν νά ὑπολογίσωμεν τάς δεσμευμένας διακυμάνσεις $V(Y/x_i)$ ὅπου $x_i=$ $=1,2,3,4,5,6,7$ καί ἐξ αὐτῶν τάς τυπικάς ἀποκλίσεις κλπ. Οὕτω π.χ. διά $x_i=4$ λαμβάνομεν

$$V(Y/4) = \frac{1}{100}(3\times1^2+12\times2^2+28\times3^2+34\times4^2+16\times5^2+7\times6^2)-(3,69)^2=1,37,$$

$\sqrt{V(Y/4)}=1,17$ καί $CV(Y/4)=\dfrac{1,17}{3,69}=0,32$ ἤ 32% κ.ο.κ.

Τέλος, ἡ ἀλληλεξάρτησις τῶν μεταβλητῶν X καί Y τοῦ πίνακος (4.3) φαίνεται καί ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ σχέσις (4.20) εἰς οὐδεμίαν περίπτωσιν ἀληθεύη. Οὕτω π.χ. ἐνῶ $\dfrac{f_{2.}f_{.3}}{f_{..}}=\dfrac{304\times385}{1.380}=84,8\simeq85$ ἡ συχνότης $f_{23}=94$.

Εἰς τά ἑπόμενα κεφάλαια θά πραγματευθῶμεν μεθόδους διά τῶν ὁποίων, ὡς ἤδη ἐλέχθη, πέραν τῆς ποιοτικῆς μελέτης τῆς σχέσεως τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν (X, Y) θά καταστῆ δυνατόν νά ἔχωμεν ἀφ'ἑνός μίαν ποσοτικήν ἀντίληψιν τοῦ βαθμοῦ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας (συσχέτισις) καί ἀφ'ἑτέρου νά προσδιορίσωμεν διά μιᾶς μαθηματικῆς ἐξισώσεως τόν τρόπον τῆς μεταξύ των ἀλληλεξαρτήσεως (παλινδρόμησις).

Ἄς ἴδωμεν τώρα τά δεδόμενα τοῦ πίνακος (4.4) διά τῶν ὁποίων καθορίζεται ἡ συγκατανομή ἑνός συνόλου - πληθυσμοῦ - καί συγκεκριμένως τῶν μαθητῶν ἑνός γυμνασίου συγχρόνως ὡς πρός τάς συνεχεῖς μεταβλητάς X (ἀνάστημα εἰς ἑκ.) καί Y (βάρος εἰς κιλά). Προκειμένου νά ὑπολογίσωμεν π.χ. τό (δεσμευμένον) μέσον βάρος τῶν μαθητῶν μέ ἀναστήματα (145 - 155) θά χρησιμοποιήσωμεν καί πάλιν τόν τύπον (4.7). Πρός ἁπλούστευσιν τῶν ἀπαιτουμένων σχετικῶν ὑπολογισμῶν ἐφαρμόζομεν - ὑπό μορφήν παραδείγματος - τήν ἔ μ μ ε σ ο ν μέθοδον ὑπολογισμοῦ.

Λαμβάνοντες ὡς ἀρχήν μετρήσεων τήν κεντρικήν τιμήν τῆς τάξεως 65-75 ἤτοι $y_o=70$ κιλά καί ὡς μονάδα μετρήσεων τό κοινόν πλάτος τῶν τάξεων, δηλαδή δ=10, ἐφαρμόζομεν τόν μετασχηματισμόν

$$t_j = \frac{1}{10}(y_j - 70)$$

καί ἀντί τῶν κεντρικῶν τιμῶν $y_j=50,60,70,80,90,100$ χρησιμοποιοῦμεν πλέον τάς τιμάς $t_j=-2,-1,0,1,2,3$.

Οὕτω, χρησιμοποιοῦντες τήν κατανομήν τῆς πρώτης γραμμῆς τοῦ ὡς ἄνω πίνακος εὑρίσκομεν ὅτι

$$E(Y/150)=70+\frac{10}{32}\left[(-2)\times4+(-1)\times15+0\times10+1\times3+2\times0+3\times0\right]=70-\frac{200}{32}=63,7$$

Ὁμοίως, ἐκ τῆς πέμπτης γραμμῆς λαμβάνομεν

$$E(Y/190)=70+\frac{10}{53}\left[(-2)\times0+(-1)0+0\times2+1\times10+2\times24+3\times17\right]=70+\frac{109}{53}=72.1$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει καταφανῶς ἡ σ χ έ σ ι ς μεταξύ ἀναστήματος καί βάρους.

Τέλος, προκειμένου νά καταστήσωμεν σαφεστέραν τήν ἔννοιαν τῆς ἀνεξαρτησίας δύο μεταβλητῶν παραθέτομεν κατωτέρω (πίναξ 4.5) ἕν ἀριθμητικόν παράδειγμα εἰς τό ὁποῖον φαίνεται ἡ μορφή τῆς ἀντιστοίχου διμεταβλητῆς κατανομῆς.

Πίναξ 4.5

Ποσοστιαία κατανομή τῶν μαθητῶν ἑνός σχολείου ὡς πρός τό φῦλον καί τό χρῶμα τῆς κόμης των

| Φῦλον | Χρῶμα κόμης | | | | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|
| | Μαῦρο | Καστανό | Ξανθό | Κόκκινο | |
| Ἄρρενες | 150 | 250 | 70 | 30 | 500 |
| Θήλεις | 60 | 100 | 28 | 12 | 200 |
| Σύνολον | 210 | 350 | 98 | 42 | 700 |

Ἐκ τῶν δεδομένων τῶν γραμμῶν τοῦ πίνακος τούτου προκύπτει ὅτι τόσον αἱ κατανομαί τῶν ἀρρένων καί θηλέων ὑποπληθυσμῶν (δ ε σ μ ε υ μ έ ν α ι κατανομαί) ὅσον καί ἡ κατανομή ὁλοκλήρου τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τό χρῶμα τῆς κόμης ταυτίζονται μεταξύ των. Πράγματι αἱ ἀντίστοιχοι σχετικαί συχνότητες καί εἰς τάς τρεῖς ταύτας κατανομάς εἶναι 30%, 50%, 14% καί 6%. Κατά συνέπειαν δυνάμεθα νά εἴπωμεν ἐν προκειμένῳ ὅτι τό χρῶμα τῆς κόμης δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ φύλου. Προφανές εἶναι ἐπίσης ὅτι ἰσχύουν ἐν προκειμένῳ αἱ σχέσεις (4.20). Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\frac{f_{1.}\, f_{.2}}{f_{..}} = \frac{500\times 350}{700} = 250 = f_{12} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5

# ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ ΕΙΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ

## 5.1 Θέσις τοῦ Προβλήματος

Ἡ κατάρτισις ἑνός πίνακος διπλῆς εἰσόδου - πολλάκις καί μιᾶς σχετικῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως - καί ἡ ἐπισκόπησις ἐν συνεχείᾳ τῶν δεδομένων τῆς ἀντιστοίχου διμεταβλητῆς κατανομῆς ἀποτελοῦν, ὡς εἴδομεν εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον, τό πρῶτον βῆμα εἰς τήν διερεύνησιν τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς δύο μεταβλητῶν καί τήν ἀπόκτησιν μιᾶς γενικῆς τουλάχιστον εἰκόνος τοῦ τρόπου τῆς συγκατανομῆς (ἀπό κοινοῦ κατανομῆς) αὐτῶν.

Περισσότερον φῶς εἰς τό ὅλον πρόβλημα ρίπτει περαιτέρω ἡ μελέτη τῶν συναφῶν δεσμευμένων κατανομῶν, ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτάς δεσμευμένων μέσων ὅρων, διακυμάνσεων κλπ καί τέλος ἡ ἐφαρμογή καί ὁ ἔλεγχος τῆς ἰσχύος ἤ μή τῶν γνωστῶν ἀναγκαίων καί ἱκανῶν συνθηκῶν αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τήν στατιστικήν ἀνεξαρτησίαν ἤ μή τῶν συνεξεταζομένων κατά περίπτωσιν μεταβλητῶν.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη ὅμως, αἱ ὡς ἄνω μέθοδοι ἐπιτρέπουν μέν τήν ἀπόκτησιν μιᾶς σαφοῦς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἀντιλήψεως περί τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν σχέσεως καί τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης, ἀλλά τά δι'αὐτῶν ἐξαγόμενα συμπεράσματα - ποιοτικοῦ συνήθως χαρακτῆρος καί ἐν πολλοῖς ὑποκειμενικά - ἀποτελοῦν κατά κανόνα ἁπλᾶς ἐνδείξεις καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι περιωρισμένης πρακτικῆς χρησιμότητος.

Ἀντιθέτως, διά τήν ἀποτελεσματικήν ἀντιμετώπισιν συγκεκριμένων προβλημάτων τῶν συναφῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν καί τήν λῆψιν τῶν καταλλήλων ἑκάστοτε ἀποφάσεων, ἀπαιτοῦνται συνήθως πολύ περισσότεραι πληροφορίαι κυρίως δέ συμπεράσματα π ο σ ο τ ι κ ο ῦ χαρακτῆρος καί πρό παντός μή ἐνέχοντα τό στοιχεῖον τῆς ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ό τ η τ ο ς.

Συγκεκριμένως, αἱ περαιτέρω πληροφορίαι αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται συνήθως ἐν προκειμένῳ, εἶναι κατά βάσιν π ο σ ο τ ι κ ά συμπεράσματα προκύπτοντα ἐκ τῆς δι'ἀ ν τ ι κ ε ι μ ε ν ι κ ῶ ν μαθηματικῶν μεθόδων διερευνήσεως πρῶτον, τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν καί δεύτερον τοῦ βαθμοῦ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας.

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους ἀναφερόμενα δηλαδή εἰς τόν τρόπον συμμεταβολῆς καί ἐν γένει τήν συνάφειαν δύο μεταβλητῶν θά μᾶς ἀπασχολήσουν εἰς τό ἐπόμενον κεφάλαιον. Ἐνταῦθα πραγματευόμεθα διεξοδικῶς προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους ἰδιαιτέρως δέ τάς ἐφαρμοζομένας συνήθως π ο σ ο τ ι κ ά ς μεθόδους διά τήν π ε ρ ι γ ρ α φ ι κ ή ν ἀνάλυσιν τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως - τοῦ εἴδους δηλαδή καί τῆς μορφῆς τῶν σχέσεων - τῶν κατά περίπτωσιν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν.

Εἰδικώτερον, εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους θά μᾶς ἀπασχολήσουν αἱ μέθοδοι προσδιορισμοῦ ἐκ τ ῶ ν δ ε δ ο μ έ ν ω ν τ ῆ ς π α ρ α τ η ρ ή σ ε ω ς τ ῶ ν κ α τ α λ λ ή λ ω ν κ α τ ά π ε ρ ί π τ ω σ ι ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς ὡς ἐπίσης ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως αὐτῶν καί ὁ ὑπολογισμός ὡρισμένων ποσοτικῶν ἐκφράσεων - καλουμένων δεικτῶν π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς ἤ π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ - διά τῶν ὁποίων χαρακτηρίζεται ἐν γένει ἡ ἀ κ ρ ί β ε ι α (ἀξιοπιστία) καί γενικώτερον ἡ π ο ι ό τ η ς τῶν ἀντιστοίχων συμπερασμάτων.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ διά τοῦ X θά συμβολίζεται ἡ ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς ἤ ἄλλως ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ή μεταβλητή καί διά τοῦ Y ἡ ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η τοιαύτη, θά ὑποτίθεται δέ ὅτι τά σ τ ο ι χ ε ῖ α τά ὁποῖα ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του ὁ μελετητής - τά δ ε δ ο μ έ ν α δηλαδή τῆς π α ρ α τ η ρ ή σ ε ω ς - συνίστανται ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x,y)$ τῶν τιμῶν τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν $(X,Y)$ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς N ἐπί μέρους μονάδας τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ (οἱουδήποτε ἐν γένει συνόλου). Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ἐ π ι λ ο γ ή καί ὁ χ α ρ α κ τ η ρ ι σ μ ό ς ὡς ἀνεξαρτήτου τῆς μιᾶς τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν εἶναι ἐν πολλοῖς - θεωρητικῶς τουλάχιστον - α ὐ θ α ί ρ ε τ ο ς. Εἰς τήν πρᾶξιν ὡς ἀνεξάρτητος λαμβάνεται συνήθως ἡ μεταβλητή τῆς ὁποίας ἡ ἀπ'εὐθείας μ έ τ ρ η σ ι ς δύναται νά γίνη διά τῶν ἁ π λ ο υ σ τ έ ρ ω ν σ χ ε τ ι κ ῶ ς μ ε θ ό δ ω ν, μέ μ ι κ ρ ό ν κ ό σ τ ο ς καί εἰ δυνατόν ἄ ν ε υ σ φ α λ μ ά τ ω ν. Ἐξ ἄλλου εἰς ὡρισμένα προβλήματα, ἰδιαιτέρως εἰς τάς περιπτώσεις τῶν καλουμένων σ τ α τ ι σ τ ι κ ῶ ν π ε ι ρ α μ ά τ ω ν, ἡ ἀνεξάρτητος ἤ καλλίτερον ἡ ἑρμηνευτική μεταβλητή προαποφασίζεται ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων, συγκεκριμένως δέ χαρακτηρίζεται ὡς τοιαύτη ἐκείνη τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ἡ ὁποία εἶναι ἤ τουλάχιστον δύναται λ ο γ ι κ ῶ ς νά θεωρηθῇ ὡς τό α ἴ τ ι ο ν ἐν ἀντιθέσει πρός τήν ἄλλην - τό ἀ π ο τ έ λ ε σ μ α - ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς ἐξηρτημένη.

Τέλος, ἀναφορικῶς πρός τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως δέον νά σημειωθῇ ὅτι ταῦτα ἐμφανίζονται καί χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν ὑπό δύο μορφάς.

(α) Ὡς N ἁ π λ ᾶ ἀριθμητικά ζεύγη συμβολιζόμενα $(x_i, y_i)$ ὅπου $i=1,2,\ldots,N$ δηλοῖ τήν μονάδα τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τήν ὁποίαν ἕκαστον ζεῦγος ἀναφέρεται, καί

(β) Τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν α εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ἀνάλογον τοῦ (4.1) ὅπου ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἑρμηνευτική μεταβλητή X λαμβάνει τάς τιμάς $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$, ἀντιστοίχως δέ πρός ἑκάστην ἐκ τῶν ἐν λόγῳ τιμῶν τῆς X, ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή Y λαμβάνει τάς τιμάς $y_j$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ καί μάλιστα ἑκάστην ἐξ αὐτῶν μέ ὡρισμένη συχνότητα συμβολιζομένην $f_{ij}$. Οὕτω, τά πρός χρησιμοποίησιν δεδομένα συνίστανται ἐν προκειμένῳ ἐκ τῶν $k\lambda$ ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i, y_j)$ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐπαναλαμβάνεται μέ συχνότητα $f_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$. Ἐξυπακούεται ὅτι τό γενικόν ἄθροισμα $\Sigma\Sigma f_{ij}$ τῶν ἐν λόγῳ συχνοτήτων - μερικαί τῶν ὁποίων δυνατόν νά εἶναι μηδέν - εἶναι πάντοτε ἴσον πρός τό πλῆθος N τῶν μονάδων τοῦ ἐρευνηθέντος συνόλου ἤ ἴσου πρός τήν μονάδα (ἤ 100%) ἀναλόγως ἐάν τά $f_{ij}$ παριστοῦν ἀπολύτους ἤ σχετικάς συχνότητας.

Τυπικῶς, ἡ πρώτη μορφή δεδομένων ἀναφέρεται εἰς τήν περίπτωσιν συναρτησιακῶν σχέσεων ὅπου εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς X ἀντιστοιχεῖ μία καί μόνον τιμή τῆς Y. Ἀντιθέτως ἡ δευτέρα μορφή παρουσιάσεως εἶναι κατάλληλος ἤ μᾶλλον ἀπαραίτητος διά τήν περίπτωσιν στοχαστικῶν σχέσεων ὅπου εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς X ἀντιστοιχεῖ πλῆθος τιμῶν τῆς Y καί μάλιστα ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἐπαναλαμβάνεται μέ διάφορον κατά κανόνα συχνότητα.

## 5.2 Στοιχειώδεις Ἐξισώσεις Παλινδρομήσεως

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά μᾶς ἀπασχολήση ἡ ἔννοια ὡς καί ὁ τρόπος προσδιορισμοῦ τῶν καλουμένων στοιχειωδῶν ἐξισώσεων παλινδρομήσεως, πρῶτον, ὅταν τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως εἶναι ἁπλᾶ καί δεύτερον, εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων. Θεωρεῖται σκόπιμον νά λεχθῆ ἀπό τοῦδε ὅτι αἱ ἐν λόγῳ ἐξισώσεις ἔχουν θεωρητικήν μόνον ἀξίαν, ἐνῶ ἀντιθέτως ἡ πρακτική χρησιμότης αὐτῶν εἶναι λίαν περιωρισμένη.

α) Περίπτωσις Ἁπλῶν Δεδομένων

Ὑποθέτομεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ μελετητής ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τά N ἁπλᾶ ἀριθμητικά ζεύγη$(x_i,y_i)$, $i=1,2,...,N$ τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τοῦ ζεύγους τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X καί Y.

Τυπικῶς, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ μορφή αὕτη τῶν δεδομένων ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν πρᾶξιν πρός τάς περιπτώσεις συναρτησιακῶν σχέσεων ὅπου εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς X ἀντιστοιχεῖ μία καί μόνον τιμή τῆς Y.

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως τά σημεῖα δηλαδή $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ εἶναι π ε π ε ρ α σ μ έ ν α τῷ πλῆθος, εἶναι δυνατόν - θεωρητικῶς τουλάχιστον - νά προσδιορισθῆ μία μαθηματική ἐξίσωσις, ἀνάλογος τῆς ὑφισταμένης διά συναρτησιακάς σχέσεις (4.11) ἡ ὁποία νά πληροῦται (ἐ π α λ η θ ε ύ ε τ α ι) ὑφ'ἁπάντων τῶν ζευγῶν $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$.

Πράγματι, πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀρκεῖ νά χρησιμοποιηθῆ μία πολυωνυμική ἐξίσωσις N-1 βαθμοῦ* τῆς μορφῆς

$$y=\alpha_o+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_{N-1}x^{N-1} \qquad (5.1)$$

καί αἱ N ἄγνωστοι παράμετροι-συντελεσταί αὐτῆς $\alpha_o$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$ νά ὑπολογισθοῦν δι'ἐπιλύσεως ἑνός γραμμικοῦ συστήματος τό ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν κάτωθι N ἐξισώσεων

$$\alpha_o+\alpha_1 x_i+\alpha_2 x_i^2+\ldots+\alpha_{N-1}x_i^{N-1}\equiv y_i \quad i=1,2,\ldots,N \qquad (5.2)$$

Ἡ οὕτω προσδιοριζομένη ἐξίσωσις θά καλεῖται σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς ἐ ξ ί σ ω σ ι ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς ἡ καμπύλη δέ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν αὐτῆς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς γ ρ α μ μ ή ἤ κ α μ π ύ λ η π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς.

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη** ὡς ἐκ τοῦ τρόπου προσδιορισμοῦ της διέρχεται δι'ὅλων τῶν σημείων $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ καί κατά συνέπειαν εἶναι δυνατόν διά τῆς ἐξισώσεως (5.1) αἱ τιμαί τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς π α ρ α τ η ρ η θ ε ί σ α ς τιμάς τῆς X νά ὑπολογίζωνται ἐπακριβῶς (ἄνευ

* Ἤ καλλίτερον βαθμοῦ κατά ἕνα μικροτέρου τῶν διακεκριμενων σημείων $(x_i, y_i)$.

** Οἱ ὅροι "καμπύλη" καί "ἐξίσωσις" θά χρησιμοποιοῦνται ἀπό τοῦδε ὡς ταυτόσημοι.

σφαλμάτων). Παρά ταῦτα ὅμως ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις πέραν τῶν σοβαρωτάτων - πολλάκις ἀνυπερβλήτων - ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν παρουσιάζει τόσα καί τοιαύτης φύσεως μειονεκτήματα ὥστε ἐάν δέν εἶναι ἐντελῶς ἄνευ ο ὐ δ ε μ ι ᾶ ς σ η μ α σ ί α ς εἶναι ὁπωσδήποτε λ ί α ν π ε ρ ι ω ρ ι σ μ έ ν η ς π ρ α κ τ ι κ ῆ ς χ ρ η σ ι μ ό τ η τ ο ς.

Πράγματι, ἡ κατανόησις κατ'ἀρχήν τῆς γενικωτέρας σημασίας μιᾶς τόσον πολυπλόκου ἐξισώσεως καί εἰδικώτερον ἡ ἑρμηνεία τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶντῶν πολυπληθῶν συντελεστῶν της εἶναι τόσον δυσχερής - ἄν ὄχι ἀδύνατος - ὥστε ἡ ἐξαγωγή χρησίμων καί πρακτικῶς ἐφαρμοσίμων συμπερασμάτων νά καθίσταται οὐσιαστικῶς ἀνέφικτος.

'Εξ ἄλλου, ἡ δαιδαλώδης καί ἀκανόνιστος μορφή τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης πολύ ἀπέχει ἀπό τοῦ νά περιγράφη ἁπλᾶ καί συνοπτικά τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν καί νά ἀποκαλύπτη τήν ν ο μ ο τ έ λ ε ι α ν ἡ ὁποία γενικῷ τῷ τρόπῳ - μ α κ ρ ο σ κ ο π ι κ ῶ ς - διέπει τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς ἐν σχέσει πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης.

Τέλος, ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως διά τόν ὑπολογισμόν ο ἰ ο ν ε ί τιμῶν τῆς Y, τιμῶν δηλαδή αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μ ή π α ρ α τ η ρ η θ ε ί σ α ς τιμάς τῆς X, πρᾶγμα τό ὁποῖον ἀποτελεῖ ὡς γνωστόν καί τόν βασικόν λόγον προσδιορισμοῦ - τήν πεμπτουσίαν - μιᾶς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως, θά ἦτο, δι'εὐνοήτους λόγους, ἐντελῶς ἐ π ι σ φ α λ ή ς.

'Εκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω συνάγεται ἀναμφιβόλως τό συμπέρασμα ὅτι ἡ στοιχειώδης ἐξίσωσις παλινδρομήσεως (5.1), εἰς τήν προκειμένην τουλάχιστον περίπτωσιν, δέν ἔχει παρά θεωρητικήν μόνον ἀξίαν.

β) Περίπτωσις Ταξινομημένων Δεδομένων

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ὑποτίθεται ὅτι τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως εἶναι τ α ξ ι ν ο μ η-μ έ ν α εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ἀνάλογον τοῦ (4.1), συνίστανται δέ ἐκ τῶν kλ ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i, y_j)$ τά ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἀντιστοίχως μέ συχνότητας $f_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ τό γενικόν ἄθροισμα τῶν ὁποίων

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}$$

εἶναι ὡς εἶναι εὐνόητον ἴσον πρός τό πλῆθος N τῶν μονάδων τοῦ ἐρευνωμένου πληθυσμοῦ ἤ ἴσον πρός τήν μονάδα (ἤ 100%) ἀναλόγως ἐάν αἱ συχνότητες $f_{ij}$ εἶναι ἀπόλυτοι ἤ σχετικαί.

Ἡ μορφή αὕτη τῶν δεδομένων ἀντιστοιχεῖ, ὡς εἴδομεν, εἰς τήν περίπτωσιν στοχαστικῶν ἤ ἄλλως στατιστικῶν ἐξαρτήσεων ὅπου εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς X ἀντιστοιχεῖ ἐν γένει π λ ῆ θ ο ς τιμῶν τῆς Y ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐπαναλαμβάνεται μέ διάφορον κατά κανόνα συχνότητα.

Προκειμένου περί στοχαστικῶν ἐξαρτήσεων ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει, ὡς ἤδη ἐλέχθη εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον, ἡ περίπτωσις σ τ ο χ α σ τ ι κ ῶ ς σ υ σ χ ε τ ι σ μ έ ν ω ν μεταβλητῶν ὅπου ἡ (δεσμευμένη) μέση τιμήν E(Y/x) τῶν δεσμευμένων κατανομῶν τῆς Y ἐξαρτᾶται συναρτησιακῶς ἐκ τῆς X διά μιᾶς μαθηματικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$E(Y/x) = f(x) \tag{5.3}$$

Ἐφαρμόζοντες τήν διαδικασίαν προσδιορισμοῦ τῆς ἐξισώσεως (5.1) καί χρησιμοποιοῦντες τά ἀριθμητικά ζεύγη $[x_i, E(Y/x_i)]$, $i=1,2,\ldots,k$ ἤτοι τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς X καί τάς ἀντιστοίχους πρός αὐτάς (δεσμευμένας) μέσας τιμάς τῆς Y ὑπολογιζομένας εἰς τήν πράξιν διά τοῦ τύπου (4.7), εἶναι δυνατόν νά προσδιορίσωμεν καί ἐν προκειμένῳ μίαν ἐξίσωσιν ἀνάλογον τῆς (5.1) ἡ ὁποία νά ἐπαληθεύεται ὑφ'ἁπάντων τῶν ὡς ἄνω ἀριθμητικῶν ζευγῶν ἤ ἄλλως μίαν καμπύλην διερχομένην δι'ὅλων τῶν σημείων $[x_i, E(Y/x_i)]$, $i=1, 2, \ldots, k$. Πράγματι, ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά χρησιμοποιηθῆ ἡ πολυωνυμική ἐξίσωσις

$$E(Y/x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_{k-1}x^{k-1} \qquad (5.4)$$

καί αἱ παράμετροι αὐτῆς νά ὑπολογισθοῦν δι' ἐπιλύσεως τοῦ κάτωθι γραμμικοῦ συστήματος

$$\alpha_0+\alpha_1 x_i+\alpha_2 x_i^2+\ldots+\alpha_{k-1}x_i^{k-1}\equiv E(Y/x_i), i=1,2,\ldots,k \quad (5.5)$$

Τήν ἐξίσωσιν (5.4) θά καλοῦμεν - συναφῶς πρός τήν περίπτωσιν τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων - σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ἐ ξ ί σ ω σ ι ν π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς τήν ἀντίστοιχον δέ καμπύλη σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η γ ρ α μ μ ή ν ἤ κ α μ π ύ λ η ν π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς.

Παρ'ὅτι ἡ ἐξίσωσις (5.4) ἐπιτρέπει - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου προσδιορισμοῦ της - τόν ἀκριβῆ ὑπολογισμόν τῶν μέσων ὅρων τῶν τιμῶν τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἑκάστην τῶν π α ρ α τ η ρ η θ ε ι σ ῶ ν τιμῶν τῆς X θά ἦτο, ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς (5.1), ἐντελῶς παρακινδυνευμένον νά χρησιμοποιηθῆ αὕτη δι'ὑπολογισμόν ο ἱ ο ν ε ί τιμῶν ἤ ἀντιστοίχων (δεσμευμένων) μέσων τιμῶν τῆς Y. Πέραν αὐτοῦ ἡ ἐν λόγῳ στοιχειώδης καμπύλη παλινδρομήσεως παρουσιάζει τά αὐτά πρός τήν (5.1) σοβαρά μειονεκτήματα καί ὡς ἐκ τούτου οἱαδήποτε χρησιμοποίησις αὐτῆς εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς εἶναι ἐπίσης οὐσιαστικῶς ἀνέφικτος.

## 5.3 Γραμμαί Παλινδρομήσεως Ἐλαχίστου Μέσου Τετραγωνικοῦ Σφάλματος

Εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν ὅτι αἱ σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ε ι ς ἐξισώσεις παλινδρομήσεως ἀδυνατοῦν νά παράσχουν μία σαφῆ καί πρακτικῶς ἀξιοποιήσιμον εἰκόνα τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν τόσον προκειμένου περί σ υ ν α ρ τ η σ ι α κ ῶ ν σχέσεων (ἁ π λ ᾶ δεδομένα) ὅσον καί εἰς τήν περίπτωσιν σ τ ο χ α σ τ ι κ ῶ ν τοιούτων (τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν α δεδομένα). Πρός τούτοις τά δι'αὐτῶν ἐξαγόμενα π ο σ ο τ ι κ ά συμπεράσματα - ἀριθμητικαί τιμαί τῶν συντελεστῶν, ο ἱ ο ν ε ί τιμαί τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς κλπ - παρουσιάζουν κατά κανόνα τόσον μικράν ἀξιοπιστίαν καί τοιαύτην ἀστάθειαν ὥστε ἡ ἐπί τῇ βάσει αὐτῶν λῆψις οἱωνδήποτε συγκεκριμένων ἀποφάσεων νά καθίσταται - ἄν ὄχι ἀδύνατος - τουλάχιστον ἐπισφαλής. Ἡ ἀκαταλληλότης αὕτη τῶν στοιχειωδῶν ἐξισώσεων παλινδρομήσεως διά τήν ἀντιμετώπισιν τῶν ὡς ἄνω βασικῶν προβλημάτων τῶν συναφῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν, προστιθεμένη εἰς τάς σοβαράς ὑπολογιστικάς δυσχερείας αἱ ὁποῖαι ἀναφύονται κατά τόν προσδιορισμόν τῶν ἐν λόγῳ ἐξισώσεων, ὁδηγεῖ εἰς τήν ἀναζήτησιν, προσδιορισμόν καί χρησιμοποίησιν τῶν καλουμένων - ἐκ τοῦ ὁμωνύμου κ ρ ι τ η ρ ί ο υ ἐπιλογῆς αὐτῶν - ἐξισώσεων παλινδρομήσεως Ἐ λ α χ ί σ τ ο υ Μ έ σ ο υ Τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ Σ φ ά λ μ α τ ο ς αἱ ὁποῖαι θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατωτέρω. Αἱ ἐξισώσεις αὗται, ἀποτελοῦσαι ἐν γένει ἱκανοποιητικάς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον π ρ ο σ ε γ γ ί σ ε ι ς τῶν σ τ ο ι χ ε ι ω δ ῶ ν ἐξισώσεων, εἶναι κατά πολύ ἁ π λ ο ύ σ τ ε ρ α ι αὐτῶν, περισσότερον εὔχρηστοι, ὁπωσδήποτε δέ ἀμέσου πρακτικῆς χρησιμότητος.

Ὑποθέτομεν καί πάλιν ὅτι ὁ μελετητής ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τάς τιμάς $(x,y)$ τοῦ ζεύγους τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν $(X,Y)$ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς $N$ ἐπί μέρους μονάδάς τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ, ἐν ὄψει δέ τῶν ἀνωτέρω δυσκολιῶν ἐπιδιώκεται ὁ προσδιορισμός - τῇ βοηθείᾳ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως - μιᾶς ἁ π λ ῆ ς μαθηματικῆς ἐξισώσεως

$$y=f(x,\alpha,\beta) \tag{5.6}$$

διά τῆς ὁποίας νά ἐπιτυγχάνονται κατά βάσιν οἱ κάτωθι ἀντικειμενικοί σκοποί:

(i) Νά περιγράφεται σ υ ν ο π τ ι κ ά καί ἁπλᾶ ὁ τρόπος ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν καί νά ἀποκαλύπτεται μέ σαφήνειαν ἡ ν ο μ ο τ έ λ ε ι α ἡ ὁποία διέπει γενικῷ τῷ τρόπῳ - μ α κ ρ ο σ κ ο π ι κ ῶ ς - τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς ἐν σχέσει πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης, καί

(ii) Νά καθορίζεται μία συγκεκριμένη ποσοτική διαδικασία διά τῆς ὁποίας νά καθίσταται δυνατόν ἐκ τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X νά ὑπολογίζωνται μέ ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν αἱ τιμαί τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης Y.

Ἐνταῦθα δέον νά διευκρινισθοῦν τά ἑξῆς. Κατ' ἀρχήν ἡ γενική - συμβολική - ἐξίσωσις (5.6) δέν παριστᾶ μία συγκεκριμένη καμπύλη, ἀλλά μία διπαραμετρική* οἰκογένεια καμπύλων τά μέλη τῆς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ὡς γνωστόν εἰς διαφόρους συνδυασμούς τιμῶν τῶν παραμέτρων α καί β. Ἐξ ἄλλου, ἡ μορφή - συμβολιζομένη ἐν προκειμένῳ διά τοῦ f(...) - τῶν καμπύλων-μελῶν τῆς ἐν λόγῳ οἰκογενείας, καθοριζομένη ἐν γένει ἐκ τοῦ συγκεκριμένου κατά περίπτωσιν τρόπου διασυνδέσεως (ἀντιστοιχίας) τῶν μεταβλητῶν X καί Y, εἶναι ἐν προκειμένῳ ἀπροσδιόριστος.

Κατά συνέπειαν, προκειμένου νά προσδιορισθῆ μία συγκεκριμένη ἐξίσωσις διά τῆς ὁποίας νά ἐπιτυγχάνονται οἱ ἀνωτέρω στόχοι δέον ὅπως ἀντιμετωπισθοῦν - ἐπί τῇ βάσει ἀντικειμενικῶν κριτηρίων, ἀρχῶν καί μεθόδων, ὁπωσδήποτε δέ λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως - τά ἑξῆς ἐπί μέρους προβλήματα:

(i) Νά ἐπιλεγῆ καταλλήλως ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως (5.6) καί

(ii) Μετά τήν ἐπιλογήν τῆς μορφῆς της, νά συγκεκριμενοποιηθῆ ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δι'ὑπολογισμοῦ τῶν καταλλήλων κατά περίπτωσιν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων της α καί β.

---

*Ἡ γενίκευσις εἰς οἰκογενείας μέ τρεῖς ἤ περισσοτέρας παραμέτρους εἶναι ἄμεσος καί ἁπλῆ.

Ὡς πρός τήν μ ο ρ φ ή ν της ἡ ἐξίσωσις (5.6) ἤ ἀκριβέστερον ἡ ἀντίστοιχος γραμμή δυνατόν νά εἶναι μία ε ὐ θ ε ί α μέ ἐξίσωσιν $y=\alpha+\beta x$, μία π α ρ α β ο λ ή ἤ ἄλλως π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ή καμπύλη δευτέρου, τρίτου ἤ ἀνωτέρου βαθμοῦ, $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$, κ.ο.κ., μία ἁπλῆ ὑπερβολή

$$y=\frac{1}{\alpha+\beta x} \quad \text{ἤ} \quad y=\frac{x}{\alpha+\beta x}$$

ἀκόμη δέ μία ἐ κ θ ε τ ι κ ή ἤ γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ή καμπύλη $y=\alpha\beta^x$ ἤ $y=\alpha x^\beta$, ἤ τέλος μία ἄλλη καμπύλη, πολυπλοκωτέρου κάπως σχήματος.

Ἀντικειμενικά π ο σ ο τ ι κ ά κ ρ ι τ ή ρ ι α καί μέθοδοι διά τήν ἐπιλογήν τῆς καταλλήλου κατά περίπτωσιν συγκεκριμένης μ ο ρ φ ῆ ς τῆς ἐξισώσεως (5.6), θά μᾶς ἀπασχολήσουν, ἀφοῦ προηγουμένως εἴδομεν τά περί δεικτῶν π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς ἤ π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ, εἰς τήν παράγραφον (5.8).

Εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ἡ μ ο ρ φ ή τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως ἐπιλέγεται συνήθως μέ κριτήρια τήν ἁ π λ ό τ η τ α καί τήν ε ὐ κ ο λ ί α κ α τ α ν ο ή σ ε ω ς τ ῆ ς σ η μ α σ ί α ς αὐτῆς, ὡς ἐπίσης καί τήν δυνατότητα ἀ μ έ σ ο υ καί ἀνταποκρινομένης εἰς πραγματικάς καταστάσεις ἑ ρ μ η ν ε ί α ς τῶν παραμέτρων της.

Πρός τούτοις ἐπιδιώκεται κατ' ἀρχήν ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς οἰκογενείας καμπύλων ἡ μορφή τῶν ὁποίων προσιδιάζει ὅσον τό δυνατόν περισσότερον πρός τήν ἰ δ ε α τ ή ν γραμμήν ἡ ὁποία συνοψίζει κατά π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν τό σχῆμα τοῦ σημειακοῦ ν έ φ ο υ ς τοῦ ἀντιστοίχου στικτοῦ διαγράμματος.

Τέλος, δέον νά λεχθῆ ὅτι εἰς πολλάς περιπτώσεις ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως (5.6) ὑπαγορεύεται ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων συγκεκριμένως δέ ἐξ ὑφισταμένης περί τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν θ ε ω ρ ί α ς ἤ γενομένης σχετικῆς ὑ π ο θ έ σ ε ω ς. Μετά τήν καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἐπιλογήν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (5.6), τήν ἐπιλογήν δηλαδή ὡ ρ ι σ μ έ ν η ς οἰκογενεία ς καμπύλων (ὡς π.χ. τῶν εὐθειῶν $y=\alpha+\beta x$, τῶν ἐκθετικῶν καμπύλων $y=\alpha\beta^x$ κ.ο.κ.) ἀκολουθεῖ ὁ προσδιορισμός τῆς ζητουμένης σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η ς καμπύλης-μέλους τῆς οἰκογενείας - δι' ὑπολογισμοῦ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως ἀντιστοίχων καταλλήλων ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν τιμῶν τῶν παραμέτρων α καί β.

Εἰς τήν πρᾶξιν ὁ προσδιορισμός τῆς "ἰ δ α ν ι κ ῆ ς" ταύτης καμπύλης γίνεται συνήθως διά τῆς μεθόδου τῆς 'Ε λ α χ ι σ τ ο π ο ι ή σ ε ω ς τοῦ Μ έ σ ο υ Τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ Σ φ ά λ μ α τ ο ς ἤ ἁπλῶς τῶν 'Ε λ α χ ί σ τ ω ν Τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν τήν ὁποίαν πραγματευόμεθα ἀμέσως κατωτέρω.

**Μέθοδος τῶν 'Ελαχίστων Τετραγώνων**

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ἡ μ ο ρ φ ή τῆς ἐξισώσεως (5.6) θεωρεῖται δ ε δ ο μ έ ν η καί γ ν ω σ τ ή. 'Υποθέτομεν ἐν ἄλλοις λόγοις ὅτι βάσει τῶν γενικῶν ἀρχῶν αἱ ὁποῖαι ἐξετέθησαν ἀνωτέρω ὁ μελετητής ἔχει ἤδη ἐπιλέξει ὡ ρ ι σ μ έ ν η ν ο ἰ κ ο γ έ ν ε ι α ν καμπύλων, μεταξύ δέ τῶν μελῶν αὐτῆς θά ἀναζητηθῆ μία σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η καμπύλη ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τό κριτήριον τοῦ 'Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικοῦ Σφάλματος, ἡ ζητουμένη δηλαδή ἐ ξ ί σ ω σ ι ς ἤ ἄλλως κ α μ π ύ λ η π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς ἐ λ α χ ί σ τ ο υ μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς.

Αἱ τιμαί τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y αἱ ὁποῖαι ὑ π ο λ ο γ ί ζ ο ν τ α ι τῇ βοηθείᾳ τῶν διαφόρων ἐξισώσεων τῆς οἰκογενείας (5.6) ἀντιστοίχως πρός οἱασδήποτε τιμάς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X, καλούμεναι ἐν γένει ο ἱ ο ν ε ί - δυνάμεναι δηλαδή νά πραγματοποιηθοῦν - τιμαί τῆς Y θά συμβολίζονται ἀπό τοῦδε διά τοῦ $\hat{y}$. Οὕτω, δεδομένης τῆς οἰκογενείας (5.6) αἱ οἱονεί τιμαί τῆς Y ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων

$$\hat{y}=f(x,\alpha,\beta) \qquad (5.7)$$

'Εξ ἄλλου, τάς διαφοράς τῶν ἐκ παρατηρήσεως ἤ ἄλλως ἐμπειρικῶν καί τῶν ἀντιστοίχων οἱονεί τιμῶν τῆς Y, καλουμένας συνήθως σφάλματα ἤ ἀποκλίσεις, θά συμβολίζωμεν ἐν γένει διά τοῦ $\hat{\varepsilon}$ καί θά γράφωμεν

$$\hat{\varepsilon}=y-\hat{y}=y-f(x,\alpha,\beta) \qquad (5.8)$$

Κατωτέρω πραγματευόμεθα τήν μέθοδον τῶν 'Ελαχίστων Τετραγώνων, πρῶτον ὅταν τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως εἶναι ἁπλᾶ καί δεύτερον εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων.

α) Περίπτωσις 'Απλῶν Δεδομένων

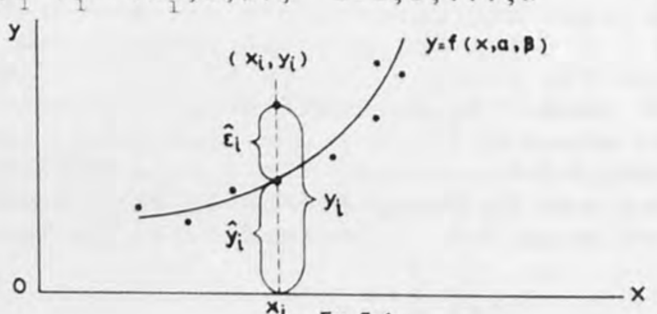
Τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως συνίστανται ἐν προκειμένῳ ἐκ τῶν N ἁπλῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν ἤ σημείων $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν αἱ οἱονεί τιμαί τῆς Y, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρός τάς παρατηρηθείσας τιμάς τῆς X, ὑπολογίζονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5.6) καί εἶναι

$$\hat{y}_i=f(x_i,\alpha,\beta) \qquad i=1,2,\ldots,N \qquad (5.9)$$

'Εξ ἄλλου, αἱ ἀποκλίσεις (σφάλματα) τῶν ὡς ἄνω οἱονεί τιμῶν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐμπειρικῶν τιμῶν τῆς Y εἶναι αἱ θετικαί ἤ ἀρνητικαί ποσότητες (Σχ. 5.1).

$$\hat{\varepsilon}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-f(x_i,\alpha,\beta), \quad i=1,2,\ldots,N \qquad (5.10)$$




Σχ. 5,1

Κατά συνέπειαν, προκειμένου νά ἐπιλέξωμεν ἕν συγκεκριμένον μέλος τῆς οἰκογενείας (5.6), εἶναι εὔλογον νά ζητήσωμεν ἐκείνην τήν καμπύλην ἡ ὁποία διερχομένη ὅσον τό δυνατόν "*ἐγγύτερον*" ἐκ τῶν σημείων $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ καθιστᾶ τά ἀντίστοιχα σφάλματα $\hat{\varepsilon}_i$ ἐλάχιστα. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν καί λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι κατά κανόνα δέν ἐνδιαφερόμεθα διά τήν ἐλαχιστοποίησιν ἤ καί τόν μηδενισμόν μερικῶν μόνον - συγκεκριμένων - ἐκ τῶν ὡς ἄνω σφαλμάτων, ἀλλά διά τήν *ἐν γένει* σμίκρυνσιν αὐτῶν, ὁδηγούμεθα ἀβιάστως εἰς τήν ἐπιλογήν ἐκείνης τῆς καμπύλης ἡ ὁποία *ἐλαχιστοποιεῖ* κάποιον *μέσον ὅρον* τῶν ποσοτήτων $\hat{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2,\ldots,N$. Προφανῶς ὁ μέσος ἀριθμητικός

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_i$$

δέν προσφέρεται διά μίαν τοιαύτην χρῆσιν, καθ'ὅσον αἱ θετικαί καί ἀρνητικαί ἀποκλίσεις $\hat{\varepsilon}_i$ ἀθροιζόμεναι ἀλγεβρικῶς ἀλληλοαναιροῦνται (μερικῶς ἤ ὁλικῶς). Οὕτω, πρός ἀποφυγήν τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν προσήμων τῶν ποσοτήτων $\hat{\varepsilon}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ καταφεύγωμεν συνήθως εἰς τήν χρησιμοποίησιν τῶν *τετραγώνων** αὐτῶν καί ἡ "*ἀρίστη*" καμπύλη ἐπιλέγεται μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας (5.6) μέ *κριτήριον* τήν *ἐλαχιστοποίησιν* τῆς ποσότητος

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_i^{2}$$

ἡ ὁποία ὡς μέσος ὅρος τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων $\hat{\varepsilon}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ καλεῖται *μέσον τετραγωνικόν σφάλμα*.

---

* Θά ἦτο δυνατόν νά χρησιμοποιηθοῦν καί αἱ ἀπόλυτοι τιμαί $|\hat{\varepsilon}_i|$, $i=1,2,\ldots,N$ ἀλλά τοῦτο δυσχεραίνει σοβαρῶς τόν περαιτέρω ἀλγεβρικόν χειρισμόν.

Κατά συνέπειαν τό ὅλον πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς ζητουμένης ἰ δ α ν ι κ ῆ ς καμπύλης - μέλους τῆς ἐπιλεγείσης ἤδη οἰκογενείας (5.6) - ἀνάγεται εἰς τόν ὑπολογισμόν ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως ἑνός ζεύγους συγκεκριμένων ἀριθμητικῶν τιμῶν - συμβολιζομένων ἀπό τοῦδε $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ - τῶν παραμέτρων α καί β τοιούτων ὥστε δι'οἱασδήποτε ἄλλας τιμάς τῶν α,β νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2<\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-f(x_i,\alpha,\beta)\right]^2 \qquad (5.11)$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καί τό κριτήριον τοῦ Ἐ λ α χ ί σ τ ο υ Μ έ σ ο υ Τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ Σφάλ-μ α τ ο ς.

Ἡ ἀκολουθητέα πρός ὑπολογισμόν τῶν ζητουμένων τιμῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ διαδικασία - καλουμένη ἐν προκειμένῳ μέθοδος τῶν Ἐ λ α χ ί σ τ ω ν Τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν - εἶναι γνωστή ἐκ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀρκεῖ ὡς γνωστόν αἱ π ρ ῶ τ α ι μ ε ρ ι κ α ί π α ρ ά γ ω γ ο ι ὡς πρός α καί β τῆς ποσότητος

$$\frac{1}{N}\sum_{i}\hat{\varepsilon}_i^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{i}\left[y_i-f(x_i,\alpha,\beta)\right]^2 \qquad (5.12)$$

ἤ ἁπλούστερον μόνον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτῆς, νά ἐξισωθοῦν πρός τό μηδέν καί τό προκῦπτον σύστημα - γνωστόν ὡς σύστημα κ α ν ο ν ι κ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν -

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sum_{i}\hat{\varepsilon}_i^{\,2}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum_{i}\hat{\varepsilon}_i^{\,2}\right)=0 \qquad (5.13)$$

νά ἐπιλυθῇ ὡς πρός τάς ἀγνώστους παραμέτρους α καί β. Τό ὅτι ἡ λύσις ($\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$) τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.13) ὁδηγεῖ εἰς ἐ λ α χ ι σ τ ο π ο ί η σ ι ν καί ὄχι μεγιστοποίησιν τῆς ποσότητος (5.12) εἶναι ἐν προκειμένῳ προφανές. Πράγματι, ἡ ἐν λόγῳ ποσότης ὡς ἄθροισμα τετραγώνων ἔχει ὡς γνωστόν - θεωρουμένη ἄνευ δεσμεύσεων - μ ό ν ο ν ἐ-

*λάχιστον* (καί ὄχι μέγιστον). Τήν *συγκεκριμένην* πλέον καμπύλην-μέλος τῆς οἰκογενείας (5.6)

$$\hat{y}=f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta}) \tag{5.14}$$

ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τάς οὕτω ὑπολογιζομένας τιμάς $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῶν παραμέτρων α καί β θά καλοῦμεν *ἐξίσωσιν* (ἤ *καμπύλην*) *παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος* (ε.μ.τ.σ.)

Σημειωτέον ὅτι τό *μέσον τετραγωνικόν σφάλμα* περί τήν ἐν λόγῳ καμπύλην *παλινδρομήσεως* συμβολιζόμενον συνήθως διά τοῦ $\sigma^2_{yx}$ ἤ ἁπλῶς διά τοῦ $\sigma^2$ καί ὁριζόμενον ὑπό τῆς σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2 \tag{5.15}$$

ἀποτελεῖ προφανῶς - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$- ἐλάχιστον τῶν μ.τ.σ. περί οἱανδήποτε ἄλλην καμπύλην τῆς οἰκογενείας (5.6).

β) Περίπτωσις *ταξινομημένων* δεδομένων

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως συνίστανται ὡς γνωστόν ἐκ τῶν kλ ἀριθμητικῶν ζευγῶν ἤ σημείων $(x_i,y_j)$ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐπαναλαμβάνεται μέ συχνότητα $f_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ παρουσιάζονται δέ συνήθως εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ἀνάλογον τοῦ (4.1). Δέον νά διευκρινισθῆ ἐνταῦθα ὅτι εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν καί ἰδιαιτέρως τῶν ἀναφερομένων εἰς *συνεχεῖς* μεταβλητάς τά ἀριθμητικά ζεύγη $(x_i, y_j)$ συνίστανται ἐκ τῶν τιμῶν $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ καί $y_j$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἁπλῶς τάς *κεντρικάς* τιμάς τῶν τάξεων εἰς τάς ὁποίας αἱ παρατηρηθεῖσαι πράγματι τιμαί τῶν μεταβλητῶν X καί Y ἔχουν ὁμαδοποιηθῆ. Ἐν προκειμένῳ αἱ *οἱονεί* τιμαί τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ τῆς X, εἶναι

$$\hat{y}_i=f(x_i,\alpha,\beta) \qquad (5.16)$$

δεδομένου δέ ὅτι εἰς τήν τιμήν $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ τῆς Χ δέν ἀντιστοιχεῖ μία, ἀλλά πλῆθος τιμῶν τῆς Υ καί συγκεκριμένως αἱ τιμαί $y_j$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ μέ ἀντιστοίχους συχνότητας $f_{ij}$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ αἱ ἀποκλίσεις αἱ ὁποῖαι δέον νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν διά τόν προσδιορισμόν τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως παλινδρομήσεως εἶναι αἱ θετικαί ἤ ἀρνητικαί ποσότητες

$$\hat{\varepsilon}_{ij}=y_j-\hat{y}_i=y_j-f(x_i,\alpha,\beta) \qquad (5.17)$$

καί μάλιστα ἑκάστη ἐξ αὐτῶν μέ συχνότητα $f_{ij}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$.

Κατά συνέπειαν, ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων πρός προσδιορισμόν μιᾶς ἐξισώσεως ἀναλόγου τῆς (5.14) ἰσοδυναμεῖ ἐν προκειμένῳ πρός τόν ὑπολογισμόν - πάντοτε ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως - ἑνός ζεύγους συγκεκριμένων ἀριθμητικῶν τιμῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῶν παραμέτρων α καί β τοιούτων ὥστε δι'οἱασδήποτε ἄλλας τιμάς τῶν α,β νά ἰσχύη ἡ ἀνισότης - κριτήριον τοῦ Ἐλαχίστου Μέσου Τετραγωνικοῦ Σφάλματος,

$$\frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2<\frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\alpha,\beta)\right]^2 \qquad (5.18)$$

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν, κατ'ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων, ἀρκεῖ νά ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί τῶν παραμέτρων α καί β αἱ ὁποῖαι ἐλαχιστοποιοῦν τήν ποσότητα

$$\frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}^2 = \frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\alpha,\beta)\right]^2 \qquad (5.19)$$

ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα περί τήν οἱανδήποτε καμπύλην-μέλος τῆς οἰκογενείας (5.6). Οὕτω τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ ἀνάγεται καί πάλιν εἰς τήν λύσιν τοῦ ἀναλόγου πρός τό (5.13) συστήματος τῶν κανονικῶν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν

$$\frac{\vartheta}{\vartheta\alpha}(\sum_i\sum_j f_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}^2)=0 , \qquad \frac{\vartheta}{\vartheta\beta}(\sum_i\sum_j f_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}^2)=0 \tag{5.20}$$

Τήν σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η ν καμπύλην - μέλος τῆς οἰκογενείας (5.6) -

$$\hat{y}=f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta}) \tag{5.21}$$

ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τάς ἐκ τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.20) ὑπολογισθείσας τιμάς τῶν παραμέτρων α καί β - εἰς τήν λύσιν δηλαδή $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος -θά καλοῦμεν καί ἐν προκειμένῳ ἐξίσωσιν (ἤ καμπύλην) παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος (ε.μ.τ.σ.).

'Εξυπακούεται ὅτι τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα περί τήν ἐν λόγῳ καμπύλην - ἐλάχιστον τῶν μ.τ.σ. περί τάς λοιπάς καμπύλας τῆς οἰκογενείας (5.6) - δίδεται ἐν προκειμένῳ ὑπό τῆς ἀναλόγου πρός τήν (5.15) σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2 \tag{5.22}$$

'Επραγματεύθημεν ἀνωτέρω τόν προσδιορισμόν τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως (5.21) μέ γνώμονα τήν "ἐγγύτητα" τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης πρός ἕ ν ἕ κ α σ τ ο ν τῶν σημείων $(x_i,y_j)$, $i=1,2,...,k$ $j=1,2,...,\lambda$. Θά ἦτο ὅμως δυνατόν τό ὅλον πρόβλημα νά τεθῆ ὑπό μίαν ἄλλην μορφήν. Συγκεκριμένως, ὁρμώμενοι ἐκ τοῦ ἐρωτήματος "κατά πόσον ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως (5.21) ἀποτελεῖ τήν ἀ ρ ί σ τ η ν δ υ ν α τ ή ν - μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας (5.6) - π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν τῆς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ο υ ς κ α μ π ύ λ η ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς (5.4)" θά ἦτο δυνατόν νά ζητηθῆ ὁ προσδιορισμός μιᾶς καμπύλης - μέλους τῆς οἰκογενείας (5.6) πάντοτε - ἡ ὁποία νά προσεγγίζη κατά τόν καλλίτερον δυνατόν τρόπον τήν στοιχειώδη καμπύλη παλινδρομήσεως (5.4). Τοῦτο προφανῶς ἰσοδυναμεῖ πρός τόν ὑπολογισμόν τῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ μέ κριτήριον τήν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ μέσου τετραγώνου τῶν ἀποκλίσεων τῶν δεσμευμένων μέσων ὅρων $E(Y/x_i)$, $i=1,2,\ldots,k$ καί τῶν ἀντιστοίχων ο ἱ ο ν ε ί τιμῶν τῆς Y ὑπολογιζομένων ἐκ τῆς (5.16), συγκεκριμένως δηλαδή ἐκ τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῆς ποσότητος

$$\frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k} f_{i.}\hat{\varepsilon}_{i.}^{2}=\frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k} f_{i.}\left[E(Y/x_i)-f(x_i,\alpha,\beta)\right]^2 \qquad (5.23)$$

ὅπου, ὡς εἶναι φυσικόν, ἑκάστη τῶν ἀποκλίσεων $\hat{\varepsilon}_{i}$, $i=1,2,\ldots,k$ ἔχει σ τ α θ μ ι σ θ ῆ μέ τήν συνολικήν συχνότητα $f_{i.}$ τῆς ἀντιστοίχου δεσμευμένης κατανομῆς ἐκ τῆς ὁποίας ἔχει ὑπολογισθῆ ὁ μέσος $E(Y/x_i)$, $i=1,2,\ldots,k$. Οὕτω, αἱ ζητούμεναι ἐν προκειμένῳ τιμαί τῶν α καί β θά προκύψουν ὡς λύσις τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων

$$\frac{\vartheta}{\vartheta\alpha}\left(\sum_i f_{i.}\hat{\varepsilon}_{i.}^{2}\right) = 0 , \qquad \frac{\vartheta}{\vartheta\beta}\left(\sum_i f_{i.}\hat{\varepsilon}_{i.}^{2}\right) = 0 \qquad (5.24)$$

Τό σύστημα ὅμως (5.24) ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω εἶναι τ α υ τ ό σ η μ ο ν πρός τό (5.20) καί κατά συνέπειαν ὁδηγεῖ ἀ κ ρ ι β ῶ ς εἰς τήν αὐτήν λύσιν $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ καί τήν ἰδίαν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως (5.21).

Πράγματι, τό σύστημα (5.20) γράφεται

$$(-2)\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\alpha,\beta)\right]\frac{\vartheta f(x_i,\alpha,\beta)}{\vartheta\alpha} = 0$$

$$(-2)\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\alpha,\beta)\right]\frac{\vartheta f(x_i,\alpha,\beta)}{\vartheta\beta} = 0$$

ἤ ἄλλως

$$\sum_i \frac{\vartheta f(x_i,\alpha,\beta)}{\vartheta\alpha}\sum_j f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\alpha,\beta)\right] = 0$$

$$\sum_i \frac{\vartheta f(x_i,\alpha,\beta)}{\vartheta\beta}\sum_j f_{ij}\left[y_j-f(x_i,\alpha,\beta)\right] = 0$$

τέλος δέ λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς (4.7),

$$\sum_i \frac{\vartheta f}{\vartheta \alpha} f_{i.} \left[ E(Y/x_i) - f(x_i, \alpha, \beta) \right] = 0$$

$$\sum_i \frac{\vartheta f}{\vartheta \beta} f_{i.} \left[ E(Y/x_i) - f(x_i, \alpha, \beta) \right] = 0$$

τό ὁποῖον εἶναι ἀκριβῶς τό σύστημα (5.24).

'Επραγματεύθημεν ἀνωτέρω τήν μέθοδον τῶν 'Ελαχίστων Τετραγώνων καί ἰδιαιτέρως τόν τρόπον ἐφαρμογῆς αὐτῆς εἰς τόν προσδιορισμόν τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μ.τ.σ. ἐξ ἐ μ π ε ι ρ ι κ ῶ ν - ἁπλῶν ἤ ταξινομημένων - δεδομένων.

'Ως εἴδομεν, ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἀποτελεῖ ἁπλῶς μίαν ἀντικειμενικήν ποσοτικήν διαδικασίαν διά τῆς ὁποίας καθίσταται δυνατόν, δ ο θ ε ί σ η ς μιᾶς οἰκ ο γ ε ν ε ί α ς καμπύλων - ἐν ἄλλοις λόγοις προαποφασισθείσης τῆς μορφῆς ἐξισώσεων (5.6) - νά ἐπ ι λ ε γ ῆ ὡς ἐξίσωσις παλινδρομήσεως τό "ἱδανικόν" μέλος τῆς οἰκογενείας, μία συγκεκριμένη δηλαδή καμπύλη ἡ ὁποία διερχομένη διά μ έ σ ο υ καί ὡς "ἔ γ γ ι σ τ α" τῶν ἐπί μέρους σημείων τοῦ ἀντιστοίχου σ η μ ε ι α κ ο ῦ ν έ φ ο υ ς καί ἀποτελοῦσα τήν ἀ ρ ί σ τ η ν ἐν προκειμένῳ δυνατήν πρόσέ γ γ ι σ ι ν τῆς στοιχειώδους ἐξισώσεως παλινδρομήσεως, περιγράφει ἁπλᾶ καί συνοπτικά τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Πρός τούτοις, ἡ οὕτω προσδιοριζομένη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως ἀποκαλύπτουσα γενικῷ τῷ τρόπῳ - μακροσκοπικῶς - τήν ν ο μ ο τ έ λ ε ι α ν ἡ ὁποία διέπει τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς Y ἐν σχέσει πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς X, ἐπιτρέπει, δοθείσης μιᾶς οἱασδήποτε τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς $x_o$, τόν κατά π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ν ὑπολογισμόν μιᾶς ἀντιστοίχου ο ἱ ο ν ε ί τιμῆς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $\hat{y}_o$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$\hat{y}_o = f(x_o, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \qquad (5.25)$$

Συναφῶς ὅμως πρός τά ἀνωτέρω γεννῶνται τά ἑξῆς ἐρωτήματα:

(i) "Πόσον καλά" ἡ ἐπιλεγεῖσα ἐξίσωσις περιγράφει τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν καί "πόσον ἱκανοποιητική" εἶναι ἡ προσέγγισις ἤ ἄλλως ὁ βαθμός ἀκριβείας τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς;

(ii) Μήπως μία ἄλλη μορφή ἐξισώσεως - μία ἄλλη δηλαδή οἰκογένεια καμπύλων - εἶναι δυνατόν νά ὁδηγήση εἰς μίαν "καλλιτέραν" ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως, ἤτοι εἰς μίαν ἄλλην συγκεκριμένην καμπύλην ἡ ὁποία προσιδιάζει περισσότερον (προσαρμόζεται καλλίτερον) εἰς τά ὑπό μελέτην δεδομένα καί κατά συνέπειαν περιγράφει ἀκριβέστερον τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν μεταβλητῶν σχέσιν καί ἐάν ναί "πόσον ἀκριβέστερον";

Μεθόδους ἀντιμετωπίσεως τῶν ὡς ἄνω προβλημάτων, εὕρεσιν δηλαδή ἀντικειμενικῶν ποσοτικῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν γραμμῆς παλινδρομήσεως, ὡς καί ὑπολογισμοῦ ὡρισμένων ποσοτικῶν ἐκφράσεων καλουμένων δεικτῶν προσδιορισμοῦ ἤ προσαρμογῆς, οἱ ὁποῖοι χαρακτηρίζουν τόν βαθμόν προσαρμογῆς μιᾶς συγκεκριμένης γραμμῆς παλινδρομήσεως πρός τά δεδομένα ἤ ἄλλως τήν "ἐγγύτητα" τῶν ἐπί μέρους σημείων τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους πρός αὐτήν καί κατά συνέπειαν ἀποκαλύπτουν "πόσον καλά" ἡ ἐν λόγῳ γραμμή περιγράφει τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων κατά περίπτωσιν μεταβλητῶν, πραγματευόμεθα εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

## 5.4 Δεῖκται Προσδιορισμοῦ ἤ Προσαρμογῆς

Μετά τόν προσδιορισμόν τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μ.τ.σ. - ἤ ἄλλως ἐλαχίστων τετραγώνων - γεννᾶται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τό ἐρώτημα πόσον ἱκανοποιητική εἶναι ἡ προσέγγισις μέ τήν ὁποίαν ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη συνοψίζει τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις "πόσον καλά" περιγράφει αὔτη τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν καί ποῖος ὁ βαθμός ἀκριβείας τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων.

Ἀντικείμεναι αἱ ἀπαντήσεις εἰς τά ἐρωτήματα αὐτά δίδονται συνήθως διά τοῦ ὑπολογισμοῦ - ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως καί ἐν σχέσει πάντοτε πρός τήν ἐπιλεγεῖσαν γραμμήν παλινδρομήσεως - ὡρισμένων ποσοτικῶν ἐκφράσεων αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν τόν βαθμόν "προσαρμογῆς" τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα ἤ ἄλλως τήν κατά μέσον ὅρον "ἐγγύτητα" τῶν ἐπί μέρους σημείων τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους πρός αὐτήν. Τήν ἔννοιαν καί τάς ἰδιότητας ὡς καί τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν ἐν λόγῳ μέτρων, καλουμένων ἐν γένει Δεικτῶν Προσδιορισμοῦ ἤ Προσαρμογῆς καί συμβολιζομένων συνήθως διά τοῦ $R^2$, πραγματευόμεθα διεξοδικῶς κατωτέρω. Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ διακρίνομεν καί πάλιν τάς περιπτώσεις ἁπλῶν καί ταξινομημένων δεδομένων.

α) Ἁπλᾶ δεδομένα

Κατ'ἀναλογίαν πρός τήν διακύμανσιν μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ ὁποία ὡς γνωστόν ἀποτελεῖ ἕν μέτρον τῆς ἐγγύτητος ἤ ἄλλως τῆς διασπορᾶς τῶν ἐπί μέρους ἀριθμητικῶν δεδομένων - τιμῶν τῆς μεταβλητῆς - περί τήν μέσην τιμήν αὐτῶν, τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα $\sigma^2$ περί τήν ἀντίστοιχον γραμμήν παλινδρομήσεως (5.14) - ὑπολογιζόμενον εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἐκ τοῦ τύπου (5.15) - ὡς μέσος ὅρος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων (διαφορῶν) $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ(οἱονεί) τιμῶν τῆς Y ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐκ παρατηρήσεως (ἐμπειρικῶν) τιμῶν αὐτῆς, ἀποτελεῖ προφανῶς ἕν μέτρον τῆς διασπορᾶς ἤ ἄλλως τῆς ἐγγύτητος τῶν ἐπί μέρους σημείων $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ πρός τήν ἐν λόγῳ καμπύλην. Πράγματι, ἐάν αἱ ἀποκλίσεις $\hat{e}_i$ εἶναι ἐν γένει μεγάλαι - κατ'ἀπόλυτον τιμήν - ἡ τιμή τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ εἶναι ἐπίσης μεγάλη. 'Αντιστρόφως μικρόν μ.τ.σ. ὑποδηλοῖ ὅτι καί αἱ ἐπί μέρους ἀποκλίσεις $\hat{e}_i$ εἶναι κατά κανόνα μικραί. Πρός τούτοις ἡ ἐν λόγῳ ποσότης, ὡς ἄθροισμα τετραγώνων, μηδενίζεται* μ ό ν ο ν ἐάν ἅπασαι αἱ ὡς ἄνω ἀποκλίσεις εἶναι μηδενικαί, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις μόνον ἐάν ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως διέρχεται δ ι' ὅ λ ω ν τῶν σημείων τοῦ ἀντιστοίχου στικτοῦ διαγράμματος (περίπτωσις τῆς στοιχειώδους καμπύλης παλινδρομήσεως). Κατά συνέπειαν, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ δύναται νά χρησιμοποιηθῆ - κατ' ἀρχήν τουλάχιστον - ὡς μέτρον τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως πρός τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως, ὁπωσδήποτε δέ ἡ ἀριθμητική τιμή αὐτοῦ ἀντανακλᾶ τό "πόσον καλά" ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη περιγράφει τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν μεταβλητῶν σχέσιν.

Δυστυχῶς ὅμως ἡ ἐν λόγῳ ποσότης χρησιμοποιουμένη ὡς μέτρον τῆς ἐγγύτητος ἤ ἄλλως τῆς διασπορᾶς τῶν ἐπί μέρους σημείων $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ περί τήν ἀντίστοιχον γραμμήν παλινδρομήσεως, παρουσιάζει τά αὐτά ἐν γένει μειονεκτήματα μέ ἐκεῖνα τῆς διακυμάνσεως ἤ τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως.

Συγκεκριμένως, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ ὡς ἀπόλυτος ἀριθμός ἐκπεφρασμένος εἰς τάς ἰδίας μονάδας μετρήσεως** μέ τήν ἐξηρτημένην μεταβλητήν Y, ἐπιρρεάζεται κατ' ἀρχήν - μεταβαλλομένηςτῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς αὐτοῦ - ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων κατά περίπτωσιν μονάδων. Τό γεγονός αὐτό, ὡς εἶναι εὐνόητον, καθιστᾶ ἐξαιρετικῶς δυσχερῆ - ἄν ὄχι ἀδύνατον - τήν ἀξιολόγησιν τῆς ἑκάστοτε σημασίας του. Πρός τούτοις, ὁ χαρακτηρισμός μιᾶς οἱασδήποτε τιμῆς τοῦ $\sigma^2$ ὡς "μεγάλης" ἤ "μικρᾶς" ἄνευ τῆς χρησιμοποιήσεως ἀντιστοίχου καταλλήλου μ έ τ ρ ο υ σ υ γ κ ρ ί σ ε ω ς εἶναι

---

* Προφανῶς οὐδέποτε λαμβάνει ἀρνητικάς τιμάς

**'Ακριβέστερον, τετραγωνισμένας

κ α θ α ρ ῶ ς ὑποκειμενικός καί ὡς ἐκ τούτου περιωρισμένης πρακτικῆς χρησιμότητος. Τέλος, εἶναι προφανές ὅτι τό ἐν λόγῳ μέτρον, ὡς ἐκ τῆς φύσεως αὐτοῦ, δέν προσφέρεται δι'οἱασδήποτε συγκρίσεις.

'Εν ὄψει τῶν ἀνωτέρω, εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ὁ βαθμός προσαρμογῆς τῆς κατά περίπτωσιν χρησιμοποιουμένης γραμμῆς παλινδρομήσεως πρός τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως καί γενικώτερον ἡ ἀκρίβεια τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων, μετρᾶται κατά κανόνα οὐχί διά τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ λαμβανομένου μεμονωμένως, ἀλλά διά τοῦ πηλίκου αὐτοῦ πρός τήν (συνολικήν) διακύμανσιν $\sigma_y^2$ τῶν τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y, ἤτοι διά τοῦ λόγου $\sigma^2 : \sigma_y^2$ συνηθέστερον δέ διά τοῦ ἀντιστοίχου Δ ε ί κ τ ο υ Π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς ἤ Π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ $R^2$, ὁ ὁποῖος ὁριζόμενος ὑπό τῆς σχέσεως

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \tag{5.26}$$

ἔχει τάς ἀκολούθους ἐπιθυμητάς ἰδιότητας:

(i) Εἶναι κ α θ α ρ ό ς ἀριθμός - ἄνευ μονάδων μετρήσεως - καί συνεπῶς πάντοτε σ υ γ κ ρ ί σ ι μ ο ς.

(ii) Λαμβάνει τιμάς εἰς τό κλειστόν διάστημα $[0,1]$, πληροῖ δηλαδή τήν διπλῆν ἀνισότητα $0 \leqslant R^2 \leqslant 1$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀξιολόγησις τοῦ μεγέθους τῶν τιμῶν του εἶναι ἁπλῆ καί ἀντικειμενική.

(iii) Εἶναι ἐ ν γ έ ν ε ι ἀνεξάρτητος τῶν κατά περίπτωσιν χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως καί κατά συνέπειαν ἡ κατανόησις τῆς σημασίας αὐτοῦ καί ἡ ἑρμηνεία τῶν τιμῶν του εἶναι ἄμεσος μή ἀπαιτουμένων οἱωνδήποτε προσθέτων πληροφοριῶν.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἐν λόγῳ ἰδιοτήτων τοῦ δείκτου $R^2$ καί ἰδιαιτέρως τῆς σημασίας αὐτῶν εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς παραθέτομεν κατωτέρω τάς ἀ π ο δ ε ί ξ ε ι ς των.

(i) Τόσον τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν γραμμήν παλινδρομήσεως (5.14), ὑπολογιζόμενον ἐκ τοῦ τύπου (5.15), ὅσον καί ἡ διακύμανσις $\sigma_y^2$ τῶν τιμῶν τῆς Y, ὁριζομένη διά τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_y)^2 \tag{5.27}$$

ὅπου $\mu_y = \frac{1}{N}\sum_i y_i$ ἡ μέση τιμή τῶν $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$, ἐκφράζονται ὡς γνωστόν εἰς τάς μονάδας μετρήσεως (τετραγωνισμένας) τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y. Κατά συνέπειαν ὁ λόγος αὐτῶν $\sigma^2 : \sigma_y^2$ ὡς καί ὁ δείκτης $R^2=1-\sigma^2:\sigma_y^2$ εἶναι κ α θ α ρ ο ί (ἄνευ μονάδων μετρήσεως) ἀριθμοί.

(ii) Συναφῶς πρός τήν δευτέραν ἰδιότητα τοῦ δείκτου $R^2$, τήν διπλήν δηλαδή ἀνισότητα

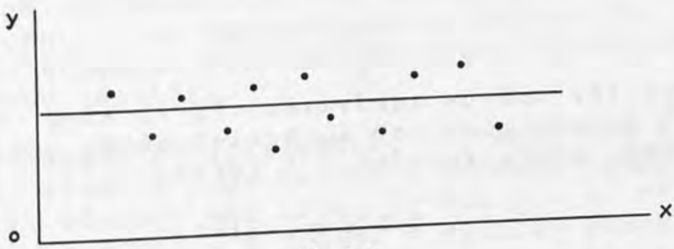
$$0 \leqslant R^2 \leqslant 1 \tag{5.28}$$

δέον νά σημειωθῆ ὅτι αὕτη ἀληθεύει ὑπό τήν ἑξῆς μόνον προϋπόθεσιν:

"Μεταξύ τῶν καμπύλων-μελῶν τῆς χρησιμοποιηθείσης οἰκογενείας (5,6) νά περιλαμβάνωνται καί αἱ παράλληλοι πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεῖαι ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν διά καταλλήλους τιμάς τῶν παραμέτρων α καί β ἡ ἐξίσωσις $y=f(x,\alpha,\beta)$ δύναται νά λάβη τήν μορφήν $y=c$, ὅπου c μία αὐθαίρετος σταθερά".

Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἐάν δηλαδή ἡ οἰκογένεια (5.6) δέν περιλαμβάνει τάς εὐθείας $y=c$, εἶναι δυνατόν, ὡς θά εἴδομεν κατωτέρω, νά προκύψουν ὡς τιμαί τοῦ $R^2$ καί ἀ ρ ν η τ ι κ α ί τοιαῦται.

Δέον ὅμως νά τονισθῆ ἐνταῦθα ὅτι ἡ ὡς ἄνω σ υ ν θ ή κ η οὐδόλως ἀποτελεῖ δέσμευσιν εἰς τήν διαδικασίαν ἐπιλογῆς τῆς καταλλήλου ἑκάστοτε γραμμῆς παλινδρομήσεως. 'Αντιθέτως, αὕτη εἶναι ἀπολύτως ἐπιβεβλημένη πρός ἀντιμετώπισιν τῶν περιπτώσεων ὅπου ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Υ δ έ ν σ χ ε τ ί ζ ε τ α ι καθ' οἱονδήποτε τρόπον πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς Χ καί κατά συνέπειαν μεταβαλλομένης τῆς Χ ἡ μεταβλητή Υ λαμβάνει εἴτε τήν αὐτήν πάντοτε τιμήν εἴτε γενικώτερον τιμάς κυμαινομένας κατά μή συστηματικόν τρόπον πέριξ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρός τόν ἄξονα τῶν x (περίπτωσις ἀσυσχετίστων μεταβλητῶν, Σχ.5.2)




Σχ. 5,2

Πρός ἀπόδειξιν τῆς διπλῆς ἀνισότητος (5.28) ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύη πάντοτε ἡ ἀνισότης

$$\sigma^2 \leqslant \sigma_y{}^2 \qquad (5.29)$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὅτι τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν γραμμήν παλινδρομήσεως (5.14) εἶναι πάντοτε μικρότερον ἤ τό πολύ ἴσον πρός τήν διακύμανσιν $\sigma_y{}^2$ τῶν τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Υ.

Πράγματι, ἐκ τῆς (5.29) θά προέκυπτεν ἀμέσως ὅτι

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2} \leqslant 1 \quad \text{ἤ} \quad 1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2} \geqslant 0 \quad \text{ἤτοι} \quad R^2 \geqslant 0$$

ἐνῶ παραλλήλως ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2} \geqslant 0$$

θά εἴχωμεν

$$-\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \leqslant 0 \quad \text{ἤ} \quad 1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \leqslant 1 \quad \text{καί συνεπῶς} \quad R^2 \leqslant 1.$$

Πρός ἀπόδειξιν τώρα τῆς (5.29) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὑποθέσωμεν πρός στιγμήν ὅτι ἡ ἐπιλογή τῆς γραμμῆς παλινδρομήσεως π ε ρ ι ο ρ ί ζ ε τ α ι μ ό ν ο ν μεταξύ τῶν παραλλήλων πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθειῶν y=c. Τό μ.τ.σ. περί οἱανδήποτε τῶν εὐθειῶν αὐτῶν εἶναι ὡς γνωστόν ἡ ποσότης

$$\frac{1}{N}\sum_i(y_i-c)^2$$

Θέτοντες τήν πρώτην παράγωγον τῆς ἐν λόγῳ ποσότητος - ἤ ἁπλούστερον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτῆς - ὡς πρός c ἴση πρός μηδέν προκύπτει ἡ ἰσότης

$$(-2)\sum_i(y_i-c)=0$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

$$\hat{c}=\frac{1}{N}\sum_i y_i=\mu_y$$

Οὕτω, ἡ ἐπιλεγομένη ἐν προκειμένῳ διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων γραμμή παλινδρομήσεως εἶναι ἡ παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεία

$$y=\mu_y$$

τό δέ μ.τ.σ. περί αὐτήν

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\mu_y)^2$$

εἶναι ἴσον πρός τήν διακύμανσιν $\sigma_y^2$ τῶν τιμῶν τῆς Y. Εἰς τήν πραγματικότητα ὅμως ἡ γραμμή παλινδρομήσεως (5.14) ἐπιλέγεται μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας (5.6), ἡ ὁποία πέραν τῶν εὐθειῶν y=c - αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν μέλη αὐτῆς συμφώνως πρός τήν γενομένην ὑπόθεσιν - περιλαμβάνει ἐν γένει καί ἄλλας καμπύλας. Κατά συνέπειαν, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν ἐπιλεγεῖσαν καμπύλην παλινδρομήσεως (5.14) εἶναι ἀδύνατον νά ὑπερβαίνη τήν διακύμανσιν $\sigma_y^2$, διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων θά ὁδήγη εἰς τήν ἐπιλογήν ὡς γραμμῆς παλινδρομήσεως τῆς εὐθείας $y=\mu_y$, τό μ.τ.σ. τῆς ὁποίας εἶναι, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ἴσον πρός $\sigma_y^2$. Οὕτω συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν γραμμήν παλινδρομήσεως (5.14) εἶναι πάντοτε μικρότερον ἤ τό πολύ ἴσον πρός τήν διακύμανσιν $\sigma_y^2$, ἤτοι ἡ ἀνισότης $\sigma^2 \leqslant \sigma_y^2$ τήν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀνωτέρω πρός ἀπόδειξιν τῆς (5.28).

Μετά τήν ἀπόδειξιν τῆς διπλῆς ἀνισότητος (5.28) εἶναι χρήσιμον νά σχολιάσωμεν δι'ὀλίγων τήν σημασίαν τῶν διαφόρων τιμῶν τοῦ δείκτου $R^2$ καί νά διευκρινισθοῦν τά ἑξῆς:

Κατ'ἀρχήν εἶναι προφανές ὅτι ὅσον μ ε γ α λ υ τ έ ρ α εἶναι ἡ τιμή τοῦ $R^2$ - ἡ ὁποία σημειωτέον ἐξαρτᾶται οὐσιαστικῶς μόνον ἐκ τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ - τόσον μ ι κ ρ ο τ έ ρ α εἶναι ἡ σχετική διασπορά τῶν σημείων $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ περί τήν ἐπιλεγεῖσαν γραμμήν παλινδρομήσεως καί κατά συνέπειαν τόσον μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς ὁ βαθμός προσαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης καί ἀ κ ρ ι β έ σ τ ε ρ α τά δι'αὐτῆς ἐξαγόμενα συμπεράσματα.

Εἰδικώτερον, ἡ ἰσότης $R^2=1$ λαμβάνει προφανῶς χώραν μόνον ἐάν ἡ ἐπιλεγεῖσα καμπύλη παλινδρομήσεως (5.14) διέρχεται δι'ὅλων τῶν σημείων $(x_i,y_i)$ τοῦ ἀντιστοίχου στικτοῦ διαγράμματος, ἐάν δηλαδή ἡ προσαρμογή αὐτῆς εἶναι πλήρης (περίπτωσις στοιχειώδους ἐξισώσεως παλινδρομήσεως). Πράγματι, εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν αἱ ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμαί τῆς Y ταυτίζονται πρός τάς ἀντιστοίχους ἐμπειρικάς τοιαύτας, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ μηδενίζεται καί ὁ δείκτης $R^2$ - ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (5.26) - γίνεται ἴσος πρός τήν μονάδα.

'Αντιστρόφως, ἡ ἰσότης $R^2=0$ λαμβάνει χώραν μόνον ἐάν ἡ ἐπιλεγομένη διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων γραμμή παλινδρομήσεως εἶναι ἡ παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεία $y=\mu_y$ - ὅτε τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. ἰσοῦται, ὡς εἴδομεν, πρός τήν διακύμανσιν $\sigma_y{}^2$ - ἤτοι εἰς τήν περίπτωσιν μ ή σ υ σ χ ε-τ ι σ μ έ ν ω ν μεταβλητῶν.

Θά ἀποδείξωμεν τώρα - δι'ἑνός ἁπλοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος - ὅτι ἐάν ἡ οἰκογένεια τῶν καμπύλων $y=f(x,\alpha,\beta)$ - ἐκ τῆς ὁποίας ἐπιλέγεται ἡ γραμμή παλινδρομήσεως - δέν περιλαμβάνει τάς παραλλήλους πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθείας $y=c$, εἶναι δυνατόν ὁ δείκτης $R^2$ νά λάβῃ καί ἀρνητικάς τιμάς.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τά ἐμπειρικά δεδομένα συνίστανται ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν τῶν δύο πρώτων στηλῶν τοῦ πίνακος (5.1).

Πίναξ 5.1

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_iy_i$ | $\hat{y}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 1 | 9 | 2,5 |
| 2 | 8 | 4 | 16 | 5,0 |
| 3 | 10 | 9 | 30 | 7,5 |
| 4 | 5 | 16 | 20 | 10,0 |
| 10 | 32 | 30 | 75 | |

Πρός τούτοις, ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μελετητής ἀπεφάσισεν νά ἐπιλέξῃ τήν γραμμήν παλινδρομήσεως μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας $y=\beta x$ ἡ ὁποία προφανῶς δέν περιλαμβάνει εὐθείας παραλλήλους πρός τόν ἄξονα τῶν x. Τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.13) συνίσταται ἐν προκειμένῳ ἐκ μόνης τῆς ἐξισώσεως

$$\beta\Sigma x_i{}^2=\sum_i x_iy_i$$

Ὑπολογίζοντες ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως τά ἀθροίσματα

$$\sum_i x_i^2 \qquad \text{καί} \qquad \sum_i x_iy_i$$

- ὡς ἐμφαίνηται ἀντιστοίχως εἰς τήν τρίτην καί τετάρτην στήλην τοῦ πίνακος (5.1) - καί ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς αὐτῶν εἰς τήν ὡς ἄνω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν $\hat{\beta}=2,5$. Οὕτω, ἡ ἐπιλεγεῖσα ἐν προκειμένῳ γραμμή παλινδρομήσεως εἶναι ἡ εὐθεία $\hat{y}=2,5x$. Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί αὐτήν, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν οἱονεί τιμῶν $\hat{y}_i$, $i=1,2,3,4$ αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\hat{y}_i=2,5x_i$$

καί παρατίθενται εἰς τήν πέμπτην στήλην τοῦ πίνακος (5.1), εἶναι

$$\sigma^2=\frac{1}{4}\left[(9-2,5)^2+(8-5)^2+(10-7,5)^2+(5-10)^2\right]=20,625$$

'Εξ ἄλλου ἡ διακύμανσις $\sigma_y^2$ ὑπολογιζομένη διά τοῦ τύπου (5.27) εἶναι

$$\sigma_y^2=\frac{1}{4}\left[(9-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2+(5-8)^2\right] = 3,5$$

Κατά συνέπειαν, ὁ δείκτης $R^2$ ὑπολογιζόμενος διά τοῦ τύπου (5.26) λαμβάνει ἐν προκειμένῳ τήν ἀρνητικήν τιμήν

$$R^2=1-\frac{20,625}{3,5}=-4,893$$

(iii) 'Αποδεικνύομεν τώρα ὅτι ὁ δείκτης $R^2$ εἶναι ἐν γ έ ν ε ι ἀνεξάρτητος τῶν χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως.

'Υποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή Y μετρουμένη μέ δύο διαφόρους μονάδας μετρήσεως λαμβάνει ἀντιστοίχως τάς τιμάς $y_i$ καί $z_i$, $i=1,2,\dots,N$. 'Εάν λ εἶναι ὁ λόγος τῶν δύο μονάδων θά ἔχομεν ὡς γνωστόν $z_i=\lambda y_i$, $i=1,2,\dots,N$.

Θά δείξωμεν ὅτι ὁ δείκτης $R^2$ λαμβάνει τήν α ὐ τ ή ν τιμήν, ἀνεξαρτήτως ἐάν διά τόν ὑπολογισμόν αὐτοῦ χρησιμοποιηθοῦν αἱ τιμαί $y_i$ ἤ αἱ τιμαί $z_i$, $i=1,2,\dots,N$ ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι πληροῦται ἡ ἑξῆς γενική συνθήκη:

"'Η οἰκογένεια καμπύλων $y=f(x,\alpha,\beta)$ μεταξύ τῶν μελῶν τῆς ὁποίας ἐπιλέγεται ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μ.τ.σ. εἶναι τοιαύτη ὥστε ἐάν μία καμπύλη $y=f(x,\alpha^*,\beta^*)$ εἶναι μέλος τῆς οἰκογενείας καί ἡ καμπύλη $y=\lambda f(x,\alpha^*,\beta^*)$ εἶναι ἐπίσης μέλος αὐτῆς".

Ὡς θά ἴδωμεν εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους ἡ ἄνω συνθήκη πληροῦται ὑφ'ὅλων τῶν ἁπλῶν καμπύλων αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς καί ὡς ἐκ τούτου οὐδόλως ἀποτελεῖ σοβαράν δέσμευσιν.

Ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι χρησιμοποιουμένων τῶν τιμῶν $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ ἡ ἐπιλεγομένη καμπύλη παλινδρομήσεως ἔχει ἐξίσωσιν

$$\hat{y}=f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta})$$

ἐνῶ χρησιμοποιουμένων τῶν τιμῶν $z_i$, $i=1,2,\ldots,N$ ἐπιλέγεται ἀντιστοίχως ἡ καμπύλη

$$\hat{z}=f(x,\alpha',\beta')$$

Ἔστω ἀκόμη ὅτι τό μ.τ.σ. περί τήν καμπύλην $\hat{y}=f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta})$ εἶναι $\sigma^2$ ἤτοι

$$\frac{1}{N}\sum_i y_i-f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\ ^2=\sigma^2$$

θά δείξωμεν ὅτι

$$f(x,\alpha',\beta') \equiv \lambda f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta}) \qquad (5.30)$$

Τό μ.τ.σ. περί τήν καμπύλην $\hat{z}=\lambda f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta})$ εἶναι

$$\frac{1}{N}\sum_i \left[z_i-\lambda f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2=\frac{1}{N}\sum_i \left[\lambda y_i-\lambda f(x_i,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2=\lambda^2\sigma^2$$

Κατά συνέπειαν, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι δέν ἀληθεύει ἡ (5.30) θά πρέπει τό μ.τ.σ. περί τήν καμπύλην $\hat{z}=f(x,\alpha',\beta')$ νά εἶναι μικρότερον τοῦ $\lambda^2\sigma^2$ ἤτοι

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_i\left[z_i-f(x,\alpha',\beta')\right]^2<\lambda^2\sigma^2$$

Τοῦτο ὅμως θά ὁδήγη εἰς τό ἑξῆς ἄτοπον.

Τό μ.τ.σ. περί τήν καμπύλην

$$\hat{y}= \frac{1}{\lambda} f(x,\alpha', \beta')$$

νά εἶναι μικρότερον τοῦ $\sigma^2$ καί κατά συνέπειαν ἡ καμπύλη $\hat{y}=f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta})$ νά μήν εἶναι, ὡς ὑπετέθη, ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μ.τ.σ. Πράγματι τά μ.τ.σ. περί τήν $\hat{y}= \frac{1}{\lambda} f(x,\alpha',\beta')$ εἶναι

$$\frac{1}{N} \sum_i \left[y_i-\frac{1}{\lambda} f(x_i,\alpha',\beta')\right]^2 = \frac{1}{N} \sum_i \left[\frac{1}{\lambda} z_i- \frac{1}{\lambda} f(x_i,\alpha',\beta')\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \times \frac{1}{N} \sum_i \left[z_i-f(x_i,\alpha',\beta')\right]^2 < \sigma^2$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ (5.30) ἀ λ η θ ε ύ ε ι καί κατά συνέπειαν τό μ.τ.σ. περί τήν καμπύλην $\hat{z}=f(x,\alpha', \beta')$ εἶναι ἴσον πρός $\lambda^2\sigma^2$ ἤτοι

$$\frac{1}{N} \sum_i \left[ z_i-f(x_i,\alpha', \beta')\right]^2=\lambda^2\sigma^2$$

Ἐξ ἄλλου, ἐάν ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν $y_i$, i=1, 2,...,N τῆς μεταβλητῆς Y εἶναι $\sigma_y{}^2$ ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν $z_i$, i=1,2,...,N εἶναι ὡς γνωστόν - λόγῳ τῆς σχέσεως $z_i=\lambda y_i$ - ἴση πρός $\lambda^2\sigma_y{}^2$. Οὕτω, ὁ δείκτης $R^2$ χρησιμοποιουμένων τῶν τιμῶν $z_i$, i=1,2,...,N εἶναι

$$R^2 = 1- \frac{\lambda^2\sigma^2}{\lambda^2\sigma_y{}^2} = 1- \frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2}$$

ἤτοι ἴσος πρός τόν δείκτην $R^2$ ὑπολογιζομένου τῇ βοηθείᾳ τῶν τιμῶν $y_i$, i=1,2,...,N καί κατά συνέπειαν ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν χρησιμοποιουμένων κατά περίπτωσιν μονάδων μετρήσεως.

Ἐνταῦθα δέον νά διευκρινισθῇ τό ἑξῆς. Ἐάν πέραν τῆς ἀλλαγῆς τῶν μονάδων μετρήσεως μεταφερθῇ καί ἡ ἀ ρ χ ή τῶν μετρήσεων ἡ τιμή τοῦ δείκτου $R^2$ παραμένει ἀμετάβλητος ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι "ἐάν ἡ καμπύλη $y=f(x,\alpha^*,\beta^*)$ εἶναι μέλος τῆς οἰκογενείας

$y=f(x,\alpha,\beta)$ καί ἡ καμπύλη $\gamma+\delta f(x,\alpha^*,\beta^*)$ - ὅπου $\gamma,\delta$ αὐθαίρετοι σταθεραί - εἶναι ἐπίσης μέλος αὐτῆς". Ἡ ἐν λόγῳ συνθήκη δ έ ν ἰσχύει π.χ. διά τήν οἰκογένειαν καμπύλων $y=\beta x$ καί ὡς ἐκ τούτου ἀλλαγή τῆς ἀ ρ χ ῆ ς τῶν μετρήσεων εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν συνεπάγεται καί ἀλλαγή τῆς τιμῆς τοῦ $R^2$.

Οὕτω π.χ. χρησιμοποιοῦντες ἀντί τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς Y αἱ ὁποῖαι παρατίθενται εἰς τόν πίνακα (5.1) τάς τιμάς $z_i=y_i+1$ λαμβάνομεν τά ἑξῆς:

$$\sum_i x_i^2=30, \quad \sum_i x_i z_i=85, \quad \hat{\beta}=\frac{\Sigma x_i z_i}{\Sigma x_i^2}=\frac{85}{30}=2{,}833 \text{ καί μ.τ.σ.}$$

περί τήν εὐθεῖαν $\hat{z}_i=2{,}833x_i$ τήν ποσότητα

$$\frac{1}{4}\left[(10-2{,}833)^2+(9-5{,}666)^2+(11-8{,}499)^2+(6-11{,}332)^2\right]\simeq 24{,}5$$

Ἐξ ἄλλου ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν $z_i=y_i+1$ εἶναι ὡς γνωστόν ἡ αὐτή μέ τήν ὑπολογισθεῖσαν διακύμανσιν τῶν τιμῶν $y_i$ ἤτοι 3,5. Οὕτω ἡ τιμή τοῦ δείκτου $R^2$ γίνεται ἐν προκειμένῳ

$$R^2=1-\frac{24{,}5}{3{,}5}=-\frac{21}{3{,}5}=-6$$

διάφορος τῆς ὑπολογισθείσης προηγουμένης τιμῆς -4,893.

β) Τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν α δεδομένα

Ὑποτίθεται ἐνταῦθα ὅτι τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως - ταξινομημένα εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ἀνάλογον τοῦ (4.1) - συνίστανται ἐκ τῶν $k\lambda$ ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i,y_j)$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐμφανίζεται μέ ἀντίστοιχον συχνότητα $f_{ij}$.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως ἐλαχίστου μ.τ.σ. (5.21) προσδιορίζεται, ὡς εἴδομεν, δι'ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.20), τό δέ μ.τ.σ. περί αὐτήν ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (5.22).

Ὁ βαθμός προσαρμογῆς ἤ ἄλλως ἡ προσέγγισις μέ τήν ὁποίαν ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη παλινδρομήσεως συνοψίζει τά ἐμπειρικά δεδομένα καί γενικώτερον ἡ ἀκρίβεια τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων, μετρῶνται καί εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν διά τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$, συνηθέστερον ὅμως - λόγῳ τῶν γνωστῶν μειονεκτημάτων τοῦ μ.τ.σ. - διά τοῦ δείκτου προσαρμογῆς $R^2$ ὁ ὁποῖος ὁρίζεται διά τῆς ἀντιστοίχου πρός τήν (5.26) σχέσεως

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^{\,2}} \tag{5.31}$$

ὅπου ὅμως ἡ (συνολική) διακύμανσις $\sigma_y^{\,2}$ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς Y ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ σταθμικοῦ τύπου

$$\sigma_y^{\,2} = \frac{1}{f_{..}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}(y_j - \mu_y)^2 \tag{5.32}$$

ὁ δέ μέσος ὅρος $\mu_y$ ἐκ τοῦ τύπου

$$\mu_y = \frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij} y_j \tag{5.33}$$

Ὁ ἐν λόγῳ δείκτης πέραν τῆς βασικῆς σημασίας ἰδιοτήτων νά εἶναι ἀριθμός καθαρός καί ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως - ἀποδεικνυομένων καί ἐν προκειμένῳ ὅπως ἀκριβῶς εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων - πληροῖ ἐπίσης τήν ἀντίστοιχον πρός τήν (5.28) - ἀλλά γενικωτέρα ἐκείνης - ἀνισότητα

$$0 \leq R^2 \leq \eta^2 \leq 1 \tag{5.34}$$

ὅπου ἡ ποσότης $\eta^2$ συμβολίζει τόν καλούμενον στοιχειώδη δείκτην προσδιορισμοῦ.

Ἡ ἀνισότης αὕτη ἐπιτρέπουσα τήν συγκριτικήν - ἐν σχέσει πρός τόν στοιχειώδη δείκτην προσδιορισμοῦ $\eta^2$ - ἀξιολόγησιν τοῦ κατά περίπτωσιν ὑπολογιζομένου δείκτου $R^2$ ὡς καί τήν ἄμεσον καί ἀντικειμενικήν ἑρμηνείαν τῶν τιμῶν αὐτοῦ, εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμος καί εὐρυτάτης ἐφαρμογῆς.

Ἡ ἔννοια καί ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ στοιχειώδους δείκτου προσδιορισμοῦ $\eta^2$ ὡς καί ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος (5.34), θά μᾶς ἀπασχολήσουν - ἀφοῦ προηγουμένως εἰσάγομεν τόν ἀπαραίτητον συμβολισμόν - ἀμέσως κατωτέρω.

Αἱ δεσμευμέναι κατανομαί τῶν τιμῶν τῆς Y, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ τῆς ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς X, ἔχουν ὡς γνωστόν δεσμευμένην μέσην τιμήν καί δεσμευμένην διακύμανσιν ὁριζομένας ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$E(Y/x_i) = \frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij} y_j, \quad i=1,2,\ldots,k \qquad (5.35)$$

$$V(Y/x_i) = \frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij} \left[y_j - E(Y/x_i)\right]^2, \quad i=1,2,\ldots,k \qquad (5.36)$$

Οἱ δεσμευμένοι μέσοι ὅροι $E(Y/x_i)$, $i=1,2,\ldots,k$ διαφέρουν ἐν γένει ἀπό τῆς μιᾶς εἰς τήν ἄλλην τιμήν τῆς X. Ἡ μέση τιμή καί ἡ διακύμανσις αὐτῶν συμβολιζόμεναι ἀντιστοίχως $E\left[E(Y/x)\right]$ καί $V\left[E(Y/x)\right]$ ὁρίζονται προφανῶς ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων

$$E\left[E(Y/x)\right] = \frac{1}{f_{..}} \sum_i f_{i.} E(Y/x_i) \qquad (5.37)$$

$$V\left[E(Y/x)\right] = \frac{1}{f_{..}} \sum_i f_{i.} \left[E(Y/x_i) - \mu_y\right]^2 \qquad (5.38)$$

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι "ἡ μέση τιμή τῶν δεσμευμένων μέσων $E(Y/x_i)$ $i=1,2,\ldots,k$ ἰσοῦται πάντοτε πρός τόν γενικόν μέσον ὅρον τῶν τιμῶν τῆς Υ", ἤτοι

$$E\left[E(Y/x)\right] \equiv \mu_y \tag{5.39}$$

διά τόν λόγον δέ αὐτόν εἰς τήν σχέσιν (5.38) ἐχρησιμοποιήθη ὁ μέσος $\mu_y$ ἀντί τοῦ συμβόλου $E\left[E(Y/x)\right]$. Πράγματι, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τάς σχέσεις (5.33), (5.35) καί (5.37) ἔχομεν ὅτι

$$E\left[E(Y/x)\right] = \frac{1}{f_{..}} \sum_i f_{i.}\, E(Y/x_i) = \frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij} y_j = \mu_y$$

'Εξ ἄλλου, ἡ μέση τιμή τῶν δεσμευμένων διακυμάνσεων $V(Y/x_i)$, $i=1,2,\ldots,k$ - μέτρων τῆς διασπορᾶς τῶν ἀντιστοίχων δεσμευμένων κατανομῶν περί τάς μέσας τιμάς των $E(Y/x_i)$ - συμβολιζομένη $E\left[V(Y/x)\right]$ καί ὁριζομένη ἐκ τῆς σχέσεως

$$E\left[V(Y/x)\right] = \frac{1}{f_{..}} \sum_i f_{i.}\; V(Y/x_i) = \frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij} \left[y_j - E(Y/x_i)\right]^2 \tag{5.40}$$

ἀποτελεῖ προφανῶς τό μ.τ.σ. περί τήν στοιχειώδη καμπύλη παλινδρομήσεως (5.4) - τήν καμπύλην δηλαδή $E(Y/x)=\varphi(x)$ ἡ ὁποία διέρχεται δι'ὅλων τῶν σημείων $\left[x_i,\ E(Y/x_i)\right]$ $i=1,2,\ldots,k$ - καί ὡς ἐκ τούτου μετρᾶ ἐν γένει τήν διασποράν ἤ ἄλλως τήν κατά μέσον ὅρον ἐγγύτητα τῶν δεδομένων - σημείων τοῦ ἀντιστοίχου στικτοῦ διαγράμματος - πρός τήν ἐν λόγῳ καμπύλην.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν καί τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ (5.31), προκύπτει ὅτι ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ περί τήν σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η καμπύλην παλινδρομήσεως - καλούμενος ὡς ἐκ τούτου σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς δ ε ί κ τ η ς π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ - δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\eta^2 = 1 - \frac{E\left[V(Y/x)\right]}{\sigma_y^2} \tag{5.41}$$

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ δείκτης $\eta^2$ γίνεται ἴσος πρός τήν μονάδα μ ό ν ο ν εἰς τήν ὁ ρ ι α κ ή ν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ἑκάστη τῶν δεσμευμένων κατανομῶν τῆς Υ συρρικνοῦται εἰς ἕν σημεῖον - συγκεκριμένως εἰς τήν μέσην τιμήν αὐτῆς $E(Y/x_i)$ $i=1,$

2,...,k - ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ἡ σχέσις μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y δέν εἶναι στοχαστική ἀλλά συναρτησιακή τοιαύτη.

Πράγματι, εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν ἑκάστη τῶν δεσμευμένων διακυμάνσεων $V(Y/x_i)$ $i=1,2,\ldots,k$ μηδενίζεται καί κατά συνέπειαν ἡ μέση τιμή αὐτῶν $E\left[V(Y/x)\right]$ λαμβάνει ἐπίσης τήν τιμήν μηδέν καί ἐκ τοῦ τύπου (5.41) προκύπτει $\eta^2=1$. Τό ἀντίστροφον εἶναι ἐπίσης προφανές. Οὕτω, ἐάν $\eta^2=1$ προκύπτει ὅτι $E\left[V(Y/x)\right]=0$, δεδομένου δέ ὅτι αἱ δεσμευμέναι διακυμάνσεις $V(Y/x_i)$ οὐδέποτε λαμβάνουν ἀρνητικάς τιμάς, θά ἔχωμεν $V(Y/x_i)\equiv 0$ διά $i=1,2,\ldots,k$. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει μόνον ἐάν ἑκάστη τῶν ἀντιστοίχων δεσμευμένων κατανομῶν ἐκφυλισθεῖ εἰς ἕν καί μόνον σημεῖον.

Προκειμένου νά σχολιάσωμεν περαιτέρω τήν σημασίαν τῶν διαφόρων τιμῶν τῶν δεικτῶν $R^2$ καί $\eta^2$ θά ἀποδείξωμεν προηγουμένως τήν ἀνισότητα (5.34). Πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀπαιτεῖται ἡ ἀπόδειξις τῆς κάτωθι σχέσεως

$$\sigma_y^2=E\left[V(Y/x)\right]+V\left[E(Y/x)\right] \qquad (5.42)$$

γνωστῆς ὡς ἰσότητος τῆς ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως.

Ἡ σχέσις (5.32) λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν (5.38) καί (5.40) γράφεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned}
f_{..}\sigma_y^2 &= \sum_i\sum_j f_{ij}\left[y_j-E(Y/x_i)+E(Y/x_i)-\mu_y\right]^2= \\
&= \sum_i\sum_j f_{ij}\left[y_j-E(Y/x_i)\right]^2+\sum_i\sum_j f_{ij}\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]^2+ \\
&+ 2\sum_i\sum_j f_{ij}\left[y_j-E(Y/x_i)\right]\times\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]= \\
&= \sum_i f_{i.}\,V(Y/x_i)+\sum_i f_{i.}\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]^2+ \\
&+ 2\sum_i\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]\sum_j f_{ij}\left[y_j-E(Y/x_i)\right]= \\
&= f_{..}E\left[V(Y/x)\right]+f_{..}V\left[E(Y/x)\right]+2\sum_i\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]\times 0
\end{aligned}$$

ἐξ αὐτῆς δέ προκύπτει ἀμέσως ἡ σχέσις (5.42). Ἐκ τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως συνάγεται τό ἑξῆς συμπέρασμα: "Ἡ συνολική διακύμανσις $\sigma_y^2$ τῶν τιμῶν τῆς Y ἰσοῦται πάντοτε πρός τό ἄθροισμα τῆς μ έ σ η ς τ ι μ ῆ ς τῶν ἐπί μέρους δεσμευμένων διακυμάνσεων $V(Y/x_i)$, i=1,2, ...,k καί τῆς δ ι α κ υ μ ά ν σ ε ω ς τῶν ἀντιστοίχων ἐπί μέρους δεσμευμένων μέσων ὅρων $E(Y/x_i)$, i= 1,2,...,k". Ἐν ἄλλοις λόγοις διά τῆς σχέσεως (5.42) ἡ συνολική διακύμανσις $\sigma_y^2$ τῶν τιμῶν τῆς Y ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας. Πρῶτον, τήν διακύμανσιν $V[E(Y/x)]$ τῶν μέσων ὅρων $E(Y/x_i)$, i=1,2,...,k ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν μεταβλητῶν στοχαστικήν ἐξάρτησιν ἐκφραζομένην ἐν προκειμένῳ ὑπό τῆς στοιχειώδους γραμμῆς παλινδρομήσεως τῆς Y ὡς πρός τήν ἑρμηνευτικήν μεταβλητήν X καί δεύτερον, τό μ.τ.σ. $E[V(Y/x)]$ περί τήν ἐν λόγῳ στοιχειώδη γραμμήν παλινδρομήσεως τό ὁποῖον ἀντανακλᾶ τήν κύμανσιν τῶν τιμῶν τῆς Y ἡ ὁποία δέν ὀφείλεται εἰς τήν ἐπίδρασιν τῆς μεταβλητῆς X, ἀλλ' εἰς ἑτέρας - μή συνεξεταζομένας ἐν προκειμένῳ - μεταβλητάς ἤ ἄλλας ἀγνώστους αἰτίας. Διά τούς λόγους αὐτούς ἡ πρώτη τῶν ἐν λόγῳ συνιστωσῶν ἀναφέρεται συνήθως ὡς ἐπεξ η γ ο υ μ έ ν η ἤ ἄλλως ὀ φ ε ι λ ο μ έ ν η εἰς τήν παλινδρόμησιν διακύμανσις, ἐνῶ ἡ δευτέρα συνιστῶσα εἶναι γνωστή ὡς ὑ π ό λ ο ι π ο ν ἤ σ φ ά λ μ α ἤ μ ή ἐ π ε ξ η γ ο υ μ έ ν η - ὑπό τῆς παλινδρομήσεως - διακύμανσις.

Ἐξ ἄλλου ὁ στοιχειώδης δείκτης προσδιορισμοῦ (5.41) λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σχέσεως (5.42), δίδεται ὑπό τοῦ πηλίκου

$$\eta^2 = \frac{V[E(Y/x)]}{\sigma_y^2}$$

ἡ δέ σχέσις (5.42) δύναται νά γραφῆ καί ὑπό τήν μορφήν

$$\sigma_y^2 = \sigma_y^2\eta^2 + \sigma_y^2(1-\eta^2) \tag{5.43}$$

Οὕτω, ὁ μέν δείκτης $\eta^2$ προσδιορίζει ποῖον μέρος (ποσοστόν) τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^2$ προκύπτει (ἐπεξηγεῖται) ἐκ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν σχέσεως, ὀφείλεται δηλαδή εἰς τήν παλινδρόμησιν, ἡ δέ διαφορά $1-\eta^2$ δηλοῖ τό ὑπόλοιπον, τό ποσοστόν δηλαδή τῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^2$ τό ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τήν ἐπίδρασιν ἄλλων αἰτίων καί μεταβλητῶν καί ὄχι εἰς τήν ἑρμηνευτικήν μεταβλητήν, τό καλούμενον σ φ ά λ μ α. Εἰς τοῦτο ἀκριβῶς ὀφείλεται καί ἡ ὀνομασία τοῦ δείκτου $\eta^2$ ὡς δ ε ί κ τ ο υ π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ.

'Εκ τῆς ἀποδειχθείσης σχέσεως (5.42) προκύπτει τώρα τό ἑξῆς συμπέρασμα: "Τό μ.τ.σ. περί τήν στοιχειώδη γραμμήν παλινδρομήσεως εἶναι πάντοτε μικρότερον ἤ ἴσον τῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^2$, ἤτοι

$$E\left[V(Y/x)\right] \leqslant \sigma_y^{\,2} \tag{5.44}$$

γίνεται δέ ἴσον πρός αὐτήν μόνον εἰς τήν περίπτωσιν στοχαστικῶς ἀσυσχετίστων μεταβλητῶν". Πράγματι ἐάν αἱ μεταβληταί εἶναι στοχαστικῶς ἀσυσχέτιστοι, ἐάν δηλαδή $E(Y/x)\equiv c$, τό μ.τ.σ. περί τήν παράλληλον πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεῖαν $y=c$ εἶναι

$$\frac{1}{f_{..}}\sum_i \sum_j f_{ij}(y_j-c)^2$$

καί ἐλαχιστοποιεῖται ὡς γνωστόν ἐάν $\hat{c}=\frac{1}{f_{..}}\sum\sum_{ij} f_{ij}y_j=\mu_y$

Οὕτω, εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ἐπιλεγομένη γραμμή παλινδρομήσεως εἶναι $y=\mu_y$ τό δέ μ.τ.σ. περί αὐτήν εἶναι

$$\frac{1}{f_{..}}\sum_i \sum_j f_{ij}(y_j-\mu_y)^2=\sigma_y^{\,2}$$

'Αντιστρόφως, ἐάν $E\left[V(Y/x)\right]=\sigma_y^{\,2}$ ἐκ τῆς (5.42) ἔχομεν ὅτι $V\left[E(Y/x)\right]=0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $E(Y/x)\equiv c$ (σταθερά) ἤτοι ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι στοχαστικῶς ἀσυσχέτιστοι.

"Αμεσος συνέπεια τῶν ἀνωτέρω εἶναι ἡ διπλῆ ἀνισότης

$$0 \leqslant \eta^2 \leqslant 1$$

Πράγματι ἐκ τῆς (5.44) ἔχομεν

$$\frac{E\left[V(Y/x)\right]}{\sigma_y^2} \leqslant 1 \quad \text{ἤ} \quad 1-\frac{E\left[V(Y/x)\right]}{\sigma_y^2} \geqslant 0 \qquad \text{ἤτοι} \quad \eta^2 \geqslant 0$$

δεδομένου δέ ὅτι ἀμφότεραι αἱ ποσότητες $E\left[V(Y/x)\right]$ καί $\sigma_y^2$ εἶναι μή ἀρνητικαί, ἔχομεν

$$-\frac{E\left[V(Y/x)\right]}{\sigma_y^2} \leqslant 0 \quad \text{ἤ} \quad 1-\frac{E\left[V(Y/x)\right]}{\sigma_y^2} \leqslant 1 \ \text{ἤτοι} \ \eta^2 \leqslant 1$$

Ἐξ ἄλλου ἡ διπλῆ ἀνισότης $0 \leqslant R^2 \leqslant 1$ ἀληθεύει καί ἐν προκειμένῳ ἀποδεικνύεται δέ ὅπως ἀκριβῶς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων. Οὕτω, πρός συμπλήρωσιν τῆς ἀποδείξεως τῆς σχέσεως (5.34) ἀρκεῖ νά ἀποδειχθῆ ὅτι $R^2 \leqslant \eta^2$ ἤ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (5.31) καί (5.41) ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν σχέσιν

$$E\left[V(Y/x)\right] \leqslant \sigma^2 \tag{5.45}$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἀκολούθως: Τό ἄθροισμα $\Sigma f_{ij}(y_j-c)^2$ ἐλαχιστοποιεῖται ὡς γνωστόν ἐάν ἡ σταθερά c λάβη τήν τιμήν

$$\hat{c} = \frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij} y_j = E(Y/x_i)$$

Κατά συνέπειαν, ἑκάστη τῶν δεσμευμένων διακυμάνσεων

$$V(Y/x_i) = \frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij}\left[y_j - E(Y/x_i)\right]^2$$

εἶναι ὁπωσδήποτε μικροτέρα ἤ τό πολύ ἴση τῆς ἀντιστοίχου ποσότητος

$$\frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij} \left[y_j - f(x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})\right]^2$$

καί ὡς ἐκ τούτου εἰς τήν ἰδίαν σχέσιν εὑρίσκονται μεταξύ των καί οἱ ἀντίστοιχοι μέσοι ὅροι, ἔχομεν δηλαδή $E\left[V(Y/x)\right] \leqslant \sigma^2$. Τοῦτο συμπληρώνει τήν ἀπόδειξιν τῆς ἀνισότητος (5.34).

'Εκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ τιμή τοῦ δείκτου $R^2$ ἐξαρτᾶται τόσον ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - διασπορᾶς καί μορφολογίας τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους - ὅσον καί ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ τοῦ σχήματος δηλαδή τῶν καμπύλων-μελῶν τῆς χρησιμοποιουμένης οἰκογενείας. 'Η σύγκρισις ἄλλωστε διαφόρων τιμῶν τοῦ $R^2$ ὑπολογιζομένων *ἐκ τῶν αὐτῶν δεδομένων* ἀλλ' ἐν σχέσει πρός *διαφόρους μορφάς* τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$, ἀποτελεῖ - ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω εἰς τήν παράγραφον (5.8) - τήν βάσιν καί τό ἀντικειμενικόν *κριτήριον* ἐπιλογῆς τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν οἰκογενείας καμπύλων.

Οὕτω, συναφῶς πρός τάς ἑκάστοτε τιμάς τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου δέον νά λεχθοῦν τά ἀκόλουθα: Μεγάλαι ἐν γένει τιμαί τοῦ $R^2$ - τιμαί πλησίον τῆς μονάδος - ὑποδηλοῦν ἀφ' ἑνός μέν τήν ὕπαρξιν ἐντόνου ἐξαρτήσεως τῆς μεταβλητῆς Y ἐκ τῆς ἑρμηνευτικῆς τοιαύτης X, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὅτι ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς X εἰς μεγάλον βαθμόν, ἀφ' ἑτέρου δέ ὅτι ἡ ἐπιλεγεῖσα καμπύλη παλινδρομήσεως συνοψίζει μέ ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν (προσαρμόζεται καλῶς πρός) τά ἐμπειρικά δεδομένα, ἐπιτυχῆ δηλαδή ἐκλογή τῆς χρησιμοποιηθείσης οἰκογενείας καμπύλων $y=f(x,\alpha,\beta)$.

'Αντιθέτως μικραί τιμαί τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου - τιμαί πλησίον τοῦ μηδενός - *δέν σημαίνουν ἀπαραιτήτως* ὅτι αἱ τιμαί τῆς Y διαμορφοῦνται ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῆς X ἤ ἄλλως ὅτι αἱ συνεξεταζόμεναι μεταβληταί εἶναι μή συσχετισμέναι, διότι τοῦτο πιθανόν νά ὀφείλεται εἰς τήν κακήν ἐκλογήν τῆς οἰκογενείας $y=f(x,\alpha,\beta)$. Διά τόν λόγον αὐτόν ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα προσοχή διά τήν ἐκλογήν τῆς καταλλήλου ἑκάστοτε οἰκογενείας καμπύλων, ὁπωσδήποτε δέ ὑπολογισμός τοῦ δείκτου $\eta^2$ ἐκ τοῦ ὁποίου καί μόνον προκύπτει εἰς ποῖον βαθμόν ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς X (ἴδε σχετικόν παράδειγμα παραγρ. 5.5).

Εἰδικώτερον δέον νά τονισθοῦν τά ἑξῆς: 'Εάν αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι ἀσυσχέτιστοι, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ἡ ἐπιλεγομένη διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων μεταξύ τῶν καμπύλων-μελῶν μιᾶς α ἱ α σ δ ή π ο τ ε οἰκογενείας γραμμή παλινδρομήσεως εἶναι ἡ παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεῖα $y=\mu_y$, ὁ δείκτης $R^2$ λαμβάνει ἀπαραιτήτως τήν τιμήν μηδέν. 'Αντιστρόφως ἐάν εὑρεθῆ $R^2=0$ δέν εἶναι ἀπαραίτητον αἱ μεταβληταί X καί Y νά εἶναι ἀσυσχέτιστοι, διότι τοῦτο πιθανόν νά ὀφείλεται εἰς ἀκατάλληλον ἐκλογήν τῆς $y=f(x,\alpha,\beta)$. Τά πράγματα διαφέρουν ὅμως εἰς τό ἄλλον ἄκρον τοῦ διαστήματος. Συγκεκριμένως ἡ ἰσότης $R^2=1$ σημαίνει ὅτι ἡ μεταβλητή Y ἐξαρτᾶται συναρτησιακῶς ἐκ τῆς X πρός τούτοις δέ ὅτι ἡ ἐπιλεγεῖσα καμπύλη παλινδρομήσεως διέρχεται δι'ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους.

'Επραγματεύθημεν μέχρι τοῦδε τήν ἔννοιαν καί τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ μ.τ.σ., τήν διαδικασίαν ἐλαχιστοποιήσεως αὐτοῦ διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί τέλος τάς ἰδιότητας, τήν πρακτικήν σημασίαν καί τάς ἐφαρμογάς τοῦ δείκτου προσαρμογῆς $R^2$. Πρός τούτοις ἐχρησιμοποιήσαμεν τάς ἐν λόγῳ ἐννοίας συναφῶς πρός τήν γ ε ν ι κ ή ν καί ἀ ο ρ ί σ τ ο υ μορφῆς ἐξίσωσιν $y=f(x,\alpha,\beta)$, συμβολίζουσα ὡς εἴδομεν μίαν ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε - διπαραμετρικήν - οἰκογένειαν καμπύλων, προκειμένου π ρ ῶ τ ο ν, νά προσδιορίσωμεν - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - τήν ἀρίστην - καταλληλοτέραν κατά περίπτωσιν - μεταξύ τῶν μελῶν τῆς ἐν λόγῳ οἰκογενείας γραμμήν παλινδρομήσεως καί δ ε ύ τ ε ρ ο ν νά ἔχωμεν ἕν μέτρον τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης πρός τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως ἤ γενικώτερον μίαν ἀντικειμενικήν ἀξιολόγησιν τῆς προσεγγίσεως ἤ ἄλλως τῆς ἀκριβείας τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων.

Εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους ἐφαρμόζομεν τάς ἀνωτέρω ἐννοίας καί ἐξειδικεύομεν τά ἀποτελέσματα τῆς σχετικῆς διαδικασίας εἰς ὡρισμένας - συγκεκριμένης πλέον μορφῆς - οἰκογενείας καμπύλων αἱ ὁποῖαι λόγῳ τῆς ἁπλῆς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μορφῆς των καί τῆς εὐκόλου κατανοήσεως τῶν δι'αὐτῶν ἐξαγομένων συμπερασμάτων χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς. Οὕτω, εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον θά μᾶς ἀπασχολήσῃ ὁ προσδιορισμός καί ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν εὐθ ε ί α ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς ἔν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ ἐπιλογή καί ἀξιολόγησις τῆς ἀρίστης γραμμῆς μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας $y=\alpha+\beta x$. Ἐξ ἄλλου εἰς τήν παράγραφον (5.6) θά πραγματευθῶμεν τό αὐτό πρόβλημα συναφῶς πρός τάς οἰκογενείας καμπύλων $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$, καμπύλων δηλαδή πολυωνυμικῆς μορφῆς δευτέρου, τρίτου ἤ καί ἀνωτέρου βαθμοῦ. Τέλος εἰς τήν παράγραφον (5.7) θά μᾶς ἀπασχολήσουν πολυπλοκώτεραι κάπως καμπύλαι αἱ ὁποῖαι ὅμως ἀνάγονται εἰς γραμμικάς μορφάς καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἐξ ἴσου εὔχρηστοι μέ τάς προηγουμένας.

Τά ἀνωτέρω ὅμως δέν δίδουν ἀπάντησιν εἰς τό ἐρώτημα ποία μορφή ἐξισώσεως, ποία δηλαδή ἐκ τῶν ἐν λόγῳ οἰκογενειῶν καμπύλων δέον νά χρησιμοποιηθῆ εἰς ἕν συγκεκριμένον πρόβλημα, ὥστε νά ἐπιτευχθῆ ἡ καλλιτέρα δυνατή καμπύλη παλινδρομήσεως. Ἀπάντησις εἰς τό ἐρώτημα τοῦτο δίδεται εἰς τήν παράγραφον (5.8).

## 5.5 Εὐθύγραμμος Παλινδρόμησις

Ἡ ἁπλότης, ἡ εὐκολία κατανοήσεως τῆς σημασίας αὐτῆς καί ἡ δυνατότης ἀμέσου ἑρμηνείας τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων καθιστοῦν τήν γραμμικήν ἐξίσωσιν

$$y = \alpha+\beta x \qquad (5.46)$$

λίαν εὔχρηστον καί ὡς ἐκ τούτου μία ἐκ τῶν πλέον συνήθων καί εὐρύτατα χρησιμοποιουμένων γραμμῶν παλινδρομήσεως.

Ἡ ἐπιλογή μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας (5.46) καί ὁ προσδιορισμός - πάντοτε τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν ε ὐ θ ε ί α ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς γίνεται συνήθως διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Εἰς πλεῖστας ὅμως περιπτώσεις - ὅπου του-

λάχιστον ἡ ταχύτης καί ἡ εὐκολία προέχουν τῆς ἀν-
τικειμενικότητος καί τῆς ἀκριβείας - ἡ εὐθεία πα-
λινδρόμησις εἶναι δυνατόν νά προσδιορίζεται καί διά
καθαρῶς γραφικῶν μεθόδων.

Λόγῳ τῆς ἰδιαζούσης πρακτικῆς χρησιμότητός της
ἡ γραμμική παλινδρόμησις θά μᾶς ἀπασχολήση λεπτο-
μερῶς τόσον προκειμένου περί ἁπλῶν δεδομένων ὅσον
καί εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων τοιούτων.

α) Ἁ π λ ᾶ δεδομένα

Τά ἐμπειρικά δεδομένα συνίστανται ἐν προκει-
μένῳ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν ἤ σημείων $(x_i, y_i)$,
$i=1,2,\ldots,N$.

Τό μ.τ.σ. περί ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε τῶν εὐθειῶν
τῆς οἰκογενείας $y=\alpha+\beta x$, ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως (5.
12), εἶναι

$$\frac{1}{N}\sum_i \hat{\varepsilon}_i^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i)^2 \tag{5.47}$$

καί συνεπῶς τό σύστημα τῶν κ α ν ο ν ι κ ῶ ν ἐ ξ ι-
σ ώ σ ε ω ν (5.13) λαμβάνει εἰς τήν προκειμένην πε-
ρίπτωσιν τήν μορφήν

$$\begin{aligned}\sum_i y_i &= \alpha N+\beta\sum_i x_i\\ \sum_i x_i y_i &= \alpha\sum_i x_i+\beta\sum_i x_i^2\end{aligned} \tag{5.48}$$

Πράγματι, ἐάν ἐξισώσωμεν πρός μηδέν τάς μερι-
κάς παραγώγους ὡς πρός α καί β τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς (5.
47) λαμβάνομεν τό σύστημα

$$\begin{aligned}2\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i)(-1) &= 0\\ 2\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i)(-x_i) &= 0\end{aligned}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει εὐκόλως - μετά τάς ἁπλοποι-
ήσεις - τό σύστημα (5.48).

'Εάν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ συμβολίζουν, ὅπως καί εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν, τήν λύσιν τοῦ συστήματος (5.48) ὡς πρός τάς ἀγνώστους - ὑπό προσδιορισμόν - παραμέτρους α,β ὡς ἄμεσος συνέπεια τῶν λεχθέντων προηγουμένως συνάγονται τά ἑξῆς:

'Η ζητουμένη εὐθεία παλινδρομήσεως ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x \tag{5.49}$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί αὐτήν δίδεται, κατ'ἀναλογίαν τῆς (5.15), ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_i (y_i-\hat{y}_i)^2=\frac{1}{N}\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)^2 \tag{5.50}$$

καί τέλος, ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ ἤ προσαρμογῆς, συμβολιζόμενος εἰς τήν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως διά τοῦ $\rho^2$, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\rho^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \tag{5.51}$$

ὅπου $\sigma^2$ τό ἐκ τῆς (5.50) προκύπτον μ.τ.σ. καί $\sigma_y^2$ ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τῆς μεταβλητῆς Y.

'Υπολογισμός τῶν συντελεστῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$

'Ο γωνιακός συντελεστής $\hat{\beta}$ τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως $y=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$, καλούμενος ἐν προκειμένῳ συντελεστής παλινδρομήσεως, ὁρίζεται διά τοῦ τύπου

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_i(x_i-\mu_x)^2} \tag{5.52}$$

εἰς τάς πρακτικάς ὅμως ἐφαρμογάς ὁ ὑπολογισμός αὐτοῦ γίνεται συνήθως - χάριν ἁπλουστεύσεως τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων - διά τοῦ ἰσοδυνάμου πρός τόν (5.52) τύπον

$$\hat{\beta}=\frac{N\Sigma x_i y_i-\Sigma x_i\Sigma y_i}{N\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2} \tag{5.53}$$

προκύπτοντας ἀπ'εὐθείας ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (5.48) ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζοντες τήν πρώτην τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.48) ἐπί $\Sigma x_i$ καί τήν δευτέραν ἐπί N, ἐν συνεχείᾳ δέ ἀφαιροῦντες - πρός ἀπαλειφήν τοῦ α - τήν πρώτην ἐκ τῆς δευτέρας, λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν

$$N\Sigma x_i y_i-\Sigma x_i\Sigma y_i=\beta\left[N\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2\right]$$

Δι'ἐπιλύσεως τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως ὡς πρός τήν ἄγνωστον παράμετρον β εὑρίσκομεν ὡς τιμήν αὐτῆς $\hat{\beta}$ τήν ὁριζομένην ἐκ τοῦ τύπου (5.53). Ἐξ ἄλλου ἡ ἰσοδυναμία τῶν τύπων (5.52) καί (5.53) ἀποδεικνύεται ὡς ἀκολούθως: Λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι οἱ μέσοι ὅροι τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν X καί Y ὁρίζονται ἀντιστοίχως ὑπό τῶν σχέσεων

$$\mu_x=\frac{1}{N}\sum_i x_i \quad \text{καί} \quad \mu_y=\frac{1}{N}\sum_i y_i$$

τά ἀθροίσματα

$$\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y) \quad \text{καί} \quad \sum_i(x_i-\mu_x)^2$$

γράφονται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς

$$\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)=\sum_i x_i y_i-\mu_x\sum_i y_i-\mu_y\sum_i x_i+N\mu_x\mu_y=$$

$$=\sum_i x_i y_i-N\mu_x\mu_y-N\mu_x\mu_y+N\mu_x\mu_y=$$

$$=\sum_i x_i y_i-N\mu_x\mu_y \qquad \text{καί}$$

$$\sum_i(x_i-\mu_x)^2=\sum_i x_i^2-2\mu\sum_i x_i+N\mu_x^2=\sum_i x_i^2-2N\mu_x^2+N\mu_x^2=$$

$$=\sum_i x_i^2-N\mu_x^2$$

Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$\frac{\sum_i (x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_i (x_i-\mu_x)^2} = \frac{\sum_i x_i y_i - N\mu_x\mu_y}{\sum_i x_i^2 - N\mu_x^2} =$$

$$= \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{N}}{\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{N}} = \frac{N\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} = \hat{\beta}$$

Ὑπολογισθείσης τῆς τιμῆς $\hat{\beta}$ τῆς παραμέτρου $\beta$, ἡ ἀντίστοιχος τιμή $\hat{\alpha}$ τῆς παραμέτρου $\alpha$ προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.41) ὡς ἑξῆς: Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως διά N καί ἀντικαθιστῶντες τήν παράμετρον $\beta$ διά τῆς τιμῆς της $\hat{\beta}$ λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν $\mu_y=\alpha+\hat{\beta}\mu_x$. Δι' ἐπιλύσεως τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ὡς πρός $\alpha$ εὑρίσκομεν ὡς τιμήν αὐτῆς

$$\hat{\alpha} = \mu_y-\hat{\beta}\mu_x \qquad (5.54)$$

Ὁ συντελεστής $\hat{\alpha}$, ὁ ὁποῖος παριστᾶ προφανῶς τήν ἀναμενομένην νά πραγματοποιηθῆ - οἱονεί - τιμήν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y ἀντιστοίχως πρός τήν τιμήν μηδέν τῆς ἀνεξαρτήτου τοιαύτης, δέν παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον.

Ἀντιθέτως, ὁ συντελεστής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$, ὁ ὁποῖος παριστᾶ ὡς γνωστόν τήν μεταβολήν - αὔξησιν ἤ μείωσιν - τῆς μεταβλητῆς Y ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς X κατά μία μονάδα ἤ γενικώτερον τόν λόγον τῆς μεταβολῆς τῆς Y πρός οἱανδήποτε ἀντίστοιχον μεταβολήν τῆς X, καί κατά συνέπειαν ἀντανακλᾶ τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς X, εἶναι ἰδιαζούσης σημασίας καί ἀποτελεῖ εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν τό σημαντικώτερον τῶν εὑρημάτων.

### Ὑπολογισμός τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τοῦ δείκτου $\rho^2$

Δεδομένου ὅτι διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου (5.50) προαπαιτεῖται ὁ ὑπολογισμός - τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ - τῶν οἱονεί τιμῶν τῆς μεταβλητῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς παρατηρηθείσας τιμάς τῆς X, ἤτοι τῶν τιμῶν $\hat{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i$, $i=1,2,\ldots,N$, εἶναι σύνηθες εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ νά ὑπολογίζεται - χάριν ἁπλουστεύσεως τῶν πραγμάτων - ἐκ τοῦ τύπου

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\left[\sum_i y_i^{\,2}-\hat{\alpha}\sum_i y_i-\hat{\beta}\sum_i x_i y_i\right] \tag{5.55}$$

ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ (5.50) κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον: Ὁ ἀριθμητής τῆς (5.50) γράφεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)^2&=\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=\\&=\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)y_i-\hat{\alpha}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)-\hat{\beta}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)x_i\end{aligned}$$

δεδομένου δέ ὅτι

$$\hat{\alpha}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=\hat{\alpha}(\sum_i y_i-\hat{\alpha}N-\hat{\beta}\sum_i x_i)=\hat{\alpha}\times 0=0$$

λόγῳ τῆς πρώτης τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.48) καί

$$\hat{\beta}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)x_i=\hat{\beta}(\sum_i x_i y_i-\hat{\alpha}\sum_i x_i-\hat{\beta}\sum_i x_i^{\,2})=\hat{\beta}\times 0=0$$

λόγῳ τῆς δευτέρας τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων, ἔχομεν τελικῶς

$$\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)^2=\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)y_i=\sum_i y_i^{\,2}-\hat{\alpha}\sum_i y_i-\hat{\beta}\sum_i x_i y_i$$

ἀποδεικνυομένης οὕτω τῆς ἰσοδυναμίας τῶν ἐκφράσεων (5.50) καί (5.55).

Μετά τήν καθ'οἱονδήποτε τρόπον εὕρεσιν τοῦ $\sigma^2$, ὁ ὑπολογισμός τοῦ δείκτου $\rho^2$ εἶναι ἁπλούστατος, γίνεται δέ πάντοτε δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (5.51), εἰς τόν ὁποῖον ἡ διακύμανσις $\sigma_y^{\,2}$ ἀντικαθίσταται διά τῆς τιμῆς της, ὑπολογιζομένης ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων διά τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_i (y_i-\mu_y)^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{N}\right] \quad (5.56)$$

'Εξ ἄλλου, αἱ ἀποδειχθεῖσαι συναφῶς πρός τήν γενικήν ἐξίσωσιν $y=f(x,\alpha,\beta)$ - τῆς ὁποίας ἡ $y=\alpha+\beta x$ ἀποτελεῖ μερικήν περίπτωσιν - ἰδιότητες τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $R^2$, ἰσχύουν προφανῶς καί εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν. Οὕτω, ὁ γραμμικός δείκτης προσδιορισμοῦ $\rho^2$ εἶναι καθαρός ἀριθμός, ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως καί πληροῖ πάντοτε τήν διπλήν ἀνισότητα

$$0\leqslant\rho^2\leqslant 1 \quad (5.57)$$

Εἰδικώτερον, ἐάν ἅπαντα τά σημεῖα $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ εὑρίσκονται ἐπί εὐθείας γραμμῆς, θά εἶναι $\rho^2=1$. 'Ωσαύτως ἀληθεύει τό ἀντίστροφον. Πράγματι, εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν θά ἔχωμεν $y_i=\hat\alpha+\hat\beta x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ θά εἶναι ἴσον πρός μηδέν καί συνεπῶς $\rho^2=1$. 'Αντιστρόφως, ἐάν $\rho^2=1$ θά εἶναι $\sigma^2=0$ ἤ $\Sigma(y_i-\hat\alpha-\hat\beta x_i)^2=0$ ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι $y_i-\hat\alpha-\hat\beta x_i=0$, $i=1,2,\ldots,N$ ἤτοι ὅτι ἅπαντα τά σημεῖα $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ εὑρίσκονται ἐπί τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως $y=\hat\alpha+\hat\beta x$.

'Ομοίως, ἐάν ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως $\hat y=\hat\alpha+\hat\beta x$ εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x, ἤτοι ἐάν $\hat\beta=0$, θά εἶναι ἐπίσης $\rho^2=0$ καί ἀντιστρόφως. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἀποδεικνυομένης κατωτέρω σχέσεως (5.58), μεταξύ τοῦ δείκτου $\rho^2$ καί συντελεστοῦ παλινδρομήσεως $\hat\beta$.

## Σχέσις μεταξύ $\rho^2$ καί $\hat\beta$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον (5.50) τό $\hat\alpha$ διά τοῦ ἴσου του ἐκ τοῦ τύπου (5.54) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (5.52), ἔχομεν ὅτι

$$N\sigma^2=\sum_i(y_i-\hat\alpha-\hat\beta x_i)^2=\sum_i\left[(y_i-\mu_y)-\hat\beta(x_i-\mu_x)\right]^2=$$

$$=\sum_i(y_i-\mu_y)^2+\hat{\beta}^2\sum_i(x_i-\mu_x)^2-2\hat{\beta}\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)=$$
$$=\sum_i(y_i-\mu_y)^2+\hat{\beta}^2\sum_i(x_i-\mu_x)^2-2\hat{\beta}^2\sum_i(x_i-\mu_x)^2=$$
$$=\sum_i(y_i-\mu_y)^2-\hat{\beta}^2\sum_i(x_i-\mu_x)^2=N\sigma_y{}^2-\hat{\beta}^2N\sigma_x{}^2$$

καί τελικῶς τήν ἰσότητα

$$\sigma^2=\sigma_y{}^2-\hat{\beta}^2\sigma_x{}^2$$

'Εξ ἄλλου, ἐκ τοῦ τύπου (5.51) προκύπτει ἀμέσως ἡ ἰσότης $\sigma^2=\sigma_y{}^2-\rho^2\sigma_y{}^2$ ἡ ὁποία συνδυαζομένη μέ τήν ἀμέσως προηγουμένην, ὁδηγεῖ εἰς τήν ζητουμένην σχέσιν

$$\hat{\beta}^2=\rho^2\,\frac{\sigma_y{}^2}{\sigma_x{}^2} \tag{5.58}$$

## 'Ανάλυσις τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_y{}^2$

Θά ἀποδείξωμεν ἐν προκειμένῳ τήν ἀκόλουθον ἰσότητα

$$\sigma_y{}^2=V(\hat{y})+V(\hat{\varepsilon}) \tag{5.59}$$

ὅπου $V(\hat{y})=\frac{1}{N}\sum_i(\hat{y}_i-\mu_y)^2$, ἡ διακύμανσις τῶν οἱονεί τιμῶν τῆς Y ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν X καί Y γραμμικήν σχέσιν καί ἐ ξ η γ ε ῖ τ α ι ἐκ τῆς (κλίσεως) τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$,

καί $V(\hat{\varepsilon})=\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\hat{y}_i)^2$, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν εὐθείαν παλινδρομήσεως ἤ ἄλλως ἡ διακύμανσις τῶν σφαλμάτων

$\hat{\varepsilon}_i=y_i-\hat{y}_i$, $i=1,2,\ldots,N$

ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς ἑτέρους - μή συνεξεταζομένους ἐν προκειμένῳ - παράγοντας, μή ἐ ξ η γ ο υ μ έ ν η ἐκ τῆς παλινδρομήσεως.

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν θά ἀποδείξωμεν προηγουμένως ὅτι "τό ἄθροισμα τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν ἀποκλίσεων $\hat{\varepsilon}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ εἶναι μηδέν", ἤτοι

$$\sum_i \hat{\varepsilon}_i = 0 \qquad (5.60)$$

Πράγματι $\Sigma\hat{\varepsilon}_i=\Sigma(y_i-\hat{y}_i)=\Sigma(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=\Sigma y_i-\hat{\alpha}N-\hat{\beta}\Sigma x_i=$ $=0$ λόγῳ τῆς πρώτης τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.48). Ἄμεσος συνέπεια τῆς (5.60) εἶναι ἡ ἰσότης

$$\sum_i \hat{y}_i = \sum_i y_i \qquad (5.61)$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι ὁ μέσος ὅρος τῶν οἱονεί τιμῶν $\hat{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τῆς μεταβλητῆς Y εἶναι ἴσος πρός τόν μέσον ὅρον τῶν ἀντιστοίχων ἐμπειρικῶν τιμῶν αὐτῆς.

Λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀπόδειξις τῆς (5.59) ἔχει ὡς ἀκολούθως

$$N\sigma_y{}^2=\sum_i(y_i-\mu_y)^2=\sum_i\left[(y_i-\hat{y}_i)+(\hat{y}_i-\mu_y)\right]^2=$$

$$=\sum_i(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_i(\hat{y}_i-\mu_y)^2+2\sum_i(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\mu_y)=$$

$$=NV(\hat{\varepsilon})+NV(\hat{y})+2\sum_i(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\mu_y)$$

δοθέντος δέ ὅτι

$$\sum_i(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\mu_y)=\sum_i(y_i-\hat{y}_i)\hat{y}_i-\mu_y\sum_i(y_i-\hat{y}_i)=$$

$$=\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i)-\mu_y\times 0=$$

$$=\hat{\alpha}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)+\hat{\beta}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)x_i=$$

$$=\hat{\alpha}\times 0+\hat{\beta}\times 0 = 0$$

λόγῳ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.48), ἔχομεν

$$N\sigma_y{}^2=NV(\hat{\varepsilon})+NV(\hat{y})$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἀμέσως ἡ (5.59).

'Η ἀποδειχθεῖσα σχέσις (5.59) λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καί τῆς (5.51) γράφεται

$$\sigma_y^{\,2}=V(\hat{y})+\sigma_y^{\,2}(1-\rho^2)$$

ἐκ ταύτης δέ προκύπτει ἡ σχέσις

$$V(\hat{y})=\rho^2\sigma_y^{\,2} \tag{5.62}$$

ἐκ τῆς ὁποίας καθίσταται φανερόν ὅτι "ὁ δείκτης $\rho^2$ ἰσοῦται πρός τό ποσοστόν τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^{\,2}$ τό ὁποῖον ὀφείλεται - προκύπτει, ἀπορροφᾶται - ἐκ τῆς ὑφισταμένης γραμμικῆς παλινδρομήσεως, ἐνῶ τό $1-\rho^2$ τό μή ἐπεξηγούμενον μέρος αὐτῆς".

Οὕτω, $\rho^2=1$ σημαίνει ὅτι ἅπαντα τά σημεῖα $(x_i, y_i)$, $i=1,2,...,N$ εὑρίσκονται ἐπί τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως καί συνεπῶς ἡ ὀφειλομένη εἰς τήν παλινδρόμησιν διακύμανσις ταυτίζεται μέ τήν διακύμανσιν τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων $y_i$, $i=1,2,...,N$, ἐνῶ $\rho^2=0$ δηλοῖ ὅτι οὐδέν μέρος τῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^{\,2}$ ἀπορροφᾶται - ἐπεξηγεῖται - ὑπό τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως ἡ ὁποία ὡς ἐκ τούτου - ὀφείλει νά - εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν παραθέτομεν ἐνταῦθα ἕν τυπικόν ἀριθμητικόν παράδειγμα. Τά ἐμπειρικά δεδομενα, οἱ ἀπαιτούμενοι ἐπ'αὐτῶν ὑπολογισμοί καί ἡ ἀκολουθητέα ἐν προκειμένῳ διαδικασία ἐμφαίνονται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (5.2).

Πίναξ 5.2

| Δεδομένα | | 'Υπολογισμοί | | | Σφάλματα | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | y | $x^2$ | xy | $y^2$ | $\hat{y}$ | $\hat{\varepsilon}=y-\hat{y}$ |
| 6 | 9 | 36 | 54 | 81 | 9,0 | 0,0 |
| 2 | 6 | 4 | 12 | 36 | 5,8 | 0,2 |
| 5 | 8 | 25 | 40 | 64 | 8,2 | -0,2 |
| 9 | 12 | 81 | 108 | 144 | 11,4 | 0,6 |
| 8 | 10 | 64 | 80 | 100 | 10,6 | -0,6 |
| $\Sigma x=30$ | $\Sigma y=45$ | $\Sigma x^2=210$ | $\Sigma xy=294$ | $\Sigma y^2=425$ | $\Sigma\hat{y}=450$ | $\Sigma\hat{\varepsilon}=0$ |

Τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.48) γίνεται ἐν προκειμένῳ

$$45=5\alpha+30\beta$$
$$294=30\alpha+210\beta$$

Οἱ συντελεσταί $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως (5.49) εὑρίσκονται εἴτε δι' ἐπιλύσεως τοῦ ἀνωτέρω συστήματος, εἴτε δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (5.53) καί (5.54) ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν

$$\hat{\beta}=\frac{5\times294-30\times45}{5\times210-30^2}=\frac{1.470-1.350}{1.050-900}=\frac{120}{150}=0,8$$

καί $\hat{\alpha}=\frac{45}{5}-0,8\,\frac{30}{5}=9-4,8=4,2$

Οὕτω, ἡ ζητουμένη εὐθεία παλινδρομήσεως ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=4,2+0,8x$$

Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν οἱονεί τιμάς τῆς μεταβλητῆς Y ἀντιστοιχούσης εἰς οἱανδήποτε τιμήν τῆς X. Αἱ οἱονεί τιμαί τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς παρατηρηθείσας τιμάς τῆς X παρατίθενται εἰς τήν ἕκτην στήλην τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, αἱ ἀποκλίσεις δέ αὐτῶν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐμπειρικῶν τιμῶν τῆς Y - τά σφάλματα - εἰς τήν ἑβδόμην. Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$\hat{y}_1=4,2+0,8\times6=9$, $\hat{\varepsilon}_1=y_1-\hat{y}_1=9-9=0$, κ.ο.κ.

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$, δοθέντος ὅτι ὑπελογίσθησαν ἤδη αἱ ἀποκλίσεις $\hat{\varepsilon}_i=y_i-\hat{y}_i$, $i=1,2,\ldots,5$ εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῆ ἐν προκειμένῳ ἐκ τοῦ τύπου (5.50). Κατά κανόνα ὅμως, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὑπολογίζεται διά τοῦ τύπου (5.55). Οὕτω, ἐκ τοῦ (5.50) λαμβάνομεν

$$\sigma^2=\frac{1}{5}(0,0^2+0,2^2+0,2^2+0,6^2+0,6^2)=\frac{0,80}{5}=0,16$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ (5.55) ἔχομεν

$$\sigma^2=\frac{1}{5}(425-4,2\times45-0,8\times294)=\frac{0,8}{5}=0,16$$

τήν αὐτήν φυσικά τιμήν.

Πρός ὑπολογισμόν τοῦ γραμμικοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $\rho^2$ ἀπαιτεῖται ὡς γνωστόν πέραν τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί ἡ συνολική διακύμανσις $\sigma_y^2$ τῶν τιμῶν τῆς Y. Δι'ἐφαρμογῆς ἐν προκειμένῳ τοῦ τύπου (5.56) λαμβάνομεν

$$\sigma_y^2=\frac{1}{5}\left(425-\frac{45^2}{5}\right)=\frac{1}{5}(425-405)=4$$

καί συνεπῶς ἐκ τοῦ τύπου (5.51) ἔχομεν

$$\rho^2=1-\frac{0,16}{4}=0,96$$

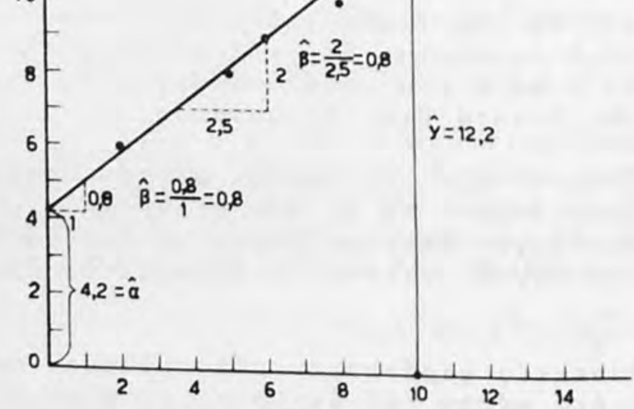
'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ προσδιορισθεῖσα εὐθεῖα παλινδρομήσεως προσαρμόζεται καί συνοψίζει τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως μέ λίαν ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν καί ὡς ἐκ τούτου τά δι'αὐτῆς ἐξαγόμενα συμπεράσματα παρουσιάζουν ὑψηλόν βαθμόν ἀκριβείας. 'Εξ ἄλλου, ἡ τιμή $\rho^2=0,96$ δηλοῖ ὅτι ποσοστόν 96% τῆς συνολικῆς μεταβλητικότητος τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y ὀφείλεται εἰς τήν παλινδρόμησιν ἤ ἄλλως εἰς τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y σχέσιν, μόνον δέ τό ὑπόλοιπον 4% τῆς ἐν λόγῳ διακυμάνσεως ὀφείλεται εἰς ἕτερα αἴτια.

Τέλος, ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως $\hat{\beta}=0,8$ συνάγεται ὅτι εἰς αὔξησιν τῆς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς X κατά μία μονάδα ἀναμένεται - οἱονεί - αὔξησις τῆς Y κατά 0,8 τῆς μονάδος.

"Ας ἴδωμεν τώρα τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον δυνάμεθα νά μελετήσωμεν τά ὡς ἄνω δεδομένα γ ρ α φ ι κ ῶ ς. Κατ'ἀρχήν ἀπεικονίζομεν τά σημεῖα $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,5$ εἰς ἕν στικτόν διάγραμμα ὡς ἐκεῖνο τοῦ Σχ. 5.3.

'Εν συνεχείᾳ χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν διερχομένην διά μέσου τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους καί ὅσον τό δυνατόν ἐγγύτερον ἐκ τῶν ἐπί μέρους σημείων του. 'Εξυπακούεται ὅτι εἰς τήν χάραξιν τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας ὑπεισέρχεται τό στοιχεῖον τῆς ὑποκειμενικότητος καί ὡς ἐκ τούτου τά ἀποτελέσματα δύο μελετητῶν διαφέρουν μεταξύ των. Συνήθως ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διασπορά τοῦ σημειακοῦ νέφους τόσον δυσκολωτέρα καθίσταται ἡ χάραξις τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως καί κατά συνέπειαν τόσον σημαντικώτεραι εἶναι αἱ ὡς ἄνω ὑποκειμενικαί διαφοραί. Ἐκ τῆς οὕτω χαραχθείσης εὐθείας εἶναι δυνατόν νά προσδιορίσωμεν, ὡς ἐμφαίνηται εἰς τό Σχ. 5.3, τάς τιμάς τῶν συντελεστῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ καί συνεπῶς τήν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως. Πρός τούτοις ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου διαγράμματος εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθοῦν οἱονεί τιμαί τῆς Y ἀντιστοιχοῦσαι εἰς δοθείσας τιμάς τῆς X κ.ο.κ.

Ἐν γένει ἡ γραφική ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως ἐπιτρέπει τήν ταχυτάτην ἐξαγωγήν συμπερασμάτων κατά τρόπον ἁπλοῦν καί εὔληπτον. Δυστυχῶς ὅμως λόγῳ τῆς ὑπεισερχομένης ὑποκειμενικότητος ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἐνδείκνυται μόνον ὡς προκαταρκτικόν στάδιον τῆς ὅλης μελέτης καί οὐχί ὡς βάσις ἐξαγωγῆς ὁριστικῶν συμπερασμάτων.




Σχ. 5,3

β) Τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν α δεδομένα

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως εἶναι ταξινομημένα εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ἀνάλογον τοῦ (4.1) καί συνίστανται ἐκ τῶν kλ ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i,y_j)$, $i=1,2,...,k$, $j=1,2,...,\lambda$ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐπαναλαμβάνεται μέ ἀντίστοιχον συχνότητα $f_{ij}$.

Τό μ.τ.σ. περί ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε τῶν εὐθειῶν - μελῶν τῆς οἰκογενείας $y=\alpha+\beta x$ δίδεται, κατ'ἀναλογίαν τῆς σχέσεως (5.19), ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{f_{..}}\sum_{ij}\sum f_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}=\frac{1}{f_{..}}\sum_{ij}\sum f_{ij}(y_j-\alpha-\beta x_i)^2 \tag{5.63}$$

καί ὡς ἐκ τούτου τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.20) λαμβάνει ἐν προκειμένῳ τήν μορφήν

$$\begin{aligned}\sum_{ij}\sum f_{ij}y_j&=\alpha f_{..}+\beta\sum_i f_{i.}x_i\\ \sum_{ij}\sum f_{ij}x_iy_j&=\alpha\sum_i f_{i.}x_i+\beta\sum_i f_{i.}x_i^2\end{aligned} \tag{5.64}$$

ἤ ἄλλως, δεδομένου ὅτι $\sum_j f_{ij}y_j=f_{i.}E(Y/x_i)$, τήν μορφήν

$$\begin{aligned}\sum_i f_{i.}E(Y/x_i)&=\alpha f_{..}+\beta\sum_i f_{i.}x_i\\ \sum_i f_{i.}x_iE(Y/x_i)&=\alpha\sum_i f_{i.}x_i+\beta\sum_i f_{i.}x_i^2\end{aligned} \tag{5.65}$$

ἡ ὁποία ἄλλωστε προκύπτει καί δι'ἀπ'εὐθείας ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (5.23) καί (5.24).

'Η ἀπόδειξις τόσον τοῦ συστήματος (5.64) ὅσον καί τοῦ (5.65) εἰς οὐδέν διαφέρει τῆς ἀποδείξεως τοῦ (5.48) εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων. 'Εξ ἄλλου δι'ἀντικαταστάσεως εἰς τό σύστημα (5.48) τοῦ $y_i$ διά τῆς δεσμευμένης μέσης τιμῆς $E(Y/x_i)$ - λαμβανομένου ἐν προκειμένῳ ὑπ'ὄψιν ὅτι εἰς ἕκαστον $x_i$ δέν ἀντιστοιχεῖ ἕν $y_i$ ἀλλά πλῆθος τοιούτων $y_j$, $j=1,2,...,\lambda$ - καί τῶν εἰς αὐτό ἁπλῶν ἀθροισμάτων $\Sigma x_i$, $\Sigma y_i$, $\Sigma x_i^2$, $\Sigma x_iy_i$ διά τῶν ἀντιστοίχων σ τ α θ μ ι κ ῶ ν τοιούτων $\Sigma f_{i.}x_i$, $\Sigma f_{i.}E(Y/x_i)$, $\Sigma f_{i.}x_i^2$, $\Sigma f_{i.}x_iE(Y/x_i)$, προκύπτει τό (5.65).

Οὕτω ἡ ζητουμένη ἐν προκειμένῳ εὐθεία παλινδρομήσεως ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x \qquad (5.66)$$

ὅπου $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ ἀποτελοῦν τήν λύσιν τοῦ συστήματος (5.65) καί δίδονται ἐκ τῶν τύπων

$$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{ij}\sum f_{ij}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)}{\sum\limits_i f_{i.}(x_i-\mu_x)^2}=\frac{\sum\limits_i f_{i.}(x_i-\mu_x)\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]}{\sum\limits_i f_{i.}(x_i-\mu_x)^2} \qquad (5.67)$$

$$\hat{\alpha}=\mu_y-\hat{\beta}\mu_x$$

εἰς τούς ὁποίους οἱ ἀριθμητικοί μέσοι $\mu_x$ καί $\mu_y$ ὁρίζονται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων

$$\mu_x=\frac{1}{f_{..}}\sum_i f_{i.}x_i \quad \text{καί} \quad \mu_y=\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}y_j=\frac{1}{f_{..}}\sum_i f_{i.}E(Y/x_i) \qquad (5.69)$$

Ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ $\hat{\beta}$ εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς δέν χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ τύπος (5.67) ἀλλά ὁ κατωτέρω ἰσοδύναμος πρός αὐτόν

$$\hat{\beta}=\frac{f_{..}\sum\limits_i f_{i.}x_iE(Y/x_i)-\sum\limits_i f_{i.}x_i\times\sum\limits_i f_{i.}E(Y/x_i)}{f_{..}\sum\limits_i f_{i.}x_i^2-(\sum\limits_i f_{i.}x_i)^2} \qquad (5.70)$$

ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπ'εὐθείας ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (5.65) ὅπως ἀκριβῶς ὁ ἀντίστοιχος πρός αὐτόν (5.53) - εἰς τήν περίπτωσιν ἁπλῶν δεδομένων-ἐκ τοῦ συστήματος (5.48).

Ἐξ ἄλλου ἡ ἰσοδυναμία τῶν ἐκφράσεων (5.67) καί (5.70) προκύπτει ὡς ἑξῆς: Τό ἄθροισμα

$$\sum_{ij}\sum f_{ij}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)=\sum_i(x_i-\mu_x)f_{i.}\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right]=$$

$$=\sum_i f_{i.}\, x_i E(Y/x_i) - \mu_x \sum_i f_{i.}\, E(Y/x_i) - \mu_y \sum_i f_{i.}\, x_i + \mu_x \mu_y \sum_i f_{i.} =$$

$$=\sum_i f_{i.}\, x_i E(Y/x_i) - f_{..}\,\mu_x\mu_y - f_{..}\,\mu_x\mu_y + f_{..}\,\mu_x\mu_y =$$

$$=\sum_i f_{i.}\, x_i E(Y/x_i) - f_{..}\,\mu_x\mu_y .$$

Ἐξ ἄλλου, τό ἄθροισμα

$$\sum_i f_{i.}(x_i-\mu_x)^2 = \sum_i f_{i.}\, x_i^{\,2} - 2\mu_x \sum_i f_{i.}\, x_i + f_{..}\,\mu_x^{\,2} =$$

$$= \sum_i f_{i.}\, x_i^{\,2} - 2f_{..}\,\mu_x^{\,2} + f_{..}\,\mu_x^{\,2} =$$

$$= \sum_i f_{i.}\, x_i^{\,2} - f_{..}\,\mu_x^{\,2}$$

Οὕτω ὁ τύπος (5.67) γράφεται καί ὑπό τήν μορφήν

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_i f_{i.}\, x_i E(Y/x_i) - f_{..}\,\mu_x\mu_y}{\sum_i f_{i.}\, x_i^{\,2} - f_{..}\,\mu_x^{\,2}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων τῶν $\mu_x$ καί $\mu_y$, προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος (5.70).

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν οὕτω προσδιορισθεῖσαν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως (5.66), ὁριζόμενον ὡς εἴδομεν ἐν γένει ἐκ τῆς σχέσεως (5.22), δίδεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\sigma^2=\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)^2 \qquad (5.71)$$

διά τόν ὑπολογισμόν ὅμως αὐτοῦ εἰς τήν πρᾶξιν χρησιμοποιεῖται συνήθως ἡ ἔκφρασις

$$\sigma^2=\frac{1}{f_{..}}\sum_{ij}\sum f_{ij}\, y_j^{\,2}-\hat{\alpha}\sum_i f_{i.}\, E(Y/x_i)-\hat{\beta}\sum_i f_{i.}\, x_i E(Y/x_i) \qquad (5.72)$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς (5.71) ὅπως ἀκριβῶς ὁ τύπος (5.55) ἐκ τοῦ (5.50) εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων.

Τέλος, ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $\rho^2$ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\rho^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \tag{5.73}$$

ὅπου φυσικά ἡ συνολική διακύμανσις $\sigma_y^2$ δίδεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ σταθμικοῦ τύπου

$$\sigma_y^2=\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\mu_y)^2=\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}y_j^2-\frac{\left[\sum_i f_{i.}E(Y/x_i)\right]^2}{f_{..}} \tag{5.74}$$

καί τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (5.72).

Αἱ ἰδιότητες αἱ ὁποῖαι ἀπεδείχθησαν συναφῶς πρός τήν γενικήν ἐξίσωσιν $y=f(x,\alpha,\beta)$ διά τόν δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$ ἰσχύουν προφανῶς - δεδομένου ὅτι ἡ οἰκογένεια τῶν εὐθειῶν $y=\alpha+\beta x$ ἀποτελεῖ μερικωτέραν περίπτωσιν - καί διά τόν γραμμικόν δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$. Οὕτω ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι ἀριθμός καθαρός καί ἀνεξάρτητος τῶν χρησιμοποιουμένων μονάδων, ὡσαύτως δέ πληροῖ πάντοτε τήν ἀνισότητα

$$0\leqslant\rho^2\leqslant\eta^2\leqslant 1 \tag{5.75}$$

Ἡ ἰσότης $\rho^2=\eta^2$, ὅπου $\eta^2$ ὁ στοιχειώδης δείκτης προσδιορισμοῦ, λαμβάνει χώραν μόνον ἐάν ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ συμπίπτει μέ τήν στοιχειώδη γραμμήν παλινδρομήσεως ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ἡ εὐθεία $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ διέρχεται δι' ὅλων τῶν σημείων $[x_i, E(Y/x_i)]$, $i=1,2,\ldots,k$ ὅτε ἔχομεν $E(Y/x_i)\equiv\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_i$, $i=1,2,\ldots,k$.

Πρός τούτοις, ἐάν ἡ στοχαστική σχέσις μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y συρρικνωθῆ εἰς μίαν εὐθύγραμμον συναρτησιακήν σχέσιν, ἔχομεν $\rho^2=\eta^2=1$. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἰσότης $\rho^2=0$ συμβαίνει μόνον ἐάν $\hat{\beta}=0$, ἤτοι ἐάν ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως εἶναι ἡ παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x εὐθεία $\hat{y}=\hat{\alpha}=\mu_y$, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ἡ μεταβλητή Y εἶναι στατιστικῶς ἀσυσχέτιστος πρός τήν X. Τοῦτο ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἐκ τῆς σχέσεως

$$\hat{\beta}^2=\rho^2\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \tag{5.76}$$

ἡ ὁποία συνδέει καί ἐν προκειμένῳ τόν δείκτην $\rho^2$ καί τόν συντελεστήν παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$, ἀποδεικνύεται δέ κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων. Συγκεκριμένως, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς τύπους (5.67), (5.68) καί (5.71) ἔχομεν

$$f_{..}\sigma^2=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)^2=\sum_i\sum_j f_{ij}\left[(y_j-\mu_y)-\hat{\beta}(x_i-\mu_x)\right]^2=$$

$$=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\mu_y)^2+\hat{\beta}^2\sum_i f_{i.}(x_i-\mu_x)^2-2\hat{\beta}\sum_i\sum_j f_{ij}(y_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)=$$

$$=f_{..}\sigma_y{}^2-\hat{\beta}^2\sum_i f_{i.}(x_i-\mu_x)^2=f_{..}\sigma_y{}^2-\hat{\beta}^2 f_{..}\sigma_x{}^2$$

καί τελικῶς τήν σχέσιν $\sigma^2=\sigma_y{}^2-\hat{\beta}^2\sigma_x{}^2$ ἡ ὁποία ἐν συνδυασμῷ πρός τήν (5.73) δίδει τήν πρός ἀπόδειξιν σχέσιν (5.76).

Τέλος, ἀντιστοίχως πρός τήν ἰσότητα (5.59) ἀποδεικνύεται εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἡ κατωτέρω ἰσότης ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς τ ῆ ς δ ι α κ υ μ ά ν σ ε ω ς $\sigma_y{}^2$.

$$\sigma_y{}^2=V(\hat{y})+V(\hat{\varepsilon}) \tag{5.77}$$

ὅπου $V(\hat{y})=\frac{1}{f_{..}}\sum_i f_{i.}(\hat{y}_i-\mu_y)^2$ ἡ ὀ φ ε ι λ ο μ έ ν η εἰς εὐθύγραμμον παλινδρόμησιν διακύμανσις τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν τῆς Y

καί $V(\hat{\varepsilon})=\frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)^2=\sigma^2$ ἡ διακύμανσις τῶν σφαλμάτων $\hat{\varepsilon}_{ij}$ περί τήν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως, δηλαδή ἡ μ ή ἐ π ε ξ η γ ο υ μ έ ν η ἐκ τῆς παλινδρομήσεως συνιστῶσα (τό ὑπόλοιπον).

Κατ' ἀρχήν, λόγῳ τῆς πρώτης τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.64), ἔχομεν ὅτι

$$\sum_i\sum_j f_{ij}\hat{\varepsilon}_j=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=$$

$$=\sum_i\sum_j f_{ij}y_j-\hat{\alpha}f_{..}-\hat{\beta}\sum_i f_{i.}x_i=0$$

καί ὡς ἐκ τούτου $\sum_i\sum_j f_{ij}y_j=\sum_i\sum_j f_{ij}\hat{y}_i=\sum_i f_{i.}\hat{y}_i$

Ἡ τελευταία ἰσότης ἀποδεικνύει ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικός $\mu_y$ τῶν ἐμπειρικῶν τιμῶν τῆς Y εἶναι καί μέσος ἀριθμητικῶν τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν αὐτῆς.

Λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι

$$f_{..}\sigma_y{}^2=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\mu_y)^2=\sum_i\sum_j f_{ij}\left[(y_j-\hat{y}_i)+(\hat{y}_i-\mu_y)\right]^2=$$

$$=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)^2+\sum_i f_{i.}(\hat{y}_i-\mu_y)^2+2\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\mu_y)=$$

$$=f_{..}V(\hat{\varepsilon})+f_{..}V(\hat{y})+2\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\mu_y)$$

δοθέντος δέ ὅτι

$$\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\mu_y)=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)\hat{y}_i-\mu_y\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{y}_i)=$$

$$=\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i)-0=$$

$$=\hat{\alpha}\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)+\hat{\beta}\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)x_i=$$

$$=\hat{\alpha}\times 0+\hat{\beta}\times 0 = 0$$

λόγῳ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.64), προκύπτει τελικῶς ἡ σχέσις $f_{..}\sigma_y{}^2=f_{..}V(\hat{\varepsilon})+f_{..}V(\hat{y})$ ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἀμέσως ἡ (5.77).

Ἐκ τῆς (5.77) ἐν συνδυασμῷ πρός τήν (5.73) προκύπτει πρός τούτοις ἡ σχέσις

$$V(\hat{y})=\rho^2\sigma_y{}^2 \tag{5.78}$$

ἡ ὁποία φανερώνει, ὅπως εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἁπλῶν δεδομένων ἡ σχέσις (5.62), ὅτι ὁ δείκτης $\rho^2$ ἰσοῦται πρὸς τό ποσοστόν τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_y{}^2$ τό ὁποῖον ἐπεξηγεῖται ὑπό τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως ἐνῶ τό '- ὑπόλοιπον -$(1-\rho^2)$εἶναι τό μή ἐπεξηγούμενον μέρος αὐτῆς.

Κατά τήν ἐφαρμογήν τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν εἰς τήν πρᾶξιν καί ἰδιαιτέρως κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$, τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τοῦ δείκτου $\rho^2$ παρουσιάζονται ὡρισμέναι ὑπολογιστικαί δυσχέρειαι. Πρός ἀποφυγήν τῶν ἐν λόγῳ δυσχερειῶν χρησιμοποιεῖται συνήθως μία τυποποιημένη διαδικασία τήν ὁποίαν παραθέτομεν κατωτέρω ἐν συνδυασμῷ πρός ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα.

Τά χρησιμοποιούμενα ὡς ἐμπειρικά δεδομένα εἶναι ὑποθετικά. Αἱ τιμαί τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X καί Y - παρατιθέμεναι ἀντιστοίχως εἰς τήν πρώτην στήλην καί τήν πρώτην γραμμήν τοῦ κυρίου μέρους τοῦ κατωτέρω πίνακος (5.3) - εἶναι δυνατόν νά παριστοῦν κεντρικάς τιμάς ἀντιστοίχων τάξεων τῶν μεταβλητῶν. Αἱ συχνότητες ἐμφανίσεως ἑκάστου ζεύγους $(x_i, y_j)$-παρατιθέμεναι εἰς τά 4×5 φατνία τοῦ κυρίως πίνακος - δυνατόν νά εἶναι εἴτε ἀπόλυτοι εἴτε σχετικαί. Τέλος, οἱ ἀπαιτούμενοι ὑπολογισμοί - ἐπεξηγούμενοι κατωτέρω - παρατίθενται εἰς κατάλληλα προεκτάματα τοῦ κυρίως πίνακος.

Πίναξ 5.3

| $x_i \backslash y_j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $f_{i.}$ | $f_{i.}x_i$ | $f_{i.}x_i^2$ | $\sum_j f_{ij}x_iy_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 $\boxed{8}$ | 5 $\boxed{10}$ | 3 $\boxed{9}$ | 2 $\boxed{8}$ | 0 $\boxed{0}$ | 18 | 18 | 18 | $\boxed{35}$ |
| 2 | 4 $\boxed{8}$ | 9 $\boxed{36}$ | 8 $\boxed{48}$ | 5 $\boxed{40}$ | 2 $\boxed{20}$ | 28 | 56 | 112 | $\boxed{152}$ |
| 3 | 2 $\boxed{6}$ | 6 $\boxed{36}$ | 9 $\boxed{81}$ | 8 $\boxed{96}$ | 5 $\boxed{75}$ | 30 | 90 | 270 | $\boxed{294}$ |
| 4 | 1 $\boxed{4}$ | 0 $\boxed{0}$ | 6 $\boxed{72}$ | 9 $\boxed{144}$ | 8 $\boxed{160}$ | 24 | 96 | 384 | $\boxed{380}$ |
| $f_{.j}$ | 15 | 20 | 26 | 24 | 15 | 100 | 260 | 784 | 861 |
| $f_{.j}y_j$ | 15 | 40 | 78 | 96 | 75 | 304 | | | |
| $f_{.j}y_j^2$ | 15 | 80 | 234 | 384 | 375 | 1088 | | | |
| $\sum_j f_{ij}x_iy_j$ | $\boxed{26}$ | $\boxed{82}$ | $\boxed{210}$ | $\boxed{288}$ | $\boxed{255}$ | 861 | | | |

Ἔλεγχος

Εἰς τήν στήλην $f_{i.}$ ἐμφανίζονται τά ἀθροίσματα τῶν συχνοτήτων $f_{ij}$ κατά γραμμάς, εἰς δέ τήν γραμμήν $f_{.j}$ τά ἀντίστοιχα ἀθροίσματα κατά στήλας, ἤτοι αἱ περιθωριακαί κατανομαί ὡς πρός X καί ὡς πρός Y. Εἰς τήν στήλην $f_{i.}x_i$ παρατίθενται τά γινόμενα ἑκάστης τῶν περιθωριακῶν συχνοτήτων $f_{i.}$ ἐπί τάς ἀντιστοίχους τιμάς $x_i$, $i=1,2,3,4$ τῆς μεταβλητῆς X ὡς καί τό ἄθροισμα αὐτῶν $\Sigma f_{i.}x_i=260$.

Ἡ στήλη $f_{i.}x_i^2$ εὑρίσκεται διά τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τιμῶν $x_i$, $i=1,2,3,4$ ἐπί τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς στήλης $f_{i.}x_i$. Τό ἄθροισμα τῆς ἐν λόγῳ στήλης εἶναι ἐν προκειμένῳ $\Sigma f_{i.}x_i^2=784$.

Ἐξ ἄλλου, αἱ γραμμαί $f_{.j}y_j$ καί $f_{.j}y_j^2$ εὑρίσκονται - χρησιμοποιουμένων τῶν τιμῶν $y_j$, $j=1,2,3,4,5$ τῆς Y καί τῶν ἀντιστοίχων περιθωριακῶν συχνοτήτων $f_{.j}$ - κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον ὡς καί αἱ στῆλαι $f_{i.}x_i$. καί $f_{i.}x_i^2$.

Ἐνταῦθα δέον νά διευκρινισθῆ ὅτι τά ἀθροίσματα

$$\sum_j f_{.j}y_j=304 \quad \text{καί} \quad \sum_j f_{.j}y_j^2=1.088$$

τῶν ἐν λόγῳ γραμμῶν συμπίπτουν ἀντιστοίχως μέ τά ἀθροίσματα

$$\sum_i f_{i.}E(Y/x_i) \quad \text{καί} \quad \sum_{ij}\sum f_{ij}y_j^2$$

τά ὁποῖα ὑπεισέρχονται εἰς διαφόρους ἐκ τῶν παρατιθεμένων ἀνωτέρω τύπων. Πράγματι,

$$\sum_j f_{.j}y_j=\sum_j y_j\sum_i f_{ij}=\sum_{ij}\sum f_{ij}y_j=\sum_i f_{i.}E(Y/x_i)=f_{..}\mu_y \qquad (5.79)$$

καί

$$\sum_j f_{.j}y_j^2=\sum_j y_j^2\sum_i f_{ij}=\sum_{ij}\sum f_{ij}y_j^2 \qquad (5.80)$$

Τέλος, προκειμένου νά ὑπολογισθῆ τό ἄθροισμα $\Sigma\Sigma f_{ij}x_iy_j$ - τό ὁποῖον ταυτίζεται ὡς εἴδομεν πρός τό ἄθροισμα $\Sigma f_{i.}x_iE(Y/x_i)$ - εὑρίσκονται δι' ἕκαστον τῶν φατνίων τοῦ πίνακος τά γινόμενα $f_{ij}x_iy_j$, $i=1,2,3,4$ $j=1,2,3,4,5$ - καί ἀφοῦ ἀναγραφοῦν εἰς ἰδιαίτερον τμῆμα τοῦ ἀντιστοίχου φατνίου - ἐντός τῶν τετραγωνιδίων - ἀθροίζονται ὁριζοντίως καί καθέτως. Τά ἀθροίσματα τῶν ἐν λόγῳ γινομένων $f_{ij}x_iy_j$ κατά γραμμάς παρατίθενται εἰς τήν στήλην $\sum_j f_{ij}x_iy_j$ τά δέ ἀθροίσματα αὐτῶν κατά στήλας εἰς τήν γραμμήν $\sum_i f_{ij}x_iy_j$. Ἡ ἄθροισις τῶν ὅρων τόσον τῆς τελευταίας στήλης ὅσον καί τῶν ὅρων τῆς τελευταίας γραμμῆς δίδει προφανῶς τό ζητούμενον ἄθροισμα $\Sigma\Sigma f_{ij}x_iy_j = \Sigma\Sigma f_{ij}x_iy_j = 861$. Ἡ σύμπτωσις τῶν ἐν λόγῳ ἀθροισμάτων ἀποτελεῖ ἐξ ἄλλου ἕναν ἔλεγχον τῆς ὀρθότητος τῶν γενομένων ὑπολογισμῶν.

Οὕτω τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.64) ἤ ἄλλως (5.65) γίνεται ἐν προκειμένῳ

$$304=100\alpha+260\beta$$
$$861=260\alpha+784\beta$$

Οἱ συντελεσταί $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῆς ὑπό προσδιορισμόν ἐξισώσεως παλινδρομήσεως (5.66) εὑρίσκονται εἴτε δι' ἐπιλύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος εἴτε δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (5.7) καί (5.68) ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ὅτι

$$\hat{\beta} = \frac{100\times861-260\times304}{100\times784-(260)^2} = \frac{7.060}{10.800} = 0,654$$

καί
$$\hat{\alpha} = \frac{304}{100} - 0,654 \times \frac{260}{100} = 1,34$$

Κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως ὁρίζεται ἐν προκειμένῳ ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=1.34+0,65x$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ εὑρισκόμενον δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (5.72) εἶναι

$$\sigma^2 = \frac{1}{100}\left[1.088-1,34\times304-0,654\times861\right] = 1,18$$

Ἐξ ἄλλου ἡ διακύμανσις $\sigma_y^2$ ὑπολογιζομένη ἐκ τῆς σχέσεως (5.74) εἶναι

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{100}\left[1.088 - \frac{304^2}{100}\right] = 1,64$$

καί ὡς ἐκ τούτου, δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (5.77), ἔχομεν

$$\rho^2 = 1 - \frac{1,18}{1,64} = \frac{0,46}{1.64} = 0,281$$

'Ο εὑρεθείς γραμμικός δείκτης προσδιορισμοῦ $\rho^2$ φαίνεται - ἐκ πρώτης τουλάχιστον ὄψεως - μᾶλλον μικρός. Εἶναι ὅμως γνωστόν ὅτι ἡ μεγίστη τιμή τήν ὁποίαν δύναται νά λάβῃ ἐν προκειμένῳ ὁ δείκτης $\rho^2$ δέν εἶναι ἡ μονάς ἀλλ'ἡ ποσότης $\eta^2$ ὁ στοιχειώδης δηλαδή δείκτης προσδιορισμοῦ $(0 \leqslant \rho^2 \leqslant \eta^2 \leqslant 1)$. Συνεπῶς μία ὀρθοτέρα ἀξιολόγησις τῆς τιμῆς $\rho^2 = 0,28$ θά προέκυπτεν ἐκ τῆς συγκρίσεώς της πρός τήν τιμήν τοῦ δείκτου $\eta^2$ τήν ὁποίαν ὑπολογίζομεν κατωτέρω δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (5.40) καί (5.41). 'Εκ τοῦ τύπου (5.40) ἔχομεν

$$E\left[\overline{V}(Y/x)\right] = \frac{1}{f_{..}}\left[\sum_{i}\sum_{j} f_{ij} y_j^2 - \sum_i f_{i.} E^2(Y/x_i)\right] = \frac{1}{f_{..}}\left[\sum_i\sum_j f_{ij} y_j^2 - \sum_i \frac{(\sum_j f_{ij} y_j)^2}{f_{i.}}\right] =$$

$$= \frac{1}{100}\left[1.088 - \left(\frac{35^2}{18} + \frac{76^2}{28} + \frac{98^2}{30} + \frac{95^2}{24}\right)\right] = 1,17$$

Οὕτω ἐκ τοῦ (5.41) λαμβάνομεν

$$\eta^2 = 1 - \frac{1,17}{1,64} = \frac{0,47}{1,64} = 0,287$$

'Εκ τῆς συγκρίσεως τῶν δεικτῶν $\rho^2 = 0,281$ καί $\eta^2 = 0,287$ προκύπτει ὅτι ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως ταυτίζεται σχεδόν μέ τήν στοιχειώδη γραμμή παλινδρομήσεως καί ὡς ἐκ τούτου οὐδεμία ἄλλη μορφή καμπύλης θά ἔδιδε καλλίτερα ἀποτελέσματα διά τήν περιγραφήν τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν X καί Y σχέσεως. 'Η μικρή ὅμως τιμή τοῦ $\eta^2$ - συνεπῶς καί τοῦ $\rho^2$ - δηλοῖ ὅτι ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y ἐλάχιστα ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς X, συγκεκριμένως δέ μόνον 29% (περίπου) τῆς συνολικῆς μεταβλητικότητος τῆς Y ὀφείλεται εἰς τήν ἐπίδρασιν τῆς X, ἐνῶ τό ὑπόλοιπον 71% ὀφείλεται εἰς ἑτέρους - μή συνεξεταζομένους ἐν προκειμένῳ - παράγοντας.

## 5.6 Καμπῦλαι Παλινδρομήσεως Πολυωνυμικῆς Μορφῆς

Ἡ εὐθύγραμμος παλινδρόμησις, ἀποτελοῦσα τήν ἁπλουστέραν μορφήν παλινδρομήσεως, περιγράφει μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν - ἀκρίβειαν - τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν σχέσιν, μόνον εἰς τάς περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας εἰς μοναδιαίας μεταβολάς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X ἡ μεταβλητή Y μεταβάλλεται πάντοτε κατά τήν αὐτήν περίπου ποσότητα, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων μεταβολῶν τῶν δύο μεταβλητῶν εἶναι ἐν γένει - κατά προσέγγισιν - σταθερός.

Πολλάκις ὅμως ἡ σχέσις μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y εἶναι πολυπλοκωτέρας μορφῆς - ἴδε στικτά διαγράμματα Σχ.(4.2)- καί ἡ περιγραφή αὐτῆς ὑπό τῆς ἀντιστοίχου - ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων προσδιοριζομένης - εὐθείας παλινδρομήσεως ἀποδεικνύεται μᾶλλον ἀνεπαρκής. Τοῦτο ἄλλωστε καθίσταται φανερόν ἐκ τῆς μικρᾶς ἐν προκειμένῳ τιμῆς τοῦ γραμμικοῦ δείκτου $\rho^2$, καλλίτερον δέ ἐκ τῆς οὐσιώδους διαφορᾶς $\eta^2-\rho^2$ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου στοιχειώδους δείκτου προσδιορισμοῦ $\eta^2$.

Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις καθίσταται προφανής ἡ ἀνάγκη χρησιμοποιήσεως ὡς γραμμῶν παλινδρομήσεως, ἑτέρων καμπύλων αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν μεγαλυτέραν ε ὐ ε λ ι ξ ί α ν καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι δυνατόν νά προσαρμοσθοῦν πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα μέ καλλιτέραν προσέγγισιν (μέ ὑψηλότερον δείκτην προσαρμογῆς $R^2$).

Εἰς τήν πρᾶξιν τοιαῦται - περισσότερον εὐέλικτοι - καμπύλαι ἀναζητοῦνται συνήθως εἴτε μεταξύ τῶν πολυωνυμικῆς μορφῆς γραμμῶν $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+...+\alpha_\nu x^\nu$ καί εἰδικώτερον μεταξύ τῶν παραβολῶν δευτέρου ἤ τό πολύ τρίτου βαθμοῦ

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2 \qquad \text{καί} \qquad y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$$

εἴτε - ἀναλόγως τῆς φύσεως τῶν δεδομένων καί τῶν κατά περίπτωσιν ἀναγκῶν - μεταξύ ὡρισμένων ἄλλων εἰδικωτέρας μορφῆς καμπύλων αἱ ὁποῖαι διά καταλλήλων μετασχηματισμῶν τῶν μεταβλητῶν εἶναι δυνατόν, ὡς θά εἴδωμεν, νά ἀναχθοῦν εἰς τήν γραμμικήν μορφήν.

Ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ καμπύλων παλινδρομήσεως πολυωνυμικῆς μορφῆς, ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως αὐτῶν ὡς καί αἱ μέθοδοι ἀξιολογήσεως τῆς ἀκριβείας τῶν δι' αὐτῶν ἐξαγομένων συμπερασμάτων, θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἐνταῦθα. Ἡ μελέτη ἑτέρων - ἐξειδικευμένης μορφῆς - γραμμῶν ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τῆς ἑπομένης παραγράφου.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ πραγματευόμεθα λεπτομερῶς μόνον τήν - πλέον συνήθη εἰς τήν πρᾶξιν - περίπτωσιν τῶν παραβολῶν δευτέρου βαθμοῦ

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2 \tag{5.81}$$

Τά σχετικά συμπεράσματα - σχέσεις, τύποι κλπ - γενικεύονται, ὡς θά ἴδωμεν εἰς τάς λοιπάς - ἀνωτέρου βαθμοῦ - καμπύλας κατά τρόπον ἄμεσον καί ἁπλοῦν. Ἐξ ἄλλου, δοθέντος ὅτι ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τήν περίπτωσιν ταξινομημένων δεδομένων διαδικασία εἰς οὐδέν διαφέρει τῆς ἀκολουθουμένης προκειμένου περί ἁπλῶν τοιούτων - πλήν τῆς ἀντικαταστάσεως, ὡς εἴδομεν, τῶν ἁπλῶν ἀθροισμάτων $\Sigma x_i$, $\Sigma x_i^2$,... $\Sigma y_i$, $\Sigma y_i^2$, ... $\Sigma x_i y_i$,... διά τῶν ἀντιστοίχων σταθμικῶν τοιούτων

$\sum_i f_i . x_i$, $\sum_i f_i . x_i^2$,... $\sum_{ij}\sum f_{ij} y_j$, $\sum_{ij}\sum f_{ij} y_j^2$, $\sum_{ii}\sum f_{ij} x_i y_j$,...

κλπ - περιοριζόμεθα μόνον εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως συνίστανται ἐκ τῶν ἁπλῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν ἤ σημείων $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$.

Παραβολική Παλινδρόμησις

Τό μ.τ.σ. περί οἱανδήποτε τῶν παραβολῶν τῆς οἰκογενείας (5.81), ὁριζόμενον κατ' ἀναλογίαν τῆς γενικῆς σχέσεως (5.12), εἶναι

$$\frac{1}{N}\sum_i \hat{\varepsilon}_i^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i-\gamma x_i^{\,2})^2 \tag{5.82}$$

Πρός ὑπολογισμόν τῶν συγκεκριμένων ἀριθμητικῶν τιμῶν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ καί $\hat{\gamma}$ τῶν ἀγνώστων παραμέτρων α, β καί γ αἱ ὁποῖαι ἐλαχιστοποιοῦν τήν ποσότητα (5.82), ἀρκεῖ ὡς γνωστόν αἱ μερικαί παράγωγοι τοῦ ἀθροίσματος

$$\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i-\gamma x_i^2)^2$$

ὡς πρός α, β καί γ νά ἐξισωθοῦν πρός μηδέν καί τό προκῦπτον σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων - τό σύστημα τῶν κ α ν ο ν ι κ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν - νά ἐπιλυθῆ ὡς πρός α, β καί γ. Παραγωγίζοντες τό ὡς ἄνω ἄθροισμα ὡς πρός α, β καί γ καί ἐξισοῦντες τάς ἐν λόγῳ παραγώγους πρός μηδέν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τάς ἐξισώσεις

$$2\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i-\gamma x_i^2)(-1)=0$$
$$2\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i-\gamma x_i^2)(-x_i)=0$$
$$2\sum_i (y_i-\alpha-\beta x_i-\gamma x_i^2)(-x_i^2)=0$$

ἐκ τῶν ὁποίων - μετά τάς σχετικάς ἁπλοποιήσεις κλπ - λαμβάνεται τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων ὑπό τήν κατωτέρω τελικήν του μορφήν.

$$\begin{aligned} \sum_i y_i &= \alpha N+\beta\sum_i x_i+\gamma\sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i y_i &= \alpha\sum_i x_i+\beta\sum_i x_i^2+\gamma\sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 y_i &= \alpha\sum_i x_i^2+\beta\sum_i x_i^3+\gamma\sum_i x_i^4 \end{aligned} \qquad (5.83)$$

Ἡ καθ᾽οἱονδήποτε τρόπον ἐπίλυσις τοῦ συστήματος (5.83) ὡς πρός τάς ὑπό προσδιορισμόν παραμέτρους α, β καί γ ὁδηγεῖ εἰς τάς ζητουμένας συγκεκριμένας τιμάς αὐτῶν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ καί $\hat{\gamma}$.

Μετά τόν ὑπολογισμόν τῶν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ καί $\hat{\gamma}$ ἡ ζητουμένη π α ρ α β ο λ ή π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς καθορίζεται πλήρως ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x+\hat{\gamma}x^2 \qquad (5.84)$$

τό δέ περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_i (y_i-\hat{y}_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^2)^2 \qquad (5.85)$$

Σημειωτέον ὅτι τό μ.τ.σ. $\sigma^2$, ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως, δέν ὑπολογίζεται συνήθως ἐκ τοῦ τύπου (5.85) ἀλλ'ἐκ τοῦ κάτωθι μετασχηματισμοῦ αὐτοῦ

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_i y_i^{\,2} - \hat{\alpha}\sum_i y_i - \hat{\beta}\sum_i x_i y_i - \hat{\gamma}\sum_i x_i^{\,2} y_i\right] \tag{5.86}$$

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου (5.86) εἶναι ἁπλουστάτη καί ἔχει ὡς ἑξῆς: Τό ἄθροισμα

$$\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2})^2 = \sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2})(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2}) =$$

$$= \sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2})y_i - \hat{\alpha}\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2}) - \hat{\beta}\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-$$

$$-\hat{\gamma}x_i^{\,2})x_i - \hat{\gamma}\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2})x_i^{\,2}$$

καί δοθέντος ὅτι οἱ τρεῖς τελευταῖοι ὅροι εἶναι μηδέν λόγῳ τῶν τριῶν ἀντιστοίχων κανονικῶν ἐξισώσεων, ἔχομεν τελικῶς τήν ἰσότητα

$$\sum_i (y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i-\hat{\gamma}x_i^{\,2})^2 = \sum_i y_i^{\,2} - \hat{\alpha}\sum_i y_i - \hat{\beta}\sum_i x_i y_i - \hat{\gamma}\Sigma x_i^{\,2} y_i$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἀμέσως ἡ ἀλήθεια τῆς (5.86).

Τέλος, ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ ὑπολογίζεται ἐν προκειμένῳ δι'ἐφαρμογῆς τοῦ γνωστοῦ γενικοῦ τύπου

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^{\,2}} \tag{5.87}$$

ὅπου $\sigma_y^{\,2}$ ἡ διακύμανσις τῶν $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ - ἀνεξάρτητος, ὡς εἶναι εὐνόητον, τῆς μορφῆς τῆς χρησιμοποιουμένης ἑκάστοτε καμπύλης -

καί $\sigma^2$ τό περί τήν προσδιορισθεῖσαν ἤδη παραβολήν παλινδρομήσεως μ.τ.σ. προκῦπτον ἐκ τοῦ τύπου (5.86).

Ὁ οὕτω ὑπολογιζόμενος δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ πέραν τῶν γνωστῶν γενικῶν ἰδιοτήτων - καθαρός καί ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων ἀριθμός, ἱκανοποιῶν πάντοτε τήν διπλῆν ἀνισότητα $0 \leqslant R^2 \leqslant 1$ - πληροῖ ἐπίσης τήν ἀνι-

σότητα $$\rho^2 \leqslant R^2 \qquad (5.88)$$
ἤτοι εἶναι πάντοτε μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς ἤ τ ο υ-λ ά χ ι σ τ ο ν ἴ σ ο ς πρός τόν ἀντίστοιχον γραμμικόν δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: 'Η οἰκογένεια τῶν παραβολῶν $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ περιλαμβάνει μεταξύ τῶν μελῶν της τήν οἰκογένειαν τῶν εὐθειῶν $y=\alpha+\beta x$ ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά τεθῇ $\gamma=0$. Κατά συνέπειαν ἡ ἐπιλογή τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως μεταξύ τῶν παραβολῶν - κατά τρόπον ὥστε νά ἐλαχιστοποιεῖται τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. - εἰς τήν χειροτέραν περίπτωσιν θά ὁδηγήσῃ ὅπου καί ἡ ἐπιλογή μεταξύ τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν - θά εὑρεθῇ δηλαδή $\hat{\gamma}=0$ - ἐν γένει ὅμως θά ὁδηγήσῃ εἰς μία παραβολήν μέ μικρότερον ἀκόμη μ.τ.σ. Οὕτω, ἐάν συμβολίσωμεν μέ ${\sigma_1}^2$ τό μ.τ.σ. τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἄριστον μέλος μεταξύ τῶν εὐθειῶν $y=\alpha+\beta x$ καί μέ ${\sigma_2}^2$ τό μ.τ.σ. τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἀρίστην καμπύλην δευτέρου βαθμοῦ, θά εἶναι πάντοτε

$${\sigma_1}^2 \geqslant {\sigma_2}^2$$

ἡ ἰσότης δέ θά ἰσχύῃ μόνον ἐάν ἅπαντα τά σημεῖα-δεδομένα τῆς παρατηρήσεως - $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ εὑρίσκονται ἐπ'εὐθείας γραμμῆς. 'Εκ τῆς τελευταίας ἀνισότητος προκύπτει ἀμέσως καί ἡ (5.88), ἡ ὁποία σημαίνει ὅτι "ἡ παραβολή" δευτέρου βαθμοῦ προσαρμόζεται ἐν γένει πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα μέ καλλιτέραν προσέγγισιν ἀπ'ὅτι ἡ εὐθεία, εἰς οὐδεμίαν δέ περίπτωσιν χειρότερον. 'Εξυπακούεται ὅτι, τό πόσον καλλιτέρα εἶναι ἡ οὕτω ἐπιτυγχανομένη προσέγγισις προκύπτει ἐκ τῆς διαφορᾶς $R^2-\rho^2$.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν ἕν ἁπλοῦν - ἐνδεικτικόν - ἀριθμητικόν παράδειγμα. Οἱ ἀπαιτούμενοι ὑπολογισμοί ἐμφαίνονται καταλλήλως εἰς τόν κατωτέρω Πίνακα (5.4)

| Δεδομένα | | Ὑπολογισμοί | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | y | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | xy | $x^2y$ | $y^2$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 |
| 2 | 16 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 256 |
| 3 | 30 | 9 | 27 | 81 | 90 | 270 | 900 |
| 4 | 40 | 16 | 64 | 256 | 160 | 640 | 1.600 |
| $\Sigma x=10$ | $\Sigma y=90$ | $\Sigma x^2=30$ | $\Sigma x^3=100$ | $\Sigma x^4=354$ | $\Sigma xy=285$ | $\Sigma x^2y=977$ | $\Sigma y^2=2.766$ |

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἀπεφασίσθη ἡ χρησιμοποίησις ὡς γραμμῆς παλινδρομήσεως μιᾶς εὐθείας $y=\alpha+\beta x$. Δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (5.53) καί (5.54) ἔχομεν

$$\hat{\beta} = \frac{5\times 285-10\times 90}{5\times 30-10^2} = \frac{1.425-900}{150-100} = \frac{525}{50} = 10,5$$

καί
$$\hat{\alpha} = \frac{90}{5} - 10,5\frac{10}{5} = 18-21 = -3$$

Οὕτω ἡ ζητουμένη εὐθεία παλινδρομήσεως εἶναι $\hat{y}=-3+10,5x$. Τό μ.τ.σ. $\sigma_1{}^2$ περί αὐτήν καί ὁ ἀντίστοιχος δείκτης $\rho^2$ ὑπολογιζόμενα ἐκ τῶν τύπων (5.55) καί (5.51) εἶναι

$$\sigma_1{}^2 = \frac{1}{5}(2.766+3\times 90-10,5\times 285) = 8,7$$

καί δεδομένου ὅτι $\sigma_y{}^2 = \frac{1}{5}(2.766- \frac{90^2}{5}) = 229,2$

$$\rho^2 = 1-\frac{8,7}{229,2} = \frac{220,5}{229,2} = 0,962$$

Ἐξ ἄλλου, ἐάν ἀποφασισθῇ ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς παραβολῆς $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, πρός προσδιορισμόν τῶν $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ καί $\hat{\gamma}$ θά χρησιμοποιηθῇ τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.83) τό ὁποῖον ἐν προκειμένῳ γίνεται

$$90=5\alpha+10\beta+30\gamma$$
$$285=10\alpha+30\beta+100\gamma$$
$$977=30\alpha+100\beta+354\gamma$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος λαμβάνομεν

$$\hat{\alpha}=-\frac{8}{14}=-0,6, \qquad \hat{\beta}=\frac{79}{14}=5,6 \qquad \hat{\gamma}=\frac{17}{14}=1,2$$

καί κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη παραβολή παλινδρομήσεως ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=-0,6+5,6x+1,2x^2$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma_2{}^2$ περί τήν ὡς ἄνω παραβολήν καί ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ δι'ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (5.86) καί (5.87) εἶναι

$$\sigma_2{}^2=\frac{1}{5}(2.766+\frac{8}{14}90-\frac{79}{14}285-\frac{17}{14}977)=4,6$$

καί $$R^2=1-\frac{4,6}{229,2}=\frac{224,6}{229,2}=0,979$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν $R^2=0,979$ καί $\rho^2=0,962$ προκύπτει ἡ βελτίωσις τήν ὁποίαν ἔχομεν ἐκ τῆς προσαρμογῆς τῆς παραβολῆς ἀπό τῆς εὐθείας. Ἐάν ἡ ἐν λόγῳ βελτίωσις ἀντισταθμίζει τάς περαιτέρω ὑπολογιστικάς δυσχερείας αἱ ὁποῖαι ὑπεισέρχονται κατά τήν προσαρμογήν τῆς παραβολῆς καί τάς δυσκολίας κατανοήσεως τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων εἶναι κάτι τό ὁποῖον θά ἀποφασισθῆ ὑπό τοῦ μελετητοῦ λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς φύσεως τῶν δεδομένων καί τῶν κατά περίπτωσιν ἀναγκῶν.

## Πολυωνυμική Παλινδρόμησις ν-βαθμοῦ

Γενικεύοντες τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα εἰς τήν οἰκογένειαν καμπύλων πολυωνυμικῆς μορφῆς ν-βαθμοῦ

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_\nu x^\nu \tag{5.89}$$

προκύπτουν τά ἑξῆς: Τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ὁποίου θά προκύψουν οἱ συντελεσταί $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_\nu$ τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως

$$\hat{y}=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 x+\hat{\alpha}_2 x^2+\ldots+\hat{\alpha}_\nu x^\nu \tag{5.90}$$

συνίσταται ἐκ $(\nu+1)$ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$\sum_i x_i^t y_i=\alpha_0\sum_i x_i^t+\alpha_1\sum_i x_i^{t+1}+\alpha_2\sum_i x_i^{t+2}+\ldots+\alpha_\nu\sum_i x_i^{t+\nu} \tag{5.91}$$

ὅπου $t=0,1,2,\ldots,(\nu-1),\nu$.

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν γραμμήν παλινδρομήσεως (5.90) ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\hat{y}_i)^2=\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\hat{\alpha}_0-\hat{\alpha}_1 x_i-\hat{\alpha}_2 x_i^2-\ldots-\hat{\alpha}_\nu x_i^\nu)^2 \tag{5.92}$$

ὑπολογίζεται δέ συνήθως ἐκ τοῦ τύπου

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\left(\sum_i y_i^2-\hat{\alpha}_0\sum_i y_i-\hat{\alpha}_1\sum_i x_i y_i-\hat{\alpha}_2\sum_i x_i^2 y_i-\ldots-\hat{\alpha}_\nu\sum_i x_i^\nu y_i\right) \tag{5.93}$$

Τέλος, ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \tag{5.94}$$

ὅπου $\sigma^2$ τό προκῦπτον ἐκ τῆς (5.93) μ.τ.σ. καί $\sigma_y^2$ ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν $y_i$, $i= 1,2,\ldots,N$ τῆς μεταβλητῆς Y.

Εἶναι προφανές ὅτι ὁ οὕτω ὑπολογιζόμενος δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ εἶναι μία αὔξουσα - ἐν τῇ εὐρείᾳ ἐννοίᾳ - συνάρτησις τοῦ βαθμοῦ ν τῆς προσδιοριζομένης καμπύλης. Πράγματι, ἐκ τῆς ἐπιχειρηματολογίας ἡ ὁποία ἐχρησιμοποιήθη πρός ἀπόδειξιν τῆς ἀνισότητος (5.88) προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$R^2(\nu-1)<R^2(\nu),\quad \nu=1,2,\ldots \tag{5.95}$$

ὅπου $R^2(\nu)$ συμβολίζει τόν δείκτην προσδιορισμοῦ ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ν-στοῦ βαθμοῦ καμπύλην (5.90).

'Ανάλυσις τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^2$

Κατ'ἀρχήν, ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως, ἀποδεικνύεται καί ἐνταῦθα - προκειμένου περί πολυωνυμικῆς παλινδρομήσεως οἱουδήποτε βαθμοῦ ν - ὅτι

$$\sum_i \hat{\varepsilon}_i = \sum_i (y_i - \hat{y}_i) = 0 \quad \text{καί συνεπῶς} \quad \sum_i y_i = \sum_i \hat{y}_i \tag{5.96}$$

Πράγματι, ἐκ τῆς πρώτης - εὑρισκομένης διά t=0 - τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.91) προκύπτει ὅτι

$$\sum_i \hat{\varepsilon}_i = \sum_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum_i (y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i - \ldots - \hat{\alpha}_\nu x_i^\nu) = 0$$

'Εκ τῆς (5.96) συνάγεται ἀκόμη ὅτι ἡ μέση τιμή τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν $\hat{y}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τῆς Y συμπίπτει μέ τήν μέση τιμήν $\mu_y$ τῶν ἀντιστοίχων ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν αὐτῆς.

'Εξ ἄλλου, συμβολίζοντες καί εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν διά $V(\hat{y})$ τήν εἰς τήν παλινδρόμησιν ὀφειλομένην διακύμανσιν τῶν οἱονεί τιμῶν τῆς Y καί διά $V(\hat{\varepsilon})$ τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ ἤ ἄλλως τήν διακύμανσιν τῶν ἀποκλίσεων $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$, $i=1,2,\ldots,N$ - ὀφειλομένην ὡς γνωστόν εἰς ἕτερα αἴτια - ἤτοι θέτοντες

$$V(\hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_i (\hat{y}_i - \mu_y)^2 \qquad \text{καί} \qquad V(\hat{\varepsilon}) = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sigma^2$$

θά ἀποδείξωμεν τήν γνωστήν ἰσότητα ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^2$

$$\sigma_y^2 = V(\hat{y}) + V(\hat{\varepsilon}) \tag{5.97}$$

'Εργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως ἔχομεν

$$N\sigma_y^2 = \sum_i (y_i - \mu_y)^2 = \sum_i \left[(y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \mu_y)\right]^2 =$$

$$= \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_i (\hat{y}_i - \mu_y)^2 + 2\sum_i (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \mu_y) =$$

$$= NV(\hat{\varepsilon}) + NV(\hat{y}) + 2\sum_i y_i - \hat{y}_i)\hat{y}_i - 2\mu_y \sum_i (y_i - \hat{y}_i)$$

λαμβάνοντες δέ ὑπ'ὄψιν τήν (5.96) καί ἀκόμη ὅτι

$$\sum_i (y_i-\hat{y}_i)\hat{y}_i=\sum_i (y_i-\hat{\alpha}_0-\hat{\alpha}_1 x_i-\hat{\alpha}_2 x_i^2-\ldots-\hat{\alpha}_\nu x_i^{\nu})(\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 x_i+\ldots$$

$$+\hat{\alpha}_\nu x_i^{\nu})=\hat{\alpha}_0\sum_i (y_i-\hat{\alpha}_0-\hat{\alpha}_1 x_i-\hat{\alpha}_2 x_i^{2}-\ldots-\hat{\alpha}_\nu x_i^{\nu})+\hat{\alpha}_1\sum_i (y_i-\hat{\alpha}_0-$$

$$-\hat{\alpha}_1 x_i-\hat{\alpha}_2 x_i^{2}-\ldots-\hat{\alpha}_\nu x_i^{\nu})x_i+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\hat{\alpha}_\nu\sum_i (y_i-\hat{\alpha}_0-\hat{\alpha}_1 x_i-\hat{\alpha}_2 x_i^{2}-\ldots-\hat{\alpha}_\nu x_i^{\nu})x_i^{\nu}=0$$

λόγῳ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.91), προκύπτει ἡ πρός ἀπόδειξιν σχέσις (5.91).

Τέλος, ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἰσοτήτων (5.94) καί (5.93) προκύπτει καί ἐν προκειμένῳ ἡ σχέσις

$$V(\hat{y})=R^2\sigma_y^{\,2} \tag{5.98}$$

ἐκ τῆς ὁποίας καθίσταται προφανές ὅτι ὁ δείκτης $R^2$ ἀντιπροσωπεύει τό ποσοστόν τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως τό ὁποῖον ἐπεξηγεῖται ὑπό τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης παλινδρομήσεως, ἐνῶ $1-R^2$ εἶναι τό ὑπόλοιπον - τό μή ἐπεξηγούμενον - μέρος αὐτῆς.

## 5.7 Καμπῦλαι Παλινδρομήσεως Ἀναγόμεναι εἰς τὴν Γραμμικὴν Μορφὴν

Εἰς πολλά προβλήματα παλινδρομήσεως ἡ φύσις τῶν δεδομένων, ἡ μορφή τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους ἤ τέλος ὑφισταμένη θεωρία περί τῆς μορφῆς καί τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X καί Y, ἐπιβάλλουν τήν χρησιμοποίησιν ὡς γραμμῶν παλινδρομήσεως ὡρισμένων εἰδικωτέρας μορφῆς καμπύλων - πέραν τῶν τοιούτων τῆς πολυωνυμικῆς μορφῆς - ἡ μελέτη τῶν ὁποίων θά μᾶς ἀπασχολήση εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον.

Αἱ ἐν λόγῳ καμπύλαι διά καταλλήλου μετασχηματισμοῦ τῶν δεδομένων ἤ ἄλλως τῶν μεταβλητῶν X καί Y, ἀνάγονται εἰς μίαν γραμμικήν μορφήν ἀνάλογον τῆς y=

$=\alpha+\beta x$. Κατά συνέπειαν αἱ ὑπεισερχόμεναι εἰς τάς ἐν λόγῳ καμπύλας ἄγνωστοι παράμετροι, τό μ.τ.σ. περί τήν προσδιοριζομένην ἑκάστοτε γραμμήν παλινδρομήσεως καί τέλος ὁ ἀντίστοιχος κατά περίπτωσιν δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$, θά ὑπολογίζωνται - ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως - ἐκ τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.48) τοῦ τύπου ὑπολογισμοῦ τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ (5.55) καί τέλος τοῦ τύπου (5.51) ὁ ὁποῖος δίδει τήν τιμήν τοῦ γραμμικοῦ δείκτου $\rho^2$. Ὡς εἶναι εὐνόητον κατά τήν ἐφαρμογήν τῶν ἀνωτέρω τύπων καί τήν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν ὑπολογισμῶν τά δεδομένα $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ ἀντικαθίσταται ἐκ τῶν νέων - τῶν μετασχηματισμένων - τοιούτων.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ τόν ἑκάστοτε κατάλληλον μετασχηματισμόν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X θά συμβολίζωμεν διά τοῦ X΄, τόν δέν μετασχηματισμόν τῆς Y διά τοῦ Y΄.

### 5.7.1 Παλινδρόμησις Ὑπερβολικῆς Μορφῆς

Πραγματευόμεθα ἐνταῦθα τάς περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ἡ γραμμή παλινδρομήσεως ἐλαχίστων τετραγώνων πρόκειται - ἔχει ἀποφασισθῆ - νά ἐπιλεγῆ μεταξύ τῶν ὑ π ε ρ β ο λ ῶ ν - μελῶν μιᾶς τῶν κατωτέρω διπαραμετρικῶν οἰκογενειῶν.

(α) $\dfrac{1}{y}=\alpha+\beta x$ (β) $y=\alpha+\dfrac{\beta}{x}$ (γ) $\dfrac{1}{y}=\alpha+\dfrac{\beta}{x}$

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἅπασαι αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἀποτελοῦν μερικάς περιπτώσεις τῆς τριπαραμετρικῆς ἐξισώσεως

$$y=\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\,,\quad \delta\neq 0$$

ἡ ὁποία ὡς γνωστόν παριστᾶ μία γενικωτέρα οἰκογένεια ὑ π ε ρ β ο λ ῶ ν μέ ἀσυμπτώτους τάς εὐθείας $y=\frac{\beta}{\delta}$ καί $x=-\frac{\gamma}{\delta}$. Ἡ χρησιμοποίησις ὅμως εἰς τήν πρᾶξιν τῶν εἰδικωτέρων τούτων μορφῶν ὑπαγορεύεται κατά βάσιν ἐκ τῆς εὐκόλου - δι' ἁπλῶν μετασχηματισμῶν - ἀναγωγῆς αὐτῶν εἰς τό γνωστόν γραμμικόν ὑπόδειγμα.

(α) Ὑπερβολή τῆς μορφῆς $\dfrac{1}{y}=\alpha+\beta x$. (5.99)

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ $y' = \frac{1}{y}$ (5.100) ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (5.99) λαμβάνει τήν γραμμικήν μορφήν

$$y' = \alpha + \beta x \tag{5.101}$$

Οὕτω, διά τόν προσδιορισμόν τῶν συντελεστῶν $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως

$$\hat{y}' = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x \tag{5.102}$$

καί κατ'ἐπέκτασιν τῆς ὑπερβολῆς παλινδρομήσεως

$$\hat{y} = \frac{1}{\hat{\alpha} + \hat{\beta} x} \tag{5.103}$$

ὡς καί τόν ὑπολογισμόν τοῦ περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου προσδιορισμοῦ $R^2$, ἀρκεῖ αἱ ἐκ παρατηρήσεως τιμαί $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τῆς μεταβλητῆς Y νά ἀντικατασταθοῦν ὑπό τῶν ἀντιστρόφων των $y_i' = \frac{1}{y_i}$, $i=1,2,\ldots,N$, ἐν συνεχείᾳ δέ νά ἐφαρμοσθοῦν οἱ γνωστοί τύποι τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως θεωρουμένων ὡς ἐμπειρικῶν δεδομένων τῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i, y_i')$, $i=1,2,\ldots,N$.

Παραθέτομεν κατωτέρω ἕν ἁπλοῦν - ἐνδεικτικόν - ἀριθμητικόν παράδειγμα. Τόσον τά ἀρχικά δεδομένα ὅσον καί οἱ μετασχηματισμοί καί οἱ ἀπαιτούμενοι ἐν συνεχείᾳ ὑπολογισμοί ἐμφαίνονται εἰς τόν Πίνακα (5.4).

Πίναξ 5.4

| Δεδομένα | | Ὑπολογισμοί | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | y | y'=1:y | $x^2$ | xy' | $y'^2$ |
| 1 | 20 | 0,05 | 1 | 0,05 | 0,0025 |
| 3 | 4 | 0,25 | 9 | 0,75 | 0,0625 |
| 5 | 2 | 0,50 | 25 | 2,50 | 0,2500 |
| 10 | 1 | 1,00 | 100 | 10,00 | 1,0000 |
| Σx= 19 | - | Σy'=1,80 | $\Sigma x^2$=135 | Σxy'=13,30 | $\Sigma y'^2$=1,3150 |

Μετά τόν μετασχηματισμόν τῶν τιμῶν τῆς Y - τρίτη στήλη - καί τήν ἐκτέλεσιν τῶν ἀπαραιτήτων ὑπολογισμῶν ἐπί τῶν νέων δεδομένων (x,y΄) ἐφαρμόζονται οἱ τύποι τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως (5.53) καί (5.54) ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν

$$\hat{\beta} = \frac{4\times 13,30-19\times 1,80}{4\times 135-19^2} = \frac{53,20-34,20}{540-361} = \frac{19}{179} = 0,106$$

καί
$$\hat{\alpha} = \frac{1,80}{4} - 0,106\frac{19}{4} = -0,053$$

Οὕτω, ἡ ζητουμένη καμπύλη παλινδρομήσεως ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}' = -0,053+0,106x$$

ἤ ἄλλως ὑπό τῆς
$$\hat{y} = \frac{1}{-0,053+0,106x}$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν προσδιορισθεῖσαν ὑπερβολήν ὑπολογιζόμενον ἐκ τοῦ τύπου (5.55) εἶναι

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(1,3150+0,053\times 1,80-0,106\times 13,30) = 0,00015$$

Ἐξ ἄλλου, ἡ διακύμανσις $\sigma_{y'}^2$ τῶν μετασχηματισμένων τιμῶν τῆς Y εἶναι

$$\sigma_{y'}^2 = \frac{1}{4}\left[1,3150-\frac{(1,8)^2}{4}\right] = 0,1262$$

καί συνεπῶς ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ εἶναι

$$R^2 = 1-\frac{0,00015}{0,12620} = \frac{0,12605}{0,12620} = 0,998$$

Διά λόγους συγκρίσεως καί μόνον προσδιορίζομεν τήν ἀντίστοιχον εὐθείαν παλινδρομήσεως, τό περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν γραμμικόν δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$. Πρός τοῦτο χρησιμοποιοῦνται τά ἀρχικά δεδομένα ὑπολογίζομεν τά ἀθροίσματα $\Sigma y=27$, $\Sigma xy=52$ καί $\Sigma y^2=421$ ἐν συνεχείᾳ δέ ἐφαρμόζομεν τούς αὐτούς ὡς ἄνω τύπους καί ἔχομεν

$$\hat{\beta} = \frac{4\times 52-19\times 27}{4\times 135-19^2} = \frac{208-513}{540-361} = -\frac{305}{179} = -1,7$$

καί $$\hat{\alpha} = \frac{27}{4}+1,7\frac{19}{4} = 14,8$$

Οὕτω, ἡ εὐθεια παλινδρομήσεως ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y} = 14,8-1,7x$$

Ἐξ ἄλλου τό περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$, ἡ διακύμανσις $\sigma_y{}^2$ τῶν - ἀρχικῶν - τιμῶν τῆς Y καί ὁ γραμμικός δείκτης προσδιορισμοῦ $\rho^2$ εἶναι

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(421-14,8\times 27+1,7\times 52) = 27,45$$

$$\sigma_y{}^2 = \frac{1}{4}(421-\frac{27^2}{4}) = 59,69$$

καί $$\rho^2 = 1-\frac{27,45}{59,69} = \frac{32,24}{59,69} = 0,53$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δεικτῶν $R^2=0,998$ καί $\rho^2=$ $=0,53$ καθίσταται προφανές ὅτι ἡ εὐθεῖα θά ἦτο ἐντελῶς ἀκατάλληλος διά τήν περιγραφήν τῆς ἐξεταζομένης σχέσεως ἐνῶ ἀντιστρόφως ἡ προσαρμογή τῆς ὑπερβολῆς $\frac{1}{y} = \alpha+\beta x$ εἶναι σχεδόν τελεία.

(β) Ὑπερβολή τῆς μορφῆς $y=\alpha+\frac{\beta}{x}$ (5.103)

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἀπαιτεῖται προφανῶς μετασχηματισμός (τῶν τιμῶν) τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X. Πράγματι, θέτοντες

$$x' = \frac{1}{x} \tag{5.104}$$

ἡ ἐξίσωσις (5.103) λαμβάνει τήν γραμμικήν μορφήν

$$y = \alpha+\beta x' \tag{5.105}$$

καί ὡς ἐκ τούτου καθίσταται δυνατόν - ὅπως καί εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν - νά ἐφαρμοσθῆ πλήρως ἡ θεωρία τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως. Ἐξυπακούεται ὅτι κατά τήν χρῆσιν τῶν σχετικῶν τύπων καί τήν ἐκτέλεσιν τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν ὡς ἐμπειρικά δεδομένα χρησιμοποιοῦντα τά ζεύγη $(x_i{}',y_i)$ ὅπου $x_i{}'=$ $=\frac{1}{x_i}$, $i=1,2,...,N$.

(γ) Ὑπερβολή τῆς μορφῆς $\frac{1}{y}=\alpha+\frac{\beta}{x}$ (5.106)

Διά τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μεταβλητῶν τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων

$$x'=\frac{1}{x} \quad \text{καί} \quad y'=\frac{1}{y} \qquad (5.107)$$

ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λαμβάνει τήν μορφήν

$$y'=\alpha+\beta x' \qquad (5.108)$$

ἐφαρμοζομένης καί πάλιν τῆς θεωρίας τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως. Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν τά ἐμπειρικά δεδομένα $(x_i, y_i)$ ἀντικαθίστανται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ὑπό τῶν ζευγῶν

$$(x_i', y_i') \text{ ἤ ἄλλως } \left(\frac{1}{x_i}, \frac{1}{y_i}\right) \quad i=1,2,\ldots N$$

Οὕτω π.χ. αἱ κανονικαί ἐξισώσεις (5.48) λαμβάνουν τήν μορφήν

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{y_i} &= \alpha N+\beta \sum_i \frac{1}{x_i} \\ \sum_i \frac{1}{x_i y_i} &= \alpha \sum_i \frac{1}{x_i}+\beta \sum_i \frac{1}{x_i^2} \end{aligned} \qquad (5.109)$$

τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἀντιστοίχου πρός τήν (5.55) σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\left(\sum_i \frac{1}{y_i^2}-\hat{\alpha}\sum_i \frac{1}{y_i}-\hat{\beta}\sum_i \frac{1}{x_i y_i}\right) \qquad (5.110)$$

ὅπου $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ἡ λύσις τοῦ συστήματος (5.109), τέλος δέ ὁ συντελεστής προσδιορισμοῦ $R^2$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_{y'}^2} \qquad (5.111)$$

ὅπου

$$\sigma_{y'}^2=\frac{1}{N}\left[\sum_i \frac{1}{y_i^2}-\frac{\left(\sum_i \frac{1}{y_i}\right)^2}{N}\right] \qquad (5.112)$$

Ἐξυπακούεται ὅτι ἀνάλογοι πρός τάς ἀνωτέρω ἐκφράσεις ἰσχύουν καί διά τάς προηγουμένας μορφάς ὑπερβολῶν.

### 5.7.2 Παλινδρόμησις Ἐκθετικῆς Μορφῆς (Ἡμιλογαριθμική)

Ὑποθέτομεν ἐν προκειμένῳ ὅτι ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως ἐλαχίστων τετραγώνων ἐπιλέγεται μεταξύ τῶν μελῶν τῆς διπαραμετρικῆς οἰκογενείας ἐκθετικῶν καμπύλων

$$y=\alpha\beta^{x} \tag{5.113}$$

Λαμβάνοντες τούς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (5.113) ἔχομεν ὅτι

$$\log y = \log\alpha + x\log\beta$$

θέτοντες δέ

$$y' = \log y \tag{5.114}$$

ἡ ἐξίσωσις (5.113) γράφεται τελικῶς ὑπό τήν γραμμικήν μορφήν

$$y' = A+Bx \tag{5.115}$$

ὅπου $A=\log\alpha$ καί $B=\log\beta$.

Οὕτω ὁ προσδιορισμός τῶν ἀγνώστων παραμέτρων A καί B - ἐν συνεχείᾳ δέ τῶν α καί β δι'ἁπλῆς ἀντιλογαριθμήσεως - γίνεται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \sum_i \log y_i &= AN + B\sum_i x_i \\ \sum_i x_i \log y_i &= A\sum_i x_i + B\sum_i x_i^2 \end{aligned} \tag{5.116}$$

ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐκ τοῦ συστήματος (5.48) ὅπου ἀντί τῶν ἀρχικῶν δεδομένων $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ χρησιμοποιοῦνται οἱ λογάριθμοι αὐτῶν (ἐξ οὗ καί τό ὄνομα ἡμιλογαριθμική παλινδρόμησις).

Ἐξ ἄλλου, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν οὕτω προσδιοριζομένην καμπύλην παλινδρομήσεως

$$\hat{y}' = \hat{A}+\hat{B}x \tag{5.117}$$

δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\Big[\sum_i(\log y_i)^2 - \hat{A}\sum_i \log y_i - \hat{B}\sum_i x_i \log y_i\Big] \tag{5.118}$$

ὁ δέ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ ἐκ τοῦ τύπου

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{y'}^2} \tag{5.119}$$

ὅπου

$$\sigma_{y'}^2 = \frac{1}{N}\Big[\sum_i(\log y_i)^2 - \frac{(\sum_i \log y_i)^2}{N}\Big] \tag{5.120}$$

### 5.7.3 Παλινδρόμησις Γεωμετρικῆς Μορφῆς (Διπλῆ Λογαριθμική)

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐπιλογή τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως γίνεται μεταξύ τῶν μελῶν τῆς διπαραμετρικῆς οἰκογενείας

$$y = \alpha x^{\beta} \tag{5.121}$$

Λαμβάνοντες - ὅπως καί εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν - τούς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (5.121), ἔχομεν τήν ἰσότητα - ἐξ οὗ καί τό ὄνομα διπλῆ λογαριθμική παλινδρόμησις -

$$\log y = \log\alpha + \beta\log x$$

θέτοντες δέ

$$y' = \log y \quad \text{καί} \quad x' = \log x \tag{5.122}$$

προκύπτει τελικῶς ἡ γραμμική ἐξίσωσις

$$y' = A + \beta x' \tag{5.123}$$

Οὕτω, ὁ προσδιορισμός τῶν ἀγνώστων παραμέτρων A καί β - ἐκ δέ τῆς A καί τῆς ἀρχικῆς παραμέτρου α δι' ἁπλῆς ἀντιλογαριθμήσεως - γίνεται ἐκ τοῦ συστήματος (5.48) τό ὁποῖον - θεωρουμένων πλέον ὡς ἐμπειρικῶν δεδομένων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀρχικῶν τιμῶν ἀμφοτέρων τῶν μεταβλητῶν - λαμβάνει τήν κατωτέρω μορφήν

$$\begin{aligned} \sum_i \log y_i &= AN + \beta\sum_i \log x_i \\ \sum_i \log x_i \log y_i &= A\sum_i \log x_i + \beta\sum_i(\log x_i)^2 \end{aligned} \tag{5.124}$$

Ἐξ ἄλλου, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$, - ἐφαρμοζομένων τῶν ἀντιστοίχων τύπων τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως - ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_i(\log y_i)^2 - \hat{A}\sum_i \log y_i - \hat{\beta}\sum_i \log x_i \log y_i\right] \qquad (5.124)$$

καί

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{y'}^2} \qquad (5.125)$$

ὅπου

$$\sigma_{y'}^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_i(\log y_i)^2 - \frac{(\sum_i \log y_i)^2}{N}\right].$$

### 5.7.4 Ἄλλαι Μορφαί Παλινδρομήσεως

Εἰς ὡρισμένα - μᾶλλον ἐξειδικευμένα - προβλήματα παλινδρομήσεως, πέραν τῶν ἀνωτέρω μορφῶν χρησιμοποιοῦνται καί διάφοροι ἄλλαι καμπύλαι, μερικαί τῶν ὁποίων - αἱ πλέον συνήθεις - παρατίθενται κατωτέρω. Αὗται ἀνάγονται εἰς τήν γνωστήν γραμμικήν μορφήν ἤ μίαν πολυωνυμικήν τοιαύτην, δι'ἐφαρμογῆς τῶν ἔναντι ἑκάστης ἀναφερομένων καταλλήλων μετασχηματισμῶν.

| | |
|---|---|
| $y=\alpha+\beta\log x$ | $x'=\log x$ |
| $\log y=\alpha+\frac{\beta}{x}$ | $y'=\log y$ καί $x'=\frac{1}{x}$ |
| $\sqrt{y}=\alpha+\beta x$ | $y'=\sqrt{y}$ |
| $y=\alpha+\beta\log x+\gamma(\log x)^2$ | $x'=\log x$. |

## 5.8 Ἐπιλογή τῆς Μορφῆς τῆς Καμπύλης Παλινδρομήσεως

Εἰς τάς προηγουμένας παραγράφους μᾶς ἀπησχόλησε κατά βάσιν ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως ὡς καί αἱ μέθοδοι ἀξιολογήσεως τῆς ἀκριβείας - ἀξιοπιστίας - τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἀναζήτησις καί ἐπιλογή τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης γίνεται μεταξύ τῶν μελῶν ὡρισμένης - δεδομένης ἐκ τῶν προτέρων - οἰκογενείας καμπύλων, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις θεωρουμένης γνωστῆς τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$. Οὕτω π.χ. περιοριζόμενοι εἰς τά μέλη - καί μόνον - τῆς οἰκογενείας τῶν εὐθειῶν $y=\alpha+\beta x$ εἴδομεν τόν τρόπον εὑρέσεως, ἀξιολογήσεως καί ἀξιοποιήσεως τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$. Ὁμοίως, δεχόμενοι ὅτι ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως πρέπει νά εἶναι μία παραβολή δευτέρου βαθμοῦ ἤ μία ἐκθετική καμπύλη, ἐπελέξαμεν - διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων - τήν καταλληλοτέραν τοιαύτην μεταξύ τῶν καμπύλων-μελῶν τῶν οἰκογενειῶν $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ καί $y=\alpha\beta^x$ ἀντιστοίχως.

Μέ ποῖον ὅμως τρόπον καί μέ ποία κριτήρια ἐπιλέγεται ἡ καταλληλοτέρα κατά περίπτωσιν μορφή τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$; Πῶς δηλαδή ἀποφασίζεται ἐάν ἡ γραμμή παλινδρομήσεως δέον νά ἀναζητηθῇ μεταξύ τῶν εὐθειῶν τῆς οἰκογενείας $y=\alpha+\beta x$, ἤ τῶν παραβολῶν $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ ἤ τῶν ὑπερβολῶν $\frac{1}{y}=\alpha+\beta x$ κ.ο.κ.;

Ἡ μορφή τῆς κατά περίπτωσιν χρησιμοποιουμένης ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ ἤ ἄλλως τό σχῆμα τῶν καμπύλων-μελῶν τῆς ἀντιστοίχου οἰκογενείας εἶναι δυνατόν νά ἀποφασισθῇ εἰς τήν πρᾶξιν εἴτε βάσει θεωρητικῶν δεδομένων εἴτε κατά τρόπον ἐμπειρικόν χρησιμοποιουμένων πρός τοῦτο αὐτῶν τούτων τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως.

Συγκεκριμένως, ἐάν ἀναφορικῶς πρός τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὑφίσταται ἐκ τῶν προτέρων ὡρισμένη θεωρία ἤ ὑπόθεσις, ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ ὑπαγορεύεται ὑπ'αὐτῆς καί εἶναι δυνατόν νά προκαθωρισθῇ ἀναλόγως (σχέσεις π.χ. τιμῶν καί ζητουμένων ποσοτήτων, παραγωγῆς καί κεφαλαίου ἤ ἐργασίας κ.ο.κ.). Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἐπιδιώκεται συνήθως πρῶτον, ὁ ἔλεγχος - τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - τῆς καταλληλότητος τῆς χρησιμοποιηθείσης ἐξισώσεως καί δεύτερον, ἡ συγκεκριμενοποίησις αὐτῆς - διά τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν παραμέτρων α, β κλπ - ὥστε νά καταστῇ δυνατή ἡ ἀξιοποίησίς της εἰς τήν πρᾶξιν.

Ἐν ἀπουσίᾳ τοιαύτης θεωρίας ἡ ὑποθέσεως, ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ ἀποφασίζεται κατά κανόνα ἐ μ π ε ι ρ ι κ ῶ ς γενομένης χρήσεως τῶν συλλεγέντων δεδομένων. Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα τό στικτό διάγραμμα εἴτε τῶν ἀ ρ χ ι κ ῶ ν δεδομένων εἴτε διαφόρων μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ῶ ν αὐτῶν καί ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως $y = f(x,\alpha,\beta)$ καθορίζεται βάσει τοῦ σχήματος ἤ ἄλλως τῆς μορφολογίας τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους. Οὕτω ἐάν τά ἐπί μέρους σημεῖα $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$ συγκεντροῦνται - κατά προσέγγισιν - πέριξ μιᾶς ἰδεατῆς εὐθείας θά πρέπει - κατ'ἀρχήν τουλάχιστον - ἡ γραμμή παλινδρομήσεως νά ἐπιλεγῆ μεταξύ τῶν εὐθειῶν τῆς οἰκογενείας $y=\alpha+\beta x$. Ἀντιθέτως ἐάν τό σημειακόν νέφος συνοφίζεται διά μιᾶς μονοκορύφου - μέ ἕν ἀκρότατον - καμπύλης χρησιμοποιεῖται συνήθως ἡ παραβολή δευτέρου βαθμοῦ $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ κ.ο.κ. Ἐξ ἄλλου, ἐάν διαπιστωθῆ ὅτι τά μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ έ ν α σημεῖα

$$(x_i,\frac{1}{y_i}) \quad ἤ \quad (\frac{1}{x_i},y_i) \quad ἤ \quad (\frac{1}{x_i},\frac{1}{y_i}) \quad i=1,2,\ldots,N$$

εὑρίσκονται (περίπου) ἐπ'εὐθείας γραμμῆς, ἡ χρησιμοποιηθησομένη ἐξίσωσις θά πρέπει νά ἔχη μία τῶν ἀντιστοίχων ὑπερβολικῶν μορφῶν αἱ ὁποῖαι ἐξητάσθησαν προηγουμένως. Ὁμοίως θά πρέπει νά γίνη χρῆσις τῆς ἐκθετικῆς ἤ τῆς γεωμετρικῆς ἐξισώσεως ἐάν διαπιστωθῆ ἀντιστοίχως ὅτι τά σημεῖα $(x_i,\log y_i)$ ἤ $(\log x_i, \log y_i)$ εὑρίσκονται κατά προσέγγισιν ἐπ'εὐθείας γραμμῆς.

Ἡ χρῆσις ὅμως τοῦ στικτοῦ διαγράμματος πρός καθορισμόν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως - ὀπτικῷ τῷ τρόπῳ - δέν εἶναι πάντοτε ἀπαραίτητος. Εἰς πολλάς πρακτικάς ἐφαρμογάς - ἰδιαιτέρως προκειμένου περί στατιστικῶν πειραμάτων - ὡς τιμαί τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X εὑρίσκονται εἰς ἀριθμητικήν πρόοδον, αὐξάνουν δηλαδή κατά σταθεράν - κατά προσέγγισιν τουλάχιστον - ποσότητα καί ὁ καθορισμός τῆς μορφῆς τῆς παλινδρομήσεως δύναται νά γίνη - χονδρικῶς τουλάχιστον - δι'ἁπλῆς μελέτης τῆς συμπεριφορᾶς τῶν τιμῶν τῆς Y. Οὕτω, ἐάν αἱ διαδοχικαί διαφοραί τῶν τιμῶν τῆς X εἶναι περίπου σταθεραί, ἤτοι $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i = c$, $i=1,2,\ldots,N$ ἐξετάζονται συνήθως αἱ διαφοραί τῶν τιμῶν τῆς Y ἤτοι $\Delta y_i = y_{i+1}-y_i$ ἤ αἱ διαφοραί τῶν ἐν λόγῳ διαφορῶν - καλούμεναι δ ε ύ τ ε ρ α ι δ ι α φ ο ρ α ί - $\Delta^2 y_i =$

$=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i$ κ.ο.κ. Ἡ κατά προσέγγισιν σταθερότης τῶν πρώτων διαφορῶν, ἤτοι ἐάν $\Delta y_i=c$ (περίπου) $i=1,2,\ldots,N$ ἀποτελεῖ ἔνδειξιν διά τήν χρησιμοποίησιν τῆς εὐθείας $y=\alpha+\beta x$. Ἐξ ἄλλου ἐάν αἱ δεύτεραι, τρίται κλπ διαφοραί εἶναι σταθεραί θά πρέπει νά προτιμηθῆ ἀντιστοίχως ἡ παραβολή δευτέρου ἤ τρίτου βαθμοῦ κ.ο.κ.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος, ὡς εἶναι εὐνόητον, δύναται νά ἐφαρμοσθῆ καί ἐπί μετασχηματισμένων δεδομένων. Οὕτω π.χ. ἐάν αἱ διαφοραί τῶν ἀντιστρόφων τῶν τιμῶν τῆς Y εἶναι σταθεραί, ἤτοι ἐάν

$$\Delta\left(\frac{1}{y_i}\right)=\frac{1}{y_{i+1}}-\frac{1}{y_i}=C\,,\quad i=1,2,\ldots,N$$

θά πρέπει νά χρησιμοποιηθῆ ἡ ὑπερβολή $\frac{1}{y}=\alpha+\beta x$, ἐνῶ ἐάν συμβαίνει τό π η λ ί κ ο ν τῶν διαδοχικῶν τιμῶν τῆς Y νά εἶναι (περίπου) σταθερόν – ἕν ἄλλοις λόγοις ἐάν αἱ διαφοραί τῶν λογαρίθμων εἶναι σταθεραί, ἤτοι $\log y_{i+1}-\log y_i=c$ – χρησιμοποιεῖται ἡ ἐκθετική μορφή κ.ο.κ.

Ὑπεδείχθησαν ἀνωτέρω αἱ ἐφαρμοζόμεναι συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν ἐμπειρικαί μέθοδοι διά τήν κατ'ἀρχήν ἐπιλογήν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως. Ἐνταῦθα δέον νά τονισθῆ ὅτι αἱ ἐν λόγῳ μέθοδοι ἐνέχουσαι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον τό στοιχεῖον τῆς ὑποκειμενικότητος δέν ὁδηγοῦν πάντοτε εἰς τήν ἀρίστην λύσιν καί τήν καταλληλοτέραν κατά περίπτωσιν γραμμήν παλινδρομήσεως.

Οὕτω, διά τήν τελικήν ἐπιλογήν τῆς μορφῆς τῆς παλινδρομήσεως πέραν τῶν ἀνωτέρω μεθόδων καί ἐν συνεχείᾳ αὐτῶν ὑπολογίζεται καί χρησιμοποιεῖται συνήθως καί ὁ δείκτης προσαρμογῆς $R^2$. Συγκεκριμένως μετά τόν καθ'οἱονδήποτε τρόπον καθορισμόν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ καί τόν προσδιορισμόν τῆς συγκεκριμένης καμπύλης παλινδρομήσεως $\hat{y}=f(x,\hat{\alpha},\hat{\beta})$, ὑπολογίζεται ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσαρμογῆς $R^2$, ὁ ὁποῖος ὡς γνωστόν ἀποτελεῖ ἕν ἀντικειμενικόν μέτρον τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης καί κατά συνέπειαν ἀντανακλᾶ τό "πόσον καλά" αὕτη περιγράφει τήν σχέσιν τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Ἐάν ἡ τιμή τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου εἶναι πλησίον τῆς μονάδος ἡ ἐπιλεγεῖσα μορφή παλινδρομήσεως δύναται νά θεωρῆται ὡς ἱκανοποιητική. 'Εν έναντία περιπτώσει δοκιμάζονται συνήθως καί ἕτεραι μορφαί τῆς ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ τελικῶς δέ ἐπιλέγεται ἐκείνη ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς τήν μεγαλυτέραν τιμήν τοῦ $R^2$. 'Επ'αὐτοῦ ὅμως δέον νά διευκρινισθοῦν καί νά ληφθοῦν σοβαρῶς ὑπ'ὄψιν τά ἑξῆς: 'Ως ἤδη ἐλέχθη ὁ δείκτης $R^2$ ὁ ὁποῖος προέρχεται ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως μιᾶς παραβολῆς δευτέρου βαθμοῦ εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος (ἤ τουλάχιστον ἴσος) τοῦ γραμμικοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $\rho^2$ (ὁ δείκτης ἐκ τῆς πολυωνυμικῆς καμπύλης τρίτου βαθμοῦ ἀκόμη μεγαλύτερος κ.ο.κ.). Οὕτω ἐάν ἡ ἐπιλογή τῆς $y=f(x,\alpha,\beta)$ ἐβασίζετο εἰς τήν τιμήν καί μόνον τοῦ δείκτου $R^2$ οὐδέποτε θά ἐπελέγετο ἡ εὐθεῖα $y=\alpha+\beta x$ ἀλλά θά ἦτο προτιμητέα μία παραβολή δευτέρου ἤ ἀνωτέρου βαθμοῦ. Τοιοῦτον τι ὅμως δέν συμβαίνει. Πέραν τῆς τιμῆς τοῦ $R^2$ εἰς τήν ἐπιλογήν τῆς καταλλήλου κατά περίπτωσιν ἐξισώσεως $y=f(x,\alpha,\beta)$ λαμβάνεται σοβαρῶς ὑπ'ὄψιν καί ἡ ἁπλότης αὐτῆς, ἡ εὐκολία κατανοήσεως τῆς ἐν γένει σημασίας της, ὡς καί ἡ δυνατότης ἀμέσου καί πρακτικῆς ἑρμηνείας τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων.

Οὕτω, ὁ μελετητής θά προτιμήση τήν πολυπλοκωτέραν ἐκ δύο μορφῶν παλινδρομήσεως, μόνον ἐάν - κατά τήν κρίσιν του - ἡ πραγματοποιουμένη βελτίωσις εἰς τήν τιμήν τοῦ δείκτου $R^2$ εἶναι ο ὐ σ ι ώ δ η ς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 6

# ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΕΙΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ

## 6.1 Ἀνάλυσις Συσχετίσεως καὶ Ἀνάλυσις Παλινδρομήσεως

λαμβανομένων ἀπό
Ἡ συνεξέτασις δύο μεταβλητῶν - πρός ἀλλήλας - σκο-
κοινοῦ καί θεωρουμένων ἐν σχέσει εἰς τήν διερεύνησιν τοῦ
πεῖ, ὡς εἴδομεν, κατά βάσιν καί "π ο ῖ ο ν τ ρ ό-
"ἐ ά ν", "κ α τ ά π ό σ ο ν" τῆς μιᾶς σχετίζεται
π ο ν" ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῶν τιμῶν τῆς
πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῆς διαμορφώσεως τήν μελέτην τῆς
ἄλλης, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις εἰς μεταβλητῶν σ υ ν α φ ε ί-
τυχόν ὑφισταμένης μεταξύ τῶν οἱονδήποτε τρόπον ἀ λ-
α ς καί γενικώτερον τῆς καθ' αὐτῶν.
λ η λ ε ξ α ρ τ ή σ ε ω ς

ἀπαντήσεις εἰς τάά-
Πλήρεις καί ἀντικειμενικαί νά δοθοῦν μόνον διά
νωτέρω ἐρωτήματα εἶναι δυνατόν κ α τ α λ λ η λ ο τ έ ρ α ς
τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή-
κατά περίπτωσιν γ ρ α μ μ ῆ ς ἀντιστοίχου πρόςαὐ-
σ ε ω ς καί τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ δι' ἐφαρ-
τήν δ ε ί κ τ ο υ π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς, εἶναι γνωστή ἐν
μογῆς δηλαδή τῆς διαδικασίας ἡ ὁποία π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε-
γένει ὡς ἀ ν ά λ υ σ ι ς εἰς τό προηγούμενον κεφά-
ω ς. Πράγματι, ὡς εἴδομεν περιγράφει συνο-
λαιον, μία ἐξίσωσις παλινδρομήσεως τῶν συνεξεταζομέ-
πτικῶς τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τήν νομοτέλειαν ἡ ὁποία
νων μεταβλητῶν, ἀποκαλύπτει τῶν τιμῶν τῆς
διέπει γενικῷ τῷ τρόπῳ τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆςἄλ-
μιᾶς ἐν σχέσει πρός τήν διαμόρφωσιν τῆς θεωρουμένης
λης, τέλος δέ ἐπιτρέπει ἐκ τῶν τιμῶν - ἐκτιμῶν-
ὡς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς νά ὑπολογίζωνται ἀντίστοιχοι-οἱ-
ται, προβλέπωνται - κατά προσέγγισιν Ἐξ ἄλλου, ὁ
ονεί - τιμαί τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης. τόν
ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ χαρακτηρίζων καμπύλης πα-
βαθμόν προσαρμογῆς τῆς προσδιορισθείσης α" τῶν ἐπί μέ-
λινδρομήσεως ἤ ἄλλως τήν "ἐ γ γ ύ τ η τ διαγράμματος -
ρους δεδομένων - σημείων τοῦ στικτοῦ προσέγγισιν -
πρός αὐτήν, ἀντανακλᾶ τήν ἀκρίβειαν - μεταβλητῶν προ-
μέ τήν ὁποίαν αἱ τιμαί τῆς μιᾶς τῶν

δικάζουν τάς άντιστοίχους τιμάς τῆς ἄλλης καί ὡς ἐκ τούτου ἀποτελεῖ μέτρον τῆς ἰσχύος ἢ ἄλλως τοῦ βαθμοῦ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν μεταβλητῶν σ υ ν α φ ε ί α ς (τάσεως πρός ἀντιστοιχίαν, δεσμοῦ, ἀλληλουχίας).

Μία μερικωτέρα διερεύνησις τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς δύο μεταβλητῶν, ἀφορῶσα κυρίως τήν κατ' ἀντικειμενικόν τρόπον μέτρησιν τοῦ βαθμοῦ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας, εἶναι δυνατόν - εἰς ὡρισμένας τουλάχιστον περιπτώσεις - νά ἐπιτευχθῆ δι' ἁπλουστέρων μεθόδων συγκεκριμένως δέ διά τοῦ ὑπολογισμοῦ - ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν πάντοτε δεδομένων - ὡρισμένων ἁπλῶν ποσοτικῶν ἐκφράσεων γνωστῶν ἐν γένει ὡς σ υ ν τ ε λ ε σ τ ῶ ν σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ἢ γενικώτερον δ ε ι κ τ ῶ ν σ υ ν α φ ε ί α ς ('Α ν ά λ υ σ ι ς Σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς). Οἱ ἐν λόγῳ δεῖκται ἐξαρτώμενοι, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ἐκ τοῦ τρόπου καί τοῦ βαθμοῦ σ υ μ μ ε τ α β ο λ ῆ ς τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ἀποτελοῦν, εἰς τήν περίπτωσιν τουλάχιστον γραμμικῆς ἐξαρτήσεως, λίαν ἱκανοποιητικά μέτρα τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν μεταβλητῶν συναφείας.

Εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ἡ ἀνάλυσις συσχετίσεως καί ἡ ἀνάλυσις παλινδρομήσεως ἐφαρμόζονται συνήθως ἐν συνδυασμῷ. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς προηγεῖται κατά κανόνα ἡ ἀνάλυσις συσχετίσεως διότι τά ἐξ αὐτῆς εὑρήματα - συμπεράσματα - διευκολύνουν ὡς θά ἴδωμεν σημαντικώτατα τήν περαιτέρω - εἰς βάθος - μελέτην τῶν δεδομένων καί ἰδιαιτέρως τήν ἐπιλογήν τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν μορφῆς παλινδρομήσεως. Εἰς ὡρισμένας ὅμως περιπτώσεις ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται μόνον διά τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον συμμεταβάλλονται αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί (τόν βαθμόν τῆς μεταξύ αὐτῶν συναφείας κλπ) καί οὐχί διά τήν π ρ ό β λ ε ψ ι ν τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ἄλλης. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς συμβαίνει πολλάκις τά εὑρήματα ἐκ τῆς ἀναλύσεως συσχετίσεως νά δίδουν ἀπαντήσεις εἰς τά τεθέντα ἐρωτήματα καί ἡ ὅλη διαδικασία νά μήν ἐπεκτείνεται εἰς τήν ἀνάλυσιν παλινδρομήσεως.

'Αντιθέτως ἡ ἀνάλυσις παλινδρομήσεως καθίσταται ἐντελῶς ἀπαραίτητος ἐάν μεταξύ τῶν ἐπιδιώξεων τοῦ μελετητοῦ εἶναι καί ἡ πρόβλεψις, ἐάν δηλαδή - πέραν τῶν ἄλλων - ἐπιδιώκεται ὁ καθορισμός μιᾶς συγκεκριμένης ποσοτικῆς διαδικασίας διά τῆς ὁποίας νά εἶναι δυνατόν ἐκ τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς τῶν μεταβλητῶν νά ὑπολογίζωνται - ἔστω καί κατά προσέγγισιν - αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς ἄλλης, πρᾶγμα τό ὁποῖον ἐπιτυγχάνεται ὡς γνωστόν μόνον διά τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς καταλλήλου ἐξισώσεως παλινδρομήσεως.

Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ ἀνάλυσις παλινδρομήσεως χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα εἰς τάς περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὑφίσταται αἰτιώδης ἐξάρτησις, σχέσις δηλαδή αἰτίου καί ἀποτελέσματος ὡς π.χ. ἡ σχέσις μεταξύ τῆς χρησιμοποιηθείσης ποσότητος ἐξ ἑνός λιπάσματος καί τῆς παραχθείσης ἀντιστοίχως ποσότητος ἑνός προϊόντος, μεταξύ ἡλικίας καί ἀναστήματος ἤ νοημοσύνης, διανυομένης ὑπό τινος ὀχήματος ἀποστάσεως καί καταναλισκομένης βενζίνης κ.ο.κ. Εἰς τάς ἐν λόγῳ περιπτώσεις ἐπιδιώκεται ὁ προσδιορισμός τῆς καταλλήλου ἐξισώσεως παλινδρομήσεως προκειμένου ἐκ τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (αἰτίου) νά εἶναι δυνατή ἡ πρόβλεψις τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης (ἀποτελέσματος).

Ἀντιθέτως, ἡ ἀνάλυσις συσχετίσεως ἐφαρμόζεται κατά κανόνα μεμονωμένως εἰς τάς περιπτώσεις μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι δέν συνδέονται μέν δι' οἱασδήποτε αἰτιώδους σχέσεως ἐμφανίζουν ὅμως ἰσχυράν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συνάφειαν καθ' ὅσον αἱ τιμαί αὐτῶν - διαμορφούμεναι συνήθως τῇ ἐπιδράσει τρίτου κοινοῦ παράγοντος - παρουσιάζουν χαρακτηριστικήν τάσιν πρός ἀντιστοιχίαν. Τά ἀναστήματα π.χ. ἀδελφῶν τοῦ αὐτοῦ φύλου, οἱ βαθμοί τῶν Μαθηματικῶν καί τῆς Φυσικῆς τῶν μαθητῶν ἑνός γυμνασίου, ἡ περίμετρος τοῦ στήθους καί τῆς μέσης ἐνηλίκων ἀνδρῶν, ἡ κατανάλωσις βενζίνης καί ὁ βαθμός φθορᾶς τῶν ἐλαστικῶν ἑνός αὐτοκινήτου κ.ο.κ. ἀποτελοῦν παραδείγματα μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι παρ' ὅτι δέν συνδέονται δι' οἱασδήποτε αἰτιώδους σχέσεως εὑρίσκονται μεταξύ των ἐν στενωτάτῃ ἀλληλουχίᾳ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ γνῶσις τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμος διά τήν πρόβλεψιν ἤ τήν ἑρμηνείαν τῆς συμπεριφορᾶς τῆς ἄλλης. Εἰς τοιαὐτάς περιπτώσεις εἶναι πολλάκις δυνατόν ὁ μελετητής νά περιορισθῆ εἰς τά συμπεράσματα τά ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς καί μόνον τῆς ἀναλύσεως συσχετίσεως.

Πρός τούτοις, ἡ ἀνάλυσις συσχετίσεως ἀποδεικνύεται ἐξαιρετικῶς χρήσιμος - ὡς προκαταρκτικόν στάδιον τῆς διερευνήσεως τῶν δεδομένων - εἰς περιπτώσεις στατιστικῶν ἐρευνῶν αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν πολυάριθμον πλῆθος μεταβλητῶν. Ἐν προκειμένῳ αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί λαμβάνονται συνήθως ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους καί ὑπολογίζονται οἱ συντελεσταί συσχετίσεως αὐτῶν, καταρτίζεται δηλαδή μία μήτρα γνωστή ὡς μ ή τ ρ α (τῶν συντελεστῶν) σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς. Ἐκ τῆς ἐν λόγῳ μήτρας καθίσταται συνήθως δυνατόν ἀφ'ἑνός νά ἐπιλεγοῦν ὁμάδες μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν ἰσχυράν μεταξύ των συνάφειαν (π α ρ α γ ο ν τ ι κ ή ἀ ν ά λ υ σ ι ς) ἀφ'ἑτέρου δέ ζ ε ύ γ η μεταβλητῶν ἡ σχέσις τῶν ὁποίων ἀπαιτεῖ περαιτέρω διερεύνησιν.

Εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους θά μᾶς ἀπασχολήση ἡ ἔννοια, ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ καί αἱ μέθοδοι ἀξιοποιήσεως διαφόρων δεικτῶν συναφείας, ἰδιαιτέρως δέ τοῦ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ο ῦ (γραμμικῆς) σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς.

## 6.2 Ροπαὶ Διμεταβλητῶν Κατανομῶν

Τά ἐμπειρικά δεδομένα τά ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου καί γενικώτερον τά βασικά γνωρίσματα καί αἱ ἰδιότητες τῆς ἀντιστοίχου διμεταβλητῆς κατανομῆς - θέσις, διασπορά, μορφολογία, τρόπος ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συγκατανεμημένων μεταβλητῶν κλπ. - εἶναι δυνατόν νά περιγραφοῦν συνοπτικῶς δι'ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν ἀριθμητικῶν μεγεθῶν, καλουμένων, ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν μονομεταβλητῶν κατανομῶν, Ρ ο π ῶ ν ἤ ἄλλως Μ ι κ τ ῶ ν Ρ ο π ῶ ν τοῦ ὑπό ἔρευναν διμεταβλητοῦ πληθυσμοῦ.

Αἱ Ροπαί τῆς σ υ γ κ α τ α ν ο μ ῆ ς δύο μεταβλητῶν X καί Y - διακρινόμεναι καί ἐν προκειμένῳ

εἰς ἁ π λ ᾶ ς (περί τήν ἀρχήν) καί κ ε ν τ ρ ι κ ά ς
(περί τούς μέσους) τοιαύτας - εἶναι ἐν γένει (ἀρι-
θμητικοί) μ έ σ ο ι ὅ ρ ο ι τῶν τιμῶν ὡρισμένων συ-
ναρτήσεων τῶν X, Y.

Συγκεκριμένως, 'Α π λ ῆ Ρ ο π ή τάξεως (τ,ω)
- ὅπου τ, ω οἱοιδήποτε μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι ἀριθμοί -
καλεῖται ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τοῦ γινομένου $X^{\tau}Y^{\omega}$.
Αὕτη συμβολιζομένη συνήθως $\nu_{\tau\omega}$ ὑπολογίζεται ἐκ τῶν
τύπων

$$\nu_{\tau\omega} = E(X^{\tau}Y^{\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1} x_i^{\tau} y_i^{\omega} \tag{6.1}$$

$$\nu_{\tau\omega} = E(X^{\tau}Y^{\omega}) = \frac{1}{f_{..}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\, x_i^{\tau} y_j^{\omega} \tag{6.2}$$

ἀναλόγως ἐάν τά χρησιμοποιούμενα πρός τοῦτο ἐμπειρι-
κά δεδομένα εἶναι ἁ π λ ᾶ ἤ τ α ξ ι ν ο μ η μ έ-
ν α.

'Εξ ἄλλου, Κ ε ν τ ρ ι κ ή Ρ ο π ή τάξεως (τ,
ω) καλεῖται ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τοῦ γινομένου
$(X-\mu_X)^{\tau}(Y-\mu_y)^{\omega}$ ὅπου $\mu_X$ καί $\mu_y$ παριστοῦν ἀντιστοίχως
τούς μέσους ὅρους τῶν μεταβλητῶν X καί Y. Αὕτη συμ-
βολίζεται συνήθως $\mu_{\tau\omega}$ καί ὑπολογίζεται ἐκ τῶν τύπων

$$\mu_{\tau\omega} = E\,(X-\mu_X)^{\tau}(Y-\mu_y)^{\omega} = \frac{1}{N}\sum_{i}(x_i-\mu_X)^{\tau}(y_i-\mu_y)^{\omega} \tag{6.3}$$

(περίπτωσις ἁ π λ ῶ ν ἐμπειρικῶν δεδομένων) καί

$$\mu_{\tau\omega} = E\,(X-\mu_X)^{\tau}(Y-\mu_y)^{\omega} = \frac{1}{f_{..}}\sum_{i}\sum_{j} f_{ij}(x_i-\mu_X)^{\tau}(y_j-\mu_y)^{\omega} \tag{6.4}$$

(περίπτωσις τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων).

Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἀποτελοῦν προφανῶς μερικάς πε-
ριπτώσεις τῶν γενικωτέρων τοιούτων

$$E\,g(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i,y_i) \tag{6.5}$$

καί $$E\, g(X,Y) = \frac{1}{f_{..}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda} f_{ij}\, g(x_i, y_j) \tag{6.6}$$

διά τῶν ὁποίων ὑπολογίζεται - ἐξ ἁ π λ ῶ ν καί τα-ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν ἀντιστοίχως ἐμπειρικῶν δεδομένων - ἡ μ έ σ η τ ι μ ή μιᾶς οἱασδήποτε συναρτήσεως g(X,Y) τῶν συγκατανεμομένων μεταβλητῶν X,Y.

Εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχουν αἱ ἁπλαῖ ροπαί $\nu_{10}$ καί $\nu_{01}$ καί αἱ κεντρικαί ροπαί $\mu_{20}$, $\mu_{02}$ καί $\mu_{11}$. Συγκεκριμένως, τό ζεῦγος τῶν ροπῶν

$$\nu_{10} = E(X) = \mu_x \qquad \text{καί} \qquad \nu_{01} = E(Y) = \mu_y$$

δίδει ἀντιστοίχως τούς μέσους ὅρους τῶν X καί Y καί ὡς ἐκ τούτου προσδιορίζει ἐν γένει τήν θ έ σ ι ν τῆς διμεταβλητῆς κατανομῆς. Ἐξ ἄλλου, αἱ κεντρικαί ροπαί

$$\mu_{20} = E(X-\mu_x)^2 = \sigma_x^2 \qquad \text{καί} \qquad \mu_{02} = E(Y-\mu_y)^2 = \sigma_y^2$$

ἀποτελοῦσαι ἀντιστοίχως τάς διακυμάνσεις τῶν μεταβλητῶν X καί Y χαρακτηρίζουν τήν δ ι α σ π ο ρ ά ν τῆς συγκατανομῆς τῶν X, Y (κατά μῆκος τῶν ἀξόνων x καί y.

Τέλος, ἡ κεντρική ροπή

$$\mu_{11} = E\,(X-\mu_x)(Y-\mu_y)$$

καλουμένη συνήθως σ υ ν δ ι α κ ύ μ α ν σ ι ς τῶν X, Y χαρακτηρίζει, ὡς θά ἴδωμεν λεπτομερέστερον εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον, τόν τρόπον μέ τό ὁποῖον συμμεταβάλλονται αἱ ἐν λόγῳ μεταβληταί, πρός τούτοις δέ, ἀποτελεῖ μέτρον τῆς μεταξύ αὐτῶν συναφείας.

## 6.3 Συνδιακύμανσις

Σ υ ν δ ι α κ ύ μ α ν σ ι ς τῶν μεταβλητῶν X καί Y καλεῖται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ κεντρική ροπή $\mu_{11}$ τῆς συγκατανομῆς αὐτῶν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ μέση τιμή - ἤ ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν - τοῦ γινομένου $(X-\mu_x)\times$ $\times(Y-\mu_y)$.

Οὕτω, ἡ συνδιακύμανσις τῶν X,Y - συμβολιζομένη συνήθως Cov(X,Y) - ὁρίζεται, εἰς μέν τήν περίπτωσιν ἁ π λ ῶ ν δεδομένων, ἐκ τοῦ τύπου

$$Cov(X,Y) = E\ (X-\mu_x)(Y-\mu_y) = \frac{1}{N}\sum_i (x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y) \quad (6.7)$$

προκειμένου δέ περί τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων, ἐκ τοῦ σταθμικοῦ τύπου

$$Cov(X,Y) = E\ (X-\mu_x)(Y-\mu_y) = \frac{1}{f_{..}}\sum_i\sum_j f_{ij}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y) \quad (6.8)$$

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῆ ὅτι ὁ ὑπολογισμός τῆς συνδιακυμάνσεως εἰς τήν πρᾶξιν - εἴτε ἐξ ἁπλῶν εἴτε ἐκ ταξινομημένων δεδομένων - δέν γίνεται συνήθως διά τῶν ἀνωτέρω τύπων, ἀλλά δι'ἐφαρμογῆς ὡρισμένων ἁπλουστέρων - ἐξ ἀπόψεως ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν - τοιούτων, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν* ἐκ τῶν (6.7) καί (6.8) δι'ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν.

Συγκεκριμένως, εἰς τήν περίπτωσιν ἁ π λ ῶ ν δεδομένων, ἡ συνδιακύμανσις τῶν X, Y ὑπολογίζεται δι' ἐφαρμογῆς ἑνός ἐκ τῶν κατωτέρω τύπων

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum_i x_i y_i - N\mu_x\mu_y}{N} = \frac{1}{N}\left(\sum_i x_i y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i y_i}{N}\right) \quad (6.9)$$

ἐνῶ προκειμένου περί ταξινομημένων δεδομένων, δι'ἐφαρμογῆς τῶν τύπων

---

* Διά τήν ἀπόδειξιν τῶν τύπων (6.9) καί (6.10) ἴδε τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ εἰς τήν εὐθύγραμμον παλινδρόμησιν.

$$Cov(X,Y)=\frac{\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} f_{ij}x_iy_j-f_{..}\mu_x\mu_y}{f_{..}}=\frac{1}{f_{..}}\left(\sum_i\sum_j f_{ij}x_iy_j-\frac{\sum\limits_i f_{i.}x_i\sum\limits_j f_{.j}y_j}{f_{..}}\right) \quad (6.10)$$

Ἡ συνδιακύμανσις τῶν X,Y ἀποτελεῖ οὐσιαστικῶς τόν ἀριθμητήν* τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ καί ὡς ἐκ τούτου αἱ ἀριθμητικαί πράξεις αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διά τόν ὑπολογισμόν αὐτῆς εἶναι ἐν πολλοῖς αἱ αὐταί μέ τάς ἀπαιτουμένας διά τήν εὕρεσιν τοῦ $\hat{\beta}$. Τοῦτο προκύπτει εὐκόλως διά συγκρίσεως τῶν τύπων (6.9) καί (6.10) ἀντιστοίχως πρός τούς (5.53) καί (5.70). Οὕτω, δι' ἁπλῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (6.9) καί (6.10) ἐπί τῶν δεδομένων τῶν πινάκων (5.2) καί (5.3) εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι συνδιακυμάνσεις εἶναι

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{5}\left(294-\frac{30\times 45}{5}\right)=\frac{1}{5}(294-270)=4,8$$

καί $$Cov(X,Y)=\frac{1}{100}\left(861-\frac{260\times 304}{100}\right)=\frac{1}{100}(861-790,4)=0,706$$

Ἡ συνδιακύμανσις δύο μεταβλητῶν X καί Y εἶναι δυνατόν νά εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός - θετικός, ἀρνητικός ἤ μηδέν - ἐκφράζεται δέ - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ της - εἰς τάς μονάδας ἤ ἀκριβέστερον εἰς τό γινόμενον τῶν μονάδων τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Οὕτω π.χ. ἐάν ἡ μεταβλητή X συμβολίζει τό ἀνάστημα ἐκπεφρασμένον εἰς ἑκατοστά καί Y τό βάρος εἰς "κιλά" ἡ συνδιακύμανσις τῶν X, Y εἶναι ἀριθμός ἐκπεφρασμένος εἰς "ἑκατοστά×κιλά".

Ἐάν αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί μεταβάλλονται ἐν γένει ὁ μ ο ρ ρ ό π ω ς, εἰς αὔξησιν δηλαδή τῆς μιᾶς ἀντιστοιχεῖ κατά κανόνα αὔξησις τῆς ἄλλης καί εἰς μείωσιν τῆς μιᾶς μείωσις τῆς ἄλλης, ἡ συνδιακύμανσις αὐτῶν εἶναι θ ε τ ι κ ό ς ἀριθμός καί ἀντιστρόφως. Πράγματι, εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν, ὁσάκις αἱ τιμαί τῆς X ὑπερβαίνουν τόν μέσον ὅρον τῶν $\mu_x$, τό αὐτό θά συμβαίνη ἐν γένει καί διά τάς ἀντιστοίχους τιμάς

---

* Διηρημένον διά N

της Y, θά ὑπερβαίνουν δηλαδή τόν μέσον αὐτῶν $\mu_y$. 'Ομοίως ἐά. ἡ διαφορά $x_i-\mu_x$ εἶναι ἀρνητική καί ἡ ἀντίστοιχος διαφορά $y_i-\mu_y$ θά εἶναι κατά κανόνα ἀρνητική. Οὕτω, ἐάν αἱ μεταβληταί X καί Y τείνουν νά μεταβάλλωνται πρός τήν αὐτήν κατεύθυνσιν, αἱ ἀντίστοιχοι διαφοραί $x_i-\mu_x$ καί $y_i-\mu_y$ θά εἶναι ἐν γένει *ὁμόσημοι* - ἀμφότεραι θετικαί ἤ ἀρνητικαί - κατά συνέπειαν δέ τόσον τά γινόμενα $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$, $i=1,2,\ldots,N$ ὅσον καί ὁ μέσος ὅρος αὐτῶν - ἡ συνδιακύμανσις δηλαδή τῶν X,Y - θά εἶναι ἀριθμοί *θετικοί*.

'Εξ ἄλλου, ἐάν αἱ συνεξεταζόμεναι μεταβληταί μεταβάλλονται ἐν γένει *ἀντιρρόπως*, εἰς αὔξησιν δηλαδή τῆς μιᾶς ἀντιστοιχεῖ μείωσις τῆς ἄλλης, αἱ διαφοραί $x_i-\mu_x$ καί $y_i-\mu_y$ $i=1,2,\ldots,N$ θά εἶναι κατά κανόνα ἑτερόσημοι, τά γινόμενα αὐτῶν $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ $i=1,2,\ldots,N$ ἐν γένει ἀρνητικά καί συνεπῶς ὁ μέσος ὅρος των - ἡ συνδιακύμανσις $Cov(X,Y)$ - θά εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

'Εκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι τό *σημεῖον* - θετικόν ἤ ἀρνητικόν - τῆς συνδιακυμάνσεως δύο μεταβλητῶν χαρακτηρίζει κατά βάσιν τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον αὗται συμμεταβάλλονται, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τό εἶδος τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν ἀλληλουχίας. Εἰς τήν πρᾶξιν, ἐάν δύο μεταβληταί μεταβάλλονται ἐν γένει *ὁμορρόπως* καί ἡ συνδιακύμανσις αὐτῶν εἶναι *θετική*, λέγομεν συνήθως ὅτι εἶναι *θετικῶς συσχετισμέναι* ἐάν δέ μεταβάλλονται ἀντιρρόπως καί ἔχουν ἀρνητικήν συνδιακύμανσιν, ἡ συσχέτισις αὐτῶν καλεῖται *ἀρνητική*. 'Εξ ἄλλου, εἶναι εὐνόητον, ὅτι ὅσον μεγαλυτέρα κατ'ἀπόλυτον τιμήν - ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου της - εἶναι ἡ συνδιακύμανσις δύο μεταβλητῶν τόσον σαφεστέρα εἶναι ἡ τάσις αὐτῶν πρός ἀντιστοιχίαν καί ἰσχυροτέρα ἀντιστοίχως ἡ ὑφισταμένη μεταξύ αὐτῶν - θετική ἤ ἀρνητική - *συσχέτισις*. 'Αντιθέτως, τιμαί τῆς συνδιακυμάνσεως πλησίον τοῦ μηδενός ὑποδηλοῦν *συνήθως* ὅτι οὐδεμία σαφής καί εὐδιάκριτος νομοτέλεια διέπει τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον συμμεταβάλλονται αἱ δύο μεταβληταί. 'Εάν π.χ. εἰς αὐξήσεις τῆς μιᾶς τῶν μεταβλητῶν ἀντιστοιχοῦν τόσον αὐξήσεις ὅσον καί μειώσεις τῆς ἄλλης - καί μάλιστα κατά τρόπον ἀκανόνιστον - τά γινόμενα $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ =1,2,...,N θά εἶναι εἴτε θετικά εἴτε ἀρνητικά, μέ ἀποτέλεσμα τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα αὐτῶν καί κατά συνέπειαν καί ὁ μέσος ὅρος των νά εἶναι μηδέν ἤ πλησίον τοῦ μηδενός. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγομεν συνήθως ὅτι αἱ μεταβληταί εἶναι ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι μεταξύ των ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι δέν παρουσιάζουν οὔτε θετικήν οὔτε ἀρνητικήν συσχέτισιν (συνάφειαν, ἀλληλουχίαν).

'Ενταῦθα δέον νά διευκρινισθῆ ὅτι ὁ μηδενισμός τῆς συνδιακυμάνσεως δύο μεταβλητῶν δέν σημαίνει ἀπαραιτήτως καί τήν ἀνυπαρξίαν ο ἱ α σ δ ή π ο τ ε σχέσεως μεταξύ αὐτῶν. 'Αντιθέτως, ὅπως θά ἴδωμεν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον, ἐάν ἡ συνδιακύμανσις δύο μεταβλητῶν εἶναι μηδέν ἀποκλείεται μέν νά ὑφίσταται μεταξύ αὐτῶν γ ρ α μ μ ι κ ή ἐξάρτησις, εἶναι ὅμως δυνατόν αἱ μεταβληταί νά συνδέονται διά σχέσεων ἄλλης μορφῆς (ὡς π.χ. διά μιᾶς παραβολικῆς ἐξαρτήσεως δευτέρου βαθμοῦ κλπ). Διά τόν λόγον αὐτόν ἐκ μόνου τοῦ μηδενισμοῦ τῆς συνδιακυμάνσεως δέν εἶναι δυνατόν νά ἐξαχθοῦν ἀσφαλῆ καί ὁριστικά συμπεράσματα.

'Εξ ὅσον ἐλέχθησαν ἀνωτέρω συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι ἡ συνδιακύμανσις δύο μεταβλητῶν, πέραν τοῦ ὅτι χαρακτηρίζει τόν τρόπον συμμεταβολῆς αὐτῶν, ἀποτελεῖ ἐπίσης μέτρον τοῦ βαθμοῦ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας.

Δυστυχῶς ὅμως ἡ ἐν λόγῳ πληθυσμιακή παράμετρος παρουσιάζει τά αὐτά μειονεκτήματα μέ ἐκεῖνα τῆς διακυμάνσεως, τοῦ μ.τ.σ. κλπ. καί ὡς ἐκ τούτου ἡ χρησιμοποίησις αὐτῆς εἰς τήν πρᾶξιν - ὡς μέτρου τῆς συναφείας δύο μεταβλητῶν - εἶναι λίαν περιωρισμένη.

Συγκεκριμένως, ἡ συνδιακύμανσις Cov(X,Y) ὡς ἀπόλυτος ἀριθμός ἐκπεφρασμένος εἰς τάς μονάδας τῶν μεταβλητῶν X καί Y δέν ἐπιτρέπει κατ'ἀρχήν οἱασδήποτε φύσεως συγκρίσεις. Πρός τούτοις ἡ ἀριθμητική τιμή αὐτῆς ἐπιρρεαζομένη ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων κατά περίπτωσιν μονάδων καθιστᾶ ἐξαιρετικῶς δυσχερῆ - ἄν ὄχι ἀδύνατον - τήν ἀντικειμενικήν ἀξιολόγησίν της. Τέλος μή ὑπάρχοντος μέτρου συγκρίσεως ὁ χαρακτηρισμός μιᾶς τιμῆς τῆς συνδιακυμάνσεως ὡς "μεγάλης" ἤ "μικρῆς" εἶναι αὐθαίρετος καί ἐν πολλοῖς καθαρῶς ὑποκειμενικός. Διά τούς λόγους αὐτούς εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ἀντί τῆς συνδιακυμάνσεως χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ή ς (γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς) σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ἤ ἔννοια, αἱ ἰδιότητες καί ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁποίου θά μᾶς ἀπασχολήσουν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

**Ἰδιότητες τῆς Συνδιακυμάνσεως**

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μερικάς χρησίμους ἰδιότητας τῆς συνδιακυμάνσεως ὑποθέτοντες ὅτι τά ἐμπειρικά δεδομένα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν N ἁ π λ ῶ ν ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,N$. Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἐν λόγῳ ἰδιοτήτων εἰς τήν περίπτωσιν τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων γίνεται κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον.

1) Ἡ συνδιακύμανσις τῆς μεταβλητῆς X μέ τήν μεταβλητήν Y ἰσοῦται πρός τήν συνδιακύμανσιν τῆς Y μέ τήν X, ἤτοι

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X) \qquad (6.11)$$

Ἀπόδειξις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.7) ἔχομεν

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)=\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\mu_y)\times$$

$$\times(x_i-\mu_x)=\mathrm{Cov}(Y,X)$$

2) Ἡ συνδιακύμανσις μιᾶς μεταβλητῆς X μέ τόν ἑαυτόν της ἰσοῦται πρός τήν διακύμανσιν αὐτῆς, ἤτοι

$$\mathrm{Cov}(X,X)=V(X)=\sigma_x^{\,2} \qquad (6.12)$$

Ἀπόδειξις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.7) ἔχομεν

$$\mathrm{Cov}(X,X)=\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)(x_i-\mu_x)=\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)^2=$$

$$=V(X)=\sigma_x^{\,2}$$

3) Ἐάν u καί v εἶναι δύο οἱοιδήποτε γραμμικοί μετασχηματισμοί τῶν μεταβλητῶν X καί Y, ἤτοι ἐάν u=

$=\alpha+\beta X$ καί $v=\gamma+\delta Y$, ἡ συνδιακύμανσις αὐτῶν δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$Cov(u,v)=Cov(\alpha+\beta X,\gamma+\delta Y)=\beta\delta Cov(X,Y) \qquad (6.13)$$

'Απόδειξις: Λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν τοῦ τύπου (6.7) ὡς καί γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ, ἔχομεν

$$Cov(u,v)=\frac{1}{N}\sum_i(u_i-\mu_u)(v_i-\mu_v)=\frac{1}{N}\sum_i[(\alpha+\beta x_i)-$$

$$-(\alpha+\beta\mu_x)]\times[(\gamma+\delta y_i)-(\gamma+\delta\mu_y)]=\frac{1}{N}\sum_i\beta\times$$

$$\times(x_i-\mu_x)\delta(y_i-\mu_y)=\beta\delta\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)=$$

$$=\beta\delta Cov(X,Y)$$

'Εκ τῆς ἀνωτέρω γενικῆς ἰδιότητος προκύπτουν - διά καταλλήλους τιμάς τῶν α,β,γ,δ - αἱ ἑξῆς μερικώτεραι τοιαῦται (πορίσματα):

(i) Διά $\beta=\delta=0$ ἔχομεν $Cov(\alpha,\gamma)=0$ (6.14)

ἤτοι ἡ συνδιακύμανσις δύο σταθερῶν εἶναι ἴση πρός μηδέν.

(ii) Διά $\beta=0$ ἔχομεν $Cov(\alpha,\gamma+\delta Y)=0$ (6.15)

ἤτοι ἡ συνδιακύμανσις μιᾶς σταθερᾶς καί μιᾶς μεταβλητῆς - ἤ γενικώτερον οἱουδήποτε γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτῆς - εἶναι ἴση πρός μηδέν.

(iii) Διά $\beta=\delta=1$ ἔχομεν $Cov(X+\alpha,Y+\gamma)=Cov(X,Y)$ (6.16)

ἤτοι ἐάν αἱ μεταβληταί X καί Y αὐξηθοῦν (ἤ ἐλαττωθοῦν) καθ'οἱασδήποτε σταθεράς ποσότητας α καί γ, ἡ συνδιακύμανσις αὐτῶν δέν μεταβάλλεται.

(iv) Διά $\alpha=\gamma=0$ ἔχομεν $Cov(\beta X,\delta Y)=\beta\delta Cov(X,Y)$ (6.17)

ἤτοι ἐάν μία - ἤ ἀμφότεραι - τῶν μεταβλητῶν X καί Y πολλαπλασιασθοῦν (ἤ διαιρεθοῦν) ἐπί σταθεράν - ἤ σταθεράς - ποσότητας, ἡ συνδιακύμασις αὐτῶν πολλαπλασιάζεται (ἤ διαιρεῖται) ἀντιστοίχως.

4) Ἡ συνδιακύμανσις τῆς μεταβλητῆς Z πρός τό ἄθροισμα τῶν μεταβλητῶν X καί Y, ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν συνδιακυμάνσεων τῆς Z μέ ἑκάστην ἐξ αὐτῶν, ἤτοι

$$Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z) \qquad (6.18)$$

Ἀπόδειξις: Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.7) ἔχομεν

$$Cov(X+Y,Z)=\frac{1}{N}\sum_i\left[(x_i+y_i)-(\mu_x+\mu_y)\right](z_i-\mu_z)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_i\left[(x_i-\mu_x)+(y_i-\mu_y)\right](z_i-\mu_z) =$$

$$=\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)(z_i-\mu_z)+\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\mu_y)(z_i-\mu_z)=$$

$$=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$$

Διά συνδυασμοῦ τῶν σχέσεων (6.13) καί (6.18) ἀποδεικνύονται ἀκόμη αἱ ἑξῆς γενικώτεραι σχέσεις (ἰδιότητες τῆς συνδιακυμάνσεως):

$$Cov(\alpha X+\beta Y,Z)=\alpha Cov(X,Z)+\beta Cov(Y,Z) \qquad (6.19)$$

$$Cov(\sum_{i=1}\alpha_i X_i,Y)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i Cov(X_i,Y) \qquad (6.20)$$

$$Cov(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i,\ \sum_{j=1}^{\lambda}\beta_j Y_j)=\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{\lambda}\alpha_i\beta_j Cov(X_i,Y_j) \qquad (6.21)$$

5) Ἡ διακύμανσις τοῦ ἀθροίσματος δύο μεταβλητῶν ἰσοῦται ἐν γένει πρός τό ἄθροισμα τῶν διακυμάνσεων αὐτῶν καί τοῦ διπλασίου τῆς συνδιακυμάνσεώς των, ἤτοι

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y) \qquad (6.22)$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διακυμάνσεως μιᾶς οἱασδήποτε μεταβλητῆς προκύπτει ὅτι

$$V(X+Y)=\frac{1}{N}\sum_i\left[(x_i+y_i)-(\mu_x+\mu_y)\right]^2 =$$

$$=\frac{1}{N}\sum_i\left[(x_i-\mu_x)+(y_i-\mu_y)\right]^2=\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)^2+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_i(y_i-\mu_y)^2+2\frac{1}{N}\sum_i(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y) =$$

$$=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$$

'Εξ ἄλλου, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι $Cov(X,-Y) = -Cov(X,Y)$ - τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς (6.17) διά $\beta=1$, $\delta=-1$ - καί ἀκόμη ὅτι $V(-Y)=V(Y)$, ἔχομεν τήν σχέσιν

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y) \tag{6.23}$$

Τέλος, διά συνδυασμοῦ τῶν τύπων (6.13), (6.18), (6.22) καί γνωστῶν ἰδιοτήτων τῆς διακυμάνσεως προκύπτουν ἀκόμη αἱ κάτωθι σχέσεις

$$V(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2V(X)+\beta^2V(Y)+2\alpha\beta Cov(X,Y) \tag{6.24}$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_jCov(X_i,X_j) = \tag{6.25}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2V(X_i)+\sum_i\sum_j\alpha_i\alpha_jCov(X_i,X_j) = \qquad (\text{ὅπου } j\neq i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2V(X_i)+2\sum_i\sum_j\alpha_i\alpha_jCov(X_i,X_j) \qquad (\text{ὅπου } j>i)$$

'Ενταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι "ἐάν αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι, ἤτοι ἐάν $Cov(X,Y)=0$, οἱ τύποι (6.22), (6.23) καί (6.24) γίνονται

$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y) \tag{6.26}$$

καί

$$V(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2V(X)+\beta^2V(Y) \tag{6.27}$$

'Ομοίως, ἐάν αἱ μεταβληταί $X_1,X_2,\ldots,X_k$ εἶναι ἀνά δύο ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι, ἤτοι ἐάν $Cov(X_i,X_j)=0$ δι'ὅλας τάς - διαφόρους - τιμάς τῶν i,j ὁ γενικός τύπος (6.25) λαμβάνει τήν μορφήν

$$V(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 V(X_i) \qquad (6.28)$$

'Εν προκειμένῳ θεωρεῖται σκόπιμον νά διευκρινισθοῦν τά ἑξῆς: Είς τό κεφάλαιον 4 αί μεταβληταί X καί Y ἐκλήθησαν στατιστικῶς ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι ἐάν ἡ δεσμευμένη μέση τιμή τῆς Y εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν τιμῶν τῆς X, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν

$$E(Y/x) \equiv c = \mu_y$$

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις συνεπάγεται τήν ἰσότητα

$$Cov(X,Y) = 0$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ τύπου (6.7) ἔχομεν

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{f_{..}}\sum_{ij}\sum f_{ij}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y) = \frac{1}{f_{..}}\sum_i (x_i-\mu_x)\sum_j f_{ij} \times$$

$$\times(y_j-\mu_y) = \frac{1}{f_{..}}\sum_i (x_i-\mu_x) f_{i.}\left[E(Y/x_i)-\mu_y\right] = \frac{1}{f_{..}}\sum_i \times$$

$$\times(x_i-\mu_x) f_{i.} \times 0 = 0$$

Οὕτω, προκειμένου νά δηλωθῆ ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι δυνάμεθα νά γράφωμεν ἀπό τοῦδε τήν σχέσιν

$$Cov(X,Y) = 0$$

Αἱ πλεῖσται τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τῆς συνδιακυμάνσεως ἀπεδείχθησαν - χάριν ἁπλότητος - τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν εἰς τήν περίπτωσιν ἁ π λ ῶ ν δεδομένων. 'Η ἀπόδειξις τῶν ἐν λόγῳ ἰδιοτήτων προκειμένου περί τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων γίνεται κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον.

## 6.4 Συντελεστὴς Γραμμικῆς Συσχετίσεως

'Η μέτρησις τοῦ βαθμοῦ τῆς ὑφισταμένης μεταξύ δύο μεταβλητῶν συναφείας καί γενικώτερον ἡ περιγραφή τοῦ τρόπου συμμεταβολῆς καί τῆς ἐντάσεως τῆς ἀλληλεξαρτήσεως αὐτῶν, γίνεται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν οὐχί διά τῆς συνδιακυμάνσεώς των, ἀλλά - πρός ἀποφυγήν τῶν γνωστῶν μειονεκτημάτων αὐτῆς - διά τοῦ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ο ῦ σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ἤ ἀκριβέστερον τοῦ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ο ῦ γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὡς "τό πηλίκον τῆς συνδιακυμάνσεως τῶν δύο μεταβλητῶν πρός τό γινόμενον τῶν τυπικῶν των ἀποκλίσεων".

'Ο συντελεστής γραμμικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν X καί Y συμβολίζεται συνήθως $\rho(X,Y)$ ἤ $\rho_{xy}$ ἤ ἁπλῶς $\rho$ διότι ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω τό τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν α ὐ τ ο ῦ ἰ σ ο ῦ τ α ι πρός τόν δ ε ί κ τ η ν γ ρ α μ μ ι κ ο ῦ π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ διά τόν ὁποῖον εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον ἐχρησιμοποιήθη τό σύμβολον $\rho^2$. Οὕτω, συμβολίζοντες $V(X)$ καί $V(Y)$ ἤ $\sigma_x{}^2$ καί $\sigma_y{}^2$ τάς διακυμάνσεις τῶν μεταβλητῶν X καί Y, τήν δέ συνδιακύμανσιν αὐτῶν $Cov(X,Y)$, ὁ συντελεστήν συσχετίσεως $\rho$ ὁρίζεται - συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω - ἐκ τῆς σχέσεως

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma x \sigma y} \tag{6.29}$$

'Ο τύπος ὁρισμοῦ (6.29), λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν τύπων (6.7) καί (6.8) καί τῶν γνωστῶν ἀντιστοίχων ἐκφράσεων τῶν διακυμάνσεων $V(X)$ καί $V(Y)$ γράφεται συνήθως εἰς μέν τήν περίπτωσιν ἁ π λ ῶ ν δεδομένων ὑπό τήν μορφήν

$$\rho = \frac{\sum_i (x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_i (x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_i (y_i-\mu_y)^2}} \tag{6.30}$$

προκειμένου δέ περί τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν τοιούτων ὑπό τήν σ τ α θ μ ι κ ή ν ἔκφρασιν

$$\rho = \frac{\sum_i\sum_j f_{ij}(x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)}{\sqrt{\sum_i f_{i.}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_j f_{.j}(y_j-\mu_y)^2}} \tag{6.31}$$

Τόσον ἐκ τοῦ τύπου (6.29) ὅσον καί τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτόν σχέσεων (6.30) καί (6.31) καθίσταται προφανές ὅτι ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ εἶναι πάντοτε ὁ μ ό σ η μ ο ς πρός τήν συνδιακύμανσιν τῶν δύο μεταβλητῶν Cov(X,Y), μηδενίζεται δέ ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἡ ἐν λόγῳ συνδιακύμανσις εἶναι μηδέν. Κατά συνέπειαν, ἐάν αἱ μεταβληταί X καί Y παρουσιαζουν θ ε τ ι κ ή ν συσχέτισιν, ἔχουν δηλαδή θετικήν συνδιακύμανσιν, ὁ ἀντίστοιχος συντελεστής συσχετίσεως θά εἶναι ἐπίσης θ ε τ ι κ ό ς καί ἀντιστρόφως. Ὁμοίως, ἐάν Cov(X,Y)<0, ἐάν δηλαδή αἱ μεταβληταί εἶναι ἀ ρ ν η τ ι κ ῶ ς συσχετισμέναι, θά εἶναι καί ρ<0 καί ἀντιστρόφως. Τέλος, ἐάν αἱ μεταβληταί εἶναι στατιστικῶς ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι, ὅτε ὡς εἴδομεν ἡ συνδιακύμανσις αὐτῶν Cov(X,Y)=0 θά ἔχωμεν ἐπίσης ρ = 0 καί ἀντιστρόφως. Ἐν προκειμένῳ δέον νά διευκρινισθῆ ὅτι ἐκ τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως(ρ=0) δέν συνάγεται ἀπαραιτήτως καί ἡ ἐν γένει σ τ α τ ι σ τ ι κ ή ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α τῶν δύο μεταβλητῶν.

Εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον θά ἴδωμεν παραδείγματα μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι παρ'ὅτι συνδέονται δι' ὡρισμένων - ὁπωσδήποτε μ ή γ ρ α μ μ ι κ ῶ ν - συναρτησιακῶν σχέσεων ἔχουν συντελεστήν συσχετίσεως - φυσικά καί συνδιακύμανσιν - ἴσον πρός μηδέν.

Ἀποδεικνύεται κατωτέρω ὅτι ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ του - εἶναι καθαρός ἀριθμός, ἀνεξάρτητος τῶν χρησιμοποιούμένων μονάδων μετρήσεως, πρός τούτοις δέ ὅτι λαμβάνη πάντοτε τιμάς εἰς τό πεπερασμένον διάστημα [-1,+1], πληροῖ δηλαδή τήν διπλῆν ἀνισότητα

$$-1 \leqslant \rho \leqslant +1 \qquad (6.32)$$

Αἱ ἐν λόγῳ ἰδιότητες τοῦ ρ καθιστοῦν δυνατήν τήν ἀντικειμενικήν ἀξιολόγησιν τῶν τιμῶν του, τήν χρησιμοποίησιν αὐτοῦ εἰς διαφόρους συγκρίσεις - ἐνῶ τοῦτο εἶναι ἐν γένει ἀδύνατον προκειμένου περί συνδιακυμάνσεων - γενικώτερον δέ διευκολύνουν σημαντικῶς τήν κατανόησιν τῆς σημασίας αὐτοῦ ὡς μέτρου τῆς συναφείας δύο μεταβλητῶν.

'Υπολογισμός τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως

Εἰς τήν πρᾶξιν, πρός ἁπλούστευσιν τῶν ἀπαιτουμένων ἀριθμητικῶν πράξεων, ὁ συντελεστής συσχετίσεως ὑπολογίζεται συνήθως δι'ἐφαρμογῆς τῶν τύπων

$$\rho = \frac{\sum\limits_i x_i y_i - \frac{\sum\limits_i x_i \sum\limits_i y_i}{N}}{\sqrt{\sum\limits_i x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N}}\sqrt{\sum\limits_i y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{N}}} \qquad (6.32)$$

(περίπτωσις ἁ π λ ῶ ν ἐμπειρικῶν δεδομένων) καί

$$\rho = \frac{\sum\limits_{ij}\sum f_{ij} x_i y_j - \frac{\sum\limits_i f_{i.} x_i \sum\limits_j f_{.j} y_j}{f_{..}}}{\sqrt{\sum\limits_i f_{i.} x_i^2 - \frac{(\sum\limits_i f_{i.} x_i)^2}{f_{..}}}\sqrt{\sum\limits_j f_{.j} y_j^2 - \frac{(\sum\limits_j f_{.j} y_j)^2}{f_{..}}}} \qquad (6.33)$$

(περίπτωσις τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων)

οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀντιστοίχως ἐκ τῶν τύπων (6.30) καί (6.31) δι'ἁπλῶν πράξεων καί ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν (ἴδε τύπους 5.52 καί 5.53 εἰς τά περί εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως).

'Εκ τῶν ἀνωτέρω τύπων καθίσταται προφανές ὅτι αἱ ἀριθμητικαί πράξεις αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ρ εἶναι αἱ αὐταί μέ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διά τόν συντελεστήν γραμμικῆς παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ καί τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. $\sigma^2$.

Οὕτω, δι'ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (6.32) καί (6.33) ἐπί τῶν δεδομένων τῶν πινάκων (5.2) καί (5.3) εὑρίσκομεν ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταί συσχετίσεως εἶναι

$$\rho = \frac{294 - \frac{30\times45}{5}}{\sqrt{210 - \frac{30^2}{5}}\sqrt{425 - \frac{45^2}{5}}} = \frac{294-270}{\sqrt{30}\ \sqrt{20}} = 0{,}98$$

$$\text{καί } \rho = \frac{861 - \frac{260\times304}{100}}{\sqrt{784 - \frac{260^2}{100}}\sqrt{1088 - \frac{304^2}{100}}} = \frac{861-790{,}4}{\sqrt{108}\ \sqrt{163{,}84}} = 0{,}52$$

Ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἐξαγομένων ὡς καί ὡρισμένα ἀκόμη ἀριθμητικά παραδείγματα θά μᾶς ἀπασχολήσουν διεξοδικώτερον εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

Σχέσις $\rho$ καί $\hat\beta$

Ἐκ τοῦ τύπου (5.52) ὁ ὁποῖος δίδει τόν συντελεστήν γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς παλινδρομήσεως $\hat\beta$ καί ἐκ τοῦ τύπου (6.30) διά τοῦ ὁποίου καθορίζεται ὁ συντελεστής (γραμμικῆς) συσχετίσεως $\rho$ ἔχομεν ἀντιστοίχως

$$\sum_i (x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y) = \hat\beta\sum_i (x_i-\mu_x)^2$$

$$\text{καί} \quad \sum_i (x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y) = \rho\sqrt{\sum_i (x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_i (y_i-\mu_y)^2}$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$N\sigma_x{}^2=\sum_i (x_i-\mu_x)^2 \quad \text{καί} \quad N\sigma_y{}^2=\sum_i (y_i-\mu_y)^2$$

προκύπτει ἀμέσως ἡ κάτωθι σχέσις

$$\hat\beta = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{6.34}$$

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ αὐτή ἀκριβῶς σχέσις προκύπτει διά συγκρίσεως τῶν ἀντιστοίχων σ τ α θ μ ι-κ ῶ ν τύπων τοῦ ρ καί τοῦ $\hat{\beta}$ ἤτοι τῶν τύπων (5.67) καί (6.31).

Ἐκ τῆς σχέσεως (6.34) συνάγονται εὐκόλως τά ἑξῆς:

(i) Ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ καί ὁ συντελεστής γραμμικῆς παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ εἶναι ἀριθμοί ὁ μ ό σ η μ ο ι.

Πράγματι, δοθέντος ὅτι αἱ τυπικαί ἀποκλίσεις $\sigma_x$ καί $\sigma_y$ εἶναι - ἐξ ὁρισμοῦ - θετικοί ἀριθμοί, τό $\hat{\beta}$ ἔχει πάντοτε τό αὐτό σημεῖον μέ τό ρ. Οὕτω, ἐάν $\rho>0$ ἐάν δηλαδή αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι θετικῶς συσχετισμέναι, ἡ κλίσις τῆς ἀντιστοίχου εὐθείας παλινδρομήσεως θά εἶναι θετική ($\hat{\beta}>0$) καί ἀντιστρόφως. Ὁμοίως, ἐάν $\rho<0$, ἐάν δηλαδή αἱ μεταβληταί παρουσιάζουν ἀρνητικήν συσχέτισιν, ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως θά ἔχη ἀρνητικήν κλίσιν ($\hat{\beta}<0$) καί ἀντιστρόφως. Τέλος ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως θά εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x ἐάν - καί μόνον ἐάν - ὁ συντελεστής συσχετίσεως εἶναι μηδέν, ἐάν δηλαδή αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι στατιστικῶς ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ι.

(ii) Τό τετράγωνον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ἰσοῦται πρός τόν ἀντίστοιχον γ ρ α μ μ ι κ ό ν δείκτην προσδιορισμοῦ.

Τοῦτο προκύπτει εὐκόλως διά συγκρίσεως τῆς ὡς ἄνω σχέσεως (6.34), εἰς τήν ὁποίαν τό ρ συμβολίζει τόν συντελεστήν συσχετίσεως πρός τόν τύπον (5.55), ἤτοι πρός τήν σχέσιν

$$\hat{\beta}^2 = \rho^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$$

εἰς τήν ὁποίαν τό $\rho^2$ συμβολίζει τόν γραμμικόν δείκτην προσδιορισμοῦ. Ἡ σχέσις αὕτη τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως πρός τόν γραμμικόν δείκτην προσδιορισμοῦ ὁδήγησε, ὡς εἶναι εὐνόητον ἄλλωστε, εἰς τόν συμβολισμόν τοῦ μέν πρώτου διά τοῦ ρ τοῦ δέ δευτέρου διά τοῦ $\rho^2$. Ἡ σχέσις (6.34) εἶναι βασικῆς σημασίας καί ἐξαιρετικῆς χρησιμότητος καθ'ὅσον αὕτη ἀποτελεῖ τόν συνδετικόν κρίκον μεταξύ ἀναλύσεως συσχετίσεως καί τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως. Οὕτω, ὑπολογισθείσης τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστου συσχετίσεως ρ, ἐκ τῆς (6.34) εὑρίσκεται ἀμέσως ὁ συντελεστής γραμμικῆς παλινδρομήσεως $\hat{B}$, ἐν συνεχείᾳ δέ ἐκ τοῦ τύπου (5.54) ὁ συντελεστής $\hat{\alpha}$ καί κατά συνέπειαν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιστοίχου εὐθείας παλινδρομήσεως (5.49), ἡ ὁποία λαμβάνει τήν μορφήν

$$\hat{y} = (\mu_y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \mu_x) + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x$$

ἤ ἄλλως $$\hat{y} = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) \qquad (6.35)$$

Πρός τούτοις, δοθέντος ὅτι ὁ γραμμικός δείκτης προσδιορισμοῦ $\rho^2$ ταυτίζεται, ὡς εἴδομεν, πρός τό τετράγωνον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ὁ τύπος (5.51) γράφεται

$$\sigma^2 = \sigma_y^{\,2}(1-\rho^2) \qquad (6.36)$$

ὅπου ρ συμβολίζει πλέον τόν συντελεστήν συσχετίσεως - καί ὡς ἐκ τούτου καθίσταται δυνατόν νά ὑπολογισθῆ ἀμέσως καί τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν ἀντίστοιχον εὐθείαν παλινδρομήσεως.

### Ἰδιότητες τοῦ Συντελεστοῦ Συσχετίσεως

21/1/17

1) Ὁ ρ εἶναι ἀριθμός καθαρός.

Δοθέντος ὅτι ἡ τυπική ἀπόκλισις μιᾶς μεταβλητῆς ἐκφράζεται εἰς τάς ἰδίας μέ αὐτήν μονάδας, ὁ παρονομαστής τοῦ τύπου (6.29) ἐκφράζεται εἰς τό γινόμενον τῶν μονάδων τῶν ὑπό ἔρευναν μεταβλητῶν. Τό αὐτό ὅμως συμβαίνει καί μέ τόν ἀριθμητήν τοῦ (6.29) τήν συνδιακύμανσιν δηλαδή τῶν X, Y. Κατά συνέπειαν, τό πηλίκον τῶν ἐν λόγῳ ποσοτήτων, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ εἶναι καθαρός ἀριθμός(δέν ἐκφράζεται εἰς συγκεκριμένας μονάδας).

2) Ὁ ρ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως.

'Αλλαγή τῶν μονάδων μετρήσεως σημαίνει ἐν γένει πολλαπλασιασμόν τῶν τιμῶν ἑκάστης τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ἐπί ἕνα θ ε τ ι κ ό ν ἀριθμόν. Οὕτω, ἐάν $X'=\beta X$ καί $Y'=\delta Y$, ἀλλά καί γενικώτερον ἐάν αἱ $X', Y'$ εἶναι γ ρ α μ μ ι κ ο ί μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ο ί τῶν $X, Y$ ἤτοι $X'=\alpha+\beta X$ καί $Y'=\gamma+\delta Y$ ὅπου $\beta>0$, $\delta>0$, θά ἀποδείξωμεν ὅτι $\rho_{x'y'}=\rho_{xy}$.

Πράγματι, δοθέντος ὅτι

$$V(\alpha+\beta X)=\beta^2 V(X), \quad V(\gamma+\delta Y)=\delta^2 V(Y)$$

καί

$$Cov(\alpha+\beta X, \gamma+\delta Y)=\beta\delta Cov(XY)$$

ἔχομεν

$$\rho_{x'y'}=\frac{Cov(X',Y')}{\sqrt{V(X')}\sqrt{V(Y')}}=\frac{\beta\delta Cov(X,Y)}{\sqrt{\beta^2 V(X)}\sqrt{\delta^2 V(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\rho_{xy}$$

καθ' ὅσον $\beta>0$ καί $\delta>0$ καί ὡς ἐκ τούτου $\sqrt{\beta^2}=|\beta|=\beta$ καί $\sqrt{\delta^2}=|\delta|=\delta$.

3) 'Ο $\rho$ πληροῖ πάντοτε τήν διπλῆν ἀνισότητα $-1\leq\rho\leq+1$ λαμβάνει δέ τάς τιμάς $+1$ καί $-1$, ἐάν - καί μόνον ἐάν - αἱ μεταβληταί $X$ καί $Y$ συνδέονται συναρτησιακῶς διά μιᾶς γραμμικῆς σχέσεως τῆς μορφῆς $Y=\alpha+\beta X$.

Θεωρήσωμεν δύο οἱασδήποτε μεταβλητάς $X$ καί $Y$ καί τάς ἀντιστοίχους πρός αὐτάς τ υ π ο π ο ι η μ έ ν α ς μεταβλητάς $u$ καί $v$ αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς γνωστόν διά τῶν σχέσεων

$$u=\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \quad \text{καί} \quad v=\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} \tag{6.37}$$

Εἶναι προφανές ὅτι

$$V(u)=\frac{1}{\sigma_y{}^2}V(X)=1 \qquad \text{καί} \qquad V(v)=\frac{1}{\sigma_y{}^2}V(Y)=1.$$

Πρός τούτοις ἐκ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῆς συνδιακυμάνσεως προκύπτει ὅτι

$$\rho_{uv}=\frac{Cov(u,v)}{\sqrt{V(u)}\sqrt{V(v)}}=Cov(u,v)=\frac{1}{\sigma_x}\times\frac{1}{\sigma_y}Cov(X,Y)=\rho_{xy}=\rho$$

Οὕτω, δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (6.22) καί (6.23) ἔχομεν ἀντιστοίχως τάς σχέσεις

$$V(u+v)=V(u)+V(v)+2Cov(u,v)=1+1+2\rho=2(1+\rho)$$

$$V(u-v)=V(u)+V(v)-2Cov(u,v)=1+1-2\rho=2(1-\rho)$$

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω σχέσεων, δοθέντος ὅτι ἡ διακύμανσις μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι πάντοτε μ ή ἀ ρ ν η τ ι κ ό ς ἀριθμός συμπεραίνομεν ὅτι $1+\rho>0$ καί $1-\rho>0$ ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ἀμέσως ἡ διπλῆ ἀνισότης $-1<\rho<+1$.

Ὑποθέτοντες τώρα ὅτι $\rho=+1$ θά ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y συνδέονται διά μιᾶς γραμμικῆς σχέσεως $Y=\alpha+\beta X$ ὅπου $\beta>0$ καί ἀντιστρόφως. Πράγματι, ἐάν $\rho=1$ θά εἶναι $V(u-v)=0$ καί κατά συνέπειαν $u-v=c$ ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά.

Ἀντικαθιστῶντας ἐν προκειμένῳ τάς μεταβλητάς u καί v διά τῶν ἴσων των ἐκ τῆς (6.37) ἔχομεν

$$\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}-\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}=c$$

ἐκ τῆς ὁποίας - λύοντες ὡς πρός Y - λαμβάνομεν

$$Y=(\mu_y-c\sigma_y-\mu_x\frac{\sigma_y}{\sigma_x})+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X$$

ἤτοι σχέσιν τῆς μορφῆς $Y=\alpha+\beta X$ ὅπου $\beta=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}>0$.

Ἀντιστρόφως, ἐάν $Y=\alpha+\beta X$, $\beta>0$ ἔχομεν

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{Cov(X,\alpha+\beta X)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{\beta^2V(X)}}=\frac{\beta Cov(X,X)}{\beta V(X)}=\frac{\beta V(X)}{\beta V(X)}=1$$

Ὁμοίως, ἐάν $\rho=-1$ θά εἶναι $V(u+v)=0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $u+v=c$

ἤ $\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}+\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}=c$ ἤ $Y=(\mu_y+c\sigma_y+\mu_x\frac{\sigma_y}{\sigma_x})-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X$

ἤτοι $Y=\alpha+\beta X$ ὅπου $\beta=-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}<0$

'Αντιστρόφως δέ, ἐάν $Y=\alpha+\beta X$ ὅπου $\beta<0$ θά εἶναι

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\beta Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{\beta^2 V(X)}} = \frac{\beta}{|\beta|} = -1$$

διότι ἐν προκειμένῳ $|\beta| = -\beta$.

'Ενταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ἀποδεικνύονται καί ἐκ τῆς σχέσεως αὐτοῦ πρός τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$. Πράγματι, ὡς εἴδομεν εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον, ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $\rho^2$ εἶναι καθαρός ἀριθμός καί ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως. Συνεπῶς αἱ ἐν λόγῳ ἰδιότητες ἰσχύουν καί διά τόν συντελεστήν συσχετίσεως ρ. 'Εξ ἄλλου, ὁ δείκτης $\rho^2$ πληροῖ πάντοτε τήν διπλῆν ἀνισότητα $0 \leq \rho^2 \leq 1$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἀμέσως διά τόν ρ ἡ ἀνισότης $-1 \leq \rho \leq +1$. Πρός τούτοις ὁ $\rho^2$ λαμβάνει τήν τιμήν 1 - καί συνεπῶς $\rho=1$ ἤ $\rho=-1$ - ἐάν - καί μόνον ἐάν - τό μ.τ.σ. εἶναι μηδέν ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ἅπαντα τά σημεῖα $(x_i, y_i)$ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

'Εκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων συνάγονται συμπερασματικῶς τά ἑξῆς:

α) 'Υπολογισθέντος - ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ρ, ἔχομεν ἀμέσως τόσον τήν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως - σχέσις (6.35) - ὅσον καί τό περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ - σχέσις (6.36) - καί τόν ἀντίστοιχον γραμμικόν δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$.

β) 'Εκ τοῦ σημείου τοῦ ρ γνωρίζομεν τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον συμμεταβάλλονται ἐν γένει αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί (συναυξάνονται, μεταβάλλονται ἀντιρρόπως κλπ), ἐκ δέ τῆς ἀπολύτου τιμῆς αὐτοῦ τήν ἔντασιν ἤ ἄλλως τόν βαθμόν τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν μεταβλητῶν συναφείας.

Εἰδικώτερον ὅμως - ἀναφορικῶς πρός τήν τιμήν τοῦ ρ - δέον νά λεχθοῦν τά ἑξῆς:

'Εάν ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ρ εἶναι πλησίον τῆς μονάδος συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὑφίσταται ἔ ν τ ο ν ο ς συνάφεια (ἀλληλουχία, τάσις πρός ἀντιστοιχίαν), πρός τούτοις δέ ὅτι ὁ τρόπος ἀλληλεξαρτήσεως αὐτῶν εἶναι δυνατόν νά περιγραφῆ μέ ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν διά μιᾶς εὐθείας.

Ἀντιθέτως, ἐάν ἡ τιμή τοῦ ρ εἶναι π λ η σ ί ο ν τ ο ῦ μ η δ ε ν ό ς τό μόνον συμπέρασμα τό ὁποῖον δύναται νά ἐξαχθῆ ἀσφαλῶς εἶναι ὅτι μεταξύ τῶν ὑπό ἔρευναν μεταβλητῶν δ έ ν ὑφίσταται σχέσις γραμμικῆς μορφῆς. Θά ἦτο ὅμως ἐπισφαλές νά συμπεράνωμεν ἐν προκειμένῳ ὅτι αἱ μεταβληταί οὐδεμίαν συνάφειαν παρουσιάζουν, διότι εἶναι δυνατόν, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ νά λάβη τήν τιμήν μηδέν, παρ'ὅτι μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν ὑφίσταται ἀπόλυτος ἐξάρτησις συναρτησιακή δηλαδή σχέσις μή γραμμικῆς, ὡς εἶναι εὐνόητον, μορφῆς. Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν ἀπαιτεῖται συνήθως ἡ ἐφαρμογή τῶν μεθόδων τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως.

## 6.5 Δεῖκται μὴ Γραμμικῆς Συσχετίσεως

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά μᾶς ἀπασχολήση ἡ ἔννοια καί ὁ τρόπος μετρήσεως τῆς ὑφισταμένην μεταξύ δύο μεταβλητῶν συναφείας, ὅταν αὗται συνδέονται μεταξύ των δι'ὡρισμένης σχέσεως οὐχί ὅμως γραμμικῆς μορφῆς (μ ή γ ρ α μ μ ι κ ή σ υ σ χ έ τ ι σ ι ς).

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ ὅλου προβλήματος πραγματευόμεθα κατ'ἀρχήν δύο ἀριθμητικά παραδείγματα. Εἰς τό πρῶτον - διά λόγους συγκρίσεων - ἡ σχέσις τῶν δύο μεταβλητῶν περιγράφεται ἱκανοποιητικά διά μιᾶς εὐθείας (γραμμική παλινδρόμησις) ἐνῶ εἰς τό δεύτερον αἱ μεταβληταί συνδέονται διά μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ (παραβολική παλινδρόμησις).

Τά δεδομένα ὡς καί οἱ ἀπαιτούμενοι ἐπ'αὐτῶν ἀριθμητικαί πράξεις παρατίθενται ἀντιστοίχως εἰς τούς πίνακας (6.1) καί (6.2)

Πίναξ 6.1

| Δεδομένα | | Ὑπολογισμοί | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ | $y^2$ |
| 1 | 14 | 1 | 14 | 196 |
| 2 | 13 | 4 | 26 | 169 |
| 3 | 6 | 9 | 18 | 36 |
| 4 | 5 | 16 | 20 | 25 |
| 5 | 2 | 25 | 10 | 4 |
| $\Sigma x=15$ | $\Sigma y=40$ | $\Sigma x^2=55$ | $\Sigma xy=88$ | $\Sigma y^2=430$ |

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.37) ἔχομεν

$$\rho = \frac{88 - \frac{15\times 40}{5}}{\sqrt{55 - \frac{15^2}{5}}\sqrt{430 - \frac{40^2}{5}}} = \frac{88-120}{\sqrt{10}\sqrt{110}} = \frac{-32}{33,2} = -\,0,96$$

Ἐκ τοῦ ὡς ἄνω ἀποτελέσματος συνάγεται ἐν γένει τό συμπέρασμα ὅτι αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί παρουσιάζουν ἰσχυράν ἀρνητικήν συσχέτισιν, πρός τούτοις δέ ὅτι ἡ ὑφισταμένη μεταξύ αὐτῶν ἀλληλεξάρτησις δύναται νά περιγραφῆ ἱκανοποιητικῶς διά μιᾶς εὐθείας·

Διά τόν προσδιορισμόν τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας παλινδρομήσεως ὑπολογίζομεν κατ'ἀρχήν τούς μέσους καί τάς διακυμάνσεις τῶν δύο μεταβλητῶν. Οὕτω, δι' ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν τύπων λαμβάνομεν

$$\mu_x = \frac{1}{N}\sum_i x_i = \frac{15}{5} = 3, \quad \mu_y = \frac{1}{N}\sum_i y_i = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_i x_i{}^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}\right] = \frac{1}{5}\left[55 - \frac{15^2}{5}\right] = 2 \text{ καί}$$

$$\sigma_y{}^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_i y_i{}^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{N}\right] = \frac{1}{5}\left[430 - \frac{40^2}{5}\right] = 22$$

'Εν συνεχεία δι'έφαρμογής τῶν τύπων (6.34) καί (5.54) ὑπολογίζονται οἱ συντελεσταί $\hat{\beta}$ καί $\hat{\alpha}$, ἤτοι

$$\hat{\beta} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0,96\sqrt{\frac{22}{2}} = -3,2$$

καί $$\hat{\alpha} = \mu_y - \beta\mu_x = 8+3,2\times 3 = 17,6$$

καί κατά συνέπειαν, ἡ ζητουμένη εὐθεία παλινδρομήσεως εἶναι

$$\hat{y} = 17,6-3,2x$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν προσδιορισθεῖσαν εὐθείαν παλινδρομήσεως εὑρίσκεται διά τοῦ τύπου (6.36)

$$\sigma^2 = \sigma_y{}^2(1-\rho^2) = 22(1-0,96^2) = 22(1-0,92) = 1,76$$

ἐνῶ ὁ ἀντίστοιχος γραμμικός δείκτης προσδιορισμοῦ εὑρίσκεται ἀπ'εὐθείας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως - διά τετραγωνισμοῦ αὐτοῦ - καί εἶναι $\rho^2 = 0,96^2 = 0,92$.

"Ας ἴδωμεν τώρα τά ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως συσχετίσεως εἰς τό δεύτερον παράδειγμα.

Πίναξ 6.2

| Δεδομένα | | 'Υπολογισμοί | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x^2$ | $xy$ | $y^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^2y$ |
| 0 | 9 | 0 | 0 | 81 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 5 | 1 | 5 | 25 | 1 | 1 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 8 | 16 | 8 |
| 3 | 1 | 9 | 3 | 1 | 27 | 81 | 9 |
| 4 | 3 | 16 | 12 | 9 | 64 | 256 | 48 |
| 5 | 4 | 25 | 20 | 16 | 125 | 625 | 100 |
| 6 | 11 | 36 | 66 | 121 | 216 | 1.296 | 396 |
| $\Sigma x=21$ | $\Sigma y=35$ | $\Sigma x^2=91$ | $\Sigma xy=110$ | $\Sigma y^2=257$ | $\Sigma x^3=441$ | $\Sigma x^4=2.275$ | $\Sigma x^2y=566$ |

Δι᾽ἐφαρμογῆς καί πάλιν τοῦ τύπου (6.31) εὑρίσκομεν ἐν προκειμένῳ

$$\rho = \frac{110 - \frac{21\times 35}{7}}{\sqrt{91 - \frac{21^2}{7}}\sqrt{257 - \frac{35^2}{7}}} = \frac{110-105}{\sqrt{28}\sqrt{82}} \simeq 0,1$$

Ἡ ὡς ἄνω τιμή τοῦ ρ μᾶς ἐπιτρέπει νά συμπεράνωμεν ὅτι μεταξύ τῶν ὑπό ἔρευναν μεταβλητῶν δέν ὑφίσταται γραμμική σχέσις, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις μία εὐθεία παλινδρομήσεως δέν θά περιέγραφε τήν σχέσιν αὐτῶν κατά τρόπον ἱκανοποιητικόν. Τοῦτο ἄλλωστε καθίσταται προφανές ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ ἀντιστοίχου γραμμικοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $\rho^2=0,1^2=0,01$. Τό ἐρώτημα ὅμως ἐάν μεταξύ τῶν εν λόγῳ μεταβλητῶν ὑφίσταται οἱαδήποτε συνάφεια παραμένει.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἐκ μόνου τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ τιμή τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ρ εἶναι πλησίον τοῦ μηδενός, δέν εἶναι ἐπιτρεπτόν νά ἐξαχθῆ τό συμπέρασμα ὅτι αἱ μεταβληταί οὐδεμίαν συνάφειαν παρουσιάζουν, διότι εἶναι πιθανόν νά συνδέονται αὗται δι᾽ἑτέρας σχέσεως μή γραμμικῆς μορφῆς.

Κατά συνέπειαν, εἰς τοιαύτας περιπτώσεις πρός ἐξαγωγήν ἀσφαλῶν καί ὁριστικῶν συμπερασμάτων ἀπαιτεῖται ἡ περαιτέρω διερεύνησις τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς τῶν μεταβλητῶν πρός τοῦτο δέ ἐφαρμόζονται συνήθως αἱ μέθοδοι τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως. Εἰς τό συγκεκριμένον παράδειγμα - Πίναξ 6.2 - παρατηροῦμεν τά ἑξῆς: Ἐάν ἀπεικονίσωμεν τά δεδομένα ἐπί ἑνός στικτοῦ διαγράμματος τά σημεῖα $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,7$ εὑρίσκονται πλησίον μιᾶς μονοκορύφου καμπύλης ἡ ὁποία εἶναι περίπου τό σχῆμα δευτεροβαθμίου παραβολῆς. Θά ἐπιδιώξωμεν λοιπόν νά προσαρμόσωμεν πρός τά δεδομένα - κατ᾽ἀρχήν τουλάχιστον - μίαν δευτεροβάθμιον καμπύλην παλινδρομήσεως τῆς μορφῆς $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ καί νά ὑπολογίσωμεν τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσαρμογῆς. Εἰς τόν πίνακα (6.2) ἔχουν ἤδη γίνει οἱ ἀπαιτούμενοι πρόσθετοι ὑπολογισμοί - $\Sigma x^3$, $\Sigma x^4$, $\Sigma x^2 y$ - καί τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (5.83) λαμβάνει τήν μορφήν

$$7\alpha+21\beta+91\gamma = 35$$

$$21\alpha+91\beta+441\gamma = 110$$

$$91\alpha+441\beta+2.275\gamma = 566$$

'Εκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος προκύπτουν αἱ κατωτέρω τιμαί τῶν παραμέτρων τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{\alpha} = 9,3 \qquad \hat{\beta} = -5,6 \qquad \hat{\gamma} = 0,96$$

καί συνεπῶς ἡ ζητουμένη παραβολή παλινδρομήσεως ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y} = 9,3-5,6x+0,96x^2$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν προσδιορισθεῖσαν παραβολήν ὑπολογίζεται διά τοῦ τύπου (5.86) καί εἶναι

$$\sigma^2 = \frac{1}{7}(257-9,3\times35+5,6\times110-0,96\times566) \simeq 0,6$$

'Εξ ἄλλου, δοθέντος ὅτι ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν τῆς Y εἶναι

$$\sigma_y^{\ 2} = \frac{1}{N}(\sum_i y_i^{\ 2} - \frac{(\sum_i y_i)^2}{N}) = \frac{1}{7}(257 - \frac{35^2}{7}) = 11,7$$

ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσαρμογῆς λαμβάνει τήν τιμήν

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^{\ 2}} = 1 - \frac{0,6}{11,7} = 0,95$$

'Εκ τοῦ ἀνωτέρω ἀποτελέσματος συνάγεται ὅτι ἡ μεταβλητικότης - ἤ ἄλλως ἡ διακύμανσις - τῶν τιμῶν τῆς Y ὀφείλεται - ἤ ἄλλως ἐπεξηγεῖται - κατά μέγα μέρος - ποσοστόν 95% - ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς πρός τήν X, ἐκφραζομένης διά τῆς παραβολῆς παλινδρομήσεως $\hat{y} = 9,3 - 5,6x+0,96x^2$. Οὕτω, συνάγεται ἐν προκειμένῳ τό συμπέρασμα ὅτι ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y σχετίζεται ἐντόνως πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς X καί συνεπῶς μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν ὑφίσταται ἰσχυρά συνάφεια.

Εἶναι προφανές ὅτι ὡς μέτρον τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν συναφείας εἶναι δυνατόν νά ληφθῆ εἴτε ὁ ὑπολογισθείς δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ εἴτε - κατ'ἀναλογίαν καί συγκριτικῶς πρός τήν ἀπόλυτον τιμήν τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ρ - ἡ θετική τετραγωνική ρίζα αὐτοῦ R=0,97 (περίπου).

Ἐξυπακούεται ὅτι ἐάν ἐπελέγετο καί προσηρμόζετο πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα μία ἄλλη καμπύλη ὁ ἀντίστοιχος πρός αὐτόν δείκτης προσδιορισμοῦ θά εἶχε ἐν γένει διάφορον τιμήν. Τά κριτήρια ὅμως ἐπιλογῆς τῆς καλλιτέρας κατά περίπτωσιν καμπύλης παλινδρομήσεως μᾶς ἀπησχόλησαν ἤδη εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον.

Οὕτω, εἰς περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ὁ συντελεστής (γραμμικῆς) συσχετίσεως ρ λαμβάνει τιμάς πλησίον τοῦ μηδενός, προκειμένου νά διευκρινισθῆ πλήρως ἡ πρός ἀλλήλας συμπεριφορά δύο μεταβλητῶν - τρόπος ἀλληλεξαρτήσεως, βαθμός τῆς τυχόν ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας κλπ. - ἐφαρμόζεται συνήθως ἡ ἀνάλυσις παλινδρομήσεως. Συγκεκριμένως, προσδιορίζεται ὡς εἴδομεν ἡ καταλληλοτέρα κατά περίπτωσιν καμπύλη παλινδρομήσεως ἐν συνεχείᾳ δέ ὑπολογίζεται ὁ ἀντίστοιχος πρός αὐτήν δείκτης προσδιορισμοῦ. Ἡ προσδιορισθεῖσα καμπύλη παλινδρομήσεως περιγράφει ὡς γνωστόν μέ τήν καλλιτέρα δυνατήν προσέγγισιν τόν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν δύο μεταβλητῶν, ἐνῶ ἀντιστοίχως ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ ἀποτελεῖ μέτρον τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας.

Τούς οὕτω προσδιοριζομένους δείκτας τοῦ βαθμοῦ συναφείας δύο μεταβλητῶν - ἤτοι τόν δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$ ἤ τήν θετικήν ρίζα αὐτοῦ R - καλοῦμεν ἐν γένει δ ε ί κ τ α ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ἤ ἀκριβέστερον δ ε ί κ τ α ς μ ή γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς καθ'ὅσον οὗτοι ἀντιστοιχοῦν εἰς μορφάς ἀλληλεξαρτήσεως μή γραμμικάς. Ἡ σημασία αὐτῶν εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς εἶναι ἤδη γνωστή.

**Στοιχειώδης Δείκτης Συσχετίσεως**

Ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω τήν ἔννοιαν καί τήν διαδικασίαν ὑπολογισμοῦ ἑνός δείκτου (μή γραμμικῆς) συσχετίσεως ἐξ ἀπ λ ῶ ν ἐμπειρικῶν δεδομένων. Εἰς τήν περίπτωσιν τ α ξ ι ν ο μ η μ έ ν ω ν δεδομένων - στοχαστικῶς ἐξηρτημένων μεταβλητῶν - ἀποδεικνύεται πολλάκις χρήσιμον ἀντί τῆς ὡς ἄνω διαδικασίας ἤ τουλάχιστον πρό τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς - προσδιορισμοῦ μιᾶς καταλλήλου ἐξισώσεως παλινδρομήσεως καί ὑπολογισμοῦ ἐν συνεχείᾳ τῶν δεικτῶν $R^2$ καί R - νά ὑπολογισθῆ ὁ στοιχειώδης δείκτης προσδιορισμοῦ $\eta^2$ ὡς καί ἡ θετική ρίζα αὐτοῦ η καλουμένη συνήθως σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς δ ε ί κ τ η ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς. Ὡς γνωστόν ὁ δείκτης $\eta^2$ ἐκφράζει τό πηλίκον τῆς διακυμάνσεως τῶν δεσμευμένων μέσων τῆς μεταβλητῆς Y πρός τήν συνολικήν διακύμανσιν τῶν τιμῶν αὐτῆς ἤ ἄλλως τό ποσοστόν τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_y^2$ τό ὁποῖον ἐπεξηγεῖται ὑπό τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν σχέσεως ὡς αὕτη ἐκφράζεται ὑπό τῆς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ο υ ς γ ρ α μ μ ῆ ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς.

Οὕτω, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διαφοροποίησις - τῶν τιμῶν - τῆς μεταβλητῆς Y ἐν σχέσει πρός ἀντιστοίχους μεταβολάς τῆς X, τόσον αἱ τιμαί τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου - πάντοτε φυσικά είς τό διάστημα (0,1) - εἶναι μεγαλύτεραι καί συνεπῶς ὁ δείκτης $\eta^2$ ὡς καί ἡ ρίζα αὐτοῦ η, δύνανται νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς μέτρα τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν συναφείας καί εἰς τήν πρᾶξιν χρησιμοποιοῦνται εὐρέως.

Τά βασικά πλεονεκτήματα ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ δείκτου $\eta^2$ - συνεπῶς καί τοῦ στοιχειώδους δείκτου συσχετίσεως η- εἶναι τό ἑξῆς:

α) Ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῆ ἀπ᾽εὐθείας ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ἄνευ δηλαδή τῆς προσαρμογῆς οἱασδήποτε καμπύλης παλινδρομήσεως (Ἀνάλυσις Συσχετίσεως).

β) Ἐκ τῆς γνωστῆς ἀνισότητος $0 \leqslant R^2 \leqslant \eta^2 \leqslant 1$ προκύπτει ὅτι ἡ τιμή τοῦ δείκτου $\eta^2$ ἀποτελεῖ τήν μεγίστην δυνατήν τιμήν τῶν διαφόρων δεικτῶν προσδιορισμοῦ καί ὡς ἐκ τούτου χαρακτηρίζει τόν βαθμόν συναφείας τῶν δύο μεταβλητῶν κατά τρόπον ἑνιαῖον καί μοναδικόν.

γ) Τέλος, ἡ τιμή τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου εἶναι ἐνδεικτική τῆς ὑπάρξεως ἤ μή συναφείας καί κατά συνέπειαν τοῦ κατά πόσον εἶναι χρήσιμον νά ἀκολουθήσῃ ἡ διαδικασία τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως ἤ ὄχι.

Ἐνταῦθα ὅμως δέον νά ἀναφερθῇ ὅτι ὁ στοιχειώδης δείκτης προσδιορισμοῦ $\eta^2$ ὅταν διά λόγους ἁπλότητος γίνεται ὁμαδοποίησις τῶν δεδομένων παρουσιάζει τό ἑξῆς βασικόν μειονέκτημα: Ἡ τιμή τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τάξεων τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X. Συγκεκριμένως, ἡ τιμή τοῦ $\eta^2$ αὐξάνει μετά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τάξεων τῆς X, γίνεται δέ ἴση πρός τήν μονάδα ($\eta^2=1$) ἐάν αἱ τάξεις γίνουν τόσαι ὅσα καί τά δεδομένα καί εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνεται μία μόνον παρατήρησις.

Δι'αὐτόν ἀκριβῶς τόν λόγον εἰς τήν περίπτωσιν ἁ π λ ῶ ν δεδομένων - ὅπου πάντοτε $\eta^2=1$ - ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι οὐσιαστικῶς ἄνευ σημασίας.

## Ὑπολογισμός τοῦ δείκτου $\eta^2$

Ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $\eta^2$ ὁρίζεται ὡς εἴδομεν ἐκ τῆς σχέσεως (5.41). Ἡ ἐν λόγῳ σχέσις λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν τύπων (5.32) καί (5.40) γράφεται

$$\eta^2 = 1 - \frac{\sum_i\sum_j f_{ij}\left[y_j - E(Y/x_i)\right]^2}{\sum_i\sum_j f_{ij}(y_j-\mu_y)^2}$$

καί δι'ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν λαμβάνει τελικῶς τήν μορφήν

$$\eta^2 = 1 - \frac{\sum_j f_{.j}y_j^2 - \sum_i \frac{(\sum_j f_{ij}y_j)^2}{f_{i.}}}{\sum_j f_{.j}y_j^2 - \frac{(\sum_j f_{.j}y_j)^2}{f_{..}}} \tag{6.38}$$

ἡ ὁποία καί χρησιμοποιεῖται εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν ὑπολογισμόν του.

Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τά δεδομένα τοῦ πίνακος (5.3) ἐκ τῶν ὁποίων ὑπελογίσθη ἤδη - εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον - ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ καί εὑρέθη ρ=0,52. Πρός ὑπολογισμόν τοῦ δείκτου $\eta^2$ ἀπαιτεῖται, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (6.38), πέραν τῶν ἀθροισμάτων $\Sigma f_{.j}y_j^2$ καί $\Sigma f_{.j}y_j$ - τά ὁποῖα ἔχουν ἤδη εὑρεθῆ εἰς τόν πίνακα (5.3) - καί τό ἄθροισμα

$$\sum_i \frac{(\sum_j f_{ij}y_j)^2}{f_{i.}}$$

τό ὁποῖον εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ὑπολογίζονται κατ'ἀρχήν τά ἐπί μέρους ἀθροίσματα $\sum_j f_{ij}y_j$ διά i=1,2,3,4 ἤτοι

$$\sum_j f_{1j}y_j = 8\times1+5\times2+3\times3+2\times4+0\times5 = 35$$

$$\sum_j f_{2j}y_j = 4\times1+9\times2+8\times3+5\times4+2\times5 = 76$$

$$\sum_j f_{3j}y_y = 2\times1+6\times2+9\times3+8\times4+5\times5 = 98$$

$$\sum_j f_{4j}y_j = 1\times1+0\times2+6\times3+9\times4+8\times5 = 95$$

ἐν συνεχείᾳ δέ τό ζητούμενον ἄθροισμα τό ὁποῖον ἐν προκειμένῳ εἶναι

$$\sum_j \frac{(\sum_j f_{ij}y_j)^2}{f_{i.}} = \frac{35^2}{18} + \frac{76^2}{28} + \frac{98^2}{30} + \frac{95^2}{24} \simeq 970,5$$

Μετά τοῦτο ὁ δείκτης $\eta^2$ ὑπολογίζεται δι'ἀπ'εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.38). Οὕτω εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν

$$\eta^2 = 1 - \frac{1.088-970,5}{1.088 - \frac{304^2}{100}} = 0,28$$

Συγκρίνοντες τό ὡς ἄνω ἀποτέλεσμα ($\eta^2$=0,28) πρός τό τετράγωνον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ἤτοι $\rho^2$ = =0,52$^2$=0,27 ἤ τόν ἀντίστοιχον δείκτην στοιχειώδους συσχετίσεως $\eta=\sqrt{0,28}$=0,53 πρός αὐτόν τοῦτον τόν συντελεστήν συσχετίσεως ρ=0,52 συμπεραίνομεν ὅτι οὐδεμία σχεδόν βελτίωσις ἀναμένεται εἰς τήν τιμήν τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ διά τῆς προσαρμογῆς εἰς τά ὑπ'ὄψιν δεδομένα μιᾶς οἰασδήποτε ἄλλης καμπύλης. Συνεπῶς δέν ὑφίσταται λόγος νά ἐφαρμοσθῇ ἐν προκειμένῳ ἡ μέθοδος ἀναλύσεως παλινδρομήσεως καί ὁ μελετητής δύναται νά συμπεράνη ὁριστικῶς ὅτι μεταξύ τῶν ὑπό ἔρευναν μεταβλητῶν ὑφίσταται μετρία γραμμική συσχέτισις.

### 6.6 Συσχέτισις Ποιοτικῶν Μεταβλητῶν. Ἱεράρχησις

Αἱ μέθοδοι τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως καί τά ἀντίστοιχα μέτρα συναφείας - συντελεστής συσχετίσεως, δεῖκται προσδιορισμοῦ κλπ. - τά ὁποῖα ἐπραγματεύθημεν μέχρι τοῦδε προϋποθέτουν, ὡς εἴδομεν, ὅτι ἀμφότεραι αἱ ὑπό μελέτην μεταβληταί εἶναι ποσοτικαί ὡς π.χ. ἡ ἡλικία, τό ἀνάστημα, τό εἰσόδημα, αἱ διάφοροι δαπάναι, τό μέγεθος τοῦ νοικοκυριοῦ κλπ., μεταβληταί δηλαδή αἱ ὁποῖαι ἐπιδέχονται μέτρησιν καί αἱ τιμαί αὐτῶν ἐκφράζονται ἀριθμητικῶς εἰς συγκεκριμένας μονάδας.

Πολλάκις ὅμως - ἰδιαιτέρως προκειμένου περί ἐφαρμογῆς τῆς Στατιστικῆς εἰς τάς Κοινωνικάς Ἐπιστήμας, τήν Ψυχολογίαν, εἰς τάς Ἐρεύνας Ἀγορᾶς κλπ.- μία ἤ ἀμφότεραι αἱ συνεξεταζόμεναι μεταβληταί εἶναι ποιοτικαί ὡς π.χ. ἡ κοινωνική θέσις, ἡ σχολική ἐπίδοσις, ἡ νοημοσύνη, ἡ σοβαρότης ἑνός ἀτυχήματος, ἡ ποιότης ἑνός προϊόντος κλπ. ἤ κατηγορικαί τοιαῦται ὡς π.χ. τό φῦλον, ἡ φυλή, ἡ οἰκογενειακή κατάστασις, τό θρήσκευμα, τό ἐπάγγελμα, ἡ μάρκα ἑνός προϊόντος κλπ., μεταβληταί δηλαδή αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστόν δέν ἐπιδέχονται μέτρησιν - ὑπό τήν κυρίαν σημασίαν τῆς λέξεως - καί αἱ "τιμαί" αὐτῶν εἶναι ἐν γένει συμβολικαί ἐκφράσεις. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ὁ ὑπολογισμός τῶν ὡς ἄνω μέτρων συσχετίσεως καθίσταται ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατος, μέθοδοι δέ ἀνάλογοι πρός ἐκείνας τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως στεροῦνται, ὡς εἶναι εὐνόητον, οἱασδήποτε σημασίας καί πρακτικῆς χρησιμότητος.

Οὕτω, ἐάν μία τουλάχιστον τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν εἶναι ποιοτική ἤ κατηγορική τοιαύτη, ἡ διερεύνησις τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς αὐτῶν περιορίζεται συνήθως εἰς τόν ὑπολογισμόν ὡρισμένων εἰδικῶν δεικτῶν, γνωστῶν ἐν γένει ὡς σ υ ν τ ε λ ε σ τ ῶ ν ἀ λ λ η λ ο υ χ ί α ς, οἱ ὁποῖοι - κατ᾿ἀναλογίαν πρός τόν συντελεστήν συσχετίσεως ἤ τούς δείκτας προσδιορισμοῦ - χαρακτηρίζουν τήν ἔντασιν - τόν βαθμόν - τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν μεταβλητῶν συναφείας - ἀλληλουχίας, τάσεως πρός ἀντιστοιχίαν - πολλάκις δέ - εἰς τήν περίπτωσιν π ο ι ο τ ι κ ῶ ν μεταβλητῶν - καί τόν τρόπον σ υ μ μ ε τ α β ο λ ῆ ς αὐτῶν (συναυξάνονται, μεταβάλλονται ἀντιρρόπως κλπ).

Συγκεκριμένως, ἐάν μία ἤ ἀμφότεραι αἱ ὑπό μελέτην μεταβληταί εἶναι κ α τ η γ ρ ρ ι κ α ί - ἐπιτρέπουσαι ὡς γνωστόν μόνον τήν ὁ μ α δ ο π ο ί η σ ι ν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ εἰς διακεκριμένας ἀλλήλων κ α τ η γ ο ρ ί α ς - ὑπολογίζονται συνήθως οἱ δ ε ῖ κ τ α ι ἀ λ λ η λ ο υ χ ί α ς $\varphi^2$ καί C. Οἱ ἐν λόγῳ δεῖκται χαρακτηρίζουν ἁπλῶς τήν τάσιν τῶν μεταβλητῶν πρός ἀντιστοιχίαν - τόν βαθμόν δηλαδή τῆς ὑφισταμένης μεταξύ αὐτῶν συναφείας - ὄχι ὅμως καί τόν τρόπον συμμεταβολῆς των. Τοῦτο ἄλλωστε εἶναι ἀδύνατον καί ὁπωσδήποτε ἄνευ σημασίας καθ᾿ὅσον αἱ κατηγορικαί μεταβληταί δέν ἐπιτρέπουν ἔστω καί στοιχειώδη ἱεράρχησιν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ. Οἱ δεῖκται ἀλληλουχίας $\varphi^2$ καί C θά μᾶς ἀπασχολήσουν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον.

Εἰς τήν περίπτωσιν ἐξ ἄλλου κατά τήν ὁποίαν μία ἤ ἀμφότεραι αἱ μεταβληταί εἶναι π ο ι ο τ ι κ α ί* - αἱ ὁποῖαι πέραν τῆς κ α τ η γ ο ρ ο π ο ι ή σ ε ω ς ἐπιτρέπουν, ὡς εἴδομεν, τήν ἱ ε ρ ά ρ χ η σ ι ν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἤ ἄλλως τήν δ ι ά τ α ξ ι ν αὐτῶν κ α τ ά τ ά ξ ι ν μ ε γ έ θ ο υ ς - χρησιμοποιοῦνται κατά κανόνα οἱ συντελεσταί $\rho_S$ καί $\tau$, γνωστοί ἀντιστοίχως ὡς σ υ ν τ ε λ ε σ τ α ί ἀ λ λ η λ ο υ χ ί α ς τοῦ Spearman καί τοῦ Kendall. Ἡ ἀπόλυτος τιμή τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν ἀντανακλᾶ τόν βαθμόν συναφείας τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, ἐνῶ

* Οὐδεμία ὅμως ἐξ αὐτῶν κ α τ η γ ο ρ ι κ ή

τό πρόσημον αὐτῶν (+ ἤ -) χαρακτηρίζει ἐν γένει τόν τρόπον συμμεταβολῆς τῶν μεταβλητῶν (συναυξάνονται ἤ μεταβάλλονται ἀντιρρόπως).

Ἡ ἔννοια, ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ καί ὁ τρόπος ἐφαρμογῆς τῶν δεικτῶν $\rho_S$ καί τ θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατωτέρω. Προηγουμένως εἰσάγομεν ὡρισμένας χρησίμους ἐννοίας αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται κατά βάσιν εἰς τήν φύσιν τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ὅταν αἱ συνεξεταζόμεναι μεταβληταί εἶναι ποιοτικαί.

Ὑποθέτομεν κατ'ἀρχήν ὅτι ἀμφότεραι αἱ ὑπό μελέτην μεταβληταί X καί Y εἶναι ποιοτικαί καί κατά συνέπειαν ὅτι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἐπιτρέπει τήν διάταξιν τῶν N μονάδων τοῦ ἀντιστοίχου πληθυσμοῦ κατά τάξιν μεγέθους (ἱεράρχησις).

Συμβολίζομεν διά $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_N$ τάς θέσεις ἤ ἄλλως τήν σειράν κατατάξεως τῶν μονάδων τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ ὡς πρός τήν μεταβλητήν X καί διά $y_1,y_2,\ldots,y_i,\ldots,y_N$ τάς θέσεις τῶν ἰδίων μονάδων ὡς πρός Y. Ὁ ἀριθμός $x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ καλούμενος βαθμός ἤ τάξις τῆς i μονάδος ὡς πρός τήν μεταβλητήν X, ἰσοῦται πρός 1 ἐάν ἡ ἐν λόγῳ μονάς κατέχει τήν πρώτην θέσιν, πρός 2 ἐάν κατέχει τήν δευτέραν θέσιν κ.ο.κ. τέλος δέ εἶναι ἴσος πρός N ἐάν ἡ μονάς αὕτη κατέχει τήν N-οστήν θέσιν. Τά αὐτά ἰσχύουν καί διά τόν ἀριθμόν $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τόν βαθμόν δηλαδή τῆς i μονάδος ὡς πρός Y. Οὕτω, ἑκάστη τῶν ἀριθμητικῶν ἀκολουθιῶν $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_N$ καί $y_1,y_2,\ldots,y_i,\ldots,y_N$, ἀποτελεῖ μίαν διάταξιν τῶν ἀριθμῶν $1,2,\ldots,N$. Ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ σειρά κατατάξεως οἱασδήποτε μονάδος τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τάς μεταβλητάς X καί Y δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά εἶναι ἡ αὐτή ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις εἶναι δυνατόν νά ἔχωμεν οἱανδήποτε ἐκ τῶν σχέσεων $x_i<y_i$, $x_i=y_i$ ἤ $x_i>y_i$ διά $i=1,2,\ldots,N$.

Συναφῶς πρός τούς βαθμούς $x_i$, $i=1,2,\ldots,N$ τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρός τήν μεταβλητήν X - ὡς ἐπίσης καί διά τούς ἀντιστοίχους βαθμούς αὐτῶν $y_i$, $i=1.2,\ldots,N$ ὡς πρός Y - δέον νά λεχθοῦν τά ἑξῆς:

(i) Ἡ ἀνισότης $x_i<x_j$, $i\neq j$ σημαίνει ἐν γένει ὅτι ἡ i μονάς προηγεῖται - "ὑπερέχει" -

τῆς j, τό π ο σ ό ν ὅμως τῆς ἐν λόγῳ ὑπεροχῆς δέν εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθῆ ἀριθμητικῶς, ὁπωσδήποτε δέ δέν ἐκφράζεται ὑπό τῆς διαφορᾶς $x_j - x_i$, πρᾶγμα τό ὁποῖον συμβάνει ὡς γνωστόν προκειμένου περί π ο σ ο τ ι κ ῶ ν μεταβλητῶν καί

(ii) Ἐκ τῆς ἀνισότητος $x_i < x_j < x_k$ καί τῆς ἰσότητος $x_j - x_i = x_k - x_j$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτόν νά ἐξαχθῆ τό συμπέρασμα ὅτι ἡ ὑπεροχή τῆς i μονάδος ἔναντι τῆς j εἶναι ἡ αὐτή πρός τήν j ἔναντι τῆς k.

Πρός τούτοις δέον νά διευκρινισθοῦν τά ἑξῆς: Συμβαίνει πολλάκις κατά τήν ἱεράρχησιν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ - εἴτε ὡς πρός τήν μεταβλητήν X εἴτε ὡς πρός Y - νά μή καθίσταται δυνατή ἡ δ ι ά κ ρ ι σ ι ς δύο ἤ περισσοτέρων μονάδων, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις δύο ἤ περισσότεραι μονάδες νά πρέπει νά τεθοῦν εἰς τήν αὐτήν θέσιν (σειράν). Εἰς αὐτάς τάς περιπτώσεις θά λέγωμεν ὅτι παρουσιάζεται τό φαινόμενον τῆς σ υ μ π τ ώ σ ε ω ς, ὡς βαθμός δέ ἤ ἄλλως ὡς τάξις ἑκάστης ἐκ τῶν ταυτιζομένων μονάδων θά θεωρῆται ὁ μέσος (ἀριθμητικός) τῶν βαθμῶν τούς ὁποίους θά εἶχον ἐάν ἦτο δυνατή ἡ διαφοροποίησίς των. Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι αἱ μονάδες i, j καί k ἕπονται ν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἀλλά εἶναι ἀδύνατον νά διαφοροποιηθοῦν μεταξύ των. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἑκάστη τῶν ἐν λόγῳ μονάδων λαμβάνει τόν βαθμόν (ν+2) ὁ ὁποῖος προκύπτει ὡς μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν (ν+1), (ν+2) καί (ν+3) τούς ὁποίους θά ἐλάμβανον αὗται ἐάν ἦτο δυνατή ἡ διαφοροποίησίς των.

Οὕτω, ἐάν ἀμφότεραι αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί X καί Y εἶναι π ο ι ο τ ι κ α ί, τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως τά ὁποῖα δύναται νά ἔχῃ εἰς τήν διάθεσίν του ὁ μελετητής καί τά ὁποῖα θά χρησιμοποιηθοῦν, ὡς θά ἴδωμεν, διά τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν $\rho_S$ καί τ, συνίστανται ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ἀκολουθιῶν τῶν βαθμῶν τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ - ὡς πρός X καί Y - ἤτοι

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N$$

καί

$$y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_N$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι δύο - διάφοροι ἐν γένει - δ ι α τ ά - ξ ε ι ς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1,2,...,N.

Οἱ βαθμοί $x_i$, i=1,2,...,N - ὡς ἐπίσης καί οἱ $y_i$, i=1,2,...,N - εἶναι ἐν γένει διάφοροι μεταξύ των, ἐάν ὅμως συμβαίνουν σ υ μ π τ ώ σ ε ι ς μερικοί ἐξ αὐτῶν, ὡς εἶναι εὐνόητον, ταυτίζονται.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν τά ἑξῆς: Ὑποθέσωμεν ὅτι N=8 μαθηταί ἱεραρχοῦνται συμφώνως πρός τήν ἱ κ α ν ό τ η τ ά τ ω ν ε ἰ ς τ ά Μ α θ η μ α τ ι κ ά - μεταβλητή X - καί τήν ἐ π ί δ ο σ ι ν α ὐ τ ῶ ν ε ἰ ς ἕ ν α τ έ σ τ ν ο η μ ο σ ύ ν η ς - μεταβλητή Y - πρός τόν σκοπόν νά διερευνηθῆ ἡ σχέσις ἡ ὁποία τυχόν ὑφίσταται μεταξύ τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν.

Ἡ ἱεράρχησις αὕτη εἶναι δυνατόν νά γίνεται εἴτε ἀ μ έ σ ω ς διά κατατάξεως δηλαδή τῶν μαθητῶν εἰς πρῶτον, δεύτερον, τρίτον ....κλπ ὡς πρός ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν, εἴτε ἐ μ μ έ σ ω ς χρησιμοποιουμένης τῆς βαθμολογίας τήν ὁποίαν ἔλαβον οἱ μαθηταί εἰς τά Μαθηματικά καί τό τέστ ἐπί τῇ βάσει ὡρισμένων - αὐθαιρέτων ἐν γένει - κλιμάκων βαθμολογίας.

Συνήθως ἡ ἄμεσος ἱεράρχησις καθίσταται δυνατή καί ἐφαρμόζεται ἐάν αἱ ὑπό μελέτην μονάδες εἶναι ὀλιγάριθμοι. Μία τοιαύτη ἱεράρχησις παρουσιάζεται κατωτέρω εἰς τόν Πίνακα (6.3).

Πίναξ 6.3

| Μαθηταί | Α | Β | Γ | Δ | Ε | Ζ | Η | Θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Σειρά (X) | 2 | 5 | 1 | 7 | 6 | 8 | 3 | 4 |
| Σειρά (Y) | 1 | 7 | 2 | 6 | 8 | 5 | 4 | 3 |

Ὁ ἔμμεσος τρόπος ἱεραρχήσεως χρησιμοποιεῖται ἐξ ἄλλου ἐάν αἱ μονάδες τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ εἶναι πολυπληθεῖς. Ἡ ἀκολουθουμένη ἐν προκειμένῳ διαδικασία παρατίθεται ἐνδεικτικῶς εἰς τόν πίνακα (6.4), ὅπου παρουσιάζεται ἐπίσης ὁ τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ φαινομένου τῶν σ υ μ π τ ώ σ ε ω ν. Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῆ - πρός ἀποφυγήν παρεξηγήσεων - ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τῆς βαθμολογίας - Μαθηματικῶν καί τέστ - καθ'ἑαυτῆς πρός ὑπολογισμόν τοῦ γνωστοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως κλπ. δέν εἶναι ἐπιτρεπτή διά δύο βασικούς λόγους. Πρῶτον, οἱ ἐν λόγῳ βαθμοί δέν ἀποτελοῦν τιμάς τῶν μεταβλητῶν X καί Y ἀπορρεούσας ἐκ μετρήσεως - ὑπό τήν κυρίαν ἔννοιαν τῆς λέξεως - καί δεύτερον διότι χρησιμοποιουμένων ἑτέρων κλιμάκων βαθμολογίας εἶναι δυνατόν νά προκύψουν διάφοροι τιμαί τοῦ ρ, παρ'ὅτι ἡ ἱεράρχησις τῶν μαθητῶν παραμένει ἡ αὐτή.

Πίναξ 6.4

| Μαθηταί | Βαθμολογία Μαθηματικῶν | Βαθμολογία Τέστ | Σειρά (X) | Σειρά (Y) |
|---|---|---|---|---|
| Α | 18 | 168 | 2 | 1 |
| Β | 14 | 115 | (4) 5 | 7 |
| Γ | 19 | 150 | 1 | 2 |
| Δ | 10 | 120 | 7 | 6 |
| Ε | 14 | 108 | (5) 5 | 8 |
| Ζ | 9 | 138 | 8 | (4) 4,5 |
| Η | 16 | 138 | 3 | (5) 4,5 |
| Θ | 14 | 149 | (6) 5 | 3 |

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ παρατιθεμένη εἰς τόν πίνακα (6.4) διαδικασία ἐμμέσου ἱεραρχήσεως τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἐφαρμόζεται καί εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ἡ μία τῶν μεταβλητῶν εἶναι π ο σ ο τ ι κ ή. Οὕτω π.χ. ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβλητή X ἦτο ἡ ἡλικία τῶν ἐρευνωμένων ἀτόμων ἡ ἱεράρχησις αὐτῶν θά ἐγένετο ὡς ἀκολούθως:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ἡλικία (Ἔτη) : | 19 | 12 | 16 | 13 | 9 | 10 | 14 | 18 |
| Τάξις (Βαθμός) : | 1 | 6 | 3 | 5 | 8 | 7 | 4 | 2 |

### 6.6.1 Συντελεστής Spearman

Ὁ ἐν λόγῳ συντελεστής ὑπολογίζεται χρησιμοποιουμένων ὡς ἐμπειρικῶν δεδομένων τῶν ἀριθμητικῶν ἀκολουθιῶν:

θά ἔχωμεν $\rho_S=-1$. Πράγματι, εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν εἰς τόν βαθμόν i - ὡς πρός X - ἀντιστοιχεῖ ὁ βαθμός N+1-i - ὡς πρός Y - καί συνεπῶς $d_i^2=(N+1-2i)^2$, i=1, 2,...,N. Οὕτω, τό ἄθροισμα $\Sigma d_i^2$ λαμβάνει τήν τιμήν

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_i (N+1-2i)^2 = N(N+1)^2-4(N+1)\sum_i i+4\sum_i i^2 =$$

$$= N(N+1)^2-4(N+1)\,\frac{N(N+1)}{2}+4\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N(N^2-1)}{3}$$

καί συνεπῶς

$$\rho_S = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{N(N^2-1)} = 1-2 = -1$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι θ ε τ ι κ α ί τιμαί τοῦ συντελεστοῦ $\rho_S$ ὑποδηλοῦν ἐν γένει ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y σ υ ν α υ ξ ά ν ο ν τ α ι ἐνῶ ἀρνητικαί τοιαῦται ὅτι αἱ X καί Y μεταβάλλονται ἀντιρρόπως. Ἐξυπακούεται ὅτι ὅσον ἡ τιμή τοῦ $\rho_S$ πλησιάζει πρός τήν μονάδα (ἤ τό -1) τόσον ἡ ὑφισταμένη μεταξύ τῶν μεταβλητῶν συνάφεια δύναται νά θεωρῆται ὡς ἐντονωτέρα.

Παραθέτομεν κατωτέρω δύο ἀριθμητικά παραδείγματα ὑπολογισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Spearman (μετά ἤ ἄνευ σ υ μ π τ ώ σ ε ω ν) χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τῶν ἀνωτέρω πινάκων (6.3) καί (6.4). Ἡ διαδικασία τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν παρατίθεται ἀντιστοίχως εἰς τούς πίνακας (6.5) καί (6.6).

Πίναξ 6.5

| Μαθήματα | $x_i$ | $y_i$ | $d_i=x_i-y_i$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 1 | 1 | 1 |
| B | 5 | 7 | -2 | 4 |
| Γ | 1 | 2 | -1 | 1 |
| Δ | 7 | 6 | 1 | 1 |
| E | 6 | 8 | -2 | 4 |
| Z | 8 | 5 | 3 | 9 |
| H | 3 | 4 | -1 | 1 |
| Θ | 4 | 3 | 1 | 1 |
| | | | $\Sigma d_i=0$ | $\Sigma d_i^2=22$ |

Οὕτω, συμφώνως πρός τόν τύπον (6.31) λαμβάνομεν

$$\rho_S = 1 - \frac{6\times 22}{8(8^2-1)} = 1 - \frac{132}{504} = \frac{372}{504} = 0,74$$

καί κατά συνέπειαν δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι μεταξύ τῆς ἐπιδόσεως εἰς τό ὡς ἄνω τέστ νοημοσύνης καί τῆς ἱκανότητος εἰς τά Μαθηματικά ὑφίσταται συνάφεια ἀρκετά ἔντονος.

Ἐξ ἄλλου, ὁ τρόπος ἐργασίας ἐπί τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (6.4) παρατίθεται κατωτέρω εἰς τόν πίνακα (6.6).

Πίναξ 6.6

| Μαθηταί | Βαθμολογία Μαθηματικῶν | Βαθμολογία Τέστ | Σειρά $x_i$ | Σειρά $y_i$ | $d_i=x_i-y_i$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | 18 | 168 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| Β | 14 | 115 | 5 | 7 | -2 | 4 |
| Γ | 19 | 150 | 1 | 2 | -1 | 1 |
| Δ | 10 | 120 | 7 | 6 | 1 | 1 |
| Ε | 14 | 108 | 5 | 8 | -3 | 9 |
| Ζ | 9 | 138 | 8 | 4,5 | 3,5 | 12,25 |
| Η | 16 | 138 | 3 | 4,5 | -1,5 | 2,25 |
| Θ | 14 | 149 | 5 | 3 | 2 | 4 |
| | | | | | $\Sigma d_i=0$ | $\Sigma d_i^2=34,5$ |

Ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ πίνακος (6.6) προκύπτει ὅτι ἡ τιμή τοῦ συντελεστοῦ $\rho_S$ εἶναι

$$\rho_S = 1 - \frac{6\times 34,5}{8(8^2-1)} = 1 - \frac{207}{504} = \frac{297}{504} = 0,59$$

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ὕπαρξις συμπτώσεων - εἴτε εἰς τήν μίαν εἴτε εἰς ἀμφοτέρας τάς μεταβλητάς - ἔχει ἐν γένει ὡς ἀποτέλεσμα ἡ τιμή τοῦ συντελεστοῦ $\rho_S$ - ὑπολογιζομένη ἐκ τοῦ τύπου (6.39) - νά παρουσιάζεται κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ηὐξημ έ ν η. Μία ἀκριβεστέρα τιμή τοῦ $\rho_S$ - διορθωμένη τιμή - εἶναι δυνατόν νά εὑρεθῇ ἐν προκειμένῳ διά τῆς ἐφαρμογῆς ὡρισμένων δ ι ο ρ θ ώ σ ε ω ν ἀναλόγων τῶν κατά Sheppard τοιούτων αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται ὡς γνωστόν πρός διόρθωσιν τῆς τιμῆς τῆς διακυμάνσεως. Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ ἐν λόγῳ διαφοροποίησις τῆς τιμῆς τοῦ $\rho_S$ εἶναι συνήθως ἀμελητέα καί οὐδεμία διόρθωσις ἀπαιτεῖται, ἐκτός ἐάν τό ποσοστόν τῶν ὑφισταμένων συμπτώσεων εἶναι σημαντικόν. Εἰς τήν τελευταίαν ὅμως περίπτωσιν εἶναι προτιμώτερον νά ἀποφεύγεται ἐντελῶς ὁ ὑπολογισμός καί ἡ χρησιμοποίησις τοῦ $\rho_S$ ὡς μέτρου τῆς συναφείας τῶν ὑπό ἔρευναν μεταβλητῶν, διότι εἶναι δυνατόν νά ὁδηγήσῃ εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα.

### 6.6.2 Συντελεστής Kendall

Ἀντιθέτως πρός τόν συντελεστήν $\rho_S$ - τοῦ Spearman - διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁποίου χρησιμοποιοῦνται ὡς εἴδομεν οἱ βαθμοί $x_i$ καί $y_i$, $i=1,2,\ldots,N$ αὐτοί καθ' ἑαυτοί - καί μάλιστα ὡς νά ἀπετέλουν τ ι μ ά ς τῶν X καί Y - ὁ συντελεστής τ - τοῦ Kendall - βασίζεται εἰς τάς σ χ έ σ ε ι ς μεταξύ τῶν ἐν λόγῳ βαθμῶν - ἤ ἄλλως εἰς τήν σχετικήν διάταξιν τῶν μονάδων λαμβανομένων ἀνά δύο - εἰδικώτερον δέ εἰς τάς καλουμένας ὁ μ ο ι ο μ ο ρ φ ί α ς καί ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ά ς ἡ ἔννοια τῶν ὁποίων μᾶς ἀπασχολεῖ ἀμέσως κατωτέρω.

Θεωρήσωμεν δύο οἱασδήποτε μονάδας τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ i καί j καί τάς τάξεις αὐτῶν ὡς πρός τάς μεταβλητάς X καί Y ἤτοι τούς βαθμούς $(x_i, x_j)$ καί $(y_i, y_j)$ ἀντιστοίχως. Ἐάν ἔχωμεν $x_i<x_j$ καί παραλλήλως $y_i<y_j$ ἤ $x_i>x_j$ καί $y_i>y_j$ ἀνισότητας δηλαδή τ ῆ ς α ὐ τ ῆ ς φ ο ρ ᾶ ς, λέγομεν ὅτι συμβαίνῃ μία ὁ μ ο ι ο μ ο ρ φ ί α, ἐνῷ ἐάν ἔχωμεν $x_i<x_j$ ἀλλά $y_i>y_j$ ἤ $x_i>x_j$ καί $y_i<y_j$ ἀνισότητας δηλαδή ἀ ν τ ι θ έ τ ο υ φ ο ρ ᾶ ς, λέγομεν ὅτι παρουσιάζεται μία ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ή. Ἐκ τοῦ πίνακος π.χ. (6.2) προκύπτει ὅτι εἰς τό ζεῦγος τῶν μαθητῶν (A,B) ἀντιστοιχεῖ μία ὁμοιομορφία - διότι $2<5$ καί $1<7$ - ἐνῷ εἰς τό ζεῦγος τῶν μαθητῶν (Δ,Z) ἀντιστοιχεῖ μία ἀντιστροφή καθ' ὅσον $7<8$ ἐνῷ $6>5$. Εἶναι προφανές ὅτι ἐάν ὅλαι αἱ συγκρίσεις τοῦ ἀνωτέρω εἴδους καταλήγουν εἰς ὁμοιομορφίας - ἀντανακλώσας ὁμορρόπους μεταβολάς τῶν X καί Y - κατά τρόπον ἀπολύτως συστηματικόν, δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν ὅτι μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ὑφίσταται ἐντονωτάτη θετική συνάφεια. Ὁμοίως, ἐάν ὅλαι αἱ δυναταί συγκρίσεις - τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ λαμβανομένων ἀνά δύο - ὁδηγοῦν εἰς ἀντιστροφάς, συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y ὑφίσταται ἐντονωτάτη - ἀλλ' ἀρνητική - συνάφεια (ἡ μεταβολή τῆς μιᾶς συνδέεται μέ ἀντίρροπον μεταβολήν τῆς ἄλλης).

Ἐξυπακούεται ὅτι ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν ὁμοιομορφιῶν καί τῶν ἀντιστροφῶν εἶναι ὁ αὐτός - ἤ περίπου ὁ αὐτός - ἐάν δηλαδή δέν διαπιστοῦται συστηματική ἀντιστοιχία εἰς τάς μεταβολάς τῶν δύο μεταβλητῶν, μεταξύ αὐτῶν δέν ὑφίσταται οὔτε θετική οὔτε ἀρνητική συνάφεια. Οὕτω, ἡ διαφορά μεταξύ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁμοιομορφιῶν - συμβολιζομένων ἐν προκειμένῳ διά τοῦ O - καί τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστροφῶν A, χαρακτηρίζει ἐν προκειμένῳ τόσον τόν βαθμόν τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν μεταβλητῶν συναφείας ὅσον καί τοῦ τρόπου συμμεταβολῆς αὐτῶν. Ὁ δείκτης ἀλληλουχίας τ - τοῦ Kendall - βασίζεται ἀκριβῶς ἐπί τῆς ὡς ἄνω διαφορᾶς.

Ἀκριβέστερον, ὁ δείκτης τ ὁρίζεται ὡς τό πηλίκον τῆς διαφορᾶς O-A (ὁμοιομορφίαι-ἀντιστροφαί) πρός τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν δυνατῶν συγκρίσεων (τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ λαμβανομένων ἀνά δύο). Οὕτω, δοθέντος ὅτι αἱ δυναταί συγκρίσεις εἶναι ὅσαι οἱ συνδυασμοί τῶν N μονάδων ἀνά δύο, ὁ δείκτης ἀλληλουχίας τ δίδεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\tau = \frac{O-A}{\binom{N}{2}} \qquad (6.41)$$

Ἐξ ἄλλου, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱαδήποτε σύγκρισις θά καταλήξῃ ἀπαραιτήτως εἰς μίαν ἀντιστροφήν, ἤ μίαν ὁμοιομορφίαν, συμπεραίνομεν ὅτι τό ἄθροισμα

$$O+A = \binom{N}{2} \qquad (6.42)$$

καί κατά συνέπειαν ὁ τύπος (6.41) λαμβάνει ἐπίσης τήν μορφήν

$$\tau = 1 - \frac{2A}{\binom{N}{2}} \qquad (6.43)$$

ὑπό τήν ὁποίαν συνήθως καί χρησιμοποιεῖται.

Οὕτω, ὁριζόμενος ὁ συντελεστής τ εἶναι προφανῶς καθαρός (ἄνευ μονάδων) ἀριθμός, πληροῖ πάντοτε τήν διπλῆν ἀνισότητα

$$-1 \leqslant \tau \leqslant +1 \qquad (6.44)$$

γίνεται δέ ἴσος πρός +1 ἤ -1 ἐάν μεταξύ τῶν μεταβλητῶν ὑφίσταται ἀντιστοίχως ἀπόλυτος θετική ἤ ἀρνητική συνάφεια. Πράγματι, δοθέντος ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ἀντιστροφῶν A πληροῖ τήν ἀνισότητα

$$0 \leqslant A \leqslant \binom{N}{2}$$

ἐκ τῆς σχέσεως (6.43) προκύπτει ἀμέσως ἡ (6.44). Ἐξ ἄλλου ἐάν ὅλαι αἱ συγκρίσεις ὁδηγοῦν εἰς ὁμοιομορφίας, ἤτοι ἐάν A=0, ἔχομεν τ=1 (καί ἀντιστρόφως), ἐνῶ ἐάν ὅλαι αἱ συγκρίσεις καταλήγουν εἰς ἀντιστροφάς, ἤτοι $A=\binom{N}{2}$, λαμβάνομεν τ=-1 (καί ἀντιστρόφως).

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω ὑπολογίζομεν τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων (6.41) καί (6.43) τόν συντελεστήν τ χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τοῦ πίνακος (6.3).

Κατ'ἀρχήν ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν δυνατῶν συγκρίσεων εἶναι

$$\binom{N}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8\times7}{1\times2} = 28$$

Αἱ συγκρίσεις αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς ὁ μ ο ι ο μ ο ρ φ ί α ς εἶναι

(A,B), (A,Δ), (A,E), (A,Z), (A,N), (A,Θ) .
(B,Γ), (B,E), (B,H), (B,Θ)
(Γ,Δ), (Γ,E), (Γ,Z), (Γ,H), (Γ,Θ)
(Δ,H), (Δ,Θ)
(E,H), (E,Θ)
(Z,H), (Z,Θ)

ἐνῶ αἱ ἀντιστροφαί προκύπτουν ἐκ τῶν συγκρίσεων (A,Γ), (B,Δ), (B,Z), (Δ,E), (Δ,Z), (E,Z), (H,Θ).

Οὕτω, ἔχομεν Ο=21 καί Α=7 καί κατά συνέπειαν ἐκ τοῦ τύπου (6.41)

$$\tau = \frac{21-7}{28} = 0,50$$

ὡς ἐπίσης καί ἐκ τοῦ τύπου (6.43)

$$\tau = 1 - \frac{2\times 7}{28} = \frac{14}{28} = 0,50$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ὑπολογισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ τ - ἐξαιρετικά πολύπλοκος καί δυσχερής ἐάν τό Ν εἶναι μεγάλο - ἁπλοποιεῖται σημαντικά ἐάν αἱ μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ τεθοῦν εἰς τήν φ υ σ ι κ ή ν σειράν των - ἤτοι 1,2,...,Ν - ὡς πρός τήν μίαν τῶν μεταβλητῶν καί εὑρεθοῦν αἱ ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ α ί - αἱ περιπτώσεις δηλαδή κατά τάς ὁποίας ἕνας βαθμός προηγεῖται ἄλλου μικροτέρου - ἐκ τῆς διατάξεως τῶν μονάδων ὡς πρός τήν ἑτέραν τῶν μεταβλητῶν.

Οὕτω, δι' ἀνακατατάξεως τῶν μαθητῶν τοῦ πίνακος (6.3) ὡς πρός τήν μεταβλητήν Χ λαμβάνομεν τόν κατωτέρω πίνακα.

Πίναξ 6.7

| Μαθηταί | Γ | Α | Η | Θ | Β | Ε | Δ | Ζ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Σειρά (Χ) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Σειρά (Υ) | 2 | 1 | 4 | 3 | 7 | 8 | 6 | 5 |

Δοθέντος ὅτι αἱ μονάδες τοῦ ἐν λόγῳ πληθυσμοῦ ἔχουν καταταγῆ κατ'αὔξουσαν τάξιν ὡς πρός τήν μεταβλητήν Χ, πρός εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστροφῶν Α ἀρκεῖ νά ἐπισημανθοῦν - εἰς τήν διάταξιν τῶν μονάδων ὡς πρός Υ - αἱ περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ἕνας βαθμός προηγεῖται ἄλλου μικροτέρου του (ἀντιστροφή βαθμῶν ἤ τάξεων). Εἰς τό ὡς ἄνω παράδειγμα ἀντιστροφαί συμβαίνουν εἰς τά ζεύγη (Γ,Α), (Η,Θ), (Β,Δ), (Β,Ζ), (Ε,Δ), (Ε,Ζ), (Δ,Ζ) ἔχομεν δηλαδή Α=7 καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.43) ἔχομεν πάλιν τ=0,50.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὑπάρξεως σ υ μ π τ ώ σ ε ω ν - εἴτε εἰς τήν μίαν εἴτε εἰς ἀμφοτέρας τάς μεταβλητάς - ἡ κατά τήν ἀνωτέρω διαδικασίαν ὑπολογιζομένη τιμή τοῦ συντελεστοῦ τ εἶναι δυνατόν νά περικλείῃ ὡρισμένα σφάλματα καί νά ἀποκλίνῃ τῆς πραγματικότητος κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον σημαντικά. Μία ἀκριβεστέρα τιμή τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ εἶναι δυνατόν νά εὑρεθῇ καί ἐν προκειμένῳ διά τῆς ἐφαρμογῆς ὡρισμένων διορθώσεων. Ὅπως ὅμως καί εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ συντελεστοῦ Spearman, αἱ ἐν λόγῳ διορθώσεις δέν θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἐνταῦθα καθ'ὅσον, ἐάν μέν ὁ ἀριθμός τῶν ὑφισταμένων συμπτώσεων εἶναι μικρός - ἐν σχέσει πρός τόν συνολικόν ἀριθμόν τῶν δυνατῶν συγκρίσεων - ἡ διαφοροποίησις τῆς τιμῆς τοῦ τ εἶναι ἀμελητέα - καί ὡς ἐκ τούτου οὐδεμία διόρθωσις ἀπαιτεῖται οὐσιαστικῶς εἰς τήν πρᾶξιν - ἐνῶ, ἐάν τό ποσοστόν τῶν ἐν λόγῳ συμπτώσεων εἶναι μεγάλο εἶναι προτιμώτερον ἐν γένει νά ἀποφεύγηται ὁλοσχερῶς ὁ ὑπολογισμός τοῦ συντελεστοῦ τ καί ἡ χρῆσις αὐτοῦ ὡς μέτρου συναφείας. Εἰς τήν πρᾶξιν ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ τ καί ἡ ἐφαρμοζομένη διαδικασία διά τήν εὕρεσιν ὁμοιομορφιῶν καί ἀντιστροφῶν εἰς τήν περίπτωσιν ὑπάρξεως συμπτώσεων δέν διαφέρουν τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω παρά μόνον εἰς τό ὅτι π α ρ α λ ε ί π ο ν τ α ι ὅλαι αἱ συγκρίσεις μεταξύ τῶν μονάδων αἱ θέσεις τῶν ὁποίων συμπίπτουν ὡς πρός μίαν τουλάχιστον τῶν μεταβλητῶν. Συναφῶς παραθέτομεν ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα.

Θεωρήσωμεν τά δεδομένα τοῦ πίνακος (6.4) εἴτε ὡς ἔχουν, εἴτε μετά τήν ἀνακατάταξιν τῶν μαθητῶν-ὡς πρός Χ - εἰς τόν πίνακα (6.8).

Πίναξ 6.8

| Μαθηταί | Γ | Α | Η | Β | Ε | Θ | Δ | Ζ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Σειρά (Χ) | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 | 7 | 8 |
| Σειρά (Υ) | 2 | 1 | 4,5 | 7 | 8 | 3 | 6 | 4,5 |

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (6.4) παρατηροῦμεν ὅτι ὁμοιομορφίαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς συγκρίσεις
(Α,Β), (Α,Δ), (Α,Ε), (Α,Ζ), (Α,Η), (Α,Θ)
(Β,Γ), (Β,Η)
(Γ,Δ), (Γ,Ε), (Γ,Ζ), (Γ,Η), (Γ,Θ)

(Δ,Η), (Δ,Θ)
(Ε,Η) καί
(Ζ,Θ)
ἀντιστροφαί δέ προκύπτουν ἐκ τῶν συγκρίσεων
(Α,Γ), (Β,Δ), (Β,Ζ), (Δ,Ε), (Δ,Ζ), (Ε,Ζ), (Η,Θ).

Οὕτω, παραλειπομένων τῶν συγκρίσεων μεταξύ τῶν μονάδων Β,Ε,Θ αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν ὡς πρός Χ - ἤτοι $\binom{3}{2}=3$ συγκρίσεων - ὡς ἐπίσης τῆς συγκρίσεως τῶν μονάδων Ζ, Η αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν ὡς πρός Υ - ἤτοι$\binom{2}{2}=1$ συγκρίσεως - εὑρίσκομεν 17 ὁμοιομορφίας καί 7 ἀντιστροφάς (Ο=17, Α=7).

Ὡς γνωστόν ὅμως, ὁ ἀριθμός τῶν ἀντιστροφῶν Α=7 εἶναι δυνατόν νά εὑρεθῆ εὐκολώτερον καί ἐκ τοῦ πίνακος (6.8) ὅπου εἰς ἀντιστροφάς ὁδηγοῦν αἱ συγκρίσεις
(Γ,Α), (Η,Θ), (Β,Δ), (Β,Ζ), (Ε,Δ), (Ε,Ζ) καί (Δ,Ζ)
παραλειπομένων καί ἐν προκειμένῳ τῶν συγκρίσεων τῶν ταυτιζομένων - ὡς πρός Χ ἤ ὡς πρός Υ - μονάδων.

Χρησιμοποιοῦντες τά ἀνωτέρω δεδομένα εἶναι δυνατόν νά ὑπολογίσωμεν τήν τιμήν τοῦ τ εἴτε ἐκ τοῦ τύπου (6.41) εἴτε ἐκ τοῦ τύπου (6.43). Ἐν προκειμένῳ ὅμως ἀναφύεται μία διαφορά καί θά πρέπει νά διευκρινισθοῦν τά ἑξῆς: Ἐκ τοῦ τύπου (6.41) εὑρίσκομεν

$$\tau = \frac{17-7}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} = 0,36 \text{ (περίπου)},$$

ἐνῶ ἐκ τοῦ τύπου (6.43) προκύπτει ἡ τιμή

$$\tau = 1 - \frac{2\times 7}{\binom{8}{2}} = 1 - \frac{14}{28} = 0,50$$

Ἡ διαφορά ὀφείλεται εἰς τό ὅτι τό ἄθροισμα ὁμοιομορφιῶν καί ἀντιστροφῶν - ἐν προκειμένῳ Ο+Α=17+7=24 - ὑπολείπεται εἰς τήν περίπτωσιν ὑπάρξεως συμπτώσεων τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν συγκρίσεων $\binom{N}{2}$ - εἰς τό παρόν παράδειγμα, τοῦ ἀριθμοῦ $\binom{8}{2}=28$ - ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις εἰς τό ὅτι δέν ἰσχύει ἡ σχέσις (6.42) ἡ ὁποία ἀπετέλει ὡς εἴδομεν τήν προϋπόθεσιν τῆς ἰσοδυναμίας τῶν τύπων (6.41) καί (6.43). Εἰς τήν πρᾶξιν πρός ἀπαλειφήν τῆς ἐν λόγῳ ἀσυμφωνίας καί διόρθωσιν - χονδρικῶς τουλάχιστον - τῆς τιμῆς τοῦ τ χρησιμοποιεῖται πολλάκις ἀντί τοῦ ἰδεατοῦ ἀριθμοῦ $\binom{N}{2}$ ὁ πραγματικός ἀριθμός τῶν γενομένων συγκρίσεων, ἤτοι τό ἄθροισμα Ο+Α. Οὕτω οἱ τύποι (6.41) καί(6.43) λαμβάνουν ἀντιστοίχως τήν μορφήν

$$\tau = \frac{O-A}{O+A} \quad \text{καί} \quad \tau = 1 - \frac{2A}{O+A}$$

οἱ ὁποῖοι εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμοι, εἰς τό προκείμενον δέ παράδειγμα ἀμφότεροι ὁδηγοῦν εἰς τήν τιμήν τ=0,42 (περίπου).

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ ὡς ἄνω διόρθωσις καθίσταται ἐντελῶς ἀμελητέα - καί ὡς ἐκ τούτου οἱ τύποι (6.41) καί (6.43) εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθοῦν ὑπό τήν ἀρχικήν των μορφήν - ἐάν τό ποσοστόν τῶν ὑφισταμένων συμπτώσεων εἶναι μικρόν, ἐάν δηλαδή αἱ παραλειπόμεναι συγκρίσεις $\binom{N}{2}$ - (Ο+Α) εἶναι σχετικῶς ὀλιγάριθμοι. Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι Ν=40 - ὅτε

$$\binom{N}{2} = \frac{40\times 39}{1\times 2} = 780$$

Ο=600 καί Α=160. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἔχομεν

ἐκ τοῦ τύπου (6.41), $\tau = \frac{600-160}{780} = \frac{440}{780} = 0,56$ (περίπου)

ἐκ τοῦ τύπου (6.43), $\tau = 1 - \frac{2\times 160}{780} = 1 - \frac{320}{780} = \frac{460}{780} = 0,59$ (περίπου)

ἐκ δέ τῆς διορθωμένης μορφῆς αὐτῶν

$$\tau = \frac{O-A}{O+A} = 1 - \frac{2A}{O+A} = 1 - \frac{2\times 160}{760} = 1 - \frac{320}{760} = \frac{440}{760} = 0,58$$

διαφορᾶς δηλαδή ἐντελῶς ἀμελητέας (διά πρακτικούς τουλάχιστον σκοπούς).

## 6.7 Συσχέτισις Κατηγορικῶν Μεταβλητῶν. Πίνακες Συναφείας

Ἡ διερεύνησις τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς δύο κ α τ η γ ο ρ ι κ ῶ ν μεταβλητῶν ἐπιτυγχάνεται κατά βάσιν τῇ βοηθείᾳ τῶν καλουμένων π ι ν ά κ ω ν σ υ-ν α φ ε ί α ς ἤ ἄλλως π ι ν ά κ ω ν ἀ λ λ η λ ο υ-χ ί α ς, ἐκ τῶν ὁποίων καθίσταται ἐπίσης δυνατόν νά ὑπολογισθοῦν οἱ δ ε ῖ κ τ α ι ἀ λ λ η λ ο υ χ ί α ς $\varphi^2$ καί C ἀποτελοῦντες, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ἀντι-κειμενικά - μή ἐνέχοντα δηλαδή τό στοιχεῖον τῆς ὑπο-κειμενικότητος - μέτρα τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν συ-νεξεταζομένων μεταβλητῶν συναφείας (ἀλληλουχίας, τά-σεως πρός ἀντιστοιχίαν).

Οἱ π ί ν α κ ε ς σ υ ν α φ ε ί α ς εἶναι ἁ-πλῶς πίνακες διπλῆς εἰσόδου, μέ μορφήν ἀνάλογον ἐ-κείνης τοῦ συμβολικοῦ πίνακος (4.1), εἰς τούς ὁποίους κατατάσσονται αἱ μονάδες τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ ὁμαδοποιούμεναι σ υ γ χ ρ ό ν ω ς ὡς πρός δύο με-ταβλητάς ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία τουλάχιστον εἶναι κ α-τ η γ ο ρ ι κ ή.

Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ὑπό μελέτην μεταβληταί X καί Y εἶναι ἀμφότεραι κατηγορικαί καί ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι πρός αὐτάς κ α τ η γ ο ρ ί α ι - συμβολικαί "τ ι-μ α ί" - εἰς τάς ὁποίας ὁμαδοποιοῦνται αἱ N μονάδες τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_k$ καί $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots B_\lambda$. Ἐξυπακούεται ὅτι ἐάν μία τῶν μεταβλη-τῶν εἶναι ποιοτική ἤ ποσοτική τοιαύτη αἱ κατηγορίαι $A_i$, $i=1,2,\ldots,k$ ἤ $B_j$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ συμβολίζουν ἁπλῶς τάς γνωστάς τ ά ξ ε ι ς τ ι μ ῶ ν τῆς ἐν λόγῳ με-ταβλητῆς.

Οὕτω, αἱ N μονάδες τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ ὁ-μαδοποιοῦνται ἐν προκειμένῳ εἰς τάς - συνθέτους - κα-τηγορίας $(A_i, B_j)$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ τά ἀπο-τελέσματα δέ τῆς τοιαύτης ὁμαδοποιήσεως παρουσιάζον-ται εἰς ἕνα πίνακα - συναφείας - μέ k γραμμάς καί λ στήλας - ἤ ἄλλως kλ φ α τ ν ί α - ἀνάλογον τοῦ συμ-βολικοῦ πίνακος (4.1) μέ μόνην τήν διαφοράν ὅτι αἱ κεντρικαί τιμαί $x_i$, $i=1,2,\ldots,k$ καί $y_j$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ ἔχουν ἀντικατασταθῆ ὑπό τῶν συμβολικῶν ἐκφράσεων - "τιμῶν" - $A_i$, $i=1,2,\ldots,k$ καί $B_j$, $j=1,2,\ldots,\lambda$ ἀν-τιστοίχως.

Προκειμένου π.χ. ἕνας μελετητής νά διερευνήσῃ τήν σχέσιν μεταξύ τῆς μεταβλητῆς "φ υ λ ή" καί τῆς μεταβλητῆς "θ έ σ ι ς ε ἰ ς τ ό ἐ π ά γ γ ε λ μ α" παρουσίασε τά συλλεγέντα ἐκ τῶν N=30.000 ἐργαζομένων κατοίκων μιᾶς Ἀμερικανικῆς πόλεως δεδομένα ὡς ἑξῆς:

Πίναξ 6.9

| | Θέσις εἰς τό Ἐπάγγελμα (Y) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Φυλή (X) | Ἐργοδόται ($B_1$) | Δι'ἴδιον Λογ/σμόν ($B_2$) | Ὑπάλληλοι ($B_3$) | Ἐργάται ($B_4$) | Συμβοηθοῦντα Μέλη ($B_5$) | Σύνολον |
| Λευκή ($A_1$) | 52(13) | 140(35) | 144(36) | 44(11) | 20( 5) | 400(100) |
| Μαύρη ($A_2$) | 10( 2) | 30( 6) | 85(17) | 330(66) | 45( 9) | 500(100) |
| Κίτρινη ($A_3$) | 8( 8) | 30(30) | 21(21) | 26(26) | 15(15) | 100(100) |
| Σύνολον | 70( 7) | 200(20) | 250(25) | 400(40) | 80( 8) | 1000(100) |

Εἰς τόν ὡς ἄνω πίνακα δίδονται αἱ σχετικαί συχνότητες* - μέ ἄθροισμα 1.000 - μέ τάς ὁποίας ἐμφανίζονται αἱ διάφοροι (σύνθετοι) κατηγορίαι $(A_i, B_j)$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3,4,5$, ἐνῶ παραλλήλως ἔχουν ὑπολογισθῆ αἱ σχετικαί συχνότητες - ἀριθμός ἐντός τῶν παρενθέσεων - αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τάς ὁριζοντίας δεσμευμένας κατανομάς, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τάς κατανομάς ὡς πρός τήν θέσιν εἰς τό ἐπάγγελμα ἑκάστης τῶν τριῶν φυλῶν (Λ,Μ,Κ).

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῶν δεδομένων τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος ἰδιαιτέρως δέ ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ὡς ἄνω δεσμευμένων κατανομῶν καθίσταται προφανές ὅτι ἡ κατανομή ὡς πρός τήν θέσιν εἰς τό ἐπάγγελμα εἶναι οὐσιωδῶς διάφορος ἀπό τῆς μιᾶς φυλῆς εἰς τήν ἄλλην καί ὡς ἐκ τούτου ἐξάγεται τό συμπέρασμα ὅτι μεταξύ τῶν

* Αἱ ἀπόλυτοι συχνότητες προκύπτουν ἐξ αὐτῶν διά πολλαπλασιασμοῦ ἐπί N=30.000.

μεταβλητῶν "φυλή" καί "θέσις εἰς τό ἐπάγγελμα" ὑφίσταται ἔντονος κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον συνάφεια, (οἱ Μαῦροι π.χ. παρουσιάζουν πολύ περισσοτέρους - ἀναλογικῶς - ἐργάτας, πολύ μικρότερον ποσοστόν ἐργοδοτῶν κ.ο.κ.).

Προκειμένου εἰς περιπτώσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω νά ὑπολογίσωμεν ἕνα δείκτην ὁ ὁποῖος νά ἐκφράζῃ ποσοτικῶς καί κατά τρόπον ἀντικειμενικόν τόν βαθμόν - τήν ἔντασιν - τῆς ὑφισταμένης μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν συναφείας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Εἰς τήν παράγραφον (4.9) εἴδομεν ὅτι ἐάν αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι στατιστικῶς ἀνεξάρτητοι - δέν παρουσιάζουν δηλαδή οὐδεμίαν συνάφειαν μεταξύ των - ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$f_{ij} = \frac{f_{i.}\,f_{.j}}{f_{..}} \quad \text{ἤ ἄλλως} \quad \frac{f_{ij}}{f_{..}} = \frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}} \qquad (6.44)$$

δι'ὅλα τά ζεύγη $i=1,2,...,k$, $j=1,2,...,\lambda$ καί ἀντιστρόφως. Οὕτω, ἐάν αἱ συνεξεταζόμεναι μεταβληταί X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι αἱ μέν σχετικαί συχνότητες $f_{ij}:f_{..}$ ταυτίζονται πρός τάς ποσότητας

$$\frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}}$$

- τά γινόμενα δηλαδή τῶν ἀντιστοίχων περιθωριακῶν σχετικῶν συχνοτήτων - καλουμένας συνήθως ἀ ν α μ ε ν ο μ έ ν α ς - ὑπό τήν προϋπόθεσιν τῆς ἀνεξαρτησίας - σ χ ε τ ι κ ά ς σ υ χ ν ό τ η τ α ς, αἱ δέ ἀπόλυτοι τοιαῦται $f_{ij}$ ταυτίζονται μέ τάς ποσότητας

$$\frac{f_{i.}\,f_{.j}}{f_{..}} \quad \text{ἤ ἄλλως} \quad f_{..} \times \frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}}$$

- τά γινόμενα δηλαδή τῶν ἀναμενομένων σχετικῶν συχνοτήτων ἐπί τήν συνολικήν συχνότητα $f_{..}$ - γνωστάς ὡς ἀ ν α μ ε ν ο μ έ ν α ς ἀ π ο λ ύ τ ο υ ς συχνότητας. Κατά συνέπειαν, ἐάν αἱ σχετικαί συχνότητες $f_{ij}$: $:f_{..}$ ἀποκλίνουν τῶν ἀναμενομένων τοιούτων

$$\frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}}$$

ἤ ἄλλως ἐάν αἱ ἀπόλυτοι συχνότητες $f_{ij}$ διαφέρουν τῶν ἀναμενομένων

$$\frac{f_{i.}f_{.j}}{f_{..}}$$

αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί δ έ ν εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἡ ὑφισταμένη δέ μεταξύ αὐτῶν συνάφεια εἶναι τόσον ἐντονωτέρα ὅσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ ἐπί μέρους διαφοραί

$$\frac{f_{ij}}{f_{..}} - \frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}} \quad \text{ἤ} \quad f_{ij} - \frac{f_{i.}f_{.j}}{f_{..}} \qquad (6.45)$$

$i=1,2,\ldots,k, \quad j=1.2,\ldots,\lambda.$

Εἰς τάς ὡς ἄνω ἀκριβῶς διαφοράς βασίζονται δύο ἐκ τῶν συνηθέστερον χρησιμοποιουμένων εἰς τήν πρᾶξιν - προκειμένου περί κατηγορικῶν μεταβλητῶν - μέτρων συναφείας. Τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ δείκτης μ έ σ η ς τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ῆ ς σ υ ν α φ ε ί α ς, γνωστός γενικώτερον ὡς δείκτης $\varphi^2$ καί τό δεύτερον μία μή ἀρνητική ποσότης γνωστή εὐρύτερον ὡς δείκτης $\chi^2$ (χ-τετράγωνον).

Συγκεκριμένως, ὁ δείκτης $\varphi^2$ βασίζεται εἰς τάς διαφοράς τῶν σ χ ε τ ι κ ῶ ν συχνοτήτων

$$\frac{f_{ij}}{f_{..}} \quad \frac{f_{i.}}{f_{..}} \quad \frac{f_{.j}}{f_{..}}$$

καί ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} \frac{\left(\frac{f_{ij}}{f_{..}} - \frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}}\right)^2}{\frac{f_{i.}}{f_{..}} \times \frac{f_{.j}}{f_{..}}} = \sum_{i}\sum_{j}\frac{(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}p_{.j}} \qquad (6.46)$$

ἐνῶ ὁ δείκτης $\chi^2$ λαμβάνει ὑπ'ὄψιν τάς ἀποκλίσεις τῶν ἀ π ο λ ύ τ ω ν συχνοτήτων

$$f_{ij} - \frac{f_{i.}f_{.j}}{f_{..}}$$

καί ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$x^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(f_{ij} - \frac{f_{i.} f_{.j}}{f_{..}}\right)^2}{\frac{f_{i.} f_{.j}}{f_{..}}} = N \sum_i \sum_j \frac{(p_{ij} - p_{i.} p_{.j})^2}{p_{i.} p_{.j}} \qquad (6.47)$$

ὅπου $p_{ij}, p_{i.}$ καί $p_{.j}$ συμβολίζουν ἀντιστοίχως τάς σχετικάς συχνότητας

$$\frac{f_{ij}}{f_{..}}, \frac{f_{i.}}{f_{..}} \text{ καί } \frac{f_{.j}}{f_{..}} \qquad i=1,2,\ldots,k, \qquad j=1,2,\ldots,\lambda$$

καί πληροῦν προφανῶς τάς σχέσεις

$$\sum_j p_{ij} = p_{i.}, \qquad \sum_i p_{ij} = p_{.j}, \qquad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

ἐνῶ $N = f_{..}$ συμβολίζει τήν συνολικήν συχνότητα, τό μέγεθος δηλαδή τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ.

Κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν ἀντί τῶν ἁπλῶν διαφορῶν (6.45) χρησιμοποιοῦνται - πρός ἀποφυγήν τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν προσήμων - τά τετράγωνα αὐτῶν. Ἐξ ἄλλου πρός ἀξιολόγησιν - στάθμισιν - τῆς σχετικῆς σημασίας ἑκάστης τῶν ὡς ἄνω (τετραγωνισμένων) διαφορῶν λαμβάνονται τά πηλίκα αὐτῶν πρός τάς ἀντιστοίχους ἀ ν α μ ε ν ο μ έ ν α ς σχετικάς ἤ ἀπολύτους συχνότητας ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγους πρός τάς σχετικάς ἤ ἀπολύτους συχνότητας ὡς αὗται θά διεμορφοῦντο ἐάν αἱ μεταβληταί ἦσαν ἀνεξάρτητοι.

Ἐκ τῶν τύπων ὁρισμοῦ τῶν δεικτῶν $\varphi^2$ καί $x^2$ καθίσταται προφανές ὅτι μεταξύ αὐτῶν ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$x^2 = N\varphi^2 \quad \text{ἤ} \quad \varphi^2 = \frac{x^2}{N} \qquad (6.48)$$

καί ὡς ἐκ τούτου εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ θά μᾶς ἀπασχολήση μόνον ὁ σημαντικώτερος - καί εὐρύτερα χρησιμοποιούμενος - ἐξ αὐτῶν, ἤτοι ὁ δείκτης $\varphi^2$. Ἐξἄλλου δέον νά λεχθῆ ἐν προκειμένῳ ὅτι ἡ χρῆσις τοῦ δείκτου $x^2$ καί αἱ ἐφαρμογαί αὐτοῦ εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι μᾶλλον περιωρισμέναι καθ'όσον ὁ ἐν λόγῳ δείκτης παρουσιάζει τό ἑξῆς οὐσιῶδες μειονέκτημα. Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ ὡς καί τοῦ τύπου (6.48) ἡ - ἑκάστοτε - τιμή τοῦ $x^2$ ἐξαρτᾶται - ἀντιθέτως πρός τόν δείκτην $\varphi^2$ - καί ἐκ τῆς συνολικῆς συχνότητος N, τοῦ μεγέθους δηλαδή τοῦ ἐρευνηθέντος πληθυσμοῦ. Οὕτω, π.χ. ἡ τιμή τοῦ δείκτου $x^2$ ὑπολογιζομένη ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (6.9) εἶναι $x^2$=30.000$\varphi^2$ - περί τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ $\varphi^2$ ἴδε κατωτέρω - ἐνῶ ἐάν ὁ ἴδιος ἀκριβῶς πίναξ, αἱ αὐταί δηλαδή σχετικαί συχνότητες προήρχοντο ἐκ τῆς ἐρεύνης ἑνός πληθυσμοῦ N=60.000 ἀτόμων ἡ τιμή τοῦ $x^2$ θά ἦτο διπλασία ($x^2$=60.000$\varphi^2$).

Ὡς εἶναι εὐνόητον, τό γεγονός αὐτό καθιστᾶ ἐξαιρετικῶς δυσχερῆ - ἄν ὄχι ἀδύνατον - τήν ἀξιολόγησιν καί ἑρμηνείαν τῶν ἑκάστοτε τιμῶν τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου, ἐνῶ παραλλήλως ἐάν αἱ συνολικαί συχνότητες δύο πινάκων συναφείας εἶναι διάφοροι ἡ σύγκρισις τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ $x^2$ εἶναι ἀνεπίτρεπτος.

Διά τούς λόγους αὐτούς εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν χρησιμοποιεῖται κατά βάσιν ὁ δείκτης $\varphi^2$ ὁ ὁποῖος, ὁριζόμενος ὡς ἀνωτέρω, παρουσιάζει τάς κάτωθι ἰδιότητας:

(i) Εἶναι καθαρός ἀριθμός. Ὡς ἐκ τούτου αἱ τιμαί αὐτῶν εἶναι συγκρίσιμοι ἔστω καί ἐάν ἀναφέρονται εἰς ἑτεροειδῆ ζεύγη μεταβλητῶν.

(ii) Ἡ τιμή αὐτοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ τρόπου παραθέσεως τῶν κατηγοριῶν (τιμῶν) ἑκάστης μεταβλητῆς. Οὕτω π.χ. ἡ τιμή $\varphi^2$ ἐκ τοῦ πίνακος (6.9) δέν θά μετεβάλλετο ἐάν αἱ κατηγορίαι τῆς X τεθοῦν μέ τήν σειράν Μαύρη, Λευκή, Κίτρινη κ.ο.κ. Τοῦτο εἶναι προφανές καθ'όσον ὁ δείκτης $\varphi^2$ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν συχνοτήτων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά φατνία, γραμμάς καί στήλας ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τῶν τελευταίων.

(iii) Δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἐρευνηθέντων μονάδων ἤ ἄλλως τῆς συνολικῆς συχνότητος $f_{..}$ ἤ N τοῦ ἀντιστοίχου πίνακος συναφείας. Τοῦτο εἶναι προφανές καθ' ὅσον εἰς τόν τύπον ὁρισμοῦ (6.46) ὑπεισέρχονται ἀποκλειστικῶς καί μόνον αἱ σχετικαί συχνότητες

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{..}}, \qquad p_{i.} = \frac{f_{i.}}{f_{..}} \quad \text{καί} \quad p_{.j} = \frac{f_{.j}}{f_{..}}$$

(iv) Ὁ δείκτης $\varphi^2$ λαμβάνει τήν τιμήν 0 ἐάν αἱ ὑπό ἔρευναν μεταβληταί εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των καί ἀντιστρόφως. Πράγματι, ἐάν αἱ μεταβληταί X, Y εἶναι ἀνεξάρτητοι ἰσχύουν αἱ σχέσεις (6.44), ἤτοι ἔχομεν $p_{ij}=p_{i.}p_{.j}$ δι' ὅλα τά (i,j) καί συνεπῶς ἐκ τῆς (6.46) εὑρίσκομεν $\varphi^2=0$. Ἀντιστρόφως, ἐάν $\varphi^2=0$, δοθέντος ὅτι ἅπαντες οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος (6.46) εἶναι μή ἀρνητικοί, θά ἔχωμεν $(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2=0$ δι' ὅλα τά (i, j) ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἀμέσως ἡ (6.44).

(v) Ὁ δείκτης $\varphi^2$ δ έ ν ὑ π ε ρ β α ί ν ε ι τόν μικρότερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν k καί λ - τόν ἀριθμόν δηλαδή τῶν γραμμῶν ἤ τῶν στηλῶν τοῦ πίνακος ἐκ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται - μειουμένων κατά ἕνα, ἤτοι ὁ δείκτης $\varphi^2$ πληροῖ πάντοτε τήν ἀνισότητα $\varphi^2 \leqslant \min(k-1,\ \lambda-1)$.

Πρός ἀπόδειξιν τῆς ἐν λόγῳ ἰδιότητος μετασχηματίζομεν κατ' ἀρχήν τόν τύπον ὁρισμοῦ (6.46) ὡς ἑξῆς: Ἔχομεν

$$\varphi^2=\sum_i\sum_j \frac{(p_{ij}-p_{i.}p_{.j})^2}{p_{i.}p_{.j}} = \sum_i\sum_j \frac{p_{ij}^2-2p_{ij}p_{i.}p_{.j}+p_{i.}^2p_{.j}^2}{p_{i.}p_{.j}} =$$

$$=\sum_i\sum_j \frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}} - 2\sum_i\sum_j p_{ij}+\sum_i\sum_j p_{i.}p_{.j}$$

ἐξ αὐτῆς δέ, δοθέντος ὅτι $\Sigma\Sigma p_{ij}=1$ καί $\Sigma\Sigma p_{i.}p_{.j}=\Sigma p_{i.}\times\Sigma p_{.j}=1$, λαμβάνομεν τελικῶς τήν σχέσιν

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda} \frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}} - 1 \qquad (6.49)$$

ἡ ὁποία σημειωτέον χρησιμοποιεῖται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου. Ἐκ τῆς σχέσεως (6.49) λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$p_{ij} \leqslant p_{i.} \quad \text{ἤ} \quad \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \leqslant 1 \ (\text{καθ' ὅσον } p_{i.} = \sum_j p_{ij} \text{ καί } p_{ij} \geqslant 0)$$

ὡς ἐπίσης ὅτι $p_{ij} \leqslant p_{.j}$ ἤ $\frac{p_{ij}}{p_{.j}} \leqslant 1$ (καθ' ὅσον $p_{.j} = \sum_j p_{ij}$).

ἔχομεν $\varphi^2 = \sum_i \sum_j \frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}} - 1 \leqslant \sum_i \sum_j \frac{p_{ij}}{p_{i.}} - 1 = \sum_i \frac{p_{i.}}{p_{i.}} - 1 = k-1$

$$\text{ἤτοι } \varphi^2 \leqslant k-1$$

Ὁμοίως εἶναι

$$\varphi^2 = \sum_i \sum_j \frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}} - 1 \leqslant \sum_i \sum_j \frac{p_{ij}}{p_{.j}} - 1 = \sum_j \sum_i \frac{p_{ij}}{p_{.j}} - 1 = \sum_j \frac{p_{.j}}{p_{.j}} - 1 = \lambda - 1$$

$$\text{ἤτοι } \varphi^2 \leqslant \lambda-1$$

καί κατά συνέπειαν $\varphi^2 \leqslant \min\,(k-1,\ \lambda-1)$. (6.50)

Δέον νά σημειωθῇ ἐνταῦθα ὅτι εἰς τήν σχέσιν (6.50) τό σημεῖον τῆς ἰ σ ό τ η τ ο ς ἰσχύει ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἐκ τῶν "τιμῶν" μιᾶς τῶν μεταβλητῶν δυνάμεθα νά προείπωμεν τάς "τιμάς" τῆς ἄλλης ἄνευ σφάλματος. Γνωρίζοντες π.χ. τήν "θέσιν εἰς τό ἐπάγγελμα" ἑνός ἀτόμου νά δυνάμεθα νά εἴπωμεν τήν "φυλήν" εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει κ.ο.κ. Πράγματι, ὑποθέτοντες ὅτι $k<\lambda$ (γραμμαί ὀλιγώτεραι τῶν στηλῶν ὡς εἰς τόν πίνακα 6.9) ἐάν εἰς ἑ κ ά σ τ η ν στήλην ἡ ἀντίστοιχος συνολική συχνότης $p_{.j}$ συγκεντροῦται εἰς ἕ ν μ ό ν ο ν φατνίον* - καθισταμένης οὕτω δυνατῆς τῆς προβλέψεως τῆς "τιμῆς" τῆς X ἐκ τῆς "τιμῆς" τῆς Y ἄνευ

* Τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νά ὑποτεθῇ ἐν προκειμένῳ - ὅταν δηλαδή $k<\lambda$ - δι' ἑκάστην γραμμήν διότι μερικαί στῆλαι θά ἦσαν κεναί, ἤτοι θά εἴχωμεν $p_{.j} = 0$ ἐνῶ θά πρέπει νά εἶναι $p_{i.} \neq 0$ καί $p_{.j} \neq 0$ διότι ἄλλως ἡ ἔκφρασις (6.49) θά ἦτο ἀόριστος.

σφάλματος - ἐάν δηλαδή ἔχομεν $p_{ij}=p_{.j}$ ἤ ἄλλως $p_{ij}:p_{.j}=1$ διά $j=1,2,\ldots,\lambda$ καί διά κάποιαν ἑκάστοτε τιμήν τοῦ i, θά εἶναι

$$\varphi^2=\sum_{ij}\sum\frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}}-1=\sum_{ij}\sum\frac{p_{ij}}{p_{i.}}-1=\sum_i\frac{p_{i.}}{p_{i.}}-1=k-1$$

Ἀντιστρόφως ἐάν $\varphi^2=k-1$ ἐκ τῆς (6.49) θά ἔχωμεν

$$\sum_{ij}\sum\frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}}=k$$

ἐξ αὐτῆς δέ συνάγεται ὅτι $p_{ij}=p_{.j}$ δι'ὅλα τά $j=1,2,\ldots,\lambda$ καθ'ὅσον ἐάν ἔστω καί διά μίαν στήλην - μίαν τιμήν τοῦ j - ἔχομεν $p_{ij}<p_{.j}$ θά ἦτο

$$\sum_{ij}\sum\frac{p_{ij}^2}{p_{i.}p_{.j}}<\sum_{ij}\sum\frac{p_{ij}}{p_{i.}}=\sum_i\frac{p_{i.}}{p_{i.}}=k$$

ἤτοι θά εἴχωμεν τελικῶς $\varphi^2<k-1$ ἀντιθέτως πρός τήν γενομένην ὑπόθεσιν.

Συμφώνως πρός τήν τελευταίαν ἰδιότητα ἡ μεγίστη τιμή τοῦ δείκτου $\varphi^2$ εἰς ἕνα πίνακα συναφείας 2×2 εἶναι 2-1=1, εἰς ἕνα πίνακα 3×5 εἶναι 3-1=2, εἰς πίνακα 6×5 εἶναι 5-1=4 κ.ο.κ. τό διάστημα δηλαδή εἰς τό ὁποῖον κυμαίνεται ὁ ἐν λόγῳ δείκτης π ο ι κ ί λ λ ε ι ἀναλόγως τῶν διαστάσεων τοῦ πίνακος εἰς τόν ὁποῖον ἀναφέρεται. Τοῦτο ὅμως ἀφ'ἑνός καθιστᾶ ἐξαιρετικῶς δύσκολον - ἄν ὄχι ἀδύνατον - τήν σύγκρισιν τιμῶν τοῦ $\varphi^2$ ἀναφερομένων εἰς πίνακας συναφείας διαφόρων διαστάσεων, ἀφ'ἑτέρου δέ δυσχεραίνει τήν ἀξιολόγησιν καί γενικώτερον τήν κατανόησιν τῆς σημασίας αὐτοῦ.

Εἰς τήν πρᾶξιν - πρός ἀποφυγήν τοῦ ὡς ἄνω μειονεκτήματος - χρησιμοποιεῖται πολλάκις ὁ προταθείς ὑπό τοῦ Σουηδοῦ Στατιστικοῦ Cramer δείκτης ἀλληλουχίας φ΄, ὁ ὁποῖος ὁριζόμενος ἐκ τῆς σχέσεως

$$\varphi'=\sqrt{\frac{\varphi^2}{m-1}} \qquad (6.51)$$

ὅπου $m=\min(k,\lambda)$, ὁ μικρότερος δηλαδή ἐκ τῶν ἀριθμῶν k (γραμμαί) καί λ (στῆλαι), παραλλήλως μέ τάς ὑπολοίπους ἰδιότητας τοῦ δείκτου $\varphi^2$, πληροῖ προφανῶς καί τήν διπλῆν ἀνισότητα

$$0 \leqslant \varphi' \leqslant 1$$

καθισταμένων οὕτω δυνατῶν συγκρίσεων κλπ.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω καί ἰδιαιτέρως τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν δεικτῶν $\varphi^2$, $\varphi'$ καί $x^2$ ἐφαρμόζομεν τούς τύπους (6.49) καί (6.50) εἰς τά ἐμπειρικά δεδομένα τοῦ πίνακος (6.9).

Ἐνταῦθα δέον νά διευκρινισθῆ ὅτι ἀντί τῶν σχετικῶν συχνοτήτων

$$p_{ij}=\frac{f_{ij}}{f_{..}}\ ,\quad p_{i.}=\frac{f_{i.}}{f_{..}} \text{ καί } p_{.j}=\frac{f_{.j}}{f_{..}}$$

εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιοῦνται ἁπλῶς αἱ συχνότητες $f_{ij}$, $f_{i.}$ καί $f_{.j}$ καθ'ὅσον

$$\frac{p_{ij}^{\ 2}}{p_{i.}p_{.j}}=\frac{\dfrac{f_{ij}^{\ 2}}{f_{..}^{\ 2}}}{\dfrac{f_{i.}}{f_{..}}\times\dfrac{f_{.j}}{f_{..}}}=\frac{f_{ij}^{\ 2}}{f_{i.}\,f_{.j}}$$

καί συνεπῶς

$$\varphi^2=\sum_i\sum_j\frac{f_{ij}^{\ 2}}{f_{i.}\,f_{.j}}-1 \tag{6.52}$$

Οὕτω, δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τελευταίου τύπου εἰς τά δεδομένα τοῦ πίνακος (6.9) λαμβάνομεν

$$\varphi^2=\frac{52^2}{400\times70}+\frac{140^2}{400\times200}+\frac{144^2}{400\times250}+\frac{44^2}{400\times400}+\frac{20^2}{400\times80}+\frac{10^2}{500\times70}+$$

$$+\frac{30^2}{500\times200}+\frac{85^2}{500\times250}+\frac{330^2}{500\times400}+\frac{45^2}{500\times80}+\frac{8^2}{100\times70}+\frac{30^2}{100\times200}+$$

$$+\frac{21^2}{100\times250}+\frac{26^2}{100\times400}+\frac{15^2}{100\times80}-1=0,352$$

δι'ἐφαρμογῆς δέ τῆς σχέσεως (6.51) ἔχομεν

$$\varphi' = \sqrt{\frac{0,352}{3-1}} = \sqrt{0,176} = 0,42$$

ἀποτελέσματα ἐκ τῶν ὁποίων καθίσταται φανερόν ὅτι μεταξύ τῆς μεταβλητῆς "φυλή" καί τῆς "θέσεως εἰς τό ἐπάγγελμα" ὑφίσταται μετρία τουλάχιστον σύνάφεια. Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος ἔχομεν ἐπίσης - δι' ἐφαρμογῆς πλέον τοῦ τύπου (6.48) -

$$x^2 = 30.000 \times 0.352 = 10.560$$

Σημειωτέον ὅτι ἐάν ὁ αὐτός πίναξ προήρχετο ἐκ της ἐρεύνης ἐνός πληθυσμοῦ 60.000 ἀτόμων ἡ τιμή τοῦ $x^2$ ὡς ἤδη ἐλέχθη θά ἦτο διπλασία, ἤτοι $x^2=21.120$.

Πέραν τῶν ὡς ἄνω δεικτῶν εἰς πλεῖστας ὅσας περιπτώσεις, πρός μέτρησιν τῆς συναφείας δύο κατηγορικῶν μεταβλητῶν χρησιμοποιεῖται ὁ δείκτης C - γνωστός ἁπλῶς ὡς δ ε ί κ τ η ς σ υ ν α φ ε ί α ς ἤ ἀ λ λ η λ ο υ χ ί α ς - ὁ ὁποῖος ὁρίζεται - συναρτήσει τοῦ $\varphi^2$ - ἐκ τοῦ τύπου

$$C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}} \qquad (6.53)$$

Ὁ ἐν λόγῳ δείκτης ἔχει προφανῶς τάς αὐτάς ἀκριβῶς ἰδιότητας μέ τοῦ $\varphi^2$ ἡ μεγίστη ὅμως τιμή αὐτοῦ καθορίζεται ὑπό τῆς ἀνισότητος

$$C \leqslant \sqrt{1 - \frac{1}{m}} \qquad (6.54)$$

ὅπου $m=\min(k,\lambda)$.

Πράγματι, ἡ σχέσις (6.53) γράφεται

$$C = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi^2}}}$$

ἐξ αὐτῆς δέ καθίσταται προφανές ὅτι ὁ δείκτης C λαμβάνει τήν μεγίστην δυνατήν τιμήν ὅταν καί ὁ $\varphi^2$ λαμβάνει τήν μεγίστην τιμήν του, ἤτοι ὅταν $\varphi^2=m-1$. Κατά συνέπειαν, ὁ δείκτης C πληροῖ τήν ἀνισότητα

$$C \leqslant \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{m-1}}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει εὐκόλως ἡ (6.54).

Ἐκ τῆς ἀνισότητος (6.54) καθίσταται προφανές ὅτι ἐάν $m\to\infty$ ἡ ἀνωτάτη τιμή τοῦ δείκτου C τείνει πρός τήν μονάδα. Κατά συνέπειαν διά σχετικῶς μ ε γ ά λ α ς τιμάς τοῦ m - πίνακος συναφείας μεγάλων διαστάσεων - εἶναι προτιμωτέρα ἡ χρῆσις τοῦ C - ἐν σχέσει πρός τήν ἐφαρμογήν αὐτοῦ τούτου τοῦ $\varphi^2$ - καθ'ὅσον ἡ ἀπόκλισις τῆς ἀνωτάτης τιμῆς του ἐκ τῆς μονάδος εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μικρά. Οὕτω π.χ. εἰς ἕνα πίνακα 5×8 ἔχομεν ὅτι

$$C \leqslant \sqrt{1-\frac{1}{5}} \quad \text{ἤτοι} \quad C \leqslant 0,9$$

(περίπου) καί συνεπῶς τόσον ἡ σύγκρισις τιμῶν τοῦ C ἐκ μεγάλων πινάκων, ὅσον καί ἡ ἀξιολόγησις καί κατανόησις τῆς σημασίας αὐτοῦ εἶναι πολύ ἁπλουστέρα. Ἐκ τῶν δεδομένων π.χ. τοῦ πίνακος (6.9) ἔχομεν ὅτι

$$C = \sqrt{\frac{0,352}{1+0,352}} = 0,51$$

ἐνῶ ἡ μεγίστη δυνατή τιμή τοῦ C εἰς ἕνα πίνακα 3 × 5 εἶναι

$$\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{0,67} = 0,82$$

**Πίνακες Συναφείας 2 Χ 2 (Τετράπτυχοι)**

Εἰς πολλάς περιπτώσεις ἑκάστη τῶν συνεξεταζομένων κατηγορικῶν μεταβλητῶν εἶναι δυνατόν νά λάβη δύο μόνον "τιμάς", ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐπιτρέπει τήν διάκρισιν τῶν μονάδων τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ εἰς δύο καί μόνον κατηγορίας (ΝΑΙ-ΟΧΙ) ἤτοι εἰς μονάδας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡρισμένην ἰδιότητα καί εἰς τάς ὑπολοίπους αἱ ὁποῖαι δέν τήν ἔχουν. Κατηγορικαί μεταβληταί αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι γνωσταί ὡς δ ι χ ο τ ό μ ο ι μεταβληταί.

Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν τά ἐμπειρικά δεδομένα παρατίθενται συνήθως εἰς ἕνα πίνακα μέ δύο γραμμάς καί δύο στήλας (τ ε τ ρ ά π τ υ χ ο ν πίνακα) ἤτοι εἰς ἕνα πίνακα (2×2) τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος (6.10).

Πίναξ 6.10

| Y / X | ΝΑΙ | ΟΧΙ | Σύνολον |
|---|---|---|---|
| ΝΑΙ | α | β | α+β |
| ΟΧΙ | γ | δ | γ+δ |
| Σύνολον | α+γ | γ+δ | N=α+β+γ+δ |

Οὕτω π.χ. ἕνας μελετητής προκειμένου νά διερευνήση κατά πόσον ὑπάρχει κάποια σχέσις (συνάφεια) μεταξύ "φύλου" καί "καπνίσματος" εἰς τούς ἐνηλίκους μιᾶς μικρᾶς πόλεως κατέταξεν αὐτούς - κατόπιν σχετικῶν ἐρωτήσεων - εἰς τόν ἀκόλουθον πίνακα.

Πίναξ 6.11

| Φῦλον | Καπνισταί | | Σύνολον |
|---|---|---|---|
| | ΝΑΙ | ΟΧΙ | |
| Ἄνδρες | 800 | 200 | 1.000 |
| Γυναῖκες | 400 | 600 | 1.000 |
| Σύνολον | 1.200 | 800 | 2.000 |

Εἰς τήν περίπτωσιν τετραπτύχων πινάκων τῆς μορφῆς τοῦ (6.10) ὁ τύπος (6.49) ἤ ἄλλως ὁ τύπος(6.52), διά τοῦ ὁποίου ὁρίζεται ὁ δείκτης $\varphi^2$, λαμβάνει - κατόπιν ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων καί μετασχηματισμῶν - τήν κατωτέρω μορφήν

$$\varphi^2 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)} \qquad (6.55)$$

Οὕτω, δι᾿ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (6.55) ἐπί τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (6.11) λαμβάνομεν

$$\varphi^2 = \frac{(800\times 600-200\times 400)^2}{1.000\times 1.000\times 1.200\times 800} = \frac{400.000^2}{960.000.000.000} = \frac{16}{96} = 0{,}16 \text{ (περίπου)}$$

ἐξ αὐτοῦ δέ εὑρίσκομεν

$$\varphi' = \sqrt{\frac{\varphi^2}{2-1}} = 0{,}4\ , \qquad C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}} = \sqrt{\frac{0{,}16}{1+0{,}16}} = 0{,}37$$

καί $x^2 = 2.000\times 0{,}16 = 320$.

Συναφῶς πρός τούς τετραπτύχους πίνακας ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν τά κάτωθι: Ὑποθέτοντες ὅτι ἑκάστη τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X καί Y λαμβάνει τήν τιμήν 1 ἐάν μία μονάς κατατάσσεται εἰς τήν κατηγορίαν ΝΑΙ καί τήν τιμήν 0 ἐάν ἡ ἐν λόγῳ μονάς ἀνήκει εἰς τήν κατηγορίαν ΟΧΙ, θά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ τιμή τοῦ γραμμικοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $\rho^2$ - τό τετράγωνον δηλαδή τοῦ γραμμικοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως - καί ἡ τιμή τοῦ $\varphi^2$ ταυτίζονται.

Πράγματι, χρησιμοποιοῦντες τόν συμβολισμόν τοῦ πίνακος (6.10) ἔχομεν

$\sum_i f_{i.} x_i = 1(\alpha+\beta)+0(\gamma+\delta) = \alpha+\beta$

$\sum_j f_{.j} y_j = 1(\alpha+\gamma)+0(\beta+\delta) = \alpha+\gamma$

$\sum_i f_{i.} x_i^2 = 1^2(\alpha+\beta)+0^2(\gamma+\delta) = \alpha+\beta$

$\sum_j f_{.j} y_j^2 = 1^2(\alpha+\gamma)+0^2(\beta+\delta) = \alpha+\gamma$ καί

$\sum_i\sum_j f_{ij} x_i y_j = 1\times 1\times\alpha+1\times 0\times\beta+0\times 1\times\gamma+0\times 0\times\delta = \alpha$

καί κατά συνέπειαν δι᾿ἀντικαταστάσεως εἰς τόν τύπον (6.33) λαμβάνομεν

$$\rho = \frac{\alpha - \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}}{\sqrt{(\alpha+\beta) - \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}}\sqrt{(\alpha+\gamma) - \frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}}} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}}{\frac{\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}} = \frac{\alpha\delta-\beta\delta}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας - διά συγκρίσεως πρός τόν τύπον (6.55) - συνάγεται ἀμέσως ἡ ἰσότης

$$\varphi^2 = \rho^2 \qquad (6.56)$$

Ἡ τελευταία ἰσότης συνδέει τήν ἔννοιαν τοῦ δείκτου $\varphi^2$ πρός τήν ἀντίστοιχον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ρ καί δηλοῖ - ὑπό τάς γενομένας ἀνωτέρω ὑποθέσεις - τήν ὑφισταμένην μεταξύ αὐτῶν σχέσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7

# ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΕΙΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥΣ

## 7.1 Πολυμεταβλητοὶ Στατιστικοὶ Πληθυσμοὶ

Εἰς τά τρία τελευταῖα κεφάλαια ἐπραγματεύθημεν λεπτομερῶς τάς μεθόδους αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται συνήθως προκειμένου νά μελετηθῇ στατιστικῶς ἕνας δ ι μ ε τ α β λ η τ ό ς πληθυσμός, ἤτοι ἕνα σύνολον ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i, y_i)$ $i=1,2,\ldots,N$ τά ὁποῖα συνίστανται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν N ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πλήθους ὡς πρός δύο μεταβλητάς X καί Y ἤ ἄλλως ἕνα σύνολον ἀριθμητικῶν ζευγῶν $(x_i, y_i)$ $i=1,2,\ldots,N$ τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ὡς λέγομεν ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τοῦ ζεύγους τῶν μεταβλητῶν (X,Y). Εἰδικώτερον μᾶς ἀπησχόλησεν ἡ διερεύνησις τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν X καί Y μέ ἀντικειμενικόν σκοπόν τήν διαπίστωσιν - βάσει τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων $(x_i, y_i)$ $i=1,2,\ldots,N$ - τοῦ "κ α τ ά π ό σ ο ν" καί "π ο ῖ ο ν τ ρ ό π ο ν" ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῆς ἄλλης.

Πολλάκις ὅμως εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ἀντιμετωπίζονται προβλήματα εἰς τά ὁποῖα ὑπεισέρχονται π ε ρ ι σ σ ό τ ε ρ α ι τ ῶ ν δ ύ ο μεταβληταί αἱ ὁποῖαι κατά κανόνα ἀλληλεξαρτῶνται - σχετίζονται μεταξύ των - καί ὡς ἐκ τούτου ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τοῦ τρόπου διαμορφώσεως ὄχι μιᾶς μόνον ἀλλά δύο ἤ περισσοτέρων μεταβλητῶν. Οὕτω π.χ. αἱ διάφοροι δαπάναι μιᾶς οἰκογενείας ἐπιρρεάζονται ἐν γένει ὄχι μόνον ἐκ τοῦ εἰσοδήματος αὐτῆς, ἀλλά καί ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μελῶν της, τήν ἡλικίαν αὐτῶν, τό ἐπίπεδον μορφώσεως καί τό ἐπάγγελμά των ὡς καί πλῆθος ἄλλων συναφῶν μεταβλητῶν. Ὁμοίως, ἡ ποσότης τοῦ παραγομένου ἔκ τινος ἀγροῦ σίτου ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων λιπασμάτων, ἀλλά καί ἐκ τῶν καιρικῶν συνθηκῶν (βροχόπτωσις θερμοκρασία κλπ.), πρός τούτοις δέ ἐκ τῶν ἰδιαιτέρων γνωρισμάτων τοῦ ἀγροῦ (κλίσις, προσανατολισμός, ποιότης ἐδάφους κλπ.). Εἰς περιπτώσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω καθίσταται ἀναγκαία ἡ ἀπό κοινοῦ θεώρησις - συνεξέτασις - καί διερεύνησις τῆς πρός ἀλλήλας συμπεριφορᾶς τ ρ ι ῶ ν ἤ π ε ρ ι σ σ ο τ έ-ρ ω ν μεταβλητῶν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ μελέτη ἑνός π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ ο ῦ στατιστικοῦ πληθυσμοῦ.

Κατ᾽ἀναλογίαν τῆς ἐννοίας ἑνός διμεταβλητοῦ πληθυσμοῦ, ἕνας π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ ό ς - τριμεταβλητός, τετραμεταβλητός κλπ. - στατιστικός πληθυσμός εἶναι ἕνα σύνολον ἀριθμητικῶν πλειάδων - τριάδων, τετράδων κλπ. - $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ $i=1,2,\ldots,N$ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ἐκ παρατηρήσεως τιμάς μιᾶς ἀντιστοίχου πλειάδος μεταβλητῶν $(X,Y,Z,\ldots)$ ἤ ἄλλως ἕνα σύνολον πλειάδων $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$ $i=1,2,\ldots,N$ αἱ ὁποῖαι συνίστανται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν N ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πλήθους ὡς πρός τάς μεταβλητάς $X,Y,Z,\ldots$

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ὑπό μελέτην - τῶν συνεξεταζομένων - μεταβλητῶν εἶναι k (ὅπου $k=3,4,\ldots$), πρός χάριν δέ τῆς γενικότητος θά συμβολίζωμεν αὐτάς $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Ὡσαύτως, τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως, αἱ τιμαί δηλαδή τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς N ἐπί μέρους μονάδας τοῦ ὑπό ἔρευναν πληθυσμοῦ, θά συμβολίζωνται - κατ᾽ἀντιστοιχίαν - διά τῶν διατεταγμένων πλειάδων

$$(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki})$$

ὅπου φυσικά ὁ δείκτης i λαμβάνει τάς τιμάς $i=1,2,\ldots,N$.

Αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται εἰς τήν πρᾶξιν προκειμένου νά μελετηθῆ στατιστικῶς ἕνας π ο λ υ μ ε-τ α β λ η τ ό ς πληθυσμός εἶναι κατά βάσιν αἱ αὐταί ἤ καλλίτερον γ ε ν ι κ ε ύ σ ε ι ς ἐκείνων αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τάς περιπτώσεις τῶν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν.

Οὕτω, μία προκαταρκτική διερεύνησις τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων, πρός ἀπόκτησιν μιᾶς γενικῆς τουλάχιστον εἰκόνος τῶν ὑφισταμένων μεταξύ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν σχέσεων καί ἐξαγωγήν ἀναλόγων συμπερασμάτων, εἶναι δυνατόν νά ἐπιτευχθῆ καί ἐν προκειμένῳ διά τῆς καταρτίσεως καί ἐπισκοπήσεως καταλλήλων κατά περίπτωσιν πινάκων π ο λ λ α π λ ῆ ς - τριπλῆς, τετραπλῆς κλπ - εἰσόδου, ὡς ἐπίσης διά τῆς ἀναλύσεως τῶν συναφῶν δεσμευμένων κατανομῶν, ὑποκατανομῶν κλπ. ὡς τοῦτο ἐγένετο προκειμένου περί διμεταβλητῶν πληθυσμῶν εἰς τό Κεφάλαιον 4.

Ἐξ ἄλλου, αἱ μέθοδοι τῆς Ἀναλύσεως Παλινδρομήσεως καί τῆς Ἀναλύσεως Συσχετίσεως τάς ὁποίας ἐπραγματεύθημεν λεπτομερῶς - Κεφάλαια 5 καί 6 - συναφῶς πρός διμεταβλητούς πληθυσμούς, ἀποτελοῦν καί εἰς τήν περίπτωσιν πολυμεταβλητῶν πληθυσμῶν - γενικευόμεναι, ὡς εἶναι εὐνόητον, καταλλήλως - τάς βασικάς διαδικασίας διά τῶν ὁποίων καθίσταται δυνατή ἡ ἐξαγωγή ἀ ν τ ι κ ε ι μ ε ν ι κ ῶ ν π ο σ ο τ ι κ ο ῦ χαρακτῆρος καί γνωστῆς ἀ ξ ι ο π ι σ τ ί α ς - βαθμοῦ προσεγγίσεως - συμπερασμάτων, ἀπαραιτήτων ὡς γνωστόν, διά τήν λῆψιν χρησίμων - πρακτικῶς - καί ἀμέσως ἐφαρμοσίμων ἀποφάσεων.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη ἡ ἀνάλυσις παλινδρομήσεως καί ἡ ἀνάλυσις συσχετίσεως ἐφαρμοζόμεναι εἰς διμεταβλητούς πληθυσμούς ἔχουν ὡς σκοπόν νά ἑρμηνεύσουν - ἤ τουλάχιστον νά συσχετίσουν - τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν καί τάς μεταβολάς τῆς μιᾶς τῶν μεταβλητῶν, καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ς, τῇ βοηθείᾳ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῆς ἄλλης, καλουμένης εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ο υ ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ῆ ς. Διά τόν λόγον αὐτόν - τῆς ὑπάρξεως δηλαδή μ ι ᾶ ς μ ό ν ο ν ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς - ἀναφέρονται συνήθως ὡς Ἁ π λ ῆ Π α λ ι ν δ ρ ό μ η σ ι ς καί Ἁ π λ ῆ Σ υ σ χ έ τ ι σ ι ς.

Κατ' ἀναλογίαν, αἱ ἐν λόγῳ μέθοδοι, ἐφαρμοζόμεναι εἰς π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ ο ύ ς πληθυσμούς μέ ἀντικειμενικόν σκοπόν νά ἑρμηνεύσουν - ἤ νά συσχετίσουν - τάς τιμάς καί τάς μεταβολάς τῆς μεταβλητῆς $X_1$ - καλουμένης ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ς - τῇ βοηθείᾳ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν π ο λ λ ῶ ν ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ῶ ν τοιούτων καί συγκεκριμένως τῶν ὑπολοίπων $k-1$ μεταβλητῶν $X_2, X_3, \ldots, X_k$, εἶναι γνωσταί ἀντιστοίχως ὡς π ο λ λ α π λ ῆ ἤ π ο λ υ μ ε τ α β λ η τ ή π α λ ι ν δ ρ ό-μ η σ ι ς   καί   π ο λ λ α π λ ῆ   ἤ   π ο λ υ μ ε τα- β λ η τ ή   σ υ σ χ έ τ ι σ ι ς.

Ἡ πολλαπλῆ παλινδρόμησις καί συσχέτισις ὡς καί ὡρισμέναι ἐφαρμογαί αὐτῶν θά μᾶς ἀπασχολήσουν λεπτομερέστερον εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους.

## 7.2 Ἐπιφάνεια Παλινδρομήσεως Ἐλαχίστου Μέσου Τετραγωνικοῦ Σφάλματος. Δείκτης Πολλαπλοῦ Προσδιορισμοῦ

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας μελετητής ἔχων εἰς τήν διάθεσίν του τά ἐμπειρικά δεδομένα

$$(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ki}),\ i=1,2,\ldots,N$$

τάς τιμάς δηλαδή τῶν N ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τάς k μεταβλητάς $(X_1,X_2,\ldots,X_k)$, ἐπιθυμεῖ νά διερευνήση τήν πρός ἀλλήλας συμπεριφοράν τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν, εἰδικώτερον δέ τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς $X_1$ - καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η ς μεταβλητῆς - σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῶν ὑπολοίπων, καλουμένων ἀντιστοίχως ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ῶ ν μεταβλητῶν.

Κατ'ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων εἰς τήν παράγραφον (5.3) ἀναφορικῶς πρός τό ζεῦγος τῶν μεταβλητῶν (X,Y) - δηλαδή περί ἑνός διμεταβλητοῦ πληθυσμοῦ - ἐπιδιώκεται ἐν προκειμένῳ - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν ὡς ἄνω ἐμπειρικῶν δεδομένων - ὁ προσδιορισμός μιᾶς ἁπλῆς μαθηματικῆς ἐξισώσεως

$$x_1=f(x_2,x_3,\ldots,x_k,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda) \tag{7.1}$$

διά τῆς ὁποίας ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή $X_1$ νά ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν k-1 ἑρμηνευτικῶν τοιούτων $X_2,X_3$, $X_k$ πρός τούτοις δέ νά ἐπιτυγχάνωνται κατά βάσιν τά ἑξῆς:

(i) Νά περιγράφεται ἁπλᾶ καί συνοπτικά ἡ νομοτέλεια ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς

$X_1$ ἐν σχέσει πρός τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν τοιούτων $X_2, X_3, \ldots, X_k$, καί

(ii) Νά καθίσταται δυνατόν ἐκ τῶν διαφόρων τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν ($X_2, X_3, \ldots, X_k$) νά ὑπολογίζωνται μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν αἱ ἀντίστοιχοι - οἱονεί, ἀναμενόμεναι - τιμαί τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης $X_1$.

Εἰς τήν ἐξίσωσιν (7.1) αἱ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda$ εἶναι αὐθαίρετοι - ὑπό προσδιορισμόν - παράμετροι, αἱ δέ $x_1$, $x_2, \ldots, x_k$ συμβολίζουν δυνατάς τ ι μ ά ς τῶν ἀντιστοίχων μ ε τ α β λ η τ ῶ ν.

Ἡ σχέσις (7.1) εἶναι μία γενική - συμβολική - ἐξίσωσις προφανῶς δέ προκειμένου νά συγκεκριμενοποιηθῆ κατά τρόπον ὥστε νά ἐπιτυγχάνονται δι'αὐτῆς οἱ τεθέντες ἀνωτέρω στόχοι, ἀπαιτεῖται α) νά ἐπιλεγῆ καταλλήλως ἡ μορφή τῆς f(...) ὁ τρόπος δηλαδή τῆς ἀλγεβρικῆς διασυνδέσεως τῆς μεταβλητῆς $X_1$ πρός τάς $X_2$, $X_3, \ldots, X_k$ καί β) μετά τήν ἐπιλογήν μιᾶς συγκεκριμένης μορφῆς νά ὑπολογισθοῦν - ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - αἱ καταλληλότεραι κατά περίπτωσιν τιμαί τῶν παραμέτρων $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda$.

Ἡ ἐξίσωσις (7.1) ἐάν $k=3$ - ἐάν δηλαδή τό πρόβλημα περιλαμβάνει τρεῖς μόνον μεταβλητάς $X_1, X_2$ καί $X_3$ - παριστᾶ ὡς γνωστόν μία ἐ π ι φ ά ν ε ι α εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων. Κατ'ἐπέκτασιν, ἐάν $k>3$ θά λέγωμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις παριστᾶ μίαν ὑ π ε ρ ε π ι φ ά ν ε ι α ν (εἰς τόν χῶρον τῶν k διαστάσεων). Οὕτω ἡ μ ο ρ φ ή αὐτῆς δυνατόν νά εἶναι ἕν ἐ π ί π ε δ ο ν $x_1=\alpha+\beta_2x_2+\beta_3x_3$ ἤ ἕν ὑπερεπίπεδον $x_1=\alpha+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\ldots+\beta_kx_k$ μία παραβολική ἐπιφάνεια (ἤ ὑπερεπιφάνεια) δευτέρου ἤ ἀνωτέρου βαθμοῦ ὡς π.χ.

$$x_1=\alpha+\beta_2x_2+\gamma_2x_2^2+\beta_3x_3+\gamma_3x_3^2 \quad \text{ἤ} \quad x_1=\alpha+\beta_2\sqrt{x_2}+\beta_3x_3+\gamma_3x_3^3 \quad \text{κλπ.}$$

ἤ τέλος μία ἐπιφάνεια πολυπλοκωτέρου σχήματος ὡς π.χ.

$$x_1=\alpha+\beta_2\frac{1}{x_2}+\beta_3x_3 \quad \text{ἤ} \quad x_1=\alpha x_2^{\beta_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4}$$

ἡ ὁποία λαμβάνει τήν γραμμικήν μορφήν

$$\log x_1=\alpha+\beta_2\log x_2+\beta_3\log x_3+\beta_4\log x_4$$

χρησιμοποιουμένων τῶν λογαρίθμων τῶν μεταβλητῶν, κ.ο.κ. Ὁπωσδήποτε ὅμως ἡ ἑκάστοτε συγκεκριμένη μορφή αὐτῆς ἐπιλέγεται κατά περίπτωσιν βάσει ἀρχῶν καί κριτηρίων ἀναλόγων ἐκείνων τά ὁποῖα ἐφηρμόσθησαν ἤδη εἰς τήν περίπτωσιν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν διά τήν ἐπιλογήν τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης (5.6). Ἐν προκειμένῳ δέον νά λεχθῇ ὅτι εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν χρησιμοποιεῖται συνήθως - καθαρῶς διά λόγους ἁ π λ ό τ η τ ο ς ἡ γραμμική ἐξίσωσις

$$x_1=\alpha+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\ldots+\beta_kx_k$$

δηλαδή ἕν ἐπίπεδον ἤ ὑπερεπίπεδον. Διά τόν λόγον ἄλλωστε αὐτόν εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους θά μᾶς ἀπασχολήσῃ λεπτομερέστερον μόνον ἡ ὡς ἄνω γραμμική μορφή.

Μετά τήν ἐπιλογήν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (7.1) αἱ τιμαί τῶν παραμέτρων $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda$ ὑπολογίζονται κατά κανόνα - ὅπως καί αἱ παράμετροι τῆς καμπύλης (5.6) εἰς τήν περίπτωσιν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν - δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κ ρ ι τ η ρ ί ο υ τοῦ ἐ λ α χ ί σ τ ο υ μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς ἤτοι δι' ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ ἀθροίσματος - ἤ ἀκριβέστερον - τοῦ μέσου ὅρου τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων - σφαλμάτων - τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $X_1$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν αὐτῆς εὑρισκομένων τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (7.1).

Αἱ ἐν λόγῳ ἀποκλίσεις εἶναι ὡς γνωστόν αἱ θετικαί ἤ ἀρνητικαί ποσότητες

$$\hat{\varepsilon}_i=x_{1i}-\hat{x}_{1i},\ i=1,2,\ldots,N \qquad (7.2)$$

ὅπου $x_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ εἶναι αἱ ἐκ παρατηρήσεως τιμαί τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $X_1$ καί $\hat{x}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ συμβολίζουν τάς - οἱονεί - τιμάς τῆς $X_1$ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν ($X_2, X_3, \ldots, X_k$) - ἤτοι εἰς τάς πλειάδας ($x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{ki}$), $i=1,2,\ldots,N$ - καί ὑπολογίζονται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (7.1), ἤτοι ἐκ τῆς σχέσεως

$$\hat{x}_{1i}=f(x_{2i},x_{3i},\ldots,x_{ki},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda),i=1,2,\ldots,N \quad (7.3)$$

Κατά συνέπειαν αἱ ζητούμεναι τιμαί τῶν παραμέτρων $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda$ εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι ἐλαχιστοποιοῦν τόν μέσον ὅρον τῶν τετραγώνων τῶν ὡς ἄνω ἀποκλίσεων, ἤτοι τό μ έ σ ο ν τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ό ν σ φ ά λ μ α ὁριζόμενον ἐν γένει ὑπό τῆς σχέσεως

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\varepsilon}_i^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_i(x_{1i}-\hat{x}_{1i})^2=\frac{1}{N}\sum_i\left[x_{1i}-f(x_{2i},x_{3i},x_{ki},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda)\right]^2 \quad (7.4)$$

ἤ ἁπλούστερον τό ἄθροισμα $\Sigma\hat{\varepsilon}_i^{\,2}$.

Πρός ὑπολογισμόν τῶν ἐν λόγῳ - ζητουμένων - τιμῶν τάς ὁποίας θά συμβολίζωμεν καί ἐν προκειμένῳ $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_k$ ἐφαρμόζεται ἡ γνωστή μέθοδος τῶν Ἐλαχίστων Τετραγώνων. Συγκεκριμένως, αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι τῆς ποσότητος $\Sigma\hat{\varepsilon}_i^{\,2}$ ὡς πρός $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda$ ἐξισοῦνται πρός τό μηδέν καί τό οὕτω προκῦπτον σύστημα τῶν λ ἐξισώσεων - καλουμένων ὡς γνωστόν κ α ν ο ν ι κ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν -

$$\frac{\partial}{\partial\beta_j}(\Sigma\hat{\varepsilon}_i^{\,2})=0 \text{ ἤ ἄλλως } \frac{\partial}{\partial\beta_j}\sum_i\left[x_{1i}-f(x_{2i},x_{3i},\ldots,x_{ki},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda)\right]^2=0$$
$$\text{ὅπου } j=1,2,\ldots,\lambda \quad (7.5)$$

ἐπιλύεται ὡς πρός τάς λ ἀγνώστους - ὑπό προσδιορισμόν - παραμέτρους $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda$. Τό ὅτι ἡ λύσις ($\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_\lambda$) τοῦ κανονικοῦ συστήματος (7.5) ἐλαχιστοποιεῖ τήν ποσότητα $\Sigma\hat{\varepsilon}_i^{\,2}$ - καί δέν τήν μεγιστοποιεῖ - εἶναι προφανές, καθ'ὅσον ἡ ἐν λόγῳ ποσότης ὡς ἄθροισμα τετραγώνων μόνον ἐλάχιστον δύναται νά ἔχῃ καί ὄχι μέγιστον. Τήν συγκεκριμένην πλέον ἐπιφάνειαν-μέλος τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιφανειῶν (7.1) -

$$\hat{x}_1=f(x_2,x_3,\ldots,x_k,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_\lambda) \qquad (7.6)$$

ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τάς οὕτω ὑπολογιζομένας τιμάς τῶν παραμέτρων $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\lambda$ θά καλοῦμεν ἐ π ι φ ά ν ε ι α ν π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς ἐ λ α χ ί σ τ ο υ μ.τ.σ., τήν δέ ἐξίσωσιν αὐτῆς (7.6) ἐ ξ ί σ ω σ ι ν π ο λ λ α π λ ῆ ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς ἐ λ α χ ί σ τ ο υ μ.τ.σ.

Ἡ ἐξίσωσις πολλαπλῆς παλινδρομήσεως (7.6) ἐκφράζουσα τήν ἐξηρτημένην μεταβλητήν $X_1$ ὡς συνάρτησιν τῶν ἑρμηνευτικῶν τοιούτων $X_2,X_3,\ldots,X_k$, ἀφ'ἑνός συνοψίζει τά ἐμπειρικά δεδομένα - τό ν έ φ ο ς δηλαδή τῶν σημείων $(x_{1i},x_{2i},x_{3i},\ldots,x_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$ - καί περιγράφει συνοπτικά τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς $X_1$ σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῶν $X_2,X_3,\ldots,X_k$ ἀφ'ἑτέρου δέ ἐπιτρέπει ἐκ διαφόρων - δυνατῶν - τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν νά ὑπολογίζωνται - κατά προσέγγισιν - αἱ ἀναμενόμεναι ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς $X_1$ (ο ἱ ο ν ε ί δηλαδή τιμαί τῆς $X_1$).

Ἡ ἀξιοπιστία τῶν διά τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως ἐξαγομένων συμπερασμάτων καί εἰδικώτερον ὁ βαθμός τῆς προσεγγίσεως μέ τήν ὁποίαν ὑπολογίζονται δι'αὐτῆς τιμαί τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $X_1$, ἐξαρτᾶται κατά βάσιν ἐκ τοῦ β α θ μ ο ῦ π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς τῆς ἀντιστοίχου ἐπιφανείας παλινδρομήσεως πρός τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐκ τοῦ "πόσον καλά" ἡ ἐν λόγῳ ἐπιφάνεια συνοψίζει τό νέφος τῶν σημείων τῆς παρατηρήσεως καί τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν μεταβλητῶν $X_1$ καί $(X_2,X_3,\ldots,X_k)$ σχέσιν.

Πρός μέτρησιν τοῦ β α θ μ ο ῦ π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς τῆς ἐπιφανείας παλινδρομήσεως (7.6) χρησιμοποιοῦνται συνήθως - ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν καμπύλων παλινδρομήσεως - τό περί αὐτήν μ έ σ ο ν τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ό ν σ φ ά λ μ α καί ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ καλούμενος ἐν προκειμένῳ - διά λόγους εὐνοήτους - δ ε ί κ τ η ς π ο λ λ α π λ ο ῦ π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ.

Τό μ.τ.σ. περί τήν ἐπιφάνειαν παλινδρομήσεως (7.6), ὁριζόμενον ὡς ὁ μέσος ὅρος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς $X_1$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν αὐτῆς-εὑρισκομένων τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (7.6)-καί συμβολιζόμενον συνήθως

$$\sigma^2_{x_1 . x_2 x_3 \ldots x_k} \quad ἤ \quad \sigma^2_{1.23\ldots k} \quad ἤ \text{ ἁπλῶς } \sigma^2$$

δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{1i}-\hat{x}_{1i})^2 = \frac{1}{N}\sum_i \left[x_{1i} - f(x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{ki}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_\lambda)\right]^2 \tag{7.7}$$

Εἶναι προφανές ὅτι τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ ἀποτελεῖ - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_\lambda$ - τήν ἐλαχίστην δυνατήν τιμήν τῆς ποσότητος $\frac{1}{N}\Sigma\, \hat{\varepsilon}_i^{\,2}$ ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις εἶναι μικρότερον τῶν μ.τ.σ. περί οἱανδήποτε ἄλλην ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰκογενείας (7.1).

Ἐξ ἄλλου, συμβολίζοντες καί ἐν προκειμένῳ τήν συνολικήν διακύμανσιν τῶν τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $X_1$ διά τοῦ συμβόλου $\sigma^2 x_1$, ἤ ἁπλῶς $\sigma_1^{\,2}$ ἀποδεικνύεται*, ὑπό τήν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $x_1=c$ - ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά - εἶναι μέρος τῆς οἰκογενείας (7.1), ὅτι

$$\sigma^2 \leqslant \sigma_1^{\,2} \tag{7.8}$$

τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος ἰσχύοντος μόνον εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ἡ ἐπιλεγεῖσα διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐπιφάνεια (7.6) εἶναι τό ἐπίπεδον $\hat{x}_1 = \mu_1$, ὅπου $\mu_1$ συμβολίζει τόν μέσον ὅρον τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς $X_1$, ἤτοι

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}$$

---

* Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος ἐκείνης τῶν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν.

'Ως εἶναι εὐνόητον τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ παρουσιάζει καί ἐν προκειμένῳ τά αὐτά μειονεκτήματα μέ ἐκεῖνα τά ὁποῖα μᾶς ἀπησχόλησαν λεπτομερῶς εἰς τήν παράγραφον (5.4) καί ὡς ἐκ τούτου χρησιμοποιεῖται συνήθως ἀντ' αὐτοῦ ὁ δ ε ί κ τ η ς π ο λ λ α π λ ο ῦ π ρ ο σ δ ι ο ρ ι σ μ ο ῦ ὁ ὁποῖος συμβολίζεται κατά κανόνα

$$R^2_{x_1 . x_2 x_3 ... x_k} \quad \text{ἤ} \quad R^2_{1.23...k}$$

ἤ ἁπλῶς $R^2$ καί ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_1^{\,2}} \qquad (7.9)$$

'Ο ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι κ α θ α ρ ό ς ἀριθμός, λόγῳ δέ τῆς σχέσεως (7.8) πληροῖ πάντοτε τήν διπλῆν ἀνισότητα

$$0 < R^2 < 1 \qquad (7.10)$$

'Η ἰσότης $R^2=1$ ἰσχύει ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἅπαντα τά σημεῖα $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, ..., x_{ki})$, $i=1,2,...,N$ εὑρίσκονται ἐπί τῆς ἐπιφανείας παλινδρομήσεως (7.6) διότι τότε - καί μόνον τότε - ἔχομεν

$$\hat{x}_{1i} = f(x_{2i}, x_{3i}, ..., x_{ki}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_\lambda) = x_{1i}, i=1,2,...,N$$

καί συνεπῶς $\sigma^2=0$. Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν ἡ $X_1$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν $X_2, X_3, ..., X_k$ συναρτησιακῶς καί αἱ τιμαί αὐτῆς καθορίζονται πλήρως - τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (7.6) - ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $X_2, X_3, ..., X_k$ ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν τῆς $X_1$ ἐπεξηγεῖται πλήρως ἐκ τῆς διακυμάνσεως τῶν $X_2, X_3, ..., X_k$ ἤ ὅπως λέγομεν ἀπορροφᾶται πλήρως ἐκ τῆς προσαρμοσθείσης ἐπιφανείας παλινδρομήσεως.

'Εξ ἄλλου, ἡ ἰσότης $R^2=0$ ἰσχύει ἐάν - καί μόνον ἐάν - $\sigma^2=\sigma_1^{\,2}$ ἤτοι ἐάν ο ὐ δ έ ν μ έ ρ ο ς τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως τῶν τιμῶν τῆς $X_1$ ἐπεξηγεῖται ὑπό τῆς ἐπιφανείας παλινδρομήσεως (7.6) ἤ ἄλλως ἀπορροφᾶται ὑπ' αὐτῆς. Τοῦτο προφανῶς συμβαίνει ἐάν αἱ τιμαί καί αἱ μεταβολαί τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν $X_2$,

$X_3,\ldots,X_k$ οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχουν ἐπί τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς $X_1$ ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν ἡ $X_1$ οὐδεμίαν συσχέτισιν παρουσιάζει πρός αὐτάς (εἶναι στατιστικῶς ἀσυσχέτιστοι).

Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν - ἐάν δηλαδή $0<R^2<1$ - ὁ δείκτης πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ δηλοῖ προφανῶς τό μέρος - τό ποσοστόν - τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως τό ὁποῖον ἐπεξηγεῖται - ἤ ἄλλως ἀπορροφᾶται - ὑπό τῆς ἐπιφανείας παλινδρομήσεως καί συνεπῶς τήν ἔντασιν τῆς ἐξαρτήσεως τῆς $X_1$ ἐκ τῶν $X_2,X_3,\ldots,X_k$ συνολικῶς. Τοῦτο ἄλλωστε καθίσταται προφανές ἐκ τῆς ταυτότητος

$$\sigma_1{}^2=R^2\sigma_1{}^2+\sigma^2 \qquad (7.11)$$

ἡ ὁποία προκύπτει δι'ἁπλοῦ μετασχηματισμοῦ τῆς σχέσεως (7.9). Τέλος, ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει ὅτι

$$\sigma^2=(1-R^2)\sigma_1{}^2 \qquad (7.12)$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι ἡ διαφορά $(1-R^2)$ δηλοῖ τό ποσοστόν τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $\sigma_1{}^2$ τό ὁποῖον δέν ἐπεξηγεῖται ὑπό τῆς ἐπιφανείας παλινδρομήσεως (7.6) τό γνωστόν ὡς ὑ π ό λ ο ι π ο ν.

Μᾶς ἀπησχόλησεν ἀνωτέρω μία γενική θεώρησις τοῦ προβλήματος τῆς πολλαπλῆς παλινδρομήσεως. Τά ἐξαχθέντα συμπεράσματα ἐξειδικεύονται εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον εἰς τήν συνήθως ἀντιμετωπιζομένην εἰς τήν πρᾶξιν περίπτωσιν τῆς γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς π ο λ λ α π λ ῆ ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς.

### 7.3 Γραμμική Πολλαπλῆ Παλινδρόμησις

Ὡς ἤδη ἐλέχθη εἰς τήν παράγραφον (7.1), εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν, πρός ἁπλοποίησιν τῶν ὑπεισερχομένων δυσχερῶν ὑπολογισμῶν, κυρίως ὅμως πρός διευκόλυνσιν τῆς κατανοήσεως, ἑρμηνείας καί ἀμέσου ἐφαρμογῆς τῶν σχετικῶν συμπερασμάτων, ἡ ἐπιφάνεια παλινδρομήσεως ἐπιλέγεται μεταξύ τῶν μελῶν μιᾶς οἰκογενείας ἐπιπέδων ἤ ὑπερεπιπέδων, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγους ἡ ὑπό προσδιορισμόν ἐξίσωσις (7.1) ἔχει ἐν προκειμένῳ τήν γραμμικήν μορφήν

$$x_1=\alpha+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\ldots+\beta_kx_k \quad \text{ὅπου } k\geqslant 3 \tag{7.13}$$

Τό κανονικόν σύστημα (7.5) ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ὁποίου θά προκύψουν αἱ - ζητούμεναι - συγκεκριμέναι τιμαί $\hat{\alpha},\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\ldots,\hat{\beta}_k$ τῶν ὑπό προσδιορισμόν παραμέτρων $\alpha,\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_k$ καί κατά συνέπειαν ἡ συγκεκριμένη *ἐξίσωσις πολλαπλῆς παλινδρομήσεως*

$$\hat{x}_1=\hat{\alpha}+\hat{\beta}_2x_2+\hat{\beta}_3x_3+\ldots+\hat{\beta}_kx_k \tag{7.14}$$

περιλαμβάνει ἐν προκειμένῳ τάς κάτωθι $k$ *κανονικάς ἐξισώσεις*

$$\frac{\vartheta}{\vartheta\alpha}\sum_i(x_{1i}-\alpha-\beta_2x_{2i}-\beta_3x_{3i}-\ldots-\beta_kx_{ki})^2=0 \text{ καί}$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta\beta_j}\sum_i(x_{1i}-\alpha-\beta_2x_{2i}-\beta_3x_{3i}-\ldots-\beta_kx_{ki})^2=0, \quad j=2,3,\ldots,k$$

αἱ ὁποῖαι μετά τάς πράξεις κλπ. λαμβάνουν ἀντιστοίχως τήν μορφήν

$$\sum_i(x_{1i}-\alpha-\beta_2x_{2i}-\beta_3x_{3i}-\ldots-\beta_kx_{ki})=0$$

$$\sum_i x_{ji}(x_{1i}-\alpha-\beta_2x_{2i}-\beta_3x_{3i}-\ldots-\beta_kx_{ki})=0, \quad j=2,3,\ldots,k$$

ἤ τελικῶς τήν μορφήν

$$\begin{aligned}&\sum_i x_{1i}=\alpha N+\beta_2\Sigma x_{2i}+\beta_3\Sigma x_{3i}+\ldots+\beta_k\Sigma x_{ki}\\&\sum_i x_{1i}x_{ji}=\alpha\sum_i x_{ji}+\beta_2\sum_i x_{2i}x_{ji}+\ldots+\beta_j\sum_i x_{ji}^2+\ldots+\beta_k\sum_i x_{ki}x_{ji} \quad j=2,3,\ldots,k\end{aligned} \tag{7.15}$$

Τό ἐπίπεδον (ὑπερεπίπεδον) τό ὁποῖον παριστᾶ ἡ ἐξίσωσις (7.14) καλεῖται συνήθως *ἐπίπεδον (πολλαπλῆς) παλινδρομήσεως*, οἱ συντελεσταί δέ $\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\ldots,\hat{\beta}_k$ *συντελεσταί* (γραμμικῆς) π ο λ λ α π λ ῆ ς π α λ ι ν δ ρ ο μ ή σ ε ω ς. Εἶναι προφανές ὅτι οἱοσδήποτε ἐκ τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν $\hat{\beta}_j$, $j=2,3,\ldots,k$ ἰσοῦται πρός τήν μεταβολήν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $X_1$ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μ ο ν α δ ι α ί α ν αὔξησιν τῆς ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς $X_j$, $j=2,3,\ldots,k$ ὑπό τήν προϋπόθεσιν φυσικά ὅτι αἱ ὑπόλοιποι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί παραμένουν σταθεραί (ἀμετάβλητοι). Οὕτω, δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἕκαστος τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν χαρακτηρίζει ἐν γένει τήν ἐπίδρασιν τήν ὁποίαν ἔχει ἡ ἀντίστοιχος ἑρμηνευτική μεταβλητή ἐπί τῆς διαμορφώσεως τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης.

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τό ἐπίπεδον παλινδρομήσεως (7.14) καί ὁ ἀντίστοιχος (γραμμικός) δείκτης πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2$ - μέτρα τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τοῦ ἐπιπέδου (7.14) πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα καί γενικώτερον τοῦ βαθμοῦ προσεγγίσεως τῶν σχετικῶν ὑπολογισμῶν καί τῆς ἀξιοπιστίας τῶν ἀντιστοίχων συμπερασμάτων - δίδονται κατ'ἐφαρμογήν τῶν σχέσεων (7.7) καί (7.9) ὑπό τῶν τύπων

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_i(x_{1i}-\hat{x}_{1i})^2=\frac{1}{N}\sum_i(x_{1i}-\hat{\alpha}-\hat{\beta}_2x_{2i}-\hat{\beta}_3x_{3i}-\ldots-\hat{\beta}_kx_{ki})^2 \quad (7.16)$$

$$\text{καί } R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_1{}^2} \quad (7.17)$$

ὅπου φυσικά $\sigma_1{}^2$ παριστᾶ τήν συνολικήν διακύμανσιν τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν $x_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ ὑπολογιζομένην ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως

$$\sigma_1{}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_{1i}-\mu_1)^2=\frac{\sum_i x_{1i}{}^2}{N}-\left(\frac{\sum_i x_{1i}}{N}\right)^2 \quad (7.18)$$

Ἐν προκειμένῳ δέον νά σημειωθῇ ὅτι εἰς τήν πρᾶξιν τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ δέν ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (7.16) ἀλλά κατά κανόνα ἐκ τῆς κατωτέρω μετασχηματισμένης μορφῆς του

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\left(\sum_i x_{1i}{}^2-\hat{\alpha}\sum_i x_{1i}-\hat{\beta}_2\sum_i x_{2i}x_{1i}-\hat{\beta}_3\sum_i x_{3i}x_{1i}-\ldots-\hat{\beta}_k\sum_i x_{ki}x_{1i}\right) \quad (7.19)$$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως (7.19) εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου (5.55) εἰς τήν περίπτωσιν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν ἐν προκειμένῳ ὅμως δέον νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν αἱ k κανονικαί ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (7.15).

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, παραθέτομεν τούς σχετικούς τύπους κλπ. διά τήν περίπτωσιν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν (k=3), ἐν συνεχείᾳ δέ ἐφαρμόζομεν αὐτάς ἐνδεικτικῶς εἰς ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα.

Ὑποθέτομεν ἐν προκειμένῳ ὅτι ὁ μελετητής ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τάς ἀριθμητικάς τριάδας

$$(x_{1i},x_{2i},x_{3i}),\ i=1,2,\ldots,N$$

ἕνα τ ρ ι μ ε τ α β λ η τ ό ν δηλαδή στατιστικόν πληθυσμόν καί ἐνδιαφέρεται νά προσαρμόση πρός τά ἐν λόγῳ δεδομένα ἕν ἐπίπεδον, ἤτοι μίαν γραμμικήν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$x_1=\alpha+\beta_2x_2+\beta_3x_3 \qquad (7.20)$$

διά τῆς ὁποίας ἡ μεταβλητή $X_1$ νά ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν $X_2$ καί $X_3$ θεωρουμένων ὡς ἀνεξαρτήτων ἤ ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν.

Τό κανονικόν σύστημα (7.15) ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ὁποίου θά εὑρεθοῦν αἱ ζητούμεναι τιμαί τῶν παραμέτρων $\alpha,\beta_2$ καί $\beta_3$ περιλαμβάνει ἐν προκειμένῳ τάς κατωτέρω τρεῖς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\sum_i x_{1i}=\alpha N+\beta_2\sum_i x_{2i}+\beta_3\sum_i x_{3i}\\
&\sum_i x_{1i}x_{2i}=\alpha\sum_i x_{2i}+\beta_2\sum_i x_{2i}^2+\beta_3\sum_i x_{2i}x_{3i} \qquad (7.21)\\
&\sum_i x_{1i}x_{3i}=\alpha\sum_i x_{3i}+\beta_3\sum_i x_{2i}x_{3i}+\beta_3\sum_i x_{3i}^2
\end{aligned}$$

Τό σύστημα (7.21) εἶναι προφανῶς ἕνα γραμμικόν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους καί συνεπῶς ἡ λύσις αὐτοῦ $(\hat{\alpha},\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3)$ εἶναι δυνατόν νά ἐπιτευχθῆ διά τῶν γνωστῶν ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν τρόπων ἐπιλύσεως ἑνός τοιούτου συστήματος (Μέθοδος τῆς Ἀπαλοιφῆς, Μέθοδος Ὀριζουσῶν κλπ.).

Ἐάν ἡ λύσις τοῦ κανονικοῦ συστήματος (7.21) ἤτοι αἱ ζητούμεναι ἀριθμητικαί τιμαί $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_2$ καί $\hat{\beta}_3$ τῶν ὑπό προσδιορισμόν παραμέτρων α, $\beta_2$ καί $\beta_3$ ἀντικατασταθοῦν εἰς τήν ἐξίσωσιν (7.20) προκύπτει ἀμέσως ἡ ζητουμένη συγκεκριμένη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως, ἤτοι τό ἐπίπεδον παλινδρομήσεως

$$\hat{x}_1=\hat{\alpha}+\hat{\beta}_2 x_2+\hat{\beta}_3 x_3 \tag{7.22}$$

Τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα $\sigma^2{}_{1.23}$ ἤ ἁπλῶς $\sigma^2$ περί τό ἐπίπεδον (7.22) καί ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2{}_{1.23}$ ἤ ἁπλῶς $R^2$ προκύπτουν δι᾽ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (7.19) καί (7.17) οἱ ὁποῖοι εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν λαμβάνουν τήν μορφήν

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\Big(\sum_i x_{1i}{}^2-\hat{\alpha}\sum_i x_{1i}-\hat{\beta}_2\sum_i x_{2i}x_{1i}-\hat{\beta}_3\sum_i x_{3i}x_{1i}\Big) \tag{7.23}$$

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_1{}^2} \tag{7.24}$$

Τά ἀνωτέρω ἐφαρμόζομεν ἐπί τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (7.1). Εἰς τόν αὐτόν πίνακα πέραν τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων παρατίθενται καί οἱ ἀπαιτούμενοι ἐνδιάμεσοι ὑπολογισμοί.

Πίναξ 7.1

| Δεδομένα | | | Ὑπολογισμοί | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1{}^2$ | $x_2{}^2$ | $x_3{}^3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $\hat{x}_1$ |
| 5 | 1 | 2 | 25 | 1 | 4 | 5 | 0 | 2 | 4,62 |
| 8 | 3 | 1 | 64 | 9 | 1 | 24 | 8 | 3 | 8,50 |
| 7 | 4 | 5 | 49 | 16 | 25 | 28 | 35 | 20 | 7,47 |
| 6 | 2 | 3 | 36 | 4 | 9 | 12 | 18 | 6 | 5,57 |
| 12 | 6 | 4 | 144 | 36 | 16 | 72 | 48 | 24 | 11,35 |
| 38 | 16 | 15 | 318 | 66 | 55 | 141 | 119 | 55 | |

Τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (7.21) γίνεται ἐν προκειμένῳ

$$38=5\alpha+16\beta_2+15\beta_3$$
$$141=16\alpha+66\beta_2+55\beta_3$$
$$119=15\alpha+55\beta_2+55\beta_3$$

Ἡ ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῶν ὁριζουσῶν πρός ἐπίλυσιν τοῦ ὡς ἄνω συστήματος ἀπαιτεῖ ὡς γνωστόν πρῶτον τόν ὑπολογισμόν τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, ἐν συνεχείᾳ δέ τριῶν ἄλλων ὁριζουσῶν αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς προηγουμένης δι᾽ ἀντικαταστάσεως - ἑκάστοτε - τῶν στοιχείων μιᾶς στήλης αὐτῆς - τῶν συντελεστῶν τοῦ κατά περίπτωσιν ἀγνώστου -διά τῶν σταθερῶν - γνωστῶν - ὅρων τοῦ συστήματος. Ὁ ὑπολογισμός τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων δύο τῆς μεθόδου Sarrus παρατίθεται κατωτέρω.

$$\begin{vmatrix} 5 & 16 & 15 \\ 16 & 66 & 55 \\ 15 & 55 & 55 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 16 \\ 16 & 66 \\ 15 & 55 \end{matrix} = 5\times66\times55+16\times55\times15+15\times16\times55 - $$
$$- 15\times66\times15-5\times55\times55-16\times16\times55 =$$
$$=18.150+13.200+13.200-14.850-15.125-14.080 = 495$$

Διά τῆς ἰδίας μεθόδου ἔχομεν ὅτι

$$\begin{vmatrix} 38 & 16 & 15 \\ 141 & 66 & 55 \\ 119 & 55 & 55 \end{vmatrix} =2.145, \quad \begin{vmatrix} 5 & 38 & 15 \\ 16 & 141 & 55 \\ 15 & 119 & 55 \end{vmatrix} =795, \quad \begin{vmatrix} 5 & 16 & 38 \\ 16 & 66 & 141 \\ 15 & 55 & 119 \end{vmatrix} =-329$$

Οὕτω αἱ τιμαί τῶν ὑπό προσδιορισμόν παραμέτρων εἶναι

$$\hat{\alpha} = \frac{2.145}{495} = 4,33 \ , \quad \hat{\beta}_2 = \frac{795}{495} = 1,61 \text{ καί } \hat{\beta}_3 = -\frac{329}{495} = -0,66$$

συνεπῶς δέ τό ζητούμενον ἐπίπεδον παλινδρομήσεως ἔχει ἐξίσωσιν

$$\hat{x}_1=4,33+1,61x_2-0,66x_3$$

Μίαν ἰδέαν τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τοῦ ὡς ἄνω ἐπιπέδου πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα εἶναι δυνατόν νά ἀποκτήσωμεν διά συγκρίσεως τῶν ἐμπειρικῶν τιμῶν τῆς $X_1$ πρός τάς ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τοιαύτας, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἀντιστοίχως πρός τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τοῦ ζεύγους $(X_2, X_3)$ καί αἱ ὁποῖαι παρατίθενται εἰς τήν τελευταίαν στήλην τοῦ πίνακος (π.χ. $\hat{X}_{11}=4,33+1,61\times1-0,66\times2=4,62$ κ.ο.κ.).

Μία πληρεστέρα εἰκόνα τῆς προσεγγίσεως τῶν διά τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως συναγομένων συμπερασμάτων λαμβάνομεν ἐκ τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τοῦ δείκτου πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2$ ὁ ὑπολογισμός τῶν ὁποίων δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (7.23) καί (7.24) ἀντιστοίχως παρατίθεται κατωτέρω.

Οὕτω ἔχομεν

$$\sigma^2=\frac{1}{5}(318-4,33\times38-1,61\times141+0,66\times119)=1 \text{ (περίπου)}$$

$$\sigma_1^2=\frac{318}{5}-\left(\frac{38}{5}\right)^2=5,84$$

καί συνεπῶς $$R^2=1-\frac{1}{5,84}=\frac{4,84}{5,84}=0,83 \text{ (περίπου)}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι εἰς μοναδιαίαν αὔξησιν τῆς $X_2$ καί μή μεταβαλομένης τῆς $X_3$ ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή $X_1$ αὐξάνεται ἐν γένει κατά 1,61 μονάδας, ἐνῶ εἰς μοναδιαίαν αὔξησιν τῆς $X_3$ καί μή μεταβαλομένης τῆς $X_2$ ἀντιστοιχεῖ μείωσις τῆς $X_1$ κατά 0,66 τῆς μονάδος.

Γενικώτερον ὅμως ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ δείκτου $R^2=0,83$ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς $X_1$ ὀφείλεται (ἤ ἐπεξηγεῖται) κατά 83% εἰς τάς ἑρμηνευτικάς μεταβλητάς $X_2$ καί $X_3$ καί κατά 17% εἰς ἄλλους παράγοντας.

Ἐπανερχόμενοι καί πάλιν εἰς τήν γενικήν γραμμικήν ἐξίσωσιν (7.13) εἰσάγομεν κατωτέρω μίαν ἁπλουστέραν μορφήν αὐτῆς, ἡ ὁποία ἐν συνδυασμῷ πρός ἕναν γενικώτερον συμβολισμόν - προταθέντα τό πρῶτον ὑπό τοῦ Yule - διευκολύνει, ὡς θά ἴδωμεν, σημαντικά τόσον τήν γ ε ν ί κ ε υ σ ι ν τῶν ἐξαγομένων συμπερασμάτων, τύπων, σχέσεων κλπ. ὅσον καί τήν ἁπλούστευσιν τῆς μορφῆς αὐτῶν καί τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν.

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀντί τῶν ἀρχικῶν μεταβλητῶν $X_1$ καί $X_2, X_3, \ldots, X_k$ χρησιμοποιοῦνται - ὡς νέαι μεταβληταί - αἱ ἀποκλίσεις - αἱ διαφοραί - αὐτῶν ἀπό τούς ἀντιστοίχους μέσους ὅρους των, ἤτοι αἱ μεταβληταί

$$Y_1 = X_1 - \mu_1 = X_1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i} \quad \text{καί} \quad Y_j = X_j - \mu_j = X - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}, \quad j = 2,3,\ldots,k$$

καί κατά συνέπειαν τά ἀρχικά ἐμπειρικά δεδομένα-σημεῖα -

$(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{ki}), i=1,2,\ldots,N$ ἀντικαθίστανται ὑπό τοῦ νέφους τῶν σημείων

$(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, \ldots, y_{ki}), i=1,2,\ldots,N$ ὅπου φυσικά

$$y_{1i} = x_{1i} - \mu_1 = x_{1i} - \frac{1}{N}\sum_i x_{1i} \quad \text{καί} \quad y_{ji} = x_{ji} - \mu_j = x_{ji} - \frac{1}{N}\sum_i x_{ji},$$

$j=2,3,\ldots,k$ καί $\sum_i y_{ji} = 0$ διά $j=1,2,3,\ldots,k$.

Ὑπό τάς ἀνωτέρω προϋποθέσεις ἡ ἐξίσωσις (7.13) λαμβάνει τήν μερικωτέραν καί ἁπλουστέραν μορφήν

$$y_1 = \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + \ldots + \beta_k y_k \tag{7.25}$$

ἐνῶ τό μ.τ.σ. περί οἱονδήποτε τῶν ἐπιπέδων (7.25), ἤτοι ἡ ποσότης $\frac{1}{N}\Sigma(y_{1i} - \hat{y}_{1i})^2$ ταυτίζεται πρός τό μ.τ.σ. περί τό ἀντίστοιχον ἐκ τῶν ἐπιπέδων τῆς οἰκογενείας (7.13), τήν ποσότητα δηλαδή $\frac{1}{N}\Sigma(x_{1i} - \hat{x}_{1i})^2$. Πράγματι, διά διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς πρώτης τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (7.15) διά N, λαμβάνομεν τήν σχέσιν

$$\mu_1 = \alpha + \beta_2 \mu_2 + \beta_3 \mu_3 + \ldots + \beta_k \mu_k \tag{7.26}$$

δι' ἀφαιρέσεως δέ αὐτῆς ἐκ τῆς (7.13) προκύπτει ἀμέσως ἡ (7.25).

Ὡσαύτως, λαμβανομένης ὑπ᾽ὄψιν τῆς (7.26), ἔχομεν ὅτι

$$\sum_{i=1}^{N}(y_{1i}-\hat{y}_{1i})^2=\sum_i(y_{1i}-\beta_2 y_{2i}-\beta_3 y_{3i}-\ldots-\beta_k y_{ki})^2=$$
$$=\sum_i\left[(x_{1i}-\mu_1)-\beta_2(x_{2i}-\mu_2)-\beta_3(x_{3i}-\mu_3)-\ldots-\beta_k(y_{ki}-\mu_k)\right]^2=$$
$$=\sum_i(x_{1i}-\alpha-\beta_2 x_{2i}-\beta_3 x_{3i}-\ldots-\beta_k x_{ki})^2=\sum_i(x_{1i}-\hat{x}_{1i})^2$$

καί ὡς ἐκ τούτου συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι αἱ ζητούμεναι τιμαί $\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\ldots,\hat{\beta}_k$ τῶν συντελεστῶν $\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_k$ εἶναι δυνατόν νά προσδιορισθοῦν - καί θά εἶναι αἱ αὐταί - εἴτε ἐκ τῶν βοηθητικῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων $(y_{1i},y_{2i},\ldots,y_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$ δι᾽ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ μ.τ.σ. περί τήν (7.25), ἤτοι τῆς ποσότητος $\frac{1}{N}\Sigma(y_{1i}-\hat{y}_{1i})^2$, εἴτε χρησιμοποιουμένων τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως $(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ki})$, $i=1, 2, \ldots, N$ καί ἐλαχιστοποιήσεως τῆς ποσότητος $\frac{1}{N}\Sigma(x_{1i}-\hat{x}_{1i})^2$ δηλαδή τοῦ μ.τ.σ. περί τήν (7.13).

Ἐν προκειμένῳ δέον νά λεχθῆ ἀκόμη ὅτι μετά τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν τῆς (7.25) καί κατά συνέπειαν τόν προσδιορισμόν τῆς συγκεκριμένης ἐξισώσεως - ἐπιπέδου - πολλαπλῆς παλινδρομήσεως

$$\hat{y}_1=\hat{\beta}_2 y_2+\hat{\beta}_3 y_2+\ldots+\hat{\beta}_k y_k \tag{7.27}$$

εἶναι δυνατόν δι᾽ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν αὐτῶν εἰς τήν (7.26) νά εὑρεθῆ καί ἡ τιμή τῆς παραμέτρου α, ἤτοι

$$\hat{\alpha}=\mu_1-\hat{\beta}_2\mu_2-\hat{\beta}_3\mu_3-\ldots-\hat{\beta}_k\mu_k \tag{7.28}$$

καί νά χρησιμοποιηθῆ πλέον καί ἡ ἐξίσωσις - τό ἐπίπεδον - πολλαπλῆς παλινδρομήσεως (7.14).

Τέλος, δοθέντος ὅτι αἱ διακυμάνσεις τῶν νέων μεταβλητῶν ταυτίζονται πρός ἐκείνας τῶν ἀρχικῶν, ἤτοι $\sigma^2_{y_1}=\sigma^2_{x_1}$ καί $\sigma^2_{y_j}=\sigma^2_{x_j}$, $j=2,3,\ldots,k$ - καθ᾽ὅσον αἱ νέαι μεταβληταί προκύπτουν ἐκ τῶν ἀρχικῶν δι᾽ ἀφαιρέσεως τῶν σταθερῶν ποσοτήτων $\mu_j$, $j=1,2,\ldots,k$ - πέραν τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τό ἐπίπεδον παλινδρομήσεως (7.27) τό ὁποῖον ταυτίζεται πρός τό μ.τ.σ. περί τό ἐπίπεδον (7.14) ταυτίζονται ἐπίσης καί οἱ ἀντίστοιχοι δεῖκται πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι τό πρόβλημα τῆς γραμμικῆς πολλαπλῆς παλινδρομήσεως δύναται νά ἀντιμετωπισθῆ διά τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου παλινδρομήσεως (7.27) - ἀντί τοῦ (7.14)- καί τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ μ.τ.σ. περί αὐτό (ὡς καί τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ), θεωρουμένων, ὡς εἶναι εὐνόητον, ὡς ἐμπειρικῶν δεδομένων τῶν σημείων $(y_{1i},y_{2i},\dots,y_{ki}),i=1,2,\dots,N$. Τοῦτο ἀκριβῶς θά μᾶς ἀπασχολήση κατωτέρω ἀφοῦ προηγουμένως εἰσάγομεν τόν συμβολισμόν τοῦ Yule.

Ἐν προκειμένῳ ὑποθέτομεν καί πάλιν ὅτι ὁ μελετητής ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τά ἀριθμητικά δεδομένα $(y_{1i},y_{2i},\dots,y_{ki})$, $i=1,2,\dots,N$ - διά τά ὁποία ἰσχύουν, ὡς εἴδομεν, αἱ σχέσεις $\sum_i y_{ji}=0$, $j=1,2,\dots,k$ - καί ἐπιθυμεῖ νά προσαρμόση πρός τό ἀντίστοιχον σημειακόν νέφος τό κατάλληλον ἐπίπεδον (ἤ καλλίτερον ἕν ὑπερεπίπεδον) παλινδρομήσεως.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ, τήν ἐξίσωσιν τῆς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων - μεταξύ τῶν ὁποίων θά ἐπιλεγῆ τό καταλληλότερον κατά περίπτωσιν ἐπίπεδον παλινδρομήσεως - θά συμβολίζωμεν, κατ᾽ἀναλογίαν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως (7.25), ὡς ἑξῆς:

$$y_1=\beta_{12.34\dots k}y_2+\beta_{13.24\dots k}y_3+\dots+\beta_{1k.23\dots(k-1)}y_k \qquad (7.29)$$

Εἰς τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν οἱ δεῖκται ἑκάστου τῶν συντελεστῶν παλινδρομήσεως συμβολίζουν, οἱ μέν δύο πρῶτοι - οἱ πρό τῆς στιγμῆς - τήν ἐξηρτημένην καί τήν ἀντίστοιχον ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, οἱ δέ ὑπόλοιποι - οἱ μετά τήν τελείαν - τάς ὑπεισερχομένας εἰς τό πρόβλημα λοιπάς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Οὕτω π.χ. $\beta_{14.23}$ δηλοῖ ὅτι $Y_1$ εἶναι ἡ θεωρουμένη ὡς ἐξηρτημένη μεταβλητή, $Y_4$ ἡ ἑρμηνευτική μεταβλητή συντελεστής τῆς ὁποίας εἶναι ὁ $\beta_{14.23}$, πρός τούτοις δέ ὅτι πέραν τῆς $Y_4$ ὑπεισέρχονται εἰς τό πρόβλημα καί συνεξετάζονται μετ᾽αὐτῆς δύο ἀκόμη ἑρμηνευτικαί μεταβληταί καί συγκεκριμένως αἱ $Y_2$ καί $Y_3$. Ἐάν, ὡς συνήθως συμβαίνει, δέν ὑφίσταται ζήτημα παρανοήσεων, οἱ μετά τήν τελείαν - δ ε υ τ ε ρ ε ύ ο ν τ ε ς - δεῖκται εἶναι δυνατόν νά παραληφθοῦν καί ἡ ἐξίσωσις (7.29) παρουσιάζεται κατά κανόνα ὑπό τήν ἁπλουστέραν μορφήν

$$y_1=\beta_{12}y_2+\beta_{13}y_3+\dots+\beta_{1k}y_k \qquad (7.30)$$

Κατ᾽ἀναλογίαν τῶν ὅσων ἐλέχθησαν προηγουμένως, αἱ ζητούμεναι - συγκεκριμέναι - τιμαί $\hat{\beta}_{12},\hat{\beta}_{13},\dots,\hat{\beta}_{1k}$ τῶν ἀγνώστων - ὑπό προσδιορισμόν - παραμέτρων τῆς ἐξισώσεως (7.30) εὑρίσκονται διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, δι᾽ἐλαχιστοποιήσεως δηλαδή τῆς ποσότητος

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}(y_{1i}-\hat{y}_{1i})^2=\frac{1}{N}\sum_i(y_{1i}-\beta_{12}y_{2i}-\beta_{13}y_{3i}-\dots-\beta_{1k}y_{ki})^2 \qquad (7.31)$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ὡς γνωστόν τό μ.τ.σ. περί τό ἐπίπεδον (7.30). Τό κανονικόν σύστημα τό ὁποῖον προκύπτει διά τοῦ μηδενισμοῦ τῶν πρώτων μερικῶν παραγώγων τῆς ἀνωτέρω ποσότητος (7.31) ὡς πρός $\beta_{1j}$, $j = 2,\dots,k$ περιλαμβάνει ἐν προκειμένῳ τάς κατωτέρω k-1 γραμμικάς ἐξισώσεις

$$\sum_i y_{ji}(y_{1i}-\beta_{12}y_{2i}-\beta_{13}y_{3i}-\dots-\beta_{1k}y_{ki})=0,\ j=2,3,\dots,k \qquad (7.32)$$

αἱ ὁποῖαι μετά τάς πράξεις κλπ. λαμβάνουν τελικῶς τήν μορφήν

$$\begin{aligned}
\sum_i y_{2i}y_{1i}&=\beta_{12}\sum_i y_{2i}^2+\beta_{13}\sum_i y_{2i}y_{3i}+\dots+\beta_{1k}\sum_i y_{2i}y_{ki}\\
\sum_i y_{3i}y_{1i}&=\beta_{12}\sum_i y_{3i}y_{2i}+\beta_{13}\sum_i y_{3i}^2+\dots+\beta_{1k}\sum_i y_{3i}y_{ki}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (7.33)\\
\sum_i y_{ki}y_{1i}&=\beta_{12}\sum_i y_{ki}y_{2i}+\beta_{13}\sum_i y_{ki}y_{3i}+\dots+\beta_{1k}\sum_i y_{ki}^2
\end{aligned}$$

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὡς ἄνω συστήματος καί ὁ ὑπολογισμός τῶν ὑπεισερχομένων εἰς αὐτό k-1 ἀγνώστων παραμέτρων $\beta_{1j}$, $j=2,3,\dots,k$ εἶναι δυνατόν νά ἐπιτευχθῆ διά μιᾶς οἱασδήποτε τῶν γνωστῶν μεθόδων ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων. Εἰς τήν πρᾶξιν ἐφαρμόζεται συνήθως ἡ μέθοδος τῶν ὀριζουσῶν (Cramer) διότι διά τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου ἡ λύσις τοῦ συστήματος $\hat{\beta}_{1j}$, $j=2,3,\dots,k$ ἐκφράζεται δι' ὡρισμένων ἁπλῶν καί συμμετρικῶν τύπων οἱ ὁποῖοι ἐπιτρέπουν τήν ἄμεσον γενίκευσιν τῶν ἐξαγομένων συμπερασμάτων ὡς καί τήν συστηματοποίησιν τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν. Ἡ ἀκολουθουμένη πρός τοῦτο διαδικασία καί οἱ προκύπτοντες γενικοί τύποι παρατίθενται κατωτέρω.

Συμβολίζοντες - ὡς συνήθως - διά $\sigma^2 y_j$ ἤ ἁπλούστερον $\sigma_j^2$ τήν διακύμανσιν τῆς μεταβλητῆς $Y_j$, $j=1,2,\dots,k$ καί διά $\rho_{st}$ τόν συντελεστήν συσχετίσεως τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν $Y_s$ καί $Y_t$, $s\neq t=1,2,\dots,k$ πρός τούτοις δέ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ποσότης $\frac{1}{N}\sum_i y_{ji}^2$, $j=1,2,\dots,k$ ἀποτελεῖ τήν διακύμανσιν τῆς $Y_j$ - καθ' ὅσον $\sum_i y_{ji}=0$, $j=1,2,\dots,k$ - ἡ δέ ποσότης $\frac{1}{N}\sum_i y_{si}y_{ti}$ τήν συνδιακύμανσιν τῶν μεταβλητῶν $Y_s$ καί $Y_t$ ἔχομεν τάς σχέσεις

$$\sigma_j^2=\frac{1}{N}\sum_i y_{ji}^2, \quad j=1,2,\dots,k \qquad (7.34)$$

καί
$$\frac{1}{N}\sum_i y_{si}y_{ti}=\rho_{st}\sigma_s\sigma_t, \quad s\neq t=1,2,\dots,k \qquad (7.35)$$

ὡς ἐκ τούτου δέ τό σύστημα (7.33) δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν κάτωθι μορφήν

$$\begin{aligned}
&\sigma_2^2\beta_{12}+\rho_{23}\sigma_2\sigma_3\beta_{13}+\dots+\rho_{2k}\sigma_2\sigma_k\beta_{1k}=\rho_{21}\sigma_2\sigma_1\\
&\rho_{32}\sigma_3\sigma_2\beta_{12}+\sigma_3^2\beta_{13}+\dots+\rho_{3k}\sigma_3\sigma_k\beta_{1k}=\rho_{31}\sigma_3\sigma_1\\
&\qquad\vdots\\
&\rho_{k2}\sigma_k\sigma_2\beta_{12}+\rho_{k3}\sigma_k\sigma_3\beta_{13}+\dots+\sigma_k^2\beta_{1k}=\rho_{k1}\sigma_k\sigma_1
\end{aligned} \qquad (7.36)$$

Ἐφαρμόζοντες πρός ἐπίλυσιν τοῦ τελευταίου τούτου συστήματος τήν μέθοδον τῶν ὀριζουσῶν (Cramer) καί λαμβάνοντες π.χ. ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ὀρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων δύναται νά γραφῆ ὑπό μορφήν

$$\sigma_2^2\sigma_3^2\dots\sigma_k^2\begin{vmatrix} 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2k} \\ \rho_{32} & 1 & \cdots & \rho_{3k} \\ \rho_{k2} & \rho_{k3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος ($\hat{\beta}_{12}$, $\hat{\beta}_{13},\dots,\hat{\beta}_{1k}$) δίδεται ὑπό τοῦ κατωτέρω ἁπλοῦ καί συμμετρικοῦ τύπου

$$\hat{\beta}_{1j}=-(-1)^{1+j}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_j}\times\frac{P_{1j}}{P_{11}},\quad j=2,3,\dots,k \tag{7.37}$$

ὅπου $P_{1j}$ καί $P_{11}$ συμβολίζουν συγκεκριμένας ἐ λ ά σ σ ο υ σ α ς ὁ ρ ί ζ ο υ σ α ς π ρ ώ τ η ς τ ά ξ ε ω ς μιᾶς ὁριζούσης k τάξεως - γνωστῆς ὡς ὁ ρ ι ζ ο ύ σ η ς (τῶν συντελεστῶν) σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς - ἡ ὁποία συμβολίζεται συνήθως διά P ὁρίζεται δέ ἐν προκειμένῳ ὑπό τῆς σχέσεως

$$P=\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2k} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \cdots & \rho_{3k} \\ & & \vdots & & \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \rho_{k3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{7.38}$$

Ἡ ὁρίζουσα P περιλαμβάνει ὡς στοιχεῖα αὐτῆς τούς συντελεστάς συσχετίσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν $Y_1,Y_2,\dots,Y_k$ λαμβανομένων ἀνά δύο καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους. Τά στοιχεῖα τῆς κυρίας διαγωνίου τῆς ἐν λόγῳ ὁριζούσης εἶναι ἴσα πρός τήν μονάδα καθ' ὅσον ἀντιστοιχοῦν εἰς τούς συντελεστάς συσχετίσεως ἑκάστης τῶν μεταβλητῶν μετά τοῦ ἑαυτοῦ της. Ἐξ ἄλλου, δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῆς μεταβλητῆς $Y_s$ πρός τήν $Y_t$ ταυτίζεται πρός τόν συντελεστήν συσχετίσεως τῆς $Y_t$ μέ τήν $Y_s$ $s\neq t=1,2,\dots,k$ ἡ ὁρίζουσα P εἶναι συμμετρική. Χρησιμοποιοῦντες τούς συνήθεις ὁρισμούς καί τόν συμβολισμόν τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας, τήν ὁρίζουσαν ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς P δι' ἀποκοκῆς τῆς s-γραμμῆς καί τῆς t-στήλης αὐτῆς θά συμβολίζωμεν διά τοῦ $P_{st}$ θά καλοῦμεν δέ αὐτήν ἐ λ ά σ σ ο ν α ὁ ρ ί ζ ο υ σ α π ρ ώ τ η ς τ ά ξ ε ω ς ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τό στοιχεῖον (s,t) - τό στοιχεῖον δηλαδή τό ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τήν s-γραμμήν καί t-στήλην - ἐνῷ τό γινόμενον $(-1)^{s+t}P_{st}$ εἶναι γνωστόν ὡς π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν η ἐ λ ά σ σ ω ν.

Οὕτω εἰς τόν τύπον (7.37) πέραν τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων $\sigma_1$ καί $\sigma_j$ τῆς ἐξηρτημένης καί τῆς ἀντιστοίχου κατά περίπτωσιν ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὑπεισέρχονται ἀκόμη αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι $P_{11}$ καί $P_{1j}$ - ἤ καλλίτερον αἱ προσημασμέναι ἐλάσσονες $(-1)^{1+1}P_{11}$ καί $(-1)^{1+j}P_{1j}$ - αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά στοιχεῖα (1,1) καί (1,j) τῆς ὁριζούσης P.

Τέλος, ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ τύπου (7.37) καθίσταται προφανές ὅτι ἐάν ὡς ἐξηρτημένη μεταβλητή θεωρηθῆ ἡ $Y_s$, ὁ συντελεστής παλινδρομήσεως $\beta_{st}$, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν $Y_t$, θά δίδεται ὑπό τῆς γενικωτέρας σχέσεως

$$\hat{\beta}_{st}=-(-1)^{s+t}\frac{\sigma_s}{\sigma_t}\times\frac{P_{st}}{P_{ss}} \qquad s\neq t=1,2,\ldots,k \qquad (7.37\alpha)$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς (7.37) δι'ἁπλῆς ἐναλλαγῆς τῶν δεικτῶν.

Τό ὡς ἄνω ἀποτέλεσμα - τύπος (7.37) - εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμον εἰς τήν πρᾶξιν καί ἐφαρμόζεται ὡς ἑξῆς:

(i) Ὑπολογίζονται οἱ συντελεσταί συσχετίσεως $\rho_{st}$ , $s\neq t = 1,2,\ldots,k$ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν λαμβανομένων ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους - $\frac{1}{2}k(k-1)$ τό πλῆθος - καί καταρτίζεται ἡ ὁ ρ ί ζ ο υ σ α σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς P.

(ii) Ὑπολογίζονται αἱ τυπικαί ἀποκλίσεις $\sigma_t$, $t= 1,2,\ldots,k$ ὅλων τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Σημειωτέον ὅτι, τόσον εἰς τόν ὑπολογισμόν τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων $\sigma_t$, ὅσου καί τῶν συντελεστῶν συσχετίσεως $\rho_{st}$ εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθοῦν εἴτε τά ἀρχικά δεδομένα $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$ εἴτε τά μετασχηματωμένα τοιαῦτα $(y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$ διότι ὡς γνωστόν γραμμικοί μετασχηματισμοί τῆς μορφῆς $y=\kappa\text{-}c$ δέν ἐπιρρεάζουν τήν τιμήν οὔτε τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως οὔτε τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως. Οἱ ἐν λόγῳ ὑπολογισμοί γίνονται συνήθως δι' ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

(iii) Ἐκ τῆς ὁριζούσης P ἀποκόπτονται αἱ ἐλάσσονες αὐτῆς $P_{11}$ καί $P_{1j}$, $j=2,3,\ldots,k$ καί ὑπολογίζονται τῇ βοηθείᾳ ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν (εἰς τάς περιπτώσεις τουλάχιστον πολυαρίθμων μεταβλητῶν).

(iv) Ὑπολογίζονται οἱ συντελεσταί $\hat{\beta}_{1j}$, $j=2,3,\ldots,k$ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (7.37).

(v) Ἐάν ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται διά τήν χρησιμοποίησιν τῆς μορφῆς (7.14), ἀπαιτεῖται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ὁ ὑπολογισμός τῶν μέσων $\mu_1$ καί $\mu_j$ $j=2,3,\ldots,k$ - ἐκ τῶν ἀ ρ χ ι κ ῶ ν δεδομένων - ἐν συνεχείᾳ δέ ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ α ἐκ τῆς σχέσεως (7.28).

Μετά τήν ἐπίλυσιν τοῦ κανονικοῦ συστήματος(7.33) καί τόν προσδιορισμόν τῆς συγκεκριμένης πλέον ἐξισώσεως - ἤ ἄλλως ἐπιπέδου - πολλαπλῆς παλινδρομήσεως

$$\hat{y}_1=\hat{\beta}_{12}y_2+\hat{\beta}_{13}y_3+\ldots+\hat{\beta}_{1k}y_k \tag{7.39}$$

ἐνδιαφερόμεθα κατά κανόνα καί διά τό μ.τ.σ. περί τό ἐν λόγῳ ἐπίπεδον ἤ τόν ἀντίστοιχον δείκτηνπολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ.

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23\ldots k}$ ἤ ἁπλῶς $\sigma^2$ καί ὁ ἀντίστοιχος δείκτης πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2_{1.23\ldots k}$ ἤ $R^2$ ὁρίζονται, ὡς γνωστόν ἐκ τῶν σχέσεων

$$\sigma^2_{1.23\ldots k}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}(y_{1i}-\hat{y}_{1i})^2=\frac{1}{N}\sum_i(y_{1i}-\hat{\beta}_{12}y_{2i}-\hat{\beta}_{13}y_{3i}-\ldots-\hat{\beta}_{1k}y_{ki})^2 \tag{7.40}$$

$$\text{καί } R^2_{1.23\ldots k}=1-\frac{\sigma^2_{1.23\ldots k}}{\sigma_1^{\,2}} \qquad (7.41)$$

$$\text{ὅπου } \sigma_1^{\,2}=\sigma_{y_1}^{\,2}=\sigma_{x_1}^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_i y^2_{1i}=\frac{1}{N}\sum_i(x_{1i}-\mu_1)^2 \qquad (7.42)$$

συμβολίζει τήν διακύμανσιν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $Y_1$ (ἤ ἄλλως τῆς $X_1$).

Ὁ τύπος (7.40), λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (7.33) γράφεται

$$\sigma^2_{1.23\ldots k}=\frac{1}{N}\Big(\sum_i y_{1i}^{\,2}-\hat{\beta}_{12}\sum_i y_{2i}y_{1i}-\hat{\beta}_{13}\sum_i y_{3i}y_{1i}-\ldots-\hat{\beta}_{1k}\sum_i y_{ki}y_{1i}\Big) \qquad (7.43)$$

καί ὑπ'αὐτήν συνήθως τήν μορφήν χρησιμοποιεῖται εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μ.τ.σ.

Τόσον ὅμως τό μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23\ldots k}$ ὅσον καί ὁ δείκτης $R^2_{1.23\ldots k}$ εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθοῦν - χρησιμοποιουμένων τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν καί συμβολισμῶν - καί κατ'ἄλλον τρόπον ἐξαιρετικῶς χρήσιμον ἰδιαιτέρως κατά τόν ὑπολογισμόν αὐτῶν. Συγκεκριμένως, λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν τῶν σχέσεων (7.34) καί (7.35) καί ἀκόμη τοῦ τύπου (7.37), ἡ ὡς ἄνω ἔκφρασις τοῦ μ.τ.σ. - διά τοῦ τύπου (7.43)-γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{1.23\ldots k}&=\sigma_1^{\,2}-\hat{\beta}_{12}\rho_{12}\sigma_1\sigma_2-\hat{\beta}_{13}\rho_{13}\sigma_1\sigma_3-\ldots-\hat{\beta}_{1k}\rho_{1k}\sigma_1\sigma_k=\\&=\sigma_1^{\,2}-\sigma_1^{\,2}\rho_{12}\frac{P_{12}}{P_{11}}+\sigma_1^{\,2}\rho_{13}\frac{P_{13}}{P_{11}}-\ldots\pm\sigma_1^{\,2}\rho_{1k}\frac{P_{1k}}{P_{11}}=\\&=\frac{\sigma_1^{\,2}}{P_{11}}\left(P_{11}-\rho_{12}P_{12}+\rho_{13}P_{13}-\ldots\pm\rho_{1k}P_{1k}\right)\end{aligned}$$

δοθέντος δέ ὅτι ἡ ἐντός τῆς παρενθέσεως ποσότης ἀποτελεῖ τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς της, προκύπτει τελικῶς ἡ σχέσις

$$\sigma^2_{1.23\ldots k}=\sigma_1^{\,2}\,\frac{P}{P_{11}} \qquad (7.44)$$

Ἐξ ἄλλου, δι'ἀντικαταστάσεως τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23\ldots k}$ εἰς τήν σχέσιν (7.41) εὑρίσκεται εὐκόλως ἡ κάτωθι ἔκφρασις τοῦ δείκτου πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ

$$R^2_{1.23\ldots k}=1-\frac{P}{P_{11}} \tag{7.45}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι ὁ δείκτης πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ εἶναι συνάρτησις τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις συνάρτησις ἀποκλειστικῶς καί μόνον τῶν ἐπί μέρους συντελεστῶν συσχετίσεως $\rho_{st}$, $s\neq t=1,2,3,\ldots,k$ τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν λαμβανομένων ἀνά δύο, ἐνῶ διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23\ldots k}$ ἀπαιτεῖται ἐπιπροσθέτως καί ἡ διακύμανσις τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $\sigma_1{}^2$.

Οἱ τύποι (7.44) καί (7.45) ἐάν k=2, εἰς τήν περίπτωσιν δηλαδή μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς - διμεταβλητοί πληθυσμοί - δοθέντος ὅτι

$$P=\begin{vmatrix}1 & \rho_{12}\\ \rho_{21} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{vmatrix}=1-\rho^2 \quad \text{καί} \quad P_{11}=1$$

γίνονται

$$\sigma^2=\sigma_1{}^2(1-\rho^2) \quad \text{καί} \quad R^2=1-\frac{1-\rho^2}{1}=\rho^2$$

οἱ γνωστοί δηλαδή τύποι οἱ ὁποῖοι μᾶς ἀπησχόλησαν εἰς τήν περίπτωσιν διμεταβλητῶν πληθυσμῶν.

Ἐξ ἄλλου, διά k=3 (περίπτωσις δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὁ τύπος (7.45) λαμβάνει, ὡς ἀποδεικνύεται δι᾿ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων, τήν μορφήν

$$R^2_{1.23}=\frac{\rho_{12}{}^2+\rho_{13}{}^2-2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho^2_{23}}$$

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω ἐφαρμόζομεν τούς σχετικούς τύπους, σχέσεις κλπ. ἐπί τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (7.1).

Κατ᾿ἀρχήν εὑρίσκομεν τάς τυπικάς ἀποκλίσεις τῶν μεταβλητῶν $X_1$, $X_2$ καί $X_3$. Οὕτω,

$$\sigma_1{}^2 = \frac{318}{5} - \left(\frac{38}{5}\right)^2 = 5{,}84 \text{ καί } \sigma_1 = 2{,}42$$

$$\sigma_2{}^2 = \frac{66}{5} - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 2{,}96 \text{ καί } \sigma_2 = 1{,}72$$

$$\sigma_3{}^2 = \frac{55}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2 = 2 \quad \text{ καί } \sigma_3 = 1{,}41$$

Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τούς συντελεστάς συσχετίσεως τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν λαμβανομένων ἀνά δύο. Οὕτω,

$$\rho_{12} = \frac{141 - \frac{38\times16}{5}}{\sqrt{318 - \frac{38^2}{5}}\ \sqrt{66 - \frac{16^2}{5}}} = 0{,}93$$

$$\rho_{13} = \frac{119 - \frac{38\times15}{5}}{\sqrt{318 - \frac{38^2}{5}}\ \sqrt{55 - \frac{15^2}{5}}} = 0{,}29$$

$$\text{καί} \quad \rho_{23} = \frac{55 - \frac{16\times15}{5}}{\sqrt{66 - \frac{16^2}{5}}\ \sqrt{55 - \frac{15^2}{5}}} = 0{,}58$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ ὁρίζουσα συσχετίσεως P εἶναι

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}93 & 0{,}29 \\ 0{,}93 & 1 & 0{,}58 \\ 0{,}29 & 0{,}58 & 1 \end{vmatrix} = +0{,}03 \text{ (περίπου)}$$

Ἐξ ἄλλου

$$P_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0,58\\ 0,58 & 1\end{vmatrix}=0,66$$

$$P_{12}=\begin{vmatrix}0,93 & 0,58\\ 0,29 & 1\end{vmatrix}=0,76$$

καί $$P_{13}=\begin{vmatrix}0,93 & 1\\ 0,29 & 0,58\end{vmatrix}=0,27$$

Κατά συνέπειαν δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (7.37) λαμβάνομεν

$$\hat{\beta}_{12}=\frac{2,42}{1,72}\times\frac{0,76}{0,66}=1,62$$

$$\hat{\beta}_{13}=-\frac{2,42}{1,41}\times\frac{0,27}{0,66}=-0,70$$

Ἐξ ἄλλου, τό μ.τ.σ. $\sigma^2_{1,23}$ καί ὁ δείκτης πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2_{1.23}$ ὑπολογιζόμενα ἀντιστοίχως ἐκ τῶν τύπων (7.44) καί (7.45) εἶναι

$$\sigma^2_{1.23}=5,84\ \frac{0,03}{0,66}=0,265$$

καί $$R^2_{1.23}=1-\frac{0,03}{0,66}=0,95$$

Τέλος, λαμβανομένου ὑπ᾽ὄψιν ὅτι

$\mu_1=\frac{38}{5}=7,6,\qquad \mu_2=\frac{16}{5}=3,2\qquad$ καί $\qquad \mu_3=\frac{15}{5}=3$

ἐκ τοῦ τύπου (7.28) λαμβάνομεν

$$\hat{\alpha}=7,6-1,62\times 3,2+0,70\times 3=4,5$$

Οὕτω, ἡ ἐξίσωσις παλινδρομήσεως (7.39) εἶναι

$$\hat{y}_1=1,62y_2-0,70y_3$$

ἐνῶ ὑπό τήν μορφήν (7.14) εἶναι

$$\hat{x}_1=4,5+1,62x_2-0,70x_3$$

Τήν τελευταίαν ἐξίσωσιν - μέ ὡρισμένας μικροδιαφοράς εἰς τούς συντελεστάς λόγῳ τῶν γενομένων στρογγυλοποιήσεων εἰς τάς πράξεις - εὕρομεν καί προηγουμένως (εἰς τήν πρώτην ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος) ἀμέσως μετά τόν πίνακα (7.1).

## 7.4 Πολλαπλῆ Συσχέτισις. Συντελεσταὶ Πολλαπλῆς Συσχετίσεως

Κατ'ἀναλογίαν τῆς ἐννοίας τῆς ἁ π λ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τήν συνάφειαν μ ι ᾶ ς μεταβλητῆς πρός μ ί α - μόνον - ἄλλη μεταβλητή καί ἀντανακλᾶ τήν ἔντασιν μέ τήν ὁποίαν ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς πρώτης σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῆς δευτέρας, ἡ π ο λ λ α π λ ῆ σ υ σ χ έ τ ι σ ι ς ἀναφέρεται εἰς τήν ἔντασιν μέ τήν ὁποίαν ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς - καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η' ς - σχετίζεται πρός ἤ ἐπιρρεάζεται ἐκ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν μιᾶς π λ ε ι ά δ ο ς μεταβλητῶν - καλουμένων ἀντιστοίχως ἀ ν ε ξ α ρ τ ή τ ω ν ἤ ἑ ρ μ η ν ε υ τ ι κ ῶ ν - λαμβανομένων ἀπό κοινοῦ καί θεωρουμένων συγχρόνως.

Θεωρήσωμεν π.χ. τάς μεταβλητάς $Y_1$ καί $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ τῆς προηγουμένης παραγράφου καί τήν προσδιορισθεῖσαν μεταξύ αὐτῶν γραμμικήν πολλαπλῆν παλινδρόμησιν - σχέσις (7.39) - ἤτοι τήν γραμμικήν ἐξίσωσιν

$$\hat{y}_1=\hat{\beta}_{12}y_2+\hat{\beta}_{13}y_3+\ldots+\hat{\beta}_{1k}y_k \tag{7.46}$$

Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἐκφράζουσα τήν - ἐξηρτημένην - μεταβλητήν $Y_1$ ὡς (γραμμικήν) συνάρτησιν τῶν ἑρμηνευτικῶν τοιούτων $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ ἐπιτρέπει, ὡς εἴδομεν, ἐκ διαφόρων - δυνατῶν - τιμῶν τῶν τελευταίων νά ὑπολογίζωνται - κατά προσέγγισιν - αἱ ἀναμενόμεναι ἀντιστοίχως τιμαί τῆς $Y_1$.

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἐν προκειμένῳ τάς τιμάς $\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $(y_{2i}, y_{3i}, \ldots, y_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$, ἤτοι τάς οἱονεί - ἐξ ὑπολογισμοῦ - τιμάς τῆς $Y_1$

$$\hat{y}_{1i}=\hat{\beta}_{12}y_{2i}+\hat{\beta}_{13}y_{3i}+\ldots+\hat{\beta}_{1k}y_{ki},\ i=1,2,\ldots,N \quad (7.47)$$

καί ἄς συγκρίνωμεν αὐτάς πρός τάς ἀντιστοίχους ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, ἤτοι τάς τιμάς $y_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$, σχηματίζοντες τάς διαφοράς (ὑ π ό λ ο ι π α, ἀ π ο κ λ ί σ ε ι ς ἤ σ φ ά λ μ α τ α)

$$\hat{\varepsilon}_{1i}=y_{1i}-\hat{y}_{1i}=y_{1i}-\hat{\beta}_{12}y_{2i}-\hat{\beta}_{13}y_{3i}-\ldots-\hat{\beta}_{1k}y_{ki},\ i=1,2,\ldots,N \quad (7.48)$$

Εἶναι προφανές ὅτι, ἐάν αἱ ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμαί $\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ εἶναι πλησίον - προσεγγίζουν, δέν διαφέρουν οὐσιωδῶς - τῶν ἀντιστοίχων ἐκ παρατηρήσεως τοιούτων $y_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ ἤ ἄλλως ἐάν αἱ ἀποκλίσεις $\hat{\varepsilon}_{1i}=y_{1i}-\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ εἶναι ἐν γένει μικραί, ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς $Y_1$ σχετίζεται ἐντόνως ἤ ἐπιρρεάζεται σοβαρῶς ἐκ τῶν τιμῶν καί τῶν μεταβολῶν τῶν $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ πρός τούτοις δέ συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι ἡ χρησιμοποιηθεῖσα μορφή τῆς ἐξισώσεως πολλαπλῆς παλινδρομήσεως εἶναι ἱκανοποιητική. Ἀντιθέτως, ἐάν αἱ ὡς ἄνω ἀποκλίσεις εἶναι μεγάλαι, δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν ὅτι ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς $Y_1$ οὐδόλως ἐξαρτᾶται (σχετίζεται ἤ ἐπιρρεάζεται) ἐκ τῆς πλειάδος τῶν ὑπ' ὄψιν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν - δηλαδή ὅτι οὐδεμία συνάφεια ὑφίσταται μεταξύ τῆς $Y_1$ καί τῶν $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ - ἤ τουλάχιστον ὅτι ἡ ἐπιλεγεῖσα μορφή πολλαπλῆς παλινδρομήσεως δέν εἶναι ἡ κατάλληλος τοιαύτη.

Κατά συνέπειαν, πέραν τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23\ldots k}$ καί τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2_{1.23\ldots k}$ τά ὁποῖα ὡς γνωστόν ἀποτελοῦν μέτρα τόσον τῆς καταλκληλότητος τῆς ἐπιλεγείσης μορφῆς παλινδρομήσεως ὅσον καί τοῦ βαθμοῦ ἐξαρτήσεως ἤ συναφείας τῆς $Y_1$ πρός τήν ὁλότητα τῶν μεταβλητῶν $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ εἶναι δυνατόν πρός τόν αὐτόν σκοπόν νά χρησιμοποιηθῆ καί ἕνα μέτρον τοῦ βαθμοῦ συναφείας μεταξύ τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τιμῶν τῆς $Y_1$ καί τῶν ἀντιστοίχων ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν αὐτῆς.

Εἰς τήν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς πολλαπλῆς παλινδρομήσεως ὡς τοιοῦτον μέτρον χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ (γραμμικός) συντελεστής συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $\hat{Y}_1$, ὁ ὁποῖος ὁριζόμενος - ἴδε σχέσιν (6.29) - ἐκ τοῦ τύπου

$$\rho(Y_1, \hat{Y}_1) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, \hat{Y}_1)}{\sqrt{V(Y_1)}\,\sqrt{V(\hat{Y}_1)}} \tag{7.49}$$

ἀντανακλᾶ τήν συνάφειαν - συσχέτισιν - μεταξύ τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ τιμῶν τῆς $Y_1$ ἤτοι τῶν $\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ καί τῶν ἀντιστοίχων ἐκ παρατηρήσεως τοιούτων $y_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$.

Ὁ ἐν λόγῳ συντελεστής κυμαινόμενος εἰς τό διάστημα $[-1, +1]$ λαμβάνει ὡς γνωστόν τάς τιμάς $+1$ ἤ $-1$ ἐάν - καί μόνον ἐάν - αἱ μεταβληταί $Y_1$ καί $\hat{Y}_1$ ταυτίζονται ἤ γενικώτερον ἐάν ἡ μία εἶναι γραμμική συνάρτησις τῆς ἄλλης. Κατά συνέπειαν εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ὁ οὕτω ὁριζόμενος συντελεστής θά λαμβάνη τάς τιμάς $+1$ ἤ $-1$ ἐάν - καί μόνον ἐάν - αἱ τιμαί τῆς $Y_1$ καθορίζονται πλήρως - ἄνευ σφαλμάτων - ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (7.39).

Ὁ συντελεστής οὗτος καλεῖται - διά λόγους εὐνοήτους - σ υ ν τ ε λ ε σ τ ή ς γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς π ο λ λ α π λ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς, ὡς θά εἴδωμεν δέ κατωτέρω, τό τετράγωνον αὐτοῦ ἰσοῦται πρός τόν δείκτην (γραμμικοῦ) πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2_{1.23\ldots k}$ θά ἀποδείξωμεν δηλαδή τήν σχέσιν

$$\rho^2(Y_1, \hat{Y}_1) = R^2_{1.23\ldots k} \tag{7.50}$$

Πράγματι, λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν σχέσιν(6.20) ἔχομεν

$$Cov(Y_1,\hat{Y}_1) = Cov(Y_1,\hat{\beta}_{12}Y_2+\hat{\beta}_{13}Y_3+\ldots+\hat{\beta}_{1k}Y_k)=$$

$$=\hat{\beta}_{12}Cov(Y_1,Y_2)+\hat{\beta}_{13}Cov(Y_1,Y_3)+\ldots+\hat{\beta}_{1k}Cov(Y_1,Y_k)=$$

$$=\frac{1}{N}(\hat{\beta}_{12}\sum_i y_{1i}y_{2i}+\hat{\beta}_{13}\sum_i y_{1i}y_{3i}+\ldots+\hat{\beta}_{1k}\sum_i y_{1i}y_{ki})=$$

(καθ'ὅσον $\sum_i y_{ji}=0$ διά $j=1,2,\ldots,k$)

$$=\hat{\beta}_{12}\rho_{12}\sigma_1\sigma_2+\hat{\beta}_{13}\rho_{13}\sigma_1\sigma_3+\ldots+\hat{\beta}_{1k}\rho_{1k}\sigma_1\sigma_k=$$

-χρησιμοποιοῦντες τάς ἐκφράσεις τῶν $\beta_{1j}$, $j=2,3,\ldots,k$ ἐκ τοῦ τύπου (7.37) -

$$=\frac{\sigma_1^2}{P_{11}}(\rho_{12}P_{12}-\rho_{13}P_{13}+\ldots\pm\rho_{1k}P_{1k})=$$

(δοθέντος δέ ὅτι $\quad P=P_{11}-\rho_{12}P_{12}+\rho_{13}P_{13}-\ldots\pm\rho_{1k}P_{1k}$)

$$=\frac{\sigma_1^2}{P_{11}}(P_{11}-P)=\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})$$

ἐκ τῆς ὁποίας τελικῶς - λόγῳ τῆς σχέσεως (7.45) - ἔχομεν

$$Cov(Y_1,\hat{Y}_1)=\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})=\sigma_1^2R^2_{1.23\ldots k} \tag{7.51}$$

Ἐξ ἄλλου, πρός εὕρεσιν τῆς διακυμάνσεως $V(\hat{Y}_1)$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῆς ἰσότητος $\hat{\varepsilon}_1=Y_1-\hat{Y}_1$ (ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται αἱ ἀποκλίσεις - ὑπόλοιπα - $\hat{\varepsilon}_{1i}=y_{1i}-\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$) ἐφαρμόζοντες τήν σχέσιν (6.22) λαμβάνομεν

$$V(\hat{\varepsilon}_1)=V(Y_1)+V(\hat{Y}_1)-2Cov(Y_1,\hat{Y}_1)$$

Εἶναι ὅμως $V(\hat{\varepsilon}_1)=\frac{1}{N}\sum_i(y_{1i}-\hat{y}_{1i})^2=\sigma^2_{1.23\ldots k}=\sigma_1^2\frac{P}{P_{11}}$ ἐκ τῆς (7.44)

$$V(Y_1)=\frac{1}{N}\sum_i y_{1i}^2=\sigma_1^2$$

καί $Cov(Y_1,\hat{Y}_1)=\sigma_1^2 R_{1.23...k}=\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})$, (ἴδε 7.51)

καί κατά συνέπειαν

$$V(\hat{Y}_1)=\sigma_1^2\frac{P}{P_{11}}-\sigma_1^2+2\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})=\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})$$

ἤτοι τελικῶς $V(\hat{Y}_1)=\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})=\sigma_1^2 R^2_{1.23...k}$ (7.52)

Τέλος, ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς τῶν $Cov(Y_1,\hat{Y}_1)$, $V(\hat{Y}_1)$ καί $V(Y_1)$ εἰς τήν (7.49) εὑρίσκομεν ὅτι

$$\rho^2(Y_1,\hat{Y}_1)=\frac{Cov^2(Y_1,\hat{Y}_1)}{V(Y_1)V(\hat{Y}_1)}=\frac{\sigma_1^4 R^4_{1.23...k}}{\sigma_1^2\sigma_1^2 R^2_{1.23...k}}=R^2_{1.23...k}$$

τήν σχέσιν δηλαδή (7.50).

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ συντελεστοῦ πολλαπλῆς συσχετίσεως $\rho_{y_1\hat{y}_1}$ εἰς τήν πρᾶξιν χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ τύπος (7.50) ἤ ὁ ἰσοδύναμος πρός αὐτόν

$$\rho^2(Y_1,\hat{Y}_1)=1-\frac{P}{P_{11}} \qquad (7.53)$$

εἶναι ὅμως προφανές ὅτι δι'αὐτοῦ τοῦ τρόπου εἶναι ἀδύνατον νά γνωρίζωμεν τό σημεῖον τοῦ $\rho(Y_1,\hat{Y}_1)$. Τό πρόσημον τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ εὑρίσκεται μόνον διά τοῦ ἀπ'εὐθείας ὑπολογισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως τῶν $y_{1i}$ καί $\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,...,N$ ἀφοῦ προηγουμένως εὑρεθοῦν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (7.39) αἱ - οἱονεί - τιμαί $\hat{y}_{1i}$, $i=1,2,...,N$.

Χρησιμοποιοῦντες π.χ. τά δεδομένα τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος τοῦ πίνακος (7.1), ὅπου ἔχομεν $P=0,03$ καί $P_{11}=0,66$ εὑρίσκομεν

$$\rho^2(Y_1,\hat{Y}_1)=1-\frac{0,03}{0,66}=0,95$$ (ὅσον δηλαδή καί ὁ $R^2_{1.23}$)

καί ἐξ αὐτῆς $\rho(Y_1,\hat{Y}_1)=0,97$ περίπου (κατ'ἀπόλυτον τιμήν).

Εἴδομεν ἀνωτέρω τήν ἔννοιαν τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως καί τόν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ (γραμμικῆς) πολλαπλῆς συσχετίσεως ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή $Y_1$ (ἤ ἄλλως ἡ $X_1$) ἐκφράζεται ὡς γραμμική συνάρτησις τῶν ἑρμηνευτικῶν τοιούτων $Y_2,Y_3,\ldots,Y_k$ (ἤ ἀντιστοίχως τῶν $X_2,X_3,\ldots,X_k$) διά τῆς (γραμμικῆς) ἐξισώσεως πολλαπλῆς παλινδρομήσεως (7.39) ἤ (7.14). Ὡς εἶναι εὐνόητον ὅμως ἡ ἔννοια τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως εἶναι δυνατόν νά γενικευθῆ καί εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή $X_1$ ἐκφράζεται ὡς συνάρτησις τῶν $X_2,X_3,\ldots,X_k$ καί δι'οἱασδήποτε ἄλλης ἐξισώσεως -ἐπιφανείας - πολλαπλῆς παλινδρομήσεως ὡς ἡ (7.6). Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν ὁ συντελεστής πολλαπλῆς συσχετίσεως ὁρίζεται καί πάλιν ὡς ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $X_1$ καί $\hat{X}_1$ ὑπολογίζεται ὅμως ἐκ τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν $x_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ τῆς $X_1$ καί τῶν ἀντιστοίχων ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί - τοιούτων $\hat{x}_{1i}$, $i=1,2,\ldots,N$ εὑρισκομένων ἐκ τῆς ἐπιλεγείσης κατά περίπτωσιν ἐπιφανείας παλινδρομήσεως, ἤτοι ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{x}_{1i}=f(x_{2i},x_{3i},\ldots,x_{ki},\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_\lambda),\ i=1,2,\ldots,N$$

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῆ ὅτι εἰς περιπτώσεις ὡς ἡ ἀνωτέρω - μή γραμμικῆς παλινδρομήσεως - ὡς μέτρον τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς $X_1$ πρός τό σύνολον τῶν ἀνεξαρτήτων τοιούτων - θεωρουμένων ἀπό κοινοῦ - χρησιμοποιεῖται πολλάκις καί ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ ὑπολογιζομένου ἐν προκειμένῳ ἐκ τῆς σχέσεως (7.9).

## 7.5 Μερική Συσχέτισις. Συντελεσταί Μερικῆς Συσχετίσεως

Θεωρήσωμεν καί πάλιν τάς μεταβλητάς $Y_1$ καί $Y_2$, $Y_3,\ldots,Y_k$ - ὡς αὗται ὁρίζονται εἰς τήν παράγραφον (7.3) - καί ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται διά τήν πρός ἀλλήλας συμπεριφοράν αὐτῶν, εἰδικώτερον ὅμως διά τήν ἔ ν τ α σ ι ν τ ῆ ς σ υ ν α φ ε ί α ς καί τόν τ ρ ό π ο ν μ ε τ α β ο λ ῆ ς τῆς $Y_1$ ἐν σχέσει πρός μίαν οἱανδήποτε τῶν ὑπολοίπων μεταβλητῶν καί συγκεκριμένως - πρός ἁπλοποίησιν τῶν συμβολισμῶν - πρός τήν $Y_2$.

Ἡ ἔντασις τῆς συναφείας ἤ ἄλλως ὁ βαθμός συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$ ὡς καί ὁ τρόπος συμμεταβολῆς αὐτῶν χαρακτηρίζονται ὡς γνωστόν ὑπό τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως αὐτῶν $\rho_{12}$, καλουμένου πολλάκις - διά λόγους οἱ ὁποῖοι διευκρινίζονται κατωτέρω - καί σ υ ν τ ε λ ε σ τ ο ῦ ὁ λ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς ἤ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ο ῦ σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς τ ά ξ ε ω ς μ η δ έ ν.

Δοθέντος ὅμως ὅτι αἱ ἐν λόγῳ μεταβληταί λαμβάνονται ἀπό κοινοῦ καί συνεξετάζονται μετά τῶν ὑπολοίπων k-2 μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι ὑπεισέρχονται εἰς τό πρόβλημα, εἶναι δυνατόν ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν καί αἱ μεταβολαί τόσον τῆς $Y_1$ ὅσον καί τῆς $Y_2$ νά ὀφείλωνται - μερικῶς τουλάχιστον - εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν καί τάς μεταβολάς τῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$.

Οὕτω γεννᾶται τό ἐρώτημα καί παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον νά ἐρευνηθῆ ποία θά ἦτο ἡ ἔντασις τῆς συναφείας - ὁ βαθμός συσχετίσεως - ὡς καί ὁ τρόπος συμμεταβολῆς τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$, ἐάν προηγουμένως ἀ π α λ ε ι φ θ ῆ ἡ ἐ π ί δ ρ α σ ι ς ἐπ' α ὐ τ ῶ ν τῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$.

Ἕνας τρόπος ἀπαλειφῆς τῶν ὡς ἄνω ἐπιδράσεων καί διερευνήσεως ἐν συνεχείᾳ τῆς συναφείας - βαθμοῦ συσχετίσεως καί τρόπου συμμεταβολῆς - τῶν προκυπτουσῶν ἐξ ὑ π ο λ ο ί π ο υ - καθαρῶν, ἀπηλλαγμένων τῶν ἐπιδράσεων - μεταβλητῶν εἶναι ὁ ἑξῆς: Τόσον ἡ μεταβλητή $Y_1$ ὅσον καί ἡ $Y_2$ ἐκφράζονται κατ' ἀρχήν ὡς γραμμικαί συναρτήσεις τῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$ προσδιοριζομένων ἀντιστοίχως - ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων $(y_{1i}, y_{3i}, y_{4i}, \ldots, y_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$ καί $(y_{2i}, y_{3i}, \ldots, y_{ki})$ $i = 1,2,\ldots,N$ - τῶν ἐπιπέδων πολλαπλῆς παλινδρομήσεως

$$\hat{y}_1 = \hat{\gamma}_{13} y_3 + \hat{\gamma}_{14} y_4 + \ldots + \hat{\gamma}_{1k} y_k \tag{7.54}$$

$$\text{καί } \hat{y}_2=\hat{\delta}_{23}y_3+\hat{\delta}_{24}y_4+\ldots+\hat{\delta}_{2k}y_k \quad (7.55)$$

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκονται τά ὑ π ό λ ο ι π α

$$\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k}=Y_1-\hat{Y}_1=Y_1-\hat{\gamma}_{13}Y_3-\hat{\gamma}_{14}Y_4-\ldots-\hat{\gamma}_{1k}Y_k \quad (7.56)$$

$$\text{καί } \hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k}=Y_2-\hat{Y}_2=Y_2-\hat{\delta}_{23}Y_3-\hat{\delta}_{24}Y_4-\ldots-\hat{\delta}_{2k}Y_k \quad (7.57)$$

ἀπαλλασσομένων κατ'αὐτόν τόν τρόπον τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐπ'αὐτῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβλητῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$.

Ὁ τρόπος συμμεταβολῆς τῶν ἐν λόγῳ ὑ π ο λ ο ί π ω ν καί ὁ βαθμός συσχετίσεως αὐτῶν χαρακτηρίζουν προφανῶς τήν ὑφισταμένην μεταξύ τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$ συνάφειαν μετά τήν ἀπαλοιφήν τῶν ἀντιστοίχων ἐπ' αὐτῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβλητῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$. Διά τόν λόγον αὐτόν προκειμένου νά μετρηθῆ ἡ ἔντασις τῆς συναφείας - βαθμός συσχετίσεως - τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$, ἀπαλειφομένης τῆς ἐπ'αὐτῶν ἐπιδράσεως τῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$ ὑπολογίζεται συνήθως ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν ὡς ἄνω ὑ π ο λ ο ί π ω ν, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται $\rho_{12.34\ldots k}$ καί καλεῖται συντελεστής (γραμμικῆς) μ ε ρ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς.

Ὁ ἐν λόγῳ συντελεστής φέρει δύο ὁμάδας δεικτῶν. Οἱ πρό τῆς τελείας δεῖκται ἀναφέρονται εἰς τάς συσχετιζομένας μεταβλητάς, ἐνῶ ἡ δευτέρα ὁμάς - μετά τήν τελείαν - περιλαμβάνει τάς μεταβλητάς ἡ ἐπίδρασις τῶν ὁποίων ἔχει ἀπαλειφθῆ. Οὕτω π.χ. $\rho_{12.3}$ παριστᾶ τόν συντελεστήν συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$ ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχει ἀπαλειφθῆ ἡ ἐπίδρασις μ ι ᾶ ς μ ό ν ο ν μεταβλητῆς (τῆς $Y_3$), ὁ $\rho_{12.34}$ τόν συντελεστήν συσχετίσεως τῶν $Y_1, Y_2$ μετά τήν ἀπαλειφήν τῆς ἐπιδράσεως δ ύ ο μεταβλητῶν (τῶν $Y_3$, $Y_4$) κ.ο.κ.

Πολλάκις οἱ ἀνωτέρω συντελεσταί ἀναφέρονται ἀντιστοίχως ὡς συντελεσταί μερικῆς συσχετίσεως πρώτης τάξεως ($\rho_{12.3}$), δευτέρας τάξεως ($\rho_{12.34}$) - ὅσαι δηλαδή αἱ ἀπαλειφόμεναι λοιπαί μεταβληταί - καί ὡς ἐκ τούτου ὁ ἁπλοῦς συντελεστής (ὁλικῆς) συσχετίσεως θεωρεῖται κατ'ἀντιστοιχίαν τ ά ξ ε ω ς μ η δ έ ν. 'Ο συντελεστής $\rho_{12.34...k}$ λέγεται μ ε ρ ι κ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς καθ'ὅσον ἐκ τῶν συσχετιζομένων μεταβλητῶν ἔχει ἀπαλειφθῆ ἡ ἐπίδρασις ὡρισμένων ἄλλων. 'Εξ ἄλλου, λέγεται γ ρ α μ μ ι κ ό ς διότι ἡ ἀπαλειφή τῆς ἐπιδράσεως τῶν $Y_3, Y_4, ..., Y_k$ ἔγινε τῇ βοηθείᾳ γ ρ α μ μ ι κ ῶ ν ἐξισώσεων παλινδρομήσεως. 'Ενταῦθα δέον νά διευκρινισθῆ ὅτι ἡ ἀπαλειφή τῆς ἐπιδράσεως τῶν $Y_3, Y_4, ..., Y_k$ θά ἦτο δυνατόν νά γίνη ἀφοῦ προηγουμένως προσηρμόζοντο πρός τά ἀντίστοιχα ἐμπειρικά δεδομένα γενικώτεραι ἐξισώσεις παλινδρομήσεως - ἀντί τῶν (7.54) καί (7.55) - τοιοῦτον τι ὅμως σπανίως ἀντιμετωπίζεται εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς (δυσχέρειαι ὑπολογισμῶν κλπ).

'Ο συντελεστής μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.34...k}$, ὡς συντελεστής συσχετίσεως δύο μεταβλητῶν - τῶν $\hat{\varepsilon}_{1.34...k}$ καί $\hat{\varepsilon}_{2.34...k}$ - ὁρίζεται διά τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\rho_{12.34...k}=\frac{\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_{1.34...k},\hat{\varepsilon}_{2.34...k})}{\sqrt{V(\hat{\varepsilon}_{1.34...k})}\sqrt{V(\hat{\varepsilon}_{2.34...k})}} \qquad (7.58)$$

Οὗτος, ὡς εἶναι εὐνόητον, πληροῖ τήν διπλῆν ἀνισότητα $-1\leqslant\rho_{12.34...k}\leqslant+1$ χαρακτηρίζει δέ τόσον τήν ἔντασιν τῆς συναφείας - βαθμόν συσχετίσεως - ὅσον καί τόν τρόπον συμμεταβολῆς τῶν $Y_1$ καί $Y_2$ θεωρουμένων φυσικά ἀπηλλαγμένων τῆς ἐπιδράσεως τῶν $Y_3, Y_4..., Y_k$. 'Ως εἶναι εὐνόητον, οἱ συντελεσταί μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.34...k}$, $\rho_{13.24...k}$, ....., $\rho_{1j.23...(j-1)(j+1)...k}$, ..., $\rho_{1k.23...(k-1)}$, ὁριζόμενοι κατά τόν ἀνωτέρω τρόπον, ἀντανακλοῦν τήν σ χ ε τ ι κ ή ν σ η μ α σ ί α ν τήν ὁποίαν ἔχει ἑκάστη ἐκ τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης καί ὡς ἐκ τούτου παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον προκειμένου ὁ μελετητής νά ἐπιλέξη τάς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν καί πλέον σημαντικάς ἑρμηνευτικάς μεταβλητάς.

'Ο ὑπολογισμός τοῦ συντελεστοῦ $\rho_{12.34...k}$ εἶναι δυνατόν νά γίνη εἴτε ἀπ'εὐθείας - χρησιμοποιουμένων δηλαδή τῶν N τιμῶν τῶν ὑπολοίπων $\hat{\varepsilon}_{1.34...k}$ καί $\hat{\varepsilon}_{2.34...k}$

αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (7.56) καί (7.57) ἀντιστοίχως πρός τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς $(y_{3i}, y_{4i}, \ldots, y_{ki})$, $i=1,2,\ldots,N$ - εἴτε ἐμμέσως, ἐκφραζόμενος, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, συναρτήσει τῶν ἁπλῶν συντελεστῶν (ὁλικῆς) συσχετίσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$ λαμβανομένων ἀνά δύο.

Ἐν προκειμένῳ δέον νά σημειωθῇ ὅτι ὁ συντελεστής μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.34\ldots k}$ εἶναι δυνατόν νά εἶναι μικρότερος, ἴσος ἤ μεγαλύτερος τοῦ ἁπλοῦ συντελεστοῦ ὁλικῆς συσχετίσεως $\rho_{12}$, ἤτοι $\rho_{13.34\ldots k} \lesseqgtr \rho_{12}$ πρός τούτοις δέ συμβαίνει πολλάκις οἱ ἐν λόγῳ συντελεσταί νά ἔχουν διάφορον πρόσημον - νά εἶναι ἑτερόσημοι - ἀκόμη δέ ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν νά εἶναι μηδέν χωρίς τοῦτο νά εἶναι ἀπαραίτητον καί διά τόν ἄλλον.

Εἰς τήν πρᾶξιν, πρός ἁπλοποίησιν τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν, ἐφαρμόζεται συνήθως ὁ δεύτερος (ἔμμεσος) τρόπος. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν θά ἀποδείξωμεν τήν σχέσιν

$$\rho_{12.34\ldots k} = -\frac{(-1)^{1+2} P_{12}}{\sqrt{P_{11}}\sqrt{P_{22}}} = \frac{P_{12}}{\sqrt{P_{11}}\sqrt{P_{22}}} \tag{7.59}$$

ὅπου $P_{11}, P_{22}$ καί $P_{12}$ εἶναι ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τῆς ὁ ρ ι ζ ο ύ σ η ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς $P$ - ἴδε (7.38) - αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐξ αὐτῆς δι᾽ἀποκοπῆς τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν καί στηλῶν (π.χ. ἡ $P_{12}$ προκύπτει ἐκ τῆς $P$ δι᾽ἀποκοπῆς τῆς πρώτης γραμμῆς καί τῆς δευτέρας στήλης κ.ο.κ.).

Προηγουμένως ὅμως ἀποδεικνύομεν τήν ἑξῆς χρήσιμον ἰδιότητα: Θεωρήσωμεν τό ὑ π ό λ ο ι π ο ν

$$\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k} = Y_1 - \hat{Y}_1 = Y_1 - \hat{\beta}_{12}Y_2 - \hat{\beta}_{13}Y_3 - \ldots - \hat{\beta}_{1k}Y_k$$

Ἐν προκειμένῳ ἔχουν παραλειφθῇ διά λόγους ἁπλότητος οἱ μετά τήν τελείαν δεῖκται, γράφομεν δηλαδή $\hat{\beta}_{12}$ ἀντί $\hat{\beta}_{12.34\ldots k}$ κ.ο.κ. - τό ὁποῖον προκύπτει μετά τήν ἀπαλειφήν - ἀφαίρεσιν - ἐκ τῆς $Y_1$ τῆς ἐπιδράσεως - θεωρουμένης γραμμικῆς - τῶν $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$. Θά ἀποδείξωμεν ὅτι τό ἐν λόγῳ ὑπόλοιπον εἶναι ἀ σ υ σ χ έ τ ι σ τ ο ν πρός οἱανδήποτε ἐκ τῶν μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι ἀφηρέθησαν καί κατά συνέπειαν ὅτι ἀντανακλᾶ τόν τρόπον διαμορφώσεως τῆς $Y_1$ ὑπό τήν ἐπίδρασιν ἄ λ λ ω ν π α ρ α γ ό ν τ ω ν κ α ί ὄ χ ι π λ έ ο ν τῶν μεταβλητῶν $Y_2, Y_3, \ldots, Y_k$.

Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν τήν σχέσιν

$$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k}, Y_j)=0 \quad \text{διά } j=2,3,\ldots,k \qquad (7.60)$$

<u>Ἀπόδειξις:</u>

Δι'ἐφαρμογῆς γνωστῶν ἰδιοτήτων τῆς συνδιακυμάνσεως ἔχομεν

$$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k}, Y_j)=\mathrm{Cov}(Y_1-\hat{\beta}_{12}Y_2-\hat{\beta}_{13}Y_3-\ldots-\hat{\beta}_{1k}Y_k, Y_j)=$$

$$=\mathrm{Cov}(Y_1,Y_j)-\hat{\beta}_{12}\mathrm{Cov}(Y_2,Y_j)-\hat{\beta}_{13}\mathrm{Cov}(Y_3,Y_j)-\ldots-\hat{\beta}_{1k}\mathrm{Cov}(Y_k,Y_j)=$$

$$=\rho_{1j}\sigma_1\sigma_j-\hat{\beta}_{12}\rho_{2j}\sigma_2\sigma_j-\hat{\beta}_{13}\rho_{3j}\sigma_3\sigma_j-\ldots-\hat{\beta}_{1j}\sigma^2_j-\ldots-\hat{\beta}_{1k}\rho_{kj}\sigma_k\sigma_j$$

λαμβανομένου δέ ὑπ'ὄψιν τοῦ τύπου (7.37), διά τοῦ ὁποίου ὑπολογίζονται τά $\hat{\beta}_{1j}$, $j=2,3,\ldots,k$, ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k}, Y_j)=\rho_{1j}\sigma_1\sigma_j-\rho_{2j}\sigma_1\sigma_j\frac{P_{12}}{P_{11}}+\rho_{3j}\sigma_1\sigma_j\frac{P_{13}}{P_{11}}-\ldots\pm\rho_{kj}\sigma_1\sigma_j\times$$

$$\times\frac{P_{1k}}{P_{11}}=\frac{\sigma_1\sigma_j}{P_{11}}(\rho_{1j}P_{11}-\rho_{2j}P_{12}+\rho_{3j}P_{13}-\ldots\pm\rho_{kj}P_{1k})=$$

καί δοθέντος ὅτι $\rho_{st}=\rho_{ts}$ $s\neq t=1,2,\ldots,k$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_j}{P_{11}}(\rho_{j1}P_{11}-\rho_{j2}P_{12}+\rho_{j3}P_{13}-\ldots\pm\rho_{jk}P_{1k})$$

Ἡ ἐντός τῆς παρενθέσεως ὅμως παράστασις ἀποτελεῖ τό ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς αὐτῆς ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ταῦτα ταυτίζονται πρός τά ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς j γραμμῆς της. Κατά συνέπειαν ἡ ἐν λόγῳ παρένθεσις ἰσοῦται πρός μηδέν καί οὕτω ἀποδεικνύεται ἡ ἰσχύς τῆς (7.60).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος τοῦ ὑπολοίπου $\hat{\varepsilon}_{1.23...k}$ προκύπτει κατ'ἀναλογίαν τό συμπέρασμα ὅτι καί ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων $\hat{\varepsilon}_{1.34...k}$ καί $\hat{\varepsilon}_{2.34...k}$ - ὡς ταῦτα ὁρίζονται ἐκ τῶν (7.56) καί (7.57) - εἶναι ἀσυσχέτιστα πρός τάς μεταβλητάς $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$ ἤτοι ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$Cov(\hat{\varepsilon}_{1.34...k}, Y_j)=0 \text{ καί } Cov(\hat{\varepsilon}_{2.34...k}, Y_j)=0 \quad (7.61)$$

$$\text{διά } j=3,4,\ldots,k$$

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τήν σχέσιν (7.59) ἡ ὁποία ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἐφαρμοζομένης τῆς σχέσεως (7.61) διά τό ὑπόλοιπον $\hat{\varepsilon}_{2.34...k}$ καί τάς μεταβλητάς $Y_j$, $j=3,4,\ldots,k$ λαμβάνομεν

$$Cov(\hat{\varepsilon}_{1.34...k}, \hat{\varepsilon}_{2.34...k}) = Cov(Y_1 - \hat{\gamma}_{13}Y_3 - \hat{\gamma}_{14}Y_4 - \ldots - \hat{\gamma}_{1k}Y_k, \hat{\varepsilon}_{2.34...k}) =$$

$$= Cov(Y_1, \hat{\varepsilon}_{2.34...k})$$

καθ'ὅσον οἱ ὑπόλοιποι ὅροι μηδενίζονται.

Οὕτω, $Cov(\hat{\varepsilon}_{1.34...k}, \hat{\varepsilon}_{2.34...k}) = Cov(Y_1, \hat{\varepsilon}_{2.34...k}) =$
$= Cov(Y_1, Y_2 - \hat{\delta}_{23}Y_3 - \hat{\delta}_{24}Y_4 - \ldots - \hat{\delta}_{2k}Y_k) = Cov(Y_1, Y_2) - \hat{\delta}_{23}Cov(Y_1, Y_3) -$
$- \hat{\delta}_{24}Cov(Y_1, Y_4) - \ldots - \hat{\delta}_{2k}Cov(Y_1, Y_k) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \hat{\delta}_{23}\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 -$
$- \hat{\delta}_{24}\rho_{14}\sigma_1\sigma_4 - \ldots - \hat{\delta}_{2k}\rho_{1k}\sigma_1\sigma_k$.

Ἐν προκειμένῳ καθίσταται ἀπαραίτητος ὁ ὑπολογισμός τῶν συντελεστῶν $\hat{\delta}_{23}, \hat{\delta}_{24}$ καί $\hat{\delta}_{2k}$ ἤ συνοπτικώτερον $\hat{\delta}_{2j}$, $j=3,4,\ldots,k$ καί πρός τόν σκοπόν αὐτόν θά ἐφαρμοσθῆ κατ'ἀναλογίαν ὁ τύπος (7.37α). Πρό τῆς ἐφαρμογῆς ὅμως τοῦ ἐν λόγῳ τύπου δέον νά διευκρινισθῆ ἐν προκειμένῳ ὅτι - λόγῳ ἀπουσίας τῆς μεταβλητῆς $Y_1$ - ἡ ὁρίζουσα συσχετίσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν $Y_2, Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$ δέν εἶναι ἡ ἀρχική ὁρίζουσα συσχετίσεως $P$ - ἴδε (7.38) - ἀλλά ἡ ἐλάσσων αὐτῆς - πρώτης τάξεως - $P_{11}$ ἡ ὁποία προκύπτει δι'ἀποκοπῆς τῆς πρώτης γραμμῆς καί τῆς πρώτης στήλης. Κατά συνέπειαν κατά τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου (7.37α) ὡς ἀρχική ὁρίζουσα συσχετίσεως θά θεωρῆται ἡ $P_{11}$ αἱ περιλαμβανόμεναι δέ εἰς αὐτόν ἐλάσσονες ὁρίζουσαι θά συμβολίζωνται ἀντιστοίχως διά τῶν $P_{11.st}$ καί $P_{11.ss}$ αἱόποῖαι ὡς γνωστόν ἀποτελοῦν ἐλάσσονας - τῆς ὁριζούσης $P$ - ἀλλά δευτέρας τάξεως. Οὕτω, οἱ δεῖκται $\hat{\delta}$ δίδονται ἐν προκειμένῳ

$$\hat{\delta}_{2j} = -(-1)^{2+j} \frac{\sigma_2}{\sigma_j} \frac{P_{11.2j}}{P_{11.22}}, \quad j=3,4,\ldots,k \qquad (7.62)$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν τελευταίαν ἔκφρασιν τῆς $Cov(\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k}, \hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k})$ τούς συντελεστάς $\hat{\delta}$ διά τῶν ἐκ τοῦ τύπου (7.62) τιμῶν των λαμβάνομεν

$$Cov(\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k}, \hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - (\rho_{13}\sigma_1\sigma_2 \frac{P_{11.23}}{P_{11.22}} - \rho_{14}\sigma_1\sigma_2 \times$$

$$\times \frac{P_{11.24}}{P_{11.22}} + \ldots \pm \rho_{1k}\sigma_1\sigma_2 \frac{P_{11.2k}}{P_{11.22}}) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{P_{11.22}} (\rho_{12}P_{11.22} - \rho_{13}P_{11.23} +$$

$$+ \rho_{14}P_{11.24} - \ldots \mp \rho_{1k}P_{11.2k}) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{P_{11.22}} P_{21} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{P_{11.22}} P_{12}$$

καθ'ὅσον ἡ ἐντός τῆς παρενθέσεως ποσότης ἀποτελεῖ τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐλάσσονος $P_{21}$ ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς, ἐνῶ πρός τούτοις - λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς $P$ - εἶναι $P_{21} = P_{12}$. Οὕτω, ἡ συνδιακύμανσις τῶν ὑπολοίπων $\hat{\varepsilon}_{1.31\ldots k}$ καί $\hat{\varepsilon}_{2.39\ldots k}$ δίδεται τελικῶς ἐκ τῆς σχέσεως

$$Cov(\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k}, \hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k}) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{P_{11.22}} P_{12} \qquad (7.62)$$

Πρός ὑπολογισμόν ὅμως τοῦ $\rho_{12.34\ldots k}$ **ἀπαιτοῦν**ται ἀκόμη - ἰδέ (7.58) - αἱ διακυμάνσεις

$$V(\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k}) \text{ καί } V(\hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k})$$

Πρός ὑπολογισμόν τῶν ἐν λόγῳ διακυμάνσεων ἀνατρέχομεν κατ'ἀρχήν εἰς τάς σχέσεις (7.51) καί (7.52) καί ὑπολογίζομεν τήν διακύμανσιν $V(\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k})$.

Δοθέντος ὅτι $\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k}=Y_1-\hat{Y}_1$ ἔχομεν

$$V(\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k})=V(Y_1)+V(\hat{Y}_1)-2Cov(Y_1,\hat{Y}_1)=\sigma_1^2+\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}})-$$
$$-2\sigma_1^2(1-\frac{P}{P_{11}}) = \sigma_1^2\ \frac{P}{P_{11}}$$

ἤτοι τήν σχέσιν $V(\hat{\varepsilon}_{1.23\ldots k})=\sigma_1^2\ \frac{P}{P_{11}}$ (7.63)

Λαμβάνομεν ἐν προκειμένῳ ὑπ'ὄψιν ὅτι εἰς μέν τήν περίπτωσιν τῆς διακυμάνσεως $V(\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k})$ - ἤτοι τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_3,Y_4,\ldots,Y_k$ - τόν ρόλον τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P παίζει ἡ ἐλάσσων ὁρίζουσα $P_{22}$ εἰς δέ τήν περίπτωσιν τῶν $V(\hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k})$ - ἤτοι τῶν μεταβλητῶν $Y_2$ καί $Y_3,Y_4,\ldots,Y_k$ τόν ρόλον τῆς P παίζει ἡ $P_{11}$, δι'ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (7.63) λαμβάνομεν

$$V(\hat{\varepsilon}_{1.34\ldots k})=\sigma_1^2\ \frac{P_{22}}{P_{22.11}} \qquad (7.64)$$

καί
$$V(\hat{\varepsilon}_{2.34\ldots k})=\sigma_2^2\ \frac{P_{11}}{P_{11.22}} \qquad (7.65)$$

Ἡ σχέσις (7.59) - λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι $P_{22.11}=P_{11.22}$ - προκύπτει πλέον δι'ἁπλῆς ἀντικαταστάσεως τῶν ἐξαγομένων (7.62), (7.64) καί (7.65) εἰς τόν τύπον (7.58).

Ἐν προκειμένῳ δέον νά σημειωθῇ ὅτι συντελεστής μερικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_j$ ($j=2,3,\ldots,k$) μετά τήν ἀπαλειφήν τῆς ἐπιδράσεως τῶν κατά περίπτωσιν ὑπολοίπων μεταβλητῶν, δίδεται ὑπό τοῦ τύπου

$$\rho_{1j.23\ldots(j-1)(j+1)\ldots k}=-(-1)^{1+j}\ \frac{P_{1j}}{\sqrt{P_{11}}\sqrt{P_{jj}}} \qquad (7.66)$$

ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς σχέσεως (7.59) καί προκύπτει διά τῆς αὐτῆς ἀκριβῶς διαδικασίας. Ὁ ἀνωτέρω γενικός τύπος (7.66) ἐφαρμοζόμενος εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2,Y_3$ δίδει π.χ. τούς κάτωθι μερικωτέρους τύπους

$$\rho_{12.3} = \frac{\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho^2_{23}}\,\sqrt{1-\rho^2_{13}}} \tag{7.67}$$

$$\text{καί}\quad \rho_{13.2} = \frac{\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho^2_{23}}\,\sqrt{1-\rho^2_{12}}} \tag{7.68}$$

ὅπου $\rho_{12.3}$ εἶναι ὁ συντελεστής (μερικῆς) συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$ μετά τήν ἀπαλειφήν τῆς ἐπ' αὐτῶν ἐπιδράσεως τῆς $Y_3$ καί $\rho_{13.2}$ ὁ συντελεστής μερικῆς συσχετίσεως τῶν $Y_1,Y_3$ μετά τήν ἀπαλειφήν τῆς ἐπιδράσεως τῆς $Y_2$.

Οἱ τελευταῖοι τύποι ἐφαρμοζόμενοι ἐπί τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (7.1) - ἐκ τῶν ὁποίων εἴχομεν $\rho_{12}=0,93$, $\rho_{13}=0,29$ καί $\rho_{23}=0,58$ - δίδουν ἀντιστοίχως

$$\rho_{12.3} = \frac{0,93-0,58\ 0,29}{\sqrt{1-0,58^2}\,\sqrt{1-0,29^2}} = 0,97$$

$$\text{καί}\ \rho_{13.2} = \frac{0,29-0,93\ 0,58}{\sqrt{1-0,58^2}\,\sqrt{1-0,93^2}} = -0,83$$

Σχέσις $\hat{\beta}_{1j.23...(j-1)(j+1)...k}$ καί $\rho_{1j.23...(j-1)(j+1)...k}$

Κατ' ἀναλογίαν τῆς σχέσεως $\hat{\beta}=\rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ἡ ὁποία συνδέει - ὡς εἴδομεν εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἁπλῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως - τόν συντελεστήν γραμμικῆς παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ μέ τόν συντελεστήν συσχετίσεως ρ, θά ἀποδείξωμεν κατωτέρω - προκειμένου περί τῆς πολλαπλῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως - τήν σχέσιν

$$\hat{\beta}_{1j.23\ldots(j-1),(j+1)\ldots k}=\rho_{1j.23\ldots(j-1),(j+1)\ldots k}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_j}\times\frac{\sqrt{P_{jj}}}{\sqrt{P_{11}}},$$

$$j=2,3,\ldots,k \tag{7.69}$$

ὅπου $P_{11}$ καί $P_{jj}$ αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι πρώτης τάξεως ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τό στοιχεῖον (1,1) καί (j,j) τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P. Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως εἶναι ἁπλουστάτη. Πράγματι, ἐκ τοῦ τύπου (7.37) ἔχομεν ὅτι

$$\hat{\beta}_{1j.23\ldots(j-1),(j+1)\ldots k}=-(-1)^{1+j}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_j}\times\frac{P_{1j}}{P_{11}}$$

Ἐξ ἄλλου ὁ τύπος (7.66) δίδει

$$\rho_{1j.23\ldots(j-1)(j+1)\ldots k}=-(-1)^{1+j}\,\frac{P_{1j}}{\sqrt{P_{11}}\sqrt{P_{jj}}}$$

Διά διαιρέσεως τῶν τελευταίων δύο ἰσοτήτων προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος (7.69). Ἐν προκειμένῳ δέον νά γίνῃ μνεία τοῦ γεγονότος ὅτι ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι $P_{11}$ καί $P_{jj}$ εἶναι μή ἀρνητικαί καί κατά συνέπειαν ἡ τετραγωνική ρίζα αὐτῶν ὑφίσταται πάντοτε.

Ἐκ τῆς σχέσεως (7.69) καθίσταται ἐξ ἄλλου προφανές ὅτι ὁ συντελεστής παλινδρομήσεως $\hat{\beta}_{1j.23\ldots(j-1)(j+1)\ldots k}$ εἶναι πάντοτε ὁ μ ό σ η μ ο ς πρός τόν ἀντίστοιχον συντελεστήν συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_j$ ὅταν ἔχει ἤδη ἀπαλειφθῆ ἡ ἐπίδρασις τῶν ὑπολοίπων συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ἤτοι πρός τόν συντελεστήν $\rho_{1j.23\ldots(j-1)(j+1)\ldots k}$ (μερικῆς συσχετίσεως).

Ὁ τύπος (7.69) ἐφαρμοζόμενος εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν μεταβλητῶν $Y_1, Y_2, Y_3$ δίδει τά ἑξῆς:

$$\hat{\beta}_{12.3} = \rho_{12.3} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \times \frac{\sqrt{1-\rho^2_{13}}}{\sqrt{1-\rho^2_{23}}} \tag{7.70}$$

$$\text{καί } \hat{\beta}_{13.2} = \rho_{13.2} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \times \frac{\sqrt{1-\rho^2_{12}}}{\sqrt{1-\rho^2_{23}}} \tag{7.71}$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι - καί γενικώτερον ὁ τύπος (7.69) - ἐπιτρέπουν προφανῶς τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν ὁλικῆς καί μερικῆς συσχετίσεως. Οὕτω, μετά τήν εὕρεσιν τῆς ὁριζούσης συσχετίσεως P καί τόν ὑπολογισμόν τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων $\sigma_j$, $j=1,2,...k$ τῶν ὑπεισερχομένων εἰς τό πρόβλημα καί συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, καθίσταται δυνατόν εἰς τήν πρᾶξιν νά ὑπολογισθοῦν τόσον οἱ συντελεσταί μερικῆς συσχετίσεως ὅσον - ἀμέσως μετά - καί οἱ συντελεσταί παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$ καί κατά συνέπειαν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιστοίχου πολλαπλῆς παλινδρομήσεως.

## Ἕτερος Ὁρισμὸς τοῦ Συντελεστοῦ Μερικῆς Συσχετίσεως

Κλείομεν τό παρόν κεφάλαιον σχολιάζοντες ἕνα δεύτερον ὁρισμόν τοῦ συντελεστοῦ μερικῆς συσχετίσεως, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται πολλάκις εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι ὅμως δυνατόν - ἐάν δέν πληροῦνται ὡρισμέναι προϋποθέσεις - νά ὁδηγήση εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα καί ὡς ἐκ τούτου καλόν εἶναι νά ἀποφεύγεται.

Ὑποτιθεμένου καί πάλιν ὅτι αἱ ὑπεισερχόμεναι εἰς τό πρόβλημα καί συνεξεταζόμεναι μεταβληταί εἶναι αἱ $Y_1, Y_2, ..., Y_k$ ὁ συντελεστής μερικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y_1$, $Y_2$ ὁρίζεται ὡς ὁ συντελεστής συσχετίσεως αὐτῶν ὅταν αἱ ὑπόλοιποι μεταβληταί τηροῦνται σταθεραί.

Ὁ ἐν λόγῳ ὁρισμός ταυτίζεται πρός τόν προηγούμενον ἐάν - καί μόνον ἐάν - ἡ δ ε σ μ ε υ μ έ ν η σ υ γ κ α τ α ν ο μ ή τῶν μεταβλητῶν $Y_1$ καί $Y_2$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν ὑπολοίπων μεταβλητῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$ ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν αἱ συγκατανομαί $Y_1, Y_2$ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς διαφόρους συνδυασμούς τιμῶν τῶν $Y_3, Y_4, \ldots, Y_k$ εἶναι ταυτόσημοι. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ὁ δεύτερος αὐτός ὁρισμός δέν ἔχει, ὡςεἶναι εὐνόητον, νόημα, τυχόν δέ ἐφαρμογή αὐτοῦ εἶναι δυνατόν νά ὁδηγήσῃ εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα, ὡς ἄλλωστε προκύπτει ἐκ τοῦ κατωτέρω - πίναξ (7.2) - ἐνδεικτικοῦ παραδείγματος εἰς τό ὁποῖον συνεξετάζονται τρεῖς μεταβληταί.

Πίναξ 7.2

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_1^2$ | $X_2^2$ | $X_3^3$ | $X_1X_2$ | $X_1X_3$ | $X_2X_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 1 | 4 | 9 | 1 | 6 | 2 | 3 |
| | 3 | 4 | 1 | 9 | 16 | 1 | 12 | 3 | 4 |
| | 5 | 8 | 1 | 25 | 64 | 1 | 40 | 5 | 8 |
| Μερικά Σύνολα | 10 | 15 | 3 | 38 | 89 | 3 | 58 | 10 | 15 |
| | 4 | 6 | 2 | 16 | 36 | 4 | 24 | 8 | 12 |
| | 6 | 7 | 2 | 36 | 49 | 4 | 42 | 12 | 14 |
| | 10 | 7 | 2 | 100 | 49 | 4 | 70 | 20 | 14 |
| Μερικά Σύνολα | 20 | 20 | 6 | 152 | 134 | 12 | 136 | 40 | 40 |
| Γενικά Σύνολα | 30 | 35 | 9 | 190 | 223 | 15 | 194 | 50 | 55 |

Ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν $X_1, X_2$ ὅταν $X_3 = 1$ εἶναι

$$\rho_{12(X_3=1)} = \frac{58 - \frac{10\times 15}{3}}{\sqrt{38 - \frac{10^2}{3}}\sqrt{89 - \frac{15^2}{3}}} = 0,99$$

Ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν $X_1, X_2$ ὅταν $X_3 = 2$ εἶναι

$$\rho_{12(X_3=1)} = \frac{136 - \frac{20\times 20}{3}}{\sqrt{152 - \frac{20^2}{3}}\sqrt{134 - \frac{20^2}{3}}} = 0,75$$

Ἐξ ἄλλου, ὑπολογίζοντες ἐκ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων - χρῆσις γενικῶν συνόλων - τούς συντελεστάς ὁλικῆς συσχετίσεως καί ἐν συνεχείᾳ - δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (7.67) - τόν συντελεστήν μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$ ἔχομεν τά ἑξῆς:

$$\rho_{12} = \frac{194 - \frac{30\times 35}{6}}{\sqrt{190 - \frac{30^2}{6}}\sqrt{223 - \frac{35^2}{6}}} = 0,69$$

$$\rho_{13} = \frac{50 - \frac{30\times 9}{6}}{\sqrt{190 - \frac{30^2}{6}}\sqrt{15 - \frac{9^2}{6}}} = 0,65$$

$$\rho_{23} = \frac{55 - \frac{35\times 9}{6}}{\sqrt{223 - \frac{35^2}{6}}\sqrt{15 - \frac{9^2}{6}}} = 0,46$$

καί κατά συνέπειαν - ἐκ τοῦ (7.67) -

$$\rho_{12.3} = \frac{0,69-0,65\times 0,46}{\sqrt{1-0,46^2}\sqrt{1-0,65^2}} = 0,57$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανής τόσον ἡ διαφορά τῶν δύο ὁρισμῶν καί τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων, ὅσον καί ἡ ἀδυναμία ἐφαρμογῆς τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ καθ'ἑαυτόν καθ'ὅσον αἱ προκύπτουσαι τιμαί τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως $\rho_{12}$ ἀντιστοίχως πρός τάς τιμάς $X_3=1$ καί $X_3=2$ εἶναι διάφοροι μεταξύ των (0,99 καί 0,75).

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

# ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΙ ΣΕΙΡΑΙ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΑΙ

(Μελέτη τῆς Διαχρονικῆς Ἐξελίσεως Μιᾶς ἢ Περισσοτέρων Ὁμοειδῶν Μεταβλητῶν)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8

# ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΙ ΣΕΙΡΑΙ

## 8.1 Γενικαὶ Ἔννοιαι καὶ Ὁρισμοὶ

Εἰς τό πρῶτον καί δεύτερον μέρος τοῦ παρόντος μᾶς ἀπησχόλησεν κατά βάσιν ἡ μελέτη ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός μίαν ἤ περισσοτέρας συγχρόνως μεταβλητάς - μονομεταβλητοί καί πολυμεταβλητοί στατιστικοί πληθυσμοί - ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ διερεύνησις ἀριθμητικῶν δεδομένων - στατιστικῶν στοιχείων - ἀναφερομένων εἰς ἕν ἤ περισσότερα χαρακτηριστικά - ἰδιότητες κλπ - τῶν ἐπί μέρους μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη ὅμως τά διά στατιστικῶν μεθόδων μελετώμενα δεδομένα εἶναι δυνατόν νά ἀναφέρωνται ἐπίσης - καί τοῦτο εἶναι σύνηθες εἰς τήν πρᾶξιν - εἰς χαρακτηριστικά διαφόρων κοινωνικῶν, οἰκονομικῶν ἤ ἄλλων φαινομένων καί καταστάσεων, ὡς π.χ. αἱ τιμαί καί ὁ ὄγκος τῆς παραγωγῆς διαφόρων προϊόντων, ἡ τουριστική κίνησις ἑνός τόπου, οἱ γάμοι καί τά διαζύγια, τά ἐργατικά καί τά τροχαῖα ἀτυχήματα, ἡ βροχόπτωσις καί ἡ θερμοκρασία κ.ο.κ.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς οἱ ἀντικειμενικοί σκοποί τῆς ὅλης στατιστικῆς μελέτης εἶναι συνήθως ἡ π ε ρ ι γ ρ α φ ή τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑπό διερεύνησιν φαινομένου δ ι ά μ έ σ ο υ τ ο ῦ χ ρ ό ν ο υ ἤ ὅπως λέγομεν ἡ περιγραφή τῆς δ ι α χ ρ ο ν ι κ ῆ ς ἐ ξ ε λ ί ξ ε ω ς τῶν ὑπό μελέτην χαρακτηριστικῶν, ἐν συνεχείᾳ δέ ἡ π ρ ό β λ ε ψ ι ς τῆς μελλοντικῆς διαμορφώσεως αὐτῶν βασιζομένη ἐπί τῆς κατά τό π α ρ ε λ θ ό ν ἐν γένει συμπεριφορᾶς των.

Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά μᾶς ἀπασχολήσουν αἱ στατιστικαί μέθοδοι αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν μελέτην τῆς κατά τό π α ρ ε λ θ ό ν δ ι α χ ρ ο ν ι κ ῆ ς ἐ ξ ε λ ί ξ ε ω ς ὡς καί τῆς π ρ ο β λ έ ψ ε ω ς τῆς μ ε λ λ ο ν-

*τικῆς* διαμορφώσεως τῶν χαρακτηριστικῶν ἑνός φαινομένου - ἤ μιᾶς καταστάσεως - ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι ἕκαστον τῶν ἐν λόγῳ χαρακτηριστικῶν - ἤ γενικώτερον *μεταβλητῶν* - θεωρεῖται καί μελετᾶται *κεχωρισμένως*.

Συγκεκριμένως, εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ, ὑποθέτομεν ὅτι ὁ μελετητής ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τάς κατά τό παρελθόν τιμάς μιᾶς συνεχοῦς ἤ ἀσυνεχοῦς ποσοτικῆς μεταβλητῆς - ἐμπειρικά δηλαδή δεδομένα ἀναφερόμενα εἰς τό ὑπό μελέτην χαρακτηριστικόν, ἰδιότητα κλπ - ἐπιθυμεῖ δέ - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως - νά προσδιορίσῃ τήν νομοτέλειαν ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν αὐτῆς, μέ ἀντικειμενικόν σκοπόν

(i) τήν συνοπτικήν *περιγραφήν* τῆς *μέχρι τοῦδε διαχρονικῆς ἐξελίξεως* τῆς ἐν λόγῳ μεταβλητῆς καί

(ii) τήν *πρόβλεψιν* - ἔστω καί κατά προσέγγισιν - τῆς *μελλοντικῆς συμπεριφορᾶς* της.

Τήν ὑπό μελέτην μεταβλητήν - θεωρουμένην ἐν προκειμένῳ ὡς συνάρτησιν τοῦ χρόνου $t$ - θά συμβολίζωμεν, ὡς συνήθως, διά τοῦ $Y$ τάς τιμάς δέ αὐτῆς - τά διαθέσιμα δηλαδή ἐμπειρικά δεδομένα - διά $y_1, y_2, \ldots, y_N$ ἤ συνοπτικῶς $y_t$ ὅπου $t=1,2,\ldots,N$ συμβολίζει τήν χρονικήν *στιγμήν* ἤ *περίοδον* πραγματοποιήσεως τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς.

Ἡ ἀκολουθία τῶν ἐν λόγῳ ἐμπειρικῶν δεδομένων ἤ ἄλλως τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς $Y$ λαμβανομένων εἰς προκαθωρισμένα χρονικά σημεῖα - συνήθως ἰσαπέχοντα - ἤ ἀναφερομένων εἰς διαδοχικάς περιόδους - κατά κανόνα τῆς αὐτῆς διαρκείας - καλεῖται *χρονολογική σειρά*.

Ἡ κατάλληλος συνοπτική *παρουσίασις* - τῶν δεδομένων - μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς εἴτε ὑπό μορφήν ἑνός χρονολογικοῦ στατιστικοῦ πίνακος - *χρο*-

ν ο λ ο γ ι κ α ί κ α τ α τ ά ξ ε ι ς - εἴτε ὑπό
μορφήν μιᾶς ἀντιστοίχου γραφικῆς ἀπεικονίσεως - χρο-
ν ο γ ρ ά μ μ α τ α ἤ χρονολογικά διαγράμματα - ἀ-
ποτελεῖ καί ἐν προκειμένῳ - ὅπως αἱ διάφοροι κατα-
νομαί συχνότητος εἰς τήν διερεύνησιν πληθυσμιακῶν χα-
ρακτηριστικῶν - τό πρῶτον βῆμα διά τήν κατανόησιν καί
ἀξιολόγησιν τῶν ὑφισταμένων στοιχείων, συνήθως δέ καί
τήν βασικήν προϋπόθεσιν διά τήν περαιτέρω στατιστι-
κήν ἀνάλυσιν αὐτῶν. Συγκεκριμένα παραδείγματα χρ ο-
ν ο λ ο γ ι κ ῶ ν κ α τ α τ ά ξ ε ω ν καί ἀντιστοί-
χων χ ρ ο ν ο γ ρ α μ μ ά τ ω ν, αἱ βασικαί μέθοδοι
καταρτίσεως αὐτῶν ὡς καί ὁ τρόπος ἀντιμετωπίσεως συ-
ναφῶν προβλημάτων παρατίθενται ἀμέσως κατωτέρω.

### 8.1.1 Χρονολογικαί Κατατάξεις

Χ ρ ο ν ο λ ο γ ι κ ή κ α τ ά τ α ξ ι ς λέγε-
ται ἡ παρουσίασις ἀριθμητικῶν δεδομένων - τιμῶν μιᾶς
μεταβλητῆς ἀναφερομένων εἰς ἕν φαινόμενον ἤ μίαν κα-
τάστασιν - ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρός τάς χρονικάς στιγμάς
ἤ περιόδους πραγματοποιήσεώς των. Παραδείγματα χρο-
νολογικῶν κατατάξεων ἀποτελοῦν οἱ κατωτέρω στατιστι-
κοί πίνακες.

Πίναξ 8.1

Κατά κεφαλήν ἀκαθάριστον ἐθνικόν εἰσόδημα

| Ἔτη (t) | Εἰς τρεχούσας τιμάς Y(εἰς $) | Εἰς σταθεράς τιμάς (1958) Y (εἰς $) |
|---|---|---|
| 1960 | 378 | 365 |
| 61 | 424 | 401 |
| 62 | 446 | 409 |
| 63 | 485 | 433 |
| 64 | 540 | 469 |
| 65 | 606 | 509 |
| 66 | 659 | 533 |
| 67 | 705 | 558 |
| 68 | 754 | 588 |
| 69 | 839 | 637 |
| 1970 | 936 | 707 |
| 71 | 1.038 | 766 |
| 72 | 1.198 | 846 |
| 73 | 1.543 | 920 |

Πηγή: Ὑπηρεσία Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν

Πίναξ 8.2

Πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας δι'οἰκιακήν χρῆσιν
(εἰς ἑκατομμύρια ΩΧΒ)

| ΕΤΗ | ΙΑΝ. | ΦΕΒ. | ΜΑΡ. | ΑΠΡ. | ΜΑΪ. | ΙΟΥΝ. | ΙΟΥΛ. | ΑΥΓ. | ΣΕΠ. | ΟΚΤ. | ΝΟΕΜ. | ΔΕΚ. | ΕΤΗΣΙΑ ΣΥΝΟΛΑ | ΜΕΣΟΙ ΜΗΝ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | 126 | 142 | 142 | 137 | 125 | 121 | 113 | 106 | 109 | 114 | 131 | 153 | 1.519 | 126,6 |
| 69 | 174 | 179 | 159 | 158 | 154 | 140 | 125 | 121 | 122 | 131 | 148 | 162 | 1.773 | 147,8 |
| 1970 | 187 | 196 | 179 | 171 | 167 | 159 | 144 | 139 | 139 | 149 | 172 | 190 | 1.992 | 166,0 |
| 71 | 220 | 226 | 207 | 206 | 198 | 182 | 164 | 156 | 158 | 171 | 184 | 219 | 2.291 | 190,9 |
| 72 | 261 | 276 | 248 | 236 | 222 | 202 | 190 | 179 | 186 | 195 | 227 | 256 | 2.678 | 223,2 |

Πηγή: Δημοσία 'Επιχείρησις 'Ηλεκτρισμοῦ (ΔΕΗ)

Πίναξ 8.3

Ἐξαγωγαί τοματοπολτοῦ (ποσότης εἰς τόννους)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ἔτη (t): | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 |
| Ποσότης(Y): | 300 | 600 | 500 | 400 | 2.000 | 4.000 | 4.400 |
| Ἔτη (t): | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 |
| Ποσότης (Y): | 8.000 | 11.800 | 28.600 | 33.900 | 32.800 | 57.600 | 59.500 |

Πηγή: Ἐθνική Στατιστική Ὑπηρεσία τῆς Ἑλλάδος

Τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.1) δίδουν μία εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τῆς χώρας διά τήν χρονικήν περίοδον 1960-73. Ἐν προκειμένῳ δέον νά σημειωθοῦν τά ἑξῆς: Κατ' ἀρχήν, ἀντί τοῦ συνολικοῦ ἐτησίου ἀκαθαρίστου εἰσοδήματος παρατίθεται τό κ α τ ά κ ε φ α λ ή ν τοιοῦτον ἀπαλειφομένης κατ' αὐτόν τόν τρόπον τῆς ἐπιδράσεως τῆς - κατά τήν ἐν λόγῳ χρονικήν περίοδον - αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας καί καθισταμένης οὕτω δυνατῆς τῆς συγκρίσεως τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς σχετικῆς χρονολογικῆς σειρᾶς.

Ἡ ἐν λόγῳ διαδικασία, γνωστή ὡς ἀ π α λ ε ι φ ή τ ῆ ς ἐ π ι δ ρ ά σ ε ω ς π λ η θ υ σ μ ι α κ ῶ ν μ ε τ α β ο λ ῶ ν, ἐφαρμόζεται εὐρύτατα εἰς τήν πρᾶξιν καί εἶναι ἀπαραίτητος, ὡς εἶναι εὐνόητον, διά τήν ἐπίτευξιν συγκρισιμότητος τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῶν σχετικῶν χρονολογικῶν σειρῶν. Ἐξ ἄλλου, τό ὕψος τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος - καί κατά συνέπειαν καί τοῦ κατά κεφαλήν τοιούτου - ἐπιρρεάζεται, ὡς εἶναι φυσικόν, ἐκ τῶν ἀπό ἔτους εἰς ἔτος μ ε τ α β ο λ ῶ ν τ ῶ ν τ ι μ ῶ ν τῶν διαφόρων ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν, ὡς ἐκ τούτου δέ πρός ἀξιολόγησιν τῶν π ρ α γ μ α τ ι κ ῶ ν διαχρονικῶν μεταβολῶν τοῦ ἐν λόγῳ μεγέθους ἀπαιτεῖται ἡ ἀπαλειφή τῶν ὡς ἄνω τιμαριθμικῶν ἐπιδράσεων. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν τό ἐθνικόν εἰσόδημα - ἤ γενικώτερον ἡ κατά περίπτωσιν ὑπό μελέτην μεταβλητή - ὑπολογίζεται εἰς σ τ α θ ε ρ ά ς τιμάς - ὅπως ἐν προκειμένῳ ἡ τρίτη στήλη τοῦ πίνακος - ἤ αἱ εἰς τρεχούσας τιμάς ἐκφράσεις τοῦ ὑπό μελέτην μεγέθους διορθοῦνται - συνήθως διά διαιρέσεως αὐτῶν - τῇ βοηθείᾳ καταλλήλων δεικτῶν οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζουν τήν ἀντίστοιχον μεταβολήν τῶν τιμῶν, ἐφαρμοζομένης μιᾶς διαδικασίας ἡ ὁποία εἶναι γνωστή ὡς ἀποπληθωρισμός.

Εἰς τόν πίνακα (8.2) παρατίθενται αἱ πωλήσεις ἠλεκτρικοῦ ρεύματος δι'οἰκιακήν χρῆσιν αἱ ὁποῖαι ἐπραγματοποιήθησαν ὑπό τῆς ΔΕΗ διά τήν χρονικήν περίοδον 1968-72 (κατά μῆνα). Πρός ἐπίτευξιν συγκρισιμότητος τῶν μηνιαίων αὐτῶν δεδομένων - καί γενικώτερον δεδομένων ἀναφερομένων εἰς χρονικάς περιόδους διαφόρου διαρκείας, ὡς π.χ. δεδομένων παραγωγῆς ἑνός προϊόντος ἐπιτευχθείσης εἰς ποικίλλοντα ἀριθμόν ὡρῶν, ἡμερῶν κλπ - ἀπαιτεῖται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ διόρθωσις τῶν ἐπιδράσεων αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς τήν διαφοράν - διαρκείας - τῶν ἀντιστοίχων περιόδων (π.χ. Φεβρουάριον 28 ἡμέραι, Μάρτιος 31 κ.ο.κ.).

Αἱ διορθώσεις αὐτοῦ τοῦ εἴδους, γνωσταί ἐν γένει ὡς ἡμερολογιακαί διορθώσεις, ἐπιτυγχάνονται συνήθως διά καταλλήλων πολλαπλασιασμῶν καί διαιρέσεων καί ἀναγωγῆς ἐν τελικῇ ἀναλύσει τῶν δεδομένων εἰς περιόδους τῆς αὐτῆς διαρκείας (π.χ. εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν εἰς μῆνας τῶν 30 ἡμερῶν).

Πέραν τῶν παρατιθεμένων ἀνωτέρω διορθώσεων - πληθυσμιακῶν, ἀποπληθωρισμοῦ, ἡμερολογιακῶν κλπ - αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ σημαντικώτεραι καί αἱ συνηθέστερον ἀπαιτούμεναι εἰς τήν πρᾶξιν, εἶναι δυνατόν πρό τῆς περαιτέρω ἀναλύσεως τῶν δεδομένων μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς νά εἶναι ἀπαραίτητοι καί ἄλλου εἴδους διορθώσεις ὡς π.χ. ὀφειλόμεναι εἰς τόν τρόπον συλλογῆς τῶν πληροφοριῶν, τήν ἀλλαγήν τῶν μονάδων μετρήσεως κ.ο.κ. Διά τόν λόγον αὐτόν πρό τῆς ἀναλύσεως τῶν δεδομένων καί κατά τό στάδιον τῆς προπαρασκευῆς αὐτῶν ὁ μελετητής δέον νά εἶναι ἐξαιρετικά προσεκτικός.

Τέλος, τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.3) ἀναφερόμενα εἰς τάς ἐξαχθείσας ποσότητας τοματοπολτοῦ κατά τά ἔτη 1960-73 παρατίθενται ἐν προκειμένῳ ὡς ἕν παπάδειγμα χρονολογικῆς σειρᾶς διά τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν τῆς ὁποίας ἀπαιτεῖται, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ἡ χρῆσις τῶν καλουμένων ἡ μ ι λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ῶ ν διαγραμμάτων ἀντί τῶν συνήθως χρησιμοποιουμένων ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ν τοιούτων.

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι πρός πληρεστέραν κατανόησιν καί ὀρθολογικωτέραν ἀξιολόγησιν τῆς μελέτης τῶν διαδοχικῶν μεταβολῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς, ὑπολογίζονται πολλάκις ἐκ τῶν παρατιθεμένων εἰς ἕνα χρονολογικόν πίνακα ἀπολύτων μεγεθῶν καί ἀντίστοιχα σχετικά - ποσοστιαῖα - μεγέθη ἐκ τῶν ὁποίων καθίσταται ἀμέσως φανερά τόσον ἡ σχετική διαχρονική ἐξέλιξις τῆς μεταβλητῆς ὅσον καί αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαί αὐτῆς ἀπό περιόδου εἰς περίοδον. Πρός ὑπολογισμόν τῶν ἐν λόγῳ βοηθητικῶν μεγεθῶν αἱ τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς ἐκφράζονται συνήθως εἴτε εἰς ποσοστά τῆς πρώτης ἐξ αὐτῶν, εἴτε εἰς ποσοστά τῆς ἀμέσως προηγουμένης. Ἐκ τῶν τελευταίων τούτων ποσοστῶν εἶναι δυνατόν ἐπίσης νά εὑρεθῇ ἡ μέση - ποσοστιαία - μεταβολή τῆς μεταβλητῆς - ἀπό τῆς μιᾶς εἰς τήν ἑπομένην χρονικήν στιγμήν ἤ περίοδον - δι' ὁλόκληρον τό ὑπό μελέτην διάστημα.

Πρός κατανόησιν τῆς ἐφαρμοζομένης ἐν προκειμένῳ διαδικασίας τοιαῦτα σ χ ε τ ι κ ά μεγέθη ὑπελογίσθησαν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων μεγεθῶν τοῦ πίνακος (8.1) καί παρατίθενται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (8.1α)

Ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος (8.1α) καθίσταται ἀμέσως προφανές ὅτι μεταξύ τῶν ἐτῶν 1960 καί 1973 τό κατά κεφαλήν ἀκαθάριστον ἐθνικόν εἰσόδημα εἰς τρεχούσας μέν τιμάς ἐτετραπλασιάσθη (περίπου) ἐνῶ εἰς σταθεράς τοιαύτας ἁπλῶς ὑπερεδιπλασιάσθη (ἔγινε 2,5 περίπου φοράς). Ἐξ ἄλλου, ἡ μέση ἐτησία αὔξησις τοῦ ἐν λόγῳ μεγέθους - ὑπολογιζομένη ἐν προκειμένῳ ὡς μέσος ἀριθμητικός τῶν πραγματοποιηθεισῶν ἀντιστοίχως αὐξήσεων - ἦτο εἰς τρεχούσας μέν τιμάς 11,5% (περίπου) εἰς σταθεράς δέ τοιαύτας 7,5% (περίπου).

Πίναξ 8.1α

Ἐξέλιξις (ποσοστιαία) τοῦ κατά κεφαλήν ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος

| Ἔτη | Εἰς τρεχούσας τιμάς (Ἔτος 1960=100 | Εἰς τρεχούσας τιμάς Ἐτήσιαι Μεταβολαί | Εἰς σταθεράς τιμάς (1958) (Ἔτος 1960=100) | Εἰς σταθεράς τιμάς (1958) Ἐτήσιαι Μεταβολαί |
|---|---|---|---|---|
| 1960 | 100 | - | 100 | - |
| 61 | 112 | 12 | 110 | 10 |
| 62 | 118 | 5 | 112 | 2 |
| 63 | 128 | 9 | 119 | 6 |
| 64 | 143 | 11 | 129 | 8 |
| 65 | 160 | 12 | 140 | 9 |
| 66 | 175 | 9 | 146 | 5 |
| 67 | 186 | 7 | 153 | 5 |
| 68 | 200 | 7 | 161 | 5 |
| 69 | 220 | 12 | 175 | 8 |
| 1970 | 247 | 12 | 194 | 11 |
| 71 | 274 | 11 | 210 | 8 |
| 72 | 318 | 15 | 232 | 11 |
| 73 | 408 | 27 | 252 | 9 |
| | | 149 | | 97 |

### 8.1.2 Χρονογράμματα

Ἡ γραφική ἀπεικόνισις τῶν χρονολογικῶν σειρῶν - ἐκπεφρασμένων εἴτε εἰς ἀπόλυτα μεγέθη ὡς ὁ πίναξ (8.1) κλπ εἴτε εἰς σχετικά τοιαῦτα ὡς ὁ πίναξ (8.1α) - γίνεται δι'ὡρισμένων εἰδικῶν διαγραμμάτων τά ὁποῖα εἶναι γνωστά ὡς χρονογράμματα, ἤ χρονοδιαγράμματα ἤ τέλος χρονολογικά διαγράμματα. Εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν χρησιμοποιοῦνται συνήθως - λόγῳ τῆς ἁπλότητος τῆς κατασκευῆς αὐτῶν καί τῆς εὐκολίας κατανοήσεώς των - διαγράμματα εἰς τά ὁποῖα διά τήν ἀπεικόνισιν τόσον τοῦ χρόνου t ὅσον καί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς Y ἐφαρμόζεται ἡ ἀρχή τῆς ἀναλογίας, γίνεται δηλαδή ἀναλογική - καί φυσικά ὑπό κλίμακα - παράστασις αὐτῶν διατηρουμένων τῶν μεταξύ των πραγματικῶν μεγεθῶν σχέσεων ἀναλλοιώτων (Ἀριθμητικά Διαγράμματα).

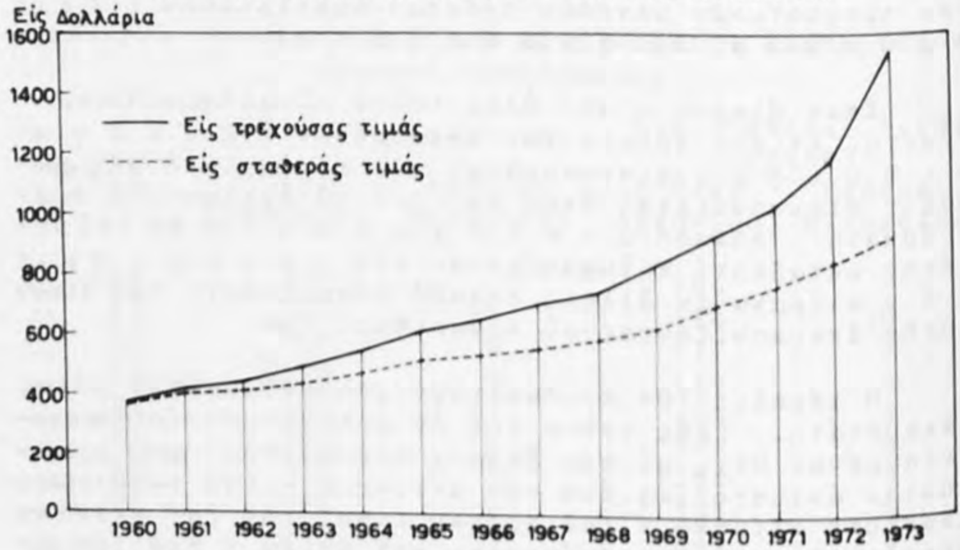
Σπανιώτερον - καί ὅπου τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον - γίνεται ἐπίσης χρῆσις τῶν καλουμένων ἡμιλογαριθμικῶν διαγραμμάτων εἰς τά ὁποῖα ὁ μέν χρόνος t ἀπεικονίζεται ὅπως καί εἰς τά ἀριθμητικά διαγράμματα - δηλαδή ἀναλογικῶς - ἡ δέ ὑπό μελέτην μεταβλητή Y ἐμφανίζεται εἰς λογαριθμικήν κλίμακα ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἀντί τῶν τιμῶν αὐτῆς ἀπεικονίζονται οἱ λογαριθμοί των.

Ἡ χάραξις τῶν ἀριθμητικῶν χρονογραμμάτων εἶναι ἁπλουστάτη. Πρός τοῦτο εἰς ἕν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων Oty, οἱ δύο ἄξονες τοῦ ὁποίου χρησιμοποιοῦνται ἀντιστοίχως διά τήν μέτρησιν - ὑπό κατάλληλον ἑκάστοτε κλίμακα - τοῦ χρόνου t καί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς Y, ἀπεικονίζονται κατ'ἀρχήν - διά τῶν καταλλήλων σημείων - τά διαθέσιμα ἀριθμητικά ζεύγη $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$, ἐν συνεχείᾳ δέ τά διαδοχικά σημεῖα ἑνοῦνται δι'εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἡ οὕτω προκύπτουσα τεθλασμένη - ἐν γένει - γραμμή ἀποτελεῖ τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν τῆς ἀντιστοίχου χρονολογικῆς σειρᾶς καί λέγεται χρονόγραμμα (ἀριθμητικόν). Τά ἀριθμητικά χρονογράμματα τά ὁποῖα ἀπεικονίζουν τάς χρονολογικάς σειράς τῶν πινάκων (8.1) καί (8.2) παρατίθενται κατωτέρω εἰς τά σχήματα (8.1) καί (8.2) ἀντιστοίχως.

Ἀντιθέτως, τόσον ἡ χάραξις ὅσον καί ἡ κατανόησις καί ἀξιοποίησις τῶν ἡμιλογαριθμικῶν διαγραμμάτων εἶναι κάπως πολυπλοκωτέρα. Ἐν προκειμένῳ εὑρίσκονται κατ'ἀρχήν οἱ λογάριθμοι - συνήθως οἱ δεκαδικοί - τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς $\log y_t$, $t=1,2,\ldots,N$ ἐν συνεχείᾳ δέ τά ἀριθμητικά ζεύγη $(t,\log y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ ἀπεικονίζονται εἰς ἕν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων εἰς τούς ἄξονας τοῦ ὁποίου μετροῦνται ἀντιστοίχως ὁ χρόνος t καί οἱ λογάριθμοι τῆς Y.

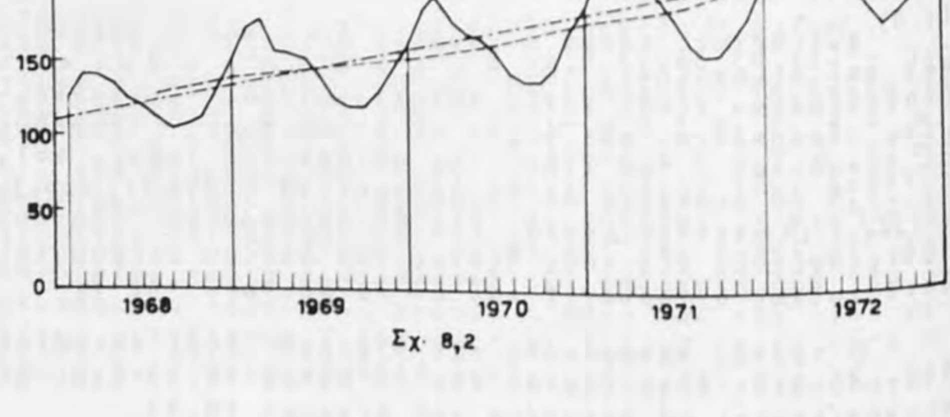
Ὁ τρόπος κατασκευῆς καί ἡ μορφή ἑνός τοιούτου διαγράμματος ἐμφαίνονται εἰς τό σχῆμα (8.3) ὅπου ἀπεικονίζονται τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.3).

ΚΑΤΑ ΚΕΦΑΛΗΝ ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟΝ ΕΘΝΙΚΟΝ ΕΙΣΟΔΗΜΑ

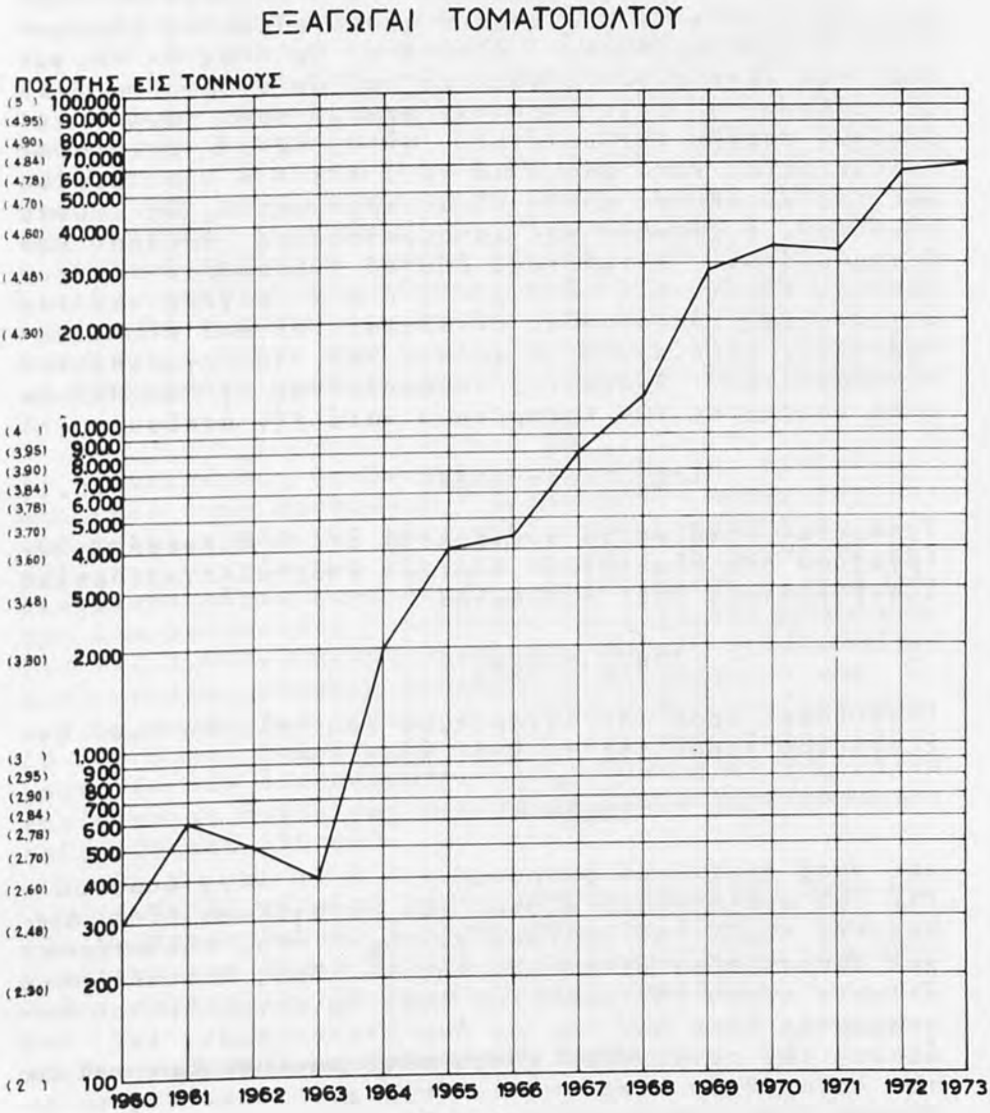



Σχ. 8,1

ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΔΙ'ΟΙΚΙΑΚΗΝ ΧΡΗΣΙΝ




Σχ. 8,2


ΕΞΑΓΩΓΑΙ ΤΟΜΑΤΟΠΟΛΤΟΥ
ΠΟΣΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟΝΝΟΥΣ
(5) 100.000
(4.95) 90.000
(4.90) 80.000
(4.84) 70.000
(4.78) 60.000
(4.70) 50.000
(4.60) 40.000
(4.48) 30.000
(4.30) 20.000
(4) 10.000
(3.95) 9.000
(3.90) 8.000
(3.84) 7.000
(3.78) 6.000
(3.70) 5.000
(3.60) 4.000
(3.48) 5.000
(3.30) 2.000
(3) 1.000
(2.95) 900
(2.90) 800
(2.84) 700
(2.78) 600
(2.70) 500
(2.60) 400
(2.48) 300
(2.30) 200
(2) 100
1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973

Σχ. 8.3

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ ἐπιλογή τοῦ καταλληλοτέρου κατά περίπτωσιν χρονογράμματος (ἀριθμητικοῦ ἤ ἡμιλογαριθμικοῦ) ἐξαρτᾶται ἀφ'ἑνός ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων καί ἀφ'ἑτέρου ἐκ τῶν ἐπιδιώξεων τοῦ μελετητοῦ καί γενικώτερον τῶν ἀντικειμενικῶν σκοπῶν τῆς μελέτης. Οὕτω, ἐάν ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται κατά βάσιν διά τά ἀ π ό λ υ τ α μεγέθη καί τάς μεταβολάς αὐτῶν εἶναι προτιμητέα, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ χάραξις καί χρησιμοποίησις ἀριθμητικῶν διαγραμμάτων. Ἀντιθέτως, ἐάν τό ἐνδιαφέρον συγκεντροῦται κυρίως εἰς τά σ χ ε τ ι κ ά μεγέθη καί τάς ἀντιστοίχους ποσοστιαίας μεταβολάς τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς, ἐνδείκνυται ἡ χρῆσις τῶν ἡμιλογαριθμικῶν διαγραμμάτων. Πράγματι, λαμβανομένης ὑπ'ὄψιν τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν λογαρίθμων κατά τήν ὁποίαν

$$\log\frac{\alpha}{\beta} = \log\alpha - \log\beta \tag{8.1}$$

συνάγεται εὐκόλως τό συμπέρασμα ὅτι ἡ διαφορά τῶν τεταγμένων δύο οἱωνδήποτε σημείων ἑνός ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος, ἤτοι ἡ διαφορά

$$\log y_{t'} - \log y_{t''}$$

ἰσοδυναμεῖ πρός τόν λογάριθμον τοῦ πηλίκου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς Y, ἤτοι πρός τόν

$$\log\frac{y_{t'}}{y_{t''}}$$

καί κατά συνέπειαν μετρουμένη - ἡ ἐν λόγῳ διαφορά - ἐπί τοῦ ἀντιστοίχου ἄξονος τῶν τεταγμένων δίδει ἀμέσως τήν τιμήν τοῦ πηλίκου $y_{t'}:y_{t''}$ ἤτοι τήν ἀντίστοιχον ποσοστιαίαν μεταβολήν τῆς Y. Πρός διευκόλυνσιν ἄλλωστε τόσον τῆς χαράξεως ἑνός ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος ὅσον καί τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν, ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων αὐτοῦ τίθενται συνήθως - πέραν τῶν λογαρίθμων - καί αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς μεταβλητῆς (ἴδε διάγραμμα σχ. 8.3).

Ἐξ ἄλλου, εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις ἡ χάραξις ἡμιλογαριθμικῶν διαγραμμάτων - ἀντί ἀριθμητικῶν τοιούτων - καθίσταται ἀναγκαία ἐκ τῆς φύσεως τῶν δεδομένων. Συγκεκριμένως, ἐάν μεταξύ τῶν ὅρων τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς - καί γενικώτερον μεταξύ τῶν πρός ἀπεικόνισιν δεδομένων περιλαμβάνονται σχετικῶς μικρά καί συγχρόνως πολύ μεγάλα τοιαῦτα ἡ ἀπεικόνισις αὐτῶν εἰς ἕν ἀριθμητικόν διάγραμμα καθίσταται οὐσιαστικῶς ἀδύνατος. Πράγματι, ἐάν ἡ κλίμαξ - ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων - ἐπιλεγῆ κατά τρόπον ὥστε νά παρίστανται ἱκανοποιητικῶς τά μικρά μεγέθη ἡ παράστασις τῶν μεγάλων τοιούτων ἐκφεύγει τῶν πλαισίων ἑνός συνήθους διαγράμματος. Ὁμοίως, ἐάν ἡ κλίμαξ ἐπιλεγῆ μέ βάσιν τά μεγάλα μεγέθη, ἡ παράστασις τῶν μικρῶν τοιούτων ἐκφυλίζεται καθ'ὅσον τά ἀντίστοιχα σημεῖα θά εὑρίσκωνται σχεδόν ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Τοῦτο καθίσταται προφανές ἐάν θελήση τις νά ἀπεικονίση ἀριθμητικῶς τά δεδομένα τοῦ πίνακος(8.3).

Ἀντιθέτως, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι δεκαπλασιαζομένου ἑνός ἀριθμοῦ ὁ - δεκαδικός - λογάριθμος αὐτοῦ ἁπλῶς αὐξάνεται κατά μία μονάδα, συνάγεται εὐκόλως τό συμπέρασμα ὅτι εἰς τό αὐτό ἡμιλογαριθμικόν διάγραμμα εἶναι δυνατόν νά ἀπεικονισθοῦν - κατά τρόπον ἱκανοποιητικόν - δεδομένα ποικίλλοντα μεταξύ μιᾶς (1) καί 1.000.000.000 μονάδων - δηλαδή πολύ μικρά καί πολύ μεγάλα δεδομένα θεωρούμενα συγχρόνως - καθ' ὅσον οἱ λογάριθμοι αὐτῶν ποικίλλουν ἀντιστοίχως μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 9. Τοῦτο ἄλλωστε καθίσταται προφανές ἐκ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος (8.3), ὅπου παρίστανται συγχρόνως μεγέθη τά ὁποῖα κυμαίνονται μεταξύ 100 καί 100.000.

Διά τήν χάραξιν τόσον τῶν ἀριθμητικῶν ὅσον καί τῶν ἡμιλογαριθμικῶν διαγραμμάτων ὑφίστανται εἰς τό ἐμπόριον κατάλληλα ἔντυπα (τετραγωνισμένος ἀριθμητικός χάρτης καί ἡμιλογαριθμικός χάρτης).

## 8.2 Στατιστική Ἀνάλυσις Χρονολογικῶν Σειρῶν

Ἡ μελέτη τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως μιᾶς μεταβλητῆς - γενομένη, ὡς εἴδομεν, κατ'ἀρχήν εἴτε διά τῆς ἐξετάσεως τῶν δεδομένων ἑνός χρονολογικοῦ στατιστικοῦ πίνακος, εἴτε διά τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ καταλλήλου κατά περίπτωσιν χρο-ν ο γ ρ ά μ μ α τ ο ς - ἀποκαλύπτει κατά κανόνα ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀντιστοίχου χρονολογικῆς σειρᾶς - αἱ διαδοχικαί δηλαδή τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - παρουσιάζουν ἐν γένει ἕν ἤ περισσότερα ἐκ τῶν κατωτέρω χαρακτηριστικῶν γνωρισμάτων.

(i) Μίαν μ α κ ρ ο χ ρ ό ν ι ο ν τ ά σ ι ν

(ii) Ὡρισμένας π ε ρ ι ο δ ι κ ά ς κ ι ν ή σ ε ι ς (κυμάνσεις, μεταβολάς) καί

(iii) Διαφόρους ἀ κ α ν ο ν ί σ τ ο υ ς ἤ ἄλλως ἀ ρ ρ ύ θ μ ο υ ς μ ε τ α β ο λ ά ς.

Διά τοῦ ὅρου Μακροχρόνιος Τάσις ἤ ἁπλῶς Τάσις ἐννοοῦμεν κατά βάσιν τήν ἰδιότητα τήν ὁποίαν παρουσιάζουν πολλάκις οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς - ἐξεταζόμενοι διά μίαν μ α κ ρ ά ν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον περίοδον - νά μεταβάλωνται ἐ ν γ έ ν ε ι πρός τήν αὐτήν κατεύθυνσιν (αὐξητικῶς ἤ πτωτικῶς) ἤ ἐν ἄλλοις λόγοις τήν ἀ ν ο δ ι κ ή ν ἤ κ α θ ο δ ι κ ή ν κίνησιν - πορείαν - τήν ὁποίαν παρουσιάζει ἐν γένει τό ἀντίστοιχον χρονόγραμμα. Οὕτω, π.χ. ἡ ἀνοδική πορεία τοῦ χρονογράμματος (8.1), ἀντανακλῶσα τάς ἐν γένει θετικάς (αὐξητικάς) μεταβολάς τοῦ κατά κεφαλήν εἰσοδήματος κατά τήν περίοδον 1960-73, χαρακτηρίζει ἐν προκειμένῳ τήν μακροχρόνιον τάσιν ἐξελίξεως τῆς ἐν λόγῳ σειρᾶς. Ὁμοίως, τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.2) - καί φυσικά τό ἀντίστοιχον χρονόγραμμα (8.2) - παρ'ὅτι βραχυχρονίως παρουσιάζουν τόσον ἀνοδικάς ὅσον καί πτωτικάς κινήσεις, θεωρούμενα ἐν τῷ πλαισίῳ ὁλοκλήρου τῆς ὑπό ἐξέτασιν περιόδου (1968-72) ἐμφανίζουν προφανῶς μίαν ἀνοδικήν ἐν γένει πορείαν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις μίαν αὐξητικήν - μακροχρονίως - τάσιν ἐξελίξεως.

Ἡ νομοτέλεια ἡ ὁποία διέπει τήν μακροχρόνιον τάσιν μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς - ὡς π.χ. τήν τάσιν ἀνοδικῆς ἐξελίξεως τῶν σειρῶν (8.1) καί (8.2) - περιγράφεται συνήθως διά μιᾶς - καταλλήλου κατά περίπτωσιν - ἐξισώσεως*

*Αἱ παράμετροι α,β,... προσδιορίζονται καί ἐν προκειμένῳ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων.

$$y=f(t,\alpha,\beta,\ldots) \qquad (8.2)$$

ἡ ὁποία ἐκφράζουσα τήν ὑπό μελέτην μεταβλητήν Υ ὡς συνάρτησιν τοῦ χρόνου t, ἀφ' ἑνός ἀντανακλᾶ τόν τρόπον τῆς ἐ ν γ έ ν ε ι διαχρονικῆς ἐξελίξεως αὐτῆς - θεωρουμένης μακροχρονίως - ἀφ' ἑτέρου δέ συνοψίζει - κατά προσέγγισιν - τά ἀντίστοιχα ἐμπειρικά δεδομένα. Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις εἶναι γνωστή ὡς ἐ ξ ί σ ω σ ι ς τ ά σ ε ω ς, ἡ δέ γραφική παράστασις αὐτῆς - δυναμένη κατά περίπτωσιν νά εἶναι μία εὐθεία, μία παραβολή δευτέρου ἤ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἤ τέλος μία ἄλλη πολυπλοκωτέρου σχήματος καμπύλη - καλεῖται συνήθως γ ρ α μ μ ή τ ά σ ε ω ς. Ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ γραμμή τάσεως διέρχεται διά μέσου τοῦ ἀντιστοίχου χρονογράμματος - ἴδε διακεκομένην εὐθείαν τοῦ σχήματος (8.2) - καί συνοψίζει κατά προσέγγισιν τήν μορφήν του.

Ὁ προσδιορισμός τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν γραμμῆς τάσεως καί γενικώτερον αἱ μέθοδοι διερευνήσεως τῆς μακροχρονίου ἐξελίξεως μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς - ἀνεξαρτήτως τῶν ποικίλων αἰτίων εἰς τά ὁποῖα εἶναι δυνατόν νά ὀφείλεται αὕτη - καί ἀκόμη ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τῶν συναφῶν συμπερασμάτων θά μᾶς ἀπασχολήσουν διεξοδικῶς εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους.

Πέραν τῆς μακροχρονίου τάσεως, οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς παρουσιάζουν πολλάκις καί ὡρισμένας ἄλλας κινήσεις - κυμάνσεις, μεταβολάς - αἱ σημαντικώτεραι τῶν ὁποίων - ἐξ ἀπόψεως τουλάχιστον πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος - εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζουν κάποιαν π ε ρ ι ο δ ι κ ό τ η τ α, συμβαίνει δηλαδή νά ἐπαναλαμβάνωνται συστηματικῶς καί εἰς τακτά - βραχέα ἤ μακρά - χρονικά διαστήματα. Τοιούτου εἴδους κυμάνσεις εἶναι γνωσταί ἐν γένει ὡς π ε ρ ι ο δ ι κ α ί κ ι ν ή σ ε ι ς. Ἡ π ε ρ ί ο δ ο ς - ὁ χρόνος ἐπαναλήψεως - τῶν ἐν λόγῳ κινήσεως ποικίλλει κατά περίπτωσιν εἶναι δέ δυνατόν νά εἶναι μία ἡ μ έ ρ α (τό 24ωρον), μία ἑ β δ ο μ ά ς, ἕνα ἔ τ ο ς ἤ ἀκόμη ἕνας ἀριθμός ἐτῶν - δύο, τρία, δέκα ἤ περισσότερα ἔτη - γενικώτερον δέ ἕν οἱονδήποτε ἄλλο χρονικόν διάστημα.

Οὕτω π.χ. ἡ θερμοκρασία ἑνός τόπου ἐμφανίζει ἐντός ἑκάστου 24ώρου ὡρισμένας χαρακτηριστικάς αὐξομειώσεις - αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστόν ἐπαναλαμβάνονται συστηματικῶς ἀπό ἡμέρας εἰς ἡμέραν - παρουσιάζει δηλαδή μίαν περιοδικήν κίνησιν μέ περίοδον 24 ὡρῶν. Ὁμοίως αἱ ἡμερήσιαι - λιανικαί - πωλήσεις ὡρισμένων εἰδῶν διατροφῆς κυμαίνονται ἐντός ἑκάστης ἑβδομάδος, ἡ ἑβδομαδιαία ὅμως διάρθρωσις αὐτῶν ἐπαναλαμβάνεται ἐν γένει κατά τρόπον συστηματικόν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ ἀντίστοιχος χρονολογική σειρά παρουσιάζει συνήθως μίαν περιοδικήν κίνησιν μέ περίοδον τήν ἑβδομάδα.

Μία κατηγορία περιοδικῶν κινήσεων αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον καθ' ὅσον ἐμφανίζονται εἰς πλείστας ὅσας χρονολογικάς σειράς, κυρίως δέ εἰς σειράς αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς χαρακτηριστικά οἰκονομικῶν φαινομένων (οἰκονομικαί χρονολογικαί σειραί), εἶναι αἱ καλούμεναι ἐποχικαί κυμάνσεις.

Αἱ ἐν λόγῳ κινήσεις ὀφείλονται κατά κανόνα ἤ τουλάχιστον συνδέονται πρός τάς ἐποχάς τοῦ ἔτους (κλιματολογικάς συνθήκας, ἔθιμα, ἑορτάς κλπ) καί ὡς ἐκ τούτου ἐπαναλαμβάνονται συστηματικῶς μέ περίοδον 12 περίπου μηνῶν. Τοιαύτας π.χ. μεταβολάς - ἐποχικάς κυμάνσεις - παρουσιάζουν τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.2). Πράγματι, ἐκ τῆς προσεκτικῆς ἐξετάσεως τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων - ἤ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ ἀντιστοίχου χρονογράμματος τοῦ σχήματος (8.2) - καθίσταται προφανές ὅτι αἱ μηνιαῖαι πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, πέραν τῆς ἐν γένει ἀνοδικῆς πορείας των, παρουσιάζουν ἐντός ἑκάστου ἔτους χαρακτηριστικάς αὐξομειώσεις - ἐλάττωσιν ἀπό τόν Φεβρουάριον ἕως τόν Αὔγουστον ἐν συνεχείᾳ ἀνάκαμψιν κ.ο.κ. - αἱ ὁποῖαι ἐπαναλαμβάνονται ἀπό ἔτους εἰς ἔτος κατά τρόπον συστηματικόν (περίπου αἱ αὐταί).

Τό φαινόμενον τῆς ἐποχικότητος προσείλκυσεν ἐξ ἀρχῆς τό ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον τῶν μελετητῶν γενικώτερον δέ ἡ διερεύνησις τῶν ἐν λόγῳ κινήσεως ἔτυχεν τοιαύτης προσοχῆς· ὥστε ὁ ὅρος ἐποχικαί κυμάνσεις νά χρησιμοποιεῖται πολλάκις εἰς τήν βιβλιογραφίαν ὡς ταυτόσημος τῶν περιοδικῶν κινήσεων.

Ὡς εἶναι εὐνόητον, διά τήν μελέτην τυχόν ὑφισταμένων ἐποχικῶν κυμάνσεων καθίσταται ἀπαραίτητον ὅπως οἱ ὅροι τῆς ἀντιστοίχου χρονολογικῆς σειρᾶς ἀναφέρονται εἰς χρονικάς περιόδους πολύ μικροτέρας τοῦ ἔτους (ὑποπολλαπλάσια τοῦ ἔτους). Εἰς τήν πρᾶξιν πρός τόν σκοπόν αὐτόν χρησιμοποιοῦνται συνήθως μ η ν ι α ῖ α δεδομένα, σπανιώτερον δέ τ ρ ι μ η ν ι α ῖ α τοιαῦτα.

Μία ἄλλη κατηγορία περιοδικῶν κινήσεων αἱ ὁποῖαι ἔτυχον ἐπίσης ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶναι αἱ καλούμεναι κ υ κ λ ι κ α ί κ υ μ ά ν σ ε ι ς. Αὗται εἶναι περιοδικαί κινήσεις αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται εἰς οἰκονομικάς κυρίως σειράς ὀφείλονται δέ ἤ συνδέονται κατά κανόνα μέ τήν παραγωγικήν - ἀγροτικήν, βιομηχανικήν κλπ - δραστηριότητα, τήν ἀπασχόλησιν, τήν ἐμπορικήν κίνησιν καί γενικώτερον μέ τήν ὅλην οἰκονομικήν δραστηριότητα (ὑφέσεις καί ἀνόδους τῆς οἰκονομίας κ.ο.κ.). Ἡ π ε ρ ί ο δ ο ς τῶν ἐν λόγῳ κινήσεων - συνήθως ἕνας ἀριθμός ἐτῶν - ποικίλλει κατά περίπτωσιν, δύναται δέ νά εἶναι δύο, τρία ἤ τέσσαρα ἔτη, ὡς π.χ. εἰς χρονολογικάς σειράς αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τήν ἐτησίαν παραγωγήν ὡρισμένων ἀγροτικῶν προϊόντων (ἀ γ ρ ο τ ι κ ο ί κ ύ κ λ ο ι), ἐννέα ἕως ἕνδεκα ἔτη, ὡς π.χ. εἰς χρονολογικάς σειράς ἀναφερομένας εἰς ὡρισμένα μακροοικονομικά μεγέθη καί εἰδικώτερον εἰς χαρακτηριστικά τῆς ἐπιχειρηματικῆς δραστηριότητος (κ ύ κ λ ο ι ἐ μ π ο ρ ί ο υ), τέλος δέ εἰς ὡρισμένας συναφεῖς χρονολογικάς σειράς ὑπάρχουν ἐνδείξεις περιοδικῶν κινήσεων μέ περίοδον μέχρι καί 50 περίπου ἐτῶν.

Ἀντιθέτως πρός τάς ἐποχικάς κυμάνσεις ἡ διερεύνησις τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων βασίζεται συνήθως - δι' εὐνοήτους λόγους - εἰς ἐ τ ή σ ι α δεδομένα. Ἐνταῦθα ὅμως δέον νά τονισθῇ ὅτι τόσον ὁ προσδιορισμός ὅσον καί ἡ ἀξιολόγησις τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων, παρ' ὅτι - θεωρητικῶς τουλάχιστον - ἐπιτυγχάνεται κατά βάσιν διά τῶν ἰδίων μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται διά τήν μελέτην τῶν ἐποχικῶν κυμάνσεων καί γενικώτερον οιασδήποτε περιοδικῆς κινήσεως, εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι ἐξαιρετικῶς δυσχερής. Αἱ ὑφιστάμεναι ἐν προκειμένῳ δυσκολίαι συνίστανται κυρίως εἰς τά ἑξῆς:

(i) Ἀπαιτοῦνται πολυπληθῆ ἐμπειρικά δεδομένα - χρονολογικαί σειραί καλύπτουσαι μίαν μακρᾶ (πολυετῆ) περίοδον - ἐνῶ συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι διαθέσιμα στοιχεῖα ὀλίγων μόνον ἐτῶν.

(ii) Τό ἀνοδικόν ἤ καθοδικόν σκέλος ἑνός κύκλου - ἰδιαιτέρως προκειμένου περί κυκλικῶν κυμάνσεων μ α κ ρ ᾶ ς σχετικῶς περίδου - εἶναι δύσκολον νά διακριθῆ καί πολλάκις συγχέεται μέ ὑφισταμένην ἀντιστοίχως μακροχρόνιον τάσιν.

(iii) Τό μῆκος τῆς περιόδου τῶν περισσοτέρων κυκλικῶν κυμάνσεων - ὁ κ ύ κ λ ο ς - δέν εἶναι σταθερόν - μεταβάλλεται μετά τοῦ χρόνου - καί ὡς ἐκ τούτου ἡ μελέτη τοῦ σχετικοῦ φαινομένου καθίσταται - ἐν συνδυασμῷ μάλιστα πρός τό μικρόν κατά κανόνα μῆκος τῆς διαθεσίμου χρονολογικῆς σειρᾶς - οὐσιαστικῶς ἀδύνατος.

Αἱ στατιστικαί μέθοδοι αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν μελέτην - ἀνάλυσιν, ἀξιολόγησιν κλπ - τῶν περιοδικῶν κινήσεων - ἰδιαιτέρως δέ τῶν ε π ο χ ι κ ῶ ν κ υ μ ά ν σ ε ω ν, αἱ ὁποῖαι, ὡς ἤδη ἐλέχθη, παρουσιάζουν ἰδιαίτερον πρακτικόν ἐνδιαφέρον - ὡς ἐπίσης ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τῶν συναφῶν συμπερασμάτων, θά μᾶς ἀπασχολήσουν λεπτομερῶς κατωτέρω.

Ἐπιπροσθέτως τῆς τυχόν ὑφισταμένης μακροχρονίου τάσεως καί τῶν ὡς ἄνω περιοδικῶν κινήσεων, οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ἤ τό ἀντίσ οιχον χρονόγραμμα παρουσιάζουν συνήθως καί ὡρισμένας ἄλλας - ἀ π ο τ ό μ ο υ ς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον - μεταβολάς αἱ ὁποῖαι οὐδεμίαν κανονικότητα ἤ ρυθμόν παρουσιάζουν καί καλοῦνται ὡς ἐκ τούτου ἀ κ α ν ό ν ι σ τ ο ι ἤ ἄ ρ ρ υ θ μ ο ι μ ε τ α β ο λ α ί.

Αἱ ἐν λόγῳ μεταβολαί - κινήσεις - διακρίνονται συνήθως εἰς δύο κατηγορίας (i) τάς σ υ μ π τ ω τ ι κ ά ς καί (ii) τάς κ α θ α ρ ῶ ς τ υ χ α ί α ς τ ο ι α ύ τ α ς. Αἱ πρῶται ὀφείλονται κατά κανόνα ἤ τουλάχιστον ἔχουν σχέσιν πρός ὡρισμένα σοβαρά ἐν γένει ἀλλά καθαρῶς συμπτωματικά γεγονότα ὅπως π.χ. σεισμοί, πλημμῦραι, ξηρασίαι, πόλεμοι, ἀπεργίαι, μεγάλα δυστυχήματα κλπ. Ὡς ἐκ τούτου τοιούτου εἴδους μεταβολαί συμβαίνουν μᾶλλον σπανίως, ὁσάκις ὅμως συμβοῦν εἶναι συνήθως ἔντονοι καί εὐδιάκριτοι.

Ἀντιθέτως, ἡ δευτέρα κατηγορία τοιούτων μεταβολῶν ὀφείλεται ἐν γένει εἰς πολυαρίθμους ἀγνώστους παράγοντας ἤ ὅπως συνήθως λέγεται εἰς τήν τ ύ χ η ν. Αἱ ἐν λόγῳ μεταβολαί συμβαίνουν ἐν γένει συχνότερον τῶν συμπτωματικῶν τοιούτων - πάντοτε ὅμως κατά τρόπον ἀκανόνιστον καί ἄνευ οἱουδήποτε ρυθμοῦ - εἶναι δέ ἥσσονος κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἐντάσεως καί γενικώτερον δέν παρουσιάζουν σοβαράς ἐπιπτώσεις.

Τόσον τάς καθαρῶς τυχαίας μεταβολάς ὅσον καί τάς συμπτωματικάς τοιαύτας, αἱ ὁποῖαι ἐπίσης συνδέονται, ὡς εἴδομεν, μέ ἀπροβλέπτους ἤ γενικώτερον τ υ χ α ί ω ς παράγοντας (αἴτια), θά χαρακτηρίζωμεν ἀπό τοῦδε διά τοῦ γενικοῦ ὅρου τ υ χ α ῖ α ι μεταβολαί ἤ κινήσεις.

Τό ἀκανόνιστον ἤ ἄλλως ἡ ἀρρυθμία τήν ὁποίαν ἐμφανίζουν αἱ τυχαῖαι μεταβολαί - κινήσεις - τῶν ὅρων μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς καθιστᾷ τήν διεξοδικήν διερεύνησιν αὐτῶν οὐσιαστικῶς ἀδύνατον. Διά τόν λόγον αὐτόν εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ τοιούτου εἴδους κινήσεις δέν θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἰδιαιτέρως. Ἄλλωστε ἀφ'ἑνός ἡ σπάνις τῶν συμπτωματικῶν μεταβολῶν καί ἀφ'ἑτέρου ἡ μικρά ἐν γένει ἔντασις τῶν καθαρῶς τυχαίων τοιούτων περιορίζουν σημαντικῶς τόσον τήν θεωρητικήν ὅσον καί τήν πρακτικήν σημασίαν τῶν τυχαίων μεταβολῶν.

Εἰς τήν μέχρι τοῦδε θεώρησιν τοῦ προβλήματος μᾶς ἀπησχόλησεν κατά βάσιν ἡ π ο ι ο τ ι κ ή περιγραφή - τό εἶδος, ἡ μορφή, ἡ σημασία κλπ - τῶν συνηθεστέρων καί πλέον σημαντικῶν κινήσεων - κυμάνσεων, μεταβολῶν - τάς ὁποίας παρουσιάζουν ἐν γένει - εἴτε μακροχρονίως, εἴτε βραχυχρονίως - οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς.

Ἐκ τῶν ἐν λόγῳ κινήσεων, ἡ μακροχρόνιος τάσις - συμβολιζομένη συνήθως διά T - καί ὡρισμέναι περιοδικαί κινήσεις - κατά κύριον λόγον αἱ ἐποχικαί κυμάνσεις (S) καί δευτερευόντως αἱ κυκλικαί τοιαῦται (C) - ἀποτελοῦν τούς κυριωτέρους - ἐξ ἀπόψεως πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος - παράγοντας ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῶν ὁποίων ἤ ἄλλως ὡς συνισταμένη τῶν ὁποίων διαμορφοῦνται συνήθως αἱ διαδοχικαί τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς - καί γενικώτερον καθορίζεται ἡ διαχρονική ἐξέλιξις - συμπεριφορά - αὐτῆς.

Ἡ ἀπομόνωσις καί ἐν συνεχείᾳ διερεύνησις τῶν ὡς ἄνω συνιστωσῶν - ἀποσύνθεσις μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς - καί εἰδικώτερον ὁ ποσοτικός προσδιορισμός καί ἡ ἀξιολόγησις ἑκάστης ἐξ αὐτῶν καί ἡ ἀξιοποίησις τῶν συναφῶν συμπερασμάτων, ἀποτελοῦν καί τό κυρίως ἀντικείμενον τῆς λεγομένης στατιστικῆς ἀναλύσεως μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς.

Ἡ ἀκολουθουμένη πρός τόν σκοπόν αὐτόν διαδικασία καί γενικώτερον αἱ ἐφαρμοζόμεναι μέθοδοι ἐξαρτῶνται ἐν γένει

(i) ἐκ τοῦ τρόπου συνδυασμοῦ τῶν ὑπό μελέτην συνιστωσῶν, καί

(ii) ἐκ τῶν τυχόν ὑφισταμένων μεταξύ αὐτῶν ἀλληλεπιδράσεων.

Εἰς τήν πρᾶξιν ὑποτίθεται κατά κανόνα - κυρίως διά λόγους ἁπλότητος - ὅτι ἡ μακροχρόνιος τάσις (T), αἱ ἐποχικαί κυμάνσεις (S), αἱ κυκλικαί κινήσεις (C) καί τέλος αἱ τυχόν ὑφιστάμεναι τυχαῖαι μεταβολαί (R) εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των - μή ὕπαρξις ἀλληλεπιδράσεων - καί ἐνεργοῦν προσθετικῶς. Οὕτω, δύο ὑποδείγματα τά ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εὐρέως διά τήν ἀνάλυσιν χρονολογικῶν σειρῶν εἶναι

(i) τό ἁπλοῦν ἀθροιστικόν ὑπόδειγμα

$$y_t = T_t + S_t + C_t + R_t \qquad (8.3)$$

ὅπου ἡ τιμή $y_t$ τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - κατά τήν χρονικήν στιγμήν ἤ περίοδον $t=1, 2, \ldots, N$ - ἐκφράζεται ὡς ἄθροισμα τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τήν γραμμήν τάσεως τιμῆς $T_t$ τῶν πέραν τῆς τάσεως ἐπιδράσεων τῆς ἐποχικότητος ($S_t$) καί τῶν μακροχρονίων κυκλικῶν κινήσεων ($C_t$) καί τέλος τῶν - πέραν καί ἀνεξαρτήτως τῶν προηγουμένων ὑφισταμένων - τυχαίων μεταβολῶν ($R_t$), συνηθέστερον δέ

(ii) τό πολλαπλασιαστικόν ὑπόδειγμα

$$y_t = T_t S_t C_t R_t \qquad (8.4)$$

τό ὁποῖον λαμβανομένων τῶν λογαρίθμων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν γράφεται

$$\log y_t = \log T_t + \log S_t + \log C_t + \log R_t \qquad (8.5)$$

ὅπου ἀντί τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν ὑπό μελέτην συνιστωσῶν προστίθενται οἱ λογάριθμοι αὐτῶν.

'Εάν, εἴτε ἐκ συναφῶν πρός τό ὑπό μελέτην φαινόμενον θεωρητικῶν ἀπόψεων εἴτε ἐκ τῆς προκαταρκτικῆς ἐξετάσεως τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων, δύναται βασίμως νά ὑποτεθῆ ὅτι αἱ ἐποχικαί, κυκλικαί καί τυχαῖαι κινήσεις ἐπιδροῦν ἀναλογικῶς πρός τήν ὑφισταμένην τάσιν - πρός τό γενικόν ἐπίπεδον τῆς σειρᾶς - ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐάν τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιδράσεως ἑκάστης ἐκ τῶν ἐν λόγῳ συνιστωσῶν δύναται νά ἐκφρασθῆ ὡς ποσοστόν τῆς ἀντιστοίχου τάσεως εἶναι φανερόν ὅτι διά τήν ἀνάλυσιν τῆς ἀντιστοίχου χρονολογικῆς σειρᾶς δέον νά χρησιμοποιηθῆ - εἶναι προτιμητέον - τό πολλαπλασιαστικόν ὑπόδειγμα.

'Αντιθέτως, ἐάν ἡ ἐπίδρασις τῶν ἐν λόγῳ συνιστωσῶν ἐκφράζεται εἰς ἀπόλυτα μεγέθη - ὄχι ἀναλογικῶς πρός τήν τάσιν - ἐάν δηλαδή τό ἀποτέλεσμα αὐτῶν εἶναι ἡ αὐξομείωσις τῆς τάσεως καθ' ὡρισμένον ἑκάστοτε μέγεθος - ἀριθμόν μονάδων καί ὄχι ποσοστόν τῆς τάσεως - ἐνδείκνυται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἀθροιστικοῦ ὑποδείγματος.

Ἡ ἀνάλυσις μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς, οἱ ὅροι τῆς ὁποίας διαμορφοῦνται ἐν γένει συμφώνως πρός ἕν ἐκ τῶν ὡς ἄνω ὑποδειγμάτων, εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἁπλῆ. Συγκεκριμένως, πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀκολουθεῖται κατά κανόνα ἡ κατωτέρω διαδικασία:

(α) Προσδιορίζεται ἡ νομοτέλεια ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν μακροχρόνιον τάσιν (T). Πρός τοῦτο χρησιμοποιεῖται, ὡς θά ἴδωμεν εἰς τάς ἀμέσως ἐπομένας παραγράφους, ἡ μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων, συνηθέστερον δέ ὑπολογίζεται ἡ καταλληλοτέρα κατά περίπτωσιν ἐξίσωσις τάσεως ἤ χαράσσεται ἡ ἀντίστοιχος γραμμή τάσεως.

(β) Ὑπολογίζονται ὡρισμέναι ποσοτικαί ἐκφράσεις, γνωσταί ἐν γένει ὡς συντελεσταί ἤ δεῖκται ἐποχικότητος, αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν τάς τυχόν ὑφισταμένας ἐποχικάς κυμάνσεις (S) ἤ γενικώτερον ἄλλας - βραχυχρονίους - περιοδικάς κινήσεις. Αἱ ἐφαρμοζόμεναι πρός τοῦτο μέθοδοι θά μᾶς ἀπασχολήσουν λεπτομερῶς εἰς τήν παράγραφον (8.6).

(γ) Τέλος, ὅπου τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον καί ἐάν ἐκ τῶν πραγμάτων ὑφίσταται ἡ δυνατότης - ἐπάρκεια δεδομένων κλπ - προσδιορίζονται αἱ τυχόν ὑφιστάμεναι μακροχρόνιαι κυκλικαί κινήσεις (C). Ἐν προκειμένῳ, παρ' ὅτι κατά βάσιν - θεωρητικῶς - εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθοῦν - τουλάχιστον εἰς τάς περιπτώσεις κυκλικῶν κινήσεων αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν σταθεράν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον π ε ρ ί ο δ ο ν - μέθοδοι ἀνάλογοι πρός ἐκείνας τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἐποχικῶν καί γενικώτερον οἱωνδήποτε ἄλλων περιοδικῶν κινήσεων, ἐφαρμόζεται συνήθως ἡ μέθοδος τῆς ἀ π α λ ε ι φ ῆ ς.

Συγκεκριμένως, δι'ἀ φ α ι ρ έ σ ε ω ς τοῦ ἀθροίσματος $T_t+S_t$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ὅρων $y_t$, $t=1,2,\ldots,N$ - περίπτωσις ἀθ ρ ο ι σ τ ι κ ο ῦ ὑποδείγματος(8.3) - ἤ διά δ ι α ι ρ έ σ ε ω ς τῶν ὅρων $y_t$ διά τῶν ἀντιστοίχων γινομένων $T_tS_t$ - περίπτωσις π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ο ῦ ὑποδείγματος - ἀπαλείφεται ἡ ἐπίδρασις τῆς τάσεως (T) καί τῆς ἐποχικότητος (S) καί ἀπομένουν πλέον ἡ κ υ κ λ ι κ ή κίνησις ἀπό κοινοῦ μετά τῶν ὑφισταμένων τυχαίων μεταβολῶν (C+R ἤ CR).

Ἡ γραφική ἀπεικόνισις καί γενικώτερον ἡ διερεύνησις τῶν οὕτω ὑπολογιζομένων ἀριθμητικῶν μεγεθῶν

$$(C_t+R_t \text{ ἤ } C_tR_t, \quad t=1,2,\ldots,N)$$

λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι ἡ συνιστῶσα $R_t$ εἶναι κατά κανόνα μικρή ἐν σχέσει πρός τήν $C_t$, ἀποκαλύπτει τόσον τήν μορφήν ὅσον καί τήν π ε ρ ί ο δ ο ν τῆς ὑπό μελέτην κυκλικῆς κινήσεως.

Ἐνταῦθα δέον νά τονισθῆ ὅτι εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις αἱ γενόμεναι ἀνωτέρω ὑποθέσεις καί ἰδιαιτέρως ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α ς τῶν ὑπό μελέτην συνιστωσῶν δέν ἀνταποκρίνονται εἰς τήν πραγματικότητα. Οὕτω π.χ. μεταξύ τῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ὑφίσταται πολλάκις ἔντονος συσχέτισις ἤ ἄλλως α ὐ τ ο σ υ σ χ έ τ ι σ ι ς - ἡ τιμή ἑνός ἀγαθοῦ ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἐκ τῆς τιμῆς αὐτοῦ κατά τό προηγούμενον ἔτος κ.ο.κ. - μέ ἀποτέλεσμα ἡ τάσις καί αἱ τυχόν ὑφιστάμεναι κυκλικαί κινήσεις νά ἀλληλεξαρτῶνται καί ἡ ἀπομόνωσις αὐτῶν νά καθίσταται - ἄν ὄχι ἀδύνατος - ἐξαιρετικά δυσχερής.

Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἀντικαθίστανται συνήθως ὑπό καταλληλοτέρων - περισσότερον πραγματικῶν - τοιούτων, χρησιμοποιοῦνται πολυπλοκώτερα ἐν γένει ὑποδείγματα καί ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀντιστοίχων χρονολογικῶν σειρῶν δυσχεραίνεται σημαντικά. Ἰδιαιτέραν προσοχήν ἀπαιτεῖ ἐπίσης ἡ ἀνάλυσις χρονολογικῶν σειρῶν εἰς τάς ὁποίας ἡ τάσις δέν ἔχει ἑνιαῖαν μορφήν - ὁμοιάζει π.χ. μέ τεθλασμένην γραμμήν - ἤτυχόν ὑφιστάμεναι βραχυχρόνιοι ἤ μακροχρόνιαι περιοδικαί κινήσεις ἔχουν π ε ρ ί ο δ ο ν μεταβαλομένην μετά τοῦ χρόνου (μή σταθεράν κ.ο.κ.).

Τοιούτου ὅμως εἴδους προβλήματα ἐκφεύγουν τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος καί δέν θά μᾶς ἀπασχολήσουν λεπτομερῶς. Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὑποθέτομεν ὅτι οἱ ὅροι τῆς ὑπό μελέτην χρονολογικῆς σειρᾶς

$$y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_N$$

διαμορφοῦνται συμφώνως πρός τό π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ό ν ὑπόδειγμα (8.4) - τοῦτο ἄλλωστε ἀνταποκρίνεται καί εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν - κυρίως δέ θά μᾶς ἀπασχολήσουν

(α) αἱ μέθοδοι ἀπομονώσεως καί διερευνήσεως τῆς τ ά σ ε ω ς καί

(β) αἱ μέθοδοι π ο σ ο τ ι κ ο ῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἐποχικῶν ἤ ἄλλων βραχυχρονίων περιοδικῶν κινήσεων.

## 8.3 Μέθοδοι Προσδιορισμοῦ τῆς Μακροχρονίου Τάσεως

Ἡ τάσις - ἡ γενική δηλαδή κίνησις ἤ ἄλλως ἡ μακροχρόνιος πορεία - μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς προσδιορίζεται καί γενικώτερον περιγράφεται καί διερευνᾶται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τῶν κατωτέρω μεθόδων:

(i) δι᾽ὑπολογισμοῦ ὡρισμένων ποσοτικῶν ἐκφράσεων γνωστῶν ἐν γένει ὡς κ ι ν η τ ῶ ν μ έ σ ω ν καί

(ii) διά τῆς προσαρμογῆς μιᾶς - τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν-γραμμῆς ἤ ἄλλως μιᾶς μαθηματικῆς ἐξισώσεως γνωστῆς ὡς γ ρ α μ μ ῆ ς ἤ ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ς τ ά σ ε ω ς.

Ἡ ἔννοια, ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ, αἱ ἰδιότητες καί γενικώτερον ἡ πρακτική σημασία καί ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τῶν κινητῶν μέσων θά μᾶς ἀπασχολήσουν - κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον λεπτομερῶς - ἀμέσως κατωτέρω. Αἱ μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῆς καταλλήλου κατά περίπτωσιν γραμμῆς τάσεως - ἀνάλογοι ἐκείνων αἱ ὁποῖαι μᾶς ἀπησχόλησαν διεξοδικῶς εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διμεταβλητῆς παλινδρομήσεως - ὡς καί ἡ ἀξιολόγησις τῆς ἀκριβείας - τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς - αὐτῆς καί ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τῶν συναφῶν συμπερασμάτων θά μᾶς ἀπασχολήσουν - κάπως συνοπτικώτερον - ἀμέσως μετά (παράγραφος 8.3.2).

### 8.3.1 Κινητοί Μέσοι Ὅροι

Δοθείσης μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς

$$y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_N$$

καλοῦμεν **κ ι ν η τ ο ύ ς  μ έ σ ο υ ς  ὅ ρ ο υ ς  τ ά ξ ε ω ς  ἤ  μ ή κ ο υ ς** $k$ τήν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμητικῶν μέσων

$$\frac{1}{k}(y_1+y_2+\ldots+y_k),\ \frac{1}{k}(y_2+y_3+\ldots+y_{k+1}),\ldots,\frac{1}{k}(y_{N-k+1}+y_{N-k+2}+\ldots+y_N) \tag{8.6}$$

ἤ συνοπτικώτερον τήν ἀκολουθίαν

$$\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} y_t,\quad \frac{1}{k}\sum_{t=2}^{k+1} y_t,\ \ldots\ldots\ldots,\quad \frac{1}{k}\sum_{t=N-k+1}^{N} y_t$$

Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις διά τόν ὑπολογισμόν τῶν κινητῶν μέσων μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς εἶναι δυνατόν ἀντί τῶν ἁπλῶν ἀριθμητικῶν μέσων τῆς ἀκολουθίας (8.6) νά χρησιμοποιηθοῦν σταθμικοί τοιοῦτοι. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς οἱ κινητοί μέσοι καλοῦνται σταθμικοί καί ὁρίζονται ὑπό τῆς ἀκολουθίας

$$\frac{f_1y_1+f_2y_2+\ldots+f_ky_k}{f_1+f_2+\ldots+f_k},\ \frac{f_1y_2+f_2y_3+\ldots+f_ky_{k+1}}{f_1+f_2+\ldots+f_k},$$

$$\frac{f_1y_3+f_2y_4+\ldots+f_ky_{k+2}}{f_1+f_2+\ldots+f_k}, \ldots \text{ κ.ο.κ.} \qquad (8.7)$$

ὅπου οἱ συντελεσταί σταθμίσεως $f_1 f_2 \ldots f_k$ καθορίζονται ἐκ τῶν προτέρων συνήθως δέ κατά τρόπον ὥστε οἱ ἑκάστοτε κεντρικοί ὅροι νά ἔχουν μεγαλύτερον βάρος ἀπό τούς ἀντιστοίχους ἀκραίους τοιούτους. Θεωρήσωμεν π.χ. μίαν ἁπλῆν χρονολογικήν σειράν

1 5 6 4 8 9

Οἱ ἁπλοῖ κινητοί μέσοι μήκους k=3 τῆς ἐν λόγῳ σειρᾶς εἶναι

$$\frac{1+5+6}{3}, \frac{5+6+4}{3}, \frac{6+4+8}{3}, \frac{4+8+9}{3} \quad \text{δηλαδή} \quad 4, 5, 6, 7,$$

ἐνῶ οἱ ἀντίστοιχοι - τάξεως k=3 - σταθμικοί κινητοί μέσοι μέ συντελεστάς σταθμίσεως $f_1=2$, $f_2=6$, $f_3=1$ εἶναι

$$\frac{1}{9}(2\times1+6\times5+1\times6), \quad \frac{1}{9}(2\times5+6\times6+1\times4), \quad \frac{1}{9}(2\times6+6\times4+1\times8),$$

$$\frac{1}{9}(2\times4+6\times8+1\times9) \text{ ἤτοι } 4{,}2 \;\; 5{,}6 \;\; 4{,}9 \;\; 7{,}2.$$

Ἐάν οἱ ὅροι τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς εἶναι ἐτήσια ἤ μηνιαῖα δεδομένα οἱ ἀντίστοιχοι κινητοί μέσοι k-τάξεως καλοῦνται συνήθως k-ετεῖς (3-ετεῖς, 4-ετεῖς κλπ) καί k-μηνιαῖοι (3-μηνιαῖοι, 12-μηνιαῖοι) κινητοί μέσοι.

Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῶν ἁπλῶν κινητῶν μέσων - οἱ ὁποῖοι κατά κανόνα ἀπαντῶνται εἰς τήν πρᾶξιν - εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἁπλῆ. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν ὑπολογίζονται κατ'ἀρχήν τά διαδοχικά ἀθροίσματα

$$(y_1+y_2+\ldots+y_k), (y_2+y_3+\ldots+y_{k+1}), \ldots, (y_{N-1+1}+y_{N-k+2}+\ldots+y_N)$$

- καλούμενα συνήθως κινητά ἀθροίσματα k-τάξεως - ἐν συνεχείᾳ δέ διά διαιρέσεως αὐτῶν διά τοῦ μήκους k - διά τῆς ἀντιστοίχου δηλαδή τάξεως - εὑρίσκονται οἱ ζητούμενοι μέσοι.

Εἰς τήν πρᾶξιν ὁ ὑπολογισμός τῶν ἐν λόγῳ ἀθροισμάτων ἁπλοποιεῖται σημαντικά - ἰδιαιτέρως διά μεγάλας τιμάς τοῦ k - ἐάν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν - μετά τόν ἀπ'εὐθείας ὑπολογισμόν τοῦ πρώτου - εὑρίσκεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του δι'ἀφαιρέσεως τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ καί προσθέσεως τοῦ πρώτου ἐκ τῶν ἑπομένων ὅρων τῆς σειρᾶς (π.χ. $y_2+y_3+\ldots+y_{k+1}=(y_1+y_2+\ldots+y_k)-y_1+y_{k+1}$ κοκ).

Οἱ οὕτω ὑπολογιζόμενοι κινητοί μέσοι τιθέμενοι, ὡς εἶναι φυσικόν, ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρός τήν ἑκάστοτε μεσαίαν - κεντρικήν - χρονικήν στιγμήν ἤ περίοδον, ἀποτελοῦν μίαν νέαν - οἱονεί - χρονολογικήν σειράν γνωστήν ἐν γένει ὡς σειράν τῶν κινητῶν μέσων. Ἐν προκειμένῳ δέον νά διευκρινισθοῦν τά ἑξῆς:

Ἡ τάξις ἤ ἄλλως τό μῆκος k εἶναι δυνατόν νά εἶναι εἴτε περιττός, ἤτοι k=2λ+1, εἴτε ἄρτιος ἀριθμός, ἤτοι k=2λ. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν (k=2λ+1) αἱ κεντρικαί χρονικαί στιγμαί ἤ περίοδοι πρός τάς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν οἱ ὑπολογιζόμενοι ἑκάστοτε κινητοί μέσοι προκύπτουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, αὐτομάτως καί κατά τρόπον ἁπλοῦν. Ἀντιθέτως, ἐάν ἡ τάξις k εἶναι ἄρτιος ἀριθμός (k=2λ) διά τήν ἀντιστοίχησιν τῶν ὑπολογιζομένων κινητῶν μέσων πρός τάς καταλλήλους ἑκάστοτε χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους - διαδικασία γνωστή ὡς κεντρισμός τῶν κινητῶν μέσων - ἡ ἀπαιτουμένη διαδικασία εἶναι περισσότερον πολύπλοκος συνίσταται δέ εἰς τά ἑξῆς:

Κατ'ἀρχήν τά ὑπολογιζόμενα κινητά ἀθροίσματα καί οἱ ἀντίστοιχοι κινητοί μέσοι τίθενται προσωρινῶς ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρός ἰδεατάς χρονικάς στιγμάς αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τό μέσον τῶν στιγμῶν ἤ τῶν περιόδων ἐκ τῶν ὁποίων ὑπελογίσθησαν. Ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῆς ἐν λόγῳ προσωρινῆς σειρᾶς κινητῶν μέσων ὑπολογίζονται - ὡς ἡμιαθροίσματα τῶν διαδοχικῶν ὅρων αὐτῆς - κινητοί μέσοι τάξεως k=2 οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν πλέον εἰς τάς ἐνδιαμέσως - ὑπαρκτάς - χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους καί ἀποτελοῦν τήν ζητουμένην σειράν τῶν κινητῶν μέσων.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐφαρμοζομένης ἐν προκειμένῳ διαδικασίας παραθέτομεν κατωτέρω - πίνακες (8.4) καί (8.5) - δύο ἁπλᾶ ἀριθμητικά παραδείγματα χρησιμοποιοῦντες εἰς ἀμφότερα τά εἰς τρεχούσας τιμάς δεδομένα τοῦ πίνακος (8.1). Εἰς τόν πίνακα (8.4) ὑπολογίζονται τά κινητά ἀθροίσματα καί οἱ ἀντίστοιχοι κινητοί μέσοι τάξεως k=3 καί k=5 (3-ετεῖς καί 5-ετεῖς κινητοί μέσοι). Εἰς τόν πίνακα(8.

5) ὑπολογίζονται οἱ κινητοί μέσοι τάξεως k=4 (4-ετεῖς κινητοί μέσοι). Εἰς τήν τρίτην καί τετάρτην στήλην τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος παρατίθενται ἀντιστοίχως τά κινητά ἀθροίσματα καί οἱ προσωρινοί κινητοί μέσοι ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρός χρονικάς στιγμάς εὑρισκομένας ἑκάστοτε εἰς τό - ἰδεατόν - μέσον τῶν ἀντιστοίχων περιόδων. Ἐκ τῶν προσωρινῶν τούτων κινητῶν μέσων εἰς τήν στήλην 5 ὑπολογίζονται - ὡς ἡμιαθροίσματα διαδοχικῶν ὅρων - οἱ ζητούμενοι 4-ετεῖς κινητοί μέσοι ἀντιστοιχοῦντες πλέον εἰς ὑπαρκτάς χρονικάς περιόδους καί συγκεκριμένως εἰς τά ἔτη 1962, 1963 κλπ.

Πίναξ 8.4

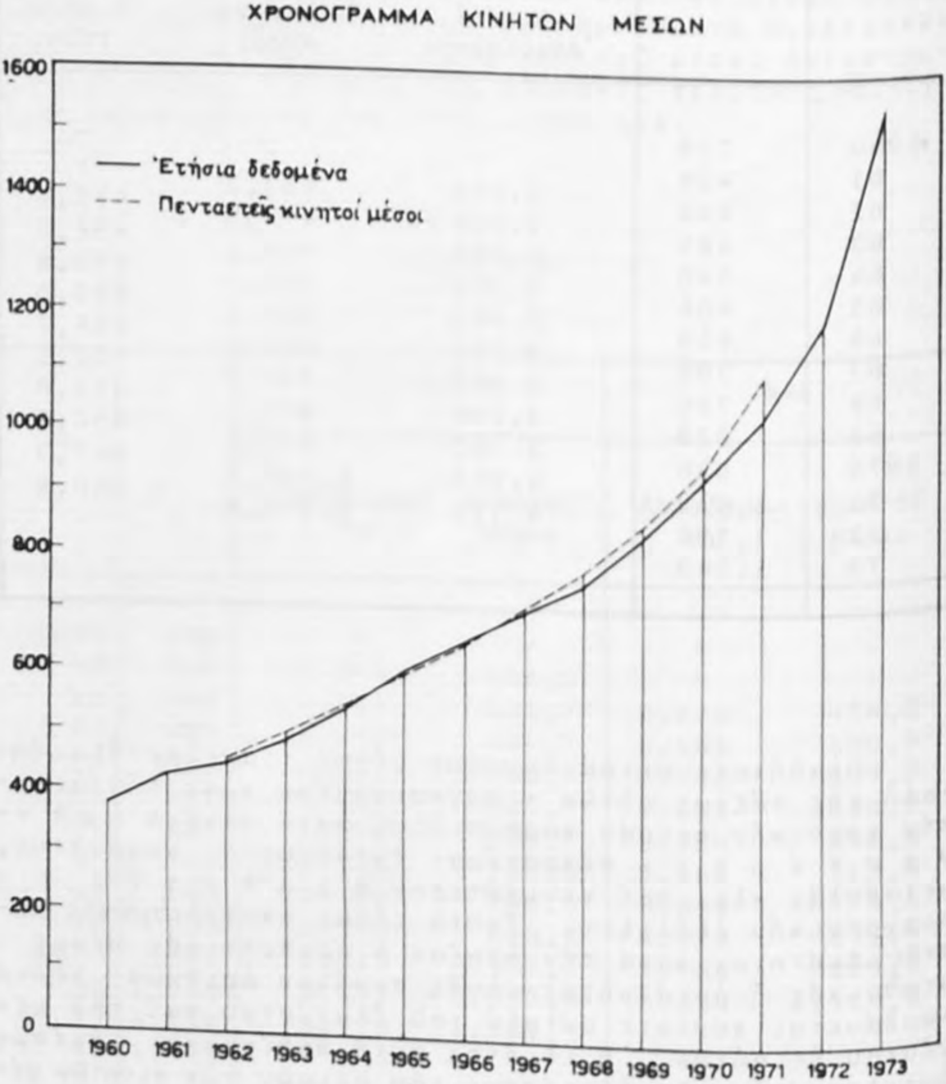
| t | Y | k=3 | | k=5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Ἀθροίσματα | Κινητοί Μέσοι | Ἀθροίσματα | Κινητοί Μέσοι |
| 1960 | 378 | - | - | - | - |
| 61 | 424 | 1.248 | 416,0 | - | - |
| 62 | 446 | 1.355 | 451,7 | 2.273 | 454,6 |
| 63 | 485 | 1.471 | 490,3 | 2.501 | 500,2 |
| 64 | 540 | 1.631 | 543,7 | 2.736 | 547,2 |
| 65 | 606 | 1.805 | 601,7 | 2.995 | 599,0 |
| 66 | 659 | 1.970 | 656,7 | 3.264 | 652,8 |
| 67 | 705 | 2.118 | 706,0 | 3.563 | 712,6 |
| 68 | 754 | 2.298 | 766,0 | 3.893 | 778,6 |
| 69 | 839 | 2.529 | 843,0 | 4.272 | 854,4 |
| 1970 | 936 | 2.813 | 937,7 | 4.765 | 953,0 |
| 71 | 1.038 | 3.172 | 1.057,3 | 5.554 | 1.110,8 |
| 72 | 1.198 | 3.779 | 1.259,7 | - | - |
| 73 | 1.543 | - | - | - | - |

Πίναξ 8.5

| t | Y | k=4 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Κινητά Ἀθροίσματα | Προσωρινοί Μέσοι | Κινητοί Μέσοι |
| 1960 | 378 | - | - | - |
| 61 | 424 | 1.733 | 433,2 | - |
| 62 | 446 | 1.895 | 473,8 | 453,5 |
| 63 | 485 | 2.077 | 519,2 | 496,5 |
| 64 | 540 | 2.290 | 572,5 | 545,8 |
| 65 | 606 | 2.510 | 627,5 | 600,0 |
| 66 | 659 | 2.724 | 681,0 | 654,2 |
| 67 | 705 | 2.957 | 739,2 | 710,1 |
| 68 | 754 | 3.234 | 808,5 | 773,8 |
| 69 | 839 | 3.567 | 891,8 | 850,2 |
| 1970 | 936 | 4.011 | 1.002,8 | 947,3 |
| 71 | 1.038 | 4.715 | 1.178,8 | 1.090,8 |
| 72 | 1.198 | - | - | - |
| 73 | 1.543 | | | - |

Οἱαδήποτε σειρά κινητῶν μέσων - ἀνεξαρτήτως δηλαδή τῆς τάξεως αὐτῶν - συγκρινομένη πρός τήν ἀρχικήν χρονικήν σειράν παρουσιάζει κατά κανόνα ἀ σ θ ε ν ε σ τ έ ρ α ς - μικροτέρας ἐντάσεως - κυμάνσεις, μεταβολάς κλπ. καί γενικώτερον ὁ μ α λ ω τ έ ρ α ν διαχρονικήν ἐξέλιξιν. Τοῦτο εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς γνωστῆς ἰδιότητος κατά τήν ὁποίαν ὁ ἀριθμητικός μέσος - σταθμικός ἤ ἀστάθμητος - ἑνός συνόλου ἀριθμῶν περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξύ τοῦ ἐλαχίστου καί τοῦ μεγίστου ἐξ αὐτῶν. Ἡ ἰδιότης αὐτή καθίσταται ἀμέσως ἀντιληπτή ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν σειρῶν τῶν κινητῶν μέσων τῶν πινάκων (8.4) καί (8.5).

Ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων ἢ καλλίτερον ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου χρονογράμματος αὐτῶν - ἴδε Σχῆμα (8.4) - καθίσταται ἐπίσης φανερόν ὅτι τό ἀποτέλεσμα τῆς τοιαύτης ἐξομαλύνσεως εἶναι τόσον ἐντονώτερον ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τάξις - τό μῆκος - k τῶν ὑπολογιζομένων κινητῶν μέσων.



Σχ. 8,4

Οὕτω, διά τοῦ ὑπολογισμοῦ κινητῶν μέσων - καταλλήλου κατά περίπτωσιν τάξεως - εἶναι δυνατόν νά ἐξομαλυνθοῦν ἤ τουλάχιστον νά καταστοῦν ἀσθενέστεροι τυχόν ἄρρυθμοι κυμάνσεις - τυχαῖαι μεταβολαί κλπ. - ὡςἐπίσης ἐποχικαί κυμάνσεις ἤ γενικώτερον ἄλλαι περιοδικαί κινήσεις τάς ὁποίας παρουσιάζει μία χρονολογική σειρά καί αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν δυσχερῆ τήν ἀπομόνωσιν τῆς τυχόν ὑφισταμένης μακροχρονίου τάσεως. Ἰδιαιτέρως εἰς τήν περίπτωσιν ἐποχικῶν κυμάνσεων ἤ ἄλλων περιοδικῶν κινήσεων σ τ α θ ε ρ ᾶ ς περιόδου ἡ χρησιμοποίησις κινητῶν μέσων τάξεως ἴ σ η ς πρόςτό μῆκος τῆς ἀντιστοίχου περιόδου ἐξομαλύνει πλήρως τάς ἐν λόγῳ κυμάνσεις καί ὁδηγεῖ εἰς μίαν χρονολογικήν σειράν ἡ ὁποία ἀντανακλᾶ κατά βάσιν μόνον τήν ὑφισταμένην μακροχρόνιον τάσιν.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐν λόγῳ ἰδιότητος ἡ ἐκτεθεῖσα ἀνωτέρω - ἴδε πίνακα (8.5) - μέθοδος ὑπολογισμοῦ κινητῶν μέσων ἀρτίας τάξεως ἐφηρμόσθη εἰς τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.2) - τάς μηνιαίας πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας - καί ὑπελογίσθησαν 12-μηνιαῖοι - τάξεως k=12 μηνῶν - κινητοί μέσοι οἱ ὁποῖοι παρατίθενται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (8.6).

Ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς τοιαύτης διαδικασίας ἐξομάλυνσις τῆς ὑπό μελέτην χρονολογικῆς σειρᾶς - ἀπαλοιφή ἐποχικότητος κλπ. - καθίσταται ἀμέσως φανερά τόσον ἐκ τῆς προσεκτικῆς ἐξετάσεως τῶν ὑπολογισθέντων μέσων, ὅσον καί ἐκ τῆς συγκρίσεως τῆς γραφικῆςἀπεικονύσεως αὐτῶν πρός τό χρονόγραμμα τῆς ἀρχικῆς χρονολογικῆς σειρᾶς παρατιθεμένων ἀμφοτέρων εἰς τό σχῆμα (8.2). Ἐξυπακούεται ἐν προκειμένῳ ὅτι ἐάν τό μῆκος τῆς περιόδου ἤ ἡ ἔντασις τῶν ὑφισταμένων περιοδικῶν κυμάνσεων μεταβάλλεται διαχρονικῶς - δέν εἶναι σταθερά - ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ὁδηγεῖ ἐν γένει εἰς ἐξασθένησιν τῶν ὑφισταμένων κυμάνσεων ὄχι ὅμως καί εἰς πλήρη ἐξομάλυνσιν αὐτῶν.

Ἐκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω καθίσταται προφανέςὅτι ἡ χρησιμοποίησις κινητῶν μέσων καταλλήλου κατά περίπτωσιν τάξεως - μήκους - καθιστᾶ ἐν γένει δυνατήν τήν ἐξομάλυνσιν ἤ τουλάχιστον τήν ἐξασθένησιν τῆςἐν-

Πίναξ 8.6

| t | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | - | - | - | - | - | 1.519 | 1.567 | 1.604 | 1.621 | 1.642 | 1.671 | 1.690 |
| 69 | 1.702 | 1.717 | 1.730 | 1.747 | 1.764 | 1.773 | 1.786 | 1.803 | 1.823 | 1.836 | 1.849 | 1.868 |
| 1970 | 1.887 | 1.905 | 1.922 | 1.940 | 1.964 | 1.992 | 2.025 | 2.055 | 2.083 | 2.118 | 2.149 | 2.172 |
| 71 | 2.192 | 2.209 | 2.228 | 2.250 | 2.262 | 2.291 | 2.332 | 2.382 | 2.423 | 2.453 | 2.477 | 2.497 |
| 72 | 2.523 | 2.546 | 2.574 | 2.598 | 2.641 | 2.678 | - | - | - | - | - | - |

| t | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | - | - | - | - | - | 126,6 | 130,6 | 133,7 | 135,1 | 136,8 | 139,2 | 140,8 |
| 69 | 141,8 | 143,1 | 144,2 | 145,6 | 147,0 | 147,7 | 148,8 | 150,2 | 151,9 | 153,0 | 154,1 | 155,7 |
| 1970 | 157,2 | 158,7 | 160,2 | 161,7 | 163,7 | 166,0 | 168,7 | 171,2 | 173,6 | 176,5 | 179,1 | 181,0 |
| 71 | 182,7 | 184,1 | 185,7 | 187,5 | 188,5 | 190,9 | 194,3 | 198,5 | 201,9 | 204,4 | 206,4 | 208,1 |
| 72 | 210,2 | 212,2 | 214,5 | 216,5 | 220,1 | 223,2 | - | - | - | - | - | - |

| t | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | - | - | - | - | - | - | 128,6 | 132,2 | 134,4 | 136,0 | 138,0 | 140,0 |
| 69 | 141,3 | 142,5 | 143,6 | 144,9 | 146,3 | 147,4 | 148,2 | 149,5 | 151,0 | 152,5 | 153,5 | 154,9 |
| 1970 | 156,5 | 158,0 | 159,5 | 161,0 | 162,7 | 164,9 | 167,4 | 170,0 | 172,4 | 175,0 | 177,8 | 180,0 |
| 71 | 181,8 | 183,4 | 184,9 | 186,6 | 188,0 | 189,7 | 192,6 | 196,4 | 200,2 | 203,2 | 205,4 | 207,2 |
| 72 | 209,2 | 211,2 | 213,3 | 215,5 | 218,3 | 221,6 | - | - | - | - | - | - |

τάσεως τόσον τῶν τυχόν ὑφισταμένων ἐποχικῶν ἤ γενικώτερον περιόδων κυμάνσεων ὅσον καί τῶν τυχόν ἀκανονίστων τοιούτων μέ ἀποτέλεσμα νά διευκολύνεται σημαντικῶς ἡ ἀπομόνωσις καί διερεύνησις τῆς μακροχρονίου τάσεως. Οὕτω π.χ. ἐνῶ ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (8.2) - μηνιαῖαι πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας - ἦτο μᾶλλον δυσχερές νά προσδιορισθῆ ἡ μορφή καί τό μέγεθος τῆς ὑφισταμένης μακροχρονίου τάσεως, ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τόν πίνακα (8.6) 12-μηνιαίων κινητῶν μέσων καθίσταται ἀμέσως προφανές ὅτι αἱ πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας παρουσιάζουν μίαν ἀνοδικήν πορείαν - σχεδόν εὐθύγραμμον μέ ἐτησίαν αὔξησιν 20-25 ἐκ. ΩΧΒ καί μηνιαίαν τοιαύτην 1,5 - 2 περίπου.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες - πλεονεκτήματα - τῶν κινητῶν μέσων προστιθέμεναι εἰς τήν ἁπλότητα τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν καθιστοῦν τάς ἀντιστοίχους σειρᾶς - κινητῶν μέσων - ἐξαιρετικῶς χρήσιμον καί εὐρύτατα ἐφαρμοζόμενον ὄργανον τόσον διά τήν ἀπομόνωσιν καί μελέτην τῆς μακροχρονίου τάσεως ὅσον καί διά τήν ἀπαλειφήν τῆς τυχόν ὑφισταμένης ἐποχικότητος.

Ἕνα μειονέκτημα τό ὁποῖον παρουσιάζει ἡ σειρά τῶν κινητῶν μέσων ἐν σχέσει πρός τήν ἀρχικήν χρονολογικήν σειράν εἶναι ἡ ἀπώλεια ὡρισμένων ὅρων εἰς τήν ἀρχήν καί τό τέλος τῆς σειρᾶς - ἴδε πίνακας (8.4), (8.5) καί (8.6) -. Συγκεκριμένως, ἡ χρησιμοποίησις κινητῶν μέσων τάξεως 2λ ἤ 2λ+1 συνεπάγεται ὡς εἴδομεν τήν ἀπώλειαν ἀνά λ ὅρων εἰς τήν ἀρχήν καί τό πέρας τῆς σειρᾶς μέ ἀποτέλεσμα νά καθίσταται δυσχερής - ἰδιαιτέρως εἰς τάς περιπτώσεις βραχυχρονίων σειρῶν - ἡ μελέτη αὐτῶν λόγῳ ἐλλείψεως ἐπαρκῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων.

Εἰς τήν πρᾶξιν τό μειονέκτημα τοῦτο ἀντιμετωπίζεται συνήθως διά τῆς χρησιμοποιήσεως κινητῶν μέσων μικροῦ μήκους 3, 4 ἤ τό πολύ 5 χρονικῶν μονάδων. Ὡς εἶναι εὐνόητον, διά τήν χρησιμοποίησιν 12-μηνιαίων κινητῶν μέσων πρός ἀπαλειφήν τῆς ἐποχικότητος καθίσταται ἀπαραίτητος ἡ ὕπαρξις μηνιαίων δεδομένων διά μίαν σειρᾶν αὐτῶν, συνήθως δέ ὄχι μικροτέραν τῶν 5 ἤ 6. Ἕνα ἄλλο μειονέκτημα τῶν κινητῶν μέσων καί συγκεκριμένως ὁ ἐπιρρεασμός αὐτῶν ὑπό ἀκραίων τιμῶν ἀντιμετωπίζεται εἰς τήν πρᾶξιν διά τῆς χρησιμοποιήσεως σταθμικῶν κινητῶν μέσων κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν ὁποίων δίδεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, μεγαλύτερον βάρος εἰς τούς κεντρικούς ὅρους τῶν χρησιμοποιουμένων διαδοχικῶν ἀθροισμάτων.

## 8.3.2 Γραμμαί καί Ἐξισώσεις Τάσεως. Δεῖκται Προσαρμογῆς

Ἡ μέθοδος ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται συνηθέστερον διά τόν προσδιορισμόν καί γενικώτερον τήν διερεύνησιν τῆς μακροχρονίου τάσεως μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς, συνίσταται εἰς τήν προσαρμογήν πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα μιᾶς γραμμῆς - ἤ ἄλλως μιᾶς μαθηματικῆς ἐξισώσεως - ἡ ὁποία συνοψίζουσα τά ἐν λόγῳ δεδομένα, ἀφ' ἑνός περιγράφει τήν νομοτέλειαν ἡ ὁποία διέπει - ἐν γένει - τήν μακροχρόνιον ἐξέλιξιν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς, ἀφ' ἑτέρου δέ ἐπιτρέπει - προεκτεινομένη καταλλήλως - τήν πρόβλεψιν μ ε λ λ ο ν τ ι κ ῶ ν τιμῶν αὐτῆς μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν.

Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ προσαρμογή μιᾶς τοιαύτης γραμμῆς - καλουμένης ἐν προκειμένῳ γ ρ α μ μ ῆ ς τ ά σ ε ω ς - γίνεται κατά βάσιν διά τῶν ἰδίων μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν γραμμῶν παλινδρομήσεως - διμεταβλητοί στατιστικοί πληθυσμοί - καί αἱ ὁποῖαι μᾶς ἀπησχόλησαν λεπτομερῶς εἰς τό κεφάλαιον 5. Οὕτω, μία γραμμή τάσεως προσδιορίζεται συνήθως εἴτε γ ρ α φ ι κ ῶ ς, χρησιμοποιουμένου πρός τοῦτο τοῦ ἀντιστοίχου χρονογράμματος, εἴτε ὑ π ο λ ο γ ι σ τ ι κ ῶ ς - διά καταλλήλων ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν - λαμβανομένων ἀπ' εὐθείας ὑπ' ὄψιν τῶν - ἀριθμητικῶν - ἐμπειρικῶν δεδομένων.

Ἡ γ ρ α φ ι κ ή μέθοδος εἶναι ἁπλουστάτη, συνίσταται δέ εἰς τήν χ ά ρ α ξ ι ν μιᾶς γραμμῆς - εὐθείας ἤ καμπύλης ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως - ἡ ὁποία διερχομένη δ ι ά μ έ σ ο υ τοῦ ν έ φ ο υ ς τῶν σημείων $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ τοῦ ἀντιστοίχου διαγράμματος, ἀφ' ἑνός περιγράφει συνοπτικῶς τήν μ ο ρ φ ή ν αὐτοῦ, ἀφ' ἑτέρου δέ συνοψίζει τά ὑπό μελέτην ἐμπειρικά δεδομένα μέ τήν μεγαλυτέραν δυνατήν προσέγγισιν. Ἡ ἐν λόγῳ γραμμή χαρασσομένη εἴτε δι'ἐ λ ε υ θ έ ρ α ς χ ε ι ρ ό ς εἴτε τῇ βοηθείᾳ τῶν καταλλήλων κατά περίπτωσιν ὀ ρ γ ά ν ω ν σ χ ε δ ι ά σ ε ω ς - καμπυλογράμμων, τριγώνων κλπ. - ἐνέχει κατά κανόνα τό στοιχεῖον τῆς ὑ π ο κ ε ι μ ε ν ι κ ό τ η τ ο ς - διαφέρει δηλαδή ἀπό μελετητή εἰς μελετητήν - μ ε ι ο ν έ κ τ η μ α τό ὁποῖον περιορίζει τήν σημασίαν καί τήν πρακτικήν χρησιμότητα τῆς μεθόδου εἰς σημαντικόν βαθμόν. Διά τόν λόγον αὐτόν ἡ γραφική μέθοδος ἐφαρμόζεται συνήθως εἰς ἁπλᾶς μόνον περιπτώσεις καί συγκεκριμένως ἐάν ἡ μορφή τῆς ἀντιστοίχου τάσεως εἶναι σαφῶς ε ὐ θ ύ γ ρ α μ μ ο ς, περιπτώσεις δηλαδή κατά τάς ὁποίας αἱ δυσμενεῖς ἐπιπτώσεις τοῦ ὡς ἄνω μειονεκτήματος εἶναι μᾶλλον ἀσήμαντοι. Μία τοιαύτη εὐθεία, περιγράφουσα συνοπτικῶς τήν μακροχρόνιον τάσιν ἐξελίξεως τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (8.2) - μηνιαίων πωλήσεων ἠλεκτρισμοῦ - ἔχει χαραχθῆ εἰς τό ἀντίστοιχον σχῆμα (8.2).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας - ὑπολογιζομένη διά τῶν γνωστῶν μεθόδων τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἐκ τῆς ἀντιστοίχου γραφικῆς παραστάσεως - εἶναι $y = 115+2t$ ὅπου $t=1,2,\ldots$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν Ἰανουάριον 1968, Φεβρουάριον 1968 κ.ο.κ. Τόσον ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως ὅσον καί ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως αὐτῆς εὑρίσκεται εὐκόλως ὅτι ἡ ὀφειλομένη εἰς τήν μακροχρόνιον τάσιν μηνιαία αὔξησις τῶν πωλήσεων ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας - μή λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν ἄλλων κινήσεων - εἶναι 2 ἑκ. ΩΧΒ ἡ ἐτησία δέ τοιαύτη περίπου 24 ἑκ. ΩΧΒ. Ὁμοίως ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως ἤ τῆς χαραχθείσης εὐθείας εἶναι δυνατόν νά προβλέψωμεν - κατά προσέγγισιν - τήν τιμήν τῆς Y - ὅπως αὕτη θά διεμορφοῦτο ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς μακροχρονίου τάσεως καί μόνον - εἰς μίαν μελλοντικήν στιγμήν. Οὕτω π.χ. διά τόν μῆνα Σεπτέμβριον 1973 - ὅπου $t=69$ - εὑρίσκεται ἡ τιμή $y=115+2.69=253$ κ.ο.κ.

Ἐξ ἄλλου, αἱ ὑ π ο λ ο γ ι σ τ ι κ α ί μέθοδοι εὑρέσεως μιᾶς γραμμῆς τάσεως - κατά κανόνα περισσότερον πολύπλοκοι είς τήν έφαρμογήν άλλά άκριβέστεραι έν γένει καί άντικειμενικαί - συνίστανται είς τόν προσδιορισμόν - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν έμπειρικῶν δεδομένων καί έπί τῇ βάσει ὡρισμένων κριτηρίων - μιᾶς ὅσον τό δυνατόν άπλουστέρας μαθηματικῆς έξισώσεως - καλουμένης έ ξ ι σ ώ σ ε ω ς τ ά σ ε ω ς - ἡ όποία έκφράζουσα τήν ὑπό μελέτην μεταβλητήν Y ὡς συνάρτησιν τοῦ χρόνου t θεωρουμένου έν προκειμένῳ ὡς ά ν ε ξ α ρ τ ή τ ο υ μ ε τ α β λ η τ ῆ ς - άφ'ένός περιγράφει συνοπτικῶς τήν νομοτέλειαν ἡ όποία διέπει μακροχρονίως τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς Y, άφ'ετέρου δέ έπιτρέπει τήν πρόβλεψιν τῶν μελλοντικῶν τιμῶν αύτῆς μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν.

Πρός εὕρεσιν μιᾶς τοιαύτης έξισώσεως χρησιμοποιοῦνται διάφοροι μέθοδοι. Είς τήν πρᾶξιν ἡ καταλληλοτέρα κατά περίπτωσιν έ ξ ί σ ω σ ι ς τ ά σ ε ω ς προσδιορίζεται συνήθως - λόγῳ τῶν ὑφισταμένων έν προκειμένῳ πλεονεκτημάτων - διά τῆς μεθόδου τῶν έ λ α χ ί σ τ ω ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν έφαρμοζομένων - ὅπως καί είς τήν περίπτωσιν τῶν έξισώσεων παλινδρομήσεως - τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου τοῦ έ λ α χ ί σ τ ο υ μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς (ε.μ.τ.σ.). Σπανιώτερον - καί μόνον είς τήν περίπτωσιν ε ὐ θ υ γ ρ ά μ μ ο υ τάσεως - πρός προσδιορισμόν τῆς έν λόγῳ έξισώσεως, έφαρμόζονται καί ὡρισμέναι ἄλλαι - ά π λ ο ύ σ τ ε ρ α ι άλλ' ό λ ι γ ώ τ ε ρ ο ν ά κ ρ ι β ε ῖ ς - μέθοδοι αί όποῖαι θά μᾶς άπασχολήσουν συνοπτικῶς είς τήν έπομένην παράγραφον.

Κατ'άρχήν, κατ'άναλογίαν τῆς στοιχειώδους έξισώσεως παλινδρομήσεως - ἴδε παρ. (5.2) - θά μᾶς άπασχολήσῃ καί έν προκειμένῳ - έπίσης διά λόγους καθαρῶς θεωρητικούς - ἡ ἔννοια καί ό τρόπος προσδιορισμοῦ τῆς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ο υ ς έ ξ ι σ ώ σ ε ω ς τ ά σ ε ω ς. Αί γ ρ α μ μ α ί τ ά σ ε ω ς έ λ α χ ί σ τ ο υ μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς - άνάλογοι τῶν όμωνύμων γραμμῶν παλινδρομήσεως - καί ό τρόπος προσδιορισμοῦ τῆς έξισώσεως αύτῶν δι'έφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν έλαχίστων τετραγώνων εἰς τήν περίπτωσιν χρονολογικῶν σειρῶν, θά μᾶς ἀπασχολήση συνοπτικῶς ἀμέσως μετά.

Ἡ μορφή τῶν διαθεσίμων ἐμπειρικῶν δεδομένων $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ - ὅπου $y_1,y_2,\ldots,y_t,\ldots,y_N$ ἀποτελοῦν τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς Y κατά τάς ἀντιστοίχους χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους - ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν πρᾶξιν - ἴδε παρ. (5.1) - πρός τάς περιπτώσεις τῶν καλουμένων σ υ ν α ρ τ η σ ι α κ ῶ ν σχέσεων ὅπου εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς - ἐν προκειμένῳ τοῦ χρόνου t - ἀντιστοιχεῖ μία καί μόνον τιμή τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης Y. Κατά συνέπειαν, λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι τά ἐν λόγῳ ζεύγη ἤ ἄλλως τά σημεῖα $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ εἶναι π ε π ε ρ α σ μ έ ν α τό πλῆθος, εἶναι δυνατόν - θεωρητικῶς τουλάχιστον - νά προσδιορισθῆ μία μαθηματική ἐξίσωσις

$$y=\varphi(t) \tag{8.8}$$

ἡ ὁποία νά πληροῦται - ἐπαληθεύεται - ὑφ'ἁπάντων τῶν ὡς ἄνω ζευγῶν, νά ὑπολογίζωνται δηλαδή δι'αὐτῆς αἱ παρατηρηθεῖσαι τιμαί τῆς Y ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς t μέ ἀπόλυτον ἀκρίβειαν.

Πράγματι, πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀρκεῖ νά χρησιμοποιηθῆ μία πολυωνυμική ἐξίσωσις N-1 βαθμοῦ τῆς μορφῆς

$$y=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots+\alpha_{N-1} t^{N-1} \tag{8.9}$$

καί αἱ N ἄγνωστοι παράμετροι - συντελεσταί αὐτῆς $\alpha_0, \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{N-1}$ νά ὑπολογισθοῦν δι'ἐπιλύσεως τοῦ γραμμικοῦ συστήματος τό ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων

$$\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots+\alpha_{N-1} t^{N-1} \equiv y_t, \quad t=1,2,\ldots,N \tag{8.10}$$

Ἡ οὕτω προσδιοριζομένη ἐξίσωσις καλεῖται σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς ἐ ξ ί σ ω σ ι ς τ ά σ ε ω ς ἡ καμπύλη δέ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν γραφικήν ἀπεικόνισιν αὐτῆς σ τ ο ι χ ε ι ώ δ η ς γ ρ α μ μ ή ἤ κ α μ π ύ-

λ η τ ά σ ε ω ς. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἐν λόγῳ καμ-
πύλη ὡς ἐκ τοῦ τρόπου προσδιορισμοῦ της διέρχεται δι'
ὅλων τῶν σημείων $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ καί κατά συνέ-
πειαν αἱ δι'αὐτῆς ὑπολογιζόμεναι τιμαί τῆς Y ἀντι-
στοίχως πρός τάς χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους $t=1$,
$2,\ldots,N$ εἶναι - ἀκριβῶς αἱ παρατηρηθεῖσαι τοιαῦται.

Παρά ταῦτα ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις-πέραν τῶν σοβα-
ρωτάτων ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν-παρουσιάζει τόσα καί
τοιαύτης φύσεως μειονεκτήματα ὥστε ἐάν δέν εἶναι ἐν-
τελῶς ἄνευ οἱασδήποτε σημασίας εἶναι ὁπωσδήποτε λίαν
περιωρισμένης πρακτικῆς χρησιμότητος. Πράγματι, ἡ δαι-
δαλώδης καί ἀκανόνιστος μορφή τῆς ἀντιστοίχου καμ-
πύλης πολύ ἀπέχει ἀπό τοῦ νά περιγράφη συνοπτικῶς τήν
νομοτέλειαν ἡ ὁποία διέπει μακροχρονίως τήν ἐξέλιξιν
τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς Y καί συνεπῶς νά ἀποκαλύ-
πτη τήν ὑπό διερεύνησιν μακροχρόνιον τάσιν.

Ἐξ ἄλλου, ἡ κατανόησις τόσον τῆς γενικωτέρας ση-
μασίας μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως, ὅσον καί ἡ ἑρμηνεία
τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν πολυπληθῶν συντελεστῶν της
εἶναι τόσον δυσχερής - ἄν ὄχι ἀδύνατος - ὥστε ἡ ἐξα-
γωγή χρησίμων καί πρακτικῶς ἐφαρμοσίμων συμπερασμά-
των νά καθίσταται οὐσιαστικῶς ἀνέφικτος. Πρός τού-
τοις ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως διά τήν
πρόβλεψιν μελλοντικῶν τιμῶν τῆς Y - πρᾶγμα τό ὁποῖ-
ον ἀποτελεῖ ὡς γνωστόν τόν βασικόν ἀντικειμενικόν σκο-
πόν τοῦ προσδιορισμοῦ μιᾶς ἐξισώσεως τάσεως - θά ἦτο
δι'εὐνοήτους λόγους ἐντελῶς ἐπισφαλής.

Διά τούς ἀνωτέρω λόγους συνάγεται ἀναμφιβό-
λως τό συμπέρασμα ὅτι ἡ στοιχειώδης ἐξίσωσις τάσεως
(8.9) ἔχει ἐν προκειμένῳ θεωρητικήν μόνον ἀξίαν. Οὕ-
τω, προκειμένου ὁ μελετητής νά ἀπομονώση καί νά διε-
ρευνήση τήν μακροχρόνιον τάσιν μιᾶς χρονολογικῆς σει-
ρᾶς ὁδηγεῖται κατ'ἀνάγκην εἰς ἀναζήτησιν, προσδιο-
ρισμόν καί χρησιμοποίησιν τῶν καλουμένων - ἐκ τοῦ ὁ-
μωνύμου κριτηρίου ἐπιλογῆς αὐτῶν - ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν
τ ά σ ε ω ς ἐ λ α χ ί σ τ ο υ μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α-
γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς αἱ ὁποῖαι ἀποτε-
λοῦν ἐν γένει ἱκανοποιητικάς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον
προσεγγίσεις τῶν στοιχειωδῶν ἐξισώσεων τάσεως. εἴ-

ναι πολύ ἁπλούστεραι αὐτῶν, περισσότερον εὔχρηστοι καί ὁπωσδήποτε ἀμέσου πρακτικῆς χρησιμότητος.

Συγκεκριμένως, ὁ μελετητής ἔχων εἰς τήν διάθεσίν του τά ἐμπειρικά δεδομένα $(t,y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ ἐπιδιώκει ἐν προκειμένῳ καί ἐν ὄψει τῶν ὡς ἄνω δυσκολιῶν τόν προσδιορισμόν - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως - μιᾶς ἁπλῆς μαθηματικῆς ἐξισώσεως

$$y=f(t,\alpha,\beta) \tag{8.11}$$

διά τῆς ὁποίας νά ἐπιτυγχάνωνται κατά βάσιν οἱ κάτωθι ἀντικειμενικοί σκοποί:

(i) Νά περιγράφεται συνοπτικῶς ἡ νομοτέλεια ἡ ὁποία διέπει ἐ ν γ έ ν ε ι τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς Y, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἡ μακροχρόνιος τάσις τῆς ἀντιστοίχου χρονολογικῆς σειρᾶς καί

(ii) νά καθορίζεται μία συγκεκριμένη ποσοτική διαδικασία διά τῆς ὁποίας νά καθίσταται δυνατόν νά ὑπολογισθοῦν μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν αἱ τιμαί τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y εἰς διαφόρους - μελλοντικάς κατά κανόνα - χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους.

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν, ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων παλινδρομήσεως ὁ μελετητής ἔχει νά ἀντιμετωπίσῃ δύο ἐπί μέρους προβλήματα:

(i) Νά ἐπιλέξῃ καταλλήλως τήν μορφήν τῆς ἐξισώσεως (8.11) καί

(ii) Μετά τήν ἐπιλογήν γραμμῶν καταλλήλου κατά περίπτωσιν μορφῆς νά προσδιορίσῃ τήν συγκεκριμένην πλέον ἐξίσωσιν τάσεως δι' ὑπολογισμοῦ τῶν ὑπεισερχομένων εἰς αὐτήν παραμέτρων α, β κλπ.

Ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν παλινδρομήσεως ἡ μορφή μιᾶς γραμμῆς τάσεως εἶναι δυνατόν νά εἶναι μία εὐθεία $y=\alpha+\beta t$, μία παραβολή δευτέρου, τρίτου ἤ ἀνωτέρου βαθμοῦ $y=\alpha+\beta t+\gamma t^2$, $y=\alpha+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3$ κ.ο.κ. μία ἁπλῆ ὑπερβολή $y=\frac{1}{\alpha+\beta t}$, $y=\frac{t}{\alpha+\beta t}$, ἀκόμη δέ μία ἐκθετική ἤ γεωμετρική καμπύλη $y=\alpha\beta^t$ ἤ $y=\alpha t^\beta$ ἤ τέλος μία ἄλλη καμπύλη πολυπλοκωτέρου κάπως σχήματος (ἴδε παράγραφον 8.5).

Ἀντικειμενικά ποσοτικά κριτήρια διά τήν ἐπιλογήν τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (8.11) βασίζονται καί ἐν προκειμένῳ ἐπί τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν προσαρμογῆς. Πέραν ὅμως τῶν ἐν λόγῳ κριτηρίων ἰδιάζουσαν βαρύτητα διά τήν λῆψιν τῆς σχετικῆς ἀποφάσεως ἔχουν ἐπίσης ἡ ἁπλότης τῆς χρησιμοποιουμένης ἐξισώσεως, ἡ εὐκολία κατανοήσεως τῆς σημασίας αὐτῆς ὡς ἐπίσης ἡ δυνατότης ἀμέσου καί ἀνταποκρινομένης εἰς τά πράγματα ἑρμηνείας τῶν παραμέτρων της. Πρός τούτοις ἐπιδιώκεται συνήθως ὅπως ἡ μορφή τῆς χρησιμοποιουμένης οἰκογενείας καμπύλων νά προσιδιάζη ὅσον τό δυνατόν περισσότερον πρός τήν ἰδεατήν γραμμήν ἡ ὁποία συνοψίζει κατά προσέγγισιν τό σχῆμα τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους. Τέλος, δέον νά λεχθῆ ὅτι εἰς πολλάς περιπτώσεις ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως (8.11) καθορίζεται ἐκ τῆς φύσεως τῶν πραγμάτων καί συγκεκριμένως ἐξ ὑφισταμένης περί τοῦ τρόπου τῆς ἐν γένει διαχρονικῆς ἐξελίξεως τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς θ ε ω ρ ί α ς ἤ γενομένης σχετικῆς ὑ π ο θ έ σ ε ω ς.

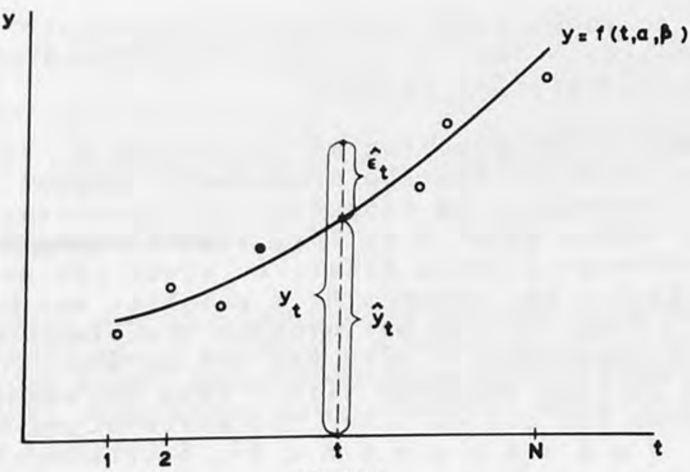
Μετά τήν καθ᾽οἱονδήποτε τρόπον ἐπιλογήν τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (8.11) ἀκολουθεῖ ὁ προσδιορισμός τῆς ζητουμένης συγκεκριμένης καμπύλης - μέλους τῆς οἰκογενείας - δι᾽ὑπολογισμοῦ ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων καταλλήλων ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων α καί β. Ὁ προσδιορισμός τῆς ἰδανικῆς ταύτης καμπύλης γίνεται καί ἐν προκειμένῳ διά τῆς μεθόδου τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς ἤ ἁπλῶς μεθόδου των ἐ λ α χ ί σ τ ω ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν.

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν - ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν παλινδρομήσεως - αἱ παράμετροι α καί β τῆς ἐξισώσεως (8.11) ὑπολογίζονται δι' ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ καλουμένου μ έ σ ο υ τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ο ῦ σ φ ά λ μ α τ ο ς, ἤτοι τῆς ποσότητος

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\hat{\varepsilon}_t^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{y}_t)^2=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y_t-f(t,\alpha,\beta)\right]^2 \qquad (8.12)$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τόν μέσον (ἀριθμητικόν) τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων - ἴδε σχῆμα (8.5) - τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν $y_t$, $t=1,2,\ldots,N$ τῆς μεταβλητῆς Y ἀπό τάς ἀντιστοίχους ἐξ ὑπολογισμοῦ - ο ἰ ο ν ε ί - τιμάς αὐτῆς εὑρισκομένης ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}_t=f(t,\alpha,\beta) \text{ διά } t=1,2,\ldots,N \qquad (8.13)$$




Σχ. 8.5

Ὁ προσδιορισμός τῶν συγκεκριμένων τιμῶν τῶν παραμέτρων α καί β - τάς ὁποίας θά συμβολίζωμεν καί ἐν προκειμένῳ $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ - ἐπιτυγχάνεται ὡς γνωστόν διά τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος

$$\frac{\vartheta}{\vartheta\alpha}\left(\sum_t\hat{\varepsilon}_t^{\,2}\right)=0 \qquad \frac{\vartheta}{\vartheta\beta}\left(\sum_t\hat{\varepsilon}_t^{\,2}\right)=0 \qquad (8.14)$$

καλουμένου ὡς γνωστόν σ υ σ τ ή μ α τ ο ς τῶν κ α ν ο ν ι κ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν.

Τήν συγκεκριμένην ἐξίσωσιν

$$\hat{y}=f(t,\hat{\alpha},\hat{\beta}) \tag{8.15}$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τό μέλος τῆς οἰκογενείας (8.11), τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τάς ὑπολογισθείσας τιμάς $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ τῶν παραμέτρων α καί β, καλοῦμεν ἐ ξ ί σ ω σ ι ν τ ά σ ε ω ς ἐ λ α χ ί σ τ ο υ μ.τ.σ., τήν ἀντίστοιχον δέ πρός αὐτήν καμπύλην γ ρ α μ μ ή ν ἢ κ α μ π ύ λ η ν τ ά σ ε ω ς. Τό μ.τ.σ. περί τήν ὡς ἄνω καμπύλην τάσεως (8.15) συμβολιζόμενον διά τοῦ $\sigma^2$ καί ὑπολογιζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y_t-f(t,\hat{\alpha},\hat{\beta})\right]^2 \tag{8.16}$$

ἀποτελεῖ προφανῶς -ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ - τό ἐλάχιστον τῶν μ.τ.σ. περί οἱανδήποτε ἄλλην καμπύλην τῆς οἰκογενείας (8.11).

Ὁ βαθμός προσεγγίσεως μέ τόν ὁποῖον ἡ προσδιοριζομένη κατά τήν ἀνωτέρω διαδικασίαν γραμμή τάσεως (8.15) συνοψίζει τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως ἤ ἄλλως τό "πόσον καλά" ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη περιγράφει τήν νομοτέλειαν ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς μεταβλητῆς Υ μετρᾶται καί ἐν προκειμένῳ - ὅπως εἰς τήν ἀντίστοιχον περίπτωσιν τῶν καμπύλων παλινδρομήσεως - εἴτε ὑπό τοῦ ὡς ἄνω μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν ἐν λόγῳ καμπύλην εἴτε - λόγῳ τῶν γνωστῶν μειονεκτημάτων τοῦ μ.τ.σ. - ὑπό τοῦ ἀντιστοίχου δ ε ί κ τ ο υ π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς $R^2$, ὁριζομένου καί εἰς τήν παροῦσαν περίπτωσιν ἐκ τῆς σ χ έ σ ε ω ς

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2} \tag{8.17}$$

ὅπου

$$\sigma_y{}^2=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t-\mu_y)^2$$

συμβολίζει τήν διακύμανσιν τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Υ.

Διά συλλογισμῶν ἀναλόγων πρός ἐκείνους οἱ ὁποῖοι ἐξετέθησαν συναφῶς πρός τόν δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$ μιᾶς γραμμῆς παλινδρομήσεως, ἀποδεικνύεται καί ἐν προκειμένῳ ὅτι ὁ δ ε ί κ τ η ς π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς $R^2$ εἶναι κ α θ α ρ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς καί πληροῖ πάντοτε τήν ἀνισότητα $0 \leqslant R^2 \leqslant 1$, λαμβάνων τήν τιμήν $R^2 = 1$ ἐάν ἡ προσαρμοσθεῖσα γραμμή τάσεως διέρχεται δι' ὅλων τῶν σημείων $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ τήν δέ τιμήν $R^2=0$ ἐάν ἡ ἀντίστοιχος χρονολογική σειρά οὐδεμίαν μακροχρόνιον τάσιν παρουσιάζει καί ἡ προσαρμοσθεῖσα γραμμή τάσεως εἶναι ἡ εὐθεῖα $y=\mu_y$ ὅπου $\mu_y$ συμβολίζει τόν μέσον ἀριθμητικόν τῶν τιμῶν τῆς Y.

Αἱ ἐν λόγῳ ἰδιότητες τοῦ δείκτου προσαρμογῆς $R^2$ καθιστοῦν αὐτόν ἕν ἀντικειμενικόν ποσοτικόν κριτήριον ἐπί τῇ βάσει τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατόν νά ἐπιλεγῇ ἡ κατάλληλος κατά περίπτωσιν μορφή τῆς ἐξισώσεως (8.11).

Εἰς τάς ἑπομένας δύο παραγράφους τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς μακροχρονίου τάσεως μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ἐξειδικεύεται διά τῆς προσαρμογῆς εἰς τά ὑφιστάμενα ἐμπειρικά δεδομένα α) μιᾶς εὐθείας $y=\alpha+\beta t$ (παράγραφος 8.4) καί β) διαφόρων ἄλλων καμπύλων πολυπλοκωτέρας μορφῆς (παράγραφος 8.5).

## 8.4 Εὐθύγραμμος Τάσις

Ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διμεταβλητῆς παλινδρομήσεως, ἡ ἁπλότης, ἡ εὐκολία κατανοήσεως τῆς σημασίας αὐτῆς καί ἡ δυνατότης ἀμέσου ἑρμηνείας τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων καθιστοῦν τήν γραμμικήν ἐξίσωσιν

$$y=\alpha+\beta t \tag{8.18}$$

λίαν εὔχρηστον καί ὡς ἐκ τούτου μία ἐκ τῶν πλέον συνήθων καί εὐρύτατα χρησιμοποιουμένων γραμμῶν τάσεως.

Ὁ προσδιορισμός - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - τῶν παραμέτρων α καί β καί ἡ ἐπιλογή μεταξύ τῶν εὐθειῶν τῆς οἰκογενείας (8.18) τῆς καταλληλοτέρας κατά περίπτωσιν ε ὐ θ ε ί α ς τ ά σ ε ω ς γίνεται κατά κανόνα διά τῆς μεθόδου τῶν ἐ λ α χ ί σ τ ω ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν. Εἰς πολλάς ὅμως περιπτώσεις - ὅπου τουλάχιστον ἡ ταχύτης καί ἡ ἁπλότης προέχουν τῆς ἀκριβείας - ἡ εὐθεία τάσεως προσδιορίζεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, καί δι᾿ὡρισμένων ἄλλων μεθόδων αἱ γνωστότεραι τῶν ὁποίων εἶναι α) ἡ μέθοδος τῶν - ἁ π λ ῶ ν ἤ σ τ α θ μ ι κ ῶ ν - μ έ σ ω ν σ η μ ε ί ω ν καί β) ἡ μέθοδος τῶν ἄ κ ρ ω ν σ η μ ε ί ω ν. Τάς ἐν λόγῳ μεθόδους παραθέτομεν κατωτέρω ἀμέσως μετά τήν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὑποθέτομεν ὅτι ὁ μελετητής ἔχει εἰς τήν διάθεσίν του τήν χρονολογικήν σειράν

$$y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_N$$

ἤ ἄλλως τά ἐμπειρικά δεδομένα $(t, y_t)$, $t=1,2,\ldots,N$ καί ἐπιθυμεῖ νά προσαρμόση πρός αὐτά τήν καταλληλοτέραν ἐκ τῶν εὐθειῶν τῆς οἰκογενείας (8.18).

Τό μ.τ.σ. περί οἱανδήποτε τῶν εὐθειῶν τῆς οἰκογενείας (8.18), ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως (8.12), εἶναι

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\hat{\varepsilon}_t^{\,2}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t-\alpha-\beta t)^2 \qquad (8.18)$$

καί κατά συνέπειαν τό σύστημα τῶν κ α ν ο ν ι κ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν (8.16) λαμβάνει ἐν προκειμένῳ τήν - ἀνάλογον πρός τήν (5.48) - μορφήν

$$\begin{aligned}\sum_t y_t &= \alpha N+\beta\sum_t t\\ \sum_t t y_t &= \alpha\sum_t t+\beta\sum_t t^2\end{aligned} \qquad (8.19)$$

Δι᾿ἐπιλύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος προκύπτουν αἱ τιμαί $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῶν ὑπό προσδιορισμόν παραμέτρων α καί β καί κατ᾿ἀκολουθίαν ἡ ζητουμένη ε ὐ θ ε ί α τ ά σ ε ω ς

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t \qquad (8.20)$$

Τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν έν λόγῳ εὐθεῖαν, ὁριζόμενον ὑπό τῆς γενικῆς σχέσεως (8.16), ὑπολογίζεται ἐν προκειμένῳ ἐκ τοῦ τύπου

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\left(\sum_{t=1}^{N} y_t{}^2-\hat{\alpha}\sum_{t=1}^{N} y_t-\hat{\beta}\sum_{t=1}^{N} ty_t\right) \tag{8.21}$$

ὁ ὁποῖος ἀποδεικνύεται κατά τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου τοῦ τύπου (5.55) εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως.

Ὁ βαθμός προσαρμογῆς τῆς οὕτω προσδιοριζομένης εὐθείας τάσεως καί γενικώτερον ἡ ἀκρίβεια - ὁ βαθμός προσεγγίσεως - τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων χαρακτηρίζεται συνήθως - πέραν τοῦ μ.τ.σ. - διά τοῦ ἀντιστοίχου δ ε ί κ τ ο υ  π ρ ο σ α ρ μ ο γ ῆ ς ὑπολογιζομένου ἐκ τῆς σχέσεως

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2} \tag{8.22}$$

ὅπου $\sigma_y{}^2$ συμβολίζει ὡς ἤδη ἐλέχθη τήν διακύμανσιν τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Υ καί ὑπολογίζεται ὡς γνωστόν ἐκ τοῦ τύπου

$$\sigma_y{}^2=\frac{\sum_t y_t{}^2}{N}-\left(\frac{\sum_t y_t}{N}\right)^2 \tag{8.23}$$

Παρ'ὅτι τά ἀνωτέρω συμπεράσματα - τυπικῶς τουλάχιστον - εἰς οὐδέν διαφέρουν τῶν ἀντιστοίχων τύπων τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομήσεως - οἱ μέν προκύπτουν ἐκ τῶν δέ δι'ἁπλῆς ἀντικαταστάσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς Χ ὑπό τοῦ χρόνου t - ἡ ἐφαρμογή αὐτῶν εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι πολύ ἁπλουστέρα. Ἡ ἁπλούστευσις ὀφείλεται εἰς τό γεγονός ὅτι αἱ χρονικαί στιγμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς Υ εὑρίσκονται κατά κανόνα εἰς ἴσας ἀποστάσεις - ἰ σ α π έ χ ο υ ν - ἐπιτυγχάνεται δέ δι'ἑνός ἁπλοῦ - γραμμικοῦ - μετασχηματισμοῦ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς t (τοῦ χρόνου).

Ἐάν τό πλῆθος τῶν δεδομένων - ὅρων τῆς σειρᾶς - εἶναι π ε ρ ι τ τ ό ν ὁ ἐν λόγῳ μετασχηματισμός συνίσταται ἁπλῶς εἰς τήν ἀλλαγήν τῆς ἀρχῆς μετρήσεων (τῶν χρόνων) λαμβανομένης ὡς νέας τοιαύτης τῆς κεντρικῆς (μεσαίας) στιγμῆς ἤ περιόδου. Ἐξ ἄλλου, ἐάν τό πλῆθος τῶν δεδομένων εἶναι ἄ ρ τ ι ο ν πέραν τῆς ὡς ἄνω μετατοπίσεως τῆς ἀρχῆς τῶν μετρήσεων καθίσταται ἀπαραίτητος - πρός ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἁπλοποιήσεως τῶν πράξεων - καί ἡ ἀλλαγή τῆς μ ο ν ά δ ο ς μετρήσεως τοῦ χρόνου λαμβανομένης ὡς νέας τοιαύτης τοῦ ἡ μ ί σ ε ω ς τῆς ἀρχικῆς (π.χ. ἀντί τοῦ ἔτους λαμβάνεται τό ἑξάμηνον κ.ο.κ.).

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐφαρμοζομένης ἐν προκειμένῳ διαδικασίας παρατίθενται κατωτέρω - πίνακες (8.7) καί (8.8) - δύο ἁπλᾶ ἀριθμητικά παραδείγματα. Εἰς τόν πίνακα (8.7) χρησιμοποιοῦνται τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.1) - κατά κεφαλήν εἰσόδημα εἰς σ τ α θ ε ρ ά ς τιμάς - ἐκ τῶν ὁποίων παραλείπεται τό ἔτος 1973 ὥστε τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς νά εἶναι π ε ρ ι τ τ ό ν. Εἰς τόν πίνακα (8.8) περιλαμβανομένου καί τοῦ ἔτους 1973 τό πλῆθος τῶν ὑφισταμένων δεδομένων εἶναι ἄρτιον. Εἰς ἀμφοτέρους τούς ἐν λόγῳ πίνακας διά τοῦ τ συμβολίζεται ὁ χρόνος μετά τήν ἀλλαγήν τῆς ἀρχῆς τῶν μετρήσεων ὡς καί τῆς ἀντιστοίχου μονάδος (δευτέρα περίπτωσις).

Πίναξ 8.7

| $t$ | $\tau$ | $y$ | $\tau^2$ | $\tau y$ | $y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1960 | -6 | 365 | 36 | -2.190 | 133.225 |
| 61 | -5 | 401 | 25 | -2.005 | 160.801 |
| 62 | -4 | 409 | 16 | -1.636 | 167.281 |
| 63 | -3 | 433 | 9 | -1.299 | 187.489 |
| 64 | -2 | 469 | 4 | - 938 | 219.961 |
| 65 | -1 | 509 | 1 | - 509 | 259.081 |
| 66 | 0 | 533 | 0 | 0 | 284.089 |
| 67 | 1 | 558 | 1 | 558 | 311.364 |
| 68 | 2 | 588 | 4 | 1.176 | 345.744 |
| 69 | 3 | 637 | 9 | 1.911 | 405.769 |
| 1970 | 4 | 707 | 16 | 2.828 | 499.849 |
| 71 | 5 | 766 | 25 | 3.830 | 586.756 |
| 72 | 6 | 846 | 36 | 5.076 | 715.716 |
| | 0 | 7.221 | 182 | 6.802 | 4.277.125 |

Εἰς τόν ἀνωτέρω πίνακα ἡ στήλη τ ὑπελογίσθη δι' ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$\tau = t - 1966$$

Οὕτω, τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (8.19) - δοθέντος ὅτι $\sum_{\tau}\tau = 0$ - λαμβάνει τήν ἁπλοποιημένην μορφήν

$$\begin{aligned} \sum_{\tau} y_{\tau} &= \alpha N \\ \sum_{\tau} \tau y_{\tau} &= \beta \sum_{\tau} \tau^2 \end{aligned} \qquad (8.24)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν εὐκόλως αἱ τιμαί τῶν παραμέτρων α καί β, ἤτοι

$$\hat{\alpha} = \frac{7.221}{13} = 555 \text{ (περίπου)} \qquad \text{καί} \quad \hat{\beta} = \frac{6.802}{182} = 37,3 \text{ (περίπου)}$$

Συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης εὐθείας τάσεως εἶναι

$$\hat{y} = 555 + 37.3\tau$$

ὡς εἶναι δέ εὐνόητον προκειμένου νά ὑπολογισθοῦν ἐξ
αὐτῆς αἱ - ο ἱ ο ν ε ί - τιμαί τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντι-
στοιχοῦν εἰς τάς διαφόρους χρονικάς περιόδους χρησι-
μοποιοῦνται αἱ τιμαί τοῦ τ αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ
τοῦ ὡς ἄνω μετασχηματισμοῦ. Οὕτω π.χ. ἡ ἐξ ὑπολογι-
σμοῦ τιμή τῆς Y διά τό ἔτος 1968, δοθέντος ὅτι

$$\tau = 1968 - 1966 = 2, \text{ εἶναι} \qquad y_{68} = 555 + 37,3 \times 2 = 630 \text{ (περίπου)}$$

Κατά τόν αὐτόν τρόπον εὑρίσκονται διά τό ἔτος 1960 καί 1973 (πρόβλεψις) αἱ τιμαί

$$y_{60} = 555 - 37,5 \times 6 = 331 \text{ (περίπου) καί}$$

$$y_{73} = 555 + 37,3 \times 7 = 816 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἐκ τῆς ὑπολογισθείσης ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ $\hat{\beta}$ - καλουμένου ἐν προκειμένῳ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ο ῦ γ ρ α μ μ ι κ ῆ ς τ ά σ ε ω ς - συνάγεται τό συμπέρασμα ὅτι κατά τήν ὑπό μελέτην περίοδον (1960-72) τό κατά κεφαλήν εἰσόδημα - εἰς σταθεράς τιμάς - παρουσιάζει μίαν μέσην ἐτησίαν αὔξησιν τῆς τάξεως τῶν \$37.-

Ὁ βαθμός προσαρμογῆς - πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα - τῆς ὡς ἄνω εὐθείας καί κατά συνέπειαν ἡ ποιότης - ἀκρίβεια, βαθμός προσεγγίσεως - τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων χαρακτηρίζεται ὡς εἴδομεν ἐκ τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί αὐτήν ἤ καλλίτερον ἐκ τοῦ δείκτου προσαρμογῆς $R^2$.

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (8.21) λαμβάνομεν

$$\sigma^2=\frac{1}{13}(4.277.125-555\times 7.221-37{,}3\times 6.802) = 1.212$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ τύπου (8.23) ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν τῆς Y εἶναι

$$\sigma_y{}^2=\frac{4.277.125}{13}-\left(\frac{7.221}{13}\right)^2=20.984$$

καί συνεπῶς ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ ἔχει ἐν προκειμένῳ τήν τιμήν

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma_y{}^2}=1-\frac{1.212}{20.984}=0{,}94$$

ἐκ τῆς ὁποίας καθίσταται προφανές ὅτι ἡ προσαρμοσθεῖσα εὐθεία συνοψίζει τά δεδομένα κατά τρόπον λίαν ἱκανοποιητικόν.

Ἄς ἴδωμεν τώρα τόν τρόπον ἐργασίας εἰς τάς περιπτώσεις σειρῶν μέ ἄ ρ τ ι ο ν πλῆθος ὅρων. Οἱ σχετικοί ὑπολογισμοί παρατίθενται εἰς τόν ἀκόλουθον πίνακα (8.8).

Ἐν προκειμένῳ ἡ βοηθητική μεταβλητή τ ὑπολογίζεται δι'ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$\tau=2\left(t-\frac{1966+1967}{2}\right)$$

Πίναξ 8.8

| t | τ | y | $\tau^2$ | τy | $y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1960 | -13 | 365 | 169 | -4.745 | 133.225 |
| 61 | -11 | 401 | 121 | -4.411 | 160.801 |
| 62 | - 9 | 409 | 81 | -3.681 | 167.281 |
| 63 | - 7 | 433 | 49 | -3.031 | 187.489 |
| 64 | - 5 | 469 | 25 | -2.345 | 219.961 |
| 65 | - 3 | 509 | 9 | -1.527 | 259.081 |
| 66 | - 1 | 533 | 1 | - 533 | 284.089 |
| 67 | 1 | 558 | 1 | 558 | 311.364 |
| 68 | 3 | 588 | 9 | 1.764 | 345.744 |
| 69 | 5 | 637 | 25 | 3.185 | 405.769 |
| 1970 | 7 | 707 | 49 | 4.949 | 499.849 |
| 71 | 9 | 766 | 81 | 6.894 | 586.756 |
| 72 | 11 | 846 | 121 | 9.306 | 715.716 |
| 73 | 13 | 920 | 169 | 11.960 | 846.400 |
| | 0 | 8.141 | 910 | 18.343 | 5.123.525 |

Τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (8.19) λαμβάνει καί πάλιν - καθ'ὅσον $\Sigma\tau=0$ - τήν ἁπλοποιημένην μορφήν (8.24) ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀμέσως

$$\alpha=\frac{8.141}{14}=581 \text{ (περίπου) καί } \beta=\frac{18.343}{910}=20$$

καί συνεπῶς ὡς ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας τάσεως τήν

$$\hat{y}=581+20\tau$$

Ἐξυπακούεται ὅτι προκειμένου ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως νά ὑπολογισθῆ μία οἱαδήποτε - οἱονεί - τιμή τῆς Y θά πρέπει ἡ μεταβλητή τ νά λάβη τήν κατάλληλον - εἰς τήν νέαν κλίμακα - τιμήν. Οὕτω, π.χ. διά νά ὑπολογισθῆ ἡ τιμή τῆς Y διά τό ἔτος 1964 δέον νά τεθῆ τ=-5 ὅτε εὑρίσκομεν $\hat{y}_{64}=481$, διά τό ἔτος 1976 (πρόβλεψις) θά τεθῆ τ=19 ὅτε $\hat{y}_{76}=961$ κ.ο.κ. Πρός ὑπολογισμόν τοῦ δείκτου προσαρμογῆς $R^2$ ἐφαρμόζονται καί πάλιν οἱ τύποι (8.21), (8.22) καί (8.23) καί ἔχομεν

$$\sigma^2=\frac{1}{14}(5.123.525-581\times 8.141-20\times 18.343) = 1.910$$

$$\sigma_y^2=\frac{5.123.525}{14}-\left(\frac{8.141}{14}\right)^2=28.405$$

$$\text{ὅτε } R^2=1-\frac{1.910}{28.405}=0.93$$

Εἰς τά ἀνωτέρω παραδείγματα οἱ ὅροι τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς ἀναφερόμενοι εἰς ἐ τ ή σ ι α δεδομένα ἦσαν σχετικῶς ὀλιγάριθμοι καί ὡς ἐκ τούτου ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τῆς ἀντιστοίχου εὐθείας τάσεως ἦτο κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἁπλῆ. Εἰς πολλάς ὅμως περιπτώσεις - κυρίως εἰς οἰκονομικάς σειράς - τά δεδομένα ἀναφέρονται εἰς μικροτέρας χρονικάς περιόδους - κατά κανόνα εἶναι μ η ν ι α ῖ α - καί ὁ προσδιορισμός τῆς ἀντιστοίχου τάσεως ἀπαιτεῖ - λόγῳ τοῦ πλήθους τῶν δεδομένων - ἐπιπόνους καί μακροσκελεῖς ὑπολογισμούς. Εἰς τάς ἐν λόγῳ περιπτώσεις πρός ἁπλούστευσιν τῆς σχετικῆς διαδικασίας χρησιμοποιοῦνται πολλάκις - ὡς τιμαί τῆς μεταβλητῆς Y - τά ἐ τ ή σ ι α ἀ θ ρ ο ί σ μ α τ α τῶν δεδομένων ἤ καλλίτερον τά ἀντίστοιχα μ έ σ α μ η ν ι α ῖ α δεδομένα (τά ἐτήσια ἀθροίσματα διῃρημένα διά 12), τά ὁποῖα - πέραν τῶν ἄλλων - εἶναι ἀπηλλαγμένα καί τῶν τυχόν ὑφισταμένων ἐποχικῶν κυμάνσεων. Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐφαρμοζομένης ἐν προκειμένῳ διαδικασίας - διά τόν προσδιορισμόν τῆς ἀντιστοίχου τάσεως - παραθέτομεν κατωτέρω - πίναξ (8.9) - ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα χρησιμοποιοῦντες ὡς ἀρχικά δεδομένα τάς μηνιαίας πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τοῦ πίνακος (8.2). Εἰς τήν στήλην y τοῦ πίνακος (8.9) παρατίθενται αἱ κατ'ἔτος μέσαι μηνιαῖαι τιμαί τῆς Y εὑρισκόμεναι διά διαιρέσεως τῶν ἀντιστοίχων ἐτησίων ἀθροισμάτων διά 12 (π.χ. 1.519:12=127 περίπου κ.ο.κ.).

Εἰς τόν ἐν λόγῳ πίνακα μετά τήν ἀλλαγήν τῆς ἀρχῆς τῶν μετρήσεων (τοῦ χρόνου) - δι'ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ τ=t-1970 - ἔχομεν Στ=0 καί συνεπῶς οἱ συντελεσταί $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ τῆς ζητουμένης εὐθείας τάσεως θά

Πίναξ 8.9

| t | τ | y | $\tau^2$ | τy | $y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | -2 | 127 | 4 | -254 | 16.129 |
| 69 | -1 | 148 | 1 | -148 | 21.904 |
| 1970 | 0 | 166 | 0 | 0 | 27.556 |
| 71 | 1 | 191 | 1 | 191 | 36.481 |
| 72 | 2 | 223 | 4 | 446 | 49.729 |
| | 0 | 855 | 10 | 235 | 151.799 |

ὑπολογισθοῦν ἐκ τοῦ ἁπλοποιουμένου κανονικοῦ συστήματος (8.24). Οὕτω, ἔχομεν

$$\hat{\alpha}=\frac{855}{5}=171 \text{ καί } \hat{\beta}=\frac{235}{10}=23,5$$

καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης εὐθείας τάσεως εἶναι

$$\hat{y}=171+23,5\tau$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως διά τ=-2,-1,0,1,2, ὑπολογίζονται εὐκόλως αἱ - ο ἱ ο ν ε ί - μέσαι μηνιαῖαι πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τά ἔτη 1968-72. Ὁμοίως διά καταλλήλους τιμάς τοῦ τ εἶναι δυνατόν νά εὑρεθοῦν αἱ ἀναμενόμεναι μέσαι μηνιαῖαι πωλήσεις διά τά ἑπόμενα ἔτη (προβλέψεις). Οὕτω π.χ. διά τ=5 ἔχομεν $\hat{y}_5$=289 τό ὕψος δηλαδή τό ὁποῖον ἀναμένεται νά ἔχουν κατά μέσον ὅρον αἱ μηνιαῖαι πωλήσεις τοῦ ἔτους 1975 κ.ο.κ.

Συνήθως ὅμως, πέραν τῶν ἀνωτέρω - κατ᾽ἔτος-μέσων μηνιαίων τιμῶν τῆς Y, ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται καί διά τάς ἐπί μέρους - οἱονεί - μ η ν ι α ί α ς τιμ ά ς αὐτῆς, καλουμένας πολλάκις καί μ η ν ι α ί α ς τ ι μ ά ς τῆς τ ά σ ε ω ς, διότι, πέραν τῶν ἄλλων, αἱ ἐν λόγῳ - ἐξ ὑπολογισμοῦ - τιμαί συγκρινόμεναι - ὡς θά ἴδωμεν εἰς τήν παράγραφον (8.6) - πρός τάς ἀντιστοίχους ἐκ παρατηρήσεως μηνιαίας τιμάς τῆς μεταβλητῆς, ἐπιτρέπουν τήν διαπίστωσιν τῶν τυχόν ὑφισταμένων έποχικῶν κυμάνσεων ὡς καί τήν μέτρησιν τῆς έντάσεως αὐτῶν διά τοῦ ὑπολογισμοῦ καταλλήλων δεικτῶν (έποχικότητος).

Ὁ ὑπολογισμός τῶν έν λόγῳ - οἱονεί - μηνιαίων τιμῶν τῆς Y ἤ ἄλλως τῶν μ η ν ι α ί ω ν τ ι μ ῶ ν τῆς τ ά σ ε ω ς έπιτυγχάνεται, τῇ βοηθείᾳ τῆς άνωτέρω έξισώσεως, ὡς ἑξῆς:

(α) Ἐκ τοῦ συντελεστοῦ $\hat{\beta}$, ὁ ὁποῖος άντανακλᾶ έν προκειμένῳ τήν ἀπό ἔ τ ο υ ς εἰς ἔτο ς αὔξησιν - ἤ γενικώτερον μεταβολήν - τῆς μέσης μηνιαίας τιμῆς τῆς Y, ὑπολογίζεται - διά διαιρέσεως αὐτοῦ διά 12 - ἡ ἀπό μῆνα εἰς μ ῆ ν α άντίστοιχος αὔξησις (μεταβολή) αὐτῆς. Οὕτω εἰς τό προκείμενον παράδειγμα εὑρίσκεται ὅτι ὁ μηνιαῖος συντελεστής τάσεως - δηλαδή ἡ ἀπό μῆνα εἰς μῆνα μεταβολή τῆς Y ὡς αὕτη θά διεμορφοῦτο ὑπό τήν έπίδρασιν μ ό ν ο ν τῆς μακροχρονίου τάσεως - εἶναι $\hat{\beta}'=\frac{1}{12}\hat{\beta}=2$.

(β) Δίδοντες μίαν τιμήν εἰς τό τ - κατά προτίμησιν τήν μεσαίαν - εὑρίσκομεν έκ τῆς άνωτέρω έξισώσεως τήν άντίστοιχον μέσην μηνιαίαν τιμήν τῆς Y, διά τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν - κατά συνθήκην - ὅτι άναφέρεται εἰς τό χρονικόν διάστημα 16 Ἰουνίου-15 Ἰουλίου - ἤτοι εἰς τήν περί τό μέσον μηνιαίαν περίοδον - τοῦ ὑπ'ὄψιν ἔτους. Διά τ=0 π.χ. εὑρίσκομεν έν προκειμένῳ ὅτι ἡ οἱονεί τιμή τῆς Y διά τό διάστημα 16.6.70 - 15.7.70 εἶναι 171.

(γ) Προσθέτοντες εἰς τήν άνωτέρω τιμήν τῆς Y τό ἥμισυ τοῦ μηνιαίου συντελεστοῦ τάσεως - τήν μεταβολήν δηλαδή ἡ ὁποία άντιστοιχεῖ ἰδεατά εἰς ἕν 15-νθήμερον - εὑρίσκομεν έν προκειμένῳ y=172 τήν τιμήν δηλαδή τῆς Y ἡ ὁποία άντιστοιχεῖ εἰς τόν μῆνα Ἰούλιον 1970.

Κατόπιν τῶν άνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι αἱ - οἱονεί - τιμαί τῆς Y αἱ ὁποῖαι άντιστοιχοῦν εἰς τούς λοιπούς μήνας εὑρίσκονται εὐκόλως διά προσθεσαφαιρέσεως τῶν καταλλήλων πολλαπλασίων τοῦ μηνιαίου συντελεστοῦ τάσεως εἰς τήν τιμήν τοῦ Ἰουλίου 1970 ἤ ἁπλούστερον ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=172+2\tau'$$

ὅπου ἡ μεταβλητή τ΄ μετρᾷ τόν χρόνον μέ ἀρχήν τόν Ἰούλιον 1970 (τ΄=0) καί μονάδα μετρήσεως τόν μ ῆ ν α. Οὕτω π.χ. θέτοντες τ΄=3 εὑρίσκομεν τήν τιμήν $\hat{y}$ = 178 ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν Ὀκτώβριον 1970, διά τ=-5 τήν τιμήν $\hat{y}$=162 τοῦ Φεβρουαρίου 1970 κ.ο.κ. Αἱ οὕτω ὑπολογιζόμεναι μηνιαῖαι τιμαί τῆς τάσεως παρατίθενται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (8.10).

Πίναξ 8.10

| t | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | 112 | 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | 128 | 130 | 132 | 134 |
| 69 | 136 | 138 | 140 | 142 | 144 | 146 | 148 | 150 | 152 | 154 | 156 | 158 |
| 1970 | 160 | 162 | 164 | 166 | 168 | 170 | 172 | 174 | 176 | 178 | 180 | 182 |
| 71 | 184 | 186 | 188 | 190 | 192 | 194 | 196 | 198 | 200 | 202 | 204 | 206 |
| 72 | 208 | 210 | 212 | 214 | 216 | 218 | 220 | 222 | 224 | 226 | 228 | 230 |

Ἐξυπακούεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐφαρμόζεται κατά παρόμοιον τρόπον καί εἰς τήν περίπτωσιν ἀρτίων τῷ πλῆθος ἐτῶν. Ὁ βαθμός προσαρμογῆς τῆς ἐξισώσεως $\hat{y}$=171+23,5τ πρός τά χρησιμοποιηθέντα - διά τόν προσδιορισμόν της - ἐτήσια δεδομένα ἤ καλλίτερον μέσα μηνιαῖα τοιαῦτα, χαρακτηρίζεται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἐκ τοῦ περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ ἤ τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου προσαρμογῆς $R^2$. Τά ἐν λόγῳ μέτρα, ὑπολογιζόμενα δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (8.21) (8.22) καί (8.23) ἔχουν ἐν προκειμένῳ τάς τιμάς

$$\sigma^2=\frac{1}{5}(151.799-171\times 855-23,5\times 235)=72$$

$$\sigma_y{}^2=\frac{151.799}{5}-\left(\frac{855}{5}\right)^2=1.119$$

$$\text{καί } R^2=1-\frac{72}{1.119}=\frac{1.047}{1.119}=0{,}94 \text{ (περίπου)}$$

Ἡ τιμή αὐτή τοῦ δείκτου $R^2$ σημαίνει ἀσφαλῶς ὅτι ἡ ὡς ἄνω εὐθεία προσαρμόζεται πρός τά χρησιμοποιηθέντα - διά τόν προσδιορισμόν της - δεδομένα κατά τρόπον ἄριστον (μέ λίαν ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν). Ἐν προκειμένῳ ὅμως καί πρός ἀποφυγήν τυχόν παρανοήσεων δέον νά τονισθοῦν τά ἑξῆς: Ἡ ἐν λόγῳ τιμή τοῦ $R^2$ ὅσον καί τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. $\sigma^2$ ἀντανακλοῦν τήν διασποράν - περί τήν προσδιορισθεῖσαν εὐθείαν τάσεως - μόνον τῶν κατ' ἔτος μέσων μηνιαίων τιμῶν τῆς Υ ὄχι ὅμως καί τῶν ἀρχικῶν μηνιαίων δεδομένων εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν ὁποίων ἐπιδρᾶ καί ἡ ὑφισταμένη ἐποχικότης.

Ὁ βαθμός προσαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας πρός τά ἀρχικά δεδομένα - ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται, ὡς γνωστόν, ἐκ τῶν ἐπί μέρους διαφορῶν τῶν ἐξ ὑπολογισμοῦ τιμῶν τῆς Υ (Πίναξ 8.10) ἀπό τάς ἀντιστοίχους ἐκ παρατηρήσεως τοιαύτας (Πίναξ 8.2) - εἶναι ἐν γένει πολύ μικρότερος, ἡ δέ διαφορά εἶναι συνάρτησις τῆς ἐντάσεως τῶν ὑφισταμένων ἐποχικῶν κυμάνσεων.

Μέχρι τοῦδε ἐπραγματεύθημεν λεπτομερῶς τήν διαδικασίαν προσδιορισμοῦ μιᾶς εὐθείας τάσεως διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ θά μᾶς ἀπασχολήσουν συνοπτικῶς δύο ἄλλαι μέθοδοι προσδιορισμοῦ μιᾶς εὐθείας τάσεως. Ἀμφότεραι εἶναι ἁπλαῖ ἀλλά μειωμένης κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἀκριβείας καί ὡς ἐκ τούτου ἐφαρμόζονται εἰς τήν πρᾶξιν μᾶλλον σπανίως καί μόνον εἰς περιπτώσεις ὅπου ἡ ἁπλότης καί ἡ ταχύτης προέχει τῆς ἀκριβείας.

Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν - γνωστή ὡς μέθοδος τῶν μ έ σ ω ν σ η μ ε ί ω ν - συνίσταται εἰς τά ἑξῆς: Κατ' ἀρχήν τά ἐμπειρικά δεδομένα ὑποδιαιροῦνται εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδας. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν τό ἥμισυ τῶν ὅρων τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς - λαμβανομένων μέ τήν σειράν ἐμφανίσεώς των - τίθενται εἰς τήν πρώτην ὁμάδα, τό ὑπόλοιπον δέ ἥμισυ εἰς τήν δευτέραν. Ἐάν τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς εἶναι περιττόν, ὁ μεσαῖος ὅρος συνήθως παραλείπεται (ἤ τίθεται εἰς ἀμφοτέρας τάς ὁμάδας).

Μετά τήν τοιαύτην ὁμαδοποίησιν τῶν δεδομένων ὑπολογίζονται εἰς ἑκάστην ὁμάδα οἱ μέσοι (ἀριθμητικοί) τῶν τιμῶν τῆς Υ καί τίθενται ἔναντι τῶν μέσων σημείων τῶν ἀντιστοίχων χρονικῶν περιόδων.

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον τά ἐμπειρικά δεδομένα συνοψίζονται εἰς δύο μόνον σημεῖα $(t_A, \mu_A)$ καί $(t_B, \mu_B)$ τά ὁποῖα ὁρίζουν καί τήν ζητουμένην εὐθεῖαν τάσεως. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας - ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης διά δύο ὡρισμένων σημείων - εἶναι ὡς γνωστόν

$$\frac{y-\mu_A}{\mu_B-\mu_A} = \frac{t-t_A}{t_B-t_A} \qquad (8.25)$$

ἡ γραφική δέ ἀπεικόνισις (χάραξις) αὐτῆς εἶναι ἐπίσης ἁπλουστάτη. Ἐφαρμόζοντες π.χ. τά ἀνωτέρω εἰς τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.1) - Υ εἰς σταθεράς τιμάς - ἔχομεν τά ἑξῆς: Τά δεδομένα τῶν ἐτῶν 1960-1966 ἀποτελοῦν τήν Α ὁμάδα τά δέ ὑπόλοιπα (τῶν ἐτῶν 1967-1973) τήν Β ὁμάδα. Οἱ μέσοι τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων - ὑπολογιζόμενοι ὡς ἀστάθμητοι - εἶναι ἀντιστοίχως

$$\mu_A = \frac{1}{7}(365+401+409+433+469+509+533) = \frac{3.119}{7} = 446$$

$$\text{καί } \mu_B = \frac{1}{7}(558+558+637+707+766+846+920) = \frac{5.022}{7} = 717$$

ὡς εἶναι δέ φυσικόν τίθενται ἔναντι τῶν κεντρικῶν ἐτῶν

$$t_A = 1963 \text{ καί } t_B = 1970$$

ἤ ἁπλούστερον - ἐάν θεωρήσωμεν διά λόγους συγκρίσεων (ἴδε Πίνακα 8.7) ὡς ἀρχήν τῶν μετρήσεων τό ἔτος 1966 - ἔναντι τῶν

$$\tau_A = -3 \text{ καί } \tau_B = 4$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς ζητουμένης εὐθείας τάσεως εἶναι

$$\frac{\hat{y}-446}{717-446}=\frac{\tau+3}{4+3} \text{ ἤ ἁπλῶς } \hat{y}=562+38,7\tau$$

ὅπου τ=0,1,2,... ἀντιστοιχεῖ εἰς τά ἔτη 1966,67,68 κλπ.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἐλάχιστα διαφέρει ἐκείνης - $\hat{y}=555+37,3t$ - ἡ ὁποία προέκυψε διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (8.7).

Τοῦτο συμβαίνει διότι ἡ διασπορά τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων περί τήν ἀντίστοιχον εὐθείαν τάσεως - ἐλαχίστου μ.τ.σ. - εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μικρή καί τά ὑφιστάμενα περιθώρια διαφοροποιήσεως τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἐλάχιστα. Ὡς εἶναι ὅμως εὐνόητον ἡ ἀκρίβεια τῆς παρούσης μεθόδου καί ἡ πρακτική χρησιμότης αὐτῆς περιορίζονται σημαντικά ἐάν τά ἐμπειρικά δεδομένα $(t,y_t)$, t=1,2,...,N ἀπέχουν πολύ ἀπό τοῦ νά εὑρίσκωνται ἐπί μιᾶς ἰδεατῆς εὐθείας ἤ τουλάχιστον πλησίον αὐτῆς. Πολλάκις εἰς τούς κεντρικούς ὅρους ἑκάστης ἐκ τῶν δύο ὁμάδων δίδεται μεγαλυτέρα βαρύτης - ἐν σχέσει πρός τούς ἀντιστοίχους ἀκραίους ὅρους αὐτῶν - καί οἱ μέσοι $\mu_A$ καί $\mu_B$ ὑπολογίζονται ὡς σ τ α θ μ ι κ ο ί τοιοῦτοι. Ὁ τρόπος ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν μ έ σ ω ν σ τ α θ μ ι κ ῶ ν σ η μ ε ί ω ν - εἶναι προφανής καί δέν θά μᾶς ἀπασχολήσῃ περαιτέρω.

Περισσότερον ἁπλῆ τῆς προηγουμένης - ἀλλά καί ὀλιγώτερον ἐν γένει ἀκριβής - εἶναι ἡ μέθοδος τῶν ἄ κ ρ α ί ω ν σημείων κατά τήν ὁποίαν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν μόνον τά ἀκραῖα σημεῖα - πρῶτον καί τελευταῖον - τῆς σειρᾶς καί ὡς εὐθεία τάσεως θεωρεῖται ἡ εὐθεία ἡ ὁποία τά ἑνώνει. Προφανῶς ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας εἶναι

$$\frac{y-y_1}{y_N-y_1}=\frac{t-t_1}{t_N-t_1} \tag{8.26}$$

προσδιορίζεται δέ ἤ χαράσσεται κατά τρόπον ἁπλούστατον.

Οὕτω π.χ. χρησιμοποιοῦντες καί πάλιν τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.1), μέ ἀρχήν μετρήσεως τοῦ χρόνου τό ἔτος 1966, ἔχομεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας τάσεως τήν

$$\frac{\hat{y}-365}{920-365}=\frac{\tau+6}{7+6} \text{ ἤ ἁπλῶς } \hat{y}=621+42,7\tau$$

σημαντικά διάφορον τῶν προηγουμένων τοιούτων.

## 8.5 Καμπυλόγραμμοι Τάσεις

Εἰς πολλάς περιπτώσεις ἡ μακροχρόνιος τάσις μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ἤ ἄλλως ἡ νομοτέλεια ἡ ὁποία διέπει ἐ ν γ έ ν ε ι τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς ἀντιστοίχου μεταβλητῆς δέν εἶναι δυνατόν νά περιγραφῆ κατά τρόπον ἱκανοποιητικόν ὑπό τῆς εὐθείας $y=\alpha+\beta t$, τοῦτο δέ καθίσταται προφανές ἀφ'ἑνός ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ σημειακοῦ νέφους τοῦ σχετικοῦ χρονογράμματος, ἀφ' ἑτέρου δέ ἐκ τοῦ μεγάλου περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ ἤ καλλίτερον τοῦ μικροῦ - σχετικῶς - δείκτου προσαρμογῆς $R^2$.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς καθίσταται ἀναγκαία ἡ χρησιμοποίησις ὡς γ ρ α μ μ ῶ ν τ ά σ ε ω ς ἑτέρων καμπύλων αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν μεγαλυτέραν ε ὐ ε λ ι ξ ί α ν καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι δυνατόν νά προσαρμοσθοῦν πρός τά ἐμπειρικά δεδομένα καί νά περιγράφουν τόν τρόπον τῆς μακροχρονίου ἐξελίξεως αὐτῶν μέ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν (προσέγγισιν).

Εἰς τήν πρᾶξιν τοιαῦται - περισσότερον εὐέλικτοι - καμπύλαι ἀναζητοῦνται συνήθως - ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς καμπυλογράμμου παλινδρομήσεως - εἴτε μεταξύ τῶν γραμμῶν π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ῆ ς μορφῆς $y=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots+\alpha_\nu t^\nu$ καί ἰδιαιτέρως μεταξύ τῶν δ ε υ τ ε ρ ο β α θ μ ί ω ν (παραβολῶν) ἤ τό πολύ τ ρ ι τ ο β α θ μ ί ω ν τοιούτων, εἴτε - ἀναλόγως τῆς φύσεως τῶν δεδομένων καί τῶν κατά περίπτωσιν ἀναγκῶν - μεταξύ ἄλλων εἰδικωτέρας μορφῆς καμπύλων ὡς π.χ. μία ὑ π ε ρ β ο λ ή, μία ἐ κ θ ε τ ι κ ή ἤ ἄλλως ἡμιλ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ή καμπύλη, ἡ γνωστή ὡς γ ε ν ι-κ ε υ μ έ ν η ἐ κ θ ε τ ι κ ή καμπύλη, ή λ ο γ ι σ τ ι κ ή τοιαύτη κ.ο.κ.

Μετά τήν ἐπιλογήν - βάσει τῶν γνωστῶν ἤδη κριτηρίων τῆς ἁ π λ ό τ η τ ο ς, εὐκολίας κ α τ α ν ο ή σ ε ω ς καί ἑ ρ μ η ν ε ί α ς, ὑφισταμένης θ ε ω ρ ί α ς, τοῦ σ χ ή μ α τ ο ς τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους κλπ - τῆς μ ο ρ φ ῆ ς τῆς ὑπό προσδιορισμόν καμπύλης ἤ ἄλλως τῆς χρησιμοποιηθησομένης οἰκογενείας καμπύλων, ὁ προσδιορισμός τῆς σ υ γ κ ε κ ρ ι μ έ ν η ς πλέον γ ρ α μ μ ῆ ς τ ά σ ε ω ς διά τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν καταλληλοτέρων κατά περίπτωσιν τιμῶν τῶν ὑπεισερχομένων ἀγνώστων παραμέτρων, γίνεται κατά κανόνα - ὁπωσδήποτε δέ τῇ βοηθείᾳ τῶν ὑφισταμένων ἐμπειρικῶν δεδομένων - διά τῆς μεθόδου τῶν Ἐλαχίστων Τετραγώνων. Ἡ ἀκολουθουμένη ἐν προκειμένῳ διαδικασία εἰς οὐδέν διαφέρει - τυπικῶς τουλάχιστον - ἐκείνης ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διμεταβλητῆς καμπυλογράμμου παλινδρομήσεως, οἱ διάφοροι δέ τύποι, σχέσεις κλπ. προκύπτουν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων τῆς παλινδρομήσεως δι'ἁπλῆς ἀντικαταστάσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X διά τοῦ χρόνου t.

Ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ ὡρισμένων - τῶν πλέον ἀντιπροσωπευτικῶν καί συνηθέστερον χρησιμοποιουμένων εἰς τήν πρᾶξιν - καμπύλων τάσεως ὡς καί οἱ τύποι ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀντιστοίχου πρός αὐτάς μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί δείκτου προσαρμογῆς $R^2$ παρατίθενται συνοπτικῶς κατωτέρω.

### 8.5.1 Καμπύλαι Πολυωνυμικῆς Μορφῆς

Ἐάν αἱ διαφοραί $y_{t+1}-y_t$, t=1,2,... τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς ὑπό μελέτην χρονολογικῆς σειρᾶς βαίνουν αὐξανόμεναι (ἤ μειούμεναι) κατ'ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ή ν πρόοδον - ἔστω καί κατά προσέγγισιν - ἡ μακροχρόνιος τάσις τῆς σειρᾶς δύναται νά περιγραφῆ κατά τρόπον ἱκανοποιητικόν ὑπό τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (π α ρ α β ο λ ῆ ς)

$$y=\alpha+\beta t+\gamma t^2 \qquad (8.27)$$

Τό σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (8.14) δι' ἐπιλύσεως τοῦ ὁποίου προσδιορίζονται αἱ ἄγνωστοι παράμετροι α,β,γ λαμβάνει ἐν προκειμένῳ τήν μορφήν

$$\begin{aligned} \Sigma y_t &= \alpha N + \beta \Sigma t + \gamma \Sigma t^2 \\ \Sigma t y_t &= \alpha \Sigma t + \beta \Sigma t^2 + \gamma \Sigma t^3 \\ \Sigma t^2 y_t &= \alpha \Sigma t^2 + \beta \Sigma t^3 + \gamma \Sigma t^4 \end{aligned} \tag{8.28}$$

ἐφαρμοζομένου δέ τοῦ γνωστοῦ - ἴδε εὐθύγραμμον τάσιν - μετασχηματισμοῦ τῶν χρόνων - ἀλλαγή τῆς ἀρχῆς καί τῆς μονάδος μετρήσεως - ἁπλουστεύεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \Sigma y_\tau &= \alpha N + \gamma \Sigma \tau^2 \\ \Sigma \tau y_\tau &= \beta \Sigma \tau^2 \\ \Sigma \tau^2 y_\tau &= \alpha \Sigma \tau^2 + \gamma \Sigma \tau^4 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Ὁ τύπος (8.16) διά τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν κατά τήν ὡς ἄνω διαδικασίαν προσδιοριζομένην π α ρ α β ο λ ι κ ή ν τ ά σ ι ν

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\tau + \hat{\gamma}\tau^2 \tag{8.30}$$

λαμβάνει ἐν προκειμένῳ τήν μορφήν

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}(\Sigma y_\tau{}^2 - \hat{\alpha}\Sigma y_\tau - \hat{\beta}\Sigma\tau y_\tau - \hat{\gamma}\Sigma\tau^2 y_\tau) \tag{8.31}$$

Τέλος, μετά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τῆς διακυμάνσεως $\sigma_y{}^2$ τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Υ, ὁ δείκτης προσαρμογῆς $R^2$ τῆς ἀνωτέρω καμπύλης ὑπολογίζεται, ὅπως καί εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν, διά τοῦ γνωστοῦ τύπου (8.17).

Σπανιώτερον καί εἰς εἰδικάς μόνον περιπτώσεις, πέραν τῆς δευτεροβαθμίου παραβολῆς (8.27), χρησιμοποιεῖται ἐπίσης ἡ τριτοβάθμιος καμπύλη

$$y = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \tag{8.32}$$

Οἱ ἄγνωστοι παράμετροι τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης ὡς καί τό περί αὐτήν μ.τ.σ. $\sigma^2$ προσδιορίζονται κατά τρόπον ἀνάλογον. Τό ἀντίστοιχον σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων ὡς καί οἱ τύποι ὑπολογισμοῦ τοῦ $\sigma^2$ καί $R^2$ προκύπτουν εὐκόλως δι᾽ἁπλῆς γενικεύσεως τῶν ἀνωτέρω. Γενικώτερον περί τῶν καμπύλων πολυωνυμικῆς μορφῆς ἴδε παράγραφον (5.6).

### 8.5.2 Καμπῦλαι Ὑπερβολικῆς Μορφῆς

Εἰς πολλάς περιπτώσεις ἡ μακροχρόνιος τάσις μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς περιγράφεται μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{1}{y}=\alpha+\beta t \tag{8.33}$$

ἡ ὁποία ὡς γνωστόν παριστᾶ μίαν ὑπερβολήν.

Τοῦτο συμβαίνει ἐάν οἱ ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ι τῶν ὅρων τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς - ἀφοῦ φυσικά ἐξομαλυνθοῦν προηγουμένως ἐκ τῶν τυχόν ὑφισταμένων ἐποχικῶν κυμάνσεων δι᾽ὑπολογισμοῦ καταλλήλων κινητῶν μέσων κλιμακοῦνται - βαίνουν (αὐξάνονται ἤ ἐλαττοῦνται) κατ᾽ ἀριθμητικήν περίπου πρόοδον.

Δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$y'=\frac{1}{y} \tag{8.34}$$

διά χρησιμοποιήσεως δηλαδή ἀντί τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Y τῶν ἀντιστρόφων των, ἡ ἐξίσωσις (8.33) ἀνάγεται ὡς γνωστόν εἰς τήν γραμμικήν τοιαύτην

$$y'=\alpha+\beta t \tag{8.35}$$

καί ὁ προσδιορισμός πλέον τῶν παραμέτρων α καί β γίνεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανονικοῦ συστήματος τό ὁποῖον χρησιμοποιεῖται καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου τάσεως. Οὕτω, αἱ παράμετροι α καί β τῆς (8.33) προσδιορίζονται εἰς τήν πρᾶξιν δι᾽ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} \Sigma y'_t &= \alpha N+\beta\Sigma t \\ \Sigma t y'_t &= \alpha\Sigma t+\beta\Sigma t^2 \end{aligned} \tag{8.36}$$

συνηθέστερον δέ ἐκ τοῦ ἁπλοποιημένου τοιούτου

$$\Sigma y'_\tau = \alpha N \qquad (8.37)$$
$$\Sigma \tau y'_\tau = \beta \Sigma \tau^2$$

εὑρισκομένου διά τοῦ γνωστοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ χρόνου ὅπου $\Sigma\tau=0$. Ἐξ ἄλλου, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν οὕτω προσδιοριζομένην ὑπερβολήν

$$\frac{1}{\hat{y}}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t \qquad (8.38)$$

ὑπολογίζεται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἐκ τῆς γνωστῆς - ἐκ τῆς εὐθυγράμμου τάσεως - σχέσεως

$$\sigma^2=\frac{1}{N}(\Sigma y'^2_\tau-\hat{\alpha}\Sigma y'_\tau-\hat{\beta}\Sigma\tau y'_\tau) \qquad (8.39)$$

ὁ δέ δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$R^2=1-\frac{\sigma^2}{\sigma^2_{y'}} \qquad (8.40)$$

ὅπου φυσικά $\sigma^2_{y'}$ συμβολίζει τήν διακύμανσιν τῶν μετασχηματισμένων τιμῶν τῆς Υ.

### 8.5.3 Ἐκθετική Καμπύλη

Ἐάν οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς παρουσιάζουν - κατά προσέγγισιν - σταθεράν ποσοστιαίαν - καί ὄχι ἀπόλυτον ὅπως εἰς τήν περίπτωσιν τῆς εὐθυγράμμου τάσεως - μεταβολήν (αὔξησιν ἤ μείωσιν) ἡ μακροχρόνιος τάσις αὐτῆς εἶναι δυνατόν νά περιγραφῆ ἐπαρκῶς - μέ ἱκανοποιητικήν ἀκρίβειαν - ὑπό τῆς ἐκθετικῆς καμπύλης

$$y=\alpha\beta^t \qquad (8.41)$$

Πρός προσδιορισμόν τῶν ἀγνώστων παραμέτρων τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως ἀκολουθεῖται συνήθως ἡ κατωτέρω διαδικασία: Κατ'ἀρχήν λαμβάνονται οἱ λογάριθμοι ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καί ἡ ἐξίσωσις (8.41) γράφεται

$$\log y = \log\alpha + t\log\beta \qquad (8.42)$$

περιλαμβάνουσα πλέον τόν λογάριθμον logy, ἀντί τῆς ἀρχικῆς μεταβλητῆς Y καί καλουμένη δι'αὐτόν τόν λόγον ἡ μ ι λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ή ἐξίσωσις.

Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζεται ὁ μετασχηματισμός

$$y' = \log y \qquad (8.43)$$

- χρησιμοποιουμένων κατ'αὐτόν τόν τρόπον ἀντί τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Y τῶν λογαρίθμων αὐτῶν - καί ἡ ἐξίσωσις (8.42) λαμβάνει πλέον τήν γραμμικήν μορφήν

$$y' = A + Bt \qquad (8.44)$$

ὅπου $A=\log\alpha$ καί $B=\log\beta$ συμβολίζουν τούς λογαρίθμους τῶν ἀρχικῶν παραμέτρων.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω αἱ παράμετροι A,B - καί δι' ἀντιλογαριθμήσεως αὐτῶν αἱ ἀρχικαί α,β - προσδιορίζονται δι'ἐπιλύσεως ἑνός κανονικοῦ συστήματος ἀναλόγου τοῦ (8.36) ἤ τοῦ ἁπλοποιημένου τοιούτου (8.37) ὅπου, ὡς εἶναι εὐνόητον, $y_t'$. t=1,2,... συμβολίζει τούς λ ο γ α ρ ί θ μ ο υ ς - κατά κανόνα τούς δεκαδικούς - τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Y.

Ἐξ ἄλλου, τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν οὕτω προσδιοριζομένην καμπύλην τάσεως

$$\hat{y}' = \hat{A} + \hat{B}t \;\; \text{ἤ} \;\; \log\hat{y} = \log\hat{\alpha} + t\log\hat{\beta} \;\; \text{ἤ} \;\; \hat{y} = \hat{\alpha}\hat{\beta}^t \qquad (8.45)$$

δίδεται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ὑπό τῆς σχέσεως

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left(\Sigma y_t'^2 - \hat{A}\Sigma y_t' - \hat{B}\Sigma t y_t'\right) \qquad (8.46)$$

ὁ ἀντίστοιχος δέ δείκτης προσαρμογῆς $R^2$ ὑπό τῆς σχέσεως

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{y'}} \qquad (8.47)$$

ὅπου φυσικά $\sigma^2_y$ συμβολίζει τήν διακύμανσιν τῶν λογαρίθμων τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Y καί ὄχι τήν ἀρχικήν διακύμανσιν αὐτῶν.

### 8.5.4 Γενικευμένη Ἐκθετική Καμπύλη

Εἰς πολλάς περιπτώσεις οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς βαίνουν μέν αὐξανόμεναι (ἤ μειούμεναι), τό ποσοστόν ὅμως τῆς ἀντιστοίχου μεταβολῆς ἐλαττοῦται μέ τήν πάροδον τοῦ χρόνου καί ἡ ὑπό μελέτην μεταβλητή τείνει - ἀσυμπτωτικῶς - πρός ὡρισμένην ὁριακήν τιμήν k. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἡ μακροχρόνιος τάσις τῆς σειρᾶς περιγράφεται μέ ἱκανοποιητικήν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον προσέγγισιν ὑπό μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$y=k+\alpha\beta^t \qquad (8.48)$$

γνωστῆς ἐν γένει ὡς γενικευμένης ἐκθετικῆς καμπύλης. Πράγματι, ἐάν $0<\beta<1$ ἐκ τῆς (8.48) προκύπτει εὐκόλως ὅτι τοῦ $t\to\infty$ ἡ μεταβλητή y τείνει (αὐξανομένη μέν ἐάν $\alpha<0$ ἤ μειουμένη ἐάν $\alpha>0$) πρός τήν σταθεράν k.

Αἱ ἄγνωστοι παράμετροι τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως προσδιορίζονται συνήθως - πρός ἀποφυγήν τῶν ἀπαιτουμένων ἄλλως δυσχερῶν ὑπολογισμῶν κλπ - διά τῆς μεθόδου τῶν σταθερῶν στηριγμάτων ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τά ἑξῆς: Εἶναι γνωστόν ὅτι διά τόν προσδιορισμόν τῶν k ἀγνώστων παραμέτρων μιᾶς οἱασδήποτε καμπύλης

$$y=f(x,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$$

ἀρκεῖ - θεωρητικῶς τουλάχιστον - ἡ γνῶσις k - ἰσαρίθμων πρός τάς παραμέτρους - συγκεκριμένων σημείων αὐτῆς $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\dots,k$ - στηριγμάτων - καί ἡ ἐπίλυσις - ὡς πρός τάς ἀγνώστους παραμέτους - τοῦ συστήματος τό ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν κατωτέρω k ἐξισώσεων

$$f(x_i,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)\equiv y_i, \quad i=1,2,\dots,k$$

Οὕτω, ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ γενικευμένη ἐκθετική καμπύλη (8.44) διέρχεται διά τριῶν σημείων $(t_1,\mu_1)$,$(t_2,\mu_2)$ καί $(t_3,\mu_3)$ αἱ ἄγνωστοι παράμετροι αὐτῆς - k , α καί β - δύνανται ἐν γένει νά προσδιορισθοῦν δι᾽ἐπιλύσεως τοῦ κατωτέρω συστήματος

$$
\begin{aligned}
k+\alpha\beta^{t_1} &= \mu_1 \\
k+\alpha\beta^{t_2} &= \mu_2 \\
k+\alpha\beta^{t_2} &= \mu_3
\end{aligned}
\qquad (8.49)
$$

Ἐν προκειμένῳ δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος ἁπλουστεύεται σημαντικά ἐάν αἱ χρονικαί στιγμαί (ἤ περίοδοι) $t_1,t_2,t_3$ *ἰσαπέχουν* μεταξύ των. Πράγματι, ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι

$$t_3-t_2=t_2-t_1=c \qquad (8.50)$$

προκύπτουν εὐκόλως τά ἑξῆς: Δι᾽ἀφαιρέσεως τῶν δύο πρώτων καί ἐν συνεχείᾳ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, λαμβάνομεν τάς σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta^{t_1}(\beta^c-1) &= \mu_2-\mu_1 \\
\alpha\beta^{t_2}(\beta^c-1) &= \mu_3-\mu_2
\end{aligned}
$$

διά διαιρέσεως τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ἀμέσως ἡ σχέσις

$$\beta^c=\frac{\mu_3-\mu_2}{\mu_2-\mu_1} \qquad (8.51)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται εὐχερῶς ἡ τιμή τῆς παραμέτρου β. Ἐξ ἄλλου, τό σύστημα (8.49) γράφεται ὑπό τήν μορφήν

$$
\begin{aligned}
\mu_1-k &= \alpha\beta^{t_1} \\
\mu_2-k &= \alpha\beta^{t_2} \\
\mu_3-k &= \alpha\beta^{t_3}
\end{aligned}
$$

διά διαιρέσεως δέ τῶν δύο πρώτων καί ἐν συνεχείᾳ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων αὐτοῦ, λαμβάνομεν τάς σχέσεις

$$\frac{\mu_2-k}{\mu_1-k}=\beta^c \quad \text{καί} \quad \frac{\mu_3-k}{\mu_2-k}=\beta^c$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν διαδοχικῶς ἡ ἰσότης

$$\frac{\mu_2-k}{\mu_1-k}=\frac{\mu_3-k}{\mu_2-k}$$

καί ἐξ αὐτῆς ἡ σχέσις

$$k=\frac{\mu_3\mu_1-\mu_2^2}{\mu_3+\mu_1-2\mu_2} \tag{8.52}$$

διά τῆς ὁποίας ὑπολογίζεται ἡ παράμετρος k.

Τέλος, ἀντικαθιστῶντες τάς γνωστάς πλέον τιμάς τῶν k καί β εἰς μίαν οἱανδήποτε ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (8.49) εὑρίσκομεν καί τήν παράμετρον α. Οὕτω, π.χ. ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\alpha=\frac{1}{\beta^{t_1}}(\mu_1-k) \tag{8.53}$$

Εἰς τήν πρᾶξιν τά χρησιμοποιούμενα πρός προσδιορισμόν τῶν παραμέτρων k, α καί β σημεῖα εὑρίσκονται συνήθως ὡς ἑξῆς: Οἱ ὅροι τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς ὑποδιαιροῦνται εἰς τ ρ ε ῖ ς ἰ σ ο π λ η θ ε ῖ ς - κατά προσέγγισιν - ὁμάδας κατά τρόπον ὥστε τά χρονικά κ έ ν τ ρ α αὐτῶν - συμβολιζόμενα ἐν προκειμένῳ $t_1,t_2$ καί $t_3$ - νά ἰ σ α π έ χ ο υ ν. Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζονται οἱ (ἀριθμητικοί) μέσοι τῶν ὅρων ἑκάστης ὁμάδος - συμβολιζόμενοι ἀντιστοίχως $\mu_1,\mu_2$ καί $\mu_3$- οἱ ὁποῖοι τιθέμενοι, ὡς εἶναι φυσικόν, ἐν ἀντιστοιχίᾳ πρός τά χρονικά κέντρα $t_1,t_2$ καί $t_3$ καθορίζουν τά ἀπαιτούμενα τρία σημεῖα.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐφαρμοζομένης μεθόδου παραθέτομεν ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα (Πίναξ 8.11). Ἐνταῦθα ὑποτίθεται ὅτι ἡ ζητουμένη καμπύλη θά διέρχεται ἐκ τῶν τριῶν σημείων - στηριγμάτων - (1,102), (4,149) καί 7,174). Κατά συνέπειαν

Πίναξ 8.11

| $t$ | $y$ | Χρονικά Κέντρα ($t_i$) | Μέσοι ($\mu_i$) | $\hat{y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80 | | | 78,4 |
| 1 | 104 | 1 | 102 | 102,0 |
| 2 | 122 | | | 121,1 |
| 3 | 138 | | | 136,6 |
| 4 | 150 | 4 | 149 | 149,1 |
| 5 | 159 | | | 159,2 |
| 6 | 167 | | | 167,4 |
| 7 | 175 | 7 | 174 | 174,1 |
| 8 | 180 | | | 179,3 |

δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (8.51), (8.52) καί (8.53) - δοθέντος ὅτι $c=t_3-t_2=t_2-t_1=3$ - λαμβάνομεν

$$\beta^3=\frac{174-149}{149-102}=\frac{25}{47}=0,53 \text{ καί } \beta=0,81 \text{ (περίπου)}$$

$$k=\frac{174\times 102-149^2}{174+102-2\times 149}=202,4$$

$$\text{καί } \alpha=\frac{1}{0,81}(102-202,4)=-124 \text{ (περίπου).}$$

Οὕτω, ἡ ζητουμένη καμπύλη τάσεως ἔχει ἐν προκειμένῳ ἐξίσωσιν

$$\hat{y}=202,4-124\times 0,81^t \tag{8.54}$$

Τό μ.τ.σ. περί τήν ἐν λόγῳ καμπύλην ὑπολογίζεται συνήθως διά τοῦ γενικοῦ τύπου

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_t(y_t-\hat{y}_t)^2 \tag{8.55}$$

ἀφοῦ προηγουμένως ἐκ τῆς προσδιορισθείσης καμπύλης τάσεως (8.54) εὑρεθοῦν αἱ ἐξ ὑπολογισμοῦ - οἱονεί- τιμαί τῆς Y, ἤτοι αἱ τιμαί $\hat{y}_t$, $t=1,2,\ldots$

Εἰς τό προκείμενον παράδειγμα αἱ οἱονεί τιμαί τῆς Y παρατίθενται εἰς τήν τελευταίαν στήλην τοῦ πίνακος δι᾽ ἐφαρμογῆς δέ τοῦ τύπου (8.55) εὑρίσκεται ὅτι $\sigma^2=1,3$. Ἐξ ἄλλου, δοθέντος ὅτι ἡ διακύμανσις $\sigma_y^2$ τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς Y εἶναι $\sigma_y^2=1.024$ (περίπου) ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσαρμογῆς $R^2$ εἶναι περίπου ἴσος πρός τήν μονάδα ($R^2=1-\frac{1,3}{1.024}=0,999$).

### 8.5.5 Λογιστική Καμπύλη

Ἡ ἐξελικτική πορεία ἑνός πληθυσμοῦ, ἡ διάδοσις μιᾶς μεταδοτικῆς νόσου, αἱ πωλήσεις ἑνός νέου προϊόντος κλπ. εἶναι μερικά παραδείγματα φαινομένων τά ὁποῖα ἐξεταζόμενα διαχρονικῶς παρουσιάζουν συνήθως τήν κατωτέρω μορφήν ἐξελίξεως.

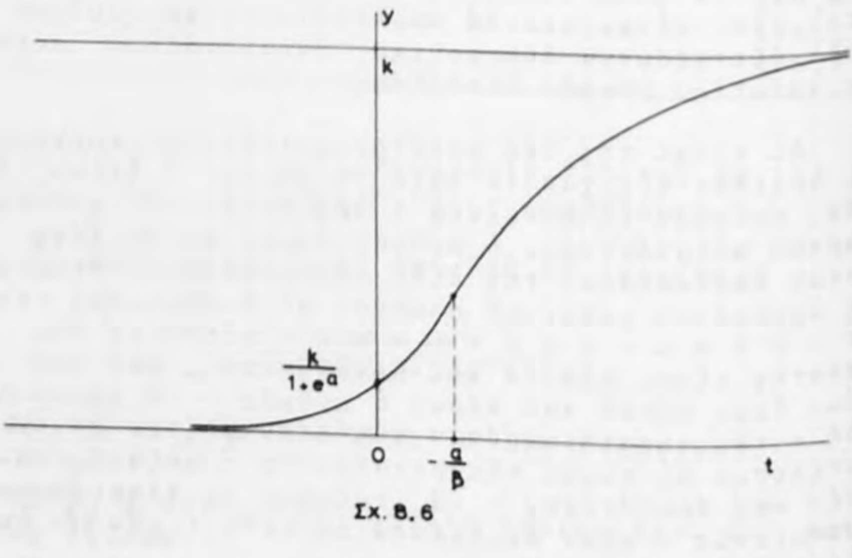
Αἱ τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς εὑρισκόμεναι ἀρχικῶς εἰς χαμηλά κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἐπίπεδα, βαίνουν ἐν συνεχείᾳ - προϊόντος τοῦ χρόνου - διαρκῶς αὐξανόμεναι, ὁ ρυθμός ὅμως τῶν ἐν λόγῳ αὐξήσεων παρουσιάζει τήν ἑξῆς ἰδιομορφίαν: Μέχρις ἑνός ὡρισμένου χρονικοῦ σημείου αἱ διαδοχικαί ποσο σ τ ι α ῖ α ι - σ χ ε τ ι κ α ί - αὐξήσεις τῆς μεταβλητῆς εἶναι ὁλονέν καί μεγαλύτεραι, ἀπό τοῦ σημείου ὅμως αὐτοῦ καί πέραν ὁ ρυθμός - τό ποσοστόν δηλαδή - τῶν παρατηρουμένων αὐξήσεων φθίνει συνεχῶς μέ ἀποτέλεσμα αἱ τιμαί τῆς μεταβλητῆς - αὐξανόμεναι ὁλονέν καί βραδύτερον - νά τείνουν νά πλησιάσουν - ἀσυμπτωτικῶς - μίαν ὡρισμένην ὁριακήν τιμήν τήν ὁποίαν οὐδέποτε ὑπερβαίνουν.

Πρός περιγραφήν τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως ἤ ἄλλως τῆς μακροχρονίου τάσεως τοιούτου εἴδους μεταβλητῶν χρησιμοποιεῖται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν μία εἰδική καμπύλη - γνωστή εὑρέως ὡς λ ο γ ι σ τ ι κ ή καμπύλη - ἡ ὁποία ὁριζομένη ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$y=\frac{k}{1+e^{\alpha+\beta t}} \quad \text{ἤ τῆς} \quad y=\frac{k}{1+10^{\alpha+\beta t}} \qquad (8.56)$$

παρουσιάζει ἐν γένει ἰδιότητας ἀναλόγους τῶν ἀνωτέρω.

Συγκεκριμένως, διά k>0 καί β<0 ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη - ἴδε καί Σχ. (8.6) - παρουσιάζει τάς ἑξῆς ἰδιότητας: Ἡ μεταβλητή Υ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χρόνου ($y_t' > 0$), ἀρχικῶς λαμβάνει μικράς σχετικῶς τιμάς (καθ᾽ὅσον διά $t \to -\infty$, ἡ $y \to 0$), προϊόντος τοῦ χρόνου πλησιάζει - ἀσυμπτωτικῶς - τήν τιμήν k (καθ᾽ὅσον διά $t \to \infty$, ἡ $y \to k$), τέλος δέ, παρουσιάζει - στήν θέσιν $t = -\frac{\alpha}{\beta}$ - ἕν σημεῖον κ α μ π ῆ ς καί ὡς ἐκ τούτου καθίσταται δυνατόν νά ἀντανακλᾶ τήν ἀναφερομένην ἀνωτέρω ἀλλαγήν τοῦ ρυθμοῦ τῶν αὐξήσεων μέ ἱκανοποιητικήν ἐν γένει προσέγγισιν.




Σχ. 8.6

Διά τόν προσδιορισμόν τῶν ἀγνώστων παραμέτρων - k, α καί β - τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως ἐφαρμόζεται καί ἐν προκειμένῳ ἡ μέθοδος τῶν σ τ α θ ε ρ ῶ ν σ τ η ρ ι γ μ ά τ ων. Συγκεκριμένως, πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἐπιλέγονται τρεῖς ὅροι τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς (t′, y′), (t″, y″) καί (t‴, y‴) καί ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύεται - ὡς πρός k, α καί β - τό σύστημα

$$\frac{k}{1+e^{\alpha+\beta t'}} = y', \quad \frac{k}{1+e^{\alpha+\beta t''}} = y'', \quad \frac{k}{1+e^{\alpha+\beta t'''}} = y''' \qquad (8.47)$$

Πρός άπλοποίησιν τῶν άπαιτουμένων - διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος - ὑπολογισμῶν, τό πρῶτον ἐκ τῶν ὡς ἄνω σημείων εἶναι συνήθως ὁ πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς - ὁ ὁποῖος διά καταλλήλου μετασχηματισμοῦ τῶν χρόνων ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν θέσιν t΄=0 - τά ὑπόλοιπα δέ δύο λαμβάνονται εἰς ἴσας - διαδοχικῶς - ἀποστάσεις, τό ἕν περί τό μέσον τῆς σειρᾶς καί τό ἄλλο εἰς τό τέλος αὐτῆς. Οὕτω, ὑποθέτοντες ὅτι t‴-t″= =t″-t΄=c καί t΄=0 ἤ ἄλλως ὅτι οἱ λαμβανόμενοι ὅροι τῆς σειρᾶς ἀντιστοιχοῦν εἰς τά χρονικά σημεῖα (ἤ περιόδους) 0, c καί 2c, ὅπου $c=\frac{N}{2}$ περίπου, τό σύστημα (8.57) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\frac{k}{1+e^{\alpha}}=y', \quad \frac{k}{1+e^{\alpha+\beta c}}=y'', \quad \frac{k}{1+e^{\alpha+1\beta c}}=y''' \qquad (8.58)$$

καί ἡ ἐπίλυσις αὐτοῦ ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς: Κατ'ἀρχήν τό σύστημα γράφεται ὑπό τήν μορφήν

$$\frac{k-y'}{y'}=e^{\alpha}, \quad \frac{k-y''}{y''}=e^{\alpha+\beta c}, \quad \frac{k-y'''}{y'''}=e^{\alpha+2\beta c} \qquad (8.59)$$

Διά διαιρέσεως ἐν συνεχείᾳ τῶν δύο πρώτων καί τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων λαμβάνομεν τάς σχέσεις

$$\frac{(k-y'')y'}{(k-y')y''}=e^{\beta c} \quad \text{καί} \quad \frac{(k-y''')y''}{(k-y'')y'''}=e^{\beta c} \qquad (8.60)$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\frac{(k-y'')y'}{(k-y')y''}=\frac{(k-y''')y''}{(k-y'')y'''}$$

ἡ ἐπίλυσις δέ αὐτῆς ὡς πρός k δίδει τήν σχέσιν

$$k=\frac{2y'y''y'''-y''^{2}(y'+y''')}{y'y'''-y''^{2}} \qquad (8.61)$$

ἐκ τῆς ὁποίας ὑπολογίζεται ἡ παράμετρος k.

Ὑπολογισθείσης πλέον τῆς τιμῆς τῆς παραμέτρου k ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων (8.59) καί τῆς πρώτης τῶν (8.60) εὑρίσκονται εὐχερῶς καί αἱ ὑπόλοιποι δύο παράμετροι α καί β διά τῶν σχέσεων

$$\alpha=\log\frac{k-y'}{y'} \tag{8.62}$$

καί

$$\beta=\frac{1}{c}\log\frac{(k-y'')y'}{(k-y')y''} \tag{8.63}$$

Ἐνταῦθα θά πρέπει νά διευκρινισθῇ ὅτι ἐάν ἀντί τῆς ἐξισώσεως

$$y=\frac{k}{1+e^{\alpha+\beta t}}$$

ληφθῇ ὑπ' ὄψιν - ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς - ἡ ἐξίσωσις

$$y=\frac{k}{1+10^{\alpha+\beta t}}$$

ἡ μόνη ἀναγκαία διαφοροποίησις τῶν ἀνωτέρω τύπων συνίσταται εἰς τό ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν σχέσεων (8.62) καί (8.63) θά εἶναι οἱ δεκαδικοί καί ὄχι οἱ Νεπέριοι τοιοῦτοι.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ὅλης διαδικασίας ἐφαρμόζομεν τά ἀνωτέρω εἰς τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.11). Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν ὅτι $t'=0$, $t''=4$ καί $t'''=8$ - ἤτοι $c=4$ - ἀντιστοίχως δέ $y'=80$, $y''=150$ καί $y'''=180$. Οὕτω, δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (8.61), (8.62) καί (8.63) καί θεωροῦντες τούς λογαρίθμους ὡς δεκαδικούς τοιούτους, εὑρίσκομεν

$$k=189,\quad \alpha=0{,}13 \text{ καί } \beta=-0{,}18$$

καί συνεπῶς ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη τάσεως ὁρίζεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}=\frac{189}{1+10^{0{,}13-0{,}18t}} \tag{8.64}$$

Προκειμένου νά διαπιστώσωμεν τόν βαθμόν προσαρμογῆς τῆς καμπύλης (8.60) πρός τά χρησιμοποιηθέντα ἐμπειρικά δεδομένα ἀρκεῖ, ὡς εἶναι εὐνόητον, νά ὑπολογίσωμεν - τῇ βοηθείᾳ τῆς (8.64) - τάς οἱονεί τιμάς τῆς Υ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς χρονικάς στιγμάς t=0,1,2,...,9 ἐν συνεχείᾳ δέ νά ὑπολογίσωμεν τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν σχετικόν δείκτην προσαρμογῆς $R^2$ ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῆς γενικευμένης ἐκθετικῆς καμπύλης.

### 8.5.6 Ἄλλαι Καμπῦλαι Τάσεως

Πέραν τῶν καμπύλων τάσεως τάς ὁποίας ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω εἰς σπανίας καί μᾶλλον ἐξειδικευμένας περιπτώσεις εἶναι δυνατόν νά χρησιμοποιηθοῦν καί ἄλλαι - πολυπλοκωτέρας ἀκόμη μορφῆς - ὡς π.χ. αἱ καμπύλαι αἱ ὁποῖαι μᾶς ἀπησχόλησαν δι᾽ὀλίγων εἰς τήν περίπτωσιν τῆς διμεταβλητῆς παλινδρομήσεως. Ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ προσαρμογή τῶν ἐν λόγῳ καμπύλων γίνεται - ἀναλόγως τῆς συγκεκριμένης περιπτώσεως - διά μεθόδων ἀναλόγων πρός τάς ἤδη ἐκτεθείσας.

## 8.6 Βραχυχρόνιοι Περιοδικαί Κινήσεις. Δεῖκται Ἐποχικότητος

Εἰς τάς προηγουμένας παραγράφους μᾶς ἀπησχόλησαν - κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον λεπτομερῶς - αἱ μέθοδοι διά τῶν ὁποίων ἀντιμετωπίζεται - συνήθως - εἰς τήν πρᾶξιν τό κεντρικόν πρόβλημα εἰς τήν στατιστικήν ἀνάλυσιν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, ἤτοι ἡ ἀπομόνωσις καί ὁ προσδιορισμός τῆς τυχόν ὑφισταμένης μακροχρονίου τ ά σ ε ω ς καί ἡ περιγραφή τοῦ ρόλου αὐτῆς - ὡς συνιστώσης - εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν ὅρων τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς.

Ὡς γνωστόν ὅμως πέραν τῆς μακροχρονίου τάσεως, οἱ ὅροι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς παρουσιάζουν πολλάκις καί ὡρισμένας π ε ρ ι ο δ ι κ ά ς κινήσεις - συστηματικάς δηλαδή αὐξομειώσεις περί τήν ἀντίστοιχον γραμμήν τάσεως - ἡ ἐπίδρασις τῶν ὁποίων - εἰς τήν τελικήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς - εἶναι ἐξ ἴσου - ἄν ὄχι περισσότερον - σημαντική πρός ἐκείνην τῆς τάσεως.

Σημαντικώτεραι μεταξύ τῶν ἐν λόγῳ κινήσεων - ἐξ ἀπόψεως πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος - εἶναι αἱ β ρ α χ υ χ ρ ό ν ι ο ι τοιαῦται, περιοδικαί δηλαδή κινήσεις μικρᾶς ἐν γένει περιόδου - π.χ. μιᾶς ἡμέρας, μιᾶς ἑβδομάδος, ἑνός μηνός ἤ τέλος ἑνός ἔτους - ἰδιαιτέρως δέ αἱ γνωσταί ὡς ἐ π ο χ ι κ α ί κ υ μ ά ν σ ε ι ς περιοδικαί δηλαδή κινήσεις ὀφειλόμεναι κατά κανόνα εἰς τάς ἐποχάς τοῦ ἔτους καί ἐπαναλαμβανόμεναι ὡς ἐκ τούτου συστηματικῶς μέ περίοδον 12 μηνῶν.

Εἰς τήν πρᾶξιν, ἡ στατιστική διερεύνησις τοιούτου εἴδους κινήσεων - δηλαδή ἡ ἀπομόνωσις, ὁ προσδιορισμός καί ἡ ἀξιολόγησις αὐτῶν ὡς συνιστωσῶν εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν ὅρων τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς - συνίσταται κατά κανόνα εἰς τόν ὑπολογισμόν - ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν ποσοτικῶν ἐκφράσεων - γνωστῶν ἐν γένει ὡς δ ε ι κ τ ῶ ν π ε ρ ι ο δ ι κ ό τ η τ ο ς ἤ σ υ ν τ ε λ ε σ τ ῶ ν ἐ π ο χ ι κ ό τ η τ ο ς - διά τῶν ὁποίων ἀπεικονίζεται ἡ σ χ ε τ ι κ ή - ἡ ἐν σχέσει πρός ἀλλήλας - θέσις τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, γενικώτερον δέ περιγράφεται ἡ δ ι ά ρ θ ρ ω σ ι ς τῶν ἐν λόγῳ κινήσεων - ἡ ἔντασις δηλαδή αὐτῶν καί αἱ μεταβολαί της - ἐντός ἑκάστης περιόδου. Συγκεκριμένως, οἱ ἐν λόγῳ δεῖκται ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον ἀριθμῶν - συνήθως σ χ ε τ ι κ ῶ ν - ἀναφερομένων εἰς τάς περιλαμβανομένας ἐντός ἑκάστης περιόδου (κύκλου) στιγμάς παρατηρήσεως - οἱ δεῖκται ἐποχικότητος π.χ. εἶναι συνήθως 12 ἀριθμοί ἀναφερόμενοι εἰς τούς διαφόρους μῆνας τοῦ ἔτους - ὑπολογίζονται δέ κατά κανόνα ὡς μέσοι ὅροι ἀντιστοίχων σχετικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐντός ἑκάστης τῶν παρατηρηθεισῶν περιόδων.

Αἱ μέθοδοι διά τῶν ὁποίων ὑπολογίζονται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν οἱ δ ε ῖ κ τ α ι ἐ π ο χ ι κ ό τ η τ ο ς - χαρακτηρίζοντες τήν σχετικήν θέσιν τῶν δεδομένων ἑκάστου μηνός ὡς πρός τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα τῶν ὑπολοίπων μηνῶν τοῦ ἔτους - παρατίθενται - ὑπό μορφήν ἑνός συγκεκριμένου ἀριθμητικοῦ παραδείγματος - κατωτέρω. Τά χρησιμοποιούμενα πρός τόν σκοπόν αὐτόν ἀριθμητικά δεδομένα εἶναι ἐκεῖνα τοῦ πίνακος (8.2), ἤτοι αἱ ὑπό τῆς ΔΕΗ μηνιαῖαι πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας δι'οἰκιακήν χρῆσιν κατά τά ἔτη 1968-72.

Ἐξυπακούεται ὅτι αἱ ἐν λόγῳ μέθοδοι ἐφαρμόζονται κατ'ἀναλογίαν - τοῦτο ἄλλωστε καθίσταται προφανές ἐκ τῶν ὅσων ἀκολουθοῦν - καί εἰς τάς περιπτώσεις οἱωνδήποτε ἄλλων περιοδικῶν κινήσεων - ἰδιαιτέρως βραχυχρονίων τοιούτων - προκειμένου νά ὑπολογισθοῦν - ἐκ τῶν ὑφισταμένων δεδομένων - ἀντίστοιχοι πρός αὐτούς δ ε ῖ κ τ α ι π ε ρ ι ο δ ι κ ό τ η τ ο ς.

Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι ἀνεξαρτήτως τῆς ἐφαρμοζομένης διά τόν προσδιορισμόν τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος ἤ περιοδικότητος μεθόδου, ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν ἐξαρτᾶται ἄμεσα ἐκ τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖον - ὑποτίθεται ὅτι - ἐνεργοῦν εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, ἡ τάσις T, αἱ ἐποχικαί (ἤ γενικώτερον αἱ περιοδικαί) κυμάνσεις S ὡς καί αἱ λοιπαί συνιστῶσαι, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐκ τοῦ ὑ π ο δ ε ί γ μ α τ ο ς - ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ο ῦ ἤ π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ο ῦ - ἐπί τῇ βάσει τοῦ ὁποίου - ὑποτίθεται - ὅτι διαμορφοῦνται αἱ τιμαί τῆς ὑπό μελέτην μεταβλητῆς.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὑποθέτομεν ὅτι αἱ παρατηρούμεναι ἐ π ο χ ι κ α ί κ υ μ ά ν σ ε ι ς δροῦν ἀναλογικῶς πρός τήν ὑφισταμένην τάσιν (T), ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὅτι οἱ ὅροι τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς

$$y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_N$$

διαμορφοῦνται συμφώνως πρός τό π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ό ν ὑ π ό δ ε ι γ μ α

$$y_t = T_t S_t C_t R_t$$

τό ὁποῖον ἄλλωστε ἀνταποκρίνεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, καί εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν. Ἀναλυτικῶς αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συνήθως διά τόν

Πίναξ 8.12

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | 99,5 | 112,2 | 112,2 | 108,2 | 98,7 | 95,6 | 89,2 | 83,7 | 86,1 | 90,0 | 103,5 | 120,8 |
| 69 | 117,7 | 121,1 | 107,6 | 106,9 | 104,2 | 94,7 | 84,6 | 81,9 | 82,5 | 88,6 | 100,1 | 109,6 |
| 1970 | 112,6 | 118,1 | 107,8 | 103,0 | 100,6 | 95,8 | 86,7 | 83,7 | 83,7 | 89,7 | 103,6 | 114,4 |
| 71 | 115,2 | 118,4 | 108,4 | 107,9 | 103,7 | 95,3 | 85,9 | 81,7 | 82,8 | 89,6 | 96,4 | 114,7 |
| 72 | 116,9 | 123,6 | 111,1 | 105,7 | 99,5 | 90,5 | 85,1 | 80,2 | 83,3 | 87,4 | 101,7 | 114,7 |
| ΣΥΝ. | 561,9 | 593,4 | 547,1 | 531,7 | 506,7 | 471,9 | 431,5 | 411,2 | 418,4 | 445,3 | 505,3 | 574,2 |
| ΜΕΣΟΙ | 112,4 | 118,7 | 109,4 | 106,3 | 101,3 | 94,4 | 86,3 | 82,2 | 83,7 | 89,1 | 101,1 | 114,8 |

(ii) Τά ἀρχικά δεδομένα ἑκάστου μηνός ἐκφράζονται ὡς ποσοστά τῆς ἀντιστοίχου μηνιαίας τιμῆς τῆς τάσεως. Τά ἀποτελέσματα τῶν ἐν λόγῳ ὑπολογισμῶν παρατίθενται κατωτέρω εἰς τόν πίνακα (8.13). Οὕτω π.χ. διά τόν Ἰανουάριον 1968 ἔχομεν

$\frac{126}{112}\,100=112,5\%$, διά τόν Φεβρουάριον

$\frac{142}{114}\,100=124,6\%$ κ.ο.κ.

(iii) Ἐκ τῶν οὕτω ὑπολογιζομένων ποσοστῶν ἑκάστου μηνός προσδιορίζεται ἕνας μέσος ὅρος αὐτῶν (συνήθως ὁ ἀριθμητικός). Οὕτω π.χ. ἐκ τῶν ποσοστῶν τά ὁποῖα ἐμφανίζει ὁ Ἰανουάριος κατά τά ἔτη 1968-72 εὑρίσκεται τό μέσον ποσοστόν 120,5%, διά τόν Φεβρουάριον τό ποσοστόν 125,6 κ.ο.κ.

Τά ἐν λόγῳ μέσα ποσοστά - ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος (8.13) - ἀποτελοῦν τούς ζητουμένους ἐν προκειμένῳ δείκτας ἐποχικότητος. Ἕκαστος ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν καθορίζει προφανῶς τήν σχετικήν θέσιν τοῦ ἀντιστοίχου μηνός ὡς πρός τήν γραμμήν τάσεως, φανερώνει δηλαδή τό ποσοστόν κατά τό ὁποῖον τά ἐπί μέρους μηνιαῖα δεδομένα ὑπερέχουν ἤ ὑστεροῦν ἐν γένει τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς τάσεως. Οὕτω π.χ. ὁ δείκτης 120,5 σημαίνει ὅτι αἱ πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας κατά τόν μῆνα Ἰανουάριον εἶναι ἐν γένει κατά 20,5% μεγαλύτεραι ἐκείνων τῆς μακροχρονίου τάσεως κ.ο.κ.

Τό ἄθροισμα τῶν διά τῆς παρούσης μεθόδου ὑπολογιζομένων δεικτῶν εἶναι δυνατόν νά ὑπερβαίνη - ὅπως π.χ. συμβαίνει ἐν προκειμένῳ - ἤ νά ὑπολείπεται τοῦ 1.200%. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς οἱ ὑπολογισθέντες δεῖκται διορθοῦνται ἀναλογικῶς - μειούμενοι ἤ αὐξανόμενοι ἀντιστοίχως - ὥστε τελικῶς τό ἄθροισμα αὐτῶν νά εἶναι 1.200% (ἤ ἄλλως ὁ μέσος ὅρος τῶν 100%).

Πίναξ 8.13

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | 112,5 | 124,6 | 122,4 | 116,1 | 104,2 | 99,2 | 91,1 | 84.1 | 85,1 | 87,7 | 99,2 | 114,2 |
| 69 | 127,9 | 129,7 | 113,6 | 111,3 | 106,9 | 95,9 | 84,4 | 80,7 | 80.3 | 85,1 | 94,9 | 102,5 |
| 1970 | 116,9 | 121,0 | 109,1 | 103,0 | 99,4 | 93,5 | 83,7 | 79,9 | 79,0 | 83,7 | 95,5 | 104,4 |
| 71 | 119,6 | 121,5 | 110,1 | 108,4 | 103,1 | 93,8 | 83,7 | 78,8 | 79,0 | 84,6 | 90,2 | 106,3 |
| 72 | 125,5 | 131,4 | 117,0 | 110,3 | 102,8 | 92,7 | 86,4 | 80,6 | 83,0 | 86,3 | 99,6 | 111,3 |
| ΣΥΝ. | 602,4 | 628,2 | 572,2 | 549,1 | 516,4 | 475,1 | 429,3 | 404,1 | 406,4 | 427,4 | 479,4 | 538,7 |
| ΜΕΣΟΙ | 120,5 | 125,6 | 114,4 | 109,8 | 103,3 | 95,0 | 85,9 | 80,8 | 81,3 | 85,5 | 95,9 | 107,7 |

Ἕνα βασικόν μειονέκτημα τῶν διά τῆς παρούσης μεθόδου ὑπολογιζομένων δεικτῶν εἶναι ὅτι περικλείουν πολλάκις καί τυχόν ὑφισταμένας μακροχρονίους περιοδικάς κινήσεις ὡς ἐπίσης ἐντόνους τυχαίας μεταβολάς. Πράγματι, ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ ὑποδείγματος $y_t = T_t S_t C_t I_t$ καθίσταται προφανές ὅτι τό πηλίκον τῶν ἀρχικῶν δεδομένων διά τῆς ἀντιστοίχου μηνιαίας τάσεως $y_t : T_t$ ἰσοδυναμεῖ πρός $S_t C_t I_t$ καί ὡς ἐκ τούτου οἱ ἀντίστοιχοι μέσοι ὅροι - δηλαδή οἱ κληθέντες ἐν προκειμένῳ δεῖκται ἐποχικότητος - εἶναι δυνατόν νά περιλαμβάνουν καί τάς ἐπιπτώσεις κυκλικῶν κινήσεων ($C_t$) ὡς καί τυχόν ἐντόνων τυχαίων κυμάνσεων ($I_t$).

### 8.6.3 Μέθοδος τῶν Ποσοστῶν ὡς πρός τούς Μηνιαίους Κινητούς Μέσους

Πρός ἐφαρμογήν τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου ἀκολουθεῖται ἡ κατωτέρω διαδικασία:

(i) Ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ὑπολογίζονται κατ' ἀρχήν οἱ ἀντίστοιχοι ἐ τ ή σ ι ο ι - περιόδου 12 μηνῶν - κινητοί μέσοι. Τοῦτο ἐγένετο διά τά δεδομένα τοῦ πίνακος (8.2) τά δέ ἀποτελέσματα παρατίθενται εἰς τόν πίνακα (8.6).

(ii) Τά ἀρχικά ἐμπειρικά δεδομένα ἐκφράζονται ὡς ποσοστά τῶν ἀντιστοίχων - μῆνα πρός μῆνα - κινητῶν μέσων. Οὕτω π.χ. διά τόν μῆνα Ἰούλιον 1968 ἔχομεν $\frac{113}{128,6} = 87,9\%$ διά τόν Αὔγουστον $\frac{106}{130,6} = 80,2\%$ κ.ο.κ. Τά ἐν λόγῳ ποσοστά παρατίθενται λεπτομερῶς εἰς τόν πίνακα (8.14).

(iii) Ἐκ τῶν ὡς ἄνω ποσοστῶν ἑκάστου μηνός ὑπολογίζεται - ὡς καί εἰς τάς προηγουμένας μεθόδους - ἕνας μέσος ὅρος αὐτῶν (συνήθως ὁ ἀριθμητικός). Οὕτω π.χ. διά τόν Ἰανουάριον εὑρέθη 122,1%, διά τόν Φεβρουάριον 125,9% κ.ο.κ.

Τά ἐν λόγῳ μ έ σ α π ο σ ο σ τ ά - ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος (8.14) - ἀποτελοῦν τούς ζητουμένους ἐν προκειμένῳ δ ε ί κ τ ε ς ἐ π ο χ ι κ ό τ η τ ο ς, χαρακτηρίζουν δέ τήν ἐτησίαν διάρθρωσιν τῶν ἀντιστοίχων κυμάνσεων τόσον ὡς πρός τήν ἔντασιν αὐτῶν ὅσον καί τάς σχετικάς μεταβολάς της.

Πράγματι, διά τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἐτησίων κινητῶν μέσων ἐπιτυγχάνεται κατ᾽ἀρχήν ἡ ἀπαλειφή τῆς ἐποχικότητος ἐν πολλοῖς δέ καί τῶν τυχαίων κινήσεων καί ὡς ἐκ τούτου οἱ κινητοί μέσοι τοῦ πίνακος (8.6) ἀντανακλοῦν τήν ἐπίδρασιν τῆς τάσεως T καί τῶν τυχόν κυκλικῶν κινήσεων C ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἰσοδυναμοῦν πρός τό γινόμενον $T_tC_t$. Ἡ διαίρεσις ἐν συνεχείᾳ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων $y_t=T_tS_tC_tI_t$ διά τῶν ἀντιστοίχων κινητῶν μέσων ὁδηγεῖ κατά συνέπειαν εἰς δεδομένα τά ὁποῖα περικλείουν μόνον τήν ἐποχικότητα S καί τάς τυχόν ἀρρύθμους κινήσεις I ἤτοι ἀντιπροσωπεύουν τό γινόμενον $S_tI_t$. Τέλος διά τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ μέσου ὅρου τῶν ἐν λόγῳ ποσοστῶν ἀπαλείφονται ἐν γένει αἱ ἄρρυθμοι κινήσεις καί προκύπτει πλέον ἀμιγής ἡ ἐπίδρασις τῆς ἐποχικότητος.

Κατά τήν ἐφαρμογήν τῶν ἀνωτέρω μεθόδων πρός ὑπολογισμόν τῶν διαφόρων δεικτῶν ἐποχικότητος, ἐγένετο, ὡς εἴδομεν, ἡ ὑπόθεσις ὅτι οἱ ὅροι τῆς ὑπό μελέτην χρονολογικῆς σειρᾶς διαμορφοῦνται συμφώνως πρός τό πολλαπλασιαστικόν ὑπόδειγμα $y_t=T_tS_tC_tI_t$ ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐπίδρασις τῆς ἐποχικότητος κλπ. εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς τάσεως.

Εἰς πολλάς ὅμως περιπτώσεις ἡ ἐπίδρασις τῆς ἐποχικότητος ἤ γενικώτερον μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως εἶναι δυνατόν νά ἐκδηλοῦνται ὑπό μορφήν σταθερῶν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μεταβολῶν - αὐξήσεων ἤ μειώσεων - ἀνεξαρτήτων τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς τάσεως ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς νά διαμορφοῦνται κατά προσέγγισιν συμφώνως πρός τό ἀθροιστικόν ὑπόδειγμα $y_t=T_t+S_t+C_t+I_t$.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι ὑπολογισμοῦ τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος (ἤ γενικώτερον

Πίναξ 8.14

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | - | - | - | - | - | - | 87,9 | 80,2 | 81,1 | 83,8 | 94,9 | 109,3 |
| 69 | 123,1 | 125,6 | 110,7 | 109,0 | 105,3 | 95,0 | 84,3 | 80,9 | 80,8 | 85,9 | 96,4 | 104,6 |
| 1970 | 119,5 | 124,0 | 112,2 | 106,2 | 102,6 | 96,4 | 86,0 | 81,8 | 80,6 | 85,1 | 96,7 | 105,5 |
| 71 | 121,0 | 123,2 | 111,9 | 110,4 | 105,3 | 95,9 | 85,1 | 79,4 | 78,9 | 84,1 | 89,6 | 105,7 |
| 72 | 124,8 | 130,7 | 116,3 | 109,5 | 101,7 | 91,1 | - | - | - | - | - | - |
| ΣΥΝ. | 488,4 | 503,5 | 451,1 | 435,1 | 414,9 | 378,4 | 343,3 | 322,3 | 321,4 | 338,9 | 377,6 | 425,1 |
| ΜΕΣΟΙ | 122.1 | 125.9 | 112.8 | 108.8 | 103.7 | 94.6 | 85.8 | 80.6 | 80.4 | 84.7 | 94.4 | 106.3 |

δεικτῶν περιοδικότητος) ἐφαρμόζονται κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον μέ μόνην τήν διαφοράν ὅτι αἱ γενόμεναι κατ' αὐτάς δ ι α ι ρ έ σ ε ι ς - ὑπολογισμοί ποσοστῶν εἰς τήν δευτέραν φάσιν ἑκάστης - ἀντικαθίστανται ὑπό ἀ φ α ι ρ έ σ ε ω ν ὑπολογιζομένων οὕτω - ἀντί ποσοστῶν - ἀπολύτων διαφορῶν.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω παραθέτομεν ἐνδεικτικῶς ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα. Τά δεδομένα ὑποτίθεται ὅτι ἀντιπροσωπεύουν τάς ἡμερησίας πωλήσεις ἑνός προϊόντος κατά τήν διάρκειαν τριῶν ἑβδομάδων, οἱ ἀντίστοιχοι δέ δ ε ῖ κ τ α ι π ε ρ ι ο δ ι κ ό τ η τ ο ς ὑπολογίζονται διά τῆς πρώτης ἐκ τῶν ἀνωτέρω μεθόδων, καλουμένης ἐν προκειμένῳ - κατ' ἀντιστοιχίαν - μεθόδου τῶν μεταβολῶν (διαφορῶν) ἐκ τῶν ἡμερησίων μέσων. Τά ἀρχικά δεδομένα καί οἱ ἀπαραίτητοι ἐπ' αὐτῶν ὑπολογισμοί παρατίθενται ἀντιστοίχως εἰς τούς κατωτέρω Πίνακας (8.15) καί (8.16).

Πίναξ 8.15

| Ἑβδομάς | Δ | Τ | Τ | Π | Π | Σ | Κ | Σύνολα Ἑβδομ. | Ἡμερ. Μέσοι |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1η | 40 | 45 | 60 | 35 | 30 | 90 | 120 | 420 | 60 |
| 2α | 43 | 51 | 64 | 40 | 37 | 97 | 123 | 455 | 65 |
| 3η | 49 | 55 | 72 | 42 | 35 | 101 | 136 | 490 | 70 |

Πίναξ 8.16

| Ἑβδομάς | Δ | Τ | Τ | Π | Π | Σ | Κ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1η | -20 | -15 | 0 | -25 | -30 | 30 | 60 |
| 2α | -22 | -14 | -1 | -25 | -28 | 32 | 58 |
| 3η | -21 | -15 | 2 | -28 | -35 | 31 | 66 |
| ΑΘΡΟΙΣΜ. | -63 | -44 | 1 | -78 | -93 | 93 | 184 |
| ΜΕΣΟΙ | -21,0 | -14,7 | 0,3 | -26,0 | -31,0 | 31,0 | 61,3 |

Οὕτω ἐκ τῶν ἡμερησίων δεδομένων ἑκάστης ἑβδομάδος ὑπελογίσθησαν τά ἑβδομαδιαῖα σύνολα καί οἱ ἀντίστοιχοι ἡμερήσιοι μέσοι οἱ ὁποῖοι παρατίθενται εἰς τήν τελευταίαν στήλην τοῦ πίνακος (8.15). Ἐν συνεχείᾳ - Πίναξ (8.16) - ὑπελογίσθησαν αἱ δ ι α φ ο ρ α ί τῶν ἐπί μέρους δεδομένων ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἡμερησίων μέσων ἑκάστης ἑβδομάδος, ὡς καί οἱ μέσοι ὅροι τῶν ἐν λόγῳ διαφορῶν - ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος (8.16) - οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἐν προκειμένῳ τούς ζητουμένους δείκτας περιοδικότητος. Ἡ σημασία αὐτῶν εἶναι προφανής. Ὁ δείκτης π.χ. -21,0 δηλοῖ ὅτι αἱ πωλήσεις τῆς Δευτέρας εἶναι ἐν γένει κατά 21 μονάδας μικρότεραι τῶν μέσων ἡμερησίων πωλήσεων, ἐνῶ αἱ πωλήσεις τοῦ Σαββάτου κατά 31,0 περίπου μονάδας μεγαλύτεραι κ.ο.κ.

### 8.6.4 Ἀπαλειφή τῆς Ἐποχικότητος

Οἱ κατά τά ἀνωτέρω ὑπολογιζόμενοι δεῖκται ἐποχικότητος χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν ἀπαλλαγήν τῶν ὅρων τῆς ὑπό μελέτην χρονολογικῆς σειρᾶς ἐκ τῶν ἐπιδράσεων διαφόρων παραγόντων ὡς π.χ. καιρικῶν μεταβολῶν, ἑορτῶν, ἐθίμων κλπ. χαρακτηριζομένων, ὡς εἴδομεν, ἐν γένει διά τοῦ ὅρου "ἐ π ο χ ι κ ό τ η ς".

Ἡ ἀ π α λ ε ι φ ή τ ῆ ς ἐ π ο χ ι κ ό τ η τ ο ς καθίσταται ἀναγκαία ἤ τουλάχιστον διευκολύνει σημαντικῶς τήν μελέτην μιᾶς σειρᾶς, καθ'ὅσον αἱ ἀνωτέρω ἐπιδράσεις ἐκδηλούμεναι ἐν γένει ὑπό τήν μορφήν ἀποτόμων κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μεταβολῶν - αὐξομειώσεων - τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς, δυσχεραίνουν τήν ἀπομόνωσιν τῆς μακροχρονίου τάσεως καί γενικώτερον δέν ἐπιτρέπουν εἰς τόν μελετητήν νά ἀποκτήση σαφῆ ἀντίληψιν τῆς νομοτελείας ἡ ὁποία διέπει τήν μακροχρόνιον ἐξέλιξιν τῆς ἀντιστοίχου μεταβλητῆς.

Τοιούτου εἴδους κυμάνσεις παρουσιάζουν π.χ. αἱ πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας - ἴδε πίνακα (8.2)-αἱ ὁποῖαι αὐξομειοῦνται ἀπό μῆνα εἰς μῆνα - προφανῶς λόγῳ τῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν τῆς ζ η τ ή σ ε ω ς - κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἐντόνως. Τό αὐτό συμβαίνει, ὡς εἴδομεν, μέ τάς ἡμερησίας πωλήσεις διαφόρων εἰδῶν αἱ ὁποῖαι - λόγῳ τῶν σ υ ν η θ ε ι ῶ ν τοῦ κοινοῦ καί τῶν ἐπικρατούντων ἐ θ ί μ ω ν - ποικίλλουν ἐντός ἑκάστης ἑβδομάδος, ὡς ἐπίσης μέ τάς "τιμάς" ὡρισμένων προϊόντων - π.χ. λαχανικῶν καί φρούτων - αἱ ὁποῖαι ὡς ἐκ τῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν τῆς π ρ ο σ φ ο ρ ᾶ ς παρουσιάζουν ἐντός τοῦ ἔτους ἐντόνους διακυμάνσεις, κ.ο.κ.

Ἡ ἀκολουθητέα πρός ἀπαλειφήν τῆς ἐποχικότητος διαδικασία ἐξαρτᾶται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἐκ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν καί ἐν τελικῇ ἀναλύσει ἐκ τοῦ ὑποδείγματος - π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ο ῦ ἤ ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ο ῦ - συμφώνως πρός τό ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι διαμορφοῦνται οἱ ὅροι τῆς ὑπό μελέτην σειρᾶς.

Οὕτω, ἐάν χρησιμοποιεῖται, ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τήν πρᾶξιν, τό π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ι κ ό ν ὑπόδειγμα (8.4), ἡ ἀπαλειφή τῆς ἐποχικότητος ἐπιτυγχάνεται διά δ ι α ι ρ έ σ ε ω ς τῶν ἀρχικῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - ἑκάστου μηνός ἤ ἄλλης χρονικῆς περιόδου - διά τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ἐποχικότητος. Ἡ ἐν λόγῳ διαδικασία ἐφηρμόσθη ἐπί τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (8.2) καί τά ἀποτελέσματα παρατίθενται κατωτέρω (Πίναξ 8.16). Σημειωτέον ὅτι ὡς δεῖκται ἐποχικότητος ἐχρησιμοποιήθησαν ἐν προκειμένῳ οἱ ὑπολογισθέντες διά τῆς μεθόδου τῶν ποσοστῶν ὡς πρός τούς κ ι ν η τ ο ύ ς μ η ν ι α ί ο υ ς μ έ σ ο υ ς (ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος 8.14). Οὕτω, τά ἀπηλλαγμένα τῆς ἐποχικότητος δεδομένα εὑρέθησαν ὡς ἑξῆς: Διά τόν Ἰανουάριον 1968 π.χ. ἔχομεν $\frac{126}{122,1}=103$, διά τόν Φεβρουάριον $\frac{142}{125,9}=113$ κ.ο.κ.

Πίναξ 8.16

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1968 | 103 | 113 | 126 | 126 | 121 | 128 | 132 | 132 | 136 | 135 | 139 | 144 |
| 69 | 143 | 142 | 141 | 145 | 149 | 148 | 146 | 150 | 152 | 155 | 157 | 152 |
| 1970 | 153 | 156 | 159 | 157 | 161 | 168 | 168 | 172 | 173 | 176 | 182 | 179 |
| 71 | 180 | 180 | 184 | 189 | 191 | 192 | 191 | 194 | 197 | 202 | 195 | 206 |
| 72 | 214 | 219 | 220 | 217 | 214 | 214 | 221 | 222 | 231 | 230 | 240 | 241 |

Ὡς εἶναι εὐνόητον, εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ο ῦ ὑποδείγματος ἡ ἀπαλειφή τῆς ἐποχικότητος γίνεται δι'ἀντιστοίχων ἀ φ α ι ρ έ σ ε ω ν (ἐκ τῶν ἀρχικῶν δηλαδή δεδομένων ἀφαιροῦνται οἱ δεῖκται ἐποχικότητος κ.ο.κ.).

## 8.7 Μακροχρόνιοι Περιοδικαὶ Κινήσεις. Κυκλικοὶ Δεῖκται

Πέραν τῆς μακροχρονίου τάσεως (Τ) καί τῶν - βραχυχρονίων - ἐποχικῶν κυμάνσεων (S) μία χρονολογική σειρά εἶναι δυνατόν, ὡς εἴδομεν, νά παρουσιάζη καί περιοδικάς - κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον - κινήσεις τῶν ὁποίων ὁ χρόνος ἐπαναλήψεως - ἡ περίοδος - ὑπερβαίνει τό ἔτος πολλάκις δέ εἶναι μία δεκαετία ἤ ἑνδεκαετία κλπ.

Ἡ ἀπομόνωσις καί ὁ προσδιορισμός τοιούτου εἴδους κινήσεως - δυσχερής κατά κανόνα λόγῳ τῆς ἐλλείψεως ἐπαρκῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων - δύναται νά ἐπιτευχθῆ, ὅπου βεβαίως ὑφίστανται τά ἀπαραίτητα στοιχεῖα, διά μεθόδων ἀναλόγων πρός ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται διά τήν μελέτην τῶν ἐποχικῶν κυμάνσεων.

Συγκεκριμένως, ἡ ἀκολουθουμένη ἐν προκειμένῳ διαδικασία συνίσταται εἰς τά ἑξῆς:

(i) Διά τῶν μεθόδων τῆς προηγουμένης παραγράφου γίνεται κατ'ἀρχήν ἀπαλειφή τῆς τυχόν ὑφισταμένης ἐποχικότητος καί τά ἐμπειρικά δεδομένα ἀπαλλάσσονται τῶν ἀντιστοίχων βραχυχρονίων κυμάνσεων.

(ii) Μετά τήν ἀπαλειφήν τῆς ἐποχικότητος, τά οὕτω προκύπτοντα στοιχεῖα δ ι α ι ρ ο ῦ ν τ α ι (ἤ ἐ λ α τ τ ο ῦ ν τ α ι) διά τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς τάσεως - ὑπολογιζομένων ἐκ τῆς προσαρμοζομένης κατά περίπτωσιν ἀντιστοίχου γραμμῆς τάσεως - καί ἀπαλείφεται κατ'αὐτόν τόν τρόπον ἡ ἐπίδρασις τῆς μακροχρονίου τάσεως.

(iii) Ἐκ τῶν οὕτω προκυπτόντων - διορθωμένων - δεδομένων τά ὁποῖα πλέον ἀντανακοῦν τάς ἐπιδράσεις τῶν τυχόν ὑφισταμένων μακροχρονίων περιοδικῶν ἤ ἄλλως κυκλικῶν κινήσεων (C) ὡς καί τῶν τυχαίων τοιούτων (I) ἤτοι τά γινόμενα $C_t I_t = \frac{Y_t}{T_t S_t}$, δι' ὑπολογισμοῦ καταλλήλων κινητῶν μέσων ἀπαλείφονται - κατά τό δυνατόν - αἱ τυχαῖαι (ἄρρυθμοι) μεταβολαί.

(iv) Τέλος τά ἐκ τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας εὑρισκόμενα στοιχεῖα - ἐνέχοντα πλέον τάς ἐπιδράσεις τῶν κυκλικῶν κινήσεων καί μόνον - διερευνῶνται πρός διαπίστωσιν τῆς τυχόν ὑφισταμένης περιοδικότητος αὐτῶν καί καθορισμόν - κατά προσέγγισιν - τῆς ἀντιστοίχου περίοδου. Αἱ ἐφαρμοζόμεναι πρός τοῦτο μέθοδοι ποικίλλουν εὐρύτατα (ἀπό ἁπλᾶς γραφικάς μεθόδους μέχρι ἄκρως ἐξειδικευμένας μαθηματικάς τοιαύτας).

Εἰς τήν πρᾶξιν μετά τήν διαπίστωσιν μιᾶς τοιαύτης περιοδικότητος ὑπολογίζονται συνήθως ὡρισμέναι ποσοτικαί ἐκφράσεις - γνωσταί ὡς δεῖκται κυκλικότητος ἤ κυκλικοί δεῖκται - αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν τήν διάρθρωσιν τῶν ἐν λόγῳ κύκλων - μακροχρονίων περιοδικῶν κινήσεων - καί χρησιμοποιοῦνται ὅπως καί οἱ δεῖκται ἐποχικότητος. Ἐνταῦθα δέον νά σημειωθῇ ὅτι ὁ ὑπολογισμός τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν γίνεται συνήθως κατά τρόπον ἀνάλογον πρός τόν ὑπολογισμόν τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος διά τῆς μεθόδου τῶν ποσοστῶν ὡς πρός τόν μηνιαῖον μέσον.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη εἰς τήν παράγραφον (8.2), ἡ λεπτομερής μελέτη τῶν κυκλικῶν κινήσεων ἐκφεύγει τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος καί δέν θά μᾶς ἀπασχολήση περαιτέρω.

## 8.8 Πρόβλεψις

Ἡ διερεύνησις μιᾶς οἱασδήποτε χρονολογικῆς σειρᾶς καί ἰδιαιτέρως ἡ ἀπομόνωσις καί ὁ προσδιορισμός

τῶν διαφόρων ἐπί μέρους προσδιοριστικῶν παραγόντων,
τῶν συνιστωσῶν δηλαδή ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῶν ὁποίων
διαμορφοῦνται αἱ διαδοχικαί τιμαί τῆς ὑπό μελέτην
μεταβλητῆς, ἔχει, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὡς κύριον ἀντικει-
μενικόν σκοπόν τήν π ρ ό β λ ε ψ ι ν μ ε λ λ ο ν-
τ ι κ ῆ ς σ υ μ π ε ρ ι φ ο ρ ᾶ ς τῆς μεταβλητῆς
καί τόν ὑπολογισμόν - ἔστω καί κ α τ ά π ρ ο σ έ γ-
γ ι σ ι ν - τῶν ἀ ν α μ ε ν ο μ έ ν ω ν - τῶν πρα-
γματοποιηθησομένων εἰς τό μέλλον - τιμῶν της.

Εἰς τήν πρᾶξιν, ἡ ἀκολουθουμένη πρός τόν σκο-
πόν αὐτόν διαδικασία συνίσταται κατά κανόνα εἰς τήν
διά μ α θ η μ α τ ι κ ῶ ν μεθόδων ἐ π έ κ τ α σ ι ν
τῆς νομοτελείας ἡ ὁποία ἐχαρακτήριζε τήν κατά τό π α-
ρ ε λ θ ό ν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς μεταβλητῆς καί
εἰς τό μ έ λ λ ο ν.

Ἐν προκειμένῳ ὅμως δέον νά τονισθῇ ὅτι ἡ ἐν λό-
γῳ διαδικασία ἀποδεικνύεται πολλάκις ἀνεπαρκής, διά
τόν λόγον δέ αὐτόν ἐνδείκνυται - καί τοῦτο ἐφαρμό-
ζεται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν - ἡ βελτίωσις - τροπο-
ποίησις, συμπλήρωσις κλπ. - τῶν δι'αὐτῆς ἐξαγομένων
συμπερασμάτων, διά τυχόν ὑφισταμένων προσθέτων - ἐ-
ξωγενῶν - πληροφοριῶν, τῆς ὑφισταμένης ἐμπειρίας καί
περισσότερον παντός ἄλλου διά τῆς ὑπό τό φῶς τῆς κοι-
νῆς λογικῆς κριτικῆς ἐξετάσεως τῶν διαφόρων εὑρημά-
των.

Κατωτέρω περιγράφεται συνοπτικά ἡ διαδικασία ἡ
ὁποία ἐφαρμόζεται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν τυ-
πικήν πρόβλεψιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς τό ἐ γ-
γ ύ ς μέλλον - βραχυχρονίως - λαμβανομένων δηλαδή
ὑπ'ὄψιν, ἀφ'ἑνός τῆς γενικῆς τ ά σ ε ω ς ἐξελίξεως
τῆς μεταβλητῆς καί ἀφ'ἑτέρου τῶν δ ε ι κ τ ῶ ν ἐ -
π ο χ ι κ ό τ η τ ο ς οἱ ὁποῖοι χαρακτηρίζουν τάς
τυχόν ὑφισταμένας ἐποχικάς κυμάνσεις. Ἐξυπακούεται
ὅτι ἡ χρῆσις κ υ κ λ ι κ ῶ ν δεικτῶν γίνεται - ὅπου
τοῦτο εἶναι δυνατόν - κατά τρόπον ἀνάλογον πρός ἐκεῖ-
νον τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ ὅλου μηχανισμοῦ
παραθέτομεν δύο ἁπλᾶ ἀριθμητικά παραδείγματα χρησι-

μοποιοῦντες τά δεδομένα ἐπί τῶν μηνιαίων πωλήσεων ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας (Πίναξ 8.2).

Εἰς ἀμφότερα τά παραδείγματα προβλέπομεν τάς μηνιαίας πωλήσεις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας - ὡς αὗται θά διεμορφοῦντο ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς ὑφισταμένης τάσεως καί τῶν ἀντιστοίχων ἐποχικῶν κυμάνσεων - διά τό ἔτος 1973. Πρός τούτοις, δι᾽ἐφαρμογῆς τῶν ἰδίων μεθόδων, ὑπολογίζομεν - καθαρῶς διά λόγους συγκρίσεων καί διαπιστώσεως τῶν σχετικῶν ἀποκλίσεων - τάς μηνιαίας πωλήσεις τοῦ ἔτους 1972.

Παράδειγμα (8.1)

Εἰς τό παρόν παράδειγμα γίνεται κατ᾽ἀρχήν πρόβλεψις τοῦ μ η ν ι α ί ο υ μ έ σ ο υ ὅ ρ ο υ - τῶν κατά μέσον ὅρον μηνιαίων πωλήσεων ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας - ἑκάστου τῶν ἐτῶν 1972 καί 1973, χρησιμοποιουμένης πρός τοῦτο τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}_\tau = 171 + 23{,}5\tau$$

ἡ ὁποία ὑπελογίσθη - ἴδε παράγραφον (8.4) - τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀντιστοίχων μέσων μηνιαίων πωλήσεων τῶν ἐτῶν 1968-72. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν - δοθέντος ὅτι $\tau=0$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἔτος 1970 - θέτομεν $\tau=2$ καί $\tau=3$ καί εὑρίσκομεν ὅτι αἱ μέσαι μηνιαῖαι πωλήσεις διά τά ἔτη 1972 καί 1973 ἀναμένεται νά εἶναι ἀντιστοίχως $\hat{y}_{72}=218$ καί $\hat{y}_{73}=241{,}5$. Προκειμένου ἐν συνεχείᾳ νά προβλέψωμεν τάς πωλήσεις αἱ ὁποῖαι ἀναμένεται νά πραγματοποιηθοῦν κ α θ' ἕ κ α σ τ ο ν μ ῆ ν α - τῶν ἐτῶν 1972 καί 1973 - ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν τούς ἐν λόγῳ μηνιαίους μέσους ἐπί τούς καταλλήλους δείκτας ἐποχικότητος.

Ὡς εἶναι εὐνόητον, πρός τόν σκοπόν αὐτόν νά χρησιμοποιηθοῦν ἐν προκειμένῳ οἱ δεῖκται ἐποχικότητος οἱ ὁποῖοι ὑπελογίσθησαν διά τῆς μεθόδου τῶν π ο σ ο σ τ ῶ ν ὡ ς π ρ ό ς τ ό ν μ η ν ι α ῖ ο ν μ έ σ ο ν καί συνεπῶς ἀντανακλοῦν τήν θέσιν ἑκάστου μηνός ὡς πρός τόν ἐν λόγῳ - τυπικόν - μέσον (ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος 8.12). Οὕτω π.χ. διά τόν Ἰανουάριον 1972 ἔχομεν 218×118,7%=259 κ.ο.κ. Τά ἀποτελέσματα τῶν ἐν λόγῳ ὑπολογισμῶν παρατίθενται κατωτέρω (Πίναξ 8.17).

Πίναξ 8.17

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1972 | 245 | 259 | 238 | 232 | 221 | 206 | 188 | 179 | 182 | 194 | 220 | 250 |
| 1973 | 271 | 287 | 264 | 257 | 245 | 228 | 208 | 199 | 202 | 215 | 244 | 277 |

Διά συγκρίσεως τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς τοῦ ὡς ἄνω πίνακος - τῶν μηνιαίων δηλαδή προβλέψεων τοῦ ἔτους 1972 - πρός τά ἀντίστοιχα - ἤδη γνωστά - πραγματικά ἐμπειρικά δεδομένα - ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος (8.2) - καθίσταται προφανές ὅτι τά σχετικά ἀποτελέσματα παρουσιάζουν ἱκανοποιητικήν ἀκρίβειαν (βαθμόν προσεγγίσεως).

Παράδειγμα (8.2)

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἀντί τῶν κατά μέσον ὅρον μηνιαίων πωλήσεων τῶν ἐτῶν 1972 καί 1973 γίνεται κατ' ἀρχήν π ρ ό β λ ε ψ ι ς τῶν μηνιαίων τιμῶν τῆς τάσεως, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τῶν πωλήσεων καθ' ἕκαστον μῆνα - τῶν ἐτῶν 1972 καί 1973 - ὡς αὗται θά διεμορφοῦντο ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς μακροχρονίου τάσεως καί μόνον. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν χρησιμοποιεῖται καί πάλιν ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις τάσεως ἀφοῦ προηγουμένως μετασχηματισθῆ καταλλήλως - ὥστε νά ὑπολογίζωνται δι' αὐτῆς αἱ μηνιαῖαι τιμαί τῆς τάσεως - καί λάβη, ὡς εἴδομεν εἰς τήν παράγραφον (8.4), τήν μορφήν

$$\hat{y}_{\tau'}=172+2\tau'$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως - δοθέντος ὅτι τ΄=0 ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν Ἰούλιον τοῦ ἔτους 1970 - αἱ μηνιαῖαι τιμαί τῆς τάσεως διά τά ἔτη 1972 καί 1973 εὑρίσκονται διά τ΄=18,19,...,41 τά ἀποτελέσματα δέ τῶν σχετικῶν ὑπολογισμῶν παρατίθενται κατωτέρω (Πίναξ 8.18).

Πίναξ 8.18

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1972 | 208 | 210 | 212 | 214 | 216 | 218 | 220 | 222 | 224 | 226 | 228 | 230 |
| 1973 | 232 | 234 | 236 | 238 | 240 | 242 | 244 | 246 | 248 | 250 | 252 | 254 |

Πολλαπλασιάζοντες ἐν συνεχείᾳ τά ἀνωτέρω δεδομένα - ἑκάστου μηνός - ἐπί τούς ἀντιστοίχους δείκτας ἐποχικότητος, οἱ ὁποῖοι ὑπελογίσθησαν διά τῆς μεθόδου τῶν π ο σ ο σ τ ῶ ν ὡς π ρ ό ς τ ή ν μ η ν ι α ί α ν τ ά σ ι ν - ἴδε τελευταίαν γραμμήν τοῦ πίνακος (8.13) - καί κατά συνέπειαν ἀντανακλοῦν τήν θέσιν ἑκάστου μηνός ὡς πρός τήν ἀντίστοιχον εὐθεῖαν τάσεως, εὑρίσκομεν τάς ἀναμενομένας - νά πραγματοποιηθοῦν - κατά μῆνα πωλήσεις. Τά σχετικά ἀποτελέσματα παρατίθενται κατωτέρω (Πίναξ 8.19).

Πίναξ 8.19

| ΕΤΗ | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1972 | 251 | 264 | 243 | 235 | 223 | 207 | 189 | 179 | 182 | 193 | 219 | 248 |
| 1973 | 280 | 294 | 270 | 261 | 248 | 230 | 210 | 199 | 202 | 214 | 242 | 274 |

Οὕτω π.χ. ὁ Ἰανουάριος 1972 εἶναι 208×120,5%= =251, ὁ Φεβρουάριος 210×125,6%=264 κ.ο.κ.

Καί πάλιν ἡ σύγκρισις τῶν προβλέψεων - τοῦ ἔτους 1972 - πρός τά ἀντίστοιχα πραγματικά ἐμπειρικά δεδομένα καθιστᾶ προφανές ὅτι καί αἱ οὕτω γενόμεναι προβλέψεις παρουσιάζουν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἱκανοποιητικήν προσέγγισιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9

# ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΑΙ

## 9.1 Γενικαί Ἔννοιαι καί Ὁρισμοί

Εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον μᾶς ἀπησχόλησαν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον λεπτομερῶς αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν στατιστικήν ἀνάλυσιν μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς - ἀριθμητικῶν δηλαδή δεδομένων τά ὁποῖα ἀποτελοῦν διαδοχικάς τιμάς μιᾶς μεταβλητῆς εἰς ἰσαπέχοντα χρονικά σημεῖα ἤ περιόδους - μέ κύριον ἀντικειμενικόν σκοπόν τήν περιγραφήν τῆς νομοτελείας ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς ἀντιστοίχου - ὑπό μελέτην - μεταβλητῆς. Διά τῶν ἐν λόγῳ μεθόδων καθίσταται, ὡς εἴδομεν, δυνατή ἡ μελέτη τῆς κατά τό παρελθόν συμπεριφορᾶς διαφόρων χαρακτηριστικῶν ἑνός φαινομένου, ὡς ἐπίσης καί ἡ κατά προσέγγισιν πρόβλεψις τῆς μελλοντικῆς διαμορφώσεως αὐτῶν, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι ἕκαστον τῶν ὑπό μελέτην χαρακτηριστικῶν - μεταβλητῶν - λαμβάνεται καί ἐξετάζεται κεχωρισμένως.

Πολλάκις ὅμως ὁ μελετητής ἑνός φαινομένου - ἑνός οἰκονομικοῦ ἤ κοινωνικοῦ προβλήματος κλπ. - ἐνδιαφέρεται διά τήν - ταυτόχρονον - παρακολούθησιν τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως - ἤ γενικώτερον διά τήν διερεύνησιν τῆς συμπεριφορᾶς - μιᾶς πλειάδος μεταβλητῶν, δηλαδή ἑνός πλήθους χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑπό μελέτην φαινομένου, θεωρουμένων ἀπό κοινοῦ (συνεξεταζομένων). Οὕτω π.χ. προκειμένου ἕνας οἰκονομολόγος νά μελετήση τάς μεταβολάς τοῦ "γενικοῦ ἐπιπέδου" τῶν τιμῶν εἰς μίαν χώραν εἶναι ὑποχρεωμένος νά μελετήση τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῶν ἐπί μέρους τιμῶν ἑνός μεγάλου πλήθους "ἀγαθῶν" καί "ὑπηρεσιῶν". Ὁμοίως, προκειμένου νά συγκριθῆ τό "κόστος διατροφῆς" ἤ γενικώτερον τό "κόστος διαβιώσεως" εἰς δύο περιοχάς - πόλεις, χώρας κλπ. - καθίσταται ἀπαραίτητος ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ καταναλισκομένων εἰς αὐτάς εἰδῶν. Τό αὐτό συμβαίνει - ἀπαιτεῖται δηλαδή ἡ παρακολούθησις καί γενικώτερον ή διερεύνησις τῆς συμπεριφορᾶς μιᾶς π λ ε ι ά δ ο ς μεταβλητῶν - προκειμένου νά μελετηθῆ ἡ ἐξέλιξις τοῦ "ἐγχωρίου προϊόντος" μιᾶς χώρας ἤ τοῦ ὄ γ κ ο υ τῶν "εἰσαγωγῶν" ἤ τῶν "ἐξαγωγῶν" αὐτῆς, ἡ διαμόρφωσις τοῦ ἐπιπέδου τῶν "μισθῶν καί ἡμερομισθίων" ἤ ἀκόμη νά συγκριθῆ ὁ ὄγκος τῆς "παραγωγῆς" δύο χωρῶν, ἡ "παραγωγικότης" τῶν ἐργατῶν δύο βιομηχανικῶν κλάδων, αἱ "συνθῆκαι ἐργασίας" ἤ αἱ "ἀνέσεις κατοικίας" δύο ἐπαγγελματικῶν ἤ εἰσοδηματικῶν τάξεων κ.ο.κ.

Δι᾽εὐνοήτους ὅμως λόγους, τόσον ἡ (ταυτόχρονος) παρακολούθησις τῆς δ ι α χ ρ ο ν ι κ ῆ ς ἐ ξ ε λ ί ξ ε ω ς ἑνός μεγάλου πλήθους μεταβλητῶν - κινουμένων ἐν γένει δ ι α φ ο ρ ο τ ρ ό π ω ς - ὅσον καί ἡ ἐφ᾽ἅπαξ σ ύ γ κ ρ ι σ ι ς (τῶν τιμῶν) πολυαρίθμων μεταβλητῶν ἀναφερομένων εἰς δύο διαφόρους γεωγραφικάς περιοχάς. δύο διακεκριμένας ἀλλήλων πληθυσμιακάς ὁμάδας - π.χ. δύο ἐπαγγελματικάς ἤ εἰσοδηματικάς τάξεις - ἤ γενικώτερον σχετιζομένων πρός δύο οἱασδήποτε "κ α τ α σ τ ά σ ε ι ς" εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων - ἄν ὄχι ἀδύνατος - ἐξαιρετικά δυσχερής.

Εἰς τήν πρᾶξιν, πρός ἀποφυγήν τῶν ἀναφυομένων εἰς τοιαύτας περιπτώσεις δυσχερειῶν καί ἁπλοποίησιν τῆς διαδικασίας ἐξαγωγῆς τῶν ἀπαιτουμένων ἑκάστοτε συμπερασμάτων, ἐπιδιώκεται συνήθως - τουλάχιστον ὅπου τοῦτο εἶναι δυνατόν - ὁ ὑπολογισμός καί ἡ χρησιμοποίησις - ἀντί τῶν πολυαρίθμων ὑπό μελέτην μεταβλητῶν - ὡρισμένων ἁ π λ ῶ ν π ο σ ο τ ι κ ῶ ν ἐ κ φ ρ ά σ ε ω ν, αἱ ὁποῖαι, σ υ ν ο ψ ί ζ ο υ σ α ι - δίκην ἑνός μ έ σ ο υ ὅ ρ ο υ - τήν συμπεριφοράν - τήν ἐπίδρασιν τῶν ἐπί μέρους τιμῶν κλπ. - τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, διευκολύνουν σημαντικά τάς ἀπαιτουμένας - χρονικάς, τοπικάς ἤ οἱασδήποτε ἄλλας - συγκρίσεις.

Αἱ ἐν λόγῳ ποσοτικαί ἐκφράσεις - γνωσταί ἐν γένει ὡς 'Α ρ ι θ μ ο δ ε ῖ κ τ α ι ἤ ἁπλῶς Δ ε ῖ κ τ α ι - ὑπολογίζονται διά καταλλήλου συνδυασμοῦ τῶν ἐπί μέρους τιμῶν ὅ λ ω ν τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, συνήθως δέ, εἶναι κ α θ α ρ ο ί - ἄ ν ε υ μονάδων - ἀριθμοί ἐκπεφρασμένοι ὡς ποσοστά ἐπί τοῖς ἑκατόν (%) ἤ τοῖς χιλίοις (‰).

Ἀκριβέστερον, διά τοῦ ὅρου Ἀριθμοδείκτης ἐννοοῦμεν ἐν γένει ἕνα στατιστικόν μέτρον τό ὁποῖον ἀντανακλᾶ - χαρακτηρίζει - τάς σχετικάς μεταβολάς μιᾶς ὁμάδος ὁμοειδῶν μεταβλητῶν - θεωρουμένων ἀπό κοινοῦ - μεταξύ δύο χρονικῶν σημείων (ἤ περιόδων) ἤ δύο γεωγραφικῶν περιοχῶν, δύο πληθυσμιακῶν ὁμάδων καί γενικώτερον μεταξύ δύο οἱωνδήποτε "καταστάσεων", ὡς ἐκ τούτου δέ ἐπιτρέπει - διά καταλλήλων συγκρίσεων - τήν ἀξιολόγησιν τῶν ὑφισταμένων ἀντιστοίχως διαφορῶν.

Πέραν ὅμως τῶν ἁπλῶν συγκρίσεων μεταξύ δύο οἱωνδήποτε "καταστάσεων", διά τῆς μεθόδου τῶν ἀριθμοδεικτῶν καθίσταται ἐπίσης δυνατή ἡ συνεχής - διά μέσου τοῦ χρόνου - παρακολούθησις μιᾶς ὁμάδος μεταβλητῶν - θεωρουμένων πάντοτε συλλογικῶς - καί ἡ διερεύνησις τῆς συμπεριφορᾶς αὐτῶν μακροχρονίως. Ὡς εἶναι εὐνόητον, πρός τόν σκοπόν αὐτόν δέν ἀρκεῖ ὁ ὑπολογισμός ἑνός μόνον δείκτου ἀλλ' ἀπαιτεῖται ἡ κατάρτισις μιᾶς σειρᾶς ἐξ αὐτῶν. Οἱ ἐν λόγῳ ἀριθμοδεῖκται ἀναφερόμενοι εἰς καταλλήλως ἐπιλεγομένας χρονικάς στιγμάς (ἤ περιόδους) συνιστοῦν μίαν χρονολογικήν σειράν ἐκ τῆς ὁποίας καθίσταται δυνατή ἀφ' ἑνός ἡ μέτρησις τῶν ἐπερχομένων ἑκάστοτε - μεταξύ διαδοχικῶν περιόδων - διαφοροποιήσεων, ἀφ' ἑτέρου δέ, ἡ περιγραφή τῆς νομοτελείας ἡ ὁποία διέπει ἐν γένει τήν ὅλην διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς ὁμάδος τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν. Οὕτω π.χ. τό γενικόν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν ὡρισμένων ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν παρακολουθεῖται διαχρονικῶς διά τῆς καταρτίσεως κατά τακτάς περιόδους - συνήθως κατά μῆνα - ἀντιστοίχων δεικτῶν. Τό αὐτό συμβαίνει μέ τήν παρακολούθησιν τοῦ ὄγκου τῶν εἰσαγωγῶν ἤ τῶν ἐξαγωγῶν μιᾶς χώρας κ.ο.κ.

Αἱ μέθοδοι καταρτίσεως ἑνός ἀριθμοδείκτου ἀνεξαρτήτως ἐάν οὗτος προορίζεται διά τήν μέτρησιν τῶν σχετικῶν διαφορῶν - μιᾶς ὁμάδος μεταβλητῶν συλλογικῶς θεωρουμένων - μεταξύ δύο χρονικῶν περιόδων ἤ δύο γεωγραφικῶν περιοχῶν ἤ γενικώτερον δύο οἱωνδήποτε "καταστάσεων", εἶναι κατά βάσιν αἱ αὐταί. Διά τόν λόγον αὐτόν, εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ θά μᾶς ἀπασχολήσουν μόνον χρονολογικοί ἀριθμοδεῖκται, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις δεῖκται οἱ ὁποῖοι μετροῦν τάς σχετικάς μεταβολάς μιᾶς ὁμάδος μεταβλητῶν μεταξύ δύο χρονικῶν σημείων καί γενικώτερον ἐπιτρέπουν τήν παρακολούθησιν τῆς συμπεριφορᾶς αὐτῶν διά μέσου τοῦ χρόνου (διαχρονικῶς).

Μία κατηγορία ἀριθμοδεικτῶν οἱ ὁποῖοι παρουσιάζουν ἰδιαίτερον πρακτικόν ἐνδιαφέρον - καί ὡς ἐκ τούτου θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον λεπτομερῶς - εἶναι οἱ γνωστοί εὐρέως ὡς δεῖκται τιμῶν ἤ τιμάριθμοι.

Τιμάριθμοι καλοῦνται ἐν γένει οἱ ἀριθμοδεῖκται οἱ ὁποῖοι μετροῦν τάς - σχετικάς - μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται κατά "μέσον ὅρον" ἤ ἄλλως εἰς τό "γενικόν ἐπίπεδον" τῶν τιμῶν μιᾶς οἱασδήποτε ὁμάδος "εἰδῶν" - ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν - μεταξύ δύο χρονικῶν περιόδων ἤ δύο οἱωνδήποτε ἄλλων "καταστάσεων". Μεταξύ τῶν συνήθως καταρτιζομένων τιμαρίθμων ἰδιαιτέραν σπουδαιότητα παρουσιάζουν ὁ γνωστός ὡς δείκτης τιμῶν καταναλωτοῦ - ὁ ὁποῖος μετρᾶ τάς μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται διαχρονικῶς εἰς τάς καταβαλλομένας ὑπό τῶν καταναλωτῶν (ἤ ἄλλως λιανικάς) τιμάς τῶν καταναλισκομένων ὑπ' αὐτῶν ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν - καί ὁ δείκτης τιμῶν χονδρικῆς πωλήσεως ὁ ὁποῖος ἀντανακλᾶ κατά βάσιν τάς μεταβολάς - τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου - τῶν τιμῶν τῶν εἰδῶν τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἀντικείμενον συναλλαγῶν εἰς τήν σφαῖραν τοῦ χονδρικοῦ ἐμπορίου.

Πέραν τῶν ὡς ἄνω βασικῆς χρησιμότητος τιμαρίθμων καταρτίζονται πολλάκις εἰς τήν πρᾶξιν - δι' εἰδικωτέρους σκοπούς - καί ἕτεροι τοιοῦται ὡς π.χ. οἱ καλούμενοι Γεωργικοί Δεῖκται Τιμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς τάς "ἀπολαμβανομέ-

νας" ἤ "καταβαλλομένας" ὑπό τῶν γεωργῶν-παραγωγῶν τι-
μάς - διά πωλούμενα ἤ ἀγοραζόμενα ὑπ'αὐτῶν "εἴδη" ἀν-
τιστοίχως - οἱ γνωστοί εἰς τήν στατιστικήν τοῦ ἐξω-
τερικοῦ ἐμπορίου ὡς Δεῖκται Μέσης Ἀξί-
ας οἱ ὁποῖοι χαρακτηρίζουν τάς μεταβολάς τῶν μέσων
τιμῶν τῶν ἐξαγομένων ἤ τῶν εἰσαγομένων εἰς μίαν χώ-
ραν ἐμπορευμάτων, οἱ Δεῖκται Τιμῶν Πρώ-
των Ὑλῶν, ὡρισμένοι Χρηματιστηρι-
ακοί Δεῖκται ἀναφερόμενοι εἰς τάς μεταβο-
λάς τῶν τιμῶν διαφόρων Χρηματιστηριακῶν τίτλων κοκ.

Μία δευτέρα κατηγορία ἀριθμοδεικτῶν εὐρυτάτης ἐ-
πίσης χρησιμότητος καί πολλαπλῶν ἐφαρμογῶν εἶναι οἱ
καλούμενοι ἐν γένει Δεῖκται Ποσοτήτων
ἤ Δεῖκται Ὄγκου.

Οἱ ἐν λόγῳ δεῖκται χρησιμοποιοῦνται κατά βάσιν
διά τήν μέτρησιν τῶν μεταβολῶν αἱ ὁποῖαι ἐπέρχον-
ται διαχρονικῶς εἰς τόν ὄγκον ἤ ἄλλως τήν πο-
σότητα μιᾶς ὁμάδος ἀγαθῶν θεωρουμένων ἀπό κοι-
νοῦ (συλλογικῶς). Οὕτω π.χ. ἡ διαχρονική ἐ-
ξέλιξις τοῦ πραγματικοῦ ἤ ἄλλως τοῦ φυσικοῦ προϊόν-
τος τῆς βιομηχανίας μιᾶς χώρας παρακολουθεῖται κατά
κανόνα διά τῆς καταρτίσεως ἑνός δείκτου ὄγκου γνω-
στοῦ ὡς δείκτου βιομηχανικῆς πα-
ραγωγῆς. Ἕτεροι εὐρέως χρησιμοποιούμενοι δεῖ-
κται ὄγκου εἶναι ὁ δείκτης γεωργικῆς
παραγωγῆς ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τάς διαδο-
χικάς μεταβολάς καί γενικώτερον τήν ἐξέλιξιν τοῦ φυ-
σικοῦ ὄγκου τῆς γεωργικῆς παραγωγῆς μιᾶς χώρας, οἱ
δεῖκται ὄγκου εἰσαγωγῶν καί ἐ-
ξαγωγῶν οἱ ὁποῖοι ἀντανακλοῦν τάς μεταβολάς
τῆς ποσότητος τῶν εἰσαγομένων ἤ ἐξαγομένων ἐμπορευ-
μάτων, διάφοροι δεῖκται οἱ ὁποῖοι μετροῦν τάς μετα-
βολάς τῆς ἀποδόσεως ἤ ἄλλως τῆς κατά κεφαλήν
παραγωγῆς μιᾶς ὁμάδος βιομηχανικῶν ἐργατῶν
(ὑπαλλήλων κλπ.) γνωστοί εὐρέως ὡς δεῖκται πα-
ραγωγικότητος κ.ο.κ.

Εἰς τήν πρᾶξιν, πέραν τῶν ἀναφερομένων ἀνωτέρω
τιμαρίθμων καί δεικτῶν ὄγκου ἤ
ποσότητος, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ὡς εἴδομεν τάς

ροντας - κατηγορίας ά ρ ι θ μ ο δ ε ι κ τ ῶ ν, πρός
δύο σημαντικωτέρας - ἐξ ἀπόψεως πρακτικοῦ ἐνδιαφέ-
ἀντιμετώπισιν εἰδικωτέρων οἰκονομικῶν ἤ κοινωνικῶν
προβλημάτων χρησιμοποιοῦνται πολλάκις καί διάφοροι
ἄλλοι ἀριθμοδεῖκται ὡς π.χ. οἱ δ ε ῖ κ τ α ι ἀ π α-
σ χ ο λ ή σ ε ω ς ἤ ἀ ν ε ρ γ ί α ς, οἱ ὁποῖοι με-
τροῦν τάς μεταβολάς εἰς τό γενικόν ἐπίπεδον - εἰς τόν
ὄγκον - τῆς ἀπασχολήσεως ἤ τό ὕψος τῆς ἀνεργείας, οἱ
δ ε ῖ κ τ α ι ἀ μ ο ι β ῶ ν, οἱ ὁποῖοι ἀντανακλοῦν
τήν ἐξέλιξιν τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου - τοῦ ὕψους - τῶν
μισθῶν ἤ ἡμερομισθίων, δ ε ῖ κ τ α ι .ἐ ρ γ α τ ι -
κ ῶ ν, τ ρ ο χ α ί ω ν ἤ ἄλλων ἀ τ υ χ η μ ά τ ω ν,
δ ε ῖ κ τ α ι γ ε ν ν η τ ι κ ό τ η τ ο ς, δ ε ῖ-
κ τ α ι - γ ε ν ι κ ῆ ς ἤ β ρ ε φ ι κ ῆ ς - θ ν η-
σ ι μ ό τ η τ ο ς, δ ε ῖ κ τ α ι ἀ κ ρ ο α μ α τ ι-
κ ό τ η τ ο ς ἤ π α ρ α κ ο λ ο υ θ ή σ ε ω ς ἐν
γένει τῶν μ έ σ ω ν ἐ ν η μ ε ρ ώ σ ε ω ς, τῶν θε-
α μ ά τ ω ν κλπ. καί τέλος διάφοροι ἄλλοι π α ρ ά -
γ ω γ ο ι δεῖκται - δηλαδή δεῖκται προκύπτοντες διά
καταλλήλου συνδυασμοῦ ἑτέρων τοιούτων - ὅπως π.χ. οἱ
γνωστοί εὐρέως ὡς δ ε ῖ κ τ α ι ἤ ὅ ρ ο ι ἐ μ πο-
ρ ί ο υ οἱ ὁποῖοι προκύπτουν διά διαιρέσεως τῶν δει-
κτῶν μέσης ἀξίας "ἐξαγωγῶν" καί "εἰσαγωγῶν" καί χα-
ρακτηρίζουν τήν σχέσιν τῶν ἀντιστοίχως ἀπολαμβανομέ-
νων καί καταβαλλομένων ὑπό τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου
τιμῶν κ.ο.κ.

Οἱ πλεῖστοι ἐκ τῶν ἀναφερομένων ἀνωτέρω δει-
κτῶν καταρτίζονται καί παρ'ἡμῖν, ὑπό τῆς ' 'Εθνικῆς
Στατιστικῆς 'Υπηρεσίας (Ε.Σ.Υ.Ε.) ἤ ἄλλων ἁρμοδίων
πρός τοῦτο 'Οργανισμῶν. Οἱ συγκεκριμένοι ἀντικει-
μενικοί σκοποί ἑνός ἑκάστου ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν,
αἱ μέθοδοι καταρτίσεως - ὑπολογισμοῦ - αὐτῶν, τά ἀ-
ναφυόμενα συναφῶς προβλήματα, οἱ ὑφιστάμενοι περιο-
ρισμοί καί ἡ ἀξιοπιστία ἑκάστου δείκτου, τέλος δέ,
αἱ ἐφαρμογαί καί ὁ τρόπος χρησιμοποιήσεως αὐτῶν εἰς
τήν χάραξιν τῆς οἰκονομικῆς καί κοινωνικῆς πολιτι-
κῆς, περιγράφονται κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον λεπτομε-
ρῶς εἰς εἰδικά δημοσιεύματα τῆς ὡς ἄνω 'Υπηρεσίας εἰς
τά ὁποῖα καί παραπέμπεται ὁ ἐνδιαφερόμενος πρός τοῦ-
το ἀναγνώστης.

Ἐκ τῆς προσεκτικῆς μελέτης διαφόρων ἐκ τῶν ἀναφερομένων ὡς ἄνω ἀριθμοδεικτῶν - εἴτε ἐκ τῶν καταρτιζομένων παρ'ἡμῖν, εἴτε διεθνῶς χρησιμοποιουμένων τοιούτων - καθίσταται ἀμέσως φανερόν ὅτι τόσον αἱ μέθοδοι ὑπολογισμοῦ καί ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως αὐτῶν εἰς τήν πρᾶξιν, ὅσον καί τά ἀναφυόμενα κατά τήν κατάρτισίν των προβλήματα καί συναφεῖς περιορισμοί, παρουσιάζουν σημαντικάς ὁ μ ο ι ό τ η τ α ς, ἐν πολλοῖς δέ ταυτίζονται μεταξύ των ἀπολύτως (εἶναι κοινά).

Διά τόν λόγον αὐτόν εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους θά μᾶς ἀπασχολήσουν λεπτομερῶς μόνον τά περί τ ι μ α ρ ί θ μ ω ν, καί εἰδικώτερον αἱ συνήθεις μέθοδοι ὑπολογισμοῦ αὐτῶν, τά σπουδαιότερα ἐκ τῶν ἀναφυομένων κατά τήν κατάρτισίν των προβλήματα καί οἱ τρόποι ἀντιμετωπίσεως τούτων, τέλος δέ ἡ ἀξιοποίησις τῶν τιμαρίθμων εἰς τήν πρᾶξιν καί αἱ κυριώτεραι ἐφαρμογαί των. Κατά τήν ἀντιμετώπισιν τῶν περισσοτέρων ἐκ τῶν ἀνωτέρω ζητημάτων καί ἰδιαιτέρως διά τήν περιγραφήν τῶν ἀναφυομένων κατά τήν κατάρτισιν ἑνός τιμαρίθμου προβλημάτων, θά χρησιμοποιήσωμεν - διά λόγους πληρεστέρας κατανοήσεως αὐτῶν - ὡς πλαίσιον καί συγκεκριμένον παράδειγμα τόν δ ε ί κ τ η ν τ ι μ ῶ ν κ α τ α ν α λ ω τ ο ῦ ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ ὡς γνωστόν τόν σημαντικώτερον - ἐξ ἀπόψεως πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος - ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν.

Πρός πληρεστέραν ὅμως ἐνημέρωσιν τοῦ ἀναγνώστου πέραν τῶν τιμαρίθμων θά πραγματευθῶμεν ἐπίσης δι'ὀλίγων καί τά περί δ ε ι κ τ ῶ ν ὄ γ κ ο υ ἤ π ο σ ο τ ή τ ω ν, ἰδιαιτέρως δέ τάς μεθόδους καταρτίσεως αὐτῶν καί τάς κυριωτέρας ἐφαρμογάς των.

### 9.1.1 Χρήσιμοι Συμβολισμοί

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ τ ά ς τ ι μ ά ς τῶν διαφόρων ε ἰ δ ῶ ν - ἀγαθῶν, προϊόντων, ὑπηρεσιῶν κλπ - θά συμβολίζωμεν ἐν γένει διά τοῦ γράμματος p - ἀρχικοῦ τῆς λέξεως price (τιμή) - τάς δέ π ο σ ό τ η τ α ς αὐτῶν διά τοῦ γράμματος q ἀρχικοῦ τῆς λέξεως quantity (ποσότης).

Πρός διάκρισιν τῶν τιμῶν καί τῶν ποσοτήτων ἑνός εἴδους κατά τάς *διαφόρους* - συνήθως διαδοχικάς - *χρονικάς στιγμάς* ἤ *περιόδους* εἰς τά ἀνωτέρω σύμβολα προστίθεται - κατά κανόνα εἰς τό κάτω δεξιόν - ἕνας δείκτης δηλωτικός τῆς ἀντιστοίχου στιγμῆς ἤ περιόδου. Οὕτω, αἱ τιμαί ἑνός εἴδους κατά τάς χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους 0, 1,2,...,N θά συμβολίζωνται

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_N \quad \text{ἤ συνοπτικῶς} \quad p_t, \quad t = 0,1,2,\dots,N$$

αἱ δέ ποσότητες αὐτοῦ

$$q_0, q_1, q_2, \dots, q_N \quad \text{ἤ συνοπτικῶς} \quad q_t, \quad t = 0,1,2,\dots,N$$

Ὁμοίως, πρός διάκρισιν - τῶν τιμῶν καί τῶν ποσοτήτων - τῶν διαφόρων *εἰδῶν* τά ὁποῖα ὑπεισέρχονται εἰς τό ἐξεταζόμενον ἑκάστοτε πρόβλημα, χρησιμοποιεῖται συνήθως ἕνας πρόσθετος δείκτης, τιθέμενος κατά κανόνα εἰς τό ἄνω δεξιόν τῶν ἀνωτέρω συμβόλων, δηλῶν τό ἀντίστοιχον εἶδος. Οὕτω, ἐάν κατά τήν μελέτην ἑνός φαινομένου ὑπεισέρχονται k ἐν ὅλῳ εἴδη, αἱ τιμαί καί αἱ ποσότητες αὐτῶν κατά τήν περίοδον t - ὅπου t=0,1,2,...,N - συμβολίζονται ἀντιστοίχως

$$p_t^{(1)}, p_t^{(2)}, \dots, p_t^{(k)} \quad \text{καί} \quad q_t^{(1)}, q_t^{(2)}, \dots, q_t^{(k)} \quad \text{ἤ συνοπτικῶς} \quad p_t^{(i)} \quad \text{καί} \quad q_t^{(i)}$$

ὅπου φυσικά $i=1,2,\dots,k$ καί $t=0,1,2,\dots,N$.

Τέλος, κατ'ἀναλογίαν πρός τά ἀνωτέρω, οἱ διάφοροι *δεῖκται τιμῶν* (*τιμάριθμοι*) θά συμβολίζωνται κατά κανόνα διά τοῦ κεφαλαίου γράμματος P, ἀντιστοίχως δέ οἱ *δεῖκται ποσοτήτων* ἤ *ὄγκου* διά τοῦ κεφαλαίου γράμματος Q.

### 9.1.2 Περίοδος «Βάσεως» καί «Τρέχουσα» Περίοδος

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἕνας *τιμάριθμος* ἤ ἕνας *δείκτης ὄγκου*, ἀναφερόμενος εἰς διαχ ρ ο ν ι κ ά ς μεταβολάς, μετρᾶ ἐν γένει τάς διαφοροποιήσεις αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται εἰς τάς "τιμάς" ἤ τόν "ὄγκον" μιᾶς ὁμάδος εἰδῶν - θεωρουμένων σ υ λ λ ο γ ι κ ῶ ς - μεταξύ δ ύ ο συγκεκριμένων χρονικῶν στιγμῶν ἤ περιόδων.

Ἡ μία ἐκ τῶν ἐν λόγῳ περιόδων - συνήθως ἡ π ρ ο γ ε ν ε σ τ έ ρ α - ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται ὡς βάσις τῶν ἀπαιτουμένων συγκρίσεων καλεῖται π ε ρ ί ο δ ο ς Β ά σ ε ω ς ἤ ἁπλῶς Β ά σ ι ς, ἡ δέ ἄλλη - τά δεδομένα τῆς ὁποίας συγκρίνονται πρός τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα τῆς βάσεως - καλεῖται ἐν γένει "τ ρ έ χ ο υ σ α" περίοδος.

Ἡ περίοδος βάσεως συμβολίζεται συνήθως διά τοῦ ἀριθμοῦ μηδέν (0), ἡ τρέχουσα δέ τοιαύτη διά τοῦ ἀριθμοῦ (1). Οὕτω, ἕνας τιμάριθμος ἤ ἕνας δείκτης ὄγκου οἱ ὁποῖοι προορίζονται διά τήν μέτρησιν τῶν σχετικῶν μεταβολῶν μεταξύ τῶν περιόδων (0) καί (1) παρίστανται ἀντιστοίχως διά τῶν συμβόλων $P_{01}$ καί $Q_{01}$.

### 9.1.3 Δεῖκται «Σταθερᾶς» καί Δεῖκται «Κινητῆς» Βάσεως

Προκειμένου - πέραν τῶν ἁπλῶν ἐφ'ἅπαξ συγκρίσεων - νά μελετηθῇ γενικώτερον ἡ μακροχρόνιος ἐξέλιξις τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν ἤ τοῦ ὄγκου μιᾶς οἱασδήποτε ὁμάδος εἰδῶν, θεωρουμένων πάντοτε συλλογικῶς, καθίσταται, ὡς εἴδομεν, ἀναγκαία ἡ κατάρτισις μιᾶς σ ε ι ρ ᾶ ς ἀντιστοίχων τιμαρίθμων ἤ δεικτῶν ὄγκου.

Οἱ ὅροι - οἱ ἐπί μέρους δηλαδή δεῖκται - τῆς ἐν λόγῳ σειρᾶς εἶναι δυνατόν νά προκύψουν - γενομένων τῶν καταλλήλων ὑπολογισμῶν - εἴτε ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δεδομένων ἑκάστης περιόδου πρός τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα μ ι ᾶ ς ὡ ρ ι σ μ έ ν η ς καί ἐκ τῶν π ρ ο τ έ ρ ω ν κ α θ ο ρ ι ζ ο μ έ ν η ς π ε ρ ι ό δ ο υ χρησιμοποιουμένης δηλαδή μιᾶς σ τ α θ ε ρ ᾶ ς βάσεως συγκρίσεων εἴτε διά συγκρίσεως τῶν δεδομένων ἑκάστης περιόδους πρός τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα τῆς προηγουμένης, χρησιμοποιουμένης δηλαδή κ ι-ν η τ ῆ ς βάσεως συγκρίσεων. Τιμάριθμοι ἤ δεῖκται ὄγκου καταρτιζόμενοι κατά τόν πρῶτον τρόπον, χρησιμοποιουμένης δηλαδή ὡς βάσεως τῶν συγκρίσεων τῆς α ὑ τ ῆ ς πάντοτε περιόδου - κατά κανόνα μάλιστα τῆς πρώτης ἐξ αὐτῶν-εἶναι γνωστοί εὐρέως ὡς δ ε ῖ κ τ α ι σ τ α θ ε ρ ᾶ ς β ά σ ε ω ς, ἡ σειρά δέ αὐτῶν, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου καταρτίσεώς των, παρίσταται ἀντιστοίχως διά τῶν συμβόλων

$P_{01},P_{02},\ldots,P_{0N}$ καί $Q_{01},Q_{02},\ldots,Q_{0N}$ ἤ συνοπτικῶς $P_{0t}$ καί $Q_{0t}$ ὅπου $t=1,2,\ldots,N$.

Ἀντιθέτως, τιμάριθμοι, δεῖκται ὄγκου κλπ., οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται μέ βάσιν τήν προηγουμένην - ἑκάστοτε - περίοδον καλοῦνται συνήθως δ ε ῖ κ τ α ι κ ι ν η τ ῆ ς ἤ κ υ λ ι ο μ έ ν η ς β ά σ ε ω ς ἤ ἁπλῶς ἀ λ υ σ ω τ ο ί δ ε ῖ κ τ α ι.

Οἱ ἀλυσωτοί τιμάριθμοι καί δεῖκται ὄγκου παρίστανται ἀντιστοίχως διά τῶν συμβόλων

$$P_{t-1,t} \text{ καί } Q_{t-1,t} \quad \text{ὅπου } t=1,2,\ldots,N$$

Εἰς τήν πρᾶξιν, διά τήν παρακολούθησιν τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως τοῦ "γενικοῦ ἐπιπέδου" τῶν τιμῶν ἤ τοῦ ὄγκου μιᾶς ὁμάδος εἰδῶν χρησιμοποιοῦνται κατά κανόνα - λόγῳ τῶν πολλαπλῶν πλεονεκτημάτων τά ὁποῖα παρουσιάζουν - τιμάριθμοι καί δεῖκται ὄγκου σ τ α θ ε ρ ᾶ ς βάσεως.

## 9.2 Ἀτομικοί Τιμάριθμοι καί Ἀτομικοί Δεῖκται Ὄγκου. Ἰδιότητες

Οἱ Ἀ τ ο μ ι κ ο ί Τ ι μ ά ρ ι θ μ ο ι ὡς καί οἱ Ἀ τ ο μ ι κ ο ί Δ ε ῖ κ τ α ι Ὄ γ κ ο υ εἶναι ἁπλοῖ ἀριθμοδεῖκται οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς ἕν μεμ ο ν ω μ έ ν ο ν εἶδος καί μετροῦν ἀντιστοίχως τάς μεταβολάς τῶν τιμῶν ἤ τῶν ποσοτήτων αὐτοῦ μεταξύ δύο περιόδων ἤ γενικώτερον μεταξύ δύο οἱωνδήποτε καταστάσεων.

Ἐάν $p_0$ συμβολίζει τήν τιμήν ἑνός εἴδους εἰς ὡρισμένην περίοδον - λαμβανομένην ἐν προκειμένῳ ὡς περίοδον β ά σ ε ω ς - καί $p_1$ τήν τιμήν τοῦ α ὐ τ ο ῦ ἀ κ ρ ι β ῶ ς εἴδους εἰς οἱανδήποτε ἄλλην περίοδον - θεωρουμένην ἀντιστοίχως ὡς τ ρ έ χ ο υ σ α ν - πρός μέτρησιν τῆς ἐπελθούσης εἰς τήν τιμήν τοῦ ἐν λόγῳ εἴδους μεταβολῆς χρησιμοποιεῖται συνήθως τό π η λ ί κ ο ν $\frac{p_1}{p_0}$, ἐκπεφρασμένον κατά κανόνα ὡς ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν (%).

Οὕτω π.χ., ἐάν ἡ τιμή τοῦ σπορελαίου κατά τά ἔτη 1970 καί 1972 ἦτο ἀντιστοίχως 20 καί 23 δρχ. κατά κιλόν, ὁ ἀτομικός τιμάριθμος τοῦ ἐν λόγῳ εἴδους διά τό ἔτος 1972 - μέ βάσιν τῶν συγκρίσεων τό ἔτος 1970 - ὑπολογιζόμενος ἐκ τοῦ τύπου

$$P_{01}=\frac{p_1}{p_0}100 \qquad (9.1)$$

εἶναι
$$P_{70,72}=\frac{23}{20}100=115\%$$

προφανῶς δέ δηλοῖ ὅτι "ἐάν ἡ τιμή τοῦ σπορελαίου κατά τήν περίοδον βάσεως - ἔτος 1970 - θεωρηθῆ ὡς - ἴση πρός - 100, ἡ τιμή αὐτοῦ κατά τήν τρέχουσαν περίοδον - ἔτος 1972 - ἀντιστοιχεῖ πρός 115" ἤ ἐν ἄλλοις λόγοις ὅτι "ἡ σχετική αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ὑπ' ὄψιν ἀγαθοῦ ἀνῆλθεν εἰς 15%.

Κατ'ἀναλογίαν τῶν ἀνωτέρω, ἐάν $q_0$ καί $q_1$ συμβολίζουν ποσότητας ἑνός ἀγαθοῦ - αἱ ὁποῖαι π.χ. παρήχθησαν, ἐπωλήθησαν, κατηναλώθησαν, ἐξήχθησαν κλπ - κατά τήν περίοδον βάσεως (0) καί τήν τρέχουσαν περίοδον (1) ἀντιστοίχως, πρός μέτρησιν τῆς ἐπελθούσης μεταβολῆς εἰς τόν ὄγκον τοῦ ἐν λόγῳ εἴδους χρησιμοποιεῖται καί ἐν προκειμένῳ τό πηλίκον $\frac{q_1}{q_0}$ ἐκπεφρασμένον καί πάλιν ὡς ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν(%).

Οὕτω, ὁ ἀτομικός δείκτης ὄγκου τοῦ ὑπ'ὄψιν ἀγαθοῦ, ὁρίζεται ἐκ τῆς - ἀντιστοίχου πρός τήν(9.1)- σχέσεως

$$Q_{01}=\frac{q_1}{q_0}100 \qquad (9.2)$$

Τό πηλίκον $\frac{p_1}{p_0}$ - συμβολιζόμενον συνήθως $p_{01}$ - καλεῖται πολλάκις καί σ χ ε τ ι κ ή  τ ι μ ή  τοῦ ὑπό μελέτην εἴδους κατά τήν περίοδον (1) ἐ ν  σ χ έ σ ε ι  ἤ  ἀ ν α φ ο ρ ι κ ῶ ς  πρός τήν περίοδον (0). Γενικώτερον, ἐάν $p_\alpha$ καί $p_\beta$ εἶναι αἱ τιμαί ἑνός ἀγαθοῦ κατά τινας περιόδους (α) καί (β) ἀντιστοίχως, τό πηλίκον

$$p_{\alpha\beta}=\frac{p_\beta}{p_\alpha} \qquad (9.3)$$

ἀποτελεῖ τήν σ χ ε τ ι κ ή ν  τ ι μ ή ν  τοῦ ἐν λόγῳ εἴδους κατά τήν περίοδον (β) μέ βάσιν τήν περίοδον (α).

Κατ'ἀναλογίαν τῶν ἀνωτέρω, τό πηλίκον

$$q_{\alpha\beta}=\frac{q_\beta}{q_\alpha} \qquad (9.4)$$

καλεῖται ἐπίσης σ χ ε τ ι κ ό ς  ὄ γ κ ο ς  ἤ  σχε τ ι κ ή  π ο σ ό τ η ς - παραχθεῖσα, εἰσαχθεῖσα κλπ - τοῦ ὑπ'ὄψιν εἴδους κατά τήν περίοδον (β) πρός - ἤ μέ βάσιν - τήν περίοδον (α).

Ἡ χρησιμοποίησις - πρός μέτρησιν τῆς ἐπελθούσης εἰς τήν τιμήν ἑνός εἴδους μεταβολῆς - τῆς σχετικῆς τιμῆς αὐτοῦ $\frac{p_1}{p_0}$ καί ὄχι τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς $p_1-p_0$, ὑπαγορεύεται κατά βάσιν ἐκ τοῦ ὅτι

(i) διά τοῦ πηλίκου $\frac{p_1}{p_0}$, ἡ ἐπελθοῦσα μεταβολή ἀξιολογεῖται ὄχι ἀφ' ἑαυτῆς ἀλλ' ἐ ν  σ χ έ σ ε ι  πρός τήν ἀ ρ χ ι κ ή ν  τιμήν τοῦ εἴδους καί ὡς ἐκ τούτου ἀποκαλύπτεται - πρᾶγμα τό ὁποῖον καί κυρίως ἐνδιαφέρει εἰς τήν πρᾶξιν - ἡ σ χ ε τ ι κ ή  σ η μ α σ ί α αὐτῆς, καί

(ii) τό ἐν λόγῳ πηλίκον, ἀντιθέτως πρός τήν διαφοράν $p_1-p_0$, εἶναι ἀριθμός κ α θ α ρ ό ς καί ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς  τῶν μονάδων μετρήσεως είς τάς όποίας άναφέρονται αί τιμαί τοῦ ὑπό μελέτην εἴδους καί κατά συνέπειαν, πέραν τῆς ἀντικειμενικῆς ἀξιολογήσεως τῆς ἐπελθούσης μεταβολῆς, καθίσταται ἐπίσης δυνατή ἡ σ ύ γ κ ρ ι σ ι ς αὐτῆς πρός ἀντιστοίχους μεταβολάς ἄλλων εἰδῶν - ἐκπεφρασμένων ἐν γένει εἰς διαφόρους μονάδας - καί ἡ ἱ ε ρ ά ρ χ η σ ι ς αὐτῶν ἀναλόγως τοῦ μεγέθους καί τῆς πραγματικῆς σημασίας ἑκάστης.

Τά ἀνωτέρω - τά ὁποῖα ἰσχύουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, καί διά τούς ἀντιστοίχους δ ε ί κ τ α ς ὄ γ κ ο υ - καθίστανται ἀμέσως ἀντιληπτά δι'ἑνός ἁπλοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαί τριῶν εἰδῶν - π.χ. ἄρτου, βουτύρου καί πετρελαίου - κατά τά ἔτη 1970 - λαμβανομένου ἐν προκειμένῳ ὡς περιόδου βάσεως (0) καί 1972 - θεωρουμένου ἀντιστοίχως ὡς τρεχούσης περιόδου (1) - ἦσαν αἱ παρατιθέμεναι εἰς τόν κατωτέρω πίνακα (9.1).

Πίναξ 9.1

| Εἴδη | Τιμαί 1970 ($p_0$) | Τιμαί 1972 ($p_1$) | $p_1-p_0$ | $P_{01}=\frac{p_1}{p_0}100$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) Ἄρτος | 5 δρχ κατά κιλόν | 7 δρχ κατά κιλόν | 2 | 140 |
| (2) Βούτυρον | 50 " " " | 52 " " " | 2 | 104 |
| (3) Πετρέλ. | 2000 " "τόννον | 2500 " " τόννον | 500 | 125 |

Προκειμένου νά μελετηθοῦν - νά ἀξιολογηθοῦν, νά συγκριθοῦν μεταξύ των κλπ. - αἱ ἐπελθοῦσαι εἰς τάς τιμάς τῶν ἐν λόγῳ εἰδῶν μεταβολαί ὑπελογίσθησαν ἀφ'ἑνός αἱ διαφοραί $p_1-p_0$ καί ἀφ'ἑτέρου - διά τοῦ τύπου (9.1) - οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι αὐτῶν καί τά ἀποτελέσματα παρατίθενται εἰς τάς δύο τελευταίας στήλας τοῦ ἀνωτέρω πίνακος.

Λαμβάνων ὑπ'ὄψιν τάς ἀπολύτους διαφοράς $p_1 - p_0$ ἕνας ἐρευνητής θά κατέληγεν ἴσως εἰς τό συμπέρασμα ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τῶν δύο πρώτων εἰδῶν ἦτο ἡ αὐτή (!!) καί κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον μικρά - 2 δρχ. μόνον !! - ἐνῶ διά τήν αὔξησιν τῶν 500 δρχ. εἰς τό τρίτον εἶδος θά ἦτο πιθανόν διατεθιμένος νά δώση τόν χαρακτηρισμόν τεραστία (!!).

Προφανῶς ὅμως τά ὡς ἄνω συμπεράσματα δέν ἀνταποκρίνονται εἰς τήν πραγματικότητα καί ὁ ἐρευνητής μας θά τό ἀνεγνώριζε ἀμέσως ἐάν τοῦ ἐτίθεντο τά ἑξῆς ἐρωτήματα:

(i) 'Η αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ἄρτου ἀπό 5 εἰς 7 δρχ. καί ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ βουτύρου ἀπό 50 εἰς 52 δρχ. ἔχουν πράγματι τήν αὐτήν σημασίαν; ἤ μήπως ἡ πρώτη εἶναι κατ'οὐσίαν πολύ ἐντονωτέρα τῆς δευτέρας; καί

(ii) Πῶς θά ἐχαρακτήριζε τήν αὔξησιν τῆς τιμῆς τοῦ πετρελαίου καί πῶς θά ἱεραρχοῦσε ταύτην ἐν σχέσει πρός τάς αὐξήσεις τῶν δύο ἄλλων εἰδῶν, ἐάν ἡ τιμή τοῦ ὡς ἄνω εἴδους ἐδίδετο κατά κ ι λ ό ν - καί ὄχι κατά τ ό ν ο ν - ὅτε ἡ ἐν λόγῳ αὔξησις θά ἀνήρχετο εἰς 0,50 δρχ;

Αἱ ἀνωτέρω δυσχέρειαι ἀποφεύγονται πλήρως ἐάν ἀντί τῶν ἀπολύτων διαφορῶν $p_1 - p_0$ χρησιμοποιηθοῦν αἱ σ χ ε τ ι κ α ί τ ι μ α ί $\frac{p_1}{p_0}$ ἤ ἄλλως οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι $P_{01}$ - τῆς τελευταίας στήλης τοῦ πίνακος (9.1) - ὑπολογιζόμενοι ἐκ τοῦ τύπου (9.1). Πράγματι, διά τῶν ἐν λόγῳ μέτρων αἱ ἐπελθοῦσαι μεταβολαί ἀξιολογοῦνται ἐ ν σ χ έ σ ε ι πρός τάς ἀ ρ χ ι κ ά ς τιμάς ἑκάστου εἴδους καί ὡς ἐκ τούτου ἀφ'ἑνός ἀποκαλύπτεται ἡ πραγματική σημασία ἑκάστης μεταβολῆς ἀφ'ἑτέρου δέ καθίσταται δυνατή ἡ σύγκρισις καί ἡ ἱεράρχησις αὐτῶν. Οὕτω π.χ. καθίσταται φανερόν ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ἄρτου - ἀνερχομένη εἰς 40% - εἶναι μᾶλλον σημαντική, ἐνῶ ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ βουτύρου - παρ'ὅτι ἡ αὐτή ἀπολύτως μέ ἐκείνην τοῦ ἄρτου - εἶναι μᾶλλον ἐπουσιώδης, ὁπωσδήποτε δέ πολύ μικροτέρα - ἀναλογικῶς - τῆς προηγουμένης. Ἐξ ἄλλου, ἀντιθέτως πρός τήν διαφοράν $p_1 - p_0$, ἡ σχετική τιμή τοῦ πετρελαίου ἀνεξαρτήτως ἐάν ἡ τιμή αὐτοῦ δίδεται κατά τόννον ἤ κατά κιλόν εἶναι πάντοτε 1,25 - ἤ ἄλλως 125% - τοῦτο δέ, πέραν τῆς ἀντικειμενικῆς ἀξιολογήσεως τῆς ἀντιστοίχου αὐξήσεως ἐπιτρέπει τήν σύγκρισιν αὐτῆς πρός τάς σχετικάς αὐξήσεις τῶν ὑπολοίπων εἰδῶν καί τήν ὀρθήν ἱεράρχησίν της. Οὕτω, π.χ. ἀνεξαρτήτως τοῦ ὅτι ἡ ἀπόλυτος αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ πετρελαίου εἶναι κατά πολύ μεγαλυτέρα ἐκείνης τοῦ ἄρτου - 500 ἔναντι 2 δρχ. - ἡ σχετική σημασία αὐτῆς εἶναι προφανῶς σημαντικῶς μικροτέρα (25% ἔναντι 40% τοῦ ἄρτου κ.ο.κ.).

Αἱ σχετικαί τιμαί - ὁριζόμεναι ἐν γένει ἐκ τῆς σχέσεως (9.3) - ὡς καί αἱ σχετικαί ποσότητες - ὁριζόμεναι ἀντιστοίχως ἐκ τῆς (9.4) - πέραν τῶν ἀνωτέρω πλεονεκτημάτων, παρουσιάζουν ἀκόμη καί τάς κατωτέρω χρησίμους - διά τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς - ἰδιότητας:

(α) Τήν ἰδιότητα τῆς Ταυτότητος

Συμφώνως πρός τήν ἐν λόγῳ ἰδιότητα ἡ σχετική τιμή ἑνός εἴδους εἰς μίαν οἱανδήποτε περίοδον (α) ἐν σχέσει - ἤ ἀναφορικῶς - πρός τήν αὐτήν περίοδον εἶναι πάντοτε ἴση πρός τήν μονάδα, ἤτοι

$$P_{\alpha\alpha} \equiv 1 \qquad (9.5)$$

Πράγματι, συμφώνως πρός τόν τύπον (9.3) ἔχομεν

$$P_{\alpha\alpha} = \frac{P_\alpha}{P_\alpha} = 1$$

Οὕτω, ὁ ἀτομικός τιμάριθμος - ὡς καί ὁ ἀτομικός δείκτης ὄγκου - ἑνός οἱουδήποτε εἴδους κατά τήν περίοδον Βάσεως (0) εἶναι πάντοτε ἴσος πρός 100, ἤτοι

$$P_{oo} = 100 \text{ καί } Q_{oo} = 100$$

Διά τόν λόγον αὐτόν ἄλλωστε προκειμένου εἰς τήν πρᾶξιν νά δηλώσωμεν ὅτι ἡ Βάσις εἶναι μία συγκεκριμένη χρονική περίοδος γράφομεν συνήθως

Έτος 1970≡100 ή Ιανουάριος 1973≡100 κ.ο.κ.

(β) Τήν ἰδιότητα τῆς Ἀντιστροφῆς ἐν τῷ Χρόνῳ

Συμφώνως πρός τήν ἰδιότητα ταύτην ἡ σχετική τιμή ἑνός εἴδους εἰς τήν περίοδον (β) μέ βάσιν τήν περίοδον (α) καί ἡ σχετική τιμή αὐτοῦ εἰς τήν περίοδον (α) ἐν σχέσει πρός τήν περίοδον (β) εἶναι ἀριθμοί ἀντίστροφοι.

Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ἀπόρροια τοῦ τύπου (9.3). Πράγματι, ἐκ τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως ἔχομεν

$$p_{\alpha\beta}=\frac{p_\beta}{p_\alpha},\ p_{\beta\alpha}=\frac{p_\alpha}{p_\beta} \text{ καί συνεπῶς } p_{\alpha\beta}p_{\beta\alpha}=1 \text{ ἤ } p_{\beta\alpha}=\frac{1}{p_{\alpha\beta}} \qquad (9.6)$$

(γ) Τήν ἰδιότητα τῆς Κυκλικότητος ἤ ἄλλως τήν Κυκλικήν Ἰδιότητα συμφώνως πρός τήν ὁποίαν

$$p_{\alpha\beta}p_{\beta\gamma}p_{\gamma\alpha}=1 \qquad (9.7)$$

$$\text{ἤ ἄλλως} \qquad p_{\alpha\gamma}=p_{\alpha\beta}p_{\beta\gamma} \qquad (9.8)$$

Πράγματι, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (9.3) λαμβάνομεν

$$p_{\alpha\beta}=\frac{p_\beta}{p_\alpha},\ p_{\beta\gamma}=\frac{p_\gamma}{p_\beta} \text{ καί } p_{\gamma\alpha}=\frac{p_\alpha}{p_\gamma}$$

διά πολλαπλασιασμοῦ δέ αὐτῶν τήν (9.7). Ἐξ ἄλλου, δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (9.6) ἔχομεν ὅτι

$$p_{\alpha\gamma}=\frac{1}{p_{\gamma\alpha}}$$

ἡ ὁποία ἐν συνδυασμῷ πρός τήν (9.7) δίδει τήν (9.8). Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες τῶν σχετικῶν τιμῶν - καί ἰδιαιτέρως ἡ κ υ κ λ ι κ ή τοιαύτη ἡ ὁποία ἀποτελεῖ γ ε ν ί κ ε υ σ ι ν τῶν δύο προηγουμένων - διευκολύνουν σημαντικῶς τόν ὑπολογισμόν ἀτομικῶν τιμαρίθμων σ τ α θ ε ρ ᾶ ς βάσεως ἐξ ἀντιστοίχων τοιούτων κ ι ν η τ ῆ ς βάσεως καί ἀντιστρόφως (ἐξυπακούεται ὅτι τό αὐτό συμβαίνει καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ὄγκου).

Ὑποθέτομεν π.χ. ὅτι αἱ τιμαί ἑνός εἴδους κατά τάς χρονικάς στιγμάς ἤ περιόδους 0,1,2,...,N ἦσαν ἀντιστοίχως $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N$ ἤ συνοπτικῶς $p_t$, t=0,1,2,...,N καί ὅτι ἕνας ἐρευνητής - πέραν τῶν ἁπλῶν συγκρίσεων μεταξύ δύο περιόδων - ἐνδιαφέρεται γενικώτερον διά τήν παρακολούθησιν τῆς μακροχρονίου ἐξελίξεως τῶν τιμῶν τοῦ ὑπ'ὄψιν εἴδους. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν, εἶναι δυνατόν, ὡς ἤδη ἐλέχθη, νά χρησιμοποιηθοῦν εἴτε - ἀτομικοί - τιμάριθμοι σ τ α θ ε ρ ᾶ ς βάσεως εἴτε ἀντίστοιχοι τοιοῦτοι κ ι ν η τ ῆ ς βάσεως. Οἱ πρῶτοι ἐξ αὐτῶν ὑπολογίζονται ὡς γνωστόν ἐκ τοῦ τύπου

$$P_{0t}=\frac{p_t}{p_0}100=p_{0t}100 \text{ διά } t=1,2,\ldots,N$$

χρησιμοποιουμένης ὡς βάσεως τῆς ἰδίας πάντοτε - καί ἐν προκειμένῳ τῆς ἀρχικῆς - περιόδου, ἐνῷ οἱ δεύτεροι - διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖται ὡς βάσις ἡ ἑκάστοτε προηγουμένη περίοδος - ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{t-1,t}=\frac{p_t}{p_{t-1}}100=p_{t-1,t}100 \text{ διά } t=1,2,\ldots,N$$

Συμφώνως ὅμως πρός τήν κυκλικήν ἰδιότητα (9.8) ἡ σχετική τιμή $p_{0t}$ εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν διαδοχικῶν σχετικῶν τιμῶν $p_{01}, p_{12}, \ldots, p_{t-1,t}$ διά τῆς σχέσεως

$$p_{0t}=p_{01}p_{12}\cdots p_{t-1,t} \tag{9.9}$$

Κατά συνέπειαν, ὁ τιμάριθμος $P_{0t}$ εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῇ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων - κινητῆς βάσεως - $P_{01}, P_{12}, \ldots, P_{t-1,t}$ ἀφοῦ βεβαίως προηγουμένως ἕκαστος ἐξ αὐτῶν δ ι α ι ρ ε θ ῆ δ ι ά 100.

Οὕτω π.χ. ἐάν οἱ τιμάριθμοι - κινητῆς βάσεως - ἑνός εἴδους εἶναι $P_{01}=120$, $P_{12}=110$, $P_{23}=90$, $P_{34}=105$ ὁ τιμάριθμος αὐτοῦ μέ βάσιν τήν περίοδον (0) εἶναι ἀντιστοίχως

$$P_{01}=1,20\times 100=120$$

$$P_{02}=1,20\times 1,10\times 100=132$$

$$P_{03}=1,20\times 1,10\times 0,90\times 100=118,8$$

$$P_{04}=1,20\times 1,10\times 0,90\times 1,05\times 100=124,74 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἀντιστρόφως, δοθέντος ὅτι ἡ σχετική τιμή $P_{t-1,t}$ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{t-1,t}=\frac{P_{0t}}{P_{0,t-1}} \tag{9.10}$$

οἱ τιμάριθμοι - κινητῆς βάσεως - $P_{t-1,t}$, $t=1,2,\ldots,N$ εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἀντιστοίχων σταθερᾶς βάσεως ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{t-1,t}=\frac{P_{0t}}{P_{0,t-1}} \tag{9.11}$$

Οὕτω π.χ. ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος εὑρίσκομεν ὅτι

$$P_{23}=\frac{P_{03}}{P_{02}}100=\frac{118,8}{132}100=90 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἀτομικοί Δεῖκται Ἀξίας

Πέραν τῶν τ ι μ ῶ ν καί τῶν π ο σ ο τ ή τ ω ν ἑνός εἴδους - θεωρουμένων κεχωρισμένως - ἕνας ἐρευνητής εἶναι δυνατόν νά ἐνδιαφέρεται εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις καί διά τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῆς ἀντιστοίχου συνολικῆς ἀ ξ ί α ς τοῦ εἴδους αὐτοῦ συμβολιζομένης συνήθως διά v καί όριζομένης ώς γνωστόν έκ τοῦ γινομένου τῶν άντιστοίχων τιμῶν καί ποσοτήτων έκ τῆς σχέσεως δηλαδή

$$v_t = p_t q_t,\ t=0,1,2,\ldots,N \qquad (9.12)$$

ὅπου $p_t$ συμβολίζει τήν - κατά μονάδα - τιμήν ένός ά-γαθοῦ κατά τήν περίοδον $t=0,1,2,\ldots,N$ καί $q_t$ τήν άν-τίστοιχον ποσότητα αὐτοῦ (ή όποία π.χ. παρήχθη, έ-πωλήθη, είσήχθη κ.ο.κ.).

Πρός μέτρησιν τῶν μεταβολῶν αί όποῖαι έπῆλθον είς τήν ἀ ξ ί α ν ένός εἴδους μεταξύ δύο οίωνδήπο-τε χρονικῶν περιόδων (0) καί (1) καί γενικώτερον πρός παρακολούθησιν τῆς μακροχρονίου έξελίξεως αὐτῆς, κα-ταρτίζονται καί χρησιμοποιοῦνται συνήθως είς τήν πρᾶ-ξιν οί καλούμενοι ἀ τ ο μ ι κ ο ί δ ε ῖ κ τ α ι ἀ-ξ ί α ς $V_{01}$ όριζόμενοι έκ τῆς σχέσεως

$$V_{01} = \frac{v_1}{v_0}100 = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}100 \qquad (9.13)$$

ὅπου τό πηλίκον $\frac{v_1}{v_0}$ συμβολιζόμενον έν γένει διά τοῦ $v_{01}$ ἀποτελεῖ τήν σ χ ε τ ι κ ή ν ἀ ξ ί α ν τοῦ ὑπ' ὄψιν εἴδους κατά τήν περίοδον (1) μέ β ά σ ι ν - ἤ ἀ ν α φ ο ρ ι κ ῶ ς πρός - τήν περίοδον (0). Οὕτω π.χ. έάν κατά τά ἔτη 1970 καί 1972 έξήχθησαν 120 καί 150 χιλ. τόννοι σίτου είς τήν τιμήν τῶν 2.500 καί 3.000 δρχ. κατά τόννον ἀντιστοίχως, ό δείκτης ἀξίας τοῦ έν λόγῳ εἴδους ὑπολογιζόμενος έκ τοῦ τύπου (9.13) εἶναι

$$V_{70,72} = \frac{3.000 \times 150}{2.500 \times 120}100 = 150$$

προφανῶς δέ δηλοῖ ὅτι ή ἀξία τοῦ έξαχθέντος σίτου ηὐ-ξήθη - μεταξύ τῶν ώς ἄνω περιόδων - κατά 50%.

Τόσον έκ τῶν ώς ἄνω ὑπολογισμῶν ὅσον καί έκ τοῦ τύπου (9.13) καθίσταται προφανές ὅτι οίαδήποτε με-ταβολή είς τήν ἀξίαν ένός εἴδους - καί κατά συνέπειαν ἡ τιμή τοῦ δείκτου ἀξίας $V_{01}$ - ἐξαρτᾶται ἀφ'ἑνός ἐκ τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν καί ἀφ'ἑτέρου ἐκ τῶν ἀντιστοίχων μεταβολῶν τῶν ποσοτήτων τοῦ ὑπ'ὄψιν εἴδους. Εἰδικώτερον, δοθέντος ὅτι ἡ σχετική ἀξία $v_{01}$ ἑνός εἴδους ἰσοῦται - ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ αὐτῆς - πρός τό γινόμενον τῆς ἀντιστοίχου σχετικῆς τιμῆς $p_{01}$ καί τῆς σχετικῆς ποσότητος (ὄγκου) $q_{01}$ αὐτοῦ, εἶναι δηλαδή

$$v_{01}=\frac{v_1}{v_0}=\frac{p_1q_1}{p_oq_o}=\frac{p_1}{p_o}\,\frac{q_1}{q_o}=p_{01}q_{01} \tag{9.14}$$

καθίσταται προφανές ὅτι ὁ ἀτομικός Δείκτης Ἀξίας $V_{01}$ εἶναι δυνατόν νά ὑπολογισθῆ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν τιμῶν καί ὄγκου. Οὕτω π.χ. ἐκ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων ἔχομεν ὅτι ὁ ἀτομικός τιμάριθμος τοῦ σίτου εἶναι

$$P_{01}=\frac{150}{120}100=125$$

ὁ δέ ἀτομικός δείκτης ὄγκου

$$Q_{01}=\frac{3.000}{2.500}100=120$$

Ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν προκύπτει κατ'ἀκολουθίαν ὅτι ὁ δείκτης ἀξίας τοῦ ἐν λόγῳ εἴδους εἶναι

$$V_{01}=1,25\times 1,20\times 100=150$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη τῆς σχετικῆς ἀξίας ἑνός εἴδους νά ἐκφράζεται ὡς γινόμενον τῆς σχετικῆς τιμῆς αὐτοῦ ἐπί τήν ἀντίστοιχον σχετικήν ποσότητα, ἡ γενική δηλαδή σχέσις

$$v_{\alpha\beta}=\frac{v_\beta}{v_\alpha}=\frac{p_\beta q_\beta}{p_\alpha q_\alpha}=p_{\alpha\beta}q_{\alpha\beta} \tag{9.15}$$

εἶναι γνωστή εὐρέως ὡς ἰδιότης τῆς ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς τ ῶ ν π α ρ α γ ό ν τ ω ν ἤ ἁπλῶς ὡς κ ρ ι τ ή ρ ι ο ν τῆς π α ρ α γ ο ν τ ο π ο ι ή σ ε ω ς. Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ἐξαιρετῆς σχετικῆς ἀξίας.

τικῶς χρήσιμος εἰς τήν πρᾶξιν καθ᾽ὅσον ἐπιτρέπει ἐκ τῶν δεικτῶν τιμῶν καί ποσοτήτων νά ὑπολογίζεται -ὡς γινόμενον αὐτῶν - ὁ ἀντίστοιχος δείκτης ἀξίας.

### 9.3 Γενικοί Τιμάριθμοι καί Δεῖκται Ὄγκου· Μέθοδος Ὑπολογισμοῦ Αὐτῶν

Εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον μᾶς ἀπησχόλησαν αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τήν μέτρησιν καί γενικώτερον τήν ἀξιολόγησιν τῶν μεταβολῶν - αὐξήσεων ἤ μειώσεων - αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται διαχρονικῶς εἰς τάς τιμάς ἤ τάς ποσότητας ἑνός ἀγαθοῦ ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι τοῦτο λαμβάνεται καί ἐξετάζεται μ ε μ ο ν ω μ έ ν ω ς (χρῆσις ἀτομικῶν τιμαρίθμων, ἀτομικῶν δεικτῶν ὄγκου κλπ).

Εἰς τάς πλείστας ὅμως τῶν συναφῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν - δηλαδή προβλημάτων ἀναφερομένων ἐν γένει εἰς τήν μελέτην τιμῶν, ποσοτήτων ἤ συνολικῶν ἀξιῶν - ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται συνήθως διά τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τῶν τιμῶν ἤ τῶν ποσοτήτων μιᾶς ὁ μ ά δ ο ς - κατά κανόνα π ο λ υ α ρ ί θ μ ω ν - εἰδῶν καί ὄχι ἁπλῶς δι᾽ἕν μεμονωμένον τοιοῦτον. Οὕτω π.χ. οἱ κάτοικοι μιᾶς χώρας προκειμένου νά ἀξιολογήσουν τό κόστος διατροφῆς ἤ γενικώτερον τό κόστος διαβιώσεως αὐτῶν δέν ἐνδιαφέρονται μόνον διά τήν αὔξησιν ἤ μείωσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἄρτου ἤ τοῦ κρέατος ἤ οἱουδήποτε ἄλλου - μεμονωμένου - εἴδους, ἀλλά διά τάς αὐξομειώσεις τῶν τιμῶν ὅ λ ω ν ἐ ν γ έ ν ε ι τῶν εἰδῶν τά ὁποῖα "καταναλίσκονται" ὑπ᾽αὐτῶν. Ὁμοίως, οἱ μελετηταί τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου μιᾶς χώρας ἐνδιαφέρονται διά τάς μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται διαχρονικῶς εἰς τάς ποσότητας καί τάς τιμάς ὅ λ ω ν τῶν εἰσαγομένων καί ἐξαγομένων ὑπ᾽αὐτῆς προϊόντων καί ὄχι δι᾽ἕν ἤ ὡρισμένα μόνον ἐξ αὐτῶν.

Ἡ χρησιμοποίησις πρός τόν σκοπόν αὐτόν - πρός παρακολούθησιν δηλαδή τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως τῶν τιμῶν ἤ τῶν ποσοτήτων μιᾶς ὁ μ ά δ ο ς εἰδῶν - τῶν π ο λ υ π λ η θ ῶ ν καί δ ι α φ ο ρ ο τ ρ ό π ω ς ἐν γένει κινουμένων - μεταβαλλομένων, αὐξομειουμένων - ἀτομικῶν τιμαρίθμων καί ἀτομικῶν δεικτῶν ὄγκου τῶν ἐπί μέρους εἰδῶν, θά ἐπέτρεπε βεβαίως τήν ἀξιολόγησιν τῶν ἐπερχομένων μεταβολῶν εἰς τάς τιμάς ἤ τάς ποσότητας ἑνός ἑκάστου εἴδους χωριστά, δι' εὐνοήτους ὅμως λόγους δέν θά ἐπέτρεπε - ἤ τουλάχιστον θά καθιστοῦσε ἐξαιρετικῶς δυσχερῆ - τήν ἐξαγωγήν γενικῶν καί πρακτικῶς ἐφαρμοσίμων συμπερασμάτων ἀναφερομένων εἰς ὁλόκληρον τήν ὑπό μελέτην ὁμάδα εἰδῶν.

Οὕτω, εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἐπιδιώκεται κατά κανόνα ἡ κατάρτισις ἑνός γενικοῦ δείκτου - τιμῶν ἤ ποσοτήτων ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως - ὁ ὁποῖος συνοψίζων - δίκην ἑνός μέσου ὅρου - ὅλα τά ἐπί μέρους δεδομένα - τιμάς, ποσότητας ἤ ἀντιστοίχους ἀτομικούς δείκτας - μετρᾷ τάς μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται "κατά μέσον ὅρον" ἤ ἄλλως εἰς τό "γενικόν ἐπίπεδον" τῶν τιμῶν ἤ τῶν ποσοτήτων τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν λαμβανομένων συλλογικῶς καί ἐξεταζομένων ἀπό κοινοῦ.

Αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν κατάλληλον κατά περίπτωσιν συνδυασμόν τῶν ἐπί μέρους δεδομένων - δηλαδή τῶν τιμῶν καί τῶν ποσοτήτων τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν - καί οἱ χρησιμοποιούμενοι ἀντιστοίχως μαθηματικοί τύποι διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ἐν λόγῳ γενικῶν ἤ ἄλλως συνθέτων δεικτῶν - τιμῶν καί ποσοτήτων - θά μᾶς ἀπασχολήσουν κατωτέρω.

Εἰς ὅτι ἀκολουθεῖ ὑποθέτομεν ὅτι ὁ μελετητής ἐνδιαφέρεται διά τήν διαχρονικήν ἐξέλιξιν τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν ἤ τῶν ποσοτήτων ἤ ἀκόμη τῶν συνολικῶν ἀξιῶν μιᾶς ὁμάδος ἐκ k συγκεκριμένων εἰδῶν (ἀγαθῶν, ὑπηρεσιῶν κλπ). Τάς τιμάς καί τάς ποσότητας τῶν ἐν λόγῳ εἰδῶν κατά τήν χρονικήν περίοδον $t$ - ὅπου $t=0,1,2,\dots,N$ - θά παριστῶμεν ἀντιστοίχως διά τῶν συμβόλων

$$p_t^{(1)}, p_t^{(2)}, \dots, p_t^{(k)} \quad \text{καί} \quad q_t^{(1)}, q_t^{(2)}, \dots, q_t^{(k)}$$

ἤ συνοπτικῶς $p_t^{(i)}$ καί $q_t^{(i)}$, ὅπου $i=1,2,\dots,k$ συμ-

βολίζει τό ἀντίστοιχον εἶδος. Πρός παρακολούθησιν
τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως τῶν τιμῶν - ὡς ἐπίσης τῶν
ποσοτήτων ἤ τῶν ἀξιῶν - τῶν ὡς ἄνω k εἰδῶν - θεωρου-
μένων συλλογικῶς - ἀπαιτεῖται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ
κατάρτισις μιᾶς σ ε ι ρ ᾶ ς γενικῶν τιμαρίθμων - ἤ
δεικτῶν ὄγκου καί δεικτῶν ἀξίας ἀναλόγως τῆς περι-
πτώσεως - οἱ ὁποῖοι νά ἀναφέρωνται ἀντιστοίχως εἰς
τάς χρονικάς περιόδους $t=0,1,2,\ldots,N$.

Οἱ ἐν λόγῳ δεῖκται - τιμῶν P, ποσοτήτων Q ἤ συ-
νολικῆς ἀξίας V - ἀνεξαρτήτως ἐάν καταρτίζονται χρη-
σιμοποιουμένης ὡς β ά σ ε ω ς τῶν συγκρίσεωντῆς αὐ-
τ ῆ ς πάντοτε περιόδου - ἐάν δηλαδή εἶναι οἱ δεῖ-
κται σ τ α θ ε ρ ᾶ ς β ά σ ε ω ς $P_{ot}, Q_{ot}$, καί $V_{ot}$,
ὅπου $t=1,2,\ldots,N$ - ἤ ὑπολογίζονται μέ βάσιν τήν προ-
η γ ο υ μ έ ν η ν ἑκάστοτε περίοδον - εἶναι δηλαδή
οἱ δεῖκται κ ι ν η τ ῆ ς β ά σ ε ω ς $P_{t-1,t}, Q_{t-1,t}$
καί $V_{t-1,t}$ ὅπου $t=1,2,\ldots,N$ - μετροῦν πάντοτε κατά
βάσιν μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται εἰς τά ἀντίστοι-
χα μεγέθη - εἰς τό γενικῶν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν, τῶν
ποσοτήτων ἤ τῶν ἀξιῶν ἀντιστοίχως - μεταξύ δ ύ ο συγ-
κεκριμένων χρονικῶν περιόδων. Διά τόν λόγον αὐτόν
καί πρός ἁπλοποίησιν τῶν συμβολισμῶν, ἡ περίοδος ἡ
ὁποία χρησιμοποιεῖται κατά περίπτωσιν ὡς β ά σ ι ς τῶν
συγκρίσεων θά παρίσταται πάντοτε διά τοῦ συμβόλου (ο),
ἡ περίδος τά δεδομένα τῆς ὁποίας συγκρίνονται ἑκά-
στοτε μέ τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα τῆς βάσεως - καλου-
μένη ὡς γνωστόν τ ρ έ χ ο υ σ α περίοδος - θά συμ-
βολίζεται πάντοτε διά τοῦ (1), ὡς ἐκ τούτου δέ αἱ ἀν-
τίστοιχοι τιμαί καί ποσότητες τῶν ὑπό μελέτην k εἰ-
δῶν θά παρίσταται διά τῶν συμβόλων

$$p_o^{(1)}, p_o^{(2)}, \ldots, p_o^{(N)} \quad \text{καί} \quad q_o^{(1)}, q_o^{(2)}, \ldots, q_o^{(N)}$$

διά τήν περίοσον β ά σ ε ω ς, καί

$$p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(N)} \quad \text{καί} \quad q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, \ldots, q_1^{(N)}$$

διά τήν τ ρ έ χ ο υ σ α ν περίοδον.

Τέλος, οἱ γενικοί δεῖκται τιμῶν, ποσοτήτων καί
ἀξιῶν θά παρίστανται ἁπλῶς καί μόνον διά τῶν συμβό-

λων $P_{01}$, $Q_{01}$ καί $V_{01}$. Μία ἀκόμη χρήσιμος ἁπλοποίησις
τῶν συμβολισμῶν ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται κατωτέρω - κατά
τήν παρουσίασιν τῶν διαφόρων μαθηματικῶν τύπων οἱ ὁ-
ποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν
ὑπολογισμόν τῶν γενικῶν δεικτῶν $P_{01}$, $Q_{01}$ καί $V_{01}$-συ-
νίσταται εἰς τήν παράλειψιν τοῦ δείκτου (i) - συμ-
βολίζοντος τά ἐπί μέρους ὑπό μελέτην εἴδη - ἐκ τῶν
ὑπεισερχομένων εἰς τούς ἐν λόγῳ τύπους ἀθροισμάτων τι-
μῶν, ἀξιῶν, ἀτομικῶν δεικτῶν κλπ. Οὕτω π.χ. τό ἄ-
θροισμα τῶν τιμῶν τῶν k εἰδῶν κατά τήν περίοδον βά-
σεως $\Sigma p_o^{(i)}$, θά γράφεται ἁπλῶς $\Sigma p_o$ τό ἄθροισμα τῶν
ἀξιῶν αὐτῶν κατά τήν τρέχουσαν περίοδον $\Sigma p_1^{(i)} q_1^{(i)}$
θά γράφεται $\Sigma p_1 q_1$, τό ἄθροισμα τῶν σχετικῶν τιμῶν

$$\Sigma \frac{p_1^{(i)}}{p_o^{(i)}} \quad \text{ἁπλῶς} \quad \Sigma \frac{p_1}{p_o} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

αἱ ἀντίστοιχοι δέ ἀθροίσεις ὑποτίθεται ὅτι ἀναφέρονται
πάντοτε εἰς τό σύνολον τῶν k ὑπό μελέτην εἰδῶν

## 9.3.1 'Αστάθμητοι καί Σταθμικοί Τιμάριθμοι

Οἱ διάφοροι τρόποι συνδυασμοῦ τῶν ἐπί μέρους δε-
δομένων - τιμῶν, ποσοτήτων, ἀτομικῶν τιμαρίθμων κλπ
τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν - καί κατά συνέπειαν οἱ ἀντί-
στοιχοι μαθηματικοί τύποι οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται
εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν ὑπολογισμόν ἑνός γενικοῦ τι-
μαρίθμου $P_{01}$, μετροῦντος τήν μεταβολήν τοῦ γενικοῦ
ἐπιπέδου τῶν τιμῶν τῶν k εἰδῶν - θεωρουμένων συλλο-
γικῶς - μεταξύ τῆς περιόδου βάσεως (o) καί τῆς
τρεχούσης περιόδου (1), διακρίνονται ἐν γέ-
νει εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας. Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν πε-
ριλαμβάνει τούς καλουμένους ἁπλοῦς ἤ ἀστα-
θμήτους τιμαρίθμους καί ἡ δευτέρα τούς στα-
θμικούς τοιούτους.

### (α) 'Αστάθμητοι Τιμάριθμοι

Ὡς ἀστάθμητος τιμάριθμος ἑνός συνθέ-
του συνόλου ἀγαθῶν - θεωρουμένων συλλογικῶς - χρη-
σιμοποιεῖται συνήθως ὁ ἁπλοῦς ἀριθμητικός
μέσος τῶν ἀτομικῶν τιμαρίθμων τῶν ἐπί μέρους εἰδῶν
ὁριζόμενος ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{01} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{p_1^{(i)}}{p_o^{(i)}} 100 \quad \text{ἤ ἁπλούστερον} \quad P_{01} = \frac{1}{k} \Sigma \frac{p_1}{p_o} \qquad (9.16)$$

Σπανιώτερον καί μόνον εἰς εἰδικάς περιπτώσεις - πρός ἀποφυγήν π.χ. ἐντόνων ἐπιδράσεων ἐκ τυχόν ἀκραίων τιμῶν κλπ - χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης ὁ γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ό ς μέσος τῶν ἀντιστοίχων ἀτομικῶν τιμαρίθμων ὑπολογιζόμενος ἐκ τῆς σχέσεως

$$\log P_{01}=\frac{1}{k}\ \Sigma\log\frac{p_1}{p_0} \qquad (9.17)$$

ὁ ἁ ρ μ ο ν ι κ ό ς μέσος αὐτῶν

$$P_{01}=\frac{k}{\Sigma\frac{p_o}{p_1}} \qquad (9.18)$$

ἀκόμη δέ ἡ δ ι ά μ ε σ ο ς τῶν σχετικῶν τιμῶν

$$\frac{p_1^{(i)}}{p_o^{(i)}},\ i=1,2,\ldots,k$$

ὑπολογιζομένη ὡς ἡ διάμεσος k ἁπλῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων, κ.ο.κ.

Πέραν τῶν ἀνωτέρω, ὡς ἀστάθμητος τιμάριθμος - δοθέντος ὅτι διά τόν ὑπολογισμόν αὐτοῦ ἀπαιτοῦνται ὅπως καί ἀνωτέρω αἱ τιμαί καί μόνον τῶν καθ' ἕκαστα ἀγαθῶν - ἀναφέρεται πολλάκις καί ὁ καλούμενος δ ε ί κ τ η ς σ υ ν ο λ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν. Οὗτος ὁριζόμενος ὡς τό πηλίκον τῆς συνολικῆς τιμῆς - τοῦ ἀθροίσματος τῶν τιμῶν - τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν κατά τήν τρέχουσαν περίοδον πρός τήν συνολικήν τιμήν αὐτῶν κατά τήν περίοδον βάσεως, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \qquad (9.19)$$

Ὁ ἐν λόγῳ ὅμως δείκτης, δοθέντος ὅτι ὁ τύπος (9.19) γράφεται καί ὑπό τήν μορφήν

$$P_{01}=\frac{\sum_{i=1}^{k} p_o^{(i)}\frac{p_1^{(i)}}{p_o^{(i)}}}{\sum_{i=1}^{k} p_o^{(i)}} \qquad (9.20)$$

δύναται νά θεωρηθῆ καί ὡς σ τ α θ μ ι κ ό ς μέσος (ἀριθμητικός) τῶν ἀτομικῶν τιμαρίθμων τῶν καθ' ἕκαστα εἰδῶν, ὅπου ὡς συντελεσταί σταθμίσεως λαμβάνονται αἱ τιμαί τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν κατά τήν περίοδον βάσεως.

Οἱ ἀστάθμητοι τιμάριθμοι πέραν τῆς ἁ π λ ό τη τ ο ς τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν καί τῆς εὐκολοι κατανοήσεως τῆς σημασίας των οὐδέν ἄλλο πλεονέκτημι παρουσιάζουν. Ἀντιθέτως οἱ ἐν λόγῳ δεῖκται παρουσιάζουν μερικά σημαντικά μειονεκτήματα καί διά τό λόγον αὐτόν ἡ χρῆσις των εἰς τήν πρᾶξιν εἶναι λία περιωρισμένη. Συγκεκριμένως, οἱ δεῖκται(9.16)-(9.18 οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται ὡς ἁπλοῖ μέσοι ὅροι τῶν αν τιστοίχων ἀτομικῶν τιμαρίθμων

(i) Ἐπιρρεάζονται κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἐν τόνως ἀπό τυχόν ὑφισταμένας ἀκραίας τι μάς (πολύ μεγάλας ἤ πολύ μικράς σχετικά τιμάς $p_1:p_o$).

(ii) Δέν πληροῦν - πλήν τοῦ γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ο ῦ μέσου - τό κ ρ ι τ ή ρ ι ο ν τῆ κ υ κ λ ι κ ό τ η τ ο ς - ἴδε (9.8)-κα ὡς ἐκ τούτου δέν καθίσταται ἐφικτός ὁ ὑ πολογισμός δεικτῶν σταθερᾶς βάσεως ἐκ τοι ούτων κινητῆς καί ἀντιστρόφως, καί σε βαρώτερον ὅλων.

(iii) Κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν ὡς ἄνω δεικτῶ δέν λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν ἡ σ χ ε τ ι κ σ π ο υ δ α ι ό τ η ς ἑκάστου εἴδου ἀλλ'ἅπαντα θεωροῦνται ὡς ἔχοντα τήν α τήν σημασίαν (ἴ σ η ν β α ρ ύ τ η τα Οὕτω π.χ. κατά τόν ὑπολογισμόν τοῦ δε κτου τιμῶν καταναλωτοῦ ὁ ἄρτος, τό κρ ας, τό γάλα κλπ. θά ἐλαμβάνοντο ὡς ἴσης σπουδαιότητος μέ τίς ξυριστικές λεπίδες, τίς κολώνιες κλπ. τυχόν δέ ὑπερβολική αὔξησις τῆς τιμῆς τῶν τελευταίων θά ἐπιρρέαζε δυσαναλόγως τόν γενικόν τιμάριθμον καί ἡ πραγματικότης θά ἐνεφανίζετο σημαντικά διαστρεβλωμένη (ἴδε παράδειγμα πίνακος (92).

Ἐξ ἄλλου, ἀναφορικῶς πρός τόν δείκτην τῶν συνολικῶν τιμῶν (9.19) θά πρέπει - πέραν τῶν ἀνωτέρω (i) καί (iii) - νά ἀναφερθῆ ἀκόμη καί τό ἑξῆς σοβαρόν μειονέκτημα. Ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου ἐξαρτᾶται προφανῶς - ἴδε τύπον (9.20), ὡς καί παράδειγμα πίνακος (9.2) - ἐκ τῶν μονάδων μετρήσεως εἰς τάς ὁποίας ἀναφέρονται αἱ τιμαί τῶν καθ᾽ἕκαστα εἰδῶν καί ὡς ἐκ τούτου ἡ χρῆσις αὐτοῦ εἰς τήν πρᾶξιν καθίσταται κατ᾽οὐσίαν ἀδύνατος.

## (β) Σταθμικοί Τιμάριθμοι

Πρός ἀποφυγήν τῶν προαναφερθέντων μειονεκτημάτων καί εἰδικώτερον προκειμένου εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν νά δοθῆ ἡ δέουσα βαρύτης - ἀναλόγως τῆς σχετικῆς σπουδαιότητος αὐτοῦ - ἀντί τῶν ἀσταθμήτων τιμαρίθμων καταρτίζονται καί χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν δεῖκται - γνωστοί εὐρέως ὡς σταθμικοί τιμάριθμοι - εἰς τούς ὁποίους αἱ τιμαί - ἤ οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι - τῶν καθ᾽ἕκαστα εἰδῶν δέν λαμβάνονται αὐτούσιαι, ἀλλ᾽ἀφοῦ προηγουμένως πολλαπλασιασθοῦν - σταθμισθοῦν - ἐπί καταλλήλους συντελεστάς καλουμένους ἐν γένει βάρη ἤ συντελεστάς σταθμίσεως.

Ὡς βάρη ἤ συντελεσταί σταθμίσεως - ἀντανακλῶντες τήν σχετικήν σπουδαιότητα ἤ ἄλλως τήν βαρύτητα ἑκάστου εἴδους - λαμβάνονται κατά κανόνα αἱ ποσότητες $q_{\tau}^{(i)}$, $i=1,2,\ldots,k$ τῶν ἐπί μέρους ἀγαθῶν - αἱ ὁποῖαι π.χ. κατηναλώθησαν, παρήχθησαν, εἰσήχθησαν κ.ο.κ. ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ τοῦ καταρτιζομένου δείκτου - ἤ αἱ ἀντίστοιχοι ἀξίαι αὐτῶν - τά γινόμενα δηλαδή $p_{\tau}^{(i)}q_{\tau}^{(i)}$ τῶν ποσοτήτων ἐπί τάς τιμάς τῶν καθ᾽ἕκαστα εἰδῶν - ὡς αὐται διεμορφώθησαν εἰς ὡρισμένην χρονικήν περίοδον - συνήθως ἔτος - καλουμένην ἐν προκειμένῳ τ υ π ι κ ή ν περίοδον (τ).

Οὕτω, ἐάν $p_o^{(i)}$ καί $p_1^{(i)}$ συμβολίζουν τάς τιμάς τῶν k ὑπό μελέτην εἰδῶν κατά τήν περίοδον βάσεως (ο) καί τήν τρέχουσαν περίοδον (1) ἀντιστοίχως καί $q_\tau^{(i)}$ καί $p_\tau^{(i)}$ τάς ποσότητας καί τάς τιμάς τῶν ἰδίων εἰδῶν ὡς αὗται διεμορφώθησαν κατά τήν ἐπιλεγεῖσαν ὡς τ υ π ι κ ή ν περίοδον (τ), ὁ σταθμικός τιμάριθμος τῆς ὑπ' ὄψιν ὁμάδος εἰδῶν ὑπολογίζεται συνήθως εἴτε διά τῆς μ ε θ ό δ ο υ τῶν σ υ ν ο λ ι κ ῶ ν ἀ ξ ι ῶ ν, ἤτοι ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{01}=\frac{\sum_{i=1}^{k} p_1^{(i)} q_\tau^{(i)}}{\sum_{i=1}^{k} p_o^{(i)} q_\tau^{(i)}}=\frac{\Sigma p_1 q_\tau}{\Sigma p_o q_\tau} \qquad (9.21)$$

εἴτε ὡς σ τ α θ μ ι κ ό ς μ έ σ ο ς ὅ ρ ο ς - συνήθως ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς - τῶν ἀ τ ο μ ι κ ῶ ν τ ι μ α ρ ί θ μ ω ν τῶν ἐπί μέρους εἰδῶν, ἤτοι ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{01}=\sum_{i=1}^{k} \alpha^{(i)} \frac{p_1^{(i)}}{p_o^{(i)}}=\Sigma \alpha \frac{p_1}{p_o} \qquad (9.22)$$

ὅπου οἱ συντελεσταί σταθμίσεως $\alpha^{(i)}$ ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\alpha^{(i)}=\frac{p_\tau^{(i)} q_\tau^{(i)}}{\sum_{i=1}^{k} p_\tau^{(i)} p_\tau^{(i)}} \text{ ἤ ἁπλούστερον } \alpha=\frac{p_\tau q_\tau}{\Sigma p_\tau q_\tau} \qquad (9.23)$$

καί πληροῦν προφανῶς τήν σχέσιν

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha^{(i)}=1 \text{ ἤ συμβολικῶς } \Sigma\alpha=1 \qquad (9.24)$$

ἤτοι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρός τήν μονάδα.

Τό ἄθροισμα $\Sigma p_o q_\tau$ - ἴδε τύπον (9.21) - συμβολίζει προφανῶς τήν συνολικήν ἀξίαν τήν ὁποίαν εἶχε κατά τήν περίοδον βάσεως ή συλλογή ή ὡς συνήθως καλεῖται εἰς τήν πρᾶξιν ἕνας κάλαθος ἀγαθῶν περιλαμβάνων τά ὑπό μελέτην εἴδη εἰς ποσότητας ($q_T^{(1)}, q_T^{(2)}, \ldots, q_T^{(k)}$) ἐκείνας δηλαδή τῆς τυπικῆς περιόδου. Ὁμοίως τό ἄθροισμα $\Sigma p_1 q_T$ παριστᾶ τήν συνολικήν ἀξίαν τῶν αὐτῶν ἀκριβῶς ποσοτήτων - τοῦ ἰδίου καλάθου - ἀποτιμωμένων εἰς τιμάς τῆς τρεχούσης περιόδου. Κατά συνέπειαν, τό πηλίκον τῶν ὡς ἄνω ἀθροισμάτων ἤ ἄλλως ὁ δείκτης (9.21) ἀντανακλᾶ τήν μεταβολήν ἡ ὁποία ἐπῆλθε - μεταξύ βάσεως καί τρεχούσης περιόδου - εἰς τήν ἀξίαν τοῦ ἀνωτέρω σταθερᾶς συνθέσεως καλάθου ἀποκλειστικῶς καί μόνον ἐκ τῶν αὐξομειώσεων τῶν τιμῶν τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν. Ὡς ἐκ τούτου ὁ ἐν λόγῳ δείκτης ἀποτελεῖ καί δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ἐν προκειμένῳ ὡς μέτρον τῆς μεταβολῆς ἡ ὁποία ἐπῆλθεν ἀντιστοίχως εἰς τό γενικόν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν τῶν ὑπ'ὄψιν εἰδῶν, ἤ ἄλλως ὡς γενικός τιμάριθμος τῆς ὑπό μελέτην ὁμάδος.

Ἐν προκειμένῳ ὅμως δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τοῦ τύπου (9.21) δέν εἶναι πάντοτε ἐφικτή καί τοῦτο διότι εἰς τήν ὑπό μελέτην ὁμάδα ἀγαθῶν περιλαμβάνονται πολλάκις εἴδη - καί κυρίως ὑπηρεσίαι - τά ὁποῖα ὡς ἐκ τῆς φύσεως αὐτῶν δέν εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθοῦν ποσοτικῶς καί κατά συνέπειαν νά προσδιορισθοῦν δι'αὐτά αἱ ἀπαιτούμεναι - διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου τούτου - ποσότητες $q_T^{(i)}$. Ἄς ἐξετάσωμεν π.χ. τήν περίπτωσιν τοῦ δείκτου τιμῶν καταναλωτοῦ ὁ ὁποῖος ὡς γνωστόν μετρᾶ τάς μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται διαχρονικῶς - καί εἰδικώτερον μεταξύ βάσεως καί τρεχούσης περιόδου - εἰς τό γενικόν ἐπίπεδον τῶν "λιανικῶν τιμῶν" ἤ ἄλλως τῶν τιμῶν τάς ὁποίας καταβάλλουν οἱ καταναλωταί διά τά καταναλισκόμενα ὑπ'αὐτῶν ἀγαθά καί ὑπηρεσίας.

Διά τά πλεῖστα ἐκ τῶν ἐν λόγῳ ἀγαθῶν ὡς π.χ. ὁ ἄρτος, τό κρέας, τό ἔλαιον κλπ. εἶναι βεβαίως δυνατόν - καί σχετικῶς εὔκολον - νά προσδιορισθοῦν αἱ ἀπαιτούμεναι* ποσότητες $q_T^{(i)}$ τοῦτο ὅμως εἶναι ἀνέ-

---

* Ὡς τοιαῦται λαμβάνονται συνήθως αἱ ποσότητες αἱ

ψικτον - ἤ τουλάχιστον ἐννοιολογικῶς ἐξαιρετικά δυσχερές - διά πολλά ἄλλα εἴδη καί κυρίως ὑπηρεσίας, ὡς π.χ. ἡ ψυχαγωγία, ἡ ἐκπαίδευσις, ἡ στέγασις κλπ.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς - ὅπου ἡ χρησιμοποίησις τοῦ τύπου (9.21) εἶναι τυπικῶς τουλάχιστον, ἀδύνατος - ὁ γενικός τιμάριθμος τῆς ὑπό μελέτην ὁμάδος εἰδῶν ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου (9.22) ἡ ἐφαρμογή τοῦ ὁποίου εἶναι πάντοτε δυνατή. Πράγματι, διά τόν καθορισμόν τῆς σχετικῆς σημασίας ἤ ἄλλως τῆς βαρύτητος ἑκάστου εἴδους καί τόν ὑπολογισμόν τῶν χρησιμοποιουμένων ἐν προκειμένῳ ἀντιστοίχων συντελεστῶν σταθμίσεως $\alpha^{(i)}$, $i=1,2,\ldots,k$, ἀρκεῖ - ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (9.23) - ἡ γνῶσις τῆς ὁλικῆς ἀξίας - τοῦ γινομένου δηλαδή τῆς τιμῆς ἐπί τήν ποσότητα - $p_T^{(i)}q_T^{(i)}$ ἑκάστου εἴδους, χωρίς νά ἀπαιτοῦνται ἰδιαιτέρως καί αἱ ποσότητες αὐτῶν $q_T^{(i)}$. Ἡ ὁλική ὅμως ἀξία τῶν διαφόρων εἰδῶν μετρᾶται κατά κανόνα εἰς χρηματικά ποσά - καταβαλλόμενα, εἰσπραττόμενα κλπ. ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως - καί συνεπῶς ἡ συλλογή τῶν ἀπαραιτήτων πληροφοριῶν εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἁπλῆ.

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δείκτου τιμῶν καταναλωτοῦ προκειμένου νά καθορισθῆ ἡ σχετική σημασία καί νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταί σταθμίσεως εἰδῶν ὅπως ἡ στέγασις, ἡ ἐκπαίδευσις, ἡ ψυχαγωγία κλπ., ἀρκεῖ νά προσδιορισμοῦν - διά τῶν γνωστῶν Ἐρευνῶν Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν - αἱ "δαπάναι" αἱ ὁποῖαι ἔγιναν ὑπό τῶν "καταναλωτῶν" δι' ἕκαστον ἐκ τῶν ἐν λόγῳ εἰδῶν κατά τήν τυπικήν περίοδον. Ἑκάστη ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δαπανῶν ἰσοδυναμεῖ πρός τό γινόμενον $p_T^{(i)}q_T^{(i)}$ τῆς "κατά

---

ὁποῖαι καταναλίσκονται κατά μέσον ὅρον ὑπό τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας ἐντός ἑνός πλήρους ἔτους, προσδιορίζονται δέ εἰς τήν πράξιν δι' ὡρισμένων δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν γνωστῶν εὐρέως ὡς Ἐρευνῶν Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν. (Ἴδε σχετικά δημοσιεύματα Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος).

μονάδα" τιμῆς ἑνός εἴδους ἐπί τήν "ποσότητα" αὐτοῦ κατά τήν τυπικήν περίοδον καί ὡς ἐκ τούτου τό πηλίκον αὐτῆς πρός τήν συνολικήν - δι' ὅλα τά ὑπό μελέτην εἴδη - δαπάνην $\Sigma p_T^{(i)} q_T^{(i)}$ καθορίζει τό βάρος ἤ ἄλλως τόν συντελεστήν σταθμίσεως $\alpha^{(i)}$ τοῦ ὑπ' ὄψιν εἴδους (ἴδε τύπον 9.23).

Ἐκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι διά τόν ὑπολογισμόν ἑνός σταθμικοῦ τιμαρίθμου, πέραν τῶν ὑπό σύγκρισιν τιμῶν $p_o^{(i)}$ - τῆς περιόδου βάσεως - καί $p_1^{(i)}$ - τῆς τρεχούσης περιόδου - τῶν καθ' ἕκαστα εἰδῶν ($i=1,2,...,k$) ἀπαιτεῖται ἀκόμη - προκειμένου νά καθορισθῆ ἡ σχετική σημασία ἤ ἄλλως ὁ συντελεστής σταθμίσεως ἑκάστου εἴδους - ἡ γνῶσις τῶν ποσοτήτων $q_T^{(i)}$ - ἤ τουλάχιστον τῶν ὁλικῶν ἀξιῶν $p_T^{(i)} q_T^{(i)}$ - τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν, ὡς αὗται διαμορφώθησαν εἰς ὡρισμένην χρονικήν περίοδον, θεωρουμένην ἐν προκειμένῳ ὡς τ υ π ι κ ή ν.

Εἰς τήν πρᾶξιν ἡ τ υ π ι κ ή περίοδος καί κατά συνέπειαν οἱ ἀντίστοιχοι σ υ ν τ ε λ ε σ τ α ί σ τ α θ μ ί σ ε ω ς ἐπιλέγονται - ἀναλόγως τῶν ἐπιδιωκομένων σκοπῶν καί τῶν ὑφισταμένων δυνατοτήτων - κατά ποικίλους τρόπους. Συνήθως ὡς τυπική περίοδος λαμβάνεται εἴτε ἡ περίοδος β ά σ ε ω ς εἴτε ἡ τ ρ έ χ ο υ σ α τοιαύτη. Οἱ προκύπτοντες ἀντιστοίχως μαθηματικοί τύποι ὡς καί τά σημαντικώτερα πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα αὐτῶν παρατίθενται κατωτέρω.

**Τύπος Laspeyres**

Ὡς συντελεσταί σταθμίσεως (βάρη) λαμβάνονται ἐν προκειμένῳ αἱ ποσότητες τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν ὡς αὗται διεμορφώθησαν κατά τήν περίοδον β ά σ ε ω ς.

Οὕτω, εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ὁ τύπος (9.21) λαμβάνει τήν μορφήν

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_o}{\Sigma p_o q_o} \quad \text{(τύπος Laspeyres)} \qquad (9.25)$$

ὁ δέ τύπος (9.22) - δηλαδή ὁ σταθμικός μέσος (ἀριθμητικός) τῶν ἀντιστοίχων ἀτομικῶν τιμαρίθμων - τήν μορφήν

$$P_{01}=\Sigma\alpha\frac{p_1}{p_0} \qquad (9.26)$$

ὅπου οἱ συντελεσταί σταθμίσεως α ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\alpha = \frac{p_0q_0}{\Sigma p_0q_0} \qquad (9.27)$$

ὡς πηλίκα δηλαδή τῆς ἀξίας $p_0q_0$ ἑκάστου εἴδους κατά τήν περίοδον βάσεως, πρός τήν ἀντίστοιχον συνολικήν ἀξίαν $\Sigma p_0q_0$ ὅλων τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν κατά τήν αὐτήν περίοδν.

'Ενταῦθα δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἐνῶ οἱ τύποι (9.21) καί (9.22) ὁδηγοῦν εἰς δ ι ά φ ο ρ α ἐν γένει ἀποτελέσματα, οἱ τύποι (9.25) καί (9.26) ταυτίζονται. Πράγματι, ὁ τύπος (9.25) γράφεται

$$P_{01}=\frac{\Sigma\frac{p_1}{p_0}p_0q_0}{\Sigma p_0q_0}$$

καί συνεπῶς, δοθέντος ὅτι τά μεγέθη $p_0q_0:\Sigma p_0q_0$ ἀποτελοῦν τούς ἀντιστοίχους συντελεστάς σταθμίσεως - ἴδε (9.27) - λαμβάνει τελικῶς τήν μορφήν τοῦ τύπου (9.26).

'Ο ὑπολογισμός ἑνός γενικοῦ τιμαρίθμου δι'ἐφαρμογῆς τῶν ὡς ἄνω τύπων (Laspeyres) παρουσιάζει εἰς τήν πρᾶξιν τό σημαντικόν πλεονέκτημα ὅτι οἱ συντελεσταί σταθμίσεως ὑπολογίζονται ἐφ'ἅπαξ*, διά τήν κα-

* 'Αναφορικῶς πρός τήν περίοδον βάσεως καί μόνον. Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δείκτου τιμῶν καταναλωτοῦ ἀπαιτεῖται ἡ διενέργεια μιᾶς μόνον ἐρεύνης Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν διά τόν προσδιορισμόν τῶν ποσοτήτων $q_0^{(i)}$ ἤ τῶν ἀξιῶν $p_0^{(i)}q_0^{(i)}$ κατά τό ἔτος βάσεως

τάρτισιν δέ μιᾶς σειρᾶς τιμαρίθμων ἀρκεῖ καθ' ἑκάστην περίοδον νά συλλέγονται ἀποκλειστικῶς καί μόνον αἱ τιμαί τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν. Τοῦτο ὅμως ἀποτελεῖ ταυτοχρόνως καί τό βασικόν μειονέκτημα τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου καθ' ὅσον μέ τήν πάροδον τοῦ χρόνου ἡ σχετική σημασία τῶν διαφόρων εἰδῶν εἶναι δυνατόν νά ὑποστῇ σημαντικάς διαφοροποιήσεις - π.χ. ἀναδιάρθρωσις τῶν καταναλωτικῶν συνηθειῶν κλπ. - καί ὡς ἐκ τούτου οἱ χρησιμοποιούμενοι συντελεσταί σταθμίσεως νά μή ἀνταποκρίνωνται εἰς τήν τρέχουσαν πραγματικότητα. Διαδοχικαί ἔρευναι εἰς τακτά χρονικά διαστήματα - εἰς τήν περίπτωσιν π.χ. τοῦ δείκτου τιμῶν καταναλωτοῦ συνήθως ἀνά πενταετίαν - πρός καθορισμόν νέων συντελεστῶν σταθμίσεως καί ἀντίστοιχος ἀλλαγή τῆς περιόδου βάσεως ἀμβλύνουν τό μειονέκτημα τοῦτο σημαντικά.

**Τύπος Paasche**

Εἰς πολλάς περιπτώσεις - ἰδιαιτέρως ὅταν αἱ διαχρονικαί μεταβολαί εἰς τήν σχετικήν σημασίαν τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν καί τήν διάρθρωσιν τοῦ ἀντιστοίχου κ α λ ά θ ο υ εἶναι ἔντονοι - ἀντί τῆς περιόδου βάσεως ὡς τυπική τοιαύτη χρησιμοποιεῖται ἡ τ ρ έ χ ο υ σ α περίοδος.

Ἐν προκειμένῳ ὁ τύπος (9.21) λαμβάνει τήν μορφήν

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \text{ (τύπος Paasche)} \tag{9.27}$$

ὁ δέ τύπος (9.22) τήν μορφήν

$$P_{01}=\Sigma\alpha\frac{p_1}{p_0} \tag{9.28}$$

ὅπου α συμβολίζει τούς συντελεστάς σταθμίσεως εἰς τήν τρέχουσαν περίοδον οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\alpha = \frac{p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \tag{9.29}$$

Εἰς τήν παροῦσαν περίπτωσιν - ἀντιθέτως πρός ἐκείνην τοῦ τύπου Laspeyres - οἱ τύποι (9.27) καί (9.28) δέν ὁδηγοῦν εἰς τά αὐτά ἐξαγόμενα - δέν ταυτίζονται - ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ὁ τύπος τῶν συνολικῶν ἀξιῶν (9.27) δέν ἰσοῦται πρός τόν σταθμικόν μέσον ἀριθμητικόν τῶν ἐπί μέρους ἀτομικῶν τιμαρίθμων ὅταν ὡς βάρη χρησιμοποιοῦνται ἐκεῖνα τῆς τρεχούσης περιόδου. Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω ὁ τύπος (9.27) ταυτίζεται ἐν προκειμένῳ πρός τόν ἀντίστοιχον ἁ ρ μ ο ν ι κ ό ν μέσον ὅρον. Πράγματι ὁ τύπος τοῦ Paasche (9.27) γράφεται ὑπό τήν μορφήν

$$P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} = \frac{1}{\Sigma \frac{p_0}{p_1} \frac{p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_1}} = \frac{1}{\Sigma \frac{p_0}{p_1} \alpha}$$

ἡ ὁποία ὡς γνωστόν, δοθέντος ὅτι $\Sigma\alpha=1$, ἀποτελεῖ τόν ἁρμονικόν μέσον τῶν ἀτομικῶν τιμαρίθμων $p_1 : p_0$.

Βασικόν πλεονέκτημα τοῦ τύπου τοῦ Paasche εἶναι φυσικά ἡ χρησιμοποίησις τῶν κατά περίπτωσιν πλέον προσφάτων συντελεστῶν σταθμίσεως. Τοῦτο ὅμως παρουσιάζει, ὡς εἶναι εὐνόητον, σοβαράς πρακτικάς δυσκολίας καθ'ὅσον διά τήν κατάρτισιν μιᾶς σειρᾶς τιμαρίθμων θά πρέπει ἡ ποσότης $q^{(i)}$ ἤ ἡ ἀξία $p^{(i)}q^{(i)}$ ἑνός ἑκάστου τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν - ἡ διόρθωσις δηλαδή τοῦ ἀντιστοίχου κ α λ ά θ ο υ εἰδῶν - νά προσδιορίζεται διά καταλλήλων ἐρευνῶν καθ'ἑκάστην περίοδον.

Διά τόν λόγον αὐτόν οἱ πλεῖστοι τῶν καταρτιζομένων εἰς τήν πρᾶξιν τιμαρίθμων ὑπολογίζονται κατά τόν τύπον τοῦ Laspeyres καί μάλιστα χρησιμοποιουμένης κατά κανόνα τῆς μορφῆς (9.26).

Πέραν τῶν βασικῶν τύπων Laspeyres καί Paasche πρός ὑπολογισμόν ἑνός σταθμικοῦ τιμαρίθμου χρησιμοποιοῦνται πολλάκις εἰς τήν πρᾶξιν καί ὡρισμέναι παραλλαγαί ἤ συνδυασμοί αὐτοῦ οἱ σπουδαιότεροι τῶν ὁποίων εἶναι οἱ κατωτέρω.

**Τύπος Edgeworth - Marshall**

Προκειμένου κατά τήν στάθμισιν τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν νά ληφθοῦν ὑπ'ὄψιν τόσον τά δεδομένα - ποσότητες ἤ ἀξίαι-τῆς περιόδου βάσεως ὅσον καί τῆς τρεχούσης περιόδου, ὡς συντελεσταί σταθμίσεως χρησιμοποιοῦνται πολλάκις τά ἡμιαθροίσματα εἴτε τῶν ἀντιστοίχων ποσοτήτων εἴτε τῶν σχετικῶν ἀξιῶν. Οὕτω, εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ γενικός τιμάριθμος τῆς ὑπό μελέτην ὁμάδος ὑπολογίζεται δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1(q_0+q_1)}{\Sigma p_0(q_0+q_1)} \quad (\text{τύπος E-M}) \qquad (9.30)$$

ἤ ἐκ τοῦ τύπου

$$P_{01}=\Sigma\beta\frac{p_1}{p_0} \qquad (9.31)$$

ὅπου οἱ συντελεσταί σταθμίσεως β προκύπτουν ὡς ἡμιάθροισμα τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν σταθμίσεως τύπων (9.26) καί (9.28), ὁρίζονται δηλαδή ἐκ τῆς σχέσεως

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{p_0q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{p_1q_1}{\Sigma p_1q_1}\right). \qquad (9.32)$$

**Ἰδανικός τύπος τοῦ Fisher**

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἕνας γενικός τιμάριθμος ὑπολογίζεται ὡς μ έ σ ο ς γ ε ω.μ ε τ ρ ι κ ό ς τῶν τιμαρίθμων οἱ ὁποῖοι προκύπτουν δι'ἐφαρμογῆς τῶν τύπων Laspeyres καί Paasche ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\,\frac{p_1q_1}{p_0q_1}} \qquad (9.33)$$

Ὁ ἐν λόγῳ τύπος μολονότι πληροῖ, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω, ὡρισμένας ἐπιθυμητάς ἰδιότητας - διά τοῦτο ἐκλήθη ἰ δ α ν ι κ ό ς - σπανίως χρησιμοποιεῖται εἰς τήν πρᾶξιν καθ'ὅσον ἡ ἐφαρμογή αὐτοῦ ἀπαιτεῖ τήν γνῶσιν τοῦ τιμαρίθμου κατά Paasche καί ὡς ἐκ τούτου συνεπάγεται τάς ἤδη γνωστάς δυσχερείας. Τοῦτο ἰσχύει προφανῶς καί διά τόν τύπον

$$P_{01}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}+\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right) \qquad (9.34)$$

διά τοῦ ὁποίου ἕνας τιμάριθμος ὑπολογίζεται ὡς ἀριθμητικός μέσος ὅρος τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων κατά Laspeyres καί Paasche.

### 9.3.2 Ἀστάθμητοι καί Σταθμικοί Δεῖκται Ὄγκου

Οἱ γενικοί δεῖκται ὄγκου διά τῶν ὁποίων μετρῶνται ἐν γένει αἱ διαχρονικαί μεταβολαί - καί εἰδικώτερον αἱ σχετικαί αὐξήσεις ἤ μειώσεις μεταξύ τῆς βάσεως καί τῆς τρεχούσης περιόδου - αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται "κατά μέσον ὅρον" εἰς τόν ὄγκον - ἤ ἄλλως τάς ποσότητας - μιᾶς ὁ μ ά δ ο ς - ἑνός σ υ ν θ έ τ ο υ συνόλου - ἀγαθῶν, διακρίνονται ὡς καί οἱ γενικοί δεῖκται τιμῶν εἰς ἀ σ τ α θ μ ή τ ο υ ς καί σ τ α θ μ ι κ ο ύ ς τοιούτους.

Διά τόν ὑπολογισμόν ἀ σ τ α θ μ ή τ ω ν δεικτῶν ὄγκου χρησιμοποιοῦνται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἀποκλειστικῶς καί μόνον αἱ ποσότητες - βάσεως $q_0^{(i)}$ καί τρεχούσης περιόδου $q_1^{(i)}$ ὅπου $i=1,2,...,k$ - τῶν k ὑπό μελέτην ἀγαθῶν ἐνῶ διά τόν ὑπολογισμόν σ τ α θ μ ι κ ῶ ν τοιούτων αἱ ἀνωτέρω ποσότητες πολλαπλασιάζονται - σταθμίζονται - κατά κανόνα ἐπί τάς τ ι μ ά ς τῶν ἐπί μέρους ἀγαθῶν ὡς αὗται διεμορφώθησαν εἰς ὡρισμένην χρονικήν περίοδον λαμβανομένην ὡς τ υ π ι κ ή ν. Τόσον οἱ τύποι ὑπολογισμοῦ ἀσταθμήτων δεικτῶν ὄγκου, ὅσον καί οἱ σταθμικοί τοιοῦτοι, προκύπτουν ἀμέσως ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμαρίθμων δι᾽ἁπλῆς ἐναλλαγῆς τῶν συμβόλων p καί q. Οὕτω, ὁ ἀ σ τ ά θ μ η τ ο ς δείκτης ὄγκου $Q_{01}$ ἑνός συνθέτου συνόλου ἐκ k ἀγαθῶν ὁρίζεται συνήθως ὡς μέσος ἀριθμητικός τῶν ἀντιστοίχων ἀτομικῶν δεικτῶν ὄγκου τῶν ἐν λόγῳ ἀγαθῶν καί ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$Q_{01}=\frac{1}{k}\Sigma\frac{q_1}{q_0} \qquad (9.35)$$

Ὡς εἶναι εὐνόητον δείκτης ὄγκου ἀντίστοιχος πρός τόν δείκτην συνολικῶν τιμῶν - ἴδε τύπον (9.19) - δέν ὑφίσταται καθ᾽ὅσον τά ἀθροίσματα $\Sigma q_0$ καί $\Sigma q_1$ ποσοτήτων ἐκ διαφόρων ἀγαθῶν δέν ἔχουν ἐν προκειμένῳ νόημα.

Ἐξ ἄλλου, οἱ σταθμικοί δεῖκται ὄγκου κατά Laspeyres καί Paasche - οἱ ὁποῖοι κατά κανόνα καί ἐφαρμόζονται εἰς τήν πρᾶξιν - ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἐκ τῶν σχέσεων

$$Q_{01}=\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \text{ (τύπος Laspeyres)} \qquad (9.36)$$

καί $$Q_{01}=\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1} \text{ (τύπος Paasche)}$$

Ἄλλοι σταθμικοί δεῖκται ὄγκου ὑπολογίζονται διά συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον μέ τούς ἀντιστοίχους τιμαρίθμους. Οὕτω π.χ. ὁ ἰ δ α ν ι κ ό ς τύπος τοῦ Fisher προκειμένου περί ποσοτήτων λαμβάνει τήν μορφήν

$$Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}\,\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}} \qquad (9.37)$$

Τά πλεονεκτήματα καί τά μειονεκτήματα τά ὁποῖα ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω συναφῶς πρός τούς διαφόρους τύπους ὑπολογισμοῦ τιμαρίθμων ἰσχύουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, κατ' ἀναλογίαν καί διά τούς ἀντιστοίχους τύπους ὄγκου.

### 9.3.3 Δεῖκται Ἀξίας

Πέραν τῶν τιμαρίθμων καί τῶν δεικτῶν ὄγκου, χρησιμοποιοῦνται πολλάκις εἰς τήν πρᾶξιν καί οἱ καλούμενοι Δ ε ῖ κ τ α ι Ἀ ξ ί α ς διά τῶν ὁποίων μετρῶνται αἱ μεταβολαί αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται διαχρονικῶς - καί εἰδικώτερον μεταξύ βάσεως καί τρεχούσης περιόδου - εἰς τήν σ υ ν ο λ ι κ ή ν ἀ ξ ί α ν μιᾶς ὁμάδος ἀγαθῶν ὡς π.χ. τῶν ἐξαγομένων ἤ εἰσαγομένων εἰς μίαν χώραν εἰδῶν, τῶν παραγομένων ἐτησίως γεωργικῶν ἤ βιομηχανικῶν προϊόντων κ.ο.κ. Δοθέντος ὅτι ἡ ὁλική ἀξία ἑνός ἀγαθοῦ εἶναι τό γινόμενον τῆς τιμῆς αὐτοῦ ἐπί τήν ἀντίστοιχον ποσότητα - ἡ ὁποία π.χ. εἰσήχθη, ἐξήχθη, παρήχθη κ.ο.κ. - ὁ δείκτης ἀξίας ἑνός συνθέτου συνόλου ἐκ k ἀγαθῶν ὑπολογίζεται συνήθως ἐκ τοῦ τύπου

$$V_{01}=\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \qquad (9.38)$$

ὅπου τά ἀθροίσματα $\Sigma p_0 q_0$ καί $\Sigma p_1 q_1$ συμβολίζουν ἀντιστοίχως τήν συνολικήν ἀξίαν ὅλων τῶν ὑπό μελέτην ἀγαθῶν κατά τήν περίοδον βάσεως καί τήν τρέχουσαν περίοδον.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τῶν ἀναφερομένων ἀνωτέρω τύπων - τιμαρίθμων, δεικτῶν ὄγκου, ἀξίας κλπ. - ὡς καί τῶν πλεονεκτημάτων καί μειονεκτημάτων ἑκάστου, παραθέτομεν κατωτέρω ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα.

Τά χρησιμοποιούμενα δεδομένα - τιμαί καί ποσότητες κατά τήν περίοδον βάσεως καί τήν τρέχουσαν τοιαύτην - ἀναφερόμενα εἰς τάς εἰσαγωγάς μιᾶς ὁμάδος μετάλλων - σιδήρου, χαλκοῦ, μολύβδου καί ἀργύρου - κατά τά ἔτη 1970 καί 1973, ὡς καί οἱ ἀπαιτούμενοι ἐν προκειμένῳ ὑπολογισμοί περιλαμβάνονται εἰς τόν πίνακα (9.2).

Πίναξ 9.2

| Είδη | 1970 | | 1973 | | Υπολογισμοί | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_0 10^{-3}$ | $q_0 10^{-3}$ | $p_1 10^{-3}$ | $q_1 10^{-3}$ | $p_1/p_0$ | $q_1/q_0$ | $p_0 q_0 10^{-6}$ | $p_1 q_0 10^{-6}$ | $p_0 q_1 10^{-6}$ | $p_1 q_1 10^{-6}$ |
| Σίδηρος | 3,6 | 136 τ. | 4,6 | 338 τ. | 1,28 | 2,49 | 489,6 | 625,6 | 1.216,8 | 1.554,8 |
| Χαλκός | 44,0 | 12 τ. | 50,0 | 20 τ. | 1,14 | 1,67 | 528,0 | 600,0 | 880,0 | 1.000,0 |
| Μόλυβδος | 11,0 | 9 τ. | 14,0 | 19 τ. | 1,27 | 2,11 | 99,0 | 126,0 | 209,0 | 266,0 |
| Άργυρος | 1,7 | 11 κ. | 2,5 | 77 κ. | 1,47 | 7,00 | 18,7 | 27,5 | 130,9 | 192,5 |
| Σύνολα | 60,3 | - | 71,1 | - | 5,16 | 13,27 | 1.135,3 | 1.379,1 | 2.436,7 | 3.013,3 |

Δεῖκται Τιμῶν

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (9.16) προκύπτει ὅτι ὁ
γενικός τιμάριθμος τῆς ὑπό μελέτην ὁμάδος - ὑπολο-
γιζόμενος ὡς ἀ σ τ ά θ μ η τ ο ς μέσος ἀριθμητικός
τῶν ἀντιστοίχων ἀτομικῶν τιμαρίθμων τῶν ἐπί μέρους
εἰδῶν - εἶναι

$$P_{01}=\frac{1}{k}\Sigma\frac{p_1}{p_0}100=\frac{5,16}{4}100=129$$

ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος δέ αὐτοῦ συνάγεται ὅτι αἱ τι-
μαί τῶν εἰδῶν τῆς ὑπ' ὄψιν ὁμάδος ηὐξήθησαν - μεταξύ
τῶν ἐτῶν 1970 καί 1973 - κατά μέσον ὅρον 29%.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (9.19) προκύπτει ὅτι ὁ
ὑπολογιζόμενος διά τῆς μεθόδου τῶν σ υ ν ο λ ι κ ῶ ν
τ ι μ ῶ ν δείκτης εἶναι

$$P_{01}=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}100=\frac{71.100}{60.300}100=118$$

Διά τοῦ αὐτοῦ ὅμως τύπου θά προέκυπτε δ ι ά φ ο-
ρ ο ν ἀ π ο τ έ λ ε σ μ α ἐάν π.χ. αἱ τιμαί τῶν τριῶν
πρώτων εἰδῶν αἱ ὁποῖαι δίδονται κατά τόννον ἐδίδον-
το κατά κιλόν. Πράγματι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ
τύπος (9.19) δίδει

$$P_{01}=\frac{4,6+50,0+14,0+2.500}{3,6+44,0+11,0+1.700}100=146$$

ἀποτέλεσμα σημαντικῶς διάφορον τοῦ ἀμέσως προηγουμέ-
νου. Διά τόν λόγον αὐτόν ὁ τύπος οὗτος - τῶν συνο-
λικῶν τιμῶν - ὡς ἤδη ἐλέχθη σπανίως ἐφαρμόζεται εἰς
τήν πρᾶξιν.

'Εξ ἄλλου, δι' ἐφαρμογῆς τῶν σ τ α θ μ ι κ ῶ ν τύ-
πων Laspeyres (9.25), Paasche (9.27) καί τοῦ ἰδανι-
κοῦ τύπου τοῦ Fisher (9.33) - μέσῳ γεωμετρικοῦ τῶν
δύο προηγουμένων - προκύπτουν ἀντιστοίχως τά κατωτέρω
ἀποτελέσματα:

$$(\text{Laspeyres})\ P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}100=\frac{1.379,1\times10^6}{1.135,3\times10^6}100=122$$

$$\text{(Paasche) } P_{01}=\Sigma\frac{p_1q_1}{p_0q_1}100=\frac{3.013,3\times10^6}{2.436,7\times10^6}100=124$$

$$\text{(Fisher) } P_{01}=\sqrt{\Sigma\frac{p_1q_0}{p_0q_0}\times\Sigma\frac{p_1q_1}{p_0q_1}}100=\sqrt{1,22\times1,24}\times100=123$$

Οὕτω, ἐνῶ δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (9.16) - τοῦ ἀσταθμήτου μέσου - προέκυψεν αὔξησις εἰς τό γενικόν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν τῶν ὑπ'ὄψιν εἰδῶν κατά 29%, ἐκ τῶν σταθμικῶν τύπων - ὅπου λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν καί ἡ εἰσαχθεῖσα ἐξ ἑκάστου εἴδους ποσότης καί διαφοροποιεῖται κατά αὐτόν τόν τρόπον ἡ σχετική σημασία ἑκάστου - προκύπτει ὅτι ἡ ἐπελθοῦσα αὔξησις ἦτο τῆς τάξεως τοῦ 22 ἕως 24 τοῖς ἑκατόν. Ἡ διαφορά αὕτη ὀφείλεται εἰς τήν μᾶλλον ἔντονον αὔξησιν τῆς τιμῆς τοῦ ἀργύρου (47%) τοῦ ὁποίου ὅμως ἡ σημασία - σχετική βαρύτης - εἶναι μικρά ἐν σχέσει πρός τήν βαρύτητα τῶν ὑπολοίπων εἰδῶν.

Τό μειονέκτημα τοῦτο τῶν ἀσταθμήτων δεικτῶν εἶναι ἐμφανέστερον κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ὄγκου τούς ὁποίους παραθέτομεν κατωτέρω.

Δεῖκται Ὄγκου

Ὁ γενικός δείκτης ὄγκου τῶν ὡς ἄνω εἰδῶν, λόγῳ τῆς ὑπερβολικῆς σχετικῆς αὐξήσεως τῆς εἰσαχθείσης ποσότητος τοῦ Ἀργύρου - ἀτομικός **δείκτης** ὄγκου $\frac{q_1}{q_0}100=700$ - ὑπολογιζόμενος διά τοῦ τύπου (9.35) - ὡς ἀστάθμητος μέσος τῶν ἀντιστοίχων ἀτομικῶν ὄγκων - εἶναι

$$Q_{01}=\frac{1}{k}\Sigma\frac{q_1}{q_0}100=\frac{13,27}{4}100=332$$

ἀποτέλεσμα τό ὁποῖον ὑποδηλοῖ ὑπερτριπλασιασμόν - κατά μέσον ὅρον - τῶν εἰσαγομένων ποσοτήτων (αὔξησιν κατά 232%). Ἀντιθέτως διά τῶν σταθμικῶν τύπων Laspeyres (9.36), Paasche (9.37) καί Fisher (9.38) - ὅπου λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν τῶν τιμῶν τῶν καθ'ἕκαστα εἰδῶν διαφοροποιεῖται ἡ σχετική σημασία ἑκάστου - προκύπτουν τά ἑξῆς ἀποτελέσματα:

$$(\text{Laspeyres})\ Q_{01}=\Sigma\frac{q_1p_0}{q_0p_0}100=\frac{2.436,7\times10^6}{1.135,3\times10^6}100=215$$

$$(\text{Paasche})\ Q_{01}=\Sigma\frac{q_1p_1}{q_0p_1}100=\frac{3.013,3\times10^6}{1.379,1\times10^6}100=219$$

$$(\text{Fisher})\ Q_{01}=\sqrt{\Sigma\frac{q_1p_0}{q_0p_0}\times\Sigma\frac{q_1p_1}{q_0p_1}}100=\sqrt{2,15\times2,19}\times100=217$$

ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται ὅτι αἱ κατά μέσον ὅρον εἰσαγόμεναι ποσότητες ἐκ τῶν ὑπ'ὄψιν εἰδῶν ἁπλῶς ὑπερεδιπλασιάσθησαν καί συγκεκριμένως ηὐξήθησαν κατά 117% (περίπου).

Δείκτης 'Αξίας

Δι'ἐφαρμογῆς εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν τοῦ τύπου (9.39) προκύπτει ὅτι ἡ συνολική ἀξία τῶν γενομένων εἰσαγωγῶν παρουσίασε αὔξησιν - ὀφειλομένην ἀφ' ἑνός εἰς τήν αὔξησιν τῶν εἰσαγομένων ποσοτήτων καί ἀφ' ἑτέρου εἰς τήν αὔξησιν τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν - κατά 165%. Πράγματι, ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι

$$V_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}100=\frac{3.013,3\times10^6}{1.135,3\times10^6}100=265$$

## 9.4 Κριτήρια 'Επιλογῆς Τιμαρίθμων καί Δεικτῶν "Ογκου

Εἰς τήν παράγραφον (9.2) εἴδομεν ὅτι αἱ σχετικαί τιμαί καί αἱ σχετικαί ποσότητες - ἤ ἄλλως οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι καί οἱ ἀτομικοί δεῖκται ὄγκου - παρουσιάζουν τάς κατωτέρω δύο βασικάς ἰδιότητας ἤ ὡς συνήθως λέγεται πληροῦν τά κ ρ ι τ ή ρ ι α:

(α) τῆς ἀντιστροφῆς εἰς τόν χρόνον, συμφώνως πρός τό ὁποῖον

$$P_{01}P_{10}=1 \text{ καί } Q_{01}Q_{10}=1 \qquad (9.40)$$

καί (β) τῆς ἀντιστροφῆς τῶν παραγόντων ἤ ἄλλως τῆς παραγοντοποιήσεως τῆς ἀξίας, συμφώνως πρός τό ὁποῖον τό γινόμενον τοῦ δείκτου τιμῶν ἐπί τόν δείκτην ὄγκου ἰσοῦται πρός τόν ἀντίστοιχον δείκτην ἀξίας, ἤτοι

$$P_{01}Q_{01}=V_{01} \qquad (9.41)$$

Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἰδιοτήτων ἤ καλλίτερον ἡ γενίκευσις αὐτῆς, τό γνωστόν δηλαδή κυκλικόν κριτήριον $P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma}=P_{\alpha\gamma}$ ἤ $Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\gamma}=Q_{\alpha\gamma}$, ἐπιτρέπει, ὡς εἴδομεν, τόν ὑπολογισμόν τῶν ἀτομικῶν τιμαρίθμων σταθερᾶς βάσεως $P_{0t}$, $t=1,2,\ldots,N$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων κινητῆς βάσεως $P_{t-1,t}$ (καί ἀντιστρόφως) καί ὡς ἐκ τούτου διευκολύνει σημαντικά τούς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς διά τυχόν ἀπαιτουμένην ἀλλαγήν τῆς περιόδου βάσεως. Πράγματι, ἐκ τῶν ἀτομικῶν δεικτῶν $P_{\alpha\beta}$ καί $P_{\alpha\gamma}$ - οἱ ὁποῖοι συμβολίζουν ἀντιστοίχως τούς δείκτας τῶν περιόδων β καί γ μέ βάσιν τήν περίοδον α - ὁ δείκτης $P_{\beta\gamma}$ τῆς περιόδου γ ὡς πρός τήν - νέαν - βάσιν β εὑρίσκεται - εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν - εὐκόλως ἐκ τῆς σχέσεως

$$P_{\beta\gamma}=\frac{P_{\alpha\gamma}}{P_{\alpha\beta}} \qquad (9.42)$$

δι'ἁπλῆς δηλαδή διαιρέσεως τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν - ἤ καλλίτερον τῶν σχετικῶν τιμῶν - τῶν περιόδων γ καί β λαμβανομένων ἀμφοτέρων μέ βάσιν τήν ἀρχικήν τοιαύτην (α).

Ἐξ ἄλλου, τῇ βοήθεια τῆς δευτέρας ἰδιότητος -δηλαδή τοῦ κριτήριου παραγοντοποιήσεως -

καθίσταται δυνατόν αἱ μεταβολαί εἰς τήν ὁλικήν ἀξίαν ἑνός εἴδους νά ὑπολογίζωνται - ὡς γινόμενον - ἐκ τῶν ἀντιστοίχων μεταβολῶν εἰς τήν τιμήν καί τήν ποσότητα αὐτοῦ, γενικώτερον δέ οἱαδήποτε ἐκ τῶν - τριῶν μεταβολῶν - εἰς τάς τιμάς, τάς ποσότητας καί τάς ἀξίας - νά εὑρίσκεται ἐκ τῶν δύο ἄλλων. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀποκτᾶ, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἰδιάζουσαν σημασίαν εἰς περιπτώσεις ὅπου μία ἐκ τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν - π.χ. εἰς τάς ποσότητας - εἶναι δύσκολον πρακτικῶς νά προσδιορισθῇ ἐνῶ ὁ ὑπολογισμός τῶν δύο ἄλλων συμβαίνει νά εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἁπλοῦς.

Ἐκ τῶν γενικῶν τιμαρίθμων ὡς καί τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ὄγκου οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται διά τῶν μαθηματικῶν τύπων τῆς προηγουμένης παραγράφου, τό κριτήριον τῆς ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς εἰ ς τ ό ν χ ρ ό ν ο ν πληροῦν, ὡς ἀποδεικνύεται δι᾽ἁπλῆς ἐπαληθεύσεως τῶν σχέσεων (9.40), μόνον

- ἐκ μέν τῶν ἀ σ τ α θ μ ή τ ω ν δεικτῶν

  (i) ὁ γεωμετρικός μέσος (τύπος 9.17) καί
  (ii) ὁ δείκτης συνολικῶν τιμῶν (τύπος 9.19)

- ἐκ δέ τῶν σ τ α θ μ ι κ ῶ ν τοιούτων

  (i) ὁ τύπος τῶν Edgeworth-Marshall (9.30) καί
  (ii) ὁ τύπος τοῦ Fisher (9.33).

Ἐξ ἄλλου, τό κριτήριον τῆς ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς τ ῶ ν π α ρ α γ ό ν τ ω ν (9.41) - ἤ ἄλλως τῆς π α ρ α γ ο ν τ ο π ο ι ή σ ε ω ς τῆς ἀξίας - πληροῦται μόνον ὑπό τοῦ τύπου τοῦ Fisher ὁ ὁποῖος διά τόν λόγον αὐτόν - ἐπειδή δηλαδή ἱκανοποιεῖ ἀμφότερα τά ὡς ἄνω κριτήρια - ἐκλήθη ἰ δ α ν ι κ ό ς.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω συναφῶς πρός τόν τύπον τοῦ Fisher ἔχει ὡς ἑξῆς:

- Κριτήριον τῆς ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς εἰς τόν χ ρ ό ν ο ν

  Δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (9.33) ἔχομεν

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \text{ καί } P_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}}$$

διά πολλαπλασιασμοῦ δέ αὐτῶν προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$P_{01}P_{10}=1$$

- Κριτήριον τῆς ἀντιστροφῆς τῶν παραγόντων

Δι'ἐφαρμογῆς τῶν τύπων (9.33), (9.38) καί (9.39) προκύπτει εὐκόλως ὅτι

$$P_{01}Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}\times\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=V_{01}$$

Τά ἀνωτέρω, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἰσχύουν καί περί τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ὄγκου, ἀποδεικνύονται δέ εὐχερῶς κατά τόν αὐτόν ἀκριβῶς τρόπον.

Ἐκ τῶν λεχθέντων μέχρι τοῦδε προκύπτει ὅτι ἀντιθέτως πρός τούς ἀτομικούς δείκτας - τιμῶν καί ποσοτήτων - οἱ πλεῖστοι τῶν γενικῶν τιμαρίθμων καί δεικτῶν ὄγκου τῆς προηγουμένης παραγράφου δέν παρουσιάζουν τάς ὡς ἄνω ἐπιθυμητάς ἰδιότητας - δέν πληροῦν ἐπακριβῶς τά κριτήρια τῆς ἀντιστροφῆς εἰς τόν χρόνον καί τῆς παραγοντοποιήσεως τῆς ἀξίας - καί ὡς ἐκ τούτου τυχόν ἐφαρμογή ἐπ'αὐττῶν τῶν ὡς ἄνω μεθόδων

(α) διά τήν ἀλλαγήν τῆς περιόδου βάσεως - ἴδε τύπον (9.42) - καί

(β) διά τόν ὑπολογισμόν τῆς μεταβολῆς εἰς τήν συνολικήν ἀξίαν ἑνός συνθέτου συνόλου εἰδῶν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν τιμῶν καί ὄγκου - τύπος (9.41) - συνεπάγεται ἐν γένει - μικρά ἤ μεγάλα - σφάλματα.

Τό σχετικόν μέγεθος τῶν ἐν λόγῳ σφαλμάτων ὑπολογιζόμενον συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν - τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τῶν ὑφισταμένων ἐμπειρικῶν δεδομένων - διά μέν τό κριτήριον τῆς ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς  ε ἰ ς  τ ό ν  χ ρ ό ν ο ν, ἐκ τῆς σχέσεως

$$E_x = P_{01} P_{10} - 1 \text{ (προκειμένου περί τιμαρίθμων)} \qquad (9.43)$$

$$E_x = Q_{01} Q_{10} - 1 \text{ (προκειμένου περί δεικτῶν ὄγκου)}$$

διά δέ τό κριτήριον τῆς ἀ ν τ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς  τ ῶ ν  π α ρ α γ ό ν τ ω ν, ἐκ τῆς σχέσεως

$$E_\pi = \frac{P_{01} Q_{01}}{V_{01}} - 1 \qquad (9.44)$$

ἐπιτρέπει ἀφ' ἑνός τήν ἐπιλογήν τοῦ καταλληλοτέρου κατά περίπτωσιν δείκτου, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τοῦ μαθηματικοῦ τύπου ὁ ὁποῖος ἐμφανίζει τά μικρότερα σχετικῶς σφάλματα, ἀφ' ἑτέρου δέ τήν συγκριτικήν ἀ ξ ι ο λ ό γ η σ ι ν  τῆς ἀκριβείας τῶν διαφόρων τύπων.

Ἐν πρυκειμένῳ ὅμως καί πρός ἀποφυγήν τυχόν ἐσφαλμένων ἐντυπώσεων, δέον νά τονισθῆ ὅτι διά τήν ἐπιλογήν τῶν διαφόρων μαθηματικῶν τύπων οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τήν πρᾶξιν - διά τόν ὑπολογισμόν τιμαρίθμων, δεικτῶν ὄγκου κλπ. - πέραν τῶν ὡς ἄνω - θεωρητικῶν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον - κριτηρίων, λαμβάνονται σοβαρῶς - καί μάλιστα κατά κύριον λόγον - ὑπ' ὄψιν αἱ ὑφιστάμεναι κατά περίπτωσιν πρακτικαί δυσχέρειαι καί αἱ ἀντίστοιχοι δυνατότητες. Οὕτω, εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ἐφαρμόζεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὁ τύπος τοῦ Laspeyres - ὑπό τήν μορφήν (9.25) καί συνηθέστερον τήν (9.26) - ἤ ἀκόμη ὡρισμέναι παραλλαγαί αὐτοῦ - ὡς π.χ. οἱ τύποι (9.21) καί (9.22) ὅπου ἡ τυπική περίοδος (τ) προηγεῖται συνήθως τῆς περιόδου βάσεως - σπανιώτερον δέ ὁ τύπος τοῦ Paasche - ὑπό τήν μορφήν (9.27) ἤ (9.28) - ἐνῶ αἱ σχέσεις (9.43) καί (9.44) χρησιμοποιοῦνται ἀποκλειστικῶς καί μόνον διά τόν ὑπολογισμόν καί τήν ἀξιολόγησιν τῶν διαπραττομένων ἀντιστοίχως σφαλμάτων (ἀναφορικῶς πρός τήν διά τοῦ τύπου (9.42) ἀλλαγήν τῆς περιόδου βάσεως καί τόν ὑπολογισμόν τοῦ δείκτου ἀξίας $V_{01}$ ἐκ τοῦ τύπου 9.41).

Συναφῶς πρός τά ἀνωτέρω θά πρέπει ἀκόμη νά λεχθῆ ὅτι τά ἀριθμητικά ἀποτελέσματα τά ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν διαφόρων μαθηματικῶν τύπων - καί ἰδιαιτέρως τῶν σταθμικῶν τοιούτων - εἰς τά συνήθη πρακτικά προβλήματα δέν διαφέρουν οὐσιωδῶς μεταξύ των (ἴδε τιμαρίθμους καί δείκτας ὄγκου ὑπολογισθέντας ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 9.2). Συγκεκριμένως οἱ δεῖκται οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται ἐκ τῶν τύπων Edgeworth-Marshall (9.30), Fisher (9.33) καί τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ τῶν κατά Laspeyres καί Paasche (9.34) εἶναι πάντοτε - ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐν λόγῳ τύπων - μεταξύ τῶν ἀποτελεσμάτων τά ὁποῖα προκύπτουν δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀμιγῶν τύπων Laspeyres καί Paasche. Ἐξ ἄλλου, οἱ τιμάριθμοι οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Paasche εἶναι κατά κανόνα - ἰδιαιτέρως ἐάν τό γενικόν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν παρουσιάζει ἀ ν ο δ ι κ ή ν τάσιν - ἐλαφρῶς μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ι τῶν κατά L a s p e y r e s τοιούτων. Τοῦτο ὅμως εἶναι καί γενικώτερον ἀληθές ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι οἱ συντελεσταί σταθμίσεως κατά τήν περίοδον βάσεως καί τήν τρέχουσαν τοιαύτην ταυτίζονται ἤ τουλάχιστον δέν εἶναι οὐσιωδῶς διάφοροι. Πράγματι, ἐάν ἰσχύουν - ἀκριβῶς ἤ κατά προσέγγισιν - αἱ σχέσεις

$$\frac{p_0^{(i)} q_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{k} p_0^{(i)} q_0^{(i)}} = \frac{p_1^{(i)} q_1^{(i)}}{\sum_{i=1}^{k} p_1^{(i)} q_1^{(i)}}, \text{ ὅπου } i=1,2,\ldots,k$$

ὁ κατά Laspeyres τιμάριθμος - ἤ δείκτης ὄγκου - θά εἶναι μεγαλύτερος τοῦ κατά Paasche τοιούτου, καθ' ὅσον ὁ πρῶτος εἶναι σταθμικός μέσος ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς τῶν ἀτομικῶν τιμαρίθμων $\frac{p_1}{p_0}$ - ἤ ἀτομικῶν δεικτῶν ὄγκου $\frac{q_1}{q_0}$ - ἐνῶ ὁ δεύτερος σταθμικός μέσος ἀ ρ μ ο ν ι κ ό ς τῶν ἰδίων ἀτομικῶν δεικτῶν, ἀμφότεροι δέ ὑπολογίζονται χρησιμοποιουμένων τῶν αὐτῶν - ἤ περίπου τῶν αὐτῶν - συντελεστῶν σταθμίσεως. Ὡς γνωστόν δέ ὁ μέσος ἁρμονικός (h) ἑνός συνόλου δεδομένων εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ ἀντιστοιχου μέσου ἀριθμητικοῦ αὐτῶν (μ).

## 9.5 Βασικαὶ Χρήσεις Τιμαρίθμων καὶ Δεικτῶν Ὄγκου

Οἱ τιμάριθμοι ἐπιτρέποντες, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τήν
μέτρησιν καί γενικώτερον τήν ἀξιολόγησιν μεταβολῶν
- αὐξήσεων ἤ μειώσεων - αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται εἰς τό
γ ε ν ι κ ό ν ἐ π ί π ε δ ο ν τῶν τιμῶν μιᾶς ὁμά-
δος - ἑνός συνθέτου συνόλου - εἰδῶν μεταξύ δύο χρο-
νικῶν περιόδων ἤ δύο οἱωνδήποτε ἄλλων "κ α τ α σ τ ά-
σ ε ω ν", πέραν τοῦ σημαντικοῦ ρόλου αὐτῶν εἰς τήν
μελέτην διαφόρων κοινωνικοοικονομικῶν προβλημάτων καί
τήν χάραξιν ἀντιστοίχου κυβερνητικῆς πολιτικῆς, τυγ-
χάνουν ἐπίσης εὐρυτάτης ἐφαρμογῆς εἰς τήν λῆψιν ἀ-
ποφάσεων ἐπί πολλῶν προβλημάτων εἰς τάς ἰδιωτικάς ἐ-
πιχειρήσεις, τάς ἐργατικάς ὀργανώσεις, τάς συναλλα-
γάς κλπ.

Εἰς τήν πρᾶξιν, αἱ σημαντικώτεραι καί πλέον συ-
νήθεις ἐφαρμογαί τῶν τιμαρίθμων ἀφοροῦν εἰς τά ἑξῆς:

(i) Ἀναγωγή ὀ ν ο μ α σ τ ι κ ῶ ν χρηματικῶν ποσῶν εἰς π ρ α γ μ α τ ι κ ά ἤ ἄλλως σ υ γ κ ρ ί σ ι μ α τοιαῦτα (ἀναγωγή π.χ. ὀνομαστικῶν μισθῶν καί ἡμερομισθίων εἰς πραγματικά τοιαῦτα ἤ ἄλλως τῆς αὐτῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως κ.ο.κ.).

Πρός τόν σκοπόν αὐτόν καί συγκεκριμένως προκει-
μένου χρηματικά ποσά ἀναφερόμενα εἰς τήν τ ρ έ χ ο υ-
σ α ν περίοδον νά καταστοῦν συγκρίσιμα πρός ἀντί-
στοιχα τοιαῦτα τῆς περιόδου βάσεως, δ ι α ι ρ ο ῦ ν-
τ α ι ἐ ν γένει διά τοῦ καταλλήλου κατά περίπτωσιν
τιμαρίθμου $P_{01}$. Ἡ ἐν λόγῳ διαδικασία εἶναι γνωστή
εὐρέως ὡς ἀ π ο π λ η θ ω ρ ι σ μ ό ς.

Οὕτω π.χ. οἱ μισθοί, τά ἡμερομίσθια καί γενικώ-
τερον τό κατά κεφαλήν εἰσόδημα τῶν κατοίκων μιᾶς χώ-
ρας εἰς μίαν ὡρισμένην περίοδον - θεωρουμένην ἐν προ-
κειμένῳ ὡς τρέχουσαν - προκειμένου νά καταστοῦν συγ-

κρίσιμα - ἐξ ἀπόψεως ἀγοραστικῆς δυνάμεως - πρός τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα μιᾶς ἄλλης περιόδου λαμβανομένης ὡς βάσεως ἤ ὡς συνήθως λέγεται π ρ α γ μ α τ ι κ ά - ἀπηλλαγμένα δηλαδή ἐκ τῆς ἐπιδράσεως τῶν αὐξομειώσεων τῶν τιμῶν - διαιροῦνται συνήθως διά τοῦ γνωστοῦ δείκτου τιμῶν καταναλωτοῦ $P_{01}$.

Πρός κατανόησιν τῆς ἐφαρμοζομένης ἐν προκειμένῳ διαδικασίας παραθέτομεν ἕν ἁπλοῦν ἀριθμητικόν παράδειγμα. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μέσος μηνιαῖος μισθός ἑνός ὑπαλλήλου κατά τά ἔτη 1970 καί 1974 ἦτο ἀντιστοίχως 8.000 καί 12.000 δρχ. ἐνῶ ἡ τιμή τοῦ κρέατος ἀπό 50 δρχ. - κατά τό ἔτος 1970 - ἀνῆλθεν - κατά τό ἔτος 1975 - εἰς 80 δρχ. Εἶναι προφανές ὅτι ἐνῶ ὁ ὀνομαστικός μισθός τοῦ ἐν λόγῳ ὑπαλλήλου ηὐξήθη - καί μάλιστα κατά 50% - ὁ "π ρ α γ μ α τ ι κ ό ς" μισθός αὐτοῦ ἐμειώθη, καθ'ὅσον, ἐνῶ τό ἔτος 1970 ἠδύνατο νά ἀγοράσῃ 160 κιλά κρέατος, τό ἔτος 1971 ἀγοράζει μόνον 150 κιλά.

Προκειμένου νά προσδιορίσωμεν τόν πραγματικόν μισθόν τοῦ ὑπαλλήλου αὐτοῦ κατά τό ἔτος 1975 ἤ καλλίτερον προκειμένου νά καταστήσωμεν τό ἀντίστοιχον ποσόν συγκρίσιμον πρός ἐκεῖνο τοῦ 1970 ἀρκεῖ νά δ ι α ι ρ έ σ ω μ ε ν αὐτό διά τοῦ ἀτομικοῦ τιμαρίθμου ἤ ἄλλως διά τῆς σχετικῆς τιμῆς τοῦ κρέατος $P_{01}$ δηλαδή διά τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{80}{50}=1{,}6$ ὅτε ἀντιστοίχως πρός τόν μισθόν τῶν 8.000 λαμβάνομεν τό ποσόν $\frac{12.000}{1{,}6}=7.500$ δρχ.

Πρός τούτοις, ἐάν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ "π ρ α γ μ α τ ι κ ή" μεταβολή - αὔξησις ἤ μείωσις - τοῦ μισθοῦ τοῦ ἐν λόγῳ ὑπαλλήλου καί ὄχι ἡ ὀ ν ο μ α σ τ ι κ ή τοιαύτη, ἀρκεῖ τόν - ἀτομικόν - δείκτην μισθοῦ ἤτοι τήν ποσότητα $M_{01}=\frac{12.000}{8.000}100=150$ νά διαιρέσωμεν διά τοῦ ἀντιστοίχου ἀτομικοῦ τιμαρίθμου τοῦ κρέατος, ἤτοι διά τῆς ποσότητος $P_{01}=\frac{80}{50}100=160$ ὅτε λαμβάνομεν τόν δείκτην

$$\frac{M_{01}}{P_{01}}=\frac{150}{160}100=94 \text{ (περίπου)}$$

ὁ ὁποῖος δηλοῖ προφανῶς μείωσιν τοῦ πραγματικοῦ μισθοῦ κατά 6% (περίπου).

Τό ἀνωτέρω παράδειγμα ἀποτελεῖ, ὡς εἶναι εὐνόητον, μία ὑπεραπλούστευσιν τῆς συνήθως ἐφαρμοζομένης διαδικασίας. Εἰς τήν πρᾶξιν δέν ἐνδιαφερόμεθα δι'ἕνα συγκεκριμένον μισθόν, οὔτε διά τάς μεταβολάς τῶν τιμῶν ἑνός μόνον εἴδους. Διά τόν λόγον αὐτόν ἀντί τοῦ ἀτομικοῦ τιμαρίθμου ἑνός εἴδους - κρέατος κλπ - χρησιμοποιεῖται ὁ γενικός δείκτης τιμῶν καταναλωτοῦ ὁ ὁποῖος ἀντανακλᾶ τήν κίνησιν τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν ὅλων τῶν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν δι'αὐτοῦ δέ διαιρεῖται ὄχι ἕνας συγκεκριμένος ἀτομικός δείκτης μισθοῦ ἀλλ'ἕνας γενικός δείκτης ὁ ὁποῖος ἀντανακλᾶ τήν κατά μέσον ὅρον μεταβολήν τῶν μισθῶν ὅλων τῶν μισθωτῶν κ.ο.κ. Ἐν προκειμένῳ βεβαίως δέον νά λεχθῇ ὅτι ἐάν οἱ χρησιμοποιούμενοι - κατά τήν ὡς ἄνω διαδικασίαν - δεῖκται δέν πληροῦν τό κριτήριον τῆς ἀντιστροφῆς τῶν παραγόντων τά σχετικά ἀποτελέσματα περικλείουν τά ἀντιστοίχα γνωστά σφάλματα.

(ii) Καθορισμός συμβατικῶν ρητρῶν ἤ ἄλλως τιμαριθμικῶν ἀναπροσαρμογῶν

Εἰς πλείστας ὅσας οἰκονομικάς συμφωνίας - ἀναφερομένας π.χ. εἰς μισθώματα, μισθούς καί ἡμερομίσθια ἤ ἀκόμη εἰς τιμάς εἰδῶν παραδοτέων ἐπί προθεσμίᾳ - περιλαμβάνονται συνήθως ρήτραι διά τῶν ὁποίων τά σχετικά ποσά - πρός ἀποφυγήν τῆς διαχρονικῆς ἀπαξιώσεως αὐτῶν - ἀναπροσαρμόζονται συμφώνως πρός τήν ἐξέλιξιν κάποιου - τοῦ καταλληλοτέρου κατά περίπτωσιν - τιμαρίθμου.

(iii) Διερεύνησις τῆς μακροχρονίου τάσεως καί εἰδικώτερον τῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν, μέ σκοπόν ἀφ'ἑνός τήν ἀποκάλυψιν τῶν πιθανῶν αἰτίων καί ἀφ'ἑτέρου τόν προσδιορισμόν καί τήν ἀξιολόγησιν τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπτώσεων.

(iv) Παρακολούθησις τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως τῶν τιμῶν διαφόρων ὑποομάδων τοῦ ὑπό μελέτην συνόλου εἰδῶν, πρός τόν σκοπόν ἀσκήσεως ὡρισμένης πολιτικῆς διά τήν διαφορικήν - ἐν σχέσει πρός ἀλλήλας - αὐξομείωσιν τῶν τιμῶν τῶν ἐν λόγῳ ὁμάδων (καί ὄχι τήν γενικήν αὔξησιν ἤ μείωσιν τῶν τιμῶν).

(v) Συγκρίσεις τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν μιᾶς ὁμάδος ἀγαθῶν κατά γεωγραφικάς περιοχάς καί λῆψιν ἀναλόγων μέτρων κ.ο.κ.

Ἐξ ἄλλου, οἱ δεῖκται ὄγκου ἀντανακλῶντες ἐν γένει τήν μεταβολήν ἡ ὁποία ἐπέρχεται εἰς τάς ποσότητας ἑνός συνθέτου συνόλου ἀγαθῶν μεταξύ δύο περιόδων ἤ γενικώτερον δύο οἱωνδήποτε καταστάσεων, χρησιμοποιοῦνται εὐρέως πρός παρακολούθησιν τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως - ἤ τῆς ἀπό τόπου εἰς τόπον διαφοροποιήσεως - τοῦ πραγματικοῦ φυσικοῦ ὄγκου τῆς γεωργικῆς ἤ τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς, τοῦ ὄγκου τῶν ἐξαγομένων ἤ εἰσαγομένων εἰς μίαν χώραν ἀγαθῶν, τοῦ ὄγκου τῶν ἀγαθῶν τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἀντικείμενον ἐμπορικῆς δραστηριότητος κ.ο.κ.

## 9.6 Βασικὰ Προβλήματα εἰς τὴν Κατάρτισιν Τιμαρίθμων καὶ Δεικτῶν Ὄγκου (Ἀναφορὰ εἰς τὸν Δείκτην Τιμῶν Καταναλωτοῦ)

Οἱοσδήποτε τιμάριθμος ἤ δείκτης ὄγκου σκοπεῖ, ὡς εἴδομεν, εἰς τήν μέτρησιν καί γενικώτερον τήν ἀξιολόγησιν μεταβολῶν αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται διαχρονικῶς εἰς τό γενικόν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν - ἤ ἀντιστοίχως τῶν ποσοτήτων - κάποιου συνθέτου συνόλου εἰδῶν ὡς π.χ. τῶν ἐξαγομένων ἤ εἰσαγομένων ὑπό μιᾶς χώρας ἀγαθῶν, τῶν παραγομένων εἰς αὐτήν γεωργικῶν ἤ βιομηχανικῶν προϊόντων, τῶν "καταναλισκομένων" ὑπό τῶν κατοίκων αὐτῆς ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν κ.ο.κ.

Οὕτω τά βασικά προβλήματα τά ὁποῖα ἀντιμετωπίζονται κατά τήν κατάρτισιν ἑνός οἱουδήποτε δείκτου - τιμῶν ἤ ποσοτήτων - εἶναι συνήθως τά ἑξῆς:

(α) Ἐπιλογή καί ταυτοποίησις τῶν περιληφθησομένων εἰς τόν δείκτην εἰδῶν.

Εἰς τάς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν τά εἴδη - ἀγαθά, ὑπηρεσίαι κλπ. - τοῦ ὑπό μελέτην συνθέτου συνόλου εἶναι συνήθως π ο λ υ ά ρ ι θ μ α καί ὡς ἐκ τούτου ἡ διαχρονική παρακολούθησις ἑνός ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καί ἡ συλλογή πληροφοριῶν - τιμῶν, ποσοτήτων κλπ. - δι'ὅλα, καθίσταται ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατος ἤ τουλάχιστον ἐξαιρετικά δυσχερής καί πολυδάπανος.

'Η δυσχέρεια αὐτή ἀντιμετωπίζεται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τῆς ἐ π ι λ ο γ ῆ ς ἐκ τοῦ πολυπληθοῦς συνόλου τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν ὡρισμένων μόνον ἐξ αὐτῶν - σχετικῶς ὀλιγαρίθμων - τά ὁποῖα συνθέτουν πλέον τόν καλούμενον κ ά λ α θ ο ν τῶν ὑπό παρακολούθησιν εἰδῶν, ἐν ἄλλοις δηλαδή λόγοις τά ἀναφερόμενα εἰς προηγουμένας παραγράφους k εἴδη διά τά ὁποῖα καί μόνον συλλέγονται πληροφορίαι (αἱ τιμαί $p_t^{(i)}$ καί αἱ ποσότητες $q_t^{(i)}$ ἤ αἱ ὁλικαί των ἀξίαι $p_t^{(i)}q_t^{(i)}$, $i=1,2,\ldots,k$. διά τάς χρονικάς περιόδους $t=0,1,2,\ldots,N$ κ.ο.κ.).

Τά οὕτω ἐπιλεγόμενα εἴδη θά πρέπει, ὡς εἶναι εὐνόητον, νά ἀποτελοῦν ἕν ἀ ν τ ι π ρ ο σ ω π ε υ τ ι κ ό ν ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο ν τοῦ ὑπό μελέτην συνθέτου συνόλου εἰδῶν, τοιοῦτον ὥστε αἱ μεταβολαί τῶν τιμῶν - ἤ τῶν ποσοτήτων - αὐτῶν ν'ἀντανακλοῦν κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἱκανοποιητικά τάς κινήσεις τῶν ἀντιστοίχων μεγεθῶν καί ὅλων τῶν ὑπολοίπων.

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ δείκτου τιμῶν καταναλωτοῦ (Δ.Τ.Κ.)* ὁ ὁποῖος καταρτίζεται διά τάς 'Αστικάς περιοχάς τῆς χώρας μας ἐκ τῶν χιλιάδων ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἀντικείμενον καταναλώσεως τῶν διαβιούντων εἰς πόλεις μέ πληθυσμόν 10.000 κατοίκων καί ἄνω, ἐπελέγησαν περίπου 300, δι' αὐτά δέ καί μόνον - ἀποτελοῦντα τόν λεγόμενον "κ ά λ α θ ο ν ἀ γ ο ρ ᾶ ς" - συλλέγονται μηνιαίως αἱ ἀπαραίτητοι πληροφορίαι (τιμαί).

---

* Διά περισσοτέρας λεπτομερείας ἴδε σχετικά δημοσιεύματα τῆς 'Εθνικῆς Στατιστικῆς 'Υπηρεσίας τῆς 'Ελλάδος (ΕΣΥΕ).

Πέραν τῆς ἐπιλογῆς τοῦ ὡς ἄνω ἀντιπροσωπευτικοῦ ὑποσυνόλου τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν - τοῦ καλάθου δηλαδή τῶν ὑπό παρακολούθησιν εἰδῶν - ἀπαιτεῖται κατά τήν φάσιν αὐτήν μία ἀκόμη σοβαρά προεργασία γνωστή εὐρέως ὡς "ταυτοποίησις" ἤ ἄλλως "ἐξειδίκευσις" τῶν περιληφθέντων εἰς τόν δείκτην εἰδῶν. Ἡ ἐργασία αὕτη συνίσταται εἰς τήν λεπτομερῆ πλήρη καί ἀκριβῆ περιγραφήν ἑκάστου εἴδους κατά τρόπον ὥστε νά ἐξασφαλίζεται ἡ διαχρονική συγκρισιμότης τῶν συλλεγομένων πληροφοριῶν. Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ Δ.Τ.Κ. αἱ τιμαί αἱ ὁποῖαι συλλέγονται κατά μῆνα δι'ἕκαστον εἶδος θά πρέπη ν'ἀναφέρωνται πάντοτε εἰς τό αὐτόν ἀκριβῶς εἶδος - π.χ. ἔλαιον Καλαμῶν ὀξύτητος 0,5 ἤ εἰσιτήριον κεντρικοῦ κινηματογράφου Α' προβολῆς κ.ο.κ - διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ὁ καταρτιζόμενος δείκτης δέν θά ἀντανακλᾶ μεταβολάς αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται μόνον εἰς αὐξομειώσεις τῶν τιμῶν ἀλλά καί τοιαύτας προερχομένας ἐκ τῆς διαφοροποιήσεως -βελτιώσεις ἤ χειροτερεύσεις - τῶν εἰδῶν.

(β) Καθορισμός τῶν πηγῶν πληροφοριῶν ὡς καί τοῦ τρόπου συλλογῆς αὐτῶν.

Διά τήν κατάρτισιν ἑνός τιμαρίθμου πέραν τῶν ἄλλων ἀπαιτεῖται, ὡς εἴδομεν, ἡ γνῶσις τῶν τιμῶν $p_t^{(1)}$, $p_t^{(2)},\ldots,p_t^{(k)}$ τῶν ἐπιλεγέντων k εἰδῶν δι'ἑκάστην ἐκ τῶν ἀντιστοίχων χρονικῶν περιόδων - μηνῶν κλπ - $t=1,2,\ldots$ κ.ο.κ. Ὁμοίως διά τήν κατάρτισιν ἑνός δείκτου ὄγκου ἀπαιτοῦνται - πέραν τῶν ἄλλων - αἱ ποσότητες $q_t^{(1)},q_t^{(2)},\ldots,q_t^{(k)}$ διά $t=0,1,2,\ldots$

Κατά συνέπειαν, μετά τήν ἐπιλογήν τοῦ καλάθου τῶν ὑπό παρακολούθησιν εἰδῶν, θά πρέπει ν' ἀποφασισθῆ ἀπό ποίας πηγάς - καταστήματα, ὑπηρεσίας, ἰδιώτας κλπ - θά λαμβάνωνται αἱ ὡς ἄνω πληροφορίαι - τιμαί, ποσότητες κλπ - πρός τούτοις δέ νά καθορισθῆ ὁ τρόπος συλλογῆς αὐτῶν - π.χ. δι'εἰδικῶν τιμοληπτῶν, δι'ἀποστολῆς ὑπό τῶν πληροφοριοδοτῶν καταλλήλως συμπληρωμένων ἐρωτηματολογίων κλπ - ὡς καί ἡ ἀντίστοιχος συχνότης - π.χ. μία, δύο φοράς τόν μῆνα κ.ο.κ. - τῆς λήψεως τῶν στοιχείων.

Ἐξυπακούεται ὅτι αἱ πηγαί πληροφοριῶν θά πρέπει νά ἐπιλεγοῦν κατά τρόπον ὥστε νά ἀποτελοῦν ἕν ἀντιπροσωπευτικόν ὑποσύνολον ὅλων τῶν δυναμένων νά παράσχουν τάς σχετικάς πληροφορίας, πρός τούτοις δέ οἱ χρησιμοποιούμενοι ὡς πληροφοριοδόται νά εἶναι ἱκανοί καί πρόθυμοι νά παράσχουν ἀξιόπιστα στοιχεῖα.

Ἐξ ἄλλου, ὁ τρόπος συλλογῆς τῶν πληροφοριῶν ἐξαρτᾶται συνήθως ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος καί τῶν συλλεγομένων στοιχείων, ὡς ἐπίσης ἐκ τῶν ὑφισταμένων δυνατοτήτων - ἐξ ἀπόψεως ἀπαιτουμένης δαπάνης ὀργανωτικῶν προβλημάτων κλπ - τοῦ ὑπευθύνου διά τήν συλλογήν ὀργάνου.

Τέλος διά τόν καθορισμόν τῆς συχνότητος μέ τήν ὁποίαν θά συλλέγωνται τά στοιχεῖα - πέραν τῶν οἰκονομικῶν καί ὀργανωτικῶν δυνατοτήτων τοῦ ὑπευθύνου - λαμβάνεται σοβαρῶς ὑπ'ὄψιν τό εὐμετάβλητον ἤ μή τῶν ἀντιστοίχων μεγεθῶν - τιμῶν ἤ ποσοτήτων - διά μέσου τοῦ χρόνου (μεταβολαί π.χ. ὡρισμένων τιμῶν ἀπό ἡμέρας εἰς ἡμέραν κ.ο.κ.).

Εἰς τήν περίπτωσιν π.χ. τοῦ Δ.Τ.Κ. αἱ τιμαί τῶν περιλαμβανομένων εἰς τόν "κάλαθον ἀγορᾶς" εἰδῶν συλλέγονται ὑπό εἰδικῶν τιμοληπτῶν οἱ ὁποῖοι ἐπισκέπτονται μία τουλάχιστον φορά καθ'ἕκαστον μῆνα εἰδικῶς πρός τοῦτο ἐπιλεγέντα καταστήματα "λιανικῆς" πωλήσεως τῶν διαφόρων εἰδῶν. Τά ἐν λόγῳ καταστήματα ἐπελέγησαν - εἰς τάς πλείστας ἐκ τῶν Ἀστικῶν περιοχῶν τῆς Χώρας - τόσον μεταξύ τῶν κεντρικῶν ὅσον καί ἐκ τῶν συνοικιακῶν τοιούτων ὥστε νά ἀποτελοῦν ἕν ἀντιπροσωπευτικόν ὑποσύνολον ὅλων τῶν συναφῶν καταστημάτων.

Ἐν προκειμένῳ θά πρέπει νά διευκρινισθῇ ὅτι ἡ χρησιμοποιουμένη καθ'ἑκάστην περίοδον ὡς τιμή $p_t^{(i)}$ ἑνός οἱουδήποτε εἴδους (i) ὑπολογίζεται ὡς σταθμικός μέσος ὅρος τῶν τιμῶν αὐτοῦ αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἀπό τάς διαφόρους πόλεις - λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν τοῦ πληθυσμοῦ ἑκάστης πόλεως - ἡ τιμή δέ αὐτοῦ δι'ἑκάστην πόλιν εὑρίσκεται ὡς ἁπλοῦς μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τοῦ εἴδους ὡς αὗται λαμβάνονται ἐκ τῶν διαφόρων καταστημάτων τῆς συγκεκριμένης πόλεως.

(γ) Προσδιορισμός τῆς περιόδου β ά σ ε ω ς

Εἰς τάς περιπτώσεις δεικτῶν - τιμῶν ἤ ὄγκου - οἱ ὁποῖοι σκοποῦν εἰς τήν μέτρησιν διαχρονικῶν μεταβολῶν - τιμῶν ἤ ποσοτήτων ἀντιστοίχως - εἶναι ἐπιβεβλημένη ἡ ἐπιλογή μιᾶς χρονικῆς περιόδου τά δεδομένα τῆς ὁποίας - τιμαί ἤ ποσότητες - θά ἀποτελοῦν τήν β ά σ ι ν τῶν συγκρίσεων καί ἀπό τήν ὁποίαν - λαμβανομένην ὡς ἀφετηρίαν - θά μετροῦνται, ὡς εἶναι εὐνόητον, αἱ ἐπερχόμεναι μεταβολαί.

Ἡ χρονική αὕτη περίοδος - ἡ β ά σ ι ς - δύναται νά εἶναι ἕνα ἤ περισσότερα ἔτη, ἕνας μῆνας, μία ἑβδομάς ἤ ἀκόμη καί μία ἡμέρα. Ἡ σχετική ἀπόφασις ἐξαρτᾶται κατά βάσιν ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος, τῶν ἀπαιτουμένων συγκρίσεων, τῶν ὑφισταμένων τυχόν δεδομένων (τιμῶν καί ποσοτήτων τῶν εἰδῶν τοῦ ἐπιλεγέντος καλάθου) κ.ο.κ., ὁπωσδήποτε ὅμως θά πρέπει νά ἀποφεύγεται - διά λόγους τόσου θεωρητικούς ὅσον καί πρακτικούς - ἡ ἐπιλογή ἀ ν ω μ ά λ ω ν περιόδων ὡς π.χ. ἐτῶν ἐντόνου ὑ φ έ σ ε ω ς τῆς οἰκονομίας, περιόδων ἀ π ο τ ό μ ο υ ἀ ν ό δ ο υ τ ῶ ν τ ι μ ῶ ν κ.ο.κ. Οὕτω π.χ. διά τόν Δ.Τ.Κ., ὁ ὁποῖος καταρτίζεται μηνιαίως ἀπό τοῦ Ἰανουαρίου 1959, ἐχρησιμοποιήθη κατ' ἀρχήν ὡς περίοδος βάσεως ὁ Ἰούνιος τοῦ ἔτους 1958. Ἐν συνεχείᾳ - λόγῳ τῆς ἐπελθούσης ἐν τῷ μεταξύ μεταβολῆς εἰς τήν διάρθρωσιν τῆς καταναλώσεως - ἤ ἄλλως εἰς τούς συντελεστάς σταθμίσεως τῶν διαφόρων εἰδῶν - καί συγκεκριμένως ἀπό τοῦ ἔτους 1970 ἐχρησιμοποιήθη ὡς νέα βάσις τό ἔτος 1969, προσφάτως δέ - ἀπό τοῦ ἔτους 1973 καί ἐντεῦθεν - ὡς περίοδος βάσεως χρησιμοποιεῖται ὁ Ἰανουάριος τοῦ 1973.

(δ) Καθορισμός τῆς σ χ ε τ ι κ ῆ ς σ η μ α σ ί α ς τῶν καθ' ἕκαστα εἰδῶν (Σ ύ σ τ η μ α Σ τ α θ μ ί σ ε ω ς)

Αἱ αὐξομειώσεις τῶν τιμῶν - ἤ τῶν ποσοτήτων - τῶν διαφόρων εἰδῶν τά ὁποῖα παρακολουθοῦνται διαχρονικῶς διά τήν κατάρτισιν ἑνός τιμαρίθμου - ἤ ἀντιστοίχως ἑνός δείκτου ὄγκου - δέν ἔχουν ὡς γνωστόν τήν αὐτήν σημασίαν ἤ ἄλλως ἴσην βαρύτητα. Οὕτω π.χ. μία αὔξησις κατά 10% τῆς τιμῆς τοῦ ἄρτου ἤ τοῦ ἐλαίου ἤ τοῦ κρέατος ἤ οἱουδήποτε ἄλλου εἴδους "πρώτης ἀνάγκης" τό ὁποῖον ἀγοράζεται σ υ χ ν ά ἤ καταναλίσκεται εἰς μ ε γ ά λ α ς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον π ο σ ό τ η τ α ς, ἔχει πολύ μεγαλυτέραν βαρύτητα ἀπό μία ἔστω καί μεγαλυτέραν αὔξησιν - π.χ. κατά 20% ἤ 30% - τῆς τιμῆς τοῦ βακαλάου ἤ τῶν ξυριστικῶν λεπίδων καί γενικώτερον οἱουδήποτε ἄλλου εἴδους - πολυτελείας ἤ μή - τό ὁποῖον ἀγοράζεται σπανίως ἤ ἡ γενομένη δι'αὐτό ὁλική δαπάνη εἶναι σχετικῶς μικρά. Ὁμοίως, μία αὔξησις κατά 10% τῆς παραγομένης ἐτησίως ποσότητος καπνοῦ ἤ ἐλαίου - εἰδῶν ὑ ψ η λ ῆ ς κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον τ ι μ ῆ ς - εἶναι ἐν γένει πολύ μεγαλυτέρας σημασίας ἀπό μίαν ἀντίστοιχον αὔξησιν - ἤ καί μεγαλυτέραν τοιαύτην - τῆς ποσότητος τῆς παραγομένης κριθῆς ἤ φασολίων, εἰδῶν τῶν ὁποίων ἡ σ υ ν ο λ ι κ ή σ υ μ β ο λ ή - γινομένου ποσότητος ἐπί τιμῆς - εἰς τήν γεωργικήν παραγωγήν εἶναι σχετικῶς ἀσήμαντος.

Οὕτω, προκειμένου νά καταρτισθῆ ἕνας τιμάριθμος ἤ ἕνας δείκτης ὄγκου ὁ ὁποῖος νά λαμβάνη ὑπ'ὄψιν τήν σχετικήν σημασίαν ἑκάστου ἐκ τῶν περιλαμβανομένων εἰς αὐτόν εἰδῶν, αἱ τιμαί - προκειμένου περί τιμαρίθμου - καί αἱ ποσότητες - εἰς τούς δείκτας ὄγκου - τῶν ἐπί μέρους εἰδῶν, λαμβάνονται ἀφοῦ προηγουμένως πολλαπλασιασθοῦν μέ τάς καταλλήλους κατά περίπτωσιν ποσότητας - ἤ ἀντιστοίχως τάς καταλλήλους τιμάς - ἀφοῦ δηλαδή σ τ α θ μ ι σ θ ο ῦ ν χρησιμοποιουμένων πρός τοῦτο καταλλήλων ἀριθμητικῶν ἐκφράσεων καλουμένων ἐν γένει σ υ ν τ ε λ ε σ τ ῶ ν σ τ α θ μ ί σ ε ω ς.

Οὕτω π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ Δ.Τ.Κ. αἱ τιμαί ἑκάστου εἴδους σταθμίζονται συνήθως μέ τάς καταναλισκομένας ἐξ αὐτοῦ ποσότητας ἤ ἀκριβέστερον ὁ ἀτομικός τιμάριθμος ἑκάστου εἴδους - τό πηλίκον δηλαδή $\frac{p_1}{p_0}$ - σταθμίζεται μέ τήν γενομένην διά τό εἶδος αὐτό συνολικήν δαπάνην (ἴδε τύπον 9.26). Τά συγκεκριμένα ἀγαθά καί ὑπηρεσίαι τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἀντικείμενον καταναλώσεως, τά ἀντιπροσωπευτικότερα ἐξ αὐτῶν τά ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τόν "κάλαθον ἀγορᾶς" ὡς καί ἡ καταναλωθεῖσα ἐξ ἑκάστου ποσότης ἤ ἡ γενομένη δι᾽ἕκαστον ἐξ αὐτῶν δαπάνη - οἱ ἀντίστοιχοι δηλαδή συντελεσταί σταθμίσεως - προσδιορίζονται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, δι᾽εἰδικῶν δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν καλουμένων ἐν γένει Ἐρευνῶν Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν.

Αἱ ἐν λόγῳ ἔρευναι διενεργοῦνται συνήθως ἐπί ἕν ὁλόκληρον ἔτος - διότι ἄλλως αἱ δαπάναι ὡρισμένων ἐποχιακῶν εἰδῶν ὡς π.χ. καυσίμων, φρούτων,λαχανικῶν κλπ. θά ὑπερεκτιμῶντο ἤ θά ὑπεκτιμῶντο ἀναλόγως τῆς ἐποχῆς εἰς τήν ὁποίαν θά περιωρίζετο ἡ ἔρευνα - οἱ δέ "καταναλωταί" εἰς τούς ὁποίους αὗται ἀναφέρονται ἀποτελοῦν ἕν ἀντιπροσωπευτικόν δεῖγμα ἐπιλεγόμενον καταλλήλως ἐκ τῶν Ἀστικῶν περιοχῶν τῆς χώρας - πόλεων μέ πληθυσμόν 10.000 κατοίκων καίἄνω- καθ᾽ὅσον ὁ καταρτιζόμενος Δ.Τ.Κ. ἀναφέρεται ἀποκλειστικῶς καί μόνον εἰς τού "Ἀστούς" εἰςὅλους δηλαδή τούς κατοίκους τῶν ἐν λόγῳ περιοχῶν.

Οἱ οὕτω προσδιοριζόμενοι συντελεσταί σταθμίσεως ἀντανακλοῦν, ὡς εἶναι εὐνόητον, τήν σχετικήν σημασίαν τῶν διαφόρων ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν ἤ ὡς συνήθως λέγεται τήν διάρθρωσιν τῆς καταναλώσεως, ἀποκλειστικῶς καί μόνον διά τό ἔτος διενεργείας τῆς ἐρεύνης. Κατά συνέπειαν, ἐάνοἱ ὑπολογισθέντες δι᾽ἕν ἔτος συντελεσταί χρησιμοποιηθοῦν διά τήν στάθμισιν - τῶν ἀτομικῶν τιμαρίθμων - τῶν διαφόρων εἰδῶν εἰς ἔτη ἀπέχοντα σημαντικά τοῦἔτους τῆς διενεργείας τῆς ἐρεύνης, εἶναι πιθανόν-λόγῳ τῆς τυχόν ἐπελθούσης μεταβολῆς εἰς τήν διάρθρωσιν τῆς καταναλώσεως - νά ὁδηγήσουν εἰς ἀποτελέσματα μή ἀνταποκρινόμενα πλήρως εἰς τήν πραγματικότητα. Διά τόν λόγον αὐτόν - ὡς ἐπίσης διά τόν ἐντοπισμόν νεοεισερχομένων εἰς τήν ἀγοράν εἰδῶν κλπ - αἱ Ἔρευναι Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν ἐνδείκνυται νά ἐπαναλαμβάνωνται ἀπό καιροῦ εἰς καιρόν, ἡ διεθνής δέ πρακτική συνίσταται εἰς τήν διενέργειαν τοιούτων ἐρευνῶν ἀνά πενταετίαν.

Ἐν προκειμένῳ δέον ἀκόμη νά λεχθῆ ὅτι τό ἔτος διενεργείας τῶν ἐν λόγῳ ἐρευνῶν λαμβάνεται κατά κανόνα καί ὡς π ε ρ ί ο δ ο ς  β ά σ ε ω ς  καί ὡς ἐκ τούτου διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ καταρτιζομένου δείκτου χρησιμοποιεῖται συνήθως ὁ τύπος Laspeyres (9.26). Ἐξυπακούεται ὅτι μετά τήν διενέργειαν νέας ἐρεύνης ἀκολουθεῖ συνήθως καί ἀντίστοιχος ἀλλαγή τῆς περιόδου βάσεως.

Πρός πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῶν συντελεστῶν σταθμίσεως ὡς καί τῆς διαχρονικῆς μεταβολῆς τήν ὁποίαν ὑφίστανται οὗτοι - μεταβολῆς τῆς διαρθρώσεως τῆς καταναλώσεως - παραθέτομεν κατωτέρω - πίναξ (9.3) - τήν π ο σ ο σ τ ι α ί α ν  σ ύ ν θ ε σ ι ν τῆς συνολικῆς δαπάνης τῶν ἀστικῶν νοικοκυριῶν τῆς χώρας - κατά μεγάλας ὁμάδας ἀγαθῶν καί ὑπηρεσιῶν - ὡς αὕτη ὑπελογίσθη ἐξ Ἐρευνῶν Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν διενεργηθεισῶν κατά τά ἔτη 1958, 1969 καί 1973, ὑπό τῆς ΕΣΥΕ.

Πίναξ 9.3

| Ὁ μ ά δ ε ς Ἀγαθῶν καί Ὑπηρεσιῶν | Συντελεσταί Σταθμίσεως Δαπάναι ἐπί τοῖς ἑκατόν(%) | | |
|---|---|---|---|
| | 1958 | 1969 | 1973 |
| Διατροφή | 44 | 39 | 38 |
| Ποτά καί Καπνός | 5 | 5 | 5 |
| Ἔνδυσις-Ὑπόδησις | 14 | 14 | 13 |
| Στέγασις | 10 | 11 | 10 |
| Ἐξοπλισμός Κατοικίας | 4 | 6 | 6 |
| Ἐφόδια Ἀμέσου Καταναλώσεως | 2 | 2 | 2 |
| Ὑγεία-Ἀτομική Καθαριότης | 6 | 6 | 6 |
| Ἐκπαίδευσις-Ἀναψυχή | 7 | 7 | 8 |
| Μεταφοραί-Ἐπικοινωνίαι | 6 | 8 | 10 |
| Διάφορα | 2 | 2 | 2 |
| Σύνολον | 100 | 100 | 100 |

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος καθίσταται προφανής μία ἐλάττωσις τῆς σχετικῆς σημασίας τῆς διατροφῆς καί ἀντιστοίχως μία αὔξησις τῆς βαρύτητος τῶν δαπανῶν διά μεταφορᾶς καί ἐπικοινωνίας, ἐκπαίδευσιν καί ἀναψυχήν, τόν ἐξοπλισμόν τῆς κατοικίας κ.ο.κ. Περισσότερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, αἱ διαχρονικαί μεταβολαί τῶν συντελεστῶν σταθμίσεως τῶν καθ' ἕκαστα συγκεκριμένων εἰδῶν. Διά τά ἐν λόγῳ στοιχεῖα ὡς καί διά περισσοτέρας λεπτομερείας ἐπί τῶν Ἐρευνῶν Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν ὁ ἀναγνώστης παραπέμπεται εἰς τά σχετικά δημοσιεύματα τῆς ΕΣΥΕ.

(ε) Καθορισμός τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ ἑνός δείκτου (Ἐπιλογή τοῦ καταλλήλου μαθηματικοῦ τύπου).

Αἱ μέθοδοι συνδυασμοῦ τῶν δεδομένων - τιμῶν καί ποσοτήτων κατά τήν περίοδον βάσεως $p_0^{(i)}$, $q_0^{(i)}$ καί τῶν ἀντιστοίχων τοιούτων $p_1^{(i)}$,$q_1^{(i)}$ κατά τήν τρέχουσαν τοιαύτην - τῶν k ἐπί μέρους εἰδῶν τοῦ ὑπό παρακολούθησιν καλάθου ἤ ἄλλως οἱ μαθηματικοί τύποι οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν ὑπολογισμόν διαφόρων τιμαρίθμων ἤ δεικτῶν ὄγκου, τά πλεονεκτήματα καί τά μειονεκτήματα ἑκάστου, ὡς ἐπίσης τά κριτήρια ἐπιλογῆς τοῦ κατά περίπτωσιν καταλληλοτέρου ἐξ αὐτῶν, μᾶς ἀπησχόλησαν ἤδη λεπτομερῶς εἰς προηγουμένας παραγράφους (παρ. 9.3 καί 9.4).

Ἐν προκειμένῳ θά πρέπει ἀκόμη νά λεχθῆ ὅτι ἡ ἐπιλογή ἑνός συγκεκριμένου μαθηματικοῦ τύπου - ἰδιαιτέρως μεταξύ τῶν σταθμικῶν τοιούτων - καί κατά βάσιν ἡ ἀπόφασις ἐάν θά χρησιμοποιηθῆ ἕνας τύπος τῆς μορφῆς Laspeyres ἤ ὁ τύπος τοῦ Paasche ἤ τέλος ἕνας συνδυασμός αὐτῶν, δηλαδή ἕνας τύπος - ὡς π.χ. τοῦ Fisher - διά τόν ὁποῖον προαπαιτεῖται ὁ δείκτης τοῦ Paasche, εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων στενῶς συνδεδεμένη μέ τό χρησιμοποιηθησόμενον σύστημα σταθμίσεως καί τάς δυνατότητας αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται εἰς τήν πρᾶξιν διά τόν προσδιορισμόν αὐτοῦ (καθ' ἑκάστην περίοδον ἤ μόνον διά τήν περίοδον βάσεως).

Οὕτω π.χ. ὁ Δ.Τ.Κ. - ὅπως καί οἱ πλεῖστοι τῶν καταρτιζομένων εἰς τήν πρᾶξιν τιμαρίθμων καί δεικτῶν ὄγκου - ὑπολογίζεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Laspeyres (9.26) χρησιμοποιουμένων δηλαδή ὡς συντελεστῶν σταθμίσεως ἐκείνων τῆς περιόδου βάσεως, καθ' ὅσον ὁ προσδιορισμός τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν καθ' ἑκάστην περίοδον εἶναι - εἰς τήν προκειμένην τουλάχιστον περίπτωσιν - πρακτικῶς ἀδύνατος.

Πέραν τῶν ὡς ἄνω βασικῶν προβλημάτων - τά ὁποῖα εἶναι κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον κοινά - εἰς τήν κατάρτισιν ἑνός οἱουδήποτε δείκτου τιμῶν ἤ ποσοτήτων, εἰς τάς καθ'ἕκαστα εἰδικάς περιπτώσεις ἀντιμετωπίζονται ὡς εἶναι εὐνόητον καί ἄλλα πλέον ἐξειδικευμένα τοιαῦτα συναφῆ πρός τήν συγκεκριμένην κατάστασιν.

Οὕτω π.χ. συναφῶς πρός τόν Δ.Τ.Κ. ἀντιμετωπίζεται πολλάκις τό πρόβλημα τῆς ἀ λ λ α γ ῆ ς τῆς ποιότητος ἤ ἀκόμη καί τ ῆ ς π λ ή ρ ο υ ς ἐ ξ α φ α ν ί σ ε ω ς ἀπό τήν ἀγοράν ὡρισμένων ἐκ τῶν ὑπό μελέτην εἰδῶν καί κατά συνέπειαν δημιουργεῖται ἡ ἀνάγκη ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς αὐτῶν δι' ἄλλων παρεμφερῶν καί τῆς αὐτῆς χρησιμότητος τοιούτων.

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς γίνεται συνήθως σ ύ ν δ ε σ ι ς τῆς τιμῆς τοῦ νεοεισερχομένου ἀγαθοῦ μέ τήν τοιαύτην τοῦ παλαιοῦ καί ἡ κατάρτισις τοῦ δείκτου συνεχίζεται κανονικῶς (λαμβανομένων πλέον ὑπ' ὄψιν τῶν τιμῶν τοῦ νέου ἀγαθοῦ).

Ἕνα ἀκόμη σημαντικό πρόβλημα τό ὁποῖον παρουσιάζεται κατά τήν κατάρτισιν τοῦ Δ.Τ.Κ. εἶναι ἡ ἐ π ο χ ι κ ό τ η ς τήν ὁποίαν ἐμφανίζουν διάφορα εἴδη - κυρίως φροῦτα καί λαχανικά - καί κατά συνέπειαν ἡ ἀνυπαρξία τιμῶν διά τά ἐν λόγῳ εἴδη δι' ὡρισμένους μῆνας τοῦ ἔτους. Εἰς τήν πρᾶξιν τό πρόβλημα τοῦτο ἀντιμετωπίζεται συνήθως διά τῆς χρησιμοποιήσεως κατά μῆνα τῶν τιμῶν τῶν ἑκάστοτε ἐποχιακῶν εἰδῶν - λαχανικῶν καί φρούτων - καί τῆς σταθμίσεως αὐτῶν διά μεταβαλλομένων - ἐποχιακῶς - συντελεστῶν σταθμίσεως.

Τό πρόβλημα τοῦτο ἀντιμετωπίζεται ἐπίσης εἰς τόν δείκτην βιομηχανικῆς παραγωγῆς, τούς δείκτας γεωργικῶν τιμῶν κ.ο.κ.

[illegible] συνδυασμός, [illegible] καί
[illegible]

[illegible] εἶναι, κατά τό [illegible] ἤ [illegible] [illegible] καί [illegible] [illegible] νά εἶναι [illegible]

Οὕτως, [illegible] ἀπό τήν Α.Τ.Α. [illegible]

Εἰς τάς [illegible] τήν [illegible] καί ὁ [illegible] ὅτι [illegible] τήν [illegible]

[illegible]

Τό [illegible]

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

1. Ἀναφέρατε παραδείγματα π ε π ε ρ α σ μ έ ν ω ν καί ἀ π ε ί ρ ω ν στατιστικῶν πληθυσμῶν ὡς καί χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν ἐπί μέρους μονάδων αὐτῶν αἱ ὁποῖαι δύνανται ν'ἀποτελέσουν ἀντικείμενον στατιστικῆς ἐρεύνης.

2. Ἀναφέρατε παραδείγματα κ α τ η γ ο ρ ι κ ῶ ν, π ο ι ο τ ι κ ῶ ν καί π ο σ ο τ ι κ ῶ ν (συνεχῶν καί ἀσυνεχῶν) μεταβλητῶν, τάς μορφάς μετρήσεως τάς ὁποίας ἐπιδέχεται ἑκάστη ἐξ αὐτῶν, ὡς ἐπίσης καί τάς ἀντιστοίχους δυνατάς τιμάς των

3. Ποῖα τά βασικά πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα τῶν δειγματοληπτικῶν μεθόδων συλλογῆς στατιστικῶν πληροφοριῶν;

4. Ποῖοι οἱ βασικοί τρόποι παρουσιάσεως στατιστικῶν στοιχείων καί ποῖα τά πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα ἑκάστου;

5. Ποῖα τά βασικά κριτήρια κατατάξεως ἀριθμητικῶν δεδομένων εἰς στατιστικούς πίνακας καί ποῖοι οἱ ἀντιστοίχως ἐξυπηρετούμενοι σκοποί;

6. Καταρτίσατε γεωγραφικούς καί χρονολογικούς στατιστικούς πίνακας χρησιμοποιοῦντες

   α) Πληθυσμιακά δεδομένα
   β) Δεδομένα ἐκ τῆς γεωργικῆς παραγωγῆς
   γ) Δεδομένα ἐπί τῶν εἰσαγωγῶν καί ἐξαγωγῶν τῆς χώρας
   δ) Δεδομένα ἐκ τῆς τουριστικῆς καί μεταναστευτικῆς κινήσεως.

7. Καταρτίσατε διαγράμματα (ἀπεικονίσεις) ἀντίστοιχα πρός τούς στατιστικούς πίνακας τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

8. Ποία ἡ βασική διαφορά μεταξύ π ε ρ ι γ ρ α φ ι κ ῆ ς καί ἐ π α γ ω γ ι κ ῆ ς στατιστικῆς; Ποῖαι αἱ χρησιμοποιούμεναι ὑπό τῆς περιγραφικῆς στατιστικῆς μέθοδοι ἀναλύσεως;

**ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2**

9. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδεται ἡ κατανομή τοῦ οἰκονομικῶς ἐνεργοῦ πληθυσμοῦ κατά μεγάλους κλάδους οἰκονομικῆς δραστηριότητος α) εἰς τάς ἀστικάς, β) εἰς τάς ἡμιαστικάς καί γ) εἰς τάς ἀγροτικάς περιοχάς τῆς χώρας (εἰς χιλιάδας κατοίκων).

| Κλάδος Οἰκον. Δραστηριότητος | Π ε ρ ι ο χ α ί<br>Ἀστικαί | <br>Ἡμιαστικαί | <br>Ἀγροτικαί |
|---|---|---|---|
| Γεωργία | 90 | 175 | 1.070 |
| Βιομηχανία | 624 | 89 | 129 |
| Ὑπηρεσίαι | 856 | 106 | 146 |
| Σ ύ ν ο λ ο ν | 1.570 | 370 | 1.345 |

α) Τί εἴδους εἶναι αἱ ἀνωτέρω κατανομαί;
β) Ἀπεικονίσατε τάς ἐν λόγῳ κατανομάς (ἐπί τοῦ αὐτοῦ σχήματος) διά τριῶν κ υ κ λ ι κ ῶ ν διαγραμμάτων
γ) Ὁμοίως διά τριῶν ἁ π λ ῶ ν διαγραμμάτων.

10. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδεται ἡ κατανομή τῶν λαβόντων πτυχία ἔκ τινος Ἀνωτάτης Σχολῆς κατά τά ἔτη 1970, 1971 καί 1972 ὡς πρός τόν "Βαθμόν" τῶν πτυχίων των.

| Βαθμός | 1970 | 1971 | 1972 |
|---|---|---|---|
| Ἄριστα | 8 | 18 | 18 |
| Λίαν Καλῶς | 24 | 42 | 45 |
| Καλῶς | 48 | 60 | 87 |
| Σ ύ ν ο λ ο ν | 80 | 120 | 150 |

α) Τί εἴδους εἶναι αἱ ἀνωτέρω κατανομαί;
β) Ἀπεικονίσατε τάς ἐν λόγῳ κατανομάς (ἐπί τοῦ αὐτοῦ σχήματος) διά τριῶν κ υ κ λ ι κ ῶ ν διαγραμμάτων
γ) Ὁμοίως διά τριῶν ἁ π λ ῶ ν διαγραμμάτων
δ) Ὁμοίως διά τριῶν ἀ κ ι δ ω τ ῶ ν διαγραμμάτων.

11. Ἀναφέρατε τρία παραδείγματα κατηγορικῶν κατανομῶν συχνότητος καί καταρτίσατε ἀντιστοίχους πρός αὐτάς γραφικάς ἀπεικονίσεις.

12. Ἀναφέρατε τρία παραδείγματα ποιοτικῶν κατανομῶν συχνότητος καί καταρτίσατε ἀντιστοίχους πρός αὐτάς γραφικάς ἀπεικονίσεις.

13. Ἐκ τινος ἐρεύνης ἀναφερομένης εἰς τόν ἀριθμόν τῶν τέκνων (Χ) ἑκάστου ἐκ τῶν 80 ἐγγάμων ὑπαλλήλων μιᾶς ἐπιχειρήσεως προέκυψαν τά κατωτέρω ἀποτελέσματα:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 5 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 2 | 5 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 3 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 5 | 2 | 6 | 2 | 4 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 4 | 4 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Παρουσιάσατε τ'ἀνωτέρω ἀποτελέσματα ὑπό μορφήν μιᾶς κατάλληλου κατανομῆς συχνότητος καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε:

α) Τάς ἀπολύτους καί σχετικάς ταξικάς συχνότητας καί

β) Τάς ἀπολύτους καί σχετικάς ἀθροιστικάς συχνότητας.

14. Παραστήσατε γραφικῶς τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Συγκεκριμένως, νά χαραχθῆ: α) τό ἀντίστοιχον ἀκιδωτόν διάγραμμα (οἱονεί ἱστόγραμμον) καί β) τό ἀντίστοιχον ἀθροιστικόν τοιοῦτον.

15. Κατωτέρω δίδονται τά ἀναστήματα (εἰς ἑκατοστά τοῦ μέτρου) 150 σπουδαστῶν.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 164 | 175 | 184 | 177 | 162 | 190 | 169 | 173 | 170 | 189 | 166 | 178 | 180 | 165 | 176 |
| 188 | 171 | 173 | 187 | 172 | 171 | 182 | 181 | 183 | 184 | 176 | 193 | 177 | 179 | 184 |
| 183 | 194 | 179 | 185 | 179 | 176 | 180 | 168 | 176 | 175 | 170 | 179 | 172 | 188 | 168 |
| 169 | 174 | 176 | 180 | 170 | 174 | 187 | 179 | 164 | 177 | 183 | 174 | 183 | 177 | 178 |
| 174 | 181 | 178 | 167 | 176 | 184 | 179 | 185 | 177 | 194 | 176 | 184 | 187 | 169 | 183 |
| 193 | 170 | 161 | 182 | 190 | 175 | 169 | 172 | 174 | 179 | 162 | 175 | 174 | 171 | 174 |
| 176 | 178 | 172 | 169 | 178 | 189 | 176 | 178 | 186 | 169 | 180 | 177 | 173 | 178 | 191 |
| 173 | 176 | 188 | 174 | 158 | 183 | 166 | 172 | 170 | 163 | 172 | 161 | 172 | 170 | 171 |
| 167 | 182 | 179 | 178 | 185 | 179 | 173 | 184 | 182 | 177 | 191 | 187 | 176 | 183 | 176 |
| 179 | 180 | 176 | 183 | 177 | 166 | 171 | 192 | 175 | 178 | 179 | 183 | 169 | 185 | 182 |

Καταρτίσατε τήν κατανομήν συχνότητος τῆς ἐν λόγῳ μεταβλητῆς (ἀναστήματος) χρησιμοποιοῦντες τάξεις πλάτους 5 ἑκατοστῶν καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε:

α) Τάς κεντρικάς τιμάς τῶν τάξεων
β) Τάς ἀπολύτους καί σχετικάς ταξικάς συχνότητας
γ) Τάς ἀπολύτους καί σχετικάς ἀθροιστικάς συχνότητας

16. Παραστήσατε γραφικῶς τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Συγκεκριμένως, νά χαραχθοῦν: α) τό ἱστόγραμμον, β) τό πολύγωνον συχνότητος καί γ) τό (δεξιόστροφον) ἀθροιστικόν διάγραμμα χρησιμοποιουμένων πρός τοῦτο τῶν σ χ ε τ ι κ ῶ ν συχνοτήτων (ταξικῶν καί ἀθροιστικῶν).

17. Κατωτέρω δίδονται οἱ μηνιαῖοι μισθοί (εἰς χιλιάδας δραχμῶν) τῶν 50 ὑπαλλήλων μιᾶς ἐπιχειρήσεως.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,3 | 14,2 | 6,8 | 9,2 | 11,1 | 4,8 | 3,9 | 9,2 | 4,6 | 8,8 |
| 6,2 | 6,3 | 9,4 | 6,8 | 7,9 | 8,1 | 8,9 | 8,4 | 7,2 | 6,9 |
| 5,1 | 4,7 | 9,6 | 13,4 | 18,4 | 5,4 | 5,1 | 9,4 | 29,2 | 6,4 |
| 3,5 | 6,2 | 6,9 | 5,1 | 6,4 | 2,7 | 5,2 | 6,5 | 5,7 | 6,8 |
| 7,2 | 8,5 | 4,2 | 5,7 | 2,8 | 6,1 | 6,9 | 13,9 | 7,8 | 6,2 |

Παρουσιάσατε τά ὡς ἄνω δεδομένα ὑπό μορφήν μιᾶς καταλλήλου κατανομῆς συχνότητος. Χρησιμοποιήσατε πρός τοῦτο 7 ἐν συνόλῳ τάξεις (ἀνίσου πλάτους) καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε:

α) Τάς κεντρικάς τιμάς τῶν τάξεων
β) Τάς ἀπολύτους καί σχετικάς ταξικάς συχνότητας
γ) Τάς ἀπολύτους καί σχετικάς ἀθροιστικάς συχνότητας.

18. Παραστήσατε γραφικῶς τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Συγκεκριμένως, καταρτίσατε: α) τό κατάλληλον ἱστόγραμμον, β) τό πολύγωνον συχνότητος καί γ) τό (δεξιόστροφον) ἀθροιστικόν διάγραμμα χρησιμοποιοῦντες πρός τοῦτο τάς σχετικάς συχνότητας (ταξικάς καί ἀθροιστικάς).

19. Αἱ ἑβδομαδιαῖαι δαπάναι ἑνός τυπικοῦ ἀστικοῦ νοικοκυριοῦ κατά τά ἔτη 1969 καί 1974 εἶχον τήν ἀκόλουθον σύνθεσιν (εἰς δρχ.).

| Κατηγορίαι Δαπανῶν | 1969 | 1974 |
|---|---|---|
| Διατροφή | 780 | 830 |
| Στέγασις | 220 | 330 |
| Ἔνδυσις | 260 | 280 |
| Λοιπά | 740 | 1.060 |
| Σ ύ ν ο λ ο ν | 2.000 | 2.500 |

Νά χαραχθοῦν (ἐπί τοῦ αὐτοῦ σχήματος) α) δύο ἁπλᾶ καί β) δύο κυκλικά διαγράμματα ἀπεικονίζοντα τ'ἀνωτέρω δεδομένα.

20. Μία καπνοβιομηχανία συσκευάζει τά παραγόμενα ὑπ'αὐτῆς σιγαρέττα εἰς πακέττα τῶν 20. Ἡ ποσοστιαία κατανομή τῶν ἐν λόγῳ πακέττων ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν περιλαμβανομένων εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν σκάρτων σιγαρέτων (Χ) ἔχει ὡς ἀκολούθως:

| Σκάρτα Σιγαρέτα (Χ) | Ποσοστόν Πακέττων (%) |
|---|---|
| 0 | 48 |
| 1 | 30 |
| 2 | 10 |
| 3 | 6 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |
| 6 | 1 |
| Σύνολον | 100 |

Ὑπολογίσατε: α) τήν (δεξιόστροφον) ἀθροιστικήν σειράν καί β) ἐπί 300 πακέττων πόσα περιλαμβάνουν 4 ἤ περισσότερα σκάρτα σιγαρέττα.

Ἐπίσης καταρτίσατε: α) τό ἀντίστοιχον ἀκιδωτόν διάγραμμα (οἱονεί ἱστόγραμμον) καί β) τό (δεξιόστροφον) ἀθροιστικόν διάγραμμα.

21. Τά 1.000 χοιρίδια ἑνός χοιροστασίου κατανέμονται ἐξ ἀπόψεως τοῦ βάρους αὐτῶν Χ (εἰς κιλά) ὡς ἑξῆς:

| Βάρος (X) | Συχνότης (f) |
|---|---|
| 30-35 | 8 |
| 35-40 | 18 |
| 40-45 | 78 |
| 45-50 | 164 |
| 50-55 | 254 |
| 55-60 | 197 |
| 60-65 | 156 |
| 65-70 | 97 |
| 70-75 | 17 |
| 75-80 | 7 |
| 80-85 | 4 |
| Σύνολον | 1.000 |

Ὑπολογίσατε: α) τάς ἀθροιστικάς συχνότητας
β) πόσων χοιριδίων τό βάρος ὑπερβαίνει τά 55 κιλά καί
γ) πόσων χοιριδίων τό βάρος εἶναι μέχρι καί 68 κιλά.

Ἐπίσης καταρτίσατε: α) τό ἀντίστοιχον ἱστόγραμμον
β) τό πολύγωνον συχνότητος καί
γ) τό ἀθροιστικόν διάγραμμα.

?2. Οἱ παραγόμενοι ὑπό τινος ἐργοστασίου λαμπτῆρες κατανέμονται ὡς πρός τήν διάρκειαν ζωῆς αὐτῶν X (εἰς ὥρας) ὡςἑξῆς:

| Διάρκεια Ζωῆς (X) | Ποσοστόν Λαμπτήρων (%) |
|---|---|
| 0 - 2 | 6 |
| 2 - 4 | 18 |
| 4 - 10 | 36 |
| 10 - 20 | 20 |
| 20 - 50 | 12 |
| 50 - 100 | 5 |
| 100 - 200 | 3 |
| Σύνολον | 100 |

Ὑπολογίσατε τάς ἀθροιστικάς συχνότητας καί καταρτίσατε:

α) τό ἀντίστοιχον ἱστόγραμμον
β) τό πολύγωνον συχνότητος καί
γ) τό ἀθροιστικόν διάγραμμα.

23. Μία συνεχής μεταβλητή Χ λαμβάνει τιμάς εἰς τό διάστημα (0,10). Ἡ "καμπύλη" συχνότητος αὐτῆς ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y=\frac{1}{5}-\frac{x}{50}$. Ὑπολογίσατε τό ποσοστόν (%) τῶν τιμῶν τῆς Χ αἱ ὁποῖαι α) ὑπερβαίνουν τόν ἀριθμόν 5 καί
β) εἶναι μεταξύ 4 καί 6.

24. Ἡ ποσοστιαία κατανομή τοῦ ἑλληνικοῦ πληθυσμοῦ εἰς 10ετεῖς ὁμάδας ἡλικιῶν ἔχει ὡς ἀκολούθως:

| Τάξεις Ἡλικιῶν | Ἀναλογία Πληθυσμοῦ (%) |
|---|---|
| 0 - 10 | 17 |
| 10 - 20 | 16 |
| 20 - 30 | 14 |
| 30 - 40 | 15 |
| 40 - 50 | 12 |
| 50 - 60 | 10 |
| 60 - 70 | 9 |
| 70 - 80 | 4 |
| 80 - 90 | 2 |
| 90 - 100 | 1 |
| Σύνολον | 100 |

α) Νά σχεδιασθῆ τό ἱστόγραμμον καί τό πολύγωνον συχνότητος
β) Νά καταρτισθῆ ἡ ἀθροιστική σειρά
γ) Νά σχεδιασθῆ τό ἀθροιστικόν διάγραμμα καί
δ) Νά εὑρεθοῦν τά ποσοστά τοῦ πληθυσμοῦ ἡλικίας
(i) 18 ἐτῶν καί κάτω
(ii) 72 " " ἄνω
(iii) μεταξύ 14 καί 65 ἐτῶν.

25. Ἡ κατανομή κατηγορίας τινός συνταξιούχων τοῦ Δημοσίου ὡς πρός τήν μηνιαίαν σύνταξιν αὐτῶν ἔχει ὡς ἀκολούθως:

| Τάξεις Συντάξεων | Ἀναλογία Συνταξιούχων (%) |
|---|---|
| 1.000 - 2.000 | 16 |
| 2.000 - 3.000 | 32 |
| 3.000 - 5.000 | 22 |
| 5.000 - 7.000 | 14 |
| 7.000 - 10.000 | 10 |
| 10.000 - 15.000 | 4 |
| 15.000 - 25.000 | 2 |
| Σύνολον | 100 |

α) Νά σχεδιασθῆ τό ἱστόγραμμον καί τό πολύγωνον συχνότητος
β) Νά καταρτισθῆ ἡ ἀθροιστική σειρά
γ) Νά σχεδιασθῆ τό ἀθροιστικόν διάγραμμα καί
δ) Νά εὑρεθῆ τί ποσοστόν συνταξιούχων ἔχει σύνταξιν
(i) 1.300 δραχμῶν καί κάτω
(ii) 12.000 δραχμῶν καί ἄνω
(iii) μεταξύ 2.500 καί 12.500 δραχμῶν

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

26. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς κατανομῆς τῆς ἀσκήσεως 20 νά εὑρεθοῦν αἱ κατωτέρω πληθυσμιακαί παράμετροι:

α) Ὁ μέσος ἀριθμητικός τῆς μεταβλητῆς X (μέσος ὅρος σκάρτων σιγαρέτων κατά πακέττον)
β) Ἡ διάμεσος, τό πρῶτον καί τό τρίτον τεταρτημόριον (ὑπολογιστικῶς καί γραφικῶς)
γ) Ἡ διακύμανσις καί ἡ τυπική ἀπόκλισις τῆς X καί
δ) Ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος τῆς X.

Σχολιάσατε δι᾽ὀλίγων τήν σημασίαν καί τήν χρησιμότητα ἑκάστου ἐκ τῶν ὡς ἄνω μέτρων.

27. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 21 νά εὑρεθοῦν:

α) Ὁ μέσος ἀριθμητικός
β) Ἡ διάμεσος, τό πρῶτον καί τό ἔνατον δεκατημόριον (ὑπολογιστικῶς καί γραφικῶς)
γ) Ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος
δ) Αἱ ἁπλαῖ καί αἱ κεντρικαί ροπαί μέχρι καί τετάρτης τάξεως
ε) Οἱ συντελεσταί ἀσυμμετρίας ($B_1$) καί κυρτότητος ($B_2$) τοῦ Pearson
στ) Ἄλλα μέτρα διασπορᾶς καί ἀσυμμετρίας

Σχολιάσατε δι᾽ὀλίγων τήν σημασίαν καί τήν χρησιμότητα ἑκάστου ἐκ τῶν ὡς ἄνω μετρων.

28. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 22 νά εὑρεθοῦν:

α) Ἡ μέση διάρκεια ζωῆς τῶν λαμπτήρων (μέσος ἀριθμητικός)
β) Ἡ διάμεσος, τό πρῶτον καί τό τρίτον τεταρτημόριον (ὑπολογιστικῶς καί γραφικῶς).

Ποῖον ἐκ τῶν ἐν λόγῳ μέτρων θέσεως (μ καί Μ) θεωρεῖται καταλληλότερον διά τήν προκειμένην περίπτωσιν καί διατί;

γ) Ἡ διακύμανσις καί ἡ τυπική ἀπόκλισις
δ) Ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος
ε) Ὁ συντελεστής ἀσυμμετρίας ($\beta_1$) τοῦ Pearson

Σχολιάσατε δι'ὀλίγων τήν σημασίαν καί τήν χρησιμότητα ἑκάστου ἐκ τῶν ὡς ἄνω μέτρων.

29. Ὑπολογίσατε τάς πληθυσμιακάς παραμέτρους αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται εἰς τήν ἄσκησιν 27 χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα (ἡλικίας κλπ.) τῆς ἀσκήσεως 24.

30. Ὑπολογίσατε τάς πληθυσμιακάς παραμέτρους αἱ ὁποῖαι συτοῦνται εἰς τήν ἄσκησιν 28 χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα (συντάξεις) τῆς ἀσκήσεως 25.

31. Ἡ ποσοστιαία κατανομή τῶν μαθητῶν τάξεως τινός ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν ὀρθογραφικῶν λαθῶν εἰς ὑπαγορευθέν πρός αὐτούς κείμενον εἶναι:

| Λάθη | Μαθηταί (%) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 15 |
| 2 | 33 |
| 3 | 27 |
| 4 | 10 |
| 5 καί ἄνω | 14 |
| Σύνολον | 100 |

Νά ὑπολογισθῇ ἡ διακύμανσις τῆς κατανομῆς γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικός ἰσοῦται πρός τό 3ον τεταρτημόριον αὐτῆς.

32. Ἐκ τῆς ἐρεύνης 200 νοικοκυριῶν εὑρέθη ὅτι ἡ μέση (ἀριθμητικός μέσος) ἡμερησία δαπάνη αὐτῶν ἦτο μ=141 δρχ. Ἡ κατανομή τῶν ἐν λόγῳ νοικοκυριῶν ὡς πρός τάς ἡμερησίας δαπάνας των ἔχει ὡς ἀκολούθως:

| Δαπάναι (εἰς δρχ.) | Ἀριθμός Νοικοκυριῶν |
|---|---|
| 0 - 39,9 | 40 |
| 40 - 99,9 | 70 |
| 100 - 199,9 | 60 |
| 200 - 399,9 | 21 |
| 400 καί ἄνω | 9 |
| Σύνολον | 200 |

α) Νά ὑπολογισθοῦν ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος, ἡ διάμεσος καί τά τεταρτημόρια
β) Πῶς μετρᾶται ἡ ἀσυμμετρία κατανομῆς τινός; Διατί δέν χρησιμοποιεῖται πρός τοῦτο ἡ τρίτη κεντρική ροπή τῆς κατανομῆς καί μόνον;

33. Ἡ κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ χώρας τινός ὡς πρός τό ἐτήσιον κατά κεφαλήν εἰσόδημα (εἰς \$) ἔχει ὡς κατωτέρω:

| Εἰσόδημα | Ἀναλογία Πληθυσμοῦ (%) |
|---|---|
| 0 - 99 | 8 |
| 100 - 199 | 28 |
| 200 - 499 | 44 |
| 500 - 999 | 16 |
| 1.000 καί ἄνω | 4 |
| Σύνολον | 100 |

α) Δοθέντος ὅτι τό μέσον ἐτήσιον κατά κεφαλήν εἰσόδημα εἶναι $\mu$=\$380 ὑπολογίσατε τήν τυπικήν ἀπόκλισιν $\sigma$ καί τόν συντελεστήν μεταβλητικότητος
β) Ὑπολογίσατε τήν διάμεσον, τά τεταρτημόρια καί τόν τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν ὑπολογιζόμενον συντελεστήν ἀσυμμετρίας.

34. Τά ἡμερομίσθια τῶν 200 ἐργατῶν βιομηχανίας τινός κυμαίνονται μεταξύ 100-300 δρχ. Εἶναι γνωστόν ὅτι ἐκ τῶν ἐν λόγῳ ἐργατῶν:

| | | |
|---|---|---|
| 10 | ἐργάται λαμβάνουν | 120 δρχ. ἤ ὀλιγωτέρας |
| 80 | " " | 140 " " " |
| 130 | " " | 160 " " " |
| 30 | " " | περισσοτέρας τῶν 200 δρχ. καί |
| 10 | " " | " " 240 δρχ. |

Ὑπολογίσατε: α) τόν Μέσον Ἀριθμητικόν $\mu$ τῶν ἡμερομισθίων τῶν ἐργατῶν τῆς ἐν λόγῳ βιομηχανίας καί
β) τήν διάμεσον αὐτῶν Μ.

35. Ὁ Μέσος Ἀριθμητικός τῶν βαρῶν τῶν χοιριδίων ἑνός χοιροστασίου εἶναι $\mu$=65 κιλά καί ἡ διακύμανσις αὐτῶν $\sigma^2$ = 50. Ἐάν τό βάρος ἑκάστου χοιριδίου αὐξηθῇ κατά 20% ποῖον θά εἶναι τό νέον μέσον βάρος τῶν ἐν λόγῳ χοιριδίων καί ποία ἡ νέα διακύμανσις;

36. Μία μεταβλητή Χ λαμβάνει τάς τιμάς $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=8$ $x_4=7$, $x_5=11$.

Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν αὐτῆς ἀπό τοῦ ἀριθμοῦ λ εἶναι

$$A=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\lambda)^2$$

Πῶς πρέπει νά ἐπιλεγῆ ἡ τιμή τοῦ λ ἵνα τό ἀνωτέρω ἄθροισμα A λάβη τήν ἐλαχίστην δυνατήν τιμήν:

37. Οἱ φοιτηταί τῆς Α.Β.Σ.Π. κατανέμονται ὡς πρός τήν ἡλικίαν των ὡς ἑξῆς:

| Τάξεις ἡλικιῶν | $f_i$ |
|---|---|
| 19 - 21 | 1.500 |
| 21 - 23 | 1.900 |
| 23 - 25 | 800 |
| 25 - 27 | 400 |
| 27 - 29 | 250 |
| 29 - 31 | 140 |
| 31 καί ἄνω | 10 |
| Σύνολον | 5.000 |

'Εκ τῶν ἀρχείων τῆς Σχολῆς προκύπτει ὅτι αἱ ἡλικίαι τῶν 10 φοιτητῶν τῆς τελευταίας τάξεως εἶναι:

33 40 41 38 38 32 33 35 34 36

'Υπολογίσατε: α) τόν Μέσον 'Αριθμητικόν τῆς ἀνωτέρα κατανομῆς

β) τήν τυπικήν ἀπόκλισιν καί

γ) τήν διάμεσον, τό πρῶτον καί τρίτον τεταρτημόριον.

38. 'Η κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ χώρας τινός ὡς πρός τό ἐτήσιον κατά κεφαλήν εἰσόδημα (εἰς \$) ἔχει ὡς κατωτέρω:

| Εἰσόδημα | 'Αναλογία Πληθυσμοῦ (%) |
|---|---|
| 0 - 100 | 8 |
| 100 - 200 | 28 |
| 200 - 400 | 44 |
| 400 - 1.000 | 16 |
| 1.000 καί ἄνω | 4 |
| Σύνολον | 100 |

Δοθέντος ὅτι τό μέσον ἐτήσιον κατά κεφαλήν εἰσόδημα εἶναι μ=\$370 ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν ἀσυμμετρίας ($\beta_1$) καί τόν συντελεστήν κυρτότητος ($\beta_2$) τοῦ Pearson.

39. Τό κατά κεφαλήν μηνιαῖον εἰσόδημα (Μέσος Ἀριθμητικός) τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως εἶναι 8.000 δρχ. οὐδείς δέ ἐκ τῶν κατοίκων ἔχει εἰσόδημα ὀλιγώτερον τῶν 1.000 δρχ. Ἐάν εἶναι γνωστόν ὅτι 20% τῶν ἐν λόγῳ κατοίκων ἔχουν μηνιαῖον εἰσόδημα 3.000 δρχ. ἤ ὀλιγωτέρας, τό 60% 5.000 δρχ. ἤ ὀλιγωτέρας καί μόνον τό 10% ἔχουν μηνιαῖον εἰσόδημα μεγαλύτερον τῶν 15.000 δρχ., ὑπολογίσατε τήν τυπικήν ἀπόκλισιν καί τόν συντελεστήν μεταβλητικότητος τῆς κατανομῆς τῶν εἰσοδημάτων.

40. Τόν μῆνα Νοέμβριον συνέβησαν εἰς τήν περιοχήν Ἀθηνῶν 90 συνολικῶς τροχαῖα ἀτυχήματα. Αἱ ἡμέραι τοῦ ἐν λόγῳ μηνός κατανέμονται ὡς πρός τόν ἀριθμόν X τῶν συμβάντων καθ' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἀτυχημάτων ὡς ἑξῆς:

| Ἀτυχήματα (X) | Ἡμέραι (f) |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 4 |
| 2 | 5 |
| 3 | 9 |
| 4 | 7 |
| 5 καί ἄνω | 3 |
| | 30 |

Ὑπολογίσατε: α) τό 1ον καί 3ον τεταρτημόριον τῆς ὡς ἄνω κατανομῆς καί
β) τήν διακύμανσιν αὐτῆς.

41. Ἡ κατανομή ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τινα μεταβλητήν X ἔχει μέσον (ἀριθμητικόν) $\mu=30$, τρίτην ροπήν (περί τήν ἀρχήν) $\nu_3=31.320$ καί τρίτην κεντρικήν (περί τόν μέσον) ροπήν $\mu_3=$ 1.080.

Ὑπολογίσατε: α) τόν συντελεστήν μεταβλητικότητος καί
β) τόν συντελεστήν ἀσυμμετρίας $\beta_1$ τῆς ἐν λόγῳ κατανομῆς

42. Ἡ κατανομή ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τινα μεταβλητήν X ἔχει μέσον (ἀριθμητικόν) $\mu=40$, συντελεστήν μεταβλητικότητος CV=25% καί συντελεστήν ἀσυμμετρίας $\beta_1=4$:

Ὑπολογίσατε: Τήν πρώτην, δευτέραν καί τρίτην ροπήν (περί τήν ἀρχήν) τῆς ἐν λόγῳ κατανομῆς

43. 'Εάν ὁ συντελεστής ἀσυμμετρίας κατανομῆς τινός εἶναι μηδέν (ἤτοι $\beta_1=0$), ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος CV=20%, ἡ διάμεσος M=200 καί τό τρίτον τεταρτημόριον $Q_3=280$,

'Υπολογίσατε: α) τήν διακύμανσιν τῆς κατανομῆς
β) τό πρῶτον τεταρτημόριον $Q_1$ καί
γ) τήν τρίτην ροπήν (περί τήν ἀρχήν) $\nu_3$ τῆς ἐν λόγῳ κατανομῆς.

44. 'Η τρίτη κεντρική ροπή κατανομῆς τινός εἶναι μηδέν (ἤτοι $\mu_3=0$). Δοθέντος ἀκόμη ὅτι ἡ δευτέρα ροπή (περί τήν ἀρχήν) τῆς ἐν λόγῳ κατανομῆς εἶναι $\nu_2=2.900$, ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος αὐτῆς CV=40% καί τό πρῶτον τεταρτημόριον $Q_1=20$,

'Υπολογίσατε: α) τήν διάμεσον M
β) τό τρίτον τεταρτημόριον $Q_3$ καί
γ) τό ἡμιενδοτεταρτημοριακόν εὖρος τῆς ἐν λόγῳ κατανομῆς.

45. 'Εκ τῶν ἀκαθαρίστων μηνιαίων ἀποδοχῶν ἑκάστου τῶν ὑπαλλήλων μιᾶς ἐπιχειρήσεως γίνονται διάφοροι κρατήσεις ἀνερχόμεναι συνολικῶς εἰς ποσοστόν 10%. Πέραν αὐτῶν ἐξ ἑκάστου ὑπαλλήλου κρατοῦνται μηνιαίως 200 δρχ. ἔναντι χορηγουμένου κατά τήν ἐργασίαν γεύματος. 'Εάν ἡ πρώτη καί δευτέρα ροπή (περί τήν ἀρχήν) τῆς κατανομῆς τῶν ἀκαθαρίστων ἀποδοχῶν εἶναι $\nu_1=4.000$ καί $\nu_2=16.160.000$,

'Υπολογίσατε: α) τόν μέσον (ἀριθμητικόν) τῶν καθαρῶν ἀποδοχῶν καί
β) τόν συντελεστήν μεταβλητικότητος τῆς κατανομῆς τῶν καθαρῶν ἀποδοχῶν τῶν ἐν λόγῳ ὑπαλλήλων.

46. 'Υποθέσατε ὅτι ἡ κατανομή τῶν 'Ελληνικῶν νοικοκυριῶν ὡς πρός τό ἐτήσιον εἰσόδημα αὐτῶν ἐκπεφρασμένον εἰς δολλάρια ἔχει τυπικήν ἀπόκλισιν σ=500, συντελεστήν μεταβλητικότητος CV=10% καί τρίτην κεντρικήν (περί τόν μέσον) ροπήν $\mu_3 = 500.000.000$.

'Υπολογίσατε: α) τόν Μέσον 'Αριθμητικόν
β) τήν διακύμανσιν καί
γ) τόν συντελεστήν ἀσυμμετρίας $\beta_1$ τῆς αὐτῆς ὡς ἄνω κατανομῆς, ὅταν τό ἐτήσιον εἰσόδημα τῶν νοικοκυριῶν ἐκφράζεται εἰς δραχμάς καί οὐχί εἰς δολλάρια (1$=30 Δρχ.).

47. Ἡ ποσοστιαία κατανομή τῶν νοικοκυριῶν πόλεως τινός ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν ἐργαζομένων μελῶν των εἶναι:

| Ἐργαζόμενα Μέλη | Νοικοκυριά (%) |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 50 |
| 2 | 20 |
| 3 | 15 |
| 4 καί ἄνω | 13 |
| Σύνολον | 100 |

Νά ὑπολογισθῆ ἡ διακύμανσις τῆς κατανομῆς γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀριθμητικός μέσος εἶναι 2πλάσιος τῆς διαμέσου αὐτῆς.

48. Ἕνας καθηγητής ηὔξησε τούς βαθμούς ἑκάστου φοιτητοῦ κατά δύο μονάδας.

α) Μετεβλήθη ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας καί πόσον;
β) Μετεβλήθη ἡ διακύμανσις τῆς βαθμολογίας καί πόσον;
γ) Μετεβλήθη ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος καί πῶς;

49. Οἱ μισθοί τῶν Δημοσίων Ὑπαλλήλων ηὐξήθησαν κατά 20%.

α) Μετεβλήθη ὁ μέσος μισθός καί κατά πόσον;
β) Μετεβλήθη ἡ διακύμανσις τῶν μισθῶν καί κατά πόσον;
γ) Μετεβλήθη ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος καί κατά πόσον;

50. Τά νοικοκυριά πόλεως τινός ἀποτελοῦνται κατά μέσον ὅρον ἐκ τεσσάρων ἀτόμων (ἀριθμητικός μέσος). Κατά τήν κατάταξιν αὐτῶν ὡς πρός τό μέγεθος τῶν μελῶν των ἀπωλέσθησαν, ὡς ἐμφαίνεται κατωτέρω, αἱ συχνότητες τῆς 2ας καί 4ης τάξεως.

| Ἀριθμός Ἀτόμων | Ποσοστόν Νοικοκυριῶν (%) |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 2 | - |
| 3 | 18 |
| 4 | - |
| 5 | 17 |
| 6 | 12 |
| 7 | 6 |
| Σύνολον | 100 |

α) Νά ὑπολογισθοῦν ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος, ὁ συντελεστής ἀσυμμετρίας ($\beta_1$) καί ὁ συντελεστής κυρτότητος ($\beta_2$).

β) Διατί πρός μέτρησιν τῆς κυρτότητος κατανομῆς τινός δέν χρησιμοποιεῖται ἡ 4η κεντρική ροπή μόνον ἀλλά ὁ συντελεστής $\beta_2$;

51. Ἐκ τῆς ἐρεύνης 300 ἀτόμων ἀνηκόντων εἰς τό ἐργατικόν δυναμικόν εὑρέθη ὅτι ἡ μέση διάρκεια ἀνεργίας αὐτῶν κατά τό ἔτος 1972 (ἀριθμητικός μέσος) ἦτο μ=6 ἡμέραι. Κατά τήν κατάταξιν τῶν ἐν λόγῳ ἀτόμων εἰς κατανομήν συχνοτήτων ἀπωλέσθησαν, ὡς ἐμφαίνεται κατωτέρω, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τήν 2αν καί 4ην τάξιν συχνότητες.

| Ἡμέραι Ἀνεργίας | Ἀριθμός Ἀτόμων |
|---|---|
| 0 - 2 | 120 |
| 3 - 7 | - |
| 8 - 12 | 69 |
| 13 - 27 | - |
| 28 - 52 | 6 |
| Σύνολον | 300 |

α) Νά ὑπολογισθοῦν ὁ συντελεστής μεταβλητικότητος, ἡ διάμεσος καί τά τεταρτημόρια.

β) Ἐπαρκεῖ ἡ διακύμανσις ἤ ἡ τυπική ἀπόκλισις καί μόνον κατανομῆς τινός πρός μελέτην τῆς διασπορᾶς; Τίνι τρόπῳ μελετᾶται καλύτερα ἡ διασπορά τῆς κατανομῆς;

52. Ὁ πληθυσμός χώρας τινός κατοικεῖ εἰς πόλεις καί χωρία κατά τά ἐμφαινόμενα εἰς τόν κατωτέρω πίνακα ποσοστά.

| Εἰς πόλεις μέ ἀριθμόν κατοίκων | Ποσοστά κατοίκων (%) |
|---|---|
| 10.000 καί ἄνω | 50 |
| 2.000 - 9.999 | 10 |
| κάτω τῶν 2.000 | 40 |
| | 100 |

Τό κατά κεφαλήν εἰσόδημα εἰς ὁλόκληρον τήν χώραν εἶναι \$ 1.100 ἐτησίως. Τό ἀντίστοιχον κατά κεφαλήν εἰσόδημα εἰς πόλεις 2.000 κατοίκων καί ἄνω \$1.500 καί τό τοιοῦτον εἰς πόλεις κάτω τῶν 10.000 κατοίκων \$600. Αἱ διακυμάνσεις τῶν εἰσοδημάτων εἰς τάς ἀνωτέρω τρεῖς κατηγορίας πόλεων εἶναι ἀντιστοίχως $\sigma_1^2$=640.000, $\sigma_2^2$=360.000 καί $\sigma_3^2$=250.000.

α) Εἰς ποίαν κατηγορίαν πόλεων παρουσιάζεται ἡ μεγίστη σχετική διασπορά εἰσοδημάτων καί εἰς ποίαν ἡ ἐλαχίστη;

β) Ἐπαρκεῖ ἡ διακύμανσις ἤ ἡ τυπική ἀπόκλισις καί μόνον κατανομῆς τινός πρός μελέτην τῆς διασπορᾶς; Τίνι τρόπῳ μελετᾶται καλύτερα ἡ διασπορά τῆς κατανομῆς καί διατί;

53. Ὁ κατωτέρω πίναξ ἐμφαίνει τήν σύνθεσιν τοῦ ἐργατικοῦ προσωπικοῦ Βιομηχανίας τινός ἐξ ἀπόψεως φύλλου καί εἰδικότητος.

| | Ἄνδρες | Γυναῖκες |
|---|---|---|
| Εἰδικευμένοι | 20% | 10% |
| Ἀνειδίκευτοι | 20% | 50% |

Τό μέσον ἡμερομίσθιον (ἀριθμητικός μέσος) ὁλοκλήρουτοῦ ἐργατικοῦ προσωπικοῦ εἶναι 153,60 δρχ., τῶν ἀνδρῶν 201 δρχ., τοῦ εἰδικευμένου προσωπικοῦ 232 δμχ. καί τῶν ἀνειδικεύτων γυναικῶν 108 δρχ.

Νά ὑπολογισθοῦν τά ἡμερομίσθια:

(i) τῶν εἰδικευμένων ἀνδρῶν
(ii) ὅλων τῶν ἀνειδικεύτων
(iii) ὅλων τῶν γυναικῶν.

54. Ἡ κατανομή τῶν ἐργατῶν μιᾶς βιομηχανίας ὡς πρός τό ἡμερομίσθιον αὐτῶν ἔχει συντελεστήν ἀσυμμετρίας $\beta_1=1,3$ καίσυντελεστήν κυρτότητος $\beta_2=2,5$. Ὑποθέσατε ὅτι τό ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου αὐξάνεται κατά 10% καί ὑπολογίσατε:

α) τήν νέαν τιμήν τοῦ συντελεστοῦ $\beta_1$
β) τήν νέαν τιμήν τοῦ συντελστοῦ $\beta_2$.

55. Ἡ κατανομή τῶν φοιτητῶν τῆς Α.Β.Σ.Π. ὡς πρός τάς ὥρας τῆς κατ᾽οἶκον ἑβδομαδιαίας μελέτης αὐτῶν ἔχει μέσον $\mu=20$, διακύμανσιν $\sigma^2=64$ καί συντελεστήν ἀσυμμετρίας $\beta_1=0,7$. Ὑποθέσατε ὅτι ἕκαστος φοιτητής αὐξάνει τόν χρόνον τῆς ἑβδομαδιαίας μελέτης του κατά 2 ὥρας καί ὑπολογίσατε

α) τήν νέαν τιμήν τοῦ συντελεστοῦ μεταβλητικότητος
β) τήν νέαν τιμήν τοῦ συντελεστσῦ $\beta_1$.

56. Ὑποθέσατε ὅτι ἡ κατανομή τῶν νοικοκυριῶν τῆς πόλεως τῶν Ἀθηνῶν ὡς πρός τάς μηνιαίας δαπάνας αὐτῶν ἔχει διακύμανσιν $\sigma^2=810.000$ καί συντελεστήν μεταβλητικότητος CV=15%. Ὑπολογίσατε:

α) τάς μέσας <u>ἐτησίας</u> δαπάνας (μέσος ἀριθμητικός) τῶν ἐν λόγῳ νοικοκυριῶν καί
β) τόν συντελεστήν μεταβλητικότητος καί τήν διακύμανσιν τῆς κατανομῆς τῶν νοικοκυριῶν τῆς πόλεως τῶν Ἀθηνῶν ὡς πρός τάς <u>ἐτησίας</u> αὐτῶν δαπάνας.

57. Ἡ μέση διάρκεια ζωῆς τῶν λαμπτήτων ἑνός ἐργοστασίου εἶναι $\mu$=160 ὧρες καί ἡ διακύμανσις αὐτῶν $\sigma^2$=100. Ἐφηρμόσθη μία νέα μέθοδος παραγωγῆς λαμπτήρων ἡ ὁποία αὐξάνει τήν διάρκειαν ζωῆς ἑκάστου κατά 10 ὧρες. Ποῖος θά εἶναι ὁ νέος μέσος ὅρος ζωῆς; Ἡ νέα διακύμανσις καί ὁ νέος συντελεστής μεταβλητικότητος αὐτῶν;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4

58. Τά κατωτέρω ἀριθμητικά ζεύγη (x,y) ἀποτελοῦν τήν βαθμολογίαν τήν ὁποίαν ἐπέτυχε (κατά μέσον ὅρον) ἕκαστον ἐξ 100 σπουδαστῶν εἰς τάς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις (μεταβλητή X) καί εἰς τάς ἐξετάσεις τοῦ Α΄ ἔτους (μεταβλητή Y).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (9,8) | (8,6) | (10,8) | (8,8) | (7,7) |
| (6,7) | (9,7) | (8,6) | (10,1) | (9,8) |
| (8,6) | (5,5) | (6,6) | (9,9) | (6,6) |
| (10,9) | (7,6) | (5,4) | (6,5) | (8,7) |
| (5,4) | (10,9) | (7,7) | (7,9) | (7,5) |
| (7,7) | (5,7) | (9,5) | (8,7) | (10,9) |
| (9,9) | (7,6) | (8,8) | (9,9) | (8,8) |
| (6,8) | (8,8) | (7,5) | (10,10) | (5,6) |
| (8,9) | (9,6) | (9,6) | (6,6) | (9,7) |
| (7,8) | (7,9) | (6,4) | (8,7) | (8,9) |
| (5,4) | (7.3) | (6,5) | (9,10) | (5,5) |
| (10,10) | (10,6) | (9,7) | (5,6) | (9,9) |
| (6,7) | (5,4) | (8,8) | (8,8) | (7,6) |
| (9,1) | (8,10) | (7,7) | (6,3) | (8,5) |
| (7,5) | (9,9) | (6,5) | (7,6) | (6,9) |
| (8,4) | (6,6) | (8,7) | (9,7) | (7,7) |
| (6,6) | (5,2) | (7,6) | (7,8) | (8,6) |
| (10,8) | (7,7) | (9,8) | (8,8) | (9,8) |
| (8,5) | (10,10) | (8,9) | (8,7) | (6,5) |
| (9,3) | (8,7) | (8,7) | (9,9) | (7,8) |

α) Παρουσιάσατε τά ὡς ἄνω δεδομένα εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου

β) Ὑπολογίσατε τάς ἀντιστοίχους (ὡς πρός X καί ὡς πρός Y) περιθωριακάς κατανομάς

γ) Ὑπολογίσατε τάς σχετικάς συχνότητας $f(Y/x)$ εἰς ἑκάστην τῶν ἀντιστοίχων δεσμευμένων κατανομῶν καί σχολιάσατε τά εὑρήματα

δ) Ὑπολογίσατε τούς δεσμευμένους μέσους $E(Y/x)$ καί τάς δεσμευμένας διακυμάνσεις $V(Y/x)$ διά $x=5,6,7,8,9,10$ καί σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα (αἱ μεταβληταί εἶναι ἀνεξάρτητοι ἤ στοχαστικῶς συσχετισμέναι καί πῶς;)

ε) Ποῖον ποσοστόν σπουδαστῶν ὑπερέβη εἰς ἀμφοτέρας τάς ἐξετάσεις τήν βαθμολογίαν 7 (δείξατε τόν συστηματικόν τρόπον ὑπολογισμοῦ των)

στ) Ποῖον ποσοστόν μαθητῶν ἐβελτιώθη καί ποῖον ἐχειροτέρευσε εἰς τό Α΄ ἔτος ἐν σχέσει πρός τάς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις;

ζ) Ὑπολογίσατε τόν μέσον τῶν διακυμάνσεων $V(Y/x)$ καί τήν διακύμανσιν τῶν μέσων $E(Y/x)$ - ὅπου $x=5,6,\ldots,10$ - ἤτοι τάς ποσότητας $E[V(Y/x)]$ καί $V[E(Y/x)]$ καί συγκρίνατε τό ἄθροισμα αὐτῶν πρός τήν συνολικήν διακύμανσιν τῶν τιμῶν τῆς Y ἤτοι τήν ποσότητα $V(Y)$.

59. Τά κατωτέρω ἀριθμητικά ζεύγη (x,y) περιλαμβάνουν τό χρησιμοποιηθέν εἰς ἕκαστον ἐξ 80 - ἴσων καί καθ᾽ὅλα ὁμοίων - ἀγροτεμαχίων λίπασμα (μεταβλητή X) εἰς κιλά καί τήν παραχθεῖσαν ποσότητα τομάτας (μεταβλητή Y) ἐπίσης εἰς κιλά.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (5,1127) | (6,1237) | (2,980) | (5,1081) | (2,842) |
| (0,684) | (1,837) | (6,692) | (3,1123) | (3,1087) |
| (4,981) | (3,1004) | (1,781) | (6,1204) | (4,1201) |
| (2,1010) | (5,1102) | (4,936) | (0,607) | (1,657) |
| (1,704) | (1,902) | (3,790) | (5,904) | (4,992) |
| (7,998) | (6,1084) | (0,564) | (1,1104) | (3,1024) |
| (3,993) | (0,591) | (5,1018) | (7,1182) | (0,464) |
| (6,1182) | (4,1003) | (3,928) | (4,804) | (5,1161) |
| (4,908) | (2,926) | (4,642) | (5,960) | (2,758) |
| (7,1250) | (7,1194) | (2,801) | (1,662) | (4,1094) |
| (3,1049) | (3,982) | (7,1145) | (3,864) | (7,1208) |
| (7,904) | (5,1112) | (0,552) | (2,701) | (3,902) |
| (2,857) | (0,738) | (5,792) | (2,1187) | (1,744) |
| (5,1091) | (3,956) | (1,634) | (4,862) | (4,1119) |
| (4,1042) | (7,1090) | (4,1017) | (1,582) | (6,1148) |
| (0,790) | (5,1208) | (2,904) | (6,1042) | (4,957) |

α) Καταρτίσατε καί σχολιάσατε δεόντως τό ἀντίστοιχον στικτόν διάγραμμα

β) Τί εἴδους σχέσεις ὑφίσταται μεταξύ τῶν μεταβλητῶν X καί Y;

γ) Παρουσιάσατε τά ὡς ἄνω δεδομένα εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ὅπου αἱ τιμαί τῆς X λαμβάνονται ὡς ἔχουν, ἐνῶ αἱ τιμαί τῆς Y ὁμαδοποιοῦνται εἰς τάξεις τῶν 100 κιλῶν

δ) Ὑπολογίσατε τάς σχετικάς συχνότητας τῶν ἀντιστοίχων περιθωριακῶν κατανομῶν

ε) Ὑπολογίσατε τάς σχετικάς συχνότητας $f(Y/x)$ εἰς ἑκάστην τῶν ἀντιστοίχων δεσμευμένων κατανομῶν καί σχολιάσατε τά εὑρήματα

στ) Ὑπολογίσατε τούς δεσμευμένους μέσους $E(Y/x)$ καί τάς δεσμευμένας διακυμάνσεις $V(Y/x)$ διά $x=0,1,\ldots,7$ καί σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα

ζ) Ὑπολογίσατε τόν μέσον τῶν διακυμάνσεων $V(Y/x)$ καί τήν διακύμανσιν τῶν μέσων $E(Y/x)$ - ὅπου $x=0,1,\ldots,7$ - ἤτοι τάς ποσότητας $E[V(Y/x)]$ καί $V[E(Y/x)]$ καί συγκρίνατε τό ἄθροισμα αὐτῶν πρός τήν συνολικήν διακύμανσιν τῶν τιμῶν τῆς Y ἤτοι τήν ποσότητα $V(Y)$.

60. Δίδεται κατωτέρω ἡ (διμεταβλητή) κατανομή 200 σπουδαστῶν ὡς πρός τόν βαθμόν αὐτῶν εἰς τά Μαθηματικά (X) καί τήν Στατιστικήν (Y).

| X \ Y | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 40 | 15 | 3 | 1 | - | 1 | 60 |
| 6 | 10 | 40 | 15 | 3 | 2 | | 70 |
| 7 | 5 | 10 | 15 | 4 | 1 | - | 35 |
| 8 | 1 | 3 | 5 | 8 | 2 | 1 | 20 |
| 9 | 1 | - | 2 | 3 | 3 | 1 | 10 |
| 10 | - | - | 1 | - | 3 | 1 | 5 |
| | 57 | 68 | 41 | 19 | 11 | 4 | 200 |

α) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δεσμευμέναι παράμετροι $E(Y/x)$, $V(Y/x)$ καί $Cv(Y/x)$ διά $x=5,6,\ldots,10$ καί νά σχολιασθοῦν τά σχετικά ἀποτελέσματα

β) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δεσμευμέναι ροπαί $E(Y^3/x)$ καί $E(Y^4/x)$, ἐν συνεχείᾳ δέ οἱ συντελεσταί ἀσυμμετρίας $(\beta_1)$ καί κυρτότητος $(\beta_2)$ τῶν ἀντιστοίχων δεσμευμένων κατανομῶν.

61. Ένας γεωπόνος επειραματίσθη (υπό τάς αυτάς λοιπάς συνθήκας) εις 70 ίσα και όμοια αγροτεμάχια προκειμένου νά διαπιστώση τήν σχέσιν τής χρησιμοποιουμένης ποσότητος X λιπάσματός τινος και τού ύψους τής παραγωγής σιτηρών Y. Τά αποτελέσματα τού πειράματος συνοψίζονται εις τόν κατωτέρω πίνακα.

| X (λίπασμα) | Y (παραγωγή) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0-10 | 20-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
| 5 | 1 | 3 | 1 | - | - | - | - |
| 6 | - | 1 | 3 | 2 | 4 | - | - |
| 7 | - | - | - | 7 | 8 | 5 | - |
| 8 | - | - | - | - | 8 | 15 | 2 |
| 9 | - | - | - | - | 1 | 2 | 7 |

α) Νά υπολογισθή - εις σχετικάς συχνότητας - ή περιθωριακή κατανομή ώς πρός Y και εξ αυτής ό μέσος και ή διακύμανσις τής εν λόγω μεταβλητής $E(Y)$ και $V(Y)$.

β) Νά υπολογισθούν αι σχετικαί συχνότητες $f(Y/x)$ - $x=5$, 6,7,8,9 - τών αντιστοίχων δεσμευμένων κατανομών και διά συγκρίσεως αυτών μεταξύ των και πρός τήν περιθωριακήν κατανομήν ώς πρός Y νά εξαχθούν σχετικά συμπεράσματα αναφορικώς πρός τήν επίδρασιν τής X επί τής Y.

γ) Νά υπολογισμούν αι δεσμευμέναι παράμετροι $E(Y/x)$ και $V(Y/x)$ - όπου $x=5,6,7,8,9$, - και νά σχολιασθούν τά σχετικά αποτελέσματα

δ) Επαληθεύσατε τήν σχέσιν $E\left[V(Y/x)\right]+V\left[E(Y/x)\right]=V(Y)$.

62. Κατωτέρω δίδεται ή κατανομή 300 ενηλίκων ανδρών ώς πρός τό ύψος X και τό βάρος Y αυτών (X εις εκατοστά, Y εις κιλά).

| X (ύψος) | Y (βάρος) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 45-55 | 55-65 | 65-75 | 75-85 | 85-95 | 95-105 |
| 145-155 | 2 | 7 | 5 | 2 | - | - |
| 155-165 | 1 | 8 | 15 | 12 | 7 | 2 |
| 165-175 | - | 4 | 22 | 63 | 28 | 11 |
| 175-185 | - | 2 | 7 | 19 | 34 | 22 |
| 185-195 | - | - | 1 | 5 | 13 | 8 |

α) Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ ἀνωτέρω πίνακος προκύπτει ἡ ὕπαρξις σχέσεως μεταξύ βάρους (Y) καί ἀναστήματος (X); Διατί;

β) Ὑπολογίσατε τάς σχετικάς περιθωριακάς κατανομάς ὡς πρός X καί ὡς πρός Y καί ἐν συνεχείᾳ τούς μέσους E(X), E(Y) καί τάς διακυμάνσεις αὐτῶν V(X), V(Y)

γ) Ὑπολογίσατε τάς σχετικάς συχνότητας $f(Y/x_i)$ τῶν ἀντιστοίχων δεσμευμένων κατανομῶν, τούς δεσμευμένους μέσους $E(Y/x_i)$ καί διακυμάνσεις $V(Y/x_i)$ αὐτῶν, ἐν συνεχείᾳ δέ σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα

δ) Ἐκ τῶν περιθωριακῶν κατανομῶν τοῦ ὡς ἄνω πίνακος ὑπολογίσατε ὅλας τάς συχνότητας αὐτοῦ $f_{ij}$ ὡς αὗται θά διεμορφοῦντο ἐάν αἱ μεταβληταί ὕψος καί βάρος ἦσαν στατιστικῶς ἀνεξάρτητοι.

63. Ὁ κατωτέρω πίναξ παρουσιάζει τήν κατανομήν 200 νοικοκυριῶν ὡς πρός τό μέγεθος (ἀριθμόν μελῶν) αὐτῶν X καί ὡς πρός τό μέγεθος (ἀριθμόν δωματίων) τῆς κατοικίας των Y (τά ἐλλείποντα στοιχεῖα ἀπωλέσθησαν ἐκ λάθους τοῦ ὑπαλλήλου).

| X \ X | 1 | 2 | 3 | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|
| 1 | . | . | 5 | 50 |
| 2 | . | 30 | . | 80 |
| 3 | 5 | . | . | 70 |
| Σύνολον | . | . | . | 200 |

Δοθέντος ὅτι τό μέσον μέγεθος (μέσος ἀριθμητικός) τῆς κατοικίας τῶν μ ο ν ο μ ε λ ῶ ν νοικοκυριῶν εἶναι 1,4 δωμ., τῶν δ ι μ ε λ ῶ ν 2,2 δωμ. καί τῶν τ ρ ι μ ε λ ῶ ν 2,5 δωμ., ὑπολογίσατε:

α) Πόσα κατά μέσον ὅρον ἄτομα κατοικοῦν εἰς ἑκάστην κατοικίαν τοῦ ἑ ν ό ς δωματίου καί

β) Τό ποσοστόν τῶν νοικοκυριῶν τά ὁποῖα κατοικοῦν εἰς οἰκίας τ ρ ι ῶ ν δωματίων.

64. Αἱ καπνοβιομηχανίαι A καί B συσκευάζουν τά σιγαρέτα των εἰς πακέττα τῶν 20. Ἡ κατανομή 40 πακέττων τῆς A καί 60 τῆς B ὡς πρός τόν ἀριθμόν τῶν σκάρτων σιγαρέτων ἑκάστου πα-

κέττου δίδεται είς τόν κατωτέρω πίνακα (τά έλλείποντα στοιχεῖα άπωλέσθησαν έκ λάθους τοῦ ύπαλλήλου).

| Βιομηχανίαι | Σκάρτα | | | | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| A | 7 | . | 11 | . | 40 |
| B | . | 14 | . | 22 | 60 |
| (A+B) | . | . | . | . | 100 |

Δοθέντος ὅτι είς τήν Α βιομηχανία ἕκαστον πακέττον περιέχει - κατά μέσον ὅρον - 1,5 σκάρτα σιγαρέτα ένῶ είς τήν Β ὁ άντίστοιχος μέσος ὅρος εἶναι 2 ύπολογίσατε:

α) τόν μέσον άριθμητικόν καί

β) τήν διακύμανσιν τῆς συνολικῆς κατανομῆς, ἤτοι τῆς κατανομῆς τῶν 100 πακέττων (Α+Β).

65. Είς τόν κατωτέρω πίνακα δίδεται ἡ κατανομή 30 νεονύμφων ζευγῶν ὡς πρός τήν ἡλικίαν τοῦ γαμβροῦ (Χ) καί τήν ἡλικίαν τῆς νύμφης Υ.

| X \ Y | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 2 | 1 | - | - |
| 25 | - | 5 | 2 | - |
| 30 | - | 3 | 6 | 1 |
| 35 | - | - | 5 | 4 |
| 40 | - | - | - | 1 |

Ύπολογίσατε τήν μέσην διαφοράν ἡλικίας τῶν ὡς ἄνω νεονύμφων χρησιμοποιοῦντες πρός τοῦτο α) τόν μέσον άριθμητικόν καί β) τήν διάμεσον.

66. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αί μεταβληταί Χ καί Υ εἶναι άνεξάρτητοι μεταξύ των, ύπολογίσατε τούς δεσμευμένους μέσους ὅρους $E(Y/x_i)$ ὡς καί τάς δεσμευμένας διακυμάνσεις $V(Y/x_i)$ διά $x_i=1,2,3$ έκ τῶν δεδομένων τοῦ κατωτέρω πίνακος διπλῆς εἰσόδου:

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 | $f_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | . | 12 | . | . | 40 |
| 2 | . | . | 20 | . | . |
| 3 | . | . | . | 24 | 60 |
| $f_{.j}$ | . | . | . | . | 200 |

67. Δοθέντος ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y τοῦ κατωτέρω πίνακος διπλῆς εἰσόδου εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των συμπληρώσατε τά ἐλλείποντα στοιχεῖα τοῦ πίνακος (συχνότητος) τά ὁποῖα ἀπωλέσθησαν κατά τήν πινακοποίησιν:

| X \ Y | 10 | 20 | 30 | 40 | $f_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | . | . | 4 | . | . |
| 10 | . | 15 | . | . | . |
| 15 | 3 | . | . | . | . |
| $f_{.j}$ | 10 | 30 | . | . | 100 |

68. Δεδομένου ὅτι αἱ μεταβληταί X καί Y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των συμπληρώσατε τά ἐλλείποντα στοιχεῖα τοῦ κατωτέρω πίνακος διπλῆς εἰσόδου καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε κατά τόν ἁπλούστερον δυνατόν τρόπον τούς δεσμευμένους μέσους ὅρους $E(Y/x_i)$ καί τάς ἀντιστοίχους δεσμευμένας διακυμάνσεις $V(Y/x_i)$ διά $x_i=1,2$.

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | $f_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | . | . | 10 | 20 |
| 2 | . | 9 | . | . |
| $f_{.j}$ | . | . | . | 50 |

69. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδεται ἡ κατανομή 200 νεονύμφων ζευγῶν ὡς πρός τό χρῶμα τῆς κόμης τοῦ γαμβροῦ (Γ) καί τῆς νύμφης (Ν).

| Γ \ Ν | Ξανθό | Καστανό | Μαῦρο | |
|---|---|---|---|---|
| Ξανθό | 5 | 20 | 15 | 40 |
| Καστανό | 33 | 94 | 13 | 140 |
| Μαῦρο | 12 | 6 | 2 | 20 |
| | 50 | 120 | 30 | 200 |

α) Ὑφίστανται διαφοραί προτιμήσεων (ὡς πρός τό χρῶμα τῆς κόμης) μεταξύ τῶν διαφόρου χρώματος ἀνδρῶν καί γυναικῶν κατά τήν ἐπιλογήν τοῦ συντρόφου των;

β) Ποῖαι θά ἦσαν αἱ συχνότητες $f_{ij}$ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ἐάν αἱ δύο μεταβληταί ἦσαν ἀνεξάρτητοι, ἐάν δηλαδή δέν ὑπῆρχον προτιμήσεις κατά τήν ἐπιλογήν τοῦ συντρόφου;

70. Ὁ κατωτέρω πίναξ (τριπλῆς εἰσόδου) ἐμφανίζει τήν (τριμεταβλητήν) κατανομήν τῶν 100 μονάδων ἑνός πληθυσμοῦ ὡς πρός τάς μεταβλητάς $X_1$, $X_2$ καί $X_3$.

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0 | 5 | 2 | - | 2 | - |
| 0 | 1 | 3 | 6 | 2 | 2 | - |
| 0 | 2 | - | 2 | 5 | - | 2 |
| 1 | 0 | - | 3 | 4 | 2 | - |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | - | - | 3 | 4 | 2 |
| 2 | 0 | - | 3 | 5 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | - | 2 | 4 | 4 | 3 |
| 2 | 2 | - | 1 | 2 | 5 | 4 |

α) Ὑπολογίσατε τάς μονομεταβλητάς <u>ὑποκατανομάς</u> ὡς πρός $X_1$, ὡς πρός $X_2$ καί ὡς πρός $X_3$ ὡς καί τούς μέσους αὐτῶν $E(X_1)$, $E(X_2)$ καί $E(X_3)$

β) Ὑπολογίσατε τάς διμεταβλητάς <u>ὑποκατανομάς</u> ὡς πρός $(X_1,X_2)$, $(X_1,X_3)$ καί $(X_2,X_3)$

γ) Ὑπολογίσατε τούς δεσμευμένους μέσους $E(X_3/x_1,x_2)$ δι' ὅλα τά δυνατά ζεύγη $(x_1,x_2)$

δ) Μελετήσατε τήν ἐπίδρασιν τῆς $X_2$ ἐπί τῆς $X_3$ διά διαφόρους τιμάς τῆς $X_1$ καί σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5**

71. Κατά τήν μελέτην τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν X καί Y παρετηρήθησαν τά κάτωθι ζεύγη τιμῶν (δεδομένα):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Y: | 1 | 3 | 7 | 12 | 17 |

α) Παραστήσατε γραφικῶς τά δεδομένα ταῦτα (στικτόν διάγραμμα

β) Χαράξατε δι' ἐλευθέρας χειρός τήν ἀρίστην εὐθεῖαν $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$

γ) Εὕρετε γραφικῶς τάς τιμάς τοῦ $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$

δ) Ποία ἡ σημασία τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως $\hat{\beta}$

ε) Προσαρμόσατε διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων τήν εὐθεῖαν $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$

στ) 'Υπολογίσατε τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα $\sigma^2$

ζ) 'Υπολογίσατε τόν δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$

72. "Ενας δασολόγος ἐμέτρησε εἰς 20 πεῦκα (κατηγορίας τινός) τήν "διάμετρον" αὐτῶν X (εἰς ὕψος 1,5 μ. ἀπό τῆς βάσεώς των) καί τόν ὄγκον αὐτῶν Y προκειμένου νά εὕρῃ τήν σχέσιν μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν μεταβλητῶν. Τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων ἔχουν ὡς ἑξῆς (X εἰς ἴντσας, Y εἰς δεκάδας κυβικῶν ποδῶν):

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X: | 36 | 28 | 28 | 41 | 19 | 32 | 22 | 38 | 25 | 17 | 31 | 20 |
| Y: | 192 | 113 | 88 | 294 | 28 | 123 | 51 | 252 | 56 | 16 | 141 | 32 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X: | 25 | 19 | 39 | 33 | 17 | 37 | 23 | 39 |
| Y: | 86 | 21 | 231 | 187 | 22 | 205 | 57 | 265 |

α) Νά παρασταθοῦν γραφικῶς τά δεδομένα

β) Νά χαραχθῇ ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ καί νά εὑρεθοῦν (γραφικῶς) τά $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$

γ) Νά προσαρμοσθοῦν (τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων)

(i) 'Η εὐθεία παλινδρόμησις $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$

(ii) 'Η παραβολή 2ου βαθμοῦ $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x+\hat{\gamma}x^2$

δ) Νά ὑπολογισθοῦν τά μέσα τετραγωνικά σφάλματα περί τάς ἀνωτέρω γραμμάς παλινδρομήσεως ε) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀντίστοιχοι δεῖκται προσδιορισμοῦ καί νά συγκριθοῦν τά ἀποτελέσματα

στ) Νά ὑπολογισθῇ (τῇ βοηθείᾳ ἀμφοτέρων τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων) ὁ ὄγκος πεύκου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 35 ἴντσες καί ἄλλου 50 ἰντσῶν καί νά συγκριθοῦν τά ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα.

<u>Χρήσιμα δεδομένα</u>

$\Sigma x=569$ $\Sigma x^2=17.437$ $\Sigma x^3=567.749$ $\Sigma x^4=19.361.917$

$\Sigma y=2.460$ $\Sigma xy=83.777$ $\Sigma x^2y=2.949.733$ $\Sigma y^2=462.278$

73. Χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως

α) Προσαρμόσατε (i) μία καμπύλην $y=\alpha x^{\beta}$ ἤ λογy=λογα+βλογx (διπλῆ λογαριθμική παλινδρόμησις) καί (ii) μία καμπύλην $y=(\alpha+\beta x)^2$ ἤ $\sqrt{y}=\alpha+\beta x$

β) Νά ὑπολογισθοῦν τά μέσα τετραγωνικά σφάλματα περί τάς ἀνωτέρω γραμμάς παλινδρομήσεως

γ) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀντίστοιχοι δεῖκται προσδιορισμοῦ καί νά συγκριθοῦν τά ἀποτελέσματα

δ) Νά ὑπολογισθῇ (τῇ βοηθείᾳ ἀμφοτέρων τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων) ὁ ὄγκος πεύκου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 35 ἴντσες καί ἄλλου 50 ἰντσῶν καί νά συγκριθοῦν τά ἀποτελέσματα

ε) Συγκρίνατε τά ἀποτελέσματα τῶν παραγράφων β, γ καί δ μέ τά ἀντίστοιχα τοιαῦτα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

<u>Χρήσιμα δεδομένα</u>

$\Sigma x=569$ $\Sigma y=2.460$ $\Sigma(\text{λογ}x)(\text{λογ}y)=56,61989$

$\Sigma(\text{λογ}x)=28,72801$ $\Sigma(\text{λογ}y)=38,72738$ $\Sigma x^2=17.437$

$\Sigma(\text{λογ}x)^2=41,58114$ $\Sigma(\text{λογ}y)^2=78,17751$

$\Sigma\sqrt{y}=204,98$ $\Sigma\sqrt{y}=6.494,91$

74. Ἕνας γεωπόνος ἐπειραματίσθη (ὑπό τάς αὐτάς λοιπάς συνθήκας) εἰς 15 ἴσα καί ὅμοια ἀγροτεμάχια προκειμένου νά διαπιστώση τήν σχέσιν μεταξύ τῆς περιεκτικότητος τοῦ χρησιμοποιουμένου λιπάσματος εἰς ἄζωτον X (ἐκπεφρασμένης εἰς ποσοστόν ἐπί τοῖς %) καί τῆς παραγομένης ποσότητος καπνοῦ ποικιλίας τινός Y (εἰς κιλά). Τά ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος συνοψίζονται κατωτέρω.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X: | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| Y: | 867 | 889 | 914 | 1.094 | 1.101 | 1.092 | 1.206 | 1.180 | 1.157 |
| X: | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | | | |
| Y: | 1.281 | 1.238 | 1.224 | 1.235 | 1.237 | 1.219 | | | |

α) Νά παρασταθοῦν γραφικῶς τά δεδομένα (στικτόν διάγραμμα)

β) Νά προσαρμοσθοῦν (τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων)

(i) Ἡ εὐθεία παλινδρόμησις $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$

(ii) Ἡ παραβολή 2ου βαθμοῦ $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x+\hat{\gamma}x^2$

(iii) Τό πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x+\hat{\gamma}x^2+\hat{\delta}x^3$

γ) Νά ὑπολογισθοῦν τά μέσα τετραγωνικά σφάλματα περί τάς ἀνωτέρω γραμμάς παλινδρομήσεως

δ) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀντίστοιχοι δεῖκται προσδιορισμοῦ καί νά συγκριθοῦν τά ἀποτελέσματα

ε) Νά ἐκτιμηθῇ διά τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἡ ἀναμενομένη παραγωγή καπνῶν διά X=7 καί νά συγκριθοῦν τά ἀποτελέσματα

στ) Σχολιάσατε δι' ὀλίγων τά εὑρήματα τῶν παραγράφων (γ) καί (δ)

Χρήσιμα δεδομένα

$\Sigma x=42$ $\Sigma x^2=162$ $\Sigma x^3=672$ $\Sigma x^4=2.934$ $\Sigma x^5=13.272$

$\Sigma y=16.934$ $\Sigma xy=50.630$ $\Sigma x^2y=197.198$ $\Sigma x^3y=822.884$ $\Sigma x^6=61.542$

$\Sigma y^2=19.377.528$

75. Συμφώνως πρός τήν θερμοδυναμικήν θεωρίαν μεταξύ τῆς πιέσεως P δοθείσης μάζης ἀερίου καί τοῦ ὄγκου αὐτοῦ V ἰσχύει ἡ σχέσις $PV^{\gamma}=C$ ὅπου γ καί C σταθεραί. Εἰς σχετικόν πείραμα παρετηρήθησαν αἱ κάτωθι τιμαί τῶν V (εἰς κυβικάς ἴντσας) καί P (εἰς λίβρας κατά τετραγωνικήν ἴντσαν) ἀντιστοίχως:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V: | 54,3 | 61,8 | 72,4 | 88,7 | 118,6 | 194,0 |
| P: | 61,2 | 49,5 | 37,6 | 28,4 | 19,2 | 10,1 |

α) Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν γ καί C τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων

β) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί τῆς P (τῇ βοηθείᾳ τῆς εὑρεθείσης ἐξισώσεως) αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ὡς ἄνω τιμάς τῆς V καί νά συγκριθοῦν μέ τάς ἐκ παρατηρήσεως τοιαύτας

γ) Νά ὑπολογισθῇ τό μ.τ.σ. περί τήν γραμμήν παλινδρομήσεως ὡς καί ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$

δ) Βάσει τῶν ἀνωτέρω εὑρημάτων εἰς τάς παραγράφους (β) καί (γ) σχολιάσατε τό πόσον καλῶς ἡ θεωρία ἀνταποκρίνεται εἰς τήν παρατήρησιν

ε) Ὑπολογίσατε τήν ἀναμενομένην πίεσιν ἐάν V=100 ἴντσες.

Χρήσιμα δεδομένα
$\Sigma(\lambda o\gamma V)=11,6953$ $\Sigma(\lambda o\gamma P)=8,7975$ $\Sigma(\lambda o\gamma P)(\lambda o\gamma V)=16,8543$
$\Sigma(\lambda o\gamma V)^2=23,0059$ $\Sigma(\lambda o\gamma P)^2=13,3128$

76. Κατωτέρω δίδεται ὁ ἀριθμός Y τῶν ἐμφανιζομένων μικροβίων ἀνά μονάδα ὄγκου εἰς μίαν καλλιέργειαν αἵματος μετά ἀπό X ὥρας.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Y: | 32 | 47 | 65 | 92 | 132 | 190 | 275 |

α) Νά παρασταθοῦν γραφικῶς τά δεδομένα ἐπί ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος θέτοντες τό Y ἐπί λογαριθμικῆς κλίμακος καί τό X ἐπί ἀριθμητικῆς τοιαύτης
β) Προσαρμόσατε τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων μία καμπύλην $y=\alpha\beta^x$. Ἀναλύσατε διατί ἡ ἐξίσωσις αὔτη πρέπει νά ἀνταποκρίνεται εἰς τήν πραγματικότητα
γ) Συγκρίνατε τάς τιμάς $\hat{y}$ αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως μέ τάς πραγματικάς τοιαύτας
δ) Νά ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμός $\hat{y}$ τῶν μικροβίων κατά τήν 7 ὥραν
ε) Νά ὑπολογισθῇ τό μ.τ.σ. περί τήν ἀνωτέρω γραμμήν παλινδρομήσεως
στ) Νά ὑπολογισθῇ ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ $R^2$
ζ) Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τῆς παραγράφου (β) ἐκ τῆς γραφικῆς της ἀπεικονίσεως ἐπί τοῦ ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος ἄνευ χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

77. Ἕνας οἰκονομολόγος προκειμένου νά μελετήσῃ τήν ἐπίδρασιν τῆς τιμῆς X ἑνός προϊόντος ἐπί τῆς ζητήσεως (ζητουμένης ποσότητος) αὐτοῦ, προσήρμοσε πρός τά δεδομένα μιᾶς 10ετίας $(x_i, y_i)$, $i=1,2,\ldots,10$ - ὅπου $x_i$ αἱ τιμαί τοῦ προϊόντος κατ' ἔτος (εἰς δρχ.) καί $y_i$ αἱ ἀγορασθεῖσαι ἀντιστοίχως ποσότητες (εἰς τόννους) - μία καμπύλην παλινδρομήσεως $y=\frac{1}{\alpha+\beta x}$. Χρησιμοποιοῦντες τά κατωτέρω δεδομένα προσδιορίσατε:
α) τήν συγκεκριμένην καμπύλην παλινδρομήσεως $\hat{y}=\frac{1}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}x}$
β) τό μ.τ.σ. περί αὐτήν $\sigma^2$ καί τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$
γ) τήν ποσότητα τοῦ ἐν λόγῳ προϊόντος ἡ ὁποία θά ζητηθῇ ἐάν ἡ τιμή αὐτοῦ γίνῃ 60 δρχ.

Δεδομένα: $\sum_{i=1}^{10} x_i=400$, $\sum_i x_i^2=20.000$ $\Sigma\frac{1}{y_i}=0,5$ $\sum_i\frac{x_i}{y_i}=60$ $\Sigma\frac{1}{y_i^2}=0,45$.

78. Κατά τήν μελέτην ἀλληλεξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν X καί Y παρετηρήθησαν τά κάτωθι ζεύγη τιμῶν

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X: | 8 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| Y: | 53 | 22 | 16 | 12 | 10 |

α) Προσαρμόσατε διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων
(i) τήν εὐθεῖαν $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ καί
(ii) τήν ὑπερβολήν $\frac{1}{\hat{y}}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\frac{1}{x}$

β) Ὑπολογίσατε τό μ.τ.σ. περί ἑκατέραν ἐκ τῶν ὡς ἄνω γραμμῶν ὡς καί τούς ἀντιστοίχους δείκτας προσδιορισμοῦ $R^2$

γ) Ὑπολογίσατε τάς οἱονεί (ἀναμενομένας) τιμάς τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῆς X χρησιμοποιοῦντες τάς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις καί συγκρίνατε τά σχετικά ἀποτελέσματα πρός τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῆς Y.

δ) Ἐπί τῇ βάσει τῶν εὑρημάτων εἰς τάς παραγράφους (β) καί (γ) ποίαν μορφήν ἐξισώσεως θά ἐπιλέγατε;

79. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 61 ὑπολογίσατε:

α) τόν στοιχειώδη δείκτην προσδιορισμοῦ $\eta^2$ καί σχολιάσατε τήν σημασίαν αὐτοῦ

β) Προσαρμόσατε εἰς τά ἐν λόγῳ δεδομένα τήν εὐθεῖαν $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ καί ὑπολογίσατε τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί αὐτήν ὡς καί τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσδιορισμοῦ $\rho^2$ καί σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα

γ) Ποῖα συμπεράσματα συνάγονται ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν $\rho^2$ καί $\eta^2$;

δ) Ὑπολογίσατε τήν ἀναμενομένην - κατά μέσον ὅρον - παραγωγήν σίτου ἐάν ἡ ποσότης τοῦ χρησιμοποιηθησομένου λιπάσματος εἶναι X=10 κιλά.

80. Ἐπαναλάβατε τά ἐρωτήματα α, β καί γ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τῶν ἀσκήσεων 60 καί 62.

81. Εἰς τάς ἀσκήσεις 60, 61 καί 62 ὑπολογίσατε τάς δύο συνιστώσας τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως τῆς Y καί σχολιάσατε τήν σημασίαν ἑκάστου (χρησιμοποιήσατε πρός τοῦτο τά ἀποτελέσματα τῶν ἀσκήσεων 79 καί 80).

82. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 71 ὑπολογίσατε:

α) τάς ἁπλᾶς ροπάς $\nu_{10}, \nu_{01}, \nu_{11}, \nu_{20}, \nu_{02}, \nu_{30}, \nu_{21}, \nu_{12}, \nu_{03}$ καί

β) τάς κεντρικάς ροπάς $\mu_{10}, \mu_{01}, \mu_{11}, \mu_{20}, \mu_{02}, \mu_{30}, \mu_{21}, \mu_{12}, \mu_{03}$ σχολιάζοντες παραλλήλως τήν σημασίαν καί τήν χρησιμότητα ἑκάστης.

83. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 72 ὑπολογίσατε:

α) τήν συνδιακύμανσιν τῶν μεταβλητῶν (X,Y)

β) τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως ρ καί ἐν συνεχείᾳ (τῇ βοηθείᾳ τοῦ ρ)

γ) τούς συντελεστάς τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως $\hat{y} = \hat{a}+\hat{\beta}x$ (χρησιμοποιήσατε τάς σχέσεις $\hat{\beta}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, $\hat{a}=\mu_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$)

84. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 75 ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως ρ καί συγκρίνατε τό ἐξαγόμενον πρός τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $R^2$ - τόν δείκτην δηλαδή μή γραμμικῆς συσχετίσεως - ὁ ὁποῖος ὑπελογίσθη εἰς τήν ὡς ἄνω ἄσκησιν. Ποῖα τά συμπεράσματα ἐκ τῆς ἐν λόγῳ συγκρίσεως;

85. Ἐπαναλάβατε τήν ἄσκησιν 84 χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα καί τούς ἀντιστοίχους δείκτας μή γραμμικοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἀσκήσεων 76, 77 καί 78.

86. Ὑπολογίσατε τήν συνδιακύμανσιν Cov(X,Y) καί τόν συντελεστήν συσχετίσεως ρ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 61. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ ρ κλπ. ὑπολογίσατε ἐν συνεχείᾳ τάς παραμέτρους $\hat{a}$ καί $\hat{\beta}$ τῆς ἀντιστοίχου εὐθείας παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{a}+\hat{\beta}x$ ὡς καί τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί αὐτήν. Συγκρίνατε τά εὑρήματά σας πρός τά ἀποτελέσματα τῆς ἀσκήσεως 79.

87. Ἐπαναλάβατε τήν ἄσκησιν 86 χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τῶν ἀσκήσεων 60, 62 καί 65 καί συγκρίνατε τά ἀποτελέσματα πρός ἐκεῖνα τῆς ἀσκήσεως 80.

88. Κατωτέρω δίδεται ἡ ἡλικία X καί ἡ πίεσις τοῦ αἵματος Y δώδεκα γυναικῶν:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X: | 56 | 42 | 72 | 36 | 63 | 47 | 55 | 49 | 38 | 42 | 68 | 60 |
| Y: | 15 | 12 | 16 | 12 | 15 | 13 | 15 | 14 | 12 | 14 | 15 | 16 |

α) Νά μελετηθῆ γραφικῶς ἡ σχέσις μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν χαρακτηριστικῶν
β) Νά χαραχθῆ (ἐλευθέρως) ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ καί νά ὑπολογισθοῦν γραφικῶς αἱ παράμετροι $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$
γ) Νά εὑρεθῆ ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἡ πίεσις γυναικός ἡλικίας 40 ἐτῶν καί ἄλλης ἡλικίας 80 ἐτῶν
δ) Νά ὑπολογισθῆ ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ
ε) Νά εὑρεθῆ ἡ εὐθεία παλινδρόμησις $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ δι' ὑπολογισμοῦ τῶν παραμέτρων $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$ (ἐκ τῶν ρ καί τῶν $\sigma_x$, $\sigma_y$) ὡς καί τό μ.τ.σ. περί αὐτήν $\sigma^2$
στ) Νά ὑπολογισθῆ ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἡ πίεσις τῶν γυναικῶν ἡλικίας 40 καί 80 ἐτῶν ἀντιστοίχως

89. Ἕνας γεωπόνος προκειμένου νά μελετήση τήν ἐπίδρασιν ἑνός λιπάσματος ἐπί τῆς παραγωγῆς σίτου ἐπειραματίσθη ἐπί 10 - ὁμοίων καθ'ὅλα - ἀγρῶν καί ἐν συνεχείᾳ προσήρμοσε πρός τά δεδομένα $(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,10$ - ὅπου $x_i$ συμβολίζει τήν ποσότητα (εἰς κιλά) τοῦ χρησιμοποιηθέντος εἰς ἕκαστον ἀγρόν λιπάσματος καί $y_i$ τήν παραχθεῖσαν ἀντιστοίχως ποσότητα σίτου (εἰς τόννους) - τήν εὐθείαν παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$. Χρησιμοποιοῦντες τά κατωτέρω δεδομένα προσδιορίσατε:

α) τήν συγκεκριμένην εὐθείαν παλινδρομήσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$
β) τό μέσον τετραγωνικόν σφάλμα $\sigma^2$ περί αὐτήν καί
γ) ποία ἡ ἀναμενομένη παραγωγή σίτου (εἰς τόννους) ἐάν χρησιμοποιηθοῦν εἰς ἕνα ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἀγρῶν 20 κιλά λιπάσματος.

<u>Δεδομένα</u>
$\mu_x=10$ κιλά, $\mu_y=12$ τόννοι, $\sigma_x{}^2=64$, $\sigma_y{}^2=16$, $\rho_{xy}=0,8$.

90. Δίδεται κατωτέρω ἡ κατανομή δείγματος ἐκ 2.568 ἀστικῶν νοικοκυριῶν τῆς χώρας ὡς πρός τό μέγεθος αὐτῶν X (ἀριθμόν μελῶν) καί ὡς πρός τό μέγεθος τῆς κατεχομένης ὑπ'αὐτῶν κατοικίας Y (ἀριθμόν δωματίων)

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 61 | 94 | 111 | 83 | 49 | 22 | 10 | 8 |
| 2 | 47 | 164 | 221 | 202 | 141 | 77 | 35 | 24 |
| 3 | 19 | 96 | 166 | 163 | 110 | 69 | 23 | 17 |
| 4 | 8 | 39 | 88 | 98 | 62 | 30 | 17 | 7 |
| 5 | 2 | 16 | 18 | 43 | 29 | 12 | 6 | 8 |
| 6 | 1 | 2 | 12 | 14 | 12 | 4 | 2 | 4 |
| 7 | 0 | 0 | 2 | 6 | 8 | 2 | 2 | 2 |

α) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ σχετικαί συχνότητες εἰς ‰

β) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δεσμευμέναι σχετικαί συχνότητες εἰς ‰ διά τά διάφορα μεγέθη τῶν νοικοκυριῶν καί νά ἐξαχθοῦν σχετικά συμπεράσματα ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῶν

γ) Νά ὑπολογισθοῦν περιθωριακαί κατανομαί συχνοτήτων εἰς ‰
(i) ὡς πρός τό μέγεθος τῶν νοικοκυριῶν καί
(ii) ὡς πρός τό μέγεθος κατοικίας

δ) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ τυπικαί ἀποκλίσεις $\sigma_X$ καί $\sigma_Y$ ὡς καί οἱ συντελεσταί μεταβλητικότητος διά τά χαρακτηριστικά X καί Y

ε) Νά ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστής συσχετίσεως ρ

στ) Νά ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστής παλινδρομήσεως τῆς εὐθείας $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ ἐκ τῆς σχέσεως $\hat{\beta}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$. Ποία ἡ σημασία αὐτοῦ;

ζ) Νά ὑπολογισθῇ τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ περί τήν ὡς ἄνω εὐθεία παλινδρομήσεως. Σχολιάσατε δι᾽ ὀλίγων τήν σημασίαν τῶν ἀνωτέρω ἀποτελεσμάτων.

91. Δέκα τροχαῖα ἀτυχήματα (Α,Β,...) ἱεραρχούμενα ἐξ ἀπόψεως βαθμοῦ σοβαρότητος (τό ἐλαφρότερον βαθμολογούμενον διά τοῦ 1 καί τό σοβαρώτερον διά 10) καί αἱ ἀντίστοιχοι ταχύτητες τῶν αὐτοκινήτων παρατίθενται εἰς τόν κατωτέρω πίνακα.

| Ἀτυχήματα: | Α | Β | Γ | Δ | Ε | Ζ | Η | Θ | Ι | Κ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ταχύτης Αὐτοκινήτου (X): | 140 | 45 | 80 | 70 | 120 | 65 | 90 | 50 | 100 | 75 |
| Σοβαρότης Ἀτυχήματος (Y): | 10 | 1 | 5 | 4 | 9 | 2 | 6 | 3 | 8 | 7 |

Ὑφίσταται σχέσις μεταξύ ταχύτητος (X) καί βαθμοῦ σοβαρότητος (Y) τῶν ὡς ἄνω ἀτυχημάτων;

Ὑπολογίσατε: (i) τόν συντελεστήν Spearman ($\rho_S$) καί
(ii) τόν συντελεστήν Kendall (τ)

92. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδεται ὁ βαθμός σοβαρότητος τῶν ἀτυχημάτων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως (Y) ὡς καί αἱ ἐπικρατοῦσαι ἀντιστοίχως καιρικαί συνθῆκαι (X) χαρακτηριζόμεναι αἱ μέν καλλίτεραι διά τοῦ 1 αἱ δέ χειρότεραι διά τοῦ 5.

| Ἀτυχήματα | Α | Β | Γ | Δ | Ε | Ζ | Η | Θ | Ι | Κ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Συνθῆκαι (X): | 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 1 | 4 | 3 |
| Σοβαρότης (Y): | 10 | 1 | 5 | 4 | 9 | 2 | 6 | 3 | 8 | 7 |

Ὑφίσταται σχέσις μεταξύ καιρικῶν συνθηκῶν καί βαθμοῦ σοβαρότητος τροχαίων ἀτυχημάτων;

Ὑπολογίσατε (i) τόν συντελεστήν Spearman ($\rho_S$) καί
(ii) τόν συντελεστήν Kendall (τ).

93. Τό ἐργατικόν δυναμικόν μιᾶς χώρας κατανέμεται ἐξ ἀπόψεως φύλου καί θέσεως εἰς τό ἐπάγγελμα ὡς ἑξῆς:

| | Ἐργοδόται | Αὐτοαπασχολούμενοι | Μισθωτοί | Σύνολον |
|---|---|---|---|---|
| Ἄρρενες | 6 | 24 | 30 | 60 |
| Θήλεις | 2 | 6 | 32 | 40 |
| Σύνολον | 8 | 30 | 62 | 100 |

Ὑφίσταται σχέσις μεταξύ φύλου καί θέσεως εἰς τό ἐπάγγελμα: Ὑπολογίσατε τούς συντελεστάς $\varphi^2$, C καί φ καί σχολιάσατε τήν σημασίαν ἑκάστου.

94. Ἐκ τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 69 ὑπολογίσατε τούς συντελεστάς $x^2$, $\varphi^2$, C καί φ. Σχολιάσατε τήν σημασίαν ἑκάστου. Ὑφίσταται συνάφεια μεταξύ τῶν χρωμάτων τῆς κόμης τῶν συζύγων;

95. Οἱ κάτοικοι Ἀθηνῶν καί Θεσσαλονίκης (εἰς χιλιάδας) κατατάσσονται εἰς τούς κατωτέρω πίνακας ἐξ ἀπόψεως φύλου (Α, Θ) καί καπνίσματος (ΝΑΙ-ΟΧΙ).

ΑΘΗΝΑΙ

| | ΝΑΙ | ΟΧΙ |
|---|---|---|
| Α | 720 | 480 |
| Θ | 390 | 910 |

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

| | ΝΑΙ | ΟΧΙ |
|---|---|---|
| Α | 180 | 120 |
| Θ | 30 | 270 |

Εἰς ποίαν πόλιν ὑφίσταται ἐντονωτέρα σχέσις μεταξύ φύλου καί καπνίσματος; Ὑπολογίσατε τά κατάλληλα μέτρα συναφείας. Εἶναι κατάλληλον πρός τόν σκοπόν αὐτόν τό μέτρον $x^2$; Τί θά ἔδιδε ἡ σχετική σύγκρισις;

96. Εἰς τόν κάτωθι πίνακα διπλῆς εἰσόδου δίδεται ἡ κατανομή ὡς πρός τήν ἡλικίαν (Χ) τοῦ γαμβροῦ καί τήν ἡλικίαν (Υ) τῆς νύμφης 27 νυμφευθέντων ζευγῶν.

| Υ \ Χ | 22 | 27 | 32 | 37 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|
| 32 | - | - | 1 | 3 | 1 |
| 27 | - | 1 | 3 | 5 | - |
| 22 | 2 | 4 | 4 | - | - |
| 17 | 3 | - | - | - | - |

Ὑφίσταται συνάφεια μεταξύ τῶν ἡλικιῶν τῶν νυμφευομένων;

Ὑπολογίσατε τούς δείκτας $\rho_S$ (Spearman), $\tau$(Kendall), $\varphi^2$, C καί $\varphi'$ καί συγκρίνατε αὐτούς πρός τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως $\rho$.

97. Ἕνας κοινωνιολόγος ἠρεύνησε 100 οἰκογενείας ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει 3 τέκνα. Ἔστωσαν $x_i$ καί $y_i$, $i=1,2,\dots 100$ τά ἀγόρια καί τά κορίτσια ἑκάστης ἐκ τῶν ἐν λόγῳ οἰκογενειῶν. Χρησιμοποιοῦντες τά κατωτέρω δεδομένα ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν συσχετίσεως $\rho$ τῶν μεταβλητῶν X (ἀριθμός ἀγοριῶν) καί Y (ἀριθμός κοριτσιῶν).

Δεδομένα Μέσος ὅρος ἀγοριῶν κατά νοικοκυριό: $\mu_X=1,3$
Διακύμανσις τῶν $y_i$, $i=1,2,\dots 100$ (κοριτσιῶν) $\sigma_Y^2=4$

98. Μία βιομηχανία παράγει φυσίγγια καί τά συσκευάζει εἰς δεσμίδας τῶν 5. Ἠλέγχθησαν 10 δεσμίδες καί ἔστωσαν $x_i$ καί $y_i$, $i=1,2,\dots 10$ τά "σκάρτα" καί τά "καλά" φυσίγγια ἑκάστης ἐκ τῶν ἐν λόγῳ δεσμίδων. Ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν συσχετίσεως $\rho$ τῶν μεταβλητῶν X (σκάρτα) καί Y (καλά). Ἐάν τό θεωρεῖτε χρήσιμον δύνασθε νά χρησιμοποιήσετε τά ἀκόλουθα δεδομένα:
Μέσος ὅρος σκάρτων φυσιγγίων κατά δεσμίδα: $\mu_X=2$
Διακύμανσις τῶν σκάρτων φυσιγγίων ($x_i$, $i=1,2,\dots 10$) $\sigma_X^2=8$.

99. Δοθέντος ὅτι ἡ διακύμανσις τῆς μεταβλητῆς X εἶναι $V(X)=10$ ὑπολογίσατε τήν συνδιακύμανσιν καί τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Y=1-X$ καί $Z=2X+3$.

100. Δοθέντος ὅτι ὁ συντελεστής γραμμικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν X καί Y εἶναι $\rho=0,7$ ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Z=2-3X$ καί $W=Y+1$.

101. Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ κατωτέρω πίνακος διπλῆς εἰσόδου ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Z=2X$ καί $W=3Y$.

| X \ Y | 0 | 1 | $f_{i.}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 4 |
| 1 | 4 | 2 | 6 |
| $f_{.j}$ | 5 | 5 | 10 |

102. Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ κατωτέρω πίνακος διπλῆς εἰσόδου ὑπολογίσατε τήν συνδιακύμανσιν τῶν μεταβλητῶν $Z=2X-3$ καί $W=1-Y$.

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | $f_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 2 | 4 | 6 | 12 |
| $f_{.j}$ | 3 | 7 | 10 | 20 |

103. Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ κατωτέρω πίνακος διπλῆς εἰσόδου ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν γραμμικῆς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Z=X^2+1$ καί $W=1-Y^2$.

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 10 | 30 |
| 1 | 40 | 20 |

104. Ὁ κατωτέρω πίναξ δίδει τούς συντελεστάς συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $X_1, X_2, X_3, X_4$ λαμβανομένων ἀνά δύο.

| $\rho_{ij}$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 0,8 | 0,2 | -0,7 |
| $X_2$ | 0,8 | 1 | 0,4 | 0,9 |
| $X_3$ | 0,2 | 0,4 | 1 | -0,3 |
| $X_4$ | -0,7 | 0,9 | -0,3 | 1 |

.

Δίδονται ἀκόμη αἱ τυπικαί ἀποκλίσεις τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν $\sigma_1=8$, $\sigma_2=3$, $\sigma_3=10$, $\sigma_4=7$ καί ζητεῖται:

α) Ἡ διακύμανσις τῆς μεταβλητῆς $Y=2X_1-X_2+X_3+3X_4$

β) Ἡ συνδιακύμανσις τῶν μεταβλητῶν $Z=X_1+X_2+X_3$, $W=X_2-X_3-X_4$

γ) Ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν μεταβλητῶν $Z=2X_1-X_2$ καί $W=X_3-X_4$.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 7**

105. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδονται αἱ ποσότητες τοῦ λιπάσματος $X_2$ (εἰς κιλά) καί τοῦ ὕδατος $X_3$ (εἰς τόννους) αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιήθησαν κατά τήν καλλιέργειαν 10 ἴσων καί καθ᾽ὅλα ὁμοίων ἀγροτεμαχίων ὡς καί ἡ παραχθεῖσα ἐξ ἑκάστου ἀγροτεμαχίου ποσότης σίτου $X_1$ (εἰς τόννους).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$: | 6 | 9 | 10 | 13 | 5 | 7 | 8 | 10 | 14 | 18 |
| $X_2$: | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| $X_3$: | 1 | 4 | 3 | 6 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 |

α) Προσαρμόσατε διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων τό ἐπίπεδον παλινδρομήσεως $\hat{X}_1=\hat{\alpha}+\hat{\beta}_{12}x_2+\hat{\beta}_{13}x_3$. Ποία ἡ σημασία τῶν συντελεστῶν $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_{12}$, $\hat{\beta}_{13}$;

β) Ὑπολογίσατε τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν ἀντίστοιχον συντελεστήν πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2$ καί σχολιάσατε δι᾽ ὀλίγων τήν σημασίαν των

γ) Ὑπολογίσατε τάς ἀναμενομένας (οἱονεί) τιμάς τῆς $X_1$ αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς τῶν $(X_2,X_3)$ καί ἐν συνδυασμῷ πρός τάς ἐκ παρατηρήσεως τιμάς αὐτῆς (τῆς $X_1$) ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν πολλαπλῆς συσχετίσεως. Ποία ἡ σχέσις τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ πρός τόν δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$;

δ) Ὑπολογίσατε τήν ἀναμενομένην (οἱονεί) τιμήν τῆς $X_1$ διά $X_2=6$ καί $X_3=10$. Ὁμοίως διά $X_2=7$, $X_3=1$

ε) Ὑπολογίσατε τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$ καί $\rho_{13.2}$ δι᾽ἀπ᾽εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ σχετικοῦ ὁρισμοῦ των. Ποία ἡ σημασία καί ἡ χρησιμότης αὐτῶν;

στ) Ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{13.2}$ δι᾽ἐφαρμογῆς τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ αὐτοῦ ἤτοι εἰς διάφορα ἐπίπεδα τιμῶν τῆς $X_2$ ($X_2=1$, $X_2=2$, $X_2=3$, $X_2=4$ καί $X_2=5$). Συγκρίνατε τά ἀποτελέσματά σας πρός ἐκεῖνα τῆς προηγουμένης ἐρωτήσεως καί παραθέσατε σχετικά σχόλια.

106. Χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ὑπολογίσατε τούς μέσους $\mu_1,\mu_2,\mu_3$ καί τάς τυπικάς ἀποκλίσεις $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ τῶν ἐπί μέρους μεταβλητῶν ὡς καί τήν ὁρίζουσαν (τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν) συσχετίσεως P. Ἐν συνεχείᾳ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω εὑρημάτων ὑπολογίσατε:

α) τούς συντελεστάς τοῦ ἐπιπέδου παλινδρομήσεως $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_{12}$, $\hat{\beta}_{13}$

β) τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν δείκτην πολλαπλοῦ προσδιορισμοῦ $R^2$

γ) τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$ καί $\rho_{13.2}$

δ) Συγκρίνατε τά ἀποτελέσματά σας πρός ἐκεῖνα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καί παραθέσατε σχετικά σχόλια.

107. Ἐπαναλάβατε τά ἐρωτήματα (α-ε) τῆς ἀσκήσεως 105 ἐπί τῶν κατωτέρω δεδομένων ὅπου $X_1$ συμβολίζει τήν μέσην κατάνοικοκυριό ἐτησίαν κατανάλωσιν βουτύρου (εἰς κιλά), $X_2$ τήν τιμήν τοῦ βουτύρου (εἰς δρχ.) καί $X_3$ τήν τιμήν τῆς μαργαρίνης (ὑποκαταστάτου τοῦ βουτύρου) ἐπίσης εἰς δρχ. ὡς αὗται διεμορφώθησαν εἰς 5 διαδοχικά ἔτη.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$: | 30 | 27 | 26 | 22 | 15 |
| $X_2$: | 32 | 40 | 45 | 60 | 73 |
| $X_3$: | 20 | 22 | 23 | 27 | 28 |

108. Ἐπαναλάβατε τά ἐρωτήματα τῆς ἀσκήσεως 106 ἐπί τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως 107.

109. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδονται (εἰς ἑκατοστά τοῦ μέτρου) τό ἀνάστημα $X_1$, τό μῆκος τοῦ βραχίονος $X_2$ καί ἡ ὀσφυϊκή περίμετρος $X_3$ δέκα (10) ἐνηλίκων ἀνδρῶν.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$: | 177 | 162 | 158 | 184 | 178 | 173 | 169 | 174 | 165 | 170 |
| $X_2$: | 50 | 44 | 42 | 55 | 53 | 47 | 44 | 50 | 47 | 48 |
| $X_3$: | 94 | 87 | 89 | 94 | 86 | 88 | 87 | 91 | 82 | 82 |

α) Ὑπολογίσατε τούς συντελεστάς ὁλικῆς συσχετίσεως $\rho_{12}$, $\rho_{13}$ καί $\rho_{23}$

β) Ὑπολογίσατε τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$, $\rho_{13.2}$ καί $\rho_{23.1}$

γ) Ἐάν ἐπρόκειτο νά χρησιμοποιήσετε δύο μόνον ἐκ τῶν τριῶν ὡς ἄνω μετρήσεων διά τήν τυποποίησιν ἑτοίμων ἐνδυμάτων, ποίας μεταβλητάς θά ἐπιλέγατε καί διατί:

110. Εἰς τόν κατωτέρω πίνακα δίδονται τό βάρος $X_1$, τό ὕψος $X_2$ καί ἡ ἡλικία $X_3$ 10 μαθητῶν τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$: | 56 | 51 | 68 | 76 | 58 | 67 | 71 | 64 | 55 | 77 |
| $X_2$: | 130 | 105 | 143 | 152 | 125 | 155 | 147 | 143 | 128 | 138 |
| $X_3$: | 10 | 6 | 9 | 12 | 7 | 11 | 10 | 8 | 8 | 10 |

Ὑπολογίσατε:

α) τούς συντελεστάς τοῦ ἐπιπέδου παλινδρομήσεως ε.μ.τ.σ. $\hat{x}_1=\hat{\alpha}+\hat{\beta}_{12}x_2+\hat{\beta}_{13}x_3$. Ποία ἡ σημασία ἑκάστου ἐξ αὐτῶν;

β) τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$

γ) τό ἀναμενόμενον βάρος ἑνός μαθητοῦ ἡλικίας 9 ἐτῶν καί ἀναστήματος 140

δ) τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$ καί $\rho_{13.2}$

ε) τόν συντελεστήν πολλαπλῆς συσχετίσεως $R_{1.23}$ (δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ).

111. Χρησιμοποιοῦντες τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 70 ὑπολογίσατε

α) τούς συντελεστάς $\hat{a}$, $\hat{\beta}_{31}$ καί $\hat{\beta}_{32}$ τοῦ ἐπιπέδου παλινδρομήσεως $\hat{x}_3=\hat{a}+\hat{\beta}_{31}x_1+\hat{\beta}_{32}x_2$

β) τό ἀντίστοιχον μ.τ.σ. σ ὡς καί τόν σχετικόν δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$

γ) Πόσον ἔντονος εἶναι ἡ ἐπίδρασις τοῦ ζεύγους τῶν μεταβλητῶν $(X_1,X_2)$ εἰς τήν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς $X_3$; (Ὑπολογίσατε τόν συντελεστήν γραμμικῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ)

δ) Ὑπολογίσατε τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{31.2}$ καί $\rho_{32.1}$

ε) Σχολιάσατε δι' ὀλίγων τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα.

Σημείωσις: Εἰς τάς ἀνωτέρω ἐργασίας θά διευκολυνθῆτε σημαντικά ἐάν ὑπολογίσετε προηγουμένως τούς μέσους $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ καί τάς τυπικάς ἀποκλίσεις $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ τῶν ἐπί μέρους μεταβλητῶν ὡς ἐπίσης τούς συντελεστάς (ὁλικῆς) συσχετίσεως αὐτῶν λαμβανομένων ἀνά δύο, ἤτοι τήν μήτρα συσχετίσεως P.

112. Νά προσδιορισθῆ ἡ ἐπιφάνεια (ὑπερεπίπεδον) ε.μ.τ.σ.

$$\hat{x}_1=\hat{a}+\hat{\beta}_{12}x_2+\hat{\beta}_{13}x_3+\hat{\beta}_{14}x_4$$

ὅπου $X_1$ συμβολίζει τόν βαθμόν τῆς Στατιστικῆς εἰς τό Α' ἔτος σπουδῶν καί $X_2$, $X_3$, $X_4$ τούς βαθμούς τῶν Μαθηματικῶν, τῆς ἐκθέσεως καί τῆς Γεωγραφίας κατά τάς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις εἰς τήν Σχολήν Στατιστικῆς ἐπί τῇ βάσει τῶν κατωτέρω δεδομένων τά ὁποῖα ἀφοροῦν τούς σπουδαστάς.

Μέσοι: $\mu_1=6$ $\mu_2=5$ $\mu_3=7$ $\mu_4=8$

Τυπική Ἀπόκλισις: $\sigma_1=1{,}0$ $\sigma_2=1{,}3$ $\sigma_3=0{,}9$ $\sigma_4=1{,}2$

Συντελεστής Συσχετίσεως: $\rho_{12}=0{,}9$ $\rho_{13}=0{,}5$ $\rho_{14}=0{,}6$ $\rho_{23}=0{,}5$ $\rho_{24}=0{,}5$ $\rho_{34}=0{,}7$

Ὑπολογίσατε ἀκόμη:

α) τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσδιορισμοῦ $R^2$

β) Ποῖος ὁ ἀναμενόμενος βαθμός εἰς τήν Στατιστικήν δι' ἕνα σπουδαστήν ὁ ὁποῖος ἔλαβεν $X_2=8$, $X_3=4$ καί $X_4=5$;

γ) Τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.34}$, $\rho_{13.24}$, $\rho_{14.23}$ καί σχολιάσατε δι'ὀλίγων τήν σημασίαν ἑκάστου.

113. Ἐάν $X_1+X_2+X_3=10$ καί $\sigma_1^2=4$, $\sigma_2^2=9$ καί $\rho_{12}=0,5$ ὑπολογίσατε

α) τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$, $\rho_{13.2}$

β) τόν δείκτην πολλαπλῆς συσχετίσεως $R^2_{1.23}$

γ) τό μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23}$

114. Ἐάν $X_1+X_2+X_3=5$ καί $2X_1+3X_2+4X_3=20$ καί $\sigma_1^2=4$ ὑπολογίσατε

α) τούς συντελεστάς μερικῆς συσχετίσεως $\rho_{12.3}$, $\rho_{13.2}$

β) τόν συντελεστήν πολλαπλῆς συσχετίσεως $R^2_{1.23}$

γ) τό μ.τ.σ. $\sigma^2_{1.23}$.

115. Ἐάν $\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=\rho$ δείξατε ὅτι

α) $\rho_{12.3}=\rho_{13.2}=\dfrac{\rho}{1+\rho}$ καί

β) $R^2_{1.23}=\dfrac{2\rho^2}{(1+\rho)^2}$

116. Ὁμοίως ἐάν $\rho_{12.3}=0$ δείξατε ὅτι $\rho^2_{13.2}=\dfrac{\rho^2_{13}(1-\rho^2_{23})}{1-\rho^2_{12}}$

**ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 8**

117. Τά κατωτέρω δεδομένα ἀποτελοῦν τάς ἐτησίας εἰσπράξεις (εἰς ἑκατομμύρια δρχ.) μιᾶς γεωργικῆς βιομηχανίας διά τά ἔτη 1951-1973.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 14 | 19 | 28 | 39 | 45 | 48 | 23 | 36 | 45 | 48 | 20 |
| 18 | 17 | 22 | 31 | 38 | 53 | 63 | 80 | 55 | 73 | 66 | |

α) Ἀπεικονίσατε τά ὡς ἄνω δεδομένα δι'ἑνός ἀριθμητικοῦ χρονογράμματος

β) Προσδιορίσατε τούς 4ετεῖς καί 5ετεῖς κινητούς μέσους καί ἀπεικονίσατε αὐτούς ἐπί τοῦ προηγουμένου χρονογράμματος. Σχολιάσατε δι'ὀλίγων τήν σημασίαν αὐτῶν

γ) Χαράξατε δι'ἐλευθέρας χειρός τήν εὐθεῖαν τάσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ καί ὑπολογίσατε γραφικῶς τούς συντελεστάς $\hat{\alpha}$ καί $\hat{\beta}$. Ποία ἡ σημασία τοῦ συντελεστοῦ γραμμικῆς τάσεως $\hat{\beta}$;.

δ) Προσδιορίσατε γραφικῶς τάς ἀναμενομένας εἰσπράξεις τοῦ ἔτους 1975

ε) Προσαρμόσατε εἰς τά ὡς ἄνω δεδομένα τήν εὐθεῖαν τάσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί ὑπολογίσατε τό μ.τ.σ. περί αὐτήν $\sigma^2$, τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσαρμογῆς $R^2$ ὡς καί τάς ἀναμενομένας διά τό ἔτος 1975 εἰσπράξεις $\hat{y}_{1975}$

στ) Σχολιάσατε δι'ὀλίγων τά ὡς ἄνω ἀποτελέσματα

ζ) Προσαρμόσατε τήν εὐθεῖαν $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ διά τῆς μεθόδου
(i) τῶν μέσων σημείων καί
(ii) τῶν ἄκρων σημείων.
Συγκρίνατε τά ἀποτελέσματα πρός ἐκεῖνα τῶν παραγράφων (γ) καί (ε).

118. Τά κατωτέρω δεδομένα ἀποτελοῦν τόν πληθυσμόν μιᾶς νήσου (εἰς χιλιάδας κατοίκων) κατά τάς δεκαετίας 1850, 1860,..., 1960.

23 31 40 50 63 76 92 106 123 132 151 183

α) Παραστήσατε γραφικῶς τά ὡς ἄνω δεδομένα

β) Ὑπολογίσατε καί παραστήσατε γραφικῶς τούς κινητούς μέσους μήκους k=3.

γ) Προσαρμόσατε διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων
(i) τήν εὐθεία τάσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ καί
(ii) τήν παραβολή $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t+\hat{\gamma}t^2$

δ) Ὑπολογίσατε τά μ.τ.σ. καί τούς ἀντιστοίχους δείκτας προσαρμογῆς $R^2$ περί τάς ὡς ἄνω δύο γραμμάς καί συγκρίνατε τά σχετικά ἀποτελέσματα

ε) Ὑπολογίσατε τόν ἀναμενόμενον πληθυσμόν τῆς νήσου διά τάς δεκαετίας 1970 καί 1980 - δι'ἀμφοτέρων τῶν ὡς ἄνω γραμμῶν τάσεως - καί συγκρίνατε τά σχετικά ἀποτελέσματα.

119. Τά κατωτέρω δεδομένα ἀποτελοῦν τάς μηνιαίας πωλήσεις (εἰς ἑκατομ. δρχ.) ἑνός μεγάλου καταστήματος γενικοῦ ἐμπορίου κατά τά ἔτη 1960-1966.

| Ἔτη | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1960 | 25 | 37 | 24 | 31 | 28 | 26 | 24 | 32 | 30 | 25 | 20 | 34 |
| 61 | 29 | 42 | 27 | 35 | 32 | 30 | 28 | 37 | 34 | 29 | 22 | 38 |
| 62 | 32 | 46 | 30 | 39 | 35 | 33 | 31 | 41 | 37 | 33 | 25 | 42 |
| 63 | 36 | 52 | 34 | 44 | 40 | 38 | 35 | 46 | 42 | 37 | 28 | 48 |
| 64 | 42 | 61 | 40 | 52 | 47 | 44 | 41 | 54 | 50 | 43 | 32 | 57 |
| 65 | 45 | 65 | 43 | 55 | 50 | 48 | 42 | 58 | 52 | 47 | 36 | 60 |
| 66 | 49 | 67 | 47 | 61 | 55 | 52 | 47 | 64 | 58 | 52 | 39 | 63 |

α) Ἀπεικονίσατε τά δεδομένα δι' ἑνός ἀριθμητικοῦ χρονογράμματος

β) Ὑπολογίσατε καί ἀπεικονίσατε ἐπί ἑνός χρονογράμματος τούς κινητούς μέσους μήκους $k=12$ μηνῶν

γ) Χρησιμοποιοῦντες τά ἐτήσια δεδομένα ἤ καλλίτερον τάς ἀντιστοίχους μέσας μηνιαίας πωλήσεις προσαρμόσατε τήν εὐθείαν τάσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ καί ὑπολογίσατε δι' αὐτῆς τάς ἀναμενομένας (οἱονεί) μηνιαίας πωλήσεις (τιμάς τῆς μηνιαίας τάσεως)

δ) Ὑπολογίσατε συντελεστάς ἐποχικότητος διά τῶν τριῶν γνωστῶν μεθόδων. Σχολιάσατε τήν σημασίαν καί τήν πρακτικήν χρησιμότητα αὐτῶν

ε) Ἀπαλείψατε τήν ὑφισταμένην εἰς τά ὡς ἄνω δεδομένα ἐποχικότητα χρησιμοποιοῦντες τούς συντελεστάς ἐποχικότητος οἱ ὁποῖοι προέκυψαν διά τῆς μεθόδου τῶν κινητῶν μέσων

στ) Προβλέψατε τάς ἀναμενομένας κατά μῆνα διά τό ἔτος 1967 πωλήσεις χρησιμοποιοῦντες

(i) τάς ἀναμενομένας μηνιαίας τιμάς τῆς τάσεως καί τούς ἀντιστοίχους ἐποχικούς συντελεστάς καί

(ii) τάς ἀναμενομένας μέσας - κατ' ἔτος- μηνιαίας πωλήσεις καί τούς ἐποχικούς συντελεστάς οἱ ὁποῖοι ὑπελογίσθησαν διά τῆς μεθόδου τῶν ποσοστῶν ὡς πρός τόν μηνιαῖον μέσον.

120. Πρός τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 118 προσαρμόσατε τήν λογιστικήν καμπύλην καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε

α) τό μ.τ.σ. $\sigma^2$ καί τόν ἀντίστοιχον δείκτην προσαρμογῆς $R^2$ καί

β) τόν ἀναμενόμενον πληθυσμόν τῆς νήσου κατά τά ἔτη 1970 καί 1980

γ) Συγκρίνατε τά ἀποτελέσματά σας πρός ἐκεῖνα τῆς ἀσκήσεως 118 καί παραθέσατε σχετικά σχόλια.

121. Τά κατωτέρω δεδομένα ἀποτελοῦν τήν ἐτησίαν παραγωγήν βάμβακος (εἰς χιλιάδας τόννων) εἰς μίαν χώραν (εἰς τήν ὁποίαν τό ἐν λόγῳ προϊόν ἐκαλλιεργήθη διά πρώτην φοράν) κατά τά ἔτη 1951-1962.

8 14 22 34 37 51 63 76 98 120 132 148

Προσαρμόσατε (i) τήν λογιστικήν καμπύλην καί (ii) τήν γενικευμένην ἐκθετικήν καμπύλην $\hat{y}=\hat{k}+\hat{\alpha}\hat{\beta}^t$ καί ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίσατε:

α) τά άντίστοιχα πρός έκάστην καμπύλην μ.τ.σ. καί τούς συναφεῖς δείκτας προσαρμογῆς
β) τήν άναμενομένην παραγωγήν κατά τό ἔτος 1963 (δι'άμφοτέρων τῶν καμπύλων)
γ) Συγκρίνατε καί σχολιάσατε τά άποτελέσματα τῶν παραγράφων (α) καί (β).

122. Τό έτήσιον κατά κεφαλήν είσόδημα (είς $) χώρας τινός παρουσίασε κατά τά ἔτη 1960-1970 τήν κάτωθι έξέλιξιν:

200 220 240 262 286 315 346 377 415 451 490

α) Προσαρμόσατε διά τῆς μεθόδου τῶν έλαχίστων τετραγώνων
(i) τήν εύθεῖαν $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ καί
(ii) τήν έκθετικήν καμπύλην $\hat{y}=\hat{\alpha}\hat{\beta}^{t}$
β) Ύπολογίσατε τό άντίστοιχον πρός έκάστην γραμμήν μ.τ.σ. ώς καί τούς σχετικούς δείκτας προσαρμογῆς. Συγκρίνατε καί σχολιάσατε τά άποτελέσματά σας
γ) Ποῖον τό άναμενόμενον είσόδημα διά τό ἔτος 1972;

123. Τά κατωτέρω δεδομένα άποτελοῦν τήν έτησίαν κατανάλωσιν βουτύρου (είς τόννους) ώς αὔτη διεμορφώθη είς τινα πόλιν κατά τά ἔτη 1960-1966

200 140 100 80 67 58 50

α) Προσαρμόσατε διά τῆς μεθόδου τῶν έλαχίστων τετραγώνων
(i) τήν εύθεῖαν τάσεως $\hat{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$ καί
(ii) τήν ύπερβολήν $\frac{1}{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}t$

β) Ύπολογίσατε τό μ.τ.σ. καί τόν δείκτην προσαρμογῆς δι' έκάστην έκ τῶν ώς ἄνω γραμμῶν καί συγκρίνατε τά σχετικά άποτελέσματα.

124. Είς τόν κατωτέρω πίνακα δίδεται ὁ άριθμός (είς χιλιάδας) τῶν κιβωτίων φρούτων τά όποῖα είσήχθησαν κατά μῆνα είς ΗΠΑ τά ἔτη 1939 καί 1940

| Ἔτη | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1939 | 30 | 35 | 53 | 58 | 66 | 75 | 68 | 73 | 63 | 73 | 63 | 63 |
| 1940 | 60 | 67 | 85 | 91 | 104 | 105 | 103 | 104 | 88 | 93 | 88 | 92 |

α) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταί ἐποχικότητος διά τῆς μεθόδου τῶν ποσοστῶν ὡς πρός τόν μηνιαῖον μέσον

β) Τῇ βοηθείᾳ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν νά γίνη ἀπαλειφή τῆς ἐποχικότητος

**ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 9**

125. Δίδονται κατωτέρω αἱ μέσαι μηνιαῖαι τιμαί (εἰς δρχ.) τῶν γεωμήλων εἰς τάς ἀστικάς περιοχάς τῆς χώρας κατά τά ἔτη 1972 καί 1973.

| Ἔτη | Ι | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1972 | 4,38 | 4,50 | 4,06 | 4,32 | 4,34 | 3,27 | 3,30 | 3,50 | 4,10 | 4,10 | 4,18 | 4,20 |
| 1973 | 4,20 | 4,50 | 4,50 | 4,50 | 4,60 | 4,08 | 4,27 | 4,47 | 4,62 | 4,77 | 5,32 | 6,36 |

Νά ὑπολογισθοῦν:

α) Οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι μέ σταθεράν βάσιν τόν Ἰανουάριον 1972

β) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι κινητῆς βάσεως

γ) Δείξατε δι᾽ἑνός παραδείγματος τήν σχέσιν μεταξύ αὐτῶν

δ) Σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα.

126. Δίδονται κατωτέρω αἱ εἰσαχθεῖσαι ποσότητες κρέατος (εἰς χιλ. τόννων) καί ἡ ἀντίστοιχος ἀξία αὐτῶν (εἰς ἑκατομμύρια δρχ.) κατά τά ἔτη 1968-1972.

| | 1968 | 1964 | 1970 | 1971 | 1972 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ποσότης | 93 | 101 | 114 | 114 | 92 |
| Ἀξία | 1.733 | 1.876 | 2.483 | 2.576 | 2.474 |

Νά ὑπολογισθοῦν:

α) Οἱ ἀτομικοί δεῖκται ὄγκου σταθερᾶς (1968) καί κινητῆς βάσεως (Ποία ἡ μεταξύ αὐτῶν σχέσις;)

β) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀτομικοί δεῖκται ἀξίας σταθερᾶς (1968) καί κινητῆς βάσεως

γ) Ἐκ τῶν ὡς ἄνω δεικτῶν νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀτομικοί τιμάριθμοι σταθερᾶς (1968) καί κινητῆς βάσεως. Ποία ἰδιότης τῶν ἀτομικῶν δεικτῶν ἐφαρμόζεται πρός τοῦτο;

127. Δίδονται κατωτέρω αἱ εἰσαχθεῖσαι ποσότητες (εἰς χιλ. τόννους) πέντε εἰδῶν καί αἱ τιμαί αὐτῶν κατά τόννον (εἰς χιλ. δρχ.) διά τά ἔτη 1971 καί 1972.

| Εἴδη | 1971 | | 1972 | |
|---|---|---|---|---|
| | $p_0$ | $q_0$ | $p_1$ | $q_1$ |
| Δέρματα | 22,0 | 12 | 36,0 | 10 |
| Καουτσούκ | 12,0 | 12 | 13,0 | 14 |
| Ξυλεία | 2,5 | 167 | 2,7 | 201 |
| Βάμβαξ | 23,0 | 11 | 25,0 | 12 |
| Θεῖον | 0,7 | 185 | 0,6 | 219 |

Ὑποθέτοντες ὅτι τά ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τό σύνολον τῶν εἰσαγομένων εἰς τήν χώραν εἰδῶν ὑπολογίσατε:

α) Τόν ἀστάθμητον δείκτην ὄγκου (ὡς μέσον ἀριθμητικόν τῶν ἀντιστοίχων ἀτομικῶν δεικτῶν)
β) Τόν σταθμικόν δείκτην ὄγκου (κατά Laspeyres, Paasche, Edgeworth, Fisher κλπ.)
γ) Τόν ἀστάθμητον δείκτην τιμῶν (ὡς μέσον ἀριθμητικόν καί ὡς δείκτην συνολικῶν τιμῶν)
δ) Τόν σταθμικόν δείκτην τιμῶν (κατά Laspeyres, Paasche, Edgeworth, Fisher κλπ.)
ε) Τόν δείκτην ἀξίας $V_{01}$
στ) Ὑπολογίσατε τά σφάλματα $E_X$ (ἀντιστροφῆς εἰς τόν χρόνον) καί $E_\Pi$ (ἀντιστροφῆς τῶν παραγόντων) τά ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν διαφόρων μαθηματικῶν τύπων
ζ) Συγκρίνατε τ'ἀνωτέρω ἀποτελέσματα καί προβῆτε εἰς ἀνάλογα σχόλια.

128. Δίδονται κατωτέρω αἱ τιμαί κατά κιλόν (εἰς δρχ.) ὡρισμένων βασικῶν εἰδῶν διατροφῆς διά τούς διαφόρους μῆνας τοῦ ἔτους 1973. Δίδονται ἐπίσης αἱ ποσότητες (εἰς κιλά) q τάς ὁποίας καταναλίσκει ἑβδομαδιαίως (κατά μέσον ὅρον) ἕνα τυπικόν (μέσον) νοικοκυριόν.

Ὑποθέτοντες ὅτι τά ἐν λόγῳ εἴδη ἀποτελοῦν ἕν ἀντιπροσωπευτικόν ὑποσύνολον τῶν εἰδῶν διατροφῆς ὑπολογίσατε δι' ἕκαστον μῆνα - μέ βάσιν τόν Ἰανουάριον 1973 - τόν τιμάριθμον διατροφῆς
α) ὡς ἀστάθμητον (μέσον ἀριθμητικόν)

| Εἴδη | Ποσότητες | Τιμαί I | Φ | Μ | Α | Μ | Ι | Ι | Α | Σ | Ο | Ν | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ἄρτος | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| Κρέας βόειον | 2 | 42 | 48 | 48 | 48 | 48 | 57 | 62 | 62 | 71 | 72 | 74 | 78 |
| Ἔλαιον | 1 | 35 | 35 | 36 | 36 | 37 | 48 | 49 | 50 | 52 | 53 | 53 | 55 |
| Τυρός | 1 | 42 | 42 | 44 | 43 | 43 | 44 | 45 | 46 | 50 | 50 | 52 | 55 |
| Γεώμηλα | 4 | 4,2 | 4,5 | 4,5 | 4,6 | 4,6 | 4,1 | 4,3 | 4,6 | 4,8 | 5,3 | 5,7 | 6,4 |

β) ὡς σταθμικόν. Ποῖος ὁ ἐφαρμοζόμενος πρός τοῦτο τύπος;

Συγκρίνατε καί σχολιάσατε τ'ἀνωτέρω ἀποτελέσματα.

129. Δίδονται κατωτέρω οἱ δεῖκται τιμῶν διαφόρων ὁμάδων καταναλωτικῶν ἀγαθῶν διά τό ἔτος 1974 (μέ βάσιν τάς τιμάς τοῦ ἔτους 1969), ὡς ἐπίσης ἡ διάρθρωσις τῶν καταναλωτικῶν δαπανῶν (συντελεσταί σταθμίσεως) εἰς τά ὡς ἄνω ἔτη.

| Ὁμάδες Εἰδῶν | $P_{69,74}$ | 1969 | 1974 |
|---|---|---|---|
| Διατροφή | 174 | 389 | 330 |
| Οἰνοπνευματώδη ποτά-Καπνός | 119 | 52 | 39 |
| Ἔνδυσις-Ὑπόδησις | 149 | 143 | 113 |
| Στέγασις | 139 | 106 | 133 |
| Ἐξοπλ.κατ.-Ἐφοδ.νοικοκ. | 156 | 83 | 88 |
| Ὑγεία-Ἀτομ.καθαριότης | 166 | 54 | 49 |
| Ἐκπαίδ.-Μόρφ.-Ἀναψυχή | 179 | 69 | 80 |
| Μεταφοραί-Ἐπικοινωνίαι | 175 | 84 | 117 |
| Διάφορα | 161 | 20 | 51 |

Ὑπολογίσατε τόν γενικόν δείκτην τιμῶν τοῦ ἔτους 1974 (μέ βάσιν τό 1969)

α) ὡς ἀστάθμητον μέσον ἀριθμητικόν

β) ὡς σταθμικόν κατά Laspeyres, Paasche, Edgeworth, Fisher κλπ.

Συγκρίνατε καί σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα.

130. Δίδεται κατωτέρω ὁ δείκτης λιανικῶν τιμῶν P ὡς καί ὁ δείκτης τῆς ἐξελίξεως μισθῶν καί ἡμερομισθίων M - ἀμφότεροι μέ βάσιν τό ἔτος 1960 - διά τά ἔτη 1960-1970.

| | 1960 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P: | 100 | 108 | 112 | 120 | 130 | 132 | 135 | 140 | 146 | 160 | 170 |
| M: | 100 | 105 | 111 | 117 | 127 | 137 | 140 | 140 | 150 | 155 | 160 |

Νά ὑπολογισθοῦν:

α) Δεῖκται ἐμφαίνοντες τήν ἐξέλιξιν τῶν πραγματικῶν μισθῶν

β) Ἡ μεταβολή τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τῶν μισθωτῶν μεταξύ τῶν ἐτῶν 1960 καί 1970.

131. Τά κατωτέρω δεδομένα ἀποτελοῦν τάς τιμάς (κατά μονάδα) καί τάς παραχθείσας μονάδας (εἰς χιλ.) ἑκάστου τῶν εἰδῶν Α, Β καί Γ ὑπό τινος βιομηχανίας διά τά ἔτη 1960 καί 1965.

| Εἴδη | 1960 | | 1961 | |
|---|---|---|---|---|
| | $p_0$ | $q_0$ | $p_1$ | $q_1$ |
| Α | 2 | 2.000 | 3 | 2.500 |
| Β | 400 | 40 | 408 | 30 |
| Γ | 30 | 200 | 36 | .220 |

Καταρτίσατε τόν δείκτην τιμῶν $P_{01}$, τόν δείκτην ποσοτήτων $Q_{01}$ καί τόν δείκτην ἀξίας $V_{01}$ ἐφαρμόζοντες ὅλους τούς γνωστούς (ἀσταθμήτους καί σταθμικούς) μαθηματικούς τύπους ὑπολογισμοῦ αὐτῶν. Συγκρίνατε καί σχολιάσατε τά σχετικά ἀποτελέσματα.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. Ἀθανασιάδου Κ.
"Στατιστική", 1958

2. Γκιρτῆ Γ.
"Στοιχεῖα Στατιστικῆς", 1964

3. Δρακάτου Κ.
"Στατιστική", 1974

4. Κάκουλου Θ.
"Στατιστική", 1972

5. Κεβόρκ Κ.
"Στατιστική", 1972

6. Μαργαρίτη Ε.
"Ἀριθμοδεῖκται", 1955

7. Μαργαρίτη Ε.
"Μαθήματα Στατιστικῆς", 1959

8. Παπαμιχαήλ Δ.
"Μαθήματα Στατιστικῆς", 1968

9. Acton F.
"Analysis of Straight-Line Data", 1966

10. Chou Y.
"Statistical Analysis", 1970

11. Cramer H.
"Mathematical Methods of Statistics", 1968

12. Croxton F. - Cowden D.
"Applied General Statistics", 1956

13. Deming W.
"Statistical Adjustment of Data", 1964

14. Dixon W. - Massey F.
"Introduction to Statistical Analysis", 1957

15. Dunn O.
"Basic Statistics for Biomedical Sciences", 1967

16. Freud J.
"Modern Elementary Statistics", 1960