ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική εργασία του

Αντωνάκη Ιωάννη (ΜΧΑΝ 0901)

Επιβλέπων : Εγγλέζος Νικόλαος

Μέλη της επιτροπής: Σταϊκούρας Παναγιώτης
Μπότσαρη Αντωνία

Αθήνα

Φεβρουάριος 2011

Περίληψη

Η διαχείριση των αποθεμάτων στις επιχειρήσεις αποτελεί ένα πολύ σημαντικό παράγοντα που επηρεάζει την λειτουργία τους. Στόχος είναι η επιλογή του μεγέθους της παραγγελίας καθώς και η συχνότητα αυτής. Ο στόχος αυτός εξασφαλίζει στην επιχείρηση την απαιτούμενη επάρκεια αποθεμάτων για την εύρυθμη λειτουργία της. Μεγάλο όφελος από αυτή την επιλογή είναι η ελαχιστοποίηση παραγόντων κόστους που σχετίζονται με τα αποθέματα. Τέτοια κόστη είναι το κόστος παραγγελίας και το κόστος αποθήκευσης.

Στη διατριβή αυτή παρουσιάζονται μοντέλα αποτίμησης αποθεμάτων. Γίνεται αναφορά στην θεωρητική απόδειξη τόσο των ντετερμινιστικών όσο και των στοχαστικών μοντέλων αποτίμησης αποθεμάτων. Τα μοντέλα αυτά δημιουργήθηκαν με σκοπό την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης μέσου κόστους. Τα ντετερμινιστικά μοντέλα ενώ δεν ισχύουν στον πραγματικό κόσμο, δίνουν πολύτιμα συμπεράσματα. Τα στοχαστικά μοντέλα δίνουν την δυνατότητα ελαχιστοποίησης της συνάρτησης κόστους σε συνθήκες αβεβαιότητας. Τέλος στη διατριβή γίνεται αποτίμηση των βέλτιστων τιμών των μοντέλων μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Matlab καθώς και αριθμητικές εφαρμογές.

Λέξεις Κλειδιά: Διαχείριση αποθεμάτων, Συνάρτηση Μέσου Κόστους, Στοχαστική Ζήτηση, Ελλείψεις, Μοντέλα Αποτίμησης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διαχείριση των αποθεμάτων αποτελεί μια σημαντική ευθύνη για τη διοίκηση ενός παραγωγικού συστήματος. Ως «απόθεμα» ορίζεται η ποσότητα οποιουδήποτε οικονομικού αγαθού, υλικού ή όχι, εισάγεται στο σύστημα και υπερβαίνει την ποσότητα του αγαθού αυτού που εξάγεται από το σύστημα. Η δημιουργία αποθεμάτων μπορεί είτε να είναι σχεδιασμένη εκ των προτέρων με σκοπό να εξομαλύνει τις παρουσιαζόμενες διαφορές μεταξύ της προσφοράς και της ζήτησης του αγαθού είτε συνέπεια διαφόρων παραγόντων όπως κακός προγραμματισμός ή έκτακτα φαινόμενα. Η αναγκαιότητα ύπαρξης του αποθέματος οφείλεται κυρίως στην αβεβαιότητα αναφορικά με την προσφορά και τη ζήτηση του αγαθού για την κάλυψη των εκάστοτε αναγκών.

Ο έλεγχος των αποθεμάτων (inventory control) είναι απαραίτητη τεχνική που στηρίζεται σ' επιστημονικές βάσεις με σκοπό να παρακολουθεί την αποθηκευμένη ποσότητα του αγαθού και να λαμβάνει όταν απαιτείται σχετικές αποφάσεις, όπως πότε και σε τι ποσότητα θα πρέπει να παραγγελθεί το υλικό. Ως «σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων» ορίζεται το σύνολο των κανονισμών και ελέγχων που καθορίζουν το ύψος των αποθεμάτων, πότε θα πρέπει τα αποθέματα να ανανεώνονται και πόσο μεγάλες θα πρέπει να είναι οι παραγγελίες. Σε ένα παραγωγικό σύστημα, τα αποθέματα διακρίνονται σε πρώτες ύλες, τελικά προϊόντα, ενδιάμεσα προϊόντα και εφόδια. Αποθέματα δημιουργούνται και στις υπηρεσίες με την έννοια των υλικών αγαθών και προμηθειών που υποστηρίζουν.

1.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Ο βασικός σκοπός ενός συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων είναι να καθορίζει πρώτον πότε θα πρέπει να παραγγελθούν τα αγαθά και δεύτερον πόσο μεγάλη θα πρέπει να είναι η παραγγελία. Ένα αποτελεσματικό σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων, εξοικονομεί πόρους για την επιχείρηση ελαχιστοποιώντας το κόστος. Το κόστος αυτό μπορεί να οδηγήσει μια επιχείρηση ακόμα και στην χρεοκοπία.

Το πρόβλημα της διαχείρισης των αποθεμάτων ορίζεται γενικώς ως πρόβλημα εξισορρόπησης μεταξύ του κόστους έλλειψης και του κόστους πλεονάσματος αποθέματος ενός παραγωγικού προϊόντος. Ένας σωστός σχεδιασμός διαχείρισης αποθεμάτων αποσυνδέει το παραγωγικό σύστημα από τις διακυμάνσεις της ζήτησης, διατηρεί ομαλή ροή στην παραγωγή, ανεξάρτητη τη λειτουργία της παραγωγικής στάθμης, ενώ αυξάνει το ρυθμό παραγωγής και ελαττώνει το κόστος.

Η έννοια του αποθέματος είναι γενική και δεν περιορίζεται στην περίπτωση των πρώτων υλών, των προϊόντων και των εμπορευμάτων αλλά καλύπτει ένα ευρύ φάσμα οικονομικών φαινομένων. Ανεξάρτητα από τη γενικότητα του όρου, το πρόβλημα της διαχείρισης των αποθεμάτων είναι πολύ σημαντικό για όλες τις επιχειρήσεις, καθώς τα αποθέματα τους δεσμεύουν συνήθως ένα μεγάλο ποσοστό του κεφαλαίου τους κι έχουν σημαντικό κόστος διατήρησης. Υπάρχουν κατηγορίες επιχειρήσεων όπως τα super market, όπου τα αποθέματα τους καλύπτουν περίπου το 50% του ενεργητικού τους.

Η διαχείριση των αποθεμάτων αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές λειτουργίες σε ένα παραγωγικό σύστημα για διάφορους λόγους. Αν η ζήτηση ενός προϊόντος ήταν γνωστή, τότε η επιχείρηση θα μπορούσε να παράγει το προϊόν αυτό σε τέτοια ποσότητα ώστε να αντιστοιχεί ακριβώς στη ζήτηση. Επειδή όμως στην πραγματικότητα η ζήτηση είναι σπάνια γνωστή, με τη διατήρηση τελικών αποθεμάτων δίνεται η δυνατότητα στην επιχείρηση να αποσυνδέσει το παραγωγικό σύστημα από τη ζήτηση και να αντιμετωπίσει τυχόν μεταβολές της. Συνεπώς, η δημιουργία αποθεμάτων συμβάλει στην επιτάχυνση και βελτίωση της έγκαιρης παράδοσης των προϊόντων, μειώνοντας τις πιθανότητες μη εκπλήρωσης μίας παραγγελιάς η καθυστέρησης στην παράδοση. Η ύπαρξη αποθεμάτων στις πρώτες ύλες και στα ενδιάμεσα προϊόντα εξασφαλίζει τη συνεχή τροφοδοσία του παραγωγικού συστήματος και την ομαλή ροή της παραγωγής, χωρίς να επηρεάζεται από καθυστερήσεις των προμηθευτών. Επίσης εξασφαλίζει την ανεξάρτητη λειτουργία των παραγωγικών σταδίων, την αύξηση του ρυθμού παραγωγής και τη μείωση του κόστους παραγωγής. Για παράδειγμα, με τη διατήρηση των αποθεμάτων μειώνεται το κόστος αλλαγής μιας μηχανής από την παραγωγή ενός προϊόντος στην παραγωγή ενός άλλου.

Κάθε καινούργια παραγγελία συνεπάγεται κόστος για την επιχείρηση ανεξάρτητα από την ποσότητα της παραγγελίας. Συνεπώς όσο μεγαλύτερη είναι η παραγγελία, τόσο μικρότερος θα είναι ο συνολικός αριθμός των παραγγελιών και άρα τόσο μικρότερο το κόστος αυτών. Τέλος, μια επιχείρηση με τη διατήρηση αποθεμάτων έχει τη δυνατότητα να μειώσει τις πληρωμές της σε προμηθευτές, κάνοντας μεγαλύτερες παραγγελίες σε περιόδους που οι τιμές των προμηθευτών είναι χαμηλές.

Για να αποφύγουν προβλήματα μη εξυπηρέτησης των πελατών και μη διαθεσιμότητας εξαρτημάτων, οι εταιρείες συχνά κρατάνε ένα απόθεμα ασφαλείας (safety stock inventory). Τα αποθέματα ασφαλείας είναι χρήσιμα όταν οι προμηθευτές δεν παραδίδουν την απαιτούμενη ποσότητα στην προκαθορισμένη ημερομηνία και σε αποδεκτή ποιότητα ή όταν τα παρασκευασμένα αντικείμενα έχουν υποστεί ζημιές ή απαιτούν περαιτέρω διορθώσεις. Η διατήρηση αποθεμάτων ασφαλείας εξασφαλίζει επίσης την ομαλή λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας σε περίπτωση τέτοιων προβλημάτων. Για τη διατήρηση αποθεμάτων ασφαλείας, μία επιχείρηση επιβάλλεται να κάνει μία παραγγελία νωρίτερα απ' ό,τι τη χρειάζεται πραγματικά είτε σε μεγαλύτερη ποσότητα.

Ο σχεδιασμός της πολιτικής που πρέπει ν' ακολουθήσει μια επιχείρηση για την ορθή διαχείριση των αποθεμάτων της συνίσταται στον προσδιορισμό του πότε θα πρέπει να γίνει μια νέα παραγγελία, καθώς και της ποσότητας που θα πρέπει να παραγγελθεί κάθε φορά. Η απόφαση που θα παρθεί για μια παραγγελία θα έχει επιπτώσεις σε όλες τις επόμενες παραγγελίες και συνεπώς σε όλη τη διαχείριση αποθέματος από τη στιγμή εκείνη.

Τα συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1. τα συστήματα σταθερής ποσότητας παραγγελίας (ή συστήματα συνεχούς παρακολούθησης αποθέματος) και
2. τα συστήματα σταθερής περιόδου παραγγελίας (ή συστήματα περιοδικής παρακολούθησης αποθέματος).

Ένα σύστημα σταθερής ποσότητας παραγγελίας ενεργοποιεί εντολές όταν το απόθεμα φτάσει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Το γεγονός αυτό μπορεί να συμβεί οποιαδήποτε στιγμή ανάλογα με τη ζήτηση για το υλικό αυτό. Εν αντιθέσει, ένα σύστημα σταθερής περιόδου παραγγελίας περιορίζεται στην τοποθέτηση εντολών στο τέλος μιας προκαθορισμένης περιόδου. Για τη χρησιμοποίηση ενός συστήματος σταθερής παραγγελίας, το απόθεμα θα πρέπει να ελέγχεται συνέχεια. Το σύστημα αυτό απαιτεί κάθε φορά που προστίθεται ή αφαιρείται κάτι από το απόθεμα, να ανανεώνονται τα σχετικά αρχεία έτσι ώστε να μπορεί να καθοριστεί πότε έχει φτάσει το σημείο για νέα παραγγελία. Στο σύστημα σταθερής περιόδου παραγγελίας, καταμετρήσεις του αποθέματος γίνονται μόνο σε περιόδους αναθεωρήσεων.

Μεταξύ των δύο συστημάτων υπάρχουν και κάποιες επιπρόσθετες διαφορές, που επηρεάζουν την επιλογή του κατάλληλου συστήματος. Για παράδειγμα, τα συστήματα σταθερής ποσότητας παραγγελίας προτιμούνται σε πιο ακριβά υλικά, που έχουν μικρότερα αποθέματα. Επίσης, είναι πιο κατάλληλα για υλικά σημαντικά στην παραγωγική διαδικασία (π.χ. ανταλλακτικά), καθώς υπόκεινται σε αυστηρό έλεγχο και συνεπώς υπάρχει πιο γρήγορη αντίδραση σε περιπτώσεις εξάντλησης τους. Απαιτούν, ωστόσο, περισσότερο χρόνο για τη συντήρηση τους, καθώς για κάθε προσθήκη ή άντληση αποθέματος θα πρέπει να γίνεται η σχετική ενημέρωση. Από την άλλη πλευρά, τα συστήματα σταθερής περιόδου παραγγελίας διατηρούν μεγαλύτερα αποθέματα κατά μέσο όρο γιατί θα πρέπει να προλαμβάνουν τυχόν ελλείψεις κατά την περίοδο αναθεώρησης.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ιστορικά οι πρώτες εφαρμογές στην θεωρία αποθεμάτων σημειώθηκαν κατά τα έτη του Β΄ Παγκοσμίου πολέμου. Κάποιες ομάδες ανερχόμενων επιστημόνων του κλάδου των επιχειρήσεων αδυνατούσαν να επιλύσουν με τις κλασικές παραδοσιακές μεθόδους τα διάφορα προβλήματα που παρουσιάζονταν κι έτσι κατέβαλαν κάθε δυνατή και ουσιαστική προσπάθεια ώστε να μελετήσουν εις βάθος τα στοιχεία κινδύνου και αβεβαιότητας στην περίπτωση των αποθεμάτων.

Πολλές φορές η διαχείριση των αποθεμάτων μεταφράζονταν ως χαμηλά επίπεδα διαχείρισης με πάρα πολλά αποθέματα ή και το αντίστροφο. Με την τεχνολογική πρόοδο τα προβλήματα αυτά άρχισαν να πληθαίνουν, διότι κάποιοι οργανισμοί δύνανται να παράγουν και να προσφέρουν υλικά ποικιλόμορφα σε μεγάλη ταχύτητα και ποσότητα.

Η πρώτη, ουσιαστικά, εργασία σχετικά με την μοντελοποίηση συστημάτων αποθήκευσης έγινε από τον Harris (1913), αφορούσε την τυποποίηση ενός ντετερμινιστικού μοντέλου αποθεμάτων και αποδείκνυε τη μαθηματική σχέση για την οικονομική ποσότητα παραγγελίας (Economic Order Quantity) που θα συναντήσουμε στην επόμενη ενότητα. Έπειτα από 20 χρόνια, άρχισαν να γίνονται γνωστές οι έρευνες του Wilson (1934), ενώ αργότερα εμφανίστηκαν στο προσκήνιο οι εργασίες Dvoretzky (1952) και Arrow (1958) οι οποίες χαρακτηρίστηκαν ως σταθμό στην μετέπειτα πορεία της διαχείρισης μοντέλων αποθεμάτων με μαθηματικό υπόβαθρο. Τέλος από τις παλαιότερες εργασίες είναι η ανάλυση αποθεμάτων των Hadley και Whitin (1963).

Το πρόβλημα ελέγχου των αποθεμάτων έχει απασχολήσει σε μεγάλο βαθμό ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια την βιβλιογραφία κι έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια ανάλυσης και εμβάθυνσης του προβλήματος. Αρχικά με τις εργασίες των Tersine 1984) και Huminel (1985), στην συνέχεια στην δεκαετία του 90 είχαμε τις εργασίες των Sidney Browne (1991), Waters (1992), Edward Silver (1998) Στη θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος, έχει δημοσιευτεί πλήθος επιστημονικών μελετών, έχουν γίνει πολλές και πολύπλοκες μαθηματικές αναλύσεις κι έχουν διατυπωθεί πολλές θεωρίες και μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων. Τέτοιες ήταν την τελευταία δεκαετία των Zipkin (2000), Λουκάκης (2004), Axater (2006) και Ιακώβου (2008). Όμως, από πρακτικής απόψεως, μόνο ένα μικρό μέρος των θεωριών έχουν εφαρμοστεί σε πραγματικό επιχειρησιακό περιβάλλον.

1.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Η εργασία αυτή έχει ως σκοπό να επεξηγήσει πώς δημιουργήθηκαν τα μοντέλα αποτίμησης αποθεμάτων. Σκοπός της είναι να διερευνήσει τη μαθηματική έννοια των μοντέλων αυτών. Η υπόθεση η οποία ισχύει σε όλα τα μοντέλα της διατριβής είναι ότι τα αποθέματα μας αποτελούνται μόνο από ένα είδος εμπορεύματος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύουμε ντετερμινιστικά μοντέλα. Η ζήτηση εδώ είναι ντετερμινιστική και ενώ κάτι τέτοιο είναι ανέφικτο στον πραγματικό κόσμο, προσφέρεται για χρήσιμα συμπεράσματα. Αρχικά ο υπολογισμός της βέλτιστης τιμής γίνεται με το μοντέλο EOQ. Εισάγουμε συναρτήσεις για το απόθεμα που έχουμε στην αποθήκη , για τις παραγγελίες που κάνουμε καθώς και για τη θέση των αποθεμάτων. Επίσης εισάγουμε και μεταβλητές κόστους. Στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση συνολικού κόστους. Υποθέτουμε ότι τη στιγμή που μηδενίζεται το απόθεμα μας, καταφθάνει η επόμενη παραγγελία. Έτσι πάντα υπάρχει απόθεμα στις αποθήκες μας.

Στην συνέχεια επεκτείνουμε το μοντέλο μας με την δυνατότητα ύπαρξης ελλείψεων. Σε αύτη την περίπτωση θα πρέπει να εισάγουμε νέες συναρτήσεις για την αποτίμηση των ελλείψεων. Η συνάρτηση της θέσης αποθεμάτων αποκτά άλλο νόημα καθώς παύει να είναι το άθροισμα των αποθεμάτων που είναι στην αποθήκη και αυτών που είναι σε παραγγελία. Επίσης εισάγουμε και τη συνάρτηση της καθαρής θέσης, που στο προηγούμενο μοντέλο δεν είχε ιδιαίτερο νόημα. Ο στόχος εδώ είναι κοινός, όπως και στην πρώτη περίπτωση πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση συνολικού κόστους.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε στοχαστικά μοντέλα. Στην προκειμένη περίπτωση η ζήτηση δεν είναι ντετερμινιστική. Αφού δε μπορούμε να βρούμε μια σταθερή τιμή για τη ζήτηση, βρίσκουμε την κατανομή που ακολουθεί. Στη συνέχεια προσπαθούμε να βρούμε την κατανομή των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο. Τέλος αποδεικνύεται το εργοδικό θεώρημα και χρησιμοποιείται στην αποτίμηση των συναρτήσεων του μοντέλου.

Τα στοχαστικά μοντέλα έχουν δυσκολότερες μεθόδους αποτίμησης. Στην προσπάθεια μας αυτή κάνουμε διάφορες υποθέσεις ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο μέσο συνολικό κόστος. Αρχικά παίρνουμε σαν υπόθεση ότι ο συντελεστής του σταθερού κόστους είναι μηδέν. Θέτουμε το ποσό της παραγγελίας ίσο με την μονάδα και αποτιμάμε με το μοντέλο αποθέματος βάσης. Στη συνέχεια εισάγουμε τις συναρτήσεις απώλειας που θα μας βοηθήσουν στην επίτευξη του στόχου. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στα μέτρα απόδοσης. Η επόμενη πολιτική που προσπαθούμε να αποτιμήσουμε είναι με δύο μεταβλητές. Εδώ η ποσότητα παραγγελίας είναι μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας και το σταθερό κόστος διάφορο του μηδενός. Επίσης βρίσκουμε τη βέλτιστη τιμή της συνάρτηση κόστους, ελαχιστοποιώντας πρώτα ως προς το σημείο παραγγελίας και στην συνέχεια ως προς την ποσότητα παραγγελίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο υπάρχει το πρακτικό μέρος της πτυχιακής. Σ' αυτό έχουν γραφεί οι αλγόριθμοι αποτίμησης των μοντέλων. Υπάρχουν επίσης και αριθμητικά παραδείγματα. Τα παραδείγματα αυτά μας οδηγούν σε διάφορα συμπεράσματα όσον αφορά το γιατί οι εταιρίες επιλέγουν να έχουν ελλείψεις.

Το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο είναι ο επίλογος. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια συνολική ανασκόπηση της διατριβής. Υπάρχουν επίσης κάποια συμπεράσματα που βγήκαν από την διατριβή αυτή και τέλος ένα ευχαριστήριο μήνυμα απέναντι στους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος.

1.5 ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές του μεταπτυχιακού μου προγράμματος που με την εμπειρία, τη διάθεση και το μεράκι τους με εφοδίασαν με πολύτιμες γνώσεις και μου άνοιξαν νέους ορίζοντες για τη μετέπειτα καριέρα μου. Ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Εγγλέζο που με στήριξε με αληθινό ενδιαφέρον και αγάπη καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθεια μου να ολοκληρώσω τη διατριβή μου. Θα νοιώθω πάντα βαθιά ευγνωμοσύνη για το πέρασμά μου από το μεταπτυχιακό πρόγραμμα της χρηματοοικονομικής ανάλυσης για στελέχη κι ελπίζω κι εύχομαι να ανταποκριθώ στις προσδοκίες όλων των καθηγητών μου, χρησιμοποιώντας εφόδια που μου πρόσφεραν με στόχο την προσφορά, την ποιότητα και την καλύτερη δυνατή επιτυχία στην επαγγελματική μου διαδρομή. Το μεγαλύτερο κέρδος για μένα είναι ότι μου δόθηκε το στίγμα για το τι ακριβώς θέλω να κάνω, με τι ακριβώς θέλω να ασχοληθώ στον εργασιακό μου χώρο. Πιστεύω ακράδαντα πλέον ότι η «διαχείριση κινδύνου» είναι το αντικείμενο που μου ταιριάζει, είναι αυτό που θέλω και πρέπει να επιδιώξω να ασχοληθώ στο άμεσο μέλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ντετερμινιστικά μοντέλα αναζήτησης της βέλτιστης πολιτικής στις παραγγελίες αποθεμάτων που πραγματοποιεί μια επιχείρηση. Στόχος μας είναι η αναζήτηση της οικονομικότερης δυνατής παραγγελίας σε συνδυασμό με την όσο το δυνατόν μικρότερη συχνότητα παραγγελίας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ελαχιστοποιώντας το κόστος των προϊόντων αυτών για:

- την παραγωγή τους
- την μεταφορά τους ,
- την αποθήκευσης τους.

Το κλειδί σε όλα αυτά είναι η Συνάρτηση Μέσου Κόστους που θα την ελαχιστοποιήσουμε ώστε να βρούμε τη βέλτιστη παραγόμενη ποσότητα καθώς και τη βέλτιστη συχνότητα παραγωγής.

2.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ECONOMIC-ORDER-QUANTITY

Αυτό το μοντέλο θέτει ως δεδομένο ότι διαχειριζόμαστε ένα συγκεκριμένο προϊόν με άπειρη διάρκεια ζωής σε συνεχείς ποσότητες (δεν είναι απαραίτητο να είναι ακέραιες). Ο χρόνος είναι συνεχής εδώ και θεωρούμε δεδομένο ότι το μέγεθος του αποθέματος είναι υπό συνεχή παρακολούθηση (αν ελέγχαμε μια φορά τη μέρα το απόθεμα θα έπαυε ο χρόνος να θεωρείται συνεχής, θα ήταν διακριτός). Η ζήτηση υπολογίζεται ως ένα συνεχές σταθερό επιτόκιο λ.

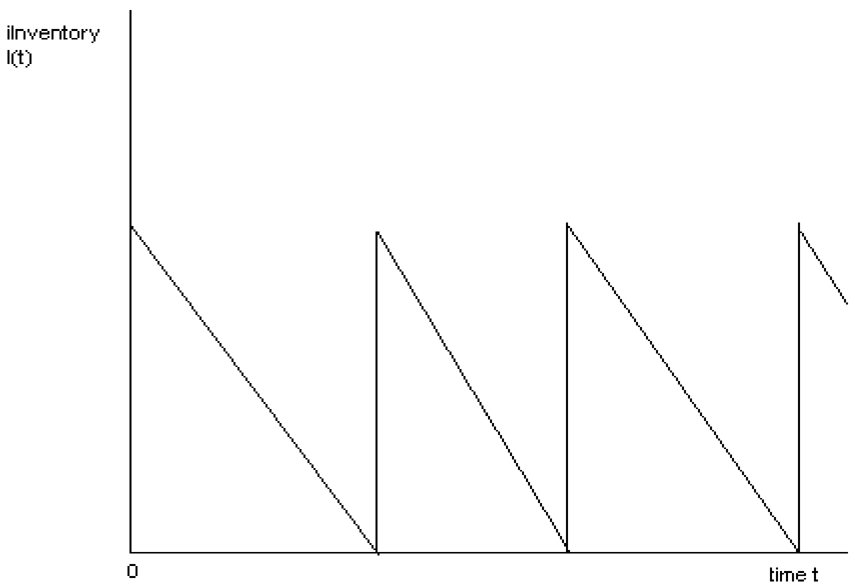
Έστω τώρα ότι έχουμε κάποιο αρχικό απόθεμα την χρονική στιγμή t_0 που το συμβολίζουμε με $I(t_0)$. Αυτό σταδιακά μειώνεται λόγω της σταθερής ζήτησης λ. Επομένως κάποια στιγμή πρέπει να αντικαταστήσουμε το πωληθέν προϊόν κάνοντας μια παραγγελιά σε συγκεκριμένη ποσότητα αποθέματος. Ο χρόνος που θα κάνει η παραγγελία να έρθει έστω ότι είναι σταθερός και ίσος με L.

$$L = \text{χρόνος παραλαβής παρτίδας από την στιγμή της παραγγελίας } (Leadtime).$$

Μετά την παραγγελία χρειάζεται L χρόνος για να γίνουν διαθέσιμα τα νέα αποθέματα προς πώληση. Το L δεν επηρεάζει τον χρόνο ή το μέγεθος της παραγγελίας. Θεωρούμε επίσης χάριν διευκόλυνσης ότι ο προμηθευτής έχει απεριόριστες ποσότητες αποθεμάτων. Αυτό το σενάριο αναφέρεται σε καταστήματα λιανικής πώλησης που αγοράζουν έτοιμα προϊόντα και τα πουλάνε στους πελάτες. ΄

Σχήμα 1.1

Απόθεμα σε σχέση με το χρόνο



Το Σχήμα 1.1 μας περιγράφει την καθαρή θέση της ζήτησης και της προσφοράς των αποθεμάτων. Τα αποθέματα έχουν γραμμική σχέση με τη ζήτηση με κλήση λ εκτός από τα σημεία (ακρότατα) όπου υπάρχει παράδοση της παραγγελίας. Στα σημεία αυτά το απόθεμα παρουσιάζει ασυνέχεια. Τι θα γίνει όμως αν αργήσουμε να κάνουμε την παραγγελία και το απόθεμα μας τελειώσει? Για κάποιο διάστημα δε θα μπορούμε να κάνουμε πωλήσεις. Γι` αυτό το λόγο έχουμε πάρει σαν δεδομένο ότι τέτοιες καταστάσεις είναι ανέφικτες στο συγκεκριμένο μοντέλο. Θεωρούμε οτι οι παραγγελίες γίνονται αρκετά πριν το σημείο να πουληθούν όλα τα αποθέματα μας.

2.1.1 ΒΑΣΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τίθενται όμως δύο βασικά ερωτήματα:

1. πότε θα κάνουμε την παραγγελία;

2. και πόσο θα είναι αυτή;

Για να απαντήσουμε στις παραπάνω ερωτήσεις κάνουμε τις εξής 2 υποθέσεις:

1. υποθέτουμε ότι η παραγγελία καταφθάνει ακριβώς τη στιγμή που μηδενίζεται το αποθεματικό μας (zero inventory property).και

2. ότι κάθε παραγγελία έχει το ίδιο μέγεθος.

Αφού κάναμε τις παραπάνω υποθέσεις μπορούμε τώρα να περάσουμε στον ορισμό των αρχικών συναρτήσεων, που θα μας χρησιμεύσουν στην απάντηση των ερωτημάτων 1 και 2.

$I(t)$: απόθεμα τη χρονική στιγμή t (inventory)

$IO(t)$: απόθεμα σε παραγγελία τη χρονική στιγμή t το οποίο δεν έχει φθάσει ακόμα στο κατάστημα (inventory in order).

$IP(t)$: θέση αποθεμάτων τη χρονική στιγμή t (inventory position)

Από τις παραπάνω συναρτήσεις προκύπτει η εξής σχέση:

$$IP(t) = I(t) + IO(t) \qquad (2,1).$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς από δεξιά.

Η ζήτηση κατά την χρονική περίοδο από την στιγμή της παραγγελίας έως την στιγμή της άφιξη της θα είναι ίση με D και θα ισούται με.

$$D = \lambda L \qquad (2,2).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι την χρονική στιγμή t+L το απόθεμα γίνεται

$I(t+L) = I(t) - \lambda * L +$ παραγγελίες που θα φτάσουν το χρονικό διάστημα $(t, t+L) \Leftrightarrow$

$I(t+L) = I(t) - D + IO(t) \Leftrightarrow$

και καταλήγουμε στην σχέση

$I(t+L) = IP(t) - D \qquad (2,3).$

Η θέση αποθεμάτων $IP(t)$ μας δίνει πληροφορίες για το παρόν $I(t), IO(t)$ και μας βοηθάει να κάνουμε προβλέψεις για τα μελλοντικά αποθέματα. Προσπαθώντας να βρούμε την βέλτιστη χρονική στιγμή t^* που πρέπει να γίνει η παραγγελία και έχοντας υποθέσει ότι η παραγγελία καταφθάνει την χρονική στιγμή που τελειώνουν τα αποθέματα μας καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$I\left(t^* + L\right) = 0 \Leftrightarrow IP\left(t^*\right) = D \qquad (2.4)$$

άρα τη χρονική στιγμή t^* που η θέση των αποθεμάτων γίνεται ίση με την ζήτηση είναι η σωστή στιγμή για νέα παραγγελία γιατί στην $t^* + L$ θα έχει μηδενιστεί το απόθεμα.

Αφού λοιπόν απαντήσαμε στο πρώτο ερώτημα πάμε να διερευνήσουμε και το δεύτερο που αναφέρεται στο μέγεθος της ποσότητας. Στις υποθέσεις που έχουμε κάνει η ποσότητα παραγγελίας είναι σταθερή.(πολιτική στασιμότητας).
Έστω τώρα ότι την συμβολίζουμε :

$$q = \text{ποσότητα παραγγελίας} \ (\text{σε μονάδες προιόντος}).$$

Πρέπει λοιπόν να βρούμε το βέλτιστο q. Στην προσπάθεια μας αυτή πρέπει να λάβουμε υπόψη μας δύο σχετικά κριτήρια για την επίτευξη του βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας q :

1. δεν θέλουμε να παραγγέλνουμε πολύ συχνά επειδή κοστίζουν τα μεταφορικά αλλά και όσο πιο μεγάλη είναι η παραγγελία τόσο μικρότερο το κόστος αγοράς των αποθεμάτων και

2. δεν πρέπει να αποθηκεύουμε μεγάλο αριθμό αποθεμάτων λόγο του κόστους αποθήκευσης.

Αυτά τα δύο κριτήρια θα μας βοηθήσουν να βρούμε ένα βέλτιστο q .

Θα αποτιμήσουμε τα αποθέματα και την συχνότητα παραγγελίας σε ένα συνεχές διάστημα $(0,+\infty)$. Τα μεγέθη που δημιουργούνται είναι τα εξής:

$$\bar{I} = \mu \acute{\varepsilon} \sigma o \ \ \alpha \pi \acute{o} \theta \varepsilon \mu \alpha \ \ (\text{average inventory}) = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \right] \qquad (2.5)$$

$$\overline{OF} = \Sigma \upsilon \chi \nu \acute{o} \tau \eta \tau \alpha \ \ \pi \alpha \rho \alpha \gamma \gamma \varepsilon \lambda \acute{\iota} \alpha \varsigma \ \ (\text{Order Frequency}) =$$
$$= \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} * \alpha \rho \iota \theta \mu \acute{o} \ \ \pi \alpha \rho \alpha \gamma \gamma \varepsilon \lambda \iota \acute{\omega} \nu \ \ \sigma \tau o \ \ [0, T) \right] \qquad (2.6)$$

Εδώ οι συναρτήσεις $IP(t), I(t)$ είναι περιοδικές. Μπορούμε λοιπόν να εξετάσουμε τις $\bar{I}, \overline{OF}$ σε μια χρονική περίοδο (κύκλο) ανάμεσα σε δύο παραλαβές. Το μήκος του κάθε κύκλου είναι

$$T = \frac{q}{\lambda} \qquad (2,7)$$

και ο αριθμός των παραγγελιών ανά κύκλο είναι μία. Επομένως η $\overline{OF}$ γίνεται ίση με :

$$\overline{OF} = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} * 1 \right] = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{\frac{q}{\lambda}} \right] = \frac{\lambda}{q} \ . \qquad (2,8)$$

Επίσης το $I(t)$ μειώνεται γραμμικά καθώς τα αποθέματα από ποσότητα q πάνε στο μηδέν. Επομένως το ολικό απόθεμα είναι ίσο με το εμβαδόν τρίγωνου που σχηματίζεται από την συνάρτηση $I(t)$ και τον άξονα x'x κατά το χρονικό διάστημα του κύκλου T όπως φαίνεται στο Σχήμα 1,1:

$$\overline{I} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T I(t)\,dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\mathrm{E}_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\frac{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta \ * \acute{\upsilon}\psi o\varsigma)}{2}\right)$$

όπου βάση είναι το χρονικό διάστημα του κύκλου και ύψος το μέγεθος της παραγγελίας

$$\overline{I} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\frac{(\mathrm{T} \ * q)}{2}\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{q}{2}. \qquad (2,9)$$

Σύμφωνα με τις (2,8) και (2,9) τα $\overline{I}\ \kappa\alpha\iota\ \overline{O\,F}$ επηρεάζονται αντίστροφα αν επιλέξουμε να αυξήσουμε το q. Μία αύξηση του q λοιπόν θα οδηγήσει σε μείωση τη συχνότητα παραγγελίας, επομένως θα αυξηθούν τα μέσα αποθέματα τα οποία έχουν και μεγάλο κόστος αποθήκευσης. Αν από την άλλη μειώσουμε το μεγάλο αποθεματικό, αναγκαστικά θα αυξήσουμε την συχνότητα παραγγελίας άρα θα αυξηθούν και τα μεταφορικά και επομένως θα αγοράζουμε τα αποθέματα σε πιο ακριβή τιμή. Η χρυσή τομή βρίσκεται πάντα κάπου στη μέση, οπότε και θα προχωρήσουμε με τη μελέτη του μοντέλου ώστε να τη βρούμε. Κάποιες φορές υπάρχουν περιορισμοί που δημιουργούνται και εμποδίζουν να πάρει την ποσότητα ή την συχνότητα που έχεις επιλέξει. Αν παραδείγματος χάριν υπάρχει ανώτατο όριο για το ανώτατο απόθεμα που μπορείς να έχεις, ουσιαστικά υπάρχει όριο για το q (λόγω μεγέθους της αποθήκης). Σε αυτήν τη περίπτωση ελαχιστοποιείς τη συχνότητα και κοιτάς να παραγγείλεις τόσο μεγάλο q όσο να φτάνει στο ανώτατο όριο. Ομοίως αν έχεις περιορισμούς στη συχνότητα. Το πρόβλημα όμως παραμένει όταν δεν υπάρχουν αυτοί οι περιορισμοί.

2.1.2 ΚΟΣΤΗ

Σκοπός μας γίνεται πλέον να απαντήσουμε στην ερώτηση «ποια είναι η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών». Αρχικά για να καταφέρουμε να απαντήσουμε θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε παράγοντες κόστους για μια επιχείρηση, έτσι ώστε να βρούμε το βέλτιστο συνδυασμό για τον οποίο αυτοί θα ελαχιστοποιηθούν. Έτσι θα έχουμε μια βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας q .

Ένας παράγοντας κόστους είναι :

$$k = \text{σταθερό κόστος για μία παραγγελία } (\text{χρήματα}).$$

Το k αντιπροσωπεύει όλα τα κόστη, που είναι απαραίτητα για την παραγγελία Συμπληρωματικά κόστη μπορεί να είναι τα μεταφορικά κόστη,

$$c = \text{μεταβλήτο κόστος για μια παραγγέλια χρήματα / ποσοτικές μονάδες.}$$

Το c είναι το κόστος που έχει να κάνει με το προϊόν της παραγγελίας και τότε το συνολικό κόστος παραγγελίας δίνεται από

$$K(q) = \begin{cases} k + cq & \text{για } q > 0 \\ 0 & \text{για } q = 0 \end{cases}. \qquad (2,10)$$

Ένας δεύτερος παράγοντας παράγοντας κόστους είναι

$$h = \text{κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας αποθέματος ανά μονάδα χρόνου}$$

και τότε το κόστος αποθήκευσης για απόθεμα $I(t)$ είναι $h * I(t)$

Το h χωρίζεται σε 2 ειδών κόστη :

1. τα άμεσα κόστη λειτουργίας, μισθοί , ασφάλειες κ.λπ. και συμβολίζεται με $\underline{h}$
2. χρηματοοικονομικά κόστη που συμβολίζονται με ac . Το a είναι επιτόκιο και εκτιμά το κόστος αποθήκευσης.

Άρα

$$h = \underline{h} + a c . \qquad (2,11)$$

Επομένως σε ένα μακροπρόθεσμο πλάνο τα μέσα κόστη παραγγελίας είναι

$$(k + cq)\overline{OF}$$

και τα μέσα κόστη κατοχής αποθεμάτων

$$h * \overline{I} .$$

Οπότε το συνολικό μέσο κόστος (Total Average Cost) εκφράζεται από την παρακάτω συνάρτηση

$$C(q) = (k + cq)\overline{OF} + h\overline{I} \qquad (2,12).$$

και από τις παραδοχές που κάναμε πιο πάνω ότι κατά την διάρκεια του κύκλου γίνεται μόνο μια παραγγελία με τη χρήση των (2,8) και (2,9) η συνάρτηση γίνεται

$$C(q) = c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{hq}{2} \qquad \acute{o}\pi o \upsilon \quad q > 0 . \qquad (2,13)$$

2.1.3 ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Πρέπει να βρούμε για πιο βέλτιστο q ελαχιστοποιείται η συνάρτηση κόστους. Για να βρούμε το βέλτιστο q θα πρέπει να βρούμε πού μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης. Για να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική αυτή θα πρέπει να ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις:

- το σύνολο τιμών της C να είναι το (0,+ ∞),

- η συνάρτηση να είναι συνεχώς διαφορίσιμη και γνησίως κυρτή.

$$\frac{dC(q)}{dq} = -\frac{k\lambda}{q^2} + \frac{h}{2},$$
$$\frac{d^2C(q)}{dq^2} = \frac{2k\lambda}{q^3} > 0.$$

Αφού η δεύτερη παράγωγος $\frac{d^2C(q)}{dq^2}$ είναι θετική ,τότε η συνάρτηση $C(q)$ είναι κυρτή και έχει ελάχιστο εκεί που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος , δηλαδή για

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \qquad (2,14)$$

που ονομάζεται EOQ (economic order quantity.)

Οπότε από τις (1,8) και (1,9) έχουμε

$$\overline{I} = \sqrt{\frac{k\lambda}{2h}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \overline{OF} = \sqrt{\frac{\lambda h}{2k}} \qquad (2,15)$$

Τα μέσα κόστη κατοχής αποθεμάτων γίνονται

$$h\overline{I} = k\overline{OF} = \sqrt{\frac{\lambda hk}{2}} \qquad (2,16)$$

και το Συνολικό Βέλτιστο Μέσο Κόστος γίνεται

$$\hat{C}(q) = C\left(\hat{q}\right) = c\lambda + \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \qquad (2,17)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάποιες περιπτώσεις προτιμάται να γίνεται η εκτίμηση του $\hat{u} = \frac{\hat{q}}{\lambda}$. Όπου το $\hat{u}$ είναι ο χρόνος ανάμεσα στις παραγγελίες.

Το μοντέλο EOQ έχει κάποιες ιδιότητες οι οποίες μας βοηθάνε να βρούμε το βέλτιστο $\hat{q}$. Οι ιδιότητες αυτές είναι οι εξής δύο:

1. οι παραγγελίες φθάνουν πάντα την χρονική στιγμή που μηδενίζονται τα αποθέματα. $\left(I(t)=0\right)$,
2. παραγγέλνουμε πάντα την ίδια ποσότητα.

Με αυτές τις ιδιότητες υπάρχει μόνο μια πολιτική που να μας ικανοποιεί για το βέλτιστο $\hat{q}$ ή το βέλτιστο $\hat{u}$ που δίνεται απο

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \quad ή \quad \hat{u} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}, \qquad (2,18)$$

αντίστοιχα.

2.1.4 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Όσον αφορά τώρα τους συντελεστές ευαισθησίας μια μεταβολή στο συντελεστή ζήτησης λ ,από την (1,18) θα έχει το ακόλουθο αποτέλεσμα στην εκτίμηση του q

$$\frac{\hat{q}^{1}}{\hat{q}} = \sqrt{\frac{\lambda^{1}}{\lambda}}. \qquad (2,19)$$

Επομένως μια θετική μεταβολή του συντελεστή ζήτησης λ θα αυξήσει μεν το $\hat{q}$ αλλά με μικρότερο ρυθμό.

Στον πραγματικό κόσμο δεν είναι τόσο εύκολο να υπολογισθεί ο συντελεστής ζήτησης. Πρέπει να το εκτιμήσουμε και η εκτίμηση μας θα περιέχει κάποιο ποσοστό σφάλματος. Ωστόσο αν δεν είναι πολύ μεγάλο το σφάλμα , η τιμή που θα βρούμε για το $\hat{q}$ θα τείνει στη πραγματική.

2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ EOQ ΜΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΕΝΕΣ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ (PLANNED BACKORDERS)

Στο μοντέλο EOQ έχουμε ήδη ισχυριστεί ότι δεν έχουμε ελλείψεις στο απόθεμα μας. Σε αυτό το μοντέλο πάμε ένα στάδιο παρά πέρα, καθώς μας δίνει τη δυνατότητα πώλησης αποθεμάτων τα οποία δεν έχουμε παραλάβει, δηλαδή μας δίνει τη δυνατότητα πώλησης εμπορευμάτων με πίστωση χρόνου. Αυτό συμφέρει τις επιχειρήσεις να το κάνουν γιατί είτε είναι πολύ ακριβά τα προϊόντα, είτε έχουν μεγάλο κόστος αποθήκευσης. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε εδώ, είναι αυτές που είχαμε και πριν με την προσθήκη κάποιων επιπλέον συναρτήσεων για τις ελλείψεις :

$I(t) = \alpha\pi o\theta \acute{\varepsilon}\mu\alpha \;\; \tau\eta$ χρονική στιγμή t,
$B(t) = \varepsilon\kappa\kappa\rho\varepsilon\mu \acute{o}\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma \;\; \tau\eta$ χρονικη στιγμή t ,
$IN(t) = \;\; \kappa\alpha\theta\alpha\rho \acute{o} \;\; \alpha\pi \acute{o}\theta\varepsilon\mu\alpha$ τη χρονική στιγμή t,
$IO(t) = \alpha\pi o\theta \acute{\varepsilon}\mu\alpha\tau\alpha \;\; \sigma\varepsilon \;\; \pi\alpha\rho\alpha\gamma\gamma\varepsilon\lambda \acute{\iota}\alpha \;\; \tau\eta \;\; \chi\rho o\nu\iota\kappa \acute{\eta} \;\; \sigma\tau\iota\gamma\mu \acute{\eta} \;\; t,$
$IP(t) = \;\; \theta \acute{\varepsilon}\sigma\eta \;\; \alpha\pi o\theta\varepsilon\mu \acute{\alpha}\tau\omega\nu \;\; \tau\eta$ χρονική στιγμή t = $IN(t) + IO(t),$
$A(t) =$ ποσοστό του χρόνου μέχρι την χρονική στιγμή t όπου υπάρχει μηδενικό απόθεμα.

Οι νέες συναρτήσεις είναι οι $B(t)$ και $IN(t)$ καθώς και η $IP(t)$ έχει καινούργιο νόημα .Το $IN(t)$ μας δίνει τουλάχιστον τη πληροφορία ότι κάθε χρονική στιγμή το $I(t)$ ή το $B(t)$ είναι μηδέν. Αυτό είναι λογικό, καθώς αν έχει απόθεμα η επιχείρηση δεν χρειάζεται να κάνει πωλήσεις με πίστωση χρόνου $(B(t)=0)$, ενώ αν έχει τελειώσει το απόθεμα συνεχίζει να πουλά προϊόντα που δεν έχει ακόμα στην κατοχή $(I(t)=0)$,

$$IN(t) = \begin{cases} I(t) \acute{o}\tau\alpha\nu \; \tau o \; IN(t) \geq 0 \\ \\ -B(t) \acute{o}\tau\alpha\nu \; \tau o \; IN(t) \leq 0 \end{cases} . \qquad (2,20)\,(1.1)$$

Το $IN(t)$ μειώνεται, είτε είναι θετικό είτε είναι αρνητικό, όταν αυξάνεται το λ (demand rate). Όταν η παραγγελία καταφθάνει, η καθαρή θέση αυξάνεται κατά q εάν είναι θετική ενώ εάν είναι αρνητική καλύπτει πρώτα τις παραγγελιές σε εκκρεμότητα και στη συνέχεια το υπόλοιπο γίνεται απόθεμα. Πάμε τώρα να δούμε τη καθαρή θέση στην χρονική στιγμή $t+L$.

$$IN(t+L) = IN(t) + IO(t) - D = IP(t) - D. \qquad (2,21)$$

Εδώ βλέπουμε ότι $IN\,(t)$ λειτουργεί όπως $I\,(t)$ στο μοντέλο EOQ. Το $IP(t)$ έχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για να προβλέψουμε τη καθαρή θέση στο μέλλον.

2.2.1 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ

Η καμπύλη της $IN(t)$ έχει 2 βαθμούς ελευθερίας. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι πρέπει να ξέρουμε την ποσότητα q που θα παραγγείλω και πότε θα κάνουμε την παραγγελία. Όπως στο μοντέλο EOQ υποθέτουμε ότι όλες οι παραγγελίες έχουν το ίδιο μέγεθος q. Αρκεί λοιπόν να βρούμε κάθε πότε θα κάνουμε την παραγγελία . Στην προσπάθεια μας αυτή θα ορίσουμε μια δεύτερη μεταβλητή r η οποία ορίζεται ως

$$r = \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o \ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\gamma\varepsilon\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma \ (reorder\ po\,\mathrm{int}).$$

Επομένως εδώ η παραγγελία γίνεται όταν η θέση των αποθεμάτων τη χρονική στιγμή t πάρει την τιμή r και έχει μέγεθος q . Πλέον το μοντέλο μας έχει 2 μεταβλητές (r,q) και ο στόχος παραμένει η αποτίμηση των $\overline{I}\ \kappa\alpha\iota\ \overline{OF}$.

Το μοντέλο επιτρέπει την πώληση αποθεμάτων που δεν έχουμε στην κατοχή μας αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι είναι και επιθυμητό. Στους πελάτες δεν αρέσει να περιμένουν και αν θέλει η επιχείρηση να τους έχει ικανοποιημένους δεν πρέπει να τους κάνει να περιμένουν συχνά, ούτε για μεγάλο χρονικό διάστημα. Μερικές φόρες υπάρχει κόστος για την αργοπορημένη παραγγελία .Αυτό το κόστος το μετράμε ως εξής

$$\overline{B} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} B(t)\,dt \qquad (2.22)$$

=Μέσο απόθεμα σε εκκρεμότητα προς τους πελάτες.

Υπάρχει ακόμα ένα κριτήριο που είναι δευτερεύον αλλά παραμένει σημαντικό:

$$A(t) = 1\{IN(t) \le 0\} \qquad (2.23)$$

Και η μέση τιμή του

$$\overline{A} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} A(t)\,dt \qquad (2.24)$$

=Μέσο ποσοστό του χρόνου όπου το απόθεμα είναι μηδενικό.

Το $\overline{A}$ μετράει την μείωση της ζήτησης λόγω της έλλειψης αποθέματος και ισούται για κάθε μονάδα χρόνου με $\lambda\overline{A}$. Το ποσοστό του χρόνου που έχω απόθεμα είναι $1-\overline{A}$.

Πάμε τώρα να υπολογίσουμε τα κριτήρια συναρτήσει των q και r με την τελευταία να αντικαθίσταται με την ισοδύναμη μεταβλητή

$$v = \text{απόθεμα ασφαλείας} = \mathrm{r} - \mathrm{D},\ \textit{όπου}\ v \in \mathrm{R}. \qquad (2.25)$$

Όπως και στο προηγούμενο υπόδειγμα ορίζουμε ως κύκλο τη χρονική περίοδο $u = \dfrac{q}{\lambda}$ ανάμεσα σε δύο παραλαβές εμπορευμάτων. Έστω y τώρα το χρονικό ισοδύναμο του v τέτοιο ώστε

$$y = \frac{v}{\lambda}\ (\textit{χρονικό}\ \text{διάστημα ασφαλείας})\ \text{με}\ \mathrm{y} \in \mathrm{R}. \qquad (2.26)$$

Για οποιοδήποτε q έχουμε ότι στο τέλος του κύκλου $IN(t-)=v$, άρα στην αρχή του κύκλου $IN(t)=v+q$. Τώρα παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις για το απόθεμα ασφαλείας.

I. Έστω ότι το $v>0$, τότε για κάθε $t\in R$ θα έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}&IN(t)>v>0 \Leftrightarrow\\&IN(t)>0 \Leftrightarrow\\&I(t)>0 \Leftrightarrow\\&B(t)=0\ \forall\ t\in R.\end{aligned}$$

Οπότε γυρνάμε στο προηγούμενο μοντέλο (EOQ) πράγμα που μας είναι αδιάφορο καθώς προσπαθούμε να πάμε ένα βήμα παραπέρα.

II. Έστω τώρα ότι το $v<-q$ τότε για κάθε $t\in R$ θα έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}&IN(t)<v<0 \Leftrightarrow\\&IN(t)<0 \Leftrightarrow\\&I(t)=0 \Leftrightarrow\\&B(t)>0\ \forall\ t\in R.\end{aligned}$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε πάντα περισσότερο απόθεμα από όσο χρειαζόμαστε ενώ στη δεύτερη δεν καλύπτουμε καν τις παραγγελίες που έχουμε έως την στιγμή της παραλαβής. Επομένως το διάστημα που μας ενδιαφέρει είναι $-q\le v\le 0$. Άρα το v είναι αρνητικό (όπως και το y) αλλά οι παραγγελίες φτάνουν για να καλύψουν το σύνολο των παραγγελιών που είναι σε εκκρεμότητα.

Επομένως η πολιτική που ακολουθούμε είναι για $v\in[-q,0]$. Σε αυτή την πολιτική ο κύκλος χωρίζεται σε 2 μέρη . Το πρώτο μέρος του κύκλου συμβολίζεται με $u+v=\dfrac{q+v}{\lambda}$ και είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο υπάρχει απόθεμα στις αποθήκες μας και στο δεύτερο μέρος που συμβολίζεται

$-y=-\dfrac{v}{\lambda}$ το οποίο υπάρχει όταν μας έχουν σωθεί τα αποθέματα. Επομένως ο κύκλος υποδιαιρείται σε δύο διαστήματα που αντιστοιχούν σε ποσοστά $\dfrac{q+v}{q}$ για το πρώτο διάστημα και $-\dfrac{v}{q}$ για το δεύτερο. Άρα μέσο ποσοστό του χρόνου όπου υπάρχει μηδενικό απόθεμα είναι

$$\overline{A} = -\frac{v}{q}. \qquad (2.27)$$

Όπως καταλήξαμε στην (1,9) από το μοντέλο EOQ το μέσο απόθεμα $\overline{I}$ είναι $\dfrac{q+v}{2}$ κατά την διάρκεια του πρώτου μέρους και μηδέν κατά την διάρκεια του δευτέρου (έχουν τελειώσει τα αποθέματα). Επομένως το $\overline{I}$ υπολογίζεται ως ένας σταθμισμένος μέσος των παρακάτω ποσοτήτων και είναι

$$\overline{I} = \left(\frac{q+v}{q}\right)\frac{q+v}{2} + \left(-\frac{v}{q}\right) * 0 = \frac{(q+v)^2}{2q}. \qquad (2.28)$$

Από την άλλη μεριά οι μέσες ελλείψεις είναι μηδέν στο πρώτο μέρος και $-\dfrac{v}{2}$ στο δεύτερο οπότε το $\overline{B}$ υπολογίζεται με τα παραπάνω σταθμά ως

$$\overline{B} = \left(\frac{q+v}{q}\right) * 0 + \left(-\frac{v}{q}\right)\left(-\frac{v}{2}\right) = \frac{v^2}{2q} \qquad (2.29)$$

Τέλος το μήκος του κύκλου είναι $u = \dfrac{q}{\lambda}$ άρα η μέση συχνότητα παραγγελιών γίνεται:

$$\overline{OF} = \frac{1}{u} = \frac{\lambda}{q}. \qquad (2.30)$$

Έχουμε όμως να εκτιμήσουμε άλλον ένα παράγοντα κόστους ανάλογο με το h ο οποίος συμβολίζουμε με b και είναι

$b =$ κόστος εκκρεμοτήτων-ελλείψεων
ανα μονάδα χρόνου-προϊόντος

Το b είναι το κόστος που προκύπτει από την δυσαρέσκεια του πελάτη και είναι δύσκολο να μετρηθεί. Για παράδειγμα μπορεί μελλοντικά να χαθούν πελάτες ή να πρέπει να τους γίνει έκπτωση ή δωρεάν παράδοση στο σπίτι. Αυτές είναι συνηθισμένες κινήσεις επιχειρήσεων προκειμένου να κρατήσουν ευχαριστημένους τους πελάτες τους.

2.2.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΟΥ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Όπως και στο προηγούμενο μοντέλο θα φτιάξουμε την συνάρτηση του μέσου συνολικού κόστους (υποθέτοντας πάλι ότι η C είναι διαφορίσιμη και κυρτή στο R^2).

$$\hat{C}(q,v) = C\left(\hat{q},\hat{v}\right) = k\lambda + \frac{h(q+v)^2}{2q} + \frac{bv^2}{2q} + c\lambda \qquad (2.30)$$

Παίρνουμε τώρα τις μερικές παραγώγους και θα βρούμε τα $\hat{q},\hat{v}$ για τα οποία μηδενίζονται οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι:

$$\frac{d\hat{C}(v,q)}{dv} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{h(q+v)}{q} + \frac{bv}{q} = 0 \Leftrightarrow$$
$$v = -\frac{hq}{h+b} \qquad (2,31)$$

$$\frac{d\hat{C}(v,q)}{dq} = 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{k\lambda}{q^2} + \frac{h(q^2 - v^2)}{2q^2} - \frac{bv^2}{2q^2} = 0 \qquad (2,32)$$

Θέτουμε τώρα και το cost ratio

$$\omega = \frac{b}{b+h} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \ \omega \in [0,1] \qquad (2,33)$$

Από τις σχέσεις (2,31), (2,32) και (2,33) προκύπτουν οι παρακάτω δύο βέλτιστες ποσότητες:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}}\sqrt{\frac{1}{\omega}}, \qquad (2,34)$$

όπου η πρώτη ρίζα είναι η ποσότητα EOQ της (1,14) και η δεύτερη ρίζα είναι μεγαλύτερη της μονάδας, και

$$\hat{v} = -(1-\omega)\hat{q}. \qquad (2,35)$$

Επίσης ανάλογα με τις μεταβλητές που χρησιμοποιούμε ισχύουν και οι παρακάτω σχέσεις:

$$\hat{r} = D + \hat{v}, \qquad (2,36)$$

$$\hat{u} = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}\sqrt{\frac{1}{\omega}}, \qquad (2,37)$$

$$\hat{y} = -(1-\omega)\hat{u}, \qquad (2,38)$$

$$\hat{C} = C\left(\hat{v}, \hat{q}\right) = c\lambda + \sqrt{2k\lambda h\omega}. \qquad (2,39)$$

Μπορούμε επίσης να ποσοτικοποιήσουμε το $\overline{\mathrm{B}}$ σε ολόκληρο τον κύκλο με το παρακάτω μέγεθος.

$$\overline{BW} = \text{Μέσος χρόνος αναμονής πελάτη}. \qquad (2,40)$$

Ομοίως με πριν στο συγκεκριμένο μοντέλο έχουμε:

$$\overline{BW} = \frac{(q+v)}{q}0 + \left(-\frac{v}{2q}\right)\left(-\frac{v}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{v^2}{q} \Leftrightarrow$$

$$\overline{BW} = \frac{1}{\lambda}\overline{B}. \qquad (2,41)$$

Τέλος τα συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την αποτίμηση του παραπάνω μοντέλου είναι τα ακόλουθα.

- Εκ πρώτης όψεως είναι ξεκάθαρο ότι μεγαλώνει η ποσότητα παραγγελίας και επομένως ο ρυθμός των παραγγελιών πέφτει.

- Από την σχέση (2,33) έχουμε διαιρώντας το κλάσμα σε αριθμητή και παρανομαστή με το b ότι

$$\omega = \frac{1}{1+\frac{h}{b}}.$$

Επομένως όταν αυξάνεται το h ή μειώνεται το b το ω μικραίνει. Εκτός αυτού και όταν το h είναι μεγαλύτερο του b το ω μικραίνει.

- Όταν το βέλτιστο χρονικό διάστημα $\hat{u}$ ανάμεσα στις παραγγελιές μεγαλώνει τότε μεγαλώνει και το βέλτιστο $\hat{q}$, επομένως ευνοούμαστε από τις ελλείψεις. Επομένως εκμεταλλευόμαστε πάντα τις ελλείψεις εκτός αν έχουν μηδενικό κόστος αποθήκευσης $h = 0$ ή άπειρο κόστος εκκρεμοτήτων-ελλείψεων $b = +\infty$.

- Παρατηρούμε ότι αν βάλουμε στο μοντέλο αυτό όπου ν το μηδέν έχουμε το μοντέλο EOQ, όπου για κάθε q είχαμε ένα σταθερό κόστος παραγγελίας, Αλλά με την μεταβλητή v να έχει ένα βαθμό ελευθερίας μπορούμε να προσαρμόσουμε τα σταθερά κόστη και τα κόστη εκκρεμοτήτων-ελλείψεων για να επιτύχουμε τον καλύτερο συνδυασμό. Με την ευελιξία που έχουμε, μπορούμε να αντέξουμε μια αύξηση στα σταθερά κόστη για να γλιτώσουμε κόστη παραγγελίας (μεταβλητά κόστη) και κόστη εκκρεμοτήτων-ελλείψεων.

Μπορεί να προκαλεί έκπληξη αλλά το v είναι συνήθως αρνητικό. Οι περισσότερες επιχειρήσεις λειτουργούν με μικρά αποθέματα και παραγγελίες σε εκκρεμότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο κάτω από την υπόθεση ότι το μοντέλο είναι ντετερμινιστικό, ήταν βέβαιο ότι θα προέκυπτε μία λύση για την ελαχιστοποίηση της συνάρτηση συνολικού κόστους. Σε αυτήν την ενότητα το μοντέλο μας είναι *στοχαστικό,* με αποτέλεσμα να κάνουμε ένα ακόμη βήμα πιο κοντά στην πραγματικότητα. Με τον όρο «στοχαστικό» εισάγουμε την αβεβαιότητα στο μοντέλο μας. Τίθεται όμως το ερώτημα σε ποιον όρο των προηγούμενων συναρτήσεων κρύβεται η αβεβαιότητα. Η απάντηση είναι προφανής σε οποιοδήποτε αναγνώστη και έγκειται στη συμπεριφορά του καταναλωτή . Αν υποθέσουμε ότι οι καταναλωτές δεν έχουν σταθερή πολιτική ως αφορά την επιλογή του προϊόντος τότε έχουμε πρόβλημα στον υπολογισμό της ζήτησης. Το κεφάλαιο αυτό θα εξετάσει τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε την ζήτηση σε μεθοδολογίες αποτίμησης για να μπορέσουμε να βρούμε πιθανές βέλτιστες τιμές για την συνάρτηση Συνολικού Κόστους.

3.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ECONOMIC-ORDER-QUANTITY

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στο EOQ μοντέλο παραγγέλνουμε σταθερές ποσότητες $\hat{q}$ ή παραγγέλνουμε σε τακτά χρονικά διαστήματα $\hat{u}$. Αν υποθέσουμε ότι κρατάμε σταθερό το διάστημα παραγγελιών (τουλάχιστον ανά διαστήματα) τότε αφού τώρα μεταβάλλεται η ζήτηση αναγκαστικά θα πρέπει να μεταβάλλεται και το $\hat{q}$. Άρα παύει να ισχύει η στασιμότητα της πολιτικής που ίσχυε στο ντετερμινιστικό πλαίσιο. Η στασιμότητα της πολιτικής μας εδώ σημαίνει πως η κατανομή της ποσότητας παραγγελίας δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι τουλάχιστον ένα από τα δυο θα παραμένει σταθερό για κάποιο χρονικό διάστημα.

3.2. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ

Ως αφορά τώρα την ζήτηση την συμβολίζουμε με

$$D(t) = \sigma\upsilon\sigma\sigma\omega\rho\varepsilon\upsilon\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \zeta\acute{\eta}\tau\eta\sigma\eta\ \sigma\tau o\ (0,\mathrm{t}) \qquad (3.1)$$

και

$$\mathrm{D}(t,u) \;=\; \eta\ \zeta\acute{\eta}\tau\eta\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (t,u] = \mathrm{D}(u) - \mathrm{D}(t)\ \acute{o}\pi o\upsilon\ u \geq t \qquad (3.2)$$

Οι τιμές αυτές της ζήτησης είναι τυχαίες μεταβλητές με το σύνολο αυτών να συμβολίζεται με D_u και ακολουθούν μια στοχαστική διαδικασία που την συμβολίζουμε με $D = \{D(t) : t \geq 0\}$. Υποθέτουμε επίσης ότι η στοχαστική διαδικασία αυτή ακολουθεί την κατανομή Poisson με ρυθμό ίσο με λ , και μέσο λt δηλαδή

$$D(t) \sim Poisson(\lambda t)\ \kappa\alpha\iota\ \lambda = \mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \zeta\acute{\eta}\tau\eta\sigma\eta\ \alpha\nu\acute{\alpha}\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon.$$

Παίρνουμε σαν δεδομένο ότι παραγγελία κάνουμε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και για όση ποσότητα θέλουμε. Επίσης ο χρόνος καθυστέρησης άφιξης της παραγγελίας παραμένει σταθερός και ίσος με L . Θεωρούμε την πολιτική με δύο μεταβλητές (r, q) όπου

$$\mathrm{q} = \pi o\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\gamma\varepsilon\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma$$
$$\mathrm{r} = \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\gamma\varepsilon\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \ (\mathrm{reorder\ point}).$$

Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα της κατανομής Poisson είναι ίση με :

$$P\left[D(t) = d\right] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^d}{d!}\ \mu\varepsilon\ d = 0,1,2,\ldots \qquad (3.3)$$

Επίσης η $\mathrm{D}(t,u)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο $\lambda(u-t)$ και απευθύνεται στο χρονικό διάστημα $(t,u]$. Τέλος οι προσαυξήσεις στην Poisson είναι ανεξάρτητες . Αυτό σημαίνει ότι η ζήτηση σε ένα χρονικό διάστημα είναι ανεξάρτητη από την ζήτηση σε κάποιο άλλο διάστημα είτε προγενέστερο είτε μεταγενέστερο.

Έστω τώρα ότι έχουμε μεγάλο αριθμό πελατών πλήθους n με πιθανότητα p να αγοράσει κάποιος ένα προϊόν . Το κατάστημα θα υπολογίσει το λ από τα ιστορικά στατιστικά στοιχεία και έτσι θα βρει τον αριθμό των προϊόντων ανά μονάδα χρόνου .Τώρα χωρίζουμε το μοντέλο σύμφωνα με τις πιθανές τιμές του L .

1. Αν $L = 0$ παραγγέλνω ακριβώς την στιγμή που μηδενίζεται το απόθεμα. Εδώ δεν χρειάζεται να αποθηκεύω μεγάλα αποθέματα καθώς η παραγγελία φτάνει κατευθείαν. Εκτός αυτού δεν χρειάζεται να παραγγέλνω σταθερές ποσότητες , αλλά μόνο όσες χρειάζομαι. Επίσης το μοντέλο αυτό υπακούει και στην αρχική συνθήκη σύμφωνα με την λία φτάνει την χρονική στιγμή, που μηδενίζονται τα αποθέματα.

2. Αν τώρα $L > 0$ παραγγέλνω την χρονική στιγμή που το απόθεμα μου φτάνει στην τιμή r . Την τιμή του r την καθορίζει το κατάστημα ανάλογα με τις πωλήσεις που είχε στο παρελθόν. Κανείς όμως δεν μπορεί να μας εγγυηθεί ότι δεν θα αλλάξει η ζήτηση. Αν λοιπόν μειωθεί η ζήτηση, τότε θα έχω αυξήσει τα διαθέσιμα αποθέματα μου και αυτό θα μου αυξήσει πιθανότατα το κόστος αποθήκευσης. Αν τώρα η ζήτηση αυξηθεί και ξεπεράσει το r τότε θα έχω ελλείψεις και άρα φεύγουμε από το μοντέλο EOQ. Όσο αυξάνεται το L τόσο αυξάνεται και η πιθανότητα να αντιμετωπίσουμε ελλείψεις. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής :

$$D(t) \sim Poisson(\lambda t) \Rightarrow E(D) = \lambda L \; \kappa\alpha\iota \; Var(D) = \lambda L$$

$$\text{Άρα ισοδύναμα έχουμε ότι όταν το } L \text{ αυξάνει} \Leftrightarrow Var(D) \text{ αυξάνει}$$

Επομένως αυξάνει η αβεβαιότητα της ζήτησης και τόσο μεγαλύτερη πιθανότητα έχουμε για ελλείψεις .

Η διαδικασία Poisson χρησιμοποιείται συχνά στην μοντελοποίηση για τους εξής λόγους:

- είναι εύκολα υπολογίσιμη αφού η μόνη παράμετρος είναι ο συντελεστής λ .
- σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις το μοντέλο είναι αρκετά ακριβές και ρεαλιστικό.
- η ζήτηση συμπεριφέρεται σαν να ακολουθεί Poisson.
- η μαθηματική απλότητα αυτού του μοντέλου, απλουστεύει τις περεταίρω αναλύσεις.

3.3 ΜΟΝΤΕΛΟ EOQ ΜΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΕΝΕΣ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ (PLANNED BACKORDERS)

Αρχικά θα κάνουμε μια αναδρομή στους τύπους που θα χρησιμοποιήσουμε στη συγκεκριμένη πολιτική:

$D = \{D(t) : t \geq 0\}$

$I(t) = \alpha\pi o\theta\acute{\varepsilon}\mu\alpha$ τη χρονική στιγμή t.

$B(t) = \varepsilon\kappa\kappa\rho\varepsilon\mu\acute{o}\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma$ τη χρονικη στιγμή t .

$IN(t) =$ καθαρό απόθεμα τη χρονική στιγμή t.

$IO(t) =$ αποθέματα σε παραγγελία τη χρονική στιγμή t.

$IP(t) =$ θέση αποθεμάτων τη χρονική στιγμή t = $IN(t) + IO(t)$.

$A(t) =$ ποσοστό του χρόνου όπου υπάρχει μηδενικό απόθεμα.$=1\{IN(t) < 0\}$

Η καθαρή θέση των αποθεμάτων $IN(t)$ καθορίζει την τιμή του δείκτη μηδενισμού αποθεμάτων $A(t)$ αφού

$$IN(t)=\begin{cases} I(t) & \text{ύπαρξη αποθεμάτων} \\ -B(t) & \text{μηδενικό απόθεμα} \end{cases} \Leftrightarrow A(t)=\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Για να περιγράψουμε την κατανομή της καθαρής θέσης (IN) χρειαζόμαστε τις κατανομές δυο άλλων τυχαίων μεταβλητών IP και L. Η κατανομή της οποίας θα περιγραφεί στη συνέχεια, ενώ η δεύτερη τυχαία μεταβλητή ονομάζεται leadtime demand. Η ζήτηση από την στιγμή που κάνουμε την παραγγελία έως την στιγμή της παραλαβής της , συμβολίζεται με D_L. Ο δείκτης διακύμανσης σ είναι η τυπική απόκλιση του D και συμβολίζεται με $\sigma(D)$

Σύμφωνα με τους Κλέων Τσίμπος-Φώτης Γεωργιακώδης (1999)

<u>*Ορισμός:*</u> Διακύμανση

Αν $x, x_2, \ldots, x_N$ πληθυσμός μεγέθους N γνωστού μέσου μ, η διακύμανση σ^2 των x_ι ορίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών της μεταβλητής από τον αριθμητικό μέσο ,δηλαδή

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

Σύμφωνα με τον Τάκης Παπαϊωάννου (2000)

<u>*Ορισμός τυπικής απόκλισης*</u>

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης ορίζεται ως τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού ,δηλαδή

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

Το πρωταρχικό ενδιαφέρον είναι η μέτρηση των παρακάτω μέτρων $\overline{I},\overline{OF},\overline{B} \kappa\alpha\iota \overline{A}$ που έχουν οριστεί στο ντετερμινιστικό μοντέλο από τους τύπους (1,5),(1,6),(1,22) και (1,26) αντίστοιχα.

3.4. ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Για μια πολιτική (r, q) το μοντέλο είναι αντίστοιχο του EOQ αλλά διαφέρει στη στοχαστική ζήτηση. Στο EOQ το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου προέκυπτε από τον τύπο

$$\overline{C} = k\overline{OF} + c\lambda + h\overline{I} + b\overline{B} \qquad (3.4)$$

Οι άγνωστοι εδώ είναι τα $\overline{OF},\overline{I} \kappa\alpha\iota \overline{B}$,όπου $\overline{I} \kappa\alpha\iota \overline{B}$ είναι στοχαστικές διαδικασίες. Ας εξετάσουμε λοιπόν το καθένα χωριστά ώστε να καταφέρουμε να βρούμε μια *ελάχιστη τιμή* για το μέσο κόστος.

Στο μοντέλο EOQ το μέσο απόθεμα προκύπτει από τον τύπο (1,5) έχουμε: $\overline{I} = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T I(t)\,dt \right)$ όπου το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής $I(t)$ είναι και αυτό τυχαία μεταβλητή και ισούται με το εμβαδόν που σχηματίζει η συνάρτηση με τον άξονα χ΄χ στο διάστημα (0,T] . Το πρόβλημα στην περίπτωση όπου η ζήτηση είναι στοχαστική είναι ότι η συνάρτηση $I(t)$ είναι στοχαστική διαδικασία . Άρα η συνάρτηση $I(t)$ δεν παραγωγίζεται και αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε χρονική στιγμή t η $I(t)$ έχει άπειρες εφαπτόμενες. Επομένως η $I(t)$ δεν είναι μια κλασσική ευθεία ή καμπύλη , αλλά έχοντας έναν συγκεκριμένο συντελεστή διεύθυνσης είναι σαν συνάρτηση «καρδιογράφημα». Τίθεται λοιπόν το παρακάτω ερώτημα. Πώς θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε το $\int_0^T I(t)\,dt$;

Όπως έχουμε πει η επιχείρηση κάνει παραγγελία q όταν το απόθεμα μας φτάσει την τιμή r . Το απόθεμα $I(t)$ αφού δεν έχει μια συγκεκριμένη τροχιά ώστε να μπορεί να υπολογιστεί το εμβαδόν της , μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση στην οποία να τείνει και να το υπολογίσουμε με αυτήν. Έστω λοιπόν ότι

$I(t) \sim g_I$ δηλαδή για κάθε i έχουμε $P\left[I(t)=i\right]=g_I(i)$..

Αυτό το διάνυσμα είναι μια συνάρτηση μάζας που την ονομάζουμε στάσιμη κατανομή. Το πού θα βρίσκεται το απόθεμα εξαρτάται από την $g_I(i)$ και έχει νόημα να μιλήσουμε για αναμενόμενη τιμή του $I: E[I]=\sum_i i g_I(i)$.Το απόθεμα είναι βαθμωτή συνάρτηση, καθώς μεταβάλλεται κάθε φορά που έχουμε ζήτηση ή φτάνει μια παραγγελία. Είναι λοιπόν μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χώρο καταστάσεων .Όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές, δηλαδή κάθε φορά που το απόθεμα χτυπάει το r επαναλαμβάνεται το πρόβλημα από την αρχή της μαρκοβιανής διαδικασίας. Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα περιμένουμε η επιρροή της αρχικής κατάστασης να έχει εξαλειφθεί . Όταν το $t \to \infty$ η κατανομή του $I(t)$ συγκλίνει σε μια κατανομή ανεξάρτητη του t και της αρχικής κατάστασης.Οταν $t \to \infty$ τότε $I(t) \to I$

Ας έρθουμε όμως στο βασικό μας στόχο που εστιάζεται στο να βρούμε το μέσο απόθεμα του $I(t)$. Το $E[I]=\sum_i i g_I(i)$ είναι η αναμενόμενη τιμή της οριακής κατανομής του I(t) όταν το $t \to \infty$ ενώ ο δειγματικός μέσος είναι το μέσο $I(t)$. Μας ενδιαφέρει λοιπόν το πού βρίσκεται το απόθεμα μας την χρονική στιγμή t , που είναι μια τυχαία μεταβλητή I η οποία ακολουθεί κατανομή g_I. Για να υπολογίσω όμως την αναμενόμενη τιμή θα πρέπει να κάνω αναφορά στο εργοδικό θεώρημα. Η αναμενόμενη τιμή προκύπτει προσομοιώνοντας την κατανομή $g_I(i)$ και παίρνοντας από n βήματα το μέσο όρο αυτών. Το εργοδικό θεώρημα μας δίνει την δυνατότητα να προσομοιώσουμε τη διαδικασία και να πάρουμε τους χρονικούς μέσους υλοποίησης αυτής, άρα $\overline{I} = E(I) = \frac{1}{n}(I_1 + I_2 + \ldots + I_n)$.

Το $\overline{I}$ έχει περιορισμένη κατανομή , αυτό σημαίνει οι κατανομές πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $I(t)$ συγκλίνουν σε ένα όριο (μια κατανομή) καθώς το $t \rightarrow \infty$ και αυτή η κατανομή δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες .Το κέρδος από την εργοδικότητα είναι ότι το όριο της κατανομής είναι η g_I . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\overline{B} = E(B) = \sum_i i g_B(i). \qquad (3.5)$$

3.5 ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΒΑΣΗΣ ΜΕ ΤΟΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ k ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την συνάρτησης μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου της πολιτικής (r, q) .Αρχικά θα πάρουμε σαν δεδομένο ότι το σταθερό κόστος παραγγελίας k είναι μηδέν. Έστω επίσης ότι η ποσότητα παραγγελίας είναι ένα τεμάχιο επομένως

$$k = 0 \qquad\qquad q = 1 .$$

Μερικές φορές υπάρχει μια μονάδα ποσότητας και για τη ζήτηση και για την προσφορά (όπως το γέμισμα μιας καρότσας φορτηγού) και κάτω από αυτές τις συνθήκες έχει νόημα να θέτουμε το ποσό της παρτίδας ίσο με την μονάδα. Έστω επίσης το απόθεμα βάσης

$s = r + 1$ και την στιγμή t κάνουμε παραγγελία για ένα τεμάχιο

$$IP\left(t-\right) = r \qquad IP\left(t+\right) = s$$

Οπότε όταν η θέση του αποθέματος φτάνει στην τιμή r , η επιχείρηση κάνει παραγγελία και περνάει χρονικό διάστημα L μέχρι να έρθει απόθεμα ασφαλείας, Το τελευταίο όμως μπορεί να μην φτάσει εγκαίρως και να έχω ελλείψεις.

Στόχος μας είναι να η στοχαστική διαδικασία $IP(t)$ να είναι σταθερή και ίση με s. Αυτή η πολιτική ονομάζεται *πολιτική αποθέματος βάσης*. Η πολιτική αυτή είναι ιδιαιτέρως βολική, καθώς υπάρχει μόνο μια μεταβλητή το r . Αρχικά αν η θέση αποθεμάτων της επιχείρησης είναι μεγαλύτερη του s, περιμένουμε ώστε να πέσει με τις πωλήσεις στην τιμή $IP(0)=s$. Αν τώρα η θέση αποθεμάτων της επιχείρησης είναι μικρότερη του s κάνω παραγγελία τόσες μονάδες ώστε η θέση την χρονική στιγμή μηδέ να είναι ίση με $IP(0)=s$. Τώρα από εδώ και στο εξής για κάθε πώληση ενός αντικειμένου υπάρχει ταυτόχρονη παραγγελία ενός τεμαχίου τέτοια ώστε για κάθε χρονική στιγμή t να ισχύει ότι $IP(t)=s$. Μερικές φορές ονομάζεται και *πολιτική αναπλήρωση* s *ένα προς ένα* (replenishment policy). Η πολιτική αυτή έχει νόημα όταν οι Οικονομίες Κλίμακας στο σύστημα προσφοράς είναι αμελητέες με τους άλλους παράγοντες .

<u>*Ορισμός:*</u> Οικονομία Κλίμακας

Οικονομία Κλίμακας ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος μειώνεται όσο αυξάνεται η παραγόμενη ποσότητα . Αυτό οφείλεται σε 3 βασικούς λόγους

1. την ύπαρξη σταθερών στοιχείων κόστους ,ανεξαρτήτων από την

ποσότητα.

2. την εξειδίκευση που μερικές φορές είναι δυνατή μέσω την αύξηση του αριθμού των εργαζομένων.
3. τη χρήση της τεχνολογίας σχεδιασμένη για μεγάλες ποσότητες παραγωγής.

Σε αυτή τη πολιτική υπάρχουν 2 βασικά ερωτήματα:

1. ποιες πολιτικές είναι βέλτιστες;
2. ποια είναι η επιλογή του r και κατ` επέκταση του s;

Η απάντηση σ` αυτά τα ερωτήματα είναι κοινή χωρίς όμως να είναι και απλή. Είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι όσο αυξάνει το s και όσο μειώνεται το L, τόσο μειώνονται οι πιθανότητες να έχουμε ελλείψεις. Η απόφαση για το πόσο θα είναι το s εξαρτάται από τον ανταγωνισμό του κόστους αποθέματος με το κόστος ελλείψεων. Αν το κόστος αποθήκευσης είναι μεγαλύτερο του κόστους ελλείψεων, τότε πιθανότατα θα διαλέξω ένα s σχετικά μικρό που θα με οδηγήσει σε ελλείψεις. Ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα επιλέξω σίγουρα ένα μεγαλύτερο s.

Αφού $IP(t)=s$, από το τύπο $s = IN(t) + IO(t) \qquad (3.6)$ για να υπολογίσω το $IN(t)$ αρκεί να βρω την κατανομή που ακολουθεί το $IO(t)$ καθώς το s είναι γνωστό .Το $IO(t)$ παίρνει ακέραιες τιμές θετικές ή μηδέν αφού έχουμε θέσει το q ίσο με την μονάδα. Επομένως η κατανομή του q είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $P\left(IO(t)=k\right) \text{όπου} \, k=0,1,2,...$ Έστω τώρα ένα χρονικό διάστημα $(t-L,t]$. Στο διάστημα αυτό η ζήτηση είναι

$$\text{Poisson}\left(\lambda\left(t-(t-L)\right)\right) = \text{Poisson}(\lambda L). \qquad (3.7)$$

Άρα

$IO(t) \sim \text{Poisson}(\lambda L) \Leftrightarrow$
$IO(t) \sim D(\zeta \acute{\eta}\tau\eta\sigma\eta\, \sigma\varepsilon\, \acute{\varepsilon}\nu\alpha\, \chi\rho o\nu\iota\kappa\acute{o}\, \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\, Leadtime).$

Εμάς όμως μας ενδιαφέρει η οριακή κατανομή του $IN(t)$ και αφού

$IO(t) \geq 0$ τότε από την σχέση (3.6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&IN(t) \leq s \Leftrightarrow IN(t) \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, s\} \Leftrightarrow \\
&I_N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{D} s - D\; \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\; \eta\; \sigma\tau\acute{\alpha}\sigma\iota\mu\eta\; \kappa\alpha\tau\alpha\nu o\mu\acute{\eta}\; \tau o\upsilon\, IN(t) \\
&\acute{\alpha}\rho\alpha\; o\iota\; \mu\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\varsigma\; \tau\iota\mu\varepsilon\varsigma\; \gamma\acute{\iota}\nu o\nu\tau\alpha\iota: \\
&\mathrm{E}[I_N(t)] = \mathrm{E}[s - D] = s - E[D] = s - \lambda L. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Έχουμε δει από την σχέση (1,23) ότι

$$A(t) = 1\{IN(t) \leq 0\} = 1\{D \geq s\} \qquad (3.9)$$

η οποία είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε $t \geq 0$ και ακολουθεί την διωνυμική κατανομή Bernoulli. Επίσης

$$\overline{A} = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T A(t)\, dt \right] = E[A] \qquad (3.10)$$

και από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$E[A] = P(D \geq s) = \overline{A} \Leftrightarrow 1 - \overline{A} = P(D \leq s) \qquad (3.11)$$

όπου $\overline{A}$ το ποσοστό χρόνου που έχουμε ελλείψεις οριακά

και $1 - \overline{A}$ το ποσοστό του χρόνου που δεν έχω ελλείψεις οριακά

$$1 - \overline{A} = P(D \leq s) = fill\ rate$$

Πάμε τώρα να αποτιμήσουμε τα $\overline{B}, \overline{I}$.όπου

$$\overline{B} = (IN)^{-} = (s - D)^{-} = (D - s)^{+} = k\; \acute{o}\pi o\upsilon\; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Αφού τώρα $p_k = P(D=k) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ τότε

$$E(B)=E\left((D-s)^+\right)=\sum_{k=s+1}^{\infty}(k-s)\,p_k=\overline{B}. \qquad (3.12)$$

Ξέρουμε επίσης ότι

$$I=(IN)^+=(s-D)^+$$

ξέρουμε επίσης από την σχέση (1,20) ότι

$$E(I)=E(IB)+E(B)=s-\lambda L+\overline{B} \Leftrightarrow$$
$$\overline{I}=s-\lambda L+\overline{B}. \qquad (3.13)$$

Από την θεωρία των δεσμευμένων πιθανοτήτων έχουμε την παρακάτω σχέση

$$E(B)=E(B/A=1)P(A=1)+E(B/A=0)P(A=0). \qquad (3.14)$$

Ξέρουμε ότι $E(B/A=0)=0$ εξ` υποθέσεως, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E(B)=E(B/A=1)P(A=1) \qquad (3.15)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\overline{B}\overset{(3.12)}{=}E(B)\overset{(3.14)}{=}E(B/A=1)P(A=1)\overset{(3.9)}{=}$$
$$=E(B/A=1)P(D\geq s)=$$
$$\overset{(3.11)}{=}E(B/A=1)E(A)\overset{(3,10)}{=}E(B/A=1)\overline{A}$$

όπου η δεσμευμένη μέση τιμή $E(B/A=1)$ βρίσκεται αν διαιρέσω το χρονικό διάστημα, που είχα ελλείψεις με το συνολικό χρόνο της περιόδου.

3.6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

Έστω X≥0 διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$g(k) = P(X = k) \text{ } \acute{o}\pi o\upsilon \text{ } k = 0,1,2,\ldots \qquad (3.16)$$

Σύμφωνα με τον Τάκη Παπαϊωάννου (2000) έχουμε

<u>*Ορισμός*</u>*:* Συνάρτηση Πιθανότητας

Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X . Η συνάρτηση

$$p_x(x) = P(X = x)$$

με πεδίο ορισμού τις τιμές της x και πεδίο τιμών τις πιθανότητες των τιμών αυτών λέγεται συνάρτηση πιθανότητας ή και κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Έστω $G^o(k)$ η συνάρτηση απώλειας μηδενικής τάξης ή οποία είναι ίση με

$$G^o(k) = P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} g(i). \qquad (3.17)$$

Ξέρουμε επίσης ότι

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kg(k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} G^0(k).$$

Έστω τώρα η συνάρτηση απώλειας πρώτης τάξης $G^1(k)$ που δίνεται από

$$G^1(k) = E\left[(X-k)^+\right]$$

και είναι η μέση στάθμη της τυχαίας μεταβλητής που μετράει πόσο πάνω από το k βρίσκονται οι τιμές του X . Για $k = 0$ έχουμε

$G^1(0)=E\left[(X)^+\right]=E(X)$ $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $\mathrm{X}\geq 0.$ Θέτω τώρα $(X-k)^+=\mathrm{Y}$, άρα η συνάρτηση γίνεται

$$G^1(k)=E\left[(X-k)^+\right]=\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\sum_{i=0}^{\infty}P(Y>i)=\sum_{i=0}^{\infty}P\left((X-k)^+>i\right).$$

Όμως $i\geq 0$, επομένως οι όροι της σειράς είναι διάφοροι του μηδενός μόνο στην περίπτωση που $(X-k)\geq i$, και επομένως η συνάρτηση έχει ως ακολούθως

$$G^1(k)=\sum_{i=0}^{\infty}P\left[(X-k)^+>i\right]=\sum_{i=0}^{\infty}P\left[X-k>i\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\left[X>k+i\right]=\sum_{i=0}^{\infty}G^0(k+i).$$

Και θέτοντας $j=k+i$ έχουμε ότι

$$G^1(k)=\sum_{j=k}^{\infty}G^0(j).$$

Επίσης για $k=0$, έχουμε

$$G^1(0)=\sum_{j=0}^{\infty}G^0(j)=E(X).$$

Η συνάρτηση των ελλείψεων γράφεται

$$(D-s)^+=\begin{cases}D-s & \gamma\iota\alpha\ D>s,\\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma,\end{cases}\qquad (3.18)$$

οπότε $\mathrm{E}\left[(D-s)^+\right]=G^1(s).$

Πάμε τώρα να ορίσουμε την συνάρτηση απώλειας δεύτερης τάξης ως

$$G^2(k)=\sum_{j=k+1}^{\infty}G^1(j)=\frac{1}{2}\left[(X-k)^+(X-k-1)^+\right]$$

Όταν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής τότε η παραπάνω συνάρτηση γίνεται

$$G^2(k) = \frac{1}{2}\left[\left(\left(X-k\right)^+\right)^2\right].$$

Πριν επιστρέψουμε όμως στην αποτίμηση της συνάρτησης του μέσου κόστους, υπάρχουν ορισμένες παρατηρήσεις που θα μας φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμες στην συνέχεια.

Η συνάρτηση $G^o(k)$ είναι φθίνουσα, καθώς όπως προκύπτει από τους παρακάτω τύπους, η μεταβολή της συνάρτησης είναι αρνητική.

$$G^o(k+1) - G^o(k) = -g(k+1) < 0 \Rightarrow$$
$$G^o(k+1) < G^o(k) \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \;\; g(k+1) \geq 0$$

Όσον αφορά τώρα την $G^1(k)$ έχουμε

$$G^1(k+1) - G^1(k) = -G^0(k) < 0.$$

Επομένως η $G^1(k)$ είναι επίσης φθίνουσα και κυρτή, καθώς η πρώτη παράγωγος της είναι επίσης αρνητική και αύξουσα. Αυτό συμβαίνει γιατί αν $G^o(k)$ φθίνουσα τότε η - $G^o(k)$ αύξουσα.

Έτσι για να επανέλθουμε στα αποθέματα και συνυπολογίζοντας την παραπάνω μαθηματική ανάλυση προκύπτουν οι παρακάτω τύποι:

$$\overline{A}(s) = G^o(s-1) \;\; \eta \;\; o\pi o\acute{\iota}\alpha \;\; \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \;\; \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha.$$
$$\overline{B}(s) = G^1(s) \text{ η οποία είναι φθίνουσα και κυρτή.}$$
$$\bar{\mathrm{I}}(s) = s - \lambda L + G^1(s).$$

Επειδή η ταυτοτική είναι αύξουσα και η $G^1(s)$ φθίνουσα δεν επαρκούν τα στοιχεία για να αποφασίσουμε για την μονοτονία της $\bar{\mathrm{I}}(s)$. Έτσι θα υπολογίσουμε την παρακάτω διαφορά ώστε να μπορέσουμε να αποφανθούμε

$$\bar{\mathrm{I}}(s+1) - \bar{\mathrm{I}}(s) = s + 1 - \lambda L + G^1(s+1) - \left(s - \lambda L + G^1(s)\right) =$$
$$= 1 + G^1(s+1) - G^1(s) = 1 - G^0(s).$$

=

Επειδή το $G^0(s)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας και επομένως είναι μικρότερο της μονάδας, προκύπτει ότι η μεταβολή των μέσων αποθεμάτων είναι θετική. Οπότε η συνάρτηση $\bar{I}(s)$ κυρτή και αύξουσα.

Ορίζουμε τώρα το μέσο κόστος

$$\overline{C}(s) = h\,\bar{I}(s) + b\,\overline{B}(s). \qquad (3.19)$$

Το μέσο κόστος είναι άθροισμα κυρτών συναρτήσεων και επομένως είναι και αυτή κυρτή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση του μέσου κόστους έχει ελάχιστο. Επομένως υπάρχει βέλτιστη τιμή του S στο σημείο όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος του μέσου κόστους ως προς την μεταβολή του S.

Δεν υπάρχουν πιο εύχρηστοι τύποι για τις $G^0(s)$, $G^1(s)$ οπότε πρέπει να τους δημιουργήσουμε

$$\overline{A}(s) = G^o(s-1) = 1 - \sum_{j<s} g(j),$$

$$\overline{B}(s) = G^1(s) = 1 - \sum_{j<s} G^0(j).$$

Οι παραπάνω τύποι είναι σωστοί ακόμη και για αρνητικό S , όπου $G^0(s)=1$ και $G^1(s) = -(s-\lambda L)$. Δεν θα διαλέξουμε ποτέ ένα αρνητικό S στην πράξη. Μπορούμε όμως να επιλέξουμε $s=0$, τότε το απόθεμα δεν θα μπορεί να μειωθεί περισσότερο από $\bar{I}(s)=0$, άλλα αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνει το $\overline{B}(s)$.

3.7 ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Το παραπάνω μέτρο απόδοσης του μέσου αποθέματος εξαρτάται από τις παραμέτρους του συστήματος λ και L μόνο μέσω του προϊόντος λL . Θα πρέπει να μαντέψουμε αν το σύστημα με υψηλό demand rate λ και μικρό leadtime demand L θα συμπεριφέρεται αρκετά διαφορετικά από ένα χαμηλό λ και μεγάλο L. Η απάντηση είναι όχι καθώς όσο το γινόμενο λL είναι το ίδιο για τα δυο συστήματα , οι αποδόσεις των χαρακτηριστικών τους θα είναι πανομοιότυπες. Οι τύποι αποκαλύπτουν τις ποιοτικές επιπτώσεις στις επιδόσεις των μεταβολών του S. Το $\overline{B}(s)$ μειώνεται και είναι κυρτή ως συνάρτηση του S, όσο το επίπεδο του βασικού αποθέματος αυξάνεται , οι ελλείψεις παρακμάζουν αλλά με χαμηλότερο ρυθμό. Ακολούθως το $\bar{\mathrm{I}}(s)$ αυξάνεται σε συνάρτηση με την αύξηση του S. Όσο για το $\overline{A}(s)$ μειώνεται σε σχέση με το S καθώς αύξηση του ορίου βασικού αποθέματος μειώνει την πιθανότητα μηδενισμού του αποθέματος.

3.8 ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΒΑΣΗΣ (r,q) ΜΕ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ q≥1 ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ k≠0.

Το σταθερό κόστος παραγγελίας k σε αυτή την περίπτωση δεν είναι μηδέν. Επομένως η παραγγελία γίνεται για q κομμάτια κατά την χρονική στιγμή που η θέση αποθεμάτων γίνεται

$$IP(t) = r. \qquad (3.20)$$

Η παραγγελία καταφτάνει σε χρόνο L .Το απόθεμα μου αυξάνεται σε r+q.

Πρέπει να προσδιορίσουμε τώρα την στάσιμη κατανομή των συναρτήσεων των μέσων. $\overline{\mathrm{A}}(\mathrm{r},\mathrm{q}),\ \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{r},\mathrm{q}),\ \overline{\mathrm{I}}(\mathrm{r},\mathrm{q}),\ \overline{\mathrm{OF}}$. Στη συνέχεια θα πάρουμε την αναμενόμενη τιμή κάτω από αυτή τη στάσιμη κατανομή. Κάτω από αυτό το πρίσμα βλέπουμε πώς κινείται η θέση αποθέματος μας. Ως μέγιστη τιμή της θέσης αποθεμάτων έχουμε τη στιγμή που γίνεται η παραγγελία q όπου παίρνει την τιμή $r+q$. Όταν το IP μειωθεί στην τιμή r τότε αυτόματα γίνεται παραγγελία q μονάδων και αυξάνεται πάλι η θέση μας σε $r+q$. Ουσιαστικά η θέση μας δεν έπεσε ποτέ κάτω από το $r+q$. Λόγω της πολιτικής που ακολουθούμε, μας ενδιαφέρουν οι τιμές που παίρνει η IP καθώς μεταβάλλεται το q. Αφού λοιπόν $q \geq 1$ η θέση αποθεμάτων παίρνει τιμές στο παρακάτω διάστημα:

$$IP(t) \in \{r+1, r+2, \ldots, r+q\}. \qquad (3.21)$$

Η στοχαστική διαδικασία IP είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα σε πεπερασμένο χρόνο.Σύμφωνα με τον Μωυσής Α. Μπουντουριδης (2005) έχουμε

<u>*Ορισμός*</u>: Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ λέγεται ότι είναι μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, αν αφενός όλες οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(n)\}_{n\geq 0}$ παίρνουν τιμές στο ίδιο αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S και αφετέρου ισχύει η παρακάτω ιδιότητα Markov για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots t_N$ και για κάθε $s_i, s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{n-1}}, s_j \in S$:

$$P\left(X_{t_n} = s_j / X_{t_{n-1}} = s_i, X_{t_{n-2}} = s_{i_{n-1}}, \ldots, X_{t_0} = s_0\right) = P\left(X_{t_n} = s_j / X_{t_{n-1}} = s_i\right)$$

Αφού λοιπόν η $IP(t)$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πεπερασμένες καταστάσεις q, μπορώ να φτιάξω μια κυκλική συνάρτηση με περιοδικές καταστάσεις, όπου ισχύει και εδώ το εργοδικό θεώρημα. Η στάσιμη κατανομή είναι ομοιόμορφη διακριτή στο χρόνο. Η πιθανότητα μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη είναι ίδια. Άρα η στάσιμη κατανομή της θέσης αποθεμάτων είναι:

$$\begin{aligned} &IP \sim U\left(r+1,\ldots,r+q\right)(\delta\iota\alpha\kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}) \Leftrightarrow \\ &P\left(IP = r+i\right) = \frac{1}{q}, \forall i = \left\{1,2,\ldots,q\right\}. \qquad (3.22) \end{aligned}$$

Πάμε τώρα να δούμε την κατανομή των καθαρών αποθεμάτων. Από τον τύπο (2,21) έχουμε

$$\begin{aligned} &IN\left(t+L\right) = IN\left(t\right) + IO\left(t\right) - D\left(t,t+L\right) \Leftrightarrow \\ &IN\left(t+L\right) = IP\left(t\right) - D\left(t,t+L\right). \qquad (3.23) \end{aligned}$$

Τα $IP\left(t\right), D\left(t,t+L\right)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, αφού η θέση αποθεμάτων είναι ομοιόμορφη κατανομή (U) και η ζήτηση είναι Poisson. Έτσι η κατανομή των καθαρών αποθεμάτων μπορεί να βρεθεί. Αντίστοιχα μπορώ να βρω τις κατανομές των

$$\begin{aligned} &B = \left(IN\right)^- = \left(IP - D\right)^-, \\ &I = \left(IN\right)^+ = \left(IP - D\right)^+ . \qquad (3.24) \end{aligned}$$

Από τις (3,21), (3,22) και την τελευταία παράγραφο έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &IP \sim DU\left\{r+1,\ldots,r+q\right\}, \\ &D \sim P\left(\lambda L\right), \qquad (3.25) \\ &IP, D \_ \alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma . \end{aligned}$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε τα μέσα αποθέματα και τις μέσες ελλείψεις από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned} \overline{I}(r,q) &= E\left[(IN)^{+}\right] = E\left[(IP-D)^{+}\right], \\ \overline{B}(r,q) &= E\left[(IN)^{-}\right] = E\left[(IP-D)^{-}\right], \\ \overline{A}(r,q) &= P\left[IN \le 0\right]. \end{aligned} \qquad (3.26)$$

Θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση των μέσων ελλείψεων και το ίδιο θα ισχύει και για τις υπόλοιπες συναρτήσεις ,καθώς ο τρόπος υπολογισμού είναι ο ίδιος.

$$\begin{aligned} \overline{B}(r,q) &= E\left[(IN)^{-}\right] = E\left[(IP-D)^{-}\right] = \\ &= \sum_{s=r+1}^{r+q} P(IP=s)\,E\left[(IP-D)^{-} \mid IP=s\right] = \\ &\overset{(2,15)}{=} \sum_{s=r+1}^{r+q} \frac{1}{q}\overline{B}(s). \end{aligned}$$

Ομοίως και για τις άλλες δυο έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{I}(r,q) &= \frac{1}{q}\sum_{s=r+1}^{r+q} \overline{I}(s), \\ \overline{A}(r,q) &= \frac{1}{q}\sum_{s=r+1}^{r+q} \overline{A}(s). \end{aligned}$$

3.9 ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΟΥ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Έχουμε Φτάσαμε κοντά στην υπολογισμό των r,q έτσι ώστε το μοντέλο μας να βρίσκει την ελάχιστη συνάρτηση κόστους. Πως μπορώ όμως να βρω τα r και q που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση $\bar{c}(r,q)$; Η απάντηση κρύβεται στον τρόπο που θα ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση του μέσου συνολικού κόστους. Γνωρίζουμε ότι:

$$c(r,q) \to \min \bar{c}(r,q)$$

$$\bar{c}(r,q) = \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{q}\sum_{s=r+1}^{r+q} \bar{c}(s) = \frac{\left[k\lambda + \sum_{s=r+1}^{r+q} \bar{c}(s)\right]}{q} \qquad (3.27)$$

Για να βρούμε τώρα το ελάχιστο της $\bar{c}(r,q)$ αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε πρώτα ως προς το ένα και μετά ως προς το άλλο. Επομένως

$$\min_{(r,q)} \bar{c}(r,q) = \min_{q} \left[\min_{r} \bar{c}(r,q)\right] \underset{c^{*}(q)=\min_{r} \bar{c}(r,q)}{\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega}{=}}$$
$$= \min_{q \geq 1} c^{*}(q)$$

Όπου

$$c^{*}(q) = \min_{r} \bar{c}(r,q) = \frac{\left[k\lambda + \min_{r} \sum_{s=r+1}^{r+q} \bar{c}(s)\right]}{q}$$

Επειδή η συνάρτηση του μέσου συνολικού κόστους είναι κυρτή, ξέρω ότι δίπλα σε ένα ελάχιστο βρίσκεται το ακριβώς επόμενο ελάχιστο. Έστω δηλαδή η συνάρτηση:

$$\bar{c}(s),\ \acute{o}\pi o \upsilon\_s = 1, 2, \ldots$$

Τα τρία μικρότερα σημεία της είναι:

$$c_1 = \min \bar{c}(s)$$
$$c_2 = 2o\_\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\_\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\_\tau\eta\varsigma\_\bar{c}(s)$$
$$c_3 = 3o\_\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\_\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\_\tau\eta\varsigma\_\bar{c}(s)$$

Με τον τρόπο αυτό διατάσσουμε όλα τα σημεία της συνάρτησης μέσου συνολικού κόστους γύρω από την ελάχιστη τιμή c_1. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε το c^* αναδρομικά.

$$W(r,q) = \sum_{s=r+1}^{r+q} \bar{c}(s) \Leftrightarrow$$
$$W^*(q) = \min_r W(r,q)$$
$$\acute{o}\pi o\upsilon\_r^*(q) = \beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau\eta\_\tau\iota\mu\acute{\eta} \Leftrightarrow$$
$$W(r^*(q),q) = W^*(q)\_\kappa\alpha\iota\_\bar{c}(r^*(q),q) = c^*(q)$$

Έστω λοιπόν από την (3.27) η παρακάτω συνάρτηση όπου το $c(r,q)$ είναι το άθροισμα του αριθμητικού μέσου του συνολικού κόστους πολιτικής αποθέματος βάσης και του σταθερού κόστους $\frac{k\lambda}{q}$.Έστω ότι C_1 είναι η ελάχιστη τιμή του $C(s)$, έστω επίσης ότι C_2 είναι η δεύτερη μικρότερη τιμή και η C_3 είναι η τρίτη. Διατάσουμε λοιπόν τις τιμές σε σειρά μεγέθους $\{c_1, c_2, \ldots\}$ και η ακολουθία ελαχίστων που δημιουργείται είναι αύξουσα. Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι τιμές του κόστους είναι θετικές ακέραιες. Αρχικά στο μοντέλο μας θέτουμε μία τιμή για το q, το οποίο μας δηλώνει ότι το άθροισμα της σχέση (3.27) έχει q αθροίσματα και γίνεται:

$$\sum_{s=r+1}^{r+q} c(s) = C(r+1) + C(r+2) + \ldots + C(r+q). \qquad (3.28)$$

.

Αφού αποφασίστηκε η τιμή του q γίνεται προσπάθεια να βρεθεί το βέλτιστο $r^*(q)$ για το οποίο, το παραπάνω άθροισμα μας δίνει τις μικρότερες q τιμές του $c(s)$ οι οποίες ξέρω από την παραπάνω ακολουθία ότι είναι οι $\{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$. Γνωρίζοντας ότι η $C(s)$ είναι κυρτή τα υπόλοιπα ελάχιστα της συνάρτησης αυτής θα βρίσκονται αριστερά και δεξιά από την ελάχιστη τιμή. Πρέπει λοιπόν να βρεθεί η διαδοχική $q\text{–}άδα$ η οποία βρίσκεται μετά τον όρο $c(r)$ και πρέπει να δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα για την σχέση (3.28)

$$\sum_{s=r+1}^{r+q} c(s) \overset{r=r^*(q)}{=} c_1 + c_2 + \ldots + c_q$$

Επομένως εδώ για $r^*(q)$ έχουμε

$$\sum_{s=r^*(q)+1}^{r^*(q)+q} c(s) = C(r^*(q)+1) + C(r^*(q)+2) + \ldots + C(r^*(q)+q) = c_1 + c_2 + \ldots + c_q.$$

Αφού βρέθηκε το βέλτιστο $r^*(q)$ πρέπει να βρεθεί και το βέλτιστο $r^*(q+1)$.Πρέπει δηλαδή να βρεθεί $q+1\text{–}άδα$ η οποία έχει τα ελάχιστα $q+1$ κόστη μέσω του $r^*(q)$. Το νέο κόστος που θα προστεθεί θα είναι το c_{q+1}, που λόγο της κυρτότητας του $C(s)$ θα βρίσκεται είτε αριστερά της $q\text{–}άδα$ και θα έχει την τιμή $C(r^*(q))$, είτε δεξιά και θα έχει την τιμή $C(r^*(q)+q+1)$. Όποια από τις δύο είναι η ελάχιστη, αυτή θα είναι και η τιμή του c_{q+1} και δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$c_{q+1} = \min\left\{C\left(r^*(q)\right), C\left(r^*(q)+q+1\right)\right\}$$

Όπου το $r^*(q+1)$ γίνεται όταν έχουμε ελάχιστο από αριστερά ίσο με $r^*(q)-1$ και όταν έχουμε ελάχιστο από δεξιά παραμένει $r^*(q)$ Ένα συμπέρασμα που βγαίνει από την παραπάνω σχέση είναι ότι η αύξηση του q δεν αυξάνει το $r^*(q)$, αλλά το μειώνει με ίσο ή μικρότερο ρυθμό από ότι αυξάνει το q.

Η βελτιστοποίηση του $r^*(q)$ ήταν εύκολη για ένα σταθερό q. Χρειάζεται ακόμα να βελτιστοποιηθεί και το q. Έστω ότι $C^*(q)=C(r^*(q),q)$ είναι το βέλτιστο σταθερό κόστος για ένα σταθερό q, και θέτουμε

$$q^* = \min\left\{q > 0 : c_{q+1} \geq C^*(q)\right\}. \qquad (3.29)$$

Από τη σχέση (3.27) έχουμε

$$C^*(q+1) = \frac{\left[k\lambda + \sum_{j=1}^{q+1} c_j\right]}{q+1} \Leftrightarrow$$

$$(q+1)C^*(q+1) = k\lambda + \sum_{j=1}^{q} c_j + c_{q+1} \Leftrightarrow$$

$$(q+1)C^*(q+1) = qC^*(q) + c_{q+1} \Leftrightarrow$$

$$(q+1)C^*(q+1) = qC^*(q) + C^*(q) - C^*(q) + c_{q+1} \Leftrightarrow$$

$$(q+1)C^*(q+1) = (q+1)C^*(q) - \left(C^*(q) - c_{q+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$C^*(q+1) = C^*(q) - \frac{\left(C^*(q) - c_{q+1}\right)}{(q+1)}. \qquad (3.30)$$

Η μονοτονία της $c^*(q)$ θα εξεταστεί σε 2 πεδία τιμών ως προς q:

1. έστω ότι $q<q^*$ τότε από την (3.29) έχουμε ότι $c_{q+1} < C^*(q)$ οπότε ο όρος $\frac{\left(C^*(q)-c_{q+1}\right)}{(q+1)}$ είναι θετικός , οπότε από την (4.10) έχουμε ότι $C^*(q+1) < C^*(q)$, οπότε η συνάρτηση $C^*(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

2. Έστω τώρα ότι $q \geq q^*$ τότε από την (3.29) τώρα έχουμε επαγωγικά ότι $c_{q+1} \geq C^*(q)$, οπότε ο όρος $\frac{\left(C^*(q)-c_{q+1}\right)}{(q+1)}$ είναι αρνητικός και από την (3.30) ισχύει ότι $C^*(q+1) \geq C^*(q)$, οπότε η συνάρτηση $C^*(q)$ είναι αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση $C^*(q)$ είναι κυρτή και έχει ελάχιστο στο q^*.

Ορίσαμε επομένως τη στοχαστική διαδικασία, η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση μέσου συνολικού κόστους για την πολιτική δυο μεταβλητών (r,q).
Η αποτίμηση της συνάρτησης μέσου συνολικού κόστους στα στοχαστικά μοντέλα είναι πολύ δυσκολότερη απ` ότι στα ντετερμινιστικά. Η πολυπλοκότητα που χρειάστηκε για να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα, στηρίχθηκε σε περισσότερες παραδοχές σε σχέση με το δεύτερο κεφάλαιο. Η αποτίμηση επετεύχθη ελαχιστοποιώντας πρώτα ως προς τον ένα παράγοντα και στη συνέχεια ως προς το δεύτερο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MATLAB

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε με σκοπό να δημιουργηθούν μοντέλα που θα βοηθήσουν στην αποτίμηση των βέλτιστων αποθεμάτων Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει αναφορά στην χρήση των προγραμμάτων στην πράξη. Η αποτίμηση των μοντέλων θα γίνει δημιουργώντας έναν αλγόριθμο για το κάθε ένα, με γλώσσα προγραμματισμού την Matlab. Αρχικά θα παρουσιαστούν οι εκδοχές του ντετερμινιστικού μοντέλου, που έχουν αναλυθεί στο δεύτερο κεφάλαιο. Στη συνέχεια ο αλγόριθμος θα επεκταθεί στο πιο ενδιαφέρον τρίτο κεφάλαιο, όπου το μοντέλο είναι στοχαστικό.

4.1 ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Στο ντετερμινιστικό μοντέλο ο υπολογισμός των βέλτιστων τιμών δεν αναμένεται να χρειαστεί πολύπλοκες συναρτήσεις. Θα δημιουργήσουμε δύο αλγόριθμους στο μοντέλο αυτό. Στον πρώτο θα υποθέτουμε ότι δεν θα υπάρχουν ελλείψεις, ενώ στο δεύτερο θα εισαχθούν και αυτές.

4.1.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ EOQ

Ο αλγόριθμος εδώ θα βασιστεί πάνω στους τύπους που έχουν δοθεί στο δεύτερο κεφάλαιο. Αρχικά πρέπει να αποφασισθεί τι θα επιστρέφει ως απάντηση το πρόγραμμα. Είναι επαρκές το πρόγραμμα να δίνει τιμές για τη βέλτιστη τιμή της παραγγελίας, που από εδώ και πέρα θα την καλούμε q, και τις μέσες αποδόσεις του συνολικού κόστους, των αποθεμάτων και της συχνότητας. Για τη χρησιμοποίηση του προγράμματος αρκεί ο χρήστης να καλεί από την βάση δεδομένων της Matlab , το M file με όνομα eoq. Στο συγκεκριμένο μοντέλο αρκεί να εισάγει ως δεδομένα το λ, που από εδώ και πέρα θα καλείται demandrate, καθώς και τους συντελεστές κόστους c,k,h.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο αλγόριθμος γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\text{function}\left[q, I, OF, C\right] = \text{eoq}\left(\text{demandrate}, c, k, h\right)\\
&q = \text{sqrt}\left(2 * k * \text{demandrate} / h\right)\\
&I = \text{sqrt}\left(k * \text{demandrate} / 2 / h\right)\\
&OF = \text{sqrt}\left(\text{demandrate} * h / 2 / k\right)\\
&C = c * \text{demandrate} + k * \text{demandrate} / q + 0.5 * h * q\\
&\text{end}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Δίνεται η ακόλουθη αριθμητική εφαρμογή για την περαιτέρω κατανόηση της χρήσης του προγράμματος. Έστω μια εταιρία Ψ η οποία πουλάει ένα συγκεκριμένο είδος επαγγελματικού ψυγείου. Η εταιρία αυτή πουλάει κατά μέσο όρο 7 ψυγεία την εβδομάδα. Το σταθερό κόστος μιας παραγγελίας ανά ψυγείο είναι 150. Το μεταβλητό κόστος ανά ψυγείο είναι 40 . Ενώ το κόστος αποθήκευσης ανά ψυγείο είναι 1.20. Για να δοθεί απάντηση για το βέλτιστο q,θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω συνάρτηση στην Matlab

$$\text{eoq}\left(7, 40, 150, 1.200\right) \tag{4.2}$$

η οποία δίνει τις παρακάτω απαντήσεις

$$\begin{aligned}
&q = 41.8330,\ I = 20.9165,\\
&OF = 0.1673,\ C = 330.1996
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Άρα η βέλτιστη παραγγελία είναι για περίπου 42 ψυγεία με μέσες τιμές αποθέματος 21 ψυγεία παραγγελίας 1 φορά ανά 6 εβδομάδες και ελάχιστο μέσο κόστος παραγγελίας 330.

4.1.2 ΜΟΝΤΕΛΟ EOQ ΜΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΕΝΕΣ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ (PLANNED BACKORDERS)

Στη δεύτερη περίπτωση του ντετερμινιστικού μοντέλου μας έχουμε ελλείψεις. Θα προστεθούν νέες μεταβλητές στο μοντέλο ώστε να αποτιμήσουμε με τις ελλείψεις. Η πιο σημαντική μεταβλητή που εισάγουμε είναι το κόστος εκκρεμοτήτων-ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου και το συμβολίζουμε με b, όπως έχει ορισθεί εκτενώς στο δεύτερο κεφάλαιο. Ως ακολούθως θα μας χρειασθούν οι μεταβλητές v, ω καθώς και οι συναρτήσεις $\mathrm{B}, \mathrm{A}, BW$ για την αποτίμηση όλων των στοιχείων του μοντέλου.

Επομένως ο αλγόριθμος γίνεται

$$
\begin{aligned}
& function[costratio, q, v, I, OF, B, A, C, BW] = eoqbackorders(demandrate, c, k, h, b) \\
& costratio = b/(b+h) \\
& q = sqrt(2*k*demandrate/h)*sqrt(1/costratio) \\
& v = -(1-costratio)*q \\
& I = 0.5*((q+v)^2)/q \\
& OF = demandrate/q \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.4) \\
& B = 0.5*v^2/q \\
& A = 1-costratio \\
& C = c*demandrate + sqrt(k*demandrate*h*costratio) \\
& BW = B/demandrate \\
& end
\end{aligned}
$$

Ας χρησιμοποιήσουμε το ίδιο παράδειγμα με την εταιρία επαγγελματικών ψυγείων Ψ με τη μόνη διαφορά ότι τώρα έχουμε ελλείψεις με συντελεστή ελλείψεων $b = 15$. Η συνάρτηση που καλούμε τώρα στην Matlab είναι η εξής:

$$eoqbackorders(7, 40, 150, 1.200, 15) \qquad (4.5)$$

η οποία μας δίνει τις ακόλουθες βέλτιστες τιμές:

$$\begin{aligned}
&costratio = 0.9259, && q = 43.4741, \\
&v = -3.2203, && I = 18.6360, \\
&OF = 0.1610, && B = 0.1193, \\
&A = 0.0741, && C = 314.1565, \\
&BW = 0.0170.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

.

Όπως βλέπουμε από τα αποτελέσματα οι ελλείψεις μειώνουν το μέσο συνολικό κόστος παραγγελίας. Αυτό πρακτικά ήταν αναμενόμενο γιατί οι περισσότερες εταιρίες με ακριβά και ογκώδη αποθέματα, έχουν συχνά ελλείψεις. Επομένως το πρόγραμμα επαληθεύεται από την πραγματικότητα , κάτι που το καθιστά σημαντικό, έστω και αν μιλάμε για ντετερμινιστική ζήτηση.

4.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Το στοχαστικό μοντέλο έχει πολύ μεγαλύτερη δυσκολία στην εύρεση του μέσου συνολικού κόστους. Στην προσπάθεια αυτή θα γίνουν κάποιες υποθέσεις ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Επειδή το στοχαστικό μοντέλο έχει δύο μεταβλητές, η αρχή θα γίνει με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης μέσου συνολικού κόστους ως προς τη μια μεταβλητή, και στη συνέχεια θα γίνει ελαχιστοποίηση ως προς την άλλη όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο .

4.2.1 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ (r,q)

Στο στοχαστικό μοντέλο της πολιτικής (r,q) κατασκευάζουμε τη συνάρτηση απώλειας, η οποία μας βοηθάει να αποτιμήσουμε τα μέσα αποθέματα, μέσες ελλείψεις και τα μέσα συνολικά κόστη. Στη συνέχεια βρίσκουμε ποια είναι η βέλτιστη τιμή του $C(s)$ και για πιο βέλτιστο s . Επίσης μας βοηθάει να βρούμε τα βέλτιστα r και q .

```
function[I,B,C,C1,C2,c,q1,r1]=stochastick_model_rq(demandrate,leadime,h,b,k)
lamda=demandrate*leadime;
s=[0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20]
P=poisscdf(s,lamda);
G0=1-P
Y=cumsum(G0);
G1=lamda-Y
I = s − demandrate * leadime + G1;
if I>=0
  I=s-demandrate*leadime+G1                                        (4.7)
else
  I(1:3,:)=0
end
B = G1
C = h * I + b * B
C1 = min(C)
S1 = 3
q = 1;
r = S1-1;
C2 = k * demandrate + C1
a = 1;
while a == 1
c = min(C(r),C(r + q + 1))
if c >= C2
  q1 = q
  r1 = r
  a = 2;
else
  q = q + 1
C2 = C2 − (C2 − c) / q
end
if C(r) > C(r + q + 1)
 r = r − 1;
end
end
end
```

Έστω τώρα ότι παίρνουμε τις παρακάτω τιμές για το στοχαστικό μοντέλο $(\lambda=3,\ L=1,\ h=1,\ b=1,\ k=0.10)$. Η συνάρτηση στη Matlab γράφεται

$$\text{stochastick\_model\_rq}(3,1,1,1,0.10) \qquad (4.8)$$

Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε από την παραπάνω συνάρτηση

s	G0	G1	I	B	C
0	0.9500	2.0498	0	2.0498	2.0498
1	0.8009	1.2489	0	1.2489	1.2489
2	0.5768	0.6721	0	0.6721	0.6721
3	0.3528	0.3194	0.3194	0.3194	0.6387
4	0.1847	0.1346	1.1346	0.1346	1.2692
5	0.0839	0.0507	2.0507	0.0507	2.1014
6	0.0335	0.0172	3.0172	0.0172	3.0344
7	0.0119	0.0053	4.0053	0.0053	4.0106
8	0.0038	0.0015	5.0015	0.0015	5.0030

C1 = 0.6387, S1 =3,
C2 =0.9387, c =0.6387,
q =2,
C2 =0.7887, c =1.2489, (4.9)
q1 =2, r1 =2.

Οπότε η βέλτιστη πολιτική για το μοντέλο μας είναι για απόθεμα βάσης 3, ποσότητα παραγγελίας 2 και σημείο παραγγελίας 2.

Σε αυτό το κεφάλαιο περάσαμε στο στάδιο της μοντελοποίησης στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Η αποτίμηση των βέλτιστων τιμών πέτυχε χάρη στη μοντελοποίηση πολύπλοκων τύπων. Ξεκινώντας με το ντετερμινιστικό μοντέλο είδαμε το όφελος των ελλείψεων στη συνάρτηση κόστους. Στην συνέχεια περάσαμε στον πραγματικό κόσμο, όπου υπάρχει αβεβαιότητα με το στοχαστικό μοντέλο. Τέλος οι αριθμητικές εφαρμογές έδωσαν νόημα στο πρακτικό κομμάτι της διατριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η αποτίμηση των αποθεμάτων είναι μεγάλη υπόθεση για τις επιχειρήσεις. Το κόστος που μπορεί να προκαλέσει μπορεί να δημιουργήσει μεγάλα προβλήματα στις εταιρίες. Η διατριβή αυτή έγινε με σκοπό την επίλυση έως ένα βαθμό των προβλημάτων αυτών.

Τα ντετερμινιστικά μοντέλα μπορεί να μην έχουν πρακτική ισχύ καθώς δεν ανταποκρίνονται στον πραγματικό κόσμο, βοηθούν όμως να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα. Το πιο σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο είναι ότι η ύπαρξη ελλείψεων μειώνει την τιμή του μέσου σταθερού κόστους για το βέλτιστο απόθεμα παραγγελίας.

Τα στοχαστικά μοντέλα έχουν πολύ μεγαλύτερη δυσκολία εξεύρεσης της βέλτιστης τιμής. Αυτό βεβαίως ήταν κάτι αναμενόμενο καθώς στην καθημερινότητα δεν υπάρχουν και πολλές σταθερές, στις οποίες μπορούμε να βασιστούμε για να μοντελοποιήσουμε τα αποθέματα μιας επιχείρησης Όμως παίρνοντας κάποιες παραδοχές και επεξηγώντας δύσκολα θεωρήματα καταλήξαμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι βασικές παραδοχές που ακολουθήσαμε, μας βοήθησαν ώστε να δώσουμε λίγο χρώμα στο σκούρο φόντο που θα συναντούσε κάποιος που θα ασχολούνταν με τα αποθέματα μιας επιχείρησης. Οι περισσότερες επιχειρήσεις βεβαίως έχουν προμηθευτεί έτοιμα προγράμματα τα οποία ανταποκρίνονται σε ικανοποιητικό βαθμό στην διαχείριση των αποθεμάτων. Αυτό δεν σημαίνει όμως ότι κάθε υπάλληλος που διαχειρίζεται το πρόγραμμα καταλαβαίνει και πώς δουλεύει.

Τέλος η μοντελοποίηση που γίνεται στο τέταρτο κεφάλαιο με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού Matlab δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού των βέλτιστων τιμών. Σε μια επιχείρηση έχει μεγάλη χρησιμότητα να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές οι οποίες θα ελαχιστοποιήσουν το κόστος της . Οι αριθμητικές εφαρμογές που ακολουθούν κάθε μοντέλο βοηθούν στην περαιτέρω κατανόηση του καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως οδηγός χρήσης του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Arrow K.S. (1958). Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press
2. Axater S. (2006).Inventory Control.Lund, Sweden
3. Berlin P. (2005).On Determination of inventory Cost Parametrs.Ph.D.Thesis, Lund University
4. Dvoretzky A.J (1952).The Inventory Problem:I, Case of Known Distributions of Demand II, Case of Unknown Distribution of Demand. The Econometric Society, Econometrica
5. Edward A. and Silver D.F. (1998). Inventory Management and Production Planning and Scheduling.New York: Whiley&Sons.
6. Hadley G. & Whitin T. (1963). Analysis of Inventory Systems.N.J.: Prentice-Hall
7. Harris F. (1913). How many parts to make at once. The magazine of management
8. Huminel J.W. (1985). A Proposed Interactive Inventory Control Simulation
9. Sidney Browne P.Z. (1991). Inventory Models With Continuous Stochastic Demands. The Annals of Applied Probability
10. Tersine R.J. (1984). Διαχείριση Υλικών Και Συστήματα Αποθεμάτων Αθήνα
11. Waters C. (1992). Inventory Control And Management.England
12. Wilson R. (1934). A scientific routine for stock control. Harvard Business Review
13. Zipkin Paul H. (2000). Foundation of inventory management England
14. Ιακώβου Ε. (2008). Διαχείριση Αποθεμάτων και Διανομή Προϊόντων. Πολυτεχνική σχολή Αριστοτελείου, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών. Θεσσαλονίκη
15. Λουκάκης Μ. (2004). Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων. Πανεπιστημιακό Τυπογραφίο.
16. Μπουντουριδης Μωυσής Α. (2005). Μια σύντομη εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες. Πάτρα

17. Παπαϊωάννου (2000). Εισαγωγή στις Πιθανότητες. Αθήνα

18. Τσίμπος - Γεωργιακώδης (1999). Περιγραφική & Διερευνητική Στατιστική Ανάλυση Δεδομένων Μονοδιάστατη Ανάλυση. Τόμος Α. Αθήνα