ΘΕΟΔΩΡΟΥ Δ. ΜΗΤΣΟΠΟΥΛΟΥ
Διπλ. Χημικοῦ Μηχ/κοῦ, Διπλ. Ἐπιχειρ. Ἐρευν.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΙΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑ

Ὑποβληθεῖσα εἰς τὴν Ἀνωτάτην Βιομηχανικὴν Σχολὴν Πειραιῶς

ΑΘΗΝΑΙ 1969

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Δ. ΜΗΤΣΟΠΟΥΛΟΥ
Διπλ. Χημικοῦ Μηχ/κοῦ, Διπλ. Ἐπιχειρ. Ἐρευν.

ΣΥΜΒΟΛΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΙΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑ

Ὑποβληθεῖσα εἰς τὴν Ἀνωτάτην Βιομηχανικὴν Σχολὴν Πειραιῶς

ΑΘΗΝΑΙ 1969

Ἡ ἔγκρισις διδακτορικῆς διατριβῆς ὑπό τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς δέν ὑποδηλοῖ ἀποδοχήν τῶν γνωμῶν τοῦ συγγραφέως.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Σελίς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄:

ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΕΝΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ Στατιστική ἐπιστήμη, ἀναπτυχθεῖσα κυρίως ἀπό τῶν ἀρχῶν τοῦ παρόντος αἰῶνος, θεμελιοῦται ἐπί τῶν κατανομῶν συχνότητος. Ἡ ἔρευνα τοῦ τομέως τούτου ἄγει εἰς τό συμπέρασμα ὅτι, ὁρισμοί τινές καί αἱ ἐκ τούτων ἀπορρέουσαι ἀντίστοιχοι ἔννοιαι, δέν παρουσιάζουν ἀπόλυτον πληρότητα καί σαφήνειαν,ἐξ οὗ χρήζουν, καθ'ἡμᾶς, σχετικῆς συμπληρώσεως. Ἡ ἀποκάλυψις καί συμπλήρωσις τῶν ἀντιστοίχων κενῶν ἀποτελεῖ τήν ἐπιδίωξιν τῆς παρούσης Διατριβῆς, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τά κάτωθι μέρη:

Τό Α΄Κεφάλαιον, εἰς τό ὁποῖον ἐκτίθενται τά κύρια σημεῖα ἐκ τῶν κατανομῶν συχνότητος καί διαπιστοῦνται τά ὑπάρχοντα ἀσαφῆ, τοιαῦτα, χρήζοντα περαιτέρω διερευνήσεως καί συμπληρώσεως.

Τό Β΄ Κεφάλαιον, εἰς τό ὁποῖον συμπληροῦνται τά ὡς ἄνω σημεῖα.

Τό Γ΄Κεφάλαιον, εἰς τό ὁποῖον περιλαμβάνονται ἐφαρμογαί τοῦ περιεχομένου τοῦ Β΄κεφαλαίου καί ἀξιοποιοῦνται οἱ ὡς ἄνω συμπληρωθέντες στατιστικοί ὅροι, δι'ἐπιλύσεως συναφῶν στατιστικῶν προβλημάτων.

Θεωρῶ ὑποχρέωσίν μου νά ἐκφράσω τήν ἄπειρον εὐγνωμοσύνην μου εἰς τόν σεβαστόν Καθηγητήν τῆς Στατιστικῆς καί τέως Κοσμήτορα τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς κ. ΕΥΣΤΑΘΙΟΝ ΜΑΡΓΑΡΙΤΗΝ, διά τήν θερμήν συμπαράστασιν καί τάς πολυτίμους συμβουλάς τάς ὁποίας παρέσχε κατά τήν ἐκπόνησιν τῆς ἐργασίας ταύτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΟΣ

I. Συχνότης

'Υφίστανται σήμερον έν χρήσει είς τήν Στατιστικήν θεωρίαν δύο διάφοροι όρισμοί τῆς συχνότητος ὡς κάτωθι:

α, Κατά τόν πρῶτον όρισμόν " συχνότης " καλεῖται ὁ ἀριθμός τῶν ἐπαναλήψεων τιμῆς τινος x_i μιᾶς μεταβλητῆς x κατά τάς στατιστικάς παρατηρήσεις.

Συνεπῶς ἐάν ἐπί συνόλου N τιμῶν ὑπάρχουν αἱ $x_I, x_2 \cdot x_i \ldots x_\nu$ διάφοροι τιμαί, ἑκάστη τῶν ὁποίων συναντᾶται n_I, $n_2 \ldots n_i \ldots n_\nu$ φοράς ἀντιστοίχως, τότε οἱ ἀριθμοί n_i καλοῦνται συχνότητες τῶν τιμῶν x_i τῆς μεταβλητῆς [30, σελ. 2], [3I, σελ. II4], [59, σελ. I] (*)

Προφανῶς θά ἰσχύη ἡ σχέσις:

$$N = n_I + n_2 + \ldots + n_i + \ldots n_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \qquad (I)$$

'Ο ὁλικός ἀριθμός N τῶν περιπτώσεων καλεῖται "'Ολική συχνότης ".

'Ο λόγος τῆς συχνότητος n_i ἑκάστης τιμῆς πρός τήν ὁλικήν συχνότητα N καλεῖται " σχετική συχνότης" (f) [3I, σελ. II4], [37, σελ. I65] καί θά εἶναι:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \qquad (2)$$

$$\text{καί} \sum_{i=1}^{\nu} f_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n_i}{N} = 1 \qquad (3)$$

(*) Οἱ ἐντός [ ] ἀριθμοί ἀναφέρονται είς τήν είς τό τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας βιβλιογραφίαν.

β. Κατά τόν δεύτερον ὁρισμόν " συχνότης" (f) καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ (n_i) τῶν ἐπαναλήψεων τιμῆς τινός x_i μιᾶς μεταβλητῆς x πρός τόν ὁλικόν ἀριθμόν (N) τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς [II,σελ.I42], [3I,σελ.II4], [45,σελ.I9].

Συνεπῶς ἡ κατά τόν δεύτερον τοῦτον ὁρισμόν " συχνότης" εἶναι ἡ κατά τόν πρῶτον ὁρισμόν " σχετική συχνότης"ὡς σχέσις (2) ἀνωτέρω (*)

Π.χ. 'Εάν εἰς ἐπιχείρησιν ἐκ 300 ἐργατοτεχνιτῶν ὑπάρχουν 75 ἡμερομίσθια τῶν I20 δραχμῶν, τότε ὡς"συχνότης" τοῦ ἡμερομισθίου τῶν I20 δρχ. δύναται νά θεωρηθῆ ὁ ἀριθμός 75 εἴτε ὁ ἀριθμός $\frac{75}{300} = 0,25$.-

2. <u>Κατανομή συχνότητος</u> ἤ ἁπλῶς <u>κατανομή</u> (Distribution) λέγεται ἡ ταξινόμησις τῶν τιμῶν x_i αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων μιᾶς μεταβλητῆς x κατά σειράν αὐξανομένου ἤ ἐλαττουμένου μεγέθους τούτων, μετ'ἐνδείξεως τῆς συχνότητος ἑκάστης τιμῆς, ὑπό μορφήν ἀριθμητικοῦ πίνακος ἤ γραφικῆς παραστάσεως [35,σελ.II5], [40,σελ.33].

α. <u>'Ασυνεχεῖς</u> (Discrete) κατανομαί εἶναι ἐκεῖναι εἰς τάς ὁποίας ἡ συχνότης εἶναι συγκεντρωμένη εἰς ὡρισμένα σημεῖα (masspoints) τῆς μεταβλητῆς, οἱονδήποτε δέ διάστημα $x_1 x_2$ περιέχει, τό πολύ, πεπερασμένον ἀριθμόν τῶν σημείων τούτων [II,σελ. I68], ὅπως π.χ. ὁ ἀριθμός τῶν τέκνων μιᾶς οἰκογενείας, ὁ ἀριθμός τῶν τηλεφωνικῶν κλήσεων ἐντός μιᾶς ἡμέρας, ὁ ἀριθμός τῶν ἀτυχημάτων ἐντός ἑνός μηνός κ.ο.κ.

β. <u>Συνεχεῖς</u> (Continuous) κατανομαί εἶναι ἐκεῖναι εἰς τάς ὁποίας ἡ μεταβλητή x δύναται νά λάβη οἱανδήποτε τιμήν μεταξύ ὡρισμένων ὁρίων α καί β [59,σελ.I2], ὅπως π.χ.τό ἀνάστημα τῶν ὁπλιτῶν μεταξύ I,50 καί 2,00 μ., ἡ ἡλικία τῶν κατοίκων μιᾶς χώρας, ἡ ἀπόδοσις ἑνός ἀγροῦ κ.ο.κ.

γ. <u>'Ομαδοποιημέναι</u> (Grouped) λέγονται ἐκεῖναι ἐκ τῶν συνεχῶν ἤ ἀσυνεχῶν κατανομῶν εἰς τάς ὁποίας,λόγω μεγάλου ἀριθμοῦ τιμῶν (x_i), κατατάσσεται ἡ συχνότης εἰς "ὁμάδας"κα-

---

(*) 'Η τοιαύτη διαφοροποίησις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συχνότητος ἔχει ἐπίδρασιν ἐπί τῶν ὁρισμῶν τῶν διαφόρων συναρτήσεων συχνότητος(ὡς Κεφ.Α-4) καί ἐπί τῆς δυνατότητος διακρίσεως τῶν ἀντιστοίχων καμπύλων Συχνότητος(ὡς Κεφ.Α-7),ἡ διάκρισις δέ αὕτη ἀποτελεῖ πρωταρχικήν ἐπιδίωξιν τῆς παρούσης διατριβῆς τά περιοχάς τῆς μεταβλητῆς καλουμένας " διαστήματα τάξεως" (Class intervals) [59,σελ.I0]. Αὗται ἀποτελοῦν προσέγγισιν τῶν ἀντιστοίχων κατανομῶν ἐξ ὧν προέρχονται. Ἡ προσέγγισις αὕτη συνίσταται εἰς τό ὅτι κατά τούς ὑπολογισμούς τῶν διαφόρων στοιχείων τῶν κατανομῶν, τό μέν σύνολον τῆς συχνότητος τῶν τιμῶν ἑκάστου διαστήματος τάξεως παραμένει ἀμετάβλητον, ἀλλά λαμβάνεται ἑκάστη τιμή x_i ἴση πρός τήν μέσην τοιαύτην τῶν τιμῶν τοῦ ἀντιστοίχου διαστήματος [59,σελ.II]. Τοιαῦται κατανομαί εἶναι π.χ. αἱ ἐκ στατιστικῶν παρατηρήσεων εἰς τάς ὁποίας, πρός εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν, ἀντί τοῦ συνόλου τῶν μεμονωμένων τιμῶν, λαμβάνονται ὀλίγαι ὁμάδες ἐκ τούτων.

3. Συνάρτησις κατανομῆς

α. Εἰς πᾶσαν τυχαίαν μεταβλητήν ξ εἰς τό διάστημα α,β ἀντιστοιχεῖ μία ἀθροιστική συνάρτησις F(x), ἐκφράζουσα τήν πιθανότητα, ὅπως ἡ μεταβλητή ξ εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς x, ἤτοι:

$$F(x) = p\,(\xi < x) \tag{5}$$

Ἡ F(x) καλεῖται " Συνάρτησις Κατανομῆς" (Distribution function) [II,σελ.I66], [20,σελ.59], [30,σελ.I3], [35, σελ. 72], [60,σελ.3I] ἤ " Συνάρτησις πιθανότητος" (Probability function), [II,σελ.I66], [60,σελ.34] ἤ "Συνάρτησις ἀθροιστικῆς συχνότητος " (Cumulative frequency function) [3I, σελ. 74].

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἀθροιστική, μή ἀρνητική, μή φθίνουσα, πληροῦσα τάς κάτωθι συνθήκας:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant I \tag{6}$$

$$F(\alpha) = 0 \text{ καί } F(\beta) = I \tag{7}$$

Διά τυχόν διάστημα $x_I x_2$ τῆς μεταβλητῆς θά ἰσχύη ἡ σχέσις:

$$F(x_2) - F(x_I) = p(x_I \leqslant x \leqslant x_2) \tag{8}$$

β. Ἀντιστρόφως τυχοῦσα συνάρτησις F(x), πληροῦσα τάς συνθήκας (6) καί (7), καθορίζει μίαν κατανομήν ἔχουσαν τήν F(x) ὡς " συνάρτησιν κατανομῆς" ταύτης, [II,σελ.57].

4. Συνάρτησις Συχνότητος

α. 'Εάν ή συνάρτησις κατανομῆς F(x) ἔχη παράγωγον εἰς σημεῖον τι x_i τότε ή συνάρτησις

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x) \qquad (9)$$

καλεῖται " Συνάρτησις Συχνότητος" (Frequency function) [II, σελ.I66], [30, σελ.I3], [3I, σελ.II4] ή " Συνάρτησις Πυκνότητος Συχνότητος (Frequency density function) [3I, σελ.80], [35, σελ 72], [45, σελ.24], [57, σελ.63] ή " Συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος" (Probability densily function), [II, σελ. I66]; [3I, σελ.227], [35, σελ.72] ή " Συνάρτησις Πυκνότητος Σχετικῆς Συχνότητος " (Relative frequency density function) [38, σελ. 98], [59, σελ.I3].

β. 'Η ἔκφρασις τῆς αὐτῆς συναρτήσεως f(x) διά διαφορετικῶν ἐννοιῶν ὡς εἶναι ή " συχνότης", ή " πυκνότης συχνότητος" καί ή " πυκνότης σχετικῆς συχνότητος" ὀφείλονται εἰς τήν διαφοροποίησιν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συχνότητος, ὡς Κεφ.Α -I ὑποσημείωσις (*), καθώς καί εἰς τήν ἄποψιν ὅτι ή " συνάρτησις συχνότητος" εἶναι ταυτόσημος πρός τήν " συνάρτησιν πυκνότητος συχνότητος" [3I, σελ.80].

γ. Κατ' ἄλλην ἄποψιν ή " συνάρτησις συχνότητος" ὁρίζεται ὡς " παρέχουσα τήν συχνότητα μιᾶς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς x, συναρτήσει τοῦ x ή διά τάς συνεχεῖς κατανομάς, τήν συχνότητα εἰς ἕν στοιχειῶδες διάστημα dx" [3I, σελ. II4].

δ. 'Η συνάρτησις f(x) ἔχει πάντοτε μή ἀρνητικήν τιμήν καί ὁλοκλήρωμα ἀπό (-∞) ἕως (+∞) τήν μονάδα ἤτοι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = I \qquad (IO)$$

5. Γενική μορφή τῆς Συναρτήσεως Κατανομῆς

Θεωρεῖται ὅτι ή γενική συνάρτησις F(x) ἀποτελεῖται ἀπό δύο συνιστώσας συναρτήσεις κατανομῆς, ἤτοι μιᾶς ἀσυνεχοῦς καί μιᾶς συνεχοῦς, δύναται δέ νά γραφῆ ὡς:

$$F(x) = C_I F_I(x) + C_2 F_2(x) \qquad (II)$$

"Ενθα:

Αἱ C_I καί C_2 εἶναι μή ἀρνητικαί σταθεραί τοιαῦται ὥστε:

$$C_I + C_2 = I \qquad (I2)$$

Ἡ $F_I(x)$ παριστᾶ συνάρτησιν κατανομῆς, τῆς ὁποίας αἱ συχνότητες ἔχουν συγκεντρωθῆ εἰς ὡρισμένα σημεῖα

Ἡ $F_2(x)$ παριστᾶ συνάρτησιν κατανομῆς, ἡ ὁποία δέν ἔχει σημεῖα μέ συγκεντρωμένας συχνότητας [II,σελ.58].

Διακρίνονται ἤδη αἱ 2 κάτωθι ἀκραῖαι περιπτώσεις:

α. $C_I = I, \quad C_2 = 0$

Εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς ἀσυνεχοῦς κατανομῆς, καθ' ἥν ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$F(x) = p(\xi \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} p_i \qquad (I3)$$

$$p_i = p(x = x_i) \qquad (I4)$$

ἤτοι ὑπάρχει πιθανότης p_i νά λάβη ἡ x τήν τιμήν x_i

$$0 = p(x \neq x_i) \qquad (I5)$$

ἤτοι ὑπάρχει πιθανότης μηδέν νά λάβη ἡ x οἱανδήποτε ἄλλην τιμήν πλήν τῆς x_i

$$\sum_i p_i = I \qquad (I6)$$

Ἔνθα $x_I, x_2 \ldots x_i \ldots x_\nu$ = τά σημεῖα συγκεντρώσεως τῆς συχνότητος ἤ " σημεῖα μάζης" (mass points).

$p_I, p_2 \ldots p_i \ldots p_\nu$ = αἱ ἀντίστοιχοι πιθανότητες ἤ σχετικαί συχνότητες. [II,σελ.58 καί I68], [60,σελ.34].

Εἰς τάς στατιστικάς ἐφαρμογάς τά σημεῖα μάζης x_i εἶναι οἱ " φυσικοί" ἀριθμοί 0,I,2....ν [II,σελ.I68].

β. $C_I = 0, \; C_2 = I$

Εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς συνεχοῦς κατανομῆς, καθ'ἥν ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$F(x) = p(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (I7)$$

$$F(b)-F(a) = p(a < \xi < b) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx \qquad (I8)$$

Αὕτη παρέχει τήν πιθανότητα νά λάβη ἡ ξ μίαν τιμήν ἀνήκουσαν εἰς τό ἄπειρον ἤ πεπερασμένον διάστημα ab. Ἡ πιθανότης ἵνα λάβη ἡ ξ μίαν ὡρισμένην τιμήν x_0 εἶναι μηδέν, ἤτοι εἰς τά σημεῖα τῆς μεταβλητῆς x οὐδεμία συχνότης ἀντιστοιχεῖ [II, σελ. I70].

$$F(+\infty) = I \qquad (I9)$$

[II, σελ. 58 καί I70], [60, σελ. 36].

Ἡ στοιχειώδης ποσότης:

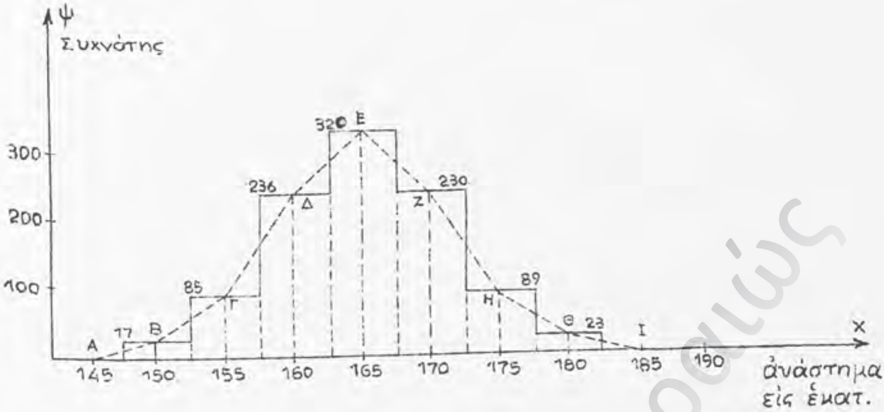
$$dF = f(x)dx \qquad (20)$$

καλεῖται " στοιχεῖον πιθανότητος" (Probability element) [II, σελ. I67], ἤ "στοιχεῖον συχνότητος" (frequency element) [30, σελ. I3].

6. <u>Ἱστόγραμμον καί Πολύγωνον Συχνότητος</u>

Διά τήν γραφικήν παράστασιν τῶν ὁμαδοποιημένων κατανομῶν χρησιμοποιεῖται τό " Ἱστόγραμμον συχνότητος" (Frequency Histogram) [30, σελ.5], [37, σελ.I74], [38, σελ.I0I], τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἐκ διαδοχικῶν ὀρθογωνίων, ἐχόντων ὡς βάσιν τό διάστημα τάξεως καί ὡς ὕψος τήν ἀντίστοιχον συχνότητα. Εἰς σχῆμα I ἐμφαίνεται τό ἱστόγραμμον ὁμαδοποιημένης κατανομῆς συχνότητος τοῦ ἀναστήματος I.000 ὁπλιτῶν μέ διάστημα τάξεως 5 ἑκ.

Ἐάν ληφθῶσιν ὡς τεταγμέναι αἱ "σχετικαί συχνότητες", θά προκύψη τό " τυπικόν ἱστόγραμμον" ἤ " Ἱστόγραμμον σχετικῆς συχνότητος" [38, σελ.I02]. Ἐάν συνδεθῶσιν δι' εὐθειῶν τά μέσα τῶν ἄνω βάσεων τῶν ὀρθογωνίων καί ληφθῶσιν δύο πρόσθετα διαστήματα τάξεως ἑκατέρωθεν τῶν ἄκρων διά τήν σύνδεσιν μετά τοῦ ἄξονος τῶν x θά προκύψη ἡ πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ, ἡ ὁποία καλεῖται " πολύγωνον συχνότητος" (frequency polygon) [30, σελ.4], [37, σελ. I76], τοῦ ὁποίου αἱ τεταγμέναι τῶν κορυφῶν παριστοῦν τάς συχνότητας τῶν ἀντιστοίχων διαστημάτων τάξεως. Τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου συχνότητος ἰσοῦται, προφανῶς, πρός τό ἐμβαδόν τοῦ ἱστογράμμου συχνότητος.

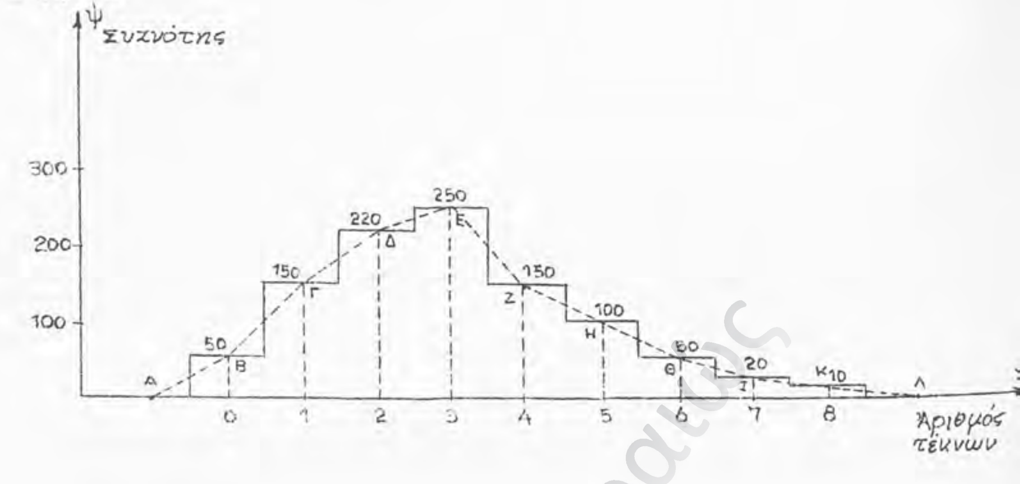


Σχ. 1
Ἱστόγραμμον καί πολύγωνον συχνότητος ὁμαδοποιημένης κατανομῆς

Αἱ αὐταί γραφικαί παραστάσεις χρησιμοποιοῦνται καί διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς συχνότητος. Πρός τοῦτο θεωρεῖται ὡς διάστημα τάξεως μέ ὁμοιομόρφως κατανεμημένην συχνότητα, ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων μεταξύ τῶν διαδοχικῶν τιμῶν τῶν σημείων συγκεντρώσεως τῆς συχνότητος, είς τρόπον ὥστε τά σημεῖα ταῦτα νά εὑρίσκωνται εἰς τό μέσον ἑκάστου διαστήματος τάξεως [42, σελ.58 καί 63], [45.σελ.32] Τό σχῆμα 2 παριστᾷ ἱστόγραμμον καί πολύγωνον συχνότητος ἀσυνεχοῦς κατανομῆς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τέκνων 1.000 οἰκογενειῶν.

Ἡ ἀκριβής γραφική παράστασις τῆς ἀσυνεχοῦς κατανομῆς εἰς τούς ληφθέντας ἄξονας ἀποτελεῖται προφανῶς ἀπό τάς μεμονωμένας τεταγμένας εἰς τά σημεῖα συγκεντρώσεως τῆς συχνότητος.

Ὑπό τινων συγγραφέων γίνεται μνεία περί τῆς δυνατότητος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν κατανομῶν συχνότητος κατά τρόπον ἀνάλογον τῶν ἱστογράμμων, ἀλλά μέ τεταγμένην (y) τήν " πυκνότητα συχνότητος" ἤ ἄλλως τήν " πυκνότητα σχετικῆς συχνότητος" [42,σελ.57], [45,σελ.22] [57,σελ.63]. Εἰς τάς γραφικάς ταύτας παραστάσεις δίδονται διάφοροι ὀνομασίαι ὡς "συχνόγραμμον","πολύγωνον ἐπαναλήψεως"κλπ.



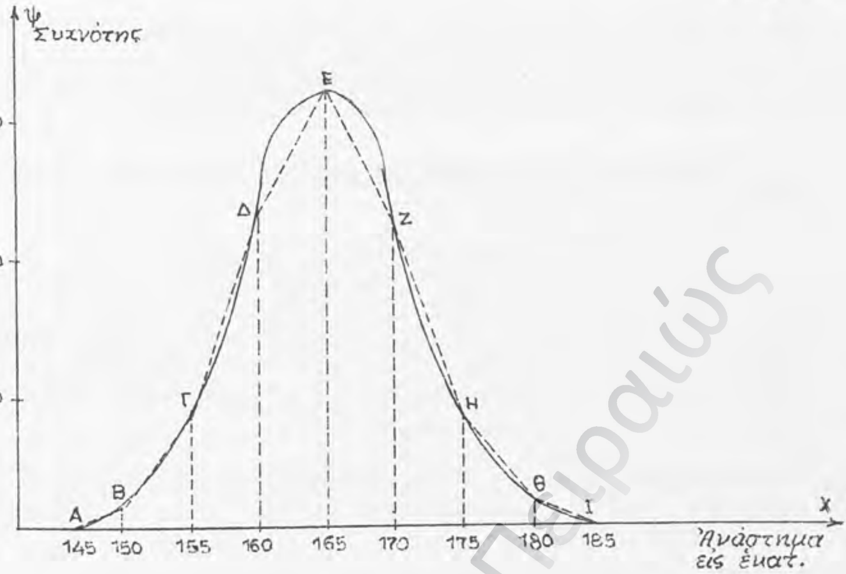
Σχ. 2
'Ιστόγραμμον καί Πολύγωνον συχνότητος ἀσυνεχοῦς κατανομῆς

7. <u>Καμπύλαι Συχνότητος καί Σχετικῆς Συχνότητος</u>

α. 'Εάν περιορισθῆ τό εὖρος ἑκάστου διαστήματος τάξεως εἰς τό ἥμισυ, ἐνῶ συγχρόνως διπλασιασθῆ ἡ ἀντίστοιχος συχνότης, εἰς τρόπον ὥστε τό ὁλικόν ἐμβαδόν νά παραμείνῃ τό ἴδιον καί ἐάν φέρωμεν τό νέον ἱστόγραμμον κατά τρόπον ὥστε τά ἐμβαδά τά ὁποῖα προστίθενται εἰς τό πολύγωνον συχνότητος νά εἶναι περίπου ἴσα πρός τά ἀφαιρούμενα τοιαῦτα, συνεχισθῆ δέ ἡ διαδικασία αὐτη ἐπ'ἄπειρον, τότε τήν θέσιν τοῦ πολυγώνου καί ἱστογράμμου συχνότητος θά καταλάβη εἰς τό ὅριον μία συνεχής ὁμαλή καμπύλη (ὡς σχῆμα 3), ἡ ὁποία καλεῖται " Καμπύλη Συχνότητος" (Frequency Curve) (Κ.Σ.), [8,σελ.65], [3I,σελ.II4], [39,σελ.58], [40,σελ.33], [61,σελ.80]. 'Η ἀντίστοιχος καμπύλη, ἡ ὁποία προκύπτει κατά τόν αὐτόν τρόπον ἐκ τοῦ τυπικοῦ ἱστογράμμου εἶναι ἡ "Καμπύλη Σχετικῆς Συχνότητος" (Κ.Σ.Σ.).(Relative frequency Curve), [38,σελ.97], [59,σελ.I3].

Συνεπῶς κατά τ'ἀνωτέρω Κ.Σ. εἶναι ἡ κατανομή θεωρητικῶς ἀπείρου πλήθους στατιστικῶν παρατηρήσεων, ἐντός θεωρητικῶς ἀπειροελαχίστων διαστημάτων τάξεως [47,σελ.I64].

'Η οὕτω ὁριζομένη Κ.Σ. εἶναι ὑποθετική καί ἰδανική, ἀναφέρεται μόνον εἰς τάς συνεχεῖς κατανομάς καί ἀντιπροσωπεύει τόν ὑποκείμενον ἄπειρον πληθυσμόν ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψαν τά δείγματα τῶν ἀντιστοίχων ὁμαδοποιημένων κατανομῶν, στερεῖ-



Σχ. 3
Καμπύλη Συχνότητος ὡς ὅριον τοῦ Πολυγώνου Συχνότητος

ται δέ τῶν ἀνωμαλιῶν καί διακυμάνσεων αἱ ὁποῖαι συνήθως συνοδεύουν τά δείγματα [27,σελ.23], [40,σελ.34], [59,σ.I2].

β. Κατ'ἄλλον ὁρισμόν τῆς Καμπύλης Συχνότητος [II, σελ. I70], [27,σελ.23] θεωρεῖται αὐτή ὡς ἡ γραφική παράστασις τῆς "συναρτήσεως συχνότητος" f(x) (ὡς κεφαλ.Α-4). Τό ὑπό τήν ὡς ἄνω Κ.Σ. ἐμβαδόν λαμβάνεται πάντοτε ἴσον πρός 1.
γ. Τέλος ἡ Καμπύλη Συχνότητος ὁρίζεται καί ὡς ἡ "γραφική παράστασις συνεχοῦς κατανομῆς συχνότητος ἔχουσα ὡς τετμημένας τήν μεταβλητήν καί τεταγμένας τήν συχνότητα [3I, σελ. II4]. Ἐν συμπεράσματι ἡ Κ.Σ. εἶναι μία θεμελιώδης ἔννοια ὑψίστης σημασίας διά τήν Στατιστικήν Ἐπιστήμην, [40, σελ.33], [42.σελ.62], [47,σελ.I64], [6I,σελ.80].

8. Ταυτότης κατανομῶν

α. Μία κατανομή ἀσυνεχῶν τιμῶν, ὡς αἱ προερχόμεναι τοι αὗται ἐκ στατιστικῶν παρατηρήσεων συνεχοῦς κατανομῆς, θεωρεῖται ὅτι δέν εἶναι δυνατόν νά εἶναι συνεχής [59,σελ. 5I].

β. 'Εάν ἐν τούτοις ἡ ὁλική συχνότης εἶναι μεγάλη, δύναται ἡ ἀσυνεχής κατανομή νά προσεγγίσῃ πρός τήν συνεχῆ, ἐφ' ὅσον εἰς οἱονδήποτε διάστημα τῆς μεταβλητῆς αἱ σχετικαί συχνό - τητες ἀμφοτέρων εἶναι περίπου ἴσαι [59, σελ. I4].

9. <u>Διαπιστώσεις καί συμπεράσματα ἐπί τῶν κατανομῶν συχνότητος</u>

α. 'Ο ὅρος " συχνότης" χρησιμοποιεῖται ἀδιακρίτως διά τήν ἔκφρασιν τόσον τῆς " ἀπολύτου", ὅσον καί τῆς " σχετικῆς " συχνότητος (ὡς κεφ. Α-Ι), διά τάς ὁποίας, πρός τούτοις, καί δέν ὑφίσταται διαφορισμός εἰς τόν συμβολισμόν. Ταῦτα ἀποτελοῦν ἀσάφειαν καί δεικνύουν ἔλλειψιν τῆς ἐπιβαλλομένης ἐπιστημονικῆς ἀκριβολογίας, τῆς ὁποίας αἱ συνέπειαι, μεταξύ τῶν ἄλλων, εἶναι καί αἱ κατωτέρω:

(I) 'Η ἀριθμητική τιμή τῆς " συχνότητος" τοῦ αὐτοῦ γεγονό - τος παρέχεται ὑπό δύο διαφορετικῶν ἀριθμῶν (ὡς παράδειγμα τοῦ κεφ. Α-Ι).

(2) Αἱ σχέσεις (6) καί (IO) τοῦ Α΄κεφαλαίου δεικνύουν ὅτι οἱ ὅροι "συνάρτησις συχνότητος" καί " συνάρτησις κατανομῆς" ἀναφέρονται εἰς τάς σχετικάς συχνότητας καί ὡς ἐκ τούτου αἱ ἀκριβεῖς ὀνομασίαι τούτων θά ἔδει νά ἦσαν " συνάρτησις σχετικῆς συχνότητος" καί " συνάρτησις κατανομῆς σχετικῆς συχνότητος" ἀντιστοίχως τῶν ὁποίων ἡ ἔννοια εἶναι, προφανῶς, διάφορος.

(3) Δέν εἶναι δυνατή ἡ ἀπ'εὐθείας σύγκρισις τῆς " θεωρητικῆς" (a priori) συχνότητος, ἐξαγομένης ἀμέσως ἐκ τῆς"συναρτήσεως συχνότητος", διά τυχοῦσαν περιοχήν τῆς μεταβλη - τῆς x, πρός τήν " ἐμπειρικήν " (a posteriori)τοιαύτην , ἐξαγομένην ἐκ τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων καί τοῦτο ἐπειδή ἡ " συνάρτησις συχνότητος" παρέχει μόνον τήν σχετικήνσυχνότητα, ὡς σχέσις (IO) τοῦ Α΄κεφαλαίου. Διά τήν ἀνωτέρω σύγκρισιν ἀπαιτεῖται προσέτι ἡ γνῶσις καί ἡ χρῆσις τῆς ἀπολύτου ὁλικῆς συχνότητος.

(4) Αἱ διάφοροι " Καμπύλαι Συχνότητος" (Κ.Σ.) μιᾶς κατανο - μῆς (ἤτοι αἱ καμπύλαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους ὁλικάς συχνότητας) ταυτίζονται πρός τήν μοναδικήν "Καμπύλην Σχετικῆς Συχνότητος" (Κ.Σ.Σ.) τῆς κατανομῆς (ἤτοι τήν παρέχουσαν μόνον τάς σχετικάς συχνότητας). 'Η τοιαύτη ὑποκατάστασις τῶν Κ.Σ. μιᾶς κατανομῆς υπό τῆς Κ.Σ.Σ. ταύτης, περιορίζει τάς δυνατότητας τῆς πλήρους ἀξιοποιήσεως τούτων ἀπό στατιστικῆς ἀπόψεως.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ ἀνάγκη διακρίσεως τῶν ὁρισμῶν καί τῶν συμβολισμῶν μεταξύ τῶν ὅρων "ἀπόλυτος συχνότης" ἤ ἁπλῶς " συχνότης" καί " σχετική συχνότης" (ὡς κεφ. Β-5 καί 8).

β. 'Η συνάρτησις κατανομῆς F(x) ὁρίζεται πρωτογενῶς καί ἀξιωματικῶς, ὡς σχέσις (5) τοῦ Α΄κεφαλαίου, ἔχουσα γενικήν ἰσχύν διά τάς παντός εἴδους κατανομάς, ὑπό τόν περιορισμόν ὅτι διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς ἡ μεταβλητή x λαμβάνει μόνον τάς τιμάς τῶν " σημείων μάζης". 'Αντιθέτως ἡ συνάρτησις f(x), φέρουσα τάς εἰς κεφ. Α-4 ὀνομασίας καί ὁριζομένη δευτερογενῶς βάσει τῆς F(x),ὡς ἡ πρώτη παράγωγος ταύτης, ὑφίσταται μόνον εἰς τάς περιπτώσεις καθ'ἅς ἡ F(x) εἶναι παραγωγήσιμος, δηλαδή μόνον διά τάς συνεχεῖς, οὐχί δέ καί διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς, ἐνῶ αὕτη, ὡς βασική διά τήν στατιστικήν ἔννοια, θά ἔδει νά εἶχε γενικήν ἰσχύν διά τάς παντός εἴδους κατανομάς.

Συνεπῶς ἀπαιτεῖται ἀναθεώρησις τόσον τῶν ὁρισμῶν τῶν συναρτήσεων F(x) καί f(x), ὅσον καί τῆς μεταξύ των σχέσεως (ὡς κεφ. Β-2, 3 καί 4).

γ. 'Η παράστασις f(x) χρησιμοποιεῖται διά νά ἐκφράσῃ τάς κάτωθι ἐννοίας (ὡς κεφ. Α-4), αἱ ὁποῖαι οὕτω καί ταυτίζονται:

(I) Τήν συνάρτησιν συχνότητος

(2) " " σχετικῆς συχνότητος ἤ πιθανότητος

(3) " " πυκνότητος συχνότητος

(4) " " " σχετικῆς συχνότητος ἤ πυκνότητος πιθανότητος

'Ο ταυτισμός μεταξύ τῶν ἐννοιῶν " συχνότητος"καί"σχετικῆς συχνότητος" ὀφείλεται εἰς τήν ἔλλειψιν σαφηνείας τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συχνότητος καί δύναται ν'ἀρθῇ διά συμπληρωματικῆς διευκρινίσεως, ὡς ἀνωτέρω (παραγρ.9α) ἐξετέθη. 'Ο ταυτισμός ὅμως τῶν ἐννοιῶν "συχνότητος"καί"πυκνότητος συχνότητος" εἶναι ἐπιστημονικῶς ἄτοπος καί ἀπαιτεῖται ριζική ἀναθεώρησις τούτου, διότι τά μεγέθη τῶν ἐννοιῶν τούτων, ὡς φυσικῶς διάφορα, δέν δύνανται νά παρίστανται ὑπό τῆς αὐτῆς συναρτήσεως. Πράγματι, ἡ μέν συχνότης, ὡς ἁπλοῦς ἀριθμός, εἶναι ἀδιάστατος ἀπό στατιστικῆς ἀπόψεως,ἐνῶ ἡ πυκνότης συχνότητος ἔχει διαστάσεις $[x]^{-1}$ (ὡς κεφ. Β- IIστ.)

Συνεπῶς ἡ f (x) δέον νά περιορισθῆ εἰς τήν παράστασιν τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω ἐννοιῶν καί συγκεκριμένως τῆς πυκνότητος συχνότητος. Οἱ λόγοι τῆς τελευταίας ταύτης προτιμήσεως θά καταστοῦν προφανεῖς ἐξ ὅσων θά ἐκτεθῶσιν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

δ. Ἡ συνάρτησις κατανομῆς παρέχει ἀθροιστικήν συχνότητα ἀπό τοῦ κατωτέρου ὁρίου τῆς κατανομῆς μέχρι τῆς τυχούσης τιμῆς x τῆς μεταβλητῆς. Ἀλλά καί ἡ συνάρτησις συχνότητος, παρέχει συχνότητα εἰς τυχοῦσαν περιοχήν μεταξύ δύο τιμῶν x_1 καί x_2 τῆς μεταβλητῆς. Ὡς ἐκ τούτου αἱ δύο αὗται συναρτήσεις παριστοῦν μεγέθη ὁμοειδῆ καί ὁμοδιάστατα, διαφέρουν δέ μόνον ὡς πρός τά ὅρια τῆς μεταβλητῆς εἰς τά ὁποῖα ἀναφέρονται. Ἄλλως τε ὁ ὅρος " συνάρτησις κατανομῆς" ὑπονοεῖ τήν λέξιν " συχνότητος" καί ὁ ὅρος " συνάρτησις συχνότητος" ὑπονοεῖ τήν λέξιν " κατανομῆς".

Συνεπῶς οἱ δύο οὗτοι ὅροι δέον νά παραλληλισθῶσιν ὡς πρός τήν ἔννοιαν καί τόν συμβολισμόν μέ μόνην διαφοράν τήν εἰς Κεφ. Β- 4 ἐμφαινομένην, ὁ δέ ὅρος " συνάρτησις συχνότητος" ν' ἀποξενωθῆ τοῦ συμβολισμοῦ f(x), ὅστις νά περιορισθῆ ἀποκλειστικῶς καί μόνον εἰς τήν " συνάρτησιν πυκνότητος συχνότητος", ὡς ἀνωτέρω (παραγρ. 9γ) ἐξετέθη.

ε. Ἡ ἔλλειψις σαφηνείας τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν ἐπηρεάζει κατ' ἀνάγκην καί τάς ὑλοποιούσας ταύτας Καμπύλας Συχνότητος(Κ.Σ) αἱ ὁποῖαι καίτοι ἀποτελοῦν θεμελιώδη καί ὑψίστης σημασίας ἔννοιαν διά τήν στατιστικήν (ὡς Κεφ. Α-7), ἐν τούτοις ὁρίζονται κατά τρόπον οὐχί ἀπολύτως συγκεκριμένον. Πράγματι οἱ ὁρισμοί τῆς παραγρ. 7 τοῦ Α Κεφαλαίου δέν συμφωνοῦν μεταξύ των καί παρουσιάζουν τάς κάτωθι ἐκτιθεμένας ἀδυναμίας, ἐξ ὧν καθίσταται προφανής ἡ ἀνάγκη τῆς συμπληρώσεώς των, εἰς τρόπον ὥστε νά προκύπτη ἡ σαφής καί καθωρισμένη πλήρως μαθηματική μορφή τῶν Κ.Σ. (ὡς Κεφ. Β-10).

στ. Ὁ εἰς Κεφ. Α-7β ὁρισμός τῆς Κ.Σ. δέν εἶναι ἀκριβής καί πλήρης διότι:

(1) Ἡ f(x) χαρακτηρίζεται ὡς " συνάρτησις συχνότητος", ἐνῷ αὕτη θά ἔδει νά καλῆται ἀποκλειστικῶς " συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος", ὡς ἀνωτέρω (παρ.9γ) ἐξετέθη.

(2) Ἡ f(x) (ἄρα καί ἡ Κ.Σ.) ἀναφέρεται πάντοτε εἰς ὁλικήν συχνότητα ἴσην πρός τήν μονάδα καί τοῦτο ἀλλοιώνει τήν πραγματικήν ἔννοιαν καί μορφήν τῆς Κ.Σ., ὡς ἀνωτέρω(παρ.9α-(4)) ἐξετέθη.

(3)'Η Κ.Σ. ὑφίσταται μόνον διά τάς συνεχεῖς κατανομάς,ἀφοῦ μόνον διά ταύτας ὑφίσταται καί ἡ f(x), ἐνῶ αὕτη, ὡς βασική ἔννοια διά τήν στατιστικήν, θά ἔδει νά εἶχε γενικήν ἰσχύν.

ζ. 'Ο εἰς Κεφ. Α-7γ ὁρισμός τῆς Κ.Σ. δέν εὐσταθεῖ διά τούς κάτωθι λόγους:

(I) Εἰς τάς συνεχεῖς κατανομάς, εἰς τάς ὁποίας, κατά τόν ὁρισμόν ἀναφέρεται ἡ Κ.Σ., ἡ συχνότης παρίσταται διά τοῦ ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδοῦ,ἐξ οὗ δέν δύναται νά παρίσταται συγχρόνως καί ὑπό τῶν τεταγμένων ταύτης, αἱ ὁποῖαι, ὡς καί ἀνωτέρω (παραγρ. 9στ) ἐξετέθη, δέον νά παριστοῦν πυκνό - τητας συχνότητος.

(2) Αἱ τεταγμέναι τῆς Κ.Σ. ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, εἰς τά ὁποῖα ὅμως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι συχνότητες εἶναι πάντοτε μηδέν, ὡς εἰς Κεφ. Α-5β ἐξετέθη.

Συνεπείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἐπικρατεῖ ἀσάφεια καί ἀβεβαιότης περί τήν ἔκφρασιν τῶν διαστάσεων τῆς μονάδος μετρήσεως τῆς τεταγμένης, ἡ ὁποία σημειοῦται ἄλλοτε ὡς συχνότης [I, σελ. I98] καί ἄλλοτε ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐνδείξεως [I2,σελ. 27I], ἐνῶ τό ὀρθόν θά ἦτο νά ἐκφράζεται ὡς"πυκνότης συχνότητος", ἤτοι ὡς συχνότης ἀνά μονάδα τῆς ἀνε - ξαρτήτου μεταβλητῆς (ὡς Κεφ. Β- IIστ).

η. 'Ο εἰς Κεφ. Α- 7α ὁρισμός τῆς Κ.Σ. εἶναι ἐπιστημονι - κῶς ἀόριστος, διότι παρέχει ἁπλῶς μίαν μηχανικήν εἰκόνα, καί δή ἀσταθῆ, τῆς μορφῆς ταύτης, χωρίς τήν δυνατότητα μαθηματικοῦ προσδιορισμοῦ τῆς πραγματικῆς μορφῆς της (ἀναλυτικῆς καί γραφικῆς). Πράγματι, ἐφ'ὅσον, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, ἡ ἀπόλυτος συχνότης εἶναι ἄπειρος,καί ἐφ' ὅσον αἱ τεταγμέναι παριστοῦν συχνότητας, δέν δύναται νά ὑπάρξῃ συγκεκριμένη (γραφική ἤ ἀναλυτική) τιμή τῶν τεταγμένων τούτων (ὡς Κεφ. Β- IIθ). 'Εξ ἄλλου ἡ παράστα - σις τῆς συχνότητος ὑπό τῶν τεταγμένων τῆς Κ.Σ. δέν εὐσταθεῖ, δι'οὕς λόγους ἀνωτέρω (παραγρ. 9ζ) ἐξετέθη.

Αἱ ὡς ἀνωτέρω (Α-9στ-η) παρατηρήσεις ἀποκαλύπτουν τούς λόγους οἱ ὁποῖοι συνετέλεσαν ὥστε νά μή ἀξιοποιηθῆ ἐπαρκῶς ἡ ἔννοια τῆς Κ.Σ. ἐνίοτεδέ καί ν'ἀγνοηθῆ αὕτη ἐξ ὁλοκλήρου, ἀφοῦ βασικά καί ἀναλυτικά συγγράμματα στατιστι -

κῆς [30] , [59], ὄχι μόνον δέν τήν χρησιμοποιοῦν, ἀλλ' οὐδέ κάν τήν μνημονεύουν, παρά τό γεγονός ὅτι ἐκ μόνης τῆς Κ.Σ θά ἦτο δυνατόν νά ὑπολογισθοῦν πάντα τά στοιχεῖα τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς συχνότητος (ὡς κεφ. Β- Ι6).

θ. 'Η ἐν τοῖς προηγουμένοις διαπιστωθεῖσα ἔλλειψις σαφηνείας, ὀφειλομένη κυρίως εἰς τόν ταυτισμόν τῶν ὅρων"συχνότης", "σχετική συχνότης" καί " πυκνότης συχνότητος", ἐπιτείνεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι θεμελιώδεις στατιστικαί ἔννοιαι δέν ἔχουν γενικήν ἰσχύν διά τάς παντός εἴδους κατανομάς. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τάς διαφοράς αἱ ὁποῖαι, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, ὑφίστανται μεταξύ συνεχῶν καί ἀσυνεχῶν κατανομῶν, καί κυρίως εἰς τό ὅτι εἰς μέν τάς συνεχεῖς κατανομάς ἡ συχνότης ἀναφέρεται εἰς διάστημα τῆς μεταβλητῆς , ἐνῶ εἰς τά σημεῖα ταύτης ἀντιστοιχεῖ συχνότης μηδέν(ὡςΚεφ. Α- 5β), εἰς δέ τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς ἡ συχνότης ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένα σημεῖα τῆς μεταβλητῆς, τά " σημεῖα μάζης" (ὡς Κεφ. Α- 5α).

'Ως ἐκ τούτου διά τήν κάλυψιν τῶν ἀνωτέρω κενῶν δέον ὅπως, ἐκτός τῆς σαφοῦς διακρίσεως μεταξύ τῶν ὡς ἄνω ἐννοιῶν καί τῆς παραστάσεως τῆς πυκνότητος συχνότητος διά τῶν τεταγμένων τῶν Κ.Σ. ληφθῆ ἐπί πλέον ὑπ'ὄψιν ὅτι καί διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς ἡ συχνότης δέν ἀναφέρεται ἀποκλειστικῶς εἰς τά σημεῖα, ἀλλ'εἰς τό μεταξύ τῶν "σημείων μάζης" διάστημα τῆς μεταβλητῆς. Μέ βάσιν τ'ἀνωτέρω ἐπιτυγχάνονται τά κάτωθι:

(Ι)'Η γραφική παράστασις τῶν Κ.Σ. διά τάς παντός εἴδους κατανομάς θά εἶναι ἑνιαία καί ὁμοιόμορφος, μέ τεταγμένας τάς πυκνότητας συχνότητος.

(2) Τό μέτρον τοῦ ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδοῦ, θά ἰσοῦται πρός τήν ἀντίστοιχον ἀπόλυτον συχνότητα, ἀφοῦ ἡ τιμή τῆς πυκνότητος συχνότητος (ρ) θά ἰσοῦται πρός τήν τεταγμένην (y) τῆς Κ.Σ., ἤτοι θά ἰσχύῃ πάντοτε (ὡς Κεφ. Β-ΙΙε),ἡ σχέσις:

$$\Delta\left|E\right| = y.\Delta x = \varrho.\Delta x = f \qquad (2I)$$

"Ενθα $\Delta|E|$ εἶναι ἡ μεταβολή τοῦ ἐμβαδοῦ καί f ἡ ἀντίστοιγος ἀπόλυτος συχνότης. Διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς,ἐπειδή Δx εἶναι ἡ μονάς (ὡς Κεφ. Α-5α) ἡ πυκνότης συχνότητος θά ἔχῃ πάντοτε τιμήν ἴσην πρός τήν συχνότητα τοῦ ἀντιστοίχου σημείου μάζης καί θά παραμένῃ σταθερά μεταξύ 2 διαδοχικῶν σημείων μάζης εἰς τήν ἀντίστοιχον Κ.Σ.(ὡς Κεφ. Β- 9β - (4)).

(3)'Η ἔννοια τῆς Κ.Σ.θ'ἀναφέρεται γενικῶς εἰς τήν ἀπόλυτον συχνότητα, ἀφοῦ λόγω τῆς ἰσότητος μεταξύ ἀπολύτου συχνότητος καί ἐμβαδοῦ (ὡς σχέσις (2I) ἀνωτέρω), θά πρέπει μεταβαλλομένου τοῦ ἐμβαδοῦ, νά μεταβάλλεται ὁμοίως καί ἡ ἀντίστοιχος ἀπόλυτος συχνότης καί τοῦτο, προφανῶς δέν δύναται ν'ἀληθεύη ὅταν ἡ Κ.Σ. ἀναφέρεται εἰς τήν σχετικήν συχνότητα τῆς κατανομῆς.

ι. 'Η ὑποκατάστασις, ἐξ ἄλλου, τῆς Κ.Σ. ὑπό τοῦ ἱστογράμμου ἤ τοῦ πολυγώνου συχνότητος, κατά τάς στατιστικάς παρατηρήσεις (ὡς Κεφ. Α- 6) δέν παρέχει ἀκριβῶς τήν εἰκόνα τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς, διότι:

(I) Τό ἱστόγραμμον συχνότητος παρουσιάζει ὁμοιόμορφον κατανομήν συχνότητος ἐντός τῶν διαστημάτων τάξεως, ἐνῶ αὕτη, διά μέν τάς συνεχεῖς κατανομάς μεταβάλλεται, διά δέ τάς ἀσυνεχεῖς ἀποκτᾶ συγκεκριμένην τιμήν καί ἔννοιαν μόνον διά τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν πρός τάς τοιαύτας τῶν " σημείων μάζης".

(2) Τό πολύγωνον συχνότητος παρουσιάζει γραμμικήν μεταβολήν τῆς συχνότητος ἐντός τῶν διαστημάτων τάξεως, ἐνῶ αὕτη μεταβάλλεται κατά τόν νόμον τόν ὁποῖον ὁρίζει ἡ συνάρτησις f(x).

(3) Εἰς ἀμφοτέρας τάς ἀνωτέρω περιπτώσεις θεωρεῖται ὅτι αἱ τεταγμέναι παριστοῦν συχνότητας. 'Εν τούτοις ὅμως εἰς ἱστογραμμα μή ἔχοντα ἴσα πάντα τά διαστήματα τάξεως τούτων, αἱ τεταγμέναι τῶν ἀνίσων διαστημάτων παριστοῦν τήν συχνότητα τοῦ διαστήματος τάξεως διῃρημένην διά τοῦ ἀντιστοίχου εὔρους του, ἤτοι παριστοῦν "πυκνότητα συχνότητος" [61, σελ. 80] . 'Αλλά μία τοιαύτη μεταβολή τῆς μονάδος τῆς τεταγμένης, καί δή ἐντός τοῦ αὐτοῦ σχήματος, δέν δικαιολογεῖται καί δεικνύει διά μίαν εἰσέτι φοράν τήν ἀνάγκην τῆς παραστάσεως, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τῆς πυκνότητος συχνότητος ὑπό τῶν τεταγμένων τῆς Κ.Σ.

Συνεπῶς τό ἱστόγραμμον καί τό πολύγωνον συχνότητος, δέν ἀποδίδουν ὀρθῶς καί πιστῶς τήν πραγματικήν εἰκόνα τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἀκριβής μορφή ἀποδίδεται μόνον ὑπό τῆς Κ.Σ. ταύτης.

ια. Ὡς γενικόν συμπέρασμα συνάγεται ὅτι ἡ Στατιστική ἐπιστήμη, διανύουσα εἰσέτι τό στάδιον τῆς ἀναπτύξεως καί ἐξελίξεώς της, παρουσιάζει ὡρισμένα κενά εἰς θεμελιώδεις ταύτης ἐννοίας, τά ὁποῖα δυσχεραίνουν τήν περαιτέρω ἀξιοποίησιν τῶν ἐννοιῶν τούτων. Μεταξύ τῶν κενῶν τούτων εἶναι καί τά κάτωθι:

(1) Ἔλλειψις σαφηνείας καί ἀκριβολογίας εἰς τόν ὁρισμόν τῆς " συχνότητος".

(2) Ἀσυμφωνία καί ἀσάφεια εἰς τούς ὁρισμούς τῶν ἐννοιῶν "συνάρτησις συχνότητος", "συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος" καί " καμπύλη συχνότητος", καθώς καί ἔλλειψις γενικῆς ἰσχύος τούτων διά τάς παντός εἴδους κατανομάς (συνεχεῖς καί ἀσυνεχεῖς)

(3) Ταυτοποίησις τῆς ἐννοίας τῶν "καμπύλων συχνότητος" γενικῶς, πρός τήν ἔννοιαν τῆς " καμπύλης σχετικῆς συχνότητος" τῆς κατανομῆς, ἐξ οὗ ἀδυναμία περαιτέρω ἀξιοποιήσεως τῶν Κ.Σ. διά συγκριτικῆς γραφικῆς παραστάσεως περισσοτέρων τῆς μιᾶς ἐκ τούτων, ἀνταποκρινομένων εἰς διαφόρους ὁλικάς συχνότητας.

(4) Ταυτοποίησις τῶν συναρτήσεων " συχνότητος" καί "πυκνότητος συχνότητος", ἐξ οὗ σύγχυσις καί ἀοριστία εἰς τήν ἔκφρασιν τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν τεταγμένων μιᾶς Κ.Σ.

(5) Ἀδυναμία ὑπολογισμοῦ ἀπ' εὐθείας, ἐκ μόνης τῆς ἀναλυτικῆς ἤ γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς Κ.Σ. πάντων τῶν στοιχείων τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς, συμπεριλαμβανομένων καί τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων.

(6) Ἔλλειψις σταθερᾶς ποσοτικῆς σχέσεως μεταξύ ἀπολύτων συχνοτήτων καί ἀντιστοίχων ἐμβαδῶν, ἐξ οὗ ἀδυναμία ὑπολογισμοῦ, ἑκατέρου τούτων συναρτήσει τοῦ ἑτέρου.

(7) Ἐξαγωγή ἀνακριβοῦς συμπεράσματος καθ' ὅ αἱ συνεχεῖς κατανομαί ἀντιπροσωπεύουν ἄπειρον ἀπόλυτον ὁλικήν, καθώς καί μερικάς συχνότητας, καί ὡς ἐκ τούτου ἀδυναμία ἀκριβοῦς μαθηματικῆς προσαρμογῆς εἰς ταύτας πεπερασμένης ἀπολύτου ὁλικῆς συχνότητος.

(8) Ἀνεπάρκεια τῶν ἱστογράμμου καί πολυγώνου συχνότητος εἰς τήν ἀκριβῆ παράστασιν τῶν κατανομῶν συχνότητος.

Εἰς τά ἐπακολουθοῦντα Β΄ καί Γ΄ κεφάλαια ἐπιδιώκεται ἡ κάλυψις τῶν ἀνωτέρω κενῶν, διά τῆς συμπληρώσεως τῶν ὁρισμῶν τῶν σχετικῶν στατιστικῶν ὅρων, τῆς σαφοῦς διακρίσεως τῆς ἐννοίας ἑκάστου τούτων, τῆς ἑνοποιήσεως τῆς ἰσχύος των διά τάς παντός εἴδους κατανομάς (συνεχεῖς καί ἀσυνεχεῖς)καί τῆς ἐν συνεχείᾳ ἀξιοποιήσεώς των πρός ἐπίλυσιν διαφόρων στατιστικῶν προβλημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Ι. Γενικά

Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά ἐκτεθῶσιν ἀπόψεις τινές πρός συμπλήρωσιν καί ἐναρμόνισιν τῶν στατιστικῶν ἐκείνων ὅρων, διά τούς ὁποίους, ὡς διεπιστώθη εἰς παραγρ. 9 τοῦ Α΄κεφαλαίου, ὑφίσταται τοιαύτη ἀνάγκη, εἰς τρόπον ὥστε νά καταστῇ δυνατή ἡ πλήρης ἀξιοποίησις τούτων, ὡς εἰς Γ΄κεφάλαιον.

2. Συνάρτησις Πυκνότητος Συχνότητος (Ἀξίωμα)

"Ἵνα τυχοῦσα συνάρτησις f(x) θεωρεῖται ὡς " συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος" εἰς τό διάστημα αβ, πρέπει καί ἀρκεῖ νά λαμβάνῃ εἰς τό διάστημα τοῦτο, μόνον μή ἀρνητικάς τιμάς".

Τό ἕν ἤ καί ἀμφότερα τά ἀκραῖα ὅρια αβ δυνατόν νά εἶναι τό ἄπειρον ($-\infty$ καί $+\infty$).

Ἐάν ἡ f (x) εἶναι συνεχής εἰς τό διάστημα αβ, ἡ ἀντίστοιχος κατανομή λέγεται " συνεχής" ἡ δέ στοιχειώδης ποσότης f (x) dx καλεῖται " στοιχεῖον συχνότητος" ἤ "στοιχειώδης συχνότης".

Ἐάν εἰς τό αὐτό διάστημα ἡ f (x) εἶναι ἀσυνεχής, ἡ ἀντίστοιχος κατανομή λέγεται " ἀσυνεχής" ἡ δέ ποσότης f (x)δ, ἔνθα δ εἶναι τό διάστημα μεταξύ 2 διαδοχικῶν " σημείων μάζης" (ὡς Κεφ. Α-5α) θά καλῆται " μαζικόν στοιχεῖον συχνότητος".

3. Συνάρτησις Συχνότητος

Οὕτω θά καλῆται ἡ συνάρτησις F(x) διά τήν ὁποίαν ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

α. Διά συνεχῆ f(x): $dF(x) = f(x)dx$ (Ι)

ἐξ οὗ : $F(x) = \int f(x)dx$ (2)

Ἔνθα f(x) = συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος

β. Δι'ἀσυνεχῆ f(x):

$$\Delta F(x) = f(x)\delta \qquad (3)$$

ἔνθα ΔF(x) εἶναι ἡ αὔξησις τῆς F(x) εἰς τό διάστημα δ.

'Εξ οὗ : $$F(x) = \sum f(x)\delta \qquad (4)$$

4. Συνάρτησις Κατανομῆς $F_{\varkappa}(x)$

Ὅταν, ὡς κατώτερον ὅριον τῆς ὁλοκληρώσεως ἤ ἀθροίσε-
ως τῆς συναρτήσεως συχνότητος, λαμβάνεται τό κατώτερον
ὅριον α τοῦ εὔρους αβ τῆς κατανομῆς, τότε ἡ συνάρτησις
F(x) θά καλῆται " συνάρτησις κατανομῆς" ἤ " συνάρτησις ἀ-
θροιστικῆς συχνότητος" θά παρίσταται δέ εἰδικῶς διά τοῦ
συμβόλου $F_{\varkappa}(x)$ καί θά εἶναι:

Διά συνεχῆ κατανομήν: $$F_{\kappa}(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx \qquad (5)$$

Δι'ἀσυνεχῆ " : $$F_{\kappa}(x) = \sum_{\alpha}^{x} f(x).\delta \qquad (6)$$

5. Συχνότης

Οὕτω καλεῖται ὁ ἀπόλυτος ἀριθμός τῶν ἐμφανίσεων ἤ ἐ-
παναλήψεων συγκεκριμένου τινός γεγονότος, συνδεομένου μέ
τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς, ὡς π.χ. ἡ ἐμφάνισις ἀναστήμα -
τος ὁπλίτου ἀπό 165 ἕως 170 ἑκατοστά, ἤ ἡ ἐμφάνισις οἰ-
κογενείας μέ 2 τέκνα κλπ.

"Θεωρητική" ἤ " ἐκ τῶν προτέρων" (a priori)συχνότης
λέγεται ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς ἀντιστοίχου "συναρτήσεως συ
χνότητος" διά καθορισμοῦ τῶν ορίων της, παριστᾷ δέ αὐτη
τήν συχνότητα ἡ ὁποία προβλέπεται ὅτι θά λάβη χώραν μελ-
λοντικῶς, ἐάν ἡ κατανομή ἀκολουθήση ἀκριβῶς τόν νόμον τόν
ὁποῖον καθορίζει ἡ f (x). Αὕτη ἐκφράζεται διά παντός θε-
τικοῦ ἀριθμοῦ (ρητοῦ ἤ ἀρρήτου) καί τοῦ μηδενός.

"'Εμπειρική" ἤ " ἐκ τῶν ὑστέρων" (a posteriori) συ-
χνότης λέγεται ἡ προκύπτουσα ἐκ τῶν ἀντιστοίχων στατιστι
κῶν παρατηρήσεων. Αὕτη ἐκφράζεται μόνον διά τῶν φυσικῶν
(θετικῶν ἀκεραίων) ἀριθμῶν καί τοῦ μηδενός.

Εἰδικώτερον:

α) 'Ὁλική συχνότης (N) θά καλῆται ἡ συχνότης ἡ ἀντιστοιχοῦσα μεταξύ τῶν ἀκραίων ὁρίων αβ, τῆς κατανομῆς καί θά εἶναι:

Διά συνεχῆ f(x) : $N = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (7)

Δι'ἀσυνεχῆ f(x) : $N = \sum_{x_{i=0}}^{\nu} f(x_i)\delta$ (8)

Ἔνθα $x_i = 0, 1, 2 \ldots \nu$ τά σημεῖα μάζης(ὡς Κεφ.Α-5α).

β. Μερική συχνότης (f) θά καλῆται ἡ συχνότης ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τό τυχόν διάστημα $x_1 x_2$ ἐντός τοῦ διαστήματος αβ καί θά εἶναι:

Διά συνεχῆ f(x) : $f = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ (9)

Δι'ἀσυνεχῆ f(x) : $f = \sum_{x_i \leqslant x < x_2} f(x) \cdot \delta$ (10)

Προφανῶς θά ἰσχύη πάντοτε ἡ σχέσις: $N = \sum f_i$ (11)

τῆς ἀθροίσεως ἐκτεινομένης εἰς ὁλόκληρον τό διάστημα αβ.

6. 'Ἀθροιστική συχνότης (F) θά καλῆται ἡ συχνότης ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἀπό τοῦ κατωτέρου ὁρίου α τῆς κατανομῆς μέχρι τοῦ τυχόντος σημείου x_i καί θά εἶναι:

Διά συνεχῆ f(x) : $F = \int_{\alpha}^{x_i} f(x)dx$ (12)

Δι'ἀσυνεχῆ f(x) : $F = \sum_{\alpha}^{x_i} f(x) \cdot \delta$ (13)

7. 'Ἰδιότητες τῆς συναρτήσεως ἀθροιστικῆς συχνότητος $F_K(x)$

α. Εἶναι μή φθίνουσα, μή ἀρνητική

β. 'Ἰσχύουν πάντοτε αἱ σχέσεις:

$0 \leqslant F_K(x_i) \leqslant N$ (διά $\alpha \leqslant x_i \leqslant \beta$) (14)

$F_K(\alpha) = 0$ (15)

$F_K(\beta) = N$ (16)

8. <u>Σχετική Συχνότης (φ)</u>

Αὕτη, ὡς ὡρίσθη εἰς Κεφ. Α-Ια σχέσις (2), εἶναι ὁ λόγος τῆς μερικῆς πρός τήν ὁλικήν συχνότητα.

'Εάν ἡ συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος f(x) εἶναι τοι αὕτη ὥστε ἡ ὁλική συχνότης ἡ προκύπτουσα ἐκ τῶν σχέσεων (7) καί (8) ἀνωτέρω, νά ἰσοῦται πρός τήν μονάδα, τότε ἡ ειδική αὕτη μορφή τῆς f(x) θά παρίσταται διά τῆς φ(x) καί θά καλῆται " συνάρτησις πυκνότητος σχετικῆς συχνότητος " ἤ " συνάρτησις πυκνότητος πιθανότητος". 'Εν τοιαύτη περιπτώσει ἡ τιμή τῆς συχνότητος εἰς τυχόν διάστημα $x_1 x_2$ ἐκ τῶν σχέσεων (9) καί (10) ἀνωτέρω θά ἰσοῦται πρός τήν ἀντίστοιχον σχετικήν συχνότητα, ἤτοι θά εἶναι:

$$\text{Διά συνεχῆ } \varphi(x): \quad \varphi = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx \qquad (17)$$

$$\text{Δι' ἀσυνεχῆ } \varphi(x): \quad \varphi = \sum_{x_1 \leqq x < x_2} \varphi(x)\delta \qquad (18)$$

'Η συνάρτησις συχνότητος Φ(x) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς συνάρτησιν πυκνότητος σχετικῆς συχνότητος φ(x), θά καλῆται " συνάρτησις σχετικῆς συχνότητος" ἤ " συνάρτησις πιθανότητος".

Παραλλήλως ὁρίζεται ἡ " συνάρτησις κατανομῆς σχετικῆς συχνότητος" $\Phi_k(x)$ ἤ " συνάρτησις ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος" καθώς καί ἡ " ἀθροιστική σχετική συχνότης" Φ ἤ " ἀθροιστική πιθανότης", ὡς εἰς Β-4 καί 6 ἀνωτέρω.

9. <u>Παρατηρήσεις ἐπί τῆς συχνότητος</u>

α. Διά τάς συνεχεῖς κατανομάς τά τυχόντα διαστήματα $x_1 x_2$ δύνανται νά θεωρῶνται ἀδιαφόρως ὡς κλειστά ἤ ἀνοικτά ἑκατέρωθεν ἤ ὡς πρός τό ἕν ἄκρον των, διότι εἰς τά σημεῖα τῆς μεταβλητῆς ἡ ἀντιστοιχοῦσα συχνότης εἶναι μηδέν (ὡς Κεφ. Α-5β).

β. Διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς:

(1) Τό " μαζικόν στοιχεῖον συχνότητος" ἀποτελεῖ ἑνιαίαν καί ἀδιαίρετον ποσότητα, τῆς ὁποίας τά σταθερά χαρακτηριστικά εἶναι ἡ πυκνότης συχνότητος f(x) καί τό διάστημα δ. Συχνότης ἀναφερομένη εἰς μέρος τοῦ διαστήματος δ ἤ πυ

κνότης συχνότητος διάφορος τῆς $f(x)$ εἰς τά διάφορα σημεῖατοῦ δ, <u>δέν ἔχουν ἔννοιαν</u>. Συνεπῶς τά ὅρια τῶν διαστημάτων θ'ἀναφέρωνται πάντοτε μεταξύ μαζικῶν σημείων.

(2) Διά τήν γραφικήν παράστασιν, ἡ θέσις τοῦ διαστήματος δ, ὡς πρός τό μαζικόν σημεῖον δύναται νά ληφθῆ εἴτε ἑκατέρωθεν τοῦ μαζικοῦ σημείου, εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νά εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τοῦ δ, εἴτε πρός τό ἕν μέρος τούτου. Συμβατικῶς θά λαμβάνεται τό διάστημα δ δεξιά πάντοτε τοῦ μαζικοῦ σημείου.

(3) Τό διάστημα δ, ὡς καί τυχόν διάστημα x_1x_2 μεταξύ τυχόντων μαζικῶν σημείων θά θεωρῆται πάντοτε ἀνοικτόν πρός τά δεξιά,εἰς τρόπον ὥστε νά μή περιλαμβάνεται τό δεξιόν "μαζικόν σημεῖον".

(4) Εἰς τάς στατιστικάς ἐφαρμογάς. εἰς τάς ὁποίας τά"σημεῖα μάζης"εἶναι οἱ διαδοχικοί φυσικοί ἀριθμοί (ὡς Κεφ.Α- 5α), τό διάστημα δ, θά ἰσοῦται προφανῶς πρός τήν μονάδα. Συνεπῶς ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς πυκνότητος συχνότητος $f(x)$ θά ἰσοῦται πρός τήν ἀντίστοιχον συχνότητα τοῦ " μαζικοῦ στοιχείου συχνότητος"

10.<u>Καμπύλαι Συχνοτήτων</u>

α. Θά καλῆται " Καμπύλη Συχνότητος" (Κ.Σ.) μιᾶς κατανομῆς,ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἀντίστοιχος"συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος" $f(x)$ (ὡς Β-2) ἤτοι:

$$y = f(x) \tag{19}$$

β. Θά καλῆται " Καμπύλη ἀθροιστικῆς συχνότητος" ἤ "Καμπύλη κατανομῆς συχνότητος" μιᾶς κατανομῆς, ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἀντίστοιχος"συνάρτησις ἀθροιστικῆς συχνότητος" $F_K(x)$ (ὡς Κεφ. Β-4),ἤτοι:

$$y = F_K(x) \tag{20}$$

γ. Θά καλῆται " Καμπύλη σχετικῆς συχνότητος" (Κ.Σ.Σ.) μιᾶς κατανομῆς, ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἀντίστοιχος "συνάρτησις πυκνότητος σχετικῆς συχνότητος" $\varphi(x)$(ὡς Κεφ.Β- 8), ἤτοι:

$$y = \varphi(x) \tag{21}$$

δ. Θά καλῆται " Καμπύλη ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος" μιᾶς κατανομῆς, ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἀντίστοιχος "συνάρτησις ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος" $\Phi_\kappa(x)$ (ὡς Κεφ. Β- 8) ἤτοι:

$$y = \Phi_k(x) \qquad (22)$$

II. Συνέπειαι ἀπορρέουσαι ἐκ τῶν συμπληρωθέντων ὅρων

α. Ἡ " συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος" $f(x)$, ὁριζομένη πρωτογενῶς καί ἀνεξαρτήτως τῆς $F_\kappa(x)$, (ὡς Κεφ. Β- 2), ἀποκτᾶ γενικήν ἰσχύν διά τάς παντός εἴδους κατανομάς, τοῦτο δ'ἐνέχει σπουδαίαν σημασίαν ἀπό στατιστικῆς ἀπόψεως, διότι καλύπτει τό κενόν μεταξύ συνεχῶν καί ἀσυνεχῶν κατανομῶν, τάς ὁποίας καί ἐνοποιεῖ. Ἡ $F_\kappa(x)$ προκύπτει ἤδη οὐχί πρωτογενῶς, (ὡς Κεφ. Α-3), ἀλλά δευτερογενῶς, βάσει τῆς $f(x)$, (ὡς Κεφ. Β- 4). Οὕτω, χωρίς νά διαταράσσεται ἡ ὑφισταμένη σχέσις (9) τοῦ Α΄Κεφ. μεταξύ τῶν $F_\kappa(x)$ καί $f(x)$ διά τάς συνεχεῖς κατανομάς (ὡς σχέσις (5) τοῦ Β΄Κεφ.) ἀποκαθίσταται, ἐπί πλέον, καί ἡ μή ὑφισταμένη ὁμοία τοιαύτη διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς (ὡς σχέσις (6) τοῦ Β΄ κεφ.). Διά τάς τελευταίας ταύτας, ἡ πυκνότης συχνότητος, παραμένει σταθερά εἰς τό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικῶν " σημείων μάζης" ἡ δέ ἀριθμητική τιμή ταύτης ἰσοῦται πρός τήν ἀντίστοιχον συχνότητα τοῦ " μαζικοῦ στοιχείου συχνότητος" (ὡς Κεφ. Β-9β-(4)), ἐξ οὗ καί ἡ ἀντίστοιχος Κ.Σ. λαμβάνει τήν μορφήν τοῦ ἱστογράμμου συχνότητος, ὅπου ὅμως, αἱ τεταγμέναι ταύτης εἶναι πυκνότητες συχνότητος.

β. Ἀποσαφηνίζονται καί διακρίνονται ἀπολύτως μεταξύ των οἱ ὅροι " συχνότης", "σχετική συχνότης", "συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος", " συνάρτησις πυκνότητος σχετικῆς συχνότητος", "συνάρτησις συχνότητος", " συνάρτησις κατανομῆς" κλπ. καθώς καί αἱ ἀντίστοιχοι τούτων καμπύλαι.

γ. Αἱ σχέσεις (13) καί (17) τοῦ Α΄Κεφαλαίου δέν παρέχουν τήν σχετικήν ἀθροιστικήν συχνότητα μόνον, ἀλλά παρέχουν καί τήν ἀπόλυτον τοιαύτην, ἀναλόγως τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ ἤ $f(x)$ (ὡς Κεφ. Β-5β καί Β-8).

δ. Κατά τήν γραφικήν παράστασιν τῶν Κ.Σ. προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (19) ὡς τεταγμένη τούτων, ἡ συνάρτησις $f(x)$ ἤτοι ἡ "πυκνότης συχνότητος", ἀντί τῆς "συχνότητος"(ὡς Κεφ. Α-7).

ε. Βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, προκύπτει ὡς σταθερά ποσοτική σχέσις μεταξύ συχνότητος καί μέτρου τοῦ ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδοῦ ἐκπεφρασμένου εἰς τετραγωνικάς μονάδας τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς μονάδος τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἡ " ἰσότης" τούτων, καθ'ὅσον ἀμφότερα τά μεγέθη ταῦτα ἐξάγονται ὡς τό ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς αὐτῆς συναρτήσεως $f(x)$, ἐντός τῶν αὐτῶν ὁρίων, ὡς σχέσεις (7) καί (9) τοῦ Β΄Κεφαλαίου ἤ ὡς ἄθροισμα τῶν αὐτῶν γινομένων, ἐντός τῶν αὐτῶν ὁρίων, ὡς σχέσεις (8) καί (10) τοῦ Β΄Κεφαλαίου.

Συνεπῶς θά εἶναι ἐκ τῆς σχέσεως (7) διά τάς συνεχεῖς κατανομάς:

$$|E| = \int_{\alpha}^{\beta} y\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = N \qquad (23)$$

ἤ ἐκ τῆς σχέσεως (8) διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς:

$$|E| = \Sigma\, y_i \delta = \sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i)\delta = N \qquad (24)$$

Παρόμοιαι σχέσεις ὑφίστανται καί διά τάς μερικάς συχνότητας (ὡς Κεφ. Β-5β). Προφανῶς ἡ ἰσότης αὕτη μεταξύ |Ε| καί Ν ἀποκαθιστᾷ ἑνιαίαν καί σταθεράν ποσοτικήν σχέσιν μεταξύ συχνότητος καί τοῦ ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδοῦ, διά τάς παντός εἴδους κατανομάς.

στ. Ἡ πυκνότης συχνότητος (ρ) προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (3) ἀνωτέρω καί εἶναι ἡ α΄παράγωγος τῆς συχνότητος διά τάς συνεχεῖς κατανομάς, ἤτοι:

$$\rho = f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} = F'(x) \qquad (25)$$

ἤ διά τάς ἀσυνεχεῖς κατανομάς

$$\rho = f(x) = \frac{\Delta . F(x)}{\delta} \qquad (26)$$

Αὕτη παριστᾷ τήν ἀνά μονάδα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς συχνότητα. Συνεπῶς πυκνότης συχνότητος α εἰς τό σημεῖον x_i σημαίνει ὅτι ἐάν διετηρεῖτο αὕτη σταθερά ἐπί διάστημα μιᾶς μονάδος τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τότε ἡ ἀντιστοιχοῦσα συχνότης εἰς τό διάστημα τοῦτο θά ἦτο α.

Ἡ πυκνότης συχνότητος, ὡς ἴδιον μέγεθος, ἔχει διαστάσεις:

$$[\rho] = \frac{[N]}{[x]} = \frac{[x]^0}{[x]^1} = [x]^{-1} \qquad (27)$$

Συνεπῶς ὡς μονάς μετρήσεως τῆς πυκνότητος συχνότητος δέον νά ληφθῆ ἡ συχνότης 1 ἀνά μονάδα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

ζ. 'Εκ τῶν σχέσεων (7),(8),(9) καί (10) συνάγεται ἐξ ἄλλου ὅτι αἱ μερικαί καί ὁλικαί συχνότητες τῶν διαφόρων Κ.Σ. εἶναι πεπερασμέναι καί ἀκριβῶς καθωρισμέναι, ὡς ὡρισμένα ὁλοκληρώματα ἤ ἀθροίσματα ἐντός συγκεκριμένων ὁρίων. Συνεπῶς δέν εὐσταθεῖ, καθ'ἡμᾶς, ἡ ἐπικρατοῦσα ἀντίληψις (ὡς Κεφ. Α-7), ὅτι ἡ Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς ἀντιπροσωπεύει ἄπειρον ὁλικήν καί μερικάς συχνότητας. Τοῦτο ὑπῆρξεν ἀνακριβές συμπέρασμα. λόγῳ ἀνακριβοῦς ὁρισμοῦ τῆς Κ.Σ. (ὡς Κεφ. Α-7). "Απειροι εἶναι προφανῶς αἱ πυκνότητες συχνότητος καί οὐχί αἱ συχνότητες. Δύναται νά συγκριθῆ ἡ περίπτωσις πρός τό διανυθέν διάστημα εἰς χρόνον t κατά τήν ἀνισοταχῆ κίνησιν, ὅτε ἐνδέχεται ἡ ταχύτης νά λάβη ἀπείρους τιμάς κατά τόν χρόνον t ἀλλά τό διανυθέν κατά τόν χρόνον τοῦτον διάστημα, προφανῶς, εἶναι πάντοτε πεπερασμένον.

η. 'Εκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι εἰς ὡρισμένην Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη συχνότης Ν. 'Αντιστρόφως εἶναι δυνατή ἡ προσαρμογή Ν διαφόρων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x (θεωρουμένων ὅτι προέρχονται ἐκ Ν στατιστικῶν παρατηρήσεων) εἰς Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔστω:

$$y = f(x) \tag{28}$$

Πρός τοῦτο ἀρκεῖ αἱ ἀθροιστικαί συχνότητες (F) τῆς (28) καί τῆς κατανομῆς τῶν Ν διαφόρων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς νά ταυτίζωνται εἰς τά σημεῖα x_i. Αἱ Ν διάφοροι τιμαί x_i τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς διατεταγμέναι κατ' αὔξουσαν σειράν μεγέθους των (ὡς Κεφ.Α-2) θά πρέπει νά εἶναι τοιαῦται ὥστε τό ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδόν μεταξύ 2 οἱωνδήποτε διαδοχικῶν τιμῶν x_i νά ἰσοῦται πάντοτε πρός τήν μονάδα.

"Αρα δύνανται αἱ Ν αὗται τιμαί x_i νά ἐξαχθῶσιν ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = 1 \tag{29}$$

"Ενθα $x_i = x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_N$

x_0 = κατώτερον ὅριον τῆς κατανομῆς τῆς συναρτήσεως $f(x)$

x_N = ἀνώτερον " " " " " "

Ἐάν τό ἀνώτερον ὅριον τῆς $f(x)$ εἶναι τό $(+\infty)$, τότε τό x_N δύναται νά ληφθῆ μεγαλύτερον παντός δοθέντος ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου. Τό εὖρος δ_i ἑκάστου διαστήματος $x_{i+1}-x_i$ θά εἶναι προφανῶς, ἀντίστροφον τῆς μέσης πυκνότητος συχνότητος(ϱ)εἰς τό αὐτό διάστημα, ἤτοι θά εἶναι:

$$\varrho_i \cdot \delta_i = 1 \qquad (30)$$

Ἐκ τῶν ἄνω προκύπτει ὅτι δέν εὐσταθεῖ καθ'ἡμᾶς, ἡ ἐπικρατοῦσα ἀντίληψις (ὡς Κεφ. Α-8α) ὅτι πεπερασμένη συχνότης ἀσυνεχῶν τιμῶν δέν δύναται ν'ἀκολουθῆ συνεχῆ κατανομήν. Εἶναι δυνατόν ἀσυνεχεῖς τιμαί, ὄχι μόνον νά προσεγγίσουν Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς ὑπό τήν ἔννοιαν τῆς παραγράφου Α-8β, ἀλλά καί νά ταυτισθοῦν ἀκριβῶς πρός ταύτην, ἐφ'ὅσον πληροῦται ἡ σχέσις (29) ἀνωτέρω, ἀνεξαρτήτως τοῦ μεγέθους τῆς ὁλικῆς συχνότητος Ν.

θ. Κατόπιν τῶν παρατηρήσεων Β- IIζ καί Β-IIη ἀνωτέρω, αἱ Κ.Σ. δέον ν'ἀντιπροσωπεύουν τά δείγματα τά ὁποῖα ἔχουν πεπερασμένην συχνότητα καί οὐχί τόν ἄπειρον πληθυσμόν, ὡς συνήθως πιστεύεται (ὡς Κεφ. Α-7). Πράγματι, ἐφ'ὅσον δύο ἤ περισσότερα δείγματα εἶναι ἀντιπροσωπευτικά τοῦ πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλήφθησαν, θά πρέπει ἡ κατανομή τούτων ν'ἀκολουθῆ τόν αὐτόν νόμον, ὁ ὁποῖος διέπει καί τόν πληθυσμόν. Συνεπῶς αἱ Κ.Σ. τῶν ἀντιπροσωπευτικῶν τούτων δειγμάτων θά διαφέρουν μόνον κατά τάς πυκνότητας συχνότητος (τεταγμένας), εἰς τυχόντα σημεῖα x_i ἤ κατά τήν συχνότητα εἰς τυχόν διάστημα $x_1 x_2$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ὁ ἄπειρος πληθυσμός, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλήφθησαν τ'ἀντιπροσωπευτικά δείγματα, ἀνήκει βεβαίως εἰς τήν αὐτήν οἰκογένειαν ἀλλ'ἡ συχνότης τούτου εἰς οἱανδήποτε περιοχήν τῆς μεταβλητῆς εἶναι ἄπειρος. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀντίστοιχος Κ.Σ. τούτου δέν δύναται νά καθορισθῆ ἐπακριβῶς, διότι ἡ πυκνότης συχνότητος (τεταγμένη) ταύτης εἰς οἱονδήποτε σημεῖον εἶναι ἄπειρος, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως:

$$f_i = f(x_i) \cdot \Delta x = \varrho_i \cdot \Delta x = \infty \qquad (31)$$

ἐξ οὗ:

$$\frac{f_i}{\Delta x} = \rho_i = f(x_i) = \infty \qquad (32)$$

Συνεπῶς δέν εὐσταθεῖ, καθ'ἡμᾶς, ἡ ἐπικρατοῦσα ἀντίληψις ὅτι αἱ Κ.Σ. τῶν συνεχῶν κατανομῶν ἀναφέρονται εἰς τόν ἄπειρον πληθυσμόν [27, σελ. 23], [40, σελ.34]. 'Αντιθέτως ὁ πληθυσμός οὗτος ὡς ἀόριστος, στερεῖται ὡρισμένης Κ.Σ., διότι αὕτη ἀναφέρεται πάντοτε εἰς πεπερασμένας συχνότητας (ὡς Κεφ. Β- 5α καί β).

Ι2. Θεώρημα Ιον (οἰκογένεια Κ.Σ.)

'Εάν ἡ συνάρτησις f(x) λαμβάνει μόνον μή ἀρνητικάς τιμάς εἰς τό διάστημα α,β, τότε ἡ ἐξίσωσις:

$$y = K.\frac{f(x)}{\int_a^\beta f(x)dx} \qquad \text{(διά συνεχῆ } f(x)) \qquad (33)$$

ἤ

$$y = K\frac{f(x)}{\sum_{x=0}^{\nu} f(x)\delta} \qquad \text{(δι'ἀσυνεχῆ } f(x)) \qquad (34)$$

παριστᾶ οἰκογένειαν Κ.Σ. μέ ὁλικήν συχνότητα ἑκάστου μέλους τῆς οἰκογενείας ἴσην πρός Κ ($K > 0$, ν = ἀριθμός "σημείων μάζης" καί α,β ρίζαι τῆς f(x))

'Απόδειξις θά εἶναι:

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{f(x)\,dx}{\int_\alpha^\beta f(x)dx} = \frac{\int_a^\beta f(x)dx}{\int_\alpha^\beta f(x)dx} = I \quad \text{ἤ} \quad I = \frac{\sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i)\delta}{\sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i).\delta} = I \qquad (35)$$

Συνεπῶς ἡ συνάρτησις:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\int_\alpha^\beta f(x)dx} \quad \text{ἤ} \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{\sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i)\cdot\delta} \qquad (36)$$

εἶναι ἡ Καμπύλη Σχετικῆς Συχνότητος (Κ.Σ.Σ.) τῆς ὁποίας, τό ὁλικόν ἐμβαδόν ἰσοῦται πρός μίαν τετραγωνικήν μονάδα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς μονάδος τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἡ δέ ὁλική συχνότης ἰσοῦται πρός Ι.

Αἱ ἐξισώσεις (33) καί (34) περιλαμβάνουσαι τήν παράμετρον Κ, παριστοῦν οἰκογένειαν Κ.Σ. εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκουν τόσον ἡ Κ.Σ. τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως f(x):

$$y = f(x)$$

$$\left(\text{διά } K = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad \text{ἤ} \quad K = \sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i).\delta \right) \tag{37}$$

ὅσον καί ἡ Κ.Σ.Σ. τῆς οἰκογενείας (διά Κ = Ι), ὡς σχέσις (36)

Τό εὖρος ὅλων τῶν Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας εἶναι τό αὐτό, διότι αἱ α καί β εἶναι ρίζαι τῆς οἰκογενείας.

Ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν (33) ἤ (34) ὁλική συχνότης Ν, εἶναι:

$$N = \left| E \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{K.f(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx} = K \tag{38}$$

ἤ
$$N = \left| E \right| = K \frac{\sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i)\delta}{\sum_{x_i=0}^{\nu} f(x_i)\delta} = K \tag{39}$$

Ι3. <u>Πόρισμα Ιον</u>

Κ.Σ. ἀνήκουσαι εἰς τήν αὐτήν οἰκογένειαν τοῦ Ιου θεωρήματος ἔχουν τήν αὐτήν Κ.Σ.Σ. καί ἀντιστρόφως.

Ι4. <u>Πόρισμα 2ον</u>

Ὁ λόγος τῶν τεταγμένων Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας τοῦ Ιου θεωρήματος ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ὁλικῶν συχνοτήτων.

Ι5. <u>Πόρισμα 3ον</u>

Ἡ ροπή $\nu^{\text{ης}}$ τάξεως τυχούσης οἰκογενείας Κ.Σ.τοῦ Ιου θεωρήματος εἶναι ἡ αὐτή διά πάσας τάς Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας ἤτοι:

$$\mu_\nu = \int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu}.\varphi(x)dx \tag{40}$$

ἤ
$$\mu_\nu = \sum_{x=0}^{\nu} x^{\nu} . \varphi(x)\delta \tag{41}$$

Ι6. <u>Ὑπολογισμός πάντων τῶν στοιχείων μιᾶς κατανομῆς Συχνότητος</u>

Ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς μορφῆς $f(x)$ ἤ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς Κ.Σ.δύνανται νά προκύψουν πάντα τά στοιχεῖα τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς συχνότητος ἤτοι:

α. Τά ἀνώτερον καί κατώτερον ὅρια, ὡς ρίζαι τῆς $f(x)$

β. Τό εὖρος ὡς ἡ διαφορά τῶν ἀκραίων ὁρίων

γ. Αἱ ροπαί, πάσης τάξεως(μέση τιμή, μεταβλητότης, ἀσυμμετρία, κύρτωσις κλπ.) ἐκ τῶν σχέσεων (40)ἤ (4I).

δ. Ἡ μερική καί ἡ ὁλική συχνότης, ὡς σχέσεις(7),(8), (9) καί (I0).

ε. Ἡ σχετική συχνότης ἐκ τῶν σχέσεων (I7)ἤ(I8)καί (36).

στ. Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή (mode) ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 0 \tag{42}$$

ζ. Ἡ διάμεσος (median),τεταρτημόρια (quartiles),δεκατημόρια (deciles) κλπ. ἐκ τῶν σχέσεων:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{N}{2} \quad (\text{ἤ } \frac{N}{4} \text{ ἤ } \frac{N}{I0} \text{ κ.λ.π}) \tag{43}$$

η. Οἱαδήποτε Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας ἀντιστοιχοῦσα εἰς ὁλικήν συχνότητα N, ἐκ τῶν σχέσεων(33) ἤ (34) καί (38) ἤ (39).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ θεμελιώδης σημασία τῶν Κ Σ καί τό τεράστιον ἐνδιαφέρον τό ὁποῖον παρουσιάζει ἡ ἔρευνα καί ἡ σπουδή τούτων.

I7. <u>Θεώρημα 2ον (Γενίκευσις τῆς καμπύλης GAUSS)</u>

Ἡ ἐξίσωσις $y = ae^{-\beta x^2}$ (α καί β >0) (44)

παριστᾶ Καμπύλην Συχνότητος Κανονικῆς Κατανομῆς (Κ.Σ.Κ.Κ) ἔχουσαν μεγίστην τεταγμένην $y_m = \alpha$, τυπικήν ἀπόκλισιν $\sigma = \sqrt{\frac{I}{2\beta}}$ καί ὁλικήν συχνότητα $N = \alpha.\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

(Ἡ τιμή τῆς x μετρᾶται, κατά τά γνωστά, ἀπό τῆς μέσης τιμῆς $\bar{x}$).

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἔστω : $$f(x) = e^{-\beta x^2} \tag{45}$$

καί $$x = \frac{t}{\sqrt{\beta}} \tag{46}$$

θά εἶναι: $$dx = \frac{dt}{\sqrt{\beta}} \tag{47}$$

καί $$|E| = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \tag{48}$$

ἔνθα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (ὁλοκλήρωμα Poisson) (49)

Συνεπῶς θά εἶναι: $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{|E|} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}{\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}} = I \tag{50}$$

Ἄρα ἡ συνάρτησις $$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\, e^{-\beta x^2} \tag{51}$$

εἶναι ἡ Κ.Σ.Σ. τῆς οἰκογενείας, ἤτοι εἶναι ἡ "Καμπύλη Σχετικῆς Συχνότητος Κανονικῆς Κατανομῆς" (Κ.Σ.Σ.Κ.Κ.)

Ἡ (51) λαμβάνει τήν μορφήν τῆς κλασσικῆς καμπύλης GAUSS ἐάν ληφθῆ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\beta}} \tag{52}$$

ὅτε γίνεται $$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\, e^{-\beta x^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \tag{53}$$

Ἡ μεγίστη τεταγμένη ταύτης (διά $x = 0$) εἶναι:

$$y_{m_0} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \left|\rho_{m_0}\right| \tag{54}$$

Κατόπιν τῶν (45) καί (51) ἡ (44) γίνεται:

$$y = \alpha \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, \varphi(x) \tag{55}$$

καί θά ἔχη τάς κάτωθι ἰδιότητας:

α. Θ'ἀνήκη εἰς τήν αὐτήν οἰκογένειαν μετά τῆς $\varphi(x)$ ἤτοι θά εἶναι Κ.Σ.Κ.Κ., ἔχουσα συμφώνως πρός τάς σχέσεις (33) καί (36) τοῦ Ιου Θεωρήματος

$$K = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \qquad (56)$$

β. Θά ἔχη όλικήν συχνότητα ἤ ἐμβαδόν (ὡς σχέσεις(38)καί (56)):

$$N = \left| E \right| = K = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \qquad (57)$$

γ. Θά ἔχη μεγίστην τεταγμένην(ὡς πόρισμα 2ον καί σχέσεις (54) καί (56)

$$y_m = N.y_{m_0} = K.y_{m_0} = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} = a = \left| \rho_m \right| \qquad (58)$$

δ. Θά ἔχη ροπήν 2ας τάξεως(ἄρα καί τυπικήν ἀπόκλισιν), τήν τοιαύτην τῆς φ(x), ἤτοι θά εἶναι(ὡς πόρισμα 3ον καί σχέσις (52))

$$\sigma = \sqrt{\frac{I}{2\beta}} \qquad (59)$$

I8. <u>Πόρισμα Ἰον</u>

Τό ἐμβαδόν τυχούσης Κ.Σ.Κ.Κ. τυπικῆς ἀποκλίσεως σ, καί μεγίστης τεταγμένῆς y_m παρέχεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$E = \sigma . y_m . \sqrt{2\pi} \qquad (60)$$

Αὔτη προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῶν σχέσεων (52),(57) καί (58) ἀνωτέρω, ἐντάσσει δέ τήν Κ.Σ.Κ.Κ. εἰς τά κοινά γεωμετρικά σχήματα.

'Επειδή εἶναι $\left| E \right| = N$ καί $y_m = \rho_m$, ὡς σχέσεις(24) καί (58) ἀνωτέρω, θά εἶναι καί:

$$\left| E \right| = N = \sigma . \rho_m . \sqrt{2\pi} \qquad (6I)$$

Συνεπῶς καθίσταται δυνατή ἡ χρησιμοποίησις γεωμετρικῶν μεθόδων πρός ἐπίλυσιν στατιστικῶν προβλημάτων κατανομῆς συχνότητος.

'Η σχέσις (6I) δεικνύει ὅτι ἡ ἀπόλυτος όλική συχνότης Ν ἰσοῦται πρός τό μέτρον τοῦ όλικοῦ ὑπό τήν Κ.Σ.Κ.Κ ἐμβαδοῦ, ἐκπεφρασμένου εἰς τετραγωνικάς μονάδας τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς μονάδος τῆς μεταβλητῆς x, διά κλίμακα γραφικῆς παραστάσεως I:I, ἤτοι ὅταν ἡ μονάς τῆς γραφικῆς παραστάσεως (π.χ.I χιλιοστόν) παριστᾶ μίαν μονάδα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (x) καί μίαν μονάδα τῆς πυκνότητος συχνότητος (x^{-I}), ὡς σχέσις (27). Ἐάν ὅμως ληφθοῦν διάφοροι κλίμακες π.χ. ἡ κ διά τάς τετμημένας καί ἡ λ διά τάς τεταγμένας, ἤτοι ἄν 1 χιλιοστ. παριστᾶ γραφικῶς κ μονάδας τῆς μεταβλητῆς καί λ μονάδας τῆς πυκνότητος συχνότητος, τότε προφανῶς θά εἶναι :

$$N = \sigma \cdot \varrho_m \cdot \sqrt{2\pi} = \kappa \cdot \lambda \cdot \sigma \cdot y_m \cdot \sqrt{2\pi} = \kappa \cdot \lambda \cdot |E| \qquad (62)$$

I9. Ὁρισμοί

α. Δύο ἤ περισσότεραι Κ.Σ. ἔχουσαι τό αὐτό ὁλικόν ἐμβαδόν, ἤ συχνότητα, θά καλοῦνται ἰσοδύναμοι.

β. Αἱ παράμετροι, τυπική ἀπόκλισις (σ) καί μεγίστη τεταγμένη (y_m) βάσει τῶν ὁποίων ὑπολογίζεται γεωμετρικῶς τό ἐμβαδόν μιᾶς Κ.Σ.Κ.Κ. θά καλοῦνται γεωμετρικαί παράμετροι ταύτης, κατ' ἀντιδιαστολήν πρός τάς στατιστικάς παραμέτρους, ἤτοι τήν μέσην τιμήν ($\bar{x}$) τήν τυπικήν ἀπόκλισιν (σ) καί τήν μεγίστην πυκνότητα συχνότητος (ϱ_m)

20. Πόρισμα 5ον

Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ θετικοῦ κλάδου τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς :

$$x \cdot y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\, y_m \qquad (63)$$

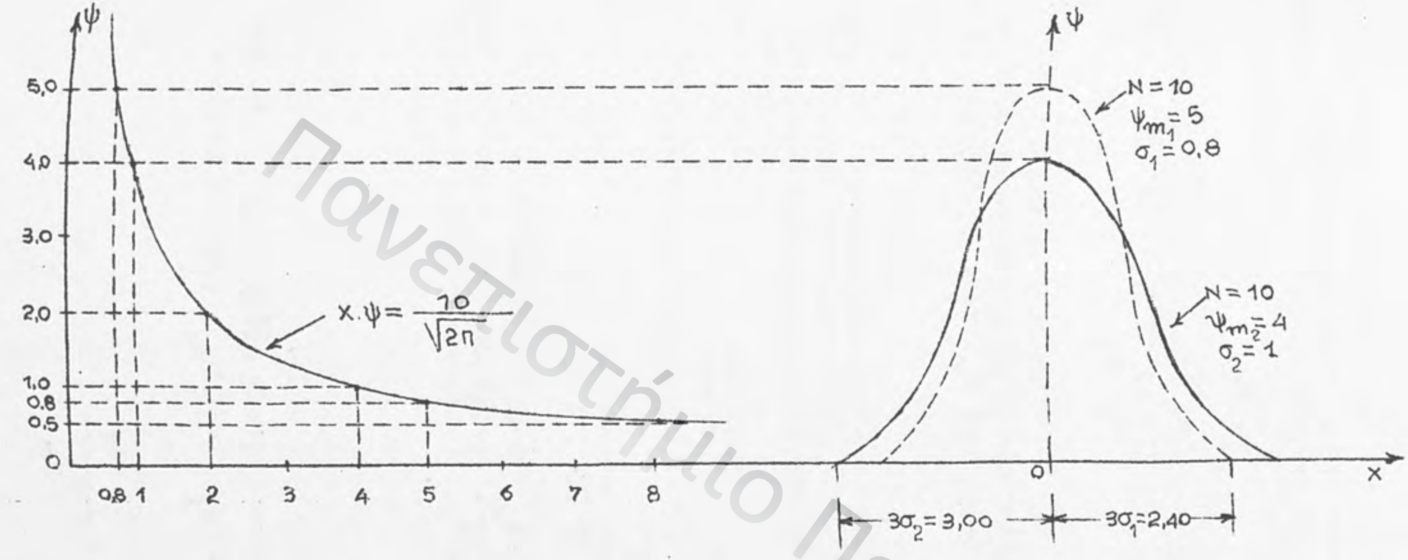
παριστοῦν τάς γεωμετρικάς παραμέτρους ἰσοδυνάμων Κ.Σ.Κ.Κ. , (ὡς σχῆμα 4). Οὕτω εἶναι δυνατός ὁ γραφικός προσδιορισμός ἑκατέρας τούτων συναρτήσει τῆς ἑτέρας, δοθείσης τῆς ὁλικῆς συχνότητος Ν.

2I. Πόρισμα 6ον

Ἐάν δύο Κ.Σ.Κ.Κ. ἔχουν τήν αὐτήν τυπικήν ἀπόκλισιν ἀλλά μεγίστας τεταγμένας τάς y_{m_1} καί y_{m_2} τότε θά ἰσχύουν αἱ κάτωθι σχέσεις :

$$\frac{N_I}{N_2} = \frac{E_I}{E_2} = \frac{y_{m_I}}{y_{m_2}} \qquad (64)$$

$$\frac{N_I}{N_I + N_2} = \frac{E_I}{E_I + E_2} = \frac{y_{m_I}}{y_{m_I} + y_{m_2}} \qquad (65)$$



Σχ. 4
Γεωμετρικαί παράμετροι ἰσοδυνάμων Κ.Σ.Κ.Κ.

$$\frac{N_I}{N_I-N_2} = \frac{E_I}{E_I-E_2} = \frac{y_{m_I}}{y_{m_I}-y_{m_2}} \qquad (66)$$

$$\frac{N_I+N_2}{N_I-N_2} = \frac{E_I+E_2}{E_I-E_2} = \frac{y_{m_I}+y_{m_2}}{y_{m_I}-y_{m_2}} \qquad (67)$$

22. <u>Πόρισμα 7ον</u>

'Εάν δύο Κ.Σ.Κ.Κ. ἔχουν τήν αὐτήν μεγίστην τεταγμένην ἀλλά τυπικάς ἀποκλίσεις τάς σ_I καί σ_2, τότε θά ἰσχύουν αἱ κάτωθι σχέσεις:

$$\frac{N_I}{N_2} = \frac{E_I}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \qquad (68)$$

$$\frac{N_I}{N_I+N_2} = \frac{E_I}{E_I+E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} \qquad (69)$$

$$\frac{N_I}{N_I-N_2} = \frac{E_1}{E_I-E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2} \qquad (70)$$

$$\frac{N_I+N_2}{N_I-N_2} = \frac{E_I+E_2}{E_I-E_2} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2} \qquad (7I)$$

23. <u>Πόρισμα 8ον</u>

'Εάν δύο Κ.Σ.Κ.Κ. ἔχουν τυπικάς ἀποκλίσεις τάς σ_I καί σ_2 κ μεγίστας τεταγμένας τάς y_{m_I} καί y_{m_2}, τότε θά ἰσχύουν αἱ κάτωθι σχέσεις:

$$\frac{N_I}{N_2} = \frac{E_I}{E_2} = \frac{\sigma_1\, y_{m_I}}{\sigma_2\, y_{m_2}} \qquad (72)$$

$$\frac{N_I}{N_I+N_2} = \frac{E_I}{E_I+E_2} = \frac{\sigma_1 y_{m_I}}{\sigma_1 y_{m_I} + \sigma_2 y_{m_2}} \tag{73}$$

$$\frac{N_I}{N_I-N_2} = \frac{E_I}{E_I-E_2} = \frac{\sigma_I y_{m_I}}{\sigma_I y_{m_I} - \sigma_2 y_{m_2}} \tag{74}$$

$$\frac{N_I+N_2}{N_I-N_2} = \frac{E_I+E_2}{E_I-E_2} = \frac{\sigma_1 y_{m_I} + \sigma_2 y_{m_2}}{\sigma_I y_{m_I} - \sigma_2 y_{m_2}} \tag{75}$$

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις (63) ἕως (75), συνδέουν γραφικῶς τά στοιχεῖα διαφόρων Κ.Σ.Κ.Κ.,(θεωρουμένων ὡς κοινῶν γεωμετρικῶν σχημάτων), μετά τῶν ἀντιστοίχων στατιστικῶν στοιχείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΕΝΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Ι. Γενικά

Κατόπιν τῆς συμπληρώσεως, ὡς εἰς Β΄Κεφάλαιον, θεμελιωδῶν τινων ἐννοιῶν τῆς στατιστικῆς καί τῆς ἐνοποιήσεως τούτων ὥστε νά ἔχουν γενικήν ἰσχύν διά τάς παντός εἴδους κατανομάς, εἶναι δυνατή ἡ ἀξιοποίησις τούτων καί ἰδιαιτέρως τῆς ὑλοποιούσης τάς ἐννοίας ταύτας Καμπύλης Συχνότητος (Κ.Σ.), πρός ἐπίλυσιν διαφόρων προβλημάτων τῆς Στατιστικῆς, μεταξύ τῶν ὁποίων καί τῶν κατωτέρω.

2. Ὑπολογισμός καί γραφική παράστασις ἀσυνεχοῦς κατανομῆς

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὑπολογισμός καί ἡ γραφική παράστασις τῆς θεωρητικῆς (a priori) συχνότητος τῆς ταυτοχρόνου ἐμφανίσεως x_i κορωνῶν, κατά τήν σύγχρονον ρίψιν Ι0 νομισμάτων ἐπί 50 φοράς.

α. Συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος f(x)

Πρόκειται περί διωνυμικῆς κατανομῆς, ἄρα θά εἶναι:

$$f(x_i) = N.\binom{10}{x_i} p^{x_i} q^{10-x_i} = 50\binom{10}{x_i} 0,5^{x_i}.0,5^{10-x_i} \qquad (I)$$

Ἔνθα $\binom{10}{x_i}$ = Συνδυασμοί Ι0 ἀνά x_i

p = q = 0,5 = πιθανότης ἐπιτυχίας ἤ ἀποτυχίας μιᾶς κορώνας, ἑνός νομίσματος.

β. Μερική συχνότης (f_i):

Θά εἶναι (ὡς σχέσις (Ι0) Κεφ. Β΄):

$$f_i = \Sigma f(x_i).\delta \qquad (2)$$

ἔνθα i = 0,Ι,2,3,.......Ι0
καί δ = Ι

Καταρτίζεται ὁ ἀκόλουθος πίναξ τιμῶν τῶν f_i :

x_i	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO
f_i	0,05	0,49	2,20	5,36	I0,25	I2,30	I0,25	5,86	2,20	0,49	0,05

γ. <u>Ὁλική συχνότης (N)</u>

Αὕτη εἶναι δεδομένη καί ἰσοῦται πρός 50

Ἐλέγχεται ἐκ τῆς σχέσεως (II) τοῦ Β΄Κεφαλαίου:

$$N = \sum_{i=0}^{IO} f_i = 50 \qquad (3)$$

δ. <u>Γραφική παράστασις Κ.Σ.</u>

Συμφώνως πρός τά ἐκτεθέντα εἰς Κεφ. Β-9β(4), τό ὑποθετικόν διάστημα τάξεως θά εἶναι δ_i = I. Συνεπῶς ἡ πυκνότης συχνότητος θά εἶναι:

$$\left| \varrho_i \right| = \frac{f_i}{\delta_i} = f_i \qquad (4)$$

Ὡς ἐκ τούτου ἡ Κ.Σ. συμπίπτει μέ τό ἱστόγραμμον , ἀλλά μέ τεταγμένας τάς πυκνότητας συχνότητος.

Ἡ γραφική παράστασις τῆς ἀντιστοίχου Κ.Σ. ἐμφαίνεται εἰς τό σχ. 5.

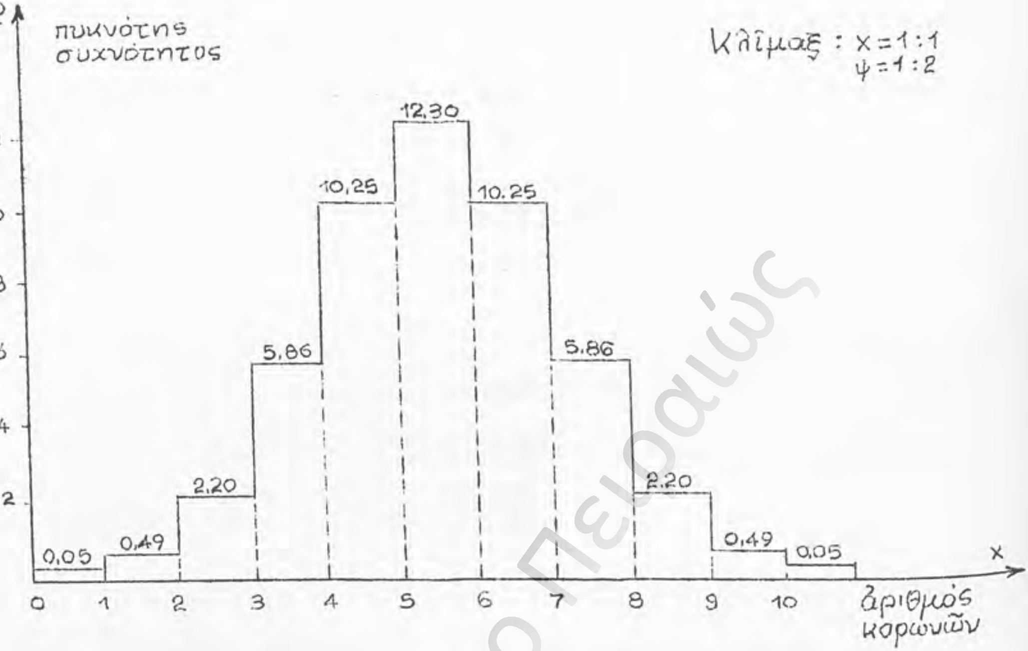
3. <u>Ὑπολογισμός καί γραφική παράστασις τυχούσης συνεχοῦς κατανομῆς</u>

Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x) = -x^2 + 8x - 7 \qquad (5)$$

καί ζητοῦνται:

α. Νά διερευνηθῆ ἐάν δύναται νά θεωρηθῆ αὕτη ὡς συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος καί ἐν καταφατικῇ περιπτώσει, διά ποίαν περιοχήν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.



Σχ. 5
Γραφική παράστασις Κ.Σ. ἀσυνεχοῦς κατανομῆς

β. Ἡ ἀντίστοιχος ὁλική συχνότης N

γ. Ἡ μερική συχνότης (f_i) εἰς τήν περιοχήν ἀπό $x_1=2$ ἕως $x_2= 4$

δ. Ἡ ἐξίσωσις τῆς Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας, ἐχούσης ὁλικήν συχνότητα N = 30.

ε. Ἡ ἐξίσωσις τῆς Κ.Σ.Σ. τῆς οἰκογενείας

στ. Ἡ γραφική παράστασις τῶν ἀντιστοίχων Κ.Σ.

Πρός τοῦτο:

α. Ἡ διερεύνησις θά γίνῃ συμφώνως πρός τό ἀξίωμα B-2 ὡς κάτωθι:

(I) <u>Προσδιορισμός μεγίστου ἤ ἐλαχίστου.</u>

Θά εἶναι: $$f'(x) = -2x + 8 \qquad (6)$$

ἐξ οὗ: $$x = 4 \qquad (7)$$

(2) <u>Ἔλεγχος μεγίστου ἤ ἐλαχίστου.</u>

Θά εἶναι: $f'(x) = -2 < 0$ (8)

Ἄρα εἰς τήν τιμήν $x = 4$ ἀντιστοιχεῖ μέγιστον.

(3) <u>Προσδιορισμός ριζῶν.</u> Αἱ ρίζαι τῆς (7) εἶναι:

$$x_{\alpha} = I \qquad (9)$$

καί $$x_{\beta} = 7 \qquad (I0)$$

Συνεπῶς ἡ (5) δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος διά τήν περιοχήν ἀπό $x= I$ μέχρι $x=7$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

β. Ἡ ὁλική συχνότης, προκύπτουσα ἐκ τῆς σχέσεως (7) τοῦ Β΄ κεφαλαίου, θά εἶναι:

$$N = |E| = \int_1^7 (-x^2+8x-7)dx = \left| -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x \right|_I^7 = 36 \qquad (II)$$

γ. Ἡ μερική συχνότης (f_i) εἰς τήν περιοχήν ἀπό $x_I=2$ ἕως $x_2= 4$ θά εἶναι:

$$f_i = \int_2^4 (-x^2+8x-7)dx = \left| -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x \right|_2^4 = I5,33 \qquad (I2)$$

δ. Ἡ ἐξίσωσις τῆς Κ.Σ. τῆς ἀντιστοίχου πρός N=30 θά εἶναι ἐκ τῆς σχέσεως (33) τοῦ Β΄Κεφαλαίου:

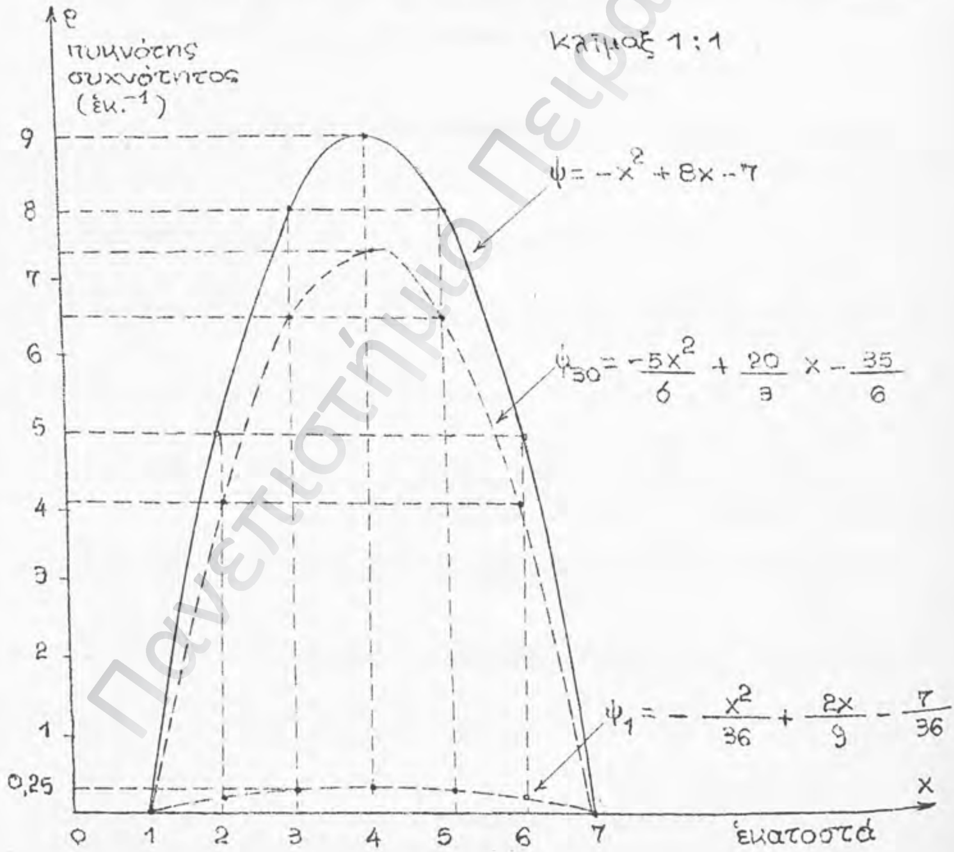
$$y_{30} = \frac{K.f(x)}{|E|} = \frac{30(-x^2+8x-7)}{36} = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{35}{6} \qquad (I3)$$

ε. Ἡ ἐξίσωσις τῆς Κ.Σ.Σ. τῆς οἰκογενείας θά εἶναι ὁμοίως:

$$y_I = \frac{f(x)}{|E|} = \frac{-x^2+8x-7}{36} = -\frac{x^2}{36} + \frac{2x}{9} - \frac{7}{36} \qquad (I4)$$

στ. Ἡ γραφική παράστασις ἐμφαίνεται εἰς σχ. 6 συμφώνως πρός Β-ΙΙδ. Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῶν τεταγμένων λαμβάνονται ἐκ τῶν σχέσεων (5), (I3) καί (I4) ὡς κατωτέρω:

x	I	2	3	4	5	6	7
$y = \rho$	0	5	8	9	8	5	0
$y_{30} = \rho_{30}$	0	4,I7	6,67	7,50	6,67	4,I7	0
$y_1 = \rho_1$	0	0,I4	0,22	0,25	0,22	0,I4	0



Σχ. 6
Γραφική παράστασις Κ.Σ.τυχούσης συνεχοῦς κατανομῆς

4. <u>'Υπολογισμός καί γραφική παράστασις ἐλλειπτικῆς συνεχοῦς κατανομῆς</u>

Δίδεται ἡ κάτωθι συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος:

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \qquad (15)$$

καί ζητοῦνται:

α. 'Η ὁλική συχνότης (N) τῆς κατανομῆς

β. 'Η μερική συχνότης(f_i) εἰς τήν περιοχήν $x_1 x_2$ τῆς μεταβλητῆς

γ. 'Η σχετική συχνότης(φ_i) εἰς τήν περιοχήν $x_1 x_2$ τῆς μεταβλητῆς

δ. 'Η ὁλική συχνότης(N_κ) τῆς κυκλικῆς Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας

ε. 'Η ἐξίσωσις τυχούσης Κ.Σ. τῆς οἰκογενείας ἐχούσης ὁλικήν συχνότητα N_i.

στ. 'Η γραφική παράστασις τῶν ἀντιστοίχων Κ.Σ.

Θά εἶναι:

α. 'Ολική συχνότης:

$$N = \left| E \right| = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - x^2)}\,dx = \frac{\pi\alpha\beta}{2} \qquad (16)$$

β. Μερική συχνότης:

$$f_i = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - x^2)}\,dx = \frac{\beta}{\alpha} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(\alpha^2 - x^2)}\,dx \qquad (17)$$

γ. Σχετική συχνότης:

$$\varphi_i = \frac{f_i}{N} = \frac{2}{\pi\alpha^2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(\alpha^2 - x^2)}\,dx \qquad (18)$$

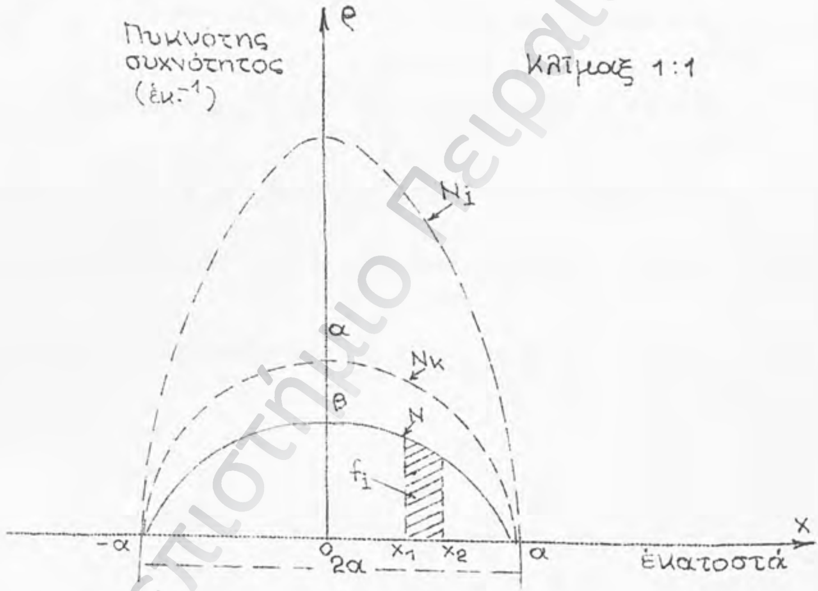
δ. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ μεγίστη τεταγμένη τῆς μέν ἐλλειπτικῆς Κ.Σ. εἶναι β τῆς δέ κυκλικῆς εἶναι α, θά εἶναι βάσει τοῦ 2ου πορίσματος (ὡς Β-14):

$$N_\kappa = N.\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi\alpha\beta}{2}\ .\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi\alpha^2}{2} \qquad (19)$$

ε. Βάσει τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω πορίσματος θά εἶναι:

$$y_i = y.\ \frac{N_i}{N} = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\ .\ \frac{N_i}{\frac{\pi\alpha\beta}{2}} = \frac{2N_i}{\pi\alpha^2}\sqrt{\alpha^2-x^2} \qquad (20)$$

στ. Ἡ γραφική παράστασις ἐμφαίνεται εἰς τό σχ. 7, (συμφώνως πρός Β- IIδ).



Σχ, 7
Γραφική παράστασις Κ.Σ. ἐλλειπτικῆς κατανομῆς

5. <u>Ὑπολογισμός καί γραφική παράστασις κανονικῆς συνεχοῦς κατανομῆς</u>

Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x) = ae^{-\beta x^2} = 50.e^{-0,00125x^2} \qquad (21)$$

καί ζητοῦνται:

α. Ἡ ὁλική συχνότης (N)

β. 'Η μερική συχνότης είς τήν περιοχήν άπό 20 έως 40χιλ. τῆς μεταβλητῆς διά $\bar{x}$ = 60χιλ.

γ. 'Η έξίσωσις τῆς Κ.Σ. τῆς οίκογενείας τῆς έχούσης όλικήν συχνότητα Ι.000.

δ. 'Η γραφική παράστασις τῶν άντιστοίχων Κ.Σ.

Θά είναι:

α. 'Ολική συχνότης N, έκ τῆς σχέσεως(57)τοῦ Β΄Κεφαλαίου:

$$N = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = 50 \sqrt{\frac{3,14}{0,00125}} = 2.506 \qquad (22)$$

β. 'Η μερική συχνότης προσδιορίζεται, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ σχήματος 8, άπ'εὐθείας έκ τῆς σχέσεως:

$$f_i = \int_{-40}^{-20} 50.e^{-0,00125x^2} dx \qquad (23)$$

ή τῆ βοηθεία τῶν στατιστικῶν πινάκων κανον.κατανομῆς, ήτοι:

- Τυπική άπόκλισις, έκ τῆς σχέσεως (52)τοῦ Β΄Κεφαλαίου:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\beta}} = \sqrt{\frac{1}{2X0,00125}} = 20 \text{ χιλ.}$$

$\frac{x_1}{\sigma} = \frac{20}{20} = 1$ έξ οὗ άθροιστική συχνότης: 0,3413

$\frac{x_2}{\sigma} = \frac{40}{20} = 2$ " " " " 0,4772

Σχετική συχνότης φ_1 = 0,1359

$$\text{Άρα} \quad f_i = \varphi_1 N = 2506.0,1359 = 340,6 \qquad (24)$$

γ. Βάσει τοῦ 2ου πορίσματος (Β-Ι4) θά είναι:

$$y_i = y \frac{N_i}{N} = 50.e^{-0,00125x^2} \cdot \frac{1000}{2506} \approx 20e^{-0,00125x^2} \qquad (25)$$

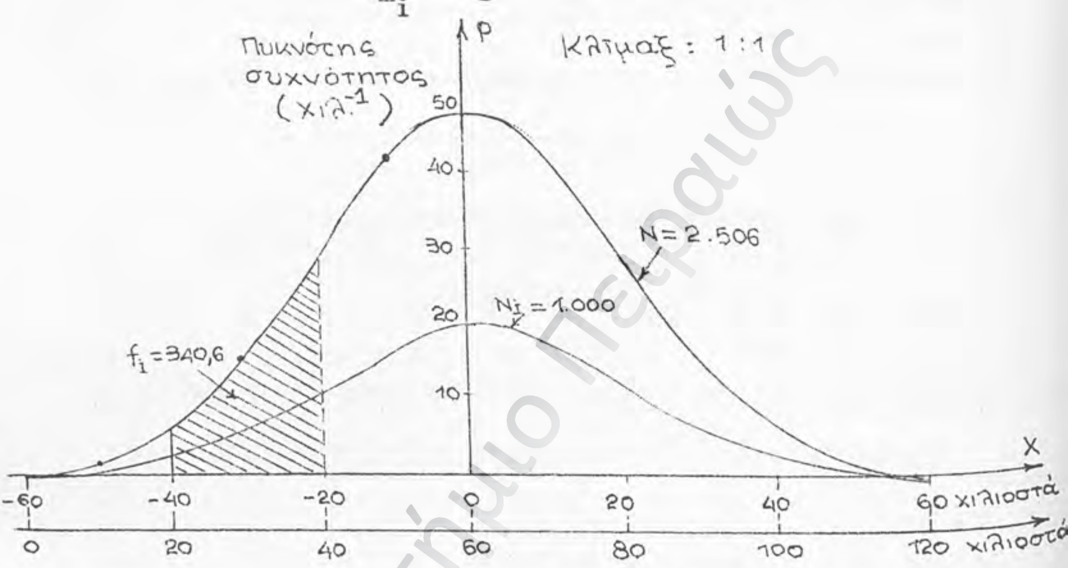
δ. 'Η γραφική παράστασις έμφαίνεται είς σχ. 8, συμφώνως πρός Β-ΙΙδ. Αί τεταγμέναι ὑπολογίζονται είτε άπ' εὐθείας έκ τῶν σχέσεων (21) καί (25) είτε έκ τῶν στατιστικῶν πινάκων οί όποῖοι παρέχουν ταύτας συναρτήσει τῶν μεγίστων τεταγμένων. Αὗται κατά τήν σχέσιν

(58) τοῦ Β΄Κεφαλαίου εἶναι διά μέν τήν (2Ι):

$$y_m = \alpha = 50 \text{ χιλ.} \qquad (26)$$

διά δέ τήν (25):

$$y_{m_i} = \alpha_i = 20 \text{ χιλ.} \qquad (27)$$



Σχ. 8
Γραφική παράστασις Κ.Σ. κανονικῆς κατανομῆς

6. <u>Ὑπολογισμός καί Γραφική παράστασις ὁμαδοποιημένης κατανομῆς</u>

Ἔστω ὅτι ἡ κατανομή τῆς σχέσεως (2Ι) τοῦ Κεφ. Γ΄ἔχει ὁμαδοποιηθῆ κατά διαστήματα τάξεως Ι0 χιλ.καί ζητοῦνται:

α. Αἱ μερικαί συχνότητες τῶν διαστημάτων τάξεως

β. Ἡ γραφική παράστασις τῆς ἀντιστοίχου Κ.Σ.
Θά εἶναι:

α. Μερική συχνότης:

$$f_i = f(x_i)\,\delta_i = 50e^{-0,00125x^2}.10 = 500e^{-0,00125x^2} \qquad (28)$$

Ἔνθα x_i = μέσα τῶν διαστημάτων τάξεως ἀπό τῆς μ.τιμῆς $\bar{x}$
δ_i = Ι0 χιλιοστά (διάστημα τάξεως)

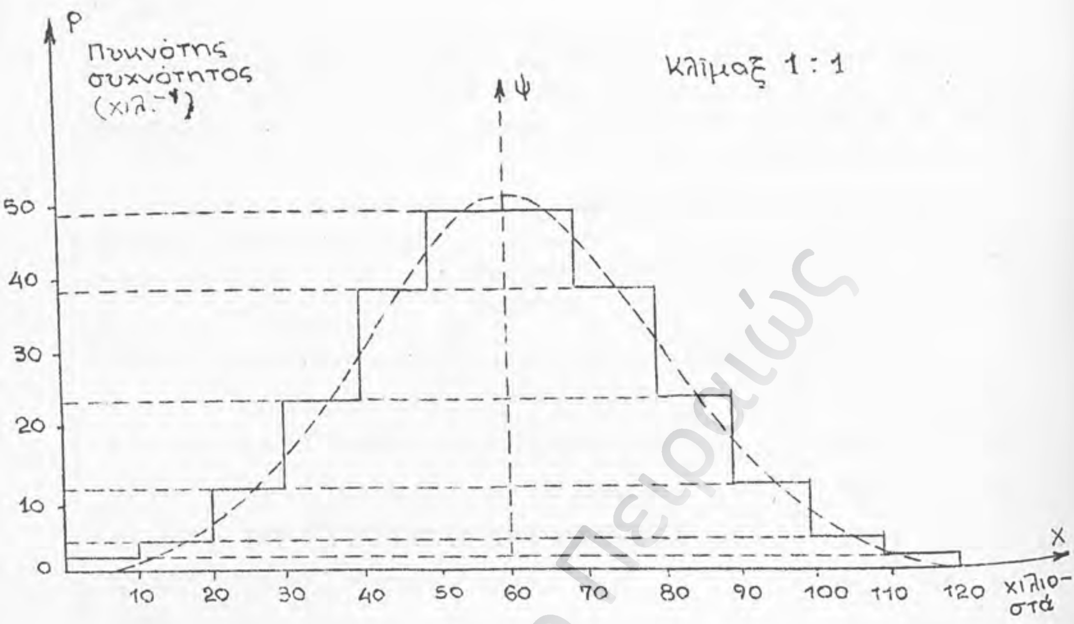
Δύνανται νά ὑπολογισθοῦν καί βάσει στατιστικῶν πινά - κων ὡς Γ-5β. Οὕτω καταρτίζεται ὁ ἀκόλουθος πίναξ, ἔνθα x_0 εἶναι ἡ ἀπόκλισις τοῦ ἀντιστοίχου ὁρίου τοῦ διαστήματος τάξεως ἀπό τῆς μέσης τιμῆς $\bar{x}$

Διάστημα τάξεως (χιλιοστ)	x_0 Κατωτέρου ὁρίου	x_0 Ἀνωτέρου ὁρίου	$\frac{x_0}{\sigma}$	Ἀθροιστ. ποσοστόν πινάκων	Σχετική Συχνότης φ_i	Μερική Συχν. f_i	Πυκνότης συχνότ. $\rho_i = \frac{f_i}{\delta_i}$
0- I0	-60		-3,0	0,4986	0,0048	I2	I,2
I0- 20	-50		-2,5	0,4938	0,0I66	42	4,2
20- 30	-40		-2,0	0,4772	0,0440	II0	II,0
30- 40	-30		-I,5	0,4332	0,09I9	230	23,0
40- 50	-20		-I,0	0,34I3	0,I598	376	37,6
50- 60	-I0		-0,5	0,I9I5	0,I9I5	480	48,0
60- 70		I0	0,5	0,I9I5	0,I9I5	480	48,0
70- 80		20	I,0	0,34I3	0,I598	376	37,6
80- 90		30	I,5	0,4332	0,09I9	230	23,0
90-I00		40	2,0	0,4772	0,0440	II0	II,0
I00-II0		50	2,5	0,4938	0,0I66	42	4,2
II0-I20		60	3,0	0,4986	0,0048	I2	I,2

β. Ἡ γραφική παράστασις ἐμφαίνεται εἰς σχ. 9, συμφώνως πρός Β-IIδ καί διαφέρει τοῦ συνήθους ἱστογράμμου κατά τό ὅτι αἱ τεταγμέναι ἐκφράζουν πυκνότητα συχνότητος, ἡ δέ κλίμαξ εἶναι συγκεκριμένη, εἰς τρόπον ὥστε τό ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδόν νά ἰσοῦται πάντοτε πρός τήν ἀντίστοιχον συχνότητα.

7. Σύγκρισις διαφόρων Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς

Ἔστω ὅτι ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ ἀναστήματος τῶν κληρωτῶν κατά περιοχάς τῆς χώρας εὑρέθησαν τ' ἀναστήματα ταῦτα κατανεμημένα κανονικῶς μέ τά κάτωθι στοιχεῖα:



ΣΧ. 9

Γραφική παράστασις Κ.Σ. ὁμαδοποιημένης κατανομῆς

Περιοχή Α΄: κληρωτοί 6300 μέ $\bar{x}$ = I70,2 ἑκ. καί σ= 6,2 ἑκ.
" Β΄: " 9000 " $\bar{x}$ = I67,6 " " σ= 6,2 "
" Γ΄: " I3500 " $\bar{x}$ = I68,3 " " σ= 6,4 "

Ζητοῦνται:

α. Ἡ ἀναλυτική ἐξίσωσις τῆς Κ.Σ. τοῦ ἀναστήματος ἑκάστης περιοχῆς

β. Ἡ γραφική παράστασις τῶν Κ.Σ. τοῦ ἀναστήματος ἑκάστης περιοχῆς, ἐπί τοῦ αὐτοῦ σχεδίου.

γ. Ἡ σύγκρισις τῶν κατανομῶν τοῦ ἀναστήματος τῶν περιο - χῶν.
Πρός τοῦτο:

α. Ἡ ἀναλυτική ἐξίσωσις τῶν Κ.Σ. παρέχεται ὑπό τῆς σχέσεως (44) τοῦ Β΄Κεφαλαίου. Οἱ συντελεσταί α καί β ὑπολογίζονται συναρτήσει τῶν Ν καί σ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (52) καί (57) τοῦ Β΄Κεφαλαίου, ἐξ ἧς προκύπτουν:

$$\alpha = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} \qquad (29)$$

καί

$$\beta = \frac{I}{2\sigma^2} \qquad (30)$$

Οὕτω λαμβάνονται δι'ἑκάστην περιοχήν:

$$\alpha_A = 4I, \quad \beta_A = 0{,}000I3 \quad y_A = 4I.\, e^{-0{,}000I3x^2} \qquad (3I$$

$$\alpha_B = 58, \quad \beta_B = 0{,}000I3, \quad y_B = 58.\, e^{-0{,}000I3x^2} \qquad (32)$$

$$\alpha_\Gamma = 84, \quad \beta_\Gamma = 0{,}000I22 \quad y_\Gamma = 84.\, e^{-0{,}000I22x^2} \qquad (33)$$

β. Διά τήν γραφικήν παράστασιν ὑπολογίζονται αἱ μέγισται τεταγμέναι τῶν Κ.Σ. εἰς χιλιοστά, ἐκ τῆς σχέσεως (60) τοῦ Β΄Κεφαλαίου ἤτοι

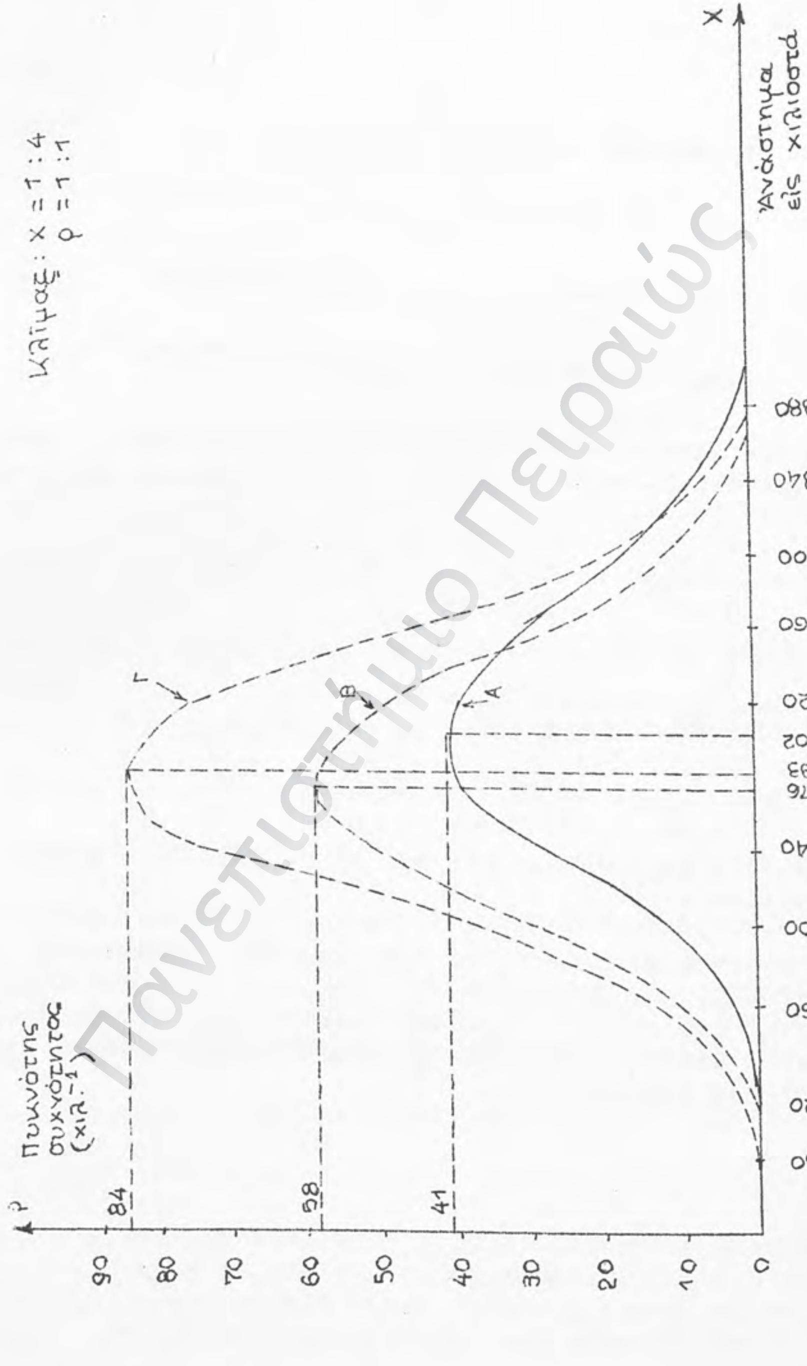
$$y_{mA} = \frac{EA}{\sigma A \sqrt{2\pi}} = \frac{6.300}{62\sqrt{6,28}} = 4I \text{ χιλιοστά} \qquad (34)$$

$$y_{mB} = \frac{E_B}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} = \frac{9.000}{62\sqrt{6,28}} = 58 \quad \text{"} \qquad (35)$$

$$y_{m\Gamma} = \frac{E_\Gamma}{\sigma_\Gamma \sqrt{2\pi}} = \frac{I3.500}{64\sqrt{6,28}} = 84 \quad \text{"} \qquad (36)$$

Ἀκολούθως χαράσσονται εἰς σχ. Ι0 αἱ Κ.Σ. ὡς εἰς προηγούμενον παράδειγμα.

γ. Ἤδη καθίσταται δυνατή, ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως, ἡ σύγκρισις ὅλων τῶν στοιχείων τῆς κατανομῆς τοῦ ἀναστήματος ἑκάστης περιοχῆς συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁπλιτῶν ἑκάστης περιοχῆς τῆς χώρας ἐν τῷ συνόλῳ καί κατά περιοχάς ἀναστήματος.



Σχ. 10

Γραφική παράστασις καί σύγκρισις Κ.Σ.Κ.Κ.

ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

ΣΥΜΒΑΛΛΟΝΤΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΟΟΔΟΝ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Σελ.

I. Διαπιστώσεις ἀσθενῶν σημείων ἐκ τῶν κατανομῶν 16-2
συχνότητος (κεφ. Α- 9)

2. Συμπλήρωσις ὡρισμένων βασικῶν στατιστικῶν ἐν-
νοιῶν, ὡς " συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος"
"συνάρτησις συχνότητος", "συνάρτησις κατανο -
μῆς", "συνάρτησις σχετικῆς συχνότητος", "συχ-
νότης", "καμπύλη συχνότητος", "καμπύλη ἀθροι-
στικῆς συχνότητος", "καμπύλη σχετικῆς συχνό - 24-2
τητος (κεφ. Β-2 ἕως 10)

3. Συνέπειαι ἀπορρέουσαι ἐκ τῶν συμπληρωθέντων ὅ
ρων, ἤτοι: ἀκριβής περιγραφή καί διάκρισις ἐν
νοιῶν, ἑνοποίησις ἀρχῶν ἀναλυτικῆς καί γραφι-
κῆς παραστάσεως τῶν συνεχῶν καί ἀσυνεχῶν κα-
τανομῶν, ἰσότης ἀπολύτου συχνότητος καί τοῦ ὑ
πό τήν Κ.Σ. ἐμβαδοῦ, ἀκριβής προσαρμογή πεπε-
ρασμένης ἀπολύτου συχνότητος εἰς συνεχῆ κατα- 29-33
νομήν (κεφ.Β-II)

4. Οἰκογένεια Κ.Σ. καί ἰδιότητες ταύτης (Θεώρημα 33-34
Ιον, πορίσματα Ιον,2ον,3ον,κεφ.Β-I2 ἕως I5)

5. 'Υπολογισμός ἁπάντων τῶν στοιχείων τυχούσης κα
τανομῆς συχνότητος, βάσει τῆς Κ.Σ. ταύτης(κεφ 34-35
Β- I6)

6. Γενική ἐξίσωσις καμπύλης συχνότητος κανονικῆς 35-37
κατανομῆς (Θεώρημα 2ον, κεφ. Β- I7)

7. 'Εμβαδόν καί ὁλική συχνότης καμπύλης συχνότη - 37-38
τος κανονικῆς κατανομῆς (πόρισμα 4ον,κεφ.Β-I8)

8. Σχέσεις μεταξύ τῶν γεωμετρικῶν παραμέτρων δι-
αφόρων καμπύλων συχνότητος κανονικῆς κατανο -
μῆς θεωρουμένων ὡς κοινῶν γεωμετρικῶν σχημά - 38-4
των (πορίσματα 5ον,6ον,7ον,8ον,Κεφ.Β-20ἕως 23)

Σελίς

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Ι. 'Η Στατιστική ἤρχισε διαμορφουμένη εἰς ἐπιστήμην ἀπό
τῶν ἀρχῶν, κυρίως, τοῦ παρόντος αἰῶνος. 'Ως ἐκ τούτου
δύναται νά θεωρηθῆ ὅτι διανύει αὕτη, εἰσέτι, ἐξελικτι -
κόν στάδιον, ἐπιδεκτικόν περαιτέρω ἐρεύνης καί ἀναπτύξε
ως. Μία τοιαύτη ἔρευνα εἰς τόν θεμελιώδη τομέα τῶν κα-
τανομῶν συχνότητος κατέδειξεν ὅτι δέν ὑφίσταται ἀπόλυ -
τος πληρότης καί σαφήνεια τῆς διεθνοῦς βιβλιογραφίας ἐ-
πί βασικῶν τινων στατιστικῶν ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι χρήζουν
ὡς ἐκ τούτου, σχετικῆς συμπληρώσεως, πλήρους ἐναρμονί -
σεως καί ὁλοκληρωτικῆς περαιτέρω ἀξιοποιήσεως ἀπό στατι
στικῆς ἀπόψεως. Τοιαῦται ἔννοιαι εἶναι αἱ κάτωθι ('Ως
κεφάλαιον Α'):

α) 'Ο ὅρος " συχνότης" ἀποδίδεται ἀδιακρίτως, τόσον εἰς
τόν " ἀπόλυτον", ὅσον καί εἰς τόν "σχετικόν"ἀριθμόν τῶν
στατιστικῶν παρατηρήσεων, ὡς ἐκ τούτου δέ ἡ "συχνότης "
ὡρισμένου γεγονότος δέν εἶναι σαφῶς καθωρισμένη,ἀφοῦ δύ
ναται νά ἐκφρασθῆ αὕτη ὑπό δύο διαφορετικῶν ἀριθμῶν.

β) 'Ο ὅρος "συνάρτησις συχνότητος" $f(x)$, ἀποδίδεται εἰς
τήν πρώτην παράγωγον τῆς "συναρτήσεως κατανομῆς" $F(x)$,
ὁριζομένης πρωτογενῶς καί ἀξιωματικῶς. Συνεπῶς ἡ $f(x)$ὑ-
φίσταται μόνον ἐκεῖ ὅπου ἡ $F(x)$ εἶναι παραγωγήσιμος, ἤ-
τοι μόνον διά τάς συνεχεῖς κατανομάς, ἐνῶ ὡς βασική στα
τιστική ἔννοια θά ἔδει νά εἶχε καθολικήν ἰσχύν διά τάς
παντός εἴδους κατανομάς. 'Εξ ἄλλου ἰσχύει πάντοτε διά
ταύτην ἡ σχέσις:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1 \qquad (1)$$

ἤτοι ἀναφέρεται αὕτη πάντοτε εἰς τάς σχετικάς μόνον,καί
οὐχί εἰς τάς ἀπολύτους συχνότητας, ὡς ἐκ τούτου δέ ἡ ἀ-
κριβής ὀνομασία ταύτης θά ἔδει νά ἦτο "συνάρτησις σχετι
κῆς συχνότητος".

γ) 'Ο ὅρος "συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος" ὁρίζεται
ὡς ταυτόσημος πρός τήν "συνάρτησιν συχνότητος",παρίσταν
ται δέ ἀμφότεραι διά τοῦ αὐτοῦ συμβολισμοῦ $f(x)$,ἐνῶ αἱ

δύο αὗται ἔννοιαι παριστοῦν μεγέθη φυσικῶς διάφορα καί ὡς ἐκ τούτου θά ἔδει νά ὑφίσταται σαφής διάκρισις τῶν ὁρισμῶν καί συμβολισμῶν τούτων.

δ) 'Ο ὅρος "Καμπύλη συχνότητος" (Κ.Σ.) ἀποδίδεται εἰς τήν γραφικήν παράστασιν μιᾶς συνεχοῦς κατανομῆς συχνότητος, μέ τεταγμένας τάς συχνότητας. 'Η τοιαύτη Κ.Σ.παρουσιάζει τά κάτωθι χαρακτηριστικά:

(1)'Ισχύει μόνον διά τάς συνεχεῖς κατανομάς, ἐνῶ ὡς βασική στατιστική ἔννοια θά ἔδει νά εἶχε γενικήν ἰσχύν διά τάς παντός εἴδους κατανομάς (συνεχεῖς καί ἀσυνεχεῖς).

(2) Παρουσιάζει συγκεκριμένην συχνότητα ἀντιστοιχοῦσαν εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x, ἐνῶ διά τάς συνεχεῖς κατανομάς ἡ ἀντιστοιχοῦσα συχνότης εἰς τά σημεῖα τῆς μεταβλητῆς, εἶναι μηδενική.

(3) Παρουσιάζει ἀντιστοιχοῦσαν ἄπειρον ὁλικήν συχνότητα,ἐνῶ αὐτη εἶναι πεπερασμένη, ἄπειροι δέ εἶναι αἱ πυκνότητες συχνότητος.

(4) Δέν ὑφίσταται συγκεκριμένη σταθερά ποσοτική σχέσις μεταξύ ἀπολύτου συχνότητος καί τοῦ ἀντιστοίχου ὑπό τήν Κ.Σ. ἐμβαδοῦ, εἰς τρόπον ὥστε ἑκάτερον τούτων νά προκύπτη ἀμέσως καί ἀπ'εὐθείας συναρτήσει τοῦ ἑτέρου.

(5) Δέν ὑφίσταται δυνατότης ὑπολογισμοῦ ἁπάντων τῶν στοιχείων μιᾶς κατανομῆς συχνότητος, συμπεριλαμβανομένων καί τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων, ἐκ μόνης τῆς ἀναλυτικῆς ἤ γραφικῆς παραστάσεως τῆς ἀντιστοίχου Κ.Σ.

(6) Δέν δύναται νά γίνη διάκρισις μεταξύ δύο ἤπερισσοτέρων Κ.Σ. μιᾶς κατανομῆς, ἀναφερομένων εἰς διαφόρους ὁλικάς συχνότητας.

(7)'Αναφέρεται πάντοτε εἰς τάς σχετικάς συχνότητας τῆς κατανομῆς καί ἐν τούτοις λέγεται "καμπύλη συχνότητος", ἐνῶ ἡ ἀκριβής ὀνομασία της θά ἔδει νά ἦτο " καμπύλη σχετικῆς συχνότητος" (Κ.Σ.Σ.)

Τ'ἀνωτέρω συνετέλεσαν ὥστε νά μή ἀξιοποιηθῆ ἐπαρκῶς ἡ ἔννοια τῆς Κ.Σ. ἀκόμη δέ καί ν'ἀγνοηθῆ αὐτη ἐξ ὁλοκλήρου ἀπό βασικά καί ἀναλυτικά συγγράμματα στατιστικῆς.

2. Ἡ ἄρσις τῶν ἀνωτέρω ἀσαφειῶν καί ἀντιθέσεων, ἡ συμπλήρωσις τῶν ὑφισταμένων ἐλλείψεων καί ἡ γεφύρωσις τῶν ἀντιστοίχων κενῶν ἐπιδιώκεται εἰς τό Β΄κεφάλαιον ἔνθα:

α) Διευκρινίζεται ὅτι ὡς "συνάρτησις πυκνότητος συχνότητος" δύναται νά θεωρῆται πᾶσα συνάρτησις f (x), ἡ ὁποία λαμβάνει μόνον μή ἀρνητικάς τιμάς εἰς τό διάστημα αβ. Αὕτη ἀποτελεῖ θεμελιώδη ἔννοιαν ἐκ τῆς ὁποίας πηγάζουν πάντες οἱ συγγενεῖς στατιστικοί ὅροι καί ἀναφέρεται εἰς τάς παντός εἴδους κατανομάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνεχεῖς ἤ ἀσυνεχεῖς, ἐφ᾽ὅσον καί ἡ f(x) εἶναι συνεχής ἤ ἀσυνεχής συνάρτησις τῆς x.

β) Βάσει τῆς f(x) προκύπτει ἡ "συνάρτησις συχνότητος" F (x), ἐκ τῆς σχέσεως:

$$F(x) = \int f(x) \,.\, dx \qquad \text{διά τάς συνεχεῖς κατανομάς} \qquad (2)$$

$$\text{ἤ} \quad F(x) = \Sigma f(x) \,.\, \delta \qquad \text{" " ἀσυνεχεῖς "} \qquad (3)$$

ἔνθα δ εἶναι τό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικῶν "σημείων μέτρησης", τό ὁποῖον διά τάς στατιστικάς ἐφαρμογάς εἶναι ἡ μονάς. Αὕτη διακρίνεται ἤδη σαφῶς ἀπό τῆς "συναρτήσεως πυκνότητος συχνότητος", ἀναφέρεται ὁμοίως εἰς τάς παντός εἴδους κατανομάς, ἡ δέ τιμή ταύτης, προκύπτουσα διά καθορισμοῦ τῶν ὁρίων ὁλοκληρώσεως ἤ ἀθροίσεως, παρέχει τάς ἀπολύτους συχνότητας, καί ἰσχύει πάντοτε διά ταύτην ἡ σχέσις:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \infty \qquad (4)$$

ἡ ὁποία εἶναι εὐρυτέρα καί προφανῶς διάφορος τῆς σχέσεως(I) ἀνωτέρω.

γ) Παραλληλίζεται ἡ "συνάρτησις συχνότητος" πρός τήν ὁμοειδῆ καί ὁμοδιάστατον ταύτης "συνάρτησιν κατανομῆς", $F_k(x)$, ἡ ὁποία εἶναι εἰδική περίπτωσις τῆς "συναρτήσεως συχνότητος" μέ κατώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως ἤ ἀθροίσεως ταύτης τό κατώτερον τοιοῦτον α τῆς κατανομῆς, ἤτοι:

$$F_k(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x) \,.\, dx \qquad \text{διά τάς συνεχεῖς κατανομάς} \qquad (5)$$

$$\text{ἤ} \quad F_k(x) = \sum_{\alpha}^{x} f(x) \,.\, \delta \qquad \text{" " ἀσυνεχεῖς "} \qquad (6)$$

δ) Ὁρίζεται ὡς "συχνότης", μόνον ὁ ἀπόλυτος ἀριθμός τῶν ἐμ φανίσεων γεγονότος τινός, καί διακρίνεται αὕτη εἰς"θεωρητικήν" ἤ "ἐκ τῶν προτέρων", προκύπτουσαν ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ἀντιστοίχου "συναρτήσεως συχνότητος" καί εἰς "ἐμπειρικήν" ἤ "ἐκ τῶν ὑστέρων", προκύπτουσαν ἐκ τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων.

ε) 'Ορίζεται ὡς Κ.Σ. ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας ἐξίσωσις εἶναι ἡ:

$$y = f(x) \tag{7}$$

ἥτις ἔχει ὡς τεταγμένην τήν "πυκνότητα συχνότητος" καί ὄχι τήν "συχνότητα". Ἡ οὕτω ὁριζομένη Κ.Σ. εἶναι ἀπηλλαγμένη ὅλων τῶν ἀδυναμιῶν, ἐλλείψεων καί ἀντιθέσεων, περί ὧν ἡ παρ. Ιδ-(I) ἕως (7) ἀνωτέρω.

ζ) 'Αποδεικνύεται ὅτι εἶναι δυνατός ὁ προσδιορισμός τῶν N διαφόρων τιμῶν x_i τῆς μεταβλητῆς,τῶν ἀνταποκρινομένων εἰς ἀκριβῆ προσαρμογήν πεπερασμένης ὁλικῆς συχνότητος N εἰς τυχοῦσαν Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς, ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)\,.\,dx = I \tag{8}$$

ἔνθα $x_i = x_0, x_I, x_2, \ldots, x_N$, ἤτοι αἱ N διάφοροι τιμαί τῆς μεταβλητῆς,ἐπί πλέον τῆς x_0

καί x_0, x_N τά κατώτερον καί ἀνώτερον ὅρια τῆς κατανομῆς·

ζ) 'Αποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις:

$$y = K\,.\,\frac{f(x)}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx} \tag{9}$$

$$\text{ἤ } y = K\,\frac{f(x)}{\sum\limits_{x_i=0}^{\nu} f(x_i)\,.\,\delta} \tag{10}$$

παριστᾶ οἰκογένειαν Κ.Σ. μέ ὁλικήν συχνότητα ἑκάστου μέλους τῆς οἰκογενείας ἴσην πρός Κ. (Ἔνθα α καί β εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $f(x)$, $K > 0$ καί ν = ἀριθμός τῶν σημείων συγκεντρώσεως τῆς συχνότητος).

Ἡ Κ.Σ.Σ. τῆς οἰκογενείας εἶναι μοναδική καί ἔχει ἐξίσωσιν:

$$y = \varphi(x) = \frac{f(x)}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx} \qquad (\text{II})$$

$$\text{ἤ } y = \varphi(x) = \frac{f(x)}{\sum\limits_{x_i=0}^{\nu} f(x_i).\delta} \qquad (\text{I2})$$

η) Ὑπολογίζονται πάντα τά στοιχεῖα μιᾶς κατανομῆς συχνότητος, συμπεριλαμβανομένων καί τῶν ἀπολύτων συχνοτήτων, ἐκ μόνης τῆς ἀναλυτικῆς ἤ γραφικῆς παραστάσεως τῆς Κ.Σ. ταύτης.

ϑ) Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις:

$$y = \alpha . e^{-\beta x^2} \qquad (\text{I3})$$

παριστᾶ καμπύλην συχνότητος κανονικῆς κατανομῆς (Κ.Σ.Κ.Κ.) ἔχουσαν τυπικήν ἀπόκλισιν $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\beta}}$, μεγίστην τεταγμένην $y_m = \alpha$ καί ὁλικήν συχνότητα $N = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$.
Ἡ γνωστή καμπύλη τοῦ GAUSS:

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma . \sqrt{2\pi}} \qquad (\text{I4})$$

ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἡ Κ.Σ.Σ. τῆς οἰκογενείας, ἤτοι ὅτι ἀποτελεῖ αὐτή εἰδικήν περίπτωσιν τῆς γενικῆς τοιαύτης μέ Ν = Ι.

ι) Παρέχεται σχέσις, ἐξ ἧς ὑπολογίζεται τό ὁλικόν ἐμβαδόν Ε (καί ἡ ἀντίστοιχος ὁλική συχνότης Ν) τυχούσης Κ.Σ.Κ.Κ. ἤτοι:

$$E = \sigma . y_m \sqrt{2\pi} \qquad (\text{I5})$$

$$\text{ἤ} \quad N = \sigma . \rho_m \sqrt{2\pi} \qquad (16)$$

ἔνθα σ = τυπική ἀπόκλισις, y_m = μεγίστη τεταγμένη καί ρ_m = μεγίστη πυκνότης συχνότητος τῆς Κ.Σ.Κ.Κ. Τοῦτο ἐπιτρέπει τήν ἔνταξιν τῆς Κ.Σ.Κ.Κ. εἰς τά κοινά γεωμετρικά σχήματα καί τήν ἐφαρμογήν γεωμετρικῶν μεθόδων πρός ἐπίλυσιν στατιστικῶν προβλημάτων κατανομῆς συχνότητος.

ια) Καθορίζονται διάφοροι σχέσεις, ὑφιστάμεναι μεταξύ τῶν

γεωμετρικῶν παραμέτρων διαφόρων Κ.Σ.Κ.Κ., θεωρουμένων ὡς κοι-
νῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ὡς:

$$x.y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} = \sigma.y_m \qquad (17)$$

ἥτις συνδέει τήν τυπικήν ἀπόκλισιν καί τήν μεγίστην τεταγ-
μένην διαφόρων Κ.Σ.Κ.Κ. ἐχουσῶν τήν αὐτήν ὁλικήν συχνότητα,
(ἰσοδυνάμων), πρός τάς συντεταγμένας τῶν σημείων ἰσοσκελοῦ
ὑπερβολῆς ἀναφερομένης εἰς τάς ἀσυμπτώτους της.

$$\frac{E_I}{E_2} = \frac{N_I}{N_2} = \frac{y_{m_1}}{y_{m_2}}$$ διά Κ.Σ.Κ.Κ. τῆς αὐτῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως

$$\frac{E_I}{E_2} = \frac{N_I}{N_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$ " " " " μεγίστης τεταγμένης

$$\frac{E_I}{E_2} = \frac{N_I}{N_2} = \frac{\sigma_1 \cdot y_{m_I}}{\sigma_2 \cdot y_{m_2}}$$ " " τυχούσας (.

3. Εἰς τό Γ΄ Κεφάλαιον ἐκτίθενται ἐφαρμογαί τοῦ θεωρητικοῦ
περιεχομένου τοῦ Β΄ Κεφαλαίου, ὑπό μορφήν παραδειγμάτων, πρό
ἀξιοποίησιν τῶν συμπληρωθεισῶν, ὡς ἀνωτέρω, στατιστικῶν ἐν-
νοιῶν, δι' ἐπιλύσεως σχετικῶν στατιστικῶν προβλημάτων, ὡς κά-
τωθι:

α) Ὑπολογισμός καί γραφ. παράστασις ἀσυνεχοῦς κατανομῆς

β) " " " " συνεχοῦς " τυχούσης

γ) " " " " " " ἐλλειπτι-
κῆς

δ) " " " " " " κανονικῆς

ε) " " " " ὁμαδοποιημένης "

στ) Σύγκρισις διαφόρων Κ.Σ. συνεχοῦς κατανομῆς

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

I. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ Κ.: Στατιστική 'Αθῆναι-1957

2. ALLEN E.: Statistical Analysis-Richard Co-1959

3. ALEXANDER H.: Elements of Mathematical Statistics-Wiley - 1961.

4. ANDERSON R.- BANCROFT T.: Statistical Theory in Research. Mc Graw Hill - 1952

5. BOWKER-LIEBERMAN: Handbook of Industrial Statistics-Prentice Hall - 1956

6. BOWLEY A.: Elements of Statistics-Staples Press-1948

7. BRICAS M.: Le systeme de Courbes de Pearson- 'Αθῆναι - 1949

8. CONNOR L.- MORRELIA. J.: Statistics in Theory and Pactice-Pitman - 1964

9. CORNELL F.: The Essentials of Educational statistics - Wiley - 1956

IO. CRAMER H.: The elements of probability theory - Wiley - 1958.

II. " ": Mathematical Methods of statistics - Princeton university Press - 1963

I2. GROXTON F-COWDEN D.: Applied General Statistics-Pitman - 1948

I3. DAVIES O.L.: Statistical Methods in Research and Production - Oliver and Boyd - 1961

I4. DUMAS R.: L' entreprise et la statistique - Dunond-1957

I5. ELDERTON W. Frequency Curves and Correlation - Cambridge University Press - 1938

I6. FELLER W.: An introduction to Probability Theory and its applications - Wiley - 1958

I7. FINNEY D.: An introduction to Statistical Science in Agriculture - Wiley - 1953

I8. FISHER R.A.: Statistical methods and scientific inferences - Oliver and Boyd - 1959

I9. " " " Statistical methods for research workers-Oliver and Boyd - 1958

20. FRASER D.: Non Parametric Methods in Statistics Wiley - 1957

2I. FREEMAN H.A.: Industrial Statistics- Wiley - 1956

22. FREUND J.-WILLIAMS F.: Modern Business Statistics-Pitman-I96I

23. FRY T.C.: Probability and its engineering uses-D. Van Norstand - 1959

24. GOODMAN R.: Statistics - English University Press-1960

25. GOULDEN C.: Methods of statistical Analysis-Wiley-I956

26. HALD A.: Statistical Theory with Engineering applications - Wiley - 1957

27. HOEL P.G.: Introduction to Mathematical Statistics - Wiley-1949

28. HUBER M.: Statistiques d' entreprises-Herman - 1948

29. KEEPING E.: Introduction to statistical Inference-D. Van Norstand - 1962

30. KENDALL M. G - STUART A.: The Advaced Theory of Statistics - Griffin - 1963

31. KENDALL M.G. - BUCKLAND W.:A dictionary of Statisticalterms - Oliver and Boyd-1957

32. KENNEY J.-KEEPING E.: Mathematics of Statistics-D. Van Norstand - 1951

33. LAMAT J.: Statistique et Probabilité - Technique et Vulgarisation - 1962

34. LEWIS E.: Method of Statistical Analysis-Houghton Mifflin Co - 1963

35. LINGREN B.W.:-ELRATH G.N.: Introduction to Probability and Statistics-Mc Millan Co-1959

36. LIORZOU A.: Initiation Pratique à la Statistique-Eyrolls - 1959

37. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ Ε.: Στατιστική - 'Αθῆναι - 1965

38. ΜΠΙΤΣΟΠΟΥΛΟΥ Θ.: 'Επιχειρησιακαί "Ερευναι , Θεωρία καί Πρᾶξις - 'Αθῆναι - 1964

39. MILLS F.: Statistical Methods - Holt - 1955

40. MONJALLON A.: Introduction à la Methode Statistique-Librairie Vuibert - 1958

41. MOOD A.F.: Introduction to the theory of Statistics-Mc Graw Hill - 1950

42. ΜΠΡΙΚΑ Μ.: Στατιστική - 'Αθῆναι - 1950

43. NEISWAGER W.: Elementary Statistical Methods-Mc Graw Hill - 1956

44. NEYMAN J.: First Course in Probability and Statistics - H. Holt Co 1953

45. ΠΑΠΠΑ Α.: 'Εφηρμοσμένη Στατιστική-'Αθῆναι - 1960

46. RIETZ H.: Mathematical Statistics - Open Court Publishing Co-1952

47. SMITH J.- DUNCAN A.: Elementary Statistics and Appli - cations - Mc Graw Hill - 1944

48. SNEDECOR G.: Statistical Methods- The Iowa State College Press - 1957

49. SOCOINICOFF I.: Probability and Statistics-Wiley-1953

50. SPROWLS R.: Elementary Statistics - Mc Graw-Hill-1955

51. ΣΤΕΡΙΩΤΗ Π.: Συμβολή εἰς τήν διαμεταβλητότητα τῶν Κατανομῶν Gauss - Ἀθῆναι 1953

52. TIPPETT I.: Statistics - Oxford University Press-1958

53. TORTRAT A.: Principes de Statistique Mathematique-Dunond - 1961

54. TRAYNARD E.: Elements de Statistique et du Calcul de Probabilité - Dunond - 1959

55. VAN DEUREN P.: Theorie de Probabilités-Gautier Vil - lars-1934

56. VESSEREAU A.: La Statistique-Press Universitaire de France - 1955

57. WALKER H.-JOSEPH LEV.: Elementary Statistical Methods-Holt - 1967

58. WALLIS W.-ROBERT H.: Statistics - Methuen - 1967

59. WEATHERBURN C. A first Course in Mathematical Statistics-Cambridge University Press-1961

60. WILKS S.: Mathematical Statistics - Wiley-1963

61. YULES U.- KENDALL M.: An introduction to the Theory of Statistics - Griffin - 1958.-

----