Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

**Μεταπτυχιακή Διατριβή**

| | |
|---|---|
| Τίτλος Διατριβής | **Εφαρμογές της συνάρτησης Grundy στη θεωρία παιγνίων**<br><br>**Applications of the Grundy function on game theory** |
| Ονοματεπώνυμο Φοιτητή | **Τριανταφυλλιά Κρίκου** |
| Πατρώνυμο | **Ευστάθιος** |
| Αριθμός Μητρώου | **ΜΠΠΛ/ 07046** |
| Επιβλέπων | **Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας, Καθηγητής** |

Ημερομηνία Παράδοσης **Ιούλιος 2013**

---

## Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

| | | |
|---|---|---|
| Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας | Φώτιος Γεωργιακώδης | Αριστείδης Σαπουνάκης |
| Καθηγητής (Επιβλέπων) | Καθηγητής | Καθηγητής |

## Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Πληροφορική», του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς. Στόχος αυτής της διπλωματικής είναι η εφαρμογή της συνάρτησης Grundy στην θεωρία παιγνίων.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας μου, Καθηγητή Παναγιώτη Τσικούρα, για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ μαζί του, αλλά και για την βοήθεια που μου προσέφερε προκειμένου να καταστεί δυνατή η υλοποίηση της συγκεκριμένης εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Καθηγητές Αριστείδη Σαπουνάκη και Φώτιο Γεωργιακώδη. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω θερμά τον διδάκτορα Ιωάννη Τασούλα για την πρακτική βοήθεια που μου προσέφερε απλόχερα, για όσα με δίδαξε και για όλες τις ώρες που μου αφιέρωσε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και το στενό μου φιλικό περιβάλλον για την ηθική τους συμπαράσταση και την αντοχή τους, όποτε αυτή χρειάστηκε.

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την εφαρμογή της συνάρτησης Grundy στην θεωρία παιγνίων.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των υπόλοιπων κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η συνάρτηση Grundy - Sprague ενός γραφήματος καθώς και ο τρόπος υπολογισμού της.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα παίγνια καταστάσεων και γίνεται συγκεκριμένη επεξήγηση του Nim. Στη συνέχεια γίνεται εφαρμογή της συνάρτησης Grundy στα παίγνια καταστάσεων και στο παίγνιο Nim.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εφαρμόζεται η συνάρτηση Grundy στο παίγνιο του Welter, ενώ στο πέμπτο και στο έκτο κεφάλαιο εφαρμόζεται η εν λόγω συνάρτηση στο παίγνιο του Welter χωρίς προσπέραση και στο παίγνιο του Welter με 3 πιόνια, αντίστοιχα. Όμοια, στο έβδομο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της συνάρτησης Grundy σε ένα παίγνιο σε πλέγμα.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζεται η δίτιμη συνάρτηση Grundy – Sprague ενός γραφήματος, ενώ στο ένατο κεφάλαιο εξετάζεται το παίγνιο του Welter υπό το πρίσμα της δίτιμης συνάρτησης Grundy.

# Περιεχόμενα


**1. Βασικοί ορισμοί στα γραφήματα τόξων ........................................ 8**

**2. Συνάρτηση Grundy – Sprague ενός γραφήματος ........................... 10**

**3. Παίγνια Καταστάσεων ........................................................................ 16**

**3.1 Παίγνιο Nim ..................................................................................... 18**

**3.2 Παίγνιο Καταστάσεων και συνάρτηση Grundy ......................... 22**

**4. Παίγνιο του Welter .............................................................................. 25**

**5. Παίγνιο του Welter χωρίς προσπέραση ........................................... 53**

**6. Παίγνιο του Welter με 3 πιόνια .......................................................... 64**

**7. Πλέγμα ................................................................................................. 84**

**8. Δίτιμη ή Boolean συνάρτηση Grundy – Sprague ενός γραφήματος . 101**

**9. Παίγνιο του Welter και δίτιμη συνάρτηση Grundy – Sprague ......... 105**

**Βιβλιογραφία ........................................................................................ 119**

# Κεφάλαιο 1

## Βασικοί ορισμοί στα γραφήματα τόξων

Κάθε δυάδα $G=(V,U)=(V(G),U(G))$, όπου $V$ είναι ένα μη κενό σύνολο και $U$ είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη $(x,y)$, όπου $x,y$ ανήκουν στο $V$ και $x \neq y$, ονομάζεται **γράφημα τόξων** ή **προσανατολισμένο γράφημα** ή **κατευθυνόμενο γράφημα.**

Τα στοιχεία του $V$ καλούνται **κορυφές** (ή **κόμβοι**) του γραφήματος, ενώ τα στοιχεία του $U$ καλούνται **τόξα**.

Για παράδειγμα, η δυάδα

$$G=(V,U)$$

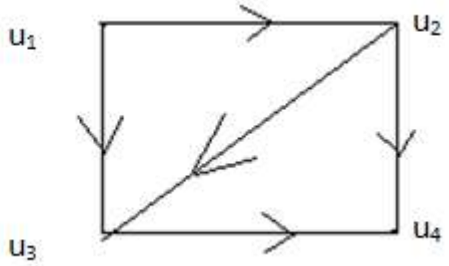
όπου

$$V=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$$

και

$$U=\{(u_1,u_2),(u_1,u_3),(u_2,u_3),(u_2,u_4),(u_3,u_4)\}$$

είναι ένα γράφημα τόξων. Η γραφική απεικόνιση του $G$ είναι η ακόλουθη:




Ο πληθάριθμος του $|V|$ ονομάζεται **τάξη** του γραφήματος. Στο προηγούμενο παράδειγμα, η τάξη του γραφήματος είναι 4.
Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με γραφήματα που έχουν πεπερασμένη τάξη.
Αν $(x,y)\in U$ τότε λέμε ότι η κορυφή $x$ έχει **γείτονα** την κορυφή $y$ ή ότι η κορυφή $y$ είναι γείτονας της κορυφής $x$ ή ότι η κορυφή $y$ είναι γειτονική με την κορυφή $x$. Σε ένα γράφημα τόξων, εν γένει, αν η κορυφή $x$ έχει γείτονα την $y$, δεν ισχύει απαραίτητα ότι και η $y$ έχει γείτονα την $x$. Το σύνολο

των γειτονικών κορυφών μιας κορυφής $x$ συμβολίζεται με $\Gamma(x)$. Αν $\Gamma(v)=\varnothing$, τότε η $v$ ονομάζεται **τερματική κορυφή**. **Κύκλωμα**, σε ένα γράφημα τόξων ονομάζεται κάθε μονοπάτι του οποίου η αρχή συμπίπτει με το τέλος .

Στο προηγούμενο παράδειγμα, ισχύει ότι $\Gamma(u_1)=\{u_2,u_3\}$, $\Gamma(u_2)=\{u_3,u_4\}$, $\Gamma(u_3)=\{u_4\}$ και $\Gamma(u_4)=\varnothing$.

# Κεφάλαιο 2

## Συνάρτηση Grundy – Sprague ενός γραφήματος

Έστω $S$ ένα σύνολο φυσικών αριθμών. Συμβολίζουμε με $\text{mex}\,S$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό που δεν περιέχεται στο σύνολο $S$, δηλαδή

$$\text{mex}\,S = \min\{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}.$$

Για παράδειγμα, αν $S = \{0,1,2,3\}$ τότε $\text{mex}\,S = 4$, αν $S = \{1,3,5\}$ τότε $\text{mex}\,S = 0$ ενώ αν $S = \varnothing$ τότε $\text{mex}\,S = 0$.

Έστω $G = (V,U)$ ένα γράφημα τόξων. Η συνάρτηση $g : V \to \mathbb{N}$ για την οποία

$$g(x) = \text{mex}\{g(v) : v \in \Gamma(x)\}, \text{ για κάθε } x \in V,$$

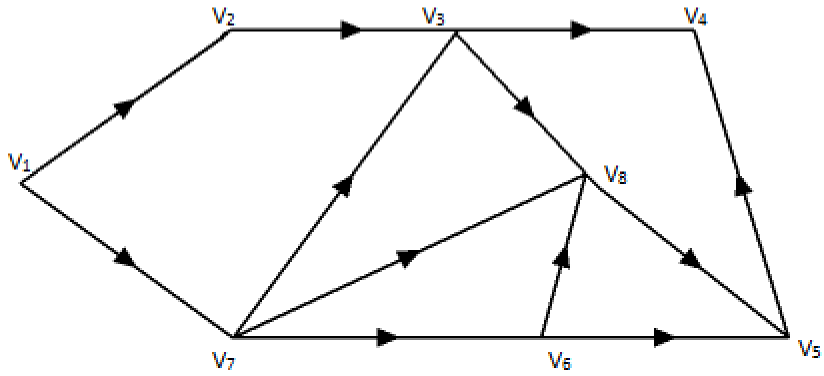
ονομάζεται **συνάρτηση Grundy—Sprague,** ή απλά **συνάρτηση Grundy,** ή **$g$-συνάρτηση του γραφήματος G**. Το σύνολο των τιμών των γειτονικών κορυφών της κορυφής $x$ συμβολίζεται με $C(x)$, δηλαδή $g(x) = \text{mex}\,C(x)$.

Επειδή ο υπολογισμός της συνάρτησης Grundy είναι αναδρομικός, δηλαδή για να υπολογίσουμε την συνάρτηση για μία κορυφή χρησιμοποιούμε την τιμή της συνάρτησης Grundy άλλων κορυφών, πρέπει να δοθεί μία διαδικασία που θα εξασφαλίζει ότι θα μπορούμε πάντα να ορίζουμε την συνάρτηση αυτή. Για το λόγο αυτό, χαρακτηρίζουμε πρώτα κάθε κορυφή γραφήματος ως **p-κορυφή, ή n-κορυφή** με βάση τους παρακάτω κανόνες:

- Κάθε τελική θέση του γραφήματος είναι p-κορυφή.
- Κάθε κορυφή που έχει γείτονα μία τουλάχιστον p-κορυφή, είναι n-κορυφή.
- Κάθε κορυφή που έχει γείτονες μόνο n-κορυφές είναι p-κορυφή.
- Επιπλέον, θεωρούμε ότι $g(v) = 0$ για κάθε τερματική κορυφή $v$.

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι $g(v) = 0$, αν και μόνο αν η $v$ είναι p-κορυφή.

Έτσι, για παράδειγμα, για το επόμενο γράφημα $G = (V,U)$,




η συνάρτηση $g:V\rightarrow\mathbb{N}$ με

$$\begin{aligned} g(v_1)&=1, & g(v_5)&=1,\\ g(v_2)&=0, & g(v_6)&=2,\\ g(v_3)&=1, & g(v_7)&=3,\\ g(v_4)&=0, & g(v_8)&=0. \end{aligned}$$

είναι η μοναδική $g$-συνάρτηση του γραφήματος.

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση Grundy του παραπάνω γραφήματος εργαστήκαμε ως εξής:
Εντοπίσαμε ποιές κορυφές του γραφήματος είναι p-κορυφές και ποιές είναι n-κορυφές. Συγκεκριμένα:
Η κορυφή $v_4$ είναι p-κορυφή, αφού δεν έχει κανένα γείτονα.

Η κορυφή $v_5$ είναι n-κορυφή, αφού έχει γείτονα μόνο την κορυφή $v_4$ που είναι p-κορυφή.

Η κορυφή $v_8$ είναι p-κορυφή, αφού έχει γείτονα μόνο την κορυφή $v_5$ που είναι n-κορυφή.

Η κορυφή $v_3$ είναι n-κορυφή, αφού έχει γείτονες μόνο p-κορυφές, τις κορυφές $v_4$ και $v_8$.

Η κορυφή $v_6$ είναι n-κορυφή, αφού έχει γείτονες τις κορυφές $v_5$ και $v_8$, οι οποίες είναι n-και p-κορυφή, αντίστοιχα.

Η κορυφή $v_2$ είναι p-κορυφή, αφού έχει γείτονα μόνο την κορυφή $v_3$ που είναι n-κορυφή.

Η κορυφή $v_7$ είναι n-κορυφή, αφού έχει γείτονες τις κορυφές $v_3$, $v_8$ και $v_6$, οι οποίες είναι n, p- και n- κορυφές, αντίστοιχα.

Η κορυφή $v_1$ είναι n-κορυφή, αφού έχει γείτονες τις κορυφές $v_2$ και $v_7$, οι οποίες είναι p- και n-κορυφές, αντίστοιχα.

Έχοντας ορίσει ποιές είναι οι p- και οι n- κορυφές του γραφήματος μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την συνάρτηση Grundy για όλες τις κορυφές. Πράγματι, ισχύει ότι

$g(v_2)=g(v_4)=g(v_8)=0$, αφού όλες οι εν λόγω κορυφές αποτελούν p-κορυφές.

$g(v_5)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_5)=\{v_4\}$, θα είναι

$$g(v_5)=\operatorname{mex}C(v_5)=\operatorname{mex}\{g(v_4)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1.$$

$g(v_3)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_3)=\{v_4,v_8\}$, θα είναι

$$g(v_3)=\operatorname{mex}C(v_3)=\operatorname{mex}\{g(v_4),g(v_8)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1.$$

$g(v_6)=2$, διότι, αφού $\Gamma(v_6)=\{v_5,v_8\}$, θα είναι

$$g(v_6)=\operatorname{mex}C(v_6)=\operatorname{mex}\{g(v_5),g(v_8)\}=\operatorname{mex}\{0,1\}=2.$$

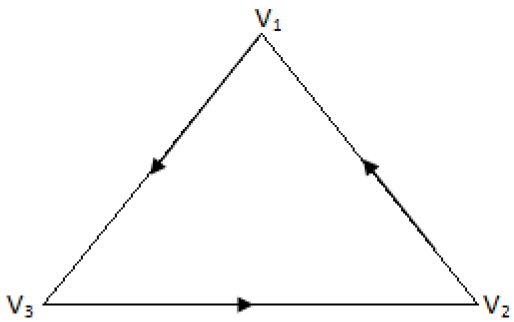
$g(v_7)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_7)=\{v_3,v_6,v_8\}$, θα είναι

$$g(v_7)=\operatorname{mex}C(v_7)=\operatorname{mex}\{g(v_3),g(v_6),g(v_8)\}=\{1,2,0\}=3.$$

$g(v_1)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_1)=\{v_2,v_7\}$, θα είναι

$$g(v_1)=\operatorname{mex}C(v_1)=\operatorname{mex}\{g(v_2),g(v_7)\}=\operatorname{mex}\{0,3\}=1.$$

Για το επόμενο γράφημα τόξων δεν ορίζεται καμία $g$-συνάρτηση:




Πράγματι, έστω ότι η συνάρτηση $g:V\to\mathbb{N}$ είναι $g$-συνάρτηση. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $g(v_1)=0$ τότε

$$g(v_2)=\operatorname{mex}C(v_2)=\operatorname{mex}\{g(v_1)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$$

οπότε

$$g(v_3)=\operatorname{mex}C(v_3)=\operatorname{mex}\{g(v_2)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$g(v_0)=\operatorname{mex}C(v_0)=\operatorname{mex}\{g(v_3)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1\neq 0.$$

Αν $g(v_1)\neq 0$ τότε

$$g(v_2)=\operatorname{mex}C(v_2)=\operatorname{mex}\{g(v_1):g(v_1)\neq 0\}=0$$

οπότε

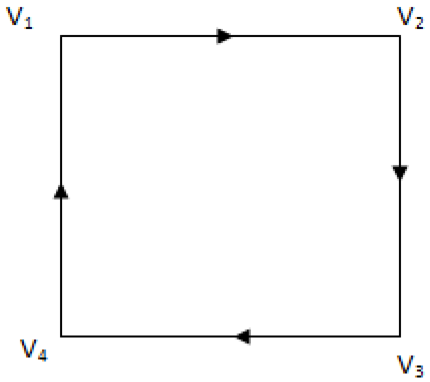
$$g(v_3)=\operatorname{mex}C(v_3)=\operatorname{mex}\{g(v_2)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$g(v_0)=\operatorname{mex}C(v_0)=\operatorname{mex}\{g(v_3)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0.$$

Επομένως, δεν ορίζεται $g$-συνάρτηση για το παραπάνω γράφημα.

Για το επόμενο γράφημα τόξων ορίζονται δύο $g$-συναρτήσεις:




Πράγματι, έστω ότι η συνάρτηση $g: V \to \mathbb{N}$ είναι $g$-συνάρτηση. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $g(v_1)=0$ τότε

$$g(v_4)=\operatorname{mex} C(v_4)=\operatorname{mex}\{g(v_1)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1,$$

οπότε

$$g(v_3)=\operatorname{mex} C(v_3)=\operatorname{mex}\{g(v_4)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0,$$

και

$$g(v_2)=\operatorname{mex} C(v_2)=\operatorname{mex}\{g(v_3)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1,$$

το οποίο ισχύει αφού

$$g(v_1)=\operatorname{mex} C(v_1)=\operatorname{mex}\{g(v_2)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0$$

Αν $g(v_1)\neq 0$, επομένως $g(v_1)=1$ τότε

$$g(v_4)=\operatorname{mex} C(v_4)=\operatorname{mex}\{g(v_1)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0,$$

οπότε

$$g(v_3)=\operatorname{mex} C(v_3)=\operatorname{mex}\{g(v_4)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1,$$

και

$$g(v_2)=\operatorname{mex} C(v_2)=\operatorname{mex}\{g(v_3)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0,$$

το οποίο ισχύει αφού

$$g(v_1)=\operatorname{mex} C(v_1)=\operatorname{mex}\{g(v_2)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$$

Επομένως, ορίζονται $2$ $g$-συναρτήσεις για το παραπάνω γράφημα.

Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

**Πρόταση.**
Για κάθε πεπερασμένο και προσανατολισμένο γράφημα, το οποίο δεν έχει κυκλώματα υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση Grundy.
Παρατηρούμε πράγματι ότι στο πρώτο από τα προηγούμενα παραδείγματα (όπου η g-συνάρτηση καθορίστηκε μοναδικά), δεν υπάρχει κύκλωμα. Αντίθετα στο δεύτερο και στο τρίτο παράδειγμα (όπου δεν υπάρχει μοναδική g-συνάρτηση) υπάρχει κύκλωμα.

**Πρόταση.**
Έστω $G=(V,U)$ ένα γράφημα για το οποίο ορίζεται μια συνάρτηση Grundy-Sprague $g$. Για κάθε $x \in V$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Αν $\Gamma(v)=\varnothing$ τότε $g(v)=0$.
2. Αν $w \in \Gamma(v)$ τότε $g(v) \neq g(w)$.
3. Αν $g(w)>0$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$, τότε $g(v)=0$.
4. Αν $g(v)=\kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}^*$,τότε $|\Gamma(v)| \geq \kappa$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in \Gamma(v)$ με $g(w)=0$.
5. Αν $g(v)=0$, τότε είτε $\Gamma(v)=\varnothing$, είτε $g(w)>0$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$.
6. Αν $g(v)=\kappa$, τότε υπάρχει διαδρομή μήκους $\kappa$ από την $v$ σε μία κορυφή $w$, με $g(w)=0$.

*Απόδειξη.*
1. Αν $\Gamma(x)=\varnothing$ τότε $C(x)=\varnothing$. Επομένως $g(x)=\operatorname{mex} C(x)=\operatorname{mex}\varnothing=0$.

2. Αν $w \in \Gamma(v)$, τότε $g(w) \in C(v)$. Επομένως $g(w) \neq \operatorname{mex} C(v)$, άρα $g(v) \neq g(w)$.

3. Αν $g(w)>0$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$ τότε ισχύει:

$$g(v)=\operatorname{mex}\{g(w): w \in \Gamma(v)\}$$

$$g(v)=\operatorname{mex}\{g(w)>0\}$$

$$g(v)=0.$$

4. Αφού ισχύει

$g(v)=\operatorname{mex}\{g(w): w \in \Gamma(v)\}$ και $g(v)=\kappa$,

πρέπει να υπάρχουν:

$$\begin{aligned} g(w_1)&=0\\ g(w_2)&=1\\ g(w_3)&=2\\ &\vdots\\ g(w_{\kappa-1})&=\kappa-1. \end{aligned}$$

Διαφορετικά, αν $g(w_i) \notin C(v)$, τότε

$g(v) = \mathrm{mex}\{g(w) : w \in \Gamma(v)\}$
$g(v) = \mathrm{mex}\{C(v) \cap g(w_i)\}$
$\kappa = \mathrm{mex}\{C(v) \cap g(w_i) : g(w_i) < \kappa\}$ άτοπο.
Άρα $|C(v)| \geq \kappa \Rightarrow |\Gamma(v)| \geq \kappa$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν $g(w_i) = 0$ και $g(w_i) \notin C(v)$, τότε
$g(v) = \mathrm{mex}(g(w) : w \in \Gamma(v))$
$g(v) = \mathrm{mex}(C(v) : 0 \notin C(v))$
$\kappa = \mathrm{mex}(C(v) : 0 \notin C(v))$
όπου $\kappa > 0$ ,άρα άτοπο.
Επομένως, $0 \in C(v)$.

5. Έστω $\Gamma(v) \neq \varnothing$ και $w_i \in \Gamma(v)$ με $g(w_i) = 0$, τότε
$g(w_i) = 0$ και $g(w_i) \in C(v)$
$g(v) = \mathrm{mex}\{g(w) : w \in \Gamma(v)\}$
$g(v) = \mathrm{mex}\{C(v) : 0 \in C(v)\}$
$0 = \mathrm{mex}\{C(v) : 0 \in C(v)\}$, άρα άτοπο.
Επομένως, αν $g(v) = 0$, τότε είτε $\Gamma(v) = \varnothing$, είτε $g(w) > 0$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$.

6. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς το κ.
Για $\kappa = 1$ προκύπτει ότι υπάρχει $w \in \Gamma(v)$ ώστε $g(w) = 0$. Άρα η πρόταση ισχύει αφού η $w$ απέχει απόσταση 1 από την $v$.
Έστω ότι η πρόταση ισχύει για το κ, θα αποδειχτεί ότι ισχύει και για το $\kappa + 1$.
Πράγματι, αν $g(v) = \kappa + 1$, τότε υπάρχει $w \in \Gamma(v)$ με $g(w) = \kappa$. Άρα υπάρχει μονοπάτι μήκους $\kappa$ από το w προς μία κορυφή $w'$ με $g(w') = 0$, οπότε από την κορυφή $v$ υπάρχει μονοπάτι μήκους $\kappa + 1$.

# Κεφάλαιο 3

## Παίγνια Καταστάσεων

Έστω S ένα μη κενό, το πολύ αριθμήσιμο σύνολο, το οποίο ονομάζεται **σύνολο καταστάσεων** και $f : S \to P(S)$ μία απεικόνιση, η οποία ονομάζεται **συνάρτηση επιλογής.**

Η διατεταγμένη τριάδα $\Pi = (S, s, f)$, όπου $s \in S$ ονομάζεται **παίγνιο καταστάσεων με αρχική κατάσταση** $s$ **.**

**Παρτίδα** $(p)$ του $\Pi$ ονομάζεται μία ακολουθία καταστάσεων $p = s_1, s_2, ..., s_n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε :

i. $s_1 = s$

ii. $s_{i+1} \in f(s_i)$

iii. $f(s_n) = \varnothing$.

Αν το πλήθος των καταστάσεων της παρτίδας είναι άρτιο, τότε η παρτίδα $p$ ονομάζεται **άρτια**, ενώ αν είναι περιττό, τότε η παρτίδα ονομάζεται **περιττή**. Σημειώνεται ότι στην περιττή παρτίδα κερδίζει ο 2^ος^ παίκτης, ενώ στην άρτια ο 1^ος^ παίκτης.

Για παράδειγμα, η τριάδα $\Pi = (S, s_0, f)$ όπου:

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$$

και

$$f : S \to P(S)$$

με

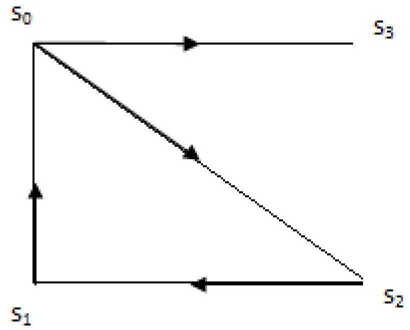
$$f(s_0) = \{s_2, s_3\}$$
$$f(s_1) = \{s_0\}$$
$$f(s_2) = \{s_1\}$$
$$f(s_3) = \varnothing$$

είναι ένα παίγνιο καταστάσεων με αρχική κατάσταση $s_0$. Η ακολουθία $s_0, s_2, s_1, s_0, s_3$ είναι μία παρτίδα του $\Pi$, η οποία είναι περιττή.

Σε κάθε παίγνιο καταστάσεων $\Pi = (S, s, f)$ αντιστοιχεί ένα γράφημα τόξων με μία επιλεγμένη κορυφή $G = (V, U)$, όπου $V = S$ και αν $s_i, s_j \in S$ ,με $s_i \in f(s_j)$, τότε $(s_j, s_i) \in U$ και $s$ είναι η επιλεγμένη κορυφή του γραφήματος.

Για παράδειγμα, στο παίγνιο του προηγούμενου παραδείγματος αντιστοιχεί το γράφημα:

s$_0$




με επιλεγμένη την κορυφή s$_0$.

Σε κάθε παρτίδα $\Pi = (S, s, f)$ αντιστοιχεί ένα μονοπάτι του γραφήματος $G$, με αρχή την κορυφή $s_0$ και τέλος την κορυφή $s_n$.

Ένα παιχνίδι $\Pi = (S, s, f)$ ονομάζεται **άρτιο** αν

i. Υπάρχει άρτια παρτίδα με αρχή την $s$
ii. Υπάρχει $s' \in f(s)$ έτσι ώστε για κάθε $s'' \in f(s')$ το παιχνίδι $\Pi = (S, s'', f)$ είναι άρτιο,

ή

i. Υπάρχει $s' \in f(s)$ έτσι ώστε $f(s') = \varnothing$.

Ένα παιχνίδι $\Pi = (S, s, f)$ ονομάζεται **περιττό** αν

i. Υπάρχει περιττή παρτίδα με αρχή την s

ii. Για κάθε $s' \in f(s)$ υπάρχει $s'' \in f(s')$ όπου το παιχνίδι $\Pi = (S, s'', f)$ είναι περιττό,

ή

i. $f(s) = \varnothing$.

## 3.1 ΠΑΙΓΝΙΟ NIM

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ .Το $\Pi = (S, s_0, f)$ ονομάζεται **παίγνιο** $A$**-Nim μεγέθους** $m$ αν

$$s = \{1, 2, ..., m\}, \text{ όπου } s_0 = m$$

και

$$f(i) = \{i - j : j \in A, i - j \geq 0\}$$

Για παράδειγμα η τριάδα

$$\Pi = (S, s_0, f)$$

όπου:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$S = \{1, 2, ..., 20\}, s_0 = 20$$

και

$$f : S \to P(S)$$

με

$$f(i) = \{i - 1, i - 2, i - 3\} \text{ για } i \geq 3$$

και με

$$f(0) = \varnothing$$
$$f(1) = \{0\}$$
$$f(2) = \{0, 1\}$$

είναι ένα $\{1, 2, 3\}$ - Nim παίγνιο μεγέθους m. Η ακολουθία 20,19,17,16,13,10,8,6,3,0 είναι μία παρτίδα του $\Pi$.

**Εφαρμογή.**

Να αποδειχτεί ότι το παιχνίδι $\{1,2,3\}-$Nim μεγέθους 20 είναι περιττό:

i. Υπάρχει η παρτίδα:
$\Pi=(20,17,16,13,12,9,8,5,4,1,0)$ η οποία είναι περιττή.

ii. Ξεκινώντας από την θέση 20 με την πρώτη κίνηση μπορούμε να μεταβούμε στις εξής θέσεις:

$$20-1=19$$
$$20-2=18$$
$$20-3=17$$

Σε οποιοδήποτε θέση και αν καταλήξουμε μπορούμε να μεταβούμε στην θέση 16 ως εξής:

$$19-3=16$$
$$18-2=16$$
$$17-1=16$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιττή παρτίδα η οποία είναι η εξής: $\Pi=(16,13,12,9,8,5,4,1,0)$.

Ξεκινώντας από την θέση 16 με την πρώτη κίνηση μπορούμε να μεταβούμε στις εξής θέσεις:

$$16-1=15$$
$$16-2=14$$
$$16-3=13$$

Σε οποιοδήποτε θέση και αν καταλήξουμε μπορούμε να μεταβούμε στην θέση 12 ως εξής:

$$15-3=12$$
$$14-2=12$$
$$13-1=12$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιττή παρτίδα η οποία είναι η εξής: $\Pi=(12,9,8,5,4,1,0)$.

Ξεκινώντας από την θέση 12 με την πρώτη κίνηση μπορούμε να μεταβούμε στις εξής θέσεις:

$$12-1=11$$
$$12-2=10$$
$$12-3=\ 9$$

Σε οποιοδήποτε θέση και αν καταλήξουμε μπορούμε να μεταβούμε στην θέση 8 ως εξής:

$$11-3=8$$
$$10-2=8$$
$$9-1=8$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιττή παρτίδα η οποία είναι η εξής: $\Pi=(8,5,4,1,0)$.

Ξεκινώντας από την θέση 8 με την πρώτη κίνηση μπορούμε να μεταβούμε στις εξής θέσεις:

$$8-1=7$$
$$8-2=6$$
$$8-3=5$$

Σε οποιοδήποτε θέση και αν καταλήξουμε μπορούμε να μεταβούμε στην θέση 4 ως εξής:

$$7-3=4$$
$$6-2=4$$
$$5-1=4$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιττή παρτίδα η οποία είναι η εξής: $\Pi=(4,1,0)$.

Ξεκινώντας από την θέση 4 με την πρώτη κίνηση μπορούμε να μεταβούμε στις εξής θέσεις:

$$4-1=3$$
$$4-2=2$$
$$4-3=1$$

Σε οποιοδήποτε θέση και αν καταλήξουμε μπορούμε να μεταβούμε στην θέση 0 ως εξής:

$$3-3=0$$
$$2-2=0$$
$$1-1=0$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι περιττή παρτίδα.

## 3.2 ΠΑΙΓΝΙΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GRUNDY

**Πρόταση**.

Έστω $\Pi = (S, s, f)$ ένα παίγνιο καταστάσεων και $G = (V, U)$ το γράφημα τόξων που αντιστοιχεί στο παίγνιο $\Pi$.

a. Αν το $G$ έχει συνάρτηση Grundy $g$ με $g(s) = 0$ τότε το παίγνιο $\Pi$ είναι περιττό.

b. Αν το $G$ έχει συνάρτηση Grundy $g$ με $g(s) \neq 0$ τότε το παίγνιο $\Pi$ είναι άρτιο.

*Απόδειξη*.

a. Έστω $g(s) = 0$. Τότε

- Είτε $\Gamma(s) = \varnothing$
- Είτε για κάθε $s' \in \Gamma(s)$ ισχύει $g(s') > 0$.

Επομένως,

- Είτε $f(s) = \varnothing$
- Είτε για κάθε $s' \in \Gamma(s)$ ισχύει ότι $g(s') > 0$, επομένως υπάρχει $s'' \in \Gamma(s')$, έτσι ώστε το $g(s'') = 0$,

οπότε το παίγνιο είναι περιττό.

b. Έστω $g(s) \neq 0$. Τότε

- Είτε υπάρχει $s' \in f(s)$ με $f(s') = \varnothing$ οπότε το παίγνιο $\Pi$ είναι άρτιο (βάσει ορισμού).
- Είτε υπάρχει $s' \in f(s)$ με $f(s') \neq \varnothing$ και $g(s') \neq 0$, άτοπο αφού τότε, λόγω της υπόθεσης ότι $g(s) \neq 0$, θα είχαμε $\operatorname{mex}\{C(s) : g(s') \in C(s), g(s') \neq 0\} \neq 0$, άτοπο.
- Είτε υπάρχει $s' \in f(s)$ με $f(s') \neq \varnothing$ και $g(s') = 0$.

  Παραπάνω αποδείξαμε ότι αν για το γράφημα $G$ ισχύει $g(s') = 0$ τότε το παίγνιο $\Pi'(S, s', f)$ είναι περιττό. Άρα ισχύει ότι:

Το πλήθος των διαδοχικών καταστάσεων της παρτίδας με αφετηρία το $s'$ είναι περιττό, δηλαδή $|s'| = 2\nu + 1$, όπου $\nu \in \mathbb{Z}$.

Άρα αν στην παρτίδα με αφετηρία το $s'$ προσθέσουμε μία κατάσταση ακόμη την $s$ για την οποία ισχύει $f(s) = s'$ προκύπτει ότι:

$|s| = |s'| + 1 = 2\nu + 1 + 1 = 2\nu + 2$,

οπότε το πλήθος των διαδοχικών καταστάσεων είναι άρτιο.
Επομένως το παίγνιο $\Pi$ είναι άρτιο.

**Εφαρμογή 1.**

Το παίγνιο $\{1,2,3\}$ − Nim μεγέθους $20$ είναι περιττό.

Πράγματι:

Στο παίγνιο $\{1,2,3\}$ − Nim μεγέθους $20$ αντιστοιχεί το γράφημα $G(V,U)$, όπου $V = \{0,1,2,\ldots,20\}$ και $(i, j) \in U$ αν $(i - j) \in \{1,2,3\}$.

Η συνάρτηση Grundy του $G$ δίδεται από τον τύπο $g(i) = i \bmod 4$, οπότε έχουμε:

- Για $i = 0$,
  επειδή $\Gamma(0) = \varnothing$, έχουμε:
  $g(0) = 0 = 0 \bmod 4$, άρα το παίγνιο είναι περιττό
- Έστω ότι το παίγνιο είναι περιττό για κάθε $0 \le i \le k$, όπου το $k > 3$, θα αποδειχτεί ότι $g(k+1) = (k+1) \bmod 4$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
g(k+1) &= \operatorname{mex} C(k+1) = \\
&= \operatorname{mex}\big(g(k), g(k-1), g(k-2)\big) = \\
&= \operatorname{mex}\big(k \bmod 4, (k-1) \bmod 4, (k-2) \bmod 4\big) = \\
&= \operatorname{mex}\big(k \bmod 4, (k+3) \bmod 4, (k+2) \bmod 4\big) = \\
&= (k+1) \bmod 4.
\end{aligned}$$

Άρα για $k + 1 = 20$ έχουμε:

$g(20) = (20) \bmod 4 = 0$, άρα πράγματι το παίγνιο $\{1,2,3\}$ − Nim μεγέθους $20$ είναι περιττό.

**Εφαρμογή 2.**

Θα βρούμε την συνάρτηση Grundy για το παίγνιο $\{1,2,3,4,5\}-$ Nim μεγέθους $m$ .

$$
\begin{aligned}
& g(k+1)=\operatorname{mex} C(k+1)= \\
& =\operatorname{mex}(g(k), g(k-1), g(k-2), g(k-3), g(k-4))= \\
& =\operatorname{mex}(k \bmod 6,(k-1) \bmod 6,(k-2) \bmod 6,(k-3) \bmod 6,(k-4) \bmod 6)= \\
& =\operatorname{mex}(k \bmod 6,(k+5) \bmod 6,(k+4) \bmod 6,(k+3) \bmod 6,(k+2) \bmod 6)= \\
& =(k+1) \bmod 6 .
\end{aligned}
$$

Επομένως, για το παίγνιο $\{1,2,3,4,5\}-$ Nim μεγέθους $20$ ισχύει ότι

$g(20)=(20) \bmod 6=2$ , άρα το παίγνιο είναι άρτιο.

Αντιθέτως, για το παίγνιο $\{1,2,3,4,5\}-$ Nim μεγέθους $60$ ισχύει ότι

$g(60)=(60) \bmod 6=0$ , άρα το παίγνιο είναι περιττό.

# Κεφάλαιο 4

## Παίγνιο του Welter

Έστω ότι έχουμε μία λωρίδα από τετράγωνα, τα οποία είναι αριθμημένα από το $1$έως το $\infty$. Σε κάθε τετράγωνο έχουμε την δυνατότητα να τοποθετήσουμε ένα πιόνι.
Στο παίγνιο του Welter θεωρείται ότι n πιόνια έχουν τοποθετηθεί τυχαία στην λωρίδα των τετραγώνων. Υπάρχουν δύο παίχτες, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ, και μπορούν να μετακινήσουν ένα πιόνι κάθε φορά σε όποιο τετράγωνο επιθυμούν, αρκεί

- να μην υπάρχει ήδη κάποιο πιόνι σε αυτό,
- το νέο τετράγωνο που φιλοξενεί το πιόνι να έχει μικρότερο αριθμό από το προηγούμενο.

Μόλις τελειώσει το παιχνίδι, τα πιόνια θα φιλοξενούνται στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $n$. Κερδίζει ο παίχτης ο οποίος θα μπορεί να κάνει τελευταίος κίνηση, αφού μόλις όλα τα πιόνια τοποθετηθούν στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $n$ δεν θα υπάρχει τρόπος να μετακινηθεί ένα πιόνι σε τετράγωνο με μικρότερο αριθμό, αφού θα είναι όλα καλυμμένα.

Το παίγνιο του Welter μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή
$\Pi = (S, s, f)$, όπου

- $S$ : το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων των πιονιών,
- $s$ : μία συγκεκριμένη θέση των πιονιών, άρα ισχύει $s \in S$,
- $f$ : η συνάρτηση μετάβασης από μία έγκυρη κατάσταση σε μία άλλη.

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μόνο δύο πιόνια, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει:
$s = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$, όπου $i, j$ οι αριθμοί από τα τετράγωνα στα οποία φιλοξενούνται τα πιόνια. Επομένως ισχύει ότι:

$$f(s) = f(i, j) = s' = \{(i, \lambda) : \lambda < j, \lambda \neq i\} \cup \{(\kappa, j) : \kappa < i, \kappa \neq j\},$$

αφού μπορεί να μετακινηθεί μόνο ένα πιόνι κάθε φορά.

Επειδή δεν υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στα πιόνια ισχύει ότι:
Αν $s = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ και $s' = \{(j, i) : j, i \in \mathbb{N}, j \neq i\}$ ισχύει

- $s = s'$,
- $f(i, j) = f(j, i)$,
- $g(i, j) = g(j, i)$.

Υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(1,n)$ και έχουμε:

- $f(1,2)=\varnothing$, άρα $g(1,2)=0$.
- $f(1,3)=\{(1,2)\}$, άρα $g(1,3)=\operatorname{mex}\{g(1,2)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$.
- $f(1,4)=\{(1,2),(1,3)\}$, άρα $g(1,4)=\operatorname{mex}\{g(1,2),g(1,3)\}=\operatorname{mex}\{0,1\}=2$.
- $f(1,5)=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$, άρα $g(1,5)=\operatorname{mex}\{g(1,2),g(1,3),g(1,4)\}=\operatorname{mex}\{0,1,2\}=3$.
- $\vdots$
- $f(1,n)=\{(1,2),(1,3),\ldots,(1,n-2),(1,n-1)\}$, άρα
  $$g(1,n)=\operatorname{mex}\{g(1,2),g(1,3),g(1,4),\ldots,g(1,n-2),g(1,n-1)\}=$$
  $$=\operatorname{mex}\{0,1,2,\ldots,n-4,n-3\}=n-2.$$

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με δύο στήλες, όπου η πρώτη στήλη εμφανίζει την τιμή της μεταβλητής συντεταγμένης n, και η δεύτερη την τιμή της συνάρτησης Grundy. Έτσι για το $f(1,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-2$ |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(1,2)$, θα κερδίσει το παιχνίδι. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα εξάγεται και από τους βασικούς κανόνες του παιγνίου, αφού η εν λόγω θέση είναι μία από τις θέσεις λήξης του παιχνιδιού. Σημειώνεται ότι υπάρχουν δύο θέσεις λήξης του παιχνιδιού, αφού δεν μας ενδιαφέρει ποιο πιόνι θα βρίσκεται στη θέση $1$ και ποιο στη θέση $2$, άρα $(1,2)\equiv(2,1)$

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(2,n)$, και έχουμε:

- $f(2,1)=f(1,2)=\varnothing$ και $g(2,1)=g(1,2)=0$.
- $f(2,3)=\{(2,1),(1,3)\}$ και $g(2,3)=\text{mex}\{g(2,1),g(1,3)\}=\text{mex}\{0,1\}=2$.
- $f(2,4)=\{(1,4),(2,1),(2,3)\}$ και
  $g(2,4)=\text{mex}\{g(1,4),g(2,1),g(2,3)\}=\text{mex}\{2,0\}=1$.
- $f(2,5)=\{(1,5),(2,1),(2,3),(2,4)\}$ και
  $g(2,5)=\text{mex}\{g(1,5),g(2,1),g(2,3),g(2,4)\}=\text{mex}\{3,0,2,1\}=4$.
- $f(2,6)=\{(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\}$ και
  $g(2,6)=\text{mex}\{g(1,6),g(2,1),g(2,3),g(2,4),g(2,5)\}=\text{mex}\{4,0,2,1\}=3$.
- $f(2,7)=\{(1,7),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$ και
  $g(2,7)=\text{mex}\{g(1,7),g(2,1),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6)\}=$
  $=\text{mex}\{5,0,2,1,4,3\}=6$.
- $f(2,8)=\{(1,8),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7)\}$ και
  $g(2,8)=\text{mex}\{g(1,8),g(2,1),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6),g(2,7)\}=$
  $=\text{mex}\{6,0,2,1,4,3\}=5$.
- $f(2,9)=\{(1,9),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8)\}$ και

$$g(2,9)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(1,9),g(2,1),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6),g(2,7), \\ g(2,8) \end{Bmatrix}=$$

$=\text{mex}\{7,0,2,1,4,3,6,5\}=8$.

- $f(2,10)=\{(1,10),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9)\}$ και

$$g(2,10)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,10), g(2,1), g(2,3), g(2,4), g(2,5), g(2,6), g(2,7), \\ g(2,8), g(2,9) \end{matrix}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{8,0,2,1,4,3,6,5\}=7.$$

Αναπαριστάνοντας τα αποτελέσματα όπως πριν σε ένα πίνακα για το $f(2,n)$, έχουμε:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 2 |
| 4 | 1 |
| 5 | 4 |
| 6 | 3 |
| 7 | 6 |
| 8 | 5 |
| 9 | 8 |
| 10 | 7 |

Παρατηρούμε ότι για $n \geq 3$ ισχύει ότι :

- $g(2,n)=(n-1)$, αν $n$ περιττός και
- $g(2,n)=n-3$, αν $n$ άρτιος.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

- $g(2,n)=n-1$ ,αν $n \bmod 2=1$
- $g(2,n)=n-3$, αν $n \bmod 2=0$

Οπότε ολοκληρώνοντας τον πίνακα αποτελεσμάτων του $f(2,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 2 |
| 4 | 1 |
| 5 | 4 |
| 6 | 3 |
| 7 | 6 |
| 8 | 5 |
| 9 | 8 |
| 10 | 7 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n \bmod 2 = 1$ | $n-1$ |
| $n \bmod 2 = 0$ | $n-3$ |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(2,1)$, θα κερδίσει το παιχνίδι. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα εξάγεται και από τους βασικούς κανόνες του παιγνίου, αφού η εν λόγω θέση είναι μία από τις δύο θέσεις λήξης του παιχνιδιού.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(3,n)$, και έχουμε:

- $f(3,1) = f(1,3)$, άρα $g(3,1) = g(1,3) = 1$.
- $f(3,2) = f(2,3)$ και $g(3,2) = g(2,3) = 2$.
- $f(3,4) = \{(1,4),(2,4),(3,1),(3,2)\}$ και
  $g(3,4) = \text{mex}\{g(1,4), g(2,4), g(3,1), g(3,2)\} = \text{mex}\{2,1\} = 0$.
- $f(3,5) = \{(1,5),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4)\}$ και

$g(3,5)=\text{mex}\{g(1,5),g(2,5),g(3,1),g(3,2),g(3,4)\}=\text{mex}(3,4,1,2,0)$
$=5$.

- $f(3,6)=\{(1,6),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5)\}$ και
  $g(3,6)=\text{mex}\{g(1,6),g(2,6),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5)\}=$
  $=\text{mex}(4,3,1,2,0,5)=6$.
- $f(3,7)=\{(1,7),(2,7),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\}$ και
  $g(3,7)=\text{mex}\{g(1,7),g(2,7),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6)\}=$
  $=\text{mex}\{5,6,1,2,0\}=3$.
- $f(3,8)=\{(1,8),(2,8),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7)\}$ και
  $$g(3,8)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,8),g(2,8),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),\\ g(3,7)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{6,5,1,2,0,3\}=4$.
- $f(3,9)=\{(1,9),(2,9),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8)\}$ και
  $$g(3,9)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,9),g(2,9),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),\\ g(3,7),g(3,8)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{7,8,1,2,0,5,6,3,4\}=9$.
- $f(3,10)=\{(1,10),(2,10),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9)\}$
  και
  $$g(3,10)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,10),g(2,10),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),\\ g(3,7),g(3,8),g(3,9)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{8,7,1,2,0,5,6,3,4,9\}=10$.
- $$f(3,11)=\left\{\begin{matrix}(1,11),(2,11),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\ (3,10)\end{matrix}\right\}$$
  και
  $$g(3,11)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,11),g(2,11),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),\\ g(3,7),g(3,8),g(3,9),g(3,10)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{9,10,1,2,0,5,6,3,4\}=7$.

- $f(3,12)=\begin{Bmatrix}(1,12),(2,12),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\(3,10),(3,11)\end{Bmatrix}$

και

$$g(3,12)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,12),g(2,12),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7),\\g(3,8),g(3,9),g(3,10),g(3,11)\end{Bmatrix}=$$

$=\operatorname{mex}\{10,9,1,2,0,5,6,3,4,7\}=8$.

- $f(3,13)=\begin{Bmatrix}(1,13),(2,13),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\(3,10),(3,11),(3,12)\end{Bmatrix}$

και

$$g(3,13)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,13),g(2,13),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7),\\g(3,8),g(3,9),g(3,10),g(3,11),g(3,12)\end{Bmatrix}=$$

$=\operatorname{mex}\{11,12,1,2,0,5,6,3,4,9,10,7,8\}=13$.

- $f(3,14)=\begin{Bmatrix}(1,14),(2,14),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\(3,10),(3,11),(3,12),(3,13)\end{Bmatrix}$

και

$$g(3,14)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,14),g(2,14),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7),\\g(3,8),g(3,9),g(3,10),g(3,11),g(3,12),g(3,13)\end{Bmatrix}=$$

$=\operatorname{mex}\{12,11,1,2,0,5,6,3,4,9,10,7,8,13\}=14$.

- $f(3,15)=\begin{Bmatrix}(1,15),(2,15),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\(3,10),(3,11),(3,12),(3,13),(3,14)\end{Bmatrix}$

και

$$g(3,15)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,15),g(2,15),g(3,1),g(3,2),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7),\\g(3,8),g(3,9),g(3,10),g(3,11),g(3,12),g(3,13),g(3,14)\end{Bmatrix}=$$

$=\operatorname{mex}\{13,14,1,2,0,5,6,3,4,9,10,7,8\}=11$.

- $f(3,16)=\begin{Bmatrix}(1,16),(2,16),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\(3,10),(3,11),(3,12),(3,13),(3,14),(3,15)\end{Bmatrix}$

και

$$g(3,16) = \text{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,16), g(2,16), g(3,1), g(3,2), g(3,4), g(3,5), g(3,6), \\ g(3,7), g(3,8), g(3,9), g(3,10), g(3,11), g(3,12), g(3,13), \\ g(3,14), g(3,15) \end{matrix}\right\} =$$
$$= \text{mex}\{14,13,1,2,0,5,6,3,4,9,10,7,8,11\} = 12.$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος, προσθέτοντας μία επιπλέον στήλη όπου εμφανίζεται η σχέση του $n$ με το $g$ βάση των στηλών $n$ και $g$, άρα για το $f(3,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $n$ |
| 2 | 2 | $n$ |
| 4 | 0 | $n-4$ |
| 5 | 5 | $n$ |
| 6 | 6 | $n$ |
| 7 | 3 | $n-4$ |
| 8 | 4 | $n-4$ |
| 9 | 9 | $n$ |
| 10 | 10 | $n$ |
| 11 | 7 | $n-4$ |
| 12 | 8 | $n-4$ |
| 13 | 13 | $n$ |
| 14 | 14 | $n$ |
| 15 | 11 | $n-4$ |
| 16 | 12 | $n-4$ |

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα για $n \geq 4$, παρουσιάζεται περιοδικότητα στα αποτελέσματα ανά $4$. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος εξαγωγής των αποτελεσμάτων θα εξαχθεί με την βοήθεια του $n \bmod 4$. Συγκεκριμένα:

Για $n \geq 4$ ισχύει:

- $g(3,n) = n$ , αν $n \bmod 4 = 1$
- $g(3,n) = n$ , αν $n \bmod 4 = 2$
- $g(3,n) = n-4$, αν $n \bmod 4 = 3$
- $g(3,n) = n-4$, αν $n \bmod 4 = 0$.

Άρα, ολοκληρώνοντας τον πίνακα αποτελεσμάτων του $f(3,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 4 | 0 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 3 |
| 8 | 4 |
| 9 | 9 |
| 10 | 10 |
| 11 | 7 |
| 12 | 8 |
| 13 | 13 |
| 14 | 14 |
| 15 | 11 |
| 16 | 12 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n \bmod 4 = 1$ | $n$ |
| $n \bmod 4 = 2$ | $n$ |
| $n \bmod 4 = 3$ | $n-4$ |
| $n \bmod 4 = 0$ | $n-4$ |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(3,4)$, θα κερδίσει το παιχνίδι.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(4,n)$, και έχουμε:

- $f(4,1)=f(1,4)$, άρα $g(4,1)=g(1,4)=2$
- $f(4,2)=f(2,4)$ και $g(4,2)=g(2,4)=1$
- $f(4,3)=f(3,4)$ και $g(4,3)=g(3,4)=0$
- $f(4,5)=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ και
  $g(4,5)=\mathrm{mex}\{g(1,5),g(2,5),g(3,5),g(4,1),g(4,2),g(4,3)\}=$
  $=\mathrm{mex}\{3,4,5,2,1,0\}=6$.
- $f(4,6)=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5)\}$ και
  $g(4,6)=\mathrm{mex}\{g(1,6),g(2,6),g(3,6),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5)\}=$
  $=\mathrm{mex}\{4,3,6,2,1,0\}=5$.
- $f(4,7)=\{(1,7),(2,7),(3,7),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)\}$ και
  $$g(4,7)=\mathrm{mex}\begin{Bmatrix}g(1,7),g(2,7),g(3,7),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\ g(4,6)\end{Bmatrix}=$$
  $=\mathrm{mex}\{5,6,3,2,1,0\}=4$.
- $f(4,8)=\{(1,8),(2,8),(3,8),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7)\}$ και
  $$g(4,8)=\mathrm{mex}\begin{Bmatrix}g(1,8),g(2,8),g(3,8),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\ g(4,6),g(4,7)\end{Bmatrix}=$$
  $=\mathrm{mex}\{6,5,4,2,1,0\}=3$.
- $f(4,9)=\{(1,9),(2,9),(3,9),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)\}$ και
  $$g(4,9)=\mathrm{mex}\begin{Bmatrix}g(1,9),g(2,9),g(3,9),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\ g(4,6),g(4,7),g(4,8)\end{Bmatrix}=$$
  $=\mathrm{mex}\{7,8,9,2,1,0,6,5,4,3\}=10$.

- $f(4,10)=\begin{Bmatrix}(1,10),(2,10),(3,10),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\(4,9)\end{Bmatrix}$

  και

  $$g(4,10)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,10),g(2,10),g(3,10),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\g(4,6),g(4,7),g(4,8),g(4,9)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{8,7,10,2,1,0,6,5,4,3\}=9$.

- $f(4,11)=\begin{Bmatrix}(1,11),(2,11),(3,11),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\(4,9),(4,10)\end{Bmatrix}$

  και

  $$g(4,11)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,11),g(2,11),g(3,11),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\g(4,6),g(4,7),g(4,8),g(4,9),g(4,10)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{9,10,7,2,1,0,6,5,4,3\}=8$.

- $f(4,12)=\begin{Bmatrix}(1,12),(2,12),(3,12),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9),\\(4,10),(4,11)\end{Bmatrix}$

  και

  $$g(4,12)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,12),g(2,12),g(3,12),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\g(4,6),g(4,7),g(4,8),g(4,9),g(4,10),g(4,11)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{10,9,8,2,1,0,6,5,4,3\}=7$.

- $f(4,13)=\begin{Bmatrix}(1,13),(2,13),(3,13),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9),\\(4,10),(4,11),(4,12)\end{Bmatrix}$

  και

  $$g(4,13)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,13),g(2,13),g(3,13),g(4,1),g(4,2),g(4,3),g(4,5),\\g(4,6),g(4,7),g(4,8),g(4,9),g(4,10),g(4,11),g(4,12)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{11,12,13,2,1,0,6,5,4,3,10,9,8,7\}=14$.

- $f(4,14)=\begin{Bmatrix}(1,14),(2,14),(3,14),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9),\\(4,10),(4,11),(4,12),(4,13)\end{Bmatrix}$

  και

$$g(4,14)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,14), g(2,14), g(3,14), g(4,1), g(4,2), g(4,3), g(4,5), \\ g(4,6), g(4,7), g(4,8), g(4,9), g(4,10), g(4,11), g(4,12), \\ g(4,13) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{12,11,14,2,1,0,6,5,4,3,10,9,8,7\}=13.$$

➢ $$f(4,15)=\left\{\begin{array}{l} (1,15),(2,15),(3,15),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9), \\ (4,10),(4,11),(4,12),(4,13),(4,14) \end{array}\right\}$$

και

$$g(4,15)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,15), g(2,15), g(3,15), g(4,1), g(4,2), g(4,3), g(4,5), \\ g(4,6), g(4,7), g(4,8), g(4,9), g(4,10), g(4,11), g(4,12), \\ g(4,13), g(4,14) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{13,14,11,2,1,0,6,5,4,3,10,9,8,7\}=12.$$

➢ $$f(4,16)=\left\{\begin{array}{l} (1,16),(2,16),(3,16),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9), \\ (4,10),(4,11),(4,12),(4,13),(4,14),(4,15) \end{array}\right\}$$

και

$$g(4,16)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,16), g(2,16), g(3,16), g(4,1), g(4,2), g(4,3), g(4,5), \\ g(4,6), g(4,7), g(4,8), g(4,9), g(4,10), g(4,11), g(4,12), \\ g(4,13), g(4,14), g(4,15) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{14,13,12,2,1,0,6,5,4,3,10,9,8,7\}=11.$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος, προσθέτοντας μία επιπλέον στήλη όπου εμφανίζεται η σχέση του $n$ με το $g$ βάση των στηλών $n$ και $g$, άρα για το $f(4,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | $n+1$ |
| 2 | 1 | $n-1$ |
| 3 | 0 | $n-3$ |
| 5 | 6 | $n+1$ |
| 6 | 5 | $n-1$ |
| 7 | 4 | $n-3$ |
| 8 | 3 | $n-5$ |
| 9 | 10 | $n+1$ |
| 10 | 9 | $n-1$ |
| 11 | 8 | $n-3$ |
| 12 | 7 | $n-5$ |
| 13 | 14 | $n+1$ |
| 14 | 13 | $n-1$ |
| 15 | 12 | $n-3$ |
| 16 | 11 | $n-5$ |

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα για $n \geq 5$, παρουσιάζεται περιοδικότητα στα αποτελέσματα ανά $4$. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος εξαγωγής των αποτελεσμάτων θα εξαχθεί με την βοήθεια του $n \bmod 4$. Συγκεκριμένα:

Για $n \geq 5$ ισχύει:

- $g(4,n) = n+1$ , αν $n \bmod 4 = 1$

- $g(4,n)=n-1$ , αν $n \bmod 4 = 2$
- $g(4,n)=n-3$ , αν $n \bmod 4 = 3$
- $g(4,n)=n-5$ , αν $n \bmod 4 = 0$

Άρα ολοκληρώνοντας τον πίνακα αποτελεσμάτων του $f(4,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 5 | 6 |
| 6 | 5 |
| 7 | 4 |
| 8 | 3 |
| 9 | 10 |
| 10 | 9 |
| 11 | 8 |
| 12 | 7 |
| 13 | 14 |
| 14 | 13 |
| 15 | 12 |
| 16 | 11 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

| | |
|---|---|
| $n \bmod 4 = 1$ | $n+1$ |
| $n \bmod 4 = 2$ | $n-1$ |
| $n \bmod 4 = 3$ | $n-3$ |
| $n \bmod 4 = 0$ | $n-5$ |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(4,3)$, θα κερδίσει το παιχνίδι.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(5,n)$, και έχουμε:

- $f(5,1) = f(1,5)$, άρα $g(5,1) = g(1,5) = 3$.
- $f(5,2) = f(2,5)$ και $g(5,2) = g(2,5) = 4$.
- $f(5,3) = f(3,5)$ και $g(5,3) = g(3,5) = 5$.
- $f(5,4) = f(4,5)$ και $g(5,4) = g(4,5) = 6$.
- $f(5,6) = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$ και

  $$g(5,6) = \operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,6), g(2,6), g(3,6), g(4,6), g(5,1), g(5,2), g(5,3), \\ g(5,4) \end{matrix}\right\} =$$

  $$= \operatorname{mex}\{4,3,6,5\} = 0.$$
- $f(5,7) = \{(1,7),(2,7),(3,7),(4,7),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$ και

  $$g(5,7) = \operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,7), g(2,7), g(3,7), g(4,7), g(5,1), g(5,2), g(5,3), \\ g(5,4), g(5,6) \end{matrix}\right\} =$$

  $$= \operatorname{mex}\{5,6,3,4,0\} = 1.$$
- $f(5,8) = \{(1,8),(2,8),(3,8),(4,8),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7)\}$ και

  $$g(5,8) = \operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,8), g(2,8), g(3,8), g(4,8), g(5,1), g(5,2), g(5,3), \\ g(5,4), g(5,6), g(5,7) \end{matrix}\right\} =$$

  $$= \operatorname{mex}\{6,5,4,3,0,1\} = 2.$$
- $f(5,9) = \{(1,9),(2,9),(3,9),(4,9),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(5,8)\}$

  και

$$g(5,9)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,9),g(2,9),g(3,9),g(4,9),g(5,1),g(5,2),g(5,3), \\ g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8) \end{matrix}\right\}=$$
$$=\operatorname{mex}\{7,8,9,10,3,4,5,6,0,1,2\}=11.$$

- $f(5,10)=\left\{\begin{matrix} (1,10),(2,10),(3,10),(4,10),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6), \\ (5,7),(5,8),(5,9) \end{matrix}\right\}$ και

$$g(5,10)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,10),g(2,10),g(3,10),g(4,10),g(5,1),g(5,2), \\ g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9) \end{matrix}\right\}=$$
$$=\operatorname{mex}\{8,7,10,9,3,4,5,6,0,1,2,11\}=12.$$

- $f(5,11)=\left\{\begin{matrix} (1,11),(2,11),(3,11),(4,11),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7), \\ (5,8),(5,9),(5,10) \end{matrix}\right\}$

και

$$g(5,11)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,11),g(2,11),g(3,11),g(4,11),g(5,1),g(5,2),g(5,3), \\ g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10) \end{matrix}\right\}=$$
$$=\operatorname{mex}\{9,10,7,8,3,4,5,6,0,1,2,11,12\}=13.$$

- $f(5,12)=\left\{\begin{matrix} (1,12),(2,12),(3,12),(4,12),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6), \\ (5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11) \end{matrix}\right\}$ και

$$g(5,12)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,12),g(2,12),g(3,12),g(4,12),g(5,1),g(5,2), \\ g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9), \\ g(5,10),g(5,11) \end{matrix}\right\}=$$
$$=\operatorname{mex}\{10,9,8,7,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13\}=14.$$

- $f(5,13)=\left\{\begin{matrix} (1,13),(2,13),(3,13),(4,13),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6), \\ (5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12) \end{matrix}\right\}$ και

$$g(5,13)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,13),g(2,13),g(3,13),g(4,13),g(5,1),g(5,2), \\ g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9), \\ g(5,10),g(5,11),g(5,12) \end{matrix}\right\}=$$
$$=\operatorname{mex}\{11,12,13,14,3,4,5,6,0,1,2\}=7.$$

➢ $f(5,14)=\begin{Bmatrix}(1,14),(2,14),(3,14),(4,14),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13)\end{Bmatrix}$ και

$$g(5,14)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,14),g(2,14),g(3,14),g(4,14),g(5,1),g(5,2),g(5,3),\\g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),g(5,11),\\g(5,12),g(5,13)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{12,11,14,13,3,4,5,6,0,1,2,7\}=8.$$

➢ $f(5,15)=\begin{Bmatrix}(1,15),(2,15),(3,15),(4,15),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14)\end{Bmatrix}$ και

$$g(5,15)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,15),g(2,15),g(3,15),g(4,15),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),\\g(5,10),g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{13,14,11,12,3,4,5,6,0,1,2,7,8\}=9.$$

➢ $f(5,16)=\begin{Bmatrix}(1,16),(2,16),(3,16),(4,16),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15)\end{Bmatrix}$ και

$$g(5,16)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,16),g(2,16),g(3,16),g(4,16),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),\\g(5,10),g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{14,13,12,11,3,4,5,6,0,1,2,7,8,9\}=10.$$

➢ $f(5,17)=\begin{Bmatrix}(1,17),(2,17),(3,17),(4,17),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),\\(5,16)\end{Bmatrix}$

και $g(5,17)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,17),g(2,17),g(3,17),g(4,17),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),\\g(5,10),g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),\\g(5,16)\end{Bmatrix}=$

$$=\operatorname{mex}\{15,16,17,18,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10\}=19.$$

- $f(5,18)=\left\{\begin{matrix}(1,18),(2,18),(3,18),(4,18),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),\\(5,16),(5,17)\end{matrix}\right\}$

και

$$g(5,18)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,18),g(2,18),g(3,18),g(4,18),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\g(5,17)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{16,15,18,17,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19\}=20.$$

- $f(5,19)=\left\{\begin{matrix}(1,19),(2,19),(3,19),(4,19),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),\\(5,16),(5,17),(5,18)\end{matrix}\right\}$

και $g(5,19)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,19),g(2,19),g(3,19),g(4,19),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),\\g(5,10),g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),\\g(5,16),g(5,17),g(5,18)\end{matrix}\right\}=$

$$=\operatorname{mex}\{17,18,15,16,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20\}=21.$$

- $f(5,20)=\left\{\begin{matrix}(1,20),(2,20),(3,20),(4,20),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),\\(5,16),(5,17),(5,18),(5,19)\end{matrix}\right\}$

και

$$g(5,20)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,20),g(2,20),g(3,20),g(4,20),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\g(5,17),g(5,18),g(5,19)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{18,17,16,15,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21\}=22.$$

➤ $$f(5,21)=\begin{Bmatrix}(1,21),(2,21),(3,21),(4,21),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(5,7),(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15)\\,(5,16),(5,17),(5,18),(5,19),(5,20)\end{Bmatrix}$$ και

$$g(5,21)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,21),g(2,21),g(3,21),g(4,21),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\g(5,17),g(5,18),g(5,19),g(5,20)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{19,20,21,22,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10\}=15.$$

➤ $$f(5,22)=\begin{Bmatrix}(1,22),(2,22),(3,22),(4,22),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),\\(5,17),(5,18),(5,19),(5,20),(5,21)\end{Bmatrix}$$

και

$$g(5,22)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,22),g(2,22),g(3,22),g(4,22),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\g(5,17),g(5,18),g(5,19),g(5,20),g(5,21)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{20,19,22,21,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,15\}=16.$$

➤ $$f(5,23)=\begin{Bmatrix}(1,23),(2,23),(3,23),(4,23),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),(5,17),\\(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22)\end{Bmatrix}$$

και

$$g(5,23)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,23),g(2,23),g(3,23),g(4,23),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\g(5,17),g(5,18),g(5,19),g(5,20),g(5,21),g(5,22)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{21,22,19,20,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,15,16\}=17.$$

➤ $$f(5,24)=\begin{Bmatrix}(1,24),(2,24),(3,24),(4,24),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),(5,17),\\(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23)\end{Bmatrix}$$

και

$$g\left(5,24\right)=\text{mex}\left\{\begin{array}{l} g\left(1,24\right), g\left(2,24\right), g\left(3,24\right), g\left(4,24\right), g\left(5,1\right), g\left(5,2\right), \\ g\left(5,3\right), g\left(5,4\right), g\left(5,6\right), g\left(5,7\right), g\left(5,8\right), g\left(5,9\right), g\left(5,10\right), \\ g\left(5,11\right), g\left(5,12\right), g\left(5,13\right), g\left(5,14\right), g\left(5,15\right), g\left(5,16\right), \\ g\left(5,17\right), g\left(5,18\right), g\left(5,19\right), g\left(5,20\right), g\left(5,21\right), g\left(5,22\right), \\ g\left(5,23\right) \end{array}\right\}=$$

$$=\text{mex}\left\{22,21,20,19,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,15,16,17\right\}=18.$$

- $$f\left(5,25\right)=\left\{\begin{array}{l} \left(1,25\right),\left(2,25\right),\left(3,25\right),\left(4,25\right),\left(5,1\right),\left(5,2\right),\left(5,3\right),\left(5,4\right),\left(5,6\right),\left(5,7\right), \\ \left(5,8\right),\left(5,9\right),\left(5,10\right),\left(5,11\right),\left(5,12\right),\left(5,13\right),\left(5,14\right),\left(5,15\right),\left(5,16\right), \\ \left(5,17\right),\left(5,18\right),\left(5,19\right),\left(5,20\right),\left(5,21\right),\left(5,22\right),\left(5,23\right),\left(5,24\right) \end{array}\right\}$$

και

$$g\left(5,25\right)=\text{mex}\left(\begin{array}{l} g\left(1,25\right), g\left(2,25\right), g\left(3,25\right), g\left(4,25\right), g\left(5,1\right), g\left(5,2\right), \\ g\left(5,3\right), g\left(5,4\right), g\left(5,6\right), g\left(5,7\right), g\left(5,8\right), g\left(5,9\right), g\left(5,10\right), \\ g\left(5,11\right), g\left(5,12\right), g\left(5,13\right), g\left(5,14\right), g\left(5,15\right), g\left(5,16\right), \\ g\left(5,17\right), g\left(5,18\right), g\left(5,19\right), g\left(5,20\right), g\left(5,21\right), g\left(5,22\right), \\ g\left(5,23\right), g\left(5,24\right) \end{array}\right)=$$

$$=\text{mex}\left(\begin{array}{l} 23,24,25,26,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22, \\ 15,16,17,18 \end{array}\right)=27.$$

- $$f\left(5,26\right)=\left\{\begin{array}{l} \left(1,26\right),\left(2,26\right),\left(3,26\right),\left(4,26\right),\left(5,1\right),\left(5,2\right),\left(5,3\right),\left(5,4\right),\left(5,6\right),\left(5,7\right), \\ \left(5,8\right),\left(5,9\right),\left(5,10\right),\left(5,11\right),\left(5,12\right),\left(5,13\right),\left(5,14\right),\left(5,15\right),\left(5,16\right), \\ \left(5,17\right),\left(5,18\right),\left(5,19\right),\left(5,20\right),\left(5,21\right),\left(5,22\right),\left(5,23\right),\left(5,24\right),\left(5,25\right) \end{array}\right\}$$

και

$$g\left(5,26\right)=\text{mex}\left\{\begin{array}{l} g\left(1,26\right), g\left(2,26\right), g\left(3,26\right), g\left(4,26\right), g\left(5,1\right), g\left(5,2\right), \\ g\left(5,3\right), g\left(5,4\right), g\left(5,6\right), g\left(5,7\right), g\left(5,8\right), g\left(5,9\right), g\left(5,10\right), \\ g\left(5,11\right), g\left(5,12\right), g\left(5,13\right), g\left(5,14\right), g\left(5,15\right), g\left(5,16\right), \\ g\left(5,17\right), g\left(5,18\right), g\left(5,19\right), g\left(5,20\right), g\left(5,21\right), g\left(5,22\right), \\ g\left(5,23\right), g\left(5,24\right), g\left(5,25\right) \end{array}\right\}=$$

$$=\text{mex}\left\{\begin{array}{l} 24,23,26,25,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22, \\ 15,16,17,18,27 \end{array}\right\}=28.$$

➢ $$f(5,27)=\begin{Bmatrix}(1,27),(2,27),(3,27),(4,27),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),\\(5,17),(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23),(5,24),(5,25),\\(5,26)\end{Bmatrix}$$

και

$$g(5,27)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,27),g(2,27),g(3,27),g(4,27),g(5,1),g(5,2),\\g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\g(5,17),g(5,18),g(5,19),g(5,20),g(5,21),g(5,22),\\g(5,23),g(5,24),g(5,25),g(5,26)\end{Bmatrix}=$$

$$=\text{mex}\begin{Bmatrix}25,26,23,24,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22,\\15,16,17,18,27,28\end{Bmatrix}=29.$$

➢ $$f(5,28)=\begin{Bmatrix}(1,28),(2,28),(3,28),(4,28),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),\\(5,17),(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23),(5,24),(5,25),\\(5,26),(5,27)\end{Bmatrix}$$

και

$$g(5,28)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,28),g(2,28),g(3,28),g(4,28),g(5,1),g(5,2),g(5,3),\\g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),g(5,11),\\g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),g(5,17),\\g(5,18),g(5,19),g(5,20),g(5,21),g(5,22),g(5,23),\\g(5,24),g(5,25),g(5,26),g(5,27)\end{Bmatrix}=$$

$$=\text{mex}\begin{Bmatrix}26,25,24,23,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22,\\15,16,17,18,27,28,29\end{Bmatrix}=30.$$

➢ $$f(5,29)=\begin{Bmatrix}(1,29),(2,29),(3,29),(4,29),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),(5,17),\\(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23),(5,24),(5,25),(5,26),\\(5,27),(5,28)\end{Bmatrix}$$

και

$$g(5,29)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,29),g(2,29),g(3,29),g(4,29),g(5,1),g(5,2),\\ g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),\\ g(5,10),g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),\\ g(5,16),g(5,17),g(5,18),g(5,19),g(5,20),g(5,21),\\ g(5,22),g(5,23),g(5,24),g(5,25),g(5,26),g(5,27),\\ g(5,28) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} 27,28,29,30,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22,\\ 15,16,17,18,27,28,29,30 \end{array}\right\}=23.$$

- $$f(5,30)=\left\{\begin{array}{l} (1,30),(2,30),(3,30),(4,30),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\ (5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),\\ (5,17),(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23),(5,24),(5,25),\\ (5,26),(5,27),(5,28),(5,29) \end{array}\right\}$$

  και

$$g(5,30)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,30),g(2,30),g(3,30),g(4,30),g(5,1),g(5,2),\\ g(5,3),g(5,4),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9),g(5,10),\\ g(5,11),g(5,12),g(5,13),g(5,14),g(5,15),g(5,16),\\ g(5,17),g(5,18),g(5,19),g(5,20),g(5,21),g(5,22),\\ g(5,23),g(5,24),g(5,25),g(5,26),g(5,27),g(5,28),\\ g(5,29) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} 28,27,30,29,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22,\\ 15,16,17,18,23 \end{array}\right\}=24.$$

- $$f(5,31)=\left\{\begin{array}{l} (1,31),(2,31),(3,31),(4,31),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\ (5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16),(5,17),\\ (5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23),(5,24),(5,25),(5,26),\\ (5,27),(5,28),(5,29),(5,30) \end{array}\right\}$$

  και

$$g(5,31)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,31), g(2,31), g(3,31), g(4,31), g(5,1), g(5,2), g(5,3), \\ g(5,4), g(5,6), g(5,7), g(5,8), g(5,9), g(5,10), g(5,11), \\ g(5,12), g(5,13), g(5,14), g(5,15), g(5,16), g(5,17), \\ g(5,18), g(5,19), g(5,20), g(5,21), g(5,22), g(5,23), \\ g(5,24), g(5,25), g(5,26), g(5,27), g(5,28), g(5,29), \\ g(5,30) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} 29,30,27,28,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22, \\ 15,16,17,18,27,28,29,30,23,24 \end{array}\right\}=25.$$

- $$f(5,32)=\left\{\begin{array}{l} (1,32),(2,32),(3,32),(4,32),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7), \\ (5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14),(5,15),(5,16), \\ (5,17),(5,18),(5,19),(5,20),(5,21),(5,22),(5,23),(5,24),(5,25), \\ (5,26),(5,27),(5,28),(5,29),(5,30),(5,31) \end{array}\right\}$$

και

$$g(5,32)=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} g(1,32), g(2,32), g(3,32), g(4,32), g(5,1), g(5,2), \\ g(5,3), g(5,4), g(5,6), g(5,7), g(5,8), g(5,9), g(5,10), \\ g(5,11), g(5,12), g(5,13), g(5,14), g(5,15), g(5,16), \\ g(5,17), g(5,18), g(5,19), g(5,20), g(5,21), g(5,22), \\ g(5,23), g(5,24), g(5,25), g(5,26), g(5,27), g(5,28), \\ g(5,29), g(5,30), g(5,31) \end{array}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\left\{\begin{array}{l} 30,29,28,27,3,4,5,6,0,1,2,11,12,13,14,7,8,9,10,19,20,21,22, \\ 15,16,17,18,27,28,29,30,23,24,25 \end{array}\right\}=26.$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος, όπου προσθέτουμε δύο επιπλέον στήλες, στην μία εμφανίζεται η σχέση του $g(5,n)$ με το $n$, ενώ στη δεύτερη εμφανίζεται η τιμή της συνάρτησης $n \bmod 8$. Άρα για το $f(5,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ | | $n \bmod 8$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | $n+2$ | 1 |
| 2 | 4 | $n+2$ | 2 |
| 3 | 5 | $n+2$ | 3 |
| 4 | 6 | $n+2$ | 4 |
| 6 | 0 | $n-6$ | 6 |
| 7 | 1 | $n-6$ | 7 |
| 8 | 2 | $n-6$ | 0 |
| 9 | 11 | $n+2$ | 1 |
| 10 | 12 | $n+2$ | 2 |
| 11 | 13 | $n+2$ | 3 |
| 12 | 14 | $n+2$ | 4 |
| 13 | 7 | $n-6$ | 5 |
| 14 | 8 | $n-6$ | 6 |
| 15 | 9 | $n-6$ | 7 |
| 16 | 10 | $n-6$ | 0 |
| 17 | 19 | $n+2$ | 1 |
| 18 | 20 | $n+2$ | 2 |
| 19 | 21 | $n+2$ | 3 |
| 20 | 22 | $n+2$ | 4 |
| 21 | 15 | $n-6$ | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 | 16 | $n-6$ | 6 |
| 23 | 17 | $n-6$ | 7 |
| 24 | 18 | $n-6$ | 0 |
| 25 | 27 | $n+2$ | 1 |
| 26 | 28 | $n+2$ | 2 |
| 27 | 29 | $n+2$ | 3 |
| 28 | 30 | $n+2$ | 4 |
| 29 | 23 | $n-6$ | 5 |
| 30 | 24 | $n-6$ | 6 |
| 31 | 25 | $n-6$ | 7 |
| 32 | 26 | $n-6$ | 0 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα για κάθε $n \geq 6$,παρουσιάζεται περιοδικότητα στα αποτελέσματα ανά $8$. Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος εξαγωγή των αποτελεσμάτων θα εξαχθεί με την βοήθεια του $n \bmod 8$. Επομένως, για κάθε $n$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(5,n)$, βρίσκοντας πρώτα το $n \bmod 8$, ως εξής:

- $g(5,n) = n+2$ , όταν $n \bmod 8 \in \{1,2,3,4\}$

  και
- $g(5,n) = n-6$ , όταν $n \bmod 8 \in \{0,5,6,7\}$.

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(5,6)$, θα κερδίσει το παιχνίδι.

Από την παραπάνω ανάλυση εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

1. Από κάθε σημείο εκκίνησης που μελετήθηκε, η τιμή μηδέν εμφανίστηκε μόνο μία φορά. Ο λόγος είναι ότι για να υπολογίσουμε την συνάρτηση Grundy μίας πιο απομακρυσμένη θέση, από την θέση η οποία είχε ως αποτέλεσμα την τιμή μηδέν στην συνάρτηση Grundy, πρέπει να

εξάγουμε το mex των αποτελεσμάτων της συνάρτησης Grundy των εγγύτερων θέσεων στην τελική τιμή. Επομένως, αν βρεθεί μία φορά η τιμή μηδέν στην συνάρτηση Grundy, η εν λόγω τιμή περιλαμβάνεται για τον υπολογισμό των πιο απομακρυσμένων θέσεων, οπότε:

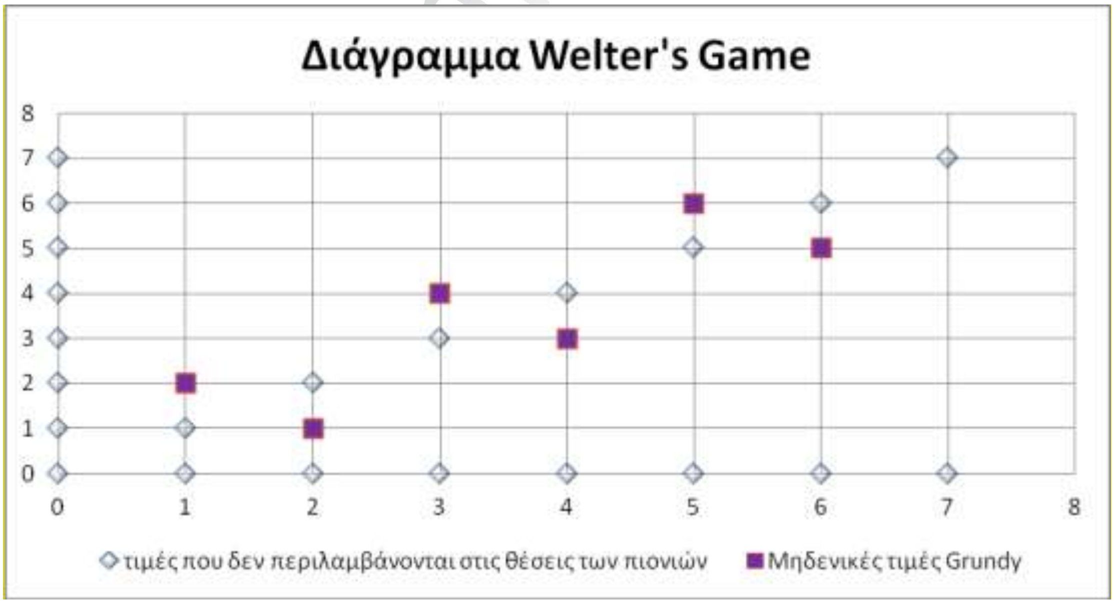
Αν $g_0(n_0,k_0)=0$, τότε

$$g(n,k)=\operatorname{mex}\left(\{g_0(n_0,k_0)\}\cup\{g_i(n_i,k_i): n_0\neq n_i, 0<n_i, k_0\neq k_i, 0<k_i\}\right)$$

$$g(n,k)=\operatorname{mex}\left(\{0\}\cup\{g_i(n_i,k_i): n_0\neq n_i, 0<n_i, k_0\neq k_i, 0<k_i\}\right)$$

$$g(n,k)\neq 0.$$

2. Συλλέγοντας τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης Grundy θα δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα μηδενικών σημείων. Θα χρησιμοποιήσουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων για να αναπαραστήσουμε τις θέσεις των δύο πιονιών. Τα σημεία πάνω στους άξονες συντεταγμένων δεν αποτελούν θέσεις των πιονιών. Επιπλέον, τα σημεία $(x,y)$ με $x=y$ εξαιρούνται αφού βάσει των κανόνων του παιχνιδιού δεν μπορούν τα πιόνια να βρίσκονται στο ίδιο σημείο. Τα σημεία που εξαιρούνται θα αναπαρασταθούν με ρόμβους, ενώ τα σημεία όπου η συνάρτηση Grundy παίρνει την τιμή μηδέν με τετράγωνα.



Βάσει του διαγράμματος μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Οι μηδενικές τιμές της συνάρτησης Grundy σχηματίζουν δύο ευθείες παράλληλες με την ευθεία $y = x$ του καρτεσιανού συστήματος.
- Τα σημεία $(x, y)$ τα οποία βρίσκονται στις εν λόγω ευθείες έχουν το ακόλουθο χαρακτηριστικό: Ισχύει είτε $y = x - 1$ είτε $y = x + 1$. Για το παίγνιο του Welter αυτό το χαρακτηριστικό συνεπάγεται ότι για να βρεθούν σε νικητήριες θέσεις τα πιόνια πρέπει να βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις.
- Επιπλέον παρατηρούμε ότι δεν ανήκουν όλα τα σημεία των δύο παράλληλων ευθειών στις νικητήριες θέσεις αλλά μόνο τα σημεία τους όπου ισχύει:

$$y = x + 1 \text{ και } x \bmod 2 = 1$$

ή

$$y = x - 1 \text{ και } x \bmod 2 = 0.$$

- Επομένως, στο παίγνιο του Welter κερδίζει ο παίχτης ο οποίος καταλήγει σε θέση όπου τα πιόνια βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις και η μικρότερη θέση, μεταξύ των πιονιών, είναι περιττός αριθμός.

# Κεφάλαιο 5

## Παίγνιο του Welter χωρίς προσπέραση

Έστω ότι έχουμε μία λωρίδα από τετράγωνα, τα οποία είναι αριθμημένα από το $1$ έως το $\infty$. Σε κάθε τετράγωνο έχουμε την δυνατότητα να τοποθετήσουμε ένα πιόνι.

Στο παίγνιο του Welter χωρίς προσπέραση θεωρείται ότι n πιόνια έχουν τοποθετηθεί τυχαία στην λωρίδα των τετραγώνων. Υπάρχουν δύο παίχτες, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ, και μπορούν να μετακινήσουν ένα πιόνι κάθε φορά σε όποιο τετράγωνο επιθυμούν, αρκεί

- να μην υπάρχει ήδη κάποιο πιόνι σε αυτό,
- το νέο τετράγωνο που φιλοξενεί το πιόνι να έχει μικρότερο αριθμό από το προηγούμενο,
- το πιόνι το οποίο μετακινήθηκε να έχει τον ίδιο αριθμό πιονιών σε μικρότερο αριθμό όπως είχε και πριν.

Μόλις τελειώσει το παιχνίδι, τα πιόνια θα φιλοξενούνται στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $n$. Κερδίζει ο παίχτης ο οποίος θα μπορεί να κάνει τελευταίος κίνηση, αφού μόλις όλα τα πιόνια τοποθετηθούν στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $n$ δεν θα υπάρχει τρόπος να μετακινηθεί ένα πιόνι σε τετράγωνο με μικρότερο αριθμό, αφού θα είναι όλα καλυμμένα.

Το παίγνιο του Welter χωρίς προσπέραση μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή $\Pi = (S, s, f)$, όπου

- $S$ : το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων των πιονιών,
- $s$ : μία συγκεκριμένη θέση των πιονιών, άρα ισχύει $s \in S$,
- $f$ : η συνάρτηση μετάβασης από μία έγκυρη κατάσταση σε μία άλλη.

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μόνο δύο πιόνια, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει: $s = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$, όπου $i, j$ οι αριθμοί από τα τετράγωνα στα οποία φιλοξενούνται τα πιόνια. Επομένως, αν $i < j$, ισχύει ότι:

$$f(s) = f(i, j) = s' = \{(i, \lambda) : \lambda < j, i < \lambda\} \cup \{(\kappa, j) : \kappa < i, \kappa < j\},$$

αφού μπορεί να μετακινηθεί μόνο ένα πιόνι κάθε φορά.

Επειδή δεν υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στα πιόνια ισχύει ότι:
Αν $s = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ και $s' = \{(j, i) : j, i \in \mathbb{N}, j \neq i\}$, τότε

- $s = s'$,

- $f(i,j) = f(j,i)$,
- $g(i,j) = g(j,i)$.

Ο υπολογισμός της συνάρτησης Grundy για τις καταστάσεις $f(1,n)$ γίνεται ακριβώς όπως στην αντίστοιχη περίπτωση του κεφαλαίου $3$ και δίνει τον παρακάτω πίνακα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |
| 6 | 4 |
| 7 | 5 |
| 8 | 6 |
| 9 | 7 |
| 10 | 8 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-2$ |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(1,2)$, θα κερδίσει το παιχνίδι. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα εξάγεται και από τους βασικούς κανόνες του παιγνίου, αφού η εν λόγω θέση είναι μία από τις θέσεις λήξης του παιχνιδιού.

Παρατηρούμε τα εξής:

a Σε αντίθεση με το παίγνιο του Welter, στο παίγνιο του Welter χωρίς προσπέραση έχουμε μόνο μία θέση λήξης του παιχνιδιού, η οποία είναι

- είτε η $(1,2)$, αν στην αρχική κατάσταση του παιχνιδιού το πρώτο πιόνι βρίσκεται στην θέση με το μικρότερο αριθμό,

- είτε η θέση $(2,1)$, αν στην αρχική κατάσταση του παιχνιδιού το πρώτο πιόνι βρίσκεται στην θέση με το μεγαλύτερο αριθμό.

Σε κάθε περίπτωση ο υπολογισμός της συνάρτησης Grundy παραμένει ο ίδιος, απλά αλλάζει η σειρά των πιονιών της τελικής κατάστασης.

b Στο πρώτο μέρος τους υπολογισμού της συνάρτησης Grundy, το οποίο ολοκληρώθηκε παραπάνω, την υπολογίσαμε με το πρώτο πιόνι στη θέση 1. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα
   - να μην μπορεί το πρώτο πιόνι να μετακινηθεί, αφού βρίσκεται στην τελική θέση του,
   - το δεύτερο πιόνι να μην μπορεί να προσπεράσει το πρώτο.

Επομένως, λόγω της αρχικής θέσεως των πιονιών, σε αυτό το βήμα του υπολογισμού της συνάρτησης Grundy, το παιχνίδι του Welter έχει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με το παιχνίδι του Welter χωρίς προσπέραση.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy χωρίς προσπέραση για τις καταστάσεις $f(2,n)$, και έχουμε:

- $f(2,1)=f(1,2)=\varnothing$ και $g(2,1)=g(1,2)=0$.
- $f(2,3)=\{(1,3)\}$ και $g(2,3)=\text{mex}\{g(1,3)\}=\text{mex}\{1\}=0$.
- $f(2,4)=\{(2,3),(1,4)\}$ και $g(2,4)=\text{mex}\{g(2,3),g(1,4)\}=\text{mex}\{0,2\}=1$.
- $f(2,5)=\{(1,5),(2,3),(2,4)\}$ και
  $g(2,5)=\text{mex}\{g(1,5),g(2,3),g(2,4)\}=\text{mex}\{3,0,1\}=2$.
- $f(2,6)=\{(1,6),(2,3),(2,4),(2,5)\}$ και
  $g(2,6)=\text{mex}\{g(1,6),g(2,3),g(2,4),g(2,5)\}=\text{mex}\{4,0,1,2\}=3$.
- $f(2,7)=\{(1,7),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$ και
  $g(2,7)=\text{mex}\{g(1,7),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6)\}=\text{mex}\{5,0,1,2,3\}=4$.
- $f(2,8)=\{(1,8),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7)\}$ και
  $g(2,8)=\text{mex}\{g(1,8),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6),g(2,7)\}=$
  $=\text{mex}\{6,0,1,2,3,4\}=5$.

- $f(2,9)=\{(1,9),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8)\}$ και

  $g(2,9)=\text{mex}\{g(1,9),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6),g(2,7),g(2,8)\}=$

  $=\text{mex}\{7,0,1,2,3,4,5\}=6$.

- $f(2,10)=\{(1,10),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9)\}$ και

  $g(2,10)=\text{mex}\{g(1,10),g(2,3),g(2,4),g(2,5),g(2,6),g(2,7),g(2,8),g(2,9)\}=$
  $=\text{mex}\{8,0,1,2,3,4,5,6\}=7$.

- $\vdots$
- $f(2,n)=\{(1,n),(2,3),\ldots,(2,n-2),(2,n-1)\}$, άρα
  $g(2,n)=\text{mex}\{g(1,n),g(2,3),g(2,4),\ldots,g(2,n-2),g(2,n-1)\}=$

  $=\text{mex}\{n-2,0,1,2,\ldots,n-5,n-4\}=n-3$.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με δύο στήλες, όπου η πρώτη στήλη εμφανίζει την τιμή της μεταβλητής συντεταγμένης $n$, και η δεύτερη την τιμή της συνάρτησης Grundy χωρίς προσπέραση. Έτσι για το $f(2,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 3 |
| 7 | 4 |
| 8 | 5 |
| 9 | 6 |
| 10 | 7 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-3$ |

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy χωρίς προσπέραση για τις καταστάσεις $f(3,n)$, και έχουμε:

- $f(3,1)=\{(2,1)\}$ και $g(3,1)=\operatorname{mex}\{g(2,1)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$.
- $f(3,2)=\{(3,1)\}$ και $g(3,2)=\operatorname{mex}\{g(3,1)\}=\operatorname{mex}\{1\}=0$.
- $f(3,4)=\{(1,4),(2,4)\}$ και $g(3,4)=\operatorname{mex}\{g(1,4),g(2,4)\}=\operatorname{mex}\{2,1\}=0$.
- $f(3,5)=\{(1,5),(2,5),(3,4)\}$ και
  $g(3,5)=\operatorname{mex}\{g(1,5),g(2,5),g(3,4)\}=\operatorname{mex}\{3,2,0\}=1$.
- $f(3,6)=\{(1,6),(2,6),(3,4),(3,5)\}$ και
  $g(3,6)=\operatorname{mex}\{g(1,6),g(2,6),g(3,4),g(3,5)\}=\operatorname{mex}\{4,3,0,1\}=2$.

- $f(3,7)=\{(1,7),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6)\}$ και
  $g(3,7)=\text{mex}\{g(1,7),g(2,7),g(3,4),g(3,5),g(3,6)\}=\text{mex}\{5,4,0,1,2\}=3$.

- $f(3,8)=\{(1,8),(2,8),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7)\}$ και
  $g(3,8)=\text{mex}\{g(1,8),g(2,8),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7)\}=$

  $=\text{mex}\{6,5,0,1,2,3\}=4$.

- $f(3,9)=\{(1,9),(2,9),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8)\}$ και
  $g(3,9)=\text{mex}\{g(1,9),g(2,9),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7),g(3,8)\}=$

  $=\text{mex}\{7,6,0,1,2,3,4\}=5$.

- $f(3,10)=\{(1,10),(2,10),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9)\}$ και
  $g(3,10)=\text{mex}\{g(1,10),g(2,10),g(3,4),g(3,5),g(3,6),g(3,7),g(3,8),g(3,9)\}=$
  $=\text{mex}\{8,7,0,1,2,3,4,5\}=6$.

- $\vdots$
- $f(3,n)=\{(1,n),(2,n),(3,4),(3,5),\ldots,(3,n-2),(3,n-1)\}$, άρα
  $g(3,n)=\text{mex}\{g(1,n),g(2,n),g(3,4),g(3,5),\ldots,g(3,n-2),g(3,n-1)\}=$

  $=\text{mex}\{n-2,n-3,0,1,2,\ldots,n-6,n-5\}=n-4$.

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα όπως και πριν. Έτσι για το $f(3,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 4 | 0 |
| 5 | 1 |
| 6 | 2 |
| 7 | 3 |
| 8 | 4 |
| 9 | 5 |
| 10 | 6 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-4$ |

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy χωρίς προσπέραση για τις καταστάσεις $f(4,n)$, και έχουμε:

- $f(4,1)=\{(3,1),(2,1)\}$ και $g(4,1)=\text{mex}\{g(3,1),g(2,1)\}=\text{mex}\{1,0\}=2$.
- $f(4,2)=\{(4,1),(3,2)\}$ και $g(4,2)=\text{mex}\{g(4,1),g(3,2)\}=\text{mex}\{2,0\}=1$.
- $f(4,3)=\{(4,1),(4,2)\}$ και $g(4,3)=\text{mex}\{g(4,1),g(4,2)\}=\text{mex}\{2,1\}=0$.
- $f(4,5)=\{(1,5),(2,5),(3,5)\}$ και
  $g(4,5)=\text{mex}\{g(1,5),g(2,5),g(3,5)\}=\text{mex}\{3,2,1\}=0$.

- $f(4,6)=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,5)\}$ και
  $g(4,6)=\text{mex}\{g(1,6),g(2,6),g(3,6),g(4,5)\}=\text{mex}\{4,3,2,0\}=1$.

- $f(4,7)=\{(1,7),(2,7),(3,7),(4,5),(4,6)\}$ και
  $g(4,7)=\text{mex}\{g(1,7),g(2,7),g(3,7),g(4,5),g(4,6)\}=\text{mex}\{5,4,3,0,1\}=2$.

- $f(4,8)=\{(1,8),(2,8),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7)\}$ και
  $g(4,8)=\text{mex}\{g(1,8),g(2,8),g(3,8),g(4,5),g(4,6),g(4,7)\}=$

  $=\text{mex}\{6,5,4,0,1,2\}=3$.

- $f(4,9)=\{(1,9),(2,9),(3,9),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)\}$ και
  $g(4,9)=\text{mex}\{g(1,9),g(2,9),g(3,9),g(4,5),g(4,6),g(4,7),g(4,8)\}=$

  $=\text{mex}\{7,6,5,0,1,2,3\}=4$.

- $f(4,10)=\{(1,10),(2,10),(3,10),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9)\}$ και
  $g(4,10)=\text{mex}\{g(1,10),g(2,10),g(3,10),g(4,5),g(4,6),g(4,7),g(4,8),g(4,9)\}=$
  $=\text{mex}\{8,7,6,0,1,2,3,4\}=5$.

- $\vdots$
- $f(4,n)=\{(1,n),(2,n),(3,n),(4,5),(4,6),\ldots,(4,n-2),(4,n-1)\}$, άρα
  $g(4,n)=\text{mex}\{g(1,n),g(2,n),g(3,n),g(4,5),g(4,6),\ldots,g(4,n-2),g(4,n-1)\}=$
  $=\text{mex}\{n-2,n-3,n-4,0,1,\ldots,n-7,n-6\}=n-5$.

Αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα όπως πριν. Έτσι για το $f(4,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 5 | 0 |
| 6 | 1 |
| 7 | 2 |
| 8 | 3 |
| 9 | 4 |
| 10 | 5 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-5$ |

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy χωρίς προσπέραση για τις καταστάσεις $f(5,n)$, και έχουμε:

- $f(5,1)=\{(4,1),(3,1),(2,1)\}$, άρα
  $g(5,1)=mex\{(4,1),(3,1),(2,1)\}=mex\{2,1,0\}=3$.
- $f(5,2)=\{(5,1),(3,2),(4,2)\}$ και
  $g(5,2)=\text{mex}\{g(5,1),g(3,2),g(4,2)\}=\text{mex}\{3,0,1\}=2$.
- $f(5,3)=\{(5,1),(5,2),(4,3)\}$ και
  $g(5,3)=\text{mex}\{g(5,1),g(5,2),g(4,3)\}=\text{mex}\{3,2,0\}=1$.

- $f(5,4)=\{(5,1),(5,2),(5,3)\}$ και
  $g(5,4)=\text{mex}\{g(5,1),g(5,2),g(5,3)\}=\text{mex}\{3,2,1\}=0$.
- $f(5,6)=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6)\}$ και
  $g(5,6)=\text{mex}\{g(1,6),g(2,6),g(3,6),g(4,6)\}=\text{mex}\{4,3,2,1\}=0$.
- $f(5,7)=\{(1,7),(2,7),(3,7),(4,7),(5,6)\}$ και
  $g(5,7)=\text{mex}\{g(1,7),g(2,7),g(3,7),g(4,7),g(5,6)\}=\text{mex}\{5,4,3,2,0\}=1$.
- $f(5,8)=\{(1,8),(2,8),(3,8),(4,8),(5,6),(5,7)\}$ και
  $g(5,8)=\text{mex}\{g(1,8),g(2,8),g(3,8),g(4,8),g(5,6),g(5,7)\}=$
  $=\text{mex}\{6,5,4,3,0,1\}=2$.
- $f(5,9)=\{(1,9),(2,9),(3,9),(4,9),(5,6),(5,7),(5,8)\}$ και
  $g(5,9)=\text{mex}\{g(1,9),g(2,9),g(3,9),g(4,9),g(5,6),g(5,7),g(5,8)\}=$
  $=\text{mex}\{7,6,5,4,0,1,2\}=3$.
- $f(5,10)=\{(1,10),(2,10),(3,10),(4,10),(5,6),(5,7),(5,8),(5,9)\}$ και
  $g(5,10)=\text{mex}\{g(1,10),g(2,10),g(3,10),g(4,10),g(5,6),g(5,7),g(5,8),g(5,9)\}=$
  $=\text{mex}\{8,7,6,5,0,1,2,3\}=4$.
- $\vdots$
- $f(5,n)=\{(1,n),(2,n),(3,n),(4,n),(5,6),(5,7),\ldots,(5,n-2),(5,n-1)\}$, άρα
  $g(5,n)=\text{mex}\{g(1,n),g(2,n),g(3,n),g(4,n),g(5,6),g(5,7),\ldots,g(5,n-2),g(5,n-1)\}=$
  $=\text{mex}\{n-2,n-3,n-4,n-5,0,1,\ldots,n-8,n-7\}=n-6$.

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα όπως πριν. Έτσι για το $f(5,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | g |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |
| 4 | 0 |
| 6 | 0 |
| 7 | 1 |
| 8 | 2 |
| 9 | 3 |
| 10 | 4 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-6$ |

# Κεφάλαιο 6

## Παίγνιο του Welter με 3 πιόνια

Έστω ότι έχουμε μία λωρίδα από τετράγωνα, τα οποία είναι αριθμημένα από το $1$έως το $\infty$. Σε κάθε τετράγωνο έχουμε την δυνατότητα να τοποθετήσουμε ένα πιόνι.
Στο παίγνιο του Welter με $3$ πιόνια θεωρείται ότι $3$ πιόνια έχουν τοποθετηθεί τυχαία στην λωρίδα των τετραγώνων. Υπάρχουν δύο παίχτες, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ, και μπορούν να μετακινήσουν ένα πιόνι κάθε φορά σε όποιο τετράγωνο επιθυμούν, αρκεί,

- να μην υπάρχει ήδη κάποιο πιόνι σε αυτό,
- το νέο τετράγωνο που φιλοξενεί το πιόνι να έχει μικρότερο αριθμό από το προηγούμενο.

Μόλις τελειώσει το παιχνίδι, τα πιόνια θα φιλοξενούνται στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $3$. Κερδίζει ο παίχτης ο οποίος θα μπορεί να κάνει τελευταίος κίνηση, αφού μόλις όλα τα πιόνια τοποθετηθούν στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $3$ δεν θα υπάρχει τρόπος να μετακινηθεί ένα πιόνι σε τετράγωνο με μικρότερο αριθμό, αφού θα είναι όλα καλυμμένα.

Το παίγνιο του Welter μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή
$\Pi = (S, s, f)$, όπου

- $S$ : το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων των πιονιών,
- $s$ : μία συγκεκριμένη θέση των πιονιών, άρα ισχύει $s \in S$ ,
- $f$ : η συνάρτηση μετάβασης από μία έγκυρη κατάσταση σε μία άλλη.

Αφού έχουμε τρία πιόνια τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει:
$s = \{(i, j, l) : i, j, l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$, όπου $i, j, l$ οι αριθμοί από τα τετράγωνα στα οποία φιλοξενούνται τα πιόνια. Επομένως ισχύει ότι:

$$f(s) = f(i, j, l) = s' = \{(i, j, \kappa) : \kappa < l, \kappa \neq i \neq j \neq k\} \cup \{(i, \lambda, l) : \lambda < j, \lambda \neq i \neq l \neq \lambda\} \cup$$
$$\{(\mu, j, l) : \mu < i, \mu \neq j \neq l \neq \mu\}$$

αφού μπορεί να μετακινηθεί μόνο ένα πιόνι κάθε φορά.

Επειδή δεν υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στα πιόνια ισχύει ότι:
Αν $s_1 = \{(i, j, l) : i, j, l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$ και
$s_2 = \{(l, j, i) : i, j, l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$ και

$s_3 = \{(l,i,j) : i,j,l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$ και

$s_4 = \{(i,l,j) : i,j,l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$ και

$s_5 = \{(j,l,i) : i,j,l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$ και

$s_6 = \{(j,i,l) : i,j,l \in \mathbb{N}, i \neq j \neq l \neq i\}$,

τότε

- $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6$,
- $f(i,j,l) = f(l,j,i) = f(l,i,j) = f(i,l,j) = f(j,l,i) = f(j,i,l)$,
- $g(i,j,l) = g(l,j,i) = g(l,i,j) = g(i,l,j) = g(j,l,i) = g(j,i,l)$.

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση Grundy για το συγκεκριμένο παίγνιο:

- $f(1,2,3) = \varnothing$, άρα $g(1,2,3) = 0$.
- $f(1,2,4) = \{(1,2,3)\}$, άρα $g(1,2,4) = \operatorname{mex}\{g(1,2,3)\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1$.
- $f(1,2,5) = \{(1,2,3),(1,2,4)\}$, άρα
  $g(1,2,5) = \operatorname{mex}\{g(1,2,3), g(1,2,4)\} = \operatorname{mex}\{0,1\} = 2$.
- $f(1,2,6) = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$, άρα
  $g(1,2,6) = \operatorname{mex}\{g(1,2,3), g(1,2,4), g(1,2,5)\} = \operatorname{mex}\{0,1,2\} = 3$.
- $\vdots$
- $f(1,2,n) = \{(1,2,3),(1,2,4),\ldots,(1,2,n-2),(1,n-1)\}$, άρα
  $$g(1,2,n) = \operatorname{mex}\{g(1,2,3), g(1,2,4),\ldots, g(1,2,n-2), g(1,n-1)\} =$$
  $$= \operatorname{mex}\{0,1,2,\ldots,n-5,n-4\} = n-3.$$

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με δύο στήλες, η πρώτη στήλη εμφανίζει την τιμή της μεταβλητής συντεταγμένης $n$, και η δεύτερη την τιμή της συνάρτησης Grundy για το παίγνιο του Welter με $3$ πιόνια. Έτσι, για το $f(1,2,n)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | $g$ |
|---|---|
| 3 | 0 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 3 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n-3$ |

Υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(1,3,n)$ και έχουμε:

- $f(1,3,2)= f(1,2,3)$, άρα $g(1,3,2)=g(1,2,3)=0$.
- $f(1,3,4)=\{(1,2,4),(1,3,2)\}$, άρα
  $g(1,3,4)=\text{mex}\{g(1,2,4),g(1,3,2)\}=\text{mex}\{1,0\}=2$.
- $f(1,3,5)=\{(1,2,5),(1,3,2),(1,3,4)\}$, άρα
  $g(1,3,5)=\text{mex}\{g(1,2,5),g(1,3,2),g(1,3,4)\}=\text{mex}\{2,0\}=1$.
- $f(1,3,6)=\{(1,2,6),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5)\}$, άρα
  $g(1,3,6)=\text{mex}\{g(1,2,6),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5)\}=\text{mex}\{3,0,2,1\}=4$.
- $f(1,3,7)=\{(1,2,7),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6)\}$, άρα
  $g(1,3,7)=\text{mex}\{g(1,2,7),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6)\}=$
  $=\text{mex}(4,0,2,1,4)=3$.
- $f(1,3,8)=\{(1,2,8),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7)\}$, άρα
  $g(1,3,8)=\text{mex}\{g(1,2,8),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6),g(1,3,7)\}=$
  $=\text{mex}\{5,0,2,1,4,3\}=6$.

- $f(1,3,9)=\{(1,2,9),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,3,8)\}$, άρα

  $g(1,3,9)=\text{mex}\{g(1,2,9),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6),g(1,3,7),g(1,3,8)\}=$
  $=\text{mex}\{6,0,2,1,4,3\}=5$.

- $f(1,3,10)=\{(1,2,10),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,3,8),(1,3,9)\}$,

  άρα

  $$g(1,3,10)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,10),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6),g(1,3,7),\\ g(1,3,8),g(1,3,9)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{7,0,2,1,4,3,6,5\}=8$.

- $$f(1,3,11)=\left\{\begin{matrix}(1,2,11),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,3,8),(1,3,9),\\ (1,3,10)\end{matrix}\right\},$$

  άρα

  $$g(1,3,11)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,11),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6),g(1,3,7),\\ g(1,3,8),g(1,3,9),g(1,3,10)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{8,0,2,1,4,3,6,5\}=7$.

- $$f(1,3,12)=\left\{\begin{matrix}(1,2,12),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,3,8),(1,3,9),\\ (1,3,10),(1,3,11)\end{matrix}\right\},$$

  άρα

  $$g(1,3,12)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,12),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6),g(1,3,7),\\ g(1,3,8),g(1,3,9),g(1,3,10),g(1,3,11)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}(9,0,2,1,4,3,6,5,8,7)=10$.

- $$f(1,3,13)=\left\{\begin{matrix}(1,2,13),(1,3,2),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,3,8),(1,3,9),\\ (1,3,10),(1,3,11),(1,3,12)\end{matrix}\right\},$$

  άρα

  $$g(1,3,13)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,13),g(1,3,2),g(1,3,4),g(1,3,5),g(1,3,6),g(1,3,7),\\ g(1,3,8),g(1,3,9),g(1,3,10),g(1,3,11),g(1,3,12)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\text{mex}\{10,0,2,1,4,3,6,5,8,7\}=9$.

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα όπως πριν. Άρα, για το $f(1,3,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |
| 6 | 4 |
| 7 | 3 |
| 8 | 6 |
| 9 | 5 |
| 10 | 8 |
| 11 | 7 |
| 12 | 10 |
| 13 | 9 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n \bmod 2 = 1$ | $n-4$ |
| $n \bmod 2 = 0$ | $n-2$ |

Υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(1,4,n)$ και έχουμε:

- $f(1,4,2) = f(1,2,4)$, άρα $g(1,4,2) = g(1,2,4) = 1$.
- $f(1,4,3) = f(1,3,4)$, άρα $g(1,4,3) = g(1,3,4) = 2$.
- $f(1,4,5) = \{(1,2,5),(1,3,5),(1,4,2),(1,4,3)\}$, άρα $g(1,4,5) = \text{mex}\{g(1,2,5), g(1,3,5), g(1,4,2), g(1,4,3)\} = \text{mex}\{2,1\} = 0$.

- $f(1,4,6)=\{(1,2,6),(1,3,6),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5)\}$, άρα

  $g(1,4,6)=\text{mex}\{g(1,2,6),g(1,3,6),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5)\}=$

  $=\text{mex}\{3,4,1,2,0\}=5$.

- $f(1,4,7)=\{(1,2,7),(1,3,7),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6)\}$, άρα

  $g(1,4,7)=\text{mex}\{g(1,2,7),g(1,3,7),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6)\}=$

  $=\text{mex}\{4,3,1,2,0,5\}=6$.

- $f(1,4,8)=\{(1,2,8),(1,3,8),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7)\}$, άρα

  $$g(1,4,8)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,8),g(1,3,8),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\ g(1,4,7)\end{matrix}\right\}=$$

  $=\text{mex}\{5,6,1,2,0\}=3$.

- $f(1,4,9)=\{(1,2,9),(1,3,9),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),(1,4,8)\}$, άρα

  $$g(1,4,9)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,9),g(1,3,9),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\ g(1,4,7),g(1,4,8)\end{matrix}\right\}=$$

  $=\text{mex}\{6,5,1,2,0,3\}=4$.

- $$f(1,4,10)=\left\{\begin{matrix}(1,2,10),(1,3,10),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),\\ (1,4,8),(1,4,9)\end{matrix}\right\}$$, άρα

  $$g(1,4,10)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,10),g(1,3,10),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\ g(1,4,7),g(1,4,8),g(1,4,9)\end{matrix}\right\}=$$

  $=\text{mex}\{7,8,1,2,0,5,6,3,4\}=9$.

- $$f(1,4,11)=\left\{\begin{matrix}(1,2,11),(1,3,11),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),(1,4,8),\\ (1,4,9),(1,4,10)\end{matrix}\right\},$$

  άρα

  $$g(1,4,11)=\text{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,2,11),g(1,3,11),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\ g(1,4,7),g(1,4,8),g(1,4,9),g(1,4,10)\end{matrix}\right\}=$$

  $=\text{mex}\{8,7,1,2,0,5,6,3,4,9\}=10$.

- $f(1,4,12)=\begin{Bmatrix}(1,2,12),(1,3,12),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),(1,4,8),\\(1,4,9),(1,4,10),(1,4,11)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(1,4,12)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,2,12),g(1,3,12),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\g(1,4,7),g(1,4,8),g(1,4,9),g(1,4,10),g(1,4,11)\end{Bmatrix}=$$
  $$=\operatorname{mex}\{9,10,1,2,0,5,6,3,4\}=7.$$

- $f(1,4,13)=\begin{Bmatrix}(1,2,13),(1,3,13),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),(1,4,8),\\(1,4,9),(1,4,10),(1,4,11),(1,4,12)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(1,4,13)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,2,13),g(1,3,13),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\g(1,4,7),g(1,4,8),g(1,4,9),g(1,4,10),g(1,4,11),g(1,4,12)\end{Bmatrix}=$$
  $$=\operatorname{mex}\{10,9,1,2,0,5,6,3,4,7\}=8.$$

- $f(1,4,14)=\begin{Bmatrix}(1,2,14),(1,3,14),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),(1,4,8),\\(1,4,9),(1,4,10),(1,4,11),(1,4,12),(1,4,13)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(1,4,14)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,2,14),g(1,3,14),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\g(1,4,7),g(1,4,8),g(1,4,9),g(1,4,10),g(1,4,11),g(1,4,12),\\g(1,4,13)\end{Bmatrix}=$$
  $$=\operatorname{mex}\{11,12,1,2,0,5,6,3,4,9,10,7,8\}=13.$$

- $f(1,4,15)=\begin{Bmatrix}(1,2,15),(1,3,15),(1,4,2),(1,4,3),(1,4,5),(1,4,6),(1,4,7),(1,4,8),\\(1,4,9),(1,4,10),(1,4,11),(1,4,12),(1,4,13),(1,4,14)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(1,4,15)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(1,2,15),g(1,3,15),g(1,4,2),g(1,4,3),g(1,4,5),g(1,4,6),\\g(1,4,7),g(1,4,8),g(1,4,9),g(1,4,10),g(1,4,11),g(1,4,12),\\g(1,4,13),g(1,4,14)\end{Bmatrix}=$$
  $$=\operatorname{mex}\{12,11,1,2,0,5,6,3,4,9,10,7,8,13\}=14.$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα όπως πριν. Άρα, για το $f(1,4,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ | $n \bmod 4$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |
| 5 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 2 |
| 7 | 6 | 3 |
| 8 | 3 | 0 |
| 9 | 4 | 1 |
| 10 | 9 | 2 |
| 11 | 10 | 3 |
| 12 | 7 | 0 |
| 13 | 8 | 1 |
| 14 | 13 | 2 |
| 15 | 14 | 3 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $n \bmod 4 \in \{0,1\}$ | $n-5$ | $n \bmod 4 \in \{0,1\}$ |
| $n \bmod 4 \in \{2,3\}$ | $n-1$ | $n \bmod 4 \in \{2,3\}$ |

Υπολογίζουμε όμοια την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(1,5,n)$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

| $n$ | $g$ |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |
| 4 | 0 |
| 6 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |
| 9 | 3 |
| 10 | 10 |
| 11 | 9 |
| 12 | 8 |
| 13 | 7 |
| 14 | 14 |
| 15 | 13 |
| 16 | 12 |
| 17 | 11 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n \bmod 4 = 2$ | $n$ |
| $n \bmod 4 = 3$ | $n-2$ |
| $n \bmod 4 = 0$ | $n-4$ |
| $n \bmod 4 = 1$ | $n-6$ |

Τέλος, για την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(1,6,n)$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα, όπου στην τρίτη στήλη εμφανίζεται η σχέση $g=\phi(n)$, μεταξύ της τιμής της $g$ και του $n$.

| $n$ | $g$ | $\phi(n)$ | $n \bmod 8$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | - | 6 |
| 3 | 4 | - | 5 |
| 4 | 5 | - | 4 |
| 5 | 6 | - | 3 |
| 7 | 0 | $n-7$ | 1 |
| 8 | 1 | $n-7$ | 0 |
| 9 | 2 | $n-7$ | 1 |
| 10 | 11 | $n+1$ | 2 |
| 11 | 12 | $n+1$ | 3 |
| 12 | 13 | $n+1$ | 4 |
| 13 | 14 | $n+1$ | 5 |
| 14 | 7 | $n-7$ | 6 |
| 15 | 8 | $n-7$ | 7 |
| 16 | 9 | $n-7$ | 0 |
| 17 | 10 | $n-7$ | 1 |
| 18 | 19 | $n+1$ | 2 |
| 19 | 20 | $n+1$ | 3 |
| 20 | 21 | $n+1$ | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 22 | $n+1$ | 5 |
| 22 | 15 | $n-7$ | 6 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f(1,6,n): n \geq 7$ | $n+1$ | $n+1$ | $n \bmod 8 \in \{2,3,4,5\}$ |
| $f(1,6,n): n \geq 7$ | $n-7$ | $n-7$ | $n \bmod 8 \in \{0,1,6,7\}$ |

Υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(2,3,n)$:

- $f(2,3,1) = f(1,2,3)$, άρα $g(2,3,1) = g(1,2,3) = 0$.
- $f(2,3,4) = \{(1,3,4),(2,1,4),(2,3,1)\}$, άρα
  $g(2,3,4) = \operatorname{mex}\{g(1,3,4), g(2,1,4), g(2,3,1)\} = \operatorname{mex}\{2,1,0\} = 3$.
- $f(2,3,5) = \{(1,3,5),(2,1,5),(2,3,1),(2,3,4)\}$, άρα
  $g(2,3,5) = \operatorname{mex}\{g(1,3,5), g(2,1,5), g(2,3,1), g(2,3,4)\} = \operatorname{mex}\{1,2,0,3\} = 4$.
- $f(2,3,6) = \{(1,3,6),(2,1,6),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5)\}$, άρα
  $g(2,3,6) = \operatorname{mex}\{g(1,3,6), g(2,1,6), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5)\} =$
  $= \operatorname{mex}\{4,3,0\} = 1$.
- $f(2,3,7) = \{(1,3,7),(2,1,7),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6)\}$, άρα
  $g(2,3,7) = \operatorname{mex}\{g(1,3,7), g(2,1,7), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6)\} =$
  $= \operatorname{mex}\{3,4,0,1\} = 2$.
- $f(2,3,8) = \{(1,3,8),(2,1,8),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7)\}$, άρα
  $$g(2,3,8) = \operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(1,3,8), g(2,1,8), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6), \\ g(2,3,7) \end{matrix}\right\} =$$
  $= \operatorname{mex}\{6,5,0,3,4,1,2\} = 7$.
- $f(2,3,9) = \{(1,3,9),(2,1,9),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8)\}$,
  άρα

$$g(2,3,9)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix} g(1,3,9), g(2,1,9), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6), \\ g(2,3,7), g(2,3,8) \end{Bmatrix}=$$
$$=\operatorname{mex}\{5,6,0,3,4,1,2,7\}=8.$$

- $f(2,3,10)=\begin{Bmatrix} (1,3,10),(2,1,10),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7), \\ (2,3,8),(2,3,9) \end{Bmatrix}$, άρα

$$g(2,3,10)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix} g(1,3,10), g(2,1,10), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6), \\ g(2,3,7), g(2,3,8), g(2,3,9) \end{Bmatrix}=$$
$$=\operatorname{mex}\{8,7,0,3,4,1,2\}=5.$$

- $f(2,3,11)=\begin{Bmatrix} (1,3,11),(2,1,11),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8), \\ (2,3,9),(2,3,10) \end{Bmatrix}$,

άρα

$$g(2,3,11)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix} g(1,3,11), g(2,1,11), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6), \\ g(2,3,7), g(2,3,8), g(2,3,9), g(2,3,10) \end{Bmatrix}=$$
$$=\operatorname{mex}\{7,8,0,3,4,1,2,5\}=6.$$

- $f(2,3,12)=\begin{Bmatrix} (1,3,12),(2,1,12),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8), \\ (2,3,9),(2,3,10),(2,3,11) \end{Bmatrix}$,

άρα

$$g(2,3,12)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix} g(1,3,12), g(2,1,12), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6), \\ g(2,3,7), g(2,3,8), g(2,3,9), g(2,3,10), g(2,3,11) \end{Bmatrix}=$$
$$=\operatorname{mex}\{10,9,0,3,4,1,2,7,8,5,6\}=11.$$

- $f(2,3,13)=\begin{Bmatrix} (1,3,13),(2,1,13),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8), \\ (2,3,9),(2,3,10),(2,3,11),(2,3,12) \end{Bmatrix}$,

άρα

$$g(2,3,13)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix} g(1,3,13), g(2,1,13), g(2,3,1), g(2,3,4), g(2,3,5), g(2,3,6), \\ g(2,3,7), g(2,3,8), g(2,3,9), g(2,3,10), g(2,3,11), g(2,3,12) \end{Bmatrix}=$$
$$=\operatorname{mex}\{9,10,0,3,4,1,2,7,8,5,6,11\}=12.$$

- $f(2,3,14)=\begin{Bmatrix}(1,3,14),(2,1,14),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8),\\(2,3,9),(2,3,10),(2,3,11),(2,3,12),(2,3,13)\end{Bmatrix}$,

  άρα $g(2,3,14)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,3,14),g(2,1,14),g(2,3,1),g(2,3,4),g(2,3,5),\\g(2,3,6),g(2,3,7),g(2,3,8),g(2,3,9),g(2,3,10),\\g(2,3,11),g(2,3,12),g(2,3,13)\end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{12,11,0,3,4,1,2,7,8,5,6\}=9$.

- $f(2,3,15)=\begin{Bmatrix}(1,3,15),(2,1,15),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8),\\(2,3,9),(2,3,10),(2,3,11),(2,3,12),(2,3,13),(2,3,14)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(2,3,15)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,3,15),g(2,1,15),g(2,3,1),g(2,3,4),g(2,3,5),g(2,3,6),\\g(2,3,7),g(2,3,8),g(2,3,9),g(2,3,10),g(2,3,11),g(2,3,12),\\g(2,3,13),g(2,3,14)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{11,12,0,3,4,1,2,7,8,5,6,9\}=10$.

- $f(2,3,16)=\begin{Bmatrix}(1,3,16),(2,1,16),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8),\\(2,3,9),(2,3,10),(2,3,11),(2,3,12),(2,3,13),(2,3,14),(2,3,15)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(2,3,16)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,3,16),g(2,1,16),g(2,3,1),g(2,3,4),g(2,3,5),g(2,3,6),\\g(2,3,7),g(2,3,8),g(2,3,9),g(2,3,10),g(2,3,11),g(2,3,12),\\g(2,3,13),g(2,3,14),,g(2,3,15)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{14,13,0,3,4,1,2,7,8,5,6,11,12,9,10\}=15$.

- $f(2,3,17)=\begin{Bmatrix}(1,3,17),(2,1,17),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8),\\(2,3,9),(2,3,10),(2,3,11),(2,3,12),(2,3,13),(2,3,14),(2,3,15),\\(2,3,16)\end{Bmatrix}$,

  άρα

  $$g(2,3,17)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(1,3,17),g(2,1,17),g(2,3,1),g(2,3,4),g(2,3,5),g(2,3,6),\\g(2,3,7),g(2,3,8),g(2,3,9),g(2,3,10),g(2,3,11),g(2,3,12)\\,g(2,3,13),g(2,3,14),g(2,3,15),g(2,3,16)\end{Bmatrix}=$$

  $=\text{mex}\{13,14,0,3,4,1,2,7,8,5,6,11,12,9,10,15\}=16$.

- $$f(2,3,18)=\left\{\begin{matrix}(1,3,18),(2,1,18),(2,3,1),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,3,7),(2,3,8),\\(2,3,9),(2,3,10),(2,3,11),(2,3,12),(2,3,13),(2,3,14),(2,3,15),\\(2,3,16),(2,3,17)\end{matrix}\right\},$$

άρα

$$g(2,3,18)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix}g(1,3,18),g(2,1,18),g(2,3,1),g(2,3,4),g(2,3,5),g(2,3,6),\\g(2,3,7),g(2,3,8),g(2,3,9),g(2,3,10),g(2,3,11),g(2,3,12)\\,g(2,3,13),g(2,3,14),g(2,3,15),g(2,3,16),g(2,3,17)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\operatorname{mex}\{16,15,0,3,4,1,2,7,8,5,6,11,12,9,10\}=13.$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα όπως πριν. Άρα για το $f(2,3,n)$ έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

| $n$ | $g$ | $\phi(n)$ | $n \bmod 4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | - | 1 |
| 4 | 3 | $n-1$ | 0 |
| 5 | 4 | $n-1$ | 1 |
| 6 | 1 | $n-5$ | 2 |
| 7 | 2 | $n-5$ | 3 |
| 8 | 7 | $n-1$ | 0 |
| 9 | 8 | $n-1$ | 1 |
| 10 | 5 | $n-5$ | 2 |
| 11 | 6 | $n-5$ | 3 |
| 12 | 11 | $n-1$ | 0 |
| 13 | 12 | $n-1$ | 1 |
| 14 | 9 | $n-5$ | 2 |
| 15 | 10 | $n-5$ | 3 |
| 16 | 15 | $n-1$ | 0 |
| 17 | 16 | $n-1$ | 1 |
| 18 | 13 | $n-5$ | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f(2,3,n): n \geq 4$ | $n-1$ | $n-1$ | $n \bmod 4 \in \{0,1\}$ |
| $f(2,3,n): n \geq 4$ | $n-5$ | $n-5$ | $n \bmod 4 \in \{2,3\}$ |

Όμοια υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(2,4,n)$ και έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

| $n$ | $g$ | $\phi(n)$ | $n \bmod 2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $n$ | 1 |
| 3 | 3 | $n$ | 1 |
| 5 | 5 | $n$ | 1 |
| 6 | 0 | $n-6$ | 0 |
| 7 | 7 | $n$ | 1 |
| 8 | 2 | $n-6$ | 0 |
| 9 | 9 | $n$ | 1 |
| 10 | 4 | $n-6$ | 0 |
| 11 | 11 | $n$ | 1 |
| 12 | 6 | $n-6$ | 0 |
| 13 | 13 | $n$ | 1 |
| 14 | 8 | $n-6$ | 0 |
| 15 | 15 | $n$ | 1 |
| 16 | 10 | $n-6$ | 0 |
| 17 | 17 | $n$ | 1 |
| 18 | 12 | $n-6$ | 0 |
| 19 | 19 | $n$ | 1 |
| 20 | 14 | $n-6$ | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 21 | $n$ | 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f(2,4,n): n \geq 5$ | $n$ | $n$ | 1 |
| $f(2,4,n): n \geq 5$ | $n-6$ | $n-6$ | 0 |

Όμοια υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(2,5,n)$. Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

| $n$ | $g$ | $\phi(n)$ | $n \bmod 8$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $n+1$ | 1 |
| 3 | 4 | $n+1$ | 3 |
| 4 | 5 | $n+1$ | 4 |
| 6 | 7 | $n+1$ | 6 |
| 7 | 0 | $n-7$ | 7 |
| 8 | 1 | $n-7$ | 0 |
| 9 | 10 | $n+1$ | 1 |
| 10 | 3 | $n-7$ | 2 |
| 11 | 12 | $n+1$ | 3 |
| 12 | 13 | $n+1$ | 4 |
| 13 | 6 | $n-7$ | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 15 | $n+1$ | 6 |
| 15 | 8 | $n-7$ | 7 |
| 16 | 9 | $n-7$ | 0 |
| 17 | 18 | $n+1$ | 1 |
| 18 | 11 | $n-7$ | 2 |
| 19 | 20 | $n+1$ | 3 |
| 20 | 21 | $n+1$ | 4 |
| 21 | 14 | $n-7$ | 5 |
| 22 | 23 | $n+1$ | 6 |
| 23 | 16 | $n-7$ | 7 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $f(2,5,n)\geq 6$ | $n+1$ | $n+1$ | $n \bmod 8 \in \{1,3,4,6\}$ |
| $f(2,5,n)\geq 6$ | $n-7$ | $n-7$ | $n \bmod 8 \in \{0,2,5,7\}$ |

Τέλος, όμοια υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy για τα σημεία $(2,6,n)$. Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

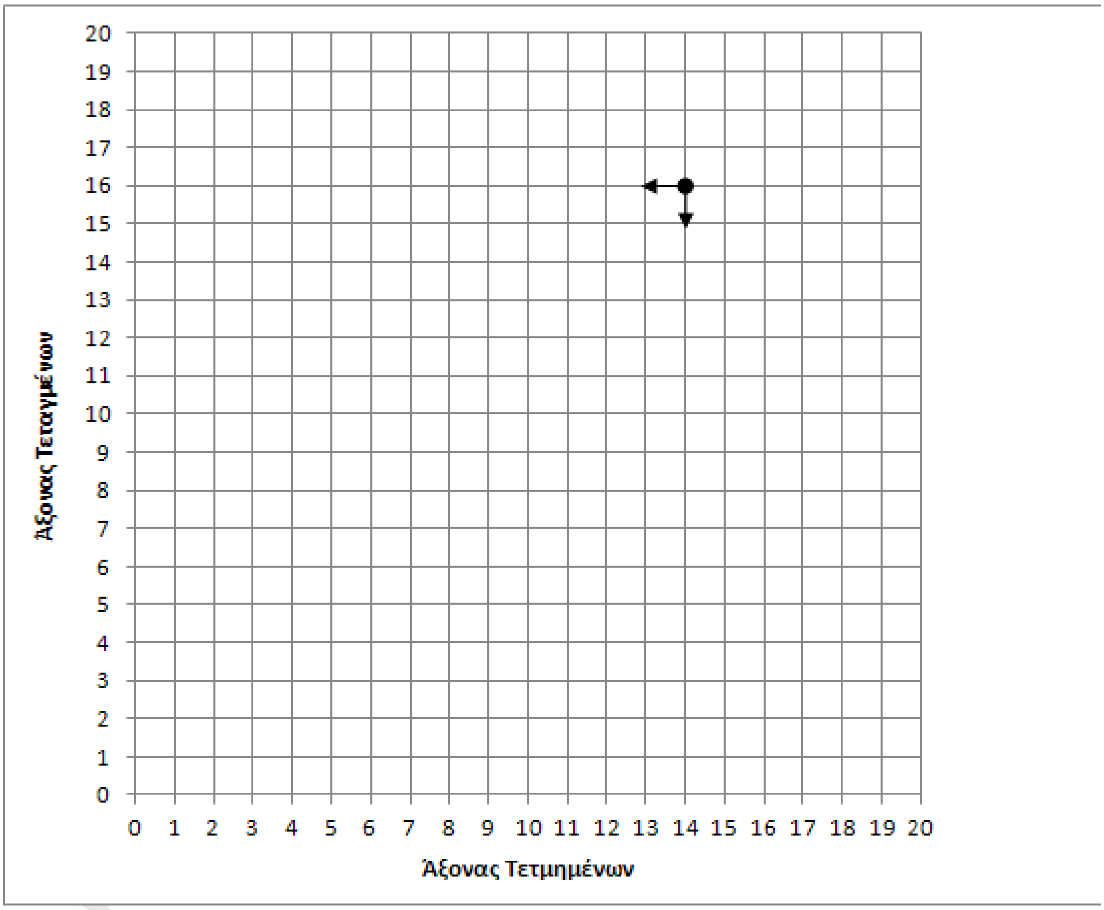
| $n$ | $g$ | $\phi(n)$ | $n \bmod 4$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | $n+2$ | 1 |
| 3 | 1 | $n-2$ | 3 |
| 4 | 0 | $n-4$ | 4 |
| 5 | 7 | $n+2$ | 5 |
| $f7$ | 5 | $n-2$ | 3 |
| 8 | 4 | $n-4$ | 0 |
| 9 | 11 | $n+2$ | 1 |
| 10 | 2 | $n-8$ | 2 |
| 11 | 9 | $n-2$ | 3 |
| 12 | 8 | $n-4$ | 0 |
| 13 | 15 | $n+2$ | 1 |
| 14 | 6 | $n-8$ | 2 |
| 15 | 13 | $n-2$ | 3 |
| 16 | 12 | $n-4$ | 0 |
| 17 | 19 | $n+2$ | 1 |
| 18 | 10 | $n-8$ | 2 |
| 19 | 17 | $n-2$ | 3 |
| 20 | 16 | $n-4$ | 0 |
| 21 | 23 | $n+2$ | 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f\left(2,6,n\right): n \geq 7$ | $n-8$ | $n-8$ | 2 |
| $f\left(2,6,n\right): n \geq 7$ | $n-2$ | $n-2$ | 3 |
| $f\left(2,6,n\right): n \geq 7$ | $n-4$ | $n-4$ | 0 |
| $f\left(2,6,n\right): n \geq 7$ | $n+2$ | $n+2$ | 1 |

# Κεφάλαιο 7

## Πλέγμα

Στο ακόλουθο παίγνιο που θα μελετηθεί, θα θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου, δηλαδή στα σημεία όπου τόσο η τετμημένη όσο και η τεταγμένη έχουν θετικές τιμές. Χαράσσουμε από κάθε σημείο $(x,0)\cup(0,y)$, όπου $x,y\in\mathbb{N}$ μία ευθεία γραμμή η οποία αν ξεκινάει από τα σημεία $(x,0)$ θα είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, ενώ αν είναι ξεκινάει από τα σημεία $(0,y)$ θα είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων. Σημειώνεται ότι η ευθείες που χαράσσουμε εκτίνονται μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου. Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε χωρίσει το επίπεδο όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Σε κάθε κατάσταση, το πιόνι του παιγνίου μπορεί να βρίσκεται μόνο στα σημεία όπου τέμνονται οι ευθείες. Οι δύο παίχτες παίζουν εναλλάξ και μπορούν να μετακινούν το πιόνι προς τον άξονα των τετμημένων, ή προς τον άξονα των τεταγμένων, δηλαδή προς τα αριστερά και προς τα κάτω, όσες θέσεις επιθυμούν. Το παιχνίδι τελειώνει όταν φτάσουμε στο σημείο $(0,0)$.

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε ότι το πιόνι βρίσκεται στο σημείο $(14,16)$, ενώ βάσει των κανόνων του παιχνιδιού η επόμενη κατάσταση του μπορεί να είναι οποιαδήποτε θέση ανήκει στο σύνολο τιμών: $(x,y)\in\{(x,16): x\in(1,2,3,\ldots,13)\}\cup\{(14,y): y\in(1,2,3,\ldots,15)\}$.

Το παραπάνω παίγνιο μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή:

$\Pi=(S,s,f)$, όπου

- $S$ : το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων των πιονιών,
- $s$ : μία συγκεκριμένη θέση των πιονιών, άρα ισχύει $s\in S$,
- $f$ : η συνάρτηση μετάβασης από μία έγκυρη κατάσταση σε μία άλλη.

Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει:

$s=\{(i,j): i,j\in\mathbb{N}\}$, όπου $i,j$ οι συντεταγμένες του σημείου όπου βρίσκεται το πιόνι.

Επομένως ισχύει ότι:

$f(s)=f(i,j)=s'=\{(i,\lambda): 0<\lambda<j,\lambda\in\mathbb{N}\}\cup\{(\kappa,j): 0<\kappa<i,\kappa\in\mathbb{N}\}$,

αφού το πιόνι μπορεί να μετακινηθεί μόνο προς τα μία κατεύθυνση κάθε φορά.

Υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy, όταν μετακινούμαστε πάνω στον άξονα των τετμημένων:

- $f(0,0)=\varnothing$, άρα $g(0,0)=0$.
- $f(1,0)=\{(0,0)\}$, άρα $g(1,0)=\operatorname{mex}\{g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$.
- $f(2,0)=\{(1,0),(0,0)\}$, άρα $g(2,0)=\operatorname{mex}\{g(1,0),g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{1,0\}=2$.
- $f(3,0)=\{(2,0),(1,0),(0,0)\}$, άρα
  $g(3,0)=\operatorname{mex}\{g(2,0),g(1,0),g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{2,1,0\}=3$.
- $f(4,0)=\{(3,0),(2,0),(1,0),(0,0)\}$, άρα
  $g(4,0)=\operatorname{mex}\{g(3,0),g(2,0),g(1,0),g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{3,2,1,0\}=4$.
- $\vdots$

- $f(n,0)=\{(n-1,0),(n-2,0),\ldots,(3,0),(2,0),(1,0),(0,0)\}$, άρα $g(n,0)=\operatorname{mex}\{g(n-1,0),g(n-2,0),\ldots,g(3,0),g(2,0),g(1,0)g(0,0)\}=$ $=\operatorname{mex}\{n-1,n-2,\ldots,3,2,1,0\}=n$.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με δύο στήλες, όπου η πρώτη στήλη εμφανίζει την τιμή της θέσης του πιονιού $(x,y)$, και η δεύτερη την τιμή της συνάρτησης Grundy. Έτσι για το $f(x,0)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $(x,0)$ | $g(x,0)$ |
|---|---|
| $(0,0)$ | 0 |
| $(1,0)$ | 1 |
| $(2,0)$ | 2 |
| $(3,0)$ | 3 |
| $(4,0)$ | 4 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $(n,0)$ | $n$ |

Υπολογίζουμε την συνάρτηση Grundy, όταν μετακινούμαστε πάνω στον άξονα των τεταγμένων:

- $f(0,0)=\varnothing$, άρα $g(0,0)=0$.
- $f(0,1)=\{(0,0)\}$, άρα $g(0,1)=\operatorname{mex}\{g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{0\}=1$.
- $f(0,2)=\{(0,1),(0,0)\}$, άρα $g(0,2)=\operatorname{mex}\{g(0,1)g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{1,0\}=2$.

- $f(0,3)=\{(0,2),(0,1),(0,0)\}$, άρα
  $g(0,3)=\operatorname{mex}\{g(0,2),g(0,1)g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{2,1,0\}=3$.
- $f(0,4)=\{(0,3),(0,2),(0,1),(0,0)\}$, άρα
  $g(0,4)=\operatorname{mex}\{g(0,3),g(0,2),g(0,1),g(0,0)\}=\operatorname{mex}\{3,2,1,0\}=4$.
- $\vdots$
- $f(0,n)=\{(0,n-1),(0,n-2),\ldots,(0,3),(0,2),(0,1),(0,0)\}$, άρα
  $g(0,n)=\operatorname{mex}\{g(0,n-1),g(0,n-2),\ldots,g(0,3),g(0,2),g(0,1)g(0,0)\}=$
  $=\operatorname{mex}\{n-1,n-2,\ldots,3,2,1,0\}=n$.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με δύο στήλες, όπου η πρώτη στήλη εμφανίζει την τιμή της θέσης του πιονιού $(x,y)$, και η δεύτερη την τιμή της συνάρτησης Grundy. Έτσι για το $f(0,y)$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $(0,y)$ | $g(0,y)$ |
|---|---|
| $(0,0)$ | 0 |
| $(0,1)$ | 1 |
| $(0,2)$ | 2 |
| $(0,3)$ | 3 |
| $(0,4)$ | 4 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $(0,n)$ | $n$ |

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα των παραπάνω δύο πινάκων, όταν το πιόνι κινείται πάνω στους άξονες ισχύει ότι $g(x,y)=g(y,x)$. Τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να εμφανιστούν σε ένα πίνακα ως ακολούθως:

| $(x,0)$ | $(0,y)$ | $g(x,0)=g(0,y)$ |
|---|---|---|
| $(0,0)$ | $(0,0)$ | 0 |
| $(1,0)$ | $(0,1)$ | 1 |
| $(2,0)$ | $(0,2)$ | 2 |
| $(3,0)$ | $(0,3)$ | 3 |
| $(4,0)$ | $(0,4)$ | 4 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $(n,0)$ | $(0,n)$ | $n$ |

Παρακάτω θα ελέγξουμε αν η ιδιότητα:

$$g(x,y)=g(y,x)$$

ισχύει και για άλλες τιμές των $x, y$.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις θέσεις $(x,1)$ και $(1,y)$ για κάποιες τιμές των $x, y$ και έχουμε τα ακόλουθα:

- $f(0,1)=\{(0,0)\}$, άρα $g(0,1)=\text{mex}\{g(0,0)\}=\text{mex}\{0\}=1$.
- $f(1,0)=\{(0,0)\}$, άρα $g(1,0)=\text{mex}\{g(0,0)\}=\text{mex}\{0\}=1$.
- $f(1,1)=\{(1,0),(0,1)\}$, άρα $g(1,1)=\text{mex}\{g(1,0),g(0,1)\}=\text{mex}\{1\}=0$.
- $f(2,1)=\{(1,1),(0,1),(2,0)\}$, άρα
  $g(2,1)=\text{mex}\{g(1,1),g(0,1),g(2,0)\}=\text{mex}\{0,1,2\}=3$.

- $f(1,2)=\{(1,1),(1,0),(0,2)\}$, άρα
  $g(1,2)=\text{mex}\{g(1,1),g(1,0),g(0,2)\}=\text{mex}\{0,1,2\}=3$.
- $f(3,1)=\{(2,1),(1,1),(0,1),(3,0)\}$, άρα
  $g(3,1)=\text{mex}\{g(2,1),g(1,1),g(0,1),g(3,0)\}=\text{mex}\{3,0,1\}=2$.
- $f(1,3)=\{(1,2),(1,1),(1,0),(0,3)\}$, άρα
  $g(1,3)=\text{mex}\{g(1,2),g(1,1),g(1,0),g(0,3)\}=\text{mex}\{3,0,1\}=2$.
- $f(4,1)=\{(3,1),(2,1),(1,1),(0,1),(4,0)\}$, άρα
  $g(4,1)=\text{mex}\{g(3,1),g(2,1),g(1,1),g(0,1),g(4,0)\}=\text{mex}\{2,3,0,1,4\}=5$.
- $f(1,4)=\{(1,3),(1,2),(1,1),(1,0),(0,4)\}$, άρα
  $g(1,4)=\text{mex}\{g(1,3),g(1,2),g(1,1),g(1,0),g(0,4)\}=\text{mex}\{2,3,0,1,4\}=5$.
- $f(5,1)=\{(4,1),(3,1),(2,1),(1,1),(0,1),(5,0)\}$, άρα
  $g(5,1)=\text{mex}\{g(4,1),g(3,1),g(2,1),g(1,1),g(0,1),g(5,0)\}=$
  $=\text{mex}\{5,2,3,0,1\}=4$.
- $f(1,5)=\{(1,4),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0),(0,5)\}$, άρα
  $g(1,5)=\text{mex}\{g(1,4),g(1,3),g(1,2),g(1,1),g(1,0),g(0,5)\}=$
  $=\text{mex}\{5,2,3,0,1\}=4$.
- $f(6,1)=\{(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(1,1),(0,1),(6,0)\}$, άρα
  $g(6,1)=\text{mex}\{g(5,1),g(4,1),g(3,1),g(2,1),g(1,1),g(0,1),g(6,0)\}=$
  $=\text{mex}\{4,5,2,3,0,1,6\}=7$.
- $f(1,6)=\{(1,5),(1,4),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0),(0,6)\}$, άρα
  $g(1,6)=\text{mex}\{g(1,5),g(1,4),g(1,3),g(1,2),g(1,1),g(1,0),g(0,6)\}=$
  $=\text{mex}\{4,5,2,3,0,1,6\}=7$.
- $f(7,1)=\{(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(1,1),(0,1),(7,0)\}$, άρα
  $g(7,1)=\text{mex}\{g(6,1),g(5,1),g(4,1),g(3,1),g(2,1),g(1,1),g(0,1),g(7,0)\}=$
  $=\text{mex}\{7,4,5,2,3,0,1\}=6$.

- $f(1,7)=\{(1,6),(1,5),(1,4),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0),(0,7)\}$, άρα
  $g(1,7)=\text{mex}\{g(1,6),g(1,5),g(1,4),g(1,3),g(1,2),g(1,1),g(1,0),g(0,7)\}=$
  $=\text{mex}\{7,4,5,2,3,0,1\}=6$.
- $f(8,1)=\{(7,1),(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(1,1),(0,1),(8,0)\}$, άρα
  $g(8,1)=\text{mex}\{g(7,1),g(6,1),g(5,1),g(4,1),g(3,1),g(2,1),g(1,1),g(0,1),g(8,0)\}=$
  $=\text{mex}\{6,7,4,5,2,3,0,1,8\}=9$.
- $f(1,8)=\{(1,7),(1,6),(1,5),(1,4),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0),(0,8)\}$, άρα
  $g(1,8)=\text{mex}\{g(1,7),g(1,6),g(1,5),g(1,4),g(1,3),g(1,2),g(1,1),g(1,0),g(0,8)\}=$
  $=\text{mex}\{6,7,4,5,2,3,0,1,8\}=9$.

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,1)$ και $(1,y)$, δηλαδή την ακολουθία $1,0,3,2,5,4,7,6,9$ στο Oeis.org [5] βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+1$ (A004442).

Ακολούθως, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,2)$ και $(2,y)$:

- $f(2,2)=\{(2,1),(2,0),(1,2),(0,2)\}$, άρα
  $g(2,2)=\text{mex}\{g(2,1),g(2,0),g(1,2),g(0,2)\}=\text{mex}\{3,2\}=0$.
- $f(2,3)=\{(2,2),(2,1),(2,0),(1,3),(0,3)\}$, άρα
  $g(2,3)=\text{mex}\{g(2,2),g(2,1),g(2,0),g(1,3),g(0,3)\}=\text{mex}\{0,3,2\}=1$.
- $f(3,2)=\{(2,2),(1,2),(0,2),(3,1),(3,0)\}$, άρα
  $g(3,2)=\text{mex}\{g(2,2),g(1,2),g(0,2),g(3,1),g(3,0)\}=\text{mex}\{0,3,2\}=1$.
- $f(2,4)=\{(2,3),(2,2),(2,1),(2,0),(1,4),(0,4)\}$, άρα
  $g(2,4)=\text{mex}\{g(2,3),g(2,2),g(2,1),g(2,0),g(1,4),g(0,4)\}=$
  $=\text{mex}\{1,0,3,2,5,4\}=6$.
- $f(4,2)=\{(3,2),(2,2),(1,2),(0,2),(4,1),(4,0)\}$, άρα
  $g(4,2)=\text{mex}\{g(3,2),g(2,2),g(1,2),g(0,2),g(4,1),g(4,1)\}=$

$= \text{mex}\{1,0,3,2,5,4\} = 6$.

- $f(2,5) = \{(2,4),(2,3),(2,2),(2,1),(2,0),(1,5),(0,5)\}$, άρα

  $g(2,5) = \text{mex}\{g(2,4), g(2,3), g(2,2), g(2,1), g(2,0), g(1,5), g(0,5)\} =$

  $= \text{mex}\{6,1,0,3,2,4,5\} = 7$.

- $f(5,2) = \{(4,2),(3,2),(2,2),(1,2),(0,2),(5,1),(5,0)\}$, άρα

  $g(5,2) = \text{mex}\{g(4,2), g(3,2), g(2,2), g(1,2), g(0,2), g(5,1), g(5,0)\} =$

  $= \text{mex}\{6,1,0,3,2,4,5\} = 7$.

- $f(2,6) = \{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2),(2,1),(2,0),(1,6),(0,6)\}$, άρα

  $g(2,6) = \text{mex}\{g(2,5), g(2,4), g(2,3), g(2,2), g(2,1), g(2,0), g(1,6), g(0,6)\} =$

  $= \text{mex}\{7,6,1,0,3,2\} = 4$.

- $f(6,2) = \{(5,2),(4,2),(3,2),(2,2),(1,2),(0,2),(6,1),(6,0)\}$, άρα

  $g(6,2) = \text{mex}\{g(5,2), g(4,2), g(3,2), g(2,2), g(1,2), g(0,2), g(6,1), g(6,0)\} =$

  $= \text{mex}\{7,6,1,0,3,2\} = 4$.

- $f(2,7) = \{(2,6),(2,5),(2,4),(2,3),(2,2),(2,1),(2,0),(1,7),(0,7)\}$, άρα

  $$g(2,7) = \text{mex}\left\{\begin{matrix} g(2,6), g(2,5), g(2,4), g(2,3), g(2,2), g(2,1), g(2,0), g(1,7), \\ g(0,7) \end{matrix}\right\} =$$

  $= \text{mex}\{4,7,6,1,0,3,2\} = 5$.

- $f(7,2) = \{(6,2),(5,2),(4,2),(3,2),(2,2),(1,2),(0,2),(7,1),(7,0)\}$, άρα

  $$g(7,2) = \text{mex}\left\{\begin{matrix} g(6,2), g(5,2), g(4,2), g(3,2), g(2,2), g(1,2), g(0,2), g(7,1), \\ g(7,0) \end{matrix}\right\} =$$

  $= \text{mex}\{4,7,6,1,0,3,2\} = 5$.

- $f(2,8) = \{(2,7),(2,6),(2,5),(2,4),(2,3),(2,2),(2,1),(2,0),(1,8),(0,8)\}$, άρα

  $$g(2,8) = \text{mex}\left\{\begin{matrix} g(2,7), g(2,6), g(2,5), g(2,4), g(2,3), g(2,2), g(2,1), g(2,0), \\ g(1,8), g(0,8) \end{matrix}\right\} =$$

  $= \text{mex}\{5,4,7,6,1,0,3,2,9,8\} = 10$.

- $f(8,2)=\{(7,2),(6,2),(5,2),(4,2),(3,2),(2,2),(1,2),(0,2),(8,1),(8,0)\}$, άρα
  $g(8,2)=\text{mex}\left\{\begin{matrix} g(7,2), g(6,2), g(5,2), g(4,2), g(3,2), g(2,2), g(1,2), g(0,2), \\ g(8,1), g(8,0) \end{matrix}\right\}=$
  $=\text{mex}\{5,4,7,6,1,0,3,2,9,8\}=10$.

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,2)$ και $(2,y)$, δηλαδή την ακολουθία $2,3,0,1,6,7,4,5,10$ στο Oeis.org βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+2$ (A004443).

Ακολούθως, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,3)$ και $(3,y)$:

- $f(3,3)=\{(3,2),(3,1),(3,0),(2,3),(1,3),(0,3)\}$, άρα
  $g(3,3)=\text{mex}\{g(3,2), g(3,1), g(3,0), g(2,3), g(1,3), g(0,3)\}=$
  $=\text{mex}\{1,2,3\}=0$.
- $f(3,4)=\{(3,3),(3,2),(3,1),(3,0),(2,4),(1,4),(0,4)\}$, άρα
  $g(3,4)=\text{mex}\{g(3,3), g(3,2), g(3,1), g(3,0), g(2,4), g(1,4), g(0,4)\}=$
  $=\text{mex}\{0,1,2,3,6,5,4\}=7$.
- $f(4,3)=\{(3,3),(2,3),(1,3),(0,3),(4,2),(4,1),(4,0)\}$, άρα
  $g(4,3)=\text{mex}\{g(3,3), g(2,3), g(1,3), g(0,3), g(4,2), g(4,1), g(4,0)\}=$
  $=\text{mex}\{0,1,2,3,6,5,4\}=7$.
- $f(3,5)=\{(3,4),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0),(2,5),(1,5),(0,5)\}$, άρα
  $g(3,5)=\text{mex}\{g(3,4), g(3,3), g(3,2), g(3,1), g(3,0), g(2,5), g(1,5), g(0,5)\}=$
  $=\text{mex}\{7,0,1,2,3,7,4,5\}=6$.
- $f(5,3)=\{(4,3),(3,3),(2,3),(1,3),(0,3),(5,2),(5,1),(5,0)\}$, άρα
  $g(5,3)=\text{mex}\{g(4,3), g(3,3), g(2,3), g(1,3), g(0,3), g(5,2), g(5,1), g(5,0)\}=$
  $=\text{mex}\{7,0,1,2,3,4,5\}=6$.

- $f(3,6)=\{(3,5),(3,4),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0),(2,6),(1,6),(0,6)\}$, άρα

$$g(3,6)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(3,5), g(3,4), g(3,3), g(3,2), g(3,1), g(3,0), g(2,6), g(1,6), \\ g(0,6) \end{Bmatrix}=$$

$=\text{mex}\{6,7,0,1,2,3,4\}=5$.

- $f(6,3)=\{(5,3),(4,3),(3,3),(2,3),(1,3),(0,3),(6,2),(6,1),(6,0)\}$, άρα

$$g(6,3)=\text{mex}\begin{pmatrix} g(5,3), g(4,3), g(3,3), g(2,3), g(1,3), g(0,3), g(6,2), g(6,1), \\ g(6,0) \end{pmatrix}$$

$=\text{mex}\{6,7,0,1,2,3,4\}=5$.

- $f(3,7)=\{(3,6),(3,5),(3,4),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0),(2,7),(1,7),(0,7)\}$, άρα

$$g(3,7)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(3,6), g(3,5), g(3,4), g(3,3), g(3,2), g(3,1), g(3,0), g(2,7), \\ g(1,7), g(0,7) \end{Bmatrix}=$$

$=\text{mex}\{5,6,7,0,1,2,3\}=4$.

- $f(7,3)=\{(6,3),(5,3),(4,3),(3,3),(2,3),(1,3),(0,3),(7,2),(7,1),(7,0)\}$, άρα

$$g(7,3)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(6,3), g(5,3), g(4,3), g(3,3), g(2,3), g(1,3), g(0,3), g(7,2), \\ g(7,1), g(7,0) \end{Bmatrix}=$$

$=\text{mex}\{5,6,7,0,1,2,3\}=4$.

- $f(3,8)=\{(3,7),(3,6),(3,5),(3,4),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0),(2,8),(1,8),(0,8)\}$, άρα

$$g(3,8)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(3,7), g(3,6), g(3,5), g(3,4), g(3,3), g(3,2), g(3,1), g(3,0), \\ g(2,8), g(1,8), g(0,8) \end{Bmatrix}=$$

$=\text{mex}\{4,5,6,7,0,1,2,3,10,9,8\}=11$.

- $f(8,3)=\{(7,3),(6,3),(5,3),(4,3),(3,3),(2,3),(1,3),(0,3),(8,2),(8,1),(8,0)\}$, άρα

$$g(8,3)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(7,3), g(6,3), g(5,3), g(4,3), g(3,3), g(2,3), g(1,3), g(0,3), \\ g(8,2), g(8,1), g(8,0) \end{Bmatrix}=$$

$=\text{mex}\{4,5,6,7,0,1,2,3,10,9,8\}=11$.

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,3)$ και $(3,y)$ στο Oeis.org, δηλαδή την ακολουθία $3,2,1,0,7,6,5,4,11$, βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+3$ (A004444).

Ακολούθως, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,4)$ και $(4,y)$:

- $f(4,4)=\{(4,3),(4,2),(4,1),(4,0),(3,4),(2,4),(1,4),(0,4)\}$, άρα
  $g(4,4)=\text{mex}\{g(4,3),g(4,2),g(4,1),g(4,0),g(3,4),g(2,4),g(1,4),g(0,4)\}=$
  $=\text{mex}\{7,6,5,4\}=0$.
- $f(5,4)=\{(5,3),(5,2),(5,1),(5,0),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4),(0,4)\}$, άρα
  $$g(5,4)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(5,3),g(5,2),g(5,1),g(5,0),g(4,4),g(3,4),g(2,4),g(1,4), \\ g(0,4) \end{Bmatrix}=$$
  $=\text{mex}\{6,7,4,5,0\}=1$.
- $f(4,5)=\{(3,5),(2,5),(1,5),(0,5),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),(4,0)\}$, άρα
  $$g(4,5)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(3,5),g(2,5),g(1,5),g(0,5),g(4,4),g(4,3),g(4,2),g(4,1), \\ g(4,0) \end{Bmatrix}=$$
  $=\text{mex}\{6,7,4,5,0\}=1$.
- $f(6,4)=\{(6,3),(6,2),(6,1),(6,0),(5,4),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4),(0,4)\}$, άρα
  $$g(6,4)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(6,3),g(6,2),g(6,1),g(6,0),g(5,4),g(4,4),g(3,4), \\ g(2,4),g(1,4),g(0,4) \end{Bmatrix}=$$
  $=\text{mex}(5,4,7,6,1,0,7,6,5,4)=2$.
- $f(4,6)=\{(3,6),(2,6),(1,6),(0,6),(4,5),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),(4,0)\}$, άρα
  $$g(4,6)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(3,6),g(2,6),g(1,6),g(0,6),g(4,5),g(4,4),g(4,3),g(4,2), \\ g(4,1),g(4,0) \end{Bmatrix}=$$
  $=\text{mex}\{5,4,7,6,1,0\}=2$.

- $f(7,4)=\begin{Bmatrix}(7,3),(7,2),(7,1),(7,0),(6,4),(5,4),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4),\\(0,4)\end{Bmatrix}$, άρα

  $g(7,4)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(7,3),g(7,2),g(7,1),g(7,0),g(6,4),g(5,4),g(4,4),\\g(3,4),g(2,4),g(1,4),g(0,4)\end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}(4,5,6,7,2,1,0,7,6,5,4)=3$.

- $f(4,7)=\begin{Bmatrix}(3,7),(2,7),(1,7),(0,7),(4,6),(4,5),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),\\(4,0)\end{Bmatrix}$, άρα

  $g(4,7)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(3,7),g(2,7),g(1,7),g(0,7),g(4,6),g(4,5),g(4,4),g(4,3),\\g(4,2),g(4,1),g(4,0)\end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{4,5,6,7,2,1,0\}=3$.

- $f(8,4)=\begin{Bmatrix}(8,3),(8,2),(8,1),(8,0),(7,4),(6,4),(5,4),(4,4),(3,4),(2,4),\\(1,4),(0,4)\end{Bmatrix}$, άρα

  $g(8,4)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(8,3),g(8,2),g(8,1),g(8,0),g(7,4),g(6,4),g(5,4),g(4,4),\\g(3,4),g(2,4),g(1,4),g(0,4)\end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{11,10,9,8,3,2,1,0,7,6,5,4\}=12$.

- $f(4,8)=\begin{Bmatrix}(3,8),(2,8),(1,8),(0,8),(4,7),(4,6),(4,5),(4,4),(4,3),(4,2),\\(4,1),(4,0)\end{Bmatrix}$, άρα

  $g(4,8)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(3,8),g(2,8),g(1,8),g(0,8),g(4,7),g(4,6),g(4,5),g(4,4),\\g(4,3),g(4,2),g(4,1),g(4,0)\end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{11,10,9,8,3,2,1,0,7,6,5,4\}=12$.

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,4)$ και $(4,y)$ στο Oeis.org , δηλαδή την ακολουθία $4,5,6,7,0,1,2,3,12$, βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+4$ (A004445).

Ακολούθως, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,5)$ και $(5,y)$:

- $f(5,5)=\{(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(5,0),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5),(0,5)\}$, άρα

  $$g(5,5)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(5,4),g(5,3),g(5,2),g(5,1),g(5,0),g(4,5),g(3,5),g(2,5), \\ g(1,5),g(0,5) \end{matrix}\right\}=$$

  $=\operatorname{mex}\{1,6,7,4,5\}=0$.

- $f(5,6)=\{(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(5,0),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6),(0,6)\}$, άρα

  $$g(5,6)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(5,5),g(5,4),g(5,3),g(5,2),g(5,1),g(5,0),g(4,6),g(3,6), \\ g(2,6),g(1,6),g(0,6) \end{matrix}\right\}=$$

  $=\operatorname{mex}\{0,1,6,7,4,5,2\}=3$.

- $f(6,5)=\{(5,5),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5),(0,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(6,0)\}$, άρα

  $$g(6,5)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(5,5),g(4,5),g(3,5),g(2,5),g(1,5),g(0,5),g(6,4),g(6,3), \\ g(6,2),g(6,1),g(6,0) \end{matrix}\right\}=$$

  $=\operatorname{mex}\{0,1,6,7,4,5,2\}=3$.

- $f(5,7)=\left\{\begin{matrix} (5,6),(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(5,0),(4,7),(3,7),(2,7), \\ (1,7),(0,7) \end{matrix}\right\}$, άρα

  $$g(5,7)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(5,6),g(5,5),g(5,4),g(5,3),g(5,2),g(5,1),g(5,0),g(4,7), \\ g(3,7),g(2,7),g(1,7),g(0,7) \end{matrix}\right\}=$$

  $=\operatorname{mex}\{3,0,1,6,7,4,5\}=2$.

- $f(7,5)=\left\{\begin{matrix} (6,5),(5,5),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5),(0,5),(7,4),(7,3),(7,2), \\ (7,1),(7,0) \end{matrix}\right\}$, άρα

  $$g(7,5)=\operatorname{mex}\left\{\begin{matrix} g(6,5),g(5,5),g(4,5),g(3,5),g(2,5),g(1,5),g(0,5),g(7,4), \\ g(7,3),g(7,2),g(7,1),g(7,0) \end{matrix}\right\}=$$

  $=\operatorname{mex}\{3,0,1,6,7,4,5\}=2$.

- $f(5,8)=\begin{Bmatrix} (5,7),(5,6),(5,5),(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(5,0),(4,8),(3,8), \\ (2,8),(1,8),(0,8) \end{Bmatrix}$, άρα

  $g(5,8)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(5,7),g(5,6),g(5,5),g(5,4),g(5,3),g(5,2),g(5,1),g(5,0), \\ g(4,8),g(3,8),g(2,8),g(1,8),g(0,8) \end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{2,3,0,1,6,7,4,5,12,11,10,9,8\}=13$.

- $f(8,5)=\begin{Bmatrix} (7,5),(6,5),(5,5),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5),(0,5),(8,4),(8,3), \\ (8,2),(8,1),(8,0) \end{Bmatrix}$, άρα

  $g(8,5)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(7,5),g(6,5),g(5,5),g(4,5),g(3,5),g(2,5),g(1,5),g(0,5), \\ g(8,4),g(8,3),g(8,2),g(8,1),g(8,0) \end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{2,3,0,1,6,7,4,5,12,11,10,9,8\}=13$.

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,5)$ και $(5,y)$, δηλαδή την ακολουθία $5,4,7,6,1,0,3,2,13$, στο Oeis.org βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+5$ (A004446).

Ακολούθως, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,6)$ και $(6,y)$:

- $f(6,6)=\begin{Bmatrix} (6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(6,0),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6), \\ (1,6),(0,6) \end{Bmatrix}$, άρα

  $g(6,6)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(6,5),g(6,4),g(6,3),g(6,2),g(6,1),g(6,0),g(5,6),g(4,6), \\ g(3,6),g(2,6),g(1,6),g(0,6) \end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{3,2,5,4,7,6\}=0$.

- $f(6,7)=\begin{Bmatrix} (6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(6,0),(5,7),(4,7),(3,7), \\ (2,7),(1,7),(0,7) \end{Bmatrix}$, άρα

  $g(6,7)=\text{mex}\begin{Bmatrix} g(6,6),g(6,5),g(6,4),g(6,3),g(6,2),g(6,1),g(6,0),g(5,7), \\ g(4,7),g(3,7),g(2,7),g(1,7),g(0,7) \end{Bmatrix}=$

  $=\text{mex}\{0,3,2,5,4,7,6\}=1$.

- $$f(7,6)=\begin{Bmatrix}(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6),(0,6),(7,5),(7,4),(7,3),\\(7,2),(7,1),(7,0)\end{Bmatrix}$$, άρα

$$g(7,6)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(6,6),g(5,6),g(4,6),g(3,6),g(2,6),g(1,6),g(0,6),g(7,5),\\g(7,4),g(7,3),g(7,2),g(7,1),g(7,0)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{0,3,2,5,4,7,6\}=1.$$

- $$f(6,8)=\begin{Bmatrix}(6,7),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(6,0),(5,8),(4,8),\\(3,8),(2,8),(1,8),(0,8)\end{Bmatrix}$$, άρα

$$g(6,8)=\begin{Bmatrix}g(6,7),g(6,6),g(6,5),g(6,4),g(6,3),g(6,2),g(6,1),g(6,0),g(5,8),\\g(4,8),g(3,8),g(2,8),g(1,8),g(0,8)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{1,0,3,2,5,4,7,6,13,12,11,10,9,8\}=14.$$

- $$f(8,6)=\begin{Bmatrix}(7,6),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6),(0,6),(8,5),(8,4),\\(8,3),(8,2),(8,1),(8,0)\end{Bmatrix}$$, άρα

$$g(8,6)=\begin{Bmatrix}g(7,6),g(6,6),g(5,6),g(4,6),g(3,6),g(2,6),g(1,6),g(0,6),g(8,5),\\g(8,4),g(8,3),g(8,2),g(8,1),g(8,0)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{1,0,3,2,5,4,7,6,13,12,11,10,9,8\}=14.$$

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,6)$ και $(6,y)$, δηλαδή την ακολουθία $6,7,4,5,2,3,0,1,14$ στο Oeis.org, βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+6$ (A004447).

Ακολούθως, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,7)$ και $(7,y)$:

- $$f(7,7)=\begin{Bmatrix}(7,6),(7,5),(7,4),(7,3),(7,2),(7,1),(7,0),(6,7),(5,7),(4,7),\\(3,7),(2,7),(1,7),(0,7)\end{Bmatrix}$$, άρα

$$g(7,7)=\operatorname{mex}\begin{Bmatrix}g(7,6),g(7,5),g(7,4),g(7,3),g(7,2),g(7,1),g(7,0),g(6,7),\\g(5,7),g(4,7),g(3,7),g(2,7),g(1,7),g(0,7)\end{Bmatrix}=$$

$$=\operatorname{mex}\{1,2,3,4,5,6,7\}=0$$

- $f(7,8)=\begin{Bmatrix}(7,7),(7,6),(7,5),(7,4),(7,3),(7,2),(7,1),(7,0),(6,8),(5,8),\\(4,8),(3,8),(2,8),(1,8),(0,8)\end{Bmatrix}$, άρα

$$g(7,8)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(7,7),g(7,6),g(7,5),g(7,4),g(7,3),g(7,2),g(7,1),g(7,0),\\g(6,8),g(5,8),g(4,8),g(3,8),g(2,8),g(1,8),g(0,8)\end{Bmatrix}=$$
$$=\text{mex}\{0,1,2,3,4,5,6,7,14,13,12,11,10,9,8\}=15$$

- $f(8,7)=\begin{Bmatrix}(7,7),(6,7),(5,7),(4,7),(3,7),(2,7),(1,7),(0,7),(8,6),(8,5),\\(8,4),(8,3),(8,2),(8,1),(8,0)\end{Bmatrix}$, άρα

$$g(8,7)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(7,7),g(6,7),g(5,7),g(4,7),g(3,7),g(2,7),g(1,7),g(0,7),\\g(8,6),g(8,5),g(8,4),g(8,3),g(8,2),g(8,1),g(8,0)\end{Bmatrix}=$$
$$=\text{mex}\{0,1,2,3,4,5,6,7,14,13,12,11,10,9,8\}=15$$

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,7)$ και $(7,y)$, δηλαδή την ακολουθία $7,6,5,4,3,2,1,0,15$ στο Oeis.org, βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+7$ (A004448).

Τέλος, υπολογίζουμε τα αποτελέσματα για τις θέσεις $(x,8)$ και $(8,y)$:

- $f(8,8)=\begin{Bmatrix}(8,7),(8,6),(8,5),(8,4),(8,3),(8,2),(8,1),(8,0),(7,8),(6,8),(5,8),\\(4,8),(3,8),(2,8),(1,8),(0,8)\end{Bmatrix}$

, άρα

$$g(8,8)=\text{mex}\begin{Bmatrix}g(8,7),g(8,6),g(8,5),g(8,4),g(8,3),g(8,2),g(8,1),g(8,0),g(7,8),\\g(6,8),g(5,8),g(4,8),g(3,8),g(2,8),g(1,8),g(0,8)\end{Bmatrix}=$$
$$=\text{mex}\{15,14,13,12,11,10,9,8\}=0$$

Εισάγοντας την ακολουθία αποτελεσμάτων για τις θέσεις $(x,8)$ και $(8,y)$, δηλαδή την ακολουθία $8,9,10,11,12,13,14,15,0$ στο Oeis.org, βρίσκουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι η ακολουθία Nimsum $n+8$ (A004449)

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … | *n* |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | … | Nimsum n+1 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 | 10 | … | Nimsum n+2 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 11 | … | Nimsum n+3 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 12 | … | Nimsum n+4 |
| 5 | 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 | 13 | … | Nimsum n+5 |
| 6 | 6 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | 14 | … | Nimsum n+6 |
| 7 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 15 | … | Nimsum n+7 |
| 8 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 0 | … | Nimsum n+8 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | |
| *n* | *n* | Nimsum n+1 | Nimsum n+2 | Nimsum n+3 | Nimsum n+4 | Nimsum n+5 | Nimsum n+6 | Nimsum n+7 | Nimsum n+8 | | |

# Κεφάλαιο 8

## Δίτιμη ή Boolean συνάρτηση Grundy – Sprague ενός γραφήματος

Παρατηρούμε ότι για το σχεδιασμό της στρατηγικής μας στο κάθε παίγνιο δεν μας ενδιαφέρουν οι μη μηδενικές τιμές της συνάρτησης Grundy – Sprague, για αυτό θα ορίσουμε την δίτιμη συνάρτηση Grundy – Sprague, ή αλλιώς τη Boolean συνάρτηση Grundy – Sprague.

Έστω $\mathrm{bS} \in \mathcal{P}(\{0,1\})$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{bmexbS}$ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό που δεν περιέχεται στο σύνολο $\mathrm{bS}$, δηλαδή

$$\mathrm{bmexbS} = \begin{cases} 0, \text{ αν } 0 \notin \mathrm{bS} \\ 1, \text{ αν } 0 \in \mathrm{bS} \end{cases}$$

Έτσι,

- αν $\mathrm{bS} = \varnothing$, τότε $\mathrm{bmexbS} = 0$
- αν $\mathrm{bS} = \{0\}$, τότε $\mathrm{bmexbS} = 1$
- αν $\mathrm{bS} = \{1\}$, τότε $\mathrm{bmexbS} = 0$
- αν $\mathrm{bS} = \{0,1\}$, τότε $\mathrm{bmexbS} = 1$

Έστω $G = (V, U)$ ένα γράφημα τόξων. Η συνάρτηση $B : V \to \{0,1\}$ για την οποία

$$B(x) = \mathrm{bmex}\{B(v) : v \in \Gamma(x)\}, \text{ για κάθε } x \in V$$

ονομάζεται **δίτιμη ή Boolean συνάρτηση Grundy - Sprague**.

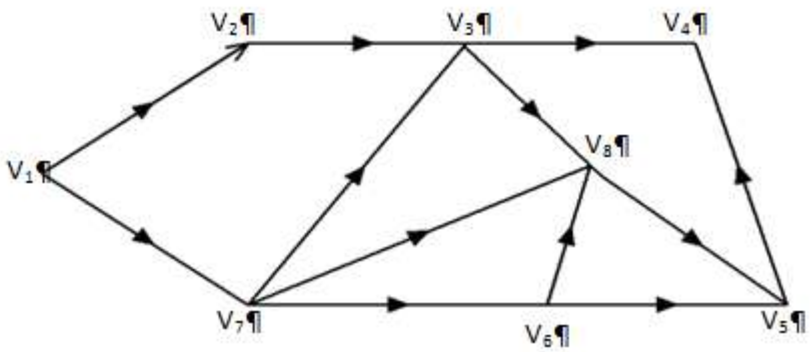
Άρα ισχύει ότι $B(x) = \mathrm{bmex}C(x)$.

Οι κανόνες για τον χαρακτηρισμό κάθε κορυφής ενός γραφήματος ως p-κορυφής ή n-κορυφής εξακολουθούν και ισχύουν.

Επομένως, στο επόμενο γράφημα $G(V, v)$ (που είναι το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε ως παράδειγμα και στο κεφάλαιο 2 ) έχουμε ότι η συνάρτηση $B : V \to \{0,1\}$ με

$$\begin{aligned} B(v_1) &= 1, \quad B(v_5) = 1,\\ B(v_2) &= 0, \quad B(v_6) = 1,\\ B(v_3) &= 1, \quad B(v_7) = 1,\\ B(v_4) &= 0, \quad B(v_8) = 0. \end{aligned}$$

είναι η δίτιμη συνάρτηση Grundy του γραφήματος.




Για να υπολογίσουμε την δίτιμη συνάρτηση Grundy του παραπάνω γραφήματος εργαστήκαμε, όπως και στην αρχική συνάρτηση Grundy, ως εξής:.

Έχοντας ορίσει ποιές είναι οι p και οι n κορυφές του γραφήματος (ίδιες με αυτές του κεφαλαίου 2) μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τη δίτιμη συνάρτηση Grundy για όλες τις κορυφές. Πράγματι, ισχύει ότι

$B(v_2)=B(v_4)=B(v_8)=0$, αφού όλες οι εν λόγω κορυφές αποτελούν p-κορυφές.

$B(v_5)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_5)=\{v_4\}$, θα είναι

$$B(v_5)=b\,mex\,C(v_5)=bmex\{g(v_4)\}=bmex\{0\}=1.$$

$B(v_3)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_3)=\{v_4,v_8\}$, θα είναι

$$B(v_3)=bmexC(v_3)=bmex\{g(v_4),g(v_8)\}=bmex\{0\}=1.$$

$B(v_6)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_6)=\{v_5,v_8\}$, θα είναι

$$B(v_6)=bmexC(v_6)=bmex\{g(v_5),g(v_8)\}=bmex\{0,1\}=1.$$

$B(v_7)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_7)=\{v_3,v_6,v_8\}$, θα είναι

$$B(v_7)=bmexC(v_7)=bmex\{g(v_3),g(v_6),g(v_8)\}=\{1,0\}=1.$$

$B(v_1)=1$, διότι, αφού $\Gamma(v_1)=\{v_2,v_7\}$, θα είναι

$$B(v_1)=bmexC(v_1)=bmex\{g(v_2),g(v_7)\}=bmex\{0,1\}=1.$$

**Προτάσεις που ισχύουν για την δίτιμη συνάρτηση Grundy-Sprague**

Οι αρχικές προτάσεις που διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο $2$, αν τροποποιηθούν βάσει της δίτιμης συνάρτησης Grundy – Sprague, διαμορφώνονται ως εξής:

Έστω $G=(V,U)$ ένα γράφημα για το οποίο ορίζεται μια δίτιμη συνάρτηση Grundy-Sprague $B$. Για κάθε $x \in V$ έχουμε:

1. Αν $\Gamma(v)=\varnothing$ τότε $B(v)=0$.
2. Αν $w \in \Gamma(v)$ τότε $B(v) \neq B(w)$.
3. Αν $B(w)=1$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$, τότε $B(v)=0$.
4. Αν $B(v)=1$, τότε $|\Gamma(v)| \geq 1$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in \Gamma(v)$ με $B(w)=0$.
5. Αν $B(v)=0$, τότε είτε $\Gamma(v)=\varnothing$, είτε $B(w)=1$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$.

Θα ελέγξουμε τώρα ποιές από τις προτάσεις που διατυπώθηκαν για την συνάρτηση Grundy – Sprague εξακολουθούν να ισχύουν για την δίτιμη συνάρτηση Grundy, και ποιές όχι.

1. Αν $\Gamma(x)=\varnothing$ τότε $C(x)=\varnothing$ επομένως $B(x)=\mathrm{bmex}\,C(x)=\mathrm{bmex}\,\varnothing=0$

   Επομένως, η πρόταση 1 ισχύει.

2. Αν $w \in \Gamma(v)$ τότε $B(w) \in C(v)$.

   Έστω ότι το $B(v)=\mathrm{bmex}\,C(v)=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$. Τότε ισχύει ότι:

   Αν $B(w)=1 \Rightarrow B(v)=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1=B(w)$.

   Επομένως <u>δεν</u> ισχύει ότι: αν $w \in \Gamma(v)$ τότε $B(v) \neq B(w)$.

3. Αν $B(w)=1$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$ τότε ισχύει:

   $B(v)=\mathrm{bmex}\{B(w_i): w_i \in \Gamma(v), i=1,2,3,\ldots\}$

   $B(v)=\mathrm{bmex}\{B(w_i)=1: w_i \in \Gamma(v), i=1,2,3,\ldots\}$

   $B(v)=0$.

   Επομένως, η πρόταση 3 ισχύει.

4. Αν $B(v)=1$, τότε πράγματι ισχύει ότι $|\Gamma(v)| \geq 1$, αφού αν

   $|\Gamma(v)|=0 \Rightarrow B(v)=\mathrm{bmex}\,\varnothing=0$.

   Επίσης, ισχύει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $w$, με $B(w)=0$, αφού αν για όλα τα $w \in \Gamma(v)$ ίσχυε $B(w)=1$, τότε:

$B(v) = \text{bmex}\, C(v) = \text{bmex}\{1\} = 0$.

Επομένως, η πρόταση 4 ισχύει.

5. Έστω $\Gamma(v) \neq \varnothing$ και $w_i \in \Gamma(v)$ με $B(w_i) = 0$. Τότε,

   $B(w_i) = 0$ και $B(w_i) \in C(v)$

   $B(v) = \text{bmex}\{B(w) : w \in \Gamma(v)\}$

   $B(v) = \text{bmex}\{C(v) : 0 \in C(v)\}$

   $0 = \text{mex}\{C(v) : 0 \in C(v)\}$, άρα άτοπο.

   Επομένως, αν $B(v) = 0$, τότε είτε $\Gamma(v) = \varnothing$, είτε $B(w) = 1$ για κάθε $w \in \Gamma(v)$.

   Επομένως, η πρόταση 5 ισχύει.

## Κεφάλαιο 9

## Παίγνιο του Welter και δίτιμη συνάρτηση Grundy – Sprague

Παρακάτω θα εξετάσουμε το παίγνιο του Welter με βάση την δίτιμη συνάρτηση Grundy – Sprague. Θεωρούμε και πάλι ότι έχουμε μία λωρίδα από τετράγωνα, τα οποία είναι αριθμημένα από το $1$ έως το $\infty$. Σε κάθε τετράγωνο έχουμε την δυνατότητα να τοποθετήσουμε ένα πιόνι. Στο παίγνιο του Welter θεωρείται ότι n πιόνια έχουν τοποθετηθεί τυχαία στην λωρίδα των τετραγώνων. Υπάρχουν δύο παίχτες, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ, και μπορούν να μετακινήσουν ένα πιόνι κάθε φορά σε όποιο τετράγωνο επιθυμούν, αρκεί

- να μην υπάρχει ήδη κάποιο πιόνι σε αυτό.
- το νέο τετράγωνο που φιλοξενεί το πιόνι να έχει μικρότερο αριθμό από το προηγούμενο.

Μόλις τελειώσει το παιχνίδι, τα πιόνια θα φιλοξενούνται στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $n$. Κερδίζει ο παίχτης ο οποίος θα μπορεί να κάνει τελευταίος κίνηση, αφού μόλις όλα τα πιόνια τοποθετηθούν στα τετράγωνα από το $1$ έως και το $n$ δεν θα υπάρχει τρόπος να μετακινηθεί ένα πιόνι σε τετράγωνο με μικρότερο αριθμό, αφού θα είναι όλα καλυμμένα.

Το παίγνιο του Welter μπορεί να αναπαρασταθεί με την μορφή
$\Pi = (bS, bs, bf)$, όπου

- $bS$ : το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων των πιονιών,
- $bs$ : μία συγκεκριμένη θέση των πιονιών, άρα ισχύει $bs \in bS$ ,
- $bf$ : η συνάρτηση μετάβασης από μία έγκυρη κατάσταση σε μία άλλη.

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μόνο δύο πιόνια, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι ισχύει:
$bs = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$, όπου $i, j$ οι αριθμοί από τα τετράγωνα στα οποία φιλοξενούνται τα πιόνια. Επομένως ισχύει ότι:

$$bf(bs) = bf(i, j) = bs' = \{(i,\lambda) : \lambda < j, \lambda \neq i\} \cup \{(\kappa, j) : \kappa < i, \kappa \neq j\},$$

αφού μπορεί να μετακινηθεί μόνο ένα πιόνι κάθε φορά.

Επειδή δεν υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στα πιόνια ισχύει ότι:
Αν $bs = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ και $bs' = \{(j, i) : j, i \in \mathbb{N}, j \neq i\}$ ισχύει

- $bs = bs'$ ,

- $bf\left(i,j\right)=bf\left(j,i\right)$,
- $B\left(i,j\right)=B\left(j,i\right)$.

Υπολογίζουμε την δίτιμη συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f\left(1,n\right)$, και έχουμε:

- $f\left(1,2\right)=\varnothing$, άρα $B\left(1,2\right)=0$.
- $f\left(1,3\right)=\left\{\left(1,2\right)\right\}$, άρα $B\left(1,3\right)=\text{bmex}\left\{B\left(1,2\right)\right\}=\text{bmex}\left\{0\right\}=1$.
- $B\left(1,4\right)=\left\{\left(1,2\right),\left(1,3\right)\right\}$, άρα $B\left(1,4\right)=\text{bmex}\left\{B\left(1,2\right),B\left(1,3\right)\right\}=\text{bmex}\left\{0,1\right\}=1$.
- $B\left(1,5\right)=\left\{\left(1,2\right),\left(1,3\right),\left(1,4\right)\right\}$, άρα

  $B\left(1,5\right)=\text{bmex}\left\{B\left(1,2\right),B\left(1,3\right),B\left(1,4\right)\right\}=\text{bmex}\left\{0,1\right\}=1$.
- $\vdots$
- $f\left(1,n\right)=\left\{\left(1,2\right),\left(1,3\right),\ldots,\left(1,n-2\right),\left(1,n-1\right)\right\}$, άρα

  $g\left(1,n\right)=bmex\left\{B\left(1,2\right),B\left(1,3\right),B\left(1,4\right),\ldots,B\left(1,n-2\right),B\left(1,n-1\right)\right\}=$

  $=bmex\left\{0,1\right\}=1$.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με δύο στήλες, όπου η πρώτη στήλη εμφανίζει την τιμή της μεταβλητής συντεταγμένης n και η δεύτερη την τιμή της συνάρτησης Grundy. Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

| $n$ | $B$ |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | 1 |

Επομένως, ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(1,2)$, θα κερδίσει το παιχνίδι. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα εξάγεται και από τους βασικούς κανόνες του παιγνίου, αφού η εν λόγω θέση είναι μία από τις θέσεις λήξης του παιχνιδιού. Σημειώνεται ότι υπάρχουν δύο θέσεις λήξης του παιχνιδιού, αφού δεν μας ενδιαφέρει ποιο πιόνι θα βρίσκεται στη θέση $1$ και ποιο στη θέση $2$, άρα $(1,2)\equiv(2,1)$.

Υπολογίζουμε τώρα την δίτιμη συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $bf\,(2,n)$, και έχουμε:

- $bf\,(2,1)=f\,(1,2)=\varnothing$ και $B(2,1)=B(1,2)=0$.
- $bf\,(2,3)=\{(2,1),(1,3)\}$ και $B(2,3)=\mathrm{bmex}\{B(2,1),B(1,3)\}=\mathrm{bmex}\{0,1\}=1$.
- $bf\,(2,4)=\{(1,4),(2,1),(2,3)\}$ και
  $B(2,4)=\mathrm{bmex}\{B(1,4),B(2,1),B(2,3)\}=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$.
- $bf\,(2,5)=\{(1,5),(2,1),(2,3),(2,4)\}$ και
  $B(2,5)=\mathrm{bmex}\{B(1,5),B(2,1),B(2,3),B(2,4)\}=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$.
- $bf\,(2,6)=\{(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\}$ και
  $B(2,6)=\mathrm{bmex}\{B(1,6),B(2,1),B(2,3),B(2,4),B(2,5)\}=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$.
- $bf\,(2,7)=\{(1,7),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$ και
  $B(2,7)=\mathrm{bmex}\{B(1,7),B(2,1),B(2,3),B(2,4),B(2,5),B(2,6)\}=$
  $\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$.
- $bf\,(2,8)=\{(1,8),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7)\}$ και
  $B(2,8)=\mathrm{bmex}\{B(1,8),B(2,1),B(2,3),B(2,4),B(2,5),B(2,6),B(2,7)\}=$
  $=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$.
- $bf\,(2,9)=\{(1,9),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8)\}$ και
  $$B(2,9)=\mathrm{bmex}\left\{\begin{matrix}B(1,9),B(2,1),B(2,3),B(2,4),B(2,5),B(2,6),B(2,7),\\ B(2,8)\end{matrix}\right\}=$$
  $=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1$.

- $bf\,(2,10)=\{(1,10),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9)\}$ και

$$B(2,10)=B\begin{Bmatrix}B(1,10),B(2,1),B(2,3),B(2,4),B(2,5),B(2,6),B(2,7),\\ B(2,8),B(2,9)\end{Bmatrix}=$$
$$=\mathrm{bmex}\{1,0\}=1.$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος, άρα για το $f\,(2,n)$, έχουμε:

| $n$ | $B$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | 1 |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(2,1)$, θα κερδίσει το παιχνίδι. Το συγκεκριμένο συμπέρασμα εξάγεται και από τους βασικούς κανόνες του παιγνίου, αφού η εν λόγω θέση είναι μία από τις θέσεις λήξης του παιχνιδιού.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $bf\,(3,n)$, και έχουμε:

- $bf\,(3,1)=bf\,(1,3)$, άρα $B(3,1)=B(1,3)=1$.
- $bf\,(3,2)=bf\,(2,3)$ και $B(3,2)=B(2,3)=1$.

- $bf\left(3,4\right)=\left\{\left(1,4\right),\left(2,4\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right)\right\}$ και
  $bf\left(3,4\right)=bmex\left\{B\left(1,4\right),B\left(2,4\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right)\right\}=bmex\left\{1\right\}=0$.
- $bf\left(3,5\right)=\left\{\left(1,5\right),\left(2,5\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right)\right\}$ και
  $B\left(3,5\right)=bmex\left\{B\left(1,5\right),B\left(2,5\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right),B\left(3,4\right)\right\}=bmex\left(1,0\right)=1$.
- $f\left(3,6\right)=\left\{\left(1,6\right),\left(2,6\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right),\left(3,5\right)\right\}$ και
  $B\left(3,6\right)=bmex\left\{B\left(1,6\right),B\left(2,6\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right),B\left(3,4\right),B\left(3,5\right)\right\}=$
  $=bmex\left(1,0\right)=1$.
- $f\left(3,7\right)=\left\{\left(1,7\right),\left(2,7\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right),\left(3,5\right),\left(3,6\right)\right\}$ και
  $B\left(3,7\right)=bmex\left\{B\left(1,7\right),B\left(2,7\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right),B\left(3,4\right),B\left(3,5\right),B\left(3,6\right)\right\}=$
  $=bmex\left\{0,1\right\}=1$.
- $f\left(3,8\right)=\left\{\left(1,8\right),\left(2,8\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right),\left(3,5\right),\left(3,6\right),\left(3,7\right)\right\}$ και
  $B\left(3,8\right)=bmex\left\{B\left(1,8\right),B\left(2,8\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right),B\left(3,4\right),B\left(3,5\right),B\left(3,6\right),B\left(3,7\right)\right\}=$
  $=bmex\left\{0,1\right\}=1$.
- $f\left(3,9\right)=\left\{\left(1,9\right),\left(2,9\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right),\left(3,5\right),\left(3,6\right),\left(3,7\right),\left(3,8\right)\right\}$ και
  $$B\left(3,9\right)=bmex\left\{\begin{matrix}B\left(1,9\right),B\left(2,9\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right),B\left(3,4\right),B\left(3,5\right),B\left(3,6\right),\\ B\left(3,7\right),B\left(3,8\right)\end{matrix}\right\}=$$
  $=bmex\left\{0,1\right\}=1$.
- $f\left(3,10\right)=\left\{\left(1,10\right),\left(2,10\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right),\left(3,5\right),\left(3,6\right),\left(3,7\right),\left(3,8\right),\left(3,9\right)\right\}$
  και
  $$B\left(3,10\right)=bmex\left\{\begin{matrix}B\left(1,10\right),B\left(2,10\right),B\left(3,1\right),B\left(3,2\right),B\left(3,4\right),B\left(3,5\right),B\left(3,6\right),B\left(3,7\right),\\ B\left(3,8\right),B\left(3,9\right)\end{matrix}\right\}=$$
  $=bmex\left\{0,1\right\}=1$.
- $f\left(3,11\right)=\left\{\left(1,11\right),\left(2,11\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(3,4\right),\left(3,5\right),\left(3,6\right),\left(3,7\right),\left(3,8\right),\left(3,9\right),\left(3,10\right)\right\}$
  και

$$g(3,11) = bmex\left\{\begin{matrix} B(1,11), B(2,11), B(3,1), B(3,2), B(3,4), B(3,5), B(3,6), B(3,7), \\ B(3,8), B(3,9), B(3,10) \end{matrix}\right\} =$$

$= bmex\{0,1\} = 1$.

- $f(3,12) = \left\{\begin{matrix} (1,12),(2,12),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9), \\ (3,10),(3,11) \end{matrix}\right\}$

και

$$B(3,12) = bmex\left\{\begin{matrix} B(1,12), B(2,12), B(3,1), B(3,2), B(3,4), B(3,5), B(3,6), \\ B(3,7), B(3,8), B(3,9), B(3,10), B(3,11) \end{matrix}\right\} =$$

$= bmex\{0,1\} = 1$.

- $f(3,13) = \left\{\begin{matrix} (1,13),(2,13),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9), \\ (3,10),(3,11),(3,12) \end{matrix}\right\}$

και

$$B(3,13) = bmex\left\{\begin{matrix} B(1,13), B(2,13), B(3,1), B(3,2), B(3,4), B(3,5), B(3,6), \\ B(3,7), B(3,8), B(3,9), B(3,10), B(3,11), B(3,12) \end{matrix}\right\} =$$

$= bmex\{0,1\} = 1$.

- $f(3,14) = \left\{\begin{matrix} (1,14),(2,14),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9), \\ (3,10),(3,11),(3,12),(3,13) \end{matrix}\right\}$

και

$$B(3,14) = bmex\left\{\begin{matrix} B(1,14), B(2,14), B(3,1), B(3,2), B(3,4), B(3,5), B(3,6), \\ B(3,7), B(3,8), B(3,9), B(3,10), B(3,11), B(3,12), B(3,13) \end{matrix}\right\} =$$

$= bmex\{0,1\} = 1$.

- $f(3,15) = \left\{\begin{matrix} (1,15),(2,15),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9), \\ (3,10),(3,11),(3,12),(3,13),(3,14) \end{matrix}\right\}$

και

$$B(3,15) = bmex\left\{\begin{matrix} B(1,15), B(2,15), B(3,1), B(3,2), B(3,4), B(3,5), B(3,6), \\ B(3,7), B(3,8), B(3,9), B(3,10), B(3,11), B(3,12), B(3,13), \\ B(3,14) \end{matrix}\right\} =$$

$= bmex\{0,1\} = 1$.

➢ $f(3,16)=\begin{Bmatrix}(1,16),(2,16),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(3,9),\\(3,10),(3,11),(3,12),(3,13),(3,14),(3,15)\end{Bmatrix}$

και

$$B(3,16)=bmex\begin{Bmatrix}B(1,16),B(2,16),B(3,1),B(3,2),B(3,4),B(3,5),B(3,6),\\B(3,7),B(3,8),B(3,9),B(3,10),B(3,11),B(3,12),B(3,13),\\B(3,14),B(3,15)\end{Bmatrix}=$$

$=bmex\{0,1\}=1$.

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος, άρα για το $f(3,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 4 | 0 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1 |
| 9 | 1 |
| 10 | 1 |
| 11 | 1 |
| 12 | 1 |
| 13 | 1 |

| | |
|---|---|
| 14 | 1 |
| 15 | 1 |
| 16 | 1 |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(3,4)$, θα κερδίσει το παιχνίδι.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(4,n)$, και έχουμε:

- $bf(4,1)=bf(1,4)$, άρα $B(4,1)=B(1,4)=1$.
- $bf(4,2)=bf(2,4)$ και $B(4,2)=B(2,4)=1$.
- $bf(4,3)=bf(3,4)$ και $B(4,3)=B(3,4)=0$.
- $bf(4,5)=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ και
  $B(4,5)=bmex\{B(1,5),B(2,5),B(3,5),B(4,1),B(4,2),B(4,3)\}=$
  $=bmex\{1,0\}=1$.
- $bf(4,6)=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5)\}$ και
  $B(4,6)=bmex\{B(1,6),B(2,6),B(3,6),B(4,1),B(4,2),B(4,3),B(4,5)\}=$
  $=bmex\{1,0\}=1$.
- $bf(4,7)=\{(1,7),(2,7),(3,7),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)\}$ και
  $B(4,7)=bmex\{B(1,7),B(2,7),B(3,7),B(4,1),B(4,2),B(4,3),B(4,5),B(4,6)\}=$
  $=bmex\{1,0\}=1$.
- $bf(4,8)=\{(1,8),(2,8),(3,8),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7)\}$ και
  $$B(4,8)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,8),B(2,8),B(3,8),B(4,1),B(4,2),B(4,3),B(4,5),\\ B(4,6),B(4,7)\end{matrix}\right\}=$$

$= bmex\{1,0\} = 1$.

- $bf(4,9) = \{(1,9),(2,9),(3,9),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)\}$ και

  $$B(4,9) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,9), B(2,9), B(3,9), B(4,1), B(4,2), B(4,3), B(4,5), B(4,6), \\ B(4,7), B(4,8) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.

- $bf(4,10) = \{(1,10),(2,10),(3,10),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9)\}$

  και

  $$B(4,10) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,10), B(2,10), B(3,10), B(4,1), B(4,2), B(4,3), B(4,5), \\ B(4,6), B(4,7), B(4,8), B(4,9) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.

- $$bf(4,11) = \begin{Bmatrix} (1,11),(2,11),(3,11),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8), \\ (4,9),(4,10) \end{Bmatrix}$$

  και

  $$B(4,11) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,11), B(2,11), B(3,11), B(4,1), B(4,2), B(4,3), B(4,5), \\ B(4,6), B(4,7), B(4,8), B(4,9), B(4,10) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.

- $$bf(4,12) = \begin{Bmatrix} (1,12),(2,12),(3,12),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),(4,9), \\ (4,10),(4,11) \end{Bmatrix}$$

  και

  $$B(4,12) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,12), B(2,12), B(3,12), B(4,1), B(4,2), B(4,3), B(4,5), \\ B(4,6), B(4,7), B(4,8), B(4,9), B(4,10), B(4,11) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.

- $$bf(4,13) = \begin{Bmatrix} (1,13),(2,13),(3,13),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8), \\ (4,9),(4,10),(4,11),(4,12) \end{Bmatrix}$$

  και

  $$B(4,13) = bmex\begin{Bmatrix} g(1,13), g(2,13), g(3,13), g(4,1), g(4,2), g(4,3), g(4,5), \\ g(4,6), g(4,7), g(4,8), g(4,9), g(4,10), g(4,11), g(4,12) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.

- $bf\left(4,14\right)=\left\{\begin{matrix}(1,14),(2,14),(3,14),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\(4,9),(4,10),(4,11),(4,12),(4,13)\end{matrix}\right\}$

  και $B\left(4,14\right)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,14),B(2,14),B(3,14),B(4,1),B(4,2),B(4,3),\\B(4,5),B(4,6),B(4,7),B(4,8),B(4,9),B(4,10),\\B(4,11),B(4,12),B(4,13)\end{matrix}\right\}=$

  $=bmex\{0,1\}=1$.

- $bf\left(4,15\right)=\left\{\begin{matrix}(1,15),(2,15),(3,15),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\(4,9),(4,10),(4,11),(4,12),(4,13),(4,14)\end{matrix}\right\}$

  και

  $B\left(4,15\right)=bmex\left(\begin{matrix}B(1,15),B(2,15),B(3,15),B(4,1),B(4,2),B(4,3),B(4,5),\\B(4,6),B(4,7),B(4,8),B(4,9),B(4,10),B(4,11),B(4,12),\\B(4,13),B(4,14)\end{matrix}\right)=$

  $=bmex\{0,1\}=1$.

- $bf\left(4,16\right)=\left\{\begin{matrix}(1,16),(2,16),(3,16),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\(4,9),(4,10),(4,11),(4,12),(4,13),(4,14),(4,15)\end{matrix}\right\}$

  και

  $B\left(4,16\right)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,16),B(2,16),B(3,16),B(4,1),B(4,2),B(4,3),B(4,5),\\B(4,6),B(4,7),B(4,8),B(4,9),B(4,10),B(4,11),B(4,12),\\B(4,13),B(4,14),B(4,15)\end{matrix}\right\}=$

  $=bmex\{0,1\}=1$.

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος, άρα για το $f\left(4,n\right)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ |
| --- | --- |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1 |
| 9 | 1 |
| 10 | 1 |
| 11 | 1 |
| 12 | 1 |
| 13 | 1 |
| 14 | 1 |
| 15 | 1 |
| 16 | 1 |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(4,3)$, θα κερδίσει το παιχνίδι.

Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση Grundy για τις καταστάσεις $f(5,n)$, και έχουμε:

- $bf(5,1) = bf(1,5)$, άρα $B(5,1) = B(1,5) = 1$.

- $bf\,(5,2) = bf\,(2,5)$ και $B(5,2) = B(2,5) = 1$.
- $bf\,(5,3) = bf\,(3,5)$ και $B(5,3) = B(3,5) = 1$.
- $bf\,(5,4) = bf\,(4,5)$ και $B(5,4) = B(4,5) = 1$.
- $bf\,(5,6) = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$ και

  $B(5,6) = bmex\{B(1,6), B(2,6), B(3,6), B(4,6), B(5,1), B(5,2), B(5,3), B(5,4)\} =$

  $= bmex\{1\} = 0$.
- $bf\,(5,7) = \{(1,7),(2,7),(3,7),(4,7),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$ και

  $$B(5,7) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,7), B(2,7), B(3,7), B(4,7), B(5,1), B(5,2), B(5,3), B(5,4), \\ B(5,6) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.
- $bf\,(5,8) = \{(1,8),(2,8),(3,8),(4,8),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7)\}$ και

  $$B(5,8) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,8), B(2,8), B(3,8), B(4,8), B(5,1), B(5,2), B(5,3), B(5,4), \\ B(5,6), B(5,7) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.
- $bf\,(5,9) = \{(1,9),(2,9),(3,9),(4,9),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(5,8)\}$

  και

  $$B(5,9) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,9), B(2,9), B(3,9), B(4,9), B(5,1), B(5,2), B(5,3), B(5,4), \\ B(5,6), B(5,7), B(5,8) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.
- $$bf\,(5,10) = \begin{Bmatrix} (1,10),(2,10),(3,10),(4,10),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7), \\ (5,8),(5,9) \end{Bmatrix}$$

  και

  $$B(5,10) = bmex\begin{Bmatrix} B(1,10), B(2,10), B(3,10), B(4,10), B(5,1), B(5,2), B(5,3), \\ B(5,4), B(5,6), B(5,7), B(5,8), B(5,9) \end{Bmatrix} =$$

  $= bmex\{0,1\} = 1$.

- $bf\,(5,11)=\left\{\begin{matrix}(1,11),(2,11),(3,11),(4,11),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(5,8),\\(5,9),(5,10)\end{matrix}\right\}$

και

$$B(5,11)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,11),B(2,11),B(3,11),B(4,11),B(5,1),B(5,2),B(5,3),\\B(5,4),B(5,6),B(5,7),B(5,8),B(5,9),B(5,10)\end{matrix}\right\}=$$

$$=bmex\{0,1\}=1.$$

- $bf\,(5,12)=\left\{\begin{matrix}(1,12),(2,12),(3,12),(4,12),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11)\end{matrix}\right\}$

και

$$B(5,12)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,12),B(2,12),B(3,12),B(4,12),B(5,1),B(5,2),B(5,3),\\B(5,4),B(5,6),B(5,7),B(5,8),B(5,9),B(5,10),B(5,11)\end{matrix}\right\}=$$

$$=bmex\{0,1\}=1.$$

- $bf\,(5,13)=\left\{\begin{matrix}(1,13),(2,13),(3,13),(4,13),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12)\end{matrix}\right\}$

και

$$B(5,13)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,13),B(2,13),B(3,13),B(4,13),B(5,1),B(5,2),B(5,3),\\B(5,4),B(5,6),B(5,7),B(5,8),B(5,9),B(5,10),B(5,11),\\B(5,12)\end{matrix}\right\}=$$

$$=bmex\{0,1\}=1.$$

- $bf\,(5,14)=\left\{\begin{matrix}(1,14),(2,14),(3,14),(4,14),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13)\end{matrix}\right\}$

και

$$B(5,14)=bmex\left\{\begin{matrix}B(1,14),B(2,14),B(3,14),B(4,14),B(5,1),B(5,2),B(5,3),\\B(5,4),B(5,6),B(5,7),B(5,8),B(5,9),B(5,10),B(5,11),\\B(5,12),B(5,13)\end{matrix}\right\}=$$

$$=bmex\{0,1\}=1.$$

- $bf\,(5,15)=\left\{\begin{matrix}(1,15),(2,15),(3,15),(4,15),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),\\(5,8),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13),(5,14)\end{matrix}\right\}$

και

$$B(5,15) = bmex\left\{\begin{array}{l} B(1,15), B(2,15), B(3,15), B(4,15), B(5,1), B(5,2), B(5,3), \\ B(5,4), B(5,6), B(5,7), B(5,8), B(5,9), B(5,10), B(5,11), \\ B(5,12), B(5,13), B(5,14) \end{array}\right\} =$$

$$= bmex\{0,1\} = 1 .$$

Αναπαριστούμε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα για να μας διευκολύνει στην εξαγωγή του αποτελέσματος. Άρα για το $f(5,n)$, έχουμε:

| $n$ | $g$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 6 | 0 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1 |
| 9 | 1 |
| 10 | 1 |
| 11 | 1 |
| 12 | 1 |
| 13 | 1 |
| 14 | 1 |
| 15 | 1 |

Επομένως , ο παίχτης ο οποίος θα καταλήξει στην θέση $(5,6)$, θα κερδίσει το παιχνίδι.

## Βιβλιογραφία

[1] E.R. Berlekamp, J.H. Conway and R.K. Guy, *Winning Ways*, Academic Press, 1982.

[2] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, A. K. Peters ltd, 2001 (2nd edition).

[3] A. Dress, A. Flammenkamp and N. Pink, Additive Periodicity of the Sprague–Grundy Function of Certain Nim Games, *Advances in Applied Mathematics* **22** (1999), 249-270.

[4] R. Guy, *Fair Game: How to play impartial combinatorial games*, COMAP, Arlington, Massachusetts, 1989.

[5] N.J.A. Sloane, *The Online Encyclopedia of Integer Sequences (2013)*, published electronically at http://oeis.org/.

[6] F. Smith and P. Stanica, Comply/Constrain Games or Games with a Muller Twist, *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 2* (2002), #G03.

[7] S.Vajda, *Mathematical Games and how to Play Them*, Dover Publications, N.Y., 2008.