ΠΜΣ "ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ"
Msc in Actuarial Science and Risk Management

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ Lévy ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ:

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΩΝ GERBER – SHIU

ΚΥΝΗΓΟΣ Χ. ΑΓΓΕΛΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό ……….. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Μαχαιράς Νικόλαος

- Επίκουρος Καθηγητής, Χατζόπουλος Πέτρος, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΠΜΣ "ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ"
Msc in Actuarial Science and Risk Management

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STOCHASTIC LÉVY PROCESSES IN RUIN THEORY:

STUDY OF THE GERBER – SHIU FUNCTION

KYNIGOS C. ANGELOS

PIRAEUS, GREECE

FEBRUARY 2015

This thesis was approved unanimously by the three-member committee appointed by the Department of Statistics and Insurance Science, University of Piraeus, in accordance with the rules of the MSc program in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members were:

- Associate Professor, Chadjikonstantinidis Efstathios (Supervisor)

- Associate Professor, Macheras Nikolaos

- Assistant Professor, Xatzopoulos Petros, Aegean University

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες και την ιδιαίτερη εκτίμησή μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, για την πολύτιμη συνεισφορά του, την εποικοδομητική συνεργασία και την καθοδήγησή του.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δυο μέλη της επιτροπής κ. Μαχαιρά Νικόλαο και κ. Χατζόπουλο Πέτρο, για το χρόνο τους και τις ουσιαστικές παρατηρήσεις τους.

Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες, αλλά και την αγάπη μου προς τους γονείς μου, για την υποστήριξη και την βοήθειά τους.

Περίληψη

Κατά τη διαχείριση χαρτοφυλακίων ασφαλιστικών ζημιών, παρατηρούνται συχνά διακυμάνσεις ως προς τα ύψη των εισπραττόμενων ασφαλίστρων ή/ και τα ύψη των καταβαλλόμενων αποζημιώσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, προκειμένου να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος του χαρτοφυλακίου, αυτή η τυχαιότητα μελετάται θεωρώντας την ύπαρξη ενός παράγοντα διάχυσης που περιγράφεται από την ανέλιξη *Wiener*. Τότε, το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ανάγεται σε μια ανέλιξη *Lévy*.

Σκοπός αυτής της διατριβής είναι, η μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου μιας κατάλληλης ανέλιξης *Lévy* ως στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος. Προς τούτο, θα γίνει αρχικά μια εκτενής μελέτη των φασματικά αρνητικών ανελίξεων *Lévy* και των αντιστοίχων συναρτήσεων κλίμακας (*scale functions*) και θα δειχθεί πως μέσω αυτών μπορεί να μελετηθεί μια γενικευμένη συνάρτηση των *Gerber – Shiu*.

Επιπρόσθετα, θα μελετηθεί και ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων να έχουν μια Coxian κατανομή, για το οποίο η στοχαστική ανέλιξης πλεονάσματος διαταράσσεται από μια φασματικά αρνητική ανέλιξη *Lévy*.

Abstract

During the management of insurance claims portfolios, volatilities are often been observed with respect to the heights of the collected premiums or/ and with respect to the heights of the paid claims. In these cases, in order to study the stochastic surplus process of the portfolio, this randomness is studied considering the existence of a diffusion factor described by the Wiener process. Then, the classic model of the risk theory is reduced to a Lévy process.

The purpose of this thesis is the study of various risk measures of an appropriate Lévy process as a stochastic surplus process. This will initially be a comprehensive study of the Spectrally Negative Lévy Processes and their corresponding Scale Functions. It will be shown that through them a generalized function of Gerber – Shiu can be studied.

In addition, it will be shown that a renewal risk model with arrival interclaim times follows a Coxian distribution, for which the stochastic surplus process is perturbed by a spectrally negative Lévy process.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

1. Κεφάλαιο: Κλασσικό Μοντέλο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας των κινδύνων και ειδικότερα της θεωρίας χρεοκοπίας. Θα εξηγήσουμε το κλασσικό υπόδειγμα, το πιο γνωστό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, που πρώτοι το μελέτησαν οι *Cramér – Lundberg*.

1.1 Μοντέλο *Cramér – Lundberg*

Αρχικά στο μοντέλο, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε αφενός μεν τα έξοδα μιας εταιρίας, αφετέρου δε τα έσοδά της καθώς μεταφερόμαστε στο χρόνο. Επομένως, μιλάμε για μια στοχαστική εξέλιξη των ποσοτήτων. Αυτή η στοχαστική διαδικασία (ανέλιξη) είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t : t \in T\}$ και ανάλογα με το πλήθος εμφάνισης της διαδικασίας, αριθμήσιμο ή όχι, X_t μιλάμε για διακριτή ή συνεχής διαδικασία.

Μια από τις πιο γνωστές στοχαστικές διαδικασίες είναι η διαδικασία Poisson, η οποία είναι ένα παράδειγμα απαριθμήτριας διαδικασίας (μη φθίνουσα με ακέραιες και μη αρνητικές τιμές), όπου στο κλασσικό υπόδειγμα μετράει το πλήθος των απαιτήσεων που φτάνουν ανά το χρόνο. Οι χρόνοι μεταξύ της εμφάνισης των απαιτήσεων ονομάζονται ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής.

Στο υπόδειγμα όπως αναφέραμε παραπάνω, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τα έσοδα μείον τα έξοδα, δηλαδή το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας, το χρόνο που θα γίνει αρνητικό, αλλά και με τι σφοδρότητα θα εμφανιστεί.

Ορισμός 1.1 *Η υπόθεση που κάνουμε για τη διαδικασία του πλεονάσματος (Surplus Process) είναι:*

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$

όπου,

- $U(t)$*: η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος, με* $U(0) = u$*,*
- $u \geq 0$*: το αρχικό κεφάλαιο (Initial Capital), αποθεματικό, που διαθέτει η ασφαλιστική στο χρόνο μηδέν,*
- ct *: το ασφάλιστρο που εισπράττει ανά μονάδα χρόνου,*
- $S(t)$*: τα συνολικά έξοδα της ασφαλιστικής, δηλαδή οι απαιτήσεις που θα εμφανιστούν σε ένα χαρτοφυλάκιο.*

Μία βασική υπόθεση που κάνουμε στο κλασσικό μοντέλο είναι, ότι:

$$c > \lambda\mu_1$$

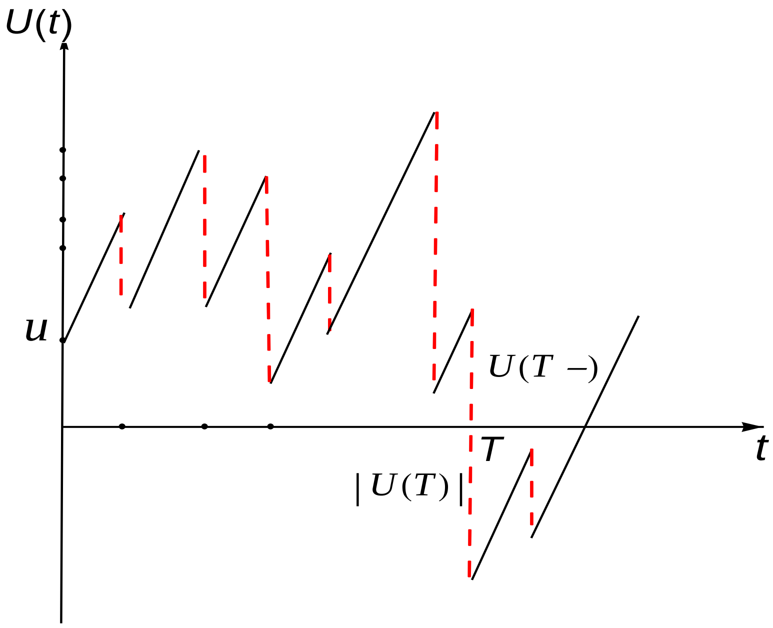
ονομάζεται συνθήκη καθαρού κέρδους και προσπαθεί να διασφαλίσει ότι τα έσοδα θα είναι περισσότερα από τα έξοδα, δηλαδή εκφράζει την βιωσιμότητα του χαρτοφυλακίου, με μ_1 να είναι η μέση αποζημίωση και η ποσότητα λ εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου. Σημειώνουμε ότι αν $c \leq \lambda\mu_1$ τότε $\psi(u) = 1$ για κάθε $u \geq 0$ (βλ. ορισμός 1.3 για την πιθανότητα χρεοκοπίας). Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα του u και όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Σύμφωνα την θεωρία της Αρχής Επιβάρυνσης του Ασφαλίστρου, έχουμε το Περιθώριο Ασφαλείας (*Premium Loading Factor*) στο κλασσικό μοντέλο που συμβολίζεται με θ, και ορίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1.$$

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το περιθώριο ασφαλείας, τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας (βλ. ορισμός 1.3 για την πιθανότητα χρεοκοπίας). Το περιθώριο ασφαλείας όπως προϊδεάζει και η λέξη του, εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα, από τα έξοδα της εταιρίας κατά μέσο όρο, οπότε μπορούμε να εκφράσουμε αυτή την ποσότητα ως το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε ένα σχήμα για την κατανόηση των παραπάνω.



Σχήμα 1.1 *Η διαδικασία του πλεονάσματος στο χρόνο, με $U(T-)$ το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.*

Για τις συνολικές αποζημιώσεις γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)},$$

απ' το οποίο καταλαβαίνουμε ότι οι $\{X_i\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και εκφράζουν το μέγεθος της $i-$ οστής απαίτησης. Επιπρόσθετα, η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson και άρα η $S(t)$ είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson, με τη δειγματοσυνάρτηση $S(t)$ να είναι μια δεξιά συνεχής κλιμακωτή συνάρτηση. Επομένως, οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων, είναι εκθετικά κατανεμημένοι και συμβολίζονται με $\{W_n, n \geq 1\}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$, όταν η $U(t) < 0$ τότε το ενδεχόμενο να γίνει αρνητικό το πλεόνασμα, κατά τη χρονική στιγμή W_i, ονομάζεται πιθανότητα χρεοκοπίας. Μια άμεση συνδεόμενη ποσότητα με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ο χρόνος χρεοκοπίας.

<u>Ορισμός 1.2</u> *Ως χρόνο χρεοκοπίας (Time of Ruin) για $t \geq 0$ ορίζουμε:*

$$T = inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\},$$

να είναι (T) ο χρόνος που για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική.

<u>Ορισμός 1.3</u> *Η πιθανότητα χρεοκοπίας (Probability of Ruin) με αρχικό αποθεματικό* $u \geq 0$, *είναι μια ποσότητα άμεσα συνδεδεμένη με τη στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος και ορίζεται ως:*

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας: $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Επισημαίνουμε ότι ο όρος χρεοκοπία, μπορεί να μην συμπίπτει με την κυριολεκτική έννοια, αλλά το χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε τη φερεγγυότητα του χαρτοφυλακίου ή της ασφαλιστική εταιρίας. Επιπλέον, στο κλασσικό μοντέλο η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση:

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx$$

η οποία είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση για το $\delta(u)$.

Στο κλασσικό μοντέλο η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx \qquad 1.1$$

με $u \geq 0$ και $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων. Παίρνοντας όριο για $u \to \infty$ και στα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης, έχουμε:

$$1 = \lim_{u\to\infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx\,, \qquad 1.2$$

και αλλάζοντας το ολοκλήρωμα με το όριο στην (1.2) παίρνουμε:

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c},$$

και βάση του ορισμού του περιθώριου ασφαλείας έχουμε:

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta},$$

δηλαδή, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δεν εξαρτάται από τις αποζημιώσεις αλλά από τη μέση τιμή. Για την πιθανότητα χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή μηδέν αποδεικνύεται ότι:

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta},$$

Ξαναγυρνώντας στην (1.1) αντικαθιστούμε τα παραπάνω και προκύπτει η εξίσωση:

$$\delta(u) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx$$

ή

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx \qquad 1.3$$

η οποία είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, βασική προϋπόθεση στο κλασσικό μοντέλο, είναι να ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους, (τα έσοδα περισσότερα από τα έξοδα) $ct \geq E[S(t)]$, δηλαδή, τα ασφάλιστρα που εισπράττουμε να επαρκούν στην κάλυψη των αναμενόμενων συνολικών ζημιών. Επειδή γνωρίζουμε ότι $N(t) \sim P(\lambda t)$, από την ταυτότητα του Wald προκύπτει ότι:

$$E[S(t)] = E[X]E[N(t)] = \lambda t E[X],$$

αντικαθιστώντας έχουμε:

$$c \geq \lambda E[X],$$

και βάση του περιθώριου ασφαλείας γνωρίζουμε ότι:

$$c = (1+\theta)\lambda E[X].$$

Επομένως, ορίζουμε την εξίσωση του *Lundberg* για το κλασσικό υπόδειγμα.

<u>Ορισμός 1.4</u> *Στο κλασσικό υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνων θεωρούμε μια ποσότητα R που ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης*

$$1 + (1+\theta)E(x)r = M_x(r) \qquad 1.4$$

ή

$$\lambda + cr = \lambda M_x(r)$$

και η ποσότητα r ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής (Adjustment Coefficient) και $M_x(r)$ η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων. Αυτονόητη προϋπόθεση για την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής είναι να υπάρχει η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων, εάν δεν υπάρχει η *ροπογεννήτρια (περίπτωση της Pareto) χρησιμοποιούνται ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας.*

<u>Σημείωση 1.1</u> *Ο συντελεστής προσαρμογής είναι ανεξάρτητος της συχνότητας του κινδύνου, λ, και εξαρτάται μόνο από το περιθώριο ασφαλείας θ και από τα χαρακτηριστικά του ύψους της αποζημίωσης, δηλαδή από τη μέση τιμή των αποζημιώσεων και της ροπογεννήτριας. Επίσης, η (1.4) έχει την τετριμμένη λύση $r = 0$. Αν όμως $\theta > 0$, τότε μπορεί να υπάρχει και θετική λύση που είναι η τιμή R.*

Στο κλασσικό μοντέλο η πιο γνωστή ανισότητα, είναι αυτή του *Lundberg*. Η ανισότητα του *Lundberg* συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας και το συντελεστή προσαρμογής και ταυτόχρονα δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνάρτηση με τον συντελεστή προσαρμογής και του αρχικού κεφαλαίου.

<u>Ορισμός 1.5</u> *Όταν γνωρίζουμε την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής, ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \qquad u \geq 0$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως ανισότητα του *Lundberg*. Η ερμηνεία της παραπάνω ανισότητας είναι ότι προσπαθεί να ελέγξει ποιά θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας στην χειρότερη περίπτωση. Προφανώς, όσο μεγαλύτερος ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη η πιθανότητα χρεοκοπίας για δεδομένο αρχικό αποθεματικό. Και όταν έχουμε δεδομένο συντελεστή προσαρμογής, όσο μεγαλώνει το αρχικό αποθεματικό, τόσο μικραίνει και πάλι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Άλλη μια χαρακτηριστική σχέση στο κλασσικό μοντέλο είναι ο ασυμπτωτικός τύπος των *Cramér – Lundberg*. Με την προϋπόθεση ότι ισχύει $\int_0^\infty x\, e^{Rx}\overline{F}(x)dx < \infty$, η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση:

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru}$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$$

όπου, $C > 0$ μια σταθερά που υπολογίζεται από το τύπο $C = \frac{\theta E[x]}{R\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx}$.

Μια άλλη μεταβλητή που μπορούμε να παρατηρήσουμε στη θεωρία κινδύνων είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u. Η μεταβλητή αυτή, συμβολίζεται ως L_i για $i = 1,2, \dots K$. Επομένως, για την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό που συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_1, το πλεόνασμα θα είναι $u_1 = U(t_1)$. Τότε:

$$L_1 = u - u_1.$$

Διαφορετικά οι τυχαίες μεταβλητές L, ονομάζονται κλιμακωτά ύψη και ορίζουμε ως K το πλήθος των $L_1, L_2, L_3, \dots$ και ισχύει ότι:

$$P(K = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K = 1) = \psi(0)\delta(0) = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K = 2) = [\psi(0)]^2\delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Και επομένως συμπεραίνουμε:

$$P(K = k) = [\psi(0)]^k\delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}$$

για $k = 0, 1, 2, \dots$ και άρα η K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή.

Αθροίζοντας όλα τα κλιμακωτά ύψη, παίρνουμε τη σωρευτική μεγιστική απώλεια (Maximal Aggregate Loss), δηλαδή:

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_K = \sum_{i=1}^{K} L_i .$$

Παρατηρούμε ότι τα $L_1, L_2, L_3, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και η κατανομή της L είναι μικτή διότι έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν και ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή, διότι η K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι $P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0)$ και $P(L \leq u) = \delta(u)$. Επίσης αποδεικνύεται ότι την ροπογεννήτρια της L ισχύει:

$$M_L(r) = \frac{\theta}{(1+\theta) - M_{L_1}(r)}$$

όπου, $M_{L_1}(r)$ η ροπογεννήτρια του κλιμακωτού ύψους και θ το περιθώριο ασφαλείας.

<u>Ορισμός 1.6</u> *Όταν υπάρχει μια πτώση του πλεονάσματος, η τυχαία μεταβλητή* L_1 *ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με πυκνότητα* $\frac{1}{\mu_1}[1-F(x)]$, *άρα:*

$$P(L_1 \leq x) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x [1-F(y)]dy = F_e\,.$$

Η οποία F_e *ορίζεται ως μια κατανομή για την ουρά των αποζημιώσεων (συχνά συμβολίζεται και ως* $H(x)$*):*

$$F_e(x) = 1-\overline{F_e}(x) = \int_0^x \frac{\overline{F}(y)}{E(x)}dy = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x [1-F(y)]dy = \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \overline{F}(y)dy$$

όπου, $\overline{F}(y) = 1-F(y)$ *η ουρά των αποζημιώσεων με πυκνότητα* $f_e(y) = \overline{F}(y)/E(x)$.

Άρα, $M_{L_1}(r) = -\frac{1}{r\mu_1} + \frac{1}{r\mu_1}M_x(r)$. Η f_e ονομάζεται συνάρτηση ισορροπίας.

Επιστρέφοντας στην πιθανότητα χρεοκοπίας, γνωρίζουμε ότι η $\psi(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση:

$$\psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)\overline{F}\,(x)dx + \frac{\lambda}{c}\int_t^\infty \overline{F}\,(x)dx\,. \qquad 1.5$$

Αναπτύσσοντάς την (1.5) έχουμε:

$$\psi(u) = \psi(0)\int_0^u \psi(u-x)\,f_e(x)dx + \psi(0)\overline{F}_e(u), \quad u \geq 0$$

ή

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x)\,f_e(x)dx + \frac{1}{1+\theta}\overline{F}_e(u), \quad u \geq 0 \qquad 1.6$$

και χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό *Laplace* στην (1.6) καταλήγουμε:

$$\hat{\psi}(s) = \frac{\frac{1}{1+\theta}\hat{\overline{F}}_e(s)}{1-\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(s)},$$

που είναι ο *Laplace* μετασχηματισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Τέλος, βάση της σωρευτικής μεγιστικής απώλειας η κατανομή της L συναρτήσει της κατανομής ισορροπίας είναι:

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{(1+\theta)^{n+1}} \overline{F}_e^{*n}(s)$$

1.2 Συνάρτηση των Gerber – Shiu

Η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* εισήχθη το 1998 και αποτελεί γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Κύριο χαρακτηριστικό της, είναι η από κοινού μελέτη του χρόνου χρεοκοπίας T, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ και τού πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$. Επιπλέον, λόγω της φύσης της ονομάζεται και αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (*Expected Discounted Penalty Function*). Παρακάτω παραθέτουμε τον ορισμό της, πρώτα όμως παραθέτουμε ορισμένα αποτελέσματα του ανανεωτικού προτύπου.

Γενίκευση του κλασικού μοντέλου, είναι το μοντέλο *Sparre – Andersen* ή ανανεωτικό υπόδειγμα. Σ' αυτό το μοντέλο, γίνεται η υπόθεση ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αποζημιώσεων, αφενός είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, αφετέρου ακολουθούν οποιαδήποτε κατανομή. Αν είναι η εκθετική, τότε επιστρέφουμε στο κλασσικό πρότυπο. Κατά συνέπεια, τώρα οι αφίξεις των απαιτήσεων θα παριστάνονται ως μια ανανεωτική διαδικασία. Το όνομα ανανεωτικό μοντέλο δεν είναι τυχαίο, διότι στους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων γίνεται ανανέωση του μοντέλου.

Ακολούθως παρουσιάζουμε τις παραπάνω ποσότητες του κλασικού μοντέλο πως αναπαρίστανται στο ανανεωτικό μοντέλο. Αρχικά, έστω X_i οι αποζημιώσεις και T_i οι ενδιάμεσοι χρόνοι με F και B οι συναρτήσεις κατανομής, αντίστοιχα. Επιπλέον, στο ανανεωτικό μοντέλο το περιθώριο ασφαλείας παίρνει τη μορφή:

$$\theta = \frac{cE[T]}{E[X]} - 1,$$

και η συνθήκη καθαρού κέρδους:

$$cE[T] > E[X]\,.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την εξής ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$\psi(u) = \varphi \int_0^u \psi(u-y)dH(y) + \varphi\overline{H}(u),$$

όπου $\varphi = \psi(0)$ και H η κατανομή για τα κλιμακωτά ύψη.

Επιπροσθέτως, συνδέοντας την (1.4) με τον μετασχηματισμό *Laplace* παίρνουμε την θεμελιώδη εξίσωση του *Lundberg*. Δηλαδή, $M_x(-s) = \hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f(x)$. Τότε $M_x(r) = M_x(-s)$ και επομένως:

$$1 + \frac{c}{\lambda} r = M_x(r) \Rightarrow s - \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c} M_x(-s) = 0 \Rightarrow s - \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{f}(s) = 0$$

Επίσης, ο συντελεστής προσαρμογής ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$M_T(-cr)M_X(r) = 1$$

όπου, M_T η ροπογεννήτρια των χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και M_X η ροπογεννήτρια των απαιτήσεων.

Περαιτέρω, στο ανανεωτικό μοντέλο ισχύει πάλι η ανισότητα του *Lundberg* και η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < \infty]}.$$

Επίσης, για τα κλιμακωτά ύψη ότι ίσχυε στο κλασσικό μοντέλο, το ίδιο ισχύει και στο ανανεωτικό, ασχέτως τι κατανομή ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι.

Εφόσον εδραιώσαμε τις ποσότητες του *Sparre – Andersen* μοντέλου τώρα κάνουμε μια εισαγωγή στο μοντέλο των *Gerber – Shiu.*

Ορισμός 1.7 *Ορίζουμε ως αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των Gerber – Shiu:*

$$\varphi_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right] \tag{1.7}$$

και προφανώς ισχύει:

$$\varphi_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(x,y) f(x,y,t|u) dt dx dy \tag{1.8}$$

όπου,

- $\delta \geq 0$: *ο συντελεστής προεξόφλησης ή μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace*,
- $w(U(T-), |U(T)|) = w(x,y)$: *η συνάρτηση ποινής, δηλαδή αν επέλθει χρεοκοπία τι ποινή (χρηματικό ποσό) θα πληρώσει η ασφαλιστική.*
- $I(T<\infty) = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβεί χρεοκοπία} \\ 0, & \text{αν δεν συμβεί χρεοκοπία} \end{cases}$, *η δείκτρια συνάρτηση.*
- $f(x,y,t|u)$: *η ελλειμματική από κοινού πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπίας,* του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και τού πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία με $\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y,t|u)dtdxdy = \psi(u)$.

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορεί να κάνει κάποιος, είναι όταν $\delta = 0$ και η $w(x,y) = 1$ τότε η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* είναι ίση με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Επιπλέον, ως δεύτερη ειδική περίπτωση της συνάρτησης των *Gerber – Shiu* είναι όταν έχουμε $\delta = 0$ και $w(x,y) = y$, παίρνουμε την μέση τιμή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Αντίστοιχα αν $\delta = 0$ και $w(x,y) = x$ τότε έχουμε την μέση τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Από την (1.8) δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και το μέγεθος της απαίτησης και αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική με παράμετρο β και βάση του νόμου ολικής πιθανότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(u|t,x)\, f_{X_1}(x) f_{T_1}(t)dxdt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^\infty \varphi(u|t,x)\, f_{X_1}(x)dx \right\} dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^{u+ct} \varphi(u+ct-x)\, f_{X_1}(x)dx + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} f_{X_1}(x)dx \right\} dt \\
&\quad + \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} \varphi(u+ct-x)\, f_{X_1}(x)dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct\, f_{X_1}(x)dx \right\} dt.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Στη δεύτερη ισότητα υποθέσαμε ότι τη χρονική στιγμή t η εμφάνιση της πρώτης απαίτησης είναι $U(t) = u + ct - x$ και άρα αν $\begin{cases} 0 \leq x \leq u+ct, & \text{τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία} \\ x > u+ct, & \text{τότε εμφανίζεται χρεοκοπία} \end{cases}$

Έτσι, αν $0 \leq x \leq u + ct$, επειδή δεν εμφανίζεται χρεοκοπία τη χρονική στιγμή t, η διαδικασία ανανεώνεται ξεκινώντας με αρχικό κεφάλαιο $u + \mathrm{ct} - \mathrm{x}$. Αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση, δηλαδή επέλθει χρεοκοπία τότε το ενδεχόμενο αυτό της δείκτριας ισούται με μονάδα και $U(T-) = u + ct, |U(T)| = x - u - ct$ οπότε για αυτό το λόγο σπάσαμε το ολοκλήρωμα σε δυο μέρη στην τελευταία ισότητα.

Θέτουμε $s = u + ct \Rightarrow t = (s-u)/c$ και $dt = ds/c$ και για $0 \leq t < \infty \Rightarrow u \leq s < \infty$, οπότε από την (1.9) παίρνουμε:

$$\varphi(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx \frac{1}{c} ds$$
$$+ \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty w(s, x-s) f(x) dx \frac{1}{c} ds$$

Θέτοντας, $\gamma(x) = \int_x^\infty w(x, y-s) f(y) dy$, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$c\varphi(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx \frac{1}{c} ds + \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(x) ds \qquad 1.10$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την (1.10) ως προς u.

(α_1) Έστω $g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx$

τότε:

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx dt = \frac{d}{du} \int_u^\infty g(u,s)\, ds$$
$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{dg(u,s)}{du} ds$$
$$= -\int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx + \frac{\lambda+\delta}{c} \int_u^\infty g(u,s)\, ds,$$

(α_2) Έστω $g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)$. Τότε,

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s) ds = \frac{d}{du} \int_u^\infty g(u,s)\, ds$$

$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{dg(u,s)}{du} ds = -\gamma(s) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty g(u,s)\, ds$$

Επομένως από την (1.10) έχουμε:

$$\varphi'(u) = \lambda\left\{-\int_0^u \varphi(u-x)\, f(x)dx \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)\, f(x)dxds\right\}$$
$$+ \lambda\left\{-\gamma(s) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds\right\}$$

$$\overset{(1.10)}{\Longrightarrow} c\varphi'(u) = -\lambda\left\{\int_0^u \varphi(u-x)\, f(x)dx + \gamma(u)\right\} + \frac{\lambda+\delta}{c} c\varphi(u)$$

$$\Rightarrow\ c\varphi'(u) = (\lambda+\delta)\varphi(u) - \lambda\int_0^u \varphi(u-x)\, f(x)dx - \lambda\gamma(u). \quad 1.11$$

Η οποία είναι η ολοκληροδιαφορική που ικανοποιεί η $\varphi(u)$ για $u \geq 0$. Προφανώς, επειδή για $\theta = 0,\ w(x,y) = 1$ είναι $\varphi(u) = \psi(u)$ και $\gamma(u) = \overline{F}(u)$, η (1.11) είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ήδη είδαμε για την $\psi(u)$. Στη συνέχεια, θα πάρουμε το μετασχηματισμό *Laplace* στην σχέση (1.11), ώστε να βρούμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της πιθανότητας χρεοκοπίας. Έστω ότι $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ και $\hat{\gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\gamma(x)dx$ είναι οι μετασχηματισμοί *Laplace*, έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx = [e^{-sx}\varphi(x)]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty (e^{-sx})'\, \varphi(x)dx$$
$$= -\varphi(0) + \int_0^\infty se^{-sx}\varphi(x)dx$$
$$= s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)$$

Άρα, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό *Laplace* στην (1.11), παίρνουμε:

$$c[s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)] = (\lambda+\delta)\hat{\varphi}(s) - \lambda\hat{\varphi}(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$
$$\Rightarrow \{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)\}\hat{\varphi}(s) = c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$
$$\Rightarrow \hat{\varphi}(s) = \frac{c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)} \quad 1.12$$

ή

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda\hat{\gamma}(s) - c\varphi(0)}{\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s)} \qquad 1.13$$

να είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της *Gerber – Shiu* συνάρτησης.

Αρχικά, θα εξετάσουμε τον παρονομαστή της εξίσωσης (1.13). Αναφέραμε πρωτύτερα ότι ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η θετική λύση της εξίσωσης του *Lundberg:*

$$1 + (1+\theta)E[X]r = M_x(r)$$

και γνωρίζουμε ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους:

$$c = (1+\theta)\lambda E[X] \Rightarrow \lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

Για $r = -s$ για s > 0, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως:

$$\lambda - cs = \lambda M_X(-s) \Rightarrow \lambda - cs = \lambda\hat{f}(s)$$

Άρα, βλέπουμε ότι για $\delta = 0$, ο παρονομαστής της (1.13) είναι η εξίσωση του *Lundberg.* Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι έχει μοναδική θετική ρίζα.

Η εξίσωση του παρονομαστή είναι η (γενικευμένη εξίσωση *Lundberg*)

$$\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s) = 0 \qquad 1.14$$

$$\Rightarrow l(s) = \lambda\hat{f}(s)$$

όπου, $l(s) = \lambda + \delta - cs$, ισχύει ότι $l(0) = \lambda + \delta$ και $\lambda\hat{f}(0) = \lambda$. Κατά συνέπεια, ισχύει ότι $l(0) \geq \lambda\hat{f}(0)$ και η κλίση της $l(s)$, είναι αρνητική. Επιπλέον, η συνάρτηση $\lambda\hat{f}(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s και ισχύει $\lim_{\delta\to 0}\rho(\delta) = 0$, όπου $\rho(\delta)$ είναι μια ρίζα της (1.14). Άρα, η εξίσωση του *Lundberg* έχει την ελάχιστη θετική ρίζα $\rho > 0$.

Η σχέση (1.12) γράφεται ως:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}.$$

Επειδή, $\hat{\varphi}(s) < \infty$ και $\lim_{s\to\rho} B(s) = 0$ έπεται ότι και $\lim_{s\to\rho} A(s) = 0$, διότι διαφορετικά αν $A(\rho) \coloneqq \lim_{s\to\rho} A(s) \neq 0$ θα έπρεπε να ισχύει ότι $\hat{\varphi}(\rho) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο.

$$
\begin{aligned}
B(s) &= B(s) - B(\rho) \\
&= cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s) - \left[c\rho - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(\rho)\right] \\
&= c(s - \rho) - \lambda\left[\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)\right] \\
&= (s - \rho)\left[c - \lambda \frac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}\right]
\end{aligned}
$$

και λοιπόν, $A(\rho) = 0 \ \Rightarrow c\varphi(0) = \lambda\hat{\gamma}(\rho)$. Άρα:

$$
c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda\hat{\gamma}(\rho) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda(s - \rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}.
$$

Τότε η (1.12) γράφεται ως:

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}(s) &= \frac{\lambda(s - \rho)\dfrac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}}{(s - \rho)\left[c - \lambda\dfrac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}\right]} \\
&= \frac{\lambda\dfrac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}}{c - \lambda\dfrac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}}.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Για μια δοθείσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τον τελεστή (*Dickson – Hipp*

$$
T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y) dy ,
$$

και ισχύει ότι $T_r f(0) = \hat{f}(r),\ T_0 f(x) = \overline{F}(x)$ και

$$
\widehat{T_r f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T_r f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y) dy dx ,
$$

για $0 \le x < \infty, x \le y < \infty \ \ \Rightarrow \ \ 0 \le y < \infty, 0 \le x \le y$. Άρα, με αλλαγή ορίων έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\widehat{T_r f}(s) &= \int_0^\infty \left\{\int_x^\infty e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y) dx\right\} dy \\
&= \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \left[\int_0^y e^{-x(r-s)} dx\right] dy \\
&= \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \frac{e^{-y(r-s)} - 1}{r - s} dy
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{r-s}\left\{\int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)dy - \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)\, dy\right\}$$

$$= \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{s-r},$$

και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του τελεστή στην (1.15), έχουμε:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda \widehat{T_r \gamma}(s)}{c - \lambda \widehat{T_r f}(s)} \qquad 1.16$$

$$\Rightarrow c\hat{\varphi}(s) = \lambda\hat{\varphi}(s)\widehat{T_r f}(s) + \lambda\widehat{T_r \gamma}(s),$$

παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* έχουμε:

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{u} \varphi(u-x)T_r f(x)dx + \frac{\lambda}{c}T_r\gamma(x), \qquad u \geq 0 \qquad 1.17$$

Θέτοντας τώρα, $\frac{\lambda}{c}T_r f(x)dx = Z(x)$ έχουμε:

$$\int_0^{\infty} Z(x)dx = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} T_r f(x)dx = \frac{\lambda}{c}\widehat{T_r f}(0) = \frac{\lambda}{c}\,\frac{\hat{f}(o) - \hat{f}(\rho)}{\rho - 0} = \frac{\lambda}{c}\,\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho}.$$

Όμως βάση της εξίσωσης του *Lundberg* έχουμε:

$$\lambda + \delta - c\rho = \lambda\hat{f}(\rho) \Rightarrow \lambda\left(-\hat{f}(\rho)\right) = c\rho - \delta,$$

επομένως:

$$\int_0^{\infty} Z(x)dx = \frac{c\rho - \delta}{c\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho} < 1,$$

θέτουμε $\int_0^{\infty} Z(x)dx = \frac{1}{1+\xi_\delta}$, όπου ξ_δ το αντίστοιχο περιθώριο ασφαλείας και έστω $G_\delta(u)$ να είναι η συνάρτηση κατανομής τέτοια ώστε:

$$G_\delta(u) = \frac{\int_0^{u} Z(x)dx}{\int_0^{\infty} Z(x)dx}$$

με συνάρτηση πυκνότητας:

$$g_\delta(u) = G'_\delta(u) = \frac{Z(u)}{\int_0^\infty Z(x)dx}.$$

Αν $H_\delta(u) = (1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}\, T_r\gamma(u)$, αντικαθιστώντας στην 1.17 παίρνουμε:

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \varphi(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u), \quad u \geq 0 \qquad 1.18$$

όπου,

- $\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho}$, με $\xi_0 = \theta$
- $\rho = \rho(\delta)$, η ελάχιστη θετική ρίζα της εξίσωσης του *Lundberg*,
- $g_\delta(x) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}}T_\rho f(x)$,
- $H_\delta(\theta) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}}T_\rho\gamma(u)$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση $\varphi_\delta(u)$ των *Gerber – Shiu* ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Γνωρίζουμε ότι ισχύει, $\hat{\bar{\bar{F}}}(s) = \frac{1-\hat{f}(s)}{s}$ και επειδή $\begin{cases} \frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{\lambda}{c}\hat{\bar{\bar{F}}}(\rho) \\ c = (1+\theta)\lambda E[X] \end{cases}$ συνεπάγεται ότι:

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{1}{1+\theta}\frac{\hat{\bar{\bar{F}}}(\rho)}{E(X)}. \qquad 1.19$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι, $f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)}$, Άρα, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *Laplace* έχουμε:

$$\hat{f}_e(x) = \frac{\hat{\bar{\bar{F}}}(x)}{E(x)},$$

ώστε αν κάνουμε αντικατάσταση στην 1.19, παίρνουμε:

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(\rho).$$

Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις $g_\delta(x) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}}T_\rho f(x)$ και $(1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\hat{\bar{\bar{F}}}(\rho)}$ οπότε έχουμε:

$$g_\delta(x) = \frac{T_\rho f(x)}{\hat{\hat{F}}(\rho)}$$
$$= \frac{\int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-ry}\, \overline{F}(y)dy}$$
$$= \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-ry} f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-ry}\, \overline{F}(y)dy}.$$

Και για την ουρά της G έχουμε:

$$\overline{G}_\delta(x) = \int_x^\infty g_\delta(t)dt = \frac{\int_x^\infty e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-ry} f(y)dydt}{\int_0^\infty e^{-ry}\, \overline{F}(y)dy}$$
$$= \frac{\overline{F}(x) - \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy}{\rho\int_0^\infty e^{-ry}\, \overline{F}(y)dy}$$
$$= \frac{\overline{F}(x) - T_\rho f(x)}{\rho \overline{F}(\rho)} = \frac{T_\rho \overline{F}(x)}{\hat{\hat{F}}(\rho)}.$$

Ορίζουμε, την δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για τα κλιμακωτά ύψη, με:

$$\overline{K}_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)^n \overline{G}^{*n}{}_\delta(x)$$

Τότε, η λύση της συνάρτησης των *Gerber – Shiu* δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u),$$

<u>Σημείωση 1.2</u> *Η $\overline{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής, δηλαδή της*

$$S = W_1 + W_2 + \cdots + W_M$$

με $M \sim G\left(\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\right)$ και η W έχει συνάρτηση κατανομής την G_δ.

Κατά συνέπεια, αποδεικνύεται ότι η δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$ και επομένως ο υπολογισμός της συνάρτησης των *Gerber – Shiu* ανάγεται στον υπολογισμό της $\overline{K}_\delta(u)$ που εξαρτάται κυρίως από τον υπολογισμό της συνάρτηση κατανομής $G_\delta(x)$.

Η βιβλιογραφία στην οποία βασιστήκαμε για την εδραίωση των παραπάνω ποσοτήτων, δηλαδή το θεωρητικό υπόβαθρο του κλασσικού μοντέλου (*Cramér – Lundberg* μοντέλο), του ανανεωτικού μοντέλου (*Sparre – Anderson* μοντέλο) και της συνάρτησης των *Gerber – Shiu,* ήταν των Χατζηκωνσταντινίδη (2014), Lin & Willmot (1999) και Dickson (2005).

2. Κεφάλαιο : Στοχαστικές Διαδικασίες *Lévy*

Αρχικά, στο παρών κεφάλαιο θα εισάγουμε κάποιες απαραίτητες μαθηματικές έννοιες που θα μας χρειαστούν στην ανάπτυξη, στην εύκολη κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων, αλλά και στην διευκόλυνση των αναγνωστών. Στόχος του κεφαλαίου είναι να αναπτύξουμε, αφενός μια σφαιρική εικόνα στις βασικές εισαγωγικές έννοιες, που θα μας χρειαστούν σε επόμενα κεφάλαια, αφετέρου η ανάπτυξη και επεξήγηση των σύγχρονων εννοιών, όπως της διαδικασίας *Lévy* και των κλιμακωτών συναρτήσεων (*Scale Function*) στην θεωρία κινδύνων.

Η συγγραφή του κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα των Kyprianou (2006), Papapantoleon (2000), Barnforff – Nielsen & Shephard (2012) αλλά και στις Πανεπιστημιακές σημειώσεις των Χατζηκωνσταντινίδη (2014) και Μαχαιρά (2013).

2.1 <u>Βασικές Έννοιες</u>

Αρχικά σε αυτή την παράγραφο, παραθέτουμε κάποιες έννοιες από την θεωρία μέτρου, την τοπολογία, των πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών που θα θέσουν τις θεωρητικές βάσεις για την εύκολη διατύπωση των υπόλοιπων παραγράφων.

<u>Ορισμός 2.1</u> *Έστω ένα μη κενό σύνολο Ω και Σ ένα πλήθος υποσυνόλων του Ω. Η Σ καλείται σ – άλγεβρα του συνόλου Ω, εάν ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $\Omega \in \Sigma$

(ii) *Αν* $A \in \Sigma$ *τότε πρέπει και* $A^c \in \Sigma$

(iii) *Έστω* $\langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία υποσυνόλων της Σ τότε,* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

Επιπλέον, καλούμε $\Sigma -$ μετρήσιμα στοιχεία, όλα εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν στην $\sigma -$ άλγεβρα και το ζεύγος (Ω, Σ), $\Sigma -$ μετρήσιμος χώρος.

Εφόσον καθορίσαμε τον ορισμό της $\sigma -$ άλγεβρας και των μετρήσιμων στοιχείων προβαίνουμε στον ορισμό του μέτρου που θα μας απασχολήσει (ειδικά το μέτρο του *Lévy*) αρκετά στα παρακάτω κεφάλαια.

<u>Ορισμός 2.2</u> *Έστω ένας μετρήσιμος χώρος* (Ω, Σ). *Μέτρο, μ, ονομάζουμε κάθε απεικόνιση* $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ *και θέλουμε να ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Από τα πιο δημοφιλή μέτρα είναι αυτό του *Lebesque*.

Επιπρόσθετα, μετά τα μετρήσιμα στοιχεία στο χώρο, μας ενδιαφέρουν και τα ενδεχόμενα καθ' αυτά, επομένως θα ορίσουμε και τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

<u>Ορισμός 2.3</u> *Έστω X μια συνάρτηση από το χώρο (Ω_1, Σ_1) στο χώρο (Ω_2, Σ_2) που μπορεί με κάποιο τρόπο να επιστρέψει τα στοιχεία του Σ_2 στο Σ_1, δηλαδή αν $X^{-1}(A) \in \Sigma_1$ για κάθε $A \in \Sigma_2$ τότε λέγεται μετρήσιμη συνάρτηση.*

Εφόσον δόθηκε ο ορισμούς για το χώρο μέτρου/ πιθανότητας και της μετρήσιμης συνάρτησης συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής.

<u>Ορισμός 2.4</u> *Έστω ο χώρος πιθανότητας (ή μέτρου) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, με Ω το δειγματικό μας χώρο, δηλαδή όλα τα στοιχεία, $\mathcal{F}$ μια σ −άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και P η πιθανότητα (ή μέτρο). Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση X από τον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ η $\sigma-$ άλγεβρα του Borel), τότε η X ονομάζεται τυχαία μεταβλητή.*

Στους παραπάνω ορισμούς βασίστηκαν οι ερευνητές και όρισαν τις δημοφιλείς μέχρι σήμερα έννοιες όπως η μέση τιμή, συνάρτηση κατανομής κ.τ.λ. Με γνώμονα την θεωρία πιθανοτήτων αλλά και σε συνδυασμό με τη θεωρία μέτρου συνεχίζουμε με τον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

<u>Ορισμός 2.5</u> *Έστω πάλι ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ονομάζουμε χαρακτηριστική συνάρτηση $\psi_X(u)$ της τυχαίας μεταβλητής X αν ισχύει για αυτή ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes:*

$$\psi_X(u) = E\left[e^{iuX}\right] = \int_{\Omega} e^{iuX(\omega)}\, P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, f_X(x)dx,$$

όπου, i το φανταστικό κομμάτι με $i = \sqrt{-1}$, $F_X(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X και $f_X(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας.

Οι ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι:

(i) $\psi_X(0) = 1$ και $|\psi_X(u)| \leq 1$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

(ii) Η χαρακτηριστική συνάρτηση υπάρχει για κάθε τυχαία μεταβλητή και είναι συνεχής.

(iii) Καθορίζει την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής. Αν δυο τυχαίες μεταβλητές έχουν ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση τότε έχουν και ίδια κατανομή.

(iv) Έστω δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y με χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\psi_X(u)$ και $\psi_Y(u)$ αντίστοιχα, τότε $\psi_{X+Y}(u) = \psi_X(u)\,\psi_Y(u)$.

Σημείωση 2.1 *Σε πολλές περιπτώσεις γίνεται χρήση του λογαρίθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης, δηλαδή:*

$$\Psi_X(u) = \log \psi_X(u) \iff \psi_X(u) = e^{\Psi_X(u)}.$$

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε ορισμένες ποσότητες από τη στοχαστική θεωρία, διότι όπως και στην καθημερινότητά μας έτσι και στα μαθηματικά αρκετά στοιχεία είναι στοχαστικά, δηλαδή τυχαία και όχι ντετερμινιστικά. Παραθέτουμε το στοχαστικό κομμάτι του κεφαλαίου, παρουσιάζοντας κάποιους βασικούς ορισμούς που θα μας οδηγήσουν στον στόχο του κεφαλαίου αυτού, δηλαδή τον ορισμό των *Lévy* διαδικασιών και μεταγενέστερα στις κλιμακωτές συναρτήσεις. Αρχικά, εισάγουμε έναν ορισμό που θα τον συναντάμε συνέχεια, τον ορισμό των στάσιμων και ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ορισμός 2.5 *Έστω μια στοχαστική διαδικασία $X \coloneqq \{X_t : t \in T\}$. Θα λέμε ότι η X διαθέτει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν η X_u είναι ανεξάρτητη των $X_{t+k} - X_t$ για $u \in [0, t]$ και $t, k > 0$. Ενώ λέμε ότι έχει ισόνομες προσαυξήσεις όταν για κάθε $s, t, u, \upsilon \in \mathbb{R}_+$ με $0 \leq s \leq t, 0 \leq u \leq \upsilon$ και $t - s = u - \upsilon$ τότε $P_{N_t - N_s} = P_{N_\upsilon - N_u}$.*

Ορισμός 2.6 *Έστω (Ω, Σ) ένας χώρος πιθανότητας και I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Μια οικογένεια $\langle \Sigma_i \rangle_{i \in I}$, $\sigma -$ υποαλγευρών της Σ, ονομάζεται διύλιση ή φιλτράρισμα (filtration) αν η $\langle \Sigma_i \rangle_{i \in I}$ είναι αύξουσα. Δηλαδή $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j$ για κάθε $i, j \in I$ με $i \leq j$.*

Η φυσική διύλιση αποτελεί ένα φιλτράρισμα που σε κάθε χρονική στιγμή εμπεριέχει την πληροφορία που έχουμε στη διάθεσή μας για μια στοχαστική διαδικασία. Ο συνδυασμός του φιλτραρίσματος και της $\sigma -$ άλγεβρας, μας δίνει όλη την πληροφορία αν δεσμεύσουμε ως προς αυτήν στην μέση τιμή, δηλαδή αν έχουμε τη μέση τιμή $E[X_t|\mathcal{F}_s]$ η ποσότητα X_t είναι η τυχαία μας μεταβλητή και $\mathcal{F}_s$ είναι η πληροφορία που έχουμε, το παρελθόν, της X_t.

2.2 Διαδικασίες *Lévy*

Προτού δούμε τις διαδικασίες *Lévy* θα παραθέσουμε μερικούς ορισμούς, όπως τον ορισμό του *Martingale*, της διαδικασίας *Poisson* και της κίνησης *Brown*.

Πριν προβούμε στον ορισμό των *Martingale* ξεκαθαρίζουμε την έννοιά του. Στον χώρο των πιθανοτήτων ένα *Martingale* είναι ένα υπόδειγμα δίκαιου παιχνιδιού όπου η γνώση των ιστορικών γεγονότων δε βοηθά στην πρόβλεψη του μέσου μελλοντικού κέρδους. Συγκεκριμένα, ένα *Martingale* είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία, για την οποία σε ένα συγκεκριμένο χρόνο η προσδοκία της επόμενης τιμής στην ακολουθία, είναι ίση με την παρατηρηθείσα τιμή στο παρόν, ακόμα και με τη γνώση όλων των προηγούμενων παρατηρούμενων τιμών.

Ορισμός 2.7 *Έστω ένας χώρος πιθανότητας* (Ω, Σ, P). *Η ακολουθία* $\langle X_i \rangle_{i \in I}$ *είναι οικογένεια τυχαίων μεταβλητών* $X_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$, *με το σύνολο δεικτών Ι μερικώς διατεταγμένο, και* $\langle \Sigma_i \rangle_{i \in I}$ *είναι μια διύλιση. Λέμε ότι η οικογένεια* $\langle X_i \rangle_{i \in I}$ *είναι ένα Martingale ως προς την* $\langle \Sigma_i \rangle_{i \in I}$ *(ή ένα* $\langle \Sigma_i \rangle_{i \in I} -$ *Martingale) αν ισχύουν τα εξής:*

(i) $X_i \in \mathcal{L}^1(P)$[1] *για κάθε* $i \in I$

(ii) *Η* $\langle X_i \rangle_{i \in I}$ *είναι προσαρμοσμένη στην* $\langle \Sigma_i \rangle_{i \in I}$

(iii) $E\left[X_j \middle| \Sigma_i\right] = X_i$, $P|\Sigma_i -$ *σχεδόν βέβαια*[2] *για κάθε* $i, j \in I$ *με* $i \leq j$.

Παρακάτω ορίζουμε την κίνηση *Brown* (ή pedesis) η οποία ερευνήθηκε από τον βοτανολόγο Robert Brown και είναι μια τυχαία κίνηση σωματιδίων που αιωρούνται στο χώρο. Το μαθηματικό μοντέλο της κίνησης *Brown* προσπαθεί να περιγράψει τέτοιες ακαθόριστες – τυχαίες κινήσεις στο χώρο. Το μοντέλο έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινότητα, για παράδειγμα στις μετοχές των χρηματιστηρίων, στα (ηλεκτρομαγνητικά) σήματα κ.τ.λ. Η κίνηση *Brown* είναι μια από τις πιο απλές στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου.

Ορισμός 2.8 *Μια στοχαστική διαδικασία* $\langle B_t \rangle_{t \in \mathbb{R}_+}$ *θα καλείται κίνηση Brown αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(i) $B_0 = 0$, $P -$ *σχεδόν βέβαια*[3]

(ii) *Οι τροχιές (δειγματικές συναρτήσεις) της κίνησης* $B.(\omega) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής για* $P -$ *σχεδόν όλα τα* $\omega \in \Omega$.

[1] Όλες οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, ο εκθέτης (1) υποδηλώνει πόσες φορές ολοκληρώσιμη είναι η συνάρτηση. Ο χώρος αυτός είναι γνωστός ως $\mathcal{L}^p$ χώρος ή χώρος του Lebesque.

[2] Εννοούμε ότι συμβαίνει με σχεδόν πιθανότητα 1, δηλαδή $P\{E\left[X_j \middle| \Sigma_i\right] = X_i\} = 1$.

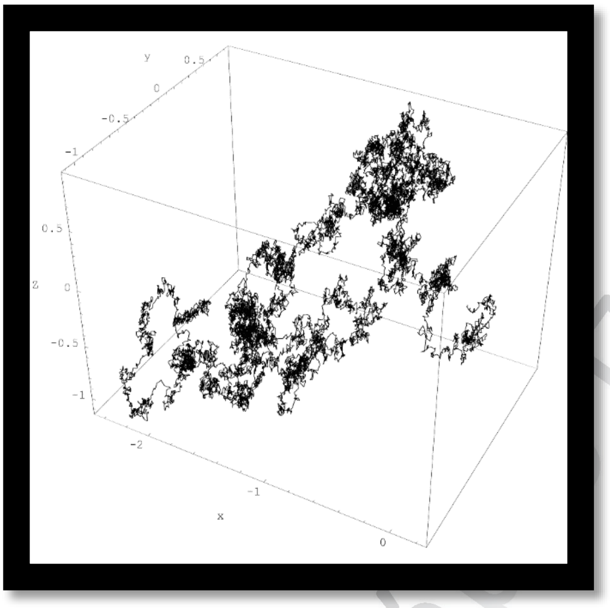
[3] $P\{W_0 = 0\} = 1$

(iii) *Η* $\langle B_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις*

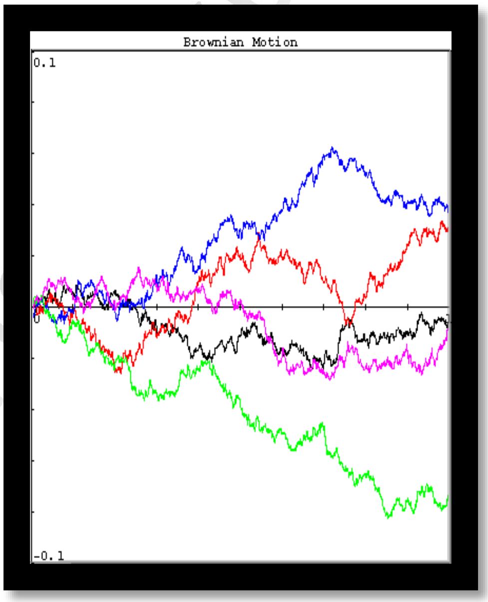
(iv) *Για κάθε* $0 \le s \le t,\ B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

Η κίνηση *Brown* ονομάζεται τυπική κίνηση *Brown* ή ανέλιξη *Wiener* και θα συμβολίζεται με W_t.

<u>Ορισμός 2.9</u> *Η στοχαστική διαδικασία* $\langle X_t \rangle_{t\in\mathbb{R}_+}$ *με* $X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$, *για κάθε* $t \ge 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ *και* $\sigma > 0$ *ονομάζεται Γεωμετρική Κίνηση Brown.*



Σχήμα 2.1: 3D διαδικασία Wiener



Σχήμα 2.2: Πολλαπλή κίνηση Brown

Πριν δώσουμε τον ορισμού της διαδικασίας *Poisson*, θα παραθέσουμε έναν άλλο εξίσου σημαντικό ορισμό, τον ορισμό του απλού τυχαίου περιπάτου που μπορεί να περιγράψει τα βήματα (άλματα) μιας στοχαστικής διαδικασίας. Επιπλέον, ο τυχαίος περίπατος είναι μια μαθηματική τυποποίηση μιας διαδρομής που αποτελείται από μία διαδοχή τυχαίων βημάτων.

<u>Ορισμός 2.10</u> *Έστω* $Y_k,\ k \ge 1$ *ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Τότε:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k ,$$

ονομάζεται τυχαίος περίπατος.

Οι τυχαίοι περίπατοι έχουν στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις: $\mathrm{Y_k} = \mathrm{S_k} - \mathrm{S_{k-1}}$, για $\mathrm{k} \ge 1$.

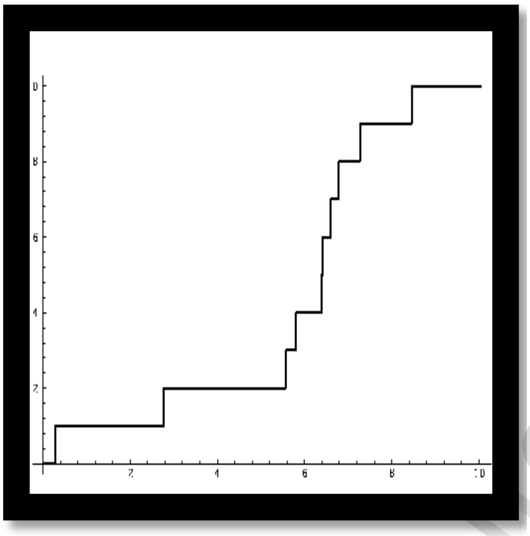
<u>Ορισμός 2.11</u> *Μια διαδικασία μη αρνητικών αριθμών* $N = \{N_t : t \geq 0\}$ *ορισμένη στο χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *λέγεται διαδικασία Poisson με ένταση* $\lambda > 0$ *αν ισχύουν τα εξής:*

(i) *Τα μονοπάτια της* N *είναι* $P -$ *σχεδόν βέβαια* $C\grave{a}dl\grave{a}g$, *δηλαδή συνεχή από δεξιά και να υπάρχει το αριστερό όριο.*

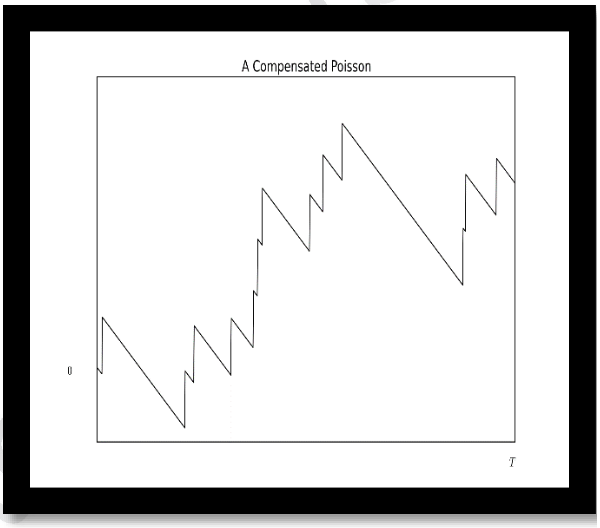
(ii) $N_0 = 0$.

(iii) *Η διαδικασία* N_t *έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις.*

(iv) *Η* $N_t \sim P(\lambda t), t \geq 0$.



Σχήμα 2.3: Διαδικασία Poisson



Σχήμα 2.4: Αντισταθμισμένη Poisson

Η N είναι απαριθμήτρια διαδικασία διότι ακολουθεί την *Poisson* κατανομή, δηλαδή είναι διαδικασία που περιγράφει τον αριθμό των συμβάντων εντός ενός χρονικού διαστήματος.

Ανάλογα με τα μονοπάτια της κίνησης *Brown* προκύπτουν και τα μονοπάτια των διαδικασιών *Poisson*, τα οποία όμως δεν είναι συνεχή, αλλά τμηματικά συνεχή με άλματα μεγέθους μιας μονάδας. Άμεσα, μπορούμε να ορίσουμε την σύνθετη διαδικασία *Poisson* και την αντισταθμισμένη διαδικασία *Poisson*.

<u>Ορισμός 2.12</u> *Έστω* $N(t)$ *μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Ως σύνθετη Poisson διαδικασία με ρυθμό* $\lambda > 0$ *και κατανομή αλμάτων* $F(x)$ *θα ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία:*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}\,, \qquad t \geq 0$$

Με $N(t)$ ανεξάρτητη των $Y_i\,, i \geq 1$ που είναι το μέγεθος των αλμάτων, τα οποία είναι ανεξάρτητα και ισόνομα με συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

<u>Σημείωση 2.2</u> *Στη περίπτωση που $Y_i = 1$ τότε η σύνθετη διαδικασία Poisson καταλήγει να είναι η απλή διαδικασία Poisson, που είναι ειδική περίπτωση της σύνθετης.*

Ως τελικό ορισμό, πριν μπούμε στις *Lévy*, θα δώσουμε την διαδικασία Γάμμα. Είναι μια διαδικασία όχι και τόσο γνωστή, αν και με πολλές εφαρμογές και εκτενείς αναλύσεις στην Μπεϋζιανή στατιστική και στην αστροφυσική, αλλά όχι τόσο προσιτή στην θεωρία κινδύνων. Η διαδικασία Γάμμα είναι μια τυχαία διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ακολουθούν την γάμμα κατανομή. Συχνά γράφουμε ως $\Gamma(t;\gamma,\lambda)$ το αύξων καθαρό άλμα μιας διαδικασία *Lévy* με ένταση μέτρου $\nu(x) = \gamma x^{-1} e^{-\lambda x}$ για θετικό x. Έτσι για το μέγεθος των αλμάτων της που βρίσκονται σε ένα απειροελάχιστο διάστημα $[x, x + dx]$ συμβαίνουν ως μιας διαδικασία *Poisson* με ένταση $\nu(dx)$. Η παράμετρος γ ελέγχει τον ρυθμό άφιξης των αλμάτων και η παράμετρος κλίμακας λ ελέγχει το μέγεθος των αλμάτων. Τέλος, έχει ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες:

(i) $\alpha\Gamma(t;\gamma,\lambda) = \Gamma\left(t;\gamma,\frac{\lambda}{\alpha}\right)$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Gamma\left(\frac{\gamma t}{\lambda},\frac{\gamma t}{\lambda^2}\right)$, *όπου Y_i το μέγεθος των αλμάτων*

(iii) $E[X_t^n] = \lambda^{-n}\Gamma(\gamma t + n)/\Gamma(\gamma t)$

(iv) $\Gamma(t;\gamma_1,\lambda) + \Gamma(t;\gamma_2,\lambda) = \Gamma(t;\gamma_1 + \gamma_2,\lambda)$

(v) $E\left[e^{\theta Y_t}\right] = \left(1 - \frac{\theta}{\lambda}\right)^{-\gamma t}, \quad \theta < \lambda$

Στη θεωρία πιθανοτήτων, μια διαδικασία *Lévy* είναι στοχαστική διαδικασία με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, οι οποίες αντιπροσωπεύουν την κίνηση ενός σημείου, του οποίου οι διαδοχικές μετατοπίσεις είναι τυχαίες και ανεξάρτητες και στατιστικά πανομοιότυπες σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα του ίδιου μήκους. Επομένως, μια διαδικασία *Lévy* μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχούς χρόνου διαδικασία ανάλογη ενός τυχαίου περίπατου. Τα ποιο γνωστά παραδείγματα της διαδικασίας *Lévy* είναι η κίνηση *Brown* και η διαδικασία *Poisson*. Πέραν της κίνησης *Brown* με τάση (drift) και των ντετερμινιστικών περιπτώσεων, όλες οι άλλες *Lévy* διαδικασίες έχουν ασυνεχή μονοπάτια.

<u>Ορισμός 2.13</u> *Μια διαδικασία $X = \{X_t : t \geq 0\}$ ορισμένη στον χώρο πιθανοτήτας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ λέγεται διαδικασία Lévy αν ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) Οι τροχιές - μονοπάτια της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t : t \geq 0\}$ κάτω από το μέτρο πιθανότητας P είναι από δεξιά συνεχείς με την ύπαρξη του αριστερού ορίου, P −σχεδόν βέβαια.

(ii) $X_0 = 0, P - $ *σχεδόν βέβαια* $(P\{X_0 = 0\} = 1)$

(iii) *Έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις.*

Καθώς έχουμε διαδικασία *Lévy*, γνωρίζουμε ότι η X είναι μια ισχυρή διαδικασία *Markov* (*Strong Markov Process*) (βλ. Kyprianou (2006)).

<u>Ορισμός 2.14</u> *Έστω ο χώρος πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *και έστω* $\{\mathcal{F}_s\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *μια διύλιση. Μια στοχαστική διαδικασία* $X = \{X_t : t \geq 0\}$ *προσαρμοσμένη στην διύλιση λέμε ότι ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν για κάθε* $A \in \mathcal{F}$ *ισχύει:*

$$P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_s)$$

Δηλαδή αν ψάχνουμε την πιθανότητα ένα γεγονός να συμβεί στο μέλλον, αυτό εξαρτάται μόνο από την θέση του ακριβώς την προηγούμενη στιγμή και είναι ανεξάρτητο όλης της υπόλοιπης παρελθοντικής πληροφορίας. Για την ισχυρή ιδιότητα Markov, έχουμε πάλι μια διαδικασία X με χρόνο διακοπής (Stopping Time) τ *και να ισχύει ότι* $\{\tau < \infty\}$, *τότε για κάθε* $t \geq 0$, *και για κάθε* $A \in \mathcal{F}$ *ισχύει* $P[X_{t+\tau} \in A|\mathcal{F}_\tau] = P[X_{t+\tau} \in A|X_\tau]$.

Μια ξεχωριστή ιδιότητα των διαδικασιών *Lévy* είναι η απείρως διαιρετή κατανομή (*Infinite Divisible Distributions*). Στη θεωρία πιθανοτήτων, μια κατανομή είναι απείρως διαιρετή εάν μπορεί να εκφραστεί ως η κατανομή πιθανότητας του αθροίσματος ενός αυθαίρετου αριθμού από ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

<u>Ορισμός 2.15</u> *Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει απείρως διαιρετή κατανομή αν για κάθε* $n = 1,2, \dots$ *υπάρχει μια ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών* $Y_1, \dots, Y_n$ *έτσι ώστε να ισχύει:*

$$X \stackrel{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_n \, .$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι μια κατανομή πιθανότητας μ είναι απείρως διαιρετή κατανομή, αν για κάθε $n = 1,2, \dots$ υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας τέτοια ώστε $\mu = \mu_n^{*n}$, με μ_n^{*n} να δηλώνει τη n – οστή συνέλιξη της μ.

Όταν το πλήθος των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών είναι αρκετά μεγάλο, $n \to \infty$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X μοιάζει να διαιρείται σε άπειρα ανεξάρτητα και ισόνομα μεταξύ τους τμήματα.

<u>Σημείωση 2.3</u> *Βάση του παραπάνω αποτελέσματος, αν έχουμε μια στοχαστική διαδικασία που έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, η κατανομή της για κάθε συγκεκριμένη στιγμή* t, *είναι απείρως διαιρετή.*

<u>Σημείωση 2.4</u> *Αν X_t μια διαδικασία Lévy, τότε για κάθε t η X_t διαθέτει μια απείρως διαιρετή κατανομή. Αντίστροφα, αν F είναι μια απείρως διαιρετή κατανομή, τότε υπάρχει μια διαδικασία Lévy X_t τέτοια ώστε η κατανομή της X_1 να δίνεται από την F.*

Ένας τρόπος να μελετήσουμε πότε μια δοσμένη τυχαία μεταβλητή έχει απείρως διαιρετή κατανομή είναι μέσου του χαρακτηριστικού της εκθέτη. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει χαρακτηριστικό εκθέτη $\Psi(u) \coloneqq -logE[e^{iuX}]$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Τότε η X έχει μια απείρως διαιρετή κατανομή, αν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας χαρακτηριστικός εκθέτης μιας κατανομής πιθανότητας, έστω Ψ_n , ώστε $\Psi(u) = n\Psi_n(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Μια αναπαράσταση που συνδέει άμεσα το σύνολο των άπειρων διαιρετών κατανομών με τη χαρακτηριστική συνάρτηση, είναι η *Lévy – Khintchine* αναπαράσταση.

<u>Θεώρημα 2.1</u> *Μια κατανομή πιθανότητας μ, μιας τυχαίας μεταβλητής X, είναι απείρως διαιρετή κατανομή με χαρακτηριστικό εκθέτη, Ψ,*

$$\varphi_X = E\left[e^{itX}\right] = \int_R e^{itx}\mu(dx) = e^{-\Psi(t)} \text{ , } \forall\, t \in R$$

αν και μόνο αν, υπάρχει μια τριπλέτα, τριπλέτα Levy ή χαρακτηριστική τριπλέτα, (b, c, v), όπου $b \in R$, $c \geq 0$ και v είναι ένα μέτρο με μάζα στο $R - \{0\}$ με:

(i) $\int_R (1\text{^}x^2)v(dx) < \infty$

(ii) $v\{0\} = 0$

τέτοιο ώστε:

$$\Psi(t) = ibt + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_R [1 - e^{itx} + itx\, I(|x| < 1)]\, v(dx)$$

όπου, $v(dx)$ είναι το μέτρο του Levy που ικανοποιεί τις σχέσεις (a) $\int_R (1\text{^}x^2)v(dx) < \infty$ που δηλώνει το ελάχιστο μεταξύ της μονάδας και του x^2, (b) $v\{0\} = 0$ και (c) $v(dx) = f(x)dx$, με $ibt = i\langle b, \lambda\rangle$ προέρχεται από την μετατόπιση του $-b$, το οποίο $b \in R$ είναι ο όρος τάση και $\sigma \ \geq 0$ ο συντελεστής διάχυσης.

Η ποσότητα $\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 = \frac{1}{2}Q(t)$, προέρχεται από το κομμάτι της κίνησης *Brown*: $\sqrt{Q}\, B_t$ και η δείκτρια $I(|x| < 1)v(dx)$, δίνει την ένταση μιας σύνθετης διαδικασίας *Poisson* και μας δίνει μονάδα όταν συμβαίνει το ενδεχόμενο και μηδέν όταν δεν συμβαίνει.

Παρατηρούμε ότι μια *Lévy* διαδικασία μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω τριών συνιστωσών: μιας γραμμικής τάσης, μιας κίνησης *Brown* και μιας ανεξάρτητων διαδικασιών

Poisson με διαφορετικά μεγέθη αλμάτων, με $v(dx)$ να αναπαριστά το ρυθμό άφιξης των αλμάτων μιας διαδικασία *Poisson* με μέγεθος αλμάτων x.

<u>Σημείωση 2.4</u> *Για να είναι καλά ορισμένο το μέτρο, στην αναπαράσταση Lévy – Khintchine θα πρέπει όπως προαναφέραμε να ικανοποιεί τη συνθήκη* $\int_R (1\wedge x^2) v(dx) < \infty$, *δηλαδή να είναι πεπερασμένο το ολοκλήρωμα του ελαχίστου του ζεύγους της μονάδας και του* x^2. *Αναλύοντας περαιτέρω αυτή τη σχέση μερικά βήματα, παρατηρούμε μια καλύτερη εικόνα της συμπεριφοράς του μέτρου, δηλαδή:*

$$\int_R (1\wedge x^2) v(dx) = \int_{|x|<1} x^2 v(dx) + \int_{|x|\geq 1} v(dx) = \int_{|x|<1} x^2 v(dx) + v(|x| \geq 1) < \infty$$

και οι δυο ποσότητες είναι φραγμένες διότι η αρχική συνθήκη ήταν φραγμένη. Με άλλα λόγια η v *σε όλο το πεδίου ορισμού της έχει πεπερασμένη τιμή σχεδόν βέβαια και κατά συνέπεια η στοχαστική διαδικασία που χαρακτηρίζει τη Lévy, δεν αποκλίνει.*

Επομένως, συνοψίζοντας τα παραπάνω, είδαμε ότι κάθε διαδικασία *Lévy* μπορεί να συνδέεται με το μέτρο μιας απείρως διαιρετής κατανομής. Το αντίθετο, είναι επίσης σωστό, δηλαδή, να έχουμε μια τυχαία μεταβλητή X, της οποίας το μέτρο να είναι απείρως διαιρετό να κατασκευάσουμε μια διαδικασία *Lévy* $U = \langle U_t \rangle_{0\leq t\leq T}$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}(U_1) := \mathcal{L}(U)$. Αυτό είναι το θέμα του θεωρήματος Ανάλυσης *Lévy – Itô* (*Lévy – Itô* Decomposition) που θα δούμε παρακάτω. Επιπλέον, η πιο απλή διαδικασία *Lévy* είναι η γραμμική μετατόπιση (*linear drift*), η οποία είναι μια ντετερμινιστική διαδικασία. Επιπρόσθετα, η κίνηση *Brown* είναι η μόνη, μη – ντετερμινιστική, διαδικασία *Lévy* με δεξιά συνεχή δειγματικά μονοπάτια. Άλλα παραδείγματα της *Lévy* είναι η *Poisson* και *Compound Poisson* διαδικασία. Τέλος, θα δούμε πιο αναλυτικά το μέτρο του *Lévy*, το οποίο θα παίξει καταλυτικό ρόλο στην ανάλυση των μοντέλων μας, και θα αναφέρουμε τα χαρακτηριστικά του.

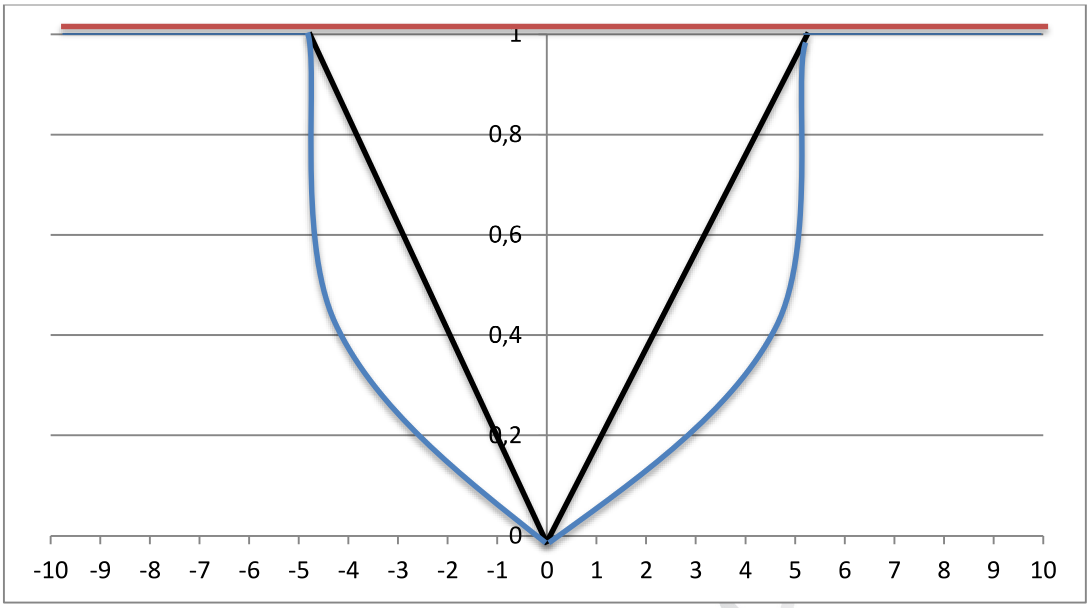
2.3 <u>Μέτρο του *Lévy*</u>

Όπως προείπαμε το μέτρο του *Lévy*, v, είναι μέτρο στον R με μάζα στον $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε:

(i) $v(0) = 0$

(ii) $\int_R (1\wedge x^2) v(dx) < \infty$

Το μέτρο του *Lévy* περιγράφει τον αναμενόμενο αριθμό των αλμάτων σε συγκεκριμένο ύψος σε ένα χρονικό διάστημα μήκους ένα (όπως φαίνεται και από το παρακάτω γράφημα).



Σχήμα 2.5:. *Το μέτρο του Lévy πρέπει να ολοκληρώνει την* $|x|^2\text{^}1$ *(μπλε γραμμή), να έχει πεπερασμένη διακύμανση αν υπάρχει το ολοκλήρωμα της* $|x|^2\text{^}1$ *(μαύρη γραμμή) και να είναι πεπερασμένο αν υπάρχει το ολοκλήρωμα της μονάδας (κόκκινη γραμμή).*

Πρόταση 2.1 *Έστω X, διαδικασία Lévy με τριπλέτα* (b, c, v),

(1) *Αν* $v(R) < \infty$, *τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της X έχουν πεπερασμένο αριθμό αλμάτων σε κάθε διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία Lévy έχει πεπερασμένη δραστηριότητα (Finite Activity Lévy Process).*

(2) *Αν* $v(R) = \infty$, *τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της U έχουν άπειρο αριθμό αλμάτων σε κάθε διάστημα. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία Lévy έχει άπειρη δραστηριότητα (Infinite Activity Lévy Process)*

Για το αν η διαδικασία *Lévy* έχει πεπερασμένη διακύμανση ή όχι εξαρτάται από το μέτρο του *Lévy* (και σχετικά με την παρουσία ή την απουσία της κίνησης *Brown*).

Πρόταση 2.2 *Έστω X, διαδικασία Lévy με τριπλέτα* (b, c, v),

(1) *Αν* $c = 0$ *και* $\int_{|x|\leq 1} |x|\, v(dx) < \infty$ *τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της X έχουν πεπερασμένη διακύμανση.*

(2) *Αν* $c \neq 0$ *και* $\int_{|x|\leq 1} |x|\, v(dx) = \infty$ *τότε σχεδόν όλα τα μονοπάτια της X έχουν άπειρη διακύμανση.*

Πρόταση 2.3 *Για τις ροπές μιας Lévy έχουμε:*

(1) X_t έχει πεπερασμένη ρ - οστή ροπή για $\rho \in R$ $(E[X_t^\rho] < \infty)$ αν και μόνο αν $\int_{|x|\geq 1} |x|^\rho \, v(dx) < \infty$.

(2) X_t έχει πεπερασμένη ρ-οστή εκθετική ροπή για $\rho \in R(E[e^{\rho U_t}] < \infty)$ αν και μόνο αν $\int_{|x|\geq 1} e^{\rho x} \, v(dx) < \infty$

Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε από τα παραπάνω ότι η υπόθεση $v\{0\} = 0$ είναι περιττή διότι, λόγω της πρότασης περί δραστηριότητας του μέτρου, αντιλαμβανόμαστε ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για μηδενικά άλματα.

2.4 Ανάλυση *Lévy - Itô* (Decomposition)

Αρχικά, γίνεται μια σύντομη σύνοψη των παραπάνω για να γίνει η σύνδεση με τον ανάλυση *Lévy - Itô* (decomposition). Είδαμε ότι κάθε διαδικασία *Lévy* έχει μια απείρως διαιρετή κατανομή με την αναπαράσταση της κλάσης κατανομών από την αναπαράσταση *Lévy – Khintchine*. Η ανάλυση των *Lévy - Itô* είναι μια μέθοδος που προσφέρει μια ολοκληρωμένη εικόνα για τα μονοπάτια της διαδικασίας *Lévy* χωρίζοντας σε συνιστώσες τη μορφή της. Έτσι, παρέχεται η δυνατότητα μελέτης στα αθροίσματα των συνιστωσών της. Αυτές οι συνιστώσες είναι οι εξής: ανεξάρτητα αθροίσματα, μια κίνηση *Brown* με γραμμική τάση και αριθμήσιμες ανεξάρτητες σύνθετες διαδικασίες *Poisson* με διαφορετικά μεγέθη αλμάτων και γραμμική τάση.

Θεώρημα 2.2 *Έστω η τριπλέτα, (b, σ, v) όπως τα ορίσαμε στο θεώρημα Lévy – Khintchine. Τότε υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον οποίο υπάρχουν τέσσερις ανεξάρτητες διαδικασίες Lévy, $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ και $X^{(4)}$, όπου η $X^{(1)}$ είναι μια γραμμική τάση, η $X^{(2)}$ είναι μια κίνηση Brown, η $X^{(3)}$ είναι μια σύνθετη αντισταθμισμένη διαδικασία Poisson και $X^{(4)}$ είναι ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο Martingale (καθαρό jump) με σχεδόν βέβαια αριθμήσιμο αριθμό αλμάτων μεγέθους μικρότερου της μονάδας σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Παίρνοντας, $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} + X^{(4)}$, τότε υπάρχει χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται η διαδικασία Levy $X = \langle X_t \rangle_{0\leq t\leq T}$ με χαρακτηριστικό εκθέτη:*

$$\Psi(t) = itb - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_R \left(e^{itx} - 1 - itx\, I(|x| < 1)v(dx)\right. \; t \in \mathbb{R}.$$

Ο χαρακτηριστικός εκθέτης Ψ που ανήκει σε μια απείρως διαιρετή κατανομή μπορεί επίσης να γραφτεί στη μορφή:

$$\Psi(t) = \left\{ibt + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\} + \left\{\nu[R-(-1,1)]\int_{|x|\geq 1}\left(1-e^{itx}\right)\frac{\nu(dx)}{\nu[R-(-1,1)}\right\}$$
$$+\left\{\int_{0<|x|<1}(1-e^{itx}+itx)\nu(dx)\right\} \quad \forall\, t, b \in R, \sigma \geq 0$$

και ν το Lévy όπως ορίστηκε στο παραπάνω θεώρημα.

Η ανάλυση *Lévy – Itô* είναι μαθηματικά δύσκολο να αποδειχθεί, εδώ θα πάμε μέσω μερικών βημάτων της απόδειξης διότι μας δείχνει αρκετά για τη δομή των αλμάτων μιας διαδικασίας *Lévy*.

Χωρίζουμε την $\Psi(t)$ σε τέσσερα κομμάτια: $\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \Psi^{(4)}$,

όπου,

- $\Psi^{(1)}(t) = itb$,
- $\Psi^{(2)}(t) = \frac{t^2\sigma}{2}$,
- $\Psi^{(3)}(t) = \int_{|x|\geq 1}(e^{itx}-1)\nu(dx)$,
- $\Psi^{(4)}(t) = \int_{|x|<1}(e^{itx}-1-itx)\,\nu(dx)$.

Η $\Psi^{(1)}(t)$ αντιστοιχεί σε μια ντετερμινιστική γραμμική διαδικασία (*drift*) με παράμετρο b, η $\Psi^{(2)}(t)$ σε μια κίνηση *Brown* με συντελεστή $\sqrt{\sigma}$, ενώ η $\Psi^{(3)}(t)$ σε μια σύνθετη διαδικασία *Poisson* με ρυθμό αυξήσεων $\lambda = \nu(R-\{-1,1\})$ και μέγεθος αλμάτων $F(dx) = \frac{\nu(dx)}{\nu(R-\{-1,1\})} I(|x| \geq 1)$. Η πιο δύσκολη στον χειρισμό της είναι η $\Psi^{(4)}(t)$. Έστω $\Delta X^{(4)}$ δηλώνει τα άλματα της διαδικασίας *Lévy* $X^{(4)}$ ώστε να ισχύει, $\Delta X^{(4)} = X_t{}^{(4)} - X_{t-}{}^{(4)}$ και έστω $\mu^{X^{(4)}}$ δηλώνει το τυχαίο μέτρο που μετρά τα άλματα της $X^{(4)}$. Τώρα κατασκευάζουμε μια αντισταθμισμένη σύνθετη διαδικασία *Poisson* με:

$$X_t{}^{(4,\varepsilon)} = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X_s{}^{(4)}\, I\left(\varepsilon < \left|\Delta X_s{}^{(4)}\right| < 1\right) - t\left(\int_{\varepsilon<|x|<1} x\,\nu(dx)\right)$$

$$= \int_0^t \int_{\varepsilon<|x|<1} x\,\mu^{X^{(4)}}(dx, ds) - t\left(\int_{\varepsilon<|x|<1} x\,\nu(dx)\right),$$

που μας δείχνει τα άλματα της $X^{(4)}$ από μια διαδικασία *Poisson*. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του χαρακτηριστικού εκθέτη της $X_t{}^{(4,\varepsilon)}$ έχουμε:

$$\Psi^{(4,\varepsilon)}(t) = \int_{\varepsilon<|x|<1} \big((e^{itx} - 1 - itx\big)\nu(dx)\,,$$

τότε υπάρχει μια διαδικασία *Lévy* $X^{(4)}$ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη *Martingale* τέτοια ώστε $X^{(4,\varepsilon)} \to X^{(4)}$ κατανεμημένη ομοιόμορφα στο [0,T] καθώς $\varepsilon \to 0^{+}$. Οπότε μπορούμε να διαχωρίσουμε κάθε διαδικασία *Lévy* σε τέσσερις διαδικασίες *Lévy* $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} + X^{(4)}$ με:

$$X_t = bt + \sqrt{\sigma}B_t + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} x\,\mu^X\,(ds, dx) + \int_0^t \int_{|x|<1} x\,\big(\mu^X - \nu^X\big)(ds, dx),$$

όπου, $\nu^X(ds, dx) = \nu(dx)ds$.

Τέλος, κάνοντας μια σύνοψη όλων των παραπάνω, στην αρχή του κεφαλαίου δώσαμε τους βασικούς ορισμούς που ήταν απαραίτητοι και χρήσιμοι για την εύκολη κατανόηση αλλά και διεξαγωγή μιας ορθής λογικής σκέψης. Στη συνέχεια, αναπτύξαμε πλήρως τις διαδικασίες *Lévy*, αυτής της μεγάλης οικογένειας που εμπεριέχει διαδικασίες όπως η σύνθετη *Poisson* αλλά και τη κίνηση *Brown – Wiener*. Έχοντας στερεώσει τις βάσεις, δείξαμε πως μπορεί να αναπαρασταθεί μια διαδικασία *Lévy*, εφόσον έχει απείρως διαιρετή κατανομή, μέσω της *Lévy – Khintchine* αναπαράστασης για τα άλματα της *Lévy*. Κατόπιν, ήταν λογικό μετά την αναπαράσταση να μας κεντρίσει το ενδιαφέρον το μέτρο του *Lévy*, δηλαδή τη συμπεριφορά των αλμάτων, όπως ο ρυθμός άφιξής τους. Τέλος, αναμενόμενο ήταν να αναλύσουμε τη διαδικασία *Lévy* σε συνιστώσες ώστε να μπορούμε να την χειραγωγήσουμε προς όφελος μας.

3. Κεφάλαιο : Συναρτήσεις Κλίμακας

Σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δώσουμε την ενημερωμένη θεωρία και την εφαρμογή των κλιμακωτών συναρτήσεων (*Scale Functions*). Κάνοντας σύνδεση με το προηγούμενο κεφάλαιο και ειδικότερα με την αναπαράσταση των *Lévy – Khintchine,* την ανάλυση *Lévy - Itô*, θα ξεδιπλώσουμε τη θεωρία των συναρτήσεων κλίμακας και ειδικότερα την περίπτωση των φασματικών αρνητικών *Lévy* διαδικασιών (*Spectrally Negative Lévy Processes*).

Αρχικά, λόγω της πολυπλοκότητας και της φύσης των συναρτήσεων κλίμακας μέχρι πρότινος, αυτές οι συναρτήσεις ήταν κατακριτέες και στο περιθώριο. Από την οπτική γωνιά του υπολογισμού, η προσέγγιση μέσω των συναρτήσεων κλίμακας βασίζεται στην απέραντη βιβλιογραφία της μεθόδου του μετασχηματισμού *Laplace*, που τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί εκθετικά και έχει αρκετές εφαρμογές στην τιμολόγηση παραγώγων προϊόντων (όπως, Duffie et al. (2000), Lee (2004)) και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις (όπως, Kythe & Puri (2002), Babolian & Shamloo (2008)). Όπως αναφέραμε, μέχρι πρότινος υπήρχαν πάρα πολύ λίγα παραδείγματα των συναρτήσεων κλίμακας, στα οποία αντικατοπτρίζεται μικρή ποικιλία από παραδείγματα της εξίσωσης των *Gerber – Shiu*. Άλλα πλεονεκτήματα των συναρτήσεων κλίμακας μπορούμε να παρατηρήσουμε στις πληρωμές μερισμάτων (*dividend payments*) ή όταν υπάρχει κάποιο κατώφλι (*threshold barrier*).

Βασιστήκαμε στα συγγράμματα των Biffis & Kyprianoou (2010), Kyprianou (2006) Duffie et al. (2000), Lee (2004), Kythe & Puri (2002), Babolian & Shamloo (2008)) για την ανάπτυξη του κεφαλαίου.

3.1 <u>Συναρτήσεις Κλίμακας</u>

Αρχικά, μαζεύουμε ότι έχουμε ορίσει στην φαρέτρα μας για να τα χρησιμοποιήσουμε όλα για την ορθή κατανόηση των συναρτήσεων κλίμακας. Τον όρο «Συναρτήσεις Κλίμακας» για την W (όπως συμβολίζονται) το χρησιμοποίησε πρώτος ο Bertoin (1992) επειδή αντανακλούσε μια αναλογία (Σχέση 3.5) των συναρτήσεων κλίμακας για μια διάχυση (Diffusion).

Προτιμούμε να δουλεύουμε με τον εκθέτη *Laplace* απ' ότι με τον χαρακτηριστικό εκθέτη της αναπαράστασης των *Lévy – Khintchine,* ο οποίος δίνεται:

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{t}\log E\left[e^{\lambda X_t}\right] = -\psi(-i\lambda), \qquad 3.1$$

που είναι πεπερασμένο για τουλάχιστον όλα τα $\lambda \geq 0$. Η συνάρτηση $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μηδέν στο μηδέν και τείνει στο άπειρο για τιμή άπειρο. Επιπλέον, είναι απείρως διαιρετή και αυστηρώς κυρτή στο $(0, \infty)$. Συγκεκριμένα, $\psi'(0+) = E[X_1] \in [-\infty, \infty)$. Ορίζουμε τον δεξιό αντίστροφο:

$$\Phi(q) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\},$$

για κάθε $q \geq 0$. Ουσιαστικά ο δεξιός αντίστροφος της ψ, ο $\Phi(q)$ δηλαδή, είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $\psi(\lambda) = q$. Αν $E[X_1] = \psi'(0+) \geq 0$, τότε η $\lambda = 0$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\psi(\lambda) = 0$ στο $[0, \infty)$, διαφορετικά υπάρχουν δυο ρίζες με $\lambda = \Phi(0) > 0$ η μεγαλύτερη εκ των δυο. Η άλλη είναι η $\lambda = 0$.

Επιπλέον, δίνουμε μερικούς ορισμούς για τους χρόνους και τις απεικονίσεις αυτών που συνδέονται με τα του κεφαλαίου.

<u>Ορισμός 3.1</u> *Το σημείο που η διαδικασία που περνάει στο χρόνο πάνω από ένα σημείο (κατώφλι)* $x > 0$ *συμβολίζεται ως* $\tau_x^+ = inf\{t > 0 : X_t > x\}$, *το οποίο μας δείχνει τον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται η διαδικασία* X_t *για να ξεπεράσει το σημείο* x, *και για κάθε* $q \geq 0$ *ισχύει ότι:*

$$E\left[e^{-q\tau_x^+} I(\tau_x^+ < \infty)\right] = e^{-\Phi(q)x}.$$

Επιπλέον, η διαδικασία $\{\tau_x^+ : x \geq 0\}$ *είναι subordinator ή αναφέρεται και ως ανοδική πορεία του πλεονάσματος ή υπέρβαση από ένα κατώφλι, δηλαδή έχει μόνο θετικά άλματα, με Laplace εκθέτη* $\Phi(q) - \Phi(0)$.

Η απόδειξη του παραπάνω μπορεί να βρεθεί στο σύγγραμμα του Kyprianou (2006).

Ακολούθως, δείχνουμε την διακύμανση των μονοπατιών, δηλαδή την αναπαράσταση *Lévy – Khintchine* για την περίπτωση που έχουμε μόνο αρνητικά άλματα, δηλαδή για μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* (*Spectrally Negative Lévy Process*).

<u>Ορισμός 3.2</u> *Δεδομένης της τριπλέτας που ορίσαμε στην Lévy – Khintchine* (b, σ, ν), *όπου τώρα το μέτρο* ν *ορίζεται στον* $(-\infty, 0)$, *επομένως μπορούμε να γράφουμε:*

$$\psi(t) = -bt + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{(-\infty,0)} \left(e^{tx} - 1 - tx\, I(x > -1)\right)\nu(dx),$$

για $t \geq 0$. *Όταν η* X *θα έχει φραγμένη κύμανση μπορούμε να γράφουμε:*

$$\psi(t) = \delta t - \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{tx})\nu(dx)\,,$$

Όπου, αναγκαστικά $\delta = -\alpha - \int_{(-1,0)} x\nu(dx)$*, να είναι αυστηρά θετικό.*

Έτσι, μια φασματικά αρνητική *Lévy* διαδικασία, που είναι η διαδικασία *Lévy* με αρνητικά άλματα, δηλαδή άλματα προς τα κάτω, φραγμένης κύμανσης πρέπει πάντα να παίρνει τη μορφή μιας αυστηρά θετικής τάσης μείον ενός καθαρού άλματος *subordinator*. Επίσης, σημειώνουμε ότι, αν $\delta \leq 0$, τότε θα βλέπαμε τον *Laplace* εκθέτη ενός φθίνοντα *subordinator*, το οποίο όμως δε μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

Σημείωση 3.1 *Εάν δεν υπάρχουν θετικά άλματα σε μια διαδικασία τότε ισχύει ότι:*

$$P\left(X_{\tau_x^+} = x \middle| \tau_x^+ < \infty\right) = 1$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι ισχύει, $P(\tau_x^+ < \infty) = e^{-\Phi(0)x}$.

Στην ουσία, η προηγούμενη σημείωση μας υποδηλώνει ότι μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* (SNLP) αναγκαστικά «αναρριχείται» (*creeping*) προς τα πάνω. Όταν $\sigma > 0$ τότε αντίστοιχα «αναρριχάται» προς τα κάτω. Επιπλέον, μια δεύτερη σημείωση θα μπορούσε να ήταν για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της διαδικασίας X.

Σημείωση 3.2 *Η διαδικασία έχει τάση στο άπειρο αν και μόνο αν* $\psi'(0+) > 0$*, ταλαντώνεται αν και μόνο αν* $\psi'(0+) = 0$ *και έχει τάση στο μείον άπειρο αν και μόνο αν* $\psi'(0+) < 0$.

Επιπρόσθετα, οι συναρτήσεις κλίμακας έχουν μεγάλη συσχέτιση με τα προβλήματα εξόδου *(One-Sided & Two-Sided Exit Problems)*. Δειλά, αρχίζουμε να δίνουμε το συμβολισμό και τις έννοιες των προαναφερθέντων.

Αρχικά συμβολίζουμε με P_x, E_x τις αντίστοιχες ποσότητες $P(\cdot\,|X_0 = x)$ και $E_x(\cdot\,|X_0 = x)$ και στην περίπτωση που $x = 0$ θα γράφουμε $P_0 = P$ και $E_0 = E$. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε δυο χρόνους, τον χρόνο για πρώτη φορά η διαδικασία να περάσει πάνω από ένα δοθέν σημείο (*First Time Passage*), $\tau_x^+ = \inf\{\, t > 0 : X_t > x\}$ και το χρόνο χρεοκοπίας αν η διαδικασία πέσει κάτω από ένα επίπεδο x (*Time of Ruin*), $\tau_x^- = \inf\{\, t > 0 : X_t < x\}$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Τώρα ακολουθούν τα κύρια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου.

<u>Θεώρημα και Ορισμός 3.1</u> *Υπάρχει μια οικογένεια συναρτήσεων* $W^{(q)}, Z^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *με:*

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

όπου $q \geq 0$, *τέτοιο ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.*

(i) *Για κάθε* $q \geq 0$, *έχουμε ότι* $W^{(q)}(x) = 0$, *για όλα τα* $x < 0$ *και αν η* $W^{(q)}$ *χαρακτηρίζεται στο* $[0, \infty)$ *τότε είναι αυστηρά αύξουσα και συνεχής συνάρτηση και ο μετασχηματισμός Laplace της να ικανοποιεί την παρακάτω:*

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \qquad \beta > \Phi(q) \tag{3.2}$$

(ii) *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και* $q \geq 0$,

$$E_x[e^{-q\tau_0^-} I(\tau_0^- < \infty)] = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(x) \tag{3.3}$$

όπου καταλαβαίνουμε $\lim_{q \to 0} q/\Phi(q)$ *ότι ισχύει:*

$$P_x(\tau_0^- < \infty) = \begin{cases} 1 - \psi'(0+)W(x), & \text{αν } \psi'(0+) \geq 0 \\ 1, & \text{αν } \psi'(0+) < 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

(iii) *Για κάθε* $x \leq a$ *και* $q \geq 0$,

$$E_x\left[e^{-q\tau_a^+} I(\tau_0^- > \tau_a^+)\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \tag{3.5}$$

και

$$E_x[e^{-q\tau_0^-} I(\tau_0^- < \tau_a^+)] = Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \tag{3.6}$$

Τα στοιχεία $W^{(q)}$ *της οικογένειας* $\{W^{(q)}\}_{q \in \mathbb{R}_+}$ *ονομάζεται συνάρτηση κλίμακας. Οι συναρτήσεις* $W^{(q)}$ *και* $Z^{(q)}$ *ονομάζονται* $q -$ *συναρτήσεις κλίμακας (*$q -$ *Scale Functions).*

Σημειώνουμε ότι, η (3.4) πρέπει να συμφωνεί με την φόρμουλα των *Pollaczek – Khintchine*, όταν *X* είναι η διαδικασία του κλασσικού μοντέλου (*Cramér – Lundberg*) της θεωρίας κινδύνων που συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η σχέση (3.3) εμφανίζεται στη μορφή του μετασχηματισμού *Fourier* στο σύγγραμμα του Emery (1973) και για την περίπτωση ότι το μέτρο ν είναι πεπερασμένο και $\sigma = 0$ στο σύγγραμμα του Korolyuk (1975). Η σχέση (3.5) πρωτοεμφανίστηκε για την περίπτωση που $q = 0$ από τον Zolotarev (1964) και ακολούθησαν οι Takacs (1966) και Rogers (2000). Για την περίπτωση που $q > 0$ μπορούμε να τη βρούμε στο σύγγραμμα του Korolyuk (1975) για την περίπτωση που το μέτρο είναι πεπερασμένο και $\sigma = 0$.

Αρχικά θα δώσουμε την απόδειξη της σχέσης (3.5) και μετά θα αποδείξουμε το υπόλοιπο θεώρημα 3.1.

Απόδειξη (Σχέση (3.5)) Αποδεικνύουμε τη σχέση (3.5) για την περίπτωση που $\psi'(0+) > 0$ και $q = 0$ και στη συνέχεια για $q > 0$. Τέλος, η περίπτωση της $\psi'(0+) \leq 0$ και $q = 0$ αποδεικνύεται απλά εφαρμόζοντας το όριο για q να τείνει στο μηδέν.

Υποθέτουμε ότι $\psi'(0+) > 0$ και ότι $-\underline{X}_\infty$ είναι $P -$ σχεδόν σίγουρα πεπερασμένο, όπου $\underline{X}_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$. Τώρα ορίζουμε την μη φθίνουσα συνάρτηση:

$$W(x) = P_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right).$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο ολικής πιθανότητας, δεσμεύοντας ως προς το φιλτράρισμα, και χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα *Markov* για $x \in [0, a)$:

$$\begin{aligned} P_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right) &= E_x\left[P_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0 \middle| \mathcal{F}_{\tau_a^+}\right)\right] \\ &= E_x\left[I(\tau_0^- > \tau_a^+)P_a\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)\right] + E_x\left[I(\tau_0^- < \tau_a^+)P_{X_{\tau_0^-}}\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)\right] \\ &= P_a\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right)P_x(\tau_0^- > \tau_a^+). \end{aligned}$$

Η δεύτερη μέση τιμή στην δεύτερη ισότητα εξαφανίζεται, αυτό συμβαίνει λόγω του παρακάτω. Αν η διαδικασία X δεν έχει *Gaussian* συνιστώσα, τότε όπως είδαμε μπορεί να αναρριχάται προς τα κάτω, και άρα $X_{\tau_0^-} < 0$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για $x < 0$ έχουμε $P_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right) = 0$. Εάν τώρα, η διαδικασία X έχει *Gaussian* συντελεστή τότε $X_{\tau_0^-} \leq 0$ και $P_x\left(\underline{X}_\infty \geq 0\right) = 0$.

Τώρα έχουμε:

$$P_x(\tau_a^+ < \tau_0^-) = \frac{W(x)}{W(a)}, \quad x \geq 0,$$

το οποίο αποδεικνύει την (3.5) για την περίπτωση που $\psi'(0+) > 0$ και $q = 0$.

Οπότε, θεωρούμε ότι $q > 0$ ή $q = 0$ και $\psi'(0+) < 0$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, από την κυρτότητα της ψ, γνωρίζουμε ότι $\Phi(q) > 0$ και επομένως $\psi'_{\Phi(q)}(0) = \psi'\left(\Phi(q)\right) > 0$, το οποίο ισχύει υπό την $P^{\Phi(q)}$, και τότε η X έχει τάση στο άπειρο. Για το ζευγάρι $(X, P^{\Phi(q)})$, έχουμε την 0 –συνάρτηση κλίμακας $W_{\Phi(q)}(x) = P_x^{\Phi(q)}(\underline{X}_\infty \geq 0)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_x^{\Phi(q)}(\tau_a^+ < \tau_0^-) = \frac{W_{\Phi(q)}(x)}{W_{\Phi(q)}(a)}. \qquad 3.7$$

Ωστόσο, από τον ορισμό της $P^{\Phi(q)}$ έχουμε:

$$P_x^{\Phi(q)}(\tau_a^+ < \tau_0^-) = E_x\left[e^{\Phi(q)\left(X_{\tau_a^+}-x\right)-q\tau_a^+}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)\right] = e^{\Phi(q)(a-x)}E_x\left[e^{q\tau_a^+}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)\right].$$

Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$E_x\left[e^{q\tau_a^+}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)\right] = e^{\Phi(q)(a-x)}\frac{W_{\Phi(q)}(x)}{W_{\Phi(q)}(a)} = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \qquad 3.8$$

όπου, $W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x}W_{\Phi(q)}(x)$. Ξεκάθαρα η $W^{(q)}(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και μη φθίνουσα.

Θεωρούμε τώρα την τελευταία περίπτωση, δηλαδή όταν $\psi'(0+) = 0$ και $q = 0$. Καθώς το όριο για $q \to 0$ στο αριστερό μέρος της (3.8) υπάρχει, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το δεξί μέρος της (3.8). Διαλέγοντας ένα τυχαίο $b > a$, έτσι μπορούμε να ορίσουμε την $W(x) = \lim_{q\to 0}\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)}$ για κάθε $x \le a$. Επομένως:

$$\begin{aligned} W(x) &= \lim_{q\to 0}\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} \\ &= \lim_{q\to 0}E_x\left[e^{q\tau_a^+}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)\right]\frac{W^{(q)}(\alpha)}{W^{(q)}(b)} \\ &= P_x(\tau_a^+ < \tau_0^-)W(a) \qquad 3.9 \end{aligned}$$

πάλι είναι ξεκάθαρο ότι η $W^{(q)}(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ και μη φθίνουσα.

■

Όμως πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα δώσουμε το θεώρημα της παραγοντοποίησης των *Wiener – Hopf*.

Θεώρημα 3.2 *Έστω X μια διαδικασία Lévy, εκτός της σύνθετης Poisson. Σημειώνουμε με e_p μια ανεξάρτητη και εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p > 0$.*

(i) Τα ζεύγη

$$\left(\overline{G}_{e_p}, \overline{X}_{e_p}\right) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \left(e_p - \overline{G}_{e_p}, \overline{X}_{e_p} - X_{e_p}\right)$$

είναι ανεξάρτητα και απείρως διαιρετά, με $\overline{X}_t = \sup_{0\le s\le t} X_s$, $\overline{G}_t = \sup_{0\le s\le t} G_s$ $\underline{X}_t = \inf_{0\le s\le t} X_s$ και $\underline{G}_t = \inf_{0\le s\le t} G_s$, αποδίδοντας την παραγοντοποίηση:

$$\frac{p}{p-id+\Psi(\theta)}=\Psi_p^+(d,\theta)\,\Psi_p^-(d,\theta),$$

όπου, $d,\theta\in\mathbb{R}$ *και*

$$\Psi_p^+(d,\theta)=E\left[e^{id\overline{G}_{e_p}+i\theta\overline{X}_{e_p}}\right]\quad \kappa\alpha\iota\quad \Psi_p^-(d,\theta)=E\left[e^{id\underline{G}_{e_p}+i\theta\underline{X}_{e_p}}\right].$$

Εδώ το ζευγάρι $\Psi_p^+(d,\theta)$ *και* $\Psi_p^-(d,\theta)$ *ονομάζεται παράγοντας των Wiener – Hopf.*

Απόδειξη (Θεώρημα 3.1 (i)) Έστω ότι X έχει τάση στο άπειρο και $\psi'(0+)>0$. Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση για $q=0$ και από τον ορισμό της W την πολλαπλασιάζουμε με μια σταθερά και γνωρίζουμε ότι δεν επηρεάζεται η συνάρτηση κλίμακας, δηλαδή:

$$W(x)=\frac{1}{\psi'(0+)}P_x\left(\underline{X}_\infty\geq 0\right).$$

Παίρνοντας όρια στην $E\left[e^{\beta\underline{X}_{e_p}}\right]$ του παράγοντα των *Weiner – Hopf*, όπου:

$$E\left[e^{-\beta\overline{X}_{e_p}}\right]=\frac{\Phi(p)}{\Phi(p)+\beta}\quad \kappa\alpha\iota\quad E\left[e^{\beta\underline{X}_{e_p}}\right]=\frac{p}{\Phi(p)}\frac{\Phi(p)-\beta}{p-\psi(\beta)}$$

έχουμε:

$$E\left[e^{\beta\underline{X}_\infty}\right]=\psi'(0+)\frac{\beta}{\psi(\beta)}\ ,$$

για $\beta>0$. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
E\left[e^{\beta\underline{X}_\infty}\right]&=\int_{[0,\infty)}e^{-\beta x}\,\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty\in dx\right)\\
&=\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty=0\right)+\int_{[0,\infty)}e^{-\beta x}\,d\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty\in(0,x]\right)\\
&=\int_0^\infty\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty=0\right)\beta e^{-\beta x}\,dx+\beta\int_0^\infty e^{-\beta x}\,\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty\in(0,x]\right)dx\\
&=\beta\int_0^\infty e^{-\beta x}\,\mathbb{P}\left(-\underline{X}_\infty\leq x\right)dx\\
&=\beta\int_0^\infty e^{-\beta x}\,\mathbb{P}\left(\underline{X}_\infty\geq 0\right)dx,
\end{aligned}$$

και άρα:

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta)}, \qquad 3.10$$

για όλα τα $\beta > 0 = \Phi(0)$.

Τώρα για την περίπτωση που $q > 0$ ή $q = 0$ και $\psi'(0+) < 0$. Όπως και πριν παίρνουμε $W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} W_{\Phi(q)}(x)$. Όπως προαναφέραμε η διαδικασία X υπό την $P^{\Phi(q)}$ έχει τάση στο άπειρο και έτσι, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα και βάση τον χαρακτηριστικό εκθέτη έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx &= \int_0^\infty e^{-(\beta-\Phi(q))x} W_{\Phi(q)}(x)dx \\ &= \frac{1}{\psi_{\Phi(q)}\big(\beta - \Phi(q)\big)} = \frac{1}{\psi(\beta) - q},\end{aligned}$$

για $\beta - \Phi(q) > 0$. Καθώς $W^{(q)}$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση, δουλεύουμε με το μέτρο $W^{(q)}(dx)$ στον $[0,\infty)$, και με κατανομή $W^{(q)}(a,b] = W^{(q)}(b) - W^{(q)}(a)$ για $-\infty < \alpha \leq \beta < \infty$. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη μας δίνει ένα χαρακτηρισμό για το μέτρο της $W^{(q)}$:

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^{(q)}(dx) &= W^{(q)}(0) + \int_{(0,\infty)} e^{-\beta x} dW^{(q)}(0,x] \\ &= \int_0^\infty \beta e^{-\beta x} W^{(q)}(0)dx + \int_0^\infty \beta e^{-\beta x} W^{(q)}(0,x]dx \\ &= \frac{\beta}{\psi(\beta) - q}, \qquad \mathit{3.11}\end{aligned}$$

για $\beta > \Phi(q)$.

Για την περίπτωση που $q = 0$ και $\psi'(0+) = 0$ και βάση του Θεωρήματος Εκτεταμένης Συνέχειας για τον Μετασχηματισμό *Laplace* (βλέπε Feller (1971), θεώρημα XIII. 1. 2α) έχουμε:

$$\lim_{q\to 0} \int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^{(q)}(dx) = \lim_{q\to 0} \frac{\beta}{\psi(\beta) - q} = \frac{\beta}{\psi(\beta)},$$

υπάρχει ένα μέτρο W^* τέτοιο ώστε, με την έννοια της ασαφούς σύγκλισης, $W^*(dx) = \lim_{q\to 0} W^{(q)}(dx)$ και:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x} W^*(dx) = \frac{\beta}{\psi(\beta)}.$$

Ξεκάθαρα καταλαβαίνουμε ότι $W^*(dx) = W^*[0, x]$ είναι πολλαπλάσιο της W όπως δίνεται στην (3.9), οπότε μπορούμε να ορίσουμε $W = W^*$. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη δείχνουμε ότι η (3.10) ισχύει ξανά και επομένως εδώ τελειώνει η απόδειξη.

■

<u>Απόδειξη (Θεώρημα 3.1 (ii))</u> Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό *Laplace* της $W^{(q)}(dx)$ καθώς και του μετασχηματισμού *Laplace – Stieltjes*, για τον δεύτερο παράγοντα της *Wiener – Hopf* έχουμε:

$$\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q} \in dx\right) = \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx, \qquad 3.12$$

και επομένως για $x \geq 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} &E_x[e^{q\tau_0^-} I(\tau_0^- < \infty)] = \mathbb{P}_x(e_q > \tau_0^-) \\ &= \mathbb{P}_x\left(\underline{X}_{e_q} < 0\right) \\ &= \mathbb{P}_x(-\underline{X}_{e_q} > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}_x\left(\underline{X}_{e_q} \leq x\right) \\ &= 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)\, dy - \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(x) \\ &= Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)} W^{(q)}(x)\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $Z^{(q)}(x) = 1$ και $W^{(q)}(x) = 0$ για όλα τα $x \in (-\infty, 0)$, η υπόθεση ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται για την περίπτωση που $q > 0$.

Τέλος, παίρνουμε το εξής όριο $\lim_{q\to 0} q/\Phi(q) = \lim_{q\to 0} \psi(\Phi(q))/\Phi(q)$. Αν $\psi'(0+) \geq 0$, η διαδικασία έχει τάση στο άπειρο ή ταλαντώνεται, τότε $\Phi(0) = 0$ και το όριο είναι ίσο με $\psi'(0+)$. Διαφορετικά $\Phi(q) > 0$, το προαναφερθέν όριο είναι ίσο με το μηδέν. Και παίρνοντας όριο ως προς q στην (3.3).

■

<u>Απόδειξη (Σχέσης (3.6))</u> Για $q > 0$, έχουμε για $x \geq 0$,

$$E_x[e^{q\tau_0^-} I(\tau_0^- < \tau_a^+)] = E_x[e^{q\tau_0^-} I(\tau_0^- < \infty)] - E_x[e^{q\tau_0^-} I(\tau_a^+ < \tau_0^-)].$$

Κάνοντας χρήση της ισχυρής *Markov* ιδιότητας το χρόνο τ_a^+ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η διαδικασία X αναρριχάται προς τα πάνω, έχουμε:

$$E_x[e^{q\tau_0^-}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)] = E_x\left[e^{q\tau_a^+}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)\right]E_\alpha[e^{q\tau_0^-}I(\tau_0^- < \infty)].$$

και βάση το θεωρήματος 3.1 (iii) έχουμε:

$$E_x[e^{q\tau_0^-}I(\tau_0^- < \tau_a^+)] = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}\left[Z^{(q)}(a) - \frac{q}{\Phi(q)}W^{(q)}(a)\right]$$

και το απαιτούμενο προκύπτει για την περίπτωση που $q > 0$. Για την περίπτωση που $q = 0$ πάλι παίρνουμε τα όρια για q να τείνει στο μηδέν.

■

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία μας ενδιαφέρει η περίπτωση των *Lévy* διαδικασιών και συγκεκριμένα όταν έχει αρνητικά άλματα, δηλαδή η περίπτωση των φασματικών αρνητικών διαδικασιών *Lévy*. Άρα, θα ήταν λογικό να δώσουμε και ένα θεώρημα για αυτή την περίπτωση.

<u>Ορισμός 3.3</u> *Έστω X είναι φασματικά αρνητική διαδικασία Lévy. Για* $t \geq 0$ *έχουμε ορίσει την* $\underline{X_t} = inf_{s\leq t} X_s$. *Έστω* $q, x, u, v, y \geq 0$ *τότε*

$$E_x\left[e^{-q\tau_0^-}; -X_{\tau_0^-} \in du, X_{\tau_0^- -} \in dv, \underline{X}_{\tau_0^- -} \in dy\right) =$$

$$I\{0 < y < v \wedge x, u > 0\}e^{-\Phi(q)(v-y)}\left\{W^{(q)'}(x-y) - \Phi(q)W^{(q)}(x-y)\right\}\nu(-du-v)dydv$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\left(W^{(q)'}(x) - \Phi(q)W^{(q)}(x)\right)\delta_{(0,0,0)}(du, dv, dy),$$

όπου, $\delta_{(0,0,0)}(du, dv, dy)$ *το μέτρο του Dirac.*

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος της δεξιάς πλευράς αντιστοιχεί σε ένα γεγονός να συμβεί χρεοκοπίας από την αναρρίχηση της διαδικασίας.

Εφόσον δώσαμε τον ορισμό των συναρτήσεων κλίμακας ας κάνουμε μια απόπειρα να το συνδέσουμε με το κλασσικό μοντέλο των *Cramér – Lundberg* που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

Αρχικά, έστω ότι δουλεύουμε για την απλή περίπτωση των συναρτήσεων κλίμακας, δηλαδή για την $0 -$ συνάρτηση κλίμακας, και μέσω ολοκλήρωσης κατά μέλη του μετασχηματισμού *Laplace* της W είχαμε ότι,

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}W(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta)}, \ \ \beta > 0.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\psi'(0+) = E[X_1]$ που από το κλασσικό μοντέλο γνωρίζουμε ότι $E[X_1] = c - \lambda\mu > 0$ και άρα $\psi'(0+) = c - \lambda\mu > 0$ που συνεπάγεται ότι $\mu < \infty$ και

$$\rho = \frac{\lambda\mu}{c} < 1.$$

Αυτή η ανισότητα συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\lambda\mu}{c}\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{1}{\mu}\,\overline{F}(x)dx < 1,$$

όπου, θυμίζουμε ότι $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Έτσι, με βάση την αναπαράσταση της ψ από τους *Lévy – Khintchine* για $\beta > 0$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\psi(\beta)} &= \frac{1}{c}\frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{1}{\mu}\,\overline{F}(x)dx} \\ &= \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\left(\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{1}{\mu}\,\overline{F}(x)dx\right)^k. \end{aligned} \qquad 3.13$$

Επιπλέον, είχαμε δει ότι ισχύει:

$$\eta(dx) = \frac{1}{\mu}\overline{F}(x)dx, \quad x \geq 0,$$

να είναι το μέτρο πιθανότητας. Για κάθε $k \geq 0$, υπενθυμίζουμε ότι $\eta^{*k}(dx)$, $x \geq 0$, να είναι η $k -$ οστή συνέλιξη, με $\eta^{*0}(dx) = \delta_0(dx), x \geq 0$, να είναι το μέτρο του *Dirac delta*. Καθώς για $\beta > 0$ και $k \geq 0$:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\beta x}\,\eta^{*k}(dx) = \left(\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{1}{\mu}\,\overline{F}(x)dx\right)^k,$$

χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό *Laplace* στο δεξί μέρος της (3.13) έχουμε:

$$W(dx) = \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\,\eta^{*k}(dx)\,,$$

ή διαφορετικά:

$$W(x) = \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\,\eta^{*k}(x)\,.$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη την (3.4), έχουμε:

$$1 - \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \, \eta^{*k}(x).$$

Το οποίο είναι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

3.2 Δυνητικά Μέτρα (*Potential Measures*)

Στην εν λόγω παράγραφο θα ασχοληθούμε με τα μέτρα που σχετίζονται με τους χρόνους εξόδου (*One & Two Sided Exit Problems*) και με την *Gerber – Shiu* συνάρτηση. Επιπλέον, θα δείξουμε πως μπορούν τα μέτρα να εκφραστούν μέσω των συναρτήσεων κλίμακας. Βασιζόμαστε στα συγγράμματα των *Kyprianou* (2006) και *Bertoin* (1997).

Αρχικά, για να εισάγουμε την έννοια του δυνητικού μέτρου θεωρούμε τον ελάχιστο χρόνο μεταξύ του χρόνου χρεοκοπίας και χρόνου που για πρώτη φορά η διαδικασία θα περάσεις ένα δοθέν σημείο $\alpha > 0$:

$$\tau = \tau_\alpha^+ \wedge \tau_0^- \, .$$

Βάση του προηγούμενου κεφαλαίου και για $x \in [0, a]$, A οποιοδήποτε *Borel* σύνολο στο $[0, \alpha)$ και B οποιαδήποτε σύνολο *Borel* στο $(-\infty, 0)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(X_t \in B,\ X_{t-} \in A) \\
&= E_x\left[\int_{[0,\infty)} \int_{(-\infty,0)} I\{\overline{X}_{t-} \le a, \underline{X}_{t-} \ge 0, X_{t-} \in A\} I\{y \in B - X_{t-}\} N(dt \times dy)\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty I(t<\tau)\, \nu(B - X_t) I(X_t \in A) dt\right] \\
&= \int_A \nu(B-y)\ U(a,x,dy), \qquad 3.14
\end{aligned}$$

όπου, N είναι ένα τυχαίο μέτρο *Poisson* που συνδέεται με τα άλματα της διαδικασίας X και

$$U(a,x,dy) = \int_0^\infty \mathbb{P}_x(X_t \in dy, \tau > t)\, dt.$$

Το παραπάνω ονομάζεται δυνητικό μέτρο του X, που σταματά κατά την έξοδο του από το $[0, \alpha]$, που πρωτοξεκίνησε από το x. Αλλιώς είναι γνωστό και ως επιλύσιμο μέτρο (*Resolvent*

Measure). Πιο γενικά, θα δουλέψουμε με το $q -$ δυνητικό μέτρο ($q -$ *Resolvent Measure*), που ορίζεται ως:

$$U^{(q)}(a,x,dy) = \int_0^\infty e^{-qt}\,\mathbb{P}_x(X_t \in dy, \tau > t)\,dt.$$

Για $q \geq 0$, για το $0 -$ δυνητικό μέτρο θα συμβολίζουμε $U^{(0)} = U$. Αν για κάθε $x \in [0,a]$ υπάρχει η πυκνότητα της $U^{(q)}(a,x,dy)$, σε σχέση με τον μέτρο του *Lebesgue*, τότε ονομάζεται δυνητική πυκνότητα και συμβολίζεται ως $u^{(q)}(a,x,dy)$.

Θεώρημα 3.3 *Υποθέτουμε, για $q \geq 0$, ότι $U^{(q)}(a,x,dy)$ είναι το $q -$ δυνητικό μέτρο μιας φασματικά αρνητικής διαδικασίας Lévy, να τελειώνει μόλις βγει από το διάστημα $[0,\alpha]$ με $x,y \in [0,a]$. Τότε η πυκνότητά της $u^{(q)}(a,x,dy)$ δίνεται από τη σχέση:*

$$u^{(q)}(a,x,dy) = \frac{W^{(q)}(x)W^{(q)}(a-y)}{W^{(q)}(a)} - W^{(q)}(x-y). \qquad 3.15$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \geq 0$ και $q > 0$:

$$R^{(q)}(x,dy) = \int_0^\infty e^{-qt}\,\mathbb{P}_x(X_t \in dy, \tau_0^- > t) = \frac{1}{q}\mathbb{P}_x\left(X_{e_q} \in dy, \underline{X}_{e_q} > 0\right),$$

όπου, e_q ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο $q > 0$. Κάποιος μπορεί να καταλάβει ότι η $R^{(q)}(x,dy)$ ένα $q -$ δυνητικό μέτρο της διαδικασία X να σταματάει όταν βγαίνει από το διάστημα $[0,\infty)$.

Παραθέτουμε τώρα την παραγοντοποίηση *Wiener – Hopf*, ειδικότερα ότι $X_{e_q} - \underline{X}_{e_q}$ είναι ανεξάρτητο του $\underline{X}_{e_q}$, έχουμε ότι:

$$R^{(q)}(x,dy) = \frac{1}{q}\left[P\left(X_{e_q} - \underline{X}_{e_q}\right) + \underline{X}_{e_q} \in dy - x, \underline{X}_{e_q} \leq x\right]$$

$$= \frac{1}{q}\int_{[x-y,x]} P\left(-\underline{X}_{e_q} \in dz\right) P\left(X_{e_q} - \underline{X}_{e_q} \in dy - x + z\right).$$

Βάση των υποθέσεων, $X_{e_q} - \underline{X}_{e_q}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\overline{X}_{e_q}$, η οποία είναι εκθετική κατανομή με παράμετρο $\Phi(q)$. Επομένως έχουμε:

$$R^{(q)}(x,dy) = \left\{\int_{[x-y,x]} \left(\frac{1}{\Phi(q)}W^{(q)}(dz) - W^{(q)}(z)dz\right)\Phi(q)e^{-\Phi(q)(y-x+z)}\right\}dy,$$

το οποίο μας δείχνει ότι υπάρχει πυκνότητα $r^{(q)}(x,dy)$, για το μέτρο $R^{(q)}(x,dy)$. Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη στο ολοκλήρωμα στην τελευταία ισότητα, έχουμε ότι:

$$r^{(q)}(x,dy) = e^{-\Phi(q)y}W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-y).$$

Τελικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω γεγονότα για να υπολογίσουμε την δυνητική πυκνότητα $u^{(q)}$. Αρχικά με τη βοήθεια της ισχυρής *Markov* ιδιότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} qU^{(q)}(a,x,dy) &= \mathbb{P}_x\left(X_{e_q} \in dy, \underline{X}_{e_q} \geq 0, \overline{X}_{e_q} \leq a\right) \\ &= \mathbb{P}_x\left(X_{e_q} \in dy, \underline{X}_{e_q} \geq 0\right) - \mathbb{P}_x\left(X_{e_q} \in dy, \underline{X}_{e_q} \geq 0, \overline{X}_{e_q} > a\right) \\ &= \mathbb{P}_x\left(X_{e_q} \in dy, \underline{X}_{e_q} \geq 0\right) - \mathbb{P}_x\left(X_{e_q} \in dy, \underline{X}_{e_q} \geq 0, \right)\mathbb{P}_x\left(X_\tau = a, \tau < e_q\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, τις ποσότητες αυτές τις έχουμε ξαναδεί και τις έχουμε υπολογίσει, η τρίτη πιθανότητα είναι η:

$$E_x\left[e^{-q\tau_a^+}I(\tau_a^+ < \tau_0^-)\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}.$$

Εν κατακλείδι, έχουμε ότι για $q \geq 0$ και $x \in [0,a]$, το μέτρο $U^{(q)}(a,x,dy)$ έχει πυκνότητα:

$$r^{(q)}(x,y) - \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}r^{(q)}(\alpha,y), \qquad y \in [0,a]$$

και μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στην (3.15). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θέλουμε την περίπτωση όταν $q = 0$ και παίρνοντας όρια στην (3.15) παρατηρούμε ότι το μέτρο $U^{(q)}(a,x,dy)$ έχει φθίνουσα μονοτονία στο q και η συνάρτηση κλίμακας είναι συνεχής στο q.

■

<u>Πόρισμα 3.1</u> *Για γνωστό $q \geq 0$, το $q-$ επιλύσιμο μέτρο για τη X, που σταματά στην έξοδο από το $[0,\infty)$, η πυκνότητά του δίνεται από:*

$$r^{(q)}(x,y) = e^{-\Phi(q)y}W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-y),$$

για κάθε $x, y \geq 0$.

3.3 Το μέτρο των *Gerber – Shiu*

Εφόσον κάναμε αισθητή την παρουσία των δυνητικών μέτρων και πως αλληλοεπιδρούν με τις συναρτήσεις κλίμακας, θα ξεδιπλώσουμε το μέτρο για την *Gerber – Shiu* συνάρτηση. Βασιστήκαμε στο σύγγραμμα του *Kyprianou* (2013).

Τώρα, έχουμε όλα τα εφόδια για να παρέχουμε ένα χαρακτηρισμό για το μέτρο των *Gerber – Shiu*, σε όρους κλιμακωτών συναρτήσεων. Αρχικά, θυμίζουμε ότι η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* δίνεται από τη σχέση:

$$E_x\left[e^{-q\tau_0^-} f\left(-X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}\right) I(\tau_0^- < \infty)\right] \quad \text{ή} \quad E_x\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right]$$

και μας ενδιαφέρει το λεγόμενο μέτρο των *Gerber – Shiu*, δηλαδή το προεξοφλημένο από κοινού μέτρο του ζεύγους $\left(-X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}\right)$, που δηλώνεται ως:

$$K^{(q)}(x, dy, dz) = E_x\left[e^{-q\tau_0^-}; -X_{\tau_0^-} \in dy, X_{\tau_0^- -} \in dz\right],$$

για $x, y, z \geq 0$. Διαφορετικά, κάποιος μπορεί να δηλώσει το μέτρο των *Gerber – Shiu* ως:

$$m_f(x, q) = \int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} f(y, z)\, K^{(q)}(x, dy, dz).$$

Επομένως, αφού υπενθυμίσαμε τις βασικές έννοιες τώρα είμαστε έτοιμοι για την ανάπτυξη όσων προαναφέραμε. Στην πραγματικότητα, θα εδραιώσουμε μια σχέση για ένα ελαφρώς πιο γενικευμένο μέτρο. Με μια ελάχιστη χειραγώγηση του ορισμού, για $\alpha > 0$ και $x \in [0, a]$, ορίζουμε:

$$K^{(q)}(\alpha, x, dy, dz) = E_x\left[e^{-q\tau_0^-}; -X_{\tau_0^-} \in dy, X_{\tau_0^- -} \in dz, \tau_0^- < \tau_\alpha^+\right],$$

για $z \in [0, a], y \geq 0$.

Σημειώνουμε ότι για το μέτρο των *Gerber – Shiu*, το ορίσαμε ως $K^{(q)}(x, dy, dz)$ και ικανοποιεί τη σχέση $K^{(q)}(x, dy, dz) = K^{(q)}(\infty, x, dy, dz)$, για $z, y \geq 0$.

<u>Θεώρημα 3.4</u> *Για σταθερό $q \geq 0$ και $\alpha > 0$. Τότε:*

$$K^{(q)}(\alpha, x, dy, dz) = \lambda \left\{\frac{W^{(q)}(x) W^{(q)}(a - z) - W^{(q)}(a) W^{(q)}(x - z)}{W^{(q)}(a)}\right\} F(z + dy) dz,$$

για $x, z \in [0, a]$ και $y \geq 0$. Επί το πλείστων:

$$K^{(q)}(x, dy, dz) = \lambda\left\{e^{-\Phi(q) y} W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x - y)\right\} F(z + dy) dz,$$

για $z, y \geq 0$.

<u>Απόδειξη</u> Για σταθερό $q \geq 0$ και $x \in [0, \alpha]$. Για την πρώτη ισότητα είναι αρκετό να δείξουμε ότι για όλα τα οριοθετημένα, συνεχή $f : (0, \infty) \times [0, a] : \to [0, \infty)$, ισχύει:

$$E_x\left[e^{-q\tau_0^-} f\left(-X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}\right); \tau_0^- < \tau_\alpha^+\right] = \lambda \int_0^a \int_{(0,\infty)} f(y,z) u^{(q)}(a,x,z) F(z+dy) dz.$$

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι:

$$\{\tau_0^- < \tau_\alpha^+\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X_{T_i} < 0, \overline{X}_{T_i -} \leq a, \underline{X}_{T_i -} \geq 0\},$$

όπου, η ένωση που πήραμε για τα ασυσχέτιστα γεγονότα. Επομένως, (με βάση του θεωρήματος 5.4 του *Kyprianou* (2013)) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&E_x\left[e^{-q\tau_0^-} f\left(-X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}\right); \tau_0^- < \tau_\alpha^+\right] \\
&= E_x\left[\sum_{i=1}^{\infty} I\left(X_{T_i -} - \xi_i < 0\right) I\left(\overline{X}_{T_i -} \leq a\right) I\left(\underline{X}_{T_i -} \geq 0\right) e^{-qT_i} f\left(-X_{T_i -} + \xi_i, X_{T_i -}\right)\right] \\
&= \lambda \int_{(0,\infty)} E_x\left[\int_0^{\infty} I(X_{t-} < u)\, I\left(\overline{X}_{t-} \leq a\right) I\left(\underline{X}_{t-} \geq 0\right) e^{-qt} f(-X_{t-} + u, X_{t-}) dt\right] F(du) \\
&= \lambda \int_{(0,\infty)} E_x\left[\int_0^{\infty} I(X_{t-} < u)\, I\left(t \leq \tau^{[0,a]}\right) e^{-qt} f(-X_{t-} + u, X_{t-}) dt\right] F(du) \\
&= \lambda \int_{(0,\infty)} \int_{[0,a]} \int_0^{\infty} I(z < u)\, e^{-qt} f(u - z, z) \mathbb{P}_x\left(X_t \in dz, t < \tau^{[0,a]}\right) dt F(du). \qquad 3.16
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της $U^{(q)}(a, x, dz)$ συνεπάγεται ότι:

$$E_x\left[e^{-q\tau_0^-} f\left(-X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}\right); \tau_0^- < \tau_\alpha^+\right] = \lambda \int_{(0,\infty)} \int_0^{\alpha} I(z < u) f(u - z, z) u^{(q)}(a, x, z)\, dz F(du).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^a \int_{(0,\infty)} f(y,z) u^{(q)}(a,x,z) F(z+dy) dz = \int_{(0,\infty)} \int_0^{\alpha} I(z < u) f(u - z, z) u^{(q)}(a, x, z)\, dz F(du)$$

προκύπτει εύκολα με απλό υπολογισμό βάση του θεωρήματος του *Fubini* και αλλαγής μεταβλητών.

Για το δεύτερο κομμάτι του θεωρήματος, απλά παίρνοντας όρια στην (3.16) για $\alpha \to \infty$. Συνέπεια αυτού είναι να πάρουμε την εξής ποσότητα:

$$E_x\left[e^{-q\tau_0^-} f\left(-X_{\tau_0^-}, X_{\tau_0^- -}\right) I(\tau_0^- < \infty)\right] = \lambda \int_0^\infty \int_{(0,\infty)} f(y,z) r^{(q)}(x,z) F(z+dy) dz,$$

για όλα $x, q \geq 0$ το οποίο συνεπάγεται της $K^{(q)}(x, dy, dz)$.

■

4. Κεφάλαιο: Φασματικά Αρνητικές Διαδικασίες *Lévy*

Αρχικά, σε αυτό το κεφάλαιο θέλουμε να μελετήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας (*Ruin Probability*) μέσω των φασματικών αρνητικών διαδικασιών *Lévy* (*Spectrally Negative Lévy Processes*). Αυτές οι διαδικασίες είναι μια μεγάλη «οικογένεια», που περιέχει την Σύνθετη Διαδικασία Poisson (*Compound Poisson Process*) και την Διαδικασία Γάμμα (*Gamma Process*), όπου και οι δυο αυτές διαδικασίες διαταράσσονται από μια διάχυση (*Diffusion*). Επιπλέον, μελετάμε την περίπτωση που η διαδικασία για πρώτη φορά θα φτάσει σε ένα δοθέν, γνωστό, επίπεδο. Στην περίπτωση του κλασσικού υποδείγματος λαμβάνουμε την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του χρόνου ανάκτησης για πρώτη φορά. Για πιο αναλυτικά αποτελέσματα γίνεται παραπομπή στα σύγγραμμα των *Dufrense & Gerber* (1991), *Gerber*(1990), *dos Reis*(1993).

Το κλασσικό μοντέλο υπάρχει και αναλύεται σχεδόν ένα αιώνα τώρα με πρωτοπόρο σε αυτό τον *Lundberg* (1903a), (1903b), (1926). Το κλασσικό μοντέλο (η σύνθετη διαδικασία Poisson) έχει γενικευτεί με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, οι ανανεωτικές εξισώσεις (*Renewal Processes*) και οι γενικές σημειακές διαδικασίες (*General Point Processes*) είναι από τις πιο γνωστές διαδικασίες γενίκευσης του κλασσικού μοντέλου.

Ωστόσο, από την οπτική γωνία των στοχαστικών διαδικασιών, πολλές διαδικασίες πλεονάσματος είναι διαδικασίες *Lévy* με αρνητικά άλματα. Όπως έχουμε αναφέρει, αυτές οι διαδικασίες ονομάζονται φασματικά αρνητικές διαδικασίες *Lévy*.

Στο κλασσικό υπόδειγμα σύνθετης διαδικασίας *Poisson* που διαταράσσεται από μια διάχυση διερευνήθηκε από τους *Dufrense & Gerber* (1991). Επιπρόσθετα, μελετήθηκε από τους *Gerber & Landry* (1998) και τους *Gerber & Shiu* (1998). Οι προηγούμενοι συγγραφείς κυρίως χρησιμοποίησαν τεχνικές των ανανεωτικών εξισώσεων για την μελέτη τους. Σε μια σειρά από τα σύγγραμματα των *Dufrense et al.* (1991), *Gerber* (1992) και *Dufrense & Gerber* (1993), το υπόδειγμα επεκτάθηκε σε διαδικασία Γάμμα και σε κάποιες άλλες απείρως διαιρετές διαδικασίες. Σε αυτές τις περιπτώσεις φαίνεται ότι οι ανανεωτικές τεχνικές δεν έχουν εφαρμογή, τουλάχιστον όχι σε προφανή μορφή. Ωστόσο, από την πλευρά των διαδικασιών *Lévy*, οι πιθανότητες χρεοκοπίας, κάτω από αυτές τις διαδικασίες, μπορούν να διαχειριστούν με μοναδικό και απλό τρόπο, το οποίο είναι από τους κύριους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι και το κλασσικό μοντέλο και η διαδικασία Γάμμα, διαταράσσονται από διάχυση. Θα δείξουμε ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας και άλλα προβλήματα που συσχετίζονται με τη θεωρία κινδύνων, περιλαμβανομένων των δυο παραπάνω περιπτώσεων, μπορούν να διαχειριστούν κατά μοναδικό και απλό τρόπο.

4.1 Μερικά αποτελέσματα από τη Διαδικασία *Lévy*

Η διαδικασία *Lévy* είναι μια οικογένεια από συνεχής χρόνου διαδικασίες με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις και με δεξιός συνεχής δειγματικά μονοπάτια, με την ύπαρξη του δεξιού ορίου (*Càdlàg*). Οι διαδικασίες *Lévy* έχουν μελετηθεί έντονα μετά από την πρωτοποριακή δουλειά του *Lévy* στις αρχές της δεκαετίας του 1930. Μερικές καλές αναφορές για τις διαδικασίες *Lévy* είναι τα συγγράμματα των *Bertoin* (1998) και *Bertoin* (1999a). Επιπλέον, είναι γνωστό ότι οι μονοδιάστατες κατανομές των διαδικασιών *Lévy* είναι απείρως διαιρετές.

Έστω $\{X_t : t \geq 0\}$ να είναι μια d – διάστατη διαδικασία *Lévy*. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_t μπορεί να εκφραστεί στην εξής γνωστή μορφή:

$$E\left[e^{i\langle\lambda, X_t\rangle}\right] = e^{-t\Psi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d$$

όπου, $\Psi\colon\ \mathbb{R}^d \to C$, συνεχής συνάρτηση με $\Psi(0) = 0$, που είναι ο χαρακτηριστικός εκθέτης.

Από τη φόρμουλα των *Lévy – Khintchine*, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έχουμε, $\Psi\colon\ \mathbb{R}^d \to C$ ο χαρακτηριστικός εκθέτης μιας απείρως διαιρετής κατανομής μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$\Psi(\lambda) = i\langle\alpha, \lambda\rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d}[1 - e^{i\langle\lambda, X\rangle} + i\langle\lambda, x\rangle I(|x| < 1)]\nu(dx),$$

όπου, $\alpha \in\ \mathbb{R}^d$, Q θετική ημι-ορισμένη τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^d$ και ν το μέτρου του Lévy στο $\mathbb{R}^d - \{0\}$ με $\int(1 \wedge |x^2|)\nu(dx) < \infty$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την ανάλυση *Lévy – Itô* μιας διαδικασίας *Lévy*. Κάνοντας τη σύνδεση με αυτό το κεφάλαιο έχουμε τα παρακάτω. Αρχικά έχουμε την γενική διαδικασία *Lévy* η οποία μπορεί να χωριστεί ως άθροισμα τεσσάρων ανεξάρτητων *Lévy* διαδικασιών: $X = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)}$, όπου $Y^{(0)}$ είναι η σταθερή τάση, $Y^{(1)}$ ο γραμμικός μετασχηματισμός της κίνησης *Brown*, $Y^{(2)}$ είναι η σύνθετη διαδικασία *Poisson* με άλματα μεγέθους μεγαλύτερου ή ίσου της μονάδος και $Y^{(3)}$ η διαδικασία του καθαρού άλματος με μέγεθος του άλματος μικρότερο της μονάδος. Η διαδικασία $Y^{(3)}$ μπορεί να παρθεί από το όριο μιας αντισταθμισμένης σύνθετης διαδικασίας *Poisson*.

Όταν $d = 1$, υπάρχουν μερικές ειδικές περιπτώσεις όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* για να μελετήσουμε την κατανομή της διαδικασίας *Lévy*. Για κάθε $\lambda > 0$, έχουμε:

$$\Phi(\lambda) = \Psi(i\lambda) = -\alpha\lambda - \frac{1}{2}Q\lambda^2 + \int [1 - e^{-\lambda x} - \lambda x I(|x| < 1)]\nu(dx),$$

όπου, $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ο εκθέτης *Laplace*. Σημειώνουμε ότι ισχύει:

$$E\left[e^{\lambda X_t}\right] = e^{-t\Phi(\lambda)}.$$

Μια ειδική περίπτωση μονοδιάστατης διαδικασίας *Lévy* είναι η *Subordinator* που παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$ και έχει αύξοντα μονοπάτια. Σε αυτήν την περίπτωση, ο εκθέτης *Laplace* μπορεί να εκφραστεί σε μια απλούστερη μορφή:

$$\Phi(\lambda) = k + c\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda x})\nu(dx),$$

όπου $k \geq 0$ ονομάζεται *killing rate*, δηλαδή ο χρόνος όπου σταματάει η διαδικασία, $c \geq 0$ ο συντελεστής τάσης και ν το προαναφερθέν μέτρο.

Επίσης, μια πιο χρήσιμη, τουλάχιστον σε αυτό το κεφάλαιο, ειδική περίπτωση της διαδικασίας *Lévy* είναι οι φασματικά αρνητικές διαδικασίες *Lévy*. Οι εν λόγω διαδικασίες είναι τα στοιχεία μιας υποοικογένειας της διαδικασίας *Lévy*. Ο εκθέτης *Laplace* μιας φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy* είναι:

$$E\left[e^{\lambda X_t}\right] = e^{t\xi(\lambda)}, \quad \lambda \geq 0, \tag{4.1}$$

όπου:

$$\xi(\lambda) = -\Psi(-i\lambda) = \alpha\lambda + \frac{1}{2}Q\lambda^2 + \int_{(-\infty,0)} [e^{-\lambda x} - 1 - \lambda x I(|x| < 1)]\nu(dx),$$

καλείται ο εκθέτης *Laplace* της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy*. Οι φασματικά αρνητικές διαδικασίες *Lévy* έχουν μελετηθεί στις εφαρμοσμένες πιθανότητες ως υποδείγματα των ουρών και σε ασφαλιστικούς κινδύνους, βλέπε *Prabhu* (1998).

Τώρα θα δείξουμε τρία αποτελέσματα που είναι χρήσιμα στην θεωρία κινδύνων και θα τα χρησιμοποιήσουμε σε παρακάτω παραγράφους. Το πρώτο μπορεί να βρεθεί στο σύγγραμμα του *Zolotarev* (1964) και χρησιμοποιήθηκε από τον *Furrer* (1998). Πρώτα όμως θα δώσουμε μερικές βασικές έννοιες του παράγοντα *Wiener – Hopf*.

Έστω $X = \{X(t), t \geq 0\}$ μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* και $\tau_x = \inf\{t \geq 0 | X(t) < -x\}$, $x \geq 0$. Θέτουμε $\gamma = E[X(1)]$, όπου τ_x ο πρώτος χρόνος εισόδου της X στο διάστημα $(-\infty, -x)$. Αν $T = T(\lambda) \sim Exp(\lambda)$ η οποία είναι ανεξάρτητη της X. Άρα, $\frac{\lambda}{\lambda - \xi(s)} = E\left[e^{sX(T)}\right]$ και έχουμε:

$$\psi_\lambda^-(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \xi(s)}\right)\left(1 - \frac{s}{\varphi(\lambda)}\right),$$

και:

$$\psi_\lambda^+(s) = \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda) - s},$$

επομένως, συνεπάγεται ότι:

$$\psi_\lambda^-(s)\psi_\lambda^+(s) = \frac{\lambda}{\lambda - \xi(s)},$$

όπου, $\xi(s)$ ο προαναφερθείς χαρακτηριστικός εκθέτης, $\varphi(\lambda)$ ο εκθέτης *Laplace* του χρόνου πρώτης προέλασης (*first time passage*), $\psi_\lambda^-(s)$ είναι το αναλυτικό αριστερό κομμάτι του $Re\{s\} > 0$ και συνεχής και μη μηδενική στο $Re\{s\} \geq 0$ και είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* μιας απείρως διαιρετής κατανομής ζ στο $(-\infty, 0)$ και αντίστοιχα ο $\psi_\lambda^+(s)$ είναι το αναλυτικό δεξιό κομμάτι του $Re\{s\} < 0$ και συνεχής και μη μηδενική στο $Re\{s\} < 0$ και είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* μιας απείρως διαιρετής κατανομής ζ στο $(0, \infty)$.

Μια τέτοια παραγοντοποίηση είναι μοναδική και ονομάζεται *Wiener – Hopf* παραγοντοποίηση της X. Οι $\psi_\lambda^-(s)$, $\psi_\lambda^+(s)$ είναι η αριστερή και δεξιά *Wiener – Hopf* παράγοντες της X, αντίστοιχα.

Επιπλέον, για το *first passage time*, ο χρόνος επέλευσης από ένα σημείο x, έχουμε τον εκθέτη:

$$E\left[e^{-\tau_x^+ s}\right] = e^{-x\,\varphi(s)}, \qquad s, x \geq 0,$$

άρα απόρροια των παραπάνω είναι η παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση 4.1</u> *Αν* $f_\lambda(x) = 1 - E[e^{-\lambda\,\tau_x}]$ *και* $s\int_0^\infty e^{-sx} f_\lambda(x)\,dx = \psi_\lambda^-(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \xi(s)}\right)\left(1 - \frac{s}{\varphi(\lambda)}\right)$ *τότε:*

$$s\int_0^\infty e^{-sx} P[\tau_x < \infty]\,dx = 1 - \frac{\gamma s}{\xi(s)}.$$

Απόδειξη

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} P[\tau_x < \infty]\, dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lim_{\lambda \to 0} E[\, e^{-\lambda\, \tau_x}] dx$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-sx} \lim_{\lambda \to 0} [\, 1 - f_\lambda(x)] dx$$
$$= \frac{1}{s} - \lim_{\lambda \to 0} \int_0^{\infty} e^{-sx} f_\lambda(x) dx$$
$$= \frac{1}{s} - \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\lambda}{\lambda - \xi(s)}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\varphi(\lambda)}\right)$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{\xi(s)} \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda}{\varphi(\lambda)},$$

τώρα χρησιμοποιώντας *de l' Hopital* έχουμε ότι $\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\varphi'(\sigma)}$ και διαφορίζουμε την $\xi\big(\varphi(\lambda)\big) = \lambda$ ως προς λ, έτσι έχουμε $\frac{1}{\varphi'(\lambda)} = \xi'\big(\varphi(\lambda)\big)$ και επομένως $\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\varphi'(\lambda)} = \xi'(0+) = E[X(1)] = \gamma$.

■

Πρόταση 4.2 *Έστω* $\{Y(t) : t \geq 0\}$ *μια φασματικά αρνητική διαδικασία Lévy με αρχική τιμή μηδέν και* $\gamma = E\big(Y(1)\big) \geq 0$. *Ορίζουμε την* $\psi(x) = P\{inf_{t \geq 0} Y(t) < -x\}$ *για* $x \geq 0$. *Τότε η συνάρτηση* $\psi(x)$ *μπορεί να οριστεί από τον εκθέτη Laplace,* $\xi(\lambda)$, *από την εξίσωση:*

$$s \int_0^{\infty} e^{-sx} \psi(x) dx = 1 - \frac{\gamma s}{\xi(s)}\,, \quad s \geq 0.$$

Η πρόταση 4.2 είναι από το σύγγραμμα του *Bertoin* (1998,pp. 189, 190). Δηλώνουμε τη μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $\xi(\lambda) = 0$ με $\varphi(0)$ και παρατηρούμε ότι η τετριμμένη είναι λύση της εξίσωσης. Αν $\varphi(0) > 0$, τότε λόγω της αυστηρής κυρτότητας της $\xi(\lambda)$ το μηδέν και η $\varphi(0)$ είναι οι μοναδικές λύσεις. Ο χαρακτηριστικός εκθέτης ξ: $[\varphi(0), \infty) \to [0, \infty)$ είναι συνεχής και αύξουσα συνάρτηση, οπότε μπορούμε να ορίζουμε την αντίστροφη της ξ από την $\varphi : [0, \infty) \to [\varphi(0), \infty)$ και $\xi\big(\varphi(\lambda)\big) = \lambda$.

Πρόταση 4.3 *Για την φασματικά αρνητική διαδικασία Lévy* $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ *με αρχική τιμή μηδέν, η διαδικασία του χρόνο του πρώτου «χτυπήματος» (first hitting time), δηλώνεται ως* $\{T_x : x \geq 0\}$ *και ορίζεται ως* $T_x = inf\{s \geq 0 : X_s > x\} = inf\{s \geq 0 : X_s = x\}$, *είναι subordinator με αυστηρώς θετικές τροχιές. Ο εκθέτης Laplace του παραπάνω είναι* $\varphi(s)$ *αν το X έχει τάση στο άπειρο.*

Η τρίτη πρόταση παρέχει ένα εύκολο τρόπο για την ανάκτηση της κατανομής του *supremum* και του *infimum* μιας φασματικά αρνητική διαδικασίας *Lévy*. Επιπλέον, η πρώτη πρόταση μπορεί να αποδειχθεί από την δεύτερη πρόταση, από το (ii) αφήνοντας το $q \to 0$ και χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η παρακάτω πρόταση είναι από τον *Bertoin* (1998, p. 192).

<u>Πρόταση 4.4</u> *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια φασματικά αρνητικής διαδικασίας Lévy, και M_t και L_t να είναι το supremum και infimum της διαδικασίας X_t με αρχική τιμή τη μηδενική, δηλαδή $M_t = sup_{0\le s\le t}X_s$ να είναι η μέγιστη τιμή της διαδικασίας X_t και $L_t = inf_{0\le s\le t}X_s$ ελάχιστη τιμή της διαδικασίας X_t, και έστω $\tau(q)$ να είναι ανεξάρτητος εκθετικός χρόνος με παράμετρο $q > 0$. Τότε,*

$M_{\tau(q)}$ έχει μια εκθετική κατανομή με μια παράμετρο $\varphi(q)$.

$$E\left[e^{\lambda L_{\tau(q)}}\right] = \frac{q}{\varphi(q)}\frac{\varphi(q)-\lambda}{q-\xi(\lambda)}.$$

4.2 <u>Αποτελέσματα στην πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της διαδικασίας *Lévy*.</u>

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε πως να εφαρμόσουμε την πρόταση 4.2 στις πιθανότητες χρεοκοπίας. Παρουσιάζουμε τις παρακάτω μεθόδους θεωρώντας ότι η σύνθετη διαδικασία *Poisson* και η διαδικασία Γάμμα διαταράσσονται από μια διάχυση. Αρχικά θα δούμε την περίπτωση της σύνθετης διαδικασίας *Poisson*.

4.2.1 <u>Η σύνθετη διαδικασία Poisson που διαταράσσεται από μια διάχυση.</u>

Θεωρούμε τη σύνθετη διαδικασία *Poisson*, η οποία διαταράσσεται από μια διάχυση $(\sigma W(t))$:

$$\mathrm{U(t) = u + ct} - \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N(t)}} \mathrm{X_i} + \mathrm{\sigma W(t)},$$

όπου, $\mathrm{u} \ge 0$ το αρχικό αποθεματικό (κεφάλαιο), $c = (1+\theta)\lambda\mu$ το ασφάλιστρο, και $\mathrm{N(t)}$, που αντιστοιχεί στους ενδιάμεσους χρόνους, μια ομογενής διαδικασία *Poisson* με παράμετρο λ, η οποία εκφράζει το ρυθμό εμφάνισης των αλμάτων. Εδώ η $\{X_i : i \ge 1\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που αναφέρεται στο ύψος των αποζημιώσεων, με συνάρτηση κατανομής $\mathrm{P(x)}$ στο $[0,\infty)$ και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας $p(x)$ και μέση τιμή $E(X) = \mu$. Το εν λόγω μοντέλο μελετήθηκε από τους *Dufresne* και *Gerber* (1991) και απέδειξαν ότι ο συντελεστής διάχυσης εκφράζει μια επιπλέον αβεβαιότητα των συνολικών απαιτήσεων ή μια αβεβαιότητα του ασφάλιστρου που εισπράττεται. Χρησιμοποιώντας τεχνικές της ανανεωτικής θεωρίας, παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Σημειώνουμε ότι, αν $u = 0$, η χρεοκοπία φαίνεται κατευθείαν.

Ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με $\psi(u)$, ως εξής:

$$\psi(u) = P_r\{\inf_{t\geq 0} U(t) < 0 | U(0) = u\}, \qquad u \geq 0$$

Επιπλέον, στο παρακάτω θεώρημα παρατηρούμε ένα από τα βασικότερα αποτελέσματα που απέδειξαν οι *Dufresne* και *Gerber* (1991) μέσω ανανεωτικών εξισώσεων.

<u>Θεώρημα 4.1</u> *Θεωρούμε το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας των κινδύνων που διαταράσσεται από την διαδικασία Wiener. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi(u)$ *ικανοποιεί τη σχέση*:

$$1 - \psi(u) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (P_I^{*n} * G^{*(n+1)}(u)) \tag{4.2}$$

όπου,

$$P_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \big(1 - P(y)\big)dy \ \ \textit{και} \ \ \rho = 1/(1+\theta)\ ,$$

με $G(x)$ *να είναι μια εκθετική συνάρτηση κατανομής με παράμετρο* $\frac{2c}{\sigma^2}$*,* P^{*n} *(*$n \geq 1$*) δηλώνει την n-οστή συνέλιξη της* P *με τον εαυτό της και* P^{*0} *να είναι η συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί στο μέτρο Dirac στο μηδέν.*

<u>Απόδειξη</u> Γνωρίζουμε ότι $\{U(t) - u\}$ είναι φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*, με αρχική τιμή στο μηδέν. Εφαρμόζοντας την πρόταση 4.2, γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την:

$$s\int_0^{\infty} e^{-su}\psi(u)du = 1 - \frac{\gamma s}{\xi(s)}\ ,\ \ s \geq 0$$

όπου, $\xi(s)$ είναι ο εκθέτης *Laplace* για τη διαδικασία *Lévy* $\{U(t) - u\}$, οπότε:

$$E\left[e^{(U(t)-u)}\right] = e^{t\xi(s)} \tag{4.3}$$

και τώρα υπολογίζουμε το δεξί μέρος της (4.3). Δηλώνουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* της $p(x)$ τέτοιος ώστε, $\hat{p}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}p(x)dx$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E\left[e^{(U(t)-u)}\right] &= e^{t\xi(s)} \\ &= \exp\left\{t\left(cs + \lambda(\hat{p}(s) - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)\right\} \end{aligned}$$

με $p = \lambda\mu/c$ και $\gamma = c - \lambda\mu$. Χρησιμοποιώντας ίδια μεθοδολογία με αυτήν του *Furrer* (1998) έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-su} d\big(1 - \psi(u)\big) = 1 - s\int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du$$

$$= \gamma s/\xi(s)$$

$$= \frac{\gamma}{c + \frac{1}{2}\sigma^2 s + ((\hat{p}(s) - 1)/s)\lambda}$$

$$= (1-\rho)\frac{c/(c + \frac{1}{2}\sigma^2 s)}{1 - \rho(1/\mu)(((1 - \hat{p}(s)))/s)c/(c + 1/2\,\sigma^{\wedge}2\,s)}$$

$$= (1-\rho)\frac{\hat{u}(s)}{1 - \rho\widehat{p_1}(s)\hat{u}(s)}$$

$$= (1-\rho)\hat{u}(s)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}[\rho\widehat{p_1}(s)\hat{u}(s)]^n \qquad 4.4$$

όπου, $p_1(x) = (1/\mu)\big(1 - P(x)\big) = (1/\mu)\int_x^\infty p(y)dy$. Οι *Gerber* και *Shiu* (1998) είχαν δείξει ότι $\hat{p}_1(s) = \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)(1-\hat{p}(s))}{s}$. Η εξίσωση αυτή μπορεί επίσης να αποδειχθεί ως ακολούθως:

$$\hat{p}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, p_1(u)du$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-su}\Big(\int_\mu^\infty p(z)dz\Big)du$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty p(z)\int_0^z e^{-su}du$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty p(z)\frac{1 - e^{-sz}}{s}dz$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{1 - \hat{p}(s)}{s} \qquad 4.5$$

Επομένως, η ποσότητα $\hat{u}(s) = c/(c + \frac{1}{2}\sigma^2 s) = (2c/\sigma^2)/(2c/\sigma^2 + s)$ είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\frac{2c}{\sigma^2}$. Δηλώνουμε τη συνάρτηση κατανομής της παραπάνω εκθετικής τυχαίας μεταβλητής με G(x) και χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (4.4) παίρνουμε την (4.2).

■

<u>Σημείωση 4.1</u>

i) *Οι Dufresne και Gerber (1991) βρήκαν το ίδιο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας τεχνικές ανανεωτικών εξισώσεων, βλέπε Dufresne και Gerber (1991, Εξίσωση (3.4)).*

ii) *Καθώς* $\sigma \to 0$, *η σχέση (4.5) γίνεται η κλασσική φόρμουλα των Pollaczek – Khinchine (Rolski et al.1999 p.250)*

iii) *Ενώ η μέγιστη συνολική απώλεια μπορεί να αποσυντεθεί χρησιμοποιώντας γεωμετρική τυχαία μεταβλητή* N *να είναι ο αριθμός των καταγεγραμμένων μέγιστων υψών, η μέγιστη συνολική απώλεια δεν είναι σύνθετη γεωμετρική κατανομή όταν* $\sigma \neq 0$.

4.2.2. <u>Παράδειγμα Διαδικασία Γάμμα.</u>

Αρχικά, η διαδικασία Γάμμα είναι μια τυχαία διαδικασία με ανεξάρτητες Γάμμα κατανεμημένες προσαυξήσεις. Συχνά τα «καθαρά» άλματα μιας αύξουσας διαδικασίας *Lévy* γράφονται ως $\Gamma(t;\gamma,\lambda)$, με ένταση μέτρου $\nu(x) = \gamma\, x^{-1}\exp(-\lambda x)$ για $x > 0$. Τα άλματα συμπεριφέρονται ως μιας διαδικασίας *Poisson* με ένταση $\nu(x)dx$. Η παράμετρος γ ελέγχει το ποσοστό των αφίξεων των αλμάτων και λ η παράμετρος κλίμακας που αναφέρεται στο μέγεθος των αλμάτων.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας υπό την υπόθεση της διαδικασίας Γάμμα να διαταράσσεται από μια διάχυση. Σε αυτή την περίπτωση, το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας στο χρόνο $t \geq 0$ είναι:

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma W(t), \qquad 4.6$$

όπου, $u \geq 0, c = (1+\theta)E[S(1)]$ και $S(t)$ είναι μια διαδικασία Γάμμα με παράμετρο $\alpha > 0$ και $b > 0$. Το μοντέλο (4.6) είναι ελαφρώς πιο γενικευμένο από αυτό που είχαν μελετήσει οι *Dufresne* και *Gerber* (1991). Σχετικές αναφορές υπάρχουν στους *Dufresne* και *Gerber* (1993), *Gerber* (1992) και *Gerber* & *Shiu* (1994). Εδώ, η διαδικασία Γάμμα $S(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο μιας σύνθετης διαδικασίας *Poisson*. Με πιθανότητα ένα, ο αριθμός των απαιτήσεων, σε κάθε χρονικό διάστημα, είναι άπειρος. Παρ' όλα αυτά, καθώς η πλειοψηφία των απαιτήσεων είναι πολύ μικρή, το $S(t)$ είναι πεπερασμένο. Μπορούμε να παρατηρήσουμε εύκολα ότι το $S(t)$ είναι *Subordinator* και:

$$E\left[e^{-\lambda S_t}\right] = e^{-t\Phi(\lambda)}, \qquad \lambda \geq 0$$

όπου,

$$\Phi(\lambda) = \alpha \ln\left(1+\frac{\lambda}{b}\right) = \int_0^\infty \left(1-e^{-\lambda x}\right) a x^{-1} e^{-bx} dx, \qquad a>0, b>0$$

επομένως, το μέτρο του *Lévy* είναι $\nu^{(\alpha,b)}(dx) = a x^{-1} e^{-bx} dx$ και:

$$E\left[e^{-zS_t}\right] = \exp\left\{\ln\left(1+\frac{z}{b}\right)^{-at}\right\} = \left(\frac{b}{b+z}\right)^{at}, \qquad z \geq 0.$$

Προκειμένου να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, οι *Dufresne* και *Gerber* (1991) χρησιμοποίησαν την ίδια μεθοδολογία με αυτή της σύνθετης *Poisson* αλλά τώρα για διαδικασία Γάμμα.

<u>Θεώρημα 4.2</u> *Έστω μια διαδικασία Γάμμα που διαταράσσεται από μια διαδικασία Wiener. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί τη σχέση:*

$$1-\psi(u) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(P^{*n} * G^{*(n+1)}(u)\right),$$

όπου, $P(x)$ *είναι εκθετική (ολοκληρώσιμη) κατανομή με* $p = \frac{1}{1+\theta}$ *και* $G(x)$ *είναι μια εκθετική συνάρτηση κατανομής.*

<u>Απόδειξη</u> Παρατηρούμε ότι η (4.6) είναι φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* συν μια σταθερά, u. Εύκολα παρατηρούμε ότι για τον *Laplace* εκθέτη ισχύει:

$$E\left[e^{s(U(t)-u)}\right] = \exp\left\{t\left(cs - \Phi(s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)\right\} = e^{t\xi(s)}.$$

Παρόμοια με το θεώρημα 4.1 έχουμε, $\gamma = \psi - E[S(1)] = \frac{\theta\alpha}{b}$, $c = (1+\theta)E[S(1)] = \frac{(1+\theta)a}{b}$ και $\rho = \frac{1}{1+\theta}$. Χρησιμοποιώντας ίδιες μεθόδους με την απόδειξη του θεωρήματος 4.1 έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-su} d\left(1-\psi(u)\right) = 1 - s\int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du = \frac{\gamma s}{\xi(s)}$$
$$= \frac{\gamma}{c}\ \frac{c}{c+\frac{1}{2}\sigma^2 s - \frac{\Phi(s)}{s}}$$

$$= (1-\rho)\frac{\frac{c}{\left(c+\frac{1}{2}\sigma^2 s\right)}}{1-\rho(1/E[S(1)])(\Phi(s)/s)c/(c+1/2\,\sigma^2 s)} \qquad 4.7$$

Είναι επαρκές να δηλώσουμε τη ποσότητα $\left(\frac{1}{\mathrm{E}[\mathrm{S}(1)]}\right)\Phi(\mathrm{s})/\mathrm{s}$ να είναι ο μετασχηματισμός *Laplace* μιας συνάρτησης κατανομής. Έστω τώρα η περίπτωση που $\alpha = \mathrm{b} = 1$, τότε:

$$\frac{1}{\mathrm{E}[\mathrm{S}(1)]}\frac{\Phi(\mathrm{s})}{\mathrm{s}} = \frac{\ln(1+\mathrm{s})}{\mathrm{s}}.$$

Το εκθετικό ολοκλήρωμα είναι, $\int_{\mathrm{t}}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}, \quad \mathrm{t} \geq 0$. Από *Son* (1965), ο μετασχηματισμός *Laplace* του εκθετικού ολοκληρώματος είναι $\ln(1+\mathrm{s})/\mathrm{s}$ και γνωρίζουμε ότι το εκθετικό ολοκλήρωμα μπορεί να είναι η συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής.

■

4.2.3. Εφαρμογή της πρότασης 4.3 στον πρώτο χρόνο «χτυπήματος» της θεωρίας κινδύνων

Ο *Gerber* (1990) πρώτος μελέτησε τον πρώτο χρόνο που η διαδικασία φτάνει σε ένα δοθέν σημείο στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων. Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε, χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.3, ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για μια πιο γενική περίπτωση της θεωρίας κινδύνων. Μια εναλλακτική μέθοδος για να λάβουμε την πρόταση 4.3 (δηλαδή εκτός της διαδικασίας *Lévy*) είναι να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές των *Martingale* (βλέπε *Gerber & Shiu* (1994)). Σημαντική υπόθεση που κάνουμε είναι ότι οι φασματικά αρνητικές διαδικασίες *Lévy* έχουν μόνο αρνητικά άλματα.

Αρχικά, θεωρούμε την προηγούμενη περίπτωση με διαταραχή από τη διαδικασία *Wiener*. Ο χρόνος που για πρώτη φορά βρίσκεται σε ένα δοθέν επίπεδο (*first hitting time*) είναι όταν το πλεόνασμα βρίσκει το δοθέν επίπεδο $x > u$, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\mathrm{T_x} = \inf\{\mathrm{t} \mid \mathrm{U(t)} > \mathrm{x}\} = \inf\{\mathrm{t} \mid \mathrm{U(t)} = \mathrm{x}\}.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω χρόνο, μπορούμε να ορίσουμε την υποπερίπτωσή του, το χρόνο διακοπής, επειδή η διαδικασία $\{\mathrm{U(t)} - \mathrm{u}\}$ είναι επίσης μιας φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Λόγω της στασιμότητας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\mathrm{U}(0) = 0$.

Από την πρόταση 4.3, καθώς $\{\mathrm{U(t)}\}$ είναι μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* και $\{\mathrm{T_x} : \mathrm{x} \geq 0\}$ είναι *subordinator*, οπότε μας μένει να ορίσουμε τον εκθέτη *Laplace* για αυτό τον *subordinator*. Όπως και πριν έχουμε:

$$E[e^{sU_t}] = e^{t\xi(s)}, \quad s \geq 0, \qquad \xi(s) = cs + \lambda(\hat{p}(s) - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \,.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι, όταν $\xi(0) = 0$ τότε έχουμε δυο ρίζες για την εξίσωση. Η μια είναι η τετριμμένη και η άλλη είναι αρνητική. Επίσης, από την κυρτότητα της $\xi(s)$ έχουμε ότι ο εκθέτης $\xi(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[0, \infty)$. Ο αντίστροφος του ορίζεται ως $\varphi(s)$.

Επομένως για τον αντίστροφο, $\varphi(s)$, έχουμε:

$$E[e^{-sT_x}] = e^{-x\varphi(s)}, \qquad s > 0, x > 0. \tag{4.8}$$

Από την (4.8) παίρνουμε την μέση τιμή και τη διακύμανση του T_x. Σημειώνουμε ότι, όταν $\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$, $\varphi(s)$ είναι η θετική λύση της $\xi(s) = \psi\sigma + \lambda(\hat{p}(s) - 1) = s$ η οποία είναι η εξίσωση του *Lundberg*, $\xi(\varphi(s)) = s$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η $\varphi(s)$ είναι η θετική λύση της εξίσωσης του *Lundberg*, με βάση την ένταση ανατοκισμού $s \geq 0$.

Τέλος παραθέτουμε δυο απλά παραδείγματα για τις διαδικασίες μας, *Wiener* και Γάμμα.

4.1 Παράδειγμα *Έστω ότι* $c = 1$ *και* $\sigma = 0$. *Παραγωγίζοντας και τις δυο πλευρές της (4.8) ως προς* s *και μετά θέτοντας* $s = 0$ *έχουμε:*

$$\begin{aligned} E[T_x] &= \varphi'(0)x \\ &= \frac{1}{\xi'(0)}x \\ &= \frac{1}{1-\lambda\mu}x \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E[T_x^2] &= \left(\varphi'(0)\right)^2 x^2 - \varphi''(0)x \\ &= \left(\varphi'(0)\right)^2 x^2 + \frac{\xi''(0)}{\left(\xi'(0)\right)^2}x \\ &= \left(\frac{1}{1-\lambda\mu}\right)^2 x^2 + \frac{\lambda\rho_2}{(1-\lambda\mu)^2}x \,. \end{aligned}$$

■

Τώρα θεωρούμε τη Γάμμα διαδικασία.

4.2 Παράδειγμα *Θεωρούμε για χάρη απλότητας ότι,* $a = b = 1$ *και* $c > 1$. *Επομένως η διαδικασία πλεονάσματος θα παίρνει τη μορφή:*

$$U(t) = ct - S_t\,.$$

Σε αυτή την περίπτωση ο Laplace εκθέτης είναι:

$$E[e^{sU_t}] = e^{cst}\left(\frac{1}{1+s}\right)^t = e^{(cs-\ln(1+s))t} = e^{t\xi(s)}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $c > 1$*, τότε* $\xi'(s) > 0$ *για* $s > 0$*. Τότε ο* ξ *έχει μια αντίστροφη συνάρτηση στο διάστημα* $[0, \infty)$*, τη όποια την δηλώνουμε ως* $\varphi(s)$*. Έτσι έχουμε:*

$$E[e^{-sT_x}] = e^{-x\varphi(s)}.$$

Οι δυο πρώτες ροπές της T_x *είναι:*

$$E[T_x] = \frac{1}{c-1}x$$

και

$$E[T_x^2] = \left(\frac{1}{c-1}\right)^2 x^2 + \frac{1}{(c-1)^2}x$$

■

Παρατηρούμε ότι ακόμα και σε αυτές τις δυο εύκολες περιπτώσεις, που υποθέσαμε στα παραδείγματα, δεν είναι εύκολα να πάρουμε μια έκφραση για την $\varphi(s)$.

4.4 <u>Ο χρόνος χρεοκοπίας και ο πρώτος χρόνος ανάρρωσης στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων.</u>

Έστω $\{X_t\}$ μια διαδικασία *Markov* που ξεκινάει από το μηδέν. Βάση του ορισμού της διαδικασίας *Markov*, η τιμή μηδέν καλείται μη πολική (*non-polar*) αν $P\{X_t = 0, \text{για κάποιο } t > 0\} > 0$. Όμοια, η μηδενική τιμή καλείται μη κανονική (*non-regular*), αν η πιθανότητα (μετάβασης) της $\{X_t\}$ να επιστρέψει άμεσα στο μηδέν είναι μηδέν. Σύμφωνα με αυτούς τους ορισμούς, είναι εύκολο να δούμε, για το κλασσικό υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνων που ξεκινάει από τη τιμή μηδέν, η τιμή μηδέν είναι ταυτόχρονα μη πολική και μη κανονική.

Η μελέτη των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy* στις εφαρμοσμένες πιθανότητες έχει μεγάλη ιστορία. Ο *Prabhu* (1970) μελέτησε το χρόνο χρεοκοπίας και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, για γενικευμένη φασματικά θετική διαδικασία *Lévy*, με το 0 να είναι ταυτόχρονα μη πολική και μη κανονική. Με κάποιες διαφοροποιήσεις οι παραπάνω ισχυρισμοί ισχύουν και για γενικευμένη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Ο dos *Reis* (1993) παρατήρησε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας και ο χρόνος παραμονής στο $(-\infty, 0)$, προτού του χρόνου ανάρρωσης για πρώτη φορά, για το κλασσικό υπόδειγμα με αρχική τιμή το 0 έχουν την ίδια κατανομή. Σε αυτή την παράγραφο, θα δείξουμε το παραπάνω στην περίπτωση της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy* χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του *Prabhu*. Επιπρόσθετα, αν το περιθώριο ασφαλείας δεν είναι απαραίτητα θετικό, η κατανομή μπορεί να μην είναι εκφυλισμένη.

Υπενθυμίζουμε ότι, για μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* $\{X_t\}$, η μορφή της παρουσιάζεται από την (4.1) σχέση. Έστω $\{X_t\}$ να είναι μια γενικευμένη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* να ξεκινάει από το 0, με 0 να είναι μη πολική και μη κανονική. Έστω τώρα $T = \inf\{s > 0 : X_s < 0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας και $R = \inf\{t > T : X_t = 0\}$ να είναι ο χρόνος ανάρρωσης για πρώτη φορά. Ο *Prabhu* (1970) βρήκε την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας (T, X_T) (βλ. *Marchal* (1998)). Για $\delta, \alpha > 0$:

$$\mathrm{E}[\exp(-\delta T + a X_T)] = 1 - \frac{1}{d}\frac{\delta - \xi(\alpha)}{\varphi(\delta) - \alpha}, \qquad 4.9$$

όπου, $\varphi(\lambda)$ ο συνεχής αντίστροφος του *Laplace* εκθέτη $\xi(\lambda)$, όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, και d να είναι η τάση της διαδικασίας $\{X_t\}$.

Από την άλλη πλευρά, αν η διαδικασία X ξεκινάει από το $x < 0$ και T_0 δηλώνει το πρώτο χρόνο που βρίσκεται στο μηδέν τότε, για $\beta > 0$, έχουμε:

$$E_x\left[e^{-\beta T_0}\right] = e^{x\varphi(\beta)}. \qquad 4.10$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (4.9) και (4.10) και χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα *Markov* για το χρόνο χρεοκοπίας T, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&E\big[\exp\big(-\delta T - \beta(R - T)\big)\big] = E\{E[\exp(-\delta T - \beta(R - T)|\sigma(X_t : t \leq T)]\}\\
&= E[\exp(-\delta T)]E\big[\exp\big(-\beta(R - T)\big|\sigma(X_t : t \leq T)\big)\big]\\
&= E\big[\exp(-\delta T)\exp\big(X_T\varphi(\beta)\big)\big]\\
&= 1 - \frac{1}{d}\frac{\delta - \beta}{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)}.
\end{aligned} \qquad 4.11$$

Η (4.11) είναι συμμετρική ως προς τα δ και β. Επομένως, T και $R - T$ έχουν την ίδια κατανομή. Ως ειδική περίπτωση, είναι ο χρόνος χρεοκοπίας στο $(-\infty, 0)$, προτού του πρώτου χρόνου ανάρρωσης υπό την υπόθεση του κλασσικού μοντέλου (με αρχική τιμή 0) έχουν την ίδια κατανομή. Για το κλασσικό μοντέλο, δηλαδή της σύνθετης διαδικασίας Poisson, η (4.11) μπορεί να γραφτεί ως:

$$E\left[\exp\left(-\delta T-\beta(S-T)\right)\right]=1-\frac{1}{c}\frac{\delta-\beta}{\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)}, \qquad 4.12$$

με $\varphi(s)$ να είναι ο συνεχής αντίστροφος της $\xi(s)=cs+\lambda(\hat{p}(s)-1)$.

Έστω $\beta=0$ στη (4.12), τότε:

$$E\left[e^{-\delta T}\right]=1-\frac{\delta}{c\varphi(\delta)}. \qquad 4.13$$

Όπως προαναφέραμε η $\varphi(\delta)$ είναι η θετική λύση της εξίσωσης του *Lundberg*. Και η (4.13) από *Gerber & Shiu* (1998) (εξίσωση 3.15) έχουμε ότι η $\varphi(\delta)$ παρουσιάζεται ως $\rho=\rho(\delta)$.

<u>Πρόταση 4.5</u> *Για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων $\{X_t\}$, η κατανομή των (T,X_T) είναι κατάλληλη και αν και μόνο αν ισχύει για το περιθώριο ασφαλείας $c\geq\lambda\mu_1$, όπου μ_1 είναι η μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών των ατομικών απαιτήσεων.*

<u>Απόδειξη</u> Από την (4.9), αντικαθιστώντας την τάση d με το ασφάλιστρο c, όταν $c\geq\lambda\mu_1$, έχουμε:

$$P\{T<\infty,X_T<\infty\}=\lim_{\delta\to0}\lim_{\alpha\to0}E[exp(-\delta T+\alpha X_T)]=\lim_{\delta\to0}\left\{1-\frac{1}{c}\frac{\delta}{\varphi(\delta)}\right\}=1,$$

καθώς μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν $c<\lambda\mu_1$, τότε $\lim_{\delta\to0}\varphi(\delta)>0$ και αν $c=\lambda\mu_1$ τότε:

$$\lim_{\delta\to0}\frac{\delta}{\varphi(\delta)}=\xi'(0)=0.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας X_T, όταν X_t είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson. Αν $c=\lambda\mu_1$, τότε για $\alpha>0$,

$$E[e^{\alpha X_T}]=\lim_{\delta\to0}E[exp(-\delta T+\alpha X_T)]=1-\frac{1}{c}\frac{\xi(\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\mu_1}\frac{1-\hat{p}(\alpha)}{\alpha}.$$

Αν $c<\lambda\mu_1$ και αν $\varphi_0=\lim_{\delta\to0}\varphi(\delta)>0$, τότε:

$$E[e^{\alpha X_T}]=\lim_{\delta\to0}E[exp(-\delta T+\alpha X_T)]=1--\frac{1}{c}\frac{\xi(\alpha)}{\alpha-\varphi_0}.$$

Τέλος, η κατανομή και η ροπογεννήτρια της T δίνεται από:

$$E\left[e^{-\delta T}\right]=\lim_{\alpha\to0}E[exp(-\delta T+\alpha X_T)]=1-\frac{1}{c}\frac{\delta}{\varphi(\delta)}$$

$$E[T] = \lim_{\delta \to 0} \frac{1 - E[e^{-\delta T}]}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{c\varphi(\delta)} = \begin{cases} < \infty, \alpha\nu \ c < \lambda\mu_1 \\ = \infty, \alpha\nu \ c = \lambda\mu_1 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

5. Κεφάλαιο : Συναρτήσεις Κλίμακας για τη *SNLP*

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τις συναρτήσεις ποινής τη στιγμή της χρεοκοπίας για το πλεόνασμα που είναι γενικευμένη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Επιπλέον, προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε το υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνων με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και μη θετικά άλματα. Υποθέτουμε τώρα μια πιο γενική περίπτωση (από αυτήν του προηγούμενου κεφαλαίου) για τη διαδικασία πλεονάσματος, η οποία παίρνει τη μορφή:

$$X(t) = x + Y(t) \qquad 5.1$$

όπου, x το αρχικό αποθεματικό και Y είναι μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* ($Y_0 = 0$) που αντιπροσωπεύει την καθαρή εισροή μετρητών μιας ασφαλιστικής εταιρίας ή το καθαρό κέρδος της ασφαλιστικής για ένα χαρτοφυλάκιο.

Αρχικά, οι *Gerber & Shiu* (1997, 1998) παρακινήθηκαν από την τιμολόγηση των Αμερικάνικων απαιτήσεων και πρώτοι παρουσίασαν στην θεωρία κινδύνων μια από κοινού συνάρτηση ποινής για την παρούσα αξία του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Λόγω του ότι μιλάμε για παρούσα αξία των ποσοτήτων, αναφερόμαστε στην προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ή συνάρτηση των *Gerber & Shiu*.

Ένα κοινό χαρακτηριστικό της υπάρχουσας βιβλιογραφίας είναι να διευκολύνει την επίλυση της συνάρτησης *Gerber – Shiu* μέσω ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων και/ή *Voltera* εξισώσεων. Στην περίπτωση που η δομή των αλμάτων είναι σύνθετη *Poisson*, η φύση αυτών των εξισώσεων μπορούν να λειτουργήσουν μόνο με την υπόθεση του πρώτου άλματος και την θεώρηση αναδρομικών σχέσεων της συνάρτησης των *Gerber – Shiu*. Δυστυχώς, αυτές οι προσεγγίσεις πάσχουν οριακά στην περίπτωση των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy*. Για παράδειγμα, η ολοκληροδιαφορική εξίσωση λειτουργεί υπό την υπόθεση ότι υπάρχει επαρκής εξομάλυνση στην συνάρτηση *Gerber – Shiu*. Η εξίσωση *Voltera* εύκολα εμπλέκεται με διάφορα εξαρτήματα της θεωρίας κινδύνων (π.χ. δεσμευμένη και αδέσμευτη διακύμανση, ή συνεχής και ασυνεχή μονοπάτια) και απαιτείται ξεχωριστή θεώρηση. Υπάρχοντες υπολογισμοί δείχνουν ότι είναι χρονοβόρα διαδικασία για να λάβουμε την εξίσωση *Voltera* για την συνάρτηση *Gerber – Shiu* στην περίπτωση άπειρης δραστηριότητας της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy* (δηλαδή, μετρήσιμα άπειρα αρνητικά άλματα σε οριοθετημένα χρονικά διαστήματα), καθώς αυτό γίνεται μέσω σύνθετης *Poisson* προσέγγισης. Μια άλλη δυσκολία των *Voltera*/ ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων είναι ότι (εκτός των ελάχιστων περιπτώσεων) δεν υπάρχει γενική θεωρία που προσφέρει λύση, ακόμα και στην απλή περίπτωση της σύνθετης *Poisson*.

Ο *Zhou* (2005) έχει κάνει μια τεράστια συνεισφορά για τη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* και είχε εισάγει τις περιβόητες συναρτήσεις κλίμακας (*Scale Function*), στην ανάλυσή της συνάρτησης των *Gerber – Shiu*. Αν και οι υπολογισμοί του περιορίστηκαν στην περίπτωση της σύνθετης *Poisson* για την κατασκευή των αλμάτων, μπορεί να εφαρμοστεί πλήρως στην περίπτωση για μια γενικευμένη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*.

Βασισμένοι στα συγγράμματα του *Zhou* και των *Biffis* & *Kyprianou* δείχνουμε την αναμενόμενη χαρακτηριστική προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μέσω της χρήσης των συναρτήσεων κλίμακας όταν η διαδικασία του πλεονάσματος είναι φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Για μια πιο σύγχρονη ματιά της θεωρίας των συναρτήσεων κλίμακας παραπέμπουμε στους *Bertoin* (1996) και *Kyprianou* (2006).

Από την οπτική της υπολογιστικής πλευράς, η προσέγγιση των συναρτήσεων κλίμακας βασίζεται σε μια απέραντη βιβλιογραφία από μεθόδους του *Laplace* μετασχηματισμού, οι οποίοι έντονα έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια και έχουν αριθμητική εφαρμογή στην τιμολόγηση παραγώγων, (βλέπε *Duffie* et al (2000) *Lee* (2004)) και των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (βλέπε *Kythe & Puri* (2002), *Babolian & Shamloo* (2008)).

Άλλα πλεονεκτήματα των συναρτήσεων κλίμακας, που μπορούν να βρεθούν σε πρόσφατη βιβλιογραφία, είναι η χρησιμότητα τους για πληρωμές μερισμάτων και έχουν αποδειχθεί σημαντικά για την κατανόηση των στρατηγικών βέλτιστων φραγμάτων (*optimal barrier strategies*), βλέπε *Zhou* (2005), *Renaud & Zhou* (2007), *Kyprianou & Palmowski* (2007)).

Αναμφίβολα, οι συναρτήσεις κλίμακας είναι ένα ιδιαίτερο φαινόμενο στη θεωρία κινδύνων με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και αρνητικά άλματα. Για παράδειγμα, μοντέλα κινδύνου που δεν έχουν δομή αλμάτων και να είναι σύνθετη *Poisson* ή παρουσιάζουν εξάρτηση στα μονοπάτια τους (και έτσι καταστρέφεται η υπόθεση των στάσιμων και ανεξάρτητων προσαυξήσεων) δεν έχουν απαραίτητα μια αναλογία στη θεωρία των συναρτήσεων κλίμακας.

Στην παρακάτω παράγραφο παρουσιάζουμε τον διαχωρισμό μιας φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy* σε σχέση με τα υπάρχοντα υποδείγματα θεωρώντας μια γενική οικογένεια αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής.

5.1 SNLP και προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής.

Θυμίζουμε ότι το μοντέλο των *Cramér – Lundberg* που ανταποκρίνεται σε μια *Lévy* διαδικασία $X = \{X_t : t \geq 0\}$ με μέτρο P και χαρακτηριστικό εκθέτη ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi(\theta) = -\log \int_R e^{i\theta x} P(X_1 \in dx) = -ic\theta + \lambda \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-i\theta x}\right) F(dx),$$

για $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lim_{t \to \infty} X_t = \infty$. Με άλλα λόγια, η X είναι σύνθετη διαδικασία *Poisson* με ρυθμό άφιξης $\lambda > 0$ και αρνητικά άλματα (που αναφέρονται στις απαιτήσεις) με ίδια συνάρτηση κατανομής F, με πεπερασμένη μέση τιμή $1/\mu$ καθώς και τάση $c > 0$ (που αναφέρεται σε σταθερό εισόδημα, ασφάλιστρα), που αναγκαστικά ικανοποιούν την υπόθεση του περιθώριού ασφαλείας, $c - \lambda/\mu > 0$.

Όπως προ είπαμε, δουλεύουμε με τη γενική φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* $X = \{X_t : t \geq 0\}$ και αναφερόμαστε σε αυτή ως *Lévy Insurance Risk Process* (LIRP). Η ανάλογη συνθήκη για το περιθώριο ασφαλείας σε αυτή την γενική μορφή, όταν φεύγουμε δηλαδή από το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, είναι $E(X_1) \in (0, \infty)$. Υπό της τελευταίας υπόθεσης η φόρμουλα *Lévy – Khinchine* για τον χαρακτηριστικό εκθέτη για μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* μπορεί να γραφτεί στην εξής μορφή:

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) &= -\log \int_R e^{i\theta x} P(X_1 \in dx) \\ &= -i\theta a + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-i\theta x} - i\theta x\right) \Pi(dx),\end{aligned} \qquad 5.2$$

όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην περίπτωση που το μέτρο είναι πεπερασμένο, $\Pi(0, \infty) < \infty$, αντιστοιχεί σε άλματα της συνθέτης *Poisson* με ρυθμό άφιξης των απαιτήσεων $\lambda = \Pi(0, \infty)$ και κατανομή αλμάτων των απαιτήσεων $F(dx) = \Pi(dx)/\Pi(0, \infty)$. Ιδίως, όταν $\sigma = 0$, αυτό είναι το κλασσικό υπόδειγμα των *Cramér – Lundberg* με $c = a + \int_{(0,\infty)} x\, \Pi(dx)$. Στη περίπτωση που $\Pi(0, \infty) = \infty$ αλλά $\int_{(0,1)} x\, \Pi(dx) < \infty$ τότε έχουμε την περίπτωση με τη διαδικασία αλμάτων με φραγμένη κύμανση (*Bounded Variation*) και επομένως η διαδικασία X είναι απαραίτητα η διαφορά μιας γραμμικής τάσης (επίσης με ποσοστό $\alpha + \int_{(0,\infty)} x\, \Pi(dx)$) και πεπερασμένη δραστηριότητα *subordinator* συν μια ανεξάρτητη κίνηση *Brown* με *volatility* (μεταβλητότητα/πτητικότητα) σ. Το εν λόγω μοντέλο ήταν το θέμα της εργασίας του *Morales* (2007). Τώρα στην περίπτωση που $\Pi(0,\infty) = \infty$ και $\int_{(0,1)} x\, \Pi(dx) = \infty$ είναι η περίπτωση τη μη φραγμένη κύμανση των αλμάτων.

Καθώς το άθροισμα δυο ανεξάρτητων διαδικασιών *Lévy* είναι ξανά μια διαδικασία *Lévy*, η ιδέα της διατάραξης περιέχεται στην διαχώριση $\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)}$, όπου $\Pi^{(1)}$ αντιστοιχεί στο μέτρο του *Lévy* της διαδικασίας *Cramér – Lundberg* και $\Pi^{(2)}$ είναι η διαδικασία διατάραξης. Αν η διατάραξη είναι μια κίνηση *Brown*, τότε αυτό ανταποκρίνεται στην περίπτωση που $\sigma \neq 0$.

Στόχος του κεφαλαίου είναι να παρέχει μια πειστική περίπτωση για την ανακατάταξη του κλασσικού προβλήματος χρεοκοπίας, σε συνδυασμό της σύγχρονης θεωρίας των συναρτήσεων κλίμακας για την φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Κατά μήκος αυτού του κεφαλαίου, θα δώσουμε μια σαφή έκφραση για την εκδοχή της συνάρτησης των *Gerber – Shiu*, που καλύπτει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις της θεωρίας κινδύνων με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και χωρίς θετικά άλματα. Από την οπτική πλευρά των αριθμητικών ή των λεπτομερών αναλυτικών παραδειγμάτων, η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* απαιτεί την αντιστροφή του μετασχηματισμού *Laplace* και στις δυο περιπτώσεις, και υπάρχει μεγάλη ποικιλία βιβλιογραφίας για εκτενή έρευνα. Επιπλέον, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι τα προνόμια των συναρτήσεων κλίμακας μπορούν να παρατηρηθούν και έξω από την κλάση των μοντέλων *Cramer – Lundberg*, σε πιο «εξωτικά» παραδείγματα των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy*. Ο *Zhou* (2005) έχει παρουσιάσει (μαζί με την περίπτωση που θα αναλύσουμε) όλες τις αρετές των συναρτήσεων κλίμακας που εξακολουθούν να είναι υπό σχετική αξία.

Τέλος, κλείνουμε τον πρόλογο με κάποιες σημειώσεις για τις σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων κλίμακας, των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων και των εξισώσεων *Volterra*. Αρχικά, υπενθυμίζουμε την κλασσική φόρμουλα διπλής εξόδου (βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο και κεφάλαιο 8 του *Kyprianou* (2006))

$$E_x[e^{-qT_a} I(T_a < \tau)] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}, \qquad 5.3$$

όπου, $x, q \geq 0, a > 0$ και $T_\alpha = \inf\{t > 0 : X_t > a\}$ ο χρόνος που η διαδικασία X_t θα ξεπεράσει το κατώφλι α. Κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι $X_{T_\alpha} = \alpha$ στο $\{T_\alpha < \infty\}$, $W^{(q)}(x) = 0$ για $x < 0$ και $W^{(q)}(0) = 0$ όταν η διαδικασία X πέφτει κάτω του μηδενός, κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι $W^{(q)}\big(X_{T_\alpha \wedge \tau}\big)/W^{(q)}(\alpha) = I\{T_\alpha < \tau\}$, όπου τ ο χρόνος χρεοκοπίας.

Ένα γνωστό επιχείρημα που προκύπτει από την τελευταία παρατήρηση και βάση της ισχυρής *Markov* ιδιότητας, είναι ότι:

$$\begin{aligned}
&E_x[e^{-qT_a}I(T_a<\tau)|\mathcal{F}_t]=E_x\left[e^{-q(T_a\wedge\tau)}\ \frac{W^{(q)}(X_{T_a\wedge\tau})}{W^{(q)}(\alpha)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
&=e^{-q(t\wedge T_a\wedge\tau)}E_z\left[e^{-q(T_a\wedge\tau)}\frac{W^{(q)}(X_{T_a\wedge\tau})}{W^{(q)}(\alpha)}\right]\Bigg|_{z=X_{t\wedge T_a\wedge\tau}}\\
&=e^{-q(t\wedge T_a\wedge\tau)}E_z[e^{-qT_a}I(T_a<\tau)]|_{z=X_{t\wedge T_a\wedge\tau}}\\
&=\frac{e^{-q(t\wedge T_a\wedge\tau)}W^{(q)}(X_{X_{t\wedge T_a\wedge\tau}})}{W^{(q)}(\alpha)},
\end{aligned}\qquad 5.4$$

όπου, $\mathcal{F}_t$ το φυσικό φιλτράρισμα που παράγεται από την διαδικασία $\{X_s : s\le t\}$. Επομένως, μπορούμε να καταλάβουμε ότι η δεξιά πλευρά είναι μια *Martingale* και συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η $W^{(q)}$ είναι επαρκώς εξομαλυμένη (λεία), θεωρώντας την ημι – *Martingale* αναπαράστασή της, και πρέπει να ικανοποιεί ότι $(\Gamma-q)W^{(q)}(x)=0$ για $x\in(0,\infty)$, όπου Γ η απειροελάχιστη γεννήτρια της X. Επιπλέον, δίνουμε την απόδειξη του τελευταίου για μια πιο ολοκληρωμένη ματιά.

Υποθέτουμε για ευκολία ότι X έχει σύνθετη *Poisson* για τα άλματά της, τότε απλή εφαρμογή της φόρμουλας του *Itô*, λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση των $Lévy-Itô$ και ότι $W^{(q)}$ είναι διπλά συνεχώς ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&e^{-q(t\wedge T_a\wedge\tau)}W^{(q)}(X_t)-W^{(q)}(\alpha)\\
&=-q\int_0^{t\wedge T_a\wedge\tau}e^{-qs}\,W^{(q)}(X_s)ds+\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^{t\wedge T_a\wedge\tau}e^{-qs}\,W^{(q)''}(X_s)ds\\
&+c\int_0^{t\wedge T_a\wedge\tau}e^{-qs}\,W^{(q)'}(X_s)ds+\sigma\int_0^{t\wedge T_a\wedge\tau}e^{-qs}\,W^{(q)'}(X_s)dB_s\\
&\qquad+\int_0^{t\wedge T_a\wedge\tau}\int_{(0,\infty)}\{f(X_{s-}-y)-f(X_{s-})\}\Pi(dy)ds+M_t\,,
\end{aligned}\qquad 5.5$$

όπου, $B=\{B_t : t\ge 0\}$ η κίνηση *Brown* με συντελεστή $\sigma\ge 0$, c μια σταθερά με πραγματική τιμή, η οποία θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός, αν $\sigma=0$ (το οποίο αποκλείει την πιθανότητα η διαδικασία X να έχει μονότονα μονοπάτια) και

$$M_t=\sum_{s\le t\wedge T_a\wedge\tau}\{f(X_s)-f(X_{s-})\}-\int_0^{t\wedge T_a\wedge\tau}\int_{(0,\infty)}\{f(X_{s-}-y)-f(X_{s-})\}\Pi(dy)ds.$$

Επιπλέον, θυμίζουμε ότι $\mathrm{x} > 0$ ισχύει:

$$(\Gamma - q)W^{(q)}(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 W^{(q)''}(x) + cW^{(q)'}(x)$$
$$+ \int_0^\infty \{W^{(q)}(x-y) - W^{(q)}(x)\}\, \Pi(dy) - qW^{(q)}(x). \qquad 5.6$$

Σημειώνουμε ότι, το στοχαστικό ολοκλήρωμα σε σχέση με το B και τη διαδικασία M είναι *Martingale*, όπως είναι και το αριστερό μέλος της (5.5), το οποίο είναι ίσο με:

$$\int_0^{t\wedge T_a \wedge \tau} (\Gamma - q)W^{(q)}(X_s)ds,$$

που πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Αυτό συνεπάγεται ότι $(\Gamma - q)W^{(q)}(x) = 0$ για $\mathrm{x} \in (0, \alpha)$ και καθώς επιλέγουμε το α να είναι θετικός αυθαίρετος αριθμός, έχουμε:

$$(\Gamma - q)W^{(q)}(x) = 0 \text{ για } \mathrm{x} \in (0, \alpha). \qquad 5.7$$

Ο παραπάνω συλλογισμός, αν και γίνεται πιο τεχνικός, επίσης λειτουργεί για την γενικευμένη περίπτωση των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy*.

<u>Ορισμός 5.1</u> *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η συνάρτηση ποινής $f(0, \cdot, \cdot) = 0$ και $x, q \geq 0$. Για μια* φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*, *X, που ξεκινάει από το x (των οποίων το μέτρο και τη μέση τιμή θα τα δηλώνουμε ως P_x και E_x αντίστοιχα), η γενικευμένη προεξοφλημένη συνάρτηση Φ συνδεόμενη με τις f και q αλλά και με την (5.1) δίνεται από τη σχέση:*

$$\Phi_f(x, q) = E_x\left[e^{-q\tau} f\left(-X_\tau, X_{\tau-}, \underline{X}_{\tau-}\right) I(\tau < \infty)\right], \qquad 5.8$$

όπου, x το αρχικό αποθεματικό (κεφάλαιο), q[4] ο συντελεστής προεξόφλησης ή ο συντελεστής του μετασχηματισμό Laplace, $-X_\tau = |U(t)|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, $X_{\tau-} = U(t-)$ το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, $\underline{X}_{\tau-} = \inf_{t<\tau} X_t$ η κατανομή του τελευταίου ελαχίστου του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και $\tau = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας του X. Με τις τελείες στην συνάρτηση ποινής, $f(0, \cdot, \cdot)$, υποδηλώνουμε ότι τις μεταβλητές εκείνες τις αφήνουμε να "τρέχουν" και κρατάμε σταθερή την πρώτη, την οποία την θέτουμε ίση με το μηδέν.

[4] q, f οριοθετημένες και μετρήσιμες συνάρτησες στον $\mathbb{R}_+^3$, με $f(0,0,0) = f_0 > 0$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις κλίμακας. Αρχικά θυμίζουμε τον εκθέτη *Laplace* του X, ο οποίος είναι πεπερασμένος για τουλάχιστον $\theta \in [0, \infty)$:

$$\psi(\theta) = -\Psi(-i\theta) = \log E\left[e^{\theta X_1}\right],$$

και η ασυμπτωτική συμπεριφορά της X χαρακτηρίζεται ως $\psi'(0+)$, έτσι ώστε ο X έχει τάση στο $\pm\infty$ (δηλαδή ταλαντεύεται) αναλόγως αν $\pm\psi'(0+) > 0$ ($\psi'(0+) = 0$).

Για κάθε $q \geq 0$, υπάρχει μια συνάρτηση κλίμακας $W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (για τον χρόνο εξόδου T) τέτοια ώστε $W^{(q)}(x) = 0$ για όλα τα $x < 0$ αλλιώς είναι απόλυτα συνεχής στο $(0, \infty)$ η οποία ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\lambda) - q}, \qquad \text{για } \lambda > \Phi(q), \tag{5.9}$$

όπου $\Phi(q)$ είναι η μεγαλύτερη λύση εξίσωσης $\psi(\theta) = q$ (υπάρχουν το πολύ δυο λύσεις). Για συντομία θα γράφουμε $W^{(0)} = W$. Όταν η X έχει μονοπάτια μη φραγμένης διασποράς, τότε είναι γνωστό ότι η $W^{(q)}$ είναι συνεχής ολοκληρώσιμη στο $(0, \infty)$. Ιδίως, όταν η X έχει ένα *Gaussian* κομμάτι τότε η $W^{(q)}$ είναι διπλά συνεχούς ολοκληρώσιμη στο $(0, \infty)$. Η συνάρτηση κλίμακας $W^{(q)}(x)$ παίζει ρόλο κλειδί στην κατανόηση των προβλημάτων εξόδου (χρόνου) για μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Στην πραγματικότητα, περιέχει όλες τις σχετικές πληροφορίες που χρειάζονται για να περιγράψει το πρώτο χρόνο που περνάει μια διαδικασία από ένα δοθέν σημείο.

<u>Σημείωση 5.1</u> *Από την (5.6) μπορεί κάποιος να προβεί σε μετατροπή των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων σε Volterra εξισώσεις, απλά ολοκληρώνοντας την γεννήτρια εξίσωση δυο φορές ως προς* x. *Ένα άψογο παράδειγμα πως ο παραπάνω συλλογισμός υλοποιείται, μπορεί να βρει κάποιος στην έρευνα των Yin και Wang (2008). Όντως, ας υποθέτουμε περαιτέρω παραδοχές για τον παραπάνω Gaussian συντελεστή να είναι θετικός,* $\sigma > 0$. *Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε εύκολα να αποφανθούμε από την (5.9) ότι* $W^{(q)}(0+) = 0$ *και* $W^{(q)\prime}(0+) = 2/\sigma^2$. *Επιπρόσθετα θέτοντας το δεξί μέρος της (5.5) ίσο με το μηδέν και ολοκληρώνοντας δυο φορές (το οποίο απαιτεί ολοκλήρωση κατά παράγοντες), η γεννήτρια εξίσωση (5.6) γίνεται η Volterra εξίσωση:*

$$W^{(q)}(x) + W^{(q)} * g(x) = \frac{2}{\sigma^2} x,$$

για $x > 0$, *όπου,*

$$g(x) = \frac{2}{\sigma^2}\left[\int_0^x \Pi(0,y)dy + c - \big(q + \Pi(0,\infty)\big)x \right].$$

Τέλος, παρατηρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω Volterra εξίσωσης και συμπεραίνουμε ότι για αρκετά μεγάλο β έχουμε:

$$\frac{2}{\sigma^2\beta^2} = \left(\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx\right)\left[1 + \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty e^{-\beta x}\Pi(dx) + \frac{c}{\beta} - \frac{\big(q + \Pi(0,\infty)\big)1}{\beta^2}\right)\right],$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την (5.9) λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός για τον Laplace εκθέτης:

$$\psi(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + c\beta - \int_0^\infty (1 - e^{-\beta x})\Pi(dx), \qquad \beta \geq 0.$$

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρίζει την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (5.8) σε όρους συναρτήσεων κλίμακας της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy*.

Θεώρημα 5.1 *Έστω ότι X είναι* φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy. Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής που ορίσαμε στην (5.8) δίνεται από τη σχέση:*

$$\Phi_f(x,q) = \int_{(0,\infty)^3} I\{v \geq y\} f(u,v,y) K_x^{(q)}(du,dv,dy),$$

όπου,

$I\{v \geq y\}$ *η δείκτρια συνάρτηση που μας δείχνει ότι* $I\{v \geq y\} = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ U(T-) \geq minU(T-) \\ 0,\ \ \alpha\nu\ U(T-) < \min(T-) \end{cases}$,

$$K_x^{(q)}(du,dv,dy) = E_x\big[e^{-q\tau}; -X_\tau \in du; X_{\tau-} \in dv; \underline{X}_{\tau-} \in dy, \tau < \infty\big],$$

να είναι το μέτρο των Gerber – Shiu, δηλαδή κ κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων που ικανοποιεί τη σχέση:

$$K_x^{(q)}(du,dv,dy) = e^{-\Phi(q)(v-y)}\big\{W^{(q)\prime}(x-y) - \Phi(q)W^{(q)}(x-y)\big\}\nu(du+v)dydv.$$

Σημείωση 5.2 *Επιμένοντας στην υπόθεση ότι $f(0,\ \cdot,\ \cdot) = 0$, που πολύ απλά σημαίνει ότι την συνάρτηση $\Phi_f(x,q)$ την ενδιαφέρει μόνο το από κοινού μέτρο του overshoot, $X_\tau > x$, και* *undershoot* $X_\tau < x$. *Είναι γνωστό από το γενικό φαινόμενο της αναρρίχησης*[5] *της διαδικασίας Lévy ότι* $\underline{X}_{\tau-} = X_{\tau-} = 0$ *στο* $\{X_\tau = 0\}$ *και αυτό συμβαίνει με πιθανότητα:*

$$E_x[e^{-q\tau}; X_\tau = 0] = \frac{\sigma^2}{2}\{W^{(q)'}(x) - \Phi(q)W^{(q)}(x)\},$$

(βλ. Pistorius, 2005). Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιούμε το πλεονέκτημα ότι η ποσότητα $W^{(q)'}$ *είναι καλά ορισμένη για όλα τα* $x \geq 0$ *όταν* $\sigma \neq 0$ *όπου* $W^{(q)'}$ *είναι η πρώτη παράγωγος της* $W^{(q)}$. *Η πιθανότητα της αναρρίχησης για το γεγονός ότι* $K_x^{(q)}$ *είναι ελλειμματική όταν* $\sigma \neq 0$.

Απόδειξη (θεώρημα 5.1) Αρχικά αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα της περίπτωσης όταν $q > 0$. Το αποτέλεσμα στην περίπτωση που $q = 0$ η απόδειξή του έπεται εύκολα παίρνοντας το εξής όριο $q \to 0$ και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι $\Phi(0) > 0$ αν και μόνο αν $E(X_1) < 0$. Θα ήταν βολικό να εισάγουμε την φασματικά θετική *Lévy* διαδικασία, $Y = -X$. Τότε το πρόβλημα είναι να υπολογίσουμε την εξής ποσότητα:

$$E\left[e^{-q\sigma_x} f\left(Y_{\sigma_x} - x, x - Y_{\sigma_x-}, x - \bar{Y}_{\sigma_x-}\right) I(\sigma_x < \infty)\right],$$

ή ισοδύναμα τη σχέση:

$$E\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_x-} \in dv, x - \bar{Y}_{\sigma_x-} \in dy\right],$$

όπου, $Y_{\sigma_x} - x$ είναι το *overshoot*, $x - Y_{\sigma_x-}$ το *undershoot*, $\sigma_x = \inf\{t > 0 : Y_t > x\}$ ο χρόνος που η διαδικασία Y_t βρίσκεται πάνω από ένα δεδομένο σημείο, x, και επομένως $\sigma_x < \infty$ και $\bar{Y}_{\sigma_x-} = sup_{t<\sigma_x} Y_t$ (δηλαδή το αντίθετο που υποθέσαμε για την $\underline{X}_{\tau-}$). Επιπλέον, για τη δεύτερη έκφραση για ευκολία εννοούμε ότι $\sigma_x < \infty$.

Σύμφωνα με τον πενταπλό νόμο[6] (βλέπε παράδειγμα 8 (*Spectrally Positive Processes*) στους *Doney* και *Kyprianou* (2006)) και στην περίπτωση που η διαδικασία X έχει τάση στο ∞, και επομένως $\Phi(0) = 0$, έχουμε για $u, v > 0$ και $0 < y \leq v \wedge x$,

$$\mathbb{P}\left(Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_x-} \in dv, x - \bar{Y}_{\sigma_x-} \in dy\right) = $$
$$= k\, W(x - dy)\Pi(du + v)dv$$
$$= kW'(x - y)\Pi(du + v)dydv, \quad 5.10$$

όπου, W είναι η 0 – συνάρτηση κλίμακας, που ορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, που συνδέεται με το X και έχει *Laplace* εκθέτη $1/\psi(\lambda)$. Η συνάρτηση κλίμακας W' είναι η

[5] Επομένως η SNLP θα αναρριχείται αναγκαστικά προς τα πάνω και προς τα κάτω μόνο αν $\sigma > 0$, βλέπε Kyprianou (2006) Κεφάλαιο 8.

[6] Πενταπλός νόμος είναι οι σχέσεις που περιέχουν πέντε μεταβλητές στην συνάρτηση, όπως για παράδειγμα στην $K_x^{(q)}(du, dv, dy)$ στο θεώρημα 4.1

παράγωγος της W και k είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από την κανονικοποίηση του τρέχοντος χρόνου του μέγιστου (*supremum*) της Y.

Επιπρόσθετα, απαιτούμε η σταθερά k να είναι μοναδική. Πράγματι, σημειώνουμε ότι, η μια πλευρά της (5.10) μας υποδεικνύει ότι:

$$\mathbb{P}(Y_{\sigma_x} \neq x) = k \int_0^x dy\, W'(x-y) \int_0^\infty \overline{\Pi}\,(z+y)dz.$$

Στην άλλη πλευρά της (5.10), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο περιγραφής του δυνητικού μέτρου όπως περιγράφεται στο προηγούμενου κεφαλαίου και στο τέλος της 8.4 παραγράφου του *Kyprianou* (2006) και υπενθυμίζοντας ότι η διαδικασία X έχει τάση στο άπειρο (και επομένως $\Phi(0) = 0$), επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbb{P}_x(-X_\tau \in du, X_{\tau-} \in dv) = \Pi(du+v)\{W(x) - W(x-v)\}dv, \qquad 5.11$$

για $u, v > 0$. Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς $u, v > 0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_{\sigma_x} \neq x) &= \int_0^\infty \overline{\Pi}(v)\,\{W(x) - W(x-v)\}dv \\
&= \int_0^\infty \overline{\Pi}(v) \int_0^v W'(x-v)\, dydv \\
&= \int_0^x dy\, W'(x-v) \int_y^\infty \overline{\Pi}(v)\, dv \\
&= \int_0^x dy\, W'(x-v) \int_0^\infty \overline{\Pi}(z+y)\, dz.
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις δυο εξισώσεις για $\mathbb{P}(Y_{\sigma_x} \neq x)$ οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $k = 1$, έτσι ικανοποιήται η απαίτηση μας.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξή μας, πρέπει να αναπτύξουμε την έκφραση (5.10) για να ενσωματώνει την εκθετική προεξόφληση. Ωστόσο, αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως απλή συνέπεια από την εκθετική αλλαγή του μέτρου, δηλαδή:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{\Phi(q)}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\Phi(q)X_t - qt},$$

όπου, $\Phi(q) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\}$, η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $\psi(\lambda) = q$ και $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ το φυσικό φιλτράρισμα, η οποία μας δίνει όλες τις πληροφορίες που απασχολούν την διαδικασία μας και σ η σ – άλγεβρα. Υπενθυμίζουμε ότι υπό το μέτρο $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$ η διαδικασία X συνεχίζει να είναι φασματικά αρνητική και ανεξαρτήτως της τιμής της $E(X_1)$, εξακολουθεί να έχει τάση στο άπειρο. Εξάλλου, η 0 – συνάρτηση κλίμακας της διαδικασίας X υπό το μέτρο $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$, που το γράφουμε ως $W_{\Phi(q)}(x)$, σχετίζεται με την $q -$ συνάρτηση κλίμακας της X υπό το μέτρο $\mathbb{P}$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την $W^{(q)}(x)$ μέσω της εξής σχέσης:

$$W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} W_{\Phi(q)}(x), \qquad 5.12$$

δηλαδή, όπως είπαμε και στο 4ο κεφάλαιο η συνάρτηση a – *stable* της X υπό τις ποσότητες $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$, $W_{\Phi(q)}(x)$, συνδέεται με την $q -$ συνάρτηση κλίμακας της X υπό το μέτρο $\mathbb{P}$, $W^{(q)}(x)$.

Τώρα κάνοντας χρήση της (5.10) αλλά κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}^{\Phi(q)}$, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_x-} \in dv, x - \bar{Y}_{\sigma_x-} \in dy\right] \\
&= e^{\Phi(q)(x+u)} \mathbb{P}^{\Phi(q)}\left(Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_x-} \in dv, x - \bar{Y}_{\sigma_x-} \in dy\right) \\
&= e^{\Phi(q)(x+u)} W_{\Phi(q)}(x - dy) \Pi_{\Phi(q)}(du + v) dv \\
&= e^{\Phi(q)(x+u)} W'_{\Phi(q)}(x - y) \Pi_{\Phi(q)}(du + v) dy dv,
\end{aligned}$$

όπου, $\Pi_{\Phi(q)}$ είναι το μέτρο εμφάνισης των αλμάτων που συνδέεται με τη διμεταβλητή $\left(X, \mathbb{P}^{\Phi(q)}\right)$ και $W'_{\Phi(q)}$ είναι μια εκδοχή της πυκνότητας της $W_{\Phi(q)}$. Επίσης, είναι γνωστό ότι $\Pi_{\Phi(q)}(dx) = e^{-\Phi(q)x}\Pi(dx)$ και ενσωματώνοντάς το στην τελευταία σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_x-} \in dv, x - \bar{Y}_{\sigma_x-} \in dy\right] \\
&= e^{\Phi(q)(x+u)} W'_{\Phi(q)}(x - y) e^{-\Phi(q)(u+v)} \Pi(du + v) dy dv \\
&= e^{-\Phi(q)(v-y)} e^{\Phi(q)(x-y)} W'_{\Phi(q)}(x - y) \Pi(du + v) dy dv\,. \qquad 5.13
\end{aligned}$$

Από τις πληροφορίες που δώσαμε προηγουμένως πάνω στις συναρτήσεις κλίμακας, μπορούμε να διαφοροποιήσουμε την $W_{\Phi(q)}$ σχεδόν παντού. Επιπλέον, μπορούμε να διαφοροποιήσουμε την (5.12) σχεδόν παντού καταλήγοντας σε μια πυκνότητα η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$W^{(q)\prime}(x) - \Phi(q)\, W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} W'_{\Phi(q)}(x).$$

Εκμεταλλευόμενοι την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην:

$$E\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_x-} \in dv, x - \bar{Y}_{\sigma_x-} \in dy\right]$$

$$= e^{-\Phi(q)(v-y)}\{\,W^{(q)\prime}(x-y) - (q)\,W^{(q)}(x-y)\Pi(du+v)dydv,$$

όπου, $u, v > 0,\ 0 < y \le v \wedge x$. Σημειώνουμε ότι ιδίως όταν $q = 0$, ισχύει ότι $\Phi(0) = 0$, καθώς η διαδικασία έχει τάση προς το $-\infty$ και με αυτό παρατηρούμε ότι συμφωνεί η σχέση (5.10) και επομένως ολοκληρώνεται η απόδειξη.

■

Σημείωση 5.3 *Όπως υπαινίχθηκε σε αυτή την παράγραφο, η σχέση (5.11) εφευρέθηκε από τον Zhou (2005) για την περίπτωση της σύνθετης Poisson και τη μέθοδο που αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο για να πάρουμε την (5.11) είναι μια παραλλαγή από αυτή την τεχνική που χρησιμοποίησε ο Zhou.*

5.2 Παραδείγματα

Μέχρι πρότινος, είχε σημειωθεί μια έντονη κριτική στη χρήση των συναρτήσεων κλίμακας και έχει υπάρξει μικρή πρόοδος στην παραγωγή παραδειγμάτων στο μοντέλο *Cramer – Lundberg* με μίξεις εκθετικών αλμάτων και μιας *Brownian* διαταραχής ή το φασματικό αρνητικό *Stable* μοντέλο. Θα αναπτύξουμε τώρα μερικά παραδείγματα έτσι ώστε για την ορθή κατανόηση της μέχρι πρότινος «κριτικαρισμένης» μεθόδου.

Παράδειγμα 5.1 Θεωρούμε ότι η *X* είναι μια φασματικά αρνητική *Stable* διαδικασία και επομένως έχει εκθέτη *Laplace* της μορφής:

$$\psi(\theta) = (\theta + c)^{\alpha} - c^{\alpha},$$

όπου, $\theta \ge 0,\ c \ge 0$ και $\alpha \in (1,2)$. Σημειώνεται ότι $E(X_1) = \psi'(0+) = \alpha c^{\alpha-1} \ge 0$ και επομένως η διαδικασία έχει τάση στο άπειρο αν και μόνο αν $c > 0$ ειδάλλως, όταν $c = 0$ ταλαντεύεται. Η τελευταία σχέση αντιστοιχεί σε μια $\alpha -$ *Stable* διαδικασία η οποία μελετήθηκε από τον *Furrer* (1998). Από την αναλυτική μορφή του *Laplace* εκθέτη μπορεί να παρατηρήσει κανείς το μέτρο της διαδικασίας *X* είναι το αποτέλεσμα μιας εκθετικής αλλαγής του μέτρου που είναι εφαρμοσμένη στο μέτρο μιας $\alpha -$ *Stable* διαδικασίας με δείκτη σταθερότητας α. Από την άποψη αυτή, είναι απλό να συμπεράνουμε ότι η διαδικασία *X* δεν έχει *Gaussian* συνιστώσα, αλλά είναι μια διαδικασία μη φραγμένης κύμανσης και το μέτρο του *Lévy*, αυτής της διαδικασίας, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Pi(dx) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\frac{e^{-cx}}{x^{1+a}}dx, \qquad x > 0,$$

όπου, $\Gamma(u)$ είναι η συνήθης γάμμα συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη στον $\mathbb{R}$ με εξέρεση τα σημεία $\{0,-1,-2,\dots\}$. Επίσης, είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\Phi(q)=(q+c^a)^{1/a}-c$. Στο σύγγραμμα του *Kyprianou* και του *Patie* (2008) είχαν δείξει ότι ισχύει:

$$W^{(q)}(x)=e^{-cx}x^{a-1}\mathcal{E}_{a,a}\big((q+c^a)x^a\big),$$

όπου,

$$\mathcal{E}_{a,\beta}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},$$

να είναι η συνάρτηση δυο παραμέτρων *Mittag – Leffler*.

Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε ότι ισχύει, $W_{\Phi(q)}(x)=e^{-\Phi(q)x}W^{(q)}(x)$ και με τη βοήθεια της (5.13) παρατηρούμε ότι για $u,v,y>0$ και $y\le v$, ισχύει:

$$\begin{aligned}
&E\left[e^{-q\tau};-X_\tau\in du,X_{\tau-}\in dv,\underline{X}_{\tau-}\le y\right]\\
&=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}e^{\left((q+c^a)^{\frac{1}{a}}-c\right)(x-v)}\frac{e^{-c(u+v)}}{(u+v)^{1+\alpha}}\Big\{e^{-(q+c^a)^{\frac{1}{a}}x}x^{a-1}\mathcal{E}_{a,a}\big((q+c^a)x^a\big)\\
&\qquad -e^{-(q+c^a)^{\frac{1}{a}}(x-y)}(x-y)^{a-1}\mathcal{E}_{a,a}\big((q+c^a)(x-y)^a\big)\Big\}dudv,
\end{aligned}$$

το οποίο, εν μέρη είναι οπτικά άσχημο, όμως είναι επαρκώς σαφές για την λειτουργεία του σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον όπως το *Mathematica*.

■

Στην περίπτωση που $q=0$, η παραπάνω κατάσταση γίνεται πιο προσιτή και το μοναδικό μέλημα κάποιου είναι ο υπολογισμός του *overshoot* και του *undershoot* όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.2 Θεωρούμε την περίπτωση που η διαδικασία *X* είναι φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* με εκθέτη *Laplace* να δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(\theta)=\kappa\theta+c\Gamma(-\beta)\theta\big(\gamma^\beta-(\gamma+\theta)^\beta\big),$$

όπου, $\theta,\kappa\ge 0$ και $\beta\in(0,1)$. Έχει δειχθεί από τους *Hubalek* και *Kyprianou* (2008) ότι η διαδικασία *X* δεν έχει όπως προαναφέραμε *Gaussian* συνιστώσα, αλλά έχει μονοπάτια μη φραγμένης κύμανσης, και το μέτρο του *Lévy* αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\Pi(dx)=\psi e^{-\gamma x}\left(\frac{\gamma x+\beta+1}{x^{\beta+2}}\right)dx.$$

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\psi'(0+) = \kappa$, δείχνοντας ότι η διαδικασία X έχει τάση στο άπειρο αν και μόνο αν $\kappa > 0$ και διαφορετικά, δηλαδή αν $\kappa = 0$, ταλαντώνεται. Επίσης, έδειξαν στο προαναφερθέν σύγγραμμα, ότι:

$$W(x) = -\frac{1}{c\Gamma(-\beta)}\int_0^x e^{-\gamma x}\, y^{\beta-1}\mathcal{E}_{\beta,\beta}\left(\frac{\kappa + c\Gamma(-\beta)\gamma^\beta y^\beta}{c\Gamma(-\beta)}\right)dy.$$

Βάση της (5.10) παρατηρούμε ότι για $u, \upsilon, y > 0$ και $y \leq \upsilon$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x\left[-X_\tau \in du, X_{\tau-} \in d\upsilon, \underline{X}_{\tau-} \leq y\right] \\
&= -\frac{1}{\Gamma(-\beta)}e^{-\gamma(x-y+u+\upsilon)}\left(\frac{\gamma(u+\upsilon)+\beta+1}{(u+\upsilon)^{\beta+2}}\right) \\
&\qquad \times (x-y)^{\beta-1}\mathcal{E}_{\beta,\beta}\left(\frac{\kappa + c\Gamma(-\beta)\gamma^\beta(x-y)^\beta}{c\Gamma(-\beta)}\right)du\,dy\,d\upsilon,
\end{aligned}$$

το οποίο επαρκεί μόνο για αριθμητικούς υπολογισμούς και όχι από αναλυτική σκοπιά.

■

Παράδειγμα 5.3 Τώρα θεωρούμε την φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* με *Laplace* εκθέτη:

$$\psi(\theta) = \frac{\theta\Gamma(\nu+\beta\theta+\lambda)}{c\beta\Gamma(\nu+\beta\theta)},$$

όπου, $\theta, \nu \geq 0$, $\beta, c > 0$ και $\lambda \in (0,1)$. Οι *Kyprianou* και *Rivero* (2008) είχαν δείξει ότι οι βασικές διαδικασίες *Lévy* δεν έχουν *Gaussian* συνιστώσα και το μέτρο του *Lévy* ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Pi(x,\infty) = \frac{\lambda}{c\beta^2\Gamma(1-\lambda)}\frac{e^{x(1-\nu)/\beta}}{(e^{x/\beta}-1)^{\lambda+1}}.$$

Από απλό υπολογισμό έχουμε ότι:

$$\psi'(0+) = \frac{\Gamma(\nu+\lambda)}{c\beta\Gamma(\nu)} \geq 0,$$

το οποίο μας δείχνει ότι η διαδικασία X έχει τάση στο άπειρο αν και μόνο αν $\nu > 0$ και διαφορετικά, $\nu = 0$, ταλαντώνεται. Στο προαναφερθέν σύγγραμμα, επιπλέον είχαν δείξει ότι:

$$W(x) = c\int_0^x \frac{e^{\frac{z(\nu+\lambda-1)}{\beta}}}{\Gamma(\lambda)}\left(e^{\frac{z}{\beta}}-1\right)^{\lambda-1}dz.$$

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\mathbb{P}_x\left[-X_\tau \in du, X_{\tau-} \in dv, \underline{X}_{\tau-} \leq y\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\beta^2 \Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)} \frac{e^{-\frac{(x-y)v}{\beta}}\left(1 - e^{-\frac{x-y}{\beta}}\right)^{\lambda-1} e^{\frac{(u+v)(1-v)}{\beta}}}{\left(e^{\frac{(u+v)}{\beta}} - 1\right)^{\lambda+1}} dydv\,.$$

Η οποία και πάλι δεν είναι τόσο εύχρηστη από την πλευρά της ανάλυσης.

■

6. Κεφάλαιο: Το υπόδειγμα *Sparre – Andersen* που διαταράσσεται από μια *SNLP*

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε το υπόδειγμα *Sparre Andersen* που διαταράσσεται από μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια *Coxian* κατανομή, δείχνουμε ότι ο μετασχηματισμός *Laplace* και η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της συνάρτησης *Gerber – Shiu* μπορεί να ληφθεί από τις ρίζες τις γενικευμένης εξίσωσης του *Lundberg*. Όταν η φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* είναι συνδυασμός κίνησης *Brown* και σύνθετης διαδικασίας *Poisson* με εκθετικά άλματα παίρνουμε ρητές και ασυμπτωτικές φόρμουλες για την *Gerber – Shiu* για εκθετική κατανομή του μεγέθους απαίτησης και κατανομή βαριάς ουράς (για το μέγεθος απαίτησης), αντίστοιχα.

Το υπόδειγμα *Sparre – Andersen* είναι επέκταση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας των κινδύνων που πρώτος προσέγγισε ο *Andersen* (1957). Σε αυτό το μοντέλο, το μέγεθος της απαίτησης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι θεωρούνται ως δίτιμη ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων διανυσμάτων. Πολλοί συγγραφείς έχουν προσελκυσθεί από τα προβλήματα χρεοκοπίας στο υπόδειγμα κινδύνου *Sparre – Andersen*.

Πρόσφατα, πολλοί συγγραφείς έχουν δείξει ενδιαφέρον στην επέκταση του μοντέλου της θεωρίας κινδύνων προσθέτοντας κάποια διατάραξη. Ο *Gerber* (1970) επέκτεινε το κλασσικό υπόδειγμα κινδύνων της σύνθετης *Poisson,* προσθέτοντας κίνηση *Brown,* για να περιγράψει την στοχαστική διακύμανση του εισοδήματος και της απώλειας. Για τη μελέτη του παραπάνω μοντέλου παραπέμπουμε στους *Dufresne & Gerber* (1991), *Gerber & Landry* (1998), *Tsai & Willmot* (2002) και στις αναφορές τους. Όσον αφορά το υπόδειγμα *Sparre – Andersen* που διαταράσσεται από την κίνηση *Brown* παραπέμπουμε στους *Li & Garrido* (2005b) και *Song et al.* (2010), οι οποίοι θεώρησαν, αντίστοιχα, ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την γενικευμένη *Erlang* και τις *Phase – Type* κατανομές. Για δικιά μας γνώση στα παραπάνω συγγράμματα, η ανάλυση της συνάρτησης *Gerber – Shiu* γίνεται ξεκινώντας από την παραγώγιση κάποιων ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων. Μια ευρεία προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε εάν υπάρχει, ή όχι, απαίτηση κατά τη διάρκεια ενός απειροελάχιστου χρονικού διαστήματος από το 0 ως το dt. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η διαδικασία πλεονάσματος δεν έχει, αυστηρώς, στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Ειδική περίπτωση του μοντέλου κινδύνου των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy* είναι η διαταραγμένη σύνθετη *Poisson*. Βάση της ιδιότητας της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy,* ότι έχει μόνο άλματα προς τα κάτω, προκύπτουν αρκετά καλά θεωρητικά αποτελέσματα (βλέπε *Bertoin* (1996) και *Kyprianou* (2006)), και αυτός είναι ο λόγος που ενθαρρύνει τους ερευνητές να μελετήσουν τα προβλήματα που σχετίζονται με τη χρεοκοπία μέσω των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy*. Χρησιμοποιώντας κάποια θεωρητικά αποτελέσματα των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy*, οι *Yang & Zhang* (2001) μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας, την από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας και του πρώτου χρόνου ανάρρωσης με κάποια διαδικασία διαταραχής. Ο *Morales* (2004) μελέτησε τη πιθανότητα χρεοκοπίας σε μια γενικευμένη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* με γενικευμένο αντίστροφο *Gaussian Lévy* μέτρο. Οι *Garrido & Morales* (2006) ασχολήθηκαν με την *Gerber – Shiu* προεξοφλημένη συνάρτηση με υπόδειγμα κινδύνου μιας φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy*. Οι *Biffis & Morales* (2010) θεώρησαν μια προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, ενσωματώνοντας το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και παρείχαν μια έκφραση, για αυτή τη συνάρτηση, σε όρους συνελίξεων. Για την εν λόγω γενικευμένη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής οι *Biffis & Kyprianou* (2010) παρείχαν μια ρητή έκφραση μέσω των συναρτήσεων κλίμακας. Επίσης, οι φασματικά αρνητικές διαδικασίες *Lévy* χρησιμοποιούνται ευρέως για την κατασκευή μοντέλων κινδύνων με μέρισμα ή με φορολόγηση (βλέπε *Zhou* (2005) και *Kyprianou & Zhou* (2009)).

Στη συνέχεια, η κίνηση *Brown* ως διατάραξη δε μπορεί να περιγράψει αποτελεσματικά στην περίπτωση όταν υπάρχουν άλματα στην στοχαστική διατάραξη του μοντέλου. Ο *Frostig* (2008) θεώρησε ένα *Sparre – Andersen* υπόδειγμα στην θεωρία κινδύνων, που διαταράσσεται από μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Επιπλέον, θεώρησε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι και το μέγεθος της απαίτησης είναι *phase – type* κατανεμημένες και έτσι μελέτησε την πιθανότητα χρεοκοπίας και την κατανομή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, κατασκευάζοντας μια διαδικασία κινδύνων χωρίς διαταραχή.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε την φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy* ως μια διαταραχή, το οποίο σημαίνει ότι και οι μικρές και οι μεγάλες διακυμάνσεις συνυπάρχουν στο σύστημα. Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια *Coxian* κατανομή και παρουσιάζουμε ότι η συνάρτηση *Gerber – Shiu* μπορεί να εκφραστεί μέσω του μετασχηματισμού *Laplace*. Παρακάτω, θα δούμε το υπόδειγμα κινδύνου μας είναι πολύ γενικό, τέτοιο ώστε περιέχει και το ανανεωτικό μοντέλο αλλά και το μοντέλο των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy* ως ειδική περίπτωση. Σημειώνουμε ότι δυο είδη κινδύνων υπάρχουν στο σύστημα, που ικανοποιούν διαφορετικές ιδιότητες: η μια φτάνει σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία, η οποία δεν έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και η άλλη οφείλεται σε μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*, η οποία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Το βασικό αποτέλεσμα σε αυτή την παράγραφο είναι η αναγνώριση του μετασχηματισμού *Laplace* και της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για την *Gerber – Shiu* συνάρτηση. Οι παράγωγοι αυτών των αποτελεσμάτων είναι εξαρτημένοι με τις συναρτήσεις κλίμακας και ενός δυνητικού μέτρου συνδεδεμένο με την φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*.

6.1 Το υπόδειγμα και κάποιες σημειώσεις

Αρχικά, θεωρούμε το υπόδειγμα *Sparre – Andersen* ότι διαταράσσεται από μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + S(t) \qquad 6.1$$

όπου, $u \geq 0$ το αρχικό κεφάλαιο (αποθεματικό/ πλεόνασμα), $c > 0$ είναι η σταθερή είσπραξη ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου. Οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, δηλώνουν το μέγεθος της ατομικής απαίτησης (αυστηρώς θετικές) και έχουν κατανομή όπως μια μεταβλητή Y, με συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ και ο μετασχηματισμός *Laplace* της είναι $\hat{f}_Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f_Y(y)dy$. Το πλήθος των απαιτήσεων $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους οι οποίοι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$. Θεωρούμε ότι, οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται όπως μια V, με συνάρτηση κατανομής K_V, συνάρτηση πυκνότητας k_V και μετασχηματισμό *Laplace* $\hat{k}_V$.

Η διαδικασία $S(t)$ είναι μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*, ανεξάρτητη των άλλων στοχαστικών ποσοτήτων. Θεωρούμε ότι ο συντελεστής τάσης της $S(t)$ είναι μηδέν, διότι διαφορετικά, μπορούμε να τον αφαιρέσουμε κάνοντας τροποποίηση στο ρυθμό ασφαλίστρου. Έτσι, η διαδικασία $X(t) = ct + S(t)$ είναι επίσης μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Ο χαρακτηριστικός εκθέτης της $X(t)$ είναι μοναδικά ορισμένος από τον ακόλουθο *Laplace* εκθέτη:

$$\psi(s) = \frac{1}{t} \ln E[e^{sX(t)}] = cs + \frac{\sigma^2}{2}s^2 + \int_{(-\infty,0)} \left(e^{sx} - 1 - sxI(x > -1)\right)\nu(dx) \qquad 6.2$$

όπου, $\sigma \geq 0$, c ο όρος τάσης, ν (μας δείχνει το ρυθμό εμφάνισης αλμάτων) το μη αρνητικό μέτρο στο $(-\infty, 0)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις $\int_{(-\infty,0)} (1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty$ και $-\int_{(-\infty,-1)} x\, \nu(dx) < \infty$ για να εξασφαλίσουμε ότι X έχει πεπερασμένη μέση τιμή.

Επιπλέον, θεωρούμε την περίπτωση όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθούν *Coxian* κατανομή, η οποία είναι κατανομή *phase – type*[7] (οι οποίες δημιουργούνται από συνέλιξη εκθετικών κατανομών) και επιπλέον η *Coxian* κατανομή είναι γενίκευση των υποεκθετικών[8] (*hypoexponential)* , δηλαδή ο μετασχηματισμός *Laplace*[9] $\widehat{k}_V(s)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\widehat{k}_V(s) = \frac{\lambda_{n-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s+\lambda_i)^{n_i}}, \qquad 6.3$$

όπου, $m, n_i \in \mathbb{N}^+$ με $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, όπου n η πολλαπλότητα μιας ρίζας λ, m το πλήθος των διαφόρων ριζών με θετικό/αρνητικό πραγματικό κομμάτι και $\lambda_{n-1}(s)$ οι $n-1$ ρίζες της εξίσωσης, $\lambda_1, \dots, \lambda_m,$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ είναι αριθμοί με θετικό πραγματικό κομμάτι, ο ρυθμός εμφάνισης των αλμάτων, $\lambda_{n-1}(s)$ να ικανοποιεί $\lambda_{n-1}(0) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{n_i}$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση τάξης $n-1$ ή μικρότερη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε τα λ_i ως θετικές σταθερές. Από μερικά κλάσματα ξαναγράφουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* $\widehat{k}_V(s)$ ως ακολούθως:

$$\widehat{k}_V(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} \left(\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}\right)^j, \qquad 6.4$$

όπου,
$$a_{i,j} = \frac{1}{\lambda_i^j (n_i - j)!} \frac{d^{n_i - j}}{ds^{n_i - j}} \frac{\lambda_{n-1}(s)}{\prod_{r=1, r\neq i}^{m}(s+\lambda_r)^{n_r}} |_{s=-\lambda_i}$$

Αντιστρέφοντας την (6.4) παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$k_V(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} k_{i,j}(t),$$

όπου, $k_{i,j}(t) = \frac{t^{j-1} \lambda_i^j e^{-\lambda_i t}}{(j-1)!}$ είναι η $Gamma(j-1, \lambda_{i,j})$ πυκνότητα.

Σχετιζόμενο με τη διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας T που είναι ορισμένος ως ο χρόνος διέλευσης για πρώτη φορά κάτω από το μηδέν, δηλαδή $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$ με $T = \infty$ αν $U(t) \geq 0$ για όλα τα $t \geq 0$ που ισχύει λόγω του θεωρήματος των μεγάλων αριθμών. Για να εξασφαλίσουμε ότι η χρεοκοπία δεν είναι σίγουρο γεγονός, θεωρούμε ότι για τη συνθήκη καθαρού κέρδους ισχύει, όπως γνωρίζουμε από το ανανεωτικό μοντέλο:

[7] Προκύπτει από ένα σύστημα από ένα ή περισσότερες αλληλένδετες *Poisson* διαδικασίες που συμβαίνουν στη σειρά, ή φάσεις. Η αλληλουχία στην οποία κάθε μία από τις φάσεις εμφανίζονται μπορεί να είναι μία στοχαστική διαδικασία. Η κατανομή μπορεί να αντιπροσωπεύεται από μία τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το χρόνο μέχρι την απορρόφηση μιας διαδικασίας *Markov* με μία απορροφητική κατάσταση. Κάθε μία από τις καταστάσεις της διαδικασίας *Markov* αποτελεί μία από τις φάσεις.

[8] Ειδική κλάση κατανομών με βαριά ουρά.

[9] Για $n = 2, i = 1$ καταλήγουμε στο γνωστό αποτέλεσμα του L.T. για εκθετική κατανομή.

$$E[X(1)] > \frac{E[Y]}{E[V]}$$

όπου, $E[Y]$ η μέση τιμή των απαιτήσεων και $E[V]$ η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων.

Για $\delta \geq 0$, ορίζουμε την προεξοφλημένη *Gerber – Shiu* συνάρτηση ποινής:

$$\varphi(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right]$$

όπου w, η συνάρτηση ποινής για το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας $U(T-)$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$. Επίσης, θεωρούμε ότι $w(0,0) = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας, καθώς διαφορετικά θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι $w/w(0,0)$.

Σημειώνουμε ότι η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί είτε από την απαίτηση είτε από την φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Έστω J μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $J = 1$ αν συμβεί χρεοκοπία από την απαίτηση και $J = 0$ αν η χρεοκοπία συμβεί λόγω του $S(t)$ δηλαδή λόγω της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy*. Έτσι, η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* μπορεί να διαχωριστεί ως:

$$\varphi(u) = \varphi_0(u) + \varphi_1(u)$$

όπου, $\varphi_0(u)$ η χρεοκοπία λόγω της φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy*, με:

$$\varphi_0(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, J = 0) \middle| U(0) = u\right]$$

και $\varphi_1(u)$ η χρεοκοπία από την απαίτηση:

$$\varphi_1(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, J = 1) \middle| U(0) = u\right]$$

Προκειμένου να μελετήσουμε τις συναρτήσεις *Gerber – Shiu*, $\varphi_0(u)$ και $\varphi_1(u)$, παρουσιάζουμε κάποια εισαγωγικά σε αυτή την παράγραφο. Για $q \geq 0$, δηλώνουμε με e_q μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $1/q$ και θεωρούμε ότι το e_0 ισούται με άπειρο σχεδόν βέβαια, δηλαδή $P(e_0 = \infty) = 1$. Για μια οικογένεια αριθμών s, δηλώνουμε με $Re(s)$ το πραγματικό μέρος. Έστω (συνεπάγεται από θεωρία ισχυρής *Markov* ιδιότητας)

$$\mathbb{P}_u(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot\,|X(0) = u), \qquad \mathbb{E}_u(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot\,|X(0) = u)$$

και για την ειδική περίπτωση $u = 0$, έχουμε $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$ με $\mathbb{P}_u$ να είναι το μέτρο των *Gerber – Shiu* και $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}$ με $\mathbb{E}_u$ η μέση τιμή.

Καθώς η $X(t)$ είναι μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*, ο *Laplace* εκθέτης ψ με $\psi(0) = 0$ είναι πεπερασμένος τουλάχιστον για $Re(s) \geq 0$ και τείνει στο άπειρο για ψ να είναι άπειρο. Επιπλέον, είναι άπειρα ολοκληρώσιμος και αυστηρώς κυρτός. Ορίζουμε τον δεξιό αντίστροφό του ως:

$$\Phi(q) = \sup\{s \geq 0 : \psi(s) = q\},$$

για κάθε $q \geq 0$. Βάσει της συνθήκης καθαρού κέρδους, γνωρίζουμε ότι $\Phi(0) = 0$, είναι η μοναδική λύση του $\psi(s) = 0$. Στην ουσία η $\Phi(q)$ αντιπροσωπεύει την μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $\psi(s) = q$.

Τώρα, για $q \geq 0$, η συνάρτηση κλίμακας $W^{(q)}(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται ως συνεχής συνάρτηση στον $\mathbb{R}_+$, έτσι ώστε (ο μετασχηματισμός *Laplace* του $W^{(q)}(x)$):

$$\int_0^\infty e^{-sx} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(s) - q}, \qquad s > \Phi(q)$$

και $W^{(q)}(x) = 0$ για $x < 0$. Η συνάρτηση κλίμακας παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των προβλημάτων της εξόδου μιας φασματικά αρνητικής διαδικασίας *Lévy* (βλ. Κεφάλαιο 8 του *Kyprianou* (2006)).

Για $x \in \mathbb{R}$, ο χρόνος για πρώτη φορά που περνάει κάτω από ένα επίπεδο x, ορίζεται ως $\tau_x^- = \inf\{t > 0 : X(t) < x\}$. Σημειώνουμε ότι όταν $\sigma^2 > 0$, η διαδικασία *Lévy* $X(t)$ μπορεί να γλιστρήσει κάτω από ένα επίπεδο $x > 0$, δηλαδή $\mathbb{P}\left(X_{\tau_x^-} = x\right) > 0$. Συγκεκριμένα, από το θεώρημα 3.2 των *Biffis & Morales* (2010), έχουμε για $q \geq 0$:

$$E_u[e^{-q\tau_0^-} I(X(\tau_0^-) = 0)] = \frac{\sigma^2}{2}\left[W^{(q)\prime}(u) - \Phi(q)W^{(q)}(u)\right], \qquad u > 0, \qquad 6.5$$

όπου, $\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X(t) < 0\}$ δηλαδή ο χρόνο χρεοκοπίας και $W^{(q)\prime}(u)$ η πρώτη παράγωγος της $W^{(q)}(u)$.

Για $x \geq 0, u > 0$, ορίζουμε το ακόλουθο q −δυνητικό μέτρο (potential measure):

$$U^{(q)}(u, dx) = \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}_u(X(t) \in dx, \tau_0^- > t)dt.$$

Το οποίο είναι «στενός συγγενής» του ανανεωτικού μέτρου και είναι ένα αναμενόμενο προεξοφλητικό μέτρο, που δείχνει πόσο καιρό η διαδικασία X καταλαμβάνει διαφορετικές περιοχές του διαστήματος.

Λήμμα 6.1 *Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $\int_0^\infty g(x)\mathcal{U}^{(q)}(u, dx)$ δίνεται από:*

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty g(x)\mathcal{U}^{(q)}(u,dx) = \frac{\hat{g}(s) - \hat{g}(\Phi(q))}{q-\psi(s)}.$$

<u>Απόδειξη</u> Από την απόδειξη του θεωρήματος 8.7 του *Kyprianou* (2006) γνωρίζουμε ότι η πυκνότητά του $q-$ δυνητικό μέτρου $\mathcal{U}^{(q)}(u,dx)$ δίνεται από τη σχέση:

$$u^{(q)}(u,x) = e^{-\Phi(q)x}W^{(q)}(u) - W^{(q)}(u-x)$$

Τότε,

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty g(x)\mathcal{U}^{(q)}(u,dx) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-su} g(x)[e^{-\Phi(q)x}W^{(q)}(u) - W^{(q)}(u-x)]dxdu$$

$$= \frac{\hat{g}(\Phi(q))}{\psi(s)-q} - \int_0^\infty \int_0^u e^{-su} g(x) W^{(q)}(u-x)dxdu$$

$$= \frac{\hat{g}(\Phi(q))}{\psi(s)-q} - \int_0^\infty g(x)e^{-su}dx \int_x^\infty e^{-s(u-x)}\, W^{(q)}(u-x)du$$

$$= \frac{\hat{g}(\Phi(q))}{\psi(s)-q} - \frac{\hat{g}(s)}{\psi(s)-q}$$

$$= \frac{\hat{g}(\Phi(q)) - \hat{g}(s)}{\psi(s)-q}.$$

■

6.2 <u>Ανάλυση της συνάρτησης των Gerber – Shiu</u>

Αρχικά σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε εξισώσεις ολοκληρωμάτων για την συνάρτηση των *Gerber – Shiu*. Σημειώνουμε ότι προτού την άφιξη της πρώτης απαίτησης, η διαδικασία έχει το ίδιο μέτρο σαν την φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*, X, η οποία ξεκινά από το αρχικό αποθεματικό u.

Επομένως, για $u = 0$, η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* συμβολίζεται ως $\varphi_0(u)$ και δεσμεύοντας την, αν θα συμβεί (2ο ολοκλήρωμα) ή όχι (1ο ολοκλήρωμα) χρεοκοπία από την πρώτη απαίτηση, βάση του νόμου ολικής πιθανότητας παίρνουμε ότι:

$$\varphi_0(u) = \int_0^{\infty} k(t)dtE_u\left[e^{-\delta\tau_0^-}\, w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|)I(\tau_0^- < t)\right]$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-\delta t}k(t)dtE_u\left[\varphi_0(X(t) - Y)\, I(\tau_0^- > t, X(t) - Y > 0)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}\int_0^{\infty} k(t)dtE_u\left[e^{-\delta\tau_0^-}\, w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|)I(\tau_0^- < t)\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}k(t)dtE_u\left[\varphi_0(X(t) - Y)\, I(\tau_0^- > t, X(t) - Y > 0)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}\left[A_{i,j}^0(u) + B_{i,j}^0(u)\right] \qquad 6.6$$

όπου,

$A_{i,j}^0(u) = E_u\left[e^{-\delta\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|)I(\tau_0^- < \gamma_{i,j})\right]$, που είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση των *Gerber – Shiu* με την δείκτρια να παίρνει την τιμή 1 αν δεν συμβεί χρεοκοπία,

$B_{i,j}^0(u) = E_u\left[e^{-\delta\gamma_{i,j}}\, \varphi_0(X(\gamma_{i,j}) - Y)\, I(\tau_0^- > \gamma_{i,j}, X(\gamma_{i,j}) - Y > 0)\right]$, που είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση των *Gerber – Shiu* με την δείκτρια να παίρνει την τιμή 1 αν συμβεί χρεοκοπία και $\gamma_{i,j}$ μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $Gamma(\lambda_i, j)$ με συνάρτηση πυκνότητας $k_{i,j}$.

Όμοια για την $\varphi_1(u)$ έχουμε:

$$\varphi_1(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}k(t)dtE_u\left[\, w(X(t), Y - X(t))\, I(\tau_0^- > t, Y - X(t) > 0)\right]$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-\delta t}k(t)dtE_u\left[\varphi_1(X(t) - Y)\, I(\tau_0^- > t, X(t) - Y > 0)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}\left[A_{i,j}^0(u) + B_{i,j}^0(u)\right]$$

όπου,

$A_{i,j}^1(u) = E_u\left[e^{-\delta\gamma_{i,j}} w\left(X(\gamma_{i,j}), Y - X(\gamma_{i,j})\right) I(\tau_0^- > \gamma_{i,j}, Y - X(\gamma_{i,j}) > 0)\right]$, που είναι η αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ποινής των *Gerber – Shiu*, με συνάρτηση ποινής για την πρώτη απαίτηση από την οποία δεν επήλθε χρεοκοπία, $X(\gamma_{i,j})$, και την διαφορά της δεύτερης απαίτησης με την πρώτη απαίτηση και για την περίπτωση της δείκτριας που ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μεγαλύτερος της τυχαίας μεταβλητής, που ακολουθεί την γάμμα κατανομή, και της περίπτωσης που η 2η απαίτηση είναι μεγαλύτερη σε μέγεθος αυτής της 1ης απαίτησης.

Η $B_{i,j}^1(u) = E_u\left[e^{-\delta\gamma_{i,j}}\, \varphi_1\big(X(\gamma_{i,j}) - Y\big)\, I\big(\tau_0^- > \gamma_{i,j}, X(\gamma_{i,j}) - Y > 0\big)\right]$, που είναι η αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση των *Gerber – Shiu*, με $\varphi_1(x - y)$ να δηλώνει την ανανεωτική εξίσωση της διαφοράς της πρώτης με τη δεύτερη απαίτηση και την δείκτρια συνάρτηση των από κοινού γεγονότων, δηλαδή του χρόνου χρεοκοπίας και της διαφοράς της πρώτης με τη δεύτερη απαίτηση.

Σημειώνουμε τώρα ότι μπορούμε να ξαναγράψουμε τις $B_{i,j}^0(u)$, $A_{i,j}^1(u)$ και $B_{i,j}^1(u)$ στην ακόλουθη μορφή:

$$B_{i,j}^0(u) = \int_0^\infty \sigma_0(x)\, E\left[e^{-\delta\gamma_{i,j}} I\big(X(\gamma_{i,j}) \in dx, \tau_0^- > \gamma_{i,j}\big)\right],$$

$$A_{i,j}^1(u) = \int_0^\infty \omega_1(x) E\left[e^{-\delta\gamma_{i,j}} I\big(X(\gamma_{i,j}) \in dx, \tau_0^- > \gamma_{i,j}\big)\right],$$

$$B_{i,j}^1(u) = \int_0^\infty \sigma_1(x)\, E\left[e^{-\delta\gamma_{i,j}} I\big(X(\gamma_{i,j}) \in dx, \tau_0^- > \gamma_{i,j}\big)\right],$$

όπου,

$$\sigma_0(x) = \int_0^x \varphi_0(x - y)\, f_Y(y) dy,$$

$$\omega_1(x) = \int_0^\infty w(x, y - x)\, f_Y(y) dy,$$

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \varphi_1(x - y)\, f_Y(y) dy.$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* για την *Gerber – Shiu* για τις εξισώσεις $\varphi_0(u)$ και $\varphi_1(u)$. Όμως, πρώτα θα μελετήσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* των $\hat{A}_{i,j}^0(u)$, $\hat{B}_{i,j}^0(u)$, $\hat{A}_{i,j}^1(u)$ και $\hat{B}_{i,j}^1(u)$.

Αρχικά θεωρούμε την $A_{i,j}^0(u)$. Καθώς η $\gamma_{i,j}$, όπως είδαμε, ακολουθεί την $Gamma(\lambda_i, j)$, έχουμε:

$$\gamma_{i,1} \triangleq e_{\lambda_i}, \qquad \gamma_{i,j} \triangleq e_{\lambda_i} + \gamma_{i,j-1}\,, \qquad j > 1$$

όπου, $\triangleq$ σημαίνει την ισότητα κατά κατανομή. Επιπλέον, θυμίζουμε ότι $w(0,0) = 1$. Τότε για $j = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A_{i,1}^0(u) &= E_u\left[e^{-\delta\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|) I\left(\tau_0^- < e_{\lambda_i}\right)\right] \\ &= E_u\left[e^{-(\lambda_i+\delta)\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|)\right] \\ &= I_{i,1}(u) + I_{i,2}(u), \end{aligned}$$

όπου,

$$\begin{aligned} I_{i,1}(u) &= E_u\left[e^{-(\lambda_i+\delta)\tau_0^-} I(X(\tau_0^-) = 0)\right], \\ I_{i,2}(u) &= E_u\left[e^{-(\lambda_i+\delta)\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|) I(X(\tau_0^-) < 0)\right]. \end{aligned}$$

<u>**Σημείωση 6.1**</u> *Εύκολα παρατηρούμε ότι $I_{i,1}(u)$ και $I_{i,2}(u)$ είναι οι συναρτήσεις Gerber – Shiu για την διαδικασία κινδύνων Lévy $\{X(t)\}$, την οποία έχουν μελετήσει οι Garrido & Morales (2006) και Biffis & Morales (2010) (και επίσης των δικών τους αναφορών). Αλλά θα παράγουμε εκ νέου τους μετασχηματισμούς Laplace αυτών των ποσοτήτων και ιδίως θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 6.1 για να βρούμε την ποσότητα $\hat{I}_{i,2}(u)$.*

Από την (6.5), έχουμε:

$$I_{i,1}(u) = \frac{\sigma^2}{2}[W^{(\lambda_i+\delta)'}(u) - \Phi(\lambda_i + \delta) W^{(\lambda_i+\delta)}(u)].$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό *Laplace* και στις δυο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-st} I_{i,1}(s)\, ds = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\sigma^2}{2}[W^{(\lambda_i+\delta)'}(s) - \Phi(\lambda_i + \delta) W^{(\lambda_i+\delta)}(s)] ds \quad \Leftrightarrow \\ &\hat{I}_{i,1}(s) = \frac{\sigma^2}{2}\left[\int_0^\infty e^{-st} W^{(\lambda_i+\delta)'}(s) ds - \Phi(\lambda_i + \delta) \int_0^\infty e^{-st}\, W^{(\lambda_i+\delta)}(s) ds\right] \quad \Leftrightarrow \\ &\hat{I}_{i,1}(s) = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{s}{\psi(s) - (\lambda_i + \delta)} - \frac{\Phi(\lambda_i + \delta)}{\psi(s) - (\lambda_i + \delta)}\right] \quad \Leftrightarrow \\ &\hat{I}_{i,1}(s) = \frac{\frac{\sigma^2}{2}[\Phi(\lambda_i + \delta) - s]}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}. \end{aligned}$$

Που χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W^{(\lambda_i+\delta)}(0) = 0$ όταν $\sigma^2 > 0$. Καθώς για την $I_{i,2}(u)$ έχουμε:

$$I_{i,2}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_i+\delta)t}\, w(x, y-x)v(-dy)\mathbb{P}_u[X(t) \in dx, \tau_0^- > t]dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_i+\delta)t}\, \omega_0(x)\mathbb{P}_u[X(t) \in dx, \tau_0^- > t]dt$$

$$= \int_0^\infty \omega_0(x)\, \mathcal{U}^{(\lambda_i+\delta)}(u, dx),$$

όπου,

$$\omega_0(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)v(-dy).$$

Με τη βοήθεια από το λήμμα 6.1 βρίσκουμε τον *Laplace* μετασχηματισμό της $I_{i,2}(u)$:

$$\hat{I}_{i,2}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty \omega_0(x)\mathcal{U}^{(\lambda_i+\delta)}(u, dx)$$

και από λήμμα 6.1 γνωρίζουμε ότι:

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty g(x)\mathcal{U}^{(q)}(u, dx) = \frac{\hat{g}(s) - \hat{g}(\Phi(q))}{q - \psi(s)}$$

επομένως, έχουμε:

$$\hat{I}_{i,2}(s) = \frac{\widehat{\omega}_0(s) - \widehat{\omega}_0[\Phi(\lambda_i+\delta)]}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}.$$

Συνδυάζοντας τις $\hat{I}_{i,1}(s)$, $\hat{I}_{i,2}(s)$ παίρνουμε ότι:

$$\hat{A}_{i,1}^0(s) = \frac{\pi(s) - \pi[\Phi(\lambda_i+\delta)]}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}, \qquad 6.7$$

όπου, $\pi(s) = \widehat{\omega}_0(s) - \frac{\sigma^2}{2}s$.

Τώρα για $j \geq 2$, από την ιδιότητα *Markov* έχουμε:

$$A_{i,j}^0(u) = E_u\left[e^{-\delta\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|)I\left(\tau_0^- < e_{\lambda_i+\gamma_{i,j-1}}\right)\right]$$

$$= E_u\left[e^{-\delta\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|) I\left(\tau_0^- < e_{\lambda_i}\right)\right]$$
$$+ E_u\left[e^{-\delta\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|) I\left(e_{\lambda_i} < \tau_0^- < \gamma_{i,j-1}\right)\right]$$
$$= A_{i,1}^0(u) + \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_i e^{-(\lambda_i+\delta)t}\, \mathbb{P}_u[X(t) \in dx, \tau_0^- > t]dt$$
$$\times E_u\left[e^{-\delta\tau_0^-} w(X(\tau_0^- -), |X(\tau_0^-)|) I\left(\tau_0^- < \gamma_{i,j-1}\right)\right]$$
$$= A_{i,1}^0(u) + \lambda_i \int_0^\infty A_{i,j-1}^0(x)\, \mathcal{U}^{(\lambda_i+\delta)}(u, dx)$$

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό *Laplace* και στα δυο μέλη και με βάση του λήμματος 6.1 και της σχέσης (6.7), παίρνουμε:

$$\hat{A}_{i,j}^0(s) = \hat{A}_{i,1}^0(s) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\left\{\hat{A}_{i,j-1}^0(s) - \hat{A}_{i,j-1}^0(s)[\Phi(\lambda_i + \delta)]\right\}$$
$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\left\{\hat{A}_{i,j-1}^0(s) + \frac{\pi(s)}{\lambda_i} - \frac{\pi[\Phi(\lambda_i + \delta)]}{\lambda_i} - \hat{A}_{i,j-1}^0[\Phi(\lambda_i + \delta)]\right\}. \qquad 6.8$$

Έτσι, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.1.7) και (5.1.8) για $j = 1, \dots, n_i$:

$$\hat{A}_{i,j}^0(s) = \sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^r \left[\frac{\pi(s)}{\lambda_i} - \frac{\pi\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right)}{\lambda_i} - \hat{A}_{i,j-r}^0\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right)\right] \qquad 6.9$$

και καταλαβαίνουμε ότι ισχύει $\hat{A}_{i,0}^0(s) = 0$ για $Re(s) \geq 0$.

Στη συνέχεια, στρέφουμε την προσοχή μας στις $B_{i,j}^0(u)$, $A_{i,j}^1(u)$ και $B_{i,j}^1(u)$. Για ευκολία θεωρούμε ότι $B_{i,0}^0 = \sigma_0$, $A_{i,0}^1 = \omega_1$ και $B_{i,0}^1 = \sigma_1$. Χάριν των προηγούμενων εκφράσεων, για τις σχέσεις που βρήκαμε παραπάνω, μας μένει μόνο να υπολογίσουμε την $B_{i,j}^0(u)$. Για $j = 1$, έχουμε:

$$B_{i,j}^0(u) = \int_0^\infty B_{i,0}^0(u)\mathbb{E}_u\left[e^{-\delta e_{\lambda_i}}\, I\left(X\left(e_{\lambda_i}\right) \in dx, \tau_0^- > e_{\lambda_i}\right)\right]$$
$$= \int_0^\infty \lambda_i\, e^{-(\lambda_i+\delta)t} \int_0^\infty B_{i,0}^0(x)\, \mathbb{P}_u[X(t) \in dx, \tau_0^- > t]\, dt$$
$$= \lambda_i \int_0^\infty B_{i,0}^0(x)\, \mathcal{U}^{(\lambda_i+\delta)}(u, dx). \qquad 6.10$$

Για $j \geq 2$, από την Μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε:

$$B_{i,j}^{0}(u) = \int_{0}^{\infty} \mathbb{E}_u\left[e^{-\delta e_{\lambda_i}}\, I\left(X\left(e_{\lambda_i}\right) \in dx, \tau_0^- > e_{\lambda_i}\right)\right]$$

$$\times \int_{0}^{\infty} \sigma_0\, \mathbb{E}_x\left[e^{-\delta \gamma_{i,j-1}}\, I\left(X\left(\gamma_{i,j-1}\right) \in dx, \tau_0^- > \gamma_{i,j-1}\right)\right]$$

$$= \int_{0}^{\infty} \lambda_i\, e^{-(\lambda_i+\delta)t} \int_{0}^{\infty} B_{i,j-1}^{0}(x)\, \mathbb{P}_u[X(t) \in dx, \tau_0^- > t]\, dt$$

$$= \lambda_i \int_{0}^{\infty} B_{i,j-1}^{0}(x) \mathcal{U}^{(\lambda_i+\delta)}(u, dx). \qquad 6.11$$

Ομοίως, από λήμμα 6.1 και από τις (6.10) και (6.11) παίρνουμε ότι:

$$\hat{B}_{i,j}^{0}(s) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\left[\hat{B}_{i,j-1}^{0}(s) - \hat{B}_{i,j-1}^{0}\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right)\right],$$

για $j = 1, \dots, n_i$. Και αντίστοιχα για τις $\hat{A}_{i,j}^{1}(s)$ και $\hat{B}_{i,j}^{1}(s)$, έχουμε:

$$\hat{A}_{i,j}^{1}(s) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\left[\hat{A}_{i,j-1}^{1}(s) - \hat{A}_{i,j-1}^{1}\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right)\right],$$

$$\hat{B}_{i,j}^{1}(s) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\left[\hat{B}_{i,j-1}^{1}(s) - \hat{B}_{i,j-1}^{1}\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right)\right].$$

Από αντικατάσταση οδηγούμαστε στις παρακάτω:

$$\hat{B}_{i,j}^{0}(s) = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^{j} \hat{\sigma}_0(s) - \sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^{r} \hat{B}_{i,j-r}^{0}\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right), \qquad 6.12$$

$$\hat{A}_{i,j}^{1}(s) = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^{j} \hat{\omega}_1(s) - \sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^{r} \hat{A}_{i,j-r}^{1}\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right),$$

$$\hat{B}_{i,j}^{1}(s) = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^{j} \hat{\sigma}_1(s) - \sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \delta - \psi(s)}\right)^{r} \hat{B}_{i,j-r}^{1}\left(\Phi(\lambda_i + \delta)\right).$$

Φτάσαμε στο σημείο όπου μπορούμε να αποδώσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* για τις ποσότητες $\hat{\varphi}_0(s)$ και $\hat{\varphi}_1(s)$ και επομένως για την $\hat{\varphi}(s)$. Παίρνοντας μετασχηματισμό *Laplace* και στα δυο μέρη της (6.6) και χρησιμοποιώντας τις (6.9), (6.12) έχουμε:

$$\hat{\varphi}_0(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}\left[\hat{A}_{i,j}^{0}(s) + \hat{B}_{i,j}^{0}(s)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}\left\{\sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-\psi(s)}\right)^r \left[\frac{\pi(s)}{\lambda_i} - \frac{\pi\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)}{\lambda_i} - \hat{A}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right]\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-\psi(s)}\right)^j \hat{\sigma}_0(s) - \sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-\psi(s)}\right)^r \hat{B}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right\}$$

$$= \hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{f}_Y(s)\hat{\varphi}_0(s) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j}\frac{a_{i,j}}{\lambda_i}\hat{k}_{i,r}\big(\delta-\psi(s)\big)$$

$$\times\left[\pi(s) - \pi\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big) - \lambda_i\left(\hat{A}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big) + \hat{B}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right)\right].$$

Και λύνοντας ως προς $\hat{\varphi}_0(s)$ έχουμε:

$$\hat{\varphi}_0(s) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j}\frac{a_{i,j}}{\lambda_i}\hat{k}_{i,r}\big(\delta-\psi(s)\big)\pi(s) - H_0(s)}{1-\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{f}_Y(s)}, \qquad 6.13$$

όπου,

$$H_0(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j}\frac{a_{i,j}}{\lambda_i}\hat{k}_{i,r}\big(\delta-\psi(s)\big)\left[\pi\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right.$$

$$\left. - \lambda_i\left(\hat{A}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big) + \hat{B}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right)\right].$$

Ομοίως, εργαζόμαστε και για την $\hat{\varphi}_1(s)$ και έχουμε:

$$\hat{\varphi}_1(s) = \hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{f}_Y(s)\hat{\varphi}_1(s) + \hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{\omega}_1(s)$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j} a_{i,j}\hat{k}_{i,r}\big(\delta-\psi(s)\big)\left[\hat{A}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right]$$

$$+ \hat{B}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\varphi}_1(s) = \frac{\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{\omega}_1(s) - H_1(s)}{1-\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{f}_Y(s)}, \qquad 6.14$$

όπου,

$$H_1(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j} a_{i,j}\hat{k}_{i,r}\big(\delta-\psi(s)\big)\left[\hat{A}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big)\right] + \hat{B}^0_{i,j-r}\big(\Phi(\lambda_i+\delta)\big).$$

Επιπλέον, για να καθορίσουμε τον μετασχηματισμό *Laplace* των εξισώσεων (6.13) και (6.14), πρώτα πρέπει να κοιτάξουμε τις $H_0(s)$ και $H_1(s)$. Για αυτό το σκοπό, λαμβάνουμε υπόψη τις ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\hat{k}_v\big(\delta - \psi(s)\big)\hat{f}_Y(s) = 1 \qquad 6.15$$

η οποία καλείται γενικευμένη εξίσωση του *Lundberg*. Το ακόλουθο αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να αποδειχθεί από το θεώρημα του *Rouché* (βλέπε *Li* και *Garrido* (2005a,b))

Λήμμα 6.2 *Για* $\delta > 0$*, η εξίσωση (6.15) έχει ακριβώς* n *ρίζες, έστω* $\rho_1(\delta), \ldots, \rho_n(\delta)$ *και* $Re[\rho_i(\delta)] > 0$ *για* $i = 1, \ldots, n$.

Σημείωση 6.2 *Όταν* $\delta \to 0$*, η μία ρίζα αναφέρεται στο λήμμα 6.2 και δηλώνεται ως* $\rho_n(\delta)$ *χωρίς βλάβη της γενικότητας, να μηδενίζει. Επιπλέον, η* $\rho_n(\delta)$ *είναι μια ρίζα λόγω της συνθήκης καθαρούς κέρδους,* $E[X(1)] > E[Y]/E[V]$. *Στη συνέχεια, γράφουμε αυτές τις* n *ρίζες ως* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *για λόγους απλότητας. Επιπρόσθετα, θεωρούμε για τις* n *ρίζες ότι* $\psi(\rho_1), \ldots, \psi(\rho_n)$ *και είναι ρητές.*

Τώρα λαμβάνουμε υπόψη τον μετασχηματισμό *Laplace* στις εξισώσεις (6.13) και (6.14). Βλέπουμε την εξίσωση:

$$\frac{\lambda_{n-1}(\delta - \psi(s))}{\hat{k}_v\big(\delta - \psi(s)\big)} - \prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i) - \psi(s)],$$

σε όρους της $\psi(s)$, είναι πολυώνυμο $n-1$ βαθμού τέτοια ώστε για $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\lambda_{n-1}(\delta - \psi(\rho_j))}{\hat{k}_v\left(\delta - \psi(\rho_j)\right)} - \prod_{i=1}^{n}\left[\psi(\rho_i) - \psi(\rho_j)\right] = \lambda_{n-1}\left(\delta - \psi(\rho_j)\right)\hat{f}_Y(\rho_i).$$

Βάση του λήμματος 6.2, χρησιμοποιώντας *Lagrange* παρεμβολή, βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\lambda_{n-1}(\delta - \psi(s))}{\hat{k}_v\big(\delta - \psi(s)\big)} - \prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i) - \psi(s)] =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \prod_{i_2=1, i_2 \neq i_1}^{n} \frac{\psi(\rho_{i_2}) - \psi(s)}{\psi(\rho_{i_2}) - \psi(\rho_{i_1})} \lambda_{n-1}\left(\delta - \psi(\rho_{i_1})\right)\hat{f}_Y(\rho_{i_1}). \qquad 6.16$$

Επομένως, από (6.16) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))}{\hat{k}_v(\delta-\psi(s))}\left[1-\hat{k}_v(\delta-\psi(s))\hat{f}_Y(s)\right] \\
&\qquad=\prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i)-\psi(s)]-\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))\hat{f}_Y(s) \\
&\qquad+\sum_{i_1=1}^{n}\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}\frac{\psi(\rho_{i_2})-\psi(s)}{\psi(\rho_{i_2})-\psi(\rho_{i_1})}\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_{i_1})\right)\hat{f}_Y(\rho_{i_1}) \\
&=\prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i)-\psi(s)]-\sum_{i_1=1}^{n}\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}\frac{\psi(\rho_{i_2})-\psi(s)}{\psi(\rho_{i_2})-\psi(\rho_{i_1})} \\
&\qquad\times\left[\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))\hat{f}_Y(s)-\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_{i_1})\right)\hat{f}_Y(\rho_{i_1})\right] \\
&=\prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i)-\psi(s)]\left[1-\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))\hat{f}_Y(s)-\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_{i_1})\right)\hat{f}_Y(\rho_{i_1})}{\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}[\psi(\rho_{i_2})-\psi(\rho_{i_1})]\,[\psi(\rho_{i_1})-\psi(s)]}\right] \\
&=\prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i)-\psi(s)]\left[1-\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\left[\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))-\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_{i_1})\right)\right]\hat{f}_Y(\rho_{i_1})}{\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}[\psi(\rho_{i_2})-\psi(\rho_{i_1})]\,[\psi(\rho_{i_1})-\psi(s)]}\right. \\
&\qquad\left.-\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_{i_1})\right)[\hat{f}_Y(s)-\hat{f}_Y(\rho_{i_1})]}{\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}[\psi(\rho_{i_2})-\psi(\rho_{i_1})]\,[\psi(\rho_{i_1})-\psi(s)]}\right].
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

Σε όρους των $\psi(s)$, $\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))$ έχουμε ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμού. Μετά την επέκταση, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s)) \\
&\qquad=\lambda_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))+\lambda'_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))\left(\psi(\rho_{i_1})-\psi(s)\right) \\
&\qquad+\frac{\lambda_{n-1}^{(n-1)}(\delta-\psi(\rho_i))}{(n-1)!}\left(\psi(\rho_{i_1})-\psi(s)\right)^{n-1},
\end{aligned}
$$

και σύμφωνα με την παρακάτω ιδιότητα:

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{(s_i-s)^r}{\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}(s_i-s_j)}=\begin{cases} 1, & r=n-1 \\ 0, & r=0,1,\dots,n-2 \\ -\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}, & r=-1 \end{cases}
$$

έχουμε:

$$
\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\left[\lambda_{n-1}(\delta-\psi(s))-\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_{i_1})\right)\right]\hat{f}_Y(\rho_{i_1})}{\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}[\psi(\rho_{i_2})-\psi(\rho_{i_1})]\,[\psi(\rho_{i_1})-\psi(s)]}=0.
$$

Επομένως, συνεπάγεται από την (6.17):

$$\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(s)\big)}{\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)}\left[1-\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\hat{f}_Y(s)\right]$$
$$=\prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i)-\psi(s)]\left[1-\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)}{\prod_{i_2=1,i_2\neq i_1}^{n}\big[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\big]}\,\frac{\hat{f}_Y(s)-\hat{f}_Y(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}\right]. \qquad 6.18$$

Έστω:

$$\eta_{n-1}(s)=\frac{\lambda_{n-1}(s)}{\hat{k}_v(s)}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j}\frac{a_{i,j}}{\lambda_i}\hat{k}_{i,r}(s)\right]$$

το οποίο είναι πολυώνυμο $n-1$ βαθμού. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(s)\big)}{\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)}H_0(s)$$

Είναι πολυωνυμική συνάρτηση της $\psi(s)$ βαθμού $n-1$. Καθώς $\hat{\varphi}_0(s)$ είναι αναλυτική για $Re(s)\geq 0$ και για $l=1,\dots,n$ έχουμε, λόγω του λήμματος 6.2,

$$\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_l)\big)}{\hat{k}_v\big(\delta-\psi(\rho_l)\big)}H_0(\rho_l)=\eta_{n-1}(s)\big(\delta-\psi(\rho_l)\big)\pi(\rho_l).$$

Όμοια στις εξισώσεις (6.16) ως (6.18), έχουμε τα παρακάτω:

$$\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(s)\big)}{\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{j}\frac{a_{i,j}}{\lambda_i}\hat{k}_{i,r}\big(\delta-\psi(s)\big)\pi(s)-H_0(s)\right]$$
$$=\eta_{n-1}\big(\delta-\psi(s)\big)\pi(s)-\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\psi(\rho_j)-\psi(s)}{\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)}\eta_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)\pi(\rho_i)$$
$$=\prod_{l=1}^{n}[\psi(\rho_l)-\psi(s)]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\big[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\big]}\,\frac{\pi(s)-\pi(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}\right] \qquad 6.19$$

Επίσης, έχουμε

$$\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(s)\big)}{\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)}\left[\hat{k}_v\big(\delta-\psi(s)\big)\widehat{\omega}_1(s)-H_1(s)\right]$$
$$=\prod_{l=1}^{n}[\psi(\rho_l)-\psi(s)]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\big[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\big]}\,\frac{\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_1(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}\right] \qquad 6.20$$

Και τελικά λαμβάνουμε, από τι εξισώσεις (6.19) ως (6.20), τα παρακάτω αποτελέσματα.

<u>Θεώρημα 6.1</u> *Ο μετασχηματισμός Laplace των ποσοτήτων $\hat{\varphi}_0(s)$ και $\hat{\varphi}_1(s)$ δίνεται από:*

$$\hat{\varphi}_0(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \frac{\pi(s)-\pi(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}}{1-\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \frac{\hat{f}_Y(s)-\hat{f}_Y(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}}, \qquad 6.21$$

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \frac{\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_1(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}}{1-\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \frac{\hat{f}_Y(s)-\hat{f}_Y(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}}. \qquad 6.22$$

Ως υποπροϊόν του θεωρήματος 6.1, χρησιμοποιώντας την φασματική συνάρτηση που ορίσαμε στην υποπαράγραφο 6.1 μπορούμε να πάρουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την συνάρτηση Gerber – Shiu. Για δυο μετρήσιμες συναρτήσεις f_1 και f_2 στον $\mathbb{R}_+$, ορίζουμε:

$$f_1 * f_2(x) = \int_0^x f_1(x-y) f_2(y) dy,$$

για $n \geq 1$, δηλώνουμε με $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$ με f^{*0} να είναι η συνάρτηση Dirac – Delta.

<u>Θεώρημα 6.2</u> *Η συνάρτηση Gerber – Shiu ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:*

$$\varphi_0(u) = \int_0^\infty \varphi_0(u-x) v(x) dx + h_0(u), \qquad 6.23$$

$$\varphi_1(u) = \int_0^\infty \varphi_1(u-x) v(x) dx + h_1(u), \qquad 6.24$$

όπου,

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \left(\hat{f}_Y(\rho_i) W^{(\psi(\rho_i))}(x) - W^{(\psi(\rho_i))}(x) * \hat{f}_Y(x)\right),$$

$$h_0(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \left[\pi(\rho_i) W^{(\psi(\rho_i))}(u) + \frac{\sigma^2}{2} W^{(\psi(\rho_i))'}(u) - W^{(\psi(\rho_i))}(u) * \omega_0(u)\right],$$

$$h_1(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}(\delta-\psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)]} \left[\widehat{\omega}_1(\rho_i) W^{(\psi(\rho_i))}(u) - W^{(\psi(\rho_i))}(u) * \omega_1(u)\right],$$

Απόδειξη Αντιστρέφοντας μέσου του μετασχηματισμό Laplace τις εξισώσεις (6.21) και (6.22), δίνουν τις εξισώσεις (6.23) και (6.24). Έτσι, χρειαζόμαστε μόνο να αποδείξουμε ότι $\int_0^{\infty} v(x)dx < 1$ για $\delta \geq 0$. Από τη σχέση (6.18) έχουμε:

$$\hat{v}(x) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n}[\lambda_i + \delta - \psi(s)]^{n_i}\left[1 - \hat{k}_V\left(\delta - \psi(s)\right)\hat{f}_Y(s)\right]}{\prod_{i=1}^{n}[\psi(\rho_i) - \psi(s)]}.$$

Για $\delta \geq 0$, βάζουμε $s = 0$ στην παραπάνω εξίσωση και έχουμε:

$$\int_0^{\infty} v(dx) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n}[\lambda_i + \delta]^{n_i}[1 - \hat{k}_V(\delta)]}{\prod_{l=1}^{n}\psi(\rho_l)}. \qquad 6.25$$

Για $s \geq 0$, από τη συνθήκη καθαρού κέρδους έχουμε:

$$\psi'(0+) = E[X(1)] > \frac{E[Y]}{E[V]} > 0,$$

το οποίο μαζί με την σχέση $\psi(0) = 0$ και της κυρτότητας της $\psi(0)$ συνεπάγεται ότι $\psi(s) > 0$ για $s > 0$. Καθώς τα ρ_i είναι είτε θετικοί αριθμοί είτε σύνθετοι αριθμοί (με θετικό πραγματικό κομμάτι) που εμφανίζεται σε ζευγάρια σύζευξης, πρέπει να έχουμε $\prod_{l=1}^{n}\psi(\rho_l) > 0$ για $\delta > 0$. Συνεπώς, η εξίσωση (6.25) συνεπάγεται ότι $\int_0^{\infty} v(x)dx < 1$.

Αρχικά, για $\delta = 0$ έχουμε $\prod_{l=1}^{n-1}\psi(\rho_l) > 0$ από τα παραπάνω επιχειρήματα. Στη συνέχεια, θέτοντας $s = \rho_n(\delta)$ στην εξίσωση (6.17), ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη ως προς το δ και θέτοντας $\delta = 0$, παίρνουμε:

$$\rho_n'(0) = \frac{E[V]}{E[X(1)]E[V] - E[Y]} > 0,$$

χάριν της συνθήκης καθαρού κέρδους, $E[X(1)] > E[Y]/E[V]$. Τελικά, παίρνουμε το όριο $\delta \to 0$ στην εξίσωση (6.25) και κάνοντας χρήση του νόμου του L' Hôspital έχουμε:

$$\int_0^{\infty} v(x)dx = 1 - \frac{\lambda_{n-1}(0)}{\prod_{l=1}^{n-1}\psi(\rho_l)}\left(E[V] - \frac{E[V]}{E[Y]}\right) < 1 \qquad 6.26$$

■

Από την ανανεωτική θεωρία γνωρίζουμε ότι οι λύσεις των εξισώσεων (6.23) και (6.24) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varphi_0(u) = \sum_{i=0}^{\infty} v^{*i} * h_0(u) \qquad 6.27$$

$$\varphi_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} v^{*i} * h_1(u) \qquad 6.28$$

Οι εξισώσεις (6.27) και (6.28) μπορούν να προσδιορίσουν την γενικευμένη συνάρτηση των *Gerber – Shiu* σε όρους συνελίξεων. Θα δείξουμε ότι μια έκφραση κλειστής μορφής επίσης μπορεί να βρεθεί για κάποιες ειδικές περιπτώσεις στην επόμενη παράγραφο.

6.3 Μια ειδική περίπτωση

Σε αυτή την παράγραφο, θεωρούμε ότι η διαδικασία *Lévy*, X, είναι συνδυασμός μιας κίνησης *Brown* και μιας διαδικασίας σύνθετης *Poisson*. Επιπλέον, θεωρούμε ότι το μέτρο του *Lévy* είναι:

$$v(dx) = \beta\gamma e^{\gamma x} dx, \qquad x < 0$$

όπου, $\beta\gamma > 0$. Ο εκθέτης *Laplace* ψ μπορεί να γραφτεί ως: $\psi(s) = ps + \frac{\sigma^2}{2}s^2 - \frac{\beta s}{\gamma+s}$,

όπου, $p = c + \frac{\beta}{\gamma}(1 - e^{-\gamma}) - \beta e^{-\gamma}$ και συνάρτηση καθαρού κέρδους γίνεται:

$$p - \frac{\beta}{\gamma} > \frac{E[Y]}{E[V]}.$$

Από το θεώρημα 6.1 μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις συναρτήσεις των μετασχηματισμών *Laplace* αλλά και τις πιθανότητες χρεοκοπίας. Επομένως, έχουμε τρεις συναρτήσεις που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε, τους *Laplace* εκθέτες $\hat{\varphi}_0(s), \hat{\varphi}_1(s)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\psi(\rho_i) - \psi(s)} &= \frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\left(p\rho_i + \frac{\sigma^2}{2}{\rho_i}^2 - \frac{\beta\rho_i}{\gamma+\rho_i}\right) - \left(ps + \frac{\sigma^2}{2}s^2 - \frac{\beta s}{\gamma+s}\right)} \\
&= \frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{p(\rho_i - s) - \frac{\sigma^2}{2}({\rho_i}^2 - s^2) - \frac{\beta\rho_i}{\gamma+\rho_i} + \frac{\beta s}{\gamma+s}} \\
&= \frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\rho_i - s} \; \frac{s+\gamma}{\left(\frac{\sigma^2}{2}s + \frac{\sigma^2}{2}\rho_i + p\right)(s+\gamma) - \frac{\beta\gamma}{\gamma+\rho_i}} \\
&= \frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\rho_i - s} \; \frac{s+\gamma}{\frac{\sigma^2}{2}(s + r_{i,1})(s + r_{i,2})} \\
&= \frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\rho_i - s} \left(\frac{b_{i,1}}{s + r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{s + r_{i,2}}\right), \qquad 6.29
\end{aligned}$$

όπου, $-r_{i,1}$, $-r_{i,2}$ με αρνητικό πραγματικό κομμάτι είναι οι ρίζες της ακόλουθης συνάρτησης:

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}s + \frac{\sigma^2}{2}\rho_i + p\right)(s+\gamma) - \frac{\beta\gamma}{\gamma+\rho_i} = 0,$$

και από μερικά κλάσματα έχουμε:

$$b_{i,1} = \frac{\gamma - r_{i,1}}{\frac{\sigma^2}{2}\left(r_{i,2} - r_{i,1}\right)}, \quad b_{i,2} = \frac{\gamma - r_{i,2}}{\frac{\sigma^2}{2}\left(r_{i,2} - r_{i,1}\right)},$$

Έστω τώρα, T_s ο τελεστής *Dickson – Hipp* ορισμένο στην ολοκληρώσιμη συνάρτηση f τέτοιο ώστε:

$$T_s f(x) = \int_x^\infty e^{-s(y-x)} f(y)dy, \qquad Re(s) \geq 0.$$

Σημειώνουμε ότι $T_s f(0) = \hat{f}(s)$ και T_s αντιμεταθετική συνάρτηση, δηλαδή:

$$T_s T_r f(x) = T_r T_s f(x) = \frac{T_s f(x) - T_r f(x)}{r - s}, \qquad s \neq r.$$

Για περισσότερες πληροφορίες στον τελεστή *Dickson – Hipp*, παραπέμπουμε στους *Dickson & Hipp* (2001) και *Li & Garrido* (2004) που χρησιμοποιούν παρόμοια μεθοδολογία για *Erlang(2)* και *Erlang*(n), αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή *Dickson – Hipp*, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (6.27) ως:

$$\frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\psi(\rho_i) - \psi(s)} = \left(\frac{b_{i,1}}{s + r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{s + r_{i,2}}\right) T_s T_{\rho_i} f_Y(0)$$

όπου,

$$T_s T_{\rho_i} f_Y(0) = \frac{\hat{f}_Y(s) - \hat{f}_Y(\rho_i)}{\rho_i - s} \qquad 6.30$$

διότι, $T_s T_r f(x) = T_r T_s f(x) = \frac{T_s f(x) - T_r f(x)}{r-s}$.

Δουλεύοντας όμοια για τις άλλες δυο σχέσεις για τους εκθέτες Laplace $\hat{\varphi}_0(s), \hat{\varphi}_1(s)$ έχουμε:

$$\frac{\pi(s) - \pi(\rho_i)}{\psi(\rho_i) - \psi(s)} = \left(\frac{b_{i,1}}{s + r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{s + r_{i,2}}\right)\left(\frac{\sigma^2}{2} + T_s T_{\rho_i} \omega_0(0)\right), \qquad 6.31$$

και η τελευταία σχέση:

$$\frac{\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_1(\rho_i)}{\psi(\rho_i)-\psi(s)}=\left(\frac{b_{i,1}}{s+r_{i,1}}+\frac{b_{i,2}}{s+r_{i,2}}\right)T_sT_{\rho_i}\omega_1(0). \qquad 6.32$$

Έτσι, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις (6.19) και (6.20) ως:

$$\hat{\varphi}_0(s)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\left(\frac{b_{i,1}}{s+r_{i,1}}+\frac{b_{i,2}}{s+r_{i,2}}\right)\left(\frac{\sigma^2}{2}+T_sT_{\rho_i}\omega_0(0)\right)}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\left(\frac{b_{i,1}}{s+r_{i,1}}+\frac{b_{i,2}}{s+r_{i,2}}\right)T_sT_{\rho_i}f_Y(0)}, \qquad 6.33$$

$$\hat{\varphi}_1(s)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\left(\frac{b_{i,1}}{s+r_{i,1}}+\frac{b_{i,2}}{s+r_{i,2}}\right)T_sT_{\rho_i}\omega_1(0)}{1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\left(\frac{b_{i,1}}{s+r_{i,1}}+\frac{b_{i,2}}{s+r_{i,2}}\right)T_sT_{\rho_i}f_Y(0)}. \qquad 6.34$$

Επιπρόσθετα, καταλαβαίνουμε εύκολα από τις εξισώσεις (6.29) και (6.39) ότι:

$$\nu(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\,\kappa_i*T_{\rho_i}f_Y(x),$$

$$h_0(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\left(\frac{\sigma^2}{2}\kappa_i(u)+\kappa_i*T_{\rho_i}\omega_0(u)\right),$$

$$h_0(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{n-1}\left(\delta-\psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]}\,\kappa_i*T_{\rho_i}\omega_1(u),$$

όπου,

$$\kappa_i(u)=b_{i,1}e^{-r_{i,1}u}+b_{i,2}e^{-r_{i,2}u}\,.$$

6.4 Εκθετικό Μέγεθος Απαίτησης

Σε αυτή την παράγραφο, θεωρούμε την περίπτωση όταν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με πυκνότητα:

$$f_Y(y)=\mu e^{-\mu y}, \qquad \mu>0.$$

Τότε γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός *Laplace* της $f_Y(y)$, για $y\sim Exp(\mu)$, είναι:

$$\hat{f}_Y(y)=\frac{\mu}{\mu+s}$$

και επομένως με βάση τον τελεστή *Dickson – Hipp* έχουμε:

$$T_sT_{\rho_i}f_Y(0)=\frac{\mu}{(\mu+s)(\mu+\rho_i)}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας τους αριθμητές και τους παρονομαστές στις εξισώσεις (6.29) και (6.30) με την ποσότητα $(s+\mu)\prod_{i=1}^{n}\left[(s+r_{i,1})(s+r_{i,2})\right]$, τότε ο παρονομαστής γίνεται ένα πολυώνυμο, που το δηλώνουμε ως $D_{2n+1}(s)$, βαθμού $2n+1$ με αρχικό συντελεστή 1. Επιπλέον, δηλώνουμε τις ρίζες του πολυωνύμου ως $-z_1,\dots,-z_{2n+1}$. Τότε έχουμε ότι:

$$D_{2n+1}(s)=\prod_{k=1}^{2n+1}(s+z_k).$$

Στην πραγματικότητα, τα $-z_k$ είναι επίσης ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του *Lundberg* (6.15). Από το λήμμα 6.2, πρέπει να ισχύει $Re(z_k)>0$. Για $i=1,\dots,n$ και $k=1{,}2$ θέτουμε:

$$\zeta_{0,i,k}(s)=\frac{\eta_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)b_{i,k}(s+\mu)\prod_{l=1}^{n}\left[(s+r_{l,1})(s+r_{l,2})\right]}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]\ (s+r_{i,k})},$$

$$\zeta_{1,i,k}(s)=\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)b_{i,k}(s+\mu)\prod_{l=1}^{n}\left[(s+r_{l,1})(s+r_{l,2})\right]}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\right]\ (s+r_{i,k})}.$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (5.1.30) και (5.1.31) ως:

$$\hat{\varphi}_0(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[\zeta_{0,i,1}(s)+\zeta_{0,i,2}(s)\right]\left[\frac{\sigma^2}{2}+T_sT_{\rho_i}\omega_0(0)\right]}{\prod_{k=1}^{2n+1}(s+z_k)},$$

$$\hat{\varphi}_1(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[\zeta_{1,i,1}(s)+\zeta_{1,i,2}(s)\right]T_sT_{\rho_i}\omega_1(0)}{\prod_{k=1}^{2n+1}(s+z_k)}.$$

Αν z_k είναι ρητά, έχουμε από μερικά κλάσματα:

$$\hat{\varphi}_0(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{c_{0,i,1}}{s+z_k}\left(\frac{\sigma^2}{2}+T_sT_{\rho_i}\omega_0(0)\right), \qquad 6.35$$

$$\hat{\varphi}_1(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{c_{1,i,1}}{s+z_k}T_sT_{\rho_i}\omega_1(0)\,, \qquad 6.36$$

όπου,

$$c_{0,i,1}=\frac{\zeta_{0,i,1}(-z_k)+\zeta_{0,i,2}(-z_k)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{2n+1}(z_l-z_k)},\qquad c_{1,i,1}=\frac{\zeta_{1,i,1}(-z_k)+\zeta_{1,i,2}(-z_k)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{2n+1}(z_l-z_k)}.$$

Αντιστρέφοντας τώρα τον μετασχηματισμό *Laplace* στις εξισώσεις (6.30) και (6.31), παίρνουμε:

$$\hat{\varphi}_0(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2n+1} c_{0,i,1} \left(\frac{\sigma^2}{2} e^{-z_k u} + \int_0^u e^{-z_k(u-x)}\, T_{\rho_i} \omega_0(0) dx \right), \qquad 6.37$$

$$\hat{\varphi}_1(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2n+1} c_{1,i,1} \int_0^u e^{-z_k(u-x)}\, T_{\rho_i} \omega_1(0) dx\,. \qquad 6.38$$

<u>Παράδειγμα 6.1</u> *Θεωρούμε ότι η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων είναι μίξη εκθετικών τέτοια ώστε:*

$$k_V(t) = a_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t},$$

όπου $a_1, a_2 > 0, \quad a_1 + a_2 = 1$. *Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg γίνεται:*

$$\frac{\mu}{\mu + s} \sum_{i=1}^{2} \frac{(\gamma + s) a_i \lambda_i}{(\gamma + s)\left(\lambda_i + \delta - ps - \frac{\sigma^2}{2} s^2\right) + \beta s} = 1. \qquad 6.39$$

Θέτουμε $\delta = 0,\ \sigma^2 = 1,\ p = 3.5,\ \beta = 2,\ \gamma = 1,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.5,\ a_1 = 0.4,\ a_2 = 0.6$ *και* $\mu = 0.5$. *Λύνοντας την εξίσωση (6.36) μας δίνει* $\rho_1 = 0.3785485$, $\rho_1 = 0$, $z_1 = 0.0446196$, $z_2 = 0.5548485$, $z_3 = 0.7038042$, $z_4 = 7.72895112$ *και* $z_5 = 7.8463651$.

Τώρα υπολογίζουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας. Για αυτό το σκοπό, θέτουμε $w \equiv 1$. *Τότε έχουμε,* $\omega_0(x) = \beta e^{-\gamma x}$, $\omega_1(x) = e^{-\mu x}$ *και συνεπώς, η συνάρτηση Gerber – Shiu ανάγεται ως οι παρακάτω πιθανότητες χρεοκοπίας (διότι η συνάρτηση ποινής τη θεωρήσαμε μονάδα):*

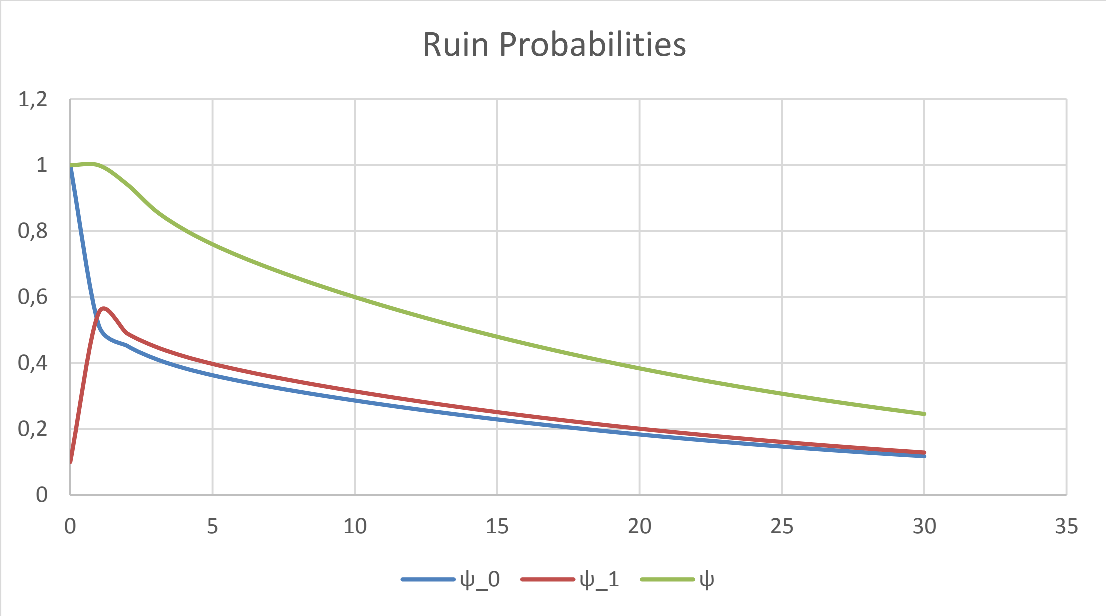
$$\psi_0(u) = \mathbb{P}(T < \infty, J = 0 | U(0) = u), \qquad \psi_1(u) = \mathbb{P}(T < \infty, J = 1 | U(0) = u).$$

Από τις εξισώσεις (6.33) και (6.34) παίρνουμε:

$$\psi_0(u) = 0.4466135 e^{-0.0446196u} + 0.0049537 e^{-0.5548485u} + 0.1709142 e^{-0.7038042u} + 0.1919879 e^{-7.7289112u} + 0.1855308 e^{-7.8463651u},$$

$$\psi_1(u) = 0.4904452 e^{-0.0446196u} + 0.0042432 e^{-0.5548485u} + 0.1633162 e^{-0.7038042u} + 0.15564550 e^{-7.7289112u} + 0.1664308 e^{-7.8463651u}.$$

Το παρακάτω σχήμα δείχνει την συμπεριφορά της $\psi_0(u)$ *και της* $\psi_1(u)$ *όπως και της συνολικής πιθανότητας χρεοκοπίας* $\psi_0(u) + \psi_1(u)$. *Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας* $\psi_0(u)$ *και* $\psi_1(u)$ *αθροίζουν στην μονάδα για* $u = 0$.



Σχήμα 6.1: *Οι καμπύλες για τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_0(u)$, $\psi_1(u)$ καθώς και της συνολικής πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_0(u)+\psi_1(u)$.*

6.5 Μεγέθη Απαιτήσεων με Βαριά Ουρά

Οι *Tang & Wei* (2010) ερεύνησαν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης των *Gerber – Shiu* στο γενικευμένο ανανεωτικό μοντέλο μέσω της παραγοντοποίησης των *Wiener – Hopf* και ισοδύναμες τεχνικές συνέλιξης, αλλά το κύριο αποτέλεσμά τους ήταν επί τω πλείστων ρητό κατά το ήμισυ. Σε αυτή την παράγραφο, θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε περισσότερα ρητά αποτελέσματα για το μοντέλου κινδύνου που δουλεύουμε, καθώς η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι συγκεκριμένη. Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματά μας εξαρτώνται σημαντικά από την ασυμπτωτική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης.

Στη συνέχεια, για δυο εξισώσεις α_1 και α_2, γράφουμε:

- $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$
- $\alpha_1(x) \sim o[\alpha_2(x)]$, αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$
- $\alpha_1(x) \approx \alpha_2(x)$, αν $\lim\limits_{x\to\infty} sup \left|\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\right| < \infty$ και $\lim\limits_{x\to\infty} sup \left|\frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right| < \infty$

Για δυο συναρτήσεις κατανομών F_1 και F_2 ορισμένες στον $\mathbb{R}_+$, ορίζουμε την συνέλιξή τους:

$$F_1 * F_2 = \int_0^x F_1(x-y)dF_2(y).$$

Τώρα για μια συνάρτηση κατανομής F, ορίζουμε με $F^{*2} = F * F$, $\bar{F} = 1 - F$, $\overline{F^{*2}} = 1 - F^{*2}$, όπου $\bar{F}$ η ουρά της F και $\overline{F^{*2}}$ η ουρά της F^{*2}. Θυμίζουμε κάποιους ορισμούς και ιδιότητες για την οικογένεια κατανομών με βαριά ουρά, για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Kluppelberg (1988), Kluppelberg (1989). Μια συνάρτηση κατανομής F ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{I}$, που είναι η κατανομή μιας βαριάς ουράς αν:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

Μια κατανομή F ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{J}$ των υποεκθετικών κατανομών αν $F \in \mathcal{I}$ και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\bar{F}(x)} = 2.$$

Μια συνάρτηση F λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{J}^*$ αν $F(x) < 1$ για όλα τα $x > 0$ και

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(y)dy = 2\mu_F < \infty,$$

όπου, μ_F ο πεπερασμένος μέσος που αναφέρεται στην συνάρτηση κατανομής F. Η οικογένεια $\mathcal{J}^*$ την είχε εισάγει ο *Kluppelberg* (1988). Αν $F \in \mathcal{J}^*$, τότε $F \in \mathcal{J}$ και $F_e \in \mathcal{J}$, όπου $F_e = \frac{1}{\mu_F}\int_0^x \bar{F}(y)dy$ να είναι το ολοκλήρωμα της ουράς της συνάρτησης κατανομής.

Παρόμοια, μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ορισμένη στον $\mathbb{R}_+$ λέμε ότι ανήκει σε μια οικογένεια $\mathcal{I}_d$ αν $f(x) > 0$ για όλα τα μεγάλα $x > 0$ και ισχύει η σχέση:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = 1, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,.$$

Επιπρόσθετα, λέμε ότι η f ανήκει σε μια οικογένεια $\mathcal{J}_d$ αν $f \in \mathcal{I}_d$ και το ακόλουθο όριο υπάρχει:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{*2}(x)}{f(x)} = 2d < \infty\,.$$

Είναι ευρέως γνωστό ότι οι οικογένειες $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ είναι κλειστές ως προς την ισοδύναμη ουρά, καθώς οι οικογένειες $\mathcal{I}_d, \mathcal{J}_d$ είναι κλειστές ως προς την ασυμπτωτική ισοδυναμία.

Θεωρούμε τη λύση της ακόλουθης ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης:

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)f(y)dy, \quad x \geq 0\,, \tag{6.40}$$

όπου, $Z(x)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση, $z(x)$ και $f(x)$ γνωστές συναρτήσεις. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η f είναι μια ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας, δηλαδή $\int_0^\infty f(x)dx < 1$.

<u>Λήμμα 6.3</u> *Λαμβάνουμε υπόψη μας την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (6.40). Επιπλέον, θεωρούμε ότι $f \in \mathcal{J}_d$, z είναι μη αρνητική τοπικά φραγμένη και $\int_0^\infty z(x)dx < \infty$.*

(i) *Αν $z \in \mathcal{I}_d$ και $z(x) \sim o[f(x)]$, τότε:*

$$Z(x) \sim \frac{\int_0^\infty z(y)dy}{\left(1 - \int_0^\infty f(y)dy\right)^2} \tag{6.41}$$

(ii) *Αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{z(x)}{f(x)} = a \in (0,\infty)$, τότε:*

$$Z(x) \sim \left(\frac{\int_0^\infty z(y)dy}{\left(1 - \int_0^\infty f(y)dy\right)^2} + \frac{\alpha}{1 - \int_0^\infty f(y)dy} \right) f(x) \tag{6.42}$$

(iii) *Αν μια από τις ακόλουθες συνθήκες ισχύει:*

(1) $f(x) \sim o(z(x))$, $z \in \mathcal{J}_d$,

(2) $\int_0^\infty f(y)dy \approx \bar{L}(x)$, $z(x) \sim q\bar{L}(x)$, *όπου* $q > 0$, $L \in \mathcal{J}$,

Τότε:

$$Z(x) \sim \frac{z(x)}{1 - \int_0^\infty f(y)dy}\,. \tag{6.43}$$

<u>Σημείωση 6.3</u> *Από τον Asmussen et al. (2003), γνωρίζουμε ότι η εξίσωση (6.41) εξακολουθεί να ισχύει αν $f \in \mathcal{J}_d$, z είναι άμεσα Reimann ολοκληρώσιμο (directly Reimann integrable, d.R.i.) και $z(x) \sim o\big(f(x)\big)$. Για τον ορισμό του άμεσα Reimann ολοκληρώσιμου, παραπέμπουμε στον Asmussen (2003).*

<u>Λήμμα 6.4</u>

(i) *Για $\delta > 0$, αν η ένταση της απαίτησης είναι $f_Y \in \mathcal{J}_d$, τότε $v \in \mathcal{J}_d$ και*

$$v(x) \sim \frac{\lambda_{n-1}(\delta)}{\prod_{i=1}^{n} \psi(\rho_i)} f_Y(x). \qquad 6.44$$

όπου, λ_{n-1} η ένταση εμφάνισης των αλμάτων και $\psi(\rho_i)$ ο Laplace εκθέτης όπως ορίστηκε σε προηγούμενη παράγραφο.

(ii) *Για $\delta = 0$, αν η ουρά $\bar{F}_Y \in \mathcal{J}_d$, τότε $v \in \mathcal{J}_d$ και*

$$v(x) \sim \frac{\lambda_{n-1}(0)}{\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\rho_i)} \bar{F}_Y(x). \qquad 6.45$$

<u>Απόδειξη</u> Λαμβάνουμε υπόψη την περίπτωση που $\delta > 0$. Από το λήμμα 5.4 (1) των *Tang & Wei* (2010), γνωρίζουμε ότι υπάρχουν κάποιες σταθερές $c_0,\ x_0 > 0$ τέτοια ώστε, για όλα τα $x \geq y \geq x_0$:

$$c_0^{-1} e^{-\varepsilon(x-y)} \leq \frac{f_Y(x)}{f_Y(y)} \leq c_0 e^{\varepsilon(x-y)}, \qquad 6.46$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έτσι, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, που δικαιολογείται από την δεύτερη ανισότητα της (6.46), για $\varepsilon < \min\limits_{1\leq i\leq n} Re(\rho_i)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T_{\rho_i} f_Y(x)}{f_Y(x)} = \int_0^{\infty} e^{-\rho_i y} \lim_{x\to\infty} \frac{f_Y(x+y)}{f_Y(x)} dy = \frac{1}{\rho_i}, \qquad 6.47$$

δηλαδή, αυτό που ισχύει είναι $T_{\rho_i} f_Y(x) \sim \frac{1}{\rho_i} f_Y(x)$, το οποίο σημαίνει ότι $T_{\rho_i} f_Y(x) \in \mathcal{J}_d$ καθώς η οικογένεια $\mathcal{J}_d$ είναι κλειστή ως προς την ασυμπτωτική ισοδυναμία. Σημειώνουμε από (6.29), καταλαβαίνουμε ότι για $i = 1, \dots n$:

$$\frac{b_{i,1}}{s + r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{s + r_{i,2}} = \frac{\rho_i - s}{\psi(\rho_i) - \psi(s)} = \frac{1}{p + \frac{\sigma^2}{2}(s + \rho_i) - \frac{\beta\gamma}{(\gamma + s)(\gamma + \rho_i)}}. \qquad 6.48$$

Από το λήμμα 4.3 (1) των *Tang & Wei* (2010) και από την (6.47), έχουμε:

$$\kappa_i * T_{\rho_i} f_Y(x) \sim \left(\frac{b_{i,1}}{r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{r_{i,2}}\right) T_{\rho_i} f_Y(x) \sim \left(\frac{b_{i,1}}{r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{r_{i,2}}\right) \frac{f_Y(x)}{\rho_i} = \frac{f_Y(x)}{\psi(\rho_i)},$$

όπου, στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (6.48) με $s = 0$. Τότε έχουμε:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}\big(\delta - \psi(\rho_i)\big)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left[\psi(\rho_j) - \psi(\rho_i)\right]} \kappa_i * T_{\rho_i} f_Y(x) \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}\big(\delta - \psi(\rho_i)\big)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left[\psi(\rho_j) - \psi(\rho_i)\right] \psi(\rho_i)} f_Y(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda_{n-1}^{(l)}(\delta)}{l!} (-\psi(\rho_i))^l}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} [\psi(\rho_j) - \psi(\rho_i)]\psi(\rho_i)} f_Y(x)$$
$$= \frac{\lambda_{n-1}(\delta)}{\prod_{i=1}^{n} \psi(\rho_i)} f_Y(x) \,,$$

όπου, στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση, που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - s)^r}{\prod_{i_2=1, i_2\neq i_1}^{n} (s_i - s_j)} = \begin{cases} 1, & r = n-1 \\ 0, & r = 0,1,\dots,n-2 \\ -\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i)}, & r = -1 \end{cases}$$

Επιπλέον, το παραπάνω αποτέλεσμα μας δείχνει ότι ισχύει $v \in \mathcal{J}_d$, καθώς $f_Y \in \mathcal{J}_d$. Με αυτό ολοκληρώνουμε την απόδειξη του (i).

Τώρα θεωρούμε την περίπτωση όταν $\delta = 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε, ότι $Re(\rho_i) > 0$ για $i = 1, \dots, n-1$ και $\rho_n = 0$. Θέτουμε $i = n$ και $s = 0$ στην εξίσωση (6.48) και μας δίνει:

$$\frac{b_{i,1}}{r_{i,1}} + \frac{b_{i,2}}{r_{i,2}} = \frac{1}{p - \frac{\beta}{\gamma}}.$$

Καθώς η ουρά της συνάρτησης κατανομής ανήκει στην οικογένεια των κατανομών με μακριά ουρά, σε σχέση ως προς την ασυμπτωτική ισοδυναμία ($\bar{F} \in \mathcal{J}_d$), έχουμε ότι:

$$\kappa_n * T_{\rho_n} f_Y(x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho_i y} f_Y(x+y) dy = -\int_0^{\infty} e^{-\rho_i y} d\bar{F}_Y(x+y)$$
$$= \bar{F}_Y(x) - \rho_i T_{\rho_i} \bar{F}_Y(x). \qquad 6.49$$

Επομένως, για $i = 1, \dots, n-1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T_{\rho_i} f_Y(x)}{\bar{F}_Y(x)} = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\rho_i T_{\rho_i} \bar{F}_Y(x)}{\bar{F}_Y(x)} = 0,$$

και συνεπώς, $\kappa_i * T_{\rho_i} f_Y(x) \sim o\big(\bar{F}_Y(x)\big)$. Από την τελευταία σχέση και βάση της (6.49) παίρνουμε την εξίσωση (6.44). Τέλος, η ουρά $\bar{F} \in \mathcal{J}_d$ μας δείχνει ότι ισχύει $v \in \mathcal{J}_d$ και επομένως ολοκληρώνεται η απόδειξη.

■

Στη συνέχεια θωρούμε τη ποσότητα $\bar{\Omega}_1(u) = \int_u^{\infty} \omega_1(x) dx$. Θέτουμε $s = 0$ στον αριθμητή της εξίσωσης (6.34) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.48), για $\delta \geq 0$ παίρνουμε:

$$\int_0^\infty h_1(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{n-1}(\delta - \psi(\rho_i))}{\prod_{j=1,j\neq i}^n [\psi(\rho_j) - \psi(\rho_i)] \left[p + \frac{\sigma^2}{2}\rho_i - \frac{\beta}{\gamma + \rho_i}\right]} T_{\rho_i} \bar{\Omega}_1(0).$$

<u>Θεώρημα 6.3</u> *Για $\delta > 0$, υποθέτουμε ότι $f_Y \in \mathcal{I}_d$ και $\int_0^\infty h_1(x)dx < \infty$.*

(i) Αν ένα από τα παρακάτω ισχύει:

(1) $\omega_1 \in \mathcal{I}_d$ και $\omega_1 \sim o(f_Y(x))$,

(2) η h_1 είναι άμεσα Reimann ολοκληρώσιμη και $h_1(x) \sim o(f_Y(x))$,

τότε:

$$\varphi_1(u) \sim \left(\frac{\hat{k}_V(\delta)}{1 - \hat{k}_V(\delta)}\right)^2 \frac{\prod_{i=1}^n \psi(\rho_i) \int_0^\infty h_1(x)dx}{\lambda_{n-1}(\delta)} f_Y(u). \qquad 6.50$$

(ii) Αν $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\omega_1(x)}{f_Y(x)} = a \in (0, \infty)$, τότε:

$$\varphi_1(u) \sim \left[\left(\frac{\hat{k}_V(\delta)}{1 - \hat{k}_V(\delta)}\right)^2 \frac{\prod_{i=1}^n \psi(\rho_i) \int_0^\infty h_1(x)dx}{\lambda_{n-1}(\delta)} + \frac{\alpha \hat{k}_V(\delta)}{1 - \hat{k}_V(\delta)}\right] f_Y(u). \qquad 6.51$$

(iii) Αν ένα από τα παρακάτω ισχύει:

(1) $f_Y(x) \sim o(\omega_1(x))$, $\omega_1 \in \mathcal{J}_d$,

(2) $\int_x^\infty f_Y(y)dy \approx \bar{L}(x)$, $\omega_1(x) \sim q\bar{L}(x)$, όπου $q > 0$, $L \in \mathcal{J}$,

τότε:

$$\varphi_1(u) \sim \frac{\hat{k}_V(\delta)}{1 - \hat{k}_V(\delta)} \omega_1(u). \qquad 6.52$$

<u>Απόδειξη</u> Θα αποδείξουμε το (i) καθώς τα (ii) και (iii) έχουν την ίδια μεθοδολογία στην απόδειξή τους με αυτή της (i). Όταν $\omega_1 \in \mathcal{I}_d$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$h_1(x) \sim \frac{\lambda_{n-1}(\delta)}{\prod_{i=1}^n \psi(\rho_i)} \omega_1(x), \qquad 6.53$$

με ακριβώς τις ίδιες υποθέσεις με αυτές στην απόδειξη του λήμματος 6.4 (i). Από τις εξισώσεις (6.24) , (6.25), (6.53) και από το λήμμα 6.3 (i) και λήμμα 6.4 (i) παίρνουμε την (6.53). Όταν h_1 είναι άμεσα *Reimann* ολοκληρώσιμο και $h_1(x) \sim o(f_Y(x))$ η εξίσωση (6.50) εξακολουθεί να ισχύει λόγω της σημείωσης 6.3.

Όμοια, έχουμε και για τα υπόλοιπα αποτελέσματα.

■

<u>Θεώρημα 6.4</u> *Για* $\delta = 0$, *θεωρούμε ότι* $\bar{F}_Y \in \mathcal{J}_d$ *και* $\int_0^\infty h_1(x)dx < \infty$.

(i) *Αν ένα από τα παρακάτω ισχύει:*

(1) $\bar{\Omega}_1 \in \mathcal{J}_d$ *και* $\bar{\Omega}_1 \sim o\big(\bar{F}_Y(x)\big)$,

(2) η h_1 *είναι d.R.i. και* $h_1(x) \sim o\big(\bar{F}_Y(x)\big)$,

τότε:

$$\varphi_1(u) \sim \frac{\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\rho_i) \int_0^\infty h_1(x)dx}{\left[\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) E[V] - E[Y]\right]^2 \lambda_{n-1}(0)} \bar{F}_Y(u). \qquad 6.54$$

(ii) *Αν* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\bar{\Omega}_1(x)}{\bar{F}_Y(x)} = a \in (0, \infty)$, *τότε:*

$$\varphi_1(u) \sim \left[\frac{\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \psi(\rho_i) \int_0^\infty h_1(x)dx}{\left[\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) E[V] - E[Y]\right]^2 \lambda_{n-1}(\delta)} + \frac{\alpha}{\left[\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) E[V] - E[Y]\right]} \right] \bar{F}_Y(u). \qquad 6.55$$

(iii) *Αν ένα από τα παρακάτω ισχύει:*

(1) $\bar{F}_Y(x) \sim o\big(\bar{\Omega}_1(x)\big)$, $\bar{\Omega}_1 \in \mathcal{J}_d$,

(2) $\int_x^\infty \bar{F}_Y(y)dy \approx \bar{L}(x)$, $\bar{\Omega}_1(x) \sim q\bar{L}(x)$, *όπου* $q > 0$, $L \in \mathcal{J}$,

τότε:

$$\varphi_1(u) \sim \frac{\bar{\Omega}_1}{\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right) E[V] - E[Y]}. \qquad 6.56$$

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα για την ευκολότερη κατανόηση αλλά και για να παρουσιάσουμε πως δουλεύουν τα θεωρήματα 6.3 και 6.4.

<u>Παράδειγμα 6.2</u> Θέτουμε $w \equiv 1$, τότε έχουμε $\omega_1(u) = \bar{F}_Y(u)$. Όταν $\delta > 0$, η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* $\varphi_1(u)$ γίνεται ο μετασχηματισμός *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας:

$$\varphi_{\delta,1}(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty, J = 1 | U(0) = u].$$

Αν $f_Y \in \mathcal{J}_d$, τότε $\bar{F}_Y \in \mathcal{J}$. Από το λήμμα 4.4 (1) από τους *Tang & Wei* (2010), έχουμε $f_Y(u) \sim o\big(\bar{F}_Y(x)\big)$. Από την εξίσωση (6.52), έχουμε ότι:

$$\varphi_{\delta,1}(u) \sim \frac{\hat{k}_V(\delta)}{1 - \hat{k}_V(\delta)} \bar{F}_Y(u). \qquad 6.57$$

Όταν $\delta > 0$, τότε η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* $\varphi_1(u)$ γίνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_1(u)$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι $\bar{\Omega}_1(u) = \int_u^\infty \bar{F}_Y(x)dx = E[Y]\bar{F}_{Y,e}(u)$. Αν $\bar{F}_Y(x) \in \mathcal{J}_d$, τότε $F_Y \in \mathcal{J}^*$, το οποίο υποδεικνύει ότι ισχύει $F_{Y,e} \in \mathcal{J}$. Πάλι από το λήμμα 4.4 (1) των *Tang & Wei* (2010), έχουμε ότι $\bar{F}_Y(x) \sim o\left(\bar{\Omega}_1(x)\right)$. Επομένως, από την εξίσωση (6.56), ισχύει ότι:

$$\psi_1(u) \sim \frac{E[V]}{\left(p - \frac{\beta}{\gamma}\right)E[V] - E[Y]} \bar{F}_{Y,e}(u). \tag{6.58}$$

<u>Παράδειγμα 6.3</u> Θέτουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2) = e^{-s_1 x_1 - s_2 x_2}$ για $s_1, s_2 > 0$, τότε έχουμε $\omega_1(u) = e^{-s_1 u} T_{s_2} f_Y(u)$. Όταν $\delta > 0$, η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* $\varphi_1(u)$ γίνεται η συνάρτηση με τρεις μεταβλητές, του μετασχηματισμού *Laplace* του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$\varphi_{\delta,s_1,s_2}(u) = E\left[e^{-\delta T - s_1 U(T-) - s_2 |U(T)|} I(T < \infty. J = 1) \middle| U(0) = u\right].$$

Επίσης, όταν $\delta = 0$, η συνάρτηση των *Gerber – Shiu* $\varphi_{0,s_1,s_2}(u)$ είναι ο διμεταβλητός μετασχηματισμός *Laplace* του πλεονάσματος πριν και μετά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Στη συνέχεια, για $\delta \geq 0$, έχουμε ότι:

$$h_1(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{n-1}\left(\delta - \psi(\rho_i)\right)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \left[\psi(\rho_j) - \psi(\rho_i)\right]} \left[b_{i,1} \int_0^u e^{-r_{i,1}(u-x) - s_1 x} \, T_{\rho_i + s_1} T_{s_2} f_Y(x) dx \right.$$
$$\left. + \, b_{i,2} \int_0^u e^{-r_{i,2}(u-x) - s_2 x} \, T_{\rho_i + s_1} T_{s_2} f_Y(x) dx \right].$$

Επιπλέον, σημειώνουμε ότι:

$$\left|T_{\rho_i + s_1} T_{s_2} f_Y(x)\right| = \left| \int_0^\infty e^{-(\rho_i + s_1)z} \int_0^\infty e^{-s_2 y} f_Y(x + y + z) dy dz \right|$$
$$\leq \int_0^\infty e^{-(Re(\rho_i) + s_1)z} \int_0^\infty e^{-s_2 y} f_Y(x + y + z) dy dz < \frac{1}{Re(\rho_i) + s_1},$$

οπότε, για $k = 1,2$:

$$\left| \int_0^u e^{-r_{i,k}(u-x) - s_1 x} \, T_{\rho_i + s_1} T_{s_2} f_Y(x) dx \right| \leq \int_0^u e^{-Re(r_{i,k})(u-x) - s_1 x} \left|T_{\rho_i + s_1} T_{s_2} f_Y(x)\right| dx$$
$$< \frac{e^{-s_1 u} - e^{-Re(r_{i,k})u}}{(Re(\rho_i) + s_1)\left(Re(r_{i,k}) - s_1\right)}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$h_1(u) < \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\left|\frac{\lambda_{n-1}\big(\delta-\psi(\rho_i)\big)b_{i,k}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\big[\psi(\rho_j)-\psi(\rho_i)\big]Re(\rho_i)+s_1}\right|\frac{e^{-s_1u}-e^{-Re(r_{i,k})u}}{Re(r_{i,k})-s_1}. \quad 6.59$$

Από την εξίσωση (6.59), γνωρίζομε ότι η $h_1(u)$ είναι φραγμένη από μια άμεσα *Reimann* ολοκληρώσιμη συνάρτηση, οπότε η $h_1(u)$ είναι επίσης άμεσα *Reimann* ολοκληρώσιμη. Όταν $\delta > 0$ και $f_Y \in \mathcal{J}_d$, είναι εύκολο να δει κανείς από την εξίσωση (6.59) ότι ισχύει $h_1(u) \sim o\big(f_Y(x)\big)$. Τότε από την εξίσωση (6.50), έχουμε ότι:

$$\varphi_{\delta,s_1,s_2}(u) \sim \left(\frac{\hat{k}_V(\delta)}{1-\hat{k}_V(\delta)}\right)^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\psi(\rho_i)\int_0^\infty h_1(x)dx}{\lambda_{n-1}(\delta)} f_Y(u). \quad 6.60$$

Όταν $\delta = 0$ και $\bar{F}_Y(x) \in \mathcal{J}_d$, ξανά από την (6.59) εξίσωση ισχύει ότι $h_1(u) \sim o\big(\bar{F}_Y(x)\big)$. Τότε από την εξίσωση (6.54), έχουμε ότι:

$$\varphi_{0,s_1,s_2}(u) \sim \frac{\left(p-\frac{\beta}{\gamma}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\psi(\rho_i)\int_0^\infty h_1(x)dx}{\left[\left(p-\frac{\beta}{\gamma}\right)E[V]-E[Y]\right]^2\lambda_{n-1}(\delta)}\bar{F}_Y(u). \quad 6.61$$

<u>Παράδειγμα 6.4</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2)$, να είναι η *Dirac – Delta* συνάρτηση ως προς την $x_2 = y$ για $y > 0$, τότε $\omega_1(u) = f_Y(u+y)$ και η $\varphi_1(u)$ γίνεται η προεξοφλημένη πυκνότητα του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν αυτό συμβαίνει λόγω της απαίτησης δηλώνεται ως $f_\delta(y|u)$. Όταν $\delta > 0$ και $f_Y \in \mathcal{J}_d$, έχουμε $\omega_1(u) \in \mathcal{J}_d$ και $f_Y(u) \sim \omega_1(u)$. Τότε από την εξίσωση (6.51), έχουμε:

$$f_\delta(y|u) \sim \left[\left(\frac{\hat{k}_V(\delta)}{1-\hat{k}_V(\delta)}\right)^2\frac{\prod_{i=1}^{n-1}\psi(\rho_i)\int_0^\infty h_1(x)dx}{\lambda_{n-1}(\delta)} + \frac{\hat{k}_V(\delta)}{1-\hat{k}_V(\delta)}\right] f_Y(u+y). \quad 6.62$$

Για $\delta = 0$ και $\bar{F}_Y \in \mathcal{J}_d$, τότε έχουμε $\bar{\Omega}_1(u) = \bar{F}_Y(u+y)$ και $\bar{F}_Y(u) \sim \bar{\Omega}_1(u)$. Από την εξίσωση (6.56) έχουμε:

$$f_0(y|u) \sim \left[\frac{\left(p-\frac{\beta}{\gamma}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\psi(\rho_i)\int_0^\infty h_1(x)dx}{\left[\left(p-\frac{\beta}{\gamma}\right)E[V]-E[Y]\right]^2\lambda_{n-1}(0)} + \frac{1}{\left(p-\frac{\beta}{\gamma}\right)E[V]-E[Y]}\right]\bar{F}_Y(u+y). \quad 6.63$$

<u>Σημείωση 6.4</u> *Έχουμε λάβει μερικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την συνάρτηση των Gerber – Shiu $\varphi_1(u)$ όταν η κατανομή του μεγέθους της απαίτησης έχει βαριά ουρά.. Όσο για την $\varphi_0(u)$, λόγω των εκθετικών αλμάτων στην φασματικά αρνητική διαδικασία Lévy, δεν είναι* *δύσκολο να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση* $h_0(u)$ *είναι άμεσα* Reimann *ολοκληρώσιμη και* $h_0(u) \sim o\big(v(x)\big)$ *ισχύει για τις περισσότερες συναρτήσεις ποινής του επιτοκίου. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (6.41) να προσεγγίσουμε την* $\varphi_0(u)$.

7. Κεφάλαιο: Συμπεράσματα

Αρχικά, μελετήσαμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω των φασματικά αρνητικών διαδικασιών *Lévy* όπου περιέχουν μια διάχυση. Αποδείξαμε ότι στην περίπτωση του κλασσικού μοντέλου και της διαδικασίας Γάμμα, που διαταράσσονται από μια διάχυση, οι πιθανότητες χρεοκοπίας, σε αυτά τα υποδείγματα, διαχειρίζονται κατά μοναδικό και απλό τρόπο.

Στη συνέχεια, μελετήσαμε τη συνάρτηση ποινής για μια γενικευμένη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Επιπρόσθετα, παρατηρήσαμε από τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων ότι οι σχέσεις δεν είναι όσο εύχρηστες από την πλευρά της ανάλυση, αλλά είναι επαρκώς σαφές για την λειτουργεία του σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον.

Τέλος, γενικεύσαμε όλα τα παραπάνω για την περίπτωση που έχουμε συνύπαρξη του ανανεωτικού υποδείγματος (*Sparre – Andersen*) να διαταράσσεται από μια φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Επιπλέον, εκφράσαμε την συνάρτηση *Gerber – Shiu* μέσω του μετασχηματισμού *Laplace* και ως βασικό αποτέλεσμα είδαμε την αναγνώριση του μετασχηματισμού *Laplace* και της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για την *Gerber – Shiu* συνάρτηση, που οι παράγωγοι αυτών των αποτελεσμάτων είναι εξαρτημένοι με τις συναρτήσεις κλίμακας και ενός δυνητικού μέτρου συνδεδεμένο με τη φασματικά αρνητική διαδικασία *Lévy*. Εν κατακλείδι, παρατηρήσαμε ότι η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί είτε από το μέγεθος της απαίτησης είτε από την μεταβλητότητα που η διατάραξη της φασματικά αρνητικής διαδικασία *Lévy*.

Βιβλιογραφία

Ελληνική:

1. Μαχαιράς Ν. (2013), *Στοχαστικές Διαδικασίες Στα Χρηματοοικονομικά Και Στον Αναλογισμό*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
2. Κουτσόπουλος Κ. (1999), *Αναλογιστικά Μαθηματικά,* Εκδόσεις Συμμετρία.
3. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2013), *Θεωρία κινδύνων I*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
4. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2014), *Θεωρία κινδύνων II*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη:

1. Albrecher, H., Renaud, J & Zhou, X. (2008). *A Lévy insurance risk process with tax. Journal of Applied Probability* 45, 363-375.
2. Asmussen, S. (1998). *A probabilistic look at the Wiener – Hopf equation*. SIAM Review 40, 189-201.
3. Asmussen, S. (2003). *Applied probability and queues (2nd ed.)*. New York: Spinger.
4. Babolian, E. Shamloo, A., (2008) *Numerical solution of Volterra and integrodifferential equations of convolution functions*. Journal of Comptutational and Applied Mathematics 214 (2), 495-508.
5. Bertoin, J. (1998). *Lévy Processes*. Cambridge University Press.
6. Bertoin, J (1999a). *Some elements on Lévy processes. To appear in Stochastic Processes: Modelling and Simulation*. Theory and Methods. North – Holland, Amsterdam.
7. Bertoin, J. (1999a). *Subordinators: examples and applications.* In Lecture on Probability Theory and Statistics, ed. P. Bernard Springer, New York.
8. Biffis, E. & Kyprianou, A. E. (2010). *A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes.* Insurance: Mathematics and Economics 46, 85-91
9. Biffis, E. & Morales, M. (2010). *On a generalization of the Gerber – Shiu function to path – dependent penalties*.

10. Chan, T. & Kyprianou, A.E., & Savon, M., (2009). *Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*.

11. Dickson, D.C.M. & Hipp, C. (2001). *On the time to ruin for Erlang (2) risk processes*. Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-344.

12. Dickson, D.C.M. (2005). *On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes.* http://arxiv.org/abs/0709.0764

13. Doney, R. & Kyprianou A. (2006). *Overshoots and undershoots of Lévy processes.* The Annals of Applied Probability.

14. Dos Reis, A. E. (1993). *How long is the surplus below zero?* Insurance: Math. Econ. 12, 23-38.

15. Dufresne, F. & Gerber, H (1991). *Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion*. Insurance: Math. Econ. 10, 51-59.

16. Dufresne, F & Gerber, H. (1993). *The probability of ruin for the inverse Gaussian and related processes.* Insurance: Math. Econ, 12, 9-22.

17. Dufrense, F. & Gerber, H. & Shiu, E. (1991). *Risk theory with the gamma process*. Astin Bull. 21, 177-192.

18. Furrer, H (1998). *Risk processes perturbed by a-stable Lévy motion.* Scand. Actuarial J. 1998, 59-74.

19. Garrido, J. & Morales, M. (2006). *On the expected discounted penalty function for Lévy risk processes*. North American Actuarial Journal 10, 197-217.

20. Gerber, H. & Landry, B. (1998). *On the discounted penalty at ruin in a jump – diffusion and the perpetual put option*. Insurance: Math. Econ. 22, 263-276.

21. Gerber, H. & Shiu, E. (1998). *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin.* Insurance Mathematics & Economics 21, 129-137.

22. Gerber, H. & Shiu, E. (1998). *On the time value of ruin*. North American Actuarial Journal 2, 48-78.

23. Gerber, H. & Lin, X. Yang, H. (2006). *A note on the dividends – penalty identity and the optimal dividend barrier.* ASTIN Bulletin 36 (2), 489-503.

24. Kluppelberg, C. (1988). *Subexponential distributions and integrated tails*. Journal of Applied Probability 25, 132-141.

25. Kluppelberg, C. (1989). *Subexponential distributions and characterizations of related classes*. Probability Theory and Related Fields 82, 259-269.

26. Kyprianou, A. E. (2006). *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*. Berlin: Springer

27. Kyprianou, A. E. & Zhou, X. (2009). *General tax structures and the Lévy insurance risk model*. Journal of Applied Prob. 46, 1146-1156.

28. Kyprianou A. E. & Palmowski, Z. (2007). *Distributional study of De Finneti's dividend problem for a general Lévy insurance risk process.* Journla of Applied Prob. 44 (2), 428-443.

29. Kyprianou A. E. & Patie, P. (2008). *Transformations of characteristic exponents of convolution semigroups.*

30. Kyprianou A. E. & Rivero, V., (2008). *Special, conjugate and complete scale function for spectrally negative Lévy processes*. Journal of Prob.

31. Kyprianou A. E. & Zhou, X. (2009). *General tax structures and the Lévy insurance risk model.*

32. Kythe, P. (2002). *Computational Methods for Linear Integral Equations*. Birhauser.

33. Lee, R., (2004). *Option pricing by transform methods: Extensions, unification, and error control.* Journal of Computational Finance 7 (3), 51-86

34. Li, S. & Garrido (2004). *On ruin for the Erlang(n) risk process.* Insurance: Math. Econ. 34, 391-408

35. Li, S. & Garrido (2005a). *On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber – Shiu function*. Advances in Applied Probability 37, 836-856.

36. Li, S. & Garrido (2005b). *The Gerber – Shiu function in a Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion.* Scandinavian Actuarial Journal 2005, 161-186.

37. Lin, X. & Willmot, C. (1999). *Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory.* Insurance Mathematics & Economics 25 (1), 63-84.

38. Marchal, P. (1998). *Distribution of the occupation time for a Lévy process at passage times at 0.* Stoch. Proc. Appl. 74. 123-131.

39. Morales, M. (2004). *Risk theory with the generalized inverse Gaussian Lévy process*. Astin Bulletin 34, 361-377.

40. Morales, M. (2007). *On the expected discounted penalty function for a perturbed risk process driven by a subordinator*. Insurance Mathematics & Economics 40 (2), 293-301.

41. Pistorius, M. (2005). *A potential-theoretical review of some exit problems of spectrally negative Lévy processes*. In: Seminaire de Probabilities. In: Lecture notes in mathematics series, vol 38. Pp. 30-41. Berlin: Springer – Verlag.

42. Prahbu, N. (1970). *Ladder variables for a continuous stochastic process*. Z. Wahrscheinlichkeitsth 16, 157-164.

43. Prahbu, N. (1998). *Stochastic Storage Process, Queues, Insurance Risk, Dams, and Data Communication, 2nd ed.* Springer, New York.

44. Renaud, J. & Zhou X. (2007). *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model*. Journal of Applied Prob. 44 (2), 420-427

45. Rogers, L. (2000). *Evaluating first – passage probabilities for spectrally one-sided Lévy processes*. Journal of Applied Prob. 37, 1173-1180.

46. Roski T. et. al. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley, New York.

47. Song, M. et al (2010). *The Gerber – Shiu discounted penalty function in the risk process with phase-type interclaim times.* Applied Mathematics and Computation. 215, 523-531.

48. Spiegel, M. (1965). *Laplace Transforms*. McGraw-Hill, New York.

49. Tang, Q. & Wei, L. (2010). *Asymptotic aspects of the Gerber – Shiu function in the renewal risk model using Wiener – Hopf factorization and convolution equivalence.* Insurance: Math. & Econ. 46, 19-31.

50. Tsai, C. & Willmot, G. (2002). *A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion.* Insurance: Math. & Econ. 30, 51-66.

51. Yang, H. & Zhang, L. (2001). *Spectrally negative Lévy processes with applications in risk theory.* Advances in Applied Probability 33, 281-291.

52. Yin, C. & Wang, C. (2008). *Optimality of the barrier strategy in De Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes: An analytical approach.*

53. Zhimin, Z. & Hailiang, Y. & Hu, Y. (2011). *On a Sparre Andersen risk model perturbed by a spectrally negative Lévy process*.

54. Zhou, X. (2005). *On a classical risk model with a constant dividend barrier.* North American Actuarial Journal 9, 95-108.

55. Zolotarev, V. (1964). *The first passage time of a level and the behavior at infinity for a class of processes with independent increments*. Theory Prob. Appl. 9, 653-661.