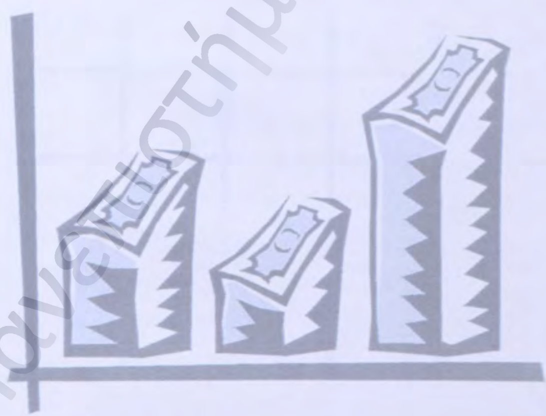
Διπλωματική Εργασία

196

Το Υπόδειγμα της Αγοράς : Είναι πεθαμένος;

Επιβλέπων Καθηγητής : Γ. Π. Διακογιάννης



Φοιτήτρια : Ιωάννα Τζιρή
ΜΧΡΗ / 0031

Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Τραπεζικής Διοικητικής

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε διεξοδικά το Υπόδειγμα της Αγοράς, να εντοπίσουμε τις αδυναμίες του- που έχουν προκύψει από τις διάφορες εμπειρικές μελέτες- και να προτείνουμε ένα νέο υπόδειγμα, το οποίο είναι ένα διπαραμετρικό υπόδειγμα που παράγει τις αποδόσεις των μετοχών (return generating process).

Το νέο υπόδειγμα δεν αναιρεί το υπόδειγμα της αγοράς. Για την ακρίβεια εάν σταθμίσω κατάλληλα τα βq και βu, τότε προκύπτει το β του υποδείγματος της αγοράς. Συνεπώς, αυτό το β εκφράζεται σαν σταθμικός μέσος δύο άλλων β. Συμπερασματικά, παράγαμε ένα υπόδειγμα αγοράς για αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το βήτα ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου καθώς επίσης και το βήτα ενός μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου που έχει την ίδια μέση απόδοση με την μέση απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου.

Επιπρόσθετα, στο τελευταίο μέρος της εργασίας μας προτείνουμε ένα νέο πολυμεταβλητό υπόδειγμα παραγωγής των μετοχών. Σύμφωνα με τον Roll (1976) για κάθε αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο ισχύει $x_p = \lambda_1 x_{p'} + \lambda_2 x_{p''}$. Συνεπώς, η απόδοση της μετοχής i μπορεί να εκφραστεί με μια παλινδρόμηση δύο το πολύ μεταβλητών. Άρα, όταν έχω αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω μια multi-index return relationship. Το αρχικό υπόδειγμα δεν μπορεί να επεκταθεί για περισσότερους από δύο παράγοντες, που να είναι αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, αναπτύσσουμε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα. Η θεωρία του arbitrage pricing theory υποθέτει σαν μηχανισμό παραγωγής της απόδοσης των μετοχών τη σχέση $R_i = E(R_i) + b_{i1} f_1 + ... + b_{ik} f_k + \varepsilon_i$ συν την ύπαρξη ευκαιριών arbitrage. Εμείς υποθέτουμε την ίδια σχέση συν κανονική κατανομή.

Η ανικανότητα της arbitrage pricing theory να προσδώσει οικονομική έννοια στους παράγοντες που βρίσκονται κάτω από το risk premia είναι ένα από τα μεγαλύτερα μειονεκτήματα στην εφαρμογή αυτής της θεωρίας. Εμείς δημιουργήσαμε μια τελική σχέση απόδοσης και κινδύνου, η οποία χρησιμοποιεί παρατηρήσιμες μακροοικονομικές μεταβλητές για να προσδιοριστούν αυτοί οι παράγοντες.

Ολοκληρώνοντας, κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην δομή της διπλωματικής μας εργασίας. Έπειτα από το εισαγωγικό πρώτο κεφάλαιο, ακολουθεί το δεύτερο κεφάλαιο στο οποίο εξετάζεται αναλυτικά η κατανομή της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο και τίθενται ορισμένες έννοιες από τη θεωρία χαρτοφυλακίου, οι οποίες θα αποτελέσουν το πλαίσιο για τη συζήτηση νέων στατιστικών εργαλείων. Στο κεφάλαιο τρία, αναφερόμαστε διεξοδικά στο υπόδειγμα της αγοράς. Στο κεφάλαιο τέσσερα, παραθέτουμε τα κυριότερα εμπειρικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει από τις διάφορες μελέτες τόσο αναλυτικά όσο και σε συγκεντρωτικούς πίνακες. Στο κεφάλαιο πέντε, παραθέτουμε το υπόδειγμα τριών διαστάσεων αποδόσεως και κινδύνου, στο οποίο θα βασιστούμε προκειμένου να παράγουμε ένα νέο διπαραμετρικό υπόδειγμα παραγωγής της αποδόσεως των μετοχών. Έτσι, στο κεφάλαιο έξι εισάγεται το νέο υπόδειγμα παραγωγής της απόδοσης των μετοχών και αποδεικνύονται τρεις βασικές ιδιότητές του. Στο τελευταίο κεφάλαιο, παράγεται ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα όπως αναφέραμε και προηγούμενα. Είναι η πρώτη φορά που αναφέρεται μια multi-index σχέση απόδοσης και κινδύνου, η οποία χρησιμοποιεί παρατηρήσιμες μακροοικονομικές μεταβλητές για να προσδιοριστούν αυτοί οι παράγοντες.

Κεφάλαιο 2
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ

Στο παρακάτω κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις σχέσεις ανάμεσα στις αποδόσεις των μεμονωμένων μετοχών και στις αποδόσεις της αγοράς. Θα δούμε σε ποιο βαθμό οι αποδόσεις των μεμονωμένων μετοχών συνδέονται ή μπορεί να ερμηνευθούν από τις αποδόσεις της αγοράς όπως αυτές ερμηνεύονται από την απόδοση R_{mt} σε έναν ισόποσα σταθμισμένο δείκτη.

Προκειμένου να διαπραγματευτούμε το παραπάνω θέμα θα επιχειρήσουμε πρωταρχικά να παρουσιάσουμε ορισμένες στατιστικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε εκτενώς κατά τη διάρκεια της μελέτης μας. Συνεπώς, θα εισάγουμε ορισμένες έννοιες από τη θεωρία χαρτοφυλακίου, οι οποίες θα αποτελέσουν το πλαίσιο για τη συζήτηση νέων στατιστικών εργαλείων. Το πρώτο στάδιο είναι να δείξουμε πώς η απόδοση σε ένα χαρτοφυλάκιο σχετίζεται με τις αποδόσεις των μεμονωμένων μετοχών μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου ως συνάρτηση των αποδόσεων των μετοχών του

Θεωρούμε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο p, το οποίο περιέχει μία μετοχή i και έστω ότι επενδύουμε ποσό h_{ip} δολαρίων στην μετοχή i στο τέλος του μήνα t-1.

Εάν είμαστε σε διακριτό χρόνο, τότε το τέλος του μήνα t-1 είναι επίσης η αρχή του μήνα t. Έστω επίσης ότι $\check{R}_{it}$ είναι η απλή απόδοση της μετοχής i για το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από το τέλος του μήνα t-1 έως το τέλος του μήνα t. Η απόδοση $\check{R}_{it}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή στον χρόνο t-1.

Στο τέλος του μήνα t, εάν εξετάσουμε την αξία της επένδυσης που έχουμε πραγματοποιήσει, θα διαπιστώσουμε ότι η τελευταία ισούται με τα ακόλουθα

$$h_{ip} + h_{ip}\,\check{R}_{it} = h_{ip}(1+\check{R}_{it});$$

όπου στην αρχική επένδυση h_{ip} στην μετοχή i του χαρτοφυλακίου p προστίθεται η απόδοση της $h_{ip}\,\check{R}_{it}$ για το χρονικό διάστημα t-1 έως t.

Επομένως, στο τέλος του μήνα η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα ισούται με την αρχική επένδυση μας h_{ip} συν την απόδοση hip $\check{R}_{it}$ σε δολάρια. Ο επενδυτής συνεπώς αυξάνει την επένδυσή του κατά το ποσό $h_{ip}\,\check{R}_{it}$.

Είδαμε τι συμβαίνει όταν επενδύσουμε σε μία και μόνο μετοχή· τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση των n μετοχών. Πιο συγκεκριμένα, εάν έχουμε n μετοχές που συνιστούν το χαρτοφυλάκιό p, τότε στο τέλος του μήνα η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n} hip + \sum_{i=1}^{n} hip\ \check{R}it = \sum_{i=1}^{n} hip\,(1+\check{R}it)$$

όπου η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου δίδεται από το άθροισμα των αρχικών επενδύσεων στις μετοχές i=1,2,...,n και το άθροισμα των αποδόσεων που προκύπτει για την καθεμία μετοχή i=1,2,...,n χωριστά. Καθώς το χαρτοφυλάκιό μας απαρτίζεται πλέον από περισσότερες από μία μετοχές για να εξάγουμε σωστά συμπεράσματα θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όλες τις αρχικές επενδύσεις που έχουν γίνει σε καθεμία μετοχή και τις αποδόσεις που αυτές οι αρχικές επενδύσεις είχαν για το χρονικό διάστημα που εξετάζουμε. Αθροίζοντας τους επιμέρους όρους βρίσκουμε πόσο αξίζει στο τέλος του μήνα t το χαρτοφυλάκιο που κατέχει ο επενδυτής μας.

Στο τέλος του μήνα t η αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί και ως $h(1+\check{R}_{pt})$, όπου με το $\check{R}_{pt}$ δηλώνουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου p για τον μήνα t και με

$$h = \sum_{i=1}^{n} hip\,, \qquad (1)$$

δηλώνουμε τα συνολικά ποσά που επενδύονται στην αρχή του μήνα. Έτσι, το άθροισμα των επιμέρους επενδύσεων hip σε κάθε μετοχή i=1,2,...,n που βρίσκονται μέσα στο χαρτοφυλάκιο p μπορεί να γραφεί ως h. Έπεται ότι

$$h + h\,\check{R}pt = \sum_{i=1}^{n} hip + \sum_{i=1}^{n} hip\,\check{R}it,$$

$$\sum_{i=1}^{n} hip + \sum_{i=1}^{n} hip\,\check{R}it = h + \sum_{i=1}^{n} hip\,\check{R}it;$$

έτσι ώστε

$$h\check{R}pt = \sum_{i=1}^{n} hip\,\check{R}it; \quad (2)$$

επομένως, η απόδοση χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί είτε σαν την ολική επένδυση πολλαπλασιασμένη με την απόδοση του χαρτοφυλακίου είτε εναλλακτικά, ως το ποσό των αποδόσεων στις επενδύσεις που έχουν γίνει σε καθεμία μετοχή χωριστά. Εάν επιπλέον,

$$x_{ip} = \frac{hip}{h} \quad (3)$$

όπου xip είναι το ποσοστό των συνολικών πόρων που έχει επενδυθεί στη μετοχή i του χαρτοφυλακίου p. Ορίζοντας συνεπώς τα βάρη xip γνωρίζουμε ακριβώς τι ποσοστό από την ολική επένδυση έχει επενδυθεί σε καθεμία μετοχή i=1,2,...,n χωριστά. Έτσι, εάν μας δοθεί το αρχικό ποσό της συνολικής επένδυσης στο χαρτοφυλάκιο p και τα βάρη xip μπορούμε να υπολογίσουμε το ποσό των χρημάτων που επενδύθηκε σε καθεμία μετοχή i του χαρτοφυλακίου p.

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{n} xip = 1 \quad (4)$$

όπου το άθροισμα όλων των βαρών xip των μετοχών i = 1,2,...,n ισούται με τη μονάδα.

Εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσής $h\check{R}pt = \sum_{i=1}^{n} hip\,\check{R}it$ με h, έχουμε

$$\check{R}pt = \sum_{i=1}^{n} xip\,\check{R}it, \qquad (5)$$

όπου η απόδοση του χαρτοφυλακίου p στο τέλος του μήνα t δίδεται από το άθροισμα των γινομένων των βαρών των μετοχών i=1,2,...,n με τις αντίστοιχες αποδόσεις τους. Ανάλογα με το ποσό των χρημάτων που έχουμε επενδύσει σε κάθε μετοχή και την απόδοση που αυτή η μετοχή είχε το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει, εάν αθροίσουμε θα βρούμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου μας p. Το πόσο συνεισφέρει η κάθε μετοχή στην απόδοση του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από το ποσό που έχουμε επενδύσει αλλά και την απόδοση που αυτή η μετοχή αποδίδει.

Με την ποσότητα x_{ip} θέλουμε να δηλώσουμε την αναλογία των συνολικών ποσών *h* που έχουμε επενδύσει στη μετοχή i προκειμένου να αποκτήσουμε το χαρτοφυλάκιο p.

Έτσι, η εξίσωση (5) μας αποκαλύπτει ότι η απόδοση στο χαρτοφυλάκιο p είναι ένας σταθμισμένος μέσος των αποδόσεων των επιμέρους μετοχών στο χαρτοφυλάκιο p. Τα βάρη που εφαρμόζονται στην απόδοση της κάθε μετοχής παριστάνουν το ποσοστά των συνολικών ποσών που επενδύονται σε καθεμία μετοχή χωριστά.

Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Στο τέλος του μήνα t-1 οι αποδόσεις για τον μήνα t τόσο των μετοχών όσο και των χαρτοφυλακίων είναι τυχαίες μεταβλητές. Οι τιμές των αποδόσεων που παρατηρούνται μπορεί απλά να θεωρηθούν ως επιλογές από κατανομές πιθανοτήτων. Καθώς η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα των αποδόσεων των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο, το να καθορίσει κανείς πώς η κατανομή της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο σχετίζεται με τις κατανομές των αποδόσεων στις επιμέρους μετοχές σημαίνει ότι θα πρέπει να καθορίσει πρώτα πώς το σταθμισμένο άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών σχετίζεται με τις κατανομές των επιμέρους αθροιζόμενων μερών.

Σύμφωνα με την εμπειρική δουλειά του Fama, του Officer(1971) και του Blume(1968), το παραπάνω πρόβλημα απλοποιείται. Οι προαναφερθέντες ερευνητές θεωρούν ότι οι κατανομές των αποδόσεων χαρτοφυλακίου, όπως και οι κατανομές των αποδόσεων των επιμέρους κοινών μετοχών, είναι κανονικές. Μια κανονική κατανομή μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από τη γνώση του μέσου και της διακύμανσης. Επομένως, το πρόβλημα περιορίζεται αρκετά. Εάν καθορίσουμε, συνεπώς, πώς οι μέσοι και οι τυπικές αποκλίσεις των αποδόσεων χαρτοφυλακίου σχετίζονται με τις παραμέτρους των κατανομών των αποδόσεων των μετοχών, τότε, σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, το πρόβλημα έχει απλά επιλυθεί.

Ο ΜΕΣΟΣ Ή Η ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ

Υπάρχουν δύο γενικά συμπεράσματα που πρέπει να αναπτύξουμε εδώ. Πρώτον, ο μέσος μιας σταθεράς πολλαπλασιασμένης με μια τυχαία μεταβλητή ισούται με τη σταθερά αυτή πολλαπλασιασμένη με την αναμενόμενη τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής.

$$E(a\tilde{y}) = a\,E(\tilde{y}) \quad (6).$$

Δεύτερον, η διακύμανση μιας σταθεράς πολλαπλασιασμένης με μια τυχαία μεταβλητή ισούται με τη σταθερά αυτή υψωμένη στο τετράγωνο και πολλαπλασιασμένη με τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής.

$$\sigma^2(\alpha\tilde{y}) = \alpha^2\,\sigma^2(\tilde{y}) \quad (7)$$

$$\sigma(\alpha\tilde{y}) = |\alpha|\,\sigma(\tilde{y}) \quad (8).$$

Η απόλυτη τιμή στην τελευταία εξίσωση είναι αναγκαία καθώς η σταθερά θα μπορούσε να είναι αρνητική και η τυπική απόκλιση της $\alpha\tilde{y}$, όπως και οποιαδήποτε άλλη τυπική απόκλιση θα πρέπει να είναι μη αρνητική.

Η απόδοση σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα σταθμικό άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών. Ο μέσος ή η αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής, η οποία αποτελεί από μόνη της ένα σταθμικό άθροισμα τυχαίων μεταβλητών, ισούται με το άθροισμα των σταθμικών μέσων ή των αναμενόμενων μέσων τιμών των μεταβλητών που απαρτίζουν το άθροισμα αυτό. Συνεπώς,

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(\tilde{y}_i). \quad (9)$$

Εάν εφαρμόσουμε την εξίσωση (9) στην εξίσωση (5) τότε έχουμε:

$$E(\check{R}pt) = E(\sum_{i=1}^{n} xip\,\check{R}it) = \sum_{i=1}^{n} xip\,E(\check{R}it), \quad (10)$$

όπου η αναμενόμενη τιμή για την απόδοση του χαρτοφυλακίου μας p προσδιορίζεται απόλυτα εάν απλά αθροίσουμε από i=1 έως n τα γινόμενα των βαρών xip με τις αναμενόμενες αποδόσεις των επιμέρους μετοχών *Řit*.

Επομένως, ο μέσος ή η αναμενόμενη απόδοση σε ένα χαρτοφυλάκιο n μετοχών ισούται με τον σταθμικό μέσο όλων των μέσων των αποδόσεων των επιμέρους μετοχών, όπου το βάρος που εφαρμόζεται στην αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής είναι το ποσοστό των συνολικών πόρων που επενδύονται σε μια μετοχή.

Επιπλέον, η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου είναι το σταθμικό άθροισμα των αναμενόμενων τιμών των μετοχών της ανεξάρτητα από την παρουσία ή την απουσία εξάρτησης ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών. Η διακύμανση της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου εν μέρει καθορίζεται από τις διακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών και εν μέρει από το βαθμό εξάρτησης ή συνδιακύμανσης των αποδόσεων σε διαφορετικές μετοχές. Συνεπώς, εάν γνωρίζουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών n που συνιστούν το χαρτοφυλάκιο p και τα ποσοστά των συνολικών πόρων που έχουν επενδυθεί σε αυτές αντίστοιχα, τότε έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του χαρτοφυλακίου μας p. Είναι γόνιμο να τονίσουμε για άλλη μια φορά ότι η αναμενόμενη τιμή του χαρτοφυλακίου δεν επηρεάζεται από το αν υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στις επιμέρους μετοχές. Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως και με τη διακύμανση της απόδοσης όπως θα δούμε παρακάτω.

Το t που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα μπορεί να παραληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\check{R}p = \sum_{i=1}^{n} xip\,\check{R}i \qquad (11)$$

$$E(\check{R}p) = E(\sum_{i=1}^{n} xip\, E(\check{R}i)\,) = \sum_{i=1}^{n} xip\, E(\check{R}i) \quad (12)$$

Πρόκειται για ισοδύναμους τύπους με τους (5) και (10) αντίστοιχα. Απλώς έχουμε παραλείψει το t για να απλουστεύσουμε τους τύπους.

Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ

Όπως ισχύει για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή, η διακύμανση της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο δίδεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\sigma^2(\,\check{R}p) = E\,\{\,[\check{R}p - E(\check{R}p)\,]^2\,\}$$

όπου η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου p ισούται με την αναμενόμενη τιμή της τετραγωνικής διαφοράς της απόδοσης του χαρτοφυλακίου από την αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (11) και (12), η $\sigma^2(\,\acute{R}_p)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\sigma^2(\,\check{R}p) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{n} xip\,(\check{R}i - E(\check{R}i))\right]^2\right),$$

όπου όμως η διακύμανση του χαρτοφυλακίου p ισούται με την αναμενόμενη τιμή του τετραγωνικού αθροίσματος όλων των βαρών πολλαπλασιασμένων με την αντίστοιχη διαφορά της απόδοσης της εκάστοτε μετοχής i από την αναμενόμενη μέση τιμή της. Για να γίνουμε πιο σαφείς, εάν χρησιμοποιήσουμε τις διαφορές των αποδόσεων των μετοχών i από τις αναμενόμενες μέσες αποδόσεις των ιδίων μετοχών i, πολλαπλασιάσουμε με τα αντίστοιχα βάρη τους, αθροίσουμε για το σύνολο των μετοχών i από 1 έως n, υψώσουμε εις το τετράγωνο και εν τέλει υπολογίσουμε την αναμενόμενη μέση τιμή του αθροίσματος τότε έχουμε υπολογίσει τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου p.

Καθώς τα $\check{R}_1, \ldots, \check{R}_n$ είναι τυχαίες μεταβλητές, τα γινόμενα $[\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]\ [\check{R}_2 - E(\check{R}_2)]$ αποτελούν όμοια τυχαίες μεταβλητές, όπως επίσης και οι τετραγωνικές διαφορές τους από τους μέσους, π.χ. $[\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]^2$. Πιο γενικά, η τιμή μιας μη σταθερής συνάρτησης ενός ή περισσότερων μεταβλητών είναι η ίδια τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, από την προηγούμενη εξίσωση συμπεραίνουμε ότι η $\sigma^2(\check{R}_p)$ είναι η αναμενόμενη τιμή ενός αθροίσματος σταθμισμένων τυχαίων μεταβλητών.
Εάν είχαμε n=2, τότε

$$\sigma^2(\check{R}p) = \chi^2_{1p} E([\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]^2) + \chi^2_{2p} E([\check{R}_2 - E(\check{R}_2)]^2) + 2\chi_{1p}\chi_{2p} E([\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]\ ([\check{R}_2 - E(\check{R}_2)]).$$

Όπου οι εκφράσεις $E([\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]^2)$ και $E([\check{R}_2 - E(\check{R}_2)]^2)$ αποτελούν τις αποδόσεις των διακυμάνσεων $\sigma^2(\check{R}_1)$ και $\sigma^2(\check{R}_2)$ και η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου $\sigma^2(\check{R}p)$ ισούται εν μέρει με το άθροισμα των αποδόσεων των διακυμάνσεων σταθμισμένων με τα τετράγωνα των βαρών τους και εν μέρει με το διπλάσιο γινόμενο των βαρών τους επί της συνδιακύμανσης ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών 1 και 2. Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την ερμηνεία της παραπάνω εξίσωσης, αρκεί να αναφερθούμε στην ποσότητα $E([\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]\ ([\check{R}_2 - E(\check{R}_2)])$, που ονομάζεται συνδιακύμανση ανάμεσα στις $\check{R}_1$ και $\check{R}_2$. Η συνδιακύμανση είναι και αυτή με τη σειρά της μια αναμενόμενη τιμή, η οποία εκτιμάται εάν σταθμίσουμε κάθε πιθανή τιμή της $E([\check{R}_1 - E(\check{R}_1)]\ ([\check{R}_2 - E(\check{R}_2)])$ με την $f(\check{R}_1, \check{R}_2)$.

Ως $f(\check{R}_1, \check{R}_2)$ θεωρούμε την από κοινού κατανομή. Καθώς το ίδιο το όνομά του προδίδει, η συνδιακύμανση είναι ένα μέτρο του βαθμού της εξάρτησης που υπάρχει ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών i και j. Η συνδιακύμανση είναι θετική εάν οι αποκλίσεις των $\check{R}_i$ και $\check{R}_j$ από τους αντίστοιχους μέσους τους τείνουν να έχουν το ίδιο πρόσημο ενώ είναι αρνητική όταν οι αποκλίσεις τείνουν να έχουν διαφορετικά πρόσημα. Άρα όταν δύο μετοχές έχουν θετική συνδιακύμανση αυτό σημαίνει ότι κινούνται κατά την ίδια κατεύθυνση ενώ όταν έχουν αρνητική συνδιακύμανση καταλαβαίνουμε όμοια ότι οι δύο αυτές μετοχές κινούνται αντίθετα η μία από την άλλη.

Όταν η συνδιακύμανση είναι θετική, υπάρχει θετική συσχέτιση ή εξάρτηση ανάμεσα στα $\check{R}_i$ και $\check{R}_j$. Όταν η συνδιακύμανση είναι αρνητική, υπάρχει κατ'αντιστοιχίαν αρνητική συσχέτιση ή εξάρτηση ανάμεσα στα $\check{R}_i$ και $\check{R}_j$.

Τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα μας δίνουν το γενικό αποτέλεσμα ότι η διακύμανση της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο n μετοχών είναι το άθροισμα των σταθμισμένων διακυμάνσεων των αποδόσεων των μεμονωμένων μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο συν το διπλάσιο σταθμισμένο άθροισμα όλων των δυνατών συνδυασμών συνδιακυμάνσεων ανάμεσα στις αποδόσεις των επιμέρους μετοχών.

Τα βάρη που εφαρμόζονται στις αποδόσεις των μετοχών i είναι τα τετράγωνα των ποσοστών από τα συνολικά ποσά χαρτοφυλακίου που επενδύονται στις μετοχές i. Ενώ τα βάρη που χρησιμοποιούνται στις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών i και j είναι τα γινόμενα των ποσοστών για τις δύο αυτές μετοχές.

Επομένως,

$$\sigma^2(\check{R}p) = \chi^2_{1p}\,\sigma^2(\check{R}_1) + \chi^2_{2p}\,\sigma^2(\check{R}_2) + \ldots + \chi^2_{np}\,\sigma^2(\check{R}n) + 2\,\chi_{1p}\,\chi_{2p}\,\sigma_{12} + 2\,\chi_{1p}\,\chi_{3p}\,\sigma_{13} + \ldots + 2\,\chi_{1p}\,\chi_{np}\,\sigma_{1n} + \ldots + 2\,\chi_{n-1,p}\,\chi_{np}\,\sigma_{n-1,n}; \qquad (15)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sigma^2(\check{R}p) = \sum_{i=1}^{n} xip^2\,\sigma^2(\check{R}_i) + \sum_{i=1}^{n-1}\ \sum_{j=i+1}^{n} \chi_{ip}\,\chi_{jp}\,\sigma_{ij}. \qquad (16)$$

or

$$\sigma^2(\check{R}p) = \sum_{i=1}^{n} xip^2\,\sigma^2(\check{R}_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \chi_{ip}\,\chi_{jp}\,\sigma_{ij}. \qquad (17),$$

επομένως η διακύμανση της απόδοσης χαρτοφυλακίου μας καθορίζεται όχι μόνο από τις επιμέρους διακυμάνσεις των μετοχών i αλλά και από την αλληλεξάρτηση που παρουσιάζουν μεταξύ τους οι μετοχές που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιό μας.

Σύμφωνα με την εξίσωση (17) οι n διακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών, που βρίσκονται στο διπλό άθροισμα, αντιμετωπίζονται ανεξάρτητα από τις n(n-1) «πραγματικές» συνδιακυμάνσεις σ_{ij}, $j \neq i$, ενώ η εξίσωση (16) δίνει ιδιαίτερη έμφαση στο ότι εφόσον $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, μόνον οι n(n-1)/2 των συνδιακυμάνσεων της εξίσωσης (17) είναι διαφορετικές. Για το λόγο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απλούστερη γραφή της εξίσωσης (17) κάνοντας χρήση του διπλασίου γινομένου και θεωρώντας $i \neq j$.

ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΑΞΙΟΓΡΑΦΩΝ

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μας επιτρέπουν να εξάγουμε ορισμένα απλά συμπεράσματα στη μέτρηση του κινδύνου όταν οι κατανομές πιθανοτήτων των αποδόσεων στα χαρτοφυλάκια είναι κανονικές. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, η γνώση του μέσου και της διακύμανσης είναι αρκετή ώστε να περιγράψει ολοκληρωτικά την κατανομή πιθανότητας της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο. Επιπλέον, μπορούμε να κάνουμε συγκρίσεις ανάμεσα σε διαφορετικά χαρτοφυλάκια σε όρους μέσων τιμών και διακυμάνσεων των αποδόσεών τους. Το μοντέλο χαρτοφυλακίου, του οποίου οι κατανομές αποδόσεων χαρτοφυλακίου είναι κανονικές ονομάζεται δι-παραμετρικό μοντέλο.

Υποθέτουμε επίσης ότι στους επενδυτές αρέσει η αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου αλλά αποστρέφονται τον κίνδυνο. Σε ένα δι-παραμετρικό περιβάλλον, αυτό σημαίνει ότι αποστρέφονται τον κίνδυνο σε σχέση με την διακύμανση της απόδοσης χαρτοφυλακίου. Το πιο επιθυμητό χαρτοφυλάκιο ανάμεσα σε εκείνα που έχουν ίδια αναμενόμενη απόδοση είναι εκείνο που έχει την χαμηλότερη διακύμανση της απόδοσής του. Διότι αυτό το χαρτοφυλάκιο μας εξασφαλίζει ίδιες αποδόσεις αλλά έχει μικρότερο ρίσκο από τα υπόλοιπα. Συνεπώς, ο επενδυτής δείχνει ιδιαίτερη προτίμηση σε αυτό. Στα μοντέλα χαρτοφυλακίου που βασίζονται σε κανονικές κατανομές αποδόσεων, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου αποτιμάται από την διακύμανση της απόδοσής του και οι επενδυτές υποθέτουμε ότι αποστρέφονται τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου τους.

Στη θεωρία χαρτοφυλακίου, πρωταρχικό ρόλο στην επενδυτική απόφαση παίζει η κατανομή της απόδοσης στο χαρτοφυλάκιο. Οι επενδυτές βλέπουν τις μεμονωμένες μετοχές μόνο σε όρους των επιπτώσεων αυτών στις κατανομές των αποδόσεων χαρτοφυλακίου. Σε ένα δι-παραμετρικό όμως μοντέλο, ένας επενδυτής κρίνει μια μεμονωμένη μετοχή σύμφωνα με τη συνεισφορά που έχει αυτή στη μέση τιμή και τη διακύμανση της κατανομής της απόδοσης στο χαρτοφυλάκιό του.

Η μέση τιμή ή η αναμενόμενη απόδοση σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι ο σταθμικός μέσος των αναμενόμενων αποδόσεων των μετοχών μέσα στο χαρτοφυλάκιο. Η συνεισφορά της μετοχής στην αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι $\chi_{ip}\, E(\check{R}_i)$. Πρόκειται για την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, σταθμισμένη με το ποσοστό των πόρων χαρτοφυλακίου που επενδύθηκαν στη συγκεκριμένη μετοχή.

Εάν τώρα ο αριθμός n των αξιόγραφων είναι πολύ μεγάλος, τότε οι διακυμάνσεις των αποδόσεων των μεμονωμένων μετοχών είναι πολύ λιγότερες από τις συνδιακυμάνσεις. Πιο συγκεκριμένα, η $\sigma^2(\check{R}_p)$ περιέχει n όρους διακυμάνσεων ενώ οι συνδιακυμάνσεις είναι n(n-1).

Ο μεγάλος αριθμός των συνδιακυμάνσεων σε σχέση με τις διακυμάνσεις δεν σημαίνει ότι οι συνδιακυμάνσεις κυριαρχούν των διακυμάνσεων στον καθορισμό του $\sigma^2(\check{R}_p)$.

Σε χαρτοφυλάκια 20 ή περισσοτέρων κοινών μετοχών, το $\sigma^2(\check{R}_p)$ καθορίζεται πρωταρχικά από τα ζευγάρια των συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων των αξιόγραφων. Τα χαρτοφυλάκια διαφοροποιούνται στο βαθμό που οι πόροι κατανέμονται σχεδόν ισόποσα ανάμεσα στις διαφορετικές μετοχές του χαρτοφυλακίου ή τουλάχιστον όταν οι πόροι δεν συγκεντρώνονται σε λίγες και μόνο μετοχές. Για παράδειγμα, αν σχεδόν όλο το χαρτοφυλάκιο είναι συγκεντρωμένο σε μία και μόνο μετοχή, τότε η διακύμανση της απόδοσης αυτής της μετοχής είναι καθοριστική για τη διακύμανση της απόδοσης στο χαρτοφυλάκιο, ανεξάρτητα από το πόσες μετοχές περιλαμβάνονται μέσα σε αυτό το χαρτοφυλάκιο.

Ποιος είναι ο κίνδυνος όμως αυτής της συγκεκριμένης μετοχής; Ποια είναι η συνεισφορά αυτής της ανεξάρτητης μετοχής στη διακύμανση της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο;

Το $\sigma^2(\check{R}_p)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\sigma^2(\check{R}p) = \sum_{i=1}^{n} xip \left(\sum_{j=1}^{n} xip\, \sigma ij \right). \quad (18)$$

Ο όρος που αντιστοιχεί στη μετοχή i είναι ο ακόλουθος $xip \sum_{j=1}^{n} xip\ \sigma ij$ *όπου* $j=1,2,...n$. Αυτή είναι η συνεισφορά της μετοχής i στη διακύμανση της απόδοσης στο χαρτοφυλάκιο p. Εάν αθροίσουμε τη συνεισφορά όλων των επιμέρους μετοχών i όπου i = 1 έως n στη διακύμανση της απόδοσης στο χαρτοφυλάκιο p θα έχουμε τελικά τη συνολική διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου p. Η συνεισφορά της μετοχής i στο $\sigma^2(\check{R}_p)$ απαρτίζεται από δύο μέρη: το x_{ip}, που είναι το ποσοστό των χρημάτων χαρτοφυλακίου που επενδύονται στη συγκεκριμένη μετοχή i και $\sum_{j=1}^{n} xjp\ \sigma ij$, που είναι ο σταθμισμένος μέσος των συνδιακυμάνσεων ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και στις αποδόσεις καθεμιάς μετοχής(συμπεριλαμβανομένης και της i) σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Υπάρχουν δύο στοιχεία που πρέπει να τονιστούν στο σημείο αυτό. Πρώτον, για να είμαστε ακριβείς θα πρέπει πάντα να λέμε «κίνδυνος της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο p» καθώς ο κίνδυνος μιας δεδομένης μετοχής είναι διαφορετικός για διαφορετικά χαρτοφυλάκια.

Οι συνδιακυμάνσεις σ_{ij} είναι οι παράμετροι της από κοινού κατανομής των αποδόσεων των μετοχών και έτσι είναι οι ίδιες για όλα τα χαρτοφυλάκια. Τα βάρη όμως x_{jp} διαφέρουν από χαρτοφυλάκιο σε χαρτοφυλάκιο. Αυτός είναι ο λόγος που ο κίνδυνος της μετοχής i , όπως μετριέται από το σταθμισμένο μέσο των συνδιακυμάνσεων, είναι διαφορετικός για διαφορετικά χαρτοφυλάκια. Ένας από τους όρους στον κίνδυνο της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο p είναι η διακύμανση της απόδοσης σε αυτή την μετοχή, $\sigma^2(\check{R}i) = \sigma ii$, η οποία σταθμίζεται από το x_{ip}. Υπάρχουν όμως (n-1) συνδιακυμάνσεις στη σχέση $\sum_{j=1}^{n} xjp\ \sigma ij$. Εάν οι συνδιακυμάνσεις δεν είναι αμελητέες σε μέγεθος σε σχέση με το $\sigma^2(\check{R}i)$, τότε σε ένα διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο ο κίνδυνος της μετοχής i καθορίζεται πρωταρχικά από τις συνδιακυμάνσεις της απόδοσής αυτής με τις αποδόσεις των άλλων (n-1) μετοχών στο χαρτοφυλάκιο. Τελικά η σχέση $\sum_{j=1}^{n} xjp\ \sigma ij$ μπορεί να γραφεί και ως εξής $\sum_{j=1}^{n} xjp\ \sigma ij = Cov(\check{R}i, \check{R}p)$.

Συνεπώς, ο κίνδυνος της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο p είναι η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και στην απόδοση του χαρτοφυλακίου.

Ορίζουμε επίσης $\beta_{ip} = Cov(\check{R}i, \check{R}p) / \sigma^2(\check{R}p)$,

που είναι ο κίνδυνος της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο p σε σχέση με τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

$$\sigma^2(\check{R}p) = \sum_{i=1}^{n} xip\, Cov(\check{R}i, \check{R}p),$$

δηλαδή $\sigma^2(\check{R}_p)$ είναι ο σταθμισμένος μέσος των τιμών των $Cov(\check{R}_i, \check{R}_p)$ για όλες τις μετοχές στο χαρτοφυλάκιο. Εάν το β_{ip} είναι μεγαλύτερο από 1, τότε ο κίνδυνος της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο είναι μεγαλύτερος από το σταθμικό μέσο κίνδυνο των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο ενώ εάν η τιμή β_{ip} είναι μικρότερη από 1, αυτό σημαίνει ότι η μετοχή έχει μικρότερο κίνδυνο από το μέσο κίνδυνο στο χαρτοφυλάκιο p.

Το β_{ip} που είναι ο σχετικός κίνδυνος της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο p, διαφέρει από χαρτοφυλάκιο σε χαρτοφυλάκιο. Επιπλέον, κάθε παράγοντας του κλάσματος που καθορίζει το β_{ip} είναι διαφορετικός από χαρτοφυλάκιο σε χαρτοφυλάκιο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ένα μέτρο σχετικού κινδύνου της μετοχής i είναι το

$$\beta_{im} = Cov(\check{R}i, \check{R}m) / \sigma^2(\check{R}m),$$

όπου $\check{R}_m$ είναι η απόδοση σε ένα ισοδύναμα σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο των μετοχών που είναι διαθέσιμες στον επενδυτή. Εάν οι διαθέσιμες μετοχές είναι όλες οι μετοχές της αγοράς τότε το β_{im} μπορεί να ερμηνευτεί ως μέτρο του κινδύνου της αγοράς της μετοχής i. Το β_{im} είναι ο κίνδυνος της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο p σε σχέση με τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου όλων των μετοχών της αγοράς (που είναι διαθέσιμες).

Κεφάλαιο 3
Το Υπόδειγμα Αγοράς

Α. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΤΟΧΩΝ

Έστω $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ οι n συνεχείς από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας $f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$. Η τιμή της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας μπορεί να θεωρηθεί ως η πιθανότητα να επιλέξουμε από κοινού από τις τυχαίες μεταβλητές $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ τον συγκεκριμένο συνδυασμό των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται ως επιχειρήματα της συνάρτησης. Εκτός από το γεγονός ότι σκεφτόμαστε σε όρους "από κοινού επιλογής των n τυχαίων μεταβλητών", οι έννοιες της επιλογής και της κατανομής πιθανότητας στο αποτέλεσμα αυτής είναι οι ίδιες όπως στη περίπτωση της μιας μεταβλητής.

Θεωρούμε μια νέα τυχαία μεταβλητή

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} ai\, \tilde{y}_i,$$

που είναι ένας γραμμικός συνδυασμός, ή διαφορετικά ένα άθροισμα σταθμισμένων τιμών των $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$. Εάν κάθε γραμμικός συνδυασμός του $\tilde{y}_i$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε η από κοινού κατανομή των $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ είναι πολυμεταβλητή κανονική και η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας $f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής. Αντίστροφα, εάν η από κοινού κατανομή των $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ είναι πολυμεταβλητή κανονική, τότε η κατανομή κάθε γραμμικού συνδυασμού των $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ είναι κανονική.

Το υπόδειγμα χαρτοφυλακίου των δύο παραμέτρων που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο υποθέτει ότι οι κατανομές πυκνότητας-πιθανότητας των αποδόσεων όλων των χαρτοφυλακίων είναι κανονικές.

Η απόδοση σε κάθε χαρτοφυλάκιο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αποδόσεων των n μετοχών που είναι διαθέσιμες για εισαγωγή στα χαρτοφυλάκια.

$$\check{R}pt = \sum_{i=1}^{n} xip\, \check{R}it, \; (1)$$

όπου $\check{R}_{it}$ είναι η απλή απόδοση της μετοχής i από τη χρονική στιγμή t-1 έως τη χρονική στιγμή t , $\check{R}_{pt}$ είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου p και το χαρτοφυλάκιο p ορίζεται από τα ποσοστά χ_{ip}, $i=1,2,...,n$ των πόρων του χαρτοφυλακίου που επενδύονται στις επιμέρους μετοχές i τη χρονική στιγμή t-1.

Το να υποθέσουμε ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου p $\check{R}_{pt}$ ακολουθεί κανονική κατανομή είναι ισοδύναμο με το να υποθέσουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους αποδόσεων των μετοχών i $\check{R}_{1t}$, ...,$\check{R}_{nt}$ ακολουθεί μια κανονική κατανομή. Έτσι, η από κοινού κατανομή των $\check{R}_{1t}$, ...,$\check{R}_{nt}$ πρέπει να είναι η πολυμεταβλητή κανονική.

Β. ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Υπάρχουν τρεις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των πολυμεταβλητών κανονικών κατανομών.

Πρώτον, όπως η μονομεταβλητή κανονική κατανομή μπορεί να περιγραφεί από τη μέση τιμή και τη διακύμανση, έτσι και η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή μπορεί να περιγραφεί από τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεις των συνιστωσών μονομεταβλητών τυχαίων μεταβλητών και των n(n-1)/2 συνδιακυμάνσεων ανάμεσα στις συνιστώσες μεταβλητές. Έτσι, η πολυμεταβλητή κανονική κατανομή των $\check{R}_{1t}$, ...,$\check{R}_{nt}$ μπορεί να περιγραφεί από τη γνώση των $E(\check{R}_1)$, $E(\check{R}_2)$,..., $E(\check{R}_n)$, τις n διακυμάνσεις των αποδόσεων των μετοχών $\sigma^2(\check{R}_1)$,..., $\sigma^2(\check{R}_{nt})$, και τις n(n-1)/2 διακριτές συνδιακυμάνσεις, $\sigma ij = Cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{jt})$, ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών.

Δεύτερον, εάν οι $\check{R}_{1t}$, ...,$\check{R}_{nt}$ ακολουθούν την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή, τότε η συνθήκη $\sigma_{ij} = 0$ για κάθε i και j, σημαίνει ότι

$$f(\check{R}_{1t}, \ldots, \check{R}_{nt}) = f(\check{R}_{1t})\, f(\check{R}_{2t}) \ldots f(\check{R}_{nt}),$$

όπου η από κοινού κατανομή των αποδόσεων $\check{R}_{1t}, \ldots, \check{R}_{nt}$ ισούται με το γινόμενο των περιθωριακών κατανομών των $\check{R}_{1t}, \ldots, \check{R}_{nt}$.

Ισοδύναμα, για κάθε i,

$$f(\check{R}_{it} / \check{R}_{1t}, \check{R}_{2t}, \ldots, \check{R}_{i-1,t}, \check{R}_{i+1,t}, \ldots, \check{R}_{nt}) = f(\check{R}_{it}).$$

Η πολυμεταβλητή κανονικότητα και οι μηδενικές συνδιακυμάνσεις ανάμεσα σε όλες τις αποδόσεις δηλώνουν ανεξαρτησία των αποδόσεων με την έννοια ότι η δεσμευμένη κατανομή της απόδοσης της μετοχής i , $f(\check{R}_{it} / \check{R}_{1t}, \check{R}_{2t}, \ldots, \check{R}_{i-1,t}, \check{R}_{i+1,t}, \ldots, \check{R}_{nt})$ είναι η ίδια για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των αποδόσεων άλλων μετοχών. Συνεπώς, η δεσμευμένη κατανομή ταυτίζεται με την περιθωριακή κατανομή $f(\check{R}_{it})$. Εάν οι αποδόσεις των μετοχών είναι πολυμεταβλητές κανονικές και $\sigma_{ij}=0$, τότε οι $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{jt}$ είναι ανεξάρτητες, έτσι ώστε

$$f(\check{R}_{it} / \check{R}_{jt}) = f(\check{R}_{it}) \text{ και } f(\check{R}_{jt} / \check{R}_{it}) = f(\check{R}_{jt}).$$

Τελικά, εάν $\check{R}_{1t}$, $\check{R}_{2t}, \ldots,$ $\check{R}_{nt}$ ακολουθούν την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή, τότε κάθε $\check{R}_{it}$ έχει μια μονομεταβλητή κανονική κατανομή. Η πολυμεταβλητή κανονικότητα υπονοεί ότι οι αποδόσεις στις μετοχές και στα χαρτοφυλάκια έχουν κανονικές κατανομές. Αντίστοιχα, η υπόθεση ότι οι κατανομές των μηνιαίων αποδόσεων χαρτοφυλακίου και αποδόσεων μετοχών είναι σχεδόν κανονικές, είναι συνεπής με την υπόθεση ότι η από κοινού κατανομή των αποδόσεων των μετοχών είναι πολυμεταβλητή κανονική.

Γ. ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΜΕΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Εάν η από κοινού κατανομή των $\check{R}_{1t}$, $\check{R}_{2t}, \ldots,$ $\check{R}_{nt}$ είναι πολυμεταβλητή κανονική, τότε η από κοινού κατανομή δύο διαφορετικών γραμμικών συνδυασμών

$\check{R}_{1t}$, $\check{R}_{2t}$, ... $\check{R}_{nt}$ είναι διμεταβλητή κανονική, που είναι το όνομα που δίνεται για μια πολυμεταβλητή κανονική κατανομή όταν εφαρμόζεται για δύο από κοινού κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Αυτό το αποτέλεσμα υπονοεί ότι η από κοινού κατανομή των αποδόσεων δύο διαφορετικών χαρτοφυλακίων είναι διμεταβλητή κανονική. Εφόσον οι μετοχές είναι ειδικές περιπτώσεις χαρτοφυλακίων, το αποτέλεσμα υπονοεί ότι η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου p είναι διμεταβλητή κανονική όπως ακριβώς η από κοινού κατανομή των αποδόσεων δύο διαφορετικών μετοχών.

Η διμεταβλητή κανονικότητα των αποδόσεων των μετοχών και του χαρτοφυλακίου αποτελεί τη βάση της σχέσης του «υποδείγματος αγοράς» ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών και στην απόδοση ενός χαρτοφυλακίου μετοχών που θεωρείται αντιπροσωπευτικό της αγοράς.

Διμεταβλητή κανονικότητα και το υπόδειγμα της αγοράς

Έστω ότι $\check{R}_{it}$ είναι η απόδοση σε μια οποιαδήποτε μετοχή i και ας υποθέσουμε ότι $\check{R}_{mt}$ είναι η απόδοση σε ένα χαρτοφυλάκιο της «αγοράς», το οποίο περιλαμβάνει όλες τις μετοχές της αγοράς. Σε καθεμία από αυτές τις μετοχές δίδεται ίσο βάρος στο χαρτοφυλάκιο αυτό τη χρονική στιγμή t-1. Εάν η από κοινού κατανομή που ακολουθούν οι αποδόσεις $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε η δεσμευμένη κατανομή της απόδοσης σε μια μετοχή έχει μια ιδιαίτερα απλή μορφή. Γεγονός που υπονοεί ότι η σχέση που συνδέει τις αποδόσεις $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ έχει όμοια μια απλή μορφή, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια. Πρωταρχικά, θα επιχειρήσουμε να συνοψίσουμε ορισμένα αποτελέσματα και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια επίσημη αιτιολόγηση.

Α. Το Υπόδειγμα της αγοράς: Βασικές ιδιότητες

Η μέση τιμή ή η αναμενόμενη τιμή για την κατανομή $\check{R}_{it}$, εάν υποθέσουμε ότι δεσμεύεται για κάποια συγκεκριμένη τιμή R_{mt} της τυχαίας μεταβλητής $\check{R}_{mt}$, θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$E(\check{R}_{it}/ R_{mt}) = \int_{Rit} Rit f(Rit / Rmt) \partial Rit,$$

όπου η μέση τιμή είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα όλων των πιθανών τιμών που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή $\check{R}_{it}$ ή διαφορετικά η απόδοση της μετοχής i του χαρτοφυλακίου μας. Καθώς αναφερόμαστε σε μια δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή $E(\check{R}_{it}/ R_{mt})$, το βάρος που δίνεται σε κάθε δεδομένη τιμή R_{it} της απόδοσης $\check{R}_{it}$ είναι ίσο με τη δεσμευμένη κατανομή $f(R_{it}/ R_{mt})$ αντί για την περιθωριακή κατανομή πυκνότητας $f(R_{it})$, η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό της μη-δεσμευμένης αναμενόμενης μέσης τιμής $E(\check{R}_{it})$.

Καθώς η δεσμευμένη κατανομή πυκνότητας $f(R_{it}/ R_{mt})$ είναι εν γένει διαφορετική για διαφορετικές τιμές της απόδοσης της αγοράς R_{mt}, η δεσμευμένη αναμενόμενη μέση τιμή εξαρτάται από την τιμή της απόδοσης της αγοράς. Επομένως, διαφορετικές αποδόσεις της αγοράς, προσδίδουν επίσης διαφορετικές δεσμευμένες αναμενόμενες αποδόσεις. Εάν η από κοινού κατανομή των $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ ακολουθεί τη διμεταβλητή κανονικότητα, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γενική μορφή που θα προσλάβει η αναμενόμενη δεσμευμένη μέση τιμή και η οποία δίδεται από τον ακόλουθο τύπο

$$E(\check{R}_{it}/ R_{mt}) = a_i + \beta_i R_{mt}, \quad (2)$$

όπου παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη δεσμευμένη μέση τιμή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των a_i και $\beta_i R_{mt}$. Το a_i παριστάνει την τομή

$$a_i = E(\check{R}_{it}) - \beta_i E(\check{R}_{mt}) \quad \text{και} \quad \beta_i = Cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt})/\sigma^2(\check{R}_{mt}). \quad (3)$$

Επιπλέον, εάν η από κοινού κατανομή των $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ είναι διμεταβλητή κανονική τότε και η δεσμευμένη κατανομή της $\check{R}_{it}$ δοθέντος της τιμής της απόδοσης της αγοράς R_{mt} είναι επίσης κανονική. Συνεπώς, η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f(R_{it}/ R_{mt})$ είναι αυτή μιας κανονικής κατανομής, με μέσο και διακύμανση που δίδονται από τους παρακάτω τύπους

$$\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{mt}) = \int_{Rit} [Rit - E(\check{R}it/ R_{mt})]^2 f(R_{it}/ R_{mt}) \partial Rit \ (4)$$

$$\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{mt}) = \sigma^2(\check{R}_{it})\ (1-\rho_{im}^2),\ (5)$$

όπου ρ_{im} εκφράζει το συντελεστή συσχέτισης ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου της «αγοράς» και δίδεται από τον τύπο

$$\rho_{im} = Cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt})/ \sigma(\check{R}_{it})\sigma(\check{R}_{mt}).\ (6)$$

Ο ορισμός (4) τονίζει το γεγονός ότι **η δεσμευμένη διακύμανση** περιλαμβάνει τη στάθμιση των τετραγωνικών αποκλίσεων της απόδοσης της μετοχής i από την αναμενόμενη δεσμευμένη μέση τιμή της απόδοσης της μετοχής i, από τη δεσμευμένη κατανομή πυκνότητας *f(Rit/Rmt)*. Αντίθετα, **η μη-δεσμευμένη διακύμανση** σταθμίζει τις τετραγωνικές αποκλίσεις της απόδοσης της μετοχής i από τη μη-δεσμευμένη αναμενόμενη μέση τιμή της απόδοσης της μετοχής i με την περιθωριακή κατανομή *f(Rit)*. Από την εξίσωση (5) γίνεται φανερό ότι όταν έχουμε διμεταβλητή κανονικότητα, η δεσμευμένη διακύμανση $\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{mt})$ έχει την ίδια τιμή για όλες τις τιμές της απόδοσης της αγοράς R_{mt}. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $\sigma^2(\check{R}_{it})$ *και* ρ_{im} προσλαμβάνουν την ίδια ακριβώς τιμή για κάθε τιμή της απόδοσης της αγοράς.

Καθώς οι δεσμευμένες κατανομές της απόδοσης της μετοχής i είναι κανονικές με διακυμάνσεις ανεξάρτητες της απόδοσης της αγοράς, η απόκλιση της απόδοσης της μετοχής i από τη δεσμευμένη αναμενόμενη μέση τιμή ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση που δίδεται από τη σχέση (5). Επομένως, για οποιαδήποτε και κάθε τιμή της απόδοσης της αγοράς από την τυχαία μεταβλητή $\check{R}_{mt}$, η δεσμευμένη κατανομή της

$$\check{e}_{it} = \check{R}_{it} - (a_i + \beta_i R_{mt}) \ (7)$$

είναι κανονική με μέση τιμή

$$E(\check{e}_{it} / R_{mt}) = E(\check{e}_{it}) = 0 \ (8)$$

και διακύμανση που δίδεται από τον παρακάτω τύπο

$$\sigma^2 (\check{e}_{it} / R_{mt}) = \sigma^2 (\check{R}_{it} / R_{mt}) = \sigma^2 (\check{R}_{it}) (1 - \rho_{im}^2) = \sigma^2 (\check{e}_{it}) \ (9)$$

όπου η απόκλιση $\check{e}_{it}$ έχει την ίδια δεσμευμένη κατανομή για κάθε τιμή της απόδοσης της αγοράς, πράγμα που σημαίνει ότι τα $\check{e}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ είναι ανεξάρτητα.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα αποτελέσματα που έχουμε εξάγει μέχρι στιγμής, πρέπει να επισημάνουμε ορισμένα στοιχεία. Εάν η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς είναι διμεταβλητή κανονική, τότε η σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\check{R}_{it} = a_i + \beta_i \check{R}_{mt} + \check{e}_{it} \ (10)$$

που σημαίνει ότι με τη διμεταβλητή κανονικότητα υπάρχει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στις από κοινού κατανεμημένες μεταβλητές $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$, με συντελεστές τα a_i και β_i. Αυτή η γραμμική σχέση όμως υπόκειται στο κατάλοιπο $\check{e}_{it}$, το οποίο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση που αναφέρθηκε προηγούμενα. Το κατάλοιπο $\check{e}_{it}$ είναι ανεξάρτητο της απόδοσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Β. Πιο επίσημη δικαιολόγηση

Έχοντας ορίσει τη μορφή της σχέσης που υφίσταται ανάμεσα στα $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ και που απορρέει από την διμεταβλητή κανονικότητα, τα επόμενα βήματα που προκύπτουν είναι να ορίσουμε τη σχέση (9) και να ερμηνεύσουμε αναλυτικά το συντελεστή συσχέτισης ρ_{im} ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι η διμεταβλητή κανονικότητα των τυχαίων μεταβλητών των αποδόσεων $\check{R}_{it}$ της μετοχής i και $\check{R}_{mt}$ του χαρτοφυλακίου αγοράς υπονοεί ότι η τυχαία μεταβλητή της απόδοσης της αγοράς $\check{R}_{mt}$ και το κατάλοιπο $\breve{e}_{it}$ στην τελευταία σχέση (10) είναι ανεξάρτητες, πράγμα που με τη σειρά του υπονοεί τη σχέση (9). Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{im}^{2} είναι το ποσοστό του $\sigma^2(\check{R}_{it})$ που αποδίδεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις τυχαίες μεταβλητές των αποδόσεων της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς.

Από τη σχέση (7), μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το κατάλοιπο $\breve{e}_{it}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των τυχαίων μεταβλητών των αποδόσεων της μετοχής i αλλά και του χαρτοφυλακίου αγοράς. Έτσι, εάν η από κοινού κατανομή των αποδόσεων $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ είναι η διμεταβλητή κανονική, τότε η από κοινού κατανομή του κατάλοιπου $\breve{e}_{it}$ με την τυχαία μεταβλητή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς $\check{R}_{mt}$ είναι επίσης διμεταβλητή κανονική. Θα δειχθεί επίσης ότι το κατάλοιπο $\breve{e}_{it}$ και η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς $\check{R}_{mt}$ είναι ανεξάρτητα εάν αποδειχθεί ότι η συνδιακύμανση $cov(\breve{e}_{it}, \check{R}_{mt}) = 0$. Εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (7) προκύπτει ότι

$$cov(\breve{e}_{it}, \check{R}_{mt}) = cov(\check{R}_{it} - a_i - \beta_i \check{R}_{mt}, \check{R}_{mt}) \quad (11)$$

$$= cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt}) - \beta_i \sigma^2(\check{R}_{mt}). \quad (12)$$

$$cov(\breve{e}_{it}, \check{R}_{mt}) = cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt}) - \{ cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt}) / \sigma^2(\check{R}_{mt}) \} \sigma^2(\check{R}_{mt}) = 0. \quad (13)$$

όπου για να εξαχθούν αυτά τα συμπεράσματα γίνεται χρήση τριών στατιστικών γεγονότων:

a) Η συνδιακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής, που στην περίπτωση μας εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς $\check{R}_{mt}$ με έναν γραμμικό συνδυασμό τυχαίων άλλων μεταβλητών (εδώ: $\check{R}_{it} - a_i - \beta_i \check{R}_{mt}$) είναι επίσης ένας γραμμικός συνδυασμός των συνδιακυμάνσεων.

b) Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι η συνδιακύμανση της τυχαίας μεταβλητής της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς με τον εαυτό της θα μας δώσει τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς.

c) Η συνδιακύμανση ανάμεσα σε μία σταθερά και μια τυχαία μεταβλητή ισούται πάντα με το μηδέν.

Δοθέντος της διμεταβλητής κανονικότητας των $\check{e}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$, το γεγονός ότι η συνδιακύμανση τους ισούται με μηδέν υπονοεί ότι αυτές οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Καθώς το κατάλοιπο $\check{e}_{it}$ και η τυχαία μεταβλητή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς είναι **ανεξάρτητες μεταβλητές** τότε παρατηρούμε ότι η κατανομή που ακολουθεί το κατάλοιπο, εάν γνωρίζουμε μια τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς, είναι **η ίδια** για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς.

$$f(\check{e}_{it}/R_{mt})= f(\check{e}_{it})$$

Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή $\check{e}_{it}$ είναι η ίδια για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς $\check{R}_{mt}$,

$$E(\check{e}_{ij}/R_j)= E(\check{e}_j),$$

όπου η τιμή που αναμένεται να πάρει το κατάλοιπο δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή που ενδέχεται να αποκτήσει η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς. Συνεπώς, όποια και εάν είναι αυτή η τιμή, το αποτέλεσμα της αναμενόμενης μέσης τιμής του κατάλοιπου $\check{e}_{it}$ δεν θα επηρεαστεί καθόλου. Επιπλέον, καθώς το κατάλοιπο $\check{e}_{it}$ και η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς $\check{R}_{mt}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έπεται ότι

$$\sigma^2(\check{e}_{it}/R_{mt})=\sigma^2(\check{e}_{it}),$$

όπου η διασπορά του κατάλοιπου $\check{e}_{it}$ από τη μέση τιμή, δεδομένης μιας συγκεκριμένης τιμής R_{mt} της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς δεν εξαρτάται καθόλου από την τελευταία και είναι η ίδια ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη και δεδομένη τιμή. Καθώς επίσης το κατάλοιπο $\check{e}_{it}$ και η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, από τη σχέση (10) εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η απόδοση της μετοχής i για τη χρονική περίοδο t είναι το σταθμικό άθροισμα των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που έχουμε προαναφέρει. Έτσι προκύπτει επίσης ότι

$$\sigma^2(\check{R}_{it})= \beta_i^2\sigma^2(\check{R}_{mt}) + \sigma^2(\check{e}_{it}), \ (14)$$

όπου η απόκλιση της απόδοσης της μετοχής i από την αναμενόμενη μέση τιμή ισούται με το σταθμικό άθροισμα της διακύμανσης της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς και της διακύμανσης του κατάλοιπου $\check{e}_{it}$.

Η εξίσωση (10) εκφράζει την απόδοση της μετοχής i σε όρους απόδοσης του συνολικού χαρτοφυλακίου αγοράς m αλλά και του κατάλοιπου $\check{e}_{it}$. Κατά αναλογία, η διασπορά της απόδοσης της μετοχής i χωρίζεται σε δύο μέρη: στο πρώτο μέρος έχουμε το $\beta_i^2\sigma^2(\check{R}_{mt})$ το οποίο οφείλεται στον όρο $\beta_i\ \check{R}_{mt}$ δηλαδή στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m ενώ το δεύτερο μέρος $\sigma^2(\check{e}_{it})$ οφείλεται στο κατάλοιπο $\check{e}_{it}$.

Για να εξετάσουμε ποιο ποσοστό του $\sigma^2(\check{R}_{it})$ προσδίδεται σε κάθε έναν από τους παραπάνω όρους, θα χρειαστεί να διαιρέσουμε την εξίσωση (14) με τον όρο $\sigma^2(\check{R}_{it})$. Επομένως, προκύπτει

$$1= \beta_i^2\sigma^2(\check{R}_{mt})/\sigma^2(\check{R}_{it}) + \sigma^2(\check{e}_{it})/ \sigma^2(\check{R}_{it}), \ (15)$$

όπου εάν χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς των β_i και ρ_{im} που είχαμε στις εξισώσεις (3) και (6), η σχέση (15) διαμορφώνεται ως εξής:

$$1= \rho^2_{im} + \sigma^2(\check{e}_{it})/ \sigma^2(\check{R}_{it}), \ (16)$$

ή ισοδύναμα

$$\rho^2_{im}= 1- \sigma^2(\check{e}_{it})/ \sigma^2(\check{R}_{it})= [\sigma^2(\check{R}_{it})- \sigma^2(\check{e}_{it})]/ \sigma^2(\check{R}_{it}) \ , \ (17)$$

όπου η ανάπτυξη των σχέσεων από (14) έως (17) μας δηλώνει ότι το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης που υπάρχει ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών i και j , είναι ακριβώς το ποσοστό της διακύμανσης της απόδοσης της μετοχής i που μπορεί να αποδοθεί στον όρο $\beta_i\ \check{R}_{mt}$, ενώ το $1- \rho^2_{im}$ είναι το ποσοστό του $\sigma^2(\check{R}_{it})$ που μπορεί να αποδοθεί στο κατάλοιπο $\check{e}_{it}$ στη σχέση (10). Επίσης, από τη σχέση (10) το $\alpha_i + \beta_i\ \check{R}_{mt}$ είναι η συνιστώσα της απόδοσης της μετοχής i που μπορεί να αποδοθεί στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής i αλλά και του χαρτοφυλακίου αγοράς m, και επίσης το $\check{e}_{it}$ είναι το κατάλοιπο της σχέσης αυτής. Επομένως, το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς ρ^2_{im} ερμηνεύεται ως το ποσοστό της διακύμανσης της απόδοσης της μετοχής i, που αποδίδεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς., ενώ το $1- \rho^2_{im}$ είναι το ποσοστό της διακύμανσης της απόδοσης της μετοχής i που αποδίδεται στο κατάλοιπο $\check{e}_{it}$. Από την σχέση (17) προκύπτει ότι

$$\sigma^2(\check{e}_{it})= \sigma^2(\check{R}_{it})(1- \rho^2_{im}).$$

Τελικά, από τις σχέσεις (3) και (6), είναι προφανές ότι το μέτρο του βαθμού συσχέτισης ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς m τόσο στο συντελεστή κλίσης β_i όσο και στο συντελεστή συσχέτισης ρ_{im} δίδεται από τη συνδιακύμανση που υπάρχει ανάμεσα σε αυτές τις αποδόσεις.

Η κλίση β_i είναι η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και στην απόδοση του χαρτοφυλακίου m, σταθμισμένη από τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m, ενώ ο συντελεστής συσχέτισης ρ_{im} είναι πάλι η συνδιακύμανση της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς, σταθμισμένη αυτή τη φορά από το γινόμενο των διακυμάνσεων της απόδοσης της μετοχής i αλλά και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m. Το πρόσημο και των δύο συντελεστών εξαρτάται από το πρόσημο της συνδιακύμανσης.

C. Ορισμένες επιπλέον ιδιότητες του μοντέλου

Καθώς το ρίσκο του χαρτοφυλακίου αγοράς m όπως μετράται από τη διακύμανση της απόδοσης είναι ο σταθμισμένος μέσος

$$\sigma^2(\check{R}_{mt}) = \sum_{i=1}^{n} xim\ cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt}),\ x_{im}= 1/n,\ i=1,2,...,n \quad (18)$$

είναι κατάλληλο να ερμηνεύσουμε την συνδιακύμανση της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m ως το ρίσκο της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο m. Έτσι, ο συντελεστής κλίσης βi στη σχέση του υποδείγματος της αγοράς μπορεί να ερμηνευτεί ως ο κίνδυνος της μετοχής i που τον μετράει κανείς σε σχέση με τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου αγοράς m. Ισοδύναμα, ο συντελεστής κλίσης είναι ο κίνδυνος της μετοχής i σε σχέση με το μέσο κίνδυνο των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m. Μια τιμή του βi, η οποία είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα υποδεικνύει ότι η μετοχή i έχει κίνδυνο μεγαλύτερο από το μέσο κίνδυνο, ενώ μια τιμή του βi μικρότερη από τη μονάδα υποδεικνύει ότι η μετοχή i έχει κίνδυνο μικρότερο από το μέσο κίνδυνο που παρουσιάζουν οι μετοχές μέσα στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m. Ένα σημαντικό σημείο στη σχέση του υποδείγματος αγοράς που αξίζει να αναφερθεί ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και στην απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς είναι ότι η μέση τιμή του καταλοίπου $\breve{e}_{it}$, όπως υπολογίζεται ανάμεσα στις μετοχές, είναι ταυτοτικά μηδέν. Για να το δούμε αυτό, αρκεί στην σχέση

$$\breve{R}_{mt} = \sum_{i=1}^{n} xim \ \breve{R}_{it} \ (19\ \alpha)$$

να αντικαταστήσουμε την απόδοση της μετοχής i με την αντίστοιχη γραμμική της σχέση $\breve{R}_{it} = a_i + \beta_i \breve{R}_{mt} + \breve{e}_{it}$. Συνεπώς, η σχέση (19 α) γίνεται

$$\breve{R}_{mt} = \sum_{i=1}^{n} xim \ (a_i + \beta_i \breve{R}_{mt} + \breve{e}_{it}) \ (19\ \beta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} xim \ a_i + \sum_{i=1}^{n} xim \ \beta_i \breve{R}_{mt} + \sum_{i=1}^{n} xim \ \breve{e}_{it} \ (19\ \gamma)$$

$$= \breve{R}_{mt} + \sum_{i=1}^{n} xim \ \breve{e}_{it} \ (19\ \delta)$$

πράγμα που δηλώνει ότι $\sum_{i=1}^{n} xim \ \breve{e}_{it} = 0$.

Άρα, στις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις αποδόσεις των μεμονωμένων μετοχών και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m, όπως αυτές καθορίζονται από τις εξισώσεις (3) και (10), υπάρχουν αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα κατάλοιπα $\breve{e}_{it}$ των διαφορετικών μετοχών που εξασφαλίζουν ότι ο σταθμικός μέσος των $\breve{e}_{it}$ είναι πάντα μηδέν.

Ολοκληρώνοντας, εάν η από κοινού κατανομή των αποδόσεων των μετοχών $\breve{R}_{1t}, \breve{R}_{2t}, \ldots, \breve{R}_{nt}$ είναι πολυμεταβλητή κανονική, τότε η από κοινού κατανομή σε δύο οποιαδήποτε χαρτοφυλάκια είναι διμεταβλητή κανονική. Προκύπτει ότι το υπόδειγμα αγοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην απόδοση οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου p και στην απόδοση ενός χαρτοφυλακίου αγοράς m. Επαναλαμβάνοντας τη σχέση (3),

$$\check{R}_{pt} = \alpha_p + \beta_p \check{R}_{mt} + \check{e}_{pt}$$

όπου

$$\beta_p = Cov(\check{R}_{pt}, \check{R}_{mt})/\sigma^2(\check{R}_{mt}) \text{ και } \alpha_p = E(\check{R}_{pt}) - \beta_p E(\check{R}_{mt}).$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ανάλογες με τις αρχικές, με τη μόνη διαφορά ότι αντί για την απόδοση μιας συγκεκριμένης μετοχής i έχουμε την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου πλέον p.

D. Το Υπόδειγμα της Αγοράς στην εμπειρική λογοτεχνία

Το υπόδειγμα της αγοράς παίζει έναν σημαντικό ρόλο στην εμπειρική λογοτεχνία των χρηματοοικονομικών. Στην ανάλυσή μας, το μοντέλο εμφανίζεται σαν μια επιπλοκή της υπόθεσης ενός διπαραμετρικού μοντέλου χαρτοφυλακίου όπου η από κοινού κατανομή των αποδόσεων των μετοχών ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Επιπλέον, μπορούμε να προσθέσουμε εδώ ότι υπάρχουν πολλά αξιόλογα στατιστικά μοντέλα (ένα για κάθε πιθανή επιλογή του χαρτοφυλακίου p) που περιγράφουν τη στατιστική σχέση που υφίσταται ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και στην απόδοση του χαρτοφυλακίου p, που είναι παρόμοια σε μορφή με αυτήν του υποδείγματος της αγοράς.

Στην εμπειρική λογοτεχνία, όμως, το υπόδειγμα της αγοράς ερμηνεύεται περισσότερο από ότι μια απλή στατιστική περιγραφή της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στις διμεταβλητές κανονικές τυχαίες μεταβλητές και είναι αυτή η ιδιαίτερη ερμηνεία που κάνει το υπόδειγμα της αγοράς ξεχωριστό. Η απόδοση στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς θεωρείται ότι αιχμαλωτίζει τις συνέπειες μεταβλητών που επηρεάζουν τις αποδόσεις όλων των μετοχών ή σχεδόν όλων των μετοχών. Το κατάλοιπο $\check{e}_{it}$ υποθέτουμε ότι αιχμαλωτίζει τις συνέπειες μεταβλητών, που έχουν να κάνουν περισσότερο με τη μετοχή i. Από αυτή την οπτική γωνία, ένα είδος αιτίας προτείνεται που δεν υπονοήθηκε νωρίτερα από την καθαρά στατιστική ανάλυση. Ένα μέρος της απόδοσης της μετοχής i και πιο συγκεκριμένα το $\beta_i \check{R}_{mt}$ θεωρούμε ότι προκαλείται από κοινές μεταβλητές για όλη την αγορά. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης ρ^2_{im} μετράει το ποσοστό της διακύμανσης της απόδοσης της μετοχής i που ερμηνεύεται από κοινούς παράγοντες της αγοράς. Ο όρος $\beta_i^2 \sigma^2(\check{R}_{mt})$ στη σχέση (14) είναι η συνιστώσα του $\sigma^2(\check{R}_{it})$ που αποδίδεται σε παράγοντες κοινούς για όλη την αγορά, ενώ το $\sigma^2(\check{e}_{it})$ παριστάνει τη διακύμανση της απόδοσης της μετοχής i που οφείλεται σε μεταβλητές που αναφέρονται στη μετοχή i. Ο συντελεστής β_i, που προηγούμενα ερμηνεύσαμε ως τον κίνδυνο της μετοχής i στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m, ερμηνεύεται τώρα ως ευαισθησία της αγοράς m στην απόδοση της μετοχής i. Επομένως, το β_i περιγράφει την ευαισθησία της απόδοσης της μετοχής i σε παράγοντες που επηρεάζουν όλη την αγορά. Μια τιμή β_i μεγαλύτερη από τη μονάδα υπονοεί μια μετοχή που έχει μεγαλύτερη ευαισθησία από την αγορά και επίσης μεγαλύτερο ρίσκο μέσα στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m, ενώ μια τιμή β_i μικρότερη από τη μονάδα υπονοεί μια μετοχή με μικρότερη ευαισθησία από την αγορά και χαμηλότερο ρίσκο από το ρίσκο του χαρτοφυλακίου αγοράς m.

Στη χρηματοοικονομική λογοτεχνία, το β_i καλείται συστηματικός κίνδυνος και το $\sigma^2(\check{e}_{it})$ καλείται μη συστηματικός κίνδυνος της μετοχής i. Η «ιδέα» είναι ότι καθώς το $\sum_{i=1}^{n} xim\ \check{e}_{it} = 0$, η ενόχληση $\check{e}_{it}$ διαφοροποιείται μέσα στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m, και το β_i αιχμαλωτίζει ολοκληρωτικά τη συνεισφορά της μετοχής i στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου αγοράς m.

Οι εκτιμητές

Συζητώντας σχετικά με το υπόδειγμα της αγοράς, υποθέσαμε ότι οι παράμετροι-μέσοι όροι, διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις- της από κοινού κατανομής της απόδοσης της μετοχής i, $\check{R}_{it}$ και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m, $\check{R}_{mt}$ είναι γνωστές. Αυτό όμως δεν ισχύει πάντα. Η επόμενη διαδικασία είναι να θεωρήσουμε, από μια θεωρητική οπτική γωνία, την εκτίμηση του υποδείγματος αγοράς.

Α. Η γενικότητα των διαδικασιών

Εάν η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m είναι διμεταβλητή κανονική, τότε, όπως προαναφέρθηκε η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή της απόδοσης της μετοχής i είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m, με παραμέτρους α_i και β_i. Επομένως, η τιμή που αναμένεται να αποκτήσει η απόδοση της μετοχής i εξαρτάται γραμμικά από την απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς. Επιπλέον, η διμεταβλητή κανονική κατανομή της απόδοσης της i μετοχής και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς υπονοεί ότι η κατανομή του κατάλοιπου $\check{e}_{it}$ είναι κανονική και το κατάλοιπο έχει τις ιδιότητες που περιγράψαμε προηγούμενα στις εξισώσεις (8), (9) και (13). Συνοπτικά, μπορούμε να πούμε ότι η κατανομή του καταλοίπου δεν εξαρτάται από την απόδοση που ενδέχεται να αποκτήσει το χαρτοφυλάκιο αγοράς. Οι ιδιότητες των διαδικασιών που απαιτούνται, προκειμένου να εκτιμήσουμε τα α_i και β_i προκύπτουν από την κανονική κατανομή του καταλοίπου και από τις ιδιότητές του, όπως αυτές περιγράφονται από τις εξισώσεις (8), (9) και (13).

Αυτές οι συνθήκες του καταλοίπου είναι ότι χρειάζεται κανείς για να καθορίσει τις ιδιότητες των διαδικασιών εκτίμησης. Επομένως, αντί κάποιος να υποθέσει ότι η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m είναι διμεταβλητή κανονική, μπορεί άμεσα να υποθέσει ότι η αναμενόμενη μέση τιμή της απόδοσης της μετοχής i είναι η γραμμική συνάρτηση που περιγράφεται από τη σχέση (2)· τότε η εξίσωση (8) είναι άμεση συνέπεια. Εάν οι συντελεστές στην εξίσωση (2) είναι όπως έχουν οριστεί προηγούμενα και πιο συγκεκριμένα στην (3), τότε η εξίσωση (13) είναι άμεση συνέπεια. Εάν η διακύμανση της δεσμευμένης κατανομής της απόδοσης της i μετοχής δεν εξαρτάται από την απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς m τότε η εξίσωση (9) είναι άμεση συνέπεια. Εάν επίσης υποθέσουμε ότι η κατανομή του καταλοίπου $\check{e}_{it}$ είναι κανονική, τότε όλες οι συνθήκες που απαιτούνται για τις εκτιμητικές διαδικασίες θα ισχύουν. Ισοδύναμα, οι ιδιότητες των εκτιμητικών διαδικασιών μπορούν να βασιστούν στις υποθέσεις ότι η δεσμευμένη κατανομή της απόδοσης της μετοχής i δοθέντος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m είναι κανονική, με μέσο που δίδεται από την εξίσωση (2) και διακύμανση ανεξάρτητη από την απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς. Πρέπει να επισημάνουμε ότι αυτές οι υποθέσεις, οι σχετικές με τη δεσμευμένη κατανομή είναι λιγότερο περιοριστικές από την μεμονωμένη υπόθεση ότι η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m ακολουθεί τη διμεταβλητή κανονική κατανομή. Για παράδειγμα, οι υποθέσεις που έχουν να κάνουν με την κατανομή της απόδοσης της μετοχής i δοθέντος της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m δεν αναφέρουν τίποτα για την κατανομή που ακολουθεί η απόδοση του χαρτοφυλακίου m. Αντίθετα, με τη διμεταβλητή κανονικότητα, η κατανομή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m είναι κανονική.

Β. Η εκτιμητική διαδικασία

Στην θεωρητική παρουσίαση του υποδείγματος της αγοράς, παραλείπουμε σκόπιμα τον δείκτη του χρόνου t που ενδέχεται να εμφανιστεί στις παραμέτρους α_i και β_i καθώς και ρ_{im}. Όταν πρόκειται να εκτιμήσει κανείς όμως το υπόδειγμα, αυτή η απλούστευση είναι πολύ πιο σημαντική. Η εκτίμηση πρέπει να βασιστεί σε χρονολογικές σειρές ή διαφορετικά σε διαδοχικά ζευγάρια τιμών της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς. Εάν δεν χρησιμοποιηθούν προχωρημένες στατιστικές μέθοδοι, πρέπει να υποθέσουμε ότι όλες οι ιδιότητες που υφίστανται ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m είναι προσεγγιστικά στάσιμες ή συνεχείς και συνεπώς ανεξάρτητες από το χρόνο t. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η από κοινού διμεταβλητή κανονική κατανομή των $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$ είναι συνεχής ή στάσιμη κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου. Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι της από κοινού κατανομής $E(\check{R}_{it})$, $E(\check{R}_{mt})$, $\sigma^2(\check{R}_{it})$, $\sigma^2(\check{R}_{mt})$ και $cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt})$ και οποιεσδήποτε παράμετροι παράγονται από αυτές όπως τα α_i και β_i, δεν αλλάζουν επίσης κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου.

Ας θεωρήσουμε ένα υποθετικό δείγμα T διαδοχικών μηνών, t = 1, 2, …, T των ζευγών των μηνιαίων αποδόσεων της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m. Υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές μηνιαίες αποδόσεις είναι στατιστικά ανεξάρτητες, έτσι ώστε το δείγμα είναι ένα τυχαίο δείγμα από τη διμεταβλητή κανονική κατανομή των $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$. Πώς θα μπορούσε ένα τέτοιο δείγμα να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε τους συντελεστές του υποδείγματος αγοράς α_i και β_i ; Μια διαδικασία που μπορεί να ακολουθηθεί είναι να βάλουμε τους δειγματικούς εκτιμητές των $E(\check{R}_{it})$, $E(\check{R}_{mt})$, $\sigma^2(\check{R}_{it})$, $\sigma^2(\check{R}_{mt})$ και $cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt})$ στη σχέση (3). Μπορούμε να εκτιμήσουμε τα $E(\check{R}_{it})$, $E(\check{R}_{mt})$, $\sigma^2(\check{R}_{mt})$ ως εξής:

$$\tilde{A}_i = \{\sum_{t=1}^{n} \check{R}_{it}\}/T \quad (23)$$

$$\tilde{A}_m = = \{\sum_{t=1}^{n} \check{R}_{mt}\}/T \quad (23)$$

$$Και\ s^2(\check{R}_m) = \{\sum_{t=1}^{n} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)^2\}/(T-1). \quad (24)$$

Όπου οι παραπάνω σχέσεις καθορίζουν μεθόδους ή διαδικασίες για να εκτιμήσουμε τα $E(\check{R}_{it})$, $E(\check{R}_{mt})$, $\sigma^2(\check{R}_{mt})$ από υποθετικά τυχαία δείγματα μεγέθους Τ. Στο συγκεκριμένο σημείο δεν έχουμε υπόψη ένα συγκεκριμένο δείγμα Τ παρατηρήσεων. Εφόσον η απόδοση της μετοχής i και η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς m είναι τυχαίες μεταβλητές, οι τιμές $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_m$, $s^2(\check{R}_m)$ που έχουν παραχθεί από αυτές τις μεθόδους θα είναι επίσης τυχαίες μεταβλητές. Οι μέθοδοι ή οι διαδικασίες για να εκτιμήσουμε παραμέτρους αποκαλούνται εκτιμητές. Η τιμή ενός εκτιμητή σε ένα συγκεκριμένο δείγμα καλείται εκτίμηση. Ένας εκτιμητής ορίζει μια τυχαία μεταβλητή· έτσι, έχει μια κατανομή πιθανότητας κατά αντιστοιχία που καλείται δειγματική κατανομή. Μια εκτίμηση είναι συνεπώς μια επιλογή από μια δειγματική κατανομή.

Σε απόλυτη αναλογία με τον εκτιμητή του $\sigma^2(\check{R}_{mt})$ που δίνεται από την εξίσωση (24), ένας εκτιμητής της συνδιακύμανσης $cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{mt})$ = σ_{im} ορίζεται ως εξής:

$$\hat{s}_{im} = \{\sum_{t=1}^{n} (\check{R}_{it} - \tilde{A}_i)(\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)\}/(T-1). \quad (25)$$

Ο εκτιμητής της σχέσης (25) εκτιμά αυτή την αναμενόμενη τιμή ενός γινομένου τυχαίων μεταβλητών από τη μέση τιμή του γινομένου μέσα στο δείγμα. Ακριβώς όπως συμβαίνει και στην περίπτωση της δειγματικής διακύμανσης το $\hat{s}_{im}$ δεν αποτελεί ακριβώς το μέσο όρο των δειγματικών γινομένων καθώς το άθροισμα των γινομένων διαιρείται με Τ-1 αντί για Τ. Η διαίρεση με Τ-1 εξασφαλίζει αμεροληψία. Με τις εξισώσεις (23) έως (25) ορίζουμε εκτιμητές για τα βi και αi που εμφανίζονται στην εξίσωση (3). Οι εκτιμητές είναι οι εξής:

$$\beta i` = \hat{s}_{im} / s^2(\check{R}_m)\ (26)\quad \kappa\alpha\iota\ \breve{a}i = \tilde{A}_i - \beta i`\tilde{A}_m\ (27)$$

Ένας εκτιμητής του $\check{e}_{it}$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\check{e}_{it} = \check{R}_{it} - (\breve{a}i + \beta i`\check{R}_{mt})\ (28)$$

Ένας τέτοιος εκτιμητής αποκαλείται κατάλοιπο. Η εκτιμώμενη μορφή του υποδείγματος αγοράς είναι η ακόλουθη:

$$\check{R}_{it} = \breve{a}i + \beta i`\check{R}_{mt} + \check{e}_{it},\ t=1,2,3,\ldots,T\ (29)$$

Στη στατιστική λογοτεχνία, η εξίσωση (2) για τη δεσμευμένη μέση τιμή της εκτιμημένης απόδοσης της μετοχής i ως συνάρτηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου αγοράς m (R_{mt}), ονομάζεται συνάρτηση παλινδρόμησης της απόδοσης της μετοχής i στην απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς m. Οι συντελεστές αi και βi καλούνται συντελεστές παλινδρόμησης. Συνεπώς, τα *βi`* και *ăi* που ορίσαμε προηγούμενα ονομάζονται εκτιμητές των συντελεστών παλινδρόμησης, και

$$\tilde{A}_{it} = \breve{a}i + \beta i`R_{mt}\ (30)$$

η οποία είναι η εκτιμημένη συνάρτηση παλινδρόμησης. Στο σημείο αυτό πρέπει να παραθέσουμε δύο σημαντικά σχόλια.

Πρώτον, πρέπει να προσέξει κανείς ότι οι συντελεστές παλινδρόμησης βi και αi όπως ορίζονται στην εξίσωση (3) δεν είναι τίποτα άλλο παρά σταθερές ενώ οι εκτιμητές *ăi* και *βi`*, που μόλις ορίσαμε στις εξισώσεις (26) και (27) είναι τυχαίες μεταβλητές. Εφόσον μιλάμε για ένα υποθετικό δείγμα αγνώστων τιμών για τις αποδόσεις της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς m, οι τιμές των εκτιμητών *ăi* και *βi`*, δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων και καθορίζονται όπως είναι αναμενόμενο από κατανομές πιθανοτήτων. Σκοπός του υπόλοιπου κεφαλαίου είναι να περιγράψουμε τις ιδιότητες της δειγματικής κατανομής των *ăi* και *βi`*. Όταν έχουμε ένα συγκεκριμένο δείγμα γνωστών τιμών των αποδόσεων της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς m, μεταφερόμαστε από τους εκτιμητές στις εκτιμήσεις.

Δεύτερον, καθώς οι *ăi* και *βi`* είναι οι εκτιμητές των αi και βi, τα κατάλοιπα $\check{e}_{it}$ που παρατηρούνται σε ένα δείγμα είναι οι εκτιμητές των ενοχλήσεων $\check{e}_{it}$. Καθώς όμως κανείς δεν μπορεί να παρατηρήσει τους πραγματικούς συντελεστές αi και βi στην εξίσωση (10), δεν μπορεί να παρατηρήσει ισοδύναμα και τις ενοχλήσεις. Αυτό που παρατηρούμε τελικά είναι τις αποδόσεις της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς m, αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο τις εκτιμήσεις των συντελεστών παλινδρόμησης και των ενοχλήσεων παλινδρόμησης.

Γ. Ορισμένες ιδιότητες των εκτιμητών

Η εκτιμημένη μορφή του υποδείγματος αγοράς έχει πολλές ιδιότητες οι οποίες είναι σε αναλογία με τις ιδιότητες του πραγματικού υποδείγματος αγοράς. Έτσι, γνωρίζουμε από την εξίσωση (2) ότι,

$$E(\check{R}_{it}) = a_i + \beta_i E(\check{R}_{mt}) .$$

Όμοια, από την εξίσωση (27) γνωρίζουμε ότι

$$\check{A}_i = \check{a}i + \beta i`\check{A}_m (31).$$

Εν συντομία, όπως ακριβώς η συνάρτηση παλινδρόμησης $E(\check{R}_{it}/ R_{mt})$ της εξίσωσης (2) περνάει από το σημείο που αντιστοιχεί στις αναμενόμενες τιμές της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m, έτσι και η εκτιμημένη συνάρτηση παλινδρόμησης της εξίσωσης (30) περνάει από το σημείο που αντιστοιχεί στους δειγματικούς μέσους των αποδόσεων της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς m. Επίσης από την εξίσωση (31) προκύπτει ότι

$$\sum_{t=1}^{n} \check{e}_{it} = 0, (32)$$

που είναι κατά κάποιο τρόπο ανάλογο με την συνθήκη ότι η αναμενόμενη μέση τιμή της ενόχλησης $\check{e}_{it}$ στην εξίσωση του υποδείγματος αγοράς όπως εκφράζεται στην εξίσωση (10) είναι πάντα μηδέν. Η εκτιμημένη μορφή του υποδείγματος της αγοράς έχει τρεις επιπλέον ιδιότητες, παράλληλες με εκείνες του υποδείγματος αγοράς. Έτσι, η συνθήκη $cov(\check{e}_{it}, \check{R}_{mt})= 0$, επίσης ισχύει για τη δειγματική διακύμανση ανάμεσα στην απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς m και το κατάλοιπο $\check{e}_{it}$:

$$s(\check{R}_m, \check{e}_i) = [\sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)\, \check{e}_{it}] / (T-1) = 0 \quad (33)$$

και από την εξίσωση (33) προκύπτει

$$\sum_{t=1}^{n} (\check{R}_{it} - \tilde{A}_i)^2 = \beta i^{\cdot 2} \sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)^2 + \sum_{t=1}^{T} \check{e}_{it}^{\,2}, \quad (34)$$

που είναι παράλληλο με τη συνθήκη του υποδείγματος της αγοράς (14). Με λίγα λόγια ακριβώς όπως η διακύμανση του πληθυσμού της απόδοσης της μετοχής i μπορεί να διαιρεθεί σε έναν παράγοντα $\beta_i^2 \sigma^2(\check{R}_{mt})$, που αποδίδεται στη γραμμική σχέση του υποδείγματος αγοράς που υπάρχει ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου αγοράς m και σε έναν δεύτερο παράγοντα, $\sigma^2(\check{e}_{it})$, που αποδίδεται στην τυχαία ενόχληση $\check{e}_{it}$, έτσι και κατά αναλογία, το δειγματικό άθροισμα των τετραγώνων $\sum_{t=1}^{n} (\check{R}_{it} - \tilde{A}_i)^2$ μπορεί να χωριστεί σε ένα άθροισμα τετραγώνων $\beta i^{\cdot 2} \sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)^2$, που αποδίδεται στην εκτιμημένη πλέον σχέση του υποδείγματος αγοράς και σε ένα άθροισμα τετραγωνικών καταλοίπων $\sum_{t=1}^{T} \check{e}_{it}^{\,2}$. Τελικά, η σχέση (34) υπονοεί ότι το τετράγωνο του δειγματικού συντελεστή συσχέτισης $\check{r}^2_{im}$, όπου

$$\check{r}_{im} = \check{s}_{im} / \{s(\check{R}_m)\, s(\check{R}_i)\}, \quad (35)$$

είναι το ποσοστό του αθροίσματος των τετραγώνων $\sum_{t=1}^{n} (\check{R}_{it} - \check{R}i)^2$, που αποδίδεται στην προσαρμοσμένη γραμμική σχέση, που παρουσιάζουμε παρακάτω

$$\check{r}^2_{im} = \{\beta^2 i^{\cdot} \sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)^2\} / \sum_{t=1}^{n} (\check{R}_{it} - \tilde{A}_i)^2.$$

Δ. Οι δειγματικές κατανομές των εκτιμητών

Οι συντελεστές των εκτιμητών *ăi* και *βi`* είναι τυχαίες μεταβλητές. Η επόμενη διαδικασία είναι να συζητήσουμε την πιθανότητα ή τις δειγματικές κατανομές αυτών των εκτιμητών.

1. *Αμεροληψία*

Το *βi`* γράφεται ως εξής

$$\beta i` = \{\sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)\, \check{R}_{it}\} / \{\sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)^2\} \ (37)$$

Εάν επιπλέον, αντικαταστήσουμε την εξίσωση του υποδείγματος αγοράς (10) στην εξίσωση αυτή τότε προκύπτει

$$\beta i` = \beta i + \{\sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)\, \check{e}_{it}\} / \{\sum_{t=1}^{T} (\check{R}_{mt} - \tilde{A}_m)^2\} \ (38).$$

Ο εκτιμητής *βi`* είναι μια τυχαία μεταβλητή γιατί σε ένα υποθετικό δείγμα οι τιμές της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m είναι με τη σειρά τους τυχαίες μεταβλητές. Από την εξίσωση (38) διαπιστώνουμε όμως ότι ο εκτιμητής *βi`* είναι μια τυχαία μεταβλητή επειδή ακριβώς οι δειγματικές τιμές της απόδοσης χαρτοφυλακίου m και οι ενοχλήσεις $\check{e}_{it}$ του υποδείγματος αγοράς είναι τυχαίες μεταβλητές. Η εξίσωση (38) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\beta i` = \beta i + \{\sum_{t=1}^{T} (R_{mt} - \acute{R}_m)\, \check{e}_{it}\} / \{\sum_{t=1}^{T} (R_{mt} - \acute{R}_m)^2\} \ (39)$$

Παρατηρούμε ότι παρόλο που οι τιμές R_{m1}, R_{m2},..., R_{mt} είναι καθορισμένες, ο εκτιμητής *βi`* είναι ακόμη μια τυχαία μεταβλητή καθώς οι ενοχλήσεις $\check{e}_{it}$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Υπάρχει παρόλα αυτά μια πιο σχετική ερμηνεία της δεσμευμένης κατανομής του *βi`*. Παρόλο που το δειγματικό σενάριο εμπεριέχει τυχαίες επιλογές από την από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης του χαρτοφυλακίου m, όταν ένα δείγμα επιλέγεται, η αβεβαιότητα στον εκτιμητή του βi

2. Οι t κατανομές των τυποποιημένων εκτιμητών

Το επόμενο βήμα είναι να συζητήσουμε τις ιδιότητες κατανομής που χαρακτηρίζουν τα *ăi* και *βi`*. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα και μετά θα προχωρήσουμε στην αιτιολόγησή τους.

Τα τυπικά λάθη των συντελεστών εκτίμησης

Όταν οι εκτιμητές *ăi* και *βi`* βασίζονται σε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους T από την υποτιθέμενη στάσιμη διμεταβλητή κανονική κατανομή των $\check{R}_{it}$ και $\check{R}_{mt}$, τότε οι τυπικές αποκλίσεις των δεσμευμένων κατανομών των εκτιμητών των a_i και b_i, δοθέντος των αποδόσεων $R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}$ δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

$$\sigma^2\,(\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) = \sigma^2\,(\breve{e}_{it}) \Big/ \sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \acute{R}m)^2 \quad (44)$$

$$\sigma^2\,(\breve{a}i / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) = \sigma^2\,(\breve{e}_{it})\,\{\frac{1}{T} + \acute{R}m^2 \Big/ \sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \acute{R}m)^2\} \quad (45).$$

Οι δεσμευμένες διακυμάνσεις των *ăi* και *βi`* περιλαμβάνουν μια άγνωστη παράμετρο τη $\sigma^2\,(e_{it})$, που είναι η διακύμανση του καταλοίπου του υποδείγματος της αγοράς. Ο αμερόληπτος εκτιμητής του $\sigma^2\,(e_{it})$ δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$s^2\,(\breve{e}_{it}) = \{\sum_{t=1}^{T} \breve{e}_{it}^{\,2}\} / (T-2) \quad (46)$$

Για να πάρουμε τους εκτιμητές των δεσμευμένων διακυμάνσεων των *ăi* και *βi`*, αντικαθιστούμε το $s^2\,(\breve{e}_{it})$ στις προηγούμενες σχέσεις (44) και (45):

$$s^2\,(\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) = s^2\,(\breve{e}_{i}) \Big/ \sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \acute{R}m)^2 \quad (47)$$

$$s^2 (\breve{a}i / R_{m1}, R_{m2}, ..., R_{Mt}) = s^2 (\breve{e}_i) \{ \frac{1}{T} + \acute{R}m^2 / \sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \acute{R}m)^2 \} \quad (48)$$

Οι δεσμευμένες τυπικές αποκλίσεις των *ăi* και *βi`*, οι τετραγωνικές ρίζες των διακυμάνσεων όπως αυτές περιγράφονται από τις εξισώσεις (44) και (45), αποκαλούνται τυπικά τυπικά λάθη των συντελεστών παλινδρόμησης των εκτιμητών *ăi* και *βi`*; οι εκτιμητές αυτών των τυπικών αποκλίσεων, οι τετραγωνικές ρίζες των διακυμάνσεων όπως αυτές παριστάνονται από τις εξισώσεις (47) και (48) είναι οι εκτιμητές αυτών των τυπικών λαθών. Η ιδέα είναι ότι η διαφορά *βi`- βi* ή *ăi- ai* είναι το λάθος στον εκτιμητή του συντελεστή παλινδρόμησης, έτσι η τυπική απόκλιση του λάθους καλείται τυπική απόκλιση του εκτιμητή. Όμοια, η τυπική απόκλιση των καταλοίπων του υποδείγματος της αγοράς, $s^2 (\breve{e}_i)$ καλείται το δειγματικό τυπικό λάθος των καταλοίπων, ενώ το $\sigma^2 (\breve{e}_{it})$ είναι το τυπικό λάθος των ενοχλήσεων. Η ιδέα και πάλι είναι ότι η ενόχληση $\breve{e}_{it}$ είναι το «λάθος» της συνάρτησης παλινδρόμησης; είναι η απόκλιση της απόδοσης της μετοχής i $\check{R}_{it}$ από τη δεσμευμένη αναμενόμενη μέση τιμή $E(\check{R}_{it} / R_{mt})$ και το κατάλοιπο $\breve{e}_{it}$ είναι το λάθος στην εκτιμημένη συνάρτηση παλινδρόμησης.

Το κύριο αποτέλεσμα

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$t' = (\beta i` - \beta i) / \{ s (\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, ..., R_{Mt}) \} \quad (49)$$

$$t' = (\breve{a}i - ai) / \{ s (\breve{a}i / R_{m1}, R_{m2}, ..., R_{Mt}) \} \quad (50)$$

Η *t'* τυχαία μεταβλητή της εξίσωσης (49) μπορεί να ερμηνευθεί σαν μια τυποποιημένη έκδοση του *βi`* όταν κάποιος αφαιρεί το *βi* από το *βi`* και στη συνέχεια διαιρεί αυτή τη διαφορά με τον εκτιμητή της δεσμευμένης τυπικής απόκλισης του *βi`*. Κατά ανάλογο τρόπο, ερμηνεύεται και η εξίσωση (50). Όταν οι εκτιμητές *βi`* και *ăi* βασίζονται σε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους T από την <u>υποτιθέμενη διμεταβλητή κανονική κατανομή</u> των αποδόσεων της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m, που θεωρείται <u>στάσιμη</u> κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου, τότε οι t τυχαίες μεταβλητές των εξισώσεων αυτών ακολουθούν την κατανομή t με T-2 βαθμούς ελευθερίας.

Η t κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν και μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από τη γνώση της μιας και μόνο παραμέτρου, που είναι οι βαθμοί ελευθερίας της. Οι βαθμοί ελευθερίας αυτής της παραμέτρου μπορούν να πάρουν μια οποιαδήποτε θετική τιμή. Η t κατανομή για άπειρους βαθμούς ελευθερίας είναι η μοναδιαία κανονική κατανομή με μέσο 0 και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα. Οι μη κανονικές t κατανομές είναι thick-tailed σε σχέση με τη μοναδιαία κανονική κατανομή; που σημαίνει ότι μια μη κανονική t κατανομή προσδίδει μεγαλύτερες πιθανότητες σε ακραίες παρατηρήσεις και όσο πιο λίγους βαθμούς ελευθερίας έχουμε, τόσο πιο thick-tailed γίνονται οι βαθμοί ελευθερίας. Η t κατανομή προσεγγίζει τη μοναδιαία κανονική κατανομή όταν οι βαθμοί ελευθερίας είναι περισσότεροι από 30. Πολύ σπάνια δουλεύουμε με λιγότερες από T = 60 παρατηρήσεις.

3. Γιατί η t κατανομή;

Στις δεσμευμένες κατανομές των *βi`* και *ăi*, οι δειγματικές τιμές της απόδοσης της αγοράς παίρνονται όπως ακριβώς δίδονται; δηλαδή χρησιμοποιούνται σαν σταθερές. Οι εκτιμημένοι συντελεστές είναι τυχαίες μεταβλητές γιατί οι ενοχλήσεις $\breve{e}_{i1}$, $\breve{e}_{i2}$, ..., $\breve{e}_{iT}$ είναι τυχαίες μεταβλητές. Με την τυχαία δειγματοληψία από την υποτιθέμενη στάσιμη διμεταβλητή κανονική κατανομή των αποδόσεων της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m, οι τιμές $\breve{e}_{iT}$ είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένες κανονικές μεταβλητές. Ένα σταθμισμένο άθροισμα ή ένας γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών αποτελεί το ίδιο μια κανονική κατανομή. Τα *βi`* και *ăi*, δοθέντος των $R_{m1}$, $R_{m2}$, ..., $R_{Mt}$ είναι σταθμισμένα αθροίσματα των $\breve{e}_{it}$. Επομένως, οι δεσμευμένες κατανομές των *βi`* και *ăi* είναι κανονικές με δεσμευμένους μέσους βi και αi και δεσμευμένες διακυμάνσεις που δίδονται από τις σχέσεις (44) και (45). Προκύπτει ότι

$$(\beta i` - \beta i) / \{ \sigma (\bar{e}_i) / (\sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \acute{R}m)^2 \}^{1/2}$$

και (51)

$$(\breve{a}i - ai) / \{ \sigma (\breve{e}_i) (\frac{1}{T} + \acute{R}^2 m / (\sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \acute{R}m)^2 \}^{1/2}$$

έχουν μοναδιαίες κανονικές κατανομές. Αυτό συμβαίνει όταν βγάζουμε τη διαφορά ανάμεσα σε μια κανονική τυχαία μεταβλητή και το μέσο της και διαιρούμε τη διαφορά αυτή με την τυπική απόκλιση της μεταβλητής. Η μεταβλητή που προκύπτει έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση που ισούται με τη μονάδα.

Είναι ενδιαφέρον και σημαντικό το στατιστικό γεγονός ότι όταν τυχαίες κανονικές μεταβλητές μετασχηματίζονται σε μοναδιαίες κανονικές τυχαίες μεταβλητές, τότε ακριβώς ο ίδιος μετασχηματισμός αλλά με την τυπική απόκλιση του πληθυσμού στον παρανομαστή να αντικαθίσταται από τη δειγματική τυπική απόκλιση δίνει μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια t κατανομή.

Δύο σημεία πρέπει να τονιστούν εδώ:

Πρώτον, οι ιδιότητες των δεσμευμένων κατανομών των *βi`* και *ăi* δεν απαιτούν κάποιο συγκεκριμένο συνδυασμό των R_{m1}, R_{m2}, ..., R_{Mt} καθώς το αποτέλεσμα εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε συνδυασμό των R_{m1}, R_{m2}, ..., R_{Mt}.

Δεύτερον, οι ιδιότητες των δεσμευμένων κατανομών των *βi`* και *ăi* υπονοούνται από την υπόθεση ότι υπάρχει μια τυχαία επιλογή από τη διμεταβλητή κανονική κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m, που είναι στάσιμη κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου. Αλλά όλες αυτές οι ιδιότητες κατανομής ισχύουν εάν (a) η συνάρτηση παλινδρόμησης $E(\check{R}_{it}/ R_{mt})$είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της εξίσωσης (2) που έχει ως συντελεστές παλινδρόμησης τα αi και βi, που θεωρούνται σταθερά κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου; (b) η κατανομή της ενόχλησης $\breve{e}_{it}$ είναι όμοια στάσιμη; (c) υπάρχει μια τυχαία επιλογή από την κατανομή της $\breve{e}_{it}$ και (d) η κατανομή του στοχαστικού όρου είναι κανονική. Υιοθετώντας απλά και μόνο τις υποθέσεις (a) έως (c) γίνεται φανερό ότι τα *βi`* και *ăi* είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των συντελεστών της παλινδρόμησης βi και αi, με δεσμευμένες διακυμάνσεις που αναφέραμε προηγούμενα. Η κανονικότητα των ενοχλήσεων τότε παράγει το αποτέλεσμα ότι οι *t'* τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν την t κατανομή με T-2 βαθμούς ελευθερίας.

Ε. Η αξιοπιστία των εκτιμητών

Σε μια εφαρμογή του υποδείγματος της αγοράς, ένα δείγμα των τιμών της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m είναι διαθέσιμο; οι εκτιμημένοι συντελεστές παλινδρόμησης βi και αi υπολογίζονται, όπως επίσης τα δειγματικά τυπικά λάθη s $(\beta i/ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})$ και s $(ai / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το δείγμα

$$t = (bi - \beta i)/\{s\,(bi/ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})\}$$

και

$$t = (ai - \alpha i)/\{s\,(ai/ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})\}$$

είναι επιλογές από την κατανομή t με Τ-2 βαθμούς ελευθερίας. Η ανάλυση των δειγματικών κατανομών των εκτιμητών των *βi`* και *ăi* μας δίνει τα μέσα να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία των εκτιμητών και αυτό είναι πάντα σημαντικό στις εφαρμογές.

Υπάρχουν δύο επίσημες προσεγγίσεις, η «κλασική» και η «Bayesian». Και στις δύο αυτές προσεγγίσεις αυτό που καθορίζει την αξιοπιστία είναι το μέγεθος των δεσμευμένων διακυμάνσεων των εκτιμημένων συντελεστών παλινδρόμησης. Οι διακυμάνσεις των εκτιμητών εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από τη δύναμη της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m, όπως αυτή μετριέται από τη διακύμανση της ενόχλησης $\sigma^2\ (\breve{e}_{it})$; όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή $\sigma^2\ (\breve{e}_{it})$, τόσο πιο μεγάλες θα είναι οι δεσμευμένες διακυμάνσεις των εκτιμητών. Επιπλέον, οι διακυμάνσεις των εκτιμητών εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος; όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του δείγματος Τ τόσο πιο μικρές θα είναι οι δεσμευμένες διακυμάνσεις.

Παρόλο που δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα για να μικρύνουμε το μέγεθος του $\sigma^2\ (\breve{e}_{it})$, φαίνεται ότι οι διακυμάνσεις των εκτιμημένων συντελεστών μπορούν να γίνουν όσο πιο μικρές θέλουμε εάν επιλέξουμε πολύ μεγάλα μεγέθη δείγματος. Υπάρχουν όμως και σε αυτή την περίπτωση δύο προβλήματα που πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα. Πρώτον, η χρονική περίοδος για την οποία έχουμε δείγματα της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m μπορεί να είναι περιορισμένη. Δεύτερον, οι ιδιότητες των εκτιμητών εξαρτώνται από την υπόθεση η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m είναι στάσιμη κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου. Αυτή η υπόθεση μπορεί να είναι αποδεκτή για «λογικές» χρονικές περιόδους αλλά δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή για απεριόριστη περίοδο. Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις, την κλασική και την Bayesian, για να εκτιμήσουμε τελικά την αξιοπιστία των εκτιμημένων πλέον συντελεστών παλινδρόμησης.

1. Κλασικά διαστήματα εμπιστοσύνης

Εάν υπάρχει μια τυχαία επιλογή από την από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m, η οποία είναι διμεταβλητή κανονική και στάσιμη κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου, τότε η t' τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την t κατανομή με T-2 βαθμούς ελευθερίας. Υποθέτουμε ότι το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο-μεγαλύτερο από 40, έτσι ώστε η t κατανομή με T-2 βαθμούς ελευθερίας προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την μοναδιαία κανονική κατανομή.

Γνωρίζουμε ότι

$$Pr\ [t' = (\beta i` - \beta i) / \{ s\ (\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) \} > 1.96\ ] = 0.025\ (53)$$

Εάν πάρουμε ένα δείγμα από τη διμεταβλητή κανονική κατανομή της απόδοσης της μετοχής i και της απόδοσης της αγοράς m, τότε η πιθανότητα το δείγμα να δώσει μια τιμή του t' μεγαλύτερη από 1.96 είναι 0.025. Κατά αντιστοιχία, συμπεραίνουμε ότι σε επαναλαμβανόμενα δείγματα μεγέθους T, μπορούμε να αναμένουμε τιμές του t' ίσες ή μικρότερες του 1.96 στο 97.5 τα εκατό των δειγμάτων. Η πιθανότητα που μόλις παρουσιάσαμε μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$Pr\ [\beta i` - 1.96\ s\ (\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) < \beta i] = 0.025\ (54)$$

Συνεπώς, σε ένα υποθετικό δείγμα μπορούμε να υπολογίσουμε το σημείο που βρίσκεται κατά $1.96\ s\ (\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})$ αριστερά του $\beta i`$, δηλαδή την πιθανότητα η τιμή του σημείου αυτού να είναι μεγαλύτερη του $\beta i`$ είναι 0.025.

Από τη συμμετρία που παρουσιάζει η κανονική κατανομή, εάν $t_{.975} = 1.96$, τότε $t_{.025} = -1.96$. Άρα,

$$Pr\ [t' = (\beta i` - \beta i) / \{ s\ (\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) \} < -1.96] = 0.025\ (55)$$

$$Pr\ [\beta i` + 1.96\ s\ (\beta i` / R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) < \beta i] = 0.025\ (56)$$

Σε επαναλαμβανόμενα δείγματα αναμένουμε οι δειγματικές τιμές του διαστήματος εμπιστοσύνης να περιλαμβάνουν το βi στο 95 τα εκατό των περιπτώσεων. Το διάστημα εμπιστοσύνης $[\beta i` - 1.96\ s\ (\beta i`/\ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})]$ έως $[\beta i` + 1.96\ s\ (\beta i`/\ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})]$ είναι το το κατά 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το βi. Τέτοια διαστήματα εμπιστοσύνης αποτελούν ένα τρόπο για να κρίνει κανείς την αξιοπιστία του εκτιμητή βi και συνήθως είναι ο συνήθης τρόπος που χρησιμοποιείται στην κλασική προσέγγιση στην στατιστική. Καθώς τα $\beta i`$ και $s\ (\beta i`/\ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})$ είναι τυχαίες μεταβλητές, το διάστημα εμπιστοσύνης που ορίζεται θα αποτελεί και αυτό μια τυχαία μεταβλητή.

Ο Eugene Fama στο βιβλίο "Foundations Of Finance" βρήκε ότι για την πενταετή περίοδο από τον Ιούλιο του 1963 έως τον Ιούνιο του 1968, οι μηνιαίες αποδόσεις σε μια κοινή μετοχή της IBM και στο ισοδύναμα σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο του NYSE παράγουν τις εκτιμήσεις $b_i = 0.67$ και $s\ (\beta i/\ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) = 0.13$ για την IBM. Επομένως, η δειγματική τιμή του 0.95 διαστήματος εμπιστοσύνης για το βi για την IBM είναι $\beta i` - 1.96\ s\ (\beta i`/\ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt}) = 0.42$ έως $0.92 = \beta i` + 1.96\ s\ (\beta i`/\ R_{m1}, R_{m2}, \ldots, R_{Mt})$. Θα θέλαμε να μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η πιθανότητα το βi να είναι μέσα σε αυτό το διάστημα είναι 95% αλλά το βi είτε βρίσκεται μέσα σε αυτό το διάστημα είτε όχι. Η θεωρία της κλασικής προσέγγισης των διαστημάτων εμπιστοσύνης μας επιτρέπει μόνο να πούμε ότι το δειγματικό διάστημα είναι μια επιλογή από την κατανομή του .95 διαστήματος εμπιστοσύνης για την IBM και ότι, σε επαναλαμβανόμενα δείγματα, το 95% τέτοιων διαστημάτων εμπιστοσύνης μπορούμε να αναμένουμε να περιλαμβάνει αυτή την πραγματική τιμή της παραμέτρου μας. Δεν υπάρχει καμιά μαγεία στα .95 διαστήματα εμπιστοσύνης. Η επιλογή του βαθμού εμπιστοσύνης είναι τυχαία και εάν τα διαστήματα εμπιστοσύνης πρέπει να χρησιμοποιηθούν είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν αρκετά από αυτά.

2. Κλασικό Hypothesis Testing

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εξετάσουμε την περίπτωση για την IBM, όπου $\beta i = 1$. Έτσι, η υπόθεση είναι ότι ο κίνδυνος της μετοχής της IBM στο χαρτοφυλάκιο αγοράς m, που είναι το ισοδύναμα σταθμισμένο χαρτοφυλάκιο αγοράς των μετοχών του NYSE ισούται με το μέσο κίνδυνο των μετοχών στο χαρτοφυλάκιο m. Για να εξετάσουμε όμως αυτή την περίπτωση πρέπει να υιοθετήσουμε μια εναλλακτική υπόθεση. Μια απλή εναλλακτική υπόθεση είναι η $\beta i<>1$.

Το επόμενο βήμα περιλαμβάνει να προσδιορίσουμε τι είδος δειγματικού αποτελέσματος θα μας έκανε να απορρίψουμε την υπόθεση $\beta i=1$, η οποία καλείται μηδενική υπόθεση, για χάρη της εναλλακτικής υπόθεσης $\beta i<>1$. Πρέπει να επιλέξουμε τι πιθανότητα είμαστε διατεθειμένοι να πάρουμε προκειμένου να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση όταν αυτή είναι πραγματική. Για παράδειγμα, εάν αποφασίσουμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση $\beta i=1$ εάν η δειγματική τιμή του t' προκύψει μικρότερη από –1.96 ή μεγαλύτερη από 1.96, τότε είμαστε διατεθειμένοι να πάρουμε ένα 5% ρίσκο να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση όταν αυτή είναι πραγματική. Πράγμα που σημαίνει ότι όταν ακόμα η μηδενική υπόθεση $\beta i=1$ είναι πραγματική, υπάρχει πάντα μια 5% πιθανότητα το δείγμα να δώσει μια τιμή για το t' που είναι είτε μικρότερη από –1.96 είτε μεγαλύτερη από 1.96.

Κεφάλαιο 4
Εμπειρικά Αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε διεξοδικά τις σπουδαιότερες μελέτες που έχουν γίνει και αφορούν στο υπόδειγμα της αγοράς. Παραθέτουμε τους συγγραφείς που έχουν ασχοληθεί με το υπόδειγμα της αγοράς, τη μεθοδολογία που χρησιμοποίησαν, τα δεδομένα, το σκοπό της έρευνάς τους καθώς επίσης και τα τελικά αποτελέσματά που έλαβαν. Επίσης, στο τέλος του κεφαλαίου αυτού παρατίθεται συγκεντρωτικός συνοπτικός πίνακας αυτών των μελετών που αναπτύσσουμε διεξοδικά κατωτέρω.

Κυριότερες μελέτες

Οι **R. Richardson Pettit και Randolph Westerfield (1974)** εξετάζουν δύο ευρέως χρησιμοποιούμενες μεθόδους για τον προσδιορισμό δεσμευμένων προβλεπόμενων αποδόσεων χαρτοφυλακίων. Η πρώτη μέθοδος βασίζεται στη θεωρία μέσης τιμής-διακύμανσης της αναμενόμενης απόδοσης ισορροπίας για μια χρονική περίοδο, που ονομάζεται CAPM. Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην πρόταση του Markowitz και καλείται το Υπόδειγμα της Αγοράς.

Το Υπόδειγμα της Αγοράς φέρει στενή ομοιότητα με την ex post έκδοση του CAPM. Τόσο το πρώτο όσο και το δεύτερο επιδεικνύουν μια γραμμική σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις των μεμονωμένων αξιόγραφων και στις αποδόσεις πάνω σε ένα χαρτοφυλάκιο όλων των αξιόγραφων.

Η δημιουργία δεσμευμένων προβλέψεων χρησιμοποιώντας ένα από αυτά τα υποδείγματα διεξάγεται σε σχεδόν κάθε διαχείριση της επενδυτικής απόδοσης όπου δεσμευμένες προβλέψεις είναι απαραίτητες. Αυτά τα υποδείγματα σύμφωνα με τους συγγραφείς του συγκεκριμένου άρθρου έχουν κερδίσει καθολική αποδοχή. Για παράδειγμα, μια κοινή χρήση είναι να προσαρμόζονται σε επιδράσεις της αγοράς στον προσδιορισμό ασυνήθιστων αποδόσεων αξιόγραφων, που απορρέουν από ένα γεγονός που παράγει πληροφόρηση- ένα μέρισμα ή μια ανακοίνωση κερδών. Επιπρόσθετα, μεγάλα χρηματοοικονομικά ιδρύματα συστήνουν κοινές μετοχές με τους υψηλότερους ή χαμηλότερους beta συντελεστές βάσει των υψηλότερων ή χαμηλότερων αποδόσεων της αγοράς που έχουν προβλεφθεί.

Πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά άρθρα, συμπεριλαμβανομένων των Friend and Blume, Black, Jensen and Scholes, Miller and Scholes, Blume and Friend έχουν διαπιστώσει σημαντικές αδυναμίες στην ικανότητα του CAPM να εξηγήσει τη δομή των πραγματικών αποδόσεων των μετοχών. Επίσης, η εργασία του King και Brennan σηματοδοτεί σοβαρές αδυναμίες στο Υπόδειγμα της Αγοράς, παρόλο που η ανάλυση του Blume υποστηρίζει την εμπειρική εγκυρότητα του Υποδείγματος της Αγοράς. Καμία όμως από αυτές τις μελέτες δεν παρέχει ανάλυση, η οποία να αμφισβητεί ευθέως τις ιδιότητες του μοντέλου να προβλέπει τις δεσμευμένες αποδόσεις των μετοχών.

Οι συγγραφείς του συγκεκριμένου άρθρου εξετάζουν τη γενική αξιοπιστία χρήσης του υποδείγματος της αγοράς και του CAPM να προβλέπουν τις δεσμευμένες αναμενόμενες αποδόσεις των αξιόγραφων. Ένα προφανές κριτήριο που χρησιμοποιούν για να ελέγξουν τη δεσμευμένη προβλεπτική ικανότητα τόσο του Υποδείγματος της Αγοράς όσο και του ex post CAPM είναι να καθορίσουν εάν οι πραγματικές αποδόσεις είναι προσεγγιστικά ίσες με τις δεσμευμένες προβλεπόμενες αποδόσεις για έναν μεγάλο αριθμό αξιόγραφων. Ένα test που εφαρμόζουν, χρησιμοποιώντας το CAPM, είναι να παλινδρομήσουν τις πραγματικές αποδόσεις στις δεσμευμένες προβλεπόμενες αποδόσεις. Τελικά, η αξιοπιστία του CAPM είναι συνεπής με τους συντελεστές $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$. Όμως, η αμερόληπτη εκτίμηση των συντελεστών παλινδρόμησης απαιτεί ότι δεν έχουν συντελεστεί λάθη μέτρησης στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Για να αναπτύξουν συνεπείς OLS εκτιμητές, ήταν απαραίτητο να βασιστούν στην ιδιότητα ότι ένα όριο πιθανότητας υπάρχει για το β'_i ίσο με το β_i. Όμως, αυτή η διαδικασία εισάγει μια επιπλέον μεροληψία που τείνει να είναι θετική για χαρτοφυλάκια υψηλού beta και αρνητική για χαρτοφυλάκια χαμηλού beta. Στο άρθρο αυτό πραγματοποιείται μια σύγκριση χρησιμοποιώντας τόσο το Υπόδειγμα της Αγοράς όσο και το CAPM για να σχηματίσουν τις δεσμευμένες αναμενόμενες αποδόσεις προκειμένου να εξεταστεί η εμπειρική αξιοπιστία του ενός σε σχέση με το άλλο.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν περιείχαν τις μηνιαίες επενδυτικές αποδόσεις για όλες τις μετοχές που ήταν καταγεγραμμένες στο New York Stock Exchange κατά την περίοδο από τον Ιανουάριο του 1926 έως τον Ιούνιο του 1968. Οι συντελεστές του Υποδείγματος της Αγοράς εκτιμήθηκαν για το κάθε αξιόγραφο για κάθε περίοδο παλινδρομώντας τις επενδυτικές αποδόσεις βάσει του Fisher's Combination Investment Performance Index. Ως επιτόκιο μηδενικού κινδύνου χρησιμοποιήθηκε, όπου ήταν απαραίτητο, η απόδοση στα Treasury Bills με ένα μήνα για λήξη. Μια μετοχή για να περιληφθεί έπρεπε να έχει τουλάχιστον 60 μηνιαίες παρατηρήσεις ώστε να γίνει εκτίμηση των συντελεστών του Υποδείγματος. Οι εταιρίες, συνεπώς, που επιλέχθηκαν χωρίστηκαν σε χαρτοφυλάκια των ενός, είκοσι και σαράντα εταιριών. Οι πραγματικές δεσμευμένες αποδόσεις γίνονται για την περίοδο από τον Ιούλιο του 1961 έως τον Ιούλιο του 1968 με βάση τους συντελεστές που εκτιμήθηκαν για την περίοδο του Ιουλίου του 1954 έως τον Ιούνιο του 1961 και στη συνέχεια, συγκρίνονται με τις αντίστοιχες πραγματικές αποδόσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παλινδρόμησης.

Το υπόδειγμα της cross-sectional παλινδρόμησης που χρησιμοποιήθηκε για κάθε μήνα τόσο για το Υπόδειγμα της Αγοράς όσο και για το ex post CAPM είναι το ακόλουθο

$$R_{P,T+t} = \bar{a}_{0t} + \breve{a}_{1t}\, \check{E}[\, R_{P,T+t} / R_{M,T+t}\, ,\, \beta'_p\, ,\, R_{F,T+t}\,] + \sigma_{P,T+t},\ t = 0,1,2,\ldots,83$$

Η ικανότητα τόσο του Υποδείγματος της Αγοράς όσο και του ex post CAPM να παράγουν ακριβείς δεσμευμένες προβλέψεις εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το εάν η απόδοση της αγοράς είναι σε σημαντικό βαθμό διαφορετική από την απόδοση μηδενικού κινδύνου σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνάς τους. Επιπλέον, διαπίστωσαν ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά ανάμεσα στην απόδοση της αγοράς και στην απόδοση μηδενικού κινδύνου, τόσο μεγαλύτερη είναι και η διαφορά ανάμεσα στις δεσμευμένες αποδόσεις μεταξύ χαρτοφυλακίων υψηλού και χαμηλού beta.

Υπάρχουν τρία σημαντικά συμπεράσματα, τα οποία εξήγαγαν από την έρευνά τους. Πρώτον, δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά in goodness of fit ανάμεσα στο σχηματισμό δεσμευμένων προβλέψεων υποθέτοντας είτε την αξιοπιστία του Υποδείγματος της Αγοράς είτε το ex post CAPM. Δεύτερον, σε αυτές τις περιόδους όπου η απόδοση της αγοράς διέφερε σημαντικά από την απόδοση μηδενικού κινδύνου, η κλίση της cross-sectional παλινδρόμησης των πραγματικών αποδόσεων χαρτοφυλακίου στις αποδόσεις χαρτοφυλακίου όπως προσδιορίστηκαν τόσο από το Υπόδειγμα της Αγοράς όσο και από το CAPM κατά μέσο όρο ήταν αισθητά μικρότερη από την υποτιθέμενη τιμή. Αυτό το γεγονός υποδεικνύει ότι σε περιόδους όπου η απόδοση της αγοράς είναι χαμηλότερη από την απόδοση μηδενικού κινδύνου, οι δεσμευμένες προβλέψεις τόσο του Υποδείγματος της Αγοράς όσο και του CAPM τείνουν να υποτιμούν τις αποδόσεις σε χαρτοφυλάκια υψηλού beta. Ακριβώς η αντίθετη τάση επικρατεί όταν η απόδοση στο χαρτοφυλάκιο της Αγοράς υπερβαίνει την απόδοση μηδενικού κινδύνου. Τρίτον, υπήρχε ένας μεγάλος αριθμός περιπτώσεων όπου η εκτιμώμενη τιμή του a_1 ήταν αρνητική ή αισθητά μεγαλύτερη από 2. Οι εκτιμήσεις δεν είναι επαρκώς στάσιμες από cross section σε cross section. Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν μια σοβαρή παραβίαση στην ικανότητα του Υποδείγματος της Αγοράς και του ex post CAPM να παράγουν έγκυρες δεσμευμένες προβλεπόμενες αποδόσεις.

Οι **R. Richardson Pettit και Randolph Westerfield (1974)** συμπεραίνουν ότι το Υπόδειγμα της Αγοράς και το CAPM υπόκεινται σε μεροληψία προσδιορισμού παραλειπομένων μεταβλητών και επιπλέον, ότι οι όροι ενόχλησης ανάμεσα στα χαρτοφυλάκια δεν είναι ανεξάρτητοι.

Το άρθρο αυτό αναπτύσσει στατιστικές μεθόδους με σκοπό να αξιολογήσει την εγκυρότητα του ex post CAPM και του Υποδείγματος της Αγοράς ως στάσιμες, στοχαστικές διαδικασίες παραγωγής των αποδόσεων των μετοχών. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού ανέπτυξαν cross-sectional παλινδρομήσεις των πραγματικών αποδόσεων των αξιόγραφων πάνω στις δεσμευμένες προβλεπόμενες τιμές τους. Οι δεσμευμένες προβλεπόμενες τιμές κατασκευάστηκαν κάτω από την υπόθεση της εγκυρότητας του Υποδείγματος της Αγοράς και του CAPM. Εφάρμοσαν μια τεχνική, η οποία ελαχιστοποιεί μια μεροληψία τάξης και η οποία προκαλεί διαδοχικές εκτιμήσεις του beta να παλινδρομούν προς την μονάδα.

Τα κύρια συμπεράσματα της έρευνας τους συνοψίζονται στα ακόλουθα:

1. Οι προβλέψεις από το ex post CAPM και το Υπόδειγμα της Αγοράς περιλαμβάνουν μια μεροληψία προς το μηδέν στις εκτιμήσεις των πραγματικών αποδόσεων των χαρτοφυλακίων των κοινών μετοχών σε διαδοχικές περιόδους μεγαλύτερες του ενός μηνός. Συνεπώς, χαρτοφυλάκια υψηλού ρίσκου αποδίδουν καλύτερα από το αναμενόμενο όταν η απόδοση της αγοράς είναι χαμηλότερη από την απόδοση μηδενικού κινδύνου και χειρότερα από το αναμενόμενο όταν η απόδοση της αγοράς είναι υψηλότερη από την απόδοση μηδενικού κινδύνου. Το αντίθετο συμβαίνει για χαρτοφυλάκια χαμηλού κινδύνου.

2. Οι δεσμευμένες προβλέψεις του Υποδείγματος της Αγοράς και του CAPM παρέχουν μη στάσιμες, μεροληπτικές εκτιμήσεις των πραγματικών αποδόσεων. Η σχέση ανάμεσα στις προβλεπόμενες αποδόσεις χαρτοφυλακίου και ανάμεσα στις πραγματικές αποδόσεις διαφοροποιείται από δειγματική σε δειγματική περίοδο. Αυτές οι μη στασιμότητες στις εκτιμήσεις υποδεικνύουν μια παραβίαση της διαγώνιας υπόθεσης του Υποδείγματος της Αγοράς και του CAPM. Υπέθεσαν ότι ένα σημαντικό μέρος της μη στασιμότητας στις εκτιμήσεις εντοπίζεται σε μη μηδενικές πραγματοποιούμενες τιμές επιπλέον παραγόντων της αγοράς. Πιο συγκεκριμένα, οι αποδείξεις τους είναι συνεπείς με ένα δι-μεταβλητό υπόδειγμα.
3. Το Υπόδειγμα της Αγοράς δεν προσαρμόζεται ικανοποιητικά για επιδράσεις της αγοράς στην αξιολόγηση της απόδοσης των αξιόγραφων. Οι δείκτες, οι οποίοι βασίζονται στην εγκυρότητα του Υποδείγματος της Αγοράς παρουσιάζουν σημαντική μεροληψία που φαίνεται να είναι συνάρτηση του επιπέδου κινδύνου του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου που είναι προς εξέταση.

Ο **Menachem Brenner (1974)** διαπίστωσε ότι ο δείκτης αγοράς δεν ακολουθεί μια στάσιμη σταθερή διαδικασία στην οποία όλες οι παράμετροι είναι σταθερές. Η απαραίτητη συνθήκη “identically” για μια συμμετρική σταθερή κατανομή αναφέρεται στον χαρακτηριστικό εκθέτη α. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό από την χαρακτηριστική λογαριθμική συνάρτηση. Εάν τα X_1, X_2, …, X_n ακολουθούν μια συμμετρική σταθερή κατανομή, η οποία παριστάνεται από το $\log \varphi_j(t) = i\, \delta_j\, t - |\, \sigma_j\, t\, |^{\alpha}$, τότε η κατανομή της $Sn = \sum_{j=1}^{n} Xj$ θα παριστάνεται ως εξής:

$$\Sigma \log \varphi_j(t) = i\,(\,\Sigma\, \delta_j\,)\, t - (\,\Sigma\, \sigma_j\,)\,|\, t\,|^{\alpha}$$

Ενώ ο χαρακτηριστικός εκθέτης α πρέπει να είναι ο ίδιος για όλα τα Xj, οι παράμετροι δ και σ (location και scale αντίστοιχα) μπορούν να διαφέρουν. Ο Menachem Brenner (1974) για να εξετάσει την κατανομή της απόδοσης της αγοράς M χρησιμοποιεί έναν δείκτη που είναι υψηλά συσχετισμένος με την αγορά και αυτός είναι στη συγκεκριμένη μελέτη ο Standard and Poor’s (S&P) 500 σύνθετος δείκτης. Ο δείκτης αυτός χρησιμοποιείται για μια περίοδο 12 χιλιάδων εμπορεύσιμων ημερών κατά τη διάρκεια της περιόδου από τον Μάρτιο του 1928 έως τον Αύγουστο του

1971. Για την ακρίβεια επιστρατεύτηκαν οι λογαριθμικές τιμές του δείκτη. Ο δείκτης ακολουθεί μια μη στάσιμη διαδικασία, η οποία δεν μπορεί να καθοριστεί ακόμη και όταν η περίοδος που μελετάται σπάσει σε υποπεριόδους. Ο Brenner (1974) δεν μπορεί να προσδιορίσει την τιμή του α που βρίσκεται κάτω από αυτά τα δεδομένα. Κατά τον Brenner (1974), συνεπώς, ισχυρίζεται ότι το «μείγμα» των σταθερών κατανομών παράγει το «μείγμα» των κανονικών κατανομών ως την πιο αποδεκτή υπόθεση. Όμως, κάνει λόγο και για πιθανές άλλες εξηγήσεις όπως η μη ομοιογένεια κατά μήκος των αξιόγραφων.

Οι **Gerald A. Pogue και Bruno H. Solnik (1974)** παρουσιάζουν τα αποτελέσματα ορισμένων αρχικών tests του υποδείγματος της αγοράς για ένα αντιπροσωπευτικό τμήμα ευρωπαϊκών κοινών μετοχών. Η βάση δεδομένων τους αποτελείται από καθημερινές τιμές και δεδομένα μερισμάτων για 229 μετοχές από επτά ευρωπαϊκές χώρες. Επιπλέον, για λόγους σύγκρισης συμπεριέλαβαν ένα δείγμα 65 αμερικανικών αξιόγραφων.

Υπέθεσαν ότι το υπόδειγμα της αγοράς είναι μια στοχαστική διαδικασία παραγωγής των αποδόσεων των αξιόγραφων και συνακόλουθα, χρησιμοποίησαν ανάλυση παλινδρόμησης για να εκτιμήσουν τις παραμέτρους του υποδείγματος για διάφορα διαστήματα μέτρησης των αποδόσεων και διάφορες περιόδους ελέγχου. Η ανάλυση τους επικεντρώνεται σε μετρήσεις του σχετικού συστηματικού κινδύνου (beta), τη διακύμανση που εξηγείται από τις κινήσεις της αγοράς (R^2), την επιπλέον απόδοση (α), και την στατιστική σημαντικότητα της επιπλέον απόδοσης (T- alpha). Οι εκτιμημένες παράμετροι ελέγχθηκαν για την ευρωστία τους όσον αφορά στις αλλαγές στα διαστήματα μέτρησης και την σταθερότητά τους κατά μήκος του χρόνου.

Η βάση δεδομένων αποτελείται από ημερήσιες τιμές και δεδομένα μερίσματος για 229 κοινές μετοχές επτά ευρωπαϊκών χωρών. Η χρονική περίοδος που καλύπτεται είναι από τον Μάρτιο του 1966 έως τον Μάρτιο του 1971. Χρησιμοποιήθηκε επιπρόσθετα ένα δείγμα 65 αμερικανικών μετοχών για λόγους σύγκρισης. Τα αμερικανικά δεδομένα κάλυψαν την ίδια ακριβώς περίοδο και ελήφθησαν από το Standard and Poor's I.S.L. tape των αξιόγραφων του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης.

Συμπερασματικά, οι Gerald A. Pogue και Bruno H. Solnik (1974) διαπίστωσαν ότι τα μέσα μηνιαία betas υπερκέρασαν τα μέσα ημερήσια betas και στις οκτώ χώρες.

Τα ποσοστά κυμαίνονται από 1.08 για τις Ηνωμένες Πολιτείες έως 3.2 για το Βέλγιο. Έτσι, τα lags για την προσαρμογή της τιμής που χρησιμοποιήθηκαν εμφανίζονται λιγότερα σημαντικά για την αμερικανική αγορά. Συνολικά, οι τέσσερις κύριες ευρωπαϊκές αγορές είχαν χαμηλότερα ποσοστά από ότι οι τρεις μικρότερες αγορές, γεγονός που υποδηλώνει μια μικρότερη προσαρμογή για τις μεγαλύτερες αγορές. Σε μια αποτελεσματική αγορά το beta δεν είναι ευαίσθητο στο μέγεθος του διαστήματος που χρησιμοποιείται. Απεναντίας, στην προκειμένη περίπτωση οι Gerald A. Pogue και Bruno H. Solnik (1974) διαπιστώνουν ότι το beta μεταβάλλεται σε σχέση με το μέγεθος του διαστήματος.

Στη συνέχεια, εξετάζουν το βαθμό κατά τον οποίο τα μέτρα του συνολικού και του συστηματικού κινδύνου είναι προβλέψιμα. Εάν τα αξιόγραφα μπορούν να τιμολογηθούν σωστά, οι επενδυτές πρέπει να είναι ικανοί να προβλέψουν τον μελλοντικό κίνδυνο. Η ανάλυση συσχέτισης των υποπεριόδων που διεξήγαγαν φωτίζει αυτό το θέμα. Τόσο οι τυπικές αποκλίσεις όσο και οι τιμές των beta είναι προβλέψιμές τόσο στην ευρωπαϊκή αγορά όσο και στην αμερικανική.

Κάτω από τις υποθέσεις του CAPM που εφαρμόζονται σε κάθε αγορά, οι μέσες τιμές του alpha για κάθε χώρα πρέπει να έχουν μηδενικό μέσο όρο και να είναι ασυσχέτιστες κατά μήκος του χρόνου. Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν τα παραπάνω με πιθανή εξαίρεση τη Μεγάλη Βρετανία, όπου υπάρχει κάποια ένδειξη για σημαντική συσχέτιση κατά περιόδους. Όμοια, τα t-statistics για τα alpha πρέπει να είναι ασυσχέτιστα ανάμεσα στις υποπεριόδους. Αυτή η υπόθεση επίσης ισχύει με μόνες εξαιρέσεις την Μεγάλη Βρετανία και την Ιταλία. Σε αυτές τις χώρες θα ήταν πιθανό να κερδίσει κανείς αποδόσεις στις υποπεριόδους σχετικές με το CAPM επίπεδο επιλέγοντας μετοχές με σημαντικές t-alpha τιμές για την πρώτη περίοδο.

Συνολικά, τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας δεν δείχνουν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις Ηνωμένες Πολιτείες και στις κύριες ευρωπαϊκές αγορές. Ορισμένες περιπτώσεις των μικρότερων αγορών μπορούν να θεωρηθούν λιγότερο αποτελεσματικές. Προσθέτουν ότι τα αποτελέσματα αυτά πρέπει να εξεταστούν περαιτέρω καθώς χρησιμοποιήθηκε μόνο μια περίοδος πέντε ετών και προεπιλεγμένα δείγματα αξιόγραφων.

Οι **John D. Martin και Robert C. Klemkosky (1975)** παρουσιάζουν μια στατιστική ανάλυση της υπόθεσης της ομοσκεδαστικότητας. Η τελευταία, παρόλο που είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επιτυχή εφαρμογή του υποδείγματος της αγοράς δεν είχε μελετηθεί επαρκώς μέχρι εκείνη την περίοδο.

Εάν οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων του υποδείγματος της αγοράς χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση χαρτοφυλακίου, πρέπει να υποτεθεί ότι ο όρος ε_{it} ικανοποιεί τις συνήθεις υποθέσεις του γραμμικού υποδείγματος παλινδρόμησης. Συνεπώς, Ε $(\varepsilon_{it}) = 0$ για κάθε t, η συνδιακύμανση $[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it+\kappa}] = 0$ για κάθε κ <>0 και η κατανομή του όρου ε_{it} είναι ανεξάρτητη για κάθε απόδοση της αγοράς. Αυτή η τελευταία υπόθεση είναι που ενσαρκώνει το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας, η οποία συμβαίνει όταν η διακύμανση του όρου του καταλοίπου εξαρτάται από την απόδοση της αγοράς ή από τον χρόνο. Η ετεροσκεδαστικότητα μπορεί να εξηγήσει μερικώς την προφανή αστάθεια των μεμονωμένων betas για διαδοχικές χρονικές περιόδους.

Οι John D. Martin και Robert C. Klemkosky (1975) αποπειράθηκαν να γενικεύσουν τα tests χρησιμοποιώντας ένα εκτεταμένο δείγμα κοινών μετοχών. Το δείγμα αυτό παριστάνει μια ευρεία τάξη κοινών μετοχών και επιπλέον tests τα οποία θεωρούνται πιο ευαίσθητα στην ανίχνευση της ετεροσκεδαστικότητας από μια εικονική εξέταση ορισμένων διαγραμμάτων του υποδείγματος της αγοράς.

Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε απαρτίζεται από 355 κοινές μετοχές των χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης. Οι μηνιαίες αποδόσεις υπολογίστηκαν για μια περίοδο 112 μηνών από τον Απρίλιο του 1964 έως τον Ιούλιο του 1973 χρησιμοποιώντας πρώτες διαφορές στους φυσικούς λογαρίθμους των αλλαγών των τιμών, που είναι

$$R_{it} = ln\ (P_{it}) - ln\ [P_{i\,(t-1)}],$$

όπου P_{it} είναι η τιμή της μετοχής i για το μήνα t και $P_{i\,(t-1)}$ είναι η αντίστοιχη τιμή για τον προηγούμενο μήνα. Οι λογαριθμικές τιμές χρησιμοποιήθηκαν για να μετρήσουν τις αποδόσεις των αξιόγραφων και της αγοράς διότι αυτός ο σχηματισμός προσεγγίζει το ρυθμό απόδοσης κάτω από συνεχές compounding και βελτιώνει την κανονικότητα της δειγματικής κατανομής.

Το πρώτο test που διεξήγαγαν για την ανίχνευση ετεροσκεδαστικότητας αποτελείται από τον υπολογισμό των συσχετίσεων (rank correlations) που υπάρχουν ανάμεσα στις απόλυτες τιμές των καταλοίπων του υποδείγματος της αγοράς και στις αντίστοιχες τιμές των αποδόσεων της αγοράς για καθεμιά από τις 355 μετοχές. Σημαντική θετική (αρνητική) συσχέτιση αποδεικνύει μια τάση για μεγάλο (μικρό) ε_{it}

να συσχετίζεται με μεγάλο R_{mt}. Ένα πιο ακριβές test για ετεροσκεδαστικότητα είναι το Bartlett test όπου τα δεδομένα του δείγματος περιλαμβάνουν πολλαπλές παρατηρήσεις του ε_{it} κάθε απόδοση της αγοράς. Επειδή όμως τα στοιχεία δεν επαρκούσαν, το συγκεκριμένο test χρησιμοποιείται σαν μια προσέγγιση για ετεροσκεδαστικότητα με τυχαία επιλογή υποδειγμάτων του ε_{it} σε όρους εύρους των τιμών της απόδοσης της αγοράς. Ένας κύριος περιορισμός της χρήσης του Bartlett test είναι ότι αυτό το test επιλέγει μεταβολή στην απόδοση της αγοράς m όπως επίσης μεταβολή στον όρο ε_{it}. Μεμονωμένες παλινδρομήσεις επιτελέστηκαν για κάθε ένα από αυτά τα υποδείγματα με residual διακυμάνσεις που υπολογίζονται για το καθένα. Η υπόθεση που δοκιμάζεται είναι ότι δεν υπάρχει καμία διαφορά στις residual διακυμάνσεις των υποδειγμάτων. Για την ακρίβεια, το Bartlett test μπορεί να καθοριστεί ως εξής:

$$B\text{-}test = Q/L,$$

όπου

$$Q = n\log\left(\sum_{j=1}^{k}(nj/n)\, s_j^2\right) - \sum_{j=1}^{k} nj \log s_j^2,$$

$$L = 1 + 1/3\,(k-1)\left(\sum_{j=1}^{k} 1/nj - 1/n\right),$$

$$n = \sum_{j=1}^{k} nj \quad \text{και}$$

k = ο αριθμός των υποδειγμάτων ($k=4$)

$s_m^2 = var(\varepsilon_{it})$ για το j δείγμα ($j=1,2,\dots, k$)

Επίσης, χρησιμοποιούν ένα άλλο test, το Goldfield-Quandt test το οποίο περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα. (1) Η διάταξη της απόδοσης της αγοράς γίνεται από την υψηλότερη τιμή προς την χαμηλότερη (2) Παραλείπονται c κεντρικές παρατηρήσεις από τις αποδόσεις της αγοράς m που είναι σε διάταξη. Η δύναμη του test μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την τιμή του c (3) Μεμονωμένες παλινδρομήσεις γίνονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων στις πρώτες (n-c)/2 παρατηρήσεις και στις τελευταίες (n-c)/2 παρατηρήσεις όπου οι (n-c)/2 πρέπει να υπερβαίνουν τον αριθμό των παραμέτρων προς εκτίμηση (4) Όπου S_1 και S_2 είναι το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων από τις δύο παλινδρομήσεις, το test παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$R = S_2 / S_1$$

όπου το R ακολουθεί την F κατανομή, κάτω από την υπόθεση των ίσων διακυμάνσεων με (n-c-2m) /2 και (n-c-2m)/2 βαθμούς ελευθερίας.

Όπως ήταν αναμενόμενο, το Goldfield- Quandt test αποδείχθηκε πιο ευαίσθητο στην ανίχνευση διαφορών στις residual διακυμάνσεις από ότι το Bartlett test. Όμως, διαπίστωσαν και από τα δύο tests που διεξήγαγαν ότι η ετεροσκεδαστικότητα δεν είναι ένα σοβαρό πρόβλημα για το υπόδειγμα της αγοράς για την πλειοψηφία των αξιόγραφων που εξετάζονται.

Συνολικά, λιγότερο από το 15 τα εκατό των αξιόγραφων που εξετάστηκαν έδωσαν ενδείξεις ετεροσκεδαστικότητας. Εάν αυτά τα αποτελέσματα ήταν αντιπροσωπευτικά όλων των μετοχών του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης, τότε λιγότερο από 225 από τις περίπου 1500 μετοχές θα επεδείκνυαν σημαντική ετεροσκεδαστικότητα. Για αυτές τις μετοχές που επιδεικνύουν ετεροσκεδαστικότητα, η χρήση ενός ισοδύναμα σταθμισμένου ελαχίστων τετραγώνων υποδείγματος παλινδρόμησης θα βελτίωνε την αποτελεσματικότητα των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων. Όμως, για την πλειοψηφία των κοινών μετοχών αυτή η διαδικασία δεν θεωρείται απαραίτητη. Τα tests αυτά επαληθεύουν τα ευρήματα των Fama και al, οι οποίοι δεν βρήκαν σημαντική παραβίαση της υπόθεσης της ομοσκεδαστικότητας του υποδείγματος της αγοράς. Προσθέτουν όμως ότι ακόμη και η παραμικρή ένδειξη ετεροσκεδαστικότητας μπορεί να συμβάλλει στην αστάθεια του beta του μεμονωμένου αξιόγραφου. Το βασικό συμπέρασμα που βγαίνει από τη μελέτη τους είναι ότι το υπόδειγμα της αγοράς είναι ένα δυνατό υπόδειγμα με σεβασμό στην υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι **John D. Martin και Robert C. Klemkosky (1975)** σε άλλη μελέτη τους προσπάθησαν να καθορίσουν την επίπτωση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στο beta της μετοχής j και της διακύμανσης του καταλοίπου πάνω στη διαδικασία διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου. Τα αποτελέσματα ανεξάρτητων tests που διεξήγαγαν για τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο beta της μετοχής j και της διακύμανσης του καταλοίπου χρησιμοποιώντας τόσο δείγματα 60 μηνών και 120 μηνών έδειξαν ότι υπάρχει μια σημαντική θετική συσχέτιση.

Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο beta της μετοχής j και της διακύμανσης του καταλοίπου για ανεξάρτητες μετοχές δοκιμάστηκε για μια περίοδο 120 μηνών από τον Ιούλιο του 1963 έως τον Ιούνιο του 1973 όπως επίσης και για δύο υποπεριόδους που η μία δεν καλύπτει την άλλη από τον Ιούλιο του 1963 έως τον Ιούνιο του 1968 και από τον Ιούλιο του 1968 έως τον Ιούνιο του 1973. Περίπου 350 κοινές μετοχές του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης επιλέχθηκαν για κάθε περίοδο και μηνιαίες τελικές τιμές, προσαρμοσμένες για όλα τα μερίσματα και τα splits, πάρθηκαν από την Compustat.

Οι συντελεστές beta υπολογίστηκαν από μια πρώτου βήματος παλινδρόμηση των χρονολογικών σειρών των μηνιαίων λογαριθμικών τιμών που είναι σχετικές για κάθε αξιόγραφο πάνω στις αντίστοιχες μηνιαίες λογαριθμικές τιμές του S&P δείκτη. Η σχέση ανάμεσα στα δύο μέτρα κινδύνου δοκιμάστηκε από μια δεύτερη παλινδρόμηση σε μια cross-sectional βάση, των συντελεστών beta πάνω στα αντίστοιχα μέτρα της διακύμανσης του καταλοίπου.

Η πρακτική σημασία της επίδρασης του beta στη διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου εκτιμήθηκε συγκρίνοντας τον κίνδυνο καταλοίπου χαρτοφυλακίων που έχουν υψηλό ή χαμηλό beta και που περιέχουν από δύο έως είκοσι πέντε μετοχές. Αυτές οι συγκρίσεις έδειξαν ότι τα επίπεδα διαφοροποίησης, που επιτυγχάνονται για χαρτοφυλάκια υψηλών beta έναντι χαρτοφυλακίων χαμηλών beta, με δεδομένο μέγεθος χαρτοφυλακίου, ήταν σημαντικά διαφορετικά για τα χαρτοφυλάκια υψηλών beta απαιτώντας ένα σημαντικά μεγαλύτερο αριθμό αξιόγραφων για να επιτύχουμε το ίδιο επίπεδο διαφοροποίησης με ένα χαρτοφυλάκιο χαμηλού beta. Αυτό το συμπέρασμα είναι αξιοσημείωτο για ένα διαχειριστή χαρτοφυλακίου που επιθυμεί μέγιστη διαφοροποίηση με έναν περιορισμένο αριθμό αξιόγραφων.

Ο **Stephen J. Brown (1977)** κάνει ένα σχόλιο για την ετεροσκεδαστικότητα του υποδείγματος της αγοράς. Αναφέρει πρωτίστως ότι μια γνωστή υπόθεση του τυπικού γραμμικού υποδείγματος παλινδρόμησης είναι η σταθερή διακύμανση του καταλοίπου. Η υπόθεση σχετικά με την κατανομή των αποδόσεων βεβαιώνει ότι δοθέντος του πίνακα συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων $\Sigma = S\sigma^2$, η κατανομή των αποδόσεων είναι πολυμεταβλητή κανονική για κάποιον θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα S. Όμως, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων δεν είναι καθορισμένος. Πιο συγκεκριμένα, η παράμετρος σ συμπεριφέρεται σαν να ήταν επιλεγμένη από μια ανεστραμμένη γάμμα κατανομή για κάθε περίοδο. Ο Stephen J. Brown (1977) ισχυρίζεται ότι είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι μη δεσμεύοντας τη συγκεκριμένη τιμή του σ η κατανομή των αποδόσεων είναι πολυμεταβλητή student με σταθερό πίνακα συνδιακυμάνσεων δοθέντος από τη σχέση Σ* = (υ/υ-2)S όπου το υ, μια παράμετρος της ανεστραμμένης κατανομής γάμμα που παράγει το σ, είναι οι βαθμοί ελευθερίας αυτής της κατανομής. Εάν ορίσει κανείς την απόδοση της αγοράς ως ένα σταθμικό μέσο ή χαρτοφυλάκιο μεμονωμένων μετοχών τότε η από κοινού κατανομή της απόδοσης σε ένα μεμονωμένο αξιόγραφο και της απόδοσης στην αγορά είναι διμεταβλητή student με σταθερό πίνακα συνδιακυμάνσεων. Καταλήγει ότι είναι πλέον προφανές ότι το κατάλοιπο παλινδρόμησης, η διαφορά ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i δοθέντος της απόδοσης της αγοράς και του δεσμευμένου μέσου είναι μονομεταβλητή student με μέση τιμή μηδέν και σταθερή διακύμανση. Έτσι, αντίθετα με τον ισχυρισμό των John D. Martin και Robert C. Klemkosky (1975), η εύρεση ομοσκεδαστικότητας είναι απόλυτα συνεπής με την υπόθεση του Praetz.

Ο Praetz έκανε έλεγχο για ετεροσκεδαστικότητα τόσο σε εβδομαδιαίες όσο και σε μηνιαίες αλλαγές των τιμών σε ένα δείγμα που αποτελείτο από (1) 16 εβδομαδιαίους δείκτες τιμών μετοχών από το χρηματιστήριο του Sidney από το 1958 έως το 1966 (2) εβδομαδιαίες αλλαγές τιμών 20 αυστραλέζικων κοινών μετοχών για την ίδια περίοδο από τα χρηματιστήρια της Μελβούρνης και του Sidney και (3) δύο μηνιαίες σειρές δεικτών κοινών μετοχών από το 1875 έως το 1966. Με τη βασική υπόθεση ότι οι τιμές των μετοχών παρουσιάζουν περιόδους σχετικής ηρεμίας και υπερβολικής δραστηριότητας, ο Praetz υπέθεσε ότι η διακύμανση στις αλλαγές των τιμών των μετοχών ήταν σταθερή χρονικά. Για να ελέγξει αυτή την υπόθεση, οι ετήσιες διακυμάνσεις στις τιμές των μετοχών υπολογίστηκαν για καθεμία από τις 37 σειρές τιμών που μελετήθηκαν. Το Bartlett test για ετεροσκεδαστικότητα ήταν αυτό που χρησιμοποιήθηκε για να ελεγχθεί η υπόθεση ότι οι ετήσιες διακυμάνσεις στις αλλαγές των τιμών ήταν ίσες. Τα αποτελέσματα αυτού του test ήταν συνεπή και μόνον δύο επέδειξαν σημαντική ετεροσκεδαστικότητα σε επίπεδο 1 τα εκατό.

Ο **Ahmed Belkaoui (1977)** διερεύνησε και διαπίστωσε ενδείξεις ετεροσκεδαστικότητας στο υπόδειγμα της αγοράς χρησιμοποιώντας 45 καναδικές μετοχές που διαπραγματεύονταν στο χρηματιστήριο του Toronto. Στο άρθρο αυτό κάνει εφαρμογή παραμετρικών και μη παραμετρικών tests ομοσκεδαστικότητας σε ένα δείγμα 45 τυχαία επιλεγμένων κοινών μετοχών που διαπραγματεύονταν στο χρηματιστήριο του Toronto. Συλλέχτηκαν για το σκοπό αυτό δύο φορές εβδομαδιαίως οι τιμές των κοινών αξιόγραφων και οι τιμές του γενικού δείκτη για μια περίοδο 48 μηνών από τον Ιανουάριο του 1971 έως τον Δεκέμβριο του 1974. Ο δείκτης της αγοράς εκφράζεται από το Toronto Stock Exchange Industrial Index. Τόσο ο αριθμός όσο και η φύση των tests επιλέχθηκαν με βάση τις καθιερωμένες διαφορές στη δύναμη και στην ακρίβειά τους. Τα tests συνεπώς που χρησιμοποίησε είναι τα ακόλουθα:

1. The Spearman Rank Correlation Coefficient
2. The Bartlett Test
3. The Goldfield and Quandt Test

Η αντίφαση που δημιουργήθηκε σύμφωνα με τον Ahmed Belkaoui από την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς οδήγησε σε μια αυξανόμενη εφαρμογή του υποδείγματος της αγοράς στην εμπειρική έρευνα. Η αποτελεσματικότητα των εκτιμητών των ελαχίστων τετραγώνων βρίσκεται όμως στην ικανοποίηση της υπόθεσης της ομοσκεδαστικότητας.

Στην έρευνα που διεξήγαγαν οι **Arthur E. Gooding και Terence P. O'Malley (1977)** εξετάζεται η στασιμότητα των συντελεστών beta κατά περιόδους που η αγορά σημειώνει άνοδο, κατά περιόδους που η αγορά σημειώνει πτώση αλλά και κατά τη διάρκεια περιόδων όπου η αγορά δεν παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές. Για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιήθηκαν paried t-tests αλλά και ανάλυση συσχέτισης. Εξετάστηκε για την ακρίβεια εάν τα betas των χαρτοφυλακίων που περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς των μεγαλυτέρων αμερικανικών βιομηχανικών κοινών μετοχών είναι στάσιμα.

Επιπλέον, τόσο τα μη-προσαρμοσμένα όσο και τα προσαρμοσμένα betas των χαρτοφυλακίων υπολογίστηκαν και αναλύθηκαν διεξοδικά. Τα μη προσαρμοσμένα betas υπολογίστηκαν με βάση το Υπόδειγμα της Αγοράς του Sharpe. Τα συμβατικά αυτά betas προσαρμόστηκαν ώστε το λάθος μέτρησης να είναι μικρότερο σύμφωνα με μια τροποποίηση που πρότεινε ο Blume.

Το πιο καθοριστικό αποτέλεσμα της έρευνάς τους είναι ότι τα μη-προσαρμοσμένα αλλά και τα προσαρμοσμένα υψηλά ή χαμηλά betas επέδειξαν σημαντική μη στασιμότητα. Αυτή η μη στασιμότητα οφείλεται στην τάση παλινδρόμησης που διαπιστώθηκε για πρώτη φορά από τον Blume. Για κάποιο λόγο τα betas επιδεικνύουν λιγότερο ακραίες τιμές με την πάροδο του χρόνου.

Ένας άλλος παράγοντας που φαίνεται πως ευνοεί τη μη στασιμότητα είναι η τάση της συνολικής αγοράς. Εάν τα betas των χαρτοφυλακίων υπολογιστούν σε περιόδους που η αγορά σημειώνει άνοδο ή πτώση σε αντίθεση περιόδων όπου η αγορά δεν παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές, τότε η στασιμότητα φαίνεται πως επηρεάζεται.

Το δείγμα των μεγαλυτέρων 200 αμερικανικών βιομηχανικών μετοχών που χρησιμοποιήθηκε για την περίοδο από το 1967 έως το 1974 παρουσίασε ελαφρά μεγαλύτερο κίνδυνο από τον κίνδυνο της αγοράς. Με άλλα λόγια, οι μετοχές αυτών των εταιριών ήταν πιο επιθετικές επενδύσεις κατά τη διάρκεια ανόδου της αγοράς από ότι πτώσης της αγοράς.

Εάν τα betas των χαρτοφυλακίων τείνουν να αλλάζουν με την εκάστοτε άνοδο ή πτώση της αγοράς, τότε ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου μπορεί ίσως να επωφεληθεί εάν προσαρμόσει τα betas του τόσο για την προβλεπόμενη τάση της αγοράς όσο και για την τάση παλινδρόμησης.

Εάν η μη στασιμότητα οφείλεται σε αλλαγές της εταιρικής πολιτικής, τότε ένας επενδυτής που επιλέγει χαρτοφυλάκια με υψηλό ή χαμηλό κίνδυνο θα πρέπει να αναμένει τόσο τον κίνδυνο όσο και τις αποδόσεις του να πλησιάζουν τα μέσα επίπεδα μακροπρόθεσμα. Αυτό σημαίνει ότι ένας τέτοιος επενδυτής θα πρέπει να εξετάζει τον βραχυπρόθεσμο επενδυτικό ορίζοντά του και να ανασυντάσσει το χαρτοφυλάκιο του πιο συχνά από τον επενδυτή που αναζητά μέσο κίνδυνο και αποδόσεις.

Οι **Jack Clark Francis και Frank J. Fabozzi (1979)** ήλεγξαν το εάν το μονο-παραγοντικό υπόδειγμα της αγοράς είναι ένα ισχυρό υπόδειγμα ή το εάν τα άλφα και τα βήτα του υπόκεινται στην συνολική επιρροή του επιχειρηματικού κύκλου. Από τις στατιστικές του υποδείγματος της αγοράς για ένα δείγμα 694 μετοχών του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης που χρησιμοποίησαν οι Francis και Fabozzi (1979) εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχει μια σημαντική τάση για αλλαγή σε περιόδους ύφεσης και ακμής του επιχειρηματικού κύκλου. Οι στατιστικές τους επιβεβαιώνουν το συμπέρασμα ότι οι αλλαγές σε μακροοικονομικούς παράγοντες σηματοδοτούν σημαντικές αλλαγές στις στατιστικές του μονο-παραγοντικού υποδείγματος της αγοράς.

Τα δεδομένα που χρησιμοποίησαν καλύπτουν 73 μήνες από τον Δεκέμβριο του 1965 έως τον Δεκέμβριο του 1971 συμπεριλαμβανομένου. Δεδομένα για 694 μετοχές του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης αξιολογήθηκαν. Το συνολικό δείγμα των έξι αυτών ετών χωρίστηκε σε δύο υποσύνολα κατά επτά διαφορετικούς τρόπους.

Συμπερασματικά, τα άλφα, τα βήτα αλλά και το συνολικό μονο-παραγοντικό υπόδειγμα της αγοράς τείνουν να επιδεικνύουν σημαντικές στατιστικές αλλαγές πιο συχνά από ότι η θεωρία υποδεικνύει κατά τη διάρκεια της περιόδου επέκτασης-συρρίκνωσης που μελετάται. Εκτός από την μικρή ύφεση του 1967, όλες οι υπόλοιπες περίοδοι που μελετώνται δεν παρουσιάζουν περισσότερες αλλαγές στις παραμέτρους του μονο-παραγοντικού υποδείγματος της αγοράς από το αναμενόμενο. Τα αποτελέσματα όμως της έρευνας τους υποστηρίζουν την υπόθεση ότι το μονο-παραγοντικό υπόδειγμα της αγοράς επηρεάζεται από τις μακροοικονομικές συνθήκες. Συνεπώς, η αστάθεια του beta που παρατηρείται από πολλούς ερευνητές φαίνεται να καταλήγει τουλάχιστον μερικώς σε αλλαγές που συνδέονται με τα οικονομικά του επιχειρηματικού κύκλου.

Οι **Roger P. Bey και Georges E. Pinches (1980)** προσπάθησαν να επιλύσουν τις αντιφατικές απόψεις που υπήρχαν σε προηγούμενες μελέτες όσον αφορά στην ετεροσκεδαστικότητα του υποδείγματος της αγοράς. Επίσης, επιχείρησαν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας στις μετοχές και να συζητήσουν τις χρηματοοικονομικές επιπλοκές της ετεροσκεδαστικότητας στο υπόδειγμα της αγοράς.

Προς επίτευξη των στόχων τους χρησιμοποίησαν ένα δείγμα 665 εταιριών από το Center for Research in Security Prices για την περίοδο από τον Ιανουάριο του 1962 έως τον Δεκέμβριο του 1976. Με βάση το δείγμα αυτό διεξήγαγαν έξι διαφορετικά test, που είναι τα εξής: Bartlett and Goldfeld/ Quandt, Glejser and Modified Glejser καθώς επίσης Kendall and Peak.

Πράγματι, οι **Roger P. Bey και Georges E. Pinches (1980)** κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ετεροσκεδαστικότητα εμφανίζεται παντού, όπου χρησιμοποιείται το υπόδειγμα της αγοράς. Ο σχηματισμός χαρτοφυλακίων δεν απαλλάσσει από το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας. Κανένα test επιπλέον δεν έδωσε ένα ανώτερο test για την παρουσία ή την απουσία της ετεροσκεδαστικότητας καθώς όλα τα tests που χρησιμοποιήθηκαν μέτρησαν διαφορετικές όψεις ετεροσκεδαστικότητας. Ο δείκτης αγοράς δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά το ποσό της ετεροσκεδαστικότητας που παρατηρήθηκε. Επιπρόσθετα, τονίζουν ότι η ετεροσκεδαστικότητα ποικίλλει.

Στην έρευνα που έχει διεξαχθεί αναφορικά με την αξιοπιστία του Υποδείγματος της Αγοράς έρχεται να προστεθεί η έρευνα των **Carmelo Giaccotto και Mukhtar M. Ali (1982)**. Σύμφωνα με τους Carmelo Giaccotto και Mukhtar M. Ali (1982) τα παραδοσιακά tests, όπως των Goldfeld-Quandt, Barlett ή Glejser είναι αναξιόπιστα εάν η βασική υπόθεση της κανονικότητας για το κατάλοιπο στο Υπόδειγμα της Αγοράς παραβιάζεται. Οι Seber, Brown και Forsythe, και Layard έχουν αναφέρει ότι εάν η κατανομή του καταλοίπου και της απόδοσης της μετοχής i δεν είναι κανονική τότε η πιθανότητα του Type I λάθους (που σημαίνει να απορρίψουμε την πραγματική μηδενική υπόθεση) μπορεί να είναι αρκετές φορές αυτή του προκαθορισμένου ονομαστικού επιπέδου σημαντικότητας. Δοθέντος των ερευνών των Fama, Praetz και Clark, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η κατανομή των αποδόσεων των μετοχών είναι fat tailed, είναι πιθανό η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας που παρατηρείται σε αυτά τα tests να υπερτονίζεται. Οι Bey και Pinches αναφέρθηκαν σε αυτό το θέμα και βρήκαν κάποια ένδειξη. Όμως, αυτά τα tests εφαρμόστηκαν στα κατάλοιπα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων που είναι συσχετισμένα και συνεπώς, τα συμπεράσματα αυτών των ερευνών μπορεί να μην είναι αξιόπιστα σύμφωνα με τους Carmelo Giaccotto και Mukhtar M. Ali.

Μέχρι τη στιγμή που διεξήγαγαν την έρευνα τους, μόνον ένας μικρός αριθμός προσδιορισμού για την εναλλακτική υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας είχε ανιχνευθεί. Σε πολλές από τις προηγούμενες έρευνες είχε υποτεθεί ότι η διακύμανση αυξανόταν με την απόδοση της αγοράς. Καθώς όμως αγνοούσαν την ύπαρξη μιας συγκεκριμένης εναλλακτικής πρότασης, θεώρησαν πολύ σημαντικό να έχουν tests, τα οποία να είναι ευέλικτα στον προσδιορισμό εναλλακτικών προτάσεων και να καθορίσουν το πιο σημαντικό από αυτά. Θεώρησαν επίσης ότι το Generalized Least Square (GLS) είναι πιο αποτελεσματικό από τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων (OLS) στην περίπτωση που η διακύμανση δεν είναι σταθερή και με την προϋπόθεση ότι η συμπεριφορά της διακύμανσης είναι γνωστή.

Στο άρθρο αυτό εισάγουν δύο κατηγορίες tests για ετεροσκεδαστικότητα που είναι ανεξάρτητα της κατανομής, είναι robust για μη-κανονικότητα και επίσης ασυμπτωτικά powerful. Τα tests αυτά από κατασκευής είναι τοπικά πιο δυνατά από τα συμβατικά tests, όπως των Goldfeld-Quandt, Barlett ή Glejser. Καθώς αυτά τα tests απαιτούν τα κατάλοιπα να είναι ανεξάρτητα, οι Carmelo Giaccotto και Mukhtar M. Ali (1982) εισήγαγαν τη χρήση των αναδρομικών καταλοίπων αντί για τα OLS κατάλοιπα που χρησιμοποιούνται συνήθως για να εκτιμήσουν τα κατάλοιπα. Τα αναδρομικά κατάλοιπα εξασφαλίζουν από την κατασκευή τους την ανεξάρτητη κατανομή τους.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή την μελέτη απαρτίζονται από τις μηνιαίες αποδόσεις σε 384 μετοχές που επιλέχθηκαν τυχαία από την Compustat

Tapes. Η δειγματική περίοδος είναι από τον Ιανουάριο του 1965 έως τον Δεκέμβριο του 1977. Επομένως, υπάρχει ένα συνολικό δείγμα 156 παρατηρήσεων ανά μετοχή. Ο SP 425 δείκτης κατά την ίδια περίοδο χρησιμοποιήθηκε ως προσέγγιση για την απόδοση της αγοράς. Αυτή η συγκεκριμένη περίοδος καλύπτει ένα μεγάλο εύρος οικονομικής δραστηριότητας.

Σε αυτή τη μελέτη χρησιμοποιήθηκαν δύο κατηγορίες tests για ετεροσκεδαστικότητα που είναι ανεξάρτητα της κατανομής και τα οποία εφαρμόστηκαν στο Υπόδειγμα της Αγοράς. Τα κύρια πλεονεκτήματα αυτών έναντι των συμβατικών tests είναι ότι είναι robust στην περίπτωση που έχουμε μη κανονικότητα και επιτρέπουν μια μεγάλη ποικιλία εναλλακτικών υποθέσεων.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσής τους υπονοούν ότι η υπόθεση της σταθερής διακύμανσης δεν μπορεί να ισχύει για την πλειοψηφία των αξιόγραφων στο δείγμα τους και πιθανώς η διακύμανση να αυξάνει με το τετράγωνο της απόδοσης της αγοράς. Αυτό το συμπέρασμα έχει επιπτώσεις για την αποτελεσματική εκτίμηση των παραμέτρων του Υποδείγματος της Αγοράς. Εάν η συμπεριφορά της διακύμανσης κατά τη διάρκεια της δειγματικής περιόδου ακολουθεί ένα προβλέψιμο μοτίβο, τότε κάποιος θα μπορούσε να ενσωματώσει τη γνώση αυτή σε έναν κατάλληλο πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης για τα ε_{it} και να πάρει αποτελεσματικές εκτιμήσεις για τα α_i και β_i και αμερόληπτες εκτιμήσεις των $\sigma^2_{i,T+1}$.

Οι **R. C. Stapleton και M. G. Subrahmanyam (1983)** έδειξαν ότι ένα γραμμικό υπόδειγμα αγοράς είναι αρκετό για να εξάγουμε μια γραμμική σχέση ανάμεσα στο beta και την αναμενόμενη απόδοση. Επιπλέον, η κλίση της σχέσης θα είναι όμοια με εκείνη του CAPM εάν η απόδοση στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς κατανέμεται κανονικά. Όμως, η θεωρία υποδεικνύει ότι η υπόθεση του γραμμικού υποδείγματος της αγοράς είναι κοντά στην πολυμεταβλητή κανονικότητα.

Συνοπτικά, οι R. C. Stapleton και M. G. Subrahmanyam (1983) έδειξαν ότι ένα γραμμικό υπόδειγμα αγοράς είναι μια επαρκής συνθήκη για να εξάγει κανείς τη γνωστή γραμμική σχέση του CAPM μεταξύ του beta και των αναμενόμενων αποδόσεων. Εάν η απόδοση της αγοράς κατανέμεται κανονικά τότε η κλίση της γραμμής της απόδοσης της αγοράς είναι ταυτόσημη με εκείνη της μέσης τιμής-διακύμανσης του CAPM. Υποστηρίζουν επίσης στο ίδιο άρθρο ότι η διαφορά ανάμεσα στις υποθέσεις της πολυμεταβλητής κανονικότητας και της γραμμικότητας του υποδείγματος της αγοράς δεν είναι μεγάλη.

Οι **Stephen J. Brown και Christopher B. Barry (1984)** εξέτασαν την υπόθεση που είχε αρχικά ερευνήσει ο Roll. Σύμφωνα με τον Roll, οι παρατηρούμενες ανωμαλίες στις υπερβολικές αποδόσεις μπορούν να ερμηνευτούν από misspecification του υποδείγματος της αγοράς που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του συστηματικού κινδύνου. Οι Stephen J. Brown και Christopher B. Barry βρήκαν σημαντικά misspecifications στο υπόδειγμα που (συστηματικά) σχετίζονται με το μέγεθος και την περίοδο εγγραφής των συγκεκριμένων αξιόγραφων. Υπάρχει επίσης ένδειξη ότι αυτά τα misspecifications σχετίζονται με συστηματική μεροληψία στα μετρημένα betas που χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουμε τις υπερβολικές αποδόσεις.

Στο συγκεκριμένο επίσης άρθρο εξετάζεται πιθανό misspecification που οφείλεται στη μη-στασιμότητα του υποδείγματος της αγοράς κατά τη διάρκεια της περιόδου που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του beta. Τα στοιχεία που λαμβάνουν για τη διεξαγωγή της έρευνάς τους είναι το πλήθος όλων των αξιόγραφων που διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης από τον Δεκέμβριο του 1926 έως τον Δεκέμβριο του 1980, που ήταν καταχωρημένο σε αυτό το χρηματιστήριο για μια περίοδο τουλάχιστον 61 μηνών και που είχε τουλάχιστον 21 μηνών δεδομένα στο CRSP μηνιαίων αποδόσεων διαθέσιμων για την εκτίμηση του υποδείγματος της αγοράς. Όταν ένα αξιόγραφο εγκαταλείπει το χρηματιστήριο τότε το αξιόγραφο υποτίθεται ότι έχει απόδοση μείον ένα ή μια απόδοση που βασίζεται στην τιμή που έχει αυτό το αξιόγραφο όταν διαπραγματεύεται σε άλλο χρηματιστήριο.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους επιβεβαιώνουν την υπόθεση του Roll ότι οι παρατηρούμενες ανωμαλίες συνδέονται στενά με misspecifications του υποδείγματος της αγοράς για την εκτίμηση του συστηματικού κινδύνου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το υπόδειγμα είναι misspecified κατά αυτό τον τρόπο είναι δύσκολο να προσδώσει κανείς οικονομική έννοια στις υπερβολικές αποδόσεις που εξάγονται από το υπόδειγμα της αγοράς.

Οι ενδείξεις αυτές υπονοούν ότι ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην ερμηνεία των υπερβολικών αποδόσεων που απορρέουν από τα betas που εκτιμώνται από ένα τέτοιο υπόδειγμα. Οι Stephen J. Brown και Christopher B. Barry (1984) εξέτασαν περαιτέρω την ύπαρξη του misspecification. Η ύπαρξη της ανωμαλίας του Ιανουαρίου υποδεικνύει μια προσαρμογή του υποδείγματος της αγοράς ώστε να συμπεριληφθεί αυτή η αιτία μη στασιμότητας. Το misspecification που παρατηρείται συνδέεται με μια συστηματική μεροληψία στο καταμετρημένο beta. Όμως σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνάς τους αυτή η μεροληψία δεν είναι ιδιαίτερα σταθερή ανάμεσα στα ενδιάμεσα διαστήματα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται.

Οι **Amihud Dotan και Aharon Ofer (1984)** προτείνουν ένα εναλλακτικό υπόδειγμα της αγοράς στο οποίο το beta επιτρέπεται να μεταβάλλεται με τον χρόνο. Μεταβλητοί παράμετροι παλινδρόμησης χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθεί το μεταβλητό beta και οι εκτιμήσεις που προκύπτουν συγκρίνονται με εκείνες που παράγονται από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων σε όρους ακρίβειας προβλέψεων. Γενικά, τα αποτελέσματα που παίρνουν δείχνουν ότι κανένα από τα δύο υποδείγματα της αγοράς δεν έχει καθαρό πλεονέκτημα έναντι του άλλου. Ακόμη και με μια μεγάλη αλλαγή του beta, οι διαφορές στα λάθη πρόβλεψης ήταν μικρές αλλά ελαφρώς ευνοϊκότερες προς χάριν του μεταβλητού υποδείγματος της αγοράς.

Είναι γνωστό ότι εάν το υπόδειγμα της αγοράς που έχει σταθερό beta περιγράφει σωστά τη στοχαστική διαδικασία παραγωγής των αποδόσεων των αξιόγραφων, τότε ο συντελεστής beta ενός αξιόγραφου μπορεί να εκτιμηθεί παλινδρομώντας τον πραγματοποιούμενο ρυθμό απόδοσης της μετοχής πάνω στο ρυθμό απόδοσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Αυτή ήταν η συνήθης διαδικασία για να εκτιμήσει κανείς το συντελεστή beta για εμπειρική έρευνα όπως επίσης και για την ανάλυση αξιόγραφων. Όμως, η χρηματοοικονομική θεωρία υποστηρίζει ότι περιστάσεις όπως αλλαγές στη κεφαλαιακή δομή ή αλλαγές στον επιχειρηματικό κίνδυνο της εταιρίας μπορούν να προκαλέσουν αλλαγή στον συστηματικό κίνδυνο του προς εξέταση αξιόγραφου. Όμως, οι Amihud Dotan και Aharon Ofer (1984) ισχυρίζονται ότι η μη-στασιμότητα του beta δεν αποκλείει απαραίτητα τη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση του beta. Εάν κάποιος μπορεί να παρατηρήσει περιόδους σταθερού beta τότε το beta μπορεί να εκτιμηθεί για τέτοιες περιόδους χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Επίσης, μπορεί να υποτεθεί ότι όλες ή μερικές από τις παραμέτρους που καθορίζουν το beta αλλάζουν συνεχώς. Η συσσωρευτική επίδραση αυτών των αλλαγών δίνουν beta που αλλάζουν συνεχώς με τον χρόνο. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη οι Amihud Dotan και Aharon Ofer (1984) αντικατέστησαν την υπόθεση του σταθερού beta με την εναλλακτική υπόθεση για την στοχαστική διαδικασία του beta.

Τα δύο υποδείγματα της αγοράς που προτείνονται, το στάσιμο beta υπόδειγμα και το μεταβλητό beta υπόδειγμα εκτιμώνται με βάση την προβλεπτική τους δύναμη.

Τα tests διεξάγονται για δύο διαφορετικές περιόδους, 1967-1971 και 1970-1974, όπου τα τέσσερα πρώτα χρόνια σε κάθε περίοδο απαρτίζουν τις αρχικές εκτιμητικές περιόδους και ο πέμπτος χρόνος αποτελεί την περίοδο πρόβλεψης. Η πρώτη περίοδος χαρακτηρίζεται από μια αγορά, η οποία κατά την εκτιμητική περίοδο πρώτα ανεβαίνει και μετά πέφτει απότομα, ενώ παραμένει σταθερή κατά την εκτιμητική περίοδο. Στον δεύτερο χρόνο υπάρχει μια bull market, η οποία όμως πέφτει απότομα προς το τέλος της εκτιμητικής περιόδου και έπειτα συντελείται μια δραστική πτώση κατά τη διάρκεια της προβλεπτικής περιόδου. Οι δύο περίοδοι επιλέχτηκαν έτσι ώστε να αντικατοπτρίζουν διάφορες συνθήκες αγοράς.

Επέλεξαν όλες τις εταιρίες που είχαν πλήρη στοιχεία για τη σχετική περίοδο, τις ταξινόμησαν βάση του beta τους και στη συνέχεια επέλεξαν κάθε δέκατη εταιρία για κάθε ένα από τα δύο δείγματα. Έτσι, κατέληξαν με 93 εταιρίες για την περίοδο 1967-1971 και 100 εταιρίες για την περίοδο 1970-1974, καλύπτοντας όλο το εύρος των betas για κάθε περίοδο. Έπειτα, για κάθε εταιρία στα δύο δείγματα η δεσμευμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής ένα μήνα μπροστά προβλέπεται και από τα δύο υποδείγματα. Οι προβλέψεις βασίζονται σε μια εκτιμητική περίοδο τεσσάρων ετών μηνιαίων στοιχείων ακριβώς πριν από τον μήνα πρόβλεψης. Για κάθε εταιρία δώδεκα προβλέψεις παράγονται για δώδεκα διαδοχικούς μήνες ενώ το μήκος της εκτιμητικής περιόδου διατηρείται απορρίπτοντας τον πρώτο μήνα κάθε φορά που προστίθεται ένας νέος μήνας. Βάση της απόκλισης των προβλεπόμενων τιμών από τις πραγματικές τιμές, δύο στατιστικές χρησιμοποιούνται. Οι δύο αυτές στατιστικές είναι η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και η μέση τυπική απόκλιση.

Συνολικά, ισχυρίζονται ότι το μεταβλητό υπόδειγμα δεν υπερτερεί έναντι του σταθερού όταν η περίοδος που εξετάζεται χαρακτηρίζεται από ένα σταθερό beta. Εάν το μεταβλητό υπόδειγμα έχει οποιοδήποτε πλεονέκτημα έναντι του σταθερού είναι μόνον όταν υπάρχουν σημαντικές αλλαγές στο beta κατά τη διάρκεια της εκτιμητικής περιόδου.

Η υπόθεση του σταθερού beta μέσα στο πλαίσιο του υποδείγματος της αγοράς και οι επιπλοκές αυτού για το ποια είναι η πιο κατάλληλη εκτιμητική διαδικασία-για παράδειγμα η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων-έχουν εκλεχθεί ευρέως. Αλλαγές στην κεφαλαιακή δομή, στην επενδυτική πολιτική ή στην πολιτική μερίσματος μπορούν να προκαλέσουν αλλαγές στο συντελεστή beta των αξιόγραφων. Στην μελέτη που διεξήγαγαν οι ανωτέρω επιστήμονες μια εναλλακτική διαδικασία παραγωγής των αξιόγραφων προτείνεται στην οποία το beta αλλάζει με τον χρόνο και συγκρίνεται με ένα υπόδειγμα που έχει στάσιμο beta. Το εναλλακτικό αυτό υπόδειγμα εκτιμάται και ελέγχεται χρησιμοποιώντας μεταβλητές παραμέτρους παλινδρόμησης. Τα tests που διεξήγαγαν δείχνουν ότι στις δύο περιόδους που ελέγχονται κανένα από τα δύο υποδείγματα δεν πλεονεκτεί έναντι του άλλου. Ακόμη και όταν υπάρχει μια μεγάλη αλλαγή στο beta οι διαφορές στα λάθη πρόβλεψης, αν και ελαφρώς ευνοϊκά διακείμενα προς το μεταβλητό υπόδειγμα, είναι μάλλον μικρές. Έτσι, οι Amihud Dotan και Aharon Ofer (1984) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι εάν το κριτήριο επιλογής ανάμεσα στα δύο υποδείγματα είναι το μέγεθος της μείωσης του λάθους πρόβλεψης, δεν υπάρχει καμία δικαιολόγηση για τη χρησιμοποίηση του μεταβλητού υποδείγματος της αγοράς.

Ο **John M. Parkinson (1987)** κάνει μια διεθνή σύγκριση όσον αφορά στην επεξηγηματική δύναμη του υποδείγματος της αγοράς. Από τις είκοσι δύο μελέτες που χρησιμοποίησε, η μία είναι ανώμαλη αν λάβει κανείς υπόψη το μέγεθος της βάσης δεδομένων της. Πρόκειται για την μελέτη του Altman et al. (1974), η οποία βασίζεται σε 28000 παρατηρήσεις της γαλλικής κεφαλαιαγοράς, γεγονός που συνιστά το 70% των συνολικών παρατηρήσεων. Μια τέτοια μεγάλη μελέτη επηρεάζει σαφώς όλα τα αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό ο John M. Parkinson (1987) αναλύει τα δεδομένα σε δύο φάσεις. Πρώτον, η ανάλυση διεξάγεται λαμβάνοντας υπόψη όλα τα δεδομένα. Δεύτερον, η ανάλυση διεξάγεται εξαιρώντας τα αποτελέσματα του Altman (1974).

Το υπόδειγμα που χρησιμοποιεί είναι το ακόλουθο:

$$Y = \alpha + \beta 1\, X1 + \beta 2\, X2 + \beta 3\, X3 + \beta 4\, X4 + \beta 5\, X5 + \beta 6\, X6 + \beta 7\, X7 + \beta 8\, X8 + e,$$

όπου Y = r^2, η επεξηγηματική δύναμη του υποδείγματος που αναφέρεται στη συγκεκριμένη μελέτη. Οι πρώτες (X1 – X4) μεταβλητές είναι ποσοτικές, ενώ οι επόμενες τέσσερις είναι οι dummy μεταβλητές, που χρησιμοποιούνται για να αιχμαλωτίσουν τους ποιοτικούς παράγοντες. Τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης συνοψίζονται στα ακόλουθα:

1. **Μεταβλητή X1** – το χαρτοφυλάκιο ως ποσοστό της αγοράς

Αυτό είναι υψηλά στατιστικά σημαντικό και ο συντελεστής είναι θετικός. Αυτό φέρει προσδοκίες ότι καθώς το χαρτοφυλάκιο μεγαλώνει, το ίδιο μεγαλώνει και το r^2.

2. **Μεταβλητή X2** – το μήκος της εκτιμώμενης περιόδου

Αυτός ο μικρός θετικός συντελεστής είναι υψηλά στατιστικά σημαντικός. Αυτό φέρει προσδοκίες ότι καθώς η περίοδος προς εκτίμηση μεγαλώνει, το ίδιο μεγαλώνει και το r^2.

3. **Μεταβλητή Χ3** – το μήκος του διαστήματος απόδοσης

Αυτός ο μικρός θετικός συντελεστής είναι υψηλά στατιστικά σημαντικός. Αυτό φέρει προσδοκίες ότι καθώς το διάστημα απόδοσης μεγαλώνει, τόσο η τιμή του r^2 είναι υψηλότερη.

4. **Μεταβλητή Χ4** – οι ημερομηνίες που καλύπτονται από τα δεδομένα

Αυτός ο αρνητικός συντελεστής είναι υψηλά στατιστικά σημαντικός. Αυτό μπορεί να είναι μια ένδειξη ότι το υπόδειγμα είναι λιγότερο ικανό να εξηγήσει τις τιμές των αξιόγραφων ή των αποδόσεων.

5. **Μεταβλητές Χ5 και Χ6** – ο βαθμός ανάπτυξης ή υπανάπτυξης

Όλα τα δεδομένα: Καθώς οι μεταβλητές αυτές αναδύονται με αρνητικούς συντελεστές, που είναι υψηλά στατιστικά σημαντικές, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι αγορές ενδιάμεσου βαθμού ανάπτυξης σχετίζονται με υψηλότερες τιμές r^2. Αυτά τα αποτελέσματα δεν συμβαδίζουν με την γενική πεποίθηση ότι οι αγορές των Ηνωμένων Πολιτειών είναι πιο αποτελεσματικές και συμπεριφέρονται καλύτερα.

Δεδομένα εξαιρώντας Altman et al: Όταν τα δεδομένα ελαττώνονται, τα πρόσημα παραμένουν τα ίδια, όντας και τα δύο αρνητικά. Όμως, ο συντελεστής για το βαθμό ανάπτυξης γίνεται στατιστικά σημαντικός. Η επιπλοκή μπορεί να είναι γενικά ότι δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στα r^2 πολύ αναπτυγμένων και μέτρια αναπτυγμένων αγορών, παρόλο που κάποια διαφορά υπάρχει στα γαλλικά δεδομένα.

6. **Μεταβλητή Χ7** – thin trading

Όλα τα δεδομένα: Αυτό είναι στατιστικά σημαντικό και ο συντελεστής είναι αρνητικός.

Δεδομένα εξαιρώντας Altman et al: Ο συντελεστής διατηρεί το αρνητικό πρόσημό του αλλά γίνεται υψηλά στατιστικά σημαντικός.

7. **Μεταβλητή Χ8**

Όλα τα δεδομένα: Αυτός ο μικρός αρνητικός συντελεστής είναι υψηλά στατιστικά σημαντικός. Απόρροια αυτού είναι ότι οι μελέτες του υποδείγματος της αγοράς αναδύονται με υψηλότερες τιμές r^2.

Δεδομένα εξαιρώντας Altman et al: Το αρνητικό πρόσημο παραμένει αλλά η στατιστική σημαντικότητα μειώνεται, από πιθανότητα 0.0001 σε 0.0259.

8. Intercept

Το α βρίσκεται γύρω από το 0.79 και είναι υψηλά στατιστικά σημαντικό. Αυτό υποδεικνύει ότι η τιμή του r^2 είναι γενικά αρκετά μεγάλη και οι αιτιολογικές μεταβλητές κινούνται γύρω από αυτή την υψηλή τιμή.

9. Σημαντικότητα

Η F-τιμή και των δύο υποδειγμάτων παλινδρόμησης είναι υψηλά στατιστικά σημαντική. Η τιμή του r^2 για αυτές τις δύο παλινδρομήσεις είναι 0.6416 και 0.4469 υποδεικνύοντας ότι αντίστοιχα το 65% και 45% της διακύμανσης στο r^2 μπορεί να εξηγηθεί αυτούς τους παράγοντες.

Συμπερασματικά, η ετερογενής φύση των διαφόρων μελετών όπως επίσης γενικά προβλήματα μέτρησης δείχνουν ότι ιδιαίτερη μέριμνα πρέπει να ληφθεί για την ερμηνεία αυτών των αποτελεσμάτων. Επιπρόσθετα, είναι δυνατόν να υπάρχουν άλλες μεταβλητές, οι οποίες δεν έχουν αναγνωριστεί ακόμη. Εάν υποτεθεί ότι μια μελέτη σκοπεύει να χρησιμοποιήσει τις τιμές β κατά κάποιον τρόπο, τότε όσο υψηλότερη είναι η τιμή του r^2 τόσο πιο έγκυρη η μελέτη θα είναι. Το μέγεθος του χαρτοφυλακίου φαίνεται καθοριστικό. Μελέτες, οι οποίες θεωρούν μία και μόνο μετοχή διαπραγματεύονται με μια τιμή του r^2 που μπορεί να είναι πολύ χαμηλή. Αύξηση του μεγέθους του χαρτοφυλακίου κατά 10% του συνολικού μεγέθους της αγοράς φαίνεται πως ελαχιστοποιεί τα λάθη μέτρησης και συνδέεται με υψηλότερες τιμές του r^2. Μελέτες, οι οποίες χρησιμοποιούν δεδομένα που καλύπτουν μεγαλύτερες χρονικές περιόδους και μελέτες που χρησιμοποιούν ένα μεγαλύτερο διάστημα απόδοσης παράγουν συνήθως υψηλότερες τιμές του r^2.

Η χρονική περίοδος που μελετάται και ο βαθμός ανάπτυξης της αγοράς είναι επιπλέον αιτιολογικοί παράγοντες αλλά κατά πάσα πιθανότητα δεν είναι καθοριστικές μεταβλητές.

Τελικά, η χρησιμοποίηση του υποδείγματος της αγοράς ένα του CAPM συνδέεται με υψηλότερες τιμές του r^2. Εάν η διαδικασία εξευγενισμού ενός υποδείγματος από το υπόδειγμα της αγοράς στο υπόδειγμα του CAPM έχει οδηγήσει σε μειωμένη αποτελεσματικότητα, τότε οι ερευνητές που επιδιώκουν να χρησιμοποιήσουν δεδομένα με μεγαλύτερη επεξηγηματική δύναμη είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουν το υπόδειγμα της αγοράς αντί για το CAPM.

Οι **R.D. Huang και H. Jo (1988)** χρησιμοποίησαν τα tests που προτείνουν οι Hausman (1978) και White (1980) για να καθορίσουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα και το μέγεθος της ετεροσκεδαστικότητας και του misspecification στα υποδείγματα της αγοράς. Χρησιμοποιώντας εκτιμητές, οι οποίοι είναι συνεπείς κάτω από πολύ γενικές μορφές ετεροσκεδαστικότητας και misspecification, αυτά τα tests δεν απαιτούν τον προσδιορισμό εναλλακτικής διακύμανσης του error term ή άλλων υποδειγμάτων. Η ιδιότητα αυτή των συγκεκριμένων tests είναι πάρα πολύ σημαντική καθώς η γνώση της εναλλακτικής υπόθεσης συνήθως λείπει.

Το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από όλες τις εταιρίες του CRSP 1984 των μηνιαίων αρχείων μεταξύ του Ιανουαρίου του 1960 και του Δεκεμβρίου του 1983. Αυτό οδήγησε σε ένα δείγμα 452 εταιριών συνολικά. Στην έρευνά τους χρησιμοποιούνται οι σταθμισμένες (value-weighted) και οι ισοδύναμα σταθμισμένες (equally-weighted) αποδόσεις του δείκτη αγοράς των εταιριών που απαρτίζουν το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους δείχνουν ότι η υπόθεση της ετεροσκεδαστικότητας παραβιάζεται πολύ συχνά. Η απουσία παραλειπομένων μεταβλητών και λαθών μέτρησης παρατηρείται σε μικρότερο βαθμό. Στην πραγματικότητα τα περισσότερα misspecifications συμβαίνουν σε συνδυασμό με την ετεροσκεδαστικότητα. Η ετεροσκεδαστικότητα και το misspecification παρατηρούνται σε διαφορετικά μεγέθη εταιριών και για τις αποδόσεις τόσο του Ιανουαρίου όσο και των υπολοίπων μηνών του χρόνου. Συνήθως όμως συμβαίνουν πιο συχνά στις μικρότερες εταιρίες και στις αποδόσεις του Ιανουαρίου. Έτσι, όντας συνεπείς με τις "ανωμαλίες" που παρουσιάζονται από το CAPM και το APT, βρίσκουν επίσης επιδράσεις από το μέγεθος της εταιρίας αλλά και από τις αποδόσεις του μήνα Ιανουαρίου. Επιπλέον, οι ενδείξεις υποδεικνύουν ότι όταν το παραδοσιακό υπόδειγμα της αγοράς διευρύνεται ώστε να συμπεριλάβει μια τετραγωνική απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς, τότε οδηγείται σε μια μείωση της συχνότητας της ετεροσκεδαστικότητας. Επίσης, η χρησιμοποίηση ισοδύναμα σταθμισμένων αποδόσεων της αγοράς αντί για απλά σταθμισμένες αποδόσεις μειώνει τη συχνότητα της ετεροσκεδαστικότητας. Όμως αυτή η βελτίωση των αποτελεσμάτων συνοδεύεται από μία ταυτόχρονη αύξηση των λαθών προσδιορισμού. Ο αριθμός των misspecifications αυξάνει όταν χρησιμοποιούνται ισοδύναμα σταθμισμένες αποδόσεις αγοράς και όταν για την εκτίμηση του τετραγωνικού υποδείγματος της αγοράς χρησιμοποιούνται σταθμισμένες αποδόσεις αγοράς.

Δοθέντος της συχνής εμφάνισης της ετεροσκεδαστικότητας, είναι γόνιμο να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας εκτιμητής ετεροσκεδαστικότητας-συνεπής συνδιακύμανσης του White. Το γεγονός ότι μια προσαρμογή για τις γενικές μορφές ετεροσκεδαστικότητας είναι διαθέσιμη σημαίνει ότι η παραβίαση της ετεροσκεδαστικότητας δεν πρέπει να αποτελεί λόγο αποφυγής των διαφορετικών εφαρμογών των υποδειγμάτων αγοράς. Εάν η αστάθεια των betas παραμένει σημαντική ακόμη και με τη χρησιμοποίηση του εκτιμητή White τότε η υπόθεση πρέπει να απορριφθεί.

Η εφαρμογή του Hausman test σημαίνει ότι misspecifications μπορούν να εμφανιστούν άνω του 50% του δείγματος όταν μικρές εταιρίες και αποδόσεις Ιανουαρίου χρησιμοποιούνται και σε καμία περίπτωση σε λιγότερο από το 10% του δείγματος. Συνεπώς, αυτό δείχνει ότι τα υπάρχοντα υποδείγματα της αγοράς ίσως να μην είναι ακριβή και υπογραμμίζει την ανάγκη να πειραματιστούμε με νέα υποδείγματα τιμολόγησης των αξιόγραφων. Με αυτή τη θεώρηση οι Huberman και Kandel (1985) πρότειναν ένα υπόδειγμα αποδόσεων αξιόγραφων το οποίο βασίζεται στο μέγεθος των εταιριών και το οποίο δίνει υποσχόμενες αποδόσεις. Μια πιο άμεση αλλά λιγότερο αποδεκτή προσέγγιση για να ελαχιστοποιήσει κανείς τα λάθη προσδιορισμού είναι να χρησιμοποιήσει το υπόδειγμα της αγοράς με σταθμισμένες αποδόσεις αγοράς. Μια ακόμη λιγότερο ικανοποιητική πρόταση που κάνουν είναι να αποφύγει κανείς την τιμολόγηση των αποδόσεων μικρών εταιριών, των αποδόσεων Ιανουαρίου ή των εταιριών που αποτυγχάνουν στο test του Hausman η καθεμία ξεχωριστά.

Το γεγονός ότι τα υποδείγματα της αγοράς είναι ακατάλληλα σε πολλές περιπτώσεις περιορίζει σημαντικά τη χρησιμότητά τους για την ανάλυση χαρτοφυλακίου. Τα αποτελέσματα που εξάγουν από την έρευνά τους είναι άξια αναφοράς. Type I και Type II λάθη είναι αντιστρόφως ανάλογα το ένα με το άλλο αλλά για να καθορίσει κανείς τη δύναμη του test μια συγκεκριμένη εναλλακτική υπόθεση πρέπει να σχηματιστεί. Τα συγκεκριμένα tests που προτείνουν είναι έγκυρα για μια πλειάδα εναλλακτικών περιπτώσεων και έτσι αποφεύγουν την υιοθέτηση ενός λανθασμένου εναλλακτικού υποδείγματος. Η δύναμη του test θα ήταν σαφώς μεγαλύτερη με τη χρήση μιας κατάλληλης εναλλακτικής υπόθεσης. Η δύναμη των tests προσδιορισμού μπορεί να είναι αδύναμη και για άλλους λόγους επίσης. Το λάθος προσδιορισμού που αναφέρεται στο συγκεκριμένο άρθρο είναι έγκυρο μόνον στην περίπτωση όπου ο περιορισμός της ορθογωνιότητας ανάμεσα στον όρο ενόχλησης και στους εκτιμητές παραβιάζεται. Άλλες μορφές misspecification που έχουν να κάνουν με συντελεστές που μεταβάλλονται με το χρόνο ή δεν είναι γραμμικοί δεν εξετάζονται από τους R.D. Huang και H. Jo (1988). Παρά τον περιορισμό αυτό, οι R.D. Huang και H. Jo (1988) καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι περιπτώσεις ετεροσκεδαστικότητας ή misspecification είναι συχνές κάτω από όλες τις συνθήκες που διερευνήθηκαν.

Οι **Karathanassis και Patsos (1993)** παρατηρούν ότι το υπόδειγμα της αγοράς έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως τόσο για μεμονωμένες μετοχές όσο και για διάφορα χαρτοφυλάκια ανά τον κόσμο. Στην παρουσία ετεροσκεδαστικότητας οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων είναι αμερόληπτοι και συνεπείς αλλά δεν είναι αποτελεσματικοί ούτε ασυμπτωτικά αποτελεσματικοί. Προσθέτουν επίσης ότι όταν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα, τα συνήθη στατιστικά tests δεν είναι έγκυρα. Ένα πιο σημαντικό πρόβλημα είναι το mis-specification. Εάν το υπόδειγμα της αγοράς είναι λανθασμένα προσδιορισμένο, τότε οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων θα είναι μεροληπτικοί και ασυνεπείς.

Για τους παραπάνω λόγους είναι σημαντικό να καθορίσει κανείς εάν το υπόδειγμα της αγοράς είναι ετεροσκεδαστικό ή mis-specified ή και τα δύο ταυτόχρονα. Χρησιμοποιώντας μηνιαίες τιμές κλεισίματος, μερίσματα και αποδόσεις για 43 μετοχές από το χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών για την περίοδο από τις 31 Δεκεμβρίου 1986 έως τις 31 Δεκεμβρίου του 1990 βρήκαν ότι υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα στο υπόδειγμα της αγοράς. Τα tests που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα Goldfield και Quandt, Breusch και Pagan, Glejser, Modified Glejser, Spearman rank correlation, Kendall correlation, White test. Σημαντική ένδειξη για μη κανονικότητα στα κατάλοιπα των μετοχών όπως επίσης και στον δείκτη της αγοράς διαπιστώθηκε. Οι μη-κανονικές μετοχές ήταν πιο ετεροσκεδαστικές από τις κανονικές μετοχές.

Ορισμένα tests που χρησιμοποιήθηκαν για ανίχνευση αυτοσυσχέτισης στα κατάλοιπα των σειρών δεν επέδειξαν σημαντική σειριακή συσχέτιση. Μια σημαντική μη-στασιμότητα στην αστάθεια (volatility) των αποδόσεων και στα κατάλοιπα των σειρών ανιχνεύθηκε ισοδύναμα. Κάποια μορφή μη-γραμμικότητας στα κατάλοιπα του υποδείγματος της αγοράς βρέθηκε. Τα W και H tests έδειξαν ότι ένας σημαντικός αριθμός μετοχών ήταν τόσο ετεροσκεδαστικός όσο και λανθασμένα προσδιορισμένος. Το πρόβλημα όμως της ετεροσκεδαστικότητας είναι πιο σοβαρό από τον λανθασμένο προσδιορισμό του υποδείγματος.

Το Chow test έδειξε σημαντικές δομικές διαφορές στο υπόδειγμα της αγοράς και στη σταθερότητα του συντελεστή beta, η οποία δεν μειώθηκε σημαντικά ακόμη και μετά τη διόρθωση για ετεροσκεδαστικότητα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο γεγονός ότι το υπόδειγμα της αγοράς μπορεί να μην είναι έγκυρο στην περίπτωση όπου έχουν κερδοσκοπικές περιόδους. Τα προβλήματα επαυξάνονται εάν το παραδοσιακό υπόδειγμα της αγοράς χρησιμοποιηθεί σε αναδυόμενες αγορές όπως ήταν αυτή του χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών κατά την περίοδο που εξετάζεται στο συγκεκριμένο άρθρο.

Η μη-στασιμότητα, η αστάθεια του συντελεστή beta και η μη-γραμμικότητα των καταλοίπων παρέχουν σοβαρή υποστήριξη και δικαιολογούν τη χρησιμοποίηση εναλλακτικών μορφών των υποδειγμάτων αγοράς. Σε περιπτώσεις όπου τέτοια προβλήματα είναι προφανή, οι **Karathanassis και Patsos (1993)** ισχυρίζονται ότι είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί μια μορφή με μεταβλητό συντελεστή αντί για το υπόδειγμα της αγοράς που χρησιμοποιεί έναν σταθερό συντελεστή.

Οι **Karathanassis και Philippas (1993)** ερεύνησαν και βρήκαν ένδειξη ετεροσκεδαστικότητας στο υπόδειγμα της αγοράς για 43 μετοχές που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών. Η ετεροσκεδαστικότητα αναγνωρίστηκε με τη χρησιμοποίηση ενός παραδοσιακού test που προτείνεται από τον Glejser, του τροποποιημένου test του Glejser, του Breusch και Pagan όπως επίσης και του White.

Το δείγμα αποτελείτο από όλες τις μετοχές των εταιριών που παριστάνουν το γενικό δείκτη του χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για την συγκεκριμένη περίοδο. Ο δείκτης είναι ένας ισοδύναμα σταθμισμένος δείκτης ενώ τα μερίσματα δεν περιλαμβάνονται στον υπολογισμό του δείκτη.

Συνεπώς, σύμφωνα με τους Καραθανάση και Φίλιππα (1993), διαπιστώθηκε η ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας στην ελληνική αγορά. Στο άρθρο τους εξετάστηκαν 43 εταιρίες που οι μετοχές τους διαπραγματεύονταν στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών και στις οποίες βρέθηκε σημαντική ετεροσκεδαστικότητα.

Καθώς η ετεροσκεδαστικότητα φαίνεται πως αποτελεί πρόβλημα, η χρήση των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων είναι ακατάλληλη. Η χρήση του υποδείγματος της αγοράς ίσως να απαιτεί μια κατάλληλη διαδικασία που να διορθώνει τα προβλήματα που απορρέουν από την ετεροσκεδαστικότητα.

Στη συνέχεια, παρατίθενται 8 συγκεντρωτικοί πίνακες με τα κυριότερα εμπειρικά αποτελέσματα, που προκύπτουν από την έρευνά μας.

Πίνακας 1:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	**Μεθοδολογία**	**Δεδομένα**	**Σκοπός**	**Αποτελέσματα**
R. Richardson Pettit and Randolph Westerfield September 1974 Journal of Financial and Quantitative Analysis	Διαστρωματικές παλινδρομήσεις των πραγματικών αποδόσεων των αξιόγραφων πάνω στις δεσμευμένες προβλεπόμενες τιμές τους	Μηνιαίες επενδυτικές τιμές για όλες τις μετοχές του NYSE από τον Ιανουάριο του 1926 έως τον Ιούνιο του 1968	Εκτίμηση της αξιοπιστίας του Υποδείγματος της Αγοράς ως στάσιμη, στοχαστική διαδικασία παραγωγής της απόδοσης των αξιόγραφων	Οι προβλέψεις από το Υπόδειγμα της Αγοράς περιλαμβάνουν μια **μεροληψία** προς το μηδέν στις εκτιμήσεις των πραγματικών αποδόσεων των αξιόγραφων Οι δεσμευμένες προβλέψεις του Υποδείγματος της Αγοράς παρέχουν **μη στάσιμες μεροληπτικές εκτιμήσεις** των πραγματικών αποδόσεων Το μονοπαραγοντικό Υπόδειγμα Αγοράς **δεν προσαρμόζεται** κανονικά στις επιπτώσεις της αγοράς για την εκτίμηση της απόδοσης των αξιόγραφων
Gerald A. Pogue and Bruno H. Solnik December 1974 Journal of Financial and Quantitative Analysis	Διαστρωματικές παλινδρομήσεις	229 κοινές μετοχές 7 ευρωπαϊκών κρατών από τον Μάρτιο του 1966 έως τον Μάρτιο του 1971 + 65 αμερικάνικες μετοχές για συγκριτικούς σκοπούς	Μέτρηση του σχετικού μεγέθους και της σταθερότητας των διαφόρων παραμέτρων του υποδείγματος της αγοράς κατά τη διάρκεια 5 ετών	Το βήτα είναι ευαίσθητο στο μέγεθος του διαστήματος Οι τυπικές αποκλίσεις και οι τιμές του βήτα βρέθηκαν να είναι προβλεπόμενες τόσο στις ευρωπαϊκές αγορές όσο και στις ΗΠΑ

Πίνακας 2:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	Μεθοδολογία	Δεδομένα	Σκοπός	Αποτελέσματα
Menachem Brenner 1974 New York University	Fama and Roll's τεστ για σταθερότητα	Οι τιμές του S&P 500 σύνθετου δείκτη για 12 χιλιάδες εμπορεύσιμες ημέρες από την 1η Μαρτίου του 1928 έως τις 20 Αυγούστου του 1971	Εξέταση της σταθερότητας της κατανομής του συντελεστή αγοράς στις μεταβολές των τιμών των μετοχών	Ο δείκτης αγοράς δεν ακολουθεί μια στάσιμη και σταθερή διαδικασία
John D. Martin and Robert C. Klemkosky 1975 Journal of Business	Συσχετίσεις τάξεως ανάμεσα στις απόλυτες τιμές των καταλοίπων του Υποδείγματος της Αγοράς και των αποδόσεων αγοράς Bartlett τεστ Goldfield- Quandt τεστ	355 NYSE κοινές μετοχές από τον Απρίλιο του 1964 έως τον Ιούλιο του 1973	Παρουσίαση μιας στατιστικής ανάλυσης της υπόθεσης της ομοσκεδαστι-κότητας	Η ετεροσκεδαστικότητα δεν ήταν ένα σοβαρό πρόβλημα στο Υπόδειγμα της Αγοράς για την πλειοψηφία των μετοχών που εξετάστηκαν Το Υπόδειγμα της Αγοράς είναι ένα δυνατό υπόδειγμα με σεβασμό στην υπόθεση των ελαχίστων τετραγώνων της ομοσκεδαστικότητας

Πίνακας 3:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	Μεθοδολογία	Δεδομένα	Σκοπός	Αποτελέσματα
Robert C. Klemkosky And John D. Martin March 1975 Journal of Finance	Διαστρωματικές παλινδρομήσεις των βήτα συντελεστών και των διακυμάνσεων των καταλοίπων	350 NYSE καταγεγραμμένες κοινές μετοχές για δύο περιόδους από τον Ιούλιο του 1963 έως τον Ιούνιο του1968 και από τον Ιούλιο του 1968 έως τον Ιούνιο του 1973	Καθορισμός της επίπτωσης της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στα βj και της διακύμανσης του καταλοίπου Var (εj) στη διαδικασία διαφοροποίη-σης του χαρτοφυλα-κίου	Τα επίπεδα διαφοροποίησης για χαρτοφυλάκια υψηλού βήτα έναντι χαρτοφυλακίων που έχουν χαμηλό βήτα ήταν σημαντικά διαφορετικά με τα χαρτοφυλάκια υψηλού βήτα να απαιτούν μεγαλύτερο αριθμό αξιόγραφων για να επιτύχουν το ίδιο επίπεδο διαφοροποίησης
Ahmed Belkaoui September 1977 Journal of Finance	Spearman συντελεστή τάξεως συσχέτισης Bartlett τεστ Goldfield and Quandt τεστ	45 τυχαία επιλεγμένα κοινές μετοχές από το Χρηματιστήριο του Τορόντο από τον Ιανουάριο του 1971 έως τον Δεκέμβριο του 1974	Παρουσίαση καναδικής ύπαρξης ετεροσκεδα-στικότητας στο Υπόδειγμα της Αγοράς	Βρέθηκε ένδειξη ετεροσκεδαστικότη-τας στο Υπόδειγμα της Αγοράς

Πίνακας 4:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	Μεθοδολογία	Δεδομένα	Σκοπός	Αποτελέσματα
Arthur E. Gooding and Terence P. O' Malley December 1977 Journal of Financial and Quantitative Analysis	Ζευγάρια t-τεστς, τα οποία δείχνουν ξεχωριστά το βαθμό στασιμότητας για κάθε βήτα χαρτοφυλακίου Ανάλυση συσχέτισης	200 μεγαλύτερες αμερικανικές βιομηχανικές κοινές μετοχές (Μάιος 1974) S&P 425 βιομηχανικών σαν προσέγγιση αγοράς	Εξέταση της στασιμότητας των συντελεστών βήτα	Οι μη-προσαρμοσμένοι βήτα συντελεστές για καλά διαφοροποιημένα χαρτοφυλάκια ακραίων επιπέδων κινδύνου είναι σημαντικά μη στάσιμοι
Jack Clark Francis and Frank J. Fabozzi June 1979 Journal of Financial and Quantitative Analysis	Εικονικής μεταβλητής υπόδειγμα παλινδρόμησης	694 NYSE μετοχές χρησιμοποιήθη-καν από τον Δεκέμβριο του 1965 έως τον Δεκέμβριο του 1971 συμπεριλαμβανο-μένου	Έλεγχος εάν το μονομεταβλη-τό Υπόδειγμα της Αγοράς είναι ένα δυνατό υπόδειγμα ή εάν τα αλφα και/ή τα βήτα του αλλάζουν με τις συνολικές συνθήκες που επικρατούν στις επιχειρήσεις	Το μονομεταβλητό Υπόδειγμα της Αγοράς επηρεάζεται από τις μακροοικονομικές συνθήκες

Πίνακας 5:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	**Μεθοδολογία**	**Δεδομένα**	**Σκοπός**	**Αποτελέσματα**
Roger P. Bey and Georges E. Pinches June 1980 Journal of Financial and Quantitative Analysis	Μη κατασκευάσιμα παραμετρικά τεστ: Bartlett and Goldfield/ Quandt Μη κατασκευάσιμα μη παραμετρικά τεστ: Kendall and Peak Κατασκευάσιμα παραμετρικά: Glejser and modified Glejser	665 εταιρίες του Κέντρου Έρευνας των τιμών των αξιόγραφων-μηνιαίος φάκελος απόδοσης από τον Ιανουάριο του1962 έως τον Δεκέμβριο του 1976	Επίλυση των αντιφάσεων των προηγού-μενων μελετών για την ετεροσκεδα-στικότητα Αναγνώριση της ύπαρξης ετεροσκεδα-στικότητας στα αξιόγραφα Συζήτηση των χρηματοοικο-νομικών επιπλοκών της ετεροσκεδαστι κότητας στο Υπόδειγμα της Αγοράς	Η ετεροσκεδαστικότητα εμφανίζεται ευρέως/ μεταβάλλεται Ο σχηματισμός χαρτοφυλακίων δεν απαλλάσσει από την ετεροσκεδαστικότητα Κανένα τεστ δεν έδωσε ένα ανώτερο τεστ για την ύπαρξη ή την απουσία της ετεροσκεδαστικότη-τας Ο δείκτης αγοράς δεν επηρεάζει σημαντικά το μέγεθος της ετεροσκεδαστικότη-τας
Carmelo Giaccotto and Mukhtar M. Ali December 1982 Journal of Finance	Δύο κατηγορίες βέλτιστων κατανομής-ελεύθερων τεστ για ετεροσκεδαστικό-τητα (Δυνατά στη μη κανονικότητα)	Μηνιαίοι ρυθμοί απόδοσης σε 384 αξιόγραφα τυχαία επιλεγμένα από την Compustat Tapes από τον Ιανουάριο του 1965 έως τον Δεκέμβριο του 1977	Έλεγχος της υπόθεσης της σταθερής διακύμανσης στο Υπόδειγμα της Αγοράς	Η υπόθεση δεν ευσταθεί για την πλειοψηφία των μετοχών Πιθανώς η διακύμανση αυξάνει με το R^2_{mt}

Πίνακας 6:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	**Μεθοδολογία**	**Δεδομένα**	**Σκοπός**	**Αποτελέσματα**
Stephen J. Brown and Christopher B. Barry July 1984 Journal of Finance	Μέσα αναδρομικά κατάλοιπα για τον Ιανουάριο του 1931 έως τον Δεκέμβριο του 1980 και Συσχέτιση ενός βήματος μπροστά καταλοίπων με τον δείκτη της αγοράς για όλους αυτούς τους μήνες	Όλες οι μετοχές του NYSE από τον Δεκέμβριο του 1926 έως τον Δεκέμβριο του 1980	Εξέταση της υπόθεσης ότι οι παρατηρούμε-νες ανωμαλίες στις επιπλέον αποδόσεις μπορούν να ερμηνευθούν από λανθασμένο προσδιορισμό του υποδείγματος αγοράς προκειμένου να εκτιμηθεί ο συστηματικός κίνδυνος	Απόδειξη ότι οι παρατηρούμενες ανωμαλίες στις επιπλέον αποδόσεις συνδέονται με λανθασμένο προσδιορισμό του Υποδείγματος της Αγοράς που χρησιμοποιείται προκειμένου να εκτιμηθεί ο συστηματικός κίνδυνος
Amihud Dotan and Aharon Ofer 1984 Journal of Banking and Finance	Μεταβλητοί παράμετροι παλινδρόμησης ώστε να εκτιμήσουν και να ελέγξουν το νέο υπόδειγμα	93 εταιρίες επιλεγμένες από το CRSP για την περίοδο 1967-1971 και 100 εταιρίες για την περίοδο 1970–1974	Παρουσίαση ενός εναλλακτικού υποδείγματος της αγοράς στο οποίο το βήτα μεταβάλλεται με τον χρόνο και σύγκριση	Κανένα υπόδειγμα δεν παρουσιάζει καθαρό πλεονέκτημα έναντι του άλλου Οι διαφορές στα λάθη πρόβλεψης ήταν μάλλον μικρές παρόλο που ελαφρά ευνοϊκά διακείμενες προς το υπόδειγμα των μεταβλητών παραμέτρων

Πίνακας 7:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	Μεθοδολογία	Δεδομένα	Σκοπός	Αποτελέσματα
John M. Parkinson 1987 Applied Economics	Ανάλυση παλινδρόμησης	Μερικές εμπειρικές μελέτες που αναφέρουν μια τιμή του r^2 από εμπειρικό έλεγχο του Υποδείγματος της Αγοράς ή του CAPM	Έλεγχος εάν υπάρχει κάποιο μοντέλο σε όρους της επεξηγηματικής δύναμης του (r^2)	Άλλες μεταβλητές μπορεί να υπάρχουν Η αύξηση του μεγέθους του χαρτοφυλακίου εξαλείφει πολλά λάθη μέτρησης και συνδέεται με υψηλότερο r^2 Η χρήση ενός Υποδείγματος της Αγοράς αντί του CAPM συνδέεται με υψηλότερο r^2 Το Υπόδειγμα της Αγοράς έχει μεγαλύτερη επεξηγηματική δύναμη
Roger D. Huang and Hoje Jo 1988 Journal of Banking and Finance	White's τεστ ετεροσκεδαστικότητας Hausman's τεστ προσδιορισμού	452 εταιρίες καταχωρημένες στο CRSP 1984 από τον Ιανουάριο του 1960 έως τον Δεκέμβριο του 1983	Διερεύνηση της ύπαρξης ετεροσκεδαστικότητας και λανθασμένου προσδιορισμού (misspecification) στα υποδείγματα της αγοράς	Η ετεροσκεδαστικότητα εμφανίζεται πιο συχνά από τον λανθασμένο προσδιορισμό του υποδείγματος (misspecification)

Πίνακας 8:

Συγγραφείς Ημερομηνία Περιοδικό	Μεθοδολογία	Δεδομένα	Σκοπός	Αποτελέσματα
G. Karathanassis And N. Philippas 1993 Managerial and Decision Economics	Glejser's τεστ Modified Glejser's τεστ Breusch and Pagan White's τεστ	43 μετοχές του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών	Έλεγχος του Υποδείγματος της Αγοράς για ετεροσκεδα-στικότητα χρησιμοποιώ-ντας δεδομένα από ένα μικρό χρηματιστήριο	Ένδειξη ετεροσκεδαστικότη-τας στο Υπόδειγμα της Αγοράς
G. Karathanassis and C. Patsos 1993 Applied economics	Goldfield and Quandt's τεστ Breusch and Pagan's τεστ Glejser's τεστ Modified Glejser's τεστ Spearman Συσχέτιση τάξεως Kendall Συσχέτιση White's τεστ	43 μετοχές του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών από τον Δεκέμβριο του 1986 έως τον Δεκέμβριο του 1990	Έλεγχος για ετεροσκεδα-στικότητα και θέματα λανθασμένου υποδείγματος (misspecificati on)στο Υπόδειγμα της Αγοράς	Διάσπαρτη ένδειξη ετεροσκεδαστικότη-τας στο Υπόδειγμα της Αγοράς Ένδειξη μη κανονικότητας στα κατάλοιπα των μετοχών όπως επίσης και στον δείκτη αγοράς βρέθηκε

Κεφάλαιο 5

Το Υπόδειγμα Τριών Διαστάσεων Αποδόσεως και Κινδύνου

Θα αναφερθούμε στο τρισδιάστατο μοντέλο κινδύνου και απόδοσης, το οποίο χρησιμοποιεί ένα σύνολο επικίνδυνων αξιόγραφων και ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκονται μέσα στο σύνορο ελάχιστης διακύμανσης αυτών των αξιόγραφων. Αποδεικνύεται ότι η ανεπάρκεια ενός χαρτοφυλακίου που έχει μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση από την αναμενόμενη απόδοση του συνολικού χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκφράσουμε την αναμενόμενη απόδοση σε ένα αξιόγραφο που εξετάζουμε σαν μια ακριβή γραμμική συνάρτηση του σχετικού ρίσκου που έχει αυτό το χαρτοφυλάκιο και ενός επιπρόσθετου ρίσκου που υφίσταται από την κίνηση μέσα σε αυτό το σύνορο χαρτοφυλακίου.

Σύμφωνα με το τρισδιάστατο μοντέλο ένα χαρτοφυλάκιο βρίσκεται μέσα στο σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου εάν και μόνο εάν η αναμενόμενη απόδοση ενός αξιόγραφου που εξετάζεται μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός του συστηματικού ρίσκου του χαρτοφυλακίου και ενός επιπρόσθετου ρίσκου που οφείλεται στην κίνηση μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου. Χρησιμοποιώντας αυτά τα θεωρητικά αποτελέσματα θα αμφισβητήσουμε την εγκυρότητα του υποδείγματος της αγοράς όταν η επιλεγμένη προσέγγιση βρίσκεται μέσα στο σύνορο του χαρτοφυλακίου.

Εισαγωγή

Η σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία προσφέρει ορισμένες ακριβείς σχέσεις απόδοσης-βήτα, η καθεμία από τις οποίες απορρέει από την αναμενόμενη επάρκεια της απόδοσης-διακύμανσης ενός δοθέντος χαρτοφυλακίου. Το Υπόδειγμα της Αποτίμησης των Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM) των Sharpe (1964), Lintner (1965) και Mossin (1966) είναι μια συνέπεια της αναμενόμενης επάρκειας απόδοσης και διακύμανσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Ο Black (1972) γενίκευσε τα αποτελέσματα των προηγούμενων σε έναν αναμενόμενο κόσμο απόδοσης και διακύμανσης όπου δεν ήταν επιτρεπτό να δανείσει ή να δανειστεί κανείς χωρίς κίνδυνο (no risk less borrowing or lending). Με αυτό τον τρόπο γίνεται φανερό ότι η αναμενόμενη επάρκεια της απόδοσης και διακύμανσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει μια ακριβής γραμμική σχέση ισορροπίας ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση ενός αξιόγραφου και του σχετικού ρίσκου που αυτό έχει μέσα στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Ο Roll (1977) απέδειξε ότι η αναμενόμενη αποτελεσματικότητα απόδοσης και διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκφράσει κανείς την αναμενόμενη απόδοση σε ένα αξιόγραφο που μελετάται σαν μια ακριβή γραμμική του σχετικού ρίσκου που έχει σε αυτό το χαρτοφυλάκιο.

Η ακριβής γραμμική αναμενόμενη σχέση απόδοσης και βήτα έχει χρησιμοποιηθεί κατά κόρον τόσο στον ακαδημαϊκό χώρο όσο και στον επιχειρηματικό χώρο. Μια τέτοια σχέση έχει δύο κύριες εφαρμογές. Πρώτον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη λήψη αποφάσεων σχετικά με το κεφαλαιακό κόστος, σε πολιτικές κεφαλαιακής δομής αλλά και στον καθορισμό των τιμών των μετοχών. Δεύτερον, δίνει τις κατευθυντήριες γραμμές για το πώς θα μετρήσει κανείς την αποτελεσματικότητα των αγορών και για το πώς θα αξιολογήσει την επενδυτική απόδοση. Η εμπειρική εξέταση για το αν πράγματι υπάρχει μια ακριβής αναμενόμενη σχέση απόδοσης και κινδύνου αποτέλεσε αντικείμενο ενδιαφέροντος για πάρα πολλές μελέτες. Οι εμπειρικές μελέτες, όπως αυτές των Friend και Blume (1970), Black et al. (1972), και Fama και Mac Beth για παράδειγμα απεκάλυψαν ότι ενώ υπάρχει μια θετική σχέση ανάμεσα στις υπερβολικές αποδόσεις και τα βήτα, εν τούτοις υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις από την προβλεπόμενη σχέση. Πρόσφατα εμπειρικά αποτελέσματα απέρριψαν την αποτελεσματικότητα για πολλές προσεγγίσεις της αγοράς.

Η απόρριψη μιας ακριβής αναμενόμενης γραμμικής σχέσης απόδοσης και βήτα συνιστά ότι οι προσεγγίσεις αγοράς που χρησιμοποιούνται δεν είναι αποτελεσματικές (Roll, 1977). Επιπρόσθετα, άμεσες δοκιμές απέρριψαν την αποτελεσματικότητα απόδοσης και διακύμανσης για πολλές προσεγγίσεις της αγοράς. Έτσι, εάν μια προσέγγιση της αγοράς βρίσκεται μέσα στο σύνορο του χαρτοφυλακίου, τότε η ακριβής σχέση απόδοσης και διακύμανσης δεν ισχύει ακριβώς και μια άλλη μεταβλητή ή και άλλες μεταβλητές σχετίζονται με τον υπολογισμό των αναμενόμενων αποδόσεων. Πρέπει να επισημανθεί ότι δεν έχει δοθεί σημασία στο πώς η ακριβής σχέση απόδοσης και βήτα αλλάζει εάν η προσέγγιση αγοράς που χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε τα βήτα βρίσκεται τελικά μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου και όχι πάνω σε αυτό. Θα δούμε στη συνέχεια μια τρισδιάστατη σχέση κινδύνου και απόδοσης που βασίζεται πάνω σε ένα χαρτοφυλάκιο που δεν βρίσκεται πάνω στο σύνορο χαρτοφυλακίου. Ένα χαρτοφυλάκιο βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου εάν και μόνο εάν η αναμενόμενη απόδοση ενός οποιουδήποτε αξιόγραφου που μελετάται εκφράζεται σαν γραμμική συνάρτηση του συστηματικού κινδύνου που έχει αυτό το χαρτοφυλάκιο και ενός επιπρόσθετου κινδύνου που οφείλεται στην κίνηση μέσα στο σύνορο. Με τη χρησιμοποίηση αυτών των αποτελεσμάτων αμφισβητούμε προηγούμενες θεωρήσεις που εφαρμόζουν μια ακριβή αναμενόμενη σχέση απόδοσης και βήτα σαν εργαλείο όταν η επιλεγμένη προσέγγιση βρίσκεται μέσα στο σύνορο.

Συμβολισμός και υποθέσεις

Υποθέτουμε ένα σύνολο αξιόγραφων με n αξιόγραφα όπου $n \geq 3$. Οι αποδόσεις σε αυτά τα αξιόγραφα κατά τη διάρκεια μιας μόνης αλλά μη καθορισμένης περιόδου δηλώνονται συλλογικά από το διάνυσμα **R**, το οποίο ακολουθεί μια πολυμεταβλητή κατανομή με διάνυσμα αναμενόμενων αποδόσεων **μ** και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων (VC) **V**. Ένα χαρτοφυλάκιο p είναι ένα n-διάνυσμα βαρών $\mathbf{x_p}$. Τα στοιχεία $\mathbf{x_{i,p}}$ παριστάνουν το ποσοστό του πλούτου που επενδύεται στο αξιόγραφο i. Τα βάρη ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\sum i \; x_{i,p} = 1^T x_p = 1$$

Η αναμενόμενη απόδοση και διακύμανση της απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο p, R_p δίδονται αντίστοιχα από τους ακόλουθους τύπους

$$E\,(R_p) = x^T{}_P\,\mu \text{ και } V\,(R_p) = x^T{}_P V\, x_p$$

Υιοθετούμε τρεις υποθέσεις:

1. ο V είναι ένας αντιστρέψιμος, θετικά ορισμένος πίνακας
2. η τάξη του πίνακα (μ 1) είναι 2
3. επιτρέπεται το short-selling

Ιδιότητες των χαρτοφυλακίων που βρίσκονται μέσα στο σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο p, που βρίσκεται μέσα στην περιοχή που δημιουργείται από το σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου και ένα χαρτοφυλάκιο q, που βρίσκεται πάνω στο σύνορο και έχει την ίδια αναμενόμενη απόδοση με το χαρτοφυλάκιο p. Η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου p ισούται με την απόδοση που έχει το χαρτοφυλάκιο q του συνόρου συν έναν επιπλέον όρο U_p. Επομένως,

$$R_p = R_q + U_p \ (1)$$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονίσουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση του όρου U_p ισούται με το μηδέν και επίσης ο όρος αυτός είναι ασυσχέτιστος με την απόδοση του χαρτοφυλακίου q, που βρίσκεται πάνω στο σύνορο.

Fig.1

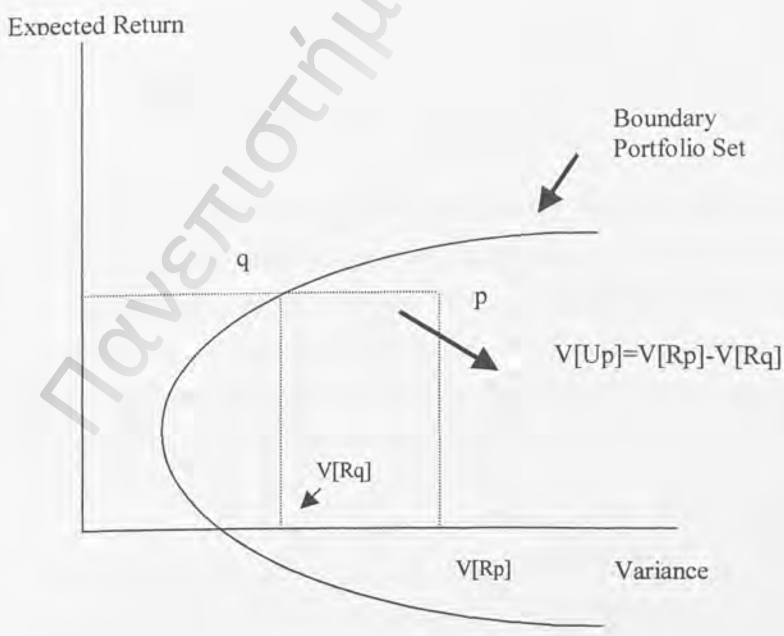


Figure 1: Χαρτοφυλάκια p και q, τα οποία έχουν $\mu_p = \mu_q$

Συνεπώς,

$$E\,[R_p] = E[R_q + U_p]$$
$$E\,[R_p] = E[R_q] + E[U_p]$$
$$E\,[R_p] = E[R_q]$$
$$\acute{\eta}$$
$$\mu_p = \mu_q$$

Η διακύμανση του ρυθμού απόδοσης σε ένα χαρτοφυλάκιο q, που βρίσκεται πάνω στο σύνορο ισούται με την συνδιακύμανση ανάμεσα στις αποδόσεις των χαρτοφυλακίων p και q. Άρα,

$$V\,(R_q) = Cov\,(R_q, R_p)\ (2)$$

Η σχέση (2) δείχνει ότι τα χαρτοφυλάκια p και q είναι θετικά συσχετισμένα. Καθώς $V\,(R_q) < V\,(R_p)$ και $Cov\,(R_q, R_p) > 0$, ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στα R_p και R_q είναι μεγαλύτερος του μηδενός. Επίσης,

$$V\,(R_p) = V\,(R_q + U_p)\ (3)$$
$$V\,(R_p) = V\,(R_q) + V\,(U_p) + 2\,Cov\,(R_q, U_p)$$
$$\textit{και εφόσον}\ \ Cov\,(R_q, U_p) = 0$$
$$V\,(R_p) = V\,(R_q) + V\,(U_p)\ .\ (4)$$

Συμπερασματικά, η διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου που βρίσκεται μέσα στο σύνορο μπορεί να διαιρεθεί στη διακύμανση του χαρτοφυλακίου που βρίσκεται πάνω στο σύνορο και στη διακύμανση του επιπρόσθετου και ασυσχέτιστου καταλοίπου.

Όσο πιο μικρή είναι η διακύμανση του καταλοίπου, δηλαδή του όρου U_p τόσο πιο κοντά βρίσκεται το χαρτοφυλάκιο p στο σύνορο. Θα δούμε επίσης με τι ισούται ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στην απόδοση R_p και στην απόδοση του U_p.

$$\rho_{Rp,\,Up} = Cov\,(R_p, U_p)\ /\ [V\,(R_p)]^{1/2}[V\,(U_p)]^{1/2}$$
$$\rho_{Rp,\,Up} = Cov\,(R_q + U_p, U_p)\ /\ [V\,(R_p)]^{1/2}[V\,(U_p)]^{1/2}$$
$$\rho_{Rp,\,Up} = \{Cov\,(R_q, U_p) + Cov\,(U_p, U_p)\}\ /\ [V\,(R_p)]^{1/2}[V\,(U_p)]^{1/2}$$
$$\textit{όπου}\ Cov\,(R_q, U_p) = 0$$
$$\rho_{Rp,\,Up} = Cov\,(U_p, U_p)\ /\ [V\,(R_p)]^{1/2}[V\,(U_p)]^{1/2}$$

Επομένως,

$$\rho_{Rp,\,Up} = [V\,(U_p)]^{1/2} \,/\, [V\,(R_p)]^{1/2}$$

Συμπερασματικά, όσο πιο μεγάλη είναι η διακύμανση του U_p, τόσο πιο μεγάλος θα είναι και ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στην απόδοση του χαρτοφυλακίου p και του U_p.

Τελικά, η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση μιας μετοχής j και της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου p δίδεται από τη σχέση

$$Cov\,(R_j,\, R_p) = Cov\,(R_j,\, R_q + U_p) \quad (5)$$

ή ισοδύναμα

$$Cov\,(R_j,\, R_p) = Cov\,(R_j,\, R_q) + Cov\,(R_j,\, U_p) \quad (6)$$

Επομένως, η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση μιας μετοχής και ενός χαρτοφυλακίου που βρίσκεται μέσα σε ένα σύνορο μπορεί να διαιρεθεί σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος έχουμε τη συνδιακύμανση ανάμεσα στις αποδόσεις μιας μετοχής και σε ένα χαρτοφυλάκιο συνόρου, που έχει ακριβώς την ίδια αναμενόμενη απόδοση με το επιλεγμένο χαρτοφυλάκιο, το οποίο βρίσκεται μέσα στο σύνορο μας. Ο δεύτερος όρος παριστάνει τη συνδιακύμανση που υφίσταται ανάμεσα στην απόδοση του αξιόγραφου και του καταλοίπου.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο δεύτερος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης (6) μπορεί να εκφραστεί ως τη διαφορά ανάμεσα στον κίνδυνο της μετοχής j σε ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται μέσα στο σύνορο και τον κίνδυνο της μετοχής j στο σύνορο. Τα δύο αυτά χαρτοφυλάκια p και q έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Συνεπώς, η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής j και την απόδοση του καταλοίπου δείχνει το επιπλέον ρίσκο που υπάρχει από την κίνηση μέσα στο σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου. Καθώς ο επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο επιθυμεί μεγαλύτερες αναμενόμενες αποδόσεις από μικρότερες και λιγότερο κίνδυνο από μεγαλύτερο, τότε ο επενδυτής μας απαιτεί μια έκπτωση για να δεχθεί να πάρει το επιπλέον ρίσκο.

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τον ορισμό του τρισδιάστατου μοντέλου.

Λήμμα 1

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το χαρτοφυλάκιο p βρίσκεται μέσα στο σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου.
2. Υπάρχει ένα διάνυσμα $u_p \neq 0$ όπου το 0 παριστάνει ένα n-διάνυσμα μηδενικών και

$$x_p = V^{-1} (\mu\ 1)\, A^{-1} (\mu_p\ 1)^T + V^{-1} u_p, \quad (7)$$

όπου x_p είναι ένα n-διάνυσμα που χαρακτηρίζει το χαρτοφυλάκιο p, q είναι το χαρτοφυλάκιο του συνόρου, A είναι ένας (2, 2) πίνακας πληροφόρησης και u_p είναι ένα n-διάνυσμα με στοιχεία τις συνδιακυμάνσεις ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής και του καταλοίπου. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός με στοιχεία τα $a = \mu^T V^{-1}\mu$, $b = \mu^T V^{-1} 1$ και $c = 1^T V 1$.

Η εξίσωση (7) μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή: $x_p = x_q + x_{up}$ όπου $x_{up} = V^{-1} u_p$. Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις μπορούμε να δούμε ότι $1^T x_{up} = 0$, $x^T_{up} \mu = 0$ και $x^T_{up} V x_{up} = x^T_{up} V x_p <> 0$. Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της εξίσωσης (7) με $x^T_p V$ παίρνουμε $V[R_p] = V[R_q] + x^T_p u_p$.

Όσο πιο κοντά είναι η θέση του χαρτοφυλακίου p στο σύνορο τόσο πιο μικρή θα είναι η τιμή του όρου $x^T_p u_p$.

Πόρισμα 1

Οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το χαρτοφυλάκιο p βρίσκεται μέσα στο σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου (όπου $\mu_p > b/c$).
2. Υπάρχει ένα διάνυσμα $u_p \neq 0$, όπου το 0 παριστάνει ένα n-διάνυσμα μηδενικών και

$$\mu = r_{zp}\, 1 + (\mu_p - \mu_{zp})\, (V x_p - u_p) / V(R_q) \quad (8)$$

όπου το μ_p εκφράζει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου p, μ_{zp} εκφράζει την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου που βρίσκεται πάνω στο σύνορο και του οποίου η απόδοση είναι ασυσχέτιστη με την απόδοση του χαρτοφυλακίου q και την απόδοση του χαρτοφυλακίου p και επιπλέον $\mu_p = \mu_q$.

Απόδειξη του πορίσματος 1:

Ευθύ: Ας υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο p βρίσκεται μέσα στο σύνορο. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $u_p \neq 0$, όπου το 0 είναι ένα n- διάνυσμα μηδενικών και

$$x_p = V^{1}\,(\mu\ 1)\,A^{-1}\,(\mu_p\,1)^T + V^{1}\,u_p, \quad (A1)$$

όπου x_p είναι ένα n-διάνυσμα που χαρακτηρίζει το χαρτοφυλάκιο p, $\mu_p = \mu_q$, q είναι το χαρτοφυλάκιο του συνόρου, A είναι ένας (2, 2) πίνακας πληροφόρησης και u_p είναι ένα n-διάνυσμα με στοιχεία τις συνδιακυμάνσεις ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής και του καταλοίπου. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός με στοιχεία τα

$$a = \mu^T V^{1}\mu, \quad b = \mu^T V^{1} 1 \text{ και } c = 1^T V 1.$$

Για να αποδείξουμε το πόρισμα χρησιμοποιούμε το λήμμα όπως είναι φανερό.

Εάν αναδιοργανώσουμε τη σχέση **A1** τότε έχουμε:

$$V x_p - u_p = (\mu\ 1)\,A^{-1}\,(\mu_p\,1)^T, \quad (A2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμική άλγεβρα, το διάνυσμα $V x_p - u_p$ μπορεί να εκφραστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός του διανύσματος **μ** και ενός διανύσματος **k** που είναι ορθογώνιο τόσο στο **μ** όσο και στο **1**.

$$V x_p - u_p = g_1\,\mu + g_2\,1 + k, \quad (A3)$$

όπου τα g_1 και g_2 είναι σταθερές και

$$k^T\mu = 0, \quad (A4)$$

και

$$k^T 1 = 0, \quad (A5)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση A3 με k^T προκύπτει

$$k^T\,(V x_p - u_p) = g_1\,k^T\mu + g_2 k^T 1 + k^T k$$

και εάν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις Α4 και Α5 έχουμε

$$k^T (V x_p - u_p) = k^T k. \quad (A6)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (Α2) με k^T και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Α4) και (Α5), έχουμε ότι

$$k^T (V x_p - u_p) = 0 \quad (A7)$$

Ένας συνδυασμός των εξισώσεων (Α6) και (Α7) μας δίνει $k = 0$, όπου το 0 είναι το n- διάνυσμα των μηδενικών. Έτσι,

$$V x_p - u_p = g_1 \mu + g_2 1 \quad (A8)$$

Πολλαπλασιάζοντας πρώτα στη σχέση (Α8) με x^T_q και σημειώνοντας ότι $Cov [R_q, R_p] = V[R_q]$, $x^T_q u_p = 0$ και $\mu_p = \mu_q$, βρίσκουμε ότι

$$V[R_q] = g_1 \mu_p + g_2 \quad (A9)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (Α8) με x^T_{zp} και σημειώνοντας ότι $x^T_{zp} u_p = 0$ τότε έχουμε ότι

$$0 = g_1 \mu_{zp} + g_2. \quad (A10)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων (Α9) και (Α10) προκύπτει

$$g_1 = V[R_q] / (\mu_p - \mu_{zp}) \quad (A11)$$

και

$$g_2 = - V[R_q] \mu_{zp} / (\mu_p - \mu_{zp}) \quad (A12)$$

Αντικαθιστώντας την (Α11) και (Α12) στην εξίσωση (Α8) και λύνοντας την προκύπτουσα εξίσωση ως προς μ έχουμε

$$\mu = \mu_{zp} 1 + (\mu_p - \mu_{zp}) \ (V x_p - u_p) / V[R_q] \quad (A13)$$ όπου $\mu_p = \mu_q$.

Αντίστροφο: Με τη βοήθεια της εξίσωσης (A13) αποδεικνύουμε ότι

$$\boldsymbol{V x_p = g_1 \mu + g_2 1 + u_p} \quad \textbf{(A14)}$$

όπου τα $\boldsymbol{g_1}$ και $\boldsymbol{g_2}$ δίδονται από τις εξισώσεις (A11) και (A12), αντίστοιχα και $\boldsymbol{u_p \neq 0}$, όπου 0 είναι το διάνυσμα των μηδενικών.

Η τελευταία εξίσωση παρουσιάζει το διάνυσμα $\boldsymbol{V x_p}$ των συνδιακυμάνσεων σαν ένα γραμμικό συνδυασμό του διανύσματος της αναμενόμενης απόδοσης και ενός διανύσματος $\boldsymbol{u_p}$. Σαν συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι το γεγονός ότι το χαρτοφυλάκιο p δεν είναι πάνω στο σύνορο.

Το πόρισμα αυτό δείχνει τις δύο κοινές υποθέσεις:

a. Το χαρτοφυλάκιο p βρίσκεται μέσα στο σύνορο του συνολικού χαρτοφυλακίου και
b. Την εγκυρότητα μιας γραμμικής σχέσης ανάμεσα στο διάνυσμα της αναμενόμενης απόδοσης του αξιόγραφου και των διανυσμάτων $V\ x_p$ και $u_p \neq 0$, όπου το 0 παριστάνει ένα n-διάνυσμα μηδενικών.

Εάν δοθεί ένα σύνολο n επικίνδυνων αξιόγραφων, όπου $n \geq 3$ θα υπάρχει πάντα ένας άπειρος αριθμός χαρτοφυλακίων με την ίδια αναμενόμενη απόδοση που βρίσκεται μέσα στο σύνορο. Είναι προφανές ότι για κάθε ένα από αυτά τα χαρτοφυλάκια υπάρχει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στο διάνυσμα της αναμενόμενης απόδοσης του αξιόγραφου, το διάνυσμα των συνδιακυμάνσεων του αξιόγραφου και το διάνυσμα που έχει ως στοιχεία τις συνδιακυμάνσεις ανάμεσα στις αποδόσεις των μετοχών και του αντίστοιχου καταλοίπου. Είναι χρήσιμο να παραθέσουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mu_j = \mu_{zp} + (\mu_p - \mu_{zp})\, Cov(R_j, R_p) / V(R_q) - (\mu_p - \mu_{zp})\, Cov(R_j, U_p) / V(R_q)$$

για $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Με αυτή τη μορφή είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η αναμενόμενη απόδοση σε ένα αξιόγραφο ή σε ένα χαρτοφυλάκιο, είτε αυτό είναι είτε όχι πάνω στο σύνορο, μπορεί να εκφραστεί σαν μια γραμμική συνάρτηση του κινδύνου που έχει ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται πάνω στο σύνορο και ενός επιπρόσθετου κινδύνου του αξιόγραφου ή του χαρτοφυλακίου που κινείται μέσα σε αυτό το σύνορο. Δεν είναι η συνολική διακύμανση του χαρτοφυλακίου p και η συνολική διακύμανση του καταλοίπου που επηρεάζουν τις αναμενόμενες αποδόσεις, αλλά μόνον η συνδιακύμανση ανάμεσα στα R_j και R_q και η συνδιακύμανση ανάμεσα στα R_j και U_p. Καθώς ένας επενδυτής απαιτεί μια έκπτωση για να αναλάβει το επιπλέον ρίσκο του αξιόγραφου ή του χαρτοφυλακίου που κινείται μέσα στο σύνορο, η σχέση ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i και της $Cov(R_j, U_p)$ είναι αρνητική.

Γραφικά η παραπάνω εξίσωση είναι ένα γραμμικό επίπεδο. Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε αναμενόμενες αποδόσεις και στους δύο οριζόντιους άξονες έχουμε ***Cov(Rj, Rp)*** και $\boldsymbol{Cov(R_j, R_p)}$ αντίστοιχα. Το σημείο όπου το επίπεδο τέμνει τον κατακόρυφο άξονα παριστάνει την αναμενόμενη απόδοση στο σύνορο χαρτοφυλακίου του οποίου ο ρυθμός απόδοσης είναι ασυσχέτιστος με το ρυθμό απόδοσης του χαρτοφυλακίου q. Πρέπει να επισημανθεί ότι όλες οι μεμονωμένες μετοχές ή τα χαρτοφυλάκια βρίσκονται πάνω σε αυτό το γραμμικό επίπεδο. Εάν η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου q είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη απόδοση σε ένα σύνορο ορθογώνιου χαρτοφυλακίου τότε για ένα δεδομένο επίπεδο $\boldsymbol{Cov(R_j, R_p)}$, μετοχές ή χαρτοφυλάκια με μεγαλύτερα επίπεδα $\boldsymbol{Cov(R_j, U_p)}$ έχουν μικρότερες αναμενόμενες αποδόσεις. Για ένα δεδομένο επίπεδο $\boldsymbol{Cov(R_j, U_p)}$, μετοχές ή χαρτοφυλάκια που έχουν υψηλότερα επίπεδα $\boldsymbol{Cov(R_j, R_p)}$ έχουν υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις.

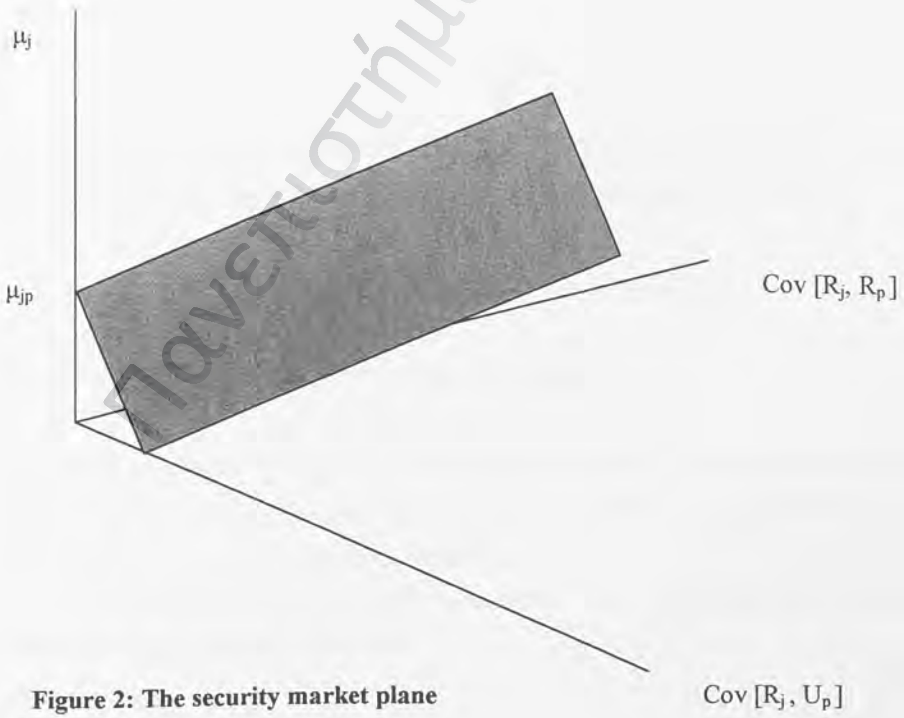


Figure 2: The security market plane

Πόρισμα 2

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Το χαρτοφυλάκιο βρίσκεται μέσα στο σύνορο
2. $\boldsymbol{\beta_p = [V(R_q)/ V(R_p)]\, \beta_q + [V(U_p)/ V(R_p)]\, \beta_u}$

όπου q είναι το χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται πάνω στο σύνορο με $\boldsymbol{\mu_p = \mu_q}$, με $\boldsymbol{\beta_p}$ το n-διάνυσμα με στοιχεία $\boldsymbol{Cov(R_j, R_p) \,/\, V(R_p)}$, $\boldsymbol{\beta_q}$ είναι ένα n-διάνυσμα με στοιχεία $\boldsymbol{Cov(R_j, R_q) \,/\, V(R_q)}$, $\boldsymbol{\beta_u}$ είναι ένα n-διάνυσμα με στοιχεία $\boldsymbol{Cov(R_j, U_p)/ V(U_p)}$ όπου j=1,2,…,n και $\boldsymbol{\beta_u} \neq 0$, όπου το 0 παριστάνει ένα n-διάνυσμα μηδενικών.

Απόδειξη του πορίσματος 2:

Ευθύ: Ας υποθέσουμε ότι το p είναι ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου. Η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής που καλείται j και στην απόδοση του χαρτοφυλακίου p (με δεδομένο ότι $\mu j <> \mu_p$) δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathrm{Cov}\,(R_j, R_p) = \mathrm{Cov}(R_j, R_q + U_p)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως $\mathrm{Cov}\,(R_j, R_p) = \mathrm{Cov}(R_j, R_q) + \mathrm{Cov}\,(R_j, U_p)$. Στη συνέχεια, εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέρη της εξίσωσης με $\mathrm{Var}(R_p)$ τότε έχουμε

$$\beta_p = [\mathrm{Var}(R_q)/ \mathrm{Var}(R_p)]\, \beta_q + [\mathrm{Var}(U_p)/ \mathrm{Var}(R_p)]\, \beta_u$$

Αντίστροφο: Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$Vx_p = Vx_q + u_p$$

Εφόσον το q βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου τότε η τελευταία εξίσωση υπονοεί την εξίσωση $\boldsymbol{x_p = V^{-1} (\mu\ 1)\, A^{-1} (\mu_p\ 1)^T + V^{-1} u_p}$. Έτσι, το χαρτοφυλάκιο p βρίσκεται μέσα στο σύνορο του χαρτοφυλακίου.

Το πόρισμα 2 δείχνει ότι το διάνυσμα β_p μπορεί να γραφεί ως σαν ένας κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων β_p και β_u.

Δύο παραδείγματα που απορρέουν από αυτά τα αποτελέσματα
Εκτίμηση του κόστους κεφαλαίου

Εάν η επιλεγμένη προσέγγιση βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου τότε η ακριβής γραμμική σχέση ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση και το βήτα που υπολογίζεται υποτιμά ή υπερεκτιμά τις αναμενόμενες αποδόσεις των μετοχών. Πράγματι χρησιμοποιώντας τη γραμμική σχέση $\boldsymbol{\mu_j = \mu_{zp} + (\mu_p - \mu_{zp})\,\beta_{jp}}$ αντί για την σχέση $\mu_j = \mu_{zp} + (\mu_p - \mu_{zp})\, Cov(R_j, R_p) / V(R_q) - (\mu_p - \mu_{zp})\, Cov(R_j, U_p) / V(R_q)$ για $j=1,2,3,\ldots,n$ η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής j υποτιμάται ή υπερεκτιμάται κατά την ακόλουθη ποσότητα

$$(\mu_p - \mu_{zp})\,[Cov\,(R_j, R_p) / V\,(R_q) - Cov\,(R_j, U_p) / V\,(R_q) - \beta_{jp}].$$

Σε αυτό το παράδειγμα το κόστος κεφαλαίου της εταιρίας υποτιμάται ή υπερεκτιμάται πράγμα που με τη σειρά του έχει ως αποτέλεσμα να υποτιμάται ή να υπερεκτιμάται το σταθμισμένο κόστος κεφαλαίου.

Παρελθόντα tests για το CAPM

Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για να μετρήσουν την εγκυρότητα του CAPM χρησιμοποιώντας μια two-stage cross-sectional μεθοδολογία. Μια τέτοια λίστα περιλαμβάνει τα άρθρα των Black et al. (1972), Jensen (1972), Miller and Scholes (1972), Blume and Friend (1972) και Mac Beth (1973). Μια τέτοια μεθοδολογία περιλαμβάνει δύο στάδια. Πρώτον, οι εκτιμήσεις των beta λαμβάνονται παλινδρομώντας τις αποδόσεις του αξιόγραφου για την περίοδο που κατέχουμε αυτό το αξιόγραφο με τις αποδόσεις της αγοράς για τη συγκεκριμένη περίοδο. Δεύτερον, χρησιμοποιείται μια cross-sectional απλή γραμμική παλινδρόμηση ανάμεσα στις μέσες αποδόσεις του αξιόγραφου ή του χαρτοφυλακίου και τους συντελεστές beta που υπολογίζονται αναφορικά με την προσέγγιση της αγοράς. Σκοπός του δεύτερου σταδίου είναι να εκτιμήσει τις τιμές της τομής και της κλίσης και να συγκρίνει αυτές τις εκτιμήσεις με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και τη μέση επιπλέον απόδοση στην προσέγγιση της αγοράς αντίστοιχα.

Τα γενικά συμπεράσματα που απορρέουν από τις παραπάνω μελέτες μπορούν να συνοψιστούν ως εξής: (i) οι εμπειρικές εκτιμήσεις της cross-sectional απλής γραμμικής παλινδρόμησης έχουν υψηλότερη τομή και χαμηλότερη κλίση από ότι η ακριβής γραμμικότητα ανάμεσα στις δειγματικές μέσες αποδόσεις και τα δειγματικά betas θα έδειχνε, και (ii) το beta είναι το μόνο μέτρο κινδύνου που επηρεάζει τις αναμενόμενες αποδόσεις. Μόνο σε ένα μικρό αριθμό χρονικών περιόδων οι δειγματικές αποδόσεις επηρεάζονται σημαντικά από ένα μη-γραμμικό beta.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι το πρώτο συμπέρασμα δείχνει ότι το επιλεγμένο χαρτοφυλάκιο σαν προσέγγιση δεν βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου. Εάν η επιλεγμένη προσέγγιση ήταν ένα μέλος του συνόρου χαρτοφυλακίου τότε οι δειγματικές μέσες αποδόσεις θα έπρεπε να ήταν ακριβείς γραμμικές συναρτήσεις των δειγματικών betas υπολογισμένων χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση και απεδείχθη ότι δεν ήταν. Τα στατιστικά αποτελέσματα όμως όσον αφορά στις σχέσεις των απλών cross-sectional γραμμικών συντελεστών παλινδρόμησης με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και την επιπλέον απόδοση της αγοράς είναι ύποπτα καθώς οφείλονται σε ένα misspecification του μοντέλου που χρησιμοποιείται σε αυτά τα tests. Η εξίσωση $\mu = r_{zp}\ 1 + (\mu_p - \mu_{zp})\ (V\ x_p - u_p)\ /\ V(R_q)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\mu = r_{zp}\ 1 + (\mu_p - \mu_{zp})\beta_p - u \text{ όπου}$$

$$u = (\mu_p - \mu_{zp})(\beta_u - \beta_p)\ V(R_u)\ /\ V(R_q)\ ,\ V(R_u) = \mathbf{x}^{T}{}_{\mathbf{up}}\,\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\,\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{u}_{\mathbf{p}}$$

Ο όρος u είναι η ενόχληση που παρουσιάζεται σε μια cross-sectional OLS παλινδρόμηση και είναι αρνητικά συσχετισμένη με το β_p. Από το κλασικό ασυμπτωτικό OLS θεώρημα πιθανότητας, το παραπάνω σημαίνει ότι υπάρχει ένας ασυνεπής και προς τα κάτω μεροληπτικός εκτιμητής της κλίσης και ένας προς τα πάνω μεροληπτικός εκτιμητής της τομής. Ο Fama και ο Mac Beth (1973) προσφέρουν μια πιθανή εξήγηση για τη σημασία του συντελεστή του beta τους κατά τη διάρκεια ενός μικρού αριθμού δειγματικών περιόδων. Προτείνουν ότι υπάρχουν μεταβλητές, που έχουν παραληφθεί από το υπόδειγμα απόδοσης και κινδύνου για το οποίο το τετράγωνο του beta λειτουργεί ως προσέγγιση. Όμως δεν παρέχουν καμία πληροφόρηση για τη φύση αυτών των μεταβλητών ή για τις σχέσεις των αναμενόμενων αποδόσεών τους.

Συμπεράσματα

Το τρισδιάστατο μοντέλο απόδοσης και κινδύνου βασίζεται πάνω στην αναμενόμενη απόδοση-διακύμανση ενός ανεπαρκούς χαρτοφυλακίου. Αποδεικνύει ότι η ανεπάρκεια ενός χαρτοφυλακίου είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκφραστεί η αναμενόμενη απόδοση σε μια οποιαδήποτε μετοχή που είναι υπό εξέταση σαν μια ακριβής γραμμική συνάρτηση του σχετικού κινδύνου σε αυτό το χαρτοφυλάκιο και ενός επιπρόσθετου κινδύνου που σχετίζεται με την κίνηση μέσα σε αυτό το σύνορο χαρτοφυλακίου.

Τα αποτελέσματα του τρισδιάστατου μοντέλου έχουν τις ακόλουθες επιπτώσεις. Πρώτον, το κόστος κεφαλαίου μιας εταιρίας υποτιμάται ή υπερεκτιμάται όταν κάποιος χρησιμοποιεί μια ακριβή γραμμική σχέση ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση και στο βήτα που υπολογίζεται ενάντια σε ένα χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου. Δεύτερον, στα πιο πρόσφατα εμπειρικά τεστ του CAPM οι εκτιμητές της διαστρωματικής απλής γραμμικής παλινδρόμησης έχουν υψηλότερη τομή και χαμηλότερη κλίση από ότι η ακριβής γραμμικότητα ανάμεσα στις δειγματικές μέσες αποδόσεις και τα δειγματικά βήτα θα έδειχνε. Τα αποτελέσματα αυτά οφείλονται σε λανθασμένο προσδιορισμό του διαστρωματικού μοντέλου που χρησιμοποιείται σε αυτά τα τεστ.

Κεφάλαιο 6

Ένα νέο υπόδειγμα παραγωγής της απόδοσης μετοχών

Έστω ότι $\check{R}_{it}$ είναι η απόδοση σε μια οποιαδήποτε μετοχή i και ας υποθέσουμε ότι $\check{R}_{qt}$ είναι η απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q και $\breve{U}_{pt}$ είναι η απόδοση του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p, το οποίο βρίσκεται μέσα στο σύνορο του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου. Υποθέτουμε επίσης ότι η αναμενόμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου q ισούται με την αναμενόμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου p. Σε καθεμία από αυτές τις μετοχές δίδεται ίσο βάρος στο χαρτοφυλάκιο αυτό τη χρονική στιγμή t-1. Εάν η από κοινού κατανομή που ακολουθούν οι αποδόσεις $\check{R}_{it}$, $\acute{R}_{qt}$ και $\breve{U}_{pt}$ ακολουθούν την κανονική κατανομή, τότε η δεσμευμένη κατανομή της απόδοσης έχει μια απλή μορφή όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια. Το υπόδειγμα που εξάγουμε σε αυτό το κεφάλαιο ισχύει για χαρτοφυλάκια και μετοχές που αναλύονται με αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο. Θα συνοψίσουμε ορισμένα αποτελέσματα και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια πιο επίσημη αιτιολόγηση.

Α. Νέα έκφραση του υποδείγματος της αγοράς

Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή για την κατανομή της απόδοσης της μετοχής i τη χρονική στιγμή t, εάν υποθέσουμε ότι δεσμεύεται για κάποια συγκεκριμένη τιμή R_{qt} της τυχαίας μεταβλητής $\check{R}_{qt}$ θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$E(\check{R}_{it}/ R_{qt}) = \int_{Rit} Rit f(Rit / Rqt)\partial Rit,$$

όπου η μέση τιμή είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα όλων των πιθανών τιμών που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή $\check{R}_{it}$ ή διαφορετικά η απόδοση της μετοχής i του χαρτοφυλακίου μας. Καθώς αναφερόμαστε σε μια δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή $E(\check{R}_{it}/ R_{qt})$, το βάρος που δίδεται σε κάθε δεδομένη τιμή R_{it} της απόδοσης $\check{R}_{it}$ είναι ίσο με τη δεσμευμένη κατανομή $f(R_{it} / R_{qt})$ αντί για την περιθωριακή κατανομή πυκνότητας $f(R_{it})$, η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό της μη-δεσμευμένης αναμενόμενης μέσης τιμής $E(\check{R}_{it})$.

Καθώς η δεσμευμένη κατανομή πυκνότητας $f(R_{it} / R_{qt})$ είναι γενικά διαφορετική για διαφορετικές τιμές της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου R_{qt}, η δεσμευμένη αναμενόμενη μέση τιμή εξαρτάται από την τιμή της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q. Επομένως, διαφορετικές αποδόσεις του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου αποδίδουν επίσης διαφορετικές δεσμευμένες αναμενόμενες αποδόσεις. Εάν η από κοινού κατανομή των $\check{R}_{it}$, $\check{R}_{qt}$ και $\breve{U}_{pt}$ ακολουθούν την πολυμεταβλητή κανονικότητα, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γενική μορφή που θα προσλάβει η αναμενόμενη δεσμευμένη μέση τιμή και η οποία δίδεται από τον ακόλουθο τύπο

$$E(\check{R}_{it}/ R_{qt}) = \alpha_i + (\beta_q + \beta_u) R_{qt}, \ (2)$$

όπου παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη δεσμευμένη τιμή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των α_i και $(\beta_q + \beta_u) R_{qt}$. Το α_i παριστάνει την τομή

$$\alpha_i = E(\check{R}_{it}) - (\beta_q + \beta_u) E(\check{R}_{qt}) \ (3), \ \beta_q = Cov(R_i, R_q) / \sigma^2 (R_q) \ (4) \ \kappa\alpha\iota$$
$$\beta_u = \{Cov(R_i, U_p) \sigma^2 (R_q) - Cov(R_i, R_q) Cov(R_q, U_p)\} / \{ \sigma^2 (U_p) \ \sigma^2 (R_q) \}. \ (5)$$

Επιπλέον, εάν η από κοινού κατανομή των $\check{R}_{it}$, $\check{R}_{qt}$ και $\breve{U}_{pt}$ ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή τότε και η δεσμευμένη κατανομή της $\check{R}_{it}$ δοθέντος της τιμής της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου είναι επίσης κανονική. Συνεπώς, η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f(R_{it} / R_{qt})$ είναι αυτή μιας κανονικής κατανομής, με μέσο και διακύμανση που δίδονται από τους παρακάτω τύπους

$$\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{qt}) = \int_{Rit} [Rit - E(\check{R}it/ R_{qt})]^2 f(R_{it}/ R_{qt}) \,\partial Rit \ (6)$$

$$\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{qt}) = \sigma^2(\check{R}_{it}) (1-\rho_{iq}^2), \ (7)$$

όπου ρ_{iq} εκφράζει το συντελεστή συσχέτισης ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής i και της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q και δίδεται από τον τύπο

$$\rho_{iq} = Cov(\check{R}_{it}, \check{R}_{qt})/ \sigma(\check{R}_{it}) \sigma(\check{R}_{qt}). \ (8)$$

Ο ορισμός (6) τονίζει το γεγονός ότι η δεσμευμένη διακύμανση περιλαμβάνει τη στάθμιση των τετραγωνικών αποκλίσεων της απόδοσης της μετοχής i από την αναμενόμενη δεσμευμένη τιμή της απόδοσης της μετοχής i από τη δεσμευμένη κατανομή πυκνότητας $f(R_{it}/ R_{qt})$. Αντίθετα, η μη-δεσμευμένη διακύμανση σταθμίζει τις τετραγωνικές αποκλίσεις της απόδοσης της μετοχής i από την περιθωριακή κατανομή $f(R_{it})$. Από την εξίσωση (7) γίνεται φανερό ότι όταν έχουμε πολυμεταβλητή κανονικότητα, η δεσμευμένη διακύμανση $\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{qt})$ έχει την ίδια τιμή για όλες τις τιμές της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $\sigma^2(\check{R}_{it}/ R_{qt})$ και ρ_{iq} προσλαμβάνουν την ίδια ακριβώς τιμή για κάθε τιμή της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου.

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα αποτελέσματα που έχουμε εξάγει μέχρι στιγμής, πρέπει να επισημάνουμε ορισμένα στοιχεία. Εάν η από κοινού κατανομή της απόδοσης της μετοχής i, της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q και του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή, τότε η σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις $\check{R}_{it}$, $\check{R}_{qt}$ και $\check{U}_{pt}$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\check{R}_{it} = a_i + \beta_q \check{R}_{qt} + \beta_u \check{U}_{pt} \quad (9)$$

που σημαίνει ότι με την πολυμεταβλητή κανονικότητα υπάρχει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στις από κοινού κατανεμημένες μεταβλητές $\check{R}_{it}$, $\check{R}_{qt}$ και $\check{U}_{pt}$ με συντελεστές τα a_i, β_q και β_u. Αυτό το μοντέλο παράγει τις αποδόσεις των μετοχών σε όρους δύο ασυσχέτιστων παραγόντων $\check{R}_{qt}$ και $\check{U}_{pt}$. Αυτό το υπόδειγμα είναι ισοδύναμο με το $R_p = R_q + U_p$, όπου η αναμενόμενη μέση τιμή της απόδοσης του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p ισούται με την αναμενόμενη μέση τιμή της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q.

Συνεπώς, έχοντας υποθέσει ότι Cov (U_p, R_q) = 0 αποδεικνύουμε τα ακόλουθα με βάση τη σχέση (9):

$$Cov\ (R_i, R_q) = Cov\ (a_i + \beta_q R_q + \beta_u U_p, R_q) \Leftrightarrow$$
$$Cov\ (R_i, R_q) = Cov\ (a_i, R_q) + Cov\ (\beta_q R_q, R_q) + Cov\ (\beta_u U_p, R_q) \Leftrightarrow$$
$$Cov\ (R_i, R_q) = 0 + \beta_q \sigma^2\ (R_q) + \beta_u\ Cov\ (U_p, R_q) \Leftrightarrow$$
$$Cov\ (R_i, R_q) = \beta_q \sigma^2\ (R_q) + \beta_u 0 \Leftrightarrow$$

$$Cov\ (R_i, R_q) = \beta_q \sigma^2\ (R_q) \Leftrightarrow$$
$$\beta_q = Cov\ (R_i, R_q) / \sigma^2\ (R_q)$$

Κατά αναλογία αποδεικνύεται ότι:

$$Cov\ (R_i, U_p) = Cov\ (\alpha_i + \beta_q R_q + \beta_u U_p, U_p) \Leftrightarrow$$
$$Cov\ (R_i, U_p) = Cov\ (\alpha_i, U_p) + Cov\ (\beta_q R_q, U_p) + Cov\ (\beta_u U_p, U_p) \Leftrightarrow$$
$$Cov\ (R_i, U_p) = 0 + \beta_q Cov\ (R_q, U_p) + \beta_u \sigma^2\ (U_p) \Leftrightarrow$$
$$\beta_u \sigma^2\ (U_p) = Cov\ (R_i, U_p) - \beta_q Cov\ (R_q, U_p) \Leftrightarrow$$
$$\beta_u \sigma^2\ (U_p) = Cov\ (R_i, U_p) - \{Cov\ (R_i, R_q) / \sigma^2\ (R_q)\}\ Cov\ (R_q, U_p) \Leftrightarrow$$
$$\beta_u \sigma^2\ (U_p) = \{Cov\ (R_i, U_p)\ \sigma^2\ (R_q) - Cov\ (R_i, R_q)\ Cov\ (R_q, U_p)\} / \sigma^2\ (R_q) \Leftrightarrow$$
$$\beta_u = \{Cov\ (R_i, U_p)\ \sigma^2\ (R_q) - Cov\ (R_i, R_q)\ Cov\ (R_q, U_p)\} / \{\sigma^2\ (U_p)\ \sigma^2\ (R_q)\} \Leftrightarrow$$
$$\beta_u = Cov\ (R_i, U_p) / \sigma^2\ (U_p)$$

Για να εξαχθούν τα ανωτέρω αποτελέσματα γίνεται χρήση αρχικά της σχέσης $\check{R}_{it} = \alpha_i + \beta_q \check{R}_{qt} + \beta_u \check{U}_{pt}$, της σχέσης $Cov\ (U_p, R_q) = 0$ και των παρακάτω στατιστικών γεγονότων:

Α) Η συνδιακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής, που στην περίπτωση μας εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q, $\check{R}_{qt}$ ή της απόδοσης του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p, $\check{U}_{pt}$ με έναν γραμμικό συνδυασμό τυχαίων άλλων μεταβλητών (εδώ: $\alpha_i + \beta_q R_q + \beta_u U_p$) είναι επίσης ένας γραμμικός συνδυασμός των συνδιακυμάνσεων.

Β) Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι η συνδιακύμανση της τυχαίας μεταβλητής της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου με τον εαυτό της ή η συνδιακύμανση της τυχαίας μεταβλητής της απόδοσης του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου με τον εαυτό της θα μας δώσει τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου ή τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής της απόδοσης του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου κατά αντιστοιχία.

Γ) Η συνδιακύμανση ανάμεσα σε μία σταθερά και μια τυχαία μεταβλητή ισούται πάντα με το μηδέν.

Β. Παρουσίαση του μοντέλου με πίνακες

Το υπόδειγμα, που παρουσιάσαμε προηγούμενα, σε μορφή πινάκων παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{q}\ \mathrm{Rq} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}\ \mathrm{Up},$$

όπου **R** είναι ένας n x 1 πίνακας που έχει ως στοιχεία του τις αποδόσεις των μετοχών που συνθέτουν ένα χαρτοφυλάκιο, **α** είναι ένας n x 1 πίνακας με στοιχεία που δίδονται από την ακόλουθη σχέση $\alpha_i = E(\check{R}_{it}) - (\beta_q + \beta_u) E(\check{R}_{qt})$. **βq** είναι ένας n x 1 πίνακας με στοιχεία που δίδονται από τη σχέση $\beta_q = Cov\ (R_i, R_q) / \sigma^2\ (R_q)$ και **βu** είναι ένας n x 1 πίνακας με στοιχεία που δίδονται από τη σχέση $\beta_u = Cov\ (R_i, U_p) / \sigma^2\ (U_p)$. Επίσης, το Rq εκφράζει την απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου ενώ το Up εκφράζει την απόδοση του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου που βρίσκεται μέσα στο σύνορο χαρτοφυλακίου.

Για κάθε μη αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο p που έχει αναμενόμενη απόδοση Rp ίση με την αναμενόμενη απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q, Rq δηλαδή $r_p = r_q$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = 1$. Πράγματι, από Diakogiannis (1999) γνωρίζουμε ότι $\mathbf{x_p} = \mathbf{x_q} + \mathbf{x_{up}}$ και $\boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = (1/\sigma^2_q)\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_q}$. Συνεπώς, $\mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = (\mathbf{x_q} + \mathbf{x_{up}})^T \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = (1/\sigma^2_q)\ (\mathbf{x_q}^T + \mathbf{x_{up}}^T)\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_q} \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = (1/\sigma^2_q)\ (\mathbf{x_q}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_q} + \mathbf{x_{up}}^T \mathbf{V}\ \mathbf{x_q})$ Καθώς $\mathbf{x_q}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_q} = \sigma^2_q$ και $\mathbf{x_{up}}^T \mathbf{V}\ \mathbf{x_q} = 0$ από Diakogiannis (1999) έπεται ότι $\mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = (1/\sigma^2_q)\ (\sigma^2_q + 0) \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{q} = 1$.

2. $\mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{u} = 1$. Πράγματι, από Diakogiannis (1999) γνωρίζουμε ότι $\mathbf{x_p} = \mathbf{x_q} + \mathbf{x_{up}}$ και $\boldsymbol{\beta}_\mathbf{u} = (1/\sigma^2_{up})\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_{up}}$. Συνεπώς, $\mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{u} = (\mathbf{x_q} + \mathbf{x_{up}})^T \boldsymbol{\beta}_\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{u} = (1/\sigma^2_{up})\ (\mathbf{x_q}^T + \mathbf{x_{up}}^T)\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_{up}} \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\ \boldsymbol{\beta}_\mathbf{u} = (1/\sigma^2_{up})\ (\mathbf{x_q}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_{up}} + \mathbf{x_{up}}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_{up}})$. Όμως, $\mathbf{x_q}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_{up}} = (\mathbf{x_{up}}^T \mathbf{V}\ \mathbf{x_q})^T = 0$ και $\mathbf{x_{up}}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{x_{up}} = 0$ από

Diakogiannis (1999). Άρα, $\mathbf{x_p}^t\, \boldsymbol{\beta}_u = (1/\sigma^2_{up})\,(\mathbf{x_{up}}^T\, \mathbf{V}\, \mathbf{x_{up}}) \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\, \boldsymbol{\beta}_u = (1/\sigma^2_{up})\,(\sigma^2_{up}) \Leftrightarrow \mathbf{x_p}^t\, \boldsymbol{\beta}_u = 1$.

3. $\mathbf{x_p}^t\, \boldsymbol{\alpha} = 0$. Γνωρίζουμε ότι $x_p^t R_i = x_p^t \alpha_i + (x_p^t\, \beta_q)\, R_q + (x_p^t \beta_u)\, U_p \Leftrightarrow R_p = x_p^t \alpha_i + 1\, R_q + 1\, U_p \Leftrightarrow R_p = x_p^t \alpha_i + (R_q + U_p)$ όπου $R_q + U_p = R_p$. Συνεπώς, έχουμε $R_p = x_p^t \alpha_i + R_p \Leftrightarrow x_p^t \alpha_i = 0$.

4. Το υπόδειγμα $\check{R}_{it} = \alpha_i + \beta_q\, \check{R}_{qt} + \beta_u\, \check{U}_{pt}$ είναι ισοδύναμο με το $R_p = R_q + U_p$ εάν και μόνο εάν το πολλαπλασιάσουμε με τον όρο $\mathbf{x_p}^t$, που έχουμε ορίσει διεξοδικά στο κεφάλαιο 4. Συμπερασματικά, το υπόδειγμα $\check{R}_{it} = \alpha_i + \beta_q\, \check{R}_{qt} + \beta_u\, \check{U}_{pt}$ παράγει τις αποδόσεις των μετοχών σε όρους δύο ασυσχέτιστων παραγόντων R_q και U_p. Αυτό το υπόδειγμα είναι ισοδύναμο με $R_p = R_q + U_p$, όπου η αναμενόμενη απόδοση του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου p ισούται με την αναμενόμενη απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q.

Γ. Σύγκριση του Υποδείγματος της Αγοράς και του νέου Υποδείγματος

Το νέο υπόδειγμα δεν αναιρεί το υπόδειγμα της αγοράς. Για την ακρίβεια εάν σταθμίσω κατάλληλα τα βq και βu, τότε προκύπτει το β του υποδείγματος της αγοράς. Συνεπώς, αυτό το β εκφράζεται σαν σταθμικός μέσος δύο άλλων β.

Από προηγούμενα, δείξαμε ότι το βήτα του χαρτοφυλακίου q ισούται με τη συνδιακύμανση της απόδοσης του αξιόγραφου i με την απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q προς τη διακύμανση της απόδοσης του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q.

Επίσης, δείξαμε ότι το βήτα του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου ισούται με τη συνδιακύμανση της απόδοσης του αξιόγραφου i με την απόδοση του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου Up προς τη διακύμανση της απόδοσης του μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου Up.

Συμβολικά, $\beta_q = Cov\ (R_i,\ R_q)\ /\ \sigma^2\ (R_q)$ και $\beta_u = Cov\ (R_i,\ U_p)\ /\ \sigma^2\ (U_p)$.
Εάν σταθμίσουμε κατάλληλα πολλαπλασιάζοντας το β_q με $\sigma^2\ (R_q)/\ \sigma^2(R_p)$ και το β_u με τον όρο $\sigma^2\ (U_p)/\ \sigma^2(R_p)$ τότε προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\{\sigma^2\ (R_q)/\ \sigma^2(R_p)\}\ \{\ Cov\ (R_i,\ R_q)\ /\ \sigma^2\ (R_q)\} + \{\sigma^2\ (U_p)/\ \sigma^2(R_p)\}\ \{\ Cov\ (R_i,\ U_p)\ /\ \sigma^2\ (U_p)\} =$$
$$Cov\ (R_i,\ R_q)\ /\ \sigma^2\ (R_p) + Cov\ (R_i,\ U_p)\ /\ \sigma^2\ (R_p) =$$
$$Cov\ (R_i,\ R_q + U_p)\ /\ \sigma^2\ (R_p) = \ Cov\ (R_i,\ R_p)\ )\ /\ \sigma^2\ (R_p)$$

Συνεπώς, το βήτα του υποδείγματος της αγοράς εκφράζεται σαν σταθμικός μέσος δύο άλλων βήτα.

Συμπερασματικά, παράγαμε ένα υπόδειγμα αγοράς για αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε το βήτα ενός αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου καθώς επίσης και το βήτα ενός μη αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου που έχει την ίδια μέση απόδοση με την μέση απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου.

Κεφάλαιο 7

Μια πολυμεταβλητή σχέση κινδύνου-απόδοσης

Σύμφωνα με τον Roll (1976) για κάθε αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο ισχύει $x_p = \lambda_1 x_{p'} + \lambda_2 x_{p''}$. Συνεπώς, η απόδοση της μετοχής i μπορεί να εκφραστεί με μια παλινδρόμηση δύο το πολύ μεταβλητών. Άρα, όταν έχω αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω μια πολυμεταβλητή σχέση κινδύνου-απόδοσης. Το αρχικό υπόδειγμα δεν μπορεί να επεκταθεί για περισσότερους από δύο παράγοντες, που να είναι αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα. Η θεωρία του arbitrage pricing υποθέτει σαν μηχανισμό παραγωγής της αποδόσεως των μετοχών τη σχέση $R_i = E(R_i) + b_{i1} f_1 + ... + b_{ik} f_k + \varepsilon_i$ συν την ύπαρξη ευκαιριών arbitrage. Εμείς υποθέτουμε την ίδια σχέση συν κανονική κατανομή.

Η διαδικασία παραγωγής του πολυπαραγοντικού υποδείγματος κινδύνου και απόδοσης αναπτύσσεται αναλυτικά στη συνέχεια.

Ανάπτυξη των υποδειγμάτων

Για να ξεκινήσουμε τη συζήτηση είναι γόνιμο να εισάγουμε τη διαδικασία παραγωγής της απόδοσης των μετοχών. Εάν θεωρήσουμε n επικίνδυνες μετοχές και υποθέσουμε ότι η απόδοση της μετοχής i μπορεί να αποσυντεθεί σε k παράγοντες, οι οποίοι είναι κοινοί για όλες τις μετοχές και επιπλέον, αιχμαλωτίζουν όλο το συστηματικό κίνδυνο όπως επίσης και τον συγκεκριμένο όρο ενόχλησης για κάθε μετοχή i, τότε αυτή η διαδικασία παραγωγής των αποδόσεων των μετοχών μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$R_i = E(R_i) + b_{i1} f_1 + ... + b_{ik} f_k + \varepsilon_i \quad (1)$$

όπου i = 1, 2,..., n, $E(R_i)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση για κάθε μετοχή i, b_{is} είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας της απόδοσης της μετοχής i στις διακυμάνσεις του κοινού παράγοντα s με s = 1, 2,..., κ, f_s είναι η τιμή του μέσου μηδενικού παράγοντα s που παριστάνει την κοινή διαφοροποίηση στις αποδόσεις των μετοχών, και ε_i είναι η ενόχληση της μετοχής i. Οι όροι ε_i υποθέτουμε ότι έχουν μηδενικούς μέσους όρους, ότι είναι ασυσχέτιστοι με τις αποδόσεις των μετοχών όπως επίσης και με τους παράγοντες k. Επιπλέον, έχουμε υποθέσει ότι οι k παράγοντες είναι ασυσχέτιστοι μεταξύ τους.

Ουσιαστικά, αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική απόδοση της μετοχής i και της αναμενόμενης απόδοσής της μετοχής i εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των τιμών των k παραγόντων κινδύνου, συν τις αποδόσεις που απορρέουν από γεγονότα που είναι συγκεκριμένα για τη συγκεκριμένη μετοχή i. Αυτός ο μηχανισμός παραγωγής της αποδόσεως των μετοχών προσεγγίζει το γραμμικό πολυμεταβλητό υπόδειγμα που χρησιμοποιείται στο APT, με τη διαφορά ότι μακροοικονομικοί παράγοντες χρησιμοποιούνται στην παραπάνω εξίσωση.

Οι αποδόσεις των μετοχών θεωρούμε ότι καθορίζονται από την παραπάνω διαδικασία και ότι μια αναμενόμενη αποτελεσματική προσέγγιση απόδοσης και τυπικής απόκλισης χρησιμοποιείται.

Υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις των n μετοχών κινδύνου έχουν έναν μη μοναδικό πίνακα συνδιακυμάνσεων και σχηματίζουν ένα αναμενόμενο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο απόδοσης-τυπικής απόκλισης, το οποίο αποκαλούμε q και το οποίο περιλαμβάνει όλες αυτές τις μετοχές κινδύνου. Η αναμενόμενη αποτελεσματικότητα απόδοσης-τυπική απόκλισης αυτού του χαρτοφυλακίου εκφράζει ότι η αναμενόμενη απόδοση σε μια οποιαδήποτε μετοχή i είναι ένας ακριβής γραμμικός συνδυασμός του βήτα του. Σύμφωνα με τον Roll (1977) αυτό μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + (E(R_q) - E(R_{zq}))\, Cov(R_i, R_q) / Var(R_q) \quad (2)$$

όπου $E(R_q)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση στο χαρτοφυλάκιο q, $E(R_{zq})$ είναι η αναμενόμενη απόδοση σε ένα χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης του οποίου η απόδοση είναι ασυσχέτιστη με την απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q, $Cov(R_i, R_q)$ είναι η διακύμανση ανάμεσα στις αποδόσεις της μετοχής i και του χαρτοφυλακίου q, και $Var(R_q)$ είναι η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου q.

Ο ρυθμός απόδοσης στο χαρτοφυλάκιο q μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια της (1) ως εξής:

$$R_q = E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k \quad (3)$$

όπου υποθέτουμε ότι το χαρτοφυλάκιο q είναι καλά διαφοροποιημένο ώστε η επιρροή των συγκεκριμένων k παραγόντων είναι αμελητέα και b_{qs} είναι η ευαισθησία της απόδοσης του χαρτοφυλακίου q στις διακυμάνσεις του παράγοντα s, όπου s = 1, 2, …, k.

Στη συνέχεια, θα αντικαταστήσουμε τη σχέση (3) στη νέα έκφραση του υποδείγματος της αγοράς που διατυπώσαμε προηγούμενα ($\check{R}_{it} = \alpha_i + \beta_q \check{R}_{qt} + \beta_u \breve{U}_{pt}$) και συνεπώς, προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\check{R}_{it} = \alpha_i + \beta_q (E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k) + \beta_u \breve{U}_{pt} \Leftrightarrow$$
$$\check{R}_{it} = \alpha_i + \beta_q E(R_q) + \beta_q b_{q1} f_1 + \ldots + \beta_q b_{qk} f_k + \beta_u \breve{U}_{pt} \Leftrightarrow$$
$$\underline{\check{R}_{it} = \alpha'_i + B_1 f_1 + \ldots + B_k f_k + \beta_u \breve{U}_{pt}}$$

Μια πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου χρησιμοποιώντας μια αποτελεσματική προσέγγιση της αγοράς

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1) και (3), οι οποίες περιγράφουν την απόδοση της μετοχής i και την απόδοση του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q αντίστοιχα, μπορούμε να εξάγουμε τον τύπο που μας δίνει τη συνδιακύμανση της απόδοσης της μετοχής i και του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q.

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος ενόχλησης της κάθε μετοχής είναι ασυσχέτιστος με τους όρους των υπολοίπων μετοχών και με τους παράγοντες f_i. Επιπλέον, οι αναμενόμενες αποδόσεις της μετοχής i και του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου q δεν είναι τυχαίες μεταβλητές αλλά σταθερές. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω η συνδιακύμανση της απόδοσης της μετοχής i και του αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$Cov(R_i, R_q) = Cov(E(R_i) + b_{i1} f_1 + \ldots + b_{ik} f_k + \varepsilon_i, E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k) \Leftrightarrow$$
$$Cov(R_i, R_q) = Cov(E(R_i), E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k) + Cov(b_{i1} f_1, E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k) + \ldots + Cov(\varepsilon_i, E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k) \Leftrightarrow$$
$$\underline{Cov(R_i, R_q) = b_{i1} b_{q1} Var(f_1) + b_{i2} b_{q2} Var(f_2) + \ldots + b_{ik} b_{qk} Var(f_k) \quad (4)}$$

Όπως είναι φανερό έχουμε υποθέσει επίσης ότι οι παράγοντες οι οποίοι καθορίζουν τις αποδόσεις των αξιόγραφων είναι ασυσχέτιστοι ο ένας με τον άλλον. Η εξίσωση (4) δηλώνει ότι η συνδιακύμανση ανάμεσα στην απόδοση της μετοχής i και στο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο q ισούται με το άθροισμα των γινομένων τριών όρων. Ο πρώτος όρος είναι ο συντελεστής βήτα που αντιστοιχεί στον οικονομικό παράγοντα s που επηρεάζει τη μετοχή i, ο δεύτερος όρος είναι ο συντελεστής βήτα που αντιστοιχεί στον οικονομικό παράγοντα s που επηρεάζει το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο q και ο τρίτος όρος είναι η διακύμανση του αντίστοιχου οικονομικού παράγοντα s.

Στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε την εξίσωση (4) στη σχέση (2), η οποία τελευταία μας δίνει την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i σαν μια ακριβή γραμμική συνάρτηση του βήτα του σύμφωνα με τον Roll (1977). Συνεπώς,

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + (E(R_q) - E(R_{zq}))\,[b_{i1}b_{q1}\,Var\,(f_1) + b_{i2}b_{q2}\,Var\,(f_2) + \ldots + b_{ik}\,b_{qk}\,Var\,(f_k)]\ /\ Var(R_q) \quad (5)$$

Με τον όρο δ_s συμβολίζουμε τον κίνδυνο που συνδέεται με τον οικονομικό παράγοντα s και έτσι έχουμε ότι $\delta_s = (E(R_q) - E(R_{zq}))\, b_{qs}\, Var\,(f_s)\ /\ Var(R_q)$ *(6)*.

Εάν αντικαταστήσουμε τη σχέση (6) που μας δίνει την τιμή του κινδύνου για τον κάθε παράγοντα, τότε προκύπτει

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + b_{i1}\,\delta_1 + \ldots + b_{ik}\,\delta_k \quad (7)$$

Όπως μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό η αναμενόμενη απόδοση σε ένα αξιόγραφο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συστηματικών κινδύνων της μετοχής i. Εάν το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι ένα χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης και είναι καλά διαφοροποιημένο σε ένα πλαίσιο οικονομικών παραγόντων τότε ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία μπορεί να εξάγει κανείς μια σχέση ισορροπίας ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση της μετοχής i και στους συντελεστές βήτα των οικονομικών παραγόντων που αντιστοιχούν στο συγκεκριμένο αξιόγραφο.

Μια πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου χρησιμοποιώντας μια μη αποτελεσματική προσέγγιση της αγοράς

Έχοντας εισαγάγει τη σχέση απόδοσης και κινδύνου στην εξίσωση (7) είμαστε πλέον έτοιμοι να αναπτύξουμε μια πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου όταν όμως το χαρτοφυλάκιο δεν βρίσκεται πάνω στο αποτελεσματικό σύνορο. Για το μη αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο p υπάρχει ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο q με $E(R_q) <> E(R_p)$. Καθώς το χαρτοφυλάκιο q είναι αποτελεσματικό ισχύει η σχέση

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + (E(R_q) - E(R_{zq}))\, Cov(R_i, R_q)/ Var(R_q) \quad (8)$$

Επιπρόσθετα, εάν στη θέση της μετοχής i θέσουμε το χαρτοφυλάκιο p τότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$E(R_p) = E(R_{zq}) + (E(R_q) - E(R_{zq}))\, Cov(R_p, R_q)/ Var(R_q) \quad (9)$$

όπου $Cov(R_p, R_q)$ είναι η συνδιακύμανση ανάμεσα στις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου p και του χαρτοφυλακίου q.

Θα λύσουμε ως προς $E(R_q) - E(R_{zq})$ και το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι το ακόλουθο

$$E(R_q) - E(R_{zq}) = (E(R_p) - E(R_{zq}))/ [1/b_{pq}]$$
$$\text{όπου } b_{pq} = Cov(R_p, R_q)/ Var(R_q)$$

Συνακόλουθα, εάν αντικαταστήσουμε την τελευταία εξίσωση στη σχέση (8) προκύπτει ότι

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + (E(R_p) - E(R_{zq}))/ [1/b_{pq}]\, Cov(R_i, R_q)/ Var(R_q) \quad (10)$$

Υποθέτουμε ότι το αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο q είναι καλά διαφοροποιημένο. Η συνδιακύμανση της απόδοσης της μετοχής i με την απόδοση του χαρτοφυλακίου q δίνεται από την παρακάτω σχέση και κατά αντιστοιχία με την εξίσωση (4).

$$Cov\,(R_i, R_q) = Cov\,(E(R_i) + b_{i1} f_1 + \ldots + b_{ik} f_k + \varepsilon_i,\ E(R_q) + b_{q1} f_1 + \ldots + b_{qk} f_k) \Leftrightarrow$$

$$Cov\ (R_i, R_q) = b_{i1}b_{q1}\ Var\ (f_1) + b_{i2}b_{q2}\ Var\ (f_2) + ... + + b_{ik}\, b_{qk}\ Var\ (f_k)$$

Εάν αντικαταστήσουμε τη σχέση αυτή στην εξίσωση της αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής i προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + (E(R_p) - E(R_{zq}))/\ [1/b_{pq}]\ [b_{i1}b_{q1}\ Var\ (f_1) + b_{i2}b_{q2}\ Var\ (f_2) + ... + + b_{ik}\ b_{qk}\ Var\ (f_k)\ ]\ /\ Var(R_q)\ (12)$$

Με τον όρο γ_s συμβολίζουμε την ποσότητα

$$\gamma_s = (E(R_p) - E(R_{zq}))[\ 1/b_{pq}]\ \ b_{ps}\ Var\ (f_s)/\ Var(R_q)\ (13)$$

και αντικαθιστώντας την εξίσωση (13) στην εξίσωση (12) έχουμε τα ακόλουθα

$$E(R_i) = E(R_{zq}) + b_{i1}\ \gamma_1 + \ldots + b_{ik}\gamma_k\ .\ (14)$$

Ο Sharpe (1984), ο Erhrardt (1987) και ο Kim και Wu (1987) ανέπτυξαν μια πολυμεταβλητή σχέση ισορροπίας απόδοσης και κινδύνου, η οποία βασίζεται πάνω στην αναμενόμενη απόδοση-τυπική απόκλιση αποτελεσματικότητα του χαρτοφυλακίου αγοράς. Μια τέτοια όμως σχέση δεν μπορεί να κριθεί εάν η ακριβής σύνθεση του χαρτοφυλακίου της αγοράς δεν είναι γνωστή. Χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση αγοράς δεν μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για την πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου. Δεν είναι δυνατόν να αποφασίσει κανείς για το εάν η δεδομένη προσέγγιση πλησιάζει το χαρτοφυλάκιο της αγοράς που δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε. Το ίδιο μπορεί να παρατηρήσει κανείς και για τη διαδικασία παραγωγής μιας πολυμεταβλητής σχέσης απόδοσης και κινδύνου για εμπειρικούς σκοπούς. Δεν μπορούμε να καθορίσουμε εάν αυτή είναι η διαδικασία, η οποία παράγει τις αποδόσεις όλων των ριψοκίνδυνων αξιόγραφων της αγοράς καθώς η απόδοση της τελευταίας δεν είναι παρατηρήσιμη.

Η πολυμεταβλητή σχέση ισορροπίας απόδοσης και κινδύνου είναι μια θεωρητική σχέση απόδοσης, η οποία δεν μπορεί να ελεγχθεί εμπειρικά. Εάν η προσέγγιση της αγοράς που χρησιμοποιείται στην πράξη είναι αποτελεσματική τότε η πολυμεταβλητή σχέση που παρουσιάζεται στη σχέση (7) μπορεί να ελεγχθεί. Εάν η προσέγγιση της αγοράς όμως που χρησιμοποιείται δεν είναι αποτελεσματική, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί η σχέση (14) και να ελεγχθεί αυτή αντί για την εξίσωση (7). Ο Kim και Wu (1987) υπέθεσαν στο υπόδειγμα που χρησιμοποίησαν ότι η προσέγγιση της αγοράς είναι αποτελεσματική και καμία αναφορά δεν γίνεται για να επαληθεύσει την υπόθεση αυτή. Εάν η προσέγγιση που επέλεξαν ήταν μη αποτελεσματική, τότε απλά έκαναν έλεγχο σε λάθος υπόδειγμα (misspecification error).

Οι Dybvig και Ross (1985) εξήγαγαν μια σχέση απόδοσης και κινδύνου όμοια με αυτήν που παρουσιάζεται στη σχέση (7) και ισχυρίστηκαν ότι η μέθοδος τους αποκαλύπτει ότι το CAPM υπονοεί την Arbitrage Pricing Theory. Είναι γόνιμο εδώ να παρατηρήσουμε ότι η παραγωγή του υποδείγματος τους δεν απαιτεί την υπόθεση της μη ύπαρξης ευκαιριών arbitrage όπως συμβαίνει στην περίπτωση του Ross (19770. Το υπόδειγμά τους είναι μια πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου, η οποία προκύπτει από την προσέγγιση της αναμενόμενης απόδοσης-τυπικής απόκλισης.

Μια πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου σε μια αγορά που δεν παρουσιάζει ευκαιρίες arbitrage

Θεωρούμε μια οικονομία στην οποία ένας άπειρος αριθμός αξιόγραφων διαπραγματεύεται. Υποθέτουμε επίσης ότι η στοχαστική απόδοση της μετοχής i παράγεται από τη γραμμική διαδικασία που περιγράφεται στην εξίσωση (1). Στις αγορές αξιόγραφων υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει διαφωνία ανάμεσα σε ομάδες ατόμων που έχουν διαφορετικές απόψεις (frictionless markets). Επίσης, οι αγορές είναι απόλυτα ανταγωνιστικές με την έννοια ότι δεν υπάρχουν κόστη μεταφοράς ούτε φόροι . Οι short πωλήσεις επιτρέπονται και επιπρόσθετα δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage.

Θα επιχειρήσουμε να εξάγουμε ένα πολύ-μεταβλητό υπόδειγμα απόδοσης και κινδύνου σε μια αγορά όπου δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage. Θα παραθέσουμε όμως τα ακόλουθα για να δώσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο του τι σημαίνει να υπάρχουν σε μια αγορά ευκαιρίες arbitrage.

Μια αγορά αξιόγραφων επιτρέπει να υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage όταν υπάρχει μια σειρά από χαρτοφυλάκια arbitrage wj, το κάθε ένα από τα οποία περιλαμβάνει n αξιόγραφα, των οποίων οι αποδόσεις ακολουθούν τις παρακάτω συνθήκες

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\tau\to\infty} Var(Rwj) = 0 \\ E(Rwj) = d, d > 0\end{array}\right. \text{για κάθε j}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να συμπεράνουμε ισοδύναμα ότι ευκαιρίες ασυμπτωτικού arbitrage συμβαίνουν όταν είναι δυνατόν να αναγνωρίσουμε χαρτοφυλάκια τα οποία δεν έχουν κόστη, έχουν μηδενική διακύμανση στο όριο και δίνουν θετικές αναμενόμενες αποδόσεις.

Επιπρόσθετα, το (n x 1) διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων των αξιόγραφων μπορεί να περιγραφεί κατά τον ακόλουθο τρόπο

$$e = \lambda_o u + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_k\beta_k + h \quad (15)$$

όπου u είναι το (n x 1) μοναδιαίο διάνυσμα , τα λ_o, λ_1, λ_2,..., λ_k είναι σταθερές, τα β_1, β_2, ..., β_k είναι τα (n x 1) διανύσματα των συντελεστών beta των αξιόγραφων για κάθε έναν από τους k παράγοντες και h είναι ένα (n x 1) διάνυσμα, το οποίο είναι ορθογώνιο στο (n x 1) μοναδιαίο διάνυσμα και στα (n x 1) διανύσματα των συντελεστών beta. Μαθηματικά, αυτές οι συνθήκες μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$h'u = 0,$$

$$h'\beta_1 = 0, h'\beta_2 = 0, ..., h'\beta_k = 0$$

Σύμφωνα με αυτές τις συνθήκες το διάνυσμα h καθορίζει ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο δεν περιέχει ούτε καθαρή επένδυση αλλά ούτε και συστηματικό κίνδυνο. Εάν το h δεν πλησιάζει το μηδέν, τότε θα δείξουμε ότι εκμεταλλευόμενοι τις αποκλίσεις από τη σχέση απόδοσης και κινδύνου κάποιος μπορεί να δημιουργήσει ευκαιρίες arbitrage.

Η αρχική σχέση που εκφράσαμε σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$r = e + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + ... + \beta_k f_k + \varepsilon, \quad (16)$$

όπου r είναι ένα (n x 1) διάνυσμα τυχαίων αποδόσεων και ε είναι ένα (n x 1) διάνυσμα των οποίων τα στοιχεία είναι ενοχλήσεις ιδιοσυγκρασίας. Υποθέτουμε ότι η διακύμανση της ενόχλησης ιδιοσυγκρασίας σε κάθε μετοχή είναι φραγμένη, που σημαίνει ότι $Var(\varepsilon_i) < \sigma^2$, $i = 1,2,...,n$ και σ^2 είναι ένας θετικός αριθμός.

Εάν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (15) και (16) και κάνουμε την υπόθεση ότι το χαρτοφυλάκιο w δεν έχει κόστος όπως επίσης ότι δεν εμπεριέχει συστηματικό κίνδυνο τότε η απόδοση του χαρτοφυλακίου w δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$R_w = h`h + h`\varepsilon \quad (17)$$

Θα καθορίσουμε από την ανωτέρω σχέση την αναμενόμενη απόδοση όπως επίσης και τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου w, το οποίο δεν έχει κόστος και δεν περικλείει συστηματικό κίνδυνο.

$$E\,(R_w) = E(\,h'h + h'\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$E\,(R_w) = h'h \;(18)$$

$$Var\,(R_w) = h'\,E_c\,h \;(19)$$

όπου ο πίνακας E_c είναι ένας (n x n) πίνακας συνδιακυμάνσεων ιδιοσυγκρατικών ενοχλήσεων. Ο πίνακας αυτός είναι διαγώνιος καθώς οι ενοχλήσεις είναι από υπόθεση ασυσχέτιστες.

Θεωρούμε επίσης μια σειρά από χαρτοφυλάκια wj arbitrage, τα οποία εμπεριέχουν μηδενικό συστηματικό κίνδυνο, j = 1,2,3,..., k με αποδόσεις gR_w , $g>0$. Επομένως, έχουμε

$$E\,(Rwj) = E\,(gRw) \Leftrightarrow$$

$$E\,(Rwj) = g\,E\,(Rw) \Leftrightarrow$$

$$E\,(Rwj) \;= g\,h'h \;(20)$$

και

$$Var\,(Rwj)= Var\,(gRw) \Leftrightarrow$$

$$Var\,(Rwj)= g^2\,Var\,(Rw) \Leftrightarrow$$

$$Var\,(Rwj)= g^2\,h'\,E_c\,h \;(21)$$

Εάν θέσουμε όπου $g = d/\,h'h$ τότε προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις με απλή αντικατάσταση στους τύπους της αναμενόμενης απόδοσης και διακύμανσης των χαρτοφυλακίων *wj* :

$$E\,(Rwj) = d$$

και

$$Var\,(Rwj)= d^2\,h'\,E_c\,h\,/\,(h'h)^2 < d^2\sigma^2\,/\,h'h.$$

Εάν $h'h = \infty$, τότε οι διακυμάνσεις των χαρτοφυλακίων συγκλίνουν προς το μηδέν ενώ οι αναμενόμενες αποδόσεις τους είναι θετικές. Για κάθε d > 0 υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο κερδίζει μια θετικά αναμενόμενη απόδοση χωρίς κάποια καθαρή επένδυση και χωρίς να εμπεριέχει κάποιο κίνδυνο. Έτσι, οι επενδυτές μπορούν να επενδύσουν σε αυτό το arbitrage χαρτοφυλάκιο και να αποκομίσουν μετά βεβαιότητας καθαρό κέρδος. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα όσα ισχυριστήκαμε προηγούμενα για την ύπαρξη no arbitrage ευκαιριών στην οικονομία. Είναι φανερό όμως ότι το $h`h$ δεν μπορεί να αυξάνει έως το άπειρο με σκοπό να αποκλείσουμε τις ευκαιρίες arbitrage. Όταν ο αριθμός των αξιόγραφων είναι πάρα πολύ μεγάλος τότε το $h`h$ προσεγγίζει πράγματι το μηδέν που με τη σειρά του σημαίνει ότι οι είσοδοι του διανύσματος προσεγγίζουν το μηδέν. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η εξίσωση (15) μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$e \approx \lambda_o u + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_k\beta_k \quad (22)$$

όπου " ≈ " εννοούμε κατά προσέγγιση ίσο με.

Ας θεωρήσουμε έστω p ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο με $x`_p u = 1$, όπου x_p είναι ένα (n x 1) διάνυσμα που καθορίζει το χαρτοφυλάκιο p. Θα δείξουμε ότι το (n x 1) διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων των αξιόγραφων μπορεί να προσεγγιστεί γραμμικά από το (n x 1) μοναδιαίο διάνυσμα και το (n x 1) διάνυσμα των betas των αξιόγραφων, όπου με $b_i = Cov\ (R_i, R_p) / Var\ (R_p)$, για κάθε αξιόγραφο i.

Θεωρούμε ένα (n x 1) διάνυσμα των βαρών, το οποίο ονομάζουμε έστω y και είναι αυτό που καθορίζει ένα arbitrage χαρτοφυλάκιο. Το χαρτοφυλάκιο αυτό περιλαμβάνει περισσότερες από μία long και short θέσεις. Εάν το y δεν έχει συστηματικούς κινδύνους που οφείλονται σε παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοσή του, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε τα ακόλουθα:

$$y`u = 0$$
$$y`\beta_1 = 0,\ y`\beta_2 = 0,\ \ldots,\ y`\beta_K = 0.$$

Εάν υποτεθεί ότι η απόδοση του αξιόγραφου i δίδεται από την αρχική σχέση (1) τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη συνδιακύμανση ανάμεσα στις αποδόσεις του αξιόγραφου i και του χαρτοφυλακίου p κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$Cov\ (R_i, R_p) = b_{i1}b_{p1}\, Var\ (f_1) + b_{i2}b_{p2}\, Var\ (f_2) + \ldots + + b_{ik}\, b_{pk}\, Var\ (f_k).\ (23)$$

Εάν διαιρέσουμε τη σχέση (23) με τη διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου p τότε επιτυγχάνουμε να εκφράσουμε το βήτα του αξιόγραφου i σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο p σε όρους των b_{i1}, $b_{i2}, \ldots,$ b_{ik}. Γράφοντας τη νέα εξίσωση που προκύπτει με συμβολισμό πινάκων, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με y` και αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι το arbitrage χαρτοφυλάκιο δεν έχει συστηματικό κίνδυνο τότε προκύπτει:

$$y`\beta_i = 0.$$

Καθώς το arbitrage χαρτοφυλάκιο έχει μηδενική αναμενόμενη απόδοση, τότε το y` είναι ορθογώνιο με το μοναδιαίο διάνυσμα u, το διάνυσμα των συντελεστών β_i και το διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων e. Έτσι, το διάνυσμα των αναμενόμενων αποδόσεων μπορεί να παρασταθεί προσεγγιστικά σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των u και βi :

$$e \approx \xi_1 u + \xi_2 \beta i,$$

όπου ξ_1, ξ_2 είναι σταθερές. Η τελευταία εξίσωση γράφεται και ως εξής:

$$e \approx E(R_o)\, u + (\,E(R_p) - E(R_o)\,)\, \beta i, \quad (24)$$

όπου $E(R_p)$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου p. Εάν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (23) και (24) τότε οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση:

$$E(R_i) \approx E(R_o) + (E(R_p) - E(R_o))\, [b_{i1}b_{p1}\, Var\,(f_1) + b_{i2}b_{p2}\, Var\,(f_2) + \ldots + b_{ik}\, b_{pk}\, Var\,(f_k)\,] \,/\, Var(R_p) \text{ για κάθε } i$$

ή ισοδύναμα

$$E(R_i) \approx E(R_o) + b_{i1}\,\delta_1 + \ldots + b_{ik}\,\delta_K \text{ για όλα τα } i \quad (25)$$

όπου

$$\delta_s = (E(R_p) - E(R_o))\, b_{ps}\, Var\,(f_s) / Var(R_p)\,. \quad (26)$$

Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ακίνδυνο αξιόγραφο στην οικονομία, τότε το $E(R_o)$ παριστάνει την απόδοση του. Δηλαδή με τον όρο $E(R_o)$ δηλώνουμε την αναμενόμενη απόδοση ενός αξιόγραφου μηδενικού κινδύνου. Εναλλακτικά, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει ένα ακίνδυνο αξιόγραφο, με τον όρο $E(R_o)$ δηλώνουμε την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου που έχει μηδενικό βήτα. Συνεπώς, εάν παρατηρήσουμε την εξίσωση (25) θα διαπιστώσουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση σε ένα αξιόγραφο ισούται κατά προσέγγιση με την απόδοση μηδενικού κινδύνου συν το άθροισμα των συντελεστών βήτα πολλαπλασιασμένων με τις αντίστοιχες τιμές κινδύνου.

Ο Sharpe (1984) παρουσίασε μια πολυμεταβλητή σχέση απόδοσης και κινδύνου που βασίζεται στην ταυτόχρονη ισχύ των υποθέσεων τόσο της arbitrage pricing theory όσο και στις υποθέσεις του CAPM. Το συγκεκριμένο πολυμεταβλητό υπόδειγμα που παρουσιάσαμε προηγούμενα πλεονεκτεί έναντι του αντίστοιχου υποδείγματος του Sharpe καθώς ο Sharpe απαιτεί την ισχύ περισσοτέρων υποθέσεων.

Τα υποδείγματα των εξισώσεων (7) και (25) υποθέτουν ισοδύναμα ότι δεν υπάρχουν κόστη μεταβίβασης ούτε και φόροι. Σε κάθε περίπτωση επιτρέπονται οι short πωλήσεις των επικίνδυνων αξιόγραφων. Αυτή η υπόθεση υπονοεί ότι τα διανύσματα των επενδυτικών ποσοστών, που καθορίζουν τα χαρτοφυλάκια αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης δεν περιορίζονται μόνο σε μη αρνητικές εισόδους. Επίσης, η υπόθεση αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη arbitrage χαρτοφυλακίων. Επιπρόσθετα, το κάθε υπόδειγμα υποθέτει την ύπαρξη κάποιων παραγόντων που καθορίζουν το μηχανισμό παραγωγής της απόδοσης των αξιόγραφων, όπως επίσης και το ότι οι επενδυτές προτιμούν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση από τη μικρότερη. Κάθε ένα από αυτά τα υποδείγματα θεωρεί μια καθορισμένη δομή για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων των αποδόσεων των αξιόγραφων. Σε κάθε περίπτωση, η αναμενόμενη απόδοση για μια χρονική περίοδο σε ένα επικίνδυνο αξιόγραφο σχετίζεται με τους συντελεστές beta. Οι τιμές κινδύνου σε κάθε υπόδειγμα καθορίζονται πλήρως.

Το πολυμεταβλητό υπόδειγμα που είδαμε στην εξίσωση (7) βασίζεται κυρίως στις υποθέσεις ότι η προσέγγιση αγοράς είναι αποτελεσματική (αναμενόμενη απόδοση-τυπική απόκλιση αποτελεσματική) και καλά διαφοροποιημένη. Πίσω από αυτή την εξίσωση υπάρχει επίσης μια μη arbitrage συνθήκη, η οποία αποκλείει τους επενδυτές από το να κερδίζουν υψηλότερα κέρδη από χαρτοφυλάκια που έχουν ισοδύναμο κίνδυνο. Όλα τα χαρτοφυλάκια που χρησιμοποιούν θετικό ποσό πλούτου και έχουν μηδενικό συστηματικό κίνδυνο μέσα σε ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο κερδίζουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση. Αυτή η συνθήκη δεν αποτελεί μια βασική υπόθεση για την ισχύ του υποδείγματος αλλά είναι περισσότερο μια επιπλοκή των υποθέσεων του υποδείγματος.

Απεναντίας, το πολυμεταβλητό υπόδειγμα που παριστάνεται από την εξίσωση (25) δεν στηρίζεται πάνω στην αποτελεσματικότητα αναμενόμενης απόδοσης-τυπικής απόκλισης της προσέγγισης της αγοράς. Η θεωρητική ισχύ βασίζεται στην ύπαρξη των μη arbitrage ευκαιριών. Επιπρόσθετα, μια άλλη διαφορά αυτών των δύο υποδειγμάτων είναι ότι το πολυμεταβλητό υπόδειγμα της εξίσωσης (7) λαμβάνει υπόψη χαρτοφυλάκια που έχουν θετικό ποσό πλούτου ενώ οι μη arbitrage συνθήκες που στηρίζουν το υπόδειγμα της εξίσωσης (25) χρησιμοποιούν χαρτοφυλάκια χωρίς καθόλου πλούτο.

Όσο για τα tests που είναι αναγκαία για να εξετάσουν την ισχύ των ανωτέρω υποδειγμάτων, είναι αναγκαίο να ακολουθηθούν τα εξής βήματα. Πρώτον, πρέπει να κατασκευαστούν κοινοί παρατηρήσιμοι παράγοντες, οι οποίοι συμβάλλουν στις αλλαγές των αποδόσεων των αξιόγραφων και δεύτερον, πρέπει να εξεταστούν ποια risk premia πρέπει να ληφθούν υπόψη στην τιμολόγηση των αξιόγραφων.

Οι αποδόσεις των αξιόγραφων αντιδρούν στις διακυμάνσεις των διαφόρων μακροοικονομικών μεταβλητών. Η απευθείας χρησιμοποίηση των μακροοικονομικών μεταβλητών σε μια διαδικασία παραγωγής των αποδόσεων των αξιόγραφων είναι αναποτελεσματική διότι υπάρχουν multicollinearity προβλήματα αλλά και γιατί οι μακροοικονομικές μεταβλητές που επηρεάζουν τις αποδόσεις των αξιόγραφων δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων. Παρόλα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ορισμένοι ανεξάρτητοι παράγοντες από ένα σύνολο μακροοικονομικών μεταβλητών. Αυτή η διαδικασία υπερτερεί καθώς περιορίζονται τα multicollinearity προβλήματα ανάμεσα στις διάφορες μεταβλητές που ερμηνεύουν τις μεταβολές των αποδόσεων των αξιόγραφων και επιπλέον, μειώνεται η διάσταση των ανεξάρτητων μεταβλητών που περιέχονται στη διαδικασία παραγωγής των αποδόσεων.

Είναι γόνιμο επίσης να εξετάσει κανείς τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι τιμές ρίσκου (κινδύνου) προσλαμβάνουν μη μηδενικές τιμές. Η εξίσωση (25) υποδεικνύει ότι η τιμή κινδύνου που σχετίζεται με τον παράγοντα s επηρεάζεται από την επιπλέον απόδοση πάνω από την προσέγγιση αγοράς και από την απόδοση ενός αξιόγραφου μηδενικού κινδύνου, από το beta της προσέγγισης αγοράς σε σχέση με τον παράγοντα s και από τη διακύμανση του παράγοντα s. Η τιμή κινδύνου είναι τελικά διαφορετική από το μηδέν αν και μόνο αν τα $(E(R_p) - E(R_o))$ και b_{ps} είναι διαφορετικά από το μηδέν. Η εξέταση της σημαντικότητας (significance) του παράγοντα b_{ps} περιλαμβάνει δύο ακριβώς βήματα. Πρώτον, είναι απαραίτητα να εκτιμήσουμε όλα τα betas όλων των αξιόγραφων σε ένα δείγμα που σχετίζονται με τον παράγοντα s. Οι συντελεστές αυτοί μπορούν να εκτιμηθούν εάν παλινδρομήσουμε τις αποδόσεις όλων των μεμονωμένων αξιόγραφων έναντι των τιμών αυτών των παραγόντων. Δεύτερον, πρέπει να εξεταστεί το b_{ps} για σημαντικότητα (significance).

Συμπεράσματα

Η ανικανότητα της arbitrage pricing theory να προσδώσει οικονομική έννοια στους παράγοντες που βρίσκονται κάτω από το risk premia είναι ένα από τα μεγαλύτερα μειονεκτήματα στην εφαρμογή αυτής της θεωρίας. Εμείς δημιουργήσαμε τρεις σχέσεις απόδοσης και κινδύνου, οι οποίες χρησιμοποιούν παρατηρήσιμες μακροοικονομικές μεταβλητές για να καθορίσουμε αυτούς τους παράγοντες.

Η πρώτη σχέση απόδοσης και κινδύνου υποθέτει ότι οι αποδόσεις των αξιόγραφων παράγονται από μια γραμμική διαδικασία και ότι η προσέγγιση αγοράς είναι αποτελεσματική και καλά διαφοροποιημένη σε αυτό το πλαίσιο παραγόντων. Ως απόρροια αυτών είναι η ύπαρξη μιας σχέσης κινδύνου-απόδοσης μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης αξιόγραφου και των συντελεστών beta. Η δεύτερη σχέση είναι έγκυρη όταν η προσέγγιση αγοράς βρίσκεται μέσα στο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο αναμενόμενης απόδοσης και τυπικής απόκλισης. Η τρίτη που δείξαμε σε αυτή την παράγραφο κυριαρχείται από μια πολυμεταβλητή γραμμική διαδικασία. Ευκαιρίες arbitrage δεν είναι διαθέσιμες στην αγορά και η προσέγγιση αγοράς είναι καλά διαφοροποιημένη σε αυτό το πλαίσιο παραγόντων. Έτσι, προκύπτει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στις αποδόσεις των αξιόγραφων και των συντελεστών beta.

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να ελεγχθούν εμπειρικά εάν χρησιμοποιήσουμε ένα δείγμα αξιόγραφων και ένα δείγμα παρατηρήσιμων μακροοικονομικών μεταβλητών. Για να ελέγξει κανείς τη σχέση απόδοσης και κινδύνου που βασίζεται στην ύπαρξη μη arbitrage ευκαιριών στην αγορά δεν απαιτείται η εμπειρική επαλήθευση της αποτελεσματικότητας της προσέγγισης αγοράς. Μια τέτοια σχέση μπορεί να επαληθευθεί εξετάζοντας τη σημαντικότητα των τιμών κινδύνου που σχετίζονται με τους παράγοντες που περιλαμβάνονται στη διαδικασία παραγωγής των αποδόσεων των αξιόγραφων.

APPENDIX

Λήμμα 1 (Two- Fund Theorem- Roll 1976):

Το διάνυσμα ποσοστών επένδυσης για κάθε μέση τιμή-διακύμανση αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων επένδυσης δύο άλλων αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων των οποίων οι μέσες τιμές είναι διαφορετικές.

Απόδειξη: Τα ποσοστά επένδυσης φαίνεται πως είναι γραμμικά ως προς την μέση απόδοση. Αυτό συμβαίνει διότι ο (N x 2) πίνακας, $B \equiv V^{-1}\ (R\ \imath\ )\ A^{-1}$ περιλαμβάνει μόνον σταθερές (N είναι ο αριθμός των μεμονωμένων αξιόγραφων). Έτσι, εάν p_1, p_2 και p_3 είναι αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια και α είναι μια σταθερά δοθέντος ότι $a \equiv (r_3 - r_2)/(r_1 - r_2)$ τότε

$$X_{p3} = B\begin{pmatrix} r3 \\ 1 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} ar1+(1-a)r2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha X_{p1} + (1-a) X_{p2}$$

Εάν αναγνωρίσουμε δύο αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια, όλα τα άλλα μπορούν να κατασκευαστούν σαν ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο.

BIBLIOGRAPHY

1. Ali, Mukhtar M., and Giacotto, Carmelo. "Optimum Distribution Free-Tests and Further Evidence of Heteroscedasticity in the Market Model," *Journal of Finance,* 37, No.5 (December 1982), pp. 1247-1258.

2. Amihud Dotan and Aharon Ofer. "Variable Versus Stationary Beta in the Market Model," *Journal of Banking and Finance 8* (1984), pp. 525-534. North Holland.

3. Belkaoui Ahmed. "Canadian Evidence of Heteroscedasticity in the Market Model," *The Journal of Finance*, Vol. XXXII, No.4 (September 1977), pp. 1320-1323.

4. Bey, Roger P., and Pinches, George E. "Additional Evidence of Heteroscedasticity in the Market Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* XV, No. 2 (June 1980), pp. 299-322.

5. Blume, Marshall. "On the Assessment of Risk," *Journal of Finance,* VI, No.1 (March 1971), pp. 1-10.

6. Breen, William, and Lerner, Eugene. "Corporate Financial Strategies and Market Measures of Risk and Return," *The Journal of Finance,* 28, (May 1973), pp. 339-351.

7. Brenner, Menachem. "On the Stability of the Distribution of the Market Component in Stock Price Changes," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* IX, No 6 (December 1974), pp. 945-961.

8. Brenner, Menachem and Seymour Smidi. "A Simple Model of Non-Stationarity of Systematic Risk," *The Journal of Finance,* Vol. XXXII, No. 4, (September 1977), pp.1081-1091.

9. Brown, Stephen J. "Heteroscedasticity in the Market Model: A Comment on [61]," *Journal of Business,* 50, No.1 (January 1977), pp. 80-83.

10. Cooley, P., Roenfeldt, R., and Modani, N. "Interdependence of Market Risk Measures," *Journal of Business,* 50, No.3 (July 1977), pp. 356-363.

11. Diakogiannis George P. "A Three-Dimensional Risk-Return Relationship based upon the Inefficiency of a Portfolio: Derivation and Implications," *The European Journal of Finance,* Vol.5, (1999), pp. 225-235.

12. Fama F. Eugene. "Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices".

13. Frank J. Fabozzi and Jack Clark Francis. "Stability Tests for Alphas and Betas over Bull and Market Conditions," *Journal of Finance*, XII, No.4 (September 1977), pp. 1093-1099.

14. G. Karathanassis and C. Patsos. "Evidence of Heteroscedasticity and Mis-specification issues in the Market Model: Results from the Athens Stock Exchange," *Applied Economics*, (1993), 25, pp. 1423-1438.

15. G. Karathanassis and N. Philippas. "Έλεγχοι Παραβίασης των Υποθέσεων του Υποδείγματος της Αγοράς στην Χρηματιστηριακή Αγορά των Αθηνών". "Spoudai", Vol.44, No1-2, University of Piraeus.

16. Gooding, Arthur, and O'Malley, Terence. "Market Phase and the Stationarity of Beta," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, XII, No.4 (December 1977), pp. 833-857.

17. Gordon J. Alexander. "Applying the Market Model to Long-Term Corporate Bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Volume 15, Issue 5 (December 1980), pp. 1063-1080.

18. Elton Edwin J. and Martin J. Gruber: "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis," fifth edition.

19. Jack Clark Francis, Frank J. Fabozzi. "The Effects of Changing Macroeconomic Conditions on the Parameters of the Single Index Market Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Volume 14, Issue 2 (June 1979), pp. 351-360.

20. Martin J., and Klemkosky R. "Evidence of Heteroscedasticity in the Market Model." *Journal of Business*, 48, No.1 (January 1975), pp. 81-86.

21. Martin J., and Klemkosky R. "The Effect of Market Risk on Portfolio Diversification," *Journal of Finance*, X, No.1 (March 1975), pp. 147-153.

22. Officer, R.R. "The Variability of the Market Factor of the New York Stock Exchange," Journal of Business, 46, No.3 (July 1973), pp. 434-453.

23. Parkinson M. John. "The Explanatory Power of the Market Model: An International Comparison," *Applied Economics*, (1987), 19, pp. 1625-1637.

24. R. Roll, "A Critique On the Asset Pricing Theory Tests- Part I: On Past and Potential Testability of the Theory", *University of California, Los Angeles*.

25. R.D. Huang and H. Jo, "Tests of Markets Models," *Journal of Banking and Finance*, (1988), pp. 439-445.

26. Stephen J. Brown and Christopher B. Barry. "Valuation Anomalies-Empirical," *The Journal of Finance*, Vol. XXXIX, No.3, (July 1984), pp. 807-815.

27. R. C. Stapleton and M. G. Subrahmanyam. "The Market Model and Capital Asset Pricing Theory: A Note," The Journal of Finance, Vol. XXXVIII, No 5, (December 1983), pp. 1637-1642.

28. R. Richardson Pettit, Randolph Westerfield. "Using the Capital Asset Pricing Model and the Market Model to Predict Security Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Volume 9, Issue 4 (September 1974), pp. 579-605.

29. Pogue, Gerald, and Solnik, Bruno. "The Market Model Applied to European Common Stocks: Some Empirical Results," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* IX, No 6 (December 1974), pp. 917-944.

30. Sunder, Shyam, "Stationarity of Market Risk: Random Coefficients Tests for Individual Stocks," *Journal of Finance,* 35, No.4 (September 1980), pp. 883-896.