ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΧΡΥΣ. ΦΟΥΝΤΑ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ [n]

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1988

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΧΡΥΣ. ΦΟΥΝΤΑ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ [n]

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 1988

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΥΠΟΒΛΗΘΕΙΣΑ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Στην Ιερή Μνήμη του πατέρα μου
Χρυσοστόμου Γρηγορίου φούντα

Θεωρώ καθήκον μου να εκφράσω τις πιό θερμές μου ευχαριστίες προς τον Καθηγητή κ. Αντώνιο Παναγιωτόπουλο, γιατί με εμύησε στον κόσμο της Συνδυαστικής Ανάλυσης και με καθοδήγησε στην εκπόνηση της παρούσας διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τους Αναπληρωτές Καθηγητές κ.κ. Νικόλαο Αλεξανδρή και Ιωάννη-Χρήστο Παναγιωτόπουλο, μέλη της τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, γιά την συμπαράσταση και συμβολή τους.

Τέλος ευχαριστώ τον πτυχιούχο κ. Ανδρέα Πανολαρίδη γιά τα προγράμματα ορισμένων αριθμητικών παραδειγμάτων.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα πρώτα προβλήματα συνδυαστικής εμφανίζονται σε έργα των αρχαίων Ελλήνων. Η συστηματική όμως αντιμετώπιση των θεμάτων της άρχισε τον 15ο αιώνα.

Ο Λογισμός των Πιθανοτήτων και αργότερα η Στατιστική έγιναν αφορμή να θεμελιωθεί η Συνδυαστική Ανάλυση ως ανεξάρτητος κλάδος.

Μεγάλοι μαθηματικοί όπως οι Cardano, Fermat, Pascal, Leibnitz και Morgan επέλυσαν βασικά της προβλήματα.

Στη σημερινή εποχή η Πληροφορική και οι υπολογιστές διεύρυναν τα πεδία και τους χώρους εφαρμογών της.

Η παρούσα διατριβή αναφέρεται στις ιδιότητες και εφαρμογές των μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$

Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται βασικές έννοιες και ορισμοί, που έχουν εισαχθεί κατά καιρούς από διάφορους ερευνητές γιά τις μεταθέσεις και χρησιμοποιούνται στη παρούσα διατριβή. Επίσης δίδονται και απαραίτητες έννοιες της θεωρίας των γραφημάτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύονται γενικές ιδιότητες των μεταθέσεων και εξετάζονται προβλήματα των παραβάσεων τους. Επίσης μελετώνται οι μήτρες και τα πολυώνυμα Gregory και Newton που αντιστοιχούν στις μεταθέσεις.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μελέτη των ιδιοτήτων των δύο βασικών προτύπων των μεταθέσεων· του προτύπου w και του προτύπου Carlitz. Δίδονται αλγόριθμοι και μέθοδοι γιά την αντιμετώπιση σχετικών προβλημάτων και εξετάζονται οι εναλλακτικές μεταθέσεις.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επιλύονται με βάση τα δένδρα μεταθέσεων, προβλήματα προσδιορισμού μεταθέσεων που αντιστοιχούν σε δεδομένα σύνολα και ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες. Επίσης προσδιορίζονται οι ατακτοποίητες, πολυατακτοποίητες και ισορροπημένες εναλλακτικές μεταθέσεις και δίδονται εφαρμογές τους.

Στο πέμπτο κεφάλαιο μελετώνται οι μεταθέσεις του Black και οι πολυμεταθέσεις και επιλύονται προβλήματα σχετικών εφαρμογών τους.

Οι μεταθέσεις που εξετάζονται στη παρούσα διατριβή παρουσιάζουν εφαρμογές σε πολλά προβλήματα. Ενδεικτικά αναφέρονται τα : Problème des menages του Lucas, μεταθέσεων του Black γιά καταστάσεις επιλογής, κυριαρχούντων κωδίκων, λατινικών τετραγώνων.

Τέλος οι αλγόριθμοι της διατριβής έχουν προγραμματισθεί σε μικροϋπολογιστή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Κεφάλαιο 2
ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Κεφάλαιο 3
ΠΡΟΤΥΠΑ

Κεφάλαιο 4
ΔΕΝΔΡΑ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 5
ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό δίδονται βασικοί ορισμοί για τις μεταθέσεις του συνόλου [n] , τα διαγράμματά τους, καθώς και τα χαρακτηριστικά τους στοιχεία. Ακόμη περιλαμβάνονται έννοιες της θεωρίας των γραφημάτων που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη των επομένων κεφαλαίων της παρούσας μελέτης.

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Κάθε μετάθεση

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

του [n] σημειώνεται με :

$$\sigma = x_1\, x_2 \ldots x_n \quad \text{ή } \sigma=\sigma(1)\ \sigma(2) \ \ldots.\ \sigma(n)$$

ενώ ο αριθμός n ονομάζεται μήκος αυτής .

Γιά τις μεταθέσεις του [n] ισχύουν οι ακόλουθοι ορισμοί και συμβολισμοί:

1) **Ταυτοτική** ονομάζεται η μετάθεση σ με $\sigma(i)=i$.

Η μετάθεση αυτή που σημειώνεται με σ_0 αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας του G[n].

2) **Αντίστροφη** της σ ονομάζεται η μετάθεση σ^{-1} όπου :

$$\sigma^{-1}(i) = j \Longleftrightarrow \sigma(j) = i$$

3) **Ανάστροφή** της σ ονομάζεται η μετάθεση σ^{r} όπου :

$$\sigma^{r}(i) = \sigma(n+1-i)$$

4) **Συζυγής** της σ κατά Carlitz [7] ονομάζεται η μετάθεση σ^c όπου :

$$\sigma^{c}(i) = n+1-\sigma(i)$$

5) **Μήτρα** της σ ονομάζεται η nxn τετραγωνική μήτρα $P=[\alpha_{ij}]$

όπου:
$$\alpha_{ij} = 1 \Longleftrightarrow \sigma(i) = j$$
$$= 0 \Longleftrightarrow \sigma(i) \neq j$$

και σημειώνεται με $P(\sigma)$.

Οι γραμμές της μήτρας P σημειώνονται με B_i, $i\varepsilon[n]$.

6) **Παράβαση** της σ ονομάζεται κάθε ζεύγος $(\sigma(i), \sigma(j))$ με:

$$\sigma(i) > \sigma(j) \quad , i < j$$

Ο αριθμός των παραβάσεων μιάς μετάθεσης σ σημειώνεται με Ισ .

7) **Διαδοχή** της σ ονομάζεται κάθε ζεύγος $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ με

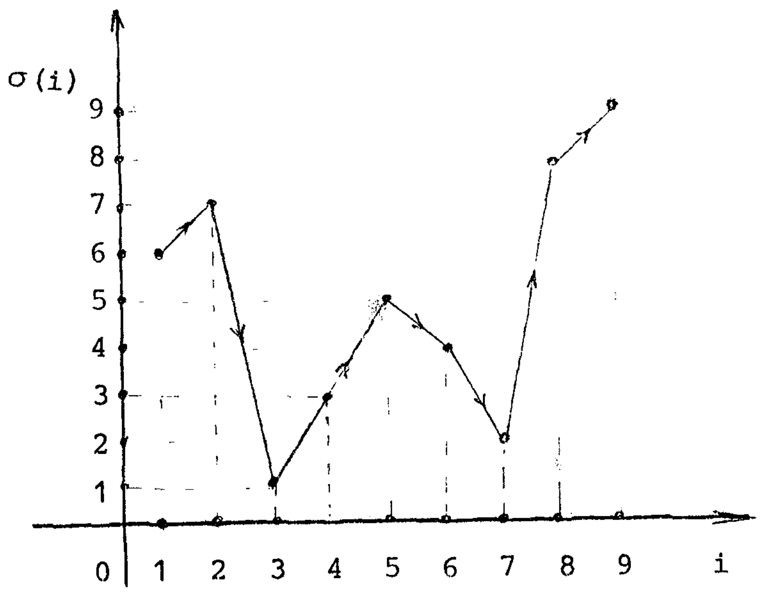
$$\sigma(i+1) = \sigma(i) + 1$$

8) **Τάξη** της σ ονομάζεται ο φυσικό αριθμός k για τον οποίο, στην ομάδα του G [n], ισχύει :

$$\sigma^{k} = \sigma_0$$

1.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Διάφορα προβλήματα των μετάθεσεων μπορούν να μελετηθούν καλύτερα με την βοήθεια των διαγραμμάτων τους. Στην παρούσα μελέτη βασικό διάγραμμα θεωρείται το up-down διάγραμμα που ορίζεται σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων από τα ζευγάρια (i, σ(i)).



σ=671354289

Με την βοήθεια του διαγράμματος αυτού περιγράφονται έννοιες των μεταθέσεων και αποδεικνύονται χαρακτηριστικές ιδιότητες αυτών. Ετσι εύκολα αποδεικνύεται ότι :

α) Τα διαγράμματα των σ και σ^{-1} είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα που ορίζει η εξίσωση σ=i β) Τα διαγράμματα των σ και σ^{r} είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα που ορίζει η εξίσωση $i=\frac{n+1}{2}$.

γ) Τα διαγράμματα των σ και σ^{c} είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα που ορίζει η εξίσωση $\sigma=\frac{n+1}{2}$.

1.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Υπάρχουν σύνολα που ορίζονται απο χαρακτηριστικά στοιχεία των μεταθέσεων και διευκολύνουν την μελέτη σχετικών προβλημάτων. Απ΄ αυτά τα πιο βασικά και απαραίτητα είναι εκείνα που περιλαμβάνονται στους επόμενους ορισμούς [10], [30], [31], [32].

Το στοιχείο $\sigma(i)$ μιάς μετάθεσης σ ονομάζεται:

1) **Σταθερό** όταν $\sigma(i)=i$, $i\in[n]$

2) **Μεταβλητό** όταν $\sigma(i)\neq i$, $i\in[n]$

3) **Κορυφή** όταν :

   (i) Για $i=n$ ισχύει $\sigma(n-1)<\sigma(n)$

   (ii) Για $2\leq i\leq n-1$ ισχύει $\sigma(i-1)<\sigma(i)>\sigma(i+1)$

Το σύνολο των κορυφών μιάς μετάθεσης σημειώνεται με P.

4) **Βάση** όταν :

   (i) Για $i=1$ ισχύει $\sigma(1)<\sigma(2)$

   (ii) Για $2\leq i\leq n-1$ ισχύει $\sigma(i-1)>\sigma(i)<\sigma(i+1)$

   Το σύνολο των βάσεων μιας μετάθεσης σημειώνεται με Q.

5) **Ανοδος** όταν $\sigma(i)<\sigma(i+1)$, $i\leq n-1$

   Το σύνολο των ανόδων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με M και σ΄αυτό δεν περιέχεται το n.

6) **Συνάνοδος** όταν $\sigma(i-1) < \sigma(i)$, $2\leq i \leq n$

Το σύνολο των συνανόδων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με cM.

7) **Διπλή άνοδος** όταν $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$, $2\leq i \leq n-1$

Το σύνολο των διπλών ανόδων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με DM.

8) **Κάθοδος** όταν $\sigma(i+1) < \sigma(i)$, $i\leq n-1$

Το σύνολο των καθόδων μιάς μετάθεσης σημειώνεται D και σ΄αυτό δεν περιέχεται το n.

9) **Συνκάθοδος** όταν $\sigma(i-1) > \sigma(i)$, $i\varepsilon[n]$

Το σύνολο των συνκαθόδων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με cD

10) **Διπλή κάθοδος** όταν $\sigma(i+1) < \sigma(i) < \sigma(i-1)$, $2\leq i\leq n-1$

Το σύνολο των διπλών καθόδων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με DD και σ΄αυτό δεν περιέχεται το n.

11) **Πορεία** όταν το στοιχείο $\sigma(i)+1$ ευρίσκεται στα δεξιά του.

Το σύνολο των πορειών μιάς μετάθεσης σημειώνεται με A και σ΄αυτό δεν περιέχεται το n.

12) **Συμπορεία** όταν το στοιχείο $\sigma(i)-1$ ευρίσκεται στα αριστερά του.

Το σύνολο των συμπορειών μιάς μετάθεσης σημειώνεται με cA.

13) **Οπισθοδρόμιση** όταν το στοιχείο $\sigma(i)+1$ ευρίσκεται στα αριστερά του.

Το σύνολο των οπισθοδρομήσεων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με R και σ΄αυτό δεν περιέχεται το n.

14) Συνοπισθοδρόμιση όταν το στοιχείο σ(i)-1 ευρίσκεται στα δεξιά του.

Το σύνολο των συνοπισθοδρομήσεων μιάς μετάθεσης σημειώνεται με

Ο προσδιορισμός των προηγουμένων συνόλων μπορεί να γίνει εύκολα με την βοήθεια του διαγράμματος της μετάθεσης , αφού οι περισσότερες απο τις έννοιες τους προέκυψαν απο γεωμετρική εποπτεία.

Ετσι για την μετάθεση σ=671354289 προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

P	{5,7,9}	{2,5,9}	IP
Q	{1,2,6}	{1,3,7}	IQ
M	{1,2,3,6,8}	{1,3,4,7,8}	IM
cM	{3,5,7,8,9}	{2,4,5,8,9}	IcM
DM	{3,8}	{4,8}	IDM
D	{4,5,7}	{1,5,6}	ID
cD	{1,2,4}	{3,6,7}	IcD
DD	{4}	{6}	IDD
A	{1,3,6,7,8}	{1,2,3,4,8}	IA
cA	{2,4,7,8,9}	{2,6,7,8,9}	IcA
R	{2,4,5}	{5,6,7}	IR
cR	{3,5,6}	{1,4,5}	IcR

όπου με IX σημειώνεται το σύνολο των δεικτών των στοιχείων της.

1.4 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Τα γραφήματα τα οποία χρησιμοποιούνται στην παρουσα μελέτη είναι προσανατολισμένα και ορίζονται [16] απο δυάδες της μορφής $G=(X,\Gamma)$ όπου X ένα μη κενό σύνολο και Γ μια απεικόνιση $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

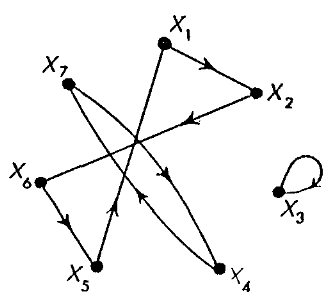
Τα στοιχεία του X ονομάζονται κορυφές του γραφήματος, ενώ τα διατεταγμένα ζεύγη (x,y) με $x,y \in X$ και $y\in\Gamma(x)$ ονομάζονται τόξα αυτού.

Για κάθε γράφημα $G=(X,\Gamma)$ ισχύουν οι ακόλουθοι ορισμοί:

1) Κάθε σύνολο διαδοχικών τόξων ονομάζεται **δρόμος** .

2) Κάθε πεπερασμένος δρόμος που ξεκινά από μιά κορυφή του και καταλήγει σ΄αυτή ονομάζεται **κύκλωμα** .

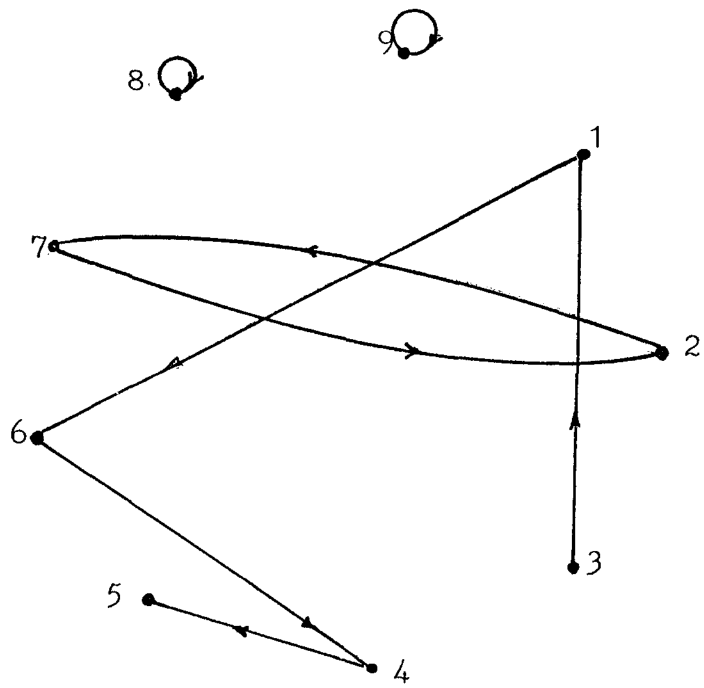
Έτσι στο επόμενο γράφημα :



η τριάδα (x_1,x_2), (x_2,x_6), (x_6,x_5) αποτελεί ένα δρόμο που θα συμβολίζεται με $[x_1,x_2,x_6,x_5]$, ενώ ο δρόμος $[x_2,x_6,x_5,x_1,x_2]$ είναι ένα κύκλωμα.

Σε κάθε μετάθεση σ του [n] αντιστοιχεί ένα γράφημα $G=(X,\Gamma)$ με $X=[n]$ και $\Gamma(i)=\sigma(i)$, το οποίο ονομάζεται **γράφημα της** .

Ετσι στη μετάθεση σ=671354289 αντιστοιχεί το επόμενο γράφημα:



Απο το γράφημα αυτό εύκολα προκύπτει ότι τα σταθερά στοιχεία μιας μετάθεσης σ αντιστοιχούν στους βρόχους του (δηλ . στα τόξα των οποίων οι κορυφές συμπίπτουν),ενώ οι κύκλοι της στα κυκλώματά του.

1.5 ΔΕΝΔΡΑ

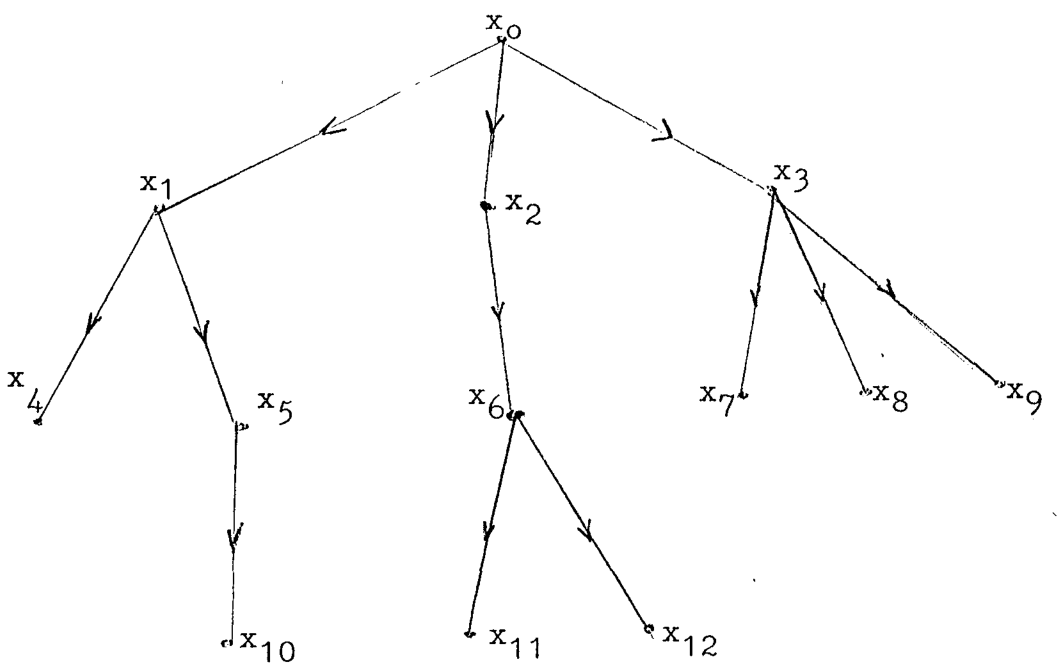
Κάθε χωρίς κύκλωμα γράφημα $G=(X,\Gamma)$ για το οποίο ισχύουν :

(i) $\exists\ x_o \in X : \Gamma^{-1}(x_o) = \emptyset$

(ii) $|\Gamma^{-1}(x_i)| = 1 \quad \forall\ x_i \neq x_o$

ονομάζεται δενδροειδές με ρίζα x_o ή προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα x_o [16].

Ετσι το ακόλουθο γράφημα είναι ένα προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα την κορυφή x_o .



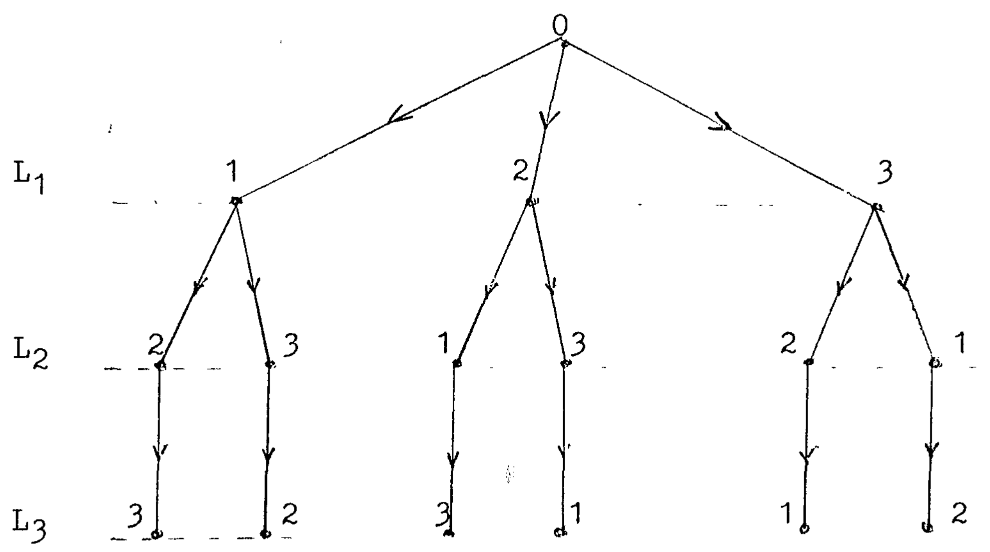
Ειδικά οι κορυφές $x \in X$ για τις οποίες ισχύει $\Gamma(x)=\emptyset$ ονομάζονται φύλλα του δένδρου .

Απο τα προσανατολισμένα δένδρα με ρίζα εκείνα που χρησιμοποιούνται στην παρούσα μελέτη είναι τα δένδρα μεταθέσεων και τα δυαδικά δένδρα .

Γενικά τα δένδρα που δίδουν τις μεταθέσεις του [n] ονομάζονται **δένδρα μεταθέσεων** και σημειώνονται με T_n.

Σ΄αυτά η ρίζα σημειώνεται με 0, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές τους, είναι στοιχεία του [n] που κατανέμονται σε n στάθμες $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Ετσι το δένδρο T_3 δίδει όλες τις μεταθέσεις του [3].



Δένδρο T_3

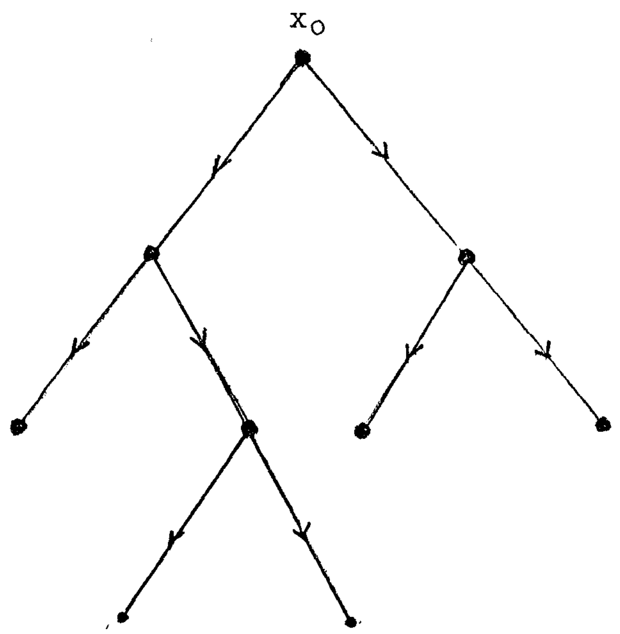
Απο τον ορισμό του δένδρου T_n εύκολα αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση.

1.6.1 Πρόταση : Κάθε δρόμος $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ του T_n με κορυφές αντίστοιχα στις στάθμες $L_1, L_2,\ldots,L_n$ αντιστοιχεί σε μιά μετάθεση $\sigma=x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ και αντίστροφα .

Με την βοήθεια των δένδρων T_n επιλύονται προβλήματα που αναφέρονται στον προσδιορισμό υποσυνόλων του $[n]$ που πληρούν ορισμένες ιδιότητες ή και ικανοποιούν ειδικές συνθήκες [23], [24], [25] .

Τέλος κάθε προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα και με δύο το πολύ τόξα σε κάθε κορυφή ονομάζεται δυαδικό .

Ετσι το ακόλουθο δένδρο είναι δυαδικό με ρίζα x_o .



Στα δένδρα αυτά οι διάφορες της ρίζας κορυφές διαμερίζονται σε σύνολα που συνιστούν επίσης δυαδικά δένδρα , τα οποία ονομάζονται υποδένδρα .

Κεφάλαιο 2

ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει ιδιότητες που αναφέρονται στις μεταθέσεις του [n]. Συγκεκριμένα αποδεικνύονται ιδιότητες που αναφέρονται στα στοιχεία των μεταθέσεων, στα χαρακτηριστικά τους μεγέθη, στις παραβάσεις τους, στις μήτρες τους και σε πολυώνυμα που ορίζονται απ΄αυτές.

2.1 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Οι ιδιότητες που ακολουθούν αναφέρονται σε ανισότητες των στοιχείων των μεταθέσεων του [n].

2.1.1 Πρόταση : Για κάθε μετάθεση σ του [n] ισχύει :

α) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma(i)}{i} \geq n$$

β) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sigma(i)} \geq n$$

Απόδειξη

α) Απο την γνωστή ανισότητα του Cauchy:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma(i)}{i}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma(i)}{i}}$$

Προκύπτει : $\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma(i)}{i}\geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma(i)}{i}\geq n$$

β) Όμοια προκύπτει:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sigma(i)}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{\sigma(i)}}$$

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sigma(i)}\geq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\sigma(i)}\geq n$$

Οι ισότητες ισχύουν όταν $\sigma=\sigma_0$.

2.1.2 Πρόταση : Αν A_K είναι το σύνολο των μεταθέσεων του [k] για τις οποίες ισχύει :

$$|\sigma(i) - i| \leq 1, \qquad i \in [k]$$

τότε οι αριθμοί $|A_K|$, $k = 2,3,\ldots,n$ είναι οι αριθμοί του Fibonacci.

Απόδειξη

Απο τον ορισμό του συνόλου A_n εύκολα προκύπτει ότι για τα δύο τελευταία στοιχεία τους θα είναι:

$$\sigma(n)=n \quad ή \quad \sigma(n)=n-1 \quad και \quad \sigma(n-1)=n$$

Ετσι το σύνολο A_n διαμερίζεται στα υποσύνολα:

$$A_n^1 = \{ \sigma \in A_n : \sigma(n) = n \}$$

$$A_n^2 = \{ \sigma \in A_n : \sigma(n) = n-1 \text{ και } \sigma(n-1) = n \}$$

Ο πληθάριθμος του πρώτου υποσυνόλου συμπίπτει με εκείνον του συνόλου A_{n-1} των μεταθέσεων του [n-1] με $|\sigma(i)- i| \leq 1$ για κάθε $i\in[n-1]$, δηλ $|A_n^1|=|A_{n-1}|$.
Αντίστοιχα ο πληθάριθμος του δευτέρου υποσυνόλου συμπίπτει με εκείνον του συνόλου A_{n-2} των μεταθέσεων του [n-2] με $|\sigma(i)- i|\leq 1$ για κάθε $i\in[n-2]$, δηλ $|A_n^2| =|A_{n-2}|$
Κατόπιν τούτων απο τη ισότητα

$$|A_n| =|A_n^1| +|A_n^2|$$

προκύπτει $$|A_n| =|A_{n-1}|+|A_{n-2}|$$

2.2. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Οι Cheema και Motzkin [9] όρισαν για κάθε μετάθεση σ του [n] τα ακόλουθα αθροίσματα :

$$m_1(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma(i)=\sigma(j)+1 \\ i<j}} (n-\sigma(j))$$

$$m_2(\sigma) = \sum_{\sigma(i+1)<\sigma(i)} (n-i)$$

τα οποία ονόμασαν χαρακτηριστικά μεγέθη αυτής .

Ετσι για την μετάθεση σ=671354289 είναι αντίστοιχα:

$$m_1\ (\sigma) = (9-2) + (9-4) + (9-5) = 16$$

$$m_2\ (\sigma) = (9-2) + (9-5) + (9-6) = 14$$

Για τα χαρακτηριστικά μεγέθη των μεταθέσεων ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

2.2.1 Πρόταση : Η μέγιστη τιμή του m_1 (αντίστοιχα m_2) μιάς μετάθεσης σ ισούται με $\frac{n(n-1)}{2}$

Απόδειξη

Από τον ορισμό του m_1 προκύπτει :

$$m_1(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma(i)=\sigma(j)+1 \\ i<j}} (n-\sigma(j)) \leq \sum_{j=1}^{n} (n-\sigma(j)) = n^2 - \sum_{j=1}^{n} \sigma(j) =$$

$$= n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Η τιμή αυτή μάλιστα αντιστοιχεί στην μετάθεση σ_o^T .

Ομοια απο τον ορισμό του m_2 προκύπτει :

$$m_2(\sigma) = \sum_{\sigma(i+1)<\sigma(i)} (n-i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = n(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i =$$

$$= n(n-1) - \frac{(n-1)\, n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Η τιμή αυτή μάλιστα αντιστοιχεί στην μετάθεση σ_0^T .

2.2.2 Πρόταση : Γιά τα χαρακτηριστικά μεγέθη μιάς μετάθεσης σ ισχύουν :

$$m_1(\sigma^{-1}) = m_2(\sigma)$$

$$m_2(\sigma^{-1}) = m_1(\sigma)$$

Απόδειξη

Αν $\sigma(j)=i$ και $\sigma(k)=i+1$ τότε για το χαρακτηριστικό μέγεθος m_2 της αντίστροφης μετάθεσης της σ θα ισχύει :

$$m_2\,(\sigma^{-1}) = \sum_{\sigma^{-1}(i+1)<\sigma^{-1}(i)} (n-i) = \sum_{\substack{\sigma(k)=\sigma(j)+1 \\ k<j}} (n-\sigma(j)) = m_1(\sigma)$$

Κατόπιν τούτου εύκολα προκύπτει ότι

$$m_1\,(\sigma^{-1}) = m_2(\,(\sigma^{-1})^{-1}) = m_2(\sigma)$$

2.3 ΠΑΡΑΒΑΣΕΙΣ

Η πεπερασμένη ακολουθία (α_i) , $i\in[n]$ όπου α_i ο αριθμός των παραβάσεων του στοιχείου i της μετάθεσης σ ονομάζεται **ακολουθία παραβάσεων** .

Η ακολουθία των παραβάσεων μιάς μετάθεσης σ μπορεί να προσδιορισθεί από το διάγραμμά της. Πραγματικά ο i όρος της ακολουθίας παραβάσεων ισούται με τον αριθμό των κορυφών του διαγράμματος της μετάθεσης που ευρίσκονται αριστερά και άνω απο την κορυφή με τεταγμένη i .Ετσι απο το διάγραμμα της μετάθεσης σ=671354289 της 1.2 προκύπτει η εξής ακολουθία παραβάσεων : 2,5,2,3,2,0,0,0,0, και $I_\sigma=14$.

Γενικά γιά τον αριθμό Iσ των παραβάσεων και την ακολουθία (α_i) αυτών ισχύουν οι σχέσεις :

$$0\leq I_\sigma \leq \binom{n}{2}$$

$$0\leq\alpha_i\leq n-i \quad ,\; i\in[n]$$

Ειδικά είναι $I_\sigma=0$ (αντίστοιχα $I_\sigma=\binom{n}{2}$) όταν $\sigma=\sigma_0$ (αντίστοιχα $\sigma=\sigma_0^r$).

O Roth [28] πρώτος απέδειξε την ισότητα $I_\sigma=I_{\sigma^{-1}}$. Η πρόταση που ακολουθεί αναφέρεται στην ισότητα $I_{\sigma^r} = I_{\sigma^c}$.

2.3.1 Πρόταση : Η αναστροφη και η συζυγής μιάς μετάθεσης σ έχουν τον ίδιο αριθμό παραβάσεων .

Απόδειξη

Η ιδιότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως πόρισμα των ακόλουθων δύο σχέσεων .

$$I_\sigma + I_{\sigma^r} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$I_\sigma + I_{\sigma^c} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Αν (α_i), (α'_i), $i\in[n]$ είναι οι ακολουθίες των παραβάσεων των μεταθέσεων σ και σ^T αντίστοιχα, τότε οι α_i, α'_i είναι οι αριθμοί των μεγαλύτερων στοιχείων απο το i που ευρίσκονται στα αριστερά του στις σ και σ^T. Από τον ορισμό της ανάστροφης μετάθεσης εύκολα προκύπτει ότι ο αριθμός α'_i ισούται και με τον αριθμό των μεγαλύτερων στοιχείων από το i που ευρίσκονται στα δεξιά του στη μετάθεση σ.

Κατόπιν τούτου θα ισχύει:

$$\alpha_i+\alpha'_i=n-i \quad ,i\in[n]$$

οπότε θα είναι:

$$I\sigma+I\sigma^T=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\alpha'_i)=\sum_{i=1}^{n}(n-i)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Ομοια αν (α''_i), $i\in[n]$ είναι η ακολουθία των παραβάσεων της μετάθεσης σ^c, τότε ο α''_i είναι ο αριθμός των μεγαλύτερων στοιχείων απο το i που ευρίσκονται αριστερά του στη σ^c.

Ομως απο τον ορισμό της συζυγούς μετάθεσης εύκολα προκύπτει ότι ο αριθμός α''_{n+1-i} ισούται με τον αριθμό των μικρότερων στοιχείων από το i που ευρίσκονται αριστερά του στη μετάθεση σ.

Κατόπιν τούτου γιά το άθροισμα $\alpha+\alpha''_{n+1-i}+1=\kappa$ θα ισχύει $\sigma(\kappa)=i$ οπότε θα είναι:

$$I\sigma+I\sigma^c=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha''_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\alpha''_{n+1-i})=\sum_{\kappa=1}^{n}(k-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

2.3.2 Αλγόριθμος

Ο M. Hall Jr. [5] απέδειξε ότι για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ακεραίων αριθμών α_i με $0 \leq \alpha_i \leq n-i$ $, i \in [n]$ υπάρχει μιά μόνο μετάθεση που είναι γι'αυτή ακολουθία παραβάσεων.

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί αναφέρεται στην εύρεση της μετάθεσης σ όταν δίδεται η ακολουθία των παραβάσεων της. Χρησιμοποιεί δε μιά βοηθητική μετάθεση με στοιχεία β_i την οποία κατασκευάζει σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα :

Βήμα 1ο : Θέσε το β_1 στην α_1+1 θέση

Βήμα 2ο : Θέσε το β_i στην α_i+1 κατά σειρά μη κενή θέση.

Βήμα 3ο : Επανέλαβε το δεύτερο βήμα για $i = 2,3,\ldots,n$

Η μετάθεση που ορίζουν οι δείκτες της μετάθεσης των β_i είναι η σ.

Πραγματικά από το βήμα 1 προκύπτει το πρώτο στοιχείο της μετάθεσης σ γιατί είναι το αντίστροφο του στοιχείου β_1 . Από τα βήματα 2 και 3 προκύπτουν τα υπόλοιπα στοιχεία της μετάθεσης σ .

Παράδειγμα Εστω η ακολουθία των παραβάσεων 3,5,1,0,2,1,1,0 τότε ο αλγόριθμος δίδει διαδοχικά .

i=1	$.\ .\ .\ \beta_1.\ .\ .\ .$
i=2	$.\ .\ .\ \beta_1.\ .\ \beta_2.$
i=3	$.\ \beta_3.\ \beta_1.\ .\ \beta_2.$
i=4	$\beta_4\beta_3.\ \beta_1.\ .\ \beta_2.$
i=5	$\beta_4\beta_3.\ \beta_1\beta_6\beta_5\beta_2.$
i=6	$\beta_4\beta_3.\ \beta_1\beta_6\beta_5\beta_2.$
i=7	$\beta_4\beta_3.\ \beta_1\beta_6\beta_5\beta_2\beta_7$
i=8	$\beta_4\beta_3\beta_8\beta_1\beta_6\beta_5\beta_2\beta_7$

οπότε προκύπτει η μετάθεση σ=43816527

2.4 ΜΗΤΡΕΣ

Οι ιδιότητες που ακολουθούν αναφέρονται στις μήτρες των μεταθέσεων . Αν στην B_i γραμμή της μήτρας $P(\sigma)$ αντικατασταθούν με μονάδες τα μηδενικά που ευρίσκονται δεξιά (αντίστοιχα αριστερα) της μονάδας της, τότε προκύπτει ένα διάνυσμα - γραμμή $\bar{B}_i$ (αντίστοιχα $\underline{B}_i$) που ονομάζεται δεξιό (αντίστοιχα αριστερό) συμπλήρωμα της B_i .

'Ετσι απο την μήτρα :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

της μετάθεσης $\sigma=35214$ προκύπτει $\bar{B}_3= 01111$. $\underline{B}_3=11000$

Για τα διανύσματα B_i , $\bar{B}_i$ και $\underline{B}_i$ μιά μήτρας $P(\sigma)$ και τα εσωτερικά τους γινόμενα ισχύει η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 2.4.1.

Αν $\bar{B}_i \cdot B_{i+1} \neq 0$ τότε $\sigma(i) \in M$ και $\sigma(i+1) \in cM$

Αν $\underline{B}_i \cdot B_{i+1} = 0$ τότε $\sigma(i) \in D$ και $\sigma(i+1) \in cD$

Απόδειξη

Είναι $B_i = (00\ldots10\ldots)$, με την μονάδα στη $\sigma(i)$ θέση

$B_{i+1} = (00\ldots10\ldots)$, με την μονάδα στην $\sigma(i+1)$ θέση

και $\bar{B}_i = (00\ldots1\ldots11)$, με πρώτη μονάδα στη $\sigma(i)$ θέση.

Επειδή $\bar{B}_i \cdot B_{i+1} \neq 0$, προκύπτει ότι το $\bar{B}_i$ θα έχει 1 στην θέση $\sigma(i+1)$, οπότε $\sigma(i+1) > \sigma(i)$ και $\sigma(i) \in M$.

2.4.2 Πρόταση : Αν $P(\sigma) = [\alpha_{ij}]$ τότε για τις μήτρες των μεταθέσεων σ^{-1}, σ^{T} και σ^{c} ισχύουν

$$P(\sigma^{-1}) = [\alpha_{ji}]$$

$$P(\sigma^{T}) = [\alpha_{n+1-i,j}]$$

$$P(\sigma^{c}) = [\alpha_{i,n+1-j}]$$

Απόδειξη

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί το γινόμενο των μητρών $P(\sigma)$ και $P(\sigma^{-1})$ δίδει την μοναδιαία μήτρα.

Η δεύτερη και τρίτη ισχύουν γιατί τα στοιχεία $\sigma(i)$ της σ με τα στοιχεία $\sigma^{T}(i)$ και $\sigma^{c}(i)$ των σ^{T} και σ^{c} συνδέονται με τις σχέσεις $\sigma^{T}(i) = \sigma(n+1-i)$ και $\sigma^{c}(i) = n+1-\sigma(i)$

2.5 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Σε κάθε μετάθεση σ μπορούν να αντιστοιχούν διάφορα ακέραια πολυώνυμα . Η ανάπτυξη που ακολουθεί περιορίζεται στα πολυώνυμα Gregory και Newton .

Οπως είναι γνωστό κάθε πολυώνυμο n βαθμού μπορεί να λάβει την μορφή :

$$P(x)=P(0) + \frac{\Delta P(0)}{1!} F_1(x) + \frac{\Delta^2 P(0)}{2!} F_2(x)+\dots+ \frac{\Delta^n P(0)}{n!} F_n(x)$$

με

$$F_k(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1),\ k=1,2,\dots,n$$

η οποία ονομάζεται τύπος του Gregory.

Στη περίπτωση των μεταθέσεων στη θέση του P(x) είναι το σ(i) με σ(0)=0.

Ετσι στη μετάθεση σ=3412 αντιστοιχεί το πολυώνυμο

$$\sigma(i)= \frac{5}{12} i^4 - \frac{34}{12} i^3 + \frac{55}{12} i^2 + \frac{10}{12} i$$

του οποίου οι συντελεστές προκύπτουν από τον ακόλουθο πίνακα τιμών :

i	$\sigma(i)$	$\Delta^1\sigma(i)$	$\Delta^2\sigma(i)$	$\Delta^3\sigma(i)$	$\Delta^4\sigma(i)$
4	2				
3	1	1			
2	4	-3	4		
1	3	1	-4	8	
0	0	3	-2	-2	10

Για το G– πολυώνυμο ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

2.5.1 Πρόταση : Το άθροισμα των συντελεστών του G-πολυωνύμου μιας μετάθεσης σ ισούται με σ(1).

Απόδειξη

Πραγματικά το πολυώνυμο αυτό μπορεί να λάβει τη μορφή :

$$\sigma(i)=\sigma(0)+\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k\sigma(0)}{k!}\, i(i-1)\ldots.(i-k+1) =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \Delta^k\sigma(0)\,\frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{k!}=\sum_{k=1}^{n} \Delta^k\sigma(0)\cdot\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_{\ell k}\, i^{\ell} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \Delta^k\,\sigma(0)\alpha_{\ell k}\, i^{\ell} =$$

$$=\{\alpha_{11}\Delta\sigma(0)+\alpha_{12}\Delta^2\sigma(0)+\ldots+\alpha_{1n}\Delta^n\sigma(0)\}i+$$

$$+\{\alpha_{22}\Delta^2\sigma(0)+\alpha\ldots+\alpha_{2n}\Delta^n\sigma(0)\}i^2+\ldots+\ldots+\alpha_{nn}\Delta^n\sigma(0)i^n$$

οπότε το άθροισμα των συντελεστών του σ(i) θα ισούται με

$$\Sigma=(\alpha_{11}\Delta\sigma(0)+\alpha_{12}\Delta^2\sigma(0)+\ldots+\alpha_{1n}\Delta^n\sigma(0))+(\alpha_{22}\Delta^2\sigma(0)+\ldots+\alpha_{2n}\Delta^n\sigma(0)+$$

$$+\ldots+\alpha_{nn}\Delta^n\sigma(0)=\alpha_{11}\Delta\sigma(0)+(\alpha_{12}+\alpha_{22})\Delta^2\sigma(0)+\ldots+(\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\alpha_{nn})\,\Delta^n\sigma(0)$$

Επειδή όμως

$$\alpha_{11}=1$$

$$\Delta\sigma(0)=\sigma(1)-\sigma(0)=\sigma(1)$$

$$\alpha_{12}+\alpha_{22}=\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=0$$

και γενικά

$$\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\ldots+\alpha_{nn}=0 \;, \quad \forall \; n$$

έπεται ότι $\Sigma=\sigma(1)$

Η απόδειξη της προτελευταίας ισότητας στηρίζεται στο λήμμα που ακολουθεί.

2.5.2 Λήμμα : Για τους πρώτου είδους αριθμούς του Stirling s_n^m ισχύει

$$s_n^1+\ldots+s_n^n=0$$

Απόδειξη

Το πολυώνυμο $p(x)=x(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+1)$ με τους αριθμούς s_n^m του Stirling πρώτου είδους γράφεται

$$p(x)=s_n^o+s_n^1x+\ldots s_n^nx^n$$

και επειδή $p(1)=0$ και $s_n^o=0$ τελικά θα είναι:

$$s_n^1+\ldots+s_n^n=0$$

Κατόπιν τούτου και επειδή $\alpha_{\rho k}=\dfrac{s_k^\rho}{k!}$ εύκολα προκύπτει ότι

$$\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\ldots+\alpha_{nn}=\frac{s_n^1}{n!}+\frac{s_n^2}{n!}+\ldots+\frac{s_n^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(s_n^1+s_n^2+\ldots+s_n^n\right)=0$$

Ομοια αν στο τύπο παρεμβολής του Newton

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_1)+\ldots+\alpha_n\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots.(x-x_n)$$

όπου $\alpha_k = \dfrac{1}{k!} \cdot \dfrac{\Delta^k\,\Psi_1}{(\Delta x)^k}$

τεθούν $x=i$, $x_k=k$, $\Delta x=1$ και $\Psi_1=\sigma(1)$

τότε προκύπτει το N-πολυώνυμο.

Ετσι στη μετάθεση σ=3412 αντιστοιχεί το πολυώνυμο

$$\sigma(i) = \frac{4}{3}\, i - 10i^2 + \frac{65}{3} i - 10$$

του οποίου οι συντελεστές προκύπτουν από τον ακόλουθο πίνακα τιμών

i	σ(i)	$\Delta^1\sigma(i)$	$\Delta^2\sigma(i)$	$\Delta^3\sigma(i)$
1	3			
2	4	1	-4	
3	1	-3		8
		1	4	
4	2			

Για το N-πολυώνυμο ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

2.5.3 Πρόταση : Το άθροισμα των συντελεστών του N-πολυωνύμου μιάς μετάθεσης σ ισούται με σ(1) .

Απόδειξη

Το N-πολυώνυμο μπορεί να λάβει την μορφή :

$$f(i) = \sigma(1) + \frac{\Delta^{1}\sigma(1)}{1!}.(i-1) + \frac{\Delta^{2}\sigma(1)}{2!}.(i-1)(i-2)+\ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^{n}\sigma(1)}{i!}.(i-1).....(i-n)$$

οπότε για i=1 προκύπτει :

$$f(1) = \sigma(1)$$

αλλά f(1) είναι το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου.

ΠΡΟΤΥΠΑ

Το σύνολο των μεταθέσεων του [n] διαμερίζεται σε διάφορες κλάσεις με την βοήθεια των προτύπων τους.

Το βασικώτερο πρότυπο είναι εκείνο που προκύπτει, όταν σε κάθε άνοδο (αντίστοιχα κάθοδο) αντιστοιχεί θετικό (αντίστοιχα αρνητικό) πρόσημο [30].

Αντίθετα το πρότυπο του Carlitz [7] ορίζεται με την βοήθεια διανύσματος.

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύονται ιδιότητες που απορέουν απο την μορφή των προτύπων και προσδιορίζονται μεταθέσεις με δεδομένα πρότυπα.

3.1 Ιδιότητες

Σε κάθε μετάθεση σ αντιστοιχεί η " λέξη " $w = z_1 z_2 \ldots z_{n-1}$

όπου $z_i = +$, όταν $\sigma(i)<\sigma(i+1)$

$= -$, όταν $\sigma(i+1)<\sigma(i)$

που ονομάζεται πρότυπο της.

Ετσι για την μετάθεση $\sigma=671354289$ είναι $w=+-++--++$.

Από τον προηγούμενο ορισμό εύκολα προκύπτει ότι σε κάθε άνοδο (αντίστοιχα κάθοδο) αντιστοιχεί θετικό (αντίστοιχα αρνητικό) πρόσημο και ότι στο σύνολο G[n] αντιστοιχεί ένα σύνολο W_{n-1} προτύπων με 2^{n-1} στοιχεία.

Από τον ορισμό του προτύπου , τις έννοιες και προτάσεις των προηγούμενων κεφαλαίων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

3.1.1 Πρόταση : Για κάθε μετάθεση σ ισχύουν:

α) Όταν $z_i=+$, τότε $\sigma(i+1)\neq 1$

β) Όταν $\sigma(i)=1$, τότε $z_i\neq -$

γ) Όταν $\sigma(i)=2$ και $z_i = -$, τότε $\sigma(i+1) =1$

δ) Όταν $\sigma(i)\neq 1$ και $z_i = +$, τότε $\sigma(i+1)\neq 2$

Πρόκειται για άμεσες συνέπειες του ορισμού του προτύπου

3.1.2 Πρόταση: Για τα σύνολα IM, ID, IP και IQ ισχύουν:

α) $IM = \{i\in[n-1] : z_i=+\}$

β) $ID = \{i\in[n-1] : z_i=-\}$

γ) Στο IP ανήκουν οι ενδείξεις $i\in[n-1]$: $z_{i-1}=+$ και $z_i= -$ και n όταν $z_{n-1}=+$

δ) Στο IQ ανήκουν οι ενδείξεις $i\in[n-1]$: $z_{i-1}= -$ και $z_i= +$ και 1 όταν $z_1= +$

Πρόκειται για άμεσες συνέπειες του ορισμού των συνόλων M,D,P και Q.

Στην επόμενη πρόταση με Δ_2 σημειώνεται το σύνολο των δυνατών δύο πρώτων στοιχείων μιάς μετάθεσης.

.1.3 Πρόταση : Γιά τις μεταθέσεις του [n] που έχουν δεδομένο πρότυπο ισχύουν:

α) Οταν $z_1=z_2=+$, τότε $\Delta_2=\{12,13,\ldots,1(n-1)\}\cup\{23,24,\ldots,2(n-1)\}\cup\{(n-2),(n-1)\}$

β) Οταν $z_1=+,\ z_2=+$, τότε $\Delta_2=\{13,14,\ldots,1n\}\cup\{23,24,\ldots,2n\}\cup\ldots\cup\{(n-1),n\}$

γ) Οταν $z_1=-,\ z_2=+$, τότε $\Delta_2=\{21\}\cup\{31,32\}\cup\ldots\cup\{n1,n2,\ldots,n(n-2)\}$

δ) Οταν $z_1=z_2=-$, τότε $\Delta_2=\{32\}\cup\{42,43\}\cup\ldots\cup\{n2,n3,\ldots,n(n-1)\}$

όκειται για άμεσες συνέπειες του ορισμού του προτύπου .

1.4 Πρόταση : Γιά να έχουν οι μεταθέσεις σ και σ^T το ίδιο πρότυπο έπει να είναι περιττού μήκους.

τόδειξη

ϳτω ότι ο n είναι άρτιος δηλ $n=2k$, τότε απο

την $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\ \sigma(k)\sigma(k+1)\ldots\ \sigma(2k)$

οκύπτει

$$\sigma^T=\sigma(2k)\sigma(2k+1)\ldots\sigma(k+1)\sigma(k)\ldots\sigma(1)$$

ην περίπτωση αυτή τα πρότυπα των σ και σ^T δεν μπορούν να συμπίμπτουν ιτί αν $\sigma(k)<\sigma(k+1)$ τότε το k πρόσημο του προτύπου της σ είναι - ενώ το τίστοιχο της σ^T είναι + .

Αν με z_i^{-1}, z_i^{T} και z_i^{C} συμβολίζονται τα αντίστοιχα πρόσημα των προτύπων της αντίστροφης, αναστροφής και συζυγούς μιάς μετάθεσης σ τότε ισχύουν οι επόμενες προτάσεις.

3.1.5 Πρόταση : Γιά κάθε μετάθεση τα πρόσημα z_i και z_i^{c} είναι αντίθετα.

Απόδειξη

Πραγματικά απο την διαφορά:

$$\sigma^{c}(i+1)-\sigma^{c}(i) = (n+1-\sigma(i+1))-(n+1-\sigma(i)) = \sigma(i) - \sigma(i+1)$$

προκύπτει ότι το πρόσημο z_i είναι αντίθετο του z_i^{c}.

3.1.6 Πρόταση : Για κάθε μετάθεση τα z_i και z_{n-i}^{T} είναι αντίθετα.

Απόδειξη

Πραγματικά απο την διαφορά :

$$\sigma^{T}(i+1)-\sigma^{T}(i) = \sigma(n-i)-\sigma(n+1-i) = -(\sigma(n+1-i)-\sigma(n-i)) = -z_{n-i}$$

προκύπτει ότι το πρόσημο z_i είναι αντίθετο του z_{n-i}^{T}

3.2 ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

Οι Mac-Mahon [21], Niven [22], De Bruijn [6], Kreweras [19], Stanley [29], Carlitz [7], Foulkes [12] και Viennot [30],[31] έδωσαν τρόπους προσδιορισμού του αριθμού των μετάθεσεων που έχουν δεδομένο πρότυπο.

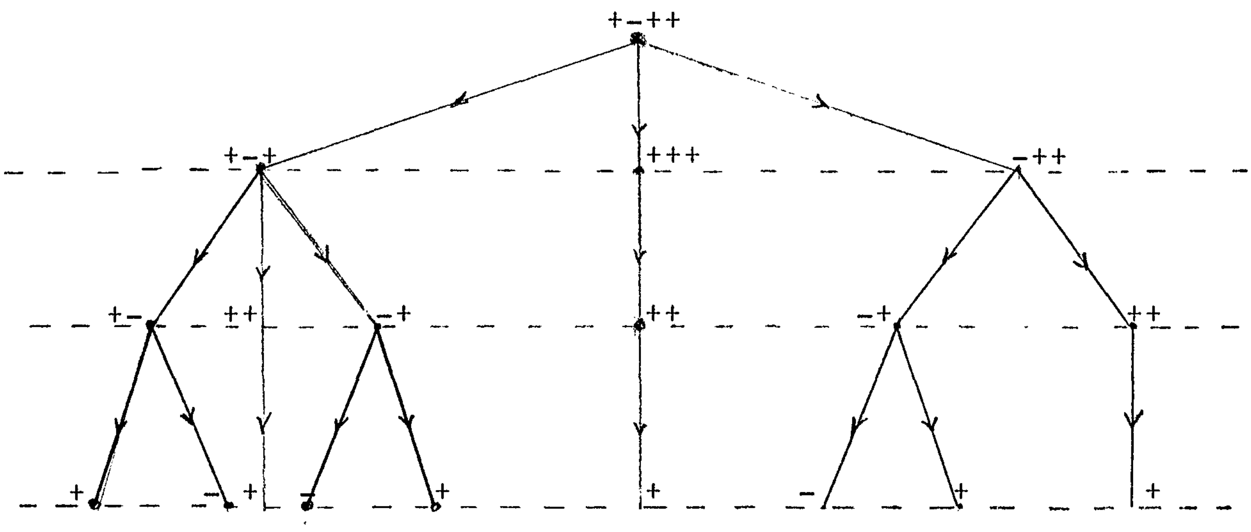
Ο αλγόριθμος που ακολουθεί αναφέρεται στις μεταθέσεις με k εναλλασσόμενα πρόσημα και χρησιμοποιεί ένα προσανατολισμένο δένδρο με ρίζα, οι κορυφές του οποίου κατανέμονται σε k στάθμες .

Ο αριθμός των φύλλων του δένδρου δίδει τον αριθμό των μεταθέσεων .

Βήμα 1ο Θέσε στη ρίζα του δένδρου το πρότυπο w και στις κορυφές της πρώτης στάθμης τις διάφορες υπολέξεις που προκύπτουν απο το w όταν αφαιρείται κάθε φορά ένα πρόσημο του.

Βήμα 2ο Επανέλαβε την προηγούμενη διαδικασία και για τις επόμενες k-1 στάθμες και μέτρησε τα φύλλα του δένδρου.

Παράδειγμα: Στο πρότυπο w=+-++ με τρία εναλλασσόμενα πρόσημα αντιστοιχεί το δένδρο



οπότε ο αντίστοιχος αριθμός με πρότυπο w είναι 9.

3.3 ΓΕΝΝΕΣΗ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

Οι Viennot [30] και Panayotopoulos [23] έδωσαν αλγορίθμους που προσδιορίζουν τις μεταθέσεις που έχουν δεδομένο πρότυπο w. Ο αλγόριθμος που ακολουθεί χρησιμοποιεί σύνολα $\Theta_2, \Theta_3 \ldots, \Theta_n$ των δυνατών τμημάτων μιάς μετάθεσης σ.

Βήμα 1ο : Θέσε $\Theta_2 = \{12, 13, \ldots, 1n, 23, 24, \ldots, (n-1)n\}$ όταν $z_i = +$

$= \{21, 32, 31, \ldots\ldots\ldots\ldots, n(n-1)\}$ όταν $z_i = -$

Βήμα 2ο : Θέσε στο τμήμα $\sigma(1)\ \sigma(2) \ldots \sigma(k-1)$ της μετάθεσης δεξιά του $\sigma(k-1)$ το $\sigma(k) \neq \sigma(i)$, $i \in [k-1]$ όταν $z_{k-1} = +$ και $\sigma(k) > \sigma(k-1)$

ή $z_{k-1} = -$ και $\sigma(k) < \sigma(k-1)$

Βήμα 3ο : Επανέλαβε το δεύτερο βήμα γιά $k = 3, 4, \ldots n$.

Παράδειγμα : Για w=+-++ προκύπτουν τα σύνολα

$z_1 = +$: $\Theta_2 = \{12,13,14,15,23,24,25,34,35,45\}$

$z_2 = -$: $\Theta_3 = \{132,142,143,152,153,154,231,241,243,251,253,254,341, 342,351,352,354,451,452,453\}$

$z_3 = +$: $\Theta_4 = \{1324,1325,1423,1425,1435,1523,1524,1534,2314,2315, 2413,2415,2435,2513,2514,2534,3412,3415,3425,3512, 3513,3524,4512,4513,4523\}$

$z_4 = +$: $\Theta_5 = \{1324,14235,15234,23145,24135,25134,34125,35124,45123\}$

3.4 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Οι επόμενες προτάσεις αναφέρονται σε πρότυπα ειδικών μορφών

3.4.1 Πρόταση: Ο αριθμός των προτύπων $w=z_1 z_2 \ldots z_{n-1}$ με $z_{n-1}=1$ και $n=2k+1$ στις υπολέξεις $z_1, z_1 z_2, \ldots, z_1 z_2 \ldots z_{n-2}$ των οποίων υπερτερούν τα θετικά πρόσημα, ισούται με

$$\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}$$

Απόδειξη

Από όλα τα πρότυπα που έχουν $k-1$ ανόδους, των οποίων ο αριθμός είναι $\binom{2k-2}{k-1}$, αφαιρούνται εκείνα που έχουν $k-2$ ανόδους και των οποίων ο αριθμός είναι $\binom{2k-2}{k-1}$.

Οπότε:

$$\binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k-2} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,(k-1)!} - \frac{(2k-2)!}{(k-2)!k!}$$

$$= \frac{(2k-2)!\,k}{(k-1)!(k-1)!k} - \frac{(2k-2)!\,(k-1)}{(k-2)!(k-1)!(k-1)} =$$

$$= \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!k} \cdot [k-(k-1)] = \frac{1}{k}\cdot\binom{2k-2}{k-1}$$

3.4.2 Πρόταση: Ο αριθμός των προτύπων $w=z_1 z_2 \ldots z_{n-1}$ με $n=2k$ στις υπολέξεις $z_1, z_1 z_2, \ldots, z_1 z_2 \ldots z_{n-1}$ των οποίων υπερτερούν τα θετικά πρόσημα, ισούται με

$$\binom{2k-2}{k-1} \quad , \ k\geq 2$$

Απόδειξη

Πραγματικά τα διάφορα αυτά πρότυπα είναι τόσα, όσοι οι συνδυασμοί των $2k-2$ στοιχείων ανά $k-1$ δηλ $\binom{2k-2}{k-1}$

3.4.3 Πρόταση : Ο αριθμός των προτύπων $w=z_1 z_2 \dots z_{n-1}$ με $n=2k+1$ στις υπολέξεις $z_1, z_1 z_2, \dots, z_1 z_2 \dots z_{n-1}$ των οποίων υπερτερούν τα θετικά πρόσημα, ισούται με

$$\frac{1}{2}\cdot\binom{2k}{k}, \quad k\geq 1$$

Απόδειξη

Πραγματικά τα διάφορα αυτά πρότυπα είναι τόσα, όσοι οι συνδυασμοί των 2k-1 στοιχείων ανα k δηλ.

$$\binom{2k-1}{k} = \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k-1)!(2k)}{k!(k-1)!k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{1}{2}\cdot\binom{2k}{k}$$

$$\frac{1}{2}\binom{2k}{k}, \quad k\geq 1$$

3.4.4 Πρόταση : Ο αριθμός των προτύπων με k ανόδους και χωρίς διπλή κάθοδο είναι ίσος με

$$\frac{(k+1)!}{(n-k-1)!\,(2k+2-n)!}$$

Απόδειξη

Αν μιά μετάθεση έχει k ανόδους, τότε θα έχει n-k-1 καθόδους. Υπάρχουν λοιπόν , k προκαθορισμένες θέσεις και k+1 ενδιάμεσες που πρέπει να τοποθετηθούν τα n-k-1 στοιχεία και μάλιστα μόνο ένα σε κάθε θέση. Αρα τα πρότυπα w που δεν παρουσιάζουν διπλή κάθοδο είναι τόσα, όσοι οι συνδυασμοί των $k+1$ στοιχείων ανά $n-1-k$ δηλ.

$$\binom{k+1}{n-1-k} = \frac{(k+1)!}{(n-1-k)!(2k-2-n)!}$$

3.4.5 Πρόταση : Ο αριθμός των διαφορετικών προτύπων που δεν περιέχουν διπλή άνοδο είναι ο αριθμός Fibonacci.

Απόδειξη

Έστω V_{n-1} το σύνολο των προτύπων που δεν περιέχουν διπλή άνοδο τότε θα είναι $|V_{n-1}| = |A| + |B|$

με $A = \{w \in V_{n-1} : z_{n-1} = +\}$

$B = \{w \in V_{n-1} : z_{n-1} = -\}$

Επειδή το πρότυπο w δεν περιέχει διπλή άνοδο θα πρέπει $z_{n-2} = +$ για καθε $w \in B$, οπότε απο τις απεικονίσεις

$\phi_1 : V_{n-2} \longrightarrow A$ με $\phi_1(z_1 z_2, \ldots, z_{n-1}) = z_1 z_2 \ldots z_{n-2}+$

$\phi_2 : V_{n-3} \longrightarrow B$ με $\phi_2(z_1 z_2, \ldots, z_{n-3}) = z_1 z_2 \ldots z_{n-3}+-$

που είναι 1-1 και επι προκύπτει $|V_{n-2}| = A$ και $|V_{n-3}| = B$

Οπότε: $|V_{n-1}| = |V_{n-2}| + |V_{n-3}|$

3.5 ΠΡΟΤΥΠΑ CARLITZ

Ο Carlitz [7] όρισε ως πρότυπο μιάς μετάθεσης σ το διάνυσμα $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ με συντεταγμένες θετικούς ακέραιους που έχουν άθροισμα n δηλ.

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m = n \qquad (1)$$

και ικανοποιούν τις επόμενες συνθήκες:

$$\sigma(1)<\sigma(2)<\ldots<\sigma(\lambda_1)\ ,\ \sigma(\lambda_1+1)<\sigma(\lambda_1+2)<\ldots<\sigma(\lambda_1+\lambda_2),\ldots$$
$$\sigma(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{m-1}+1)<\ldots<\sigma(n) \qquad (2)$$

$$\sigma(\lambda_1)>\sigma(\lambda_1+1)\quad ,\quad \sigma(\lambda_1+\lambda_2)>\sigma(\lambda_1+\lambda_2+1),\ldots \qquad (3)$$

Για το πρότυπο κατά Carlitz θα χρησιμοποιείται η συντομογραφία c - πρότυπο

Ετσι η μετάθεση $\sigma=67135428$ έχει c- πρότυπο το διάνυσμα $\lambda= (2,3,1,2,\ )$ αφού:

α) $\sigma(1)<\sigma(2)$

$\sigma(1)<\ldots<\sigma(\lambda_1)$ είναι $\lambda_1=2$

$\sigma(\lambda_1)>\sigma(\lambda_1+1)$

β) $\sigma(3)<\sigma(4)<\sigma(5)$

$\sigma(\lambda_1+1)<\ldots<\sigma(\lambda_1+\lambda_2)$ είναι $\lambda_1+\lambda_2=5$ οπότε $\lambda_2=3$

$\sigma(\lambda_2)>\sigma(\lambda_2+1)$

γ) $\sigma(6)>\sigma(7)$

$\sigma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)>\sigma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1)$ είναι $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1=7$ οπότε $\lambda_3=1$

δ) $\sigma(7)<\sigma(8)$

$\sigma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1)<\sigma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$ είναι $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=8$ οπότε $\lambda_4=2$

Απο τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι σε κάθε μετάθεση αντιστοιχεί ένα c-πρότυπο , χωρίς να ισχύει το αντίστροφο.

Κατ΄αρχή η ισότητα (1) εκφράζει τον μερισμό του n σε m ακέραιους θετικούς προσθεταίους και δέχεται P_n^m το πλήθος λύσεις.

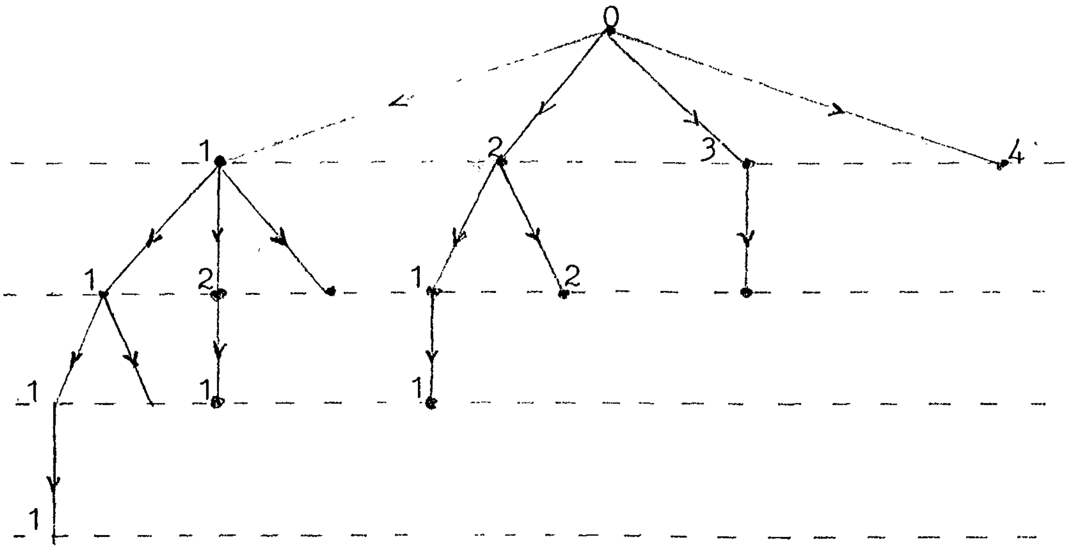
Ο προσδιορισμός των λύσεων αυτών γιά τις διάφορες τιμές του m μπορεί να γίνει με την βοήθεια της κλασσικής μεθόδου branch-bound.

Ετσι για n=4 η μέθοδος δίδει τα εξής c-πρότυπα:

m=2 (1,3) , (2,2) , (3,1)

m=3 (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)

m=4 (1,1,1,1)



Οταν δίδεται η μετάθεση σ τότε ο προσδιορισμός του αριθμού των συντεταγμένων του c-προτύπου γίνεται με την βοήθεια της επόμενης πρότασης.

3.5.1 Πρόταση : Γιά το c-πρότυπο κάθε μετάθεσης σ ισχύει:

$$m=n-|M|$$

Απόδειξη

Πραγματικά από τον ορισμό του Carlitz προκύπτει ότι για τον αριθμό $|M|$ των ανόδων της σ θα είναι :

$$|M| = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i-1) = \lambda_1+\lambda_2+\dots\lambda_m - m = n-m$$

οπότε

$$m=n-|M|$$

Τέλος για την μερική περίπτωση που οι συντεταγμένες του c-προτύπου ισούνται με 1ή /και 2 ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

3.5.2 Πρόταση : Ο αριθμός των c-προτύπων με $\lambda_i \in \{1,2\}$, $i \in [m]$ ισούται με τον αριθμό του Fibonacci F_n.

Απόδειξη

Πραγματικά αν οι j συντεταγμένες του c-προτύπου ισούνται με 2 και οι υπόλοιπες m-j ισούνται με 1 θα ισχύει $m-j+2j=n$ οπότε $m=n-j$.

Ο συνολικός αριθμός των διανυσμάτων λ με $m=n-j$ θα ισούται με

$$\xi_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-j}{j} \quad \text{όπου} \quad j=[\tfrac{n}{2}]$$

και επειδή $\binom{n}{k}=0$ για ένα ακέραιο $k>n$, ο ξ_n γράφεται:

$$\xi_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{0}{n}$$

Επειδή $\xi_{n-1}+\xi_{n-2} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots + \binom{0}{n-1} + \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \ldots + \binom{0}{n-2}$

$$= \binom{n-1}{0} + \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0}\right] + \left[\binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1}\right] + \left[\binom{0}{n-1} + \binom{0}{n-2}\right]$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{1}{n-1}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{1}{n-1} + \binom{0}{n} = \xi_n$$

δηλ. $\xi_{n-1}+\xi_{n-2}=\xi_n$

Ετσι για $n=7$ υπάρχουν $F_7=21$ c-πρότυπα με $\lambda_i \in \{1,2\}$,$i \in [m]$

Ο προσδιορισμός των συντεταγμένων του c-προτύπου μιάς μετάθεσης μπορεί να γίνει με την βοήθεια των συνόλων P,Q,M,DD αυτής και των ακόλουθων προτάσεων, που αναφέρονται στα τμήματα της μετάθεσης που έχουν πρώτο στοιχείο το σ(i) και τελευταίο το σ(j).

3.5.3 Πρόταση : Αν $\sigma(i) \in Q$, $\sigma(j) \in P$, $i<j$ και μεταξύ τους υπάρχουν μόνο άνοδοι της μετάθεσης, τότε η αντίστοιχη συντεταγμένη του k c-προτύπου ισούται με k+1.

Απόδειξη

Οταν μεταξύ των στοιχείων $\sigma(i) \in Q$ και $\sigma(j) \in P$ της μετάθεσης σ υπάρχουν k μόνο άνοδοι και καμμιά κάθοδος, τότε ο αριθμός των κορυφών του διαγράμματος της απο σ(i) έως και σ(j) είναι k+1.

Σύμφωνα με τον ορισμό του Carlitz προκύπτει ότι η αντίστοιχη συντεταγμένη γι αυτό το διάστημα θα είναι k+1.

3.5.4 Πρόταση : Αν $\sigma(i) \epsilon P$, $\sigma(j) \epsilon Q$, $i<j$ και μεταξύ τους υπάρχουν μόνο διπλές κάθοδοι της μετάθεσης, τότε η αντίστοιχη συντεταγμένη του c-προτύπου ισούται με 1.

Απόδειξη

Αν η συντεταγμένη του c-προτύπου ήταν διάφορη του 1, τότε από τον ορισμό του Carlitz θα ήταν : $\sigma(\lambda_i+1)<\sigma(\lambda_i+2)$ πράγμα άτοπο αφού στη περίπτωση που υπάρχουν μόνο διπλές κάθοδοι ισχύει $\sigma(\lambda_i+1)>\sigma(\lambda_i+2)$.

3.5.5 Πρόταση: Αν $\sigma(i) \epsilon P$, $\sigma(j) \epsilon Q$, $i<j$ και $j=i+1$ τότε δεν υπάρχει αντίστοιχη συντεταγμένη στο c-πρότυπο.

Απόδειξη

Πραγματικά επειδή μεταξύ των στοιχείων $\sigma(i) \epsilon P$, $\sigma(j) \epsilon Q$ δεν υπάρχουν άνοδοι ούτε διπλές κάθοδοι έπεται ότι η αντίστοιχη συντεταγμένη στο c-πρότυπο είναι μηδέν.

Με βάση τις προηγούμενες τρείς προτάσεις προκύπτει η ακόλουθη μέθοδος προσδιορισμού του c-προτύπου μιάς μετάθεσης:

1) Χώρισε την μετάθεση σ σε τμήματα με πρώτο και τελευταίο στοιχεί(που θ΄ανήκουν στα σύνολα P και Q.

2) Εφήρμοσε τις προηγούμενες προτάσεις.

Ετσι για την μετάθεση $\sigma=671354289$ όπου $P=\{5,7,9\}$ και $Q=\{1,2,6\}$ προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

										λ_i
Q	6	7								2
P		7	1							-
Q			1	3	5					3
P					5	4	2			1
Q							2	8	9	3
	Q	P	Q	-	P	-	Q	-	P	

αφού $\sigma(1)= 6 \epsilon Q$ και $\sigma(2)=7 \epsilon P$,

$\sigma(2)= 7 \epsilon P$ και $\sigma(3)=1 \epsilon Q$,

$\sigma(3)=1 \epsilon Q$ και $\sigma(4)=3 \epsilon M$ και $\sigma(5)=5 \epsilon P$,

$\sigma(5)=5 \epsilon P$ και $\sigma(6)=4 \epsilon DD$ και $\sigma(7)=2$

$\sigma(7)=2 \epsilon Q$ και $\sigma(8)=8 \epsilon M$ και $\sigma(9)=9 \epsilon P$.

3.6 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Μια μετάθεση ονομάζεται **εναλλακτική** όταν τα πρόσημα του προτύπου της εναλλάσσονται.

Ετσι οι μεταθέσεις σ=671328594 και σ=439251867 είναι εναλλακτικές γιατί έχουν πρότυπα αντίστοιχα w=+-+-+-+-, w= -+-+-+-+ . Σε μιά εναλλακτική μετάθεση μήκους 2n το στοιχείο $\sigma(i)$, $1 \leq i \leq 2n-1$ παρουσιάζει **ισορροπία** εάν το στοιχείο $\sigma(i)+1$ είναι επόμενο του ή ευρίσκεται αριστερά του. Εάν όλα τα στοιχεία μιάς εναλλακτικής μετάθεσης είναι ισορροπημένα τότε η μετάθεση θα ονομάζεται ισορροπημένη [8].

Αποδεικνύεται ότι η μετάθεση $\sigma=(2n-1)\ 2n(2n-3)\ldots 3\ 4\ 1\ 2$ είναι η μοναδική ισορροπημένη εναλλακτική μετάθεση μήκους $2n$.

3.6.1 Πρόταση: Ο αριθμός των ανόδων κάθε ισορροπημένης εναλλακτικής μετάθεσης ισούται με τον αριθμό των διαδοχών της.

Απόδειξη

Αρκεί να δειχθεί ότι στη περίπτωση των ισορροπημένων εναλλακτικών μεταθέσεων ισχύει η ισοδυναμία :

$$\sigma(i)<\sigma(i+1) \Longleftrightarrow \sigma(i+1)=\sigma(i)+1$$

Απο τον ορισμό της ισορροπημένης εναλλακτικής μετάθεσης είναι $\sigma(i)=2n-i$ με $i=$ περιττό και $\sigma(i)=2n+2-i$ με $i=$άρτιο.

Οπότε $\sigma(i+1)=2n+1-i=\sigma(i)+1$

3.6.2 Πρόταση: Γιά κάθε εναλλακτική μετάθεση μήκους $2n$ ισχύουν:

$$\sum_{i\varepsilon IP} i=n^2$$

$$\sum_{i\varepsilon IQ} i=n(n+1)$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της εναλλακτικής μετάθεσης μήκους $2n$ προκύπτει ότι $IP=\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$ και $IQ=\{2,4,\ldots,2n\}$ οπότε θα είναι αντίστοιχα:

$$\sum_{i\in IP} i=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$\sum_{i\in IQ} i=2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

3.6.3 Πρόταση: Η τάξη κάθε ισορροπημένης εναλλακτικής μετάθεσης μήκους 2n είναι δύο.

Απόδειξη

Επειδή κάθε ισορροπημένη εναλλακτική μετάθεση μήκους 2n είναι της μορφής σ=(2n-1) 2n(2n-3)...3412 έπεται ότι

$$\sigma^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1\ 2\ldots(2n)$$

3.6.4 Πρόταση: Γιά κάθε ισορροπημένη εναλλακτική μετάθεση σ μήκους 2n ισχύουν:

$$\sigma(i)+\sigma(2n+1-i)=2n+1$$

$$\sigma^{-1}=\sigma$$

$$\sigma^{I}=\sigma^{c}$$

Απόδειξη

Οι δύο είναι άμεσες συνέπειες της μορφής των ισορροπημένων εναλλακτικών μεταθέσεων , ενώ η τρίτη προκύπτει απο τις ισότητες $\sigma^{I}(i)=\sigma(2n+1-i)$ και $\sigma^{c}(i)=2n+1-\sigma(i)$ των αντιστοίχων ορισμών .

3.6.5 **Πρόταση:** Για την μήτρα P κάθε ισορροπημένης εναλλακτικής μετάθεσης μήκους 2n ισχύουν:

$$P^{2k}=I$$

$$P^{2k+1}=P$$

Απόδειξη

Επειδή κάθε ισορροπημένη εναλλακτική μετάθεση μήκους 2n είναι της μορφής σ=(2n-1) 2n(2n-3)...3412 έπεται ότι η μήτρα της P θα είναι:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι:

$$P^2=P\cdot P=IP$$

$$P^{2k}=(P^2)^k=I^k=I$$

$$P^{2k+1}=P^{2k}E=IP=P$$

ΔΕΝΔΡΑ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΝ

Όπως τονίστηκε στην εισαγωγή με την βοήθεια των δένδρων μεταθέσεων προσδιορίζονται σύνολα μεταθέσεων του [n] που πληρούν ορισμένες ιδιότητες ή / και ικανοποιούν ειδικές συνθήκες.

Στο κεφάλαιο αυτό ευρίσκονται οι μεταθέσεις που αντιστοιχούν σε δεδομένα M,w,(w,M) και (A,M,cM). Επίσης προσδιορίζονται τα σύνολα των ατακτοποιήτων, πολυατακτοποιήτων και εναλλακτικών μεταθέσεων και επιλύεται το κλασσικό πρόβλημα των ζευγαριών.

4.1 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ P(X)

Το υποσύνολο των μεταθέσεων του [n] που ικανοποιούν μιά ιδιότητα X, θα σημειώνεται με P(X).

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί αναφέρεται στον προσδιορισμό του υποσυνόλου του G[n] του οποίου οι μεταθέσεις έχουν δεδομένο σύνολο ανόδων.

Τούτο επιτυγχάνεται με την βοήθεια των ακόλουθων συνόλων [23]:

$$E_0(j) = \{j+1, j+2, \dots, n\}$$

$$\Pi_0(j) = \{1, 2, \dots, j-1\}$$

$E(j)$: Το υποσύνολο του $E_0(j)$ με στοιχεία τις κορυφές των δρόμων με αρχή 0 και πέρα j.

$\Pi(j)$: Το υποσύνολο του $\Pi_0(j)$ με στοιχεία τις κορυφές των δρόμων με αρχή 0 και πέρας j.

Ο προσδιορισμός του συνόλου γίνεται με την βοήθεια της ακόλουθης πρότασης.

4.1.1 Πρόταση: Οι δρόμοι του T_n για τους οποίους:

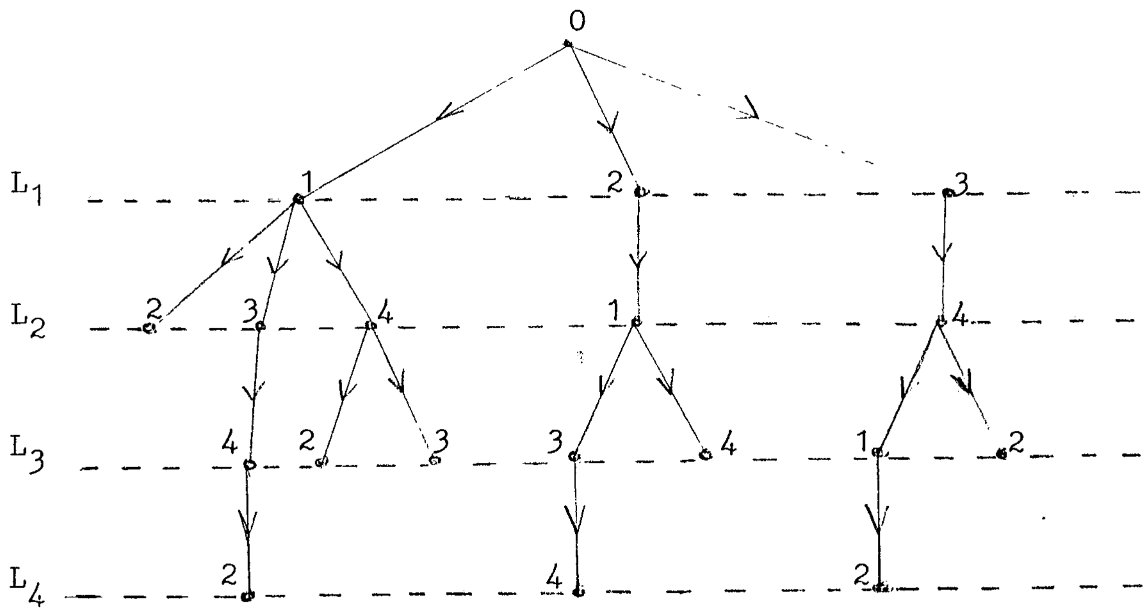
(i) $\Gamma(0) = \{1,2,\dots, n-1\}$

$$\text{(ii)}\ \Gamma(j) = \begin{cases} E_0(j) - E(j), & \text{όταν } j\in M \\ \Pi_0(j) - \Pi(j), & \text{όταν } j\notin M \end{cases}$$

δίδουν όλα τα στοιχεία του P(M).

Πρόκειται για άμεση συνέπεια της πρώτης πρότασης του [23].

Παράδειγμα: Για $n=4$ και $M=\{1,3\}$ προκύπτει το δένδρο



Πραγματικά είναι:

L_1 : $\Gamma(1)=E_0(1)-E(1)=\{2,3,4\} - \emptyset = \{2,3,4\}$

$\Gamma(2)=\Pi_0(2)-\Pi(2)= \{1\} - \emptyset = \{1\}$

L_2 : $\Gamma(2)=\Pi_0(2)-\Pi(2)= \{1\} - \{1\} = \emptyset$

$\Gamma(3)=E_0(3)-E(3)= \{4\} - \emptyset = \{4\}$

$\vdots \qquad \vdots$

L_3 $\Gamma(4)=\Pi_0(4)-\Pi(4)= \{1,2,3\} - \{1,3\} = \{2\}$

$\Gamma(2)=\Pi_0(2)-\Pi(2)= \{1\} - \{1\} = \emptyset$

$\Gamma(3)=E_0(3)-E(3)= \{4\} - \{4\} = \emptyset$

$\vdots \qquad \vdots$

και τελικά

$P(M)= \{1342 \ , 2134 \ , 3412 \}$

4.2 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ P(w)

Ο Panayotopoulos [21] με την βοήθεια του δένδρου T_n προσδιόρισε το σύνολο P(w) των μετάθεσεων που έχουν δεδομένο πρότυπο w .

Ο αλγόριθμος που ακολουθεί χρησιμοποιεί δένδρο με $\frac{n}{2}$ (αντίστοιχα $\frac{n}{2}+1$) στάθμες όταν ο n είναι άρτιος (αντίστοιχα περιττός) και έχει τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1ο Θέσε στην πρώτη στάθμη τα στοιχεία του Θ_2 [1)]

Βήμα 2ο Θέσε στη δεύτερη στάθμη όλα τα δυνατά στοιχεία του Θ_2 σε συνδυασμό με τα στοιχεία της προηγούμενης στάθμης και του ζεύγους $z_1 z_2$.

1) Βλ. σελ. 38.

Βήμα 3ο Επανέλαβε το προηγούμενο βήμα για κάθε ζεύγος

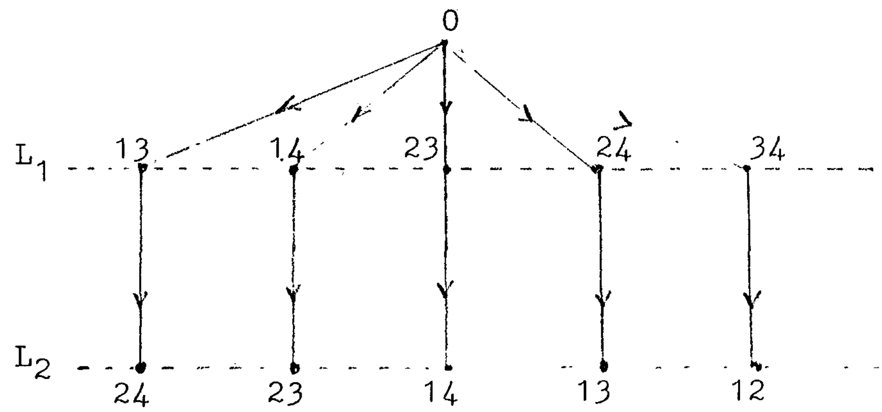
$z_i z_{i+1}$, $i=2,\ldots, n-2$.

Πραγματικά απο το πρώτο βήμα προκύπτουν τα δύο πρώτα στοιχεία των μεταθέσεων , ενώ απο το δεύτερο-τρίτο βήμα προκύπτουν όλα τα ενδιάμεσα και το τελευταίο στοιχείο.

Παράδειγμα : Για το πρότυπο w=+-+ είναι :

Θ_2 = {13,14,23,24,34} για την πρώτη στάθμη

Θ_2 = {24,23,14,13,12 } για την δεύτερη στάθμη



και τελικά

$P(w)=\{1324,1423,2314,2413,3412\}$

4.3 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ P(w,M)

Το υποσύνολο των μεταθέσεων του [n] που έχουν δεδομένο σύνολο ανόδων M και δεδομένο πρότυπο w σημειώνεται με P(w,M).

Ο προσδιορισμός του υποσυνόλου αυτού επιτυγχάνεται με την βοήθεια της επόμενης πρόταασης , η οποία προκύπτει απο τις μεθόδους τω δύο προηγούμενων παραγράφων.

4.3.1 Πρόταση : Οι δρόμοι του T_n για τους οποίους :

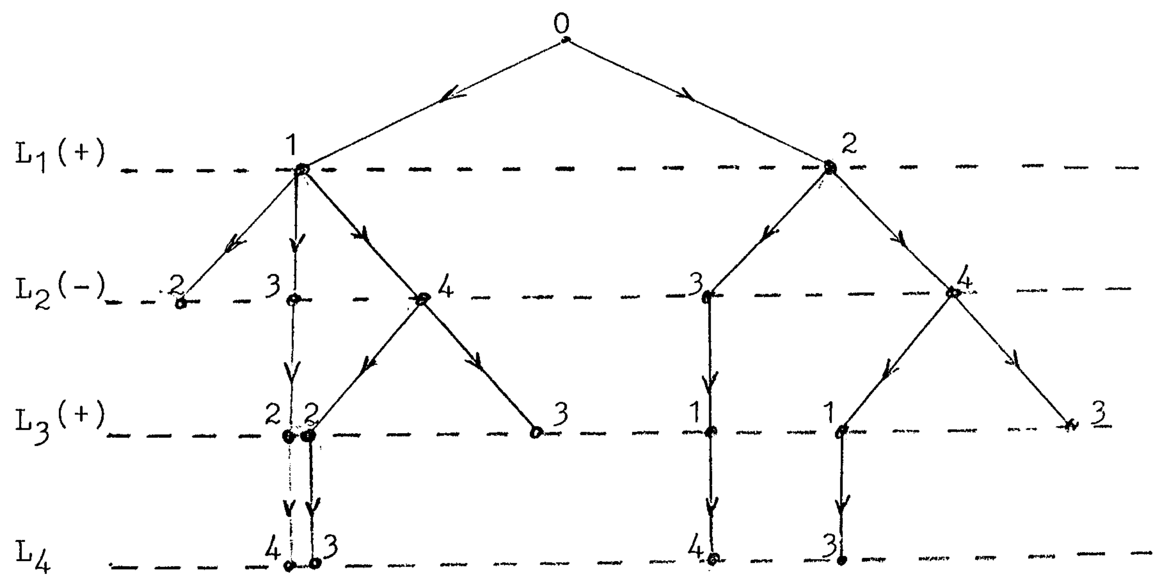
(i) $\Gamma(0)=M$, όταν $z_1=+$

$=[n]-M\cup\{1\}$, όταν $z_1=-$

(ii) $$\Gamma(j)=\begin{cases} E_0(j)-E(j) & \text{, όταν } z_j=+ \text{ και } j\in M \\ \Pi_0(j)-\Pi(j) & \text{, όταν } z_j=- \text{ και } j\notin M \\ \emptyset & \text{, } z_j=+ \text{ και } j\notin M \text{ ή } z_j=- \text{ και } j\in M \end{cases}$$

δίδουν όλα τα στοιχεία του P (w,M).

Παράδειγμα : Για n=4 και M ={1,2} , w=+-+ προκύπτει το δένδρο:



Πραγματικά είναι:

L_1 : $\Gamma(1)=E_0(1)-E(1)=\{2,3,4\} - \emptyset = \{2,3,4\}$

$\Gamma(2)=E_0(2)-E(2)=\{3,4\} - \emptyset = \{3,4\}$

L_2 : $\Gamma(2)=\emptyset$ επειδή $2\in M$ και $z_2=-$

$\Gamma(3)=\Pi_0(3) - \Pi(3) =\{1,2\} -\{1\} = \{2\}$

$\Gamma(4)=\Pi_0(4) - \Pi(4) =\{1,2,3\} -\{1\} =\{2,3\}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

L_3 : $\Gamma(2)=E_0(2)-E(2) = \{3,4\} -\{3\} =\{4\}$

$\Gamma(3)= \emptyset$, επειδή $z_3=+$ και $3\notin M$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

και τελικά

$P(w,M) =\{1324,1423,2314,2413\}$

4.4. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $P(\tau)$

Οι Viennot [31] και Panayotopoulos [23] προσδιόρισαν το σύνολο των μεταθέσεων που έχουν δεδομένα τα σύνολα, A,M,cM.

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στον προσδιορισμό του συνόλου $P(\tau)$ των μεταθέσεων που έχουν δεδομένα τα στοιχεία w,M,cM της τριάδας $\tau=(w,M,cM)$.

4.4.1 Πρόταση : Οι δρόμοι του T_n για τους οποίους

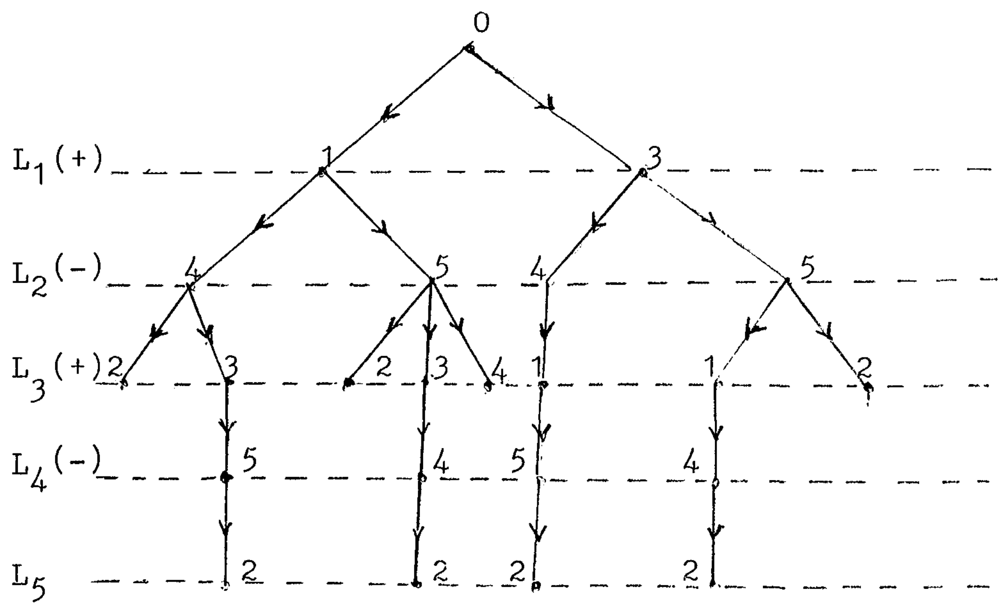
$$
\text{(i)}\quad \Gamma(0)=M \quad ,\ \text{όταν}\ z_1=+
$$
$$
\qquad = \{2,3,\ldots,n\}\cap M \quad ,\ \text{όταν}\ z_1=-
$$

$$
\text{(ii)}\quad \Gamma(j)=\begin{cases} (E_0(j)-E(j))\cap cM, & \text{όταν}\ z_j=+\ \text{και}\ j\in M \\ \Pi_0(j)-\Pi(j), & \text{όταν}\ z_j=- \\ \emptyset, & \text{όταν}\ z_j=+\ \text{και}\ j\notin M \end{cases}
$$

δίδουν όλα τα στοιχεία του $P(\tau)$.

Πραγματικά απο τις ισότητες (i) προκύπτουν τα πρώτα στοιχεία των μεταθέσεων, ενώ απο τις ισότητες (ii) προκύπτουν τα ενδιάμεσα στοιχεία και τα τελευταία που ικανοποιούν την τριάδα τ.

Παράδειγμα : Γιά $M=\{1,3\}$, $cM=\{4,5\}$ και $w=+-+-$ προκύπτει το δένδρο:



Πραγματικά είναι:

L_1: $\Gamma(1)=(E_0(1)-E(1))\cap cM=\{2,3,4,5\}\cap\{4,5\}=\{4,5\}$, ...

L_2: $\Gamma(2)=\Pi_0(4)-\Pi(4)=\{1,2,3\}-\{1\}=\{2,3,\}$, ...

L_3: $\Gamma(3)=(E_0(3)-E(3))\cap cM=(\{4,5\}-\{4\})\cap\{4,5\}=\{5\}$, ...

L_4: $\Gamma(5)=\Pi_0(5)-\Pi(5)=\{1,2,3,4\}-\{1,3,4\}=\{2\}$, ...

και τελικά

$P(\tau)=\{14352,15342,34152,35142\}$

4.5 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΤΑΚΤΟΠΟΙΗΤΩΝ

Μιά μετάθεση σ ονομάζεται **ατακτοποίητη** όταν:

$$\sigma(i)\neq i, \forall i\in[n]$$

Η εύρεση των ατακτοποίητων μεταθέσεων του [n] επιτυγχάνεται με την βοήθεια της ακόλουθης πρότασης.

4.5.1 Πρόταση : Οι δρόμοι του T_n γιά τους οποίους:

(i) $\Gamma(0)=\{2,3,\ldots,n\}$

(ii) $\Gamma(j)=[n]-\Pi(j)\cup\{\kappa+1\}$ για κάθε κορυφή j και κάθε στάθμη κ

δίδουν όλες τις ατακτοποίητες μεταθέσεις του [n] .

Πραγματικά απο την πρώτη ισότητα προκύπτει $\sigma(1)\neq 1$, ενώ απο τις επόμενες προκύπτει $\sigma(i)\neq i$, $i=2,3,\ldots,n$.

Παράδειγμα Για $n=5$ με την βοήθεια ενός προγράμματος προέκυψαν οι ακόλουθες ατακτοποίητες μεταθέσεις.

21453	34251	45132
21534	34512	45213
23154	34521	45231
23451	35124	51234
23514	35214	51423
24153	35412	51432
24513	35421	53124
24531	41253	53214
25134	41523	53412
25413	41532	53421
25431	43152	54123
31254	43251	54132
31452	43512	54213
31524	43521	54231
34152	45123	

4.6 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΟΛΥΑΤΑΚΤΟΠΟΙΗΤΩΝ

Μιά μετάθεση σ ονομάζεται πολυατακτοποίητη όταν:

$$\sigma(i)\neq i,\ i+1\ ,\ \forall\ \ i\in[n-1]$$

$$\sigma(n)\neq 1,\ n$$

Η εύρεση των πολυατακτοποίητων μεταθέσεων του [n] επιτυγχάνεται με την βοήθεια της ακόλουθης πρότασης.

4.6.1 **Πρόταση** : Οι δρόμοι του T_n για τους οποίους :

(i) $\Gamma(0)=\{3,4,\ldots,n-1\}$

(ii) $$\Gamma(j)=\begin{cases}[n]-E(j)\cup\{k+1,\ k+2\}, & \text{όταν} \quad k\in[n-2]\\ ([n]-E(j))\cup\{1,\ k+1\}, & \text{όταν} \quad k=n-1\end{cases}$$

δίνουν όλες τις ατακτοποίητες μεταθέσεις του $[n]$

Πραγματικά από την πρώτη ισότητα προκύπτει $\sigma(1)\neq 1,2$, ενώ από τις επόμενες προκύπτει $\sigma(i)\neq i$, $i+1$ με $i\in[n-1]$ και $\sigma(i)\neq 1,n$.

Παράδειγμα: Για n=6 με την βοήθεια ενός προγράμματος προέκυψαν οι ακόλουθες μεταθέσεις :

312645	452613	561243
315624	456123	561324
315642	456132	561342
316245	456213	562134
341625	456312	562143
342615	461235	562314
345612	461325	612345
346125	462135	615234
346215	462315	615243
351642	465132	615342
352614	465213	641235
356124	465312	641325
356142	512634	642135
356214	512643	642315
361245	516234	645123
362145	516243	645132
365124	516324	645213
365142	516342	645312
365214	541623	651234
412635	541632	651243

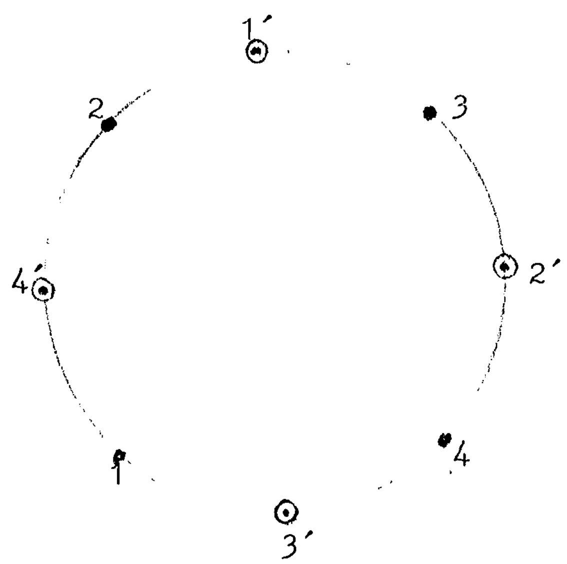
415623	542613	651324
416235	546132	652134
416325	546213	652143
451623	546312	652314
451632	561234	

Η προηγούμενη μέθοδος προσδιορισμού των πολυατακτοποίητων μεταθέσεων επιλύει και το κλασσικό " probleme des menages " του Lucas [20].

Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να τοποθετηθούν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι n ζευγάρια αλληλοδιαδοχικά κατά φύλο ώστε δεξιά και αριστερά από κάθε άτομο να μη κάθεται ο/n συνοδός του.

Κάθε τέτοια τοποθέτηση αντιστοιχεί σε μιά πολυακτακτοποίητη μετάθεση του [n] της οποίας τα i αντιπροσωπεύουν τα άτομα του ενός φύλου (και σημειώνονται με τόνους) και τα σ(i) τα άτομα του άλλου φύλου.

Ετσι στη πολυατακτοποίητη μετάθεση σ=3412 αντιστοιχεί η ακόλουθη τοποθέτηση.



4.7 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΗΜΕΝΩΝ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ

Οπως είναι γνωστό μιά εναλλακτική μετάθεση μήκους 2n ονομάζεται **ισορροπημένη** όταν όλα τα στοιχεία της είναι ισορροπημένα.[1)]

Η εύρεση των ισορροπημένων εναλλακτικών μεταθέσεων μήκους 2n επιτυγχάνεται με την βοήθεια της επόμενης πρότασης:

4.7.1 Πρόταση : Οι δρόμοι του T_{2n} για τους οποίους

(i) $\Gamma(0)= \{1,2,\ldots,2n-1\}$

(ii) $$\Gamma(j) = \begin{cases} j+1, & \text{όταν στη στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } z=+ \\ j-3, & \text{όταν } j>3 \\ \emptyset, & \text{όταν } j\leq 3 \end{cases}$$

δίδουν τις ισορροπημένες εναλλακτικές μεταθέσεις μήκους 2n .

Πραγματικά απο την ισότητα (i) προκύπτει το πρώτο στοιχείο ενώ από τις ισότητες (ii) προκύπτουν όλα τα ενδιάμεσα και το τελευταίο στοιχείο της ισορροπημένης εναλλακτικής μετάθεσης.

Παράδειγμα: Για n=3,4,5 με την βοήθεια ενός προγράμματος προέκυψαν, οι ακόλουθες ισορροπημένες εναλλακτικές μεταθέσεις:

563412, 78563412, 91078563412

4.8 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ P(F)

Στην παράγραφο 2.1.2 αποδείχθηκε ότι ο αριθμός των μεταθέσεων του [n] για τις οποίες ισχύει $|\sigma(i)-i|\leq 1$, $i\in[n]$ είναι ο αριθμός F_n του Fibonacci.

---

1) Βλ. σελ. 47

Ο προσδιορισμός του συνόλου P(F) των μεταθέσεων αυτών επιτυγχάνεται με την βοήθεια των ακόλουθων συνόλων:

$\hat{F}_1 = \{1,2\}$, $\hat{F}_n = \{n-1, n\}$

$\hat{F}_i = \{i-1, i, i+1\}$, $i \neq 1, n$

και της επόμενης πρότασης.

4.8.1 Πρόταση: Οι δρόμοι T_n για τους οποίους:

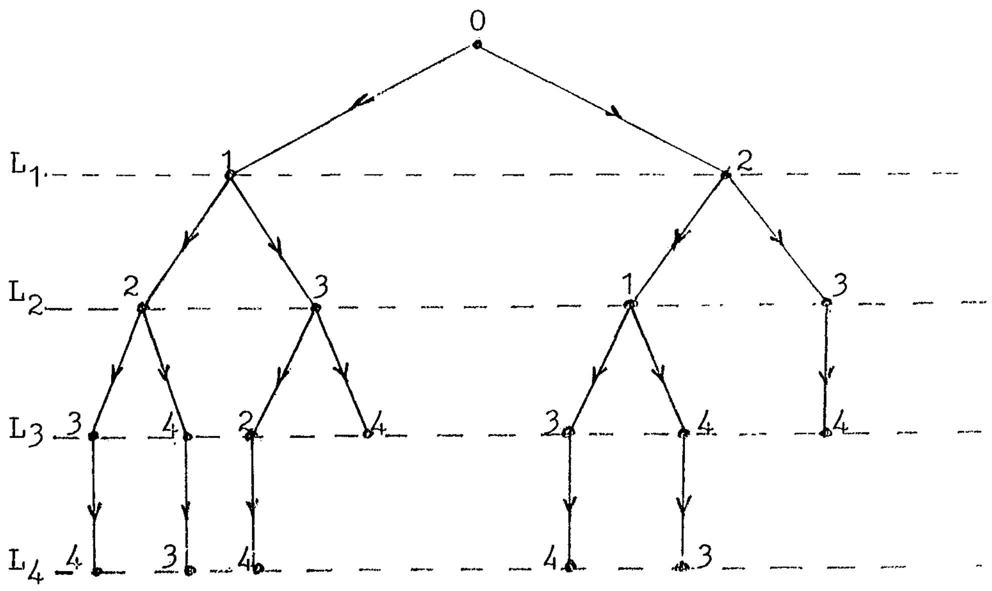
i) $\Gamma(0)=\{1,2\}$

ii) $\Gamma(j)=([n]-E(j)) \cap \hat{F}_{i+1}$ για κάθε στάθμη και κάθε κορυφή j

δίδουν όλα τα στοιχεία του P(F).

Πραγματικά αυτό επιτυγχάνεται με την επαναληπτική λειτουργία του δευτέρου βήματος.

Παράδειγμα: Γιά n=4 προκύπτει το δένδρο:



Πραγματικά είναι:

L_1 :Γ (1)=({1,2,3,4}-{1})$\cap${1,2,3} ={2,3},...

L_2 :Γ (2)=({1,2,3,4}-{1,2})$\cap${2,3,4} ={3,4},...

L_3 :Γ (4)=({1,2,3,4}-{1,3,4})$\cap${3,4} =$\emptyset$,...

:Γ (3)=({1,2,3,4}-{1,2,3})$\cap${3,4} ={4},...

και τελικά

P(F) = {1234, 1243, 1324, 2134, 2143 }

4.9 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ P(E)

Ο Euler απέδειξε [8] ότι για τον αριθμό $A_{n,k}$ των μεταθέσεων του [n] που έχουν k ανόδους ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$A_{n+1,k} = kA_{n,k} + (n-k+2)A_{n,k} \quad \text{με} \quad A_{n,k} = A_{n,n-k+1} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Ο προσδιορισμός του συνόλου P(E) των μεταθέσεων αυτών μπορεί να γίνει με την βοήθεια των εξής δύο βημάτων:

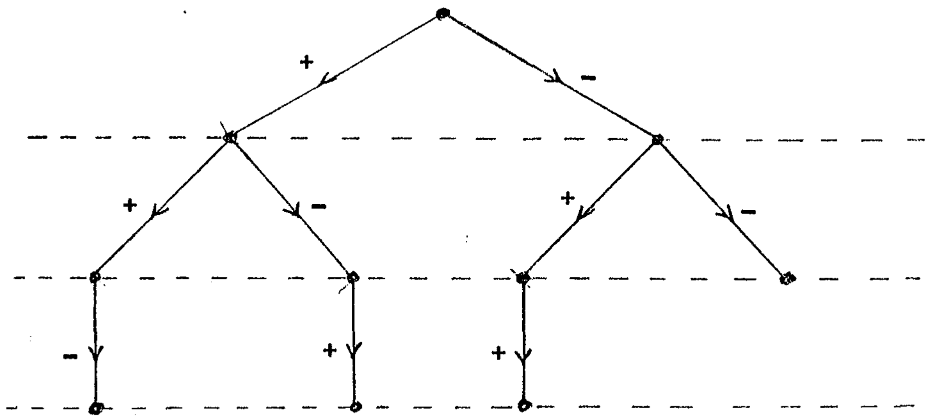
α) Εύρεση όλων των προτύπων που έχουν k θετικά πρόσημα.

β) Εύρεση των μεταθέσεων των προηγούμενων προτύπων.

Για την εύρεση των προτύπων που έχουν k θετικά πρόσημα και των οποίων ο αριθμός ισούται με $\binom{n-1}{k}$ γίνεται χρήση του δυαδικού δένδρου

Για την εύρεση των μεταθέσεων που έχουν δεδομένο πρότυπο γίνεται χρήση των αντίστοιχων δένδρων που περιγράφονται στην 4.2.

Παράδειγμα: Για n=4 και k=2 προκύπτουν από το δυαδικό δένδρο



τα πρότυπα $w_1=++-$, $w_2=+-+$, $w_3=-++$

Με την βοήθεια ενός προγράμματος προκύπτουν οι ακόλουθες μεταθέσεις:

P(E) ={1243, 1342,2341,1324,1423,2314,2413,3412,2134,3124,4123}

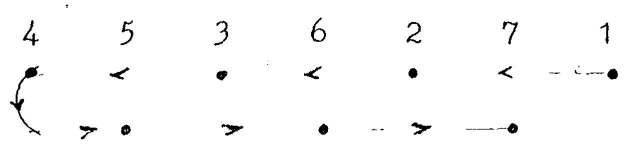
ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Οι έννοιες και προτάσεις των προηγούμενων κεφαλαίων μπορούν να εφαρμοστούν και για την μελέτη μεταθέσεων ειδικών μορφών. Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι μεταθέσεις του Black, οι πολυμεταθέσεις και επιλύονται προβλήματα των κυριαρχούντων κωδίκων και των εναλλακτικών πιστολιών μεταθέσεων.

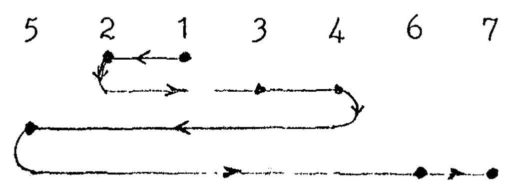
5.1 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ BLACK

Μιά μετάθεση ονομάζεται μετάθεση του Black όταν η ανάγνωση των στοιχείων της απο δεξιά προς τα αριστερά και στη συνέχεια από αριστερά προς τα δεξιά ευρίσκει αυτά κατά την φυσική τους διάταξη.

Ετσι η σ=4536271 είναι μία μετάθεση του Black όπως φαίνεται απο το αντίστοιχο διάγραμμα της.



Αντίθετα η σ=5213467 δεν είναι μετάθεση του Black



Ο Black χρησιμοποίησε τις μεταθέσεις αυτές για ν'αντιμετωπίσει το παράδοξο του Condorcet [4].

Αν B_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων του Black που αντιστοιχούν στο [n], τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $|B_n| = 2^{n-1}$.

Επειδή όμως και για το σύνολο των προτύπων W_{n-1} ισχύει $|W_{n-1}| = 2^{n-1}$ έπεται ότι $|B_n| = |W_{n-1}|$.

5.1.1 Πρόταση : Σε κάθε πρότυπο αντιστοχεί μία και μόνο μετάθεση του Black.

Απόδειξη

Πραγματικά γιά n=3 στα πρότυπα, ++,+-,-+,-- αντιστοιχούν οι εξής μεταθέσεις του Black 123,231,213,321 αντίστοιχα. Εστω τώρα, ότι η πρόταση ισχύει γιά n=k δηλ. ότι στο πρότυπο $w=z_1z_2\ldots z_{k-1}$ αντιστοιχεί μιά μετάθεση του Black η $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(k)$ τότε στο πρότυπο $w=z_1z_2\ldots z_{k-1}z_k$ θα αντιστοιχεί η μετάθεση $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(k)\ \sigma(k+1)$ (αντίστοιχα $\sigma=(\sigma(1)+1)\ (\sigma(2)+1)\ldots(\sigma(k)+1)$ όταν $z_k=+$ (αντίστοιχα $z_k=-$) η οποία είναι και αυτή μετάθεση του Black.

Παράδειγμα Στο πρότυπο w=++-+ αντιστοιχεί η μετάθεση του Black σ=23415. Πραγματικά είναι διαδοχικά.

w	σ
++	123
++-	2341
++-+	23415

Ο προηγούμενος τρόπος κατασκευής της μετάθεσης του Black επιβάλλει και την μοναδικότητα της, αφού όταν το τελευταίο πρόσημο του προτύπου είναι + (αντίστοιχα −) τότε το τελευταίο στοιχείο της μετάθεσης του Black είναι αναγκαστικά n (αντίστοιχα 1).

Οι παρατηρήσεις της προηγούμενης πρότασης χρησιμοποιούνται και στους επόμενους δύο αλγόριθμους προσδιορισμού όλων των μεταθέσεων του Black.

5.2 ΔΥΟ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Ο πρώτος αλγόριθμος χρησιμοποιεί τα δυαδικά δένδρα και έχει τα εξής βήματα:

Βήμα 1ο : Θέσε το 1 στη ρίζα του δένδρου και τα 12 και 21 στις κορυφές της πρώτης στάθμης.

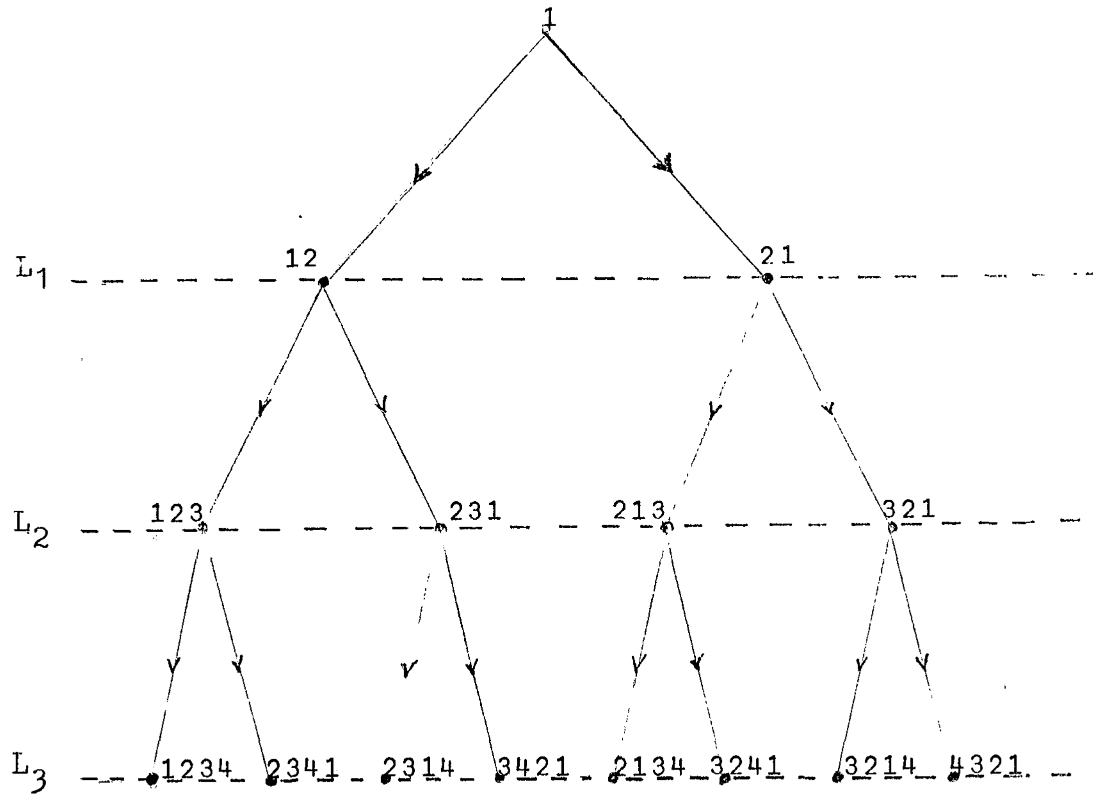
Βήμα 2ο : Αν σε κορυφή της k στάθμης υπάρχει το τμήμα $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(k+1)$ τότε θέσε τα $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(k+1)k$ και $(\sigma(1)+1)(\sigma(2)+1)\ldots(\sigma(k+1)+1)1$ στις επόμενες κορυφές της.

Βήμα 3ο : Επανέλαβε το δεύτερο βήμα γιά $k=2,3,\ldots,n-1$

Οι μεταθέσεις που ορίζουν τα φύλλα του δένδρου είναι τα στοιχεία του συνόλου B_n .

Πραγματικά τούτο επιτυγχάνεται απο την επαναληπτική λειτουργία του δευτέρου βήματος και τις παρατηρήσεις της πρότασης 5.1.1.

Παράδειγμα : Για $n=4$ προκύπτει το δυαδικό δένδρο :



απο το οποίο $B_4 = \{1234, 2341, 2314, 3421, 2134, 3241, 3214, 4321\}$

Ο δεύτερος αλγόριθμος είναι επαγωγικός και έχει τα εξής βήματα:

Βήμα 1ο : Θέσε $B_1=\{1\}$, $B_2=\{12,21\}$

Βήμα 2ο : α) Θέσε σε κάθε μετάθεση του B_{k-1} διάφορη της $(k-1)(k-2)\ldots 21$, το στοιχείο k δεξιά του στοιχείου $k-1$ και σε όλες τις δυνατές θέσεις.

β) Θέσε στη μετάθεση $(k-1)(k-2)\ldots 2\ 1$ του B_{k-1} το στοιχείο k σε όλες τις δυνατές θέσεις.

Βήμα 3ο : Επανέλαβε το δεύτερο βήμα για $k=3,4,\ldots,n$.

Πραγματικά τούτο επιτυγχάνεται σύμφωνα με την ιδιότητα ότι οι μεταθέσεις που λήγουν σε 1 ή k και προέρχονται απο το σύνολο B_{k-1} είναι μεταθέσεις του B_k .

Παράδειγμα : Για $n=5$ προκύπτουν τα σύνολα:

$B_1 = \{1\}$

$B_2 = \{12,21\}$

$B_3 = \{123,321,231,213\}$

$B_4 = \{1234,4321,3421,3241,3214,2341,2314,2134\}$

$B_5 = \{12345,21345,23145,23415,23451,32145,32415,32451,34215,$
$34251,34521,43215,43251,43521,45321,54321\}$

5.3 ΠΟΛΥΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Έστω μιά οικογένεια m στοιχείων του συνόλου $[n]$, της οποίας k_1 στοιχεία συμπίπτουν με το 1, k_2 συμπίπτουν με το 2, k_n συμπίπτουν με το n $(k_1+k_2+\ldots+k_n=m)$, τότε κάθε παράθεση των στοιχείων της ονομάζεται **πολυμετάθεση** του $[n]$ και θα σημειώνεται με

$$\phi=\phi(1)\phi(2)\ldots\phi(m)$$

Είναι γνωστό ότι ο αριθμός των πολυμεταθέσεων του $[n]$ στις οποίες το $i\in[n]$ στοιχείο επαναλαμβάνεται k_i φορές δίδεται απο τον τύπο

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

Σε κάθε πολυμετάθεση ϕ του $[n]$ αντιστοιχεί μιά πεπερασμένη ακολουθία $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{m-1}$ με

$$\zeta_i \begin{cases} = -1, \text{όταν } \phi(i+1)<\phi(i) \\ = \ \ 0, \text{όταν } \phi(i+1)=\phi(i) \\ = \ \ 1, \text{όταν } \phi(i)<\phi(i+1) \end{cases}$$

η οποία ονομάζεται πρότυπο της και σημειώνεται με $\hat{w}$.

Ετσι στη πολυμετάθεση $\phi=221344423$ αντιστοιχεί το πρότυπο $\hat{w}=0,-1,+1,+1,0,0,-1,+1$.

Ο προσδιορισμός του συνόλου $P(\hat{w})$ των πολυμεταθέσεων του $[n]$ που αντιστοιχούν σε δεδομένο $\hat{w}$, επιτυγχάνεται με την βοήθεια της επόμενης πρότασης.

5.3.1 Πρόταση : Οι δρόμοι του T_m γιά τους οποίους

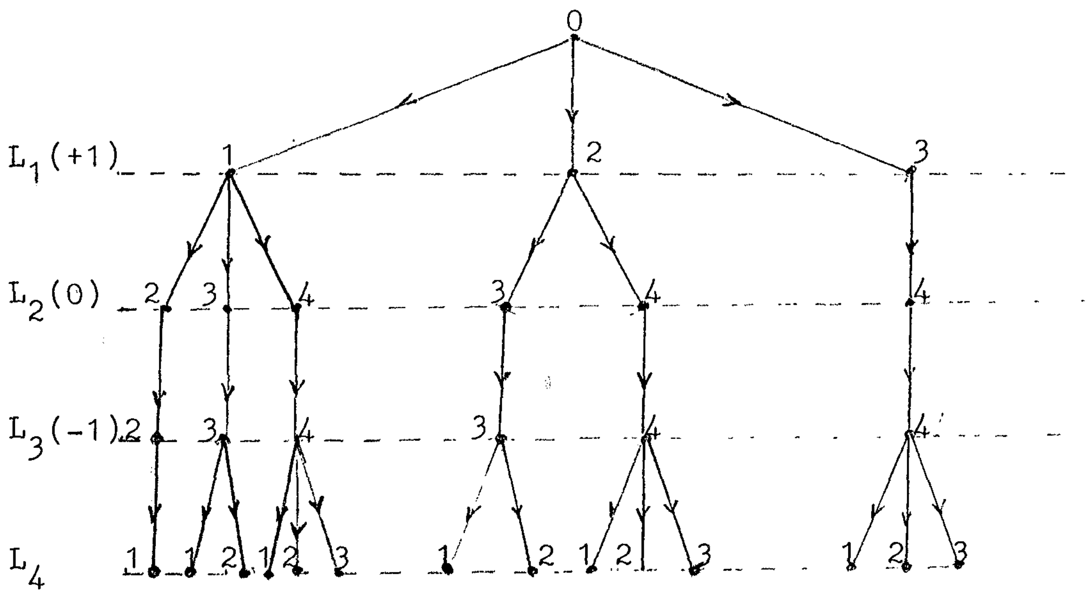
$$\text{(i)} \quad \Gamma(0) \begin{cases} =\{2,3,\ldots,n\}, & \text{όταν } \zeta_1=-1 \\ =\{1,2,\ldots,n\}, & \text{όταν } \zeta_1= 0 \\ =\{1,2,\ldots,n-1\}, & \text{όταν } \zeta_1=+1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \Gamma(j) \begin{cases} =\{1,2,\ldots,j-1\}, & \text{όταν στη στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } \zeta=-1 \\ =\{j\}, & \text{όταν στη στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } \zeta= 0 \\ =\{j+1,j+2,\ldots n\}, & \text{όταν στη στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } \zeta=+1 \end{cases}$$

δίδουν όλα τα στοιχεία του $P(\hat{w})$.

Πραγματικά απο τις ισότητες (i) προκύπτουν τα πρώτα στοιχεία των μεταθέσεων ενώ απο τις ισότητες (ii) προκύπτουν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία.

Παράδειγμα : Γιά $\hat{w}=1, 0,-1$ προκύπτει το δένδρο:



Πραγματικά είναι:

$\Gamma(0)=\{1,2,3\}$

L_1: $\Gamma(1)=\{2,3,4\}$, $\Gamma(2)=\{3,4\}$, $\Gamma(3)=\{4\}$

L_2: $\Gamma(2)=\{2\}$, $\Gamma(3)=\{3\}$, $\Gamma(4)=\{4\}$

... ...

L_3: $\Gamma(2)=\{1\}$, $\Gamma(3)=\{1,2\}$, $\Gamma(4)=\{1,2,3\}$

... ...

και τελικά

$P(\hat{w})=\{1221, 1331, 1332, 1441, 1442, 1443, 2331, 2332, 2441, 2442, 2443, 3441, 3442, 3443\}$

Αν $\{\phi(1), \phi(m)\}$ είναι το υποσύνολο του [n] που περιλαμβάνει τους αριθμούς $\phi(1)$, $\phi(m)$ και τους μεταξύ αυτών, τότε η επόμενη πρόταση επιτρέπει τον προσδιορισμό του συνόλου $P(\hat{w}, \{\phi(1), \phi(m)\})$ των πολυμεταθέσεων του $\{\phi(1), \phi(m)\}$ που αντιστοιχούν σε δεδομένο πρότυπο $\hat{w}$ και δεδομένα $\phi(1)$ και $\phi(m)$.

5.3.2 **Πρόταση:** Οι δρόμοι του T_m γιά τους οποίους:

(i) $\Gamma(0)=\{\phi(1)\}$

(ii) $\Gamma(j) \begin{cases} =\{j-1, j-2, \ldots \phi(1)\}, & \text{όταν στην στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } \zeta=-1 \\ =\{j\}, & \text{όταν στην στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } \zeta=0 \\ =\{j+1, j+2 \ldots, \phi(m)\}, & \text{όταν στην στάθμη του } j \text{ αντιστοιχεί } \zeta=+1 \end{cases}$

iii) $\Gamma(j)=\{\phi(m)\}$, όταν το j ευρίσκεται στη n-1 στάθμη

δίδουν όλα τα στοιχεία του $P(w, \{\phi(1), \phi(m)\})$

Πραγματικά απο τις ισότητες (i) και (iii) προκύπτουν τα πρώτα και τελευταία στοιχεία των μεταθέσεων, ενώ απο τις ισότητες (ii) προκύπτουν όλα τα ενδιάμεσα και διαδοχικά στοιχεία αυτών.

Παράδειγμα: Για $\hat{w}=+1, 0, -1, +1, +1$ και $\phi(1)=3$, $\phi(6)=6$ με την βοήθεια ενός προγράμματος προέκυψε.

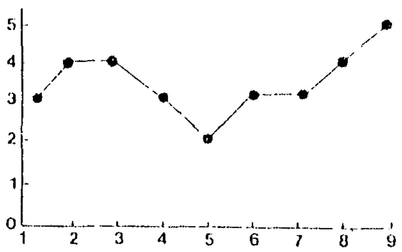
$P(\hat{w}, \{\phi(1)=3, \phi(6)=6\})=\{344346, 344356, 355346, 355356, 355456, 366346, 366356, 366456\}$

Ενώ για $\hat{w}$=-1,0,-1,+1,+1 και $\phi(1)=3$, $\phi(6)=6$ προκύπτει

$$P(\hat{w},\{\phi(1)=3,\ \phi(6)=6\}) = \emptyset$$

5.3.3 Παρατήρηση

Οι Goulden και Jackson [13], [14] προσδιόρισαν τον αριθμό των πολυμεταθέσεων που έχουν διάγραμμα με δεδομένα $\phi(1)$, $\phi(m)$ και δύο γραμμές παράλληλες προς τον άξονα των τετμημένων.



σ=344323345

Η ιδιότητα της παραλληλίας σημαίνει ότι στο πρότυπο των πολυμεταθέσεων αυτών θα υπάρχουν μόνο δύο μηδενικά. Ετσι η εύρεση των πολυμεταθέσεων αυτών που αντιστοιχούν σε δεδομένο πρότυπο , μπορεί να γίνει με την βοήθεια της μεθόδου της προτάσεως 5.3.2.

Παράδειγμα: Για $\hat{w}$=-1,+1,0,-1, 0,+1,-1,-1 και $\phi(1)=4$, $\phi(9)=2$ με την βοήθεια ενός προγράμματος προέκυψε

$$P(\hat{w},\{\phi(1)=4,\ \phi(9)=2\}) = \{423322432,\ 424422432,\ 424433432,\ 434422432,\ 434433432\}$$

Ενώ γιά $\hat{w}$=+1,0,-1,0,+1,-1,-1 και $\phi(1)=4$, $\phi(9)=2$ προκύπτει

$$P(\hat{w},\{\phi(1)=4,\ \phi(9)=2\})=\emptyset.$$

5.4. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΩΔΙΚΩΝ

Ο Jackson [15] εργαζόμενος για την επίλυση του προβλήματος " product - weichted lead Codes " προσδιόρισε τον αριθμό των πολυμεταθέσεων που έχουν m περιττό, πρώτο στοιχείο i, τελευταίο στοιχείο j και ενδιάμεσα διαδοχικά στοιχεία διαφέροντα κατά μονάδα, δηλ. τις πολυμεταθέσεις για τις οποίες ισχύουν:

$$m=2p-1, \quad \phi(1)=i \;, \quad \phi(m)=j$$

$$|\phi(i+1)-\phi(i)|=1, \quad i \,\varepsilon\, [m-1]$$

Ειδικότερα ασχολήθηκε με την περίπτωση όπου $\phi(1)=\phi(n)=1$. Η εύρεση των πολυμεταθέσεων αυτών επιτυγχάνεται με την βοήθεια της επόμενης πρότασης.

5.4.1 Πρόταση: Οι δρόμοι T_m γιά τους οποίους:

(i) $\Gamma(0)=\{1\}$, $\Gamma(1)=\{2\}$

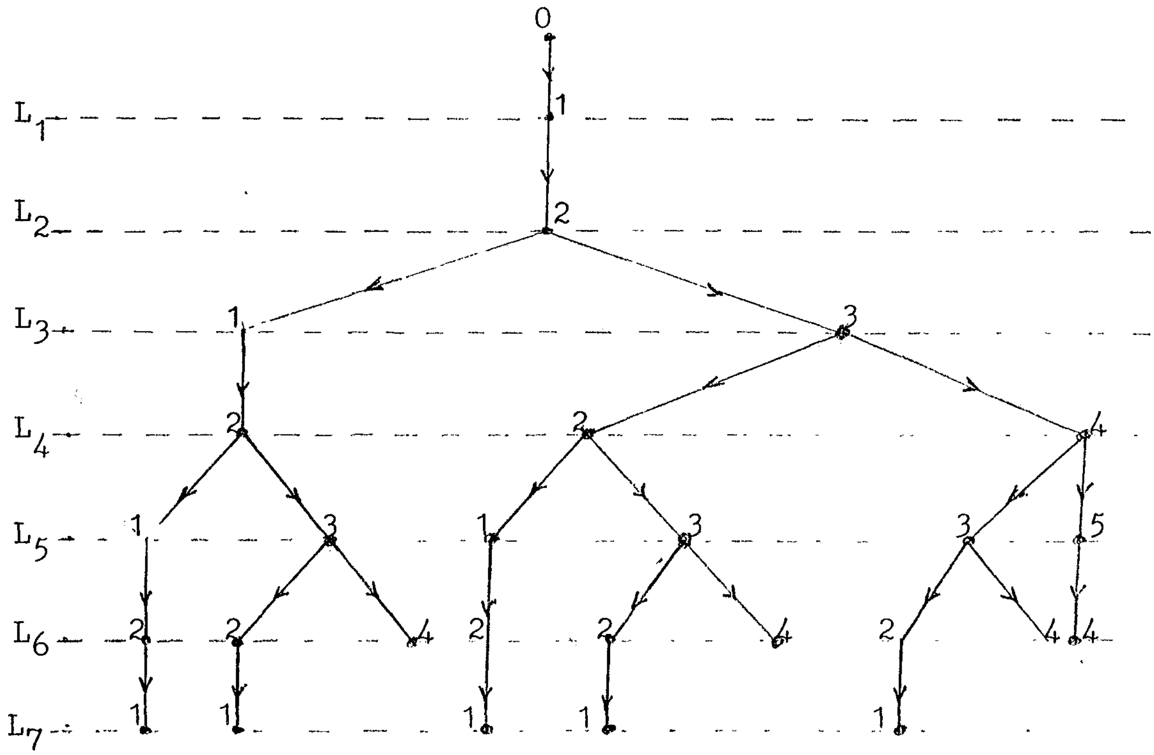
(ii) $\Gamma(j)=\{j\pm1\}$ όταν $j\pm1 \in [p]$

(iii) $\Gamma(j) \begin{cases} =1 & \text{όταν } j=2 \text{ και ευρίσκεται στην προτελευταία στάθμη} \\ =\emptyset & \text{όταν } j\neq2 \text{ και ευρίσκεται στην προτελευταία στάθμη} \end{cases}$

δίδουν όλες τις πολυμεταθέσεις του $[n]$ που έχουν $m=2p-1$, $\phi(1)=\phi(m)=1$ και $|\phi(i+1)-\phi(i)|=1$, $i \in [m-1]$.

Πραγματικά από τις ισότητες (i) προκύπτει $\phi(1)=1$ και $|\phi(2)-\phi(1)|=1$ ενώ απο τις ισότητες (iii) προκύπτει το τελευταίο στοιχείο των μεταθέσεων ότι είναι η μονάδα. Τέλος απο τις ισότητες (ii) προκύπτουν όλα τα ενδιάμεσα διαδοχικά στοιχεία των μεταθέσεων που διαφέρουν κατά μονάδα.

Παράδειγμα Γιά m=7 προκύπτει το δένδρο :



Πραγματικά είναι :

$\Gamma(0)=\{1\}$

L_1: $\Gamma(1)=\{2\}$

L_2: $\Gamma(2)=\{1,3\}$

L_3: $\Gamma(1)=\{2\}$, $\Gamma(3)=\{2,4\}$

. .

. .

. .

L_5: $\Gamma(1)=\{2\}$, $\Gamma(3)=\{2,4\}$, $\Gamma(5)=\{4\}$

L_6: $\Gamma(2)=\{1\}$, $\Gamma(4)=\emptyset$

και τελικά το σύνολο:

$\{1212121,\ 1212321,\ 1232121,\ 1232321,\ 1234321\}$

Με την προηγούμενη μέθοδο προσδιορισμού των πολυμεταθέσεων επιλύται το πρόβλημα του " product - wechted lead Codes ". Στο πρόβλημα υτό ζητείται ο αριθμός παραγωγής βαρύτητας των κωδίκων που κυριαρχούν αι αναφέρονται στην εκλογή δύο υποψηφίων.

Ο κώδικας αυτός χαρακτηρίζεται απο την απεικόνιση:

$$\phi: [\ 0,1,2,\ldots 2n] \longrightarrow [o,1,\ldots,n]$$

ε $\phi(0)=\phi(2n)=0$, $\phi(j+1)=\phi(j)\pm 1$ και $\phi(1)=\phi(2n-1)=1$

Ετσι με $n=2$, προκύπτει το σύνολο των κωδίκων $L(4)=\{01010,\ 01210\}$.

Ο επόμενος αλγόριθμος επιλύει το ίδιο πρόβλημα των πολυμεταθέσεων αι είναι συντομώτερος γιατί χρησιμοποιεί δένδρο με $\frac{n-1}{2}$ στάθμες.

.4.2. Αλγόριθμος

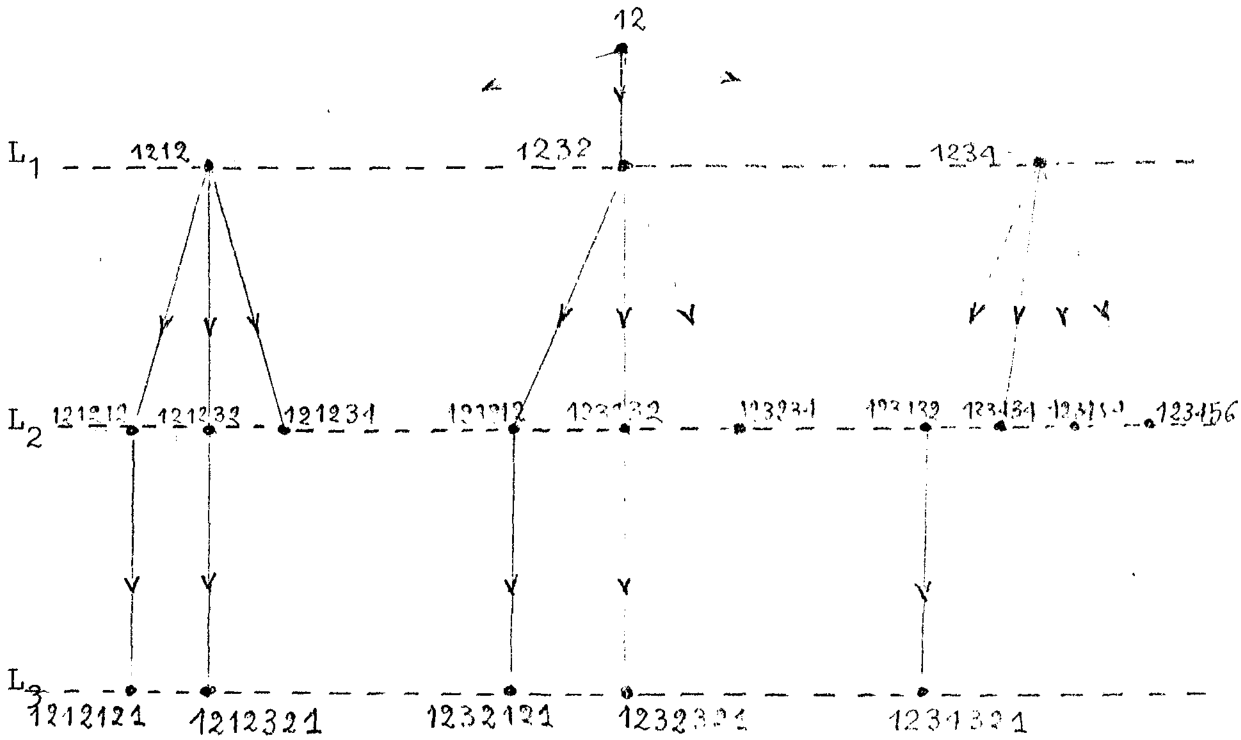
ήμα 1ο Θέσε 12 στη ρίζα του δένδρου και στη συνέχεια 1212, 1232, 1234 στις κορυφές της πρώτης στάθμης.

ήμα 2ο Αν σε κορυφή της k στάθμης υπάρχει το τμήμα $12\sigma(3)\sigma(4)\ldots\sigma(k-1)$ τότε θέσε τα $12\sigma(3)\sigma(4)\ldots\sigma(k-1)i(i+1)$ και $12\sigma(3)\sigma(4)\ldots\sigma(k-1)$ $i(i-1)$ με $|i-\sigma(k-1)|=1$ στις επόμενες κορυφές της.

μα 3ο Επανέλαβε το δεύτερο βήμα για $k=2,3,\ldots,\frac{n-3}{2}$.
Γιά $k=-\frac{1}{2}$ και $\sigma(k-1)=2$ θέσε στη τελευταία στάθμη τα $12\sigma(3)\sigma(4)\ldots\sigma(k-1)1$.

Τα φύλλα του δένδρου αυτού ορίζουν τις ζητούμενες πολυμεταθέσεις. Πραγματικά απο το πρώτο βήμα προκύπτουν τα τέσσερα πρώτα στοιχεία ς πολυμετάθεσης , ενώ απο την επαναληπτική λειτουργία του δευτέρου ι τρίτου βήματος όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της.

Παράδειγμα Γιά n=7 προκύπτει το δένδρο:



και απο αυτό το σύνολο {1212121,1212321,1232121, 1232321,1234321}

5.5 ΠΙΣΤΟΛΙΑ

Οι Dumond και Viennot [11] με την βοήθεια της απεικόνισης $\pi:[m]\to[n]$ που ορίζουν οι σχέσεις:

$$\pi(1)=1,\ \pi(2i)=\pi(2i-1),\ \pi(2i+1)=\pi(2i)+1$$

ονόμασαν **πιστόλια** τις πολυμεταθέσεις ϕ για τις οποίες ισχύουν:

$$\phi(i)\leq\pi(i)$$

Ετσι η πολυμετάθεση $\phi=11213332$ είναι ένα πιστόλι μήκους οκτώ γιατί

$\pi(1)=1$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=2$, $\pi(4)=2$, $\pi(5)=3$, $\pi(6)=3$, $\pi(7)=4$, $\pi(8)=4$.

Ενα πιστόλι ϕ ονομάζεται **εναλλακτικό** όταν

$\phi(i)\geq \pi(i+1)$ και i περιττός

$\phi(i)\leq \pi(i+1)$ και i άρτιος

Ετσι το προηγούμενο πιστόλι είναι εναλλακτικό.

Η εύρεση των εναλλακτικών πιστολιών μήκους $2n$ επιτυγχάνεται με την βοήθεια της επόμενης πρότασης, που χρησιμοποιεί τα εξής σύνολα:

$$T\ (j)=\{1,2,\ldots j\}$$

$$S\ (j)=\{j,j+1,\ldots,n\}$$

$$R\ (k)=\{\frac{k}{2}+2,\ \frac{k}{2}+3,\ldots,n\}$$

5.5.1 Πρόταση : Οι δρόμοι του T_{2n} γιά τους οποίους:

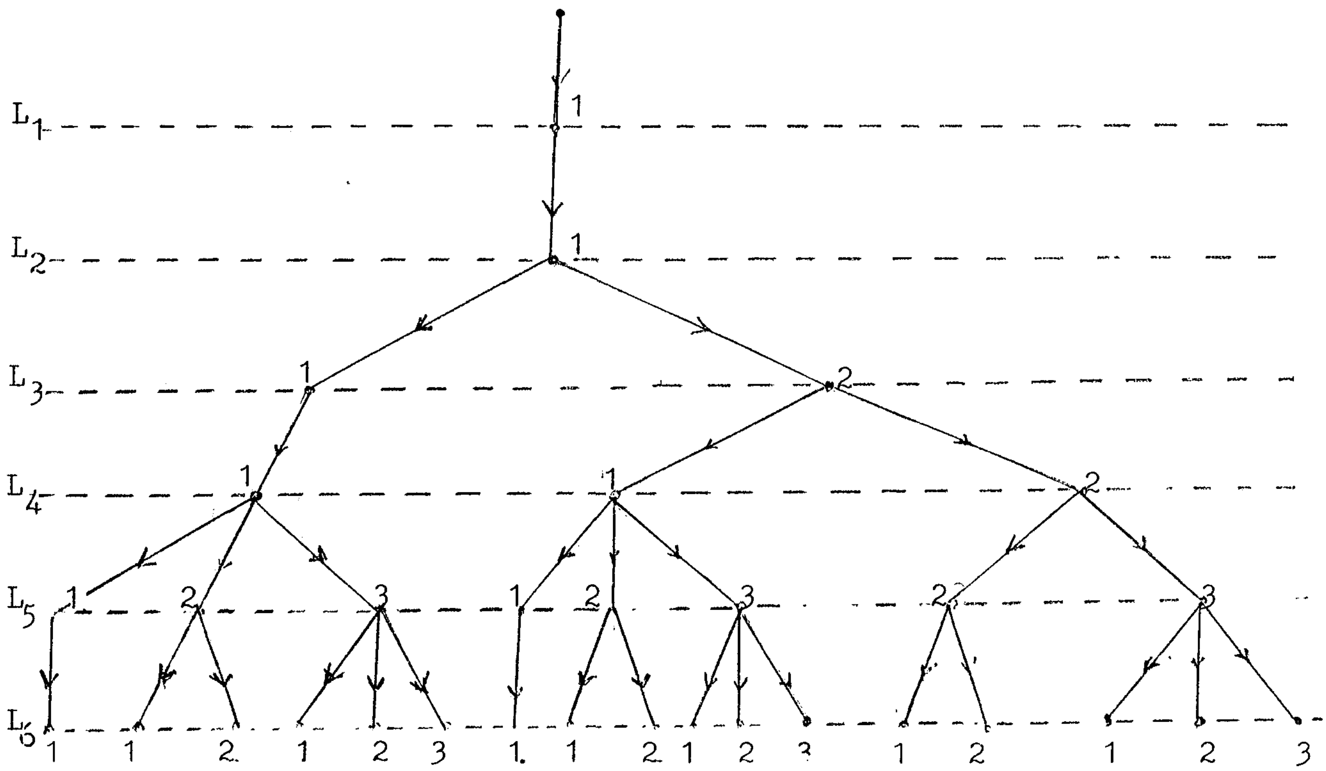
(i) $\Gamma(0)=\Gamma(1)=1$

(ii) $\Gamma(j)\begin{cases} =S(j)-R(k), & \text{όταν } k \text{ άρτιος} \\ =T(j), & \text{όταν } k \text{ περιττός} \end{cases}$

δίδουν όλα τα εναλλακτικά πιστόλια μήκους $2n$.

Πραγματικά απο τις ισότητες(i) προκύπτουν τα δύο πρώτα στοιχεία των εναλλακτικών πιστολιών μεταθέσεων, ενώ απο τις ισότητες (ii) προκύπτουν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία αυτών.

Παράδειγμα : Γιά n =6 προκύπτει το δένδρο:



Πραγματικά είναι:

L_1 : $\Gamma(1)= T(1)=\{ 1 \}$

L_2 : $\Gamma(1)=S(1)-R(2)=\{ 1,2,3 \} - \{3\} =\{ 1,2 \}$

L_3 : $\Gamma(1)=T(1)= 1$, $\Gamma(2)=T(2)=\{ 1,2 \}$

L_4 : $\Gamma(1)=S(1)-R(4)=\{ 1,2,3 \}-\emptyset =\{ 1,2,3 \}$

$\Gamma(2)=S(2)-R(4)=\{ 2,3\} -\emptyset =\{ 2,3 \}$

L_5 : $\Gamma(1)=T(1)=1$, $\Gamma(2)=T(2)=\{ 1,2\}$, . .

⋮ ⋮

και τελικά το σύνολο

{ 111111, 111121, 111122, 111131, 111132, 111133, 112111, 112121, 112122, 112131, 112132, 112122, 112221, 112222, 112231, 112232, 112233}

5.5.2 Παρατήρηση

Σε κάθε εναλλακτικό πιστόλι ϕ μήκους 2n αντιστοιχεί μιά πολυμετάθεση ξ μήκους 2n+1 με

$$\xi(1)=1$$

$$\xi(2i)=i+1-\phi(2i-1)$$

$$\xi(2i+1)=i+2-\phi(2i)$$

Έτσι στο εναλλακτικό πιστόλι ϕ=11113342 αντιστοιχεί η πολυμετάθεση ξ=112231214 .

Στη πολυμετάθεση ξ αντιστοιχεί μιά άλλη πολυμετάθεση ξ' μήκους 2n+1 με :

$$\xi'(i)=2(\xi(i)-1)$$

στα στοιχεία της οποίας δεν υπάρχουν περιττοί αριθμοί.

Έτσι στη προηγούμενη πολυμετάθεση ξ αντιστοιχεί η ξ'=002240206, απο την οποία μπορεί να προκύψει μιά εναλλακτική μετάθεση σ μήκους 2n+1 με την βοήθεια διαδικασίας όπου το $\sigma(i)$ ισούται με το $\xi'(i)+1$ στοιχείο του διατεταγμένου συνόλου που προκύπτει απο το σύνολο [2n+1] όταν αφαιρεθούν απο αυτό τα στοιχεία $\sigma(i+1)$, $\sigma(i+2)$,...,$\sigma(2n+1)$

Έτσι στην προηγούμενη πολυμετάθεση ξ'=002220206 αντιστοιχεί:

$\sigma(9)=7$	αφού $\xi'(9)+1=6+1=7$,	{1,2,3,4,5,6,7,8,9 }
$\sigma(8)=1$	αφού $\xi'(8)+1=0+1=1$,	{1,2,3,4,5,6,8,9 }
$\sigma(7)=4$	αφού $\xi'(7)+1=2+1=3$,	{2,3,4,5,6,8,9 }
$\sigma(6)=2$	αφού $\xi'(6)+1=0+1=1$,	{ 2,3,5,6,8,9 }

$\sigma(5)=9$	αφού $\xi'(5)+1=4+1=5$,	$\{3,5,6,8,9\}$
$\sigma(4)=6$	αφού $\xi'(4)+1=2+1=3$,	$\{3,5,6,8\}$
$\sigma(3)=8$	αφού $\xi'(3)+1=2+1=3$,	$\{3,5,8\}$
$\sigma(2)=3$	αφού $\xi'(2)+1=0+1=1$,	$\{3,5\}$
$\sigma(1)=5$	αφού $\xi'(1)+1=0+1=1$,	$\{5\}$

που δίδει την εναλλακτική μετάθεση $\sigma=538692417$

Γενικά ισχύει η πρόταση:

5.5.3 Πρόταση : Απο κάθε εναλλακτικό πιστόλι μήκους 2n προκύπτει μιά εναλλακτική μετάθεση μήκους 2n+1

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] ABRAMSON, M : A note on permutations with fixed pattern
J.C.T, A19, (1975) 233-239

[2] ANDRE, D : Sur les permutations alternees
Journ. de Math. tome VII (1881) 167-184.

[3] ANDREWS, C -: Congruences for g-secant numbers.
FOATA , D Europ J. Combin. 1 (1980) 283-287

[4] BLACK, D : On the rationale of group decision making
Journal of Political Economy 56 (1948) 23-34

[5] BRUALDI, R : Indroductory combinatorics.North-Holand; 1981

[6] BRUIJN,N.C. : Permutations with given ups and downs,
Niew Arch, 18(3) (1970) 61-65

[7] CARLITZ, L : Permutations with prescribeal pattern,
Math. Nachr, (1973), 31-53

[8] CARLITZ, L : A not on g-Eulerian numbers.
J.C.T. A25, (1978) 90-94

[9] CHEEMA, M - : Combinatorics.Amer.Math.Society,
MOTZKIN, T (1971), 39-69

[10] COMTET, L : Advanced Cambinatorics. Reidel,(1974)

[11] DUMONT, D- : A combinatorial interpretation of the seidel
VIENNOT, G generation of Genocchi numbres,
Annals of Discrete Mathem.6(1980) 77-87

[12] FOULKES, H : Enumeration of permutations with prescribed
up-down and inversion sequences,
Discr. Math.15(1976) 235-252

[13] GOULDEN, I - JACKSON, D : Path generating functions and continued Fractions, J.C.T. A41, (1986) 1-10

[14] GOULDEN, I - JACKSON, D : Distributions, continued fractions and the ehrenfest urn model, J.C.T, A41,(1986) 21-31

[15] JACKSON, D : Some results on product - weighted lead codes J.C.T. A25 (1978), 181-187

[16] KAUFMANN, A : Introduction à la combinatorique en vue des applications , Dunod , 1968

[17] KNUTH, D, : The art of computer programming , Vol 1 Addison - Wesley, 1973

[18] KREWERAS, M : Les décisions collectives Math et Sciences Humaines 2 (1963) 25-35

[19] KREWERAS, G : Sur une classe de problèmes de denombrement liés au triellis des partitions des entiers, Cahiers du Bur. Univ. de Rech. 6 (1965) 5-10

[20] LUCAS , E : Théorie des nombres. Paris, 1891

[21] MAC-MAHON,P,A: Combinatory Analysis.Vols 1-2,Cambridge,1916

[22] NIVEN , I : A combinatorial problem of finite sequences, Nieuw.Arch.Wisk.16 (1968) 116-123

[23] PANAYOTOPOULOS,A : Some considerations on permutations trees, Discret.Math.47(1983) 275-281

[24] PANAYOTOPOULOS,A : Generating stable permutations, Discrete Math.62 (1986) 213-221

[25] PANAYOTOPOULOS, A : Permutation with two patterns, Journal of Combinatorics, Information System Sciences, 11, (2-4) (1986) 145-152

[26] RIORDAN , J : An introduction to combinatorial analysis, Princeton University Press, 1958

[27] ROSEN , J : The number of product - weighted lead codes for ballots and its relation to the ursell function of the Linear Ising Model, J.C.T. A20 (1976) 377-384

[28] ROTHE, H : Summlung combinatorisch - analytischer abhundlungen 2, Leipzg 1800, 263-305

[29] STANLEY, R : Binomial posets mobius inversion and permutation enumeration J.C.T. A 20(3) (1976) 336-356

[30] VIENNOT, G : Permutations ayant une forme donnée, Discrete. Math.26(1979) 279-284

[31] VIENNOT , G : Equidistribution des permutions ayant une forme donnée selon les avances et coavances, J,C.T. (A) 31 (1981) 43-55

[32] VIENNOT, G - FRANCON , J : Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, Discrete Math 28(1979) 21-35